UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA

"SIMETRIAS CONTÍNUAS E CORRELAÇÕES PARA MODELOS BI-
DIMENSIONAIS EM MECÂNICA ESTATÍSTICA"

CEZAR AUGUSTO BONATO

SBI-IFLSP

305M810T0889

Tese apresentada ao Ins-
tituto de Física para a
obtenção do Título de
Doutor em Ciências.

SÃO PAULO

1983

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pela Biblioteca do
Instituto de Física da Universidade de São Paulo.

Bonato, Cesar Augusto.

Simetrias contínuas e correlações para mo-
delos Bidimensionais em mecânica estatística
São Paulo, 1983.

Tese (Doutoramento) - Universidade de São
Paulo. Instituto de Física. Departamento de
Física Matemática.

Área de Concentração: Física de Particu-
las Elementares.

Orientador: José Fernando Perez

Unitermos: 1. Ausência de quebra espontâ-
nea de simetrias contínuas. 2. Teorema de Mer-
mi-Wagner, decaimento de correlações. 3. Po-
sitividade por reflexão, gas de Bose.

USP/IF-B26/83

Desejo expressar meus agradecimentos:

- ao Prof. J. Fernando Perez pelo constante apoio e estímulo, assim como pelas valiosas discussões, fundamentais para a realização deste trabalho;
- aos colegas do Departamento de Física Matemática do IFUSP, pelo companheirismo e frutífera troca de idéias;
- ao Pedro e ao Miguel pela ajuda na revisão dos originais;
- ao Ernesto, pelas figuras.

Este trabalho teve o apoio financeiro da UFPb - CAPES - PICD

Ao Sr. Américo e D. Maria, meus pais;

À Chris, minha esposa e companheira ,
Ernesto, Pedro e Miguel, meus filhos.

ABSTRACT

We give optimal conditions concerning the range of interactions for the absence of spontaneous breakdown of continuous symmetries for one and two dimensional quantum and classical lattice and continuum systems. For a class of models verifying infrared bounds our conditions are necessary and sufficient.

Using the same techniques we obtain "a priori" bounds on clustering for systems with continuous symmetry. Improved bounds are obtained for certain specific quantum models (quantum x-y, quantum rotator, lattice gauge theories).

We also analyze the property of reflection positivity for a free Bose gas on a lattice.

RESUMO

Analisa-se o fenômeno da ausência de quebra espontânea de simetrias contínuas para modelos clássicos e quânticos numa rede, assim como em sistemas no contínuo, em uma e duas dimensões. São formuladas condições ótimas quanto ao alcance das interações para a ausência de quebra espontânea de simetrias contínuas. Essas condições são necessárias e suficientes para uma classe de modelos que satisfazem estimativas infra vermelhas ("infrared bounds").

São também obtidas estimativas "a priori" para o decaimento de funções de correlação de modelos com simetria contínua, dependentes apenas do alcance da interação.

Para modelos específicos ($x - y$ quântico, rotor quântico, teorias de "gauge" na rede) são obtidas estimativas melhoradas, para o decaimento de funções de correlação, em relação às mencionadas acima.

Finalmente é analisada a propriedade de positividade por reflexão para um gás de Bose livre numa rede.

INDICE

1 - Introdução e resultados	2
2 - Ausência de quebra espontânea de simetria contínua em sistemas uni e bidimensionais	8
3 - Decaimento de correlações	32
4 - Sistemas no contínuo	46
5 - Decaimento de correlações para sistemas quânticos .	52
6 - Positividade por reflexão para um gás de Bose livre	76
Apêndice A - Desigualdade de Bogoliubov	94
Apêndice B - Cálculo da função geratriz	100
Apêndice C -	106
Referências	114

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO E RESULTADOS

O problema da ocorrência ou ausência de quebra espontânea de simetrias, em Mecânica Estatística e Teoria Quântica de Campos, para sistemas que possuem uma simetria contínua e global, tem ocupado o interesse de vários pesquisadores nas últimas décadas.

Argumentos heurísticos, baseados em considerações microscópicas ou ao nível termodinâmico, já há algum tempo indicavam que sistemas a temperatura diferente de zero, com interações de curto alcance, em uma e duas dimensões, não poderiam exibir ordenamento (correlação de longo alcance) que implicassem na quebra espontânea de simetria contínua (Q.E.S.C.) [1,2].

Na década de 60 surgiram vários trabalhos provando a ausência de ordem associada a uma Q.E.S.C. em diversos modelos [3-7]. Estes trabalhos utilizavam uma desigualdade, devida a N.N. Bogolubov [8,9], cujo uso para esta finalidade foi indicada pela primeira vez por P.C. Hohenberg [3], em seu estudo sobre o gás de Bose. Os trabalhos pioneiros em [4,5] fizeram com que os nomes de Mermin e Wagner ficassem intimamente ligados a esse tipo de fenômeno [20].

Mais recentemente, uma quantidade respeitável de trabalhos tem surgido neste assunto (por exemplo: [10-21]). No contexto de Teoria Quântica de Campos Relativísticos resulta - dos deste tipo estão contidos implicitamente em [22] e em [23].

Tais trabalhos representam desenvolvimentos em várias direções: formulações matemáticas mais gerais e abstratas que estendem os resultados para classes maiores de sistemas e simetrias [10-17, 20] ; demonstrações de ausência de Q.E.S.C. ao invés de somente ausência de ordenamento (magnetização espontânea) [10, 11, 12, 15, 16, 17, 20] ; extensões quanto ao alcance da interação [16, 17, 18, 20] ; generalizações para sistemas sem invariança translacional [10, 15, 20] ; utilização de outros métodos (que não a desigualdade de Bogoliubov) [16, 17, 18] com o uso de argumentos mais próximos dos fundamentos da Termodinâmica.

No Capítulo 2 do presente trabalho obtemos os melhores resultados gerais possíveis, quanto ao alcance das interações, para a ausência de Q.E.S.C. em uma e duas dimensões. De acordo com o Teorema 2.1, do Capítulo 2, a condição suficiente para a ausência de Q.E.S.C. é

$$\int_{|\gamma| < \epsilon} \frac{1}{E(\gamma)} d\gamma = \infty \quad (1.1)$$

onde $E(p)$ é uma função conveniente, associada univocamente a cada modelo considerado e que depende do alcance da interação.

Para uma classe de modelos que satisfazem estimativas infra-vermelhas ("infrared bounds") e regras de soma, a condição

$$\int \frac{1}{E(\gamma)} d\gamma < \infty$$

implica na Q.E.S.C., como está provado, por exemplo, em [31].

Portanto, para tais sistemas, nossa condição (1.1) é necessária e suficiente.

Nosso resultado principal (Teorema 2.1), contido no Capítulo 2, demonstra a invariança dos estados de equilíbrio por transformações de simetria, o que é mais geral do que a simples inexistência de magnetização espontânea (ou correlação de longo alcance) que envolvesse uma quebra de simetria, e aplica-se igualmente para sistemas clássicos ou quânticos. Por outro lado, nosso método não exige a invariança translacional do estado nem da Hamiltoniana do sistema, prestando-se, por isso, a aplicações, como por exemplo, em sistemas aleatórios (vidros de "spin").

No Capítulo 3 mostramos que, usando o mesmo tipo de técnica do Capítulo 2, é possível obter-se estimativas para a taxa de decaimento de certas funções de correlação, relacionadas com os geradores da transformação de simetria. Essas estimativas, contidas no Teorema 3.2, são do tipo:

$$|\langle A(0) B(x) \rangle|^2 \leq \text{cte.} \left[\int \frac{1 - \cos p \cdot x}{E(p)} d^v p \right]^{-1} \quad (1.2)$$

para A (ou B) da forma $A = [J, C]$, para algum C local e onde J é um gerador infinitesimal do grupo de simetria. A estimativa (1.2) representa uma simplificação e uma melhoria de resultados mais específicos obtidos anteriormente por Jasnow e Fisher [35,36].

O Teorema 3.2 fornece, por assim dizer, estimativas "a priori", pois a taxa de decaimento das funções de correlação é independente do modelo particular considerado e da tempe

ratura. É claro que para modelos específicos, melhores estimativas são possíveis [38].

No Capítulo 4 comentamos de maneira sucinta, sem tentar entrar em maiores detalhes matemáticos, como os resultados dos Capítulos 2 e 3, que foram formulados numa rede, podem ser estendidos para sistemas definidos no contínuo $\mathbb{R}^n$.

Para o decaimento de funções de correlação, no Capítulo 5 fazemos uma extensão dos métodos de Spencer e Mc Bryan [38] para alguns modelos quânticos, obtendo taxas de decaimento melhoradas, em relação às obtidas no Capítulo 3. Tais resultados foram antevistos na literatura [16], porém não havia sido fornecida uma demonstração. São tratados, no Capítulo 5, os modelos X-Y (ou Heisenberg) quânticos e um tipo de rotor quântico.

Também no Capítulo 5, o mesmo tipo de método nos permite obter o confinamento logaritmico permanente de "quarks" estáticos para a Teoria Hamiltoniana de "Gauge" puro U(1) na rede, em 3 dimensões (2 espaciais + 1 temporal), inclusive para tempo contínuo (espaçamento da rede na direção temporal igual a zero). O sistema é tratado à temperatura T e os resultados passam para o limite $T \rightarrow 0$.

Para $T = 0$ este mesmo resultado (com tempo discreto) foi anteriormente obtido por Glimm e Jaffe [55] e existe o resultado, mais forte, de G8pfert e Mack [56] (com tempo discreto), que fornece confinamento permanente linear (ao invés de logaritmico). Nosso procedimento, no entanto, parece ser mais simples do que o de [55] (e certamente do que o de [56]) e tem a vantagem de, ao que tudo indica, poder ser estendido para teorias de "gauge" não abelianas que tenham U(1) como subgrupo de invariança (por exemplo SU(n) (trabalho em preparação). É pre

ciso notar que não existe nenhum resultado rigoroso para o confinamento permanente em teorias $SU(2)$ em $2+1$ dimensões.

Finalmente, no Capítulo 6, incluímos um estudo da propriedade de positividade por reflexão para um gás de Bose livre definido na rede $\mathbb{Z}^{\nu}$ (os resultados são também válidos para o contínuo $\mathbb{R}^{\nu}$).

A positividade por reflexão (P.R.), que surgiu primeiramente no contexto de Teoria Quântica de Campos, na região Euclídeana, com o nome de positividade de Osterwalder-Schrader [49], tem desempenhado um papel destacado como base de técnicas para se demonstrar transições de fase em Mecânica Estatística (vide, por exemplo [30, 31, 33]). Assim, ela serviu como ingrediente importante na formulação rigorosa do argumento de Peierls (via "chessboard estimates") ou na obtenção de estimativas infra-vermelhas ("infrared bounds"). Este último método propiciou a primeira prova rigorosa de transição de fase para sistemas com simetria contínua [30].

As demonstrações, disponíveis na literatura, da P.R., para modelos específicos, empregam um esquema perturbativo e aparentemente exigem um compromisso entre comutar ou não, ser real ou não, e ser ferromagnético ou não, para as grandezas e a interação que aparecem nos modelos.

Um modelo importante, o modelo de Heisenberg quântico ferromagnético, é um exemplo onde este compromisso não se realiza e as tentativas de estabelecer-se ou não P.R. para ele tem frustrado os esforços de vários pesquisadores (em particular de [30, 31, 33]). Por este motivo não foi possível, até hoje, empregar os métodos citados acima para se obter uma demonstração da existência de uma transição de fase para este modelo.

Um outro modelo importante, para o qual não se aplicam as técnicas perturbativas acima mencionadas, e pelas mesmas razões do modelo de Heisenberg, é o gás de Bose livre. Neste modelo existe uma transição de fase (em dimensões $\nu \geq 3$) e pode-se calcular explicitamente funções de correlação.

É interessante notar que o gás de Bose livre constitui-se no protótipo de modelo exibindo transição de fase ($\nu \geq 3$) devido a um processo de condensação de "partículas" no estado de momento $p = 0$, que é exatamente o mecanismo geral que rege as transições de fase em modelos que obedecem regras de soma e estimativas infravermelhas [57], como é explícito nos métodos de [30, 31, 33]. Além disso o gás de Bose (com interação) está relacionado com o modelo de Heisenberg ferromagnético [58, 59, 60].

Nosso trabalho, no Capítulo 6, consiste em se investigar diretamente, através de cálculo explícito, a existência ou não de P.R. para o gás de Bose livre definido numa rede.

Obtivemos uma prova de P.R. apenas para uma subálgebra dos operadores de campo $\phi(x)$ e $\pi(x)$, o que, infelizmente, parece não ser suficiente para o estudo de transições de fase para o gás de Bose com interação. Na realidade pudemos mostrar também que este modelo não tem P.R. (vide comentários ao final do Capítulo 6) para a álgebra completa dos $\phi(x)$ e $\pi(x)$, o que pode afastar, de princípio, o uso de técnicas como as contidas em [33].

CAPÍTULO 2

AUSÊNCIA DE QUEBRA ESPONTÂNEA DE SIMETRIAS CONTÍNUAS EM SISTEMAS UNI E BIDIMENSIONAIS.

2.1 - Argumentos heurísticos

Nesta seção procuraremos mostrar, de um ponto de vista completamente informal, razões físicas que impedem, em sistemas de baixa dimensionalidade, o aparecimento de um ordenamento que implique numa quebra (espontânea) de uma simetria contínua possuída pela interação entre os componentes do sistema. Procuraremos também mostrar como a desigualdade de Bogoliubov surge naturalmente neste contexto como uma ferramenta para a formulação de argumentos rigorosos (Teoremas), excluindo a quebra de simetrias contínuas em uma e duas dimensões.

Para colocar em marcha o argumento heurístico vamos nos ater a sistemas de "spins" numa rede [2], se bem que ele possa ser formulado para outras classes de sistemas [24].

Consideremos então um sistema de "spins" σ_i , que são vetores de comprimento unitário, colocados em cada ponto i da rede quadrada $\mathbb{Z}^2$. A interação entre eles é dada pela Hamiltoniana:

$$H = - \sum_{|i-j|=1} \sigma_i \cdot \sigma_j \quad (2.1)$$

onde $\sigma_i \cdot \sigma_j$ significa o produto escalar do vetor no ponto i pelo vetor no ponto j da rede.

A Hamiltoniana (2.1) é invariante pela rotação simultânea de todos os "spins" de um mesmo ângulo, o que implica que o valor médio, no estado de Gibbs, de cada "spin" é nulo.

Se, agora, de alguma forma, impusermos a mesma orientação para todos os "spins" (por ex. através de um campo externo forte) então o valor médio de cada "spin" não será mais nulo e não teremos a simetria de rotação. Se, ao "desligarmos" o agente causador do alinhamento, o valor médio dos "spins" continuar sendo não nulo, diremos que houve uma quebra espontânea da simetria de rotação.

É claro que flutuações térmicas tendem a desorganizar o sistema, destruindo o alinhamento, desde que isto não custe muita energia, pois a probabilidade do surgimento de uma flutuação (configuração) depende da energia da configuração.

De fato, para sistemas com simetria contínua em uma e duas dimensões, o surgimento de uma grande "ilha" de "spins" com alinhamento na direção oposta pode ser feito com um custo energético baixo (se o alcance da interação não for muito grande), resultando que o valor médio dos "spins" seja nulo, evitando a quebra espontânea da simetria contínua.

Para ver isto, imaginemos uma grande "ilha" de dimensões lineares L , onde os "spins" estão alinhados na direção oposta. Em volta desta "ilha" existe uma região de transição de espessura L onde os "spins" vão girando gradualmente, cada um de um ângulo π/L , até estarem na posição correta na fronteira desta região. O custo energético por "spin" para produzir tal configuração, em relação a situação de alinhamento correto em toda a rede, será da ordem de $(\pi/L)^2$. Na região de transição existem da ordem de L^{ν} "spins" (ν é a dimensão da re-

de) e portanto o custo total energético será da ordem de $L^{\nu-2}$, que é desprezível para $\nu=1$, independente do tamanho da "ilha" para $\nu=2$ e crescente para $\nu \geq 3$.

Se a simetria fosse discreta (por ex. se os "spins" só pudessem apontar "para cima" ou "para baixo") este custo energético seria independente de L em $\nu=1$ e proporcional a L em $\nu=2$, o que permite a quebra de simetria em $\nu=2$ (mas não em $\nu=1$). Na verdade este é o conteúdo do chamado argumento de Peierls, o qual permite mostrar a quebra da simetria discreta no modelo de Ising em $\nu=2$ [25].

Para tornar um pouco mais precisas as considerações acima, vamos agora nos fixar no modelo de Heisenberg (quântico), ou seja, os "spins" σ_i em (2.1) são operadores de "spin"

$$\sigma_i = (\sigma_i^x, \sigma_i^y, \sigma_i^z).$$

A transformação unitária

$$U = e^{iJ(\varphi)}$$

onde

$$J(\varphi) = \sum_i \varphi_i \sigma_i^z$$

produz uma rotação de um ângulo φ_i , em torno do eixo z , em cada "spin" σ_i . O custo em energia numa tal transformação é:

$$\delta E = \langle e^{iJ(\varphi)} H e^{-iJ(\varphi)} \rangle - \langle H \rangle$$

onde o valor esperado $\langle A \rangle$ é dado por:

$$\langle A \rangle = \frac{\text{Tr } A e^{\beta H}}{\text{Tr } e^{\beta H}}$$

com $\beta = \frac{1}{kT}$, k constante de Boltzmann e T temperatura absoluta.

Se φ_i for constante, devido a simetria da Hamiltoniana temos $[H, J(\varphi = \text{cte.})] = 0$ e então $\delta E = 0$. Note que se φ_i não for constante, H não é invariante pela transformação $e^{iJ(\varphi)}$.

Se, por outro lado, φ_i variar lentamente, como o exposto mais acima, podemos estimar δE expandindo a transformação U em série de potências e considerando os primeiros termos da expansão:

$$\delta E = i \langle [J(\varphi), H] \rangle + \frac{1}{2} \langle [[J(\varphi), H], J(\varphi)] \rangle + \dots$$

O termo linear em $J(\varphi)$ é nulo, devido à invariância do traço por uma transformação unitária, e então obtemos:

$$\delta E \approx \frac{1}{2} \langle [[J(\varphi), H], J(\varphi)] \rangle$$

Então se $J(\varphi)$ for tal que produza uma modificação macroscópica na configuração dos "spins" mas, por outro lado, seu duplo comutador com H for pequeno, teremos uma tendência a uma desorganização do sistema.

Na realidade escolhas convenientes de $J(\varphi)$, que tenham as propriedades acima, constituem a base de todas as demonstrações de ausência de quebra de simetria que utilizem a desigualdade de Bogoliubov, que em sua forma mais conhecida, pode ser assim formulada: dados dois operadores A e C quais - quer, então

$$|\langle [A, C] \rangle|^2 \leq \frac{A}{2} \langle A A^* + A^* A \rangle \langle [[C^*, H], C] \rangle \quad (2.2)$$

No Apêndice A damos uma dedução de (2.2), assim como de outras versões.

Nas seções seguintes desenvolveremos demonstrações excluindo a quebra espontânea de simetria contínua para uma classe extensa de sistemas em 1 e 2 dimensões, utilizando a desigualdade de Bogoliubov, formulada de uma maneira mais conveniente.

2.2 - Ausência de quebra de simetria para sistemas numa rede.

Nesta seção enunciaremos e demonstraremos resultados gerais sobre a invariança de estados de equilíbrio por transformações de simetria, deixando para as próximas seções a discussão sobre classes de sistemas que se enquadram nessas proposições gerais.

Utilizaremos a formulação algébrica da Mecânica Estatística, que é bastante abrangente para não precisarmos nos fixar em sistemas particulares, e trabalharemos diretamente numa situação de volume infinito. Para simplificar o desenvolvimento vamos supor que o espaço de configuração do sistema é a rede $\mathbb{Z}^v$, com $v = 1$ ou 2 .

Como é usual (vide por exemplo [26, 27]) a cada subconjunto $\Lambda \subset \mathbb{Z}^v$ está associada uma álgebra C^* de observáveis α_Λ . Nosso sistema é descrito pela álgebra C^*

$$\alpha = \overline{\bigcup_{\Lambda \subset \mathbb{Z}^v} \alpha_\Lambda}$$

onde a união é tomada sobre todos os conjuntos limitados de $\mathbb{Z}^v$ e a barra indica fechamento na norma, sendo ainda que

$$[A, B] = 0 \quad \text{se} \quad A \in \alpha_{\Lambda_1}, \quad B \in \alpha_{\Lambda_2} \quad \text{com} \quad \Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset.$$

A simetria contínua é dada por um grupo de automorfismos $\{\sigma_s, s \in \mathbb{R}\}$ de $\mathcal{O}$, tal que $\sigma_s \mathcal{O}_\Lambda = \mathcal{O}_\Lambda$ e assumimos que o grupo de simetria é localmente implementado, isto é, dado $A \in \mathcal{O}_\Lambda$ existe $J_\Lambda \in \mathcal{O}_\Lambda$ tal que

$$\sigma_s A = e^{isJ_\Lambda} A e^{-isJ_\Lambda}$$

J_Λ são os geradores locais do grupo.

Um estado na álgebra $\mathcal{O}$ é um funcional linear contínuo e positivo $\omega(\cdot)$, com $\omega(\mathbb{1}) = 1$, onde $\mathbb{1}$ é a identidade da álgebra.

O estado $\omega(\cdot)$ é invariante sob o grupo de simetria se $\omega(\sigma_s A) = \omega(A)$, $\forall A \in \mathcal{O}$, $\forall s \in \mathbb{R}$. Pela propriedade de grupo isto é equivalente a:

$$\left. \frac{d}{ds} \omega(\sigma_s A) \right|_{s=0} = 0 \quad \forall A \in \mathcal{O}$$

Em termos de geradores locais

$$\left. \frac{d}{ds} \omega(\sigma_s A) \right|_{s=0} = i \omega([J_\Lambda, A]), \quad (2.3)$$

para todo $A \in \mathcal{O}_\Lambda$, e a invariança do estado pode ser escrita como:

$$\omega([J_\Lambda, A]) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{O}_\Lambda \quad (2.4)$$

Para cada $x \in \mathbb{Z}^v$ seja $\sigma_3(x)$ a ação do grupo de simetria no ponto x , ou seja $\sigma_3(x) = \sigma_3 \circ \alpha_{\{x\}}$, de tal forma que

$$\sigma_3 = \bigotimes_{x \in \mathbb{Z}^v} \sigma_3(x)$$

Dada uma função real $f: \mathbb{Z}^v \rightarrow \mathbb{R}$ definimos

$$\sigma_3(f) = \bigotimes_{x \in \mathbb{Z}^v} \sigma_{3f(x)}(x) \quad (2.5)$$

$\sigma_3(f)$ define um automorfismo na álgebra $\mathcal{A}$, que, em termos dos geradores locais de σ_3 é dado por:

$$\sigma_3(f) A = e^{isJ(f)} A e^{-isJ(f)}, \quad \forall A \in \mathcal{A}_\Lambda, \quad \forall \Lambda \subset \mathbb{Z}^v \quad (2.6)$$

com

$$J(f) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^v} f(x) J(x) \quad (2.7)$$

e onde $J(x) \equiv J_{\{x\}}$

A ferramenta central que usaremos é a desigualdade de Bogoliubov, formulada da seguinte maneira:

$$\left| \frac{d}{ds} \omega(\sigma_3(f) A) \Big|_{s=0} \right|^2 \leq \beta \, \omega\left(\frac{AA^* + A^*A}{2}\right) \omega(K) \quad (2.8)$$

onde

$$K = \frac{d}{ds} \frac{d}{dk} \sigma_3(f) \sigma_k(f) H \Big|_{s=k=0}, \quad (2.9)$$

H é a Hamiltoniana do sistema, $\beta = \frac{1}{kT}$, k constante de Boltzmann, T = temperatura absoluta.

Usando a definição de $\sigma_s(f)$, (2.8) é idêntico a

$$\left| \omega([J(f), A]) \right|^2 \leq \frac{\beta}{2} \omega(A^* A + A A^*) \omega([[J(f), H], J(f)])$$

que corresponde exatamente a forma usual (2.2).

A desigualdade (2.8) vale para estados de equilíbrio sob condições muito gerais [13, 28, 29, 33] e é a única propriedade do estado $\omega(\cdot)$ que assumiremos (Vide Apêndice A).

A expressão $\omega(K)$ pode ser reescrita como:

$$\omega(K) = \sum_{x, y \in \mathbb{Z}^v} f(x) f(y) j(x, y) \quad (2.10)$$

onde
$$j(x, y) = \left. \frac{d}{ds} \frac{d}{dt} \omega(\sigma_s(x) \sigma_t(y) H) \right|_{s, t=0} \quad (2.11)$$

ou ainda, em termo de geradores locais:

$$j(x, y) = - \omega([J(x), [J(y), H]])$$

Assumiremos propriedades para $f(x)$ e H que garantam uma boa definição de K (vide seção 2.3 deste Capítulo).

Com as definições acima, estamos em condições de enunciar:

Teorema 2.1: Suponha que $j(x, y)$ satisfaça as seguintes propriedades:

- (i) $j(x, y) = j(y, x)$
- (ii) $j(x, \cdot) \in \ell^1(\mathbb{Z}^v)$ e $\sum_{y \in \mathbb{Z}^v} j(x, y) = 0, \forall x \in \mathbb{Z}^v$
- (iii) existe uma função $g \in \ell^1(\mathbb{Z}^v)$ tal que

$$|j(x, y)| \leq g(x-y), \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}^v.$$

Seja a função $E(p)$, $p \in B^v$, onde $B^v = [-\pi, \pi]^v$, de
fínida por:

$$E(p) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^v} (1 - \cos p \cdot \alpha) q(\alpha) \quad (2.12)$$

Se

$$\int_{|p| < \delta} \frac{d^v p}{E(p)} = \infty \quad (2.13)$$

para todo $\delta > 0$, então o estado $\omega(\cdot)$ satisfazendo a desigualdade
de Bogoliubov (2.8) é invariante pelo grupo de simetria σ_s , ou
seja, $\omega(\sigma_s A) = \omega(A)$, $\forall A \in \mathcal{A}$.

Demonstração:

Pela continuidade de $\omega(\cdot)$ basta mostrar que
 $\omega(\sigma_s A) = \omega(A)$, $\forall A \in \mathcal{A}_\Lambda$, $\forall \Lambda \subset \mathbb{Z}^v$, Λ finito.

Seja $A \in \mathcal{A}_\Lambda$, para algum $\Lambda \subset \mathbb{Z}^v$ finito. Sem perda de
generalidade podemos supor que $0 \in \Lambda$.

Então:

$$\left. \frac{d}{ds} \omega(\sigma_s A) \right|_{s=0} = \frac{1}{f(0)} \left. \frac{d}{ds} \omega(\sigma_s(f) A) \right|_{s=0} \quad (2.14)$$

para qualquer $f: \mathbb{Z}^v \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = f(0) \neq 0 \quad \forall x \in \Lambda$.

A desigualdade de Bogoliubov torna-se:

$$\left| \left. \frac{d}{ds} \omega(\sigma_s A) \right|_{s=0} \right|^2 \leq \frac{\beta}{2} \omega(A^* A + A A^*) \frac{\omega(K)}{|f(0)|^2} \quad (2.15)$$

Usando (i), (ii) e (iii), temos:

$$|\omega(K)| \leq \frac{1}{2} \sum_{x, y \in \mathbb{Z}^v} [f(x) - f(y)]^2 |f(x, y)| \leq \quad (2.16)$$

$$\leq \frac{1}{2} \sum_{x, y \in \mathbb{Z}^v} [f(x) - f(y)]^2 q(x-y) = \int_{B^v} \frac{d^v p}{(2\pi)^v} |\tilde{f}(p)|^2 E(p)$$

com a transformada de Fourier $\tilde{f}(p)$ definida por:

$$\tilde{f}(p) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^v} e^{-i p \cdot \alpha} f(\alpha) \quad \text{e} \quad B^v = [-\pi, \pi]^v$$

Vamos assumir provisoriamente que existem $\gamma > 0$ e $\delta > 0$ tais que

$$E(p) \geq \gamma |p|^2 \quad \text{para} \quad |p| \leq \delta \quad (2.17)$$

Seja

$$E_+(p) = E(p) \quad \text{se} \quad |p| \leq \delta \quad (2.18)$$

$$E_+(p) = \text{Max}\{E(p), \gamma \delta^2\} \quad \text{se} \quad |p| > \delta$$

Dado $\varepsilon > 0$ escolhemos $f_\varepsilon(x)$ como sendo

$$f_\varepsilon(x) = C_\varepsilon(x) + h_\varepsilon(x) \quad (2.19)$$

onde

$$C_\varepsilon(x) = \int_{B^v} \frac{d^v k}{(2\pi)^v} \frac{e^{i k \cdot x}}{E_+(k) + \varepsilon} \quad (2.20)$$

e

$$h_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon(0) - C_\varepsilon(x) = \int_{B^v} \frac{d^v k}{(2\pi)^v} \frac{1 - e^{i k \cdot x}}{E_+(k) + \varepsilon}, & \text{se } x \in \Lambda \\ 0 & \text{se } x \notin \Lambda \end{cases} \quad (2.21)$$

Com esta escolha de h_ε teremos $f_\varepsilon(x) = C_\varepsilon(0)$, $\forall x \in \Lambda$,

onde

$$C_\varepsilon(0) = \int_{B^v} \frac{d^v k}{(2\pi)^v} \frac{1}{E_+(k) + \varepsilon} \quad (2.22)$$

Valem as seguintes estimativas:

$$|\tilde{f}_\varepsilon(p)|^2 \leq |\tilde{C}_\varepsilon(p)|^2 + 2 |\tilde{C}_\varepsilon(p)| |\tilde{h}_\varepsilon(p)| + |\tilde{h}_\varepsilon(p)|^2 \quad (2.23)$$

e

$$|\tilde{h}_\varepsilon(p)| \leq Q(\Lambda) < \infty \quad (2.24)$$

onde $Q(\Lambda)$ é uma constante dependente de Λ , porém independente de ε . De fato, da definição (2.23), vem:

$$|\tilde{h}_\varepsilon(p)| \leq \sum_{x \in \Lambda} \left| \int_{B^v} \frac{d^v k}{(2\pi)^v} \frac{1 - \cos k \cdot x}{E_+(k) + \varepsilon} \right| \leq \left(\sum_{x \in \Lambda} \frac{|x|^2}{2} \right) \int_{B^v} \frac{d^v k}{(2\pi)^v} \frac{|k|^2}{E_+(k)}$$

e, por causa de (2.17),

$$I \equiv \int_{B^v} \frac{d^v k}{(2\pi)^v} \frac{|k|^2}{E_+(k)} < \infty$$

e então (2.24) segue, com

$$Q(\Lambda) = I \sum_{x \in \Lambda} \frac{|x|^2}{2}$$

Por outro lado

$$\tilde{C}_\varepsilon(p) = \frac{1}{E_+(p) + \varepsilon}$$

e usando (2.16), (2.23) e (2.24) segue que:

$$\begin{aligned} |\omega(k)| &\leq \int_{B^v} \frac{d^v p}{(2\pi)^v} \frac{1}{E_+(p) + \varepsilon} + 2 Q(\Lambda) + Q(\Lambda)^2 \int_{B^v} \frac{d^v p}{(2\pi)^v} E(p) = \\ &= C_\varepsilon(0) + D(\Lambda) \end{aligned} \quad (2.25)$$

com

$$D(\Lambda) = 2 Q(\Lambda) + Q(\Lambda)^2 \int_{B^v} \frac{d^v p}{(2\pi)^v} E(p) < \infty$$

independente de ε (pois $E(p) \leq 2 \|q\|_1$).

Então, de (2.15) e (2.25) vem:

$$\left| \frac{d}{ds} \omega(\sigma_s A) \Big|_{s=0} \right|^2 \leq \frac{\beta}{2} \omega(A^* A + A A^*) \frac{C_\varepsilon(0) + b(N)}{C_\varepsilon(0)^2} \quad (2.26)$$

Como:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} C_\varepsilon(0) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^v} \frac{d^v \gamma}{(2\pi)^v} \frac{1}{E_+(\gamma) + \varepsilon} = \infty \\ \iff \int_{|\gamma| < \delta} \frac{d^v \gamma}{E(\gamma)} &= \infty \end{aligned} \quad (2.27)$$

temos que

$$\frac{d}{ds} \omega(\sigma_s A) \Big|_{s=0} = 0 \quad (2.28)$$

o que implica em $\omega(\sigma_s A) = \omega(A)$.

Para concluir a demonstração resta estabelecer (2.17).

De fato, como $E(p) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^v} q(x) (1 - \cos p \cdot x)$, com $q(x) \geq 0$, vemos que para $v=1$, se $x_0 \neq 0$ é tal que $q(x_0) > 0$, então

$$E(p) \geq q(x_0) (1 - \cos p \cdot x_0) \geq \frac{2q(x_0)}{\pi^2} |x_0|^2 |p|^2$$

para $|p| \leq \frac{\pi}{|x_0|}$. É claro que se $q(x) = 0, \forall x \in \mathbb{Z}^v$ então automaticamente (2.28) é verificado. Para $v=2$, suponha que existam $x_0 \equiv (x_0^1, x_0^2)$ e $y_0 \equiv (y_0^1, y_0^2)$ com $x_0^1 \neq 0$ e $y_0^2 \neq 0$ (x_0 pode ser igual a y_0), tais que $q(x_0) \neq 0$ e $q(y_0) \neq 0$.

Neste caso

$$E(p) \geq q(x_0) (1 - \cos p \cdot x_0) + q(y_0) (1 - \cos p \cdot y_0) \geq c |p|^2$$

em alguma vizinhança de $p = 0$. Se não existirem x_0 e y_0 com as propriedades acima, então estaremos reduzidos ao caso $v=1$ e o resultado segue igualmente.

c.q.d.

Observações:

O Teorema 2.1 estabelece, de uma maneira geral, a conexão entre a existência de uma singularidade (infra-vermelha) não integrável na função $E(p)^{-1}$ e a proibição de quebra espontânea de simetria contínua. É um resultado tipicamente válido para dimensões baixas ($\nu=1$ ou 2), já que, de acordo com (2.17) (que é verdadeiro para qualquer dimensão)

$$\int_{|\gamma| \leq \delta} \frac{d\gamma^\nu}{E(\gamma)} \leq \frac{1}{\delta} \int_{|\gamma| \leq \delta} \frac{d\gamma^\nu}{|\gamma|^2} < \infty \quad \text{se} \quad \nu \geq 3$$

e, neste caso, o Teorema 2.1, torna-se vazio.

A função $E(p)$ é a transformada de Fourier de $g(x-y)$, um limitante para $\dot{f}(x,y)$, que pode ser considerado como uma medida da interação entre os pontos x e y . Se a interação decrescer lentamente, quando $|x-y| \rightarrow \infty$, a singularidade de $E(p)^{-1}$, em $p = 0$, pode ser integrável, mesmo em $\nu=1$ ou 2 , e neste caso o Teorema 2.1 é vazio (na realidade, é falso!). De fato, para uma classe de sistemas que obedeçam regras de soma e estimativas infra-vermelhas ("infrared bounds") a condição

$\int E(p)^{-1} d\gamma^\nu < \infty$ implica na quebra espontânea da simetria contínua em $\nu=1$ ou 2 [30,31].

Deve-se notar também que o Teorema 2.1 não supõe invariança translacional da Hamiltoniana H nem do estado $\omega(\cdot)$.

2.3 - Aplicações

Nesta seção mostraremos como as hipóteses do Teorema 2.1 são satisfeitas para uma classe bastante geral de sistemas definidos numa rede. Vamos nos restringir inicialmente a sistemas quânticos.

A cada região finita $\Lambda \subset \mathbb{Z}^{\nu}$ associamos a interação $H(\Lambda) \in \mathcal{O}_{\Lambda}$, que é uma interação de $|\Lambda|$ corpos ($|\Lambda|$ = cardinalidade de Λ), tal que para cada $x \in \mathbb{Z}^{\nu}$ temos $\sum_{\Lambda \ni x} |\Lambda| \|H(\Lambda)\| < \infty$. Pode-se também tratar o caso de operadores não limitados, o que não faremos aqui para evitar um tratamento técnico mais complicado.

A Hamiltoniana é definida pela expressão (formal) :

$$H = \sum_{\Lambda \subset \mathbb{Z}^{\nu}} H(\Lambda) \quad (2.29)$$

Mais rigorosamente, supomos que para todo $A \in \mathcal{O}_{\Gamma}$, $\Gamma \subset \mathbb{Z}^{\nu}$, a expressão

$$[H, A] = \sum_{\Gamma \cap \Lambda \neq \emptyset} [H(\Lambda), A] \quad (2.30)$$

define uma série convergente na norma de $\mathcal{O}_{\Gamma}$, ou seja, que $[H, A] \in \mathcal{O}_{\Gamma}$. Note que se o alcance da interação for finito a soma (2.30) torna-se uma soma finita.

Examinemos agora as condições (i), (ii) e (iii) impostas pelo Teorema 2.1 sobre a função $j(x, y)$, que é dada por

$$j(x, y) = \left. \frac{d}{ds} \frac{d}{dk} \omega(\sigma_s(x) \sigma_k(y) H) \right|_{s=k=0} \quad (2.31)$$

que, em termos dos geradores locais $J(x)$ do grupo σ_s , é o mesmo que:

$$j(x, y) = - \sum_{\Lambda \ni x, y} \omega([J(x), [J(y), H(\Lambda)])]$$

A propriedade (i) é consequência de $[\sigma_s(x), \sigma_s(y)] = 0$, que é equivalente a $[J(x), J(y)] = 0$ pois então

$$\begin{aligned} j(x, y) &= - \sum_{\Lambda \ni x, y} \omega(J(x)J(y)H - J(x)HJ(y) - J(y)HJ(x) + HJ(y)J(x)) = \\ &= - \sum_{\Lambda \ni x, y} \omega(J(y)J(x)H - J(y)HJ(x) - J(x)HJ(y) + HJ(x)J(y)) = j(y, x) \end{aligned}$$

A primeira parte de (ii) segue da estimativa

$$|f(x, y)| \leq 4 \|J(x)\| \|J(y)\| \sum_{\Lambda \ni x, y} \|H(\Lambda)\| \quad (2.32)$$

pois então

$$\|f(x, \cdot)\|_1 = \sum_{y \in \mathbb{Z}^v} |f(x, y)| \leq \text{const.} \|J(x)\| \sum_{\Lambda \ni x} |\Lambda| \|H(\Lambda)\| < \infty$$

onde supomos que

$$\sup_{x \in \mathbb{Z}^v} \|J(x)\| < \infty \quad \text{e} \quad \sum_{\Lambda \ni x} |\Lambda| \|H(\Lambda)\| < \infty$$

para cada $x \in \mathbb{Z}^v$. Em particular, se a interação for no máximo de N corpos, isto é, se $H(\Lambda) = 0$ para $|\Lambda| > N$ então,

$$\|f(x, \cdot)\|_1 \leq \text{const.} \sum_{\Lambda \ni x} \|H(\Lambda)\| < \infty$$

A segunda parte de (ii), é a condição de invariança de $H(\Lambda)$ pelo grupo σ_S , o que o define como simetria do sistema, ou seja:

$$\sigma_S H(\Lambda) = H(\Lambda), \quad \text{para todo} \quad \Lambda \subset \mathbb{Z}^v$$

Isto implica em

$$\sum_{y \in \mathbb{Z}^v} f(x, y) = - \sum_{\Lambda \ni x} \omega \left([J(x), \frac{d}{ds} \sigma_S H(\Lambda)] \right) \Big|_{s=0} = 0$$

A condição (iii) será satisfeita se tivermos a limitação uniforme

$$|f(x, y)| \leq 4 \|J(x)\| \|J(x-z)\| \sum_{\Lambda \ni x, x-z} \|H(\Lambda)\| \leq g(z) \quad (2.33)$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}^v$, onde $z = x - y$, e para tanto é suficiente que

$$\sup_{x \in \mathbb{Z}^v} \left\{ \|J(x)\| \|J(x-z)\| \sum_{\Lambda \ni x, x-z} \|H(\Lambda)\| \right\} < \infty \quad \text{para todo} \quad z \in \mathbb{Z}^v$$

No caso em que $\|J(x)\| = \|J(0)\|$, para todo $x \in \mathbb{Z}^V$, e $H(\Lambda)$ é invariante por translação, a função $g(x-y)$ pode ser escolhida como

$$g(x-y) = 4 \|J(0)\|^2 \sum_{\Lambda \ni 0, x-y} \|H(\Lambda)\| \quad (2.34)$$

No caso geral, a condição (2.33) não exige invariância translacional nem da Hamiltoniana, nem do estado $\omega(\cdot)$, o que é conveniente para, por exemplo, acomodar sistemas aleatórios (vidros de "spin") [13].

Para discutirmos o papel do alcance da interação na ausência de quebra espontânea de simetria contínua, vamos nos ater ao modelo de Heisenberg. A cada $x \in \mathbb{Z}^V$ correspondem operadores de "spin" $S_1(x)$, $S_2(x)$ e $S_3(x)$, com as relações de comutação usuais:

$$[S_i(x), S_j(y)] = i \delta_{x,y} \epsilon_{ijk} S_k(x) \quad (2.35)$$

onde $\delta_{x,y}$ é a função δ de Kronecker e ϵ_{ijk} é o tensor totalmente antissimétrico, com $\epsilon_{123} = 1$. Além disso, temos $\sum_{i=1}^3 S_i^2(x) = S(S+1)$.

A Hamiltoniana de Heisenberg é dada (formalmente) por:

$$H = \sum_{x,y \in \mathbb{Z}^V} \left\{ I_1(x,y) [S_1(x)S_1(y) + S_2(x)S_2(y)] + I_3(x,y) S_3(x)S_3(y) \right\} \quad (2.36)$$

onde nos restringimos a interação de dois corpos, ou seja, em termos de (2.29)

$$H(\{x,y\}) = I_1(x,y) [S_1(x)S_1(y) + S_2(x)S_2(y)] + I_3(x,y) S_3(x)S_3(y)$$

com $x,y \in \mathbb{Z}^V$ e $H(\Lambda) = 0$ para qualquer outro $\Lambda \subset \mathbb{Z}^V$.

A álgebra de observáveis $\mathcal{A}$ é a álgebra C^* gerada pelos $S_i(x)$, $i=1,2,3$, $x \in \mathbb{Z}^v$.

O estado ω é definido como o limite de estados de Gibbs de volume finito, ou seja

$$\omega(A) = \lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^v} \frac{\text{Tr}_\Lambda A e^{-\beta H_\Lambda}}{\text{Tr}_\Lambda e^{-\beta H_\Lambda}}$$

onde Λ pode ser um cubo e

$$H_\Lambda = \sum_{x,y \in \Lambda} H(\{x,y\})$$

Poderíamos também definir $\omega(\cdot)$ colocando uma condição de contorno diferente em H_Λ ou um campo externo no plano (x,y) , que tende a zero após $\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^v$.

O grupo de simetria consiste em rotações em torno do eixo 3, cujo gerador local é

$$J(x) = S_3(x) \quad (2.37)$$

Um cálculo direto mostra que:

$$\begin{aligned} \dot{J}(x,y) &= [I(x,y) + I(y,x)] \omega(S_1(x)S_1(y) + S_2(x)S_2(y)) - \\ &\quad - \sum_{z \in \mathbb{Z}^v} [I(z,y) + I(y,z)] \omega(S_1(y)S_1(z) + S_2(y)S_2(z)) \delta_{x,y} \end{aligned}$$

Observe-se que $\dot{J}(x,y) = \dot{J}(y,x)$ e $\sum_{y \in \mathbb{Z}^v} \dot{J}(x,y) = 0$, satisfazendo as condições (i) e (ii) do Teorema 2.1.

Assumindo que $|I(x,y)| = I_0(|x-y|)$ e usando

$$\omega(S_i(x)S_i(y)) \leq \|S_i(x)\| \|S_i(y)\| = S^2,$$

obtemos:

$$|\dot{J}(x,y)| \leq 4S^2 \left\{ I_0(|x-y|) + \sum_{z \in \mathbb{Z}^v} I_0(|z|) \delta_{x,y} \right\} \equiv g(x-y) \quad (2.38)$$

Então, teremos:

$$E(p) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^v} (1 - \cos p \cdot x) \left\{ 4S^2 I_0(1 \cdot 1) + \sum_{z \in \mathbb{Z}^v} I_0(1 \cdot z) \delta_{x,0} \right\} \quad (2.39)$$

A divergência ou não de $\int_{\mathbb{R}^v} E(r)^{-1} d^v r$ vai depender do alcance de $I_0(|x|)$, ou seja, da rapidez com que $I_0(|x|)$ tende a zero quando $|x| \rightarrow \infty$. No caso em que

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^v} |x|^v I_0(|x|) = \alpha < \infty \quad (2.40)$$

usando $1 - \cos \gamma \cdot x \leq |\gamma|^v |x|^v$ $v = 1, 2$, temos:

$$E(\gamma) \leq 2 S^2 |\gamma|^v \sum_{x \in \mathbb{Z}^v} |x|^v I_0(|x|) = 2 \alpha S^2 |\gamma|^v \quad (2.41)$$

Desta forma

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^v} \frac{d^v r}{E(r)} = \infty \quad \text{para } v = 1 \text{ ou } 2,$$

sendo a divergência linear em $v=1$ e logarítmica em $v=2$.

Caso o momento v de $q(x)$ não seja finito porém tenha divergência logarítmica podemos demonstrar uma condição suficiente para $\int E(r)^{-1} d^v r = \infty$.

Proposição 2.2:

Seja $E(p) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^v} (1 - \cos \gamma \cdot x) q(x)$ com $q(x) \geq 0$ e

seja $K(N) = \sum_{x \in \Lambda_N} |x|^v q(x)$

onde

$$\Lambda_N = \{-N, -N+1, \dots, N\}^v \subset \mathbb{Z}^v$$

Se

$$\sup_N \frac{K(N)}{\ln N \ln_2 N \dots \ln_k N} < \infty$$

para algum $k \geq 1$ (onde $\ln_k N = \ln(\ln(\dots(\ln N)\dots))$) então para $|p|$ suficientemente pequeno

$$E(p) \leq \text{cte. } |p|^v \ln |p|^{-1} \ln_2 |p|^{-1} \dots \ln_k |p|^{-1}$$

Demonstração:

A demonstração segue as linhas gerais do Teorema 5.5 da referência [31] .

Como $1 - \cos p \cdot x \leq \frac{1}{2} |p|^2 |x|^2$ e $1 - \cos p \cdot x \leq |p| |x|$

$$\begin{aligned} E(p) &= \sum_{x \in \Lambda_N} (1 - \cos p \cdot x) g(x) + \sum_{x \in \Lambda_N^c} (1 - \cos p \cdot x) g(x) \leq \\ &\leq |p|^\nu \sum_{x \in \Lambda_N} |x|^\nu g(x) + 2 \sum_{x \in \Lambda_N^c} g(x) \end{aligned}$$

Para $M > N$

$$\sum_{x \in \Lambda_M - \Lambda_N} g(x) = \sum_{n=N+1}^M \sum_{x \in \partial \Lambda_n} \frac{|x|^\nu}{|x|^\nu} g(x) \leq \sum_{n=N+1}^M \frac{1}{n^\nu} \sum_{x \in \partial \Lambda_n} |x|^\nu g(x) \quad (2.42)$$

pois $|x|^\nu \geq n^\nu$ para $x \in \partial \Lambda_n$ ($\partial \Lambda_n$ = fronteira de Λ_n). Agora:

$$\sum_{x \in \partial \Lambda_n} |x|^\nu g(x) = K(n) - K(n-1)$$

e portanto (2.42) é limitado por

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \Lambda_M - \Lambda_N} g(x) &\leq \sum_{n=N+1}^M \frac{1}{n^\nu} [K(n) - K(n-1)] = \\ &= \sum_{n=N+1}^{M-1} \left[\frac{1}{n^\nu} - \frac{1}{(n+1)^\nu} \right] K(n) + \frac{1}{M^\nu} K(M) - \frac{1}{(N+1)^\nu} K(N) \leq \\ &\leq \frac{1}{M^\nu} K(M) + 3 \sum_{n=N+1}^{M-1} \frac{K(n)}{n^{\nu+1}} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Mas

$$K(n) \leq cte. \ln n \ln_2 n \dots \ln_k n \quad (2.44)$$

e então

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{K(M)}{M^\nu} = 0 \quad (2.45)$$

Tomando o limite $M \rightarrow \infty$ em (2.43) e usando (2.44) e (2.45) obtemos:

$$\sum_{x \in \Lambda_N^c} g(x) \leq 3 \text{ de } \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\ln n \ln_2 n \dots \ln_k n}{n^{\nu+1}} \leq 3. \text{ de. } \int_N^{\infty} \frac{\ln x \ln_2 x \dots \ln_k x}{x^{\nu+1}} dx$$

Integração por partes fornece:

$$\begin{aligned} \int_N^{\infty} \frac{\ln x \ln_2 x \dots \ln_k x}{x^{\nu+1}} dx &= \frac{1}{\nu} \frac{1}{N^{\nu}} \ln N \ln_2 N \dots \ln_k N + \\ &+ \frac{1}{\nu} \int_N^{\infty} \frac{1}{x^{\nu+1}} (\ln_2 x \dots \ln_k x + \ln_3 x \dots \ln_k x + \dots + 1) dx \end{aligned}$$

Se N é suficientemente grande

$$\ln N \geq \ln_2 N \geq \dots \geq \ln_k N > 2$$

o que conduz a

$$\int_N^{\infty} \frac{\ln x \ln_2 x \dots \ln_k x}{x^{\nu+1}} dx \leq \frac{2}{2\nu-1} \frac{1}{N^{\nu}} \ln N \ln_2 N \dots \ln_k N$$

Escolhendo $N = \lceil |p|^{-1} \rceil$ obtemos a tese

c.q.d.

Pelo fato de

$$\frac{1}{|p|^{\nu} \ln |p|^{-1} \ln_2 |p|^{-1} \dots \ln_k |p|^{-1}}$$

não ser integrável na origem para $\nu=1$ ou 2 , temos então uma condição suficiente para a divergência de $\int E(p)^{-1} d^{\nu} p$.

No caso particular que $I_0(|x|) = |x|^{-\alpha}$ ($x \neq 0$) teremos, para $\nu = 1$, $\int_{\mathbb{R}^1} E(\gamma)^{-1} d\gamma$ infinita para $\alpha \geq 2$ e finita para $\alpha < 2$. Em $\nu=2$ a integral será finita para $\alpha < 4$ e infinita para $\alpha \geq 4$ [31].

Os casos limites, para $I_0(|x|)$ do tipo $|x|^{-\alpha}$, correspondem a divergência logarítmica do momento ν de $I_0(|x|)$, sendo cobertos pela Proposição 2.2.

Toda a discussão feita até aqui pode ser facilmente adaptada para sistemas clássicos, sendo que a estimativa (2.33) pode ser feita diretamente em (2.31), como uma estimativa na segunda derivada mista de

$$G_S(\kappa) G_L(\eta) H(\lambda)$$

sem necessidade de introduzir-se geradores $J(x)$.

Sistemas aleatórios (vidros de "spin") também são tratáveis pelos mesmos métodos até aqui expostos. Para fixar idéias, consideremos o modelo dado pela Hamiltoniana (2.36), onde agora $\{I(x,y), I_3(x,y)\}_{x,y \in \mathbb{Z}^\nu}$ são variáveis aleatórias num espaço de probabilidade Ω . Como é usual, no tratamento de sistemas aleatórios [52], pode-se considerar dois tipos de médias estatísticas para tais sistemas:

1 - médias temperadas ("quenched")

$$\langle A \rangle_{\neq} \equiv \langle \omega(A) \rangle_{\Omega} = \left\langle \frac{T_{\Omega} A e^{\beta H}}{T_{\Omega} e^{\beta H}} \right\rangle_{\Omega}$$

2 - médias recozidas ("annealed")

$$\langle A \rangle_{\Omega} \equiv \frac{\langle T_{\Omega} A e^{\beta H} \rangle_{\Omega}}{\langle T_{\Omega} e^{\beta H} \rangle_{\Omega}}$$

onde $\langle \rangle_{\Omega}$ significa o valor médio tomado no espaço de probabilidade Ω , onde estão definidos os $\{I(\kappa, \eta), I_3(\kappa, \eta)\}_{\kappa, \eta \in \mathbb{Z}^\nu}$.

Para sistemas recozidos as manipulações seguem "ipsis literis" às do Teorema 2.1, com o resultado:

$$\langle \sigma_s A \rangle_\alpha = \langle A \rangle_\alpha$$

Para sistemas temperados, basta notar que

$$\left\langle \left| \frac{d}{ds} \omega(\sigma_s A) \right|_{s=0} \right\rangle_\alpha^2 \geq \left| \left\langle \frac{d}{ds} \omega(\sigma_s A) \right|_{s=0} \right\rangle_\alpha \right|^2$$

pela desigualdade de Schwartz (pois $\langle 1 \rangle_\alpha = 1$), para obter-se :

$$\langle \sigma_s A \rangle_x = \langle A \rangle_x$$

Em ambos os casos a hipótese (iii) do Teorema 2.1 é substituída por

$$\langle |f(x,y)| \rangle_\alpha \leq g(x-y) \quad \text{no caso temperado, ou}$$

$$\left| \left\langle \frac{d}{ds} \frac{d}{dt} \sigma_s(x) \sigma_t(y) H \right|_{s=t=0} \right\rangle_\alpha \right| \leq g(x-y) \quad \text{no caso recozido.}$$

No caso particular considerado (Hamiltoniana (2.36)), a expressão (2.38) fica substituída por:

$$4 S^2 \left(\langle |I_0(|x-y|)| \rangle_\alpha + \sum_y \langle |I_0(|y|)| \rangle_\alpha \delta_{x,y} \right) \equiv g(x-y)$$

e exigindo que $I_0(|x-y|) \in L^1(\Omega)$, recaímos no caso de um sistema não aleatório.

Com algumas hipóteses adicionais, os resultados contidos no Teorema 2.1 podem ser facilmente estendidos para sistemas de dimensionalidade restrita, ou seja, sistemas tridimensionais (ou dimensões maiores) que tenham tamanho finito em uma ou duas (ou mais) direções.

Para fixar idéias vamos admitir um sistema tridimensional que satisfaça a uma das duas condições abaixo:

1 - dimensionalidade restrita $\nu=1$: o sistema pode ser totalmente contido num cilindro $C \subset \mathbb{R}^3$, de comprimento infinito e secção circular de raio $L < \infty$. O espaço de configuração deste sistema será, então, $\Lambda = C \cap \mathbb{Z}^3$

2 - dimensionalidade restrita $\nu=2$: o sistema pode ser totalmente contido numa chapa plana infinita $S \subset \mathbb{R}^3$, de espessura uniforme $L < \infty$. Neste caso o espaço de configuração é $\Lambda = S \cap \mathbb{Z}^3$

Em ambos os casos podemos decompor qualquer ponto $x \in \Lambda$ em $x = (x_{\perp}, x_{\parallel})$, onde $x_{\parallel}$ são as coordenadas de x ao longo das direções de comprimento infinito e $x_{\perp}$ são as coordenadas restantes.

Para incluir estes sistemas no domínio de validade do Teorema 2.1, substituímos a hipótese (iii) por (iii'): existe uma função $g \in \mathcal{L}^1(\Lambda)$ tal que para cada $x, y \in \Lambda$, e fixados $x_{\parallel}, y_{\parallel}$,

$$\sup_{x_{\perp}, y_{\perp} \in \Lambda} |j(x, y)| \leq g(x_{\parallel} - y_{\parallel}) \quad (2.47)$$

A demonstração do Teorema 2.1, neste caso, é inteiramente análoga, bastando as seguintes modificações:

a-) escolhermos $f_{\varepsilon}(x) = f_{\varepsilon}(x_{\parallel})$ exatamente como em (2.19) - (2.21), apenas substituindo x por $x_{\parallel}$, ou seja $f_{\varepsilon}(x)$ é constante em $x_{\perp}$.

b-) a estimativa (2.16) é modificada para:

$$\begin{aligned} |\omega(K)| &\leq \frac{1}{2} \sum_{\substack{x_{\parallel}, y_{\parallel} \\ x_{\perp}, y_{\perp}}} [f(x_{\parallel}) - f(y_{\parallel})]^2 \sup_{x_{\perp}, y_{\perp}} |j(x, y)| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{\substack{x_{\parallel}, y_{\parallel} \\ x_{\perp}, y_{\perp}}} [f(x_{\parallel}) - f(y_{\parallel})]^2 g(x_{\parallel} - y_{\parallel}) = N \int_{\mathbb{R}^{\nu}} \frac{d^{\nu} r}{(2\pi)^{\nu}} |\tilde{f}(r)|^2 E(r), \end{aligned}$$

onde N é o número de pontos de Λ contidos numa secção reta do cilindro C (caso 1) ou na direcção da espessura da chapa S (caso 2).

CAPÍTULO 3

DECAIMENTO DE CORRELAÇÕES

3.1 - Resultados Gerais

É um fato bem conhecido em Mecânica Estatística que transições de fase (com ou sem quebra de simetria) estão intimamente ligadas ao surgimento de correlações de longo alcance entre certos observáveis do sistema.

Assim, para uma classe grande de sistemas clássicos e quânticos numa rede a existência de correlações de longo alcance implica em magnetização espontânea (correlações e magnetizações convenientemente definidas), o que, muitas vezes, está associado a uma quebra espontânea de simetria [32]. Um exemplo disto é o modelo de Heisenberg quântico (antiferromagnético) e o modelo X-Y quântico em 3 dimensões [33]. Nestes modelos a existência de correlação de longo alcance implica na quebra espontânea de simetria contínua.

Por outro lado existem modelos em que certos observáveis apresentam correlação de longo alcance e exibem simetria contínua que não é (não pode ser) quebrada [34]. Neste modelo [34], bidimensional, existe uma simetria discreta além da simetria contínua. A simetria discreta é quebrada provocando o surgimento de correlação de longo alcance entre certos observáveis convenientemente definidos.

Neste capítulo mostraremos, usando os métodos do Capítulo 2, que a ausência de quebra de simetria implica na inexistência de correlações de longo alcance para uma classe de

observáveis, que estão relacionados com o grupo de simetria . Ao mesmo tempo obtemos estimativas para a taxa de decaimento das correlações, independentes de modelo e da temperatura, e que está relacionada com o grau de divergência de $\int_{\mathbb{R}^d} E(\varphi)^2 d\gamma$.

Nossas estimativas representam uma melhoria e uma generalização de resultados anteriores de Fisher e Jasnow [35, 36] , pois além de valermos para toda uma classe de modelos e de observáveis, são locais, dependem apenas do alcance da interação e incluem interações de muitos corpos.

Recentemente Ito [37] reobteve nossos resultados, com pequenas melhorias quanto a taxa de decaimento, porém com restrições mais rigorosas quanto à classe de modelos e observáveis.

O argumento heurístico, no qual se baseia nosso método, pode ser assim colocado: se tivermos um observável $A(0)$, colocado em $x = 0$, e outro $B(R)$ colocado no ponto $x = R$, pelo Teorema 2.1, teremos

$$\frac{d}{ds} \omega(\sigma_s A(0) B(R)) \Big|_{s=0} = 0 \quad (3.1)$$

Porém se, na expressão (3.1), em lugar de σ_s colocarmos $\sigma_s(f)$, definido em (2.5) e (2.6), com $f(x)$ do seguinte tipo:

- a-) $f(x) = 1$ numa pequena região em torno de $x = 0$;
- b-) $f(x)$ decai lentamente para zero numa distância da ordem de $|R|$;
- c-) $f(x) = 0$ para $|x| \geq |R|$,

então (3.1) não será mais zero, porém deve ser pequena, pois $f(x)$ aproxima a função constante e igual a 1 (note que $\sigma_s = \sigma_s(f \equiv 1)$).

Por outro lado

$$\left| \frac{d}{ds} \omega(\sigma_s(f) A(0) B(R)) \right|_{s=0} = \left| \omega(D(0) B(R)) \right| \equiv F(R)$$

onde $D(0) = [J(f), A(0)] = [J(0), A(0)]$ porque $[J(f), B(R)] = 0$

pois $f(R) = 0$ e levando em conta (2.3).

Se, agora, fizermos $|R| \rightarrow \infty$, conservando as características acima descritas de $f(x)$, vemos que $f(x) \rightarrow 1$ e $F(R)$ deve tender a zero por causa de (3.1), resultando na ausência de correlação de longo alcance entre $D(0)$ (do tipo $[J(0), A(0)]$) e $B(R)$.

Nosso trabalho consiste em estimar a rapidez com que $F(R) \xrightarrow{|R| \rightarrow \infty} 0$ à medida que $f(x) \xrightarrow{|R| \rightarrow \infty} 1$.

Passemos pois à formulação deste argumento de uma maneira mais precisa. O contexto matemático, assim como a notação, será o mesmo exposto no início da seção 2.2. do Capítulo 2.

Consideremos duas regiões Λ_0 e Λ_R com $\Lambda_0 \cap \Lambda_R = \emptyset$ e três observáveis $A, D \in \mathcal{O}_{\Lambda_0}$, $B_R \in \mathcal{O}_{\Lambda_R}$, tais que

$$A = \left. \frac{d}{ds} \sigma_s D \right|_{s=0} \quad (3.2)$$

Sem perda de generalidade suporemos que $0 \in \Lambda_0$ (e $R \in \Lambda_R$, R um vetor em $\mathbb{Z}^d$).

Em termos de geradores locais (3.2) é equivalente a

$$A = i [H_{\Lambda_0}, D] \quad (3.3)$$

e (3.2) (ou (3.3)) definirá a classe de observáveis para os

quais valem nossas estimativas, ou seja, elementos da álgebra $\mathcal{A}$ que provêm de um comutador de algum observável com os geradores da simetria.

Seja $f(x)$ uma função $f: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} f(0) \neq 0 & \text{para } x \in \Lambda_0 \\ 0 & \text{para } x \in \Lambda_R \end{cases} \quad (3.4)$$

Definindo $\sigma_s(f)$ como em (2.5) (ou (2.6)), podemos escrever:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \omega(\sigma_s(f) \cdot DB_R) \Big|_{s=0} &= i \omega([J(f), DB_R]) = \\ &= i \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} f(x) \omega([J(x), DB_R]) = \\ &= i \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} f(x) \{ \omega([J(x), D] B_R) + \omega(D [J(x), B_R]) \} = i f(0) \omega(AB_R) \end{aligned}$$

pois

$$[J(x), D] = 0 \quad \text{se} \quad D \in \mathcal{A}_{\Lambda_0}, \quad x \notin \Lambda_0$$

Então temos:

$$\omega(AB_R) = \frac{1}{i f(0)} \frac{d}{ds} \omega(\sigma_s(f) DB_R) \Big|_{s=0} \quad (3.5)$$

A identidade (3.5), com $f(x)$ escolhido convenientemente (satisfazendo (3.4)), juntamente com a desigualdade de Bogoliubov (2.15), serão nosso ponto de partida.

A função $f(x)$ é definida por

$$f(x) \equiv f_R(x) = C_R(x) + h_R(x) \quad (3.6)$$

onde

$$C_R(x) = \int_{B^v} \frac{d^v k}{(2\pi)^v} \frac{\cos k \cdot x - \cos k \cdot (x - 2R)}{E_+(k)} =$$

$$= \int_{B^v} \frac{d^v k}{(2\pi)^v} \frac{1 - e^{-2ik \cdot R}}{E_+(k)} e^{ik \cdot x} \quad (3.7)$$

com $E_+(k)$ definida por (2.18) e

$$h_R(x) = \begin{cases} C_R(0) - C_R(x) & \text{se } x \in \Lambda_0 \\ -C_R(x) & \text{se } x \in \Lambda_R \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.8)$$

Com esta definição de $f_R(x)$ a condição (3.4) é satisfeita, valendo portanto a identidade (3.5).

No que se segue necessitaremos de uma estimativa para $\tilde{h}_R(p)$, a transformada de Fourier de $h_R(x)$.

Lema 3.1:

$$|\tilde{h}_R(p)| \leq Q(\Lambda_0, \Lambda_R) C_R(0)^{1/2} \quad (3.9)$$

onde $Q(\Lambda_0, \Lambda_R) < \infty$ é uma constante dependente dos tamanhos de Λ_0, Λ_R , mas independente de R .

Demonstração:

Da definição de h_R :

$$\tilde{h}_R(p) = \sum_{x \in \Lambda_0} e^{-ip \cdot x} \int_{B^v} \frac{d^v k}{(2\pi)^v} \frac{(1 - e^{-2ik \cdot R})(1 - e^{ik \cdot x})}{E_+(k)} =$$

$$= \sum_{x \in \Lambda_R} e^{-i\gamma \cdot x} \int_{B^v} \frac{d^v k}{(2\pi)^v} \frac{\cos k \cdot x - \cos k \cdot (x - 2R)}{E_+(k)}$$

A identidade $\cos a - \cos b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{b-a}{2}$ juntamente com a desigualdade de Schwartz nos dá:

$$\begin{aligned} |\tilde{h}_R(p)| &\leq 2 \sum_{x \in \Lambda_0} \left[\int_{B^v} \frac{d^v k}{(2\pi)^v} \frac{1 - \cos 2k \cdot R}{E_+(k)} \right]^{1/2} \left[\int_{B^v} \frac{d^v k}{(2\pi)^v} \frac{1 - \cos k \cdot x}{E_+(k)} \right]^{1/2} \\ &\quad + 2 \sum_{x \in \Lambda_R} \int_{B^v} \frac{d^v k}{(2\pi)^v} \frac{|\sin k \cdot (x - R)| |\sin k \cdot R|}{E_+(k)} \end{aligned}$$

Usando a identidade $1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{a}{2}$ e a desigualdade $|\sin a| \leq |a|$, temos:

$$\begin{aligned} |\tilde{h}_R(p)| &\leq \sqrt{2} C_R(0)^{1/2} \left(\sum_{x \in \Lambda_0} |x| \right)^{1/2} I^{1/2} + \\ &\quad + 2 \left(\int_{B^v} \frac{d^v k}{(2\pi)^v} \frac{|k| |\sin k \cdot R|}{E_+(k)} \right) \left(\sum_{x \in \Lambda_R} |x - R| \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde

$$I = \int_{B^v} \frac{d^v k}{(2\pi)^v} \frac{|k|^2}{E_+(k)} < \infty \quad \text{por causa de (2.17).}$$

Aplicando novamente a desigualdade de Schwartz para o segundo termo de (3.10), resulta:

$$|\tilde{h}_R(p)| \leq \sqrt{2} C_R(0)^{1/2} \left(\sum_{x \in \Lambda_0} |x| \right)^{1/2} I^{1/2} + \sqrt{2} C_R(0)^{1/2} \left(\sum_{x \in \Lambda_R} |x - R| \right) I^{1/2}$$

Como

$$\sum_{x \in \Lambda_0} |x| \leq (\text{diam } \Lambda_0) |\Lambda_0| \quad \text{e} \quad \sum_{x \in \Lambda_R} |x-R| \leq (\text{diam } \Lambda_R) |\Lambda_R|$$

onde $\text{diam } \Lambda = \max_{x, y \in \Lambda} |x-y|$ e $|\Lambda|$ é a cardinalidade de Λ , obtemos finalmente a tese, com

$$Q(\Lambda_0, \Lambda_R) = \sqrt{2} \left\{ (\text{diam } \Lambda_0) |\Lambda_0| + (\text{diam } \Lambda_R) |\Lambda_R| \right\} I^{1/2}.$$

c.q.d.

Estamos agora em condições de enunciar e demonstrar o resultado principal, usando a mesma notação do Capítulo 2:

Teorema 3.2. Seja $f(x,y)$ dado por (2.11) e satisfazendo as propriedades (i), (ii) e (iii) do enunciado do Teorema 2.1. Se $A \in \mathcal{A}_{\Lambda_0}$, $B \in \mathcal{A}_{\Lambda_R}$, com $\Lambda_0 \cap \Lambda_R = \emptyset$ e $A = \frac{d}{ds} \sigma_s D|_{s=0}$ para algum $D \in \mathcal{A}_{\Lambda_0}$, então

$$|\omega(AB_R)|^2 \leq \beta \|B_R\| \|D\| \left[\frac{a(\Lambda_0, \Lambda_R)}{C_R(0)} + \frac{b(\Lambda_0, \Lambda_R)}{C_R(0)^{3/2}} \right] \quad (3.11)$$

onde $a(\Lambda_0, \Lambda_R)$ e $b(\Lambda_0, \Lambda_R)$ são constantes dependentes de Λ_0 e Λ_R mas independentes de R .

Demonstração:

A desigualdade de Bogoliubov, junto com (3.5) nos dá:

$$|\omega(AB_R)|^2 \leq \beta \|B_R\| \|D\| \frac{\omega(K)}{|f_R(0)|^2} \quad (3.12)$$

com $\omega(K)$ dado por (2.10).

Usando as propriedades (i), (ii) e (iii), como no Teorema 2.1, obtemos:

$$|\omega(k)| \leq \int_{B^v} \frac{d^v p}{(2\pi)^v} |\tilde{f}_R(p)|^2 E(p) \quad (3.13)$$

Agora,

$$|\tilde{f}_R(p)|^2 \leq |\tilde{C}_R(p)|^2 + 2|\tilde{C}_R(p)| |\tilde{h}_R(p)| + |\tilde{h}_R(p)|^2$$

o que, juntamente com (3.9), fornece:

$$\begin{aligned} |\omega(k)| \leq & 2 C_R(0) + 2\sqrt{2} Q(\Lambda_0, \Lambda_R) C_R(0)^{1/2} \int_{B^v} \frac{d^v p}{(2\pi)^v} (1 - \cos 2pR)^{1/2} \\ & + Q^2(\Lambda_0, \Lambda_R) C_R(0) \int_{B^v} \frac{d^v p}{(2\pi)^v} E(p) \end{aligned} \quad (3.14)$$

As duas integrais que figuram em (3.14) são finitas e uniformemente limitadas em R , resultando

$$|\omega(k)| \leq a(\Lambda_0, \Lambda_R) C_R(0) + b(\Lambda_0, \Lambda_R) C_R(0)^{1/2} \quad (3.15)$$

onde $a(\Lambda_0, \Lambda_R)$ e $b(\Lambda_0, \Lambda_R)$ são constantes independentes de R .

Substituindo (3.15) em (3.12) e notando que

$$f_R(0) = C_R(0)$$

resulta a tese.

c.q.d.

A inexistência de correlação de longo alcance, assim como a estimativa para a taxa de decaimento das correlações vão depender do comportamento de $C_R(o)$ quando $|R| \rightarrow \infty$. O próximo Lema estabelece uma conexão entre o comportamento de $C_R(o)$ e a integral

$$\int_{|r| \leq \delta} \frac{d^v r}{E(r)}$$

Lema 3.3.

Seja $G(x)$ uma função contínua em $B^v - \{o\}$ tal que $G(x) \geq 0$ e

$$\int_{B^v} G(x) d^v x = \infty$$

Então

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{B^v} (1 - \cos 2R \cdot x) G(x) d^v x = \infty$$

Demonstração:

Chamemos de R^i , $i = 1, \dots, v$ as componentes do vetor R . Definamos $|R|_\infty = \max \{R^1, \dots, R^v\}$. Para $R \neq o$ dividamos $\mathbb{R}^v$ em regiões cúbicas de lados $\pi/|R|_\infty$, tal que $x = o$ seja o centro de uma dessas regiões e designemos por I_j , $j = 1, \dots, N(R)$, os cubos contidos em B^v , excluindo o cubo centrado em $x = o$. Então:

$$\begin{aligned} \int_{B^v} (1 - \cos 2R \cdot x) G(x) d^v x &\geq \sum_{j=1}^{N(R)} \int_{I_j} (1 - \cos 2R \cdot x) G(x) d^v x \geq \\ &\geq \sum_{j=1}^{N(R)} \left(\min_{x \in I_j} G(x) \right) \int_{I_j} (1 - \cos 2R \cdot x) d^v x \end{aligned}$$

Devido a escolha de I_j , temos que:

$$\int_{I_j} \omega(2R \cdot x) d^v x = 0$$

e portanto

$$\int_{B^v} (1 - \omega(2R \cdot x)) G(x) d^v x \geq \sum_{j=1}^{N(R)} |I_j| \left(\min_{x \in I_j} G(x) \right)$$

Se fizermos $R \rightarrow \infty$, teremos $|I_j| \rightarrow \infty$ e então

$$\sum_{j=1}^{N(R)} |I_j| \left(\min_{x \in I_j} G(x) \right) \rightarrow \int_{B^v} G(x) d^v x = \infty$$

c.q.d.

Portanto, toda vez que $\int_{|p| \leq \delta} \frac{d_p^v}{E(p)} = \infty$ teremos

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \omega(AB_R) = 0$$

e não haverá correlação de longo alcance para observáveis do tipo definido em (3.2) (ou (3.3)). Não há necessidade de considerarmos funções de correlação truncadas, ou seja:

$$\omega(AB_R) = \omega(A) \omega(B_R)$$

pois, de acordo com (3.2) e o Teorema 2.1, se

$$\int_{B^v} E(p)^{-1} d^v p = \infty$$

então $\omega(A) = 0$.

Como pode ser inferido do Teorema 3.2 e Lema 3.3, nas estimativas para o decaimento de funções de correlação

são estimativas "a priori", válidas para classes muito gerais de modelos. Consequentemente não são as melhores possíveis, se considerarmos modelos particulares.

De fato, para modelos de "spins" clássicos em $\nu=1$ ou 2, com interação de dois corpos, de alcance finito com simetria $SO(N)$, pode-se obter [37,38] para a função de dois pontos

$$\langle S(0).S(R) \rangle \leq \text{cte.} e^{- (1-\varepsilon) \frac{C_R(\nu)}{\beta}} \quad (3.16)$$

para todo $\varepsilon > 0$ e $\beta \geq \beta_0(\varepsilon)$ suficientemente grande.

É uma conjectura a ser demonstrada que (3.16) seja válido para modelos do tipo acima descrito, porém com alcance infinito da interação.

Para $\nu=1$, resultados de Dobrushin [39,40] implicam num decaimento somável (ℓ^1) para a função de dois pontos desde que $\sum_{x \neq 2} |x| g(x) < \infty$. Nossos resultados não fornecem decaimento ℓ^1 , mas abrangem casos onde $\sum_{|x| < R} |x| g(x)$ tem divergências logarítmicas quando $R \rightarrow \infty$.

Também para sistemas quânticos afirma-se (x-y quântico) [16] que (3.16) é válido. Nos próximos capítulos obteremos (3.16) para dois modelos quânticos.

3.2 - Aplicações

A classe de sistemas para a qual vale o Teorema 3.2 é a mesma para a qual valem os resultados do Capítulo 2, em particular continuam válidas todas as considerações da seção 2.3.

Nesta seção vamos nos fixar no modelo de Heisenberg , com as mesmas definições e notação da seção 2.3, e analisaremos as funções de dois pontos.

Escolhemos então (com $J(x) = S_3(x)$ como em (2.37)) :

$$\Lambda_0 = \{0\} , \quad \Lambda_R = \{R\} , \quad D = S_2(0) , \quad B_R = S_1(R)$$

obtendo do Teorema 3.2, levando em conta (2.35):

$$|\omega(S_1(0) S_1(R))|^2 \leq \beta S^2 \frac{\text{const.}}{C_R(0)} \quad (3.17)$$

para $|R|$ grande.

Observe-se que como $C_R(0) \rightarrow \infty$ para $|R| \rightarrow \infty$ se $\int_{\mathbb{R}^d} E(p)^{-1} d^d p = \infty$, então $C_R(0) > C_R(0)^{1/2}$ para $|R|$ grande e portanto (3.11) toma a forma mais simples (3.17).

Analogamente, escolhendo-se $D = S_1(0)$, $B_R = S_2(R)$ obtemos (3.17) para

$$\omega(S_2(0) S_2(R))$$

O denominador de (3.17) é dado por:

$$C_R(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1 - \cos 2k \cdot R}{E(k)}$$

com $E(k)$ dado por (2.39). Aqui assumiremos que $E(k)$ não possui outros zeros além de $k=0$, e tomamos $E_+(k) = E(k)$ sem nos preocuparmos com outras singularidades de $C_R(0)$.

Fazendo $|R| \rightarrow \infty$ implica $C_R(0) \rightarrow \infty$, se $\int_{\mathbb{R}^d} d^d k E(k)^{-1} = \infty$ (Lema 3.3), a taxa de divergência dependendo da singularidade de $E(k)$ em $k=0$.

Se, por exemplo, $\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} |x|^p g(x) = \alpha < \infty$ então

$$E(k) \leq 2\alpha S^2 |k|^p \quad (\text{como em (2.41)})$$

e

$$C_R(0) \geq \frac{2\alpha S^2}{(2\pi)^\nu} \int_{B^v} \frac{1 - \cos 2k \cdot R}{|k|^\nu} d^v k \approx \text{const.} \ln |R|$$

para $|R|$ grande.

Se, por outro lado, o momento ν de $q(x)$ tiver divergências logarítmicas, ou seja, para algum $m \geq 1$

$$\sup_Q \frac{1}{\ln Q \ln_2 Q \dots \ln_m Q} \sum_{|x| < Q} |x|^\nu q(x) < \infty$$

o comportamento de $E(k)$, para $|k|$ pequeno, será

$$E(k) \leq \text{const.} |k|^\nu \ln |k|^{-1} \ln_2 |k|^{-1} \dots \ln_m |k|^{-1}$$

Pela Proposição 2.2, e então o comportamento de $C_R(0)$ será

$$C_R(0) \geq \text{cte.} \ln_{m+1} |R|, \quad \text{para } |R| \text{ grande.}$$

Resultados análogos valem para funções de correlação de $n \times m$ pontos ($|\Lambda_s| = n$, $|\Lambda_R| = m$), desde que obedeçam (3.2). Deve-se notar que (3.2) de maneira alguma esgota a álgebra de observáveis, nem mesmo subálgebras.

De fato, pode-se obter contra-exemplos em que o Teorema 3.2 é violado se não for satisfeita a condição (3.2). Por exemplo, colocando em (2.36)

$$I_1(x, y) = \begin{cases} 1 > 0 & \text{se } |x - y| = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$I_3(x, y) = \begin{cases} I_3 > 0 & \text{se } |x - y| = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

com $I_3 \gg I$, teremos o modelo de Heisenberg antiferromagnético, anisotrópico, para o qual vale ($\nu=2$) [41]

$$\lim_{|R| \rightarrow \infty} \left| \omega(S_3(0), S_3(R)) \right|^2 > 0$$

para β suficientemente grande.

Neste modelo existe magnetização espontânea (magnetização alternada ("staggered")) e correlação de longo alcance na direção 3, embora a simetria (contínua) de rotação em torno do eixo 3 não seja quebrada, pelo Teorema 2.1. Levando em conta que

$$S_3(R) = i [S_1(R), S_2(R)]$$

vemos que, neste caso, (3.11) não pode ser válido para todos os elementos das álgebras locais $\mathcal{O}_{\Lambda_0}$ e $\mathcal{O}_{\Lambda_R}$.

Finalmente, as estimativas para o decaimento de correlações podem também ser estendidas para sistemas de dimensionalidade restrita. A hipótese (iii) do Teorema 3.2 é substituída por (iii') de (2.47) e escolhe-se $f_R(x)$ como em (3.6), constante nas direções perpendiculares às de extensão infinita (vide seção 2.3).

CAPÍTULO 4

SISTEMAS NO CONTÍNUO

Neste capítulo discutiremos como os resultados obtidos nos Capítulos 2 e 3 podem ser estendidos para sistemas quânticos ou clássicos, definidos no contínuo $\mathbb{R}^V$, com o uso dos mesmos métodos lá empregados.

Sistemas físicos no contínuo geralmente apresentam dificuldades matemáticas adicionais em relação a sistemas que vivem numa rede, devido ao surgimento, às vezes inevitável, por exemplo, no caso quântico, de operadores não limitados, com os consequentes problemas de domínio, de operadores que não podem ser definidos localmente como funções, mas somente como distribuições, ou de funções não limitados, até não integráveis, no caso clássico.

Não é nossa intenção aqui discutir em detalhes estes problemas, nem tentar fazer uma caracterização mais detalhada de classes de sistemas que podem ser enquadrados nas nossas proposições, como pretendemos fazer na seção 2.3 do Capítulo 2 para sistemas na rede. O que queremos aqui é mostrar que nossos métodos podem, em princípio, ser aplicados para sistemas no contínuo, sendo que para cada caso deverão ser verificadas a existência e a exatidão das definições e manipulações de quantidades envolvidas na aplicação do método.

Vamos, novamente, supor que o sistema é descrito por uma álgebra C^* (quasi-local) de observáveis $\mathcal{O}$, ou seja, a cada $\Lambda \subset \mathbb{R}^V$, Λ limitado, associa-se uma álgebra $\mathcal{O}_\Lambda$ de observá-

veis, com $[A, B] = 0$ se $A \in \mathcal{O}_{\Lambda_1}$, $B \in \mathcal{O}_{\Lambda_2}$ e $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$. A álgebra $\mathcal{O}$ é dada por

$$\mathcal{O} = \overline{\bigcup_{\Lambda \subset \mathbb{R}^v} \mathcal{O}_{\Lambda}}$$

onde a união é tomada sobre todos os conjuntos limitados $\Lambda \subset \mathbb{R}^v$ e a barra significa o fechamento na norma.

Dado um estado $\omega(\cdot)$ em $\mathcal{O}$ podemos construir um espaço de Hilbert $\mathcal{H}_{\omega}$ e um mapeamento de $\mathcal{O}$ para operadores limitados em $\mathcal{H}_{\omega}$, que é uma representação da álgebra $\mathcal{O}$. Tal construção é conhecida na literatura como construção GNS (Gelfand, Naimark, Segal) [51].

Em $\mathcal{H}_{\omega}$ temos definido um grupo de automorfismos $\alpha_t, t \in \mathbb{R}$, que são as translações temporais do sistema. Formalmente

$$\alpha_t A = e^{itH} A e^{-itH} \quad \text{com} \quad A \in \mathcal{O}$$

e onde H é a Hamiltoniana do sistema.

Se o estado ω for invariante por α_t , ou seja

$$\omega(\alpha_t A) = \omega(A), \quad \forall A \in \mathcal{O}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

então α_t é representado por um operador unitário agindo em $\mathcal{H}_{\omega}$. Estados que satisfazem a condição KMS (Kubo, Martin, Schwinger) são deste tipo (vide Apêndice A).

A simetria contínua do sistema é dada por um outro grupo de automorfismos de $\mathcal{O}$, $\sigma_s, s \in \mathbb{R}$, e suporemos que σ_s é localmente implementado em $\mathcal{H}_{\omega}$, ou seja, existe uma distribuição a valor operador $\Gamma(x)$ tal que para todo $\Lambda \subset \mathbb{R}^v$ limitado e $A \in \mathcal{O}_{\Lambda}$

$$\sigma_s A = e^{is\Gamma(x)} A e^{-is\Gamma(x)}$$

onde $c \in C_0^\infty(\mathbb{R}^v)$, com $c(x) = 1$ para $x \in \Lambda$ e

$$\Gamma(c) = \int_{\mathbb{R}^v} d^v x \, c(x) \Gamma(x)$$

A simetria do sistema pode ser expressa pela relação:

$$\lim_{c(x) \rightarrow 1} \dot{\Gamma}(c) = \lim_{c(x) \rightarrow 1} \left. \frac{d}{dt} \alpha_t \Gamma(c) \right|_{t=0} = 0$$

o que é uma maneira de se dizer que σ_S comuta com a Hamiltoniana do sistema.

Para podermos trabalhar com geradores locais de σ_S que não sejam singulares como $\Gamma(x)$ (que é assumida ser uma distribuição), basta definir

$$J(x) = \int_{\mathbb{R}^v} d^v y \, h(x-y) \Gamma(y)$$

onde $h(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^v)$, $h(x) \geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}^v} h(x) d^v x = 1$. A

função $h(x-y)$ pode ser encarada como uma aproximante "bem comportada" da distribuição $\delta(x-y)$ (δ de Dirac).

O análogo da definição (2.6) do Capítulo 2, no presente caso, é:

$$\sigma_S(f)A = e^{isJ(f)} A e^{-isJ(f)}$$

com

$$J(f) = \int_{\mathbb{R}^v} d^v x \, J(x) f(x)$$

A desigualdade de Bogoliubov, ponto de partida de nosso método, se escreve (vide Apêndice A e ref. [29]):

$$\left| \frac{d}{ds} \omega(\sigma_s(f)A) \Big|_{s=0} \right|^2 \leq \beta \, \omega\left(\frac{\tilde{A}A + A\tilde{A}^*}{2}\right) \, \omega(K) \quad (4.1)$$

onde

$$\omega(K) = \int_{\mathbb{R}^v} \int_{\mathbb{R}^v} d^v x \, d^v y \, f(x) f(y) \, j(x, y)$$

com

$$j(x, y) = -i \, \omega([J(x), \dot{J}(y)]) \quad \text{e} \quad \dot{J}(y) = \frac{d}{dt} \alpha_t J(y) \Big|_{t=0}$$

Podemos agora enunciar:

Proposição 4.1:

Suponha que $j(x, y)$ satisfaça:

- (i) $j(x, y)$ é mensurável e $j(x, y) = j(y, x)$ quase sempre ;
- (ii) $j(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^v)$ e $\int_{\mathbb{R}^v} j(x, y) d^v y = 0$ quase sempre ;
- (iii) existe uma função $q \in L^1(\mathbb{R}^v)$ tal que

$$|j(x, y)| \leq q(x - y) \quad \text{quase sempre}$$

$$\text{e} \quad \int_{1/\delta \leq |x| \leq \delta} \frac{d^v x}{E(x)} = \infty \quad \text{para todo} \quad \delta > 0 \quad ,$$

onde

$$E(x) = \int_{\mathbb{R}^v} (1 - \cos x \cdot y) q(y) d^v y$$

Então o estado $\omega(\cdot)$, satisfazendo a desigualdade de Bogoliubov (4.1) é invariante pelo grupo de simetria σ_s .

A demonstração é inteiramente análoga à do Teorema 2.1 (feitas as ressalvas contidas no 3º parágrafo do início deste Capítulo), com uma escolha de $C_\varepsilon(x)$ um pouco diferente de (2.20):

$$C_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^v} \frac{d^v k}{(2\pi)^v} \frac{e^{i k \cdot x}}{E(k) + \varepsilon} \phi(k)$$

com $\phi(k) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^v)$, $\phi(k) = \phi(-k)$, $\phi(k) = 0$ para $|k| > \delta$ para algum $\delta > 0$ e $\phi(0) = 1$.

A função $\phi(k)$ é introduzida para evitar-se divergências ultra-violetas, que não existem no caso de um sistema na rede. Note-se que $C_\varepsilon(x)$ é infinitamente diferenciável e decresce exponencialmente quando $|x| \rightarrow \infty$ para qualquer $\varepsilon > 0$ o que assegura uma boa definição de $J(f)$, na maioria dos casos.

O análogo no contínuo do Teorema 3.2 é:

Proposição 4.2:

Seja $A \in \mathcal{A}_{\Lambda_0}$, $B \in \mathcal{A}_{\Lambda_R}$, com $\Lambda_0 \cap \Lambda_R = \emptyset$ e

$A = \frac{d}{ds} \sigma_s D \Big|_{s=0}$ para algum $D \in \mathcal{A}_{\Lambda_0}$. Então, para qualquer estado $\omega(\cdot)$ num sistema definido no contínuo $\mathbb{R}^v$, satisfazendo as hipóteses da Proposição 4.1, temos:

$$|\omega(AB_R)|^2 \leq \beta \|D\| \|B_R\| \left\{ \frac{Q_1(\Lambda_0, \Lambda_R)}{C_R(0)} + \frac{Q_2(\Lambda_0, \Lambda_R)}{C_R(0)^{3/2}} \right\}$$

onde $Q_1(\Lambda_0, \Lambda_R)$ e $Q_2(\Lambda_0, \Lambda_R)$ são constantes dependentes de Λ_0 , Λ_R mas independentes de R e onde

$$C_R(0) = \int_{\mathbb{R}^v} \frac{d^v k}{(2\pi)^v} \frac{1 - \cos 2k \cdot R}{E(k)} \phi(k)$$

com $\phi(k)$ definido acima.

Novamente a demonstração é semelhante a do Teorema 3.2, onde agora:

$$C_R(x) = \int_{\mathbb{R}^v} \frac{d^v k}{(2\pi)^v} \frac{\cos k \cdot x - \cos k \cdot (x - 2R)}{E(k)} \phi(k)$$

Aqui também, de acordo com o Lema 3.3,

$$\lim_{|R| \rightarrow \infty} C_R(0) = \infty$$

desde que
$$\int_{|k| < \delta} \frac{d^v k}{E(k)} = \infty$$

o que implica no decaimento da correlação $\omega(AB_R)$ para $|R|$ grande.

Deve-se notar que as Proposições 4.1 e 4.2 são também válidas para sistemas clássicos definidos no contínuo $\mathbb{R}^v$, bastando substituir comutadores por parênteses de Poisson.

Aplicações para gases de Bose interagentes podem ser encontradas em, por exemplo, [10, 21, 28]. É interessante notar que para sistemas com grupo de simetria abeliano a ausência de condensação de Bose-Einstein em uma e duas dimensões não depende do alcance da interação entre as partículas [61].

CAPÍTULO 5

DECAIMENTO DE CORRELAÇÕES PARA MODELOS QUÂNTICOS

Conforme mencionamos no Capítulo 3, nossa estimativa (3.11) para o decaimento de funções de correlação pode ser melhorada se considerarmos modelos específicos. Tais estimativas melhoradas foram obtidas, pela primeira vez, para modelos de "spins" clássicos em $\mathbb{Z}^2$, com simetria $SO(N)$ e interação de vizinhos próximos por O.A. Mc Bryan e T. Spencer [38]. Fröhlich e Pfister assinalaram em [16] que o mesmo tipo de estimativa poderia ser obtida para o modelo $x - y$ quântico, porém não apresentaram uma demonstração.

Neste Capítulo apresentaremos estimativas do tipo das contidas em [38] para duas classes de modelos quânticos numa rede: modelo $x - y$ (ou Heisenberg) quântico e o rotor quântico. Usaremos o mesmo tipo de técnica de [38], que corresponde a uma forma integral dos métodos do Capítulo 3. O mesmo tipo de técnica nos permitirá mostrar, na seção 5.3, o confinamento permanente de "quarks" estáticos numa Teoria de "Gauge" puro na rede, com o grupo de simetria $U(1)$ (abeliano) em dimensão $\nu=3$ (2 espaciais + 1 temporal).

5.1 - Modelo $x - y$ quântico

Consideremos operadores de "spin" $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$, $x \in \mathbb{Z}^2$, com as relações de comutação:

$$[S_i(x), S_j(y)] = i \delta_{x,y} \epsilon_{ijk} S_k(x)$$

e

$$\sum_{i=1}^3 S_i(\kappa)^2 = S(S+1)$$

Definimos, da maneira usual

$$S_{\pm}(\kappa) = S_y(\kappa) \pm i S_z(\kappa)$$

A Hamiltoniana do sistema, definido numa região retangular finita $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$, é dada por:

$$\begin{aligned} H_{\Lambda} &= J \sum_{\langle x, y \rangle \in \Lambda} \{ S_1(x) S_1(y) + S_2(x) S_2(y) \} = \\ &= \frac{J}{2} \sum_{\langle x, y \rangle \in \Lambda} \{ S_+(x) S_-(y) + S_-(x) S_+(y) \} \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde $\langle x, y \rangle$ representam pares de vizinhos próximos em Λ , com condições de contorno periódicos (Λ é um torus).

A função de dois pontos para o volume Λ é:

$$\begin{aligned} F_{\Lambda}(R) &\equiv \langle S_1(0) S_1(R) + S_2(0) S_2(R) \rangle_{\Lambda} = \\ &= \frac{1}{2} \langle S_+(0) S_-(R) + S_-(0) S_+(R) \rangle_{\Lambda} \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde

$$\langle A \rangle_{\Lambda} = \frac{T_{\Lambda} A \bar{e}^{-\beta H_{\Lambda}}}{T_{\Lambda} \bar{e}^{-\beta H_{\Lambda}}} = \frac{1}{Z} T_{\Lambda} A \bar{e}^{-\beta H_{\Lambda}}$$

A essência do método consiste em se fazer uma transformação ortogonal nos "spins" (rotação em torno do eixo 3 por ângulos imaginários), ou seja, definirmos:

$$U(f) = \prod_{x \in \Lambda} e^{f(x) S_3(x)} \quad e \quad U(f)^{-1} = \prod_{x \in \Lambda} e^{-f(x) S_3(x)} \quad (5.3)$$

onde $f(x)$ é uma função $f:\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$, a ser definida.

Note-se que pelo fato de $S_3(x)$ serem operadores limitados, $U(f)$ e $U(f)^{-1}$ estão bem definidos como uma série convergente na norma de operador.

Os operadores S_+ e S_- se transformam como:

$$U(f) S_{\pm}(x) U(f)^{-1} = e^{\pm f(x)} S_{\pm}(x) \quad (5.4)$$

enquanto a Hamiltoniana transformada é:

$$\begin{aligned} U(f) H_{\Lambda} U(f)^{-1} &= J \sum_{\langle x,y \rangle \in \Lambda} \cosh[f(x) - f(y)] \{ S_1(x) S_1(y) + S_2(x) S_2(y) \} + \\ &+ i J \sum_{\langle x,y \rangle \in \Lambda} \sinh[f(x) - f(y)] \{ S_2(x) S_1(y) - S_1(x) S_2(y) \} \end{aligned} \quad (5.5)$$

que pode ser reescrita como

$$U(f) H_{\Lambda} U(f)^{-1} = H_{\Lambda} + \delta H_{\Lambda} + i H'_{\Lambda} \quad (5.6)$$

onde

$$\delta H_{\Lambda} = J \sum_{\langle x,y \rangle \in \Lambda} \{ \cosh[f(x) - f(y)] - 1 \} \{ S_1(x) S_1(y) + S_2(x) S_2(y) \} \quad (5.7)$$

$$H'_{\Lambda} = J \sum_{\langle x,y \rangle \in \Lambda} \sinh[f(x) - f(y)] \{ S_2(x) S_1(y) - S_1(x) S_2(y) \} \quad (5.8)$$

Utilizando a propriedade cíclica do traço, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \langle S_-(0) S_+(R) \rangle_\Lambda &= \frac{1}{Z} \operatorname{Tr} \left\{ U(t) S_-(0) S_+(R) e^{\beta H_\Lambda} U(t)^{-1} \right\} = \\ &= \frac{1}{Z} e^{-[\phi(0) - \phi(R)]} \operatorname{Tr} \left\{ S_-(0) S_+(R) e^{-\beta(H_\Lambda + \delta H_\Lambda + i H'_\Lambda)} \right\} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Para estimarmos (5.9) empregaremos a seguinte proposição:

Proposição 5.1

Sejam $a_1, a_2, \dots, a_{2m}$ operadores limitados atuando num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então:

$$\left| \operatorname{Tr} (a_1 a_2 \dots a_{2m}) \right| \leq \prod_{i=1}^{2m} \left| \operatorname{Tr} (a_i \underbrace{a_i^* a_i a_i^* \dots a_i a_i^*}_{2m}) \right|^{\frac{1}{2m}} \quad (5.10)$$

onde a_i^* é o operador adjunto de a_i .

A Proposição 5.1 é uma aplicação imediata do Teorema 4.1, da referência [31] ("Abstract Chessboard Estimates"), e pode ser entendida como uma versão não comutativa da desigualdade de Hölder.

Aplicamos a fórmula de Trotter em (5.9) obtendo:

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} \left\{ S_-(0) S_+(R) e^{-\beta(H_\Lambda + \delta H_\Lambda + i H'_\Lambda)} \right\} &= \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \operatorname{Tr} \left\{ S_-(0) S_+(R) \left(e^{-\frac{\beta}{2L}(H_\Lambda + \delta H_\Lambda)} e^{-i \frac{\beta}{2L} H'_\Lambda} \right)^{2L} \right\} \end{aligned}$$

Se chamarmos $a_1 = S_-(0)$, $a_2 = S_+(R)$,

$$a_i = e^{-\frac{\beta}{2\ell}(H_\Lambda + \delta H_\Lambda)} e^{-i \frac{\beta}{2\ell} H'_\Lambda}$$

para $i = 3, \dots, 2\ell + 2$, e fizermos $m = \ell + 1$, a aplicação de (5.10) nos dá:

$$\begin{aligned} & |T_\Lambda \{ S_-(0) S_+(R) e^{-\beta(H_\Lambda + \delta H_\Lambda + i H'_\Lambda)} \}| \leq \\ & \leq \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left\{ |T_\Lambda (S_-(0) S_+(0))|^{\ell+1} \right|^{\frac{1}{2\ell+2}} \times |T_\Lambda (S_+(R) S_-(R))|^{\ell+1} \right|^{\frac{1}{2\ell+2}} \times \\ & \times |T_\Lambda (e^{-\frac{\beta}{2\ell}(H_\Lambda + \delta H_\Lambda)} e^{-i \frac{\beta}{2\ell} H'_\Lambda} e^{i \frac{\beta}{2\ell} H'_\Lambda} e^{-\frac{\beta}{2\ell}(H_\Lambda + \delta H_\Lambda)})^{\ell+1} \right|^{\frac{1}{2\ell+2}} \leq \\ & \leq \|S_+(0)\|^4 \lim_{\ell \rightarrow \infty} |T_\Lambda (e^{-\beta(1+\frac{1}{2})(H_\Lambda + \delta H_\Lambda)})|^{\frac{1}{1+1/2}} = \\ & = \|S_+(0)\|^4 T_\Lambda e^{-\beta(H_\Lambda + \delta H_\Lambda)} \end{aligned} \quad (5.11)$$

onde usamos

$$\|S_-\| = \|S_+\| \quad \text{e} \quad \|S_\pm(0)\| = \|S_\pm(R)\|$$

Portanto, obtemos para (5.9)

$$|\langle S_-(0) S_+(R) \rangle_\Lambda| \leq \frac{1}{2} e^{-[\phi(0) - \phi(R)]} \|S_+(0)\|^4 T_\Lambda e^{-\beta(H_\Lambda + \delta H_\Lambda)} \quad (5.12)$$

Mas, como (vide, por exemplo, ref. [42])

$$\begin{aligned} T_\Lambda e^{-\beta(H_\Lambda + \delta H_\Lambda)} &\leq T_\Lambda \left(e^{-\beta H_\Lambda} e^{-\beta \delta H_\Lambda} \right) \leq \\ &\leq \| e^{-\beta \delta H_\Lambda} \| T_\Lambda e^{-\beta H_\Lambda} \leq e^{\beta \|\delta H_\Lambda\|} \mathbb{Z} \end{aligned}$$

vemos que (5.12) reduz-se a :

$$|\langle S_-(0) S_+(R) \rangle_\Lambda| \leq \|S_+(0)\|^4 e^{-[f(0)-f(R)]} e^{\beta \|\delta H_\Lambda\|} \quad (5.13)$$

Obtem-se uma estimativa idêntica para $\langle S_+(0) S_-(R) \rangle_\Lambda$ apenas substituindo $f(x)$ por $-f(x)$ e então resulta para (5.2):

$$|F_\Lambda(R)| \leq \|S_+(0)\|^4 e^{-[f(0)-f(R)]} e^{\beta \|\delta H_\Lambda\|} \quad (5.14)$$

A norma de δH_Λ sendo limitada por

$$\|\delta H_\Lambda\| \leq |\mathcal{I}| \left[\|S_+(0)\|^2 + \|S_-(0)\|^2 \right] \sum_{\langle x, y \rangle \in \Lambda} \{ \cosh [f(x) - f(y)] - 1 \} =$$

$$= 2 |\mathcal{I}| S^2 \sum_{\langle x, y \rangle \in \Lambda} \{ \cosh [f(x) - f(y)] - 1 \}$$

(5.14) nos dá:

$$|F_\Lambda(R)| \leq \|S_+(0)\|^4 e^{-[f(0)-f(R)]} e^{2\beta |\mathcal{I}| S^2 \sum_{\langle x, y \rangle \in \Lambda} \{ \cosh [f(x) - f(y)] - 1 \}} \quad (5.15)$$

A escolha de $f(x)$ será análoga a (3.7) do Capítulo 3:

$$f(x) = \frac{C_{E,\Lambda}^E(x)}{2\beta |\mathcal{I}| S^2}$$

com

$$\begin{aligned} C_{R,\Lambda}^{\varepsilon}(x) &= \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{p \in \Lambda^*} \frac{\cos p \cdot x - \cos p \cdot (x-R)}{E(p) + \varepsilon} = \\ &= \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{p \in \Lambda^*} \frac{1 - e^{-i p \cdot R}}{E(p) + \varepsilon} e^{i p \cdot x} \end{aligned} \quad (5.16)$$

onde Λ^* é a rede dual de Λ , por exemplo, se escolhermos

$$\Lambda = \{-N, -N+1, \dots, N\} \times \{-N, -N+1, \dots, N\} \quad (5.17)$$

com

$$|\Lambda| = (2N+1)^2$$

teremos

$$\Lambda^* = \left\{ p = (p^1, p^2) = \frac{2\pi x}{2N+1}, \quad x \in \Lambda \right\} \quad (5.18)$$

$E(p)$ é dado por

$$E(p) = \sum_{|x|=1} (1 - \cos p \cdot x) = 4 - 2 \cos p^1 - 2 \cos p^2 \quad (5.19)$$

e $\varepsilon > 0$ é uma constante arbitrária.

A estimativa final para o lado direito de (5.15) é o correspondente a estimativa (3.15) do Capítulo 3, que exprimiremos no lema seguinte:

Lema 5.2:

Seja

$$f(x) = \frac{1}{\beta a} C_{R,\Lambda}^{\varepsilon}(x)$$

com $C_{R,\Lambda}^{\varepsilon}(x)$ dado por (5.16) e $a > 0$ uma constante arbitrária. Dado $0 < \delta < 1$ existe $\beta_0(\delta, a)$ tal que para qualquer $\beta \geq \beta_0(\delta, a)$ e quaisquer ε, R, Λ temos:

$$a \sum_{\langle x, y \rangle \in \Lambda} \{ \cosh [f(x) - f(y)] - 1 \} \leq \frac{1 + \delta}{a \beta^2} C_{R, \Lambda}^{\varepsilon}(0) \quad (5.20)$$

Demonstração:

Temos:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \frac{1}{\beta a} |C_{R, \Lambda}^{\varepsilon}(x) - C_{R, \Lambda}^{\varepsilon}(y)| = \\ &= \frac{1}{\beta a} \left| \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{\substack{p \in \Lambda^* \\ p \neq 0}} \frac{(1 - e^{ip \cdot (x-y)})(1 - e^{ip \cdot R})}{E(p) + \varepsilon} \right| \leq \frac{2}{\beta a} \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{\substack{p \in \Lambda^* \\ p \neq 0}} \frac{|1 - e^{ip \cdot (x-y)}|}{E(p)} \end{aligned}$$

Usando as desigualdades $|\sin \theta| \leq |\theta|$, $1 - \cos \theta \geq \frac{2}{\pi^2} \theta^2$ para $|\theta| \leq \pi$, obtemos para $|x - y| = 1$ (vizinhos próximos):

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \frac{2}{\beta a} \frac{1}{|\Lambda|} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\substack{p \in \Lambda^* \\ p \neq 0}} \frac{|1 - \cos p \cdot (x-y)|^{1/2}}{(1 - \cos p') + (1 - \cos p'')} \leq \\ &\leq \frac{2}{\beta a} \frac{\pi^2}{|\Lambda|} \sum_{\substack{p \in \Lambda^* \\ p \neq 0}} \frac{|p'|}{(p')^2 + (p'')^2} \leq \frac{4}{\beta a} \end{aligned} \quad (5.21)$$

uniformemente em $|x - y| = 1$, ε , R e Λ

Por outro lado, usando a convexidade de $|\sinh \xi|$ obtemos

$$|\sinh \xi| \leq \left| \frac{\sinh \xi_0}{\xi_0} \right| |\xi|$$

para $|\xi| \leq |\xi_0|$ o que implica em

$$|\sinh \xi| \leq (1 + \delta)^{1/2} |\xi| \quad (5.22)$$

com $0 < \delta < 1$ se $|\xi_0|$ for suficientemente pequeno.

Então:

$$\begin{aligned} a \sum_{\langle x, y \rangle \in \Lambda} \{ \cosh [f(x) - f(y)] - 1 \} &= 2a \sum_{\langle x, y \rangle \in \Lambda} \sinh^2 \left(\frac{f(x) - f(y)}{2} \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} a (1 + \delta) \sum_{\langle x, y \rangle \in \Lambda} [f(x) - f(y)]^2 \end{aligned} \quad (5.23)$$

para $\beta \geq \beta_0(\delta a)$ por causa de (5.21) e (5.22).

Mas como

$$\sum_{\langle x, y \rangle \in \Lambda} [f(x) - f(y)]^2 = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{p \in \Lambda^*} |\tilde{f}(p)|^2 E(p) \quad (5.24)$$

com
$$\tilde{f}(p) = \sum_{x \in \Lambda} e^{-i p \cdot x} f(x)$$

e
$$f(x) = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{p \in \Lambda^*} e^{i p \cdot x} \tilde{f}(p)$$

e levando em conta que

$$|\tilde{f}(p)|^2 = \frac{2}{\beta^2 a^2} \frac{1 - \cos p \cdot R}{[E(p) + \varepsilon]^2} \quad (5.25)$$

obtemos a tese (5.20)

c.q.d.

Com o auxílio do Lema 5.2 e da definição (5.16), obtemos para (5.15):

$$|F_\Lambda(R)| \leq \|S_+(0)\|^4 e^{-\frac{1-\delta}{2\beta|\Lambda|S^2} C_{R,\Lambda}^\varepsilon(0)}$$

com

$$C_{R,\Lambda}^\varepsilon(0) = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{p \in \Lambda^*} \frac{1 - \cos p \cdot R}{E(p) + \varepsilon}$$

Tomando o limite $\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^2$, obtemos:

$$|F(R)| \leq \|S_+(0)\|^4 \exp \left\{ - \frac{1-\delta}{2\beta(1)\delta^2} C_R^\varepsilon(0) \right\}$$

onde

$$F(R) = \lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^2} F_\Lambda(R)$$

e

$$C_R^\varepsilon(0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{B^2} d^2\gamma \frac{1 - \cos \gamma \cdot R}{E(\gamma) + \varepsilon} = \lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^2} \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{\gamma \in \Lambda^*} \frac{1 - \cos \gamma \cdot R}{E(\gamma) + \varepsilon}$$

(como $[E(p) + \varepsilon]^{-1}$, $\varepsilon > 0$, é regular em $p=0$, o segundo limite acima está bem definido).

Notando que

$$\frac{1 - \cos \gamma \cdot R}{E(\gamma) + \varepsilon} \leq \frac{|\gamma|^2 |R|^2}{E(\gamma)} \in L^1(B^2)$$

e usando o Teorema da Convergência Dominada para tomar o limite $\varepsilon \searrow 0$, obtemos finalmente:

$$|F(R)| \leq \|S_+(0)\|^4 \exp \left\{ - \frac{1-\delta}{2\beta(1)\delta^2} C_R(0) \right\}$$

com

$$C_R(0) = \int_{B^2} \frac{d^2\gamma}{(2\pi)^2} \frac{1 - \cos \gamma \cdot R}{E(\gamma)} \simeq \frac{1}{2\pi} \ln |R| \quad (5.26)$$

para $|R|$ grande.

O que acabamos de fazer foi demonstrar o seguinte:

Teorema 5.3:

Considere o modelo x-y quântico de spin S , constante de acoplamento J e interação entre vizinhos próximos.

Dado $0 < \delta < 1$ existe $\beta_0(\delta, |J|, S) < \infty$ tal que para todo $\beta \geq \beta_0$ vale a estimativa

$$|\langle S_1(0) S_1(R) + S_2(0) S_2(R) \rangle| \leq 16 S^4 \exp \left\{ -\frac{1-\delta}{2|J|S^2\beta} C_R(0) \right\} \quad (5.27)$$

com $C_R(0) \simeq \frac{1}{2\pi} \ln |R|$, para $|R|$ grande, e onde $\langle . \rangle$ é o valor esperado para o sistema de volume infinito.

É claro que o Teorema 5.3 continua válido (com outras constantes) para o modelo de Heisenberg, ou seja, se a acrescentarmos uma interação do tipo

$$J' \sum_{\langle x, y \rangle \in \Lambda} S_x(\pi) S_y(\eta)$$

à Hamiltoniana (5.1).

Podemos também estender (5.27), com modificações óbvias, para o caso em que o acoplamento é de alcance finito, ou seja, para Hamiltonianas do tipo:

$$H_\Lambda = \sum_{x, y \in \Lambda} J(|x-y|) \{ S_1(x) S_1(y) + S_2(x) S_2(y) \}$$

com $J(|x-y|) = 0$ se $|x-y| > Q = \text{constante}$.

Um problema aberto consiste em obter-se (5.27) para o caso de alcance infinito, mesmo que $J(|x-y|) \xrightarrow{|x-y| \rightarrow \infty} 0$ muito rapidamente.

Observe-se, finalmente, que (5.27) é uma estimativa melhor do que (3.11) porém é dependente de detalhes do modelo e da temperatura β^{-1} .

5.2 - Rotor quântico

A cada $x \in \Lambda$, com Λ dado por (5.17), associamos uma cópia do espaço de Hilbert $\mathcal{H} = L^2[-\pi, \pi]$ e operadores autoadjuntos

$$p(x) = i \frac{\partial}{\partial \theta(x)},$$

com domínio no conjunto de funções periódicas em $[-\pi, \pi]$, e $\theta(x) \in [-\pi, \pi]$

A Hamiltoniana para a região Λ é dada por:

$$H_\Lambda = \sum_{x \in \Lambda} p(x)^2 + J \sum_{\langle x, y \rangle \in \Lambda} \cos(\theta(x) - \theta(y)) \quad (5.28)$$

Este modelo corresponde a um rotor plano clássico mais um termo de energia cinética quantizada, daí o nome de rotor quântico.

A Hamiltoniana H_Λ é invariante por uma rotação em todos os pontos $x \in \Lambda$, de um mesmo ângulo φ . Esta transformação é implementada pelo operador unitário

$$U = e^{i\varphi \sum_{x \in \Lambda} p(x)} \quad (5.29)$$

Consideremos a função de correlação:

$$F_\Lambda(r) = \langle \cos[\theta(0) - \theta(r)] \rangle_\Lambda = \frac{1}{Z} T_\Lambda \{ \cos[\theta(0) - \theta(r)] e^{-\beta H_\Lambda} \} \quad (5.30)$$

onde

$$Z = T_\Lambda e^{-\beta H_\Lambda}$$

Devido a invariância do modelo pela transformação unitária em $\mathcal{H}$, $\theta(\pi) \rightarrow -\theta(\pi)$, podemos escrever:

$$F_{\Lambda}(\rho) = \left\langle e^{i[\theta(\rho) - \theta(\rho)]} \right\rangle_{\Lambda} = \frac{1}{Z} T_{\Lambda} \left\{ e^{i[\theta(\rho) - \theta(\rho)]} e^{-\beta H_{\Lambda}} \right\} \quad (5.31)$$

Nosso próximo passo, seguindo o método utilizado na seção anterior para o modelo $x - y$, seria a realização de uma transformação ortogonal (o análogo (5.3)), que consiste numa rotação em $\mathcal{H}$ de um ângulo imaginário puro (como em (5.9)). Acontece que, no presente caso, o gerador de rotações é o operador $p(x)$, que não é limitado, o que implica em termos que tomar cuidados adicionais na definição de $U(f)$, o análogo de (5.3).

Para evitarmos complicações técnicas adicionais envolvidas na manipulação de operadores não limitados, adotaremos um procedimento alternativo (que também poderia ter sido empregado na seção 5.1), que envolve a aplicação de teoria de funções analíticas.

Dada uma função $a(x)$ com $x \in \mathbb{Z}^2$, $a(x)$ real, podemos definir o operador unitário

$$U_a = e^{-i \sum_{x \in \Lambda} a(x) p(x)}$$

Por meio da transformação unitária U_a definimos uma função de $|\Lambda|$ variáveis reais, $G: \mathbb{R}^{|\Lambda|} \rightarrow \mathbb{C}$, por:

$$G(\rho) = \frac{1}{Z} T_{\Lambda} \left\{ U_a e^{i[\theta(\rho) - \theta(\rho)]} e^{-\beta H_{\Lambda}} U_a^{-1} \right\} \quad (5.32)$$

Agora, por um lado temos:

$$G(a) = \frac{1}{Z} e^{i[a(o) - a(R)]} T_A \left\{ e^{i[\theta(o) - \theta(R)]} e^{-\beta H_A^a} \right\}$$

onde

$$H_A^a = U_a H_A U_a^{-1} = H_A + \delta H_A^a + H_A^{1a}$$

com

$$\delta H_A^a = J \sum_{\langle x, y \rangle \in A} \{ \cos[a(x) - a(y)] - 1 \} \cos[\theta(x) - \theta(y)] \quad (5.33)$$

$$H_A^{1a} = J \sum_{\langle x, y \rangle \in A} \sin[a(x) - a(y)] \sin[\theta(x) - \theta(y)]$$

e H_A dado por (5.28).

Por outro lado, levando em conta que

$$T_A \{ U A U^{-1} \} = T_A A$$

vemos que a função $G(a)$ é constante para a real, ou seja:

$$G(a) = \text{constante} = G(o) = F_A(R) \quad (5.34)$$

Tendo em vista a forma de (5.33) é claro que $G(a)$ pode ser estendida analiticamente para $a \in \mathbb{C}^{|\Lambda|}$ e, por um conhecido teorema sobre funções analíticas, $G(a)$ é constante para $a \in \mathbb{C}^{|\Lambda|}$ (vide por exemplo em [43] "The Edge of the Wedge Theorem").

Então, se escolhermos $a(x) = -if(x)$, teremos o análogo de (5.9):

$$F_A(R) = \frac{1}{Z} e^{-[f(o) - f(R)]} T_A \left\{ e^{i[\theta(o) - \theta(R)]} e^{-\beta(H_A + \delta H_A + i H_A^{1a})} \right\}$$

onde

$$\delta H_A = J \sum_{\langle x, y \rangle \in A} \{ \cosh [f(x) - f(y)] - 1 \} \cos [\theta(x) - \theta(y)] \quad (5.35)$$

$$H'_A = -J \sum_{\langle x, y \rangle \in A} \sinh [f(x) - f(y)] \sin [\theta(x) - \theta(y)]$$

Manipulações análogas às da seção 5.1, com o auxílio da fórmula de Trotter e da Proposição 5.1, nos fornece:

$$|F_A(R)| \leq e^{[f(0) - f(R)]} e^{\beta |J| \sum_{\langle x, y \rangle \in A} \{ \cosh [f(x) - f(y)] - 1 \}} \quad (5.36)$$

Com a escolha

$$f(x) = \frac{1}{\beta |J|} C_{R,A}^\epsilon(x)$$

vale o Lema 5.2 e obtemos analogamente (após tomar os limites $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^2$, $\epsilon \searrow 0$):

$$|F(R)| \leq e^{-\frac{1-\delta}{\beta |J|} C_R(0)} \quad (5.37)$$

com $C_R(0)$ dado por (5.26). Portanto temos aqui o análogo do Teorema 5.3 para o rotor quântico, com (5.27) substituído por (5.37) e $\beta_0 = \beta_0(\delta, |J|)$.

5.3 - Teorias de "gauge" na rede.

Vamos considerar uma Teoria Hamiltoniana de "Gauge" puro, com grupo de simetria $U(1)$, definida numa rede bidimensional. Como é sabido, tal teoria é equivalente a uma Teoria de

"Gauge" $U(1)$, na região Euclideana, na rede tridimensional, com o espaçamento de rede na direção temporal igual a zero (tempo contínuo) (vide, por exemplo, [53], [54] ou [62] e referências contidas). Seguiremos de perto o esquema e a notação de [54].

Usaremos a rede quadrada $\mathbb{Z}^2$, de espaçamento unitário. O versor na direção k , $k=1,2$ é representado por $\hat{k}$. Por $\mathbb{Z}^{2*}$ denotaremos o conjunto de elos orientados da rede $\mathbb{Z}^2$, ou seja:

$$\mathbb{Z}^{2*} = \{ \ell = (x, x + \hat{k}), x \in \mathbb{Z}^2, k = 1, 2 \} \quad (5.38)$$

A cada elo $\ell = (x, x + \hat{k})$ associamos uma cópia do espaço de Hilbert $L^2[0, 2\pi]$, variáveis angulares $0 \leq \theta(x, k) \leq 2\pi$ e operadores de momento angular

$$L(x, k) = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \theta(x, k)} \quad (5.39)$$

com o domínio dado pelas funções periódicas em $[0, 2\pi]$.

O operador Hamiltoniano do sistema é dado por:

$$H = -\frac{g^2}{2} \sum_{x, k=1,2} \frac{\partial^2}{\partial \theta(x, k)^2} - \frac{1}{g^2} \sum_{x, k > j} \cos[\theta(x, k) + \theta(x + \hat{k}, j) - \theta(x + \hat{j}, k) - \theta(x, j)] \quad (5.40)$$

Para simplificar a notação, às vezes escreveremos também;

$$H = H_E + H_M = \frac{g^2}{2} \sum_{\ell} L_{\ell}^2 - \frac{1}{g^2} \sum_p \cos \theta_p \quad (5.41)$$

onde ℓ são os elos orientados da rede $\mathbb{Z}^2$, $L_{\ell} \equiv L(x, k)$

$$\Theta_P = \sum_{\ell \in P} \Theta_\ell = \Theta(x, k) + \Theta(x + \hat{k}, j) - \Theta(x + \hat{j}, k) - \Theta(x, j)$$

com $\Theta_\ell = -\Theta_{-\ell}$ e onde P é uma plaqueta orientada da rede, representada na figura abaixo:

Uma transformação de "gauge" local $U(\underline{\psi})$ é definida da seguinte maneira: seja $\underline{\psi}$ uma função de $\mathbb{Z}^2$ para $[0, 2\pi]$ isto é,

$$\underline{\psi} : x \in \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \psi(x) \in [0, 2\pi] \quad (5.42)$$

Então $U(\underline{\psi})$ agindo numa função de $\Theta_\ell = \Theta(x, k)$ é dada por:

$$U(\underline{\psi}) f(\{\Theta(x, k)\}) = f(\{\Theta(x, k) + \psi(x) - \psi(x + \hat{k})\}) \pmod{2\pi} \quad (5.43)$$

A transformação de "gauge" $U(\underline{\psi})$ é implementada pelo operador

$$\begin{aligned} U(\underline{\psi}) &= \prod_{x, k=1,2} e^{i(\psi(x) - \psi(x + \hat{k})) L(x, k)} \\ &= e^{i \sum_{x, k} [\psi(x) - \psi(x + \hat{k})] L(x, k)} = e^{i \sum_x \psi(x) \sum_k (L(x, k) - L(x - \hat{k}, k))} \end{aligned} \quad (5.44)$$

agindo no espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{x, k=1,2} L^2[0, 2\pi] \quad (5.45)$$

A invariança de "gauge" é expressa por

$$U(\underline{\psi}) H U(\underline{\psi})^{-1} = H \quad (5.46)$$

para qualquer $\underline{\psi} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow [0, 2\pi]$

Da condição (5.46) vemos que

$$[Q(\kappa), H] = 0 \quad (5.47)$$

onde o operador $Q(x)$ é:

$$Q(\kappa) = \sum_{k=1,2} [L(\kappa, k) - L(\kappa - \hat{k}, k)] \quad (5.48)$$

O operador $Q(x)$ é o gerador local de transformações de "gauge" e (5.47) nos diz que ele define uma carga (externa) conservada localmente. Seus possíveis autovalores são

$$q(\kappa) = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.49)$$

e podemos dividir o espaço de Hilbert (5.45) em setores de carga externa bem definida e invariantes pela evolução temporal $e^{-i\kappa H}$. Cada setor é indexado por uma função

$$q : \kappa \in \mathbb{Z}^2 \longrightarrow q(\kappa) \in \mathbb{Z} \quad (5.50)$$

que indica em cada ponto $\kappa \in \mathbb{Z}^2$ qual a carga externa aí colocada. O vácuo (estado fundamental de H) da teoria pertence ao setor definido por $q \equiv 0$, a função identicamente nula.

Vemos então que o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ abriga não só a situação de ausência de cargas externas como também qualquer distribuição de cargas externas dadas.

Podemos escrever o projetor em cada um desses subespaços como:

$$P_{\underline{q}} = \frac{1}{(2\pi)^{|\mathbb{Z}^1|}} \int_0^{2\pi} e^{-i \underline{q} \cdot \underline{\psi}} U(\underline{\psi}) d\underline{\psi} \quad (5.51)$$

onde

$$\underline{q} \cdot \underline{\psi} = \sum_{x \in \mathbb{Z}^1} q(x) \psi(x) \quad \text{e} \quad d\underline{\psi} = \prod_{x \in \mathbb{Z}^1} d\psi(x)$$

A expressão (5.51) deve ser encarada de maneira formal $((2\pi)^{-|\mathbb{Z}^1|} !)$ (assim como (5.40)), como o limite de quantidades definidas em uma rede finita $\Lambda \subset \mathbb{Z}^1$.

O que queremos estimar é o potencial de interação entre duas cargas externas q e $-q$ ("quarks" estáticos) colocados a uma distância mútua $|R|$, por exemplo a carga q em $x=0$ e a carga $-q$ em $x=R$. Este potencial definimos como sendo a diferença entre a energia do estado fundamental de H restrito ao subespaço com a configuração de carga estipulada acima menos a energia do vácuo (nenhuma carga).

Nossa estratégia para realizar isto consiste em estimar a diferença entre as energias livres nas duas situações, colocando o sistema a uma temperatura inversa β , aplicando um argumento do tipo Spencer-Mc Bryan e tomando o limite $\beta \rightarrow \infty$ no final (mantendo o volume $|\Lambda|$ do sistema fixo).

Então, se definirmos $q_2(x)$ como

$$q_2(x) = \begin{cases} q > 0 & \text{se } x=0 \\ -q & \text{se } x=R \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.52)$$

o potencial de interação entre duas cargas externas será:

$$V_{q,-q}(R) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{\beta} \ln \frac{Z_{q_2}}{Z_0} \right\} \quad (5.53)$$

onde

$$Z_{q_z} = \text{Tr} \{ e^{-\beta H} P_{q_z} \} = \frac{1}{(2\pi)^{1M}} \int_0^{2\pi} e^{-i q_z \cdot \varphi} \text{Tr} \{ e^{-\beta H} U(\varphi) \} d\varphi$$

$$Z_0 = \text{Tr} \{ e^{-\beta H} P_0 \} = \frac{1}{(2\pi)^{1M}} \int_0^{2\pi} \text{Tr} \{ e^{-\beta H} U(\varphi) \} d\varphi \quad (5.54)$$

Por intermédio da fórmula de Trotter, podemos escrever

$$\frac{Z_{q_z}}{Z_0} = \frac{1}{Z_0} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$$

$$= \frac{1}{Z_0} \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Tr} \left\{ \left(e^{-\frac{\beta}{n} H_E} e^{-\frac{\beta}{n} H_M} \right)^n P_{q_z} \right\} \quad (5.55)$$

onde utilizamos a decomposição (5.41), $H = H_E + H_M$

Como P_{q_z} é um operador de projeção, isto é,

$$P_{q_z}^2 = P_{q_z}$$

e comuta com H_E e H_M , de (5.55), obtemos:

$$S_n = \text{Tr} \left(e^{-\frac{\beta}{n} H_E} P_{q_z} e^{-\frac{\beta}{n} H_M} \right)^n \quad (5.56)$$

Para calcular o Traço em (5.56) escolhemos uma base $|\vartheta\rangle$ em $\mathcal{H}$ que diagonalize os $\vartheta(\alpha, k)$ e inserimos conjuntos completos

$$\int |\vartheta\rangle \langle \vartheta| d\vartheta = \mathbb{1}$$

entre cada fator em (5.56), resultando:

$$S_n = \int \prod_{i=1}^n d\vartheta_i \prod_{i=1}^n \left\{ \langle \vartheta_i | e^{-\frac{\beta}{n} H_E} P_{q_z} | \vartheta_{i+1} \rangle e^{-\frac{\beta}{n} H_M(\vartheta_{i+1})} \right\} \quad (5.57)$$

onde

$$d\vartheta_i = \pi \, d\vartheta_i(x, k) \quad , \quad H_M(\vartheta_i) = - \frac{1}{q^2} \sum_P \cos \vartheta_{i,P} \quad ,$$

$$H_E = q^2 \sum_{x,k} L^2(x, k) \quad , \quad |\vartheta_i\rangle = \bigotimes_{x,k} |\vartheta_i(x, k)\rangle \quad \text{e} \quad \vartheta_{i+1} = \vartheta_i$$

Facilmente calculamos:

$$\begin{aligned} \langle \vartheta_i | e^{-\frac{\beta}{m} H_E} P_{\vartheta_i} | \vartheta_{i+1} \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^{|\Lambda|}} \int_0^{2\pi} d\varphi_i e^{-i\frac{\beta}{m} [\varphi_i(0) - \varphi_i(R)]} \times \\ &\times \pi \left\{ \langle \vartheta_i(x, k) | \exp \left[\frac{\beta}{m} \frac{q^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta(x, k)^2} + i (\varphi_i(x) - \varphi_i(x+\hat{k})) \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \vartheta(x, k)} \right] | \vartheta_{i+1}(x, k) \rangle \right\} \end{aligned} \quad (5.58)$$

com

$$d\varphi_i = \pi \, d\varphi_i(x)$$

O núcleo do operador que aparece em (5.58) é dado por:

$$\begin{aligned} \langle \vartheta_i(x, k) | \exp \left[\frac{\beta}{m} \frac{q^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta(x, k)^2} + i (\varphi_i(x) - \varphi_i(x+\hat{k})) \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \vartheta(x, k)} \right] | \vartheta_{i+1}(x, k) \rangle &= \\ = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{m}{\beta q^2} [\vartheta_i(x, k) - \vartheta_{i+1}(x, k) + \varphi_i(x) - \varphi_i(x+\hat{k}) + 2m\pi]^2 \right\} \times \left(\frac{2\pi m}{\beta q^2} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (5.59)$$

Colocando (5.59) e (5.58) em (5.57) resulta a expressão:

$$\begin{aligned} S_m &= \frac{1}{(2\pi)^{n|n|}} \int_0^{2\pi} \left(\prod_{i=1}^n d\vartheta_i \, d\varphi_i \right) e^{-i\frac{\beta}{m} \sum_{i=1}^n [\varphi_i(0) - \varphi_i(R)]} \prod_{i=1}^n \left\{ e^{-\frac{\beta}{m} H_M(\vartheta_{i+1})} \times \right. \\ &\times \pi \left[\left(\frac{2\pi m}{\beta q^2} \right)^{1/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{m}{\beta q^2} (\vartheta_i(x, k) - \vartheta_{i+1}(x, k) + \varphi_i(x) - \varphi_i(x+\hat{k}) + 2m\pi)^2 \right] \right] \Big\} \end{aligned} \quad (5.60)$$

Usando o mesmo argumento empregado nas seções 5.1 e 5.2, fazemos a translação imaginária pura

$$\text{em (5.60), } \psi_i \rightarrow \psi_i - i\alpha \quad \text{isto é:}$$

$$\psi_i(x) \rightarrow \psi_i(x) - i\alpha(x)$$

Como

$$\left| e^{-b(c-id)^2} \right| = \left| e^{-bc^2} e^{d^2} e^{2icd} \right| \leq e^{-bc^2} e^{d^2}$$

para b, c e d reais, e invertendo as passagens de (5.55) a (5.60) podemos estimar:

$$\begin{aligned} |S_n| &\leq e^{-mq[\alpha(o) - \alpha(R)]} e^{\frac{1}{2} \frac{n^2}{\beta g^2} \sum_{x,h} [\alpha(x) - \alpha(x+h)]^2} \\ &\times T_n \left\{ \left(e^{-\frac{\beta}{2} H_E} e^{-\frac{\beta}{2} H_n} \right)^n P_0 \right\} \end{aligned} \quad (5.61)$$

Agora escolhemos

$$\alpha(x) = \frac{\beta g^2}{m} C_{R,\Lambda}^E(x)$$

onde

$$C_{R,\Lambda}^E(x) = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{p \in \Lambda^*} \frac{\cos p \cdot x - \cos p \cdot (x-R)}{E(p) + \varepsilon} \quad (5.62)$$

com

$$E(p) = \sum_{k=1,2} (2 - 2\cos p_k)$$

A rede finita Λ que estamos usando é a mesma que foi definida em (5.17), valendo a definição (5.18) para Λ^* .

Aqui, como nas seções 5.1 e 5.2, e usando a definição (5.62), temos:

$$\sum_{x,h} [\alpha(x) - \alpha(x+h)]^2 \leq \frac{\beta q^4}{n^2} \frac{2}{|\Lambda|} \sum_{p \in \Lambda^*} \frac{1 - \cos p \cdot R}{E(p) + \varepsilon} \quad (5.63)$$

$$\alpha(0) - \alpha(R) = \frac{\beta q^2}{n} \frac{2}{|\Lambda|} \sum_{p \in \Lambda^*} \frac{1 - \cos p \cdot R}{E(p) + \varepsilon}$$

Introduzindo (5.61), (5.63) em (5.55), obtemos, após fazer $n \rightarrow \infty$:

$$\frac{Z_q}{Z_0} \leq \exp \left\{ -\beta q^2 (2q-1) \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{p \in \Lambda^*} \frac{1 - \cos p \cdot R}{E(p) + \varepsilon} \right\} \quad (5.64)$$

e então (5.64) e (5.53) fornece para $V_{q,-q}(R)$:

$$V_{q,-q}(R) \geq q^2 (2q-1) \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{p \in \Lambda^*} \frac{1 - \cos p \cdot R}{E(p) + \varepsilon}$$

Agora, fazendo $\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^2$ e depois $\varepsilon \searrow 0$, obtemos finalmente:

$$V_{q,-q}(R) \geq q^2 (2q-1) C_R(0) \quad (5.65)$$

com

$$C_R(0) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{1 - \cos p \cdot R}{E(p)}$$

De acordo com (5.26)

$$C_R(0) \geq \frac{1}{2\pi} \ln |R|$$

para $|R|$ grande, resultando portanto:

$$V_{q, \frac{1}{2}}(R) \gtrsim \frac{q^2}{2\pi} (2q-1) \ln |R|. \quad (5.66)$$

Vemos que, de acordo com (5.66), temos confinamento, pelo menos logarítmico, permanente ($V_{q, \frac{1}{2}}$), para cargas externas, na Teoria $U(1)$ em 3 dimensões, com tempo contínuo.

Deve-se notar que para $\beta < \infty$ o critério de confinamento depende da integrabilidade ou não de (5.64), ou seja, de

$$\frac{Z_{q, \frac{1}{2}}}{Z_0} = e^{-\beta V_{q, \frac{1}{2}}(R)}$$

conforme está discutido em [63], [64], por exemplo. De acordo com, (5.64), (5.65) e (5.66)

$$e^{-\beta V_{q, \frac{1}{2}}(R)} \leq |R|^{-\frac{\beta q^2}{2\pi} (2q-1)}$$

que será integrável (em $\nu = 2$) para β suficientemente grande, dependendo dos valores de q e q . Portanto, para a teoria em $\beta < \infty$ teremos confinamento para β grande.

CAPÍTULO 6

POSITIVIDADE POR REFLEXÃO PARA UM GÁS DE BOSE LIVRE NUMA REDE

6.1 - Definições e notação

O sistema é definido numa rede finita ν dimensional

$$\Lambda = V \times V \times \dots \times V \quad (\nu \text{ fatores}) \quad (6.1)$$

onde

$$V = \{-L-1, -L, \dots, 0, \dots, L\} \quad (L > 0, \text{inteiro})$$

Dado Λ definimos o espaço de Hilbert de uma partícula sobre Λ :

$$\mathcal{H}_1 \equiv \ell^2(\Lambda) = \left\{ f(x), x \in \Lambda : \sum_{x \in \Lambda} |f(x)|^2 < \infty \right\} \quad (6.2)$$

A partir de $\mathcal{H}_1$ construímos o espaço de Fock $\mathcal{F}$ do sistema:

$$\mathcal{F} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n \oplus \dots \quad (6.3)$$

onde

$$\mathcal{H}_0 = \mathbb{C} \quad (\text{números complexos})$$

e

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_1$$

é o enésimo produto tensorial simetrizado de $\mathcal{F}_1$.

Um vetor $\psi \in \mathcal{F}$ é dado por uma sequência infinita de funções:

$$\psi = \{ \psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n, \dots \} \quad (6.4)$$

com

$$\psi_n \in \mathcal{F}_n$$

e o produto escalar de $\psi, \phi \in \mathcal{F}$ é definido por:

$$(\psi, \phi)_{\mathcal{F}} = \sum_{n=0}^{\infty} (\psi_n, \phi_n)_{\mathcal{F}_n}$$

onde

$$(\psi_n, \phi_n)_{\mathcal{F}_n} = \sum_{x_1, \dots, x_n \in \Lambda} \bar{\psi}(x_1, x_2, \dots, x_n) \phi(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (6.5)$$

com $\bar{\psi}$ denotando o complexo conjugado de ψ .

Dados $f \in \mathcal{F}_1$ e $\psi \in \mathcal{F}$ definimos operadores de criação $\hat{a}^*(f)$ e de aniquilação $\hat{a}(f)$, respectivamente, por:

$$[\hat{a}(f)\psi]_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n f(x_i) \psi_{n-1}(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) \quad (6.6)$$

e

$$[a(f)\psi]_n(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{n+1} \sum_{x \in \Lambda} \bar{f}(x) \psi_{n+1}(x, x_1, \dots, x_n) \quad (6.7)$$

onde $\hat{x}_i$ significa omitir a variável x_i .

Facilmente se verificam as relações de comutação entre a e $\tilde{a}$

$$[a(f), a(g)] = [\tilde{a}^*(f), \tilde{a}^*(g)] = 0 \quad (6.8)$$

$$[a(f), \tilde{a}^*(g)] = (f, g)_{\mathcal{F}}$$

A partir dos operadores de criação e aniquilação construímos os campos $\phi(f)$, $\pi(g)$.

$$\phi(f) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \tilde{a}^*(f) + a(f) \} \quad (6.9)$$

$$\pi(g) = \frac{i}{\sqrt{2}} \{ \tilde{a}^*(g) - a(g) \} \quad (6.10)$$

que obedecem as relações canônicas de comutação:

$$[\phi(f), \phi(g)] = [\pi(f), \pi(g)] = 0 \quad (6.11)$$

$$[\phi(f), \pi(g)] = i (f, g)_{\mathcal{F}}$$

para f e $g \in \mathcal{F}$, com f e g reais.

Fixado $x \in \Lambda$, tomando $f(y) \in \mathcal{F}_1$ como sendo $f(y) = \delta_{x,y}$ (delta de Kronecker), podemos definir operadores locais $\hat{a}^*(x)$, $a(x)$, $\phi(x)$ e $\pi(x)$.

A Hamiltoniana é dada por:

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{x \in \Lambda} \sum_{i=1}^{\nu} \hat{a}^*(x) \{ 2a(x) - a(x+\hat{e}_i) - a(x-\hat{e}_i) \} \quad (6.12)$$

sendo $\hat{e}_i$ o versor na i -ésima direção de Λ . São adotadas condições de contorno periódicas, ou seja, identificamos como vizinhos próximos pontos opostos na fronteira de Λ .

A Hamiltoniana (6.12) é o análogo discretizado da Hamiltoniana (formal) segundo quantizada para bósons livres:

$$H = \frac{1}{2m} \int d^{\nu}x (\nabla \hat{a}^*) \cdot (\nabla a) \quad (6.13)$$

Em termos dos campos locais $\phi(x)$ e $\pi(x)$ (6.12), se escreve:

$$H = \frac{1}{2m} \left\{ \nu \sum_{x \in \Lambda} (\phi(x)^2 + \pi(x)^2 - 1) - \sum_{\substack{|x-y|=1 \\ x,y \in \Lambda}} (\phi(x)\phi(y) + \pi(x)\pi(y)) \right\} \quad (6.14)$$

onde $|x-y|$ significa a distância entre os pontos de Λ , visualizado como um torus.

Observe-se que (6.14), além de uma contribuição local, apresenta um acoplamento do tipo ferromagnético entre vizinhos próximos em Λ , entre operadores reais ($\phi(x)$) e entre operadores imaginários puros ($\pi(x)$). Conforme já menciona-

do no Capítulo 1, esta é a origem do fracasso em se aplicar métodos perturbativos para a verificação da positividade por reflexão para este modelo, o mesmo tipo de dificuldade que a parece no modelo de Heisenberg quântico ferromagnético.

Outro operador de interesse é o operador de número, o análogo discreto de

$$N = \int d^3x \, \hat{a}^*(x) \hat{a}(x)$$

que, neste caso, é definido por:

$$N = \sum_{x \in \Lambda} \hat{a}^*(x) \hat{a}(x) \quad (6.15)$$

Ou, em termos dos campos ϕ e π :

$$N = \frac{1}{2} \sum_{x \in \Lambda} (\phi(x)^2 + \pi(x)^2 - 1) \quad (6.16)$$

A Mecânica Estatística deste gás de Bose será tratada no "ensemble" gran-canônico, cujos valores esperados são definidos pelo estado:

$$\langle A \rangle_\Lambda = \frac{\text{Tr}_f \{ A e^{-\beta(H - \mu N)} \}}{\text{Tr}_f e^{-\beta(H - \mu N)}} \quad , \quad Z_\Lambda = \text{Tr}_f e^{-\beta(H - \mu N)} \quad (6.17)$$

onde Tr_f denota o traço calculado no espaço de Fock $\mathcal{f}$, e o potencial químico $\mu \leq 0$ deve ser ajustado fixando-se a densidade média do gás, para cada volume $|\Lambda|$ e temperatura inversa β , ou seja, impondo-se a condição:

$$\rho = \rho(\beta, \Lambda) = \frac{\langle N \rangle_\Lambda}{|\Lambda|} \quad (6.18)$$

Funções de correlação para este gás podem ser calculadas através do conhecimento da função geratriz, definida por:

$$\begin{aligned} E(f, g, \beta, \mu, \Lambda) &= \langle e^{i\phi(f)} e^{i\pi(g)} \rangle_\Lambda = \\ &= \frac{1}{Z_\Lambda} \text{Tr}_\mathcal{F} \left\{ e^{i\phi(f)} e^{i\pi(g)} e^{-\beta(H - \mu N)} \right\} \end{aligned} \quad (6.19)$$

com $f, g \in \mathcal{F}_1$.

Se conhecermos o funcional $E(f, g, \beta, \mu, \Lambda)$ para quaisquer $f, g \in \mathcal{F}_1$, podemos obter o valor esperado de qualquer função (bem comportada) de ϕ e π , através de derivações, ou seja, limites de expressões do tipo:

$$\sum_i \lambda_i \langle e^{i\phi(f_i)} e^{i\pi(g_i)} \rangle_\Lambda = \sum_i \lambda_i E(f_i, g_i, \beta, \mu, \Lambda) \quad (6.20)$$

com $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $f_i, g_i \in \mathcal{F}_1$ convenientemente escolhidos.

Para o caso de um gás de Bose livre, não relativístico, no "ensemble" gran-canônico pode-se calcular $E(f, g, \beta, \mu, \Lambda)$ para quaisquer $f, g \in \mathcal{F}_1$ de maneira bastante simples. No Apêndice B damos os detalhes do cálculo, para o caso do gás de Bose na rede, o qual nos fornece, para $\mu < 0$:

$$E(f, g, \beta, \mu, \Lambda) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{p \in \Lambda^*} W(p) |i \tilde{f}(p) - \tilde{g}(p)|^2 \right\} \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{1}{4} [\|f\|_{\mathcal{F}_1}^2 + \|g\|_{\mathcal{F}_1}^2 + 2i(f, g)_{\mathcal{F}_1}] \right\}. \quad (6.21)$$

onde Λ^* é a rede dual a Λ ou seja,

$$\Lambda^* = \left\{ p = (p^1, p^2, \dots, p^v) = \frac{x\pi}{L+1}, x \in \Lambda \right\}$$

$$\tilde{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{|\Lambda|}} \sum_{x \in \Lambda} f(x) e^{-i p \cdot x} \quad (6.22)$$

com

$$W(p) = \frac{1}{e^{-i\omega(p)} - 1},$$

$$\omega(p) = \beta \left[\mu - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^v (1 - \cos p^i) \right] \quad (6.23)$$

e $(f, g)_{\mathcal{F}_1}$, $\|f\|_{\mathcal{F}_1}$ são o produto escalar e a norma em $\mathcal{F}_1$ respectivamente.

Devemos notar que a expressão (6.21) é válida para $\mu < 0$ (vide Apêndice B), o que é compatível com (6.18). De fato, de (6.21) e utilizando (6.16), temos:

$$\rho = \frac{\langle N \rangle_\Lambda}{|\Lambda|} = \frac{1}{2} \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{x \in \Lambda} \langle \phi(x)^2 + \pi(x)^2 - 1 \rangle_\Lambda =$$

$$= - \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} E(f_\alpha, 0, \beta, \mu, \Lambda) \Big|_{\alpha=0} = \frac{1}{2}$$

onde

$$f_{\alpha}(y) = \alpha \delta_{x,y}.$$

Um cálculo imediato nos dá:

$$\rho = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{\substack{\tau \in \Lambda^* \\ \tau \neq 0}} W(\tau) + \frac{1}{|\Lambda|} \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1}$$

e vemos claramente que μ deve ser estritamente negativo, (pois $0 \leq \rho < \infty$) para qualquer $\beta < \infty$ e $|\Lambda| < \infty$.

6.2 - Positividade por reflexão

Imaginemos a rede finita Λ , definida em (6.1), dividida por um plano P em duas regiões Λ_+ ("à direita" de P) e Λ_- ("à esquerda" de P), ou seja, colocando

$$\Lambda_+ = \left\{ x \equiv (x^1, x^2, \dots, x^v) \in \Lambda : x^v \geq 0 \right\} \quad (6.24)$$

e

$$\Lambda_- = \Lambda - \Lambda_+$$

Definimos uma operação de reflexão π , em relação ao plano P , em Λ , que leva pontos de Λ_+ em Λ_- e vice-versa, e tal que $\pi^2 = 1$. Explicitamente, se

$$x = (x^1, x^2, \dots, x^v) \in \Lambda_+$$

definimos

$$\pi x = (x^1, x^2, \dots, -x^{v-1}) \in \Lambda_- \quad (6.25)$$

Portanto o plano de reflexão P é um plano perpendicular ao V -ésimo eixo coordenado e passando a meia distância entre $x = (0, 0, \dots, 0)$ e $x = (0, 0, \dots, 0, -1)$.

A reflexão $\mathcal{R}$ define imediatamente uma transformação em $\mathcal{F}_1$ dada por:

$$(\Theta f)(x) = \overline{f}(\mathcal{R}x) \quad (6.26)$$

Para implementar a definição de reflexão para observáveis do sistema (operadores), consideraremos vários conjuntos de operadores, dotados de uma estrutura algébrica. Na definição dessas álgebras utilizaremos três subconjuntos de $\mathcal{F}_1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1^R &= \{ f \in \mathcal{F}_1 : f \text{ é real} \} \\ \mathcal{F}_{1+}^R &= \{ f \in \mathcal{F}_1 : \text{supp } f \subset \Lambda_+, f \text{ é real} \} \\ \mathcal{F}_{1-}^R &= \{ f \in \mathcal{F}_1 : \text{supp } f \subset \Lambda_-, f \text{ é real} \} \end{aligned} \quad (6.27)$$

As álgebras consideradas serão:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^\phi &= \text{álgebra gerada por } e^{i\phi(t)}, & f \in \mathcal{F}_1^R \\ \mathcal{O}^\pi &= \text{álgebra gerada por } e^{i\pi(t)}, & f \in \mathcal{F}_1^R \\ \mathcal{O}_\pm^\phi &= \text{álgebra gerada por } e^{i\phi(t)}, & f \in \mathcal{F}_{1\pm}^R \\ \mathcal{O}_\pm^\pi &= \text{álgebra gerada por } e^{i\pi(t)}, & f \in \mathcal{F}_{1\pm}^R \end{aligned} \quad (6.28)$$

Essas álgebras podem ser álgebras $\mathcal{C}^*$ ou álgebras de Von Neumann, conforme a noção de convergência para seqüências seja dada pela norma de operador ou convergência forte em $\mathcal{F}$. Para maiores detalhes sobre álgebras de operadores no contexto de gases de Bose não relativísticos, referimo-nos ao trabalho de Araki e Woods [44], ou então de Canon [45] ou Lewis e Pulè [46].

A operação de reflexão é definida, nas álgebras acima, como um homomorfismo (anti-linear) de $\mathcal{O}_+^{\phi} \rightarrow \mathcal{O}_-^{\phi}$ (ou $\mathcal{O}_+^{\pi} \rightarrow \mathcal{O}_-^{\pi}$), como

$$(\oplus)(AB) = (\oplus A)(\oplus B)$$

$$(\oplus)(\alpha e^{i\phi(f)} + \gamma e^{i\phi(g)}) = \bar{\alpha} e^{-i\phi(\theta f)} + \bar{\gamma} e^{-i\phi(\theta g)} \quad (6.29)$$

em $\mathcal{O}_+^{\phi}$
(ou então

$$(\oplus)(\alpha e^{i\pi(f)} + \gamma e^{i\pi(g)}) = \bar{\alpha} e^{-i\pi(\theta f)} + \bar{\gamma} e^{-i\pi(\theta g)} \quad \text{em } \mathcal{O}_+^{\pi})$$

para $A, B \in \mathcal{O}_+^{\phi}$ (ou $\mathcal{O}_+^{\pi}$), $f, g \in \mathcal{F}_+^R$, $\alpha, \gamma \in \mathbb{C}$.

Antes de enunciar e demonstrar o resultado principal deste capítulo, faremos algumas considerações sobre a positividade de matrizes, que serão posteriormente utilizadas.

Uma matriz A_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, M$ é dita positiva definida se para qualquer seqüência $\{\lambda_i\}_{i=1}^M$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, tivermos:

$$\sum_{i,j=1}^M \lambda_i \bar{\lambda}_j A_{ij} \geq 0$$

Claramente, toda matriz positiva definida é hermiteana, isto é, $A_{ij} = \bar{A}_{ji}$

A matriz hermiteana B_{ij} é chamada quase positiva definida se para toda sequência de números complexos $\{\lambda_i\}_{i=1}^M$ satisfazendo $\sum_{i=1}^M \lambda_i = 0$ tivermos

$$\sum_{i,j=1}^M \lambda_i \bar{\lambda}_j B_{ij} \geq 0$$

A propriedade que utilizaremos é expressa no seguinte Lema:

Lema 6.1: A matriz $A_{ij} = e^{sB_{ij}}$, $i, j = 1, 2, \dots, M$ é positiva definida para todo $s > 0$ se e somente se a matriz B_{ij} for hermiteana e quase positiva definida.

A demonstração deste Lema pode ser encontrada, por exemplo, na referência [47].

Podemos então enunciar nosso resultado:

Teorema 6.2:

O estado $\langle \cdot \rangle_\Lambda$ definido em (6.17) é positivo por reflexão em $\mathcal{O}_+^\phi$ (ou em $\mathcal{O}_+^\pi$) isto é:

$$\langle A \oplus A \rangle_\Lambda \geq 0 \quad \text{para todo} \quad A \in \mathcal{O}_+^\phi \quad (\text{ou } A \in \mathcal{O}_+^\pi)$$

Demonstração:

O método da demonstração é o mesmo utilizado por Hegerfeldt [48] na demonstração de positividade por reflexão (positividade de Osterwalder-Schrader [49]) para alguns exemplos de Teorias Quânticas de Campos, na região Euclídeana.

Vamos nos restringir inicialmente à álgebra $\mathcal{A}_\phi$. Como $\mathcal{A}_\phi$ é gerada por operadores $e^{i\phi(f)}$, $f \in \mathcal{F}_+^R$ basta demonstrarmos a positividade para elementos de álgebra do tipo

$$A = \sum_{i=1}^M \lambda_i e^{i\phi(f_i)}$$

com

$$\lambda_i \in \mathbb{C}, \quad f_i \in \mathcal{F}_+^R, \quad i = 1, 2, \dots, M$$

Levando em conta a definição (6.29) e usando a comutatividade dos $e^{i\phi(f)}$ e a linearidade de $\phi(\alpha f + \gamma g)$ teremos

$$\begin{aligned} \langle A \otimes A \rangle_\Lambda &= \left\langle \left(\sum_{i=1}^M \lambda_i e^{i\phi(f_i)} \right) \otimes \left(\sum_{i=1}^M \lambda_i e^{i\phi(f_i)} \right) \right\rangle_\Lambda = \\ &= \sum_{i,j=1}^M \lambda_i \bar{\lambda}_j \langle e^{i\phi(f_i - \theta f_j)} \rangle_\Lambda = \\ &= \sum_{i,j=1}^M \lambda_i \bar{\lambda}_j E(f_i - \theta f_j, 0, \beta, \mu, \Lambda). \end{aligned}$$

De acordo com (6.21) ficamos reduzidos a demonstrar a positividade da matriz

$$\begin{aligned} A_{ij} &= E(f_i - \theta f_j, 0, \rho, \mu, \Lambda) = \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \Lambda^*} W(\gamma) |\tilde{f}_i(\gamma) - \theta \tilde{f}_j(\gamma)|^2 \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{4} \|f_i - \theta f_j\|_{\mathcal{H}_1}^2 \right\} \end{aligned} \quad (6.30)$$

Pelo Lema 6.1 teremos A_{ij} positiva definida se a matriz expoente

$$B_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \Lambda^*} W(\gamma) |\tilde{f}_i(\gamma) - \theta \tilde{f}_j(\gamma)|^2 - \frac{1}{4} \|f_i - \theta f_j\|_{\mathcal{H}_1}^2 \quad (6.31)$$

for hermiteana e quase positiva definida.

A hermiticidade de B_{ij} decorre do fato

$$\sum_{\gamma \in \Lambda^*} W(\gamma) |\tilde{f}_j(\gamma) \pm \theta \tilde{f}_i(\gamma)|^2 = \sum_{\gamma \in \Lambda^*} W(\gamma) |\tilde{f}_i(\gamma) \pm \theta \tilde{f}_j(\gamma)|^2$$

e

$$\|f_j \pm \theta f_i\|_{\mathcal{H}_1}^2 = \|f_i \pm \theta f_j\|_{\mathcal{H}_1}^2$$

onde usamos a definição da transformada de Fourier (6.22) e as propriedades

$$W(\gamma) = W(\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^v) = W(\gamma^1, \gamma^2, \dots, -\gamma^v)$$

e $\text{supp } f_i \subset \Lambda_+$, f_i real.

Para mostrar que B_{ij} é quase positiva definida, seja $M > 1$ inteiro e tomemos uma sequência de números

complexos $\{f_i\}_{i=1}^M$ com $\sum_{i=1}^M f_i = 0$. Então

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^M f_i \bar{f}_j B_{ij} &= \\ &= \sum_{i,j=1}^M f_i \bar{f}_j \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{p \in \Lambda^*} w(p) [|\tilde{f}_i(p)|^2 + |\tilde{\theta f}_j(p)|^2 - (\tilde{f}_i(p) \overline{\tilde{\theta f}_j(p)} + \right. \\ &\quad \left. + \overline{\tilde{f}_i(p)} \tilde{\theta f}_j(p)) \right] - \frac{1}{4} [\|f_i\|_{f_1}^2 + \|\theta f_j\|_{f_1}^2 - 2(f_i, \theta f_j)_{f_1}] \Big\} \end{aligned} \quad (6.32)$$

Considerando que $(f_i, \theta f_j)_{f_1} = 0$ e que $\sum_{i=1}^M f_i = 0$ (6.32) fica reduzido a:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^M f_i \bar{f}_j B_{ij} &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^M f_i \bar{f}_j \sum_{p \in \Lambda^*} w(p) \left(\tilde{f}_i(p) \overline{\tilde{\theta f}_j(p)} + \overline{\tilde{f}_i(p)} \tilde{\theta f}_j(p) \right) \end{aligned} \quad (6.33)$$

Pela definição de transformada de Fourier (6.22), temos:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i(p) &= \frac{1}{\sqrt{|\Lambda|}} \sum_{x \in \Lambda_+} f_i(x) e^{-i p \cdot x} \\ \tilde{\theta f}_j(p) &= \frac{1}{\sqrt{|\Lambda|}} \sum_{x \in \Lambda_+} f_j(x) e^{-i p \cdot \alpha x} \end{aligned}$$

e então, levando em conta (6.25)

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i,j=1}^M \xi_i \bar{\xi}_j B_{ij} = \\
 & = \frac{1}{2|\Lambda|} \sum_{i,j=1}^M \xi_i \bar{\xi}_j \left\{ \sum_{\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^{v-1}} \sum_{x, y \in \Lambda_+} f_i(x) f_j(y) \times \right. \\
 & \times \left. e^{-i(\gamma^1 x^1 + \dots + \gamma^{v-1} x^{v-1})} e^{i(\gamma^1 y^1 + \dots + \gamma^{v-1} y^{v-1})} \sum_{\gamma^v} W(\gamma) e^{-i\gamma^v(x^v + y^v + 1)} + \text{c.c.} \right\}
 \end{aligned}
 \tag{6.34}$$

A soma em γ^v pode ser calculada exatamente (vide Apêndice C), resultando

$$\sum_{\gamma^v} W(\gamma) e^{i\gamma^v(x^v + y^v + 1)} = \sum_{k=1}^3 G_k(\gamma^1, \dots, \gamma^{v-1}) \left[F_k(\gamma^1, \dots, \gamma^{v-1}) \right]^{x^v + y^v}
 \tag{6.35}$$

onde $G_k, F_k, k = 1, 2, 3$ são funções reais satisfazendo

$$G_k(\gamma^1, \dots, \gamma^{v-1}) \geq 0.$$

Portanto, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i,j=1}^M \xi_i \bar{\xi}_j B_{ij} &= \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{k=1}^3 \sum_{\gamma^1, \dots, \gamma^{v-1}} G_k(\gamma^1, \dots, \gamma^{v-1}) \left| \sum_{i=1}^M \xi_i \times \right. \\
 & \times \left. \sum_{x \in \Lambda_+} f_i(x) e^{-i(\gamma^1 x^1 + \dots + \gamma^{v-1} x^{v-1})} \left[F_k(\gamma^1, \dots, \gamma^{v-1}) \right]^{x^v} \right|^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração do Teorema para $A \in \mathcal{O}_+^\phi$ e $M > 1$. O caso $M = 1$ é de verificação imediata. Para a álgebra $\mathcal{O}_+^\pi$ a demonstração é idêntica, tendo em vista que, de acordo com (6.21),

$$E(f, o, \beta, \mu, \lambda) = E(o, f, \beta, \mu, \lambda)$$

c.q.d.

O Teorema 6.2 nos garante a positividade por reflexão, no "ensemble" gran-canônico, para as álgebras $\mathcal{O}_+^\phi$ e $\mathcal{O}_+^\pi$ separadamente. Infelizmente, ao que tudo indica, isto não é suficiente para as aplicações, quais sejam, a demonstração da existência de condensação de Bose-Einstein, em dimensões $\nu \geq 3$ para gases de bósons com interação, de acordo com os métodos desenvolvidos, por exemplo, em [30, 31, 33].

Para a aplicação desses métodos necessitaríamos a positividade para uma álgebra maior $\mathcal{O}_+$, gerada por $e^{i\phi(f)}$ e $e^{i\pi(q)}$, com $f, q \in \mathcal{F}_+^R$.

Em relação a esta álgebra $\mathcal{O}_+$, o que acontece é o seguinte:

1 - se definirmos em $\mathcal{O}_+$ a reflexão Θ_1 , como em (6.29), ou seja:

$$\Theta_1 \alpha e^{i\phi(f)} = \bar{\alpha} e^{-i\phi(\Theta f)}$$

$$\Theta_1 \alpha e^{i\pi(q)} = \bar{\alpha} e^{-i\pi(\Theta q)}$$

teríamos que investigar a positividade da matriz A_{ij}^1 dada por:

$$\begin{aligned}
A'_{ij} &= E(f_i - \theta f_j, g_i - \theta g_j, \beta, \mu, \Lambda) = \\
&= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_p W(p) \left[|\tilde{f}_i(p) - \tilde{\theta} \tilde{f}_j(p)|^2 + |\tilde{g}_i(p) - \tilde{\theta} \tilde{g}_j(p)|^2 \right] \right\} \times \\
&\times \exp \left\{ -\frac{1}{4} \left[\|f_i - \theta f_j\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \|g_i - \theta g_j\|_{\mathcal{H}_1}^2 + 2i(f_i - \theta f_j, g_i - \theta g_j)_{\mathcal{H}_1} \right] \right\} \quad (6.36)
\end{aligned}$$

Ora, a matriz A'_{ij} não pode ser positiva definida pois não é sequer hermiteana, dado que

$$i(f_i - \theta f_j, g_i - \theta g_j)_{\mathcal{H}_1} = i(f_i - \theta f_j, g_i - \theta g_j)_{\mathcal{H}_1} \quad (6.37)$$

2 - Se, para contornarmos (6.37), definimos em $\mathcal{H}_+$ a reflexão como sendo:

$$\begin{aligned}
(H)_1 \propto e^{i\phi(t)} &= \bar{\alpha} e^{-i\phi(\theta t)} \\
(H)_2 \propto e^{i\pi(q)} &= \bar{\alpha} e^{i\pi(\theta q)}
\end{aligned}$$

ficaremos com a matriz A''_{ij} dada por

$$\begin{aligned}
A''_{ij} &= E(f_i - \theta f_j, g_i + \theta g_j, \beta, \mu, \Lambda) = \\
&= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_p W(p) \left[|\tilde{f}_i(p) - \tilde{\theta} \tilde{f}_j(p)|^2 + |\tilde{g}_i(p) + \tilde{\theta} \tilde{g}_j(p)|^2 \right] \right\} \times \\
&\times \exp \left\{ -\frac{1}{4} \left[\|f_i - \theta f_j\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \|g_i + \theta g_j\|_{\mathcal{H}_1}^2 + 2i(f_i - \theta f_j, g_i + \theta g_j)_{\mathcal{H}_1} \right] \right\}
\end{aligned}$$

e neste caso teremos

$$i(f_i - \theta f_i, g_i + \theta g_i) = -i(f_i - \theta f_i, g_i + \theta g_i) \quad (6.38)$$

ou seja, A''_{ij} será hermiteana.

Por outro lado, a matriz

$$B'_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_p w(p) |\tilde{q}_i(p) + \theta \tilde{q}_j(p)|^2 \quad (6.39)$$

é quase negativa definida, como se pode verificar comparando-se (6.39) com (6.31) - (6.33), ou seja, para toda sequência

$$\{f_i\}_{i=1}^m, \quad f_i \in \mathbb{C}, \quad \sum_{i=1}^m f_i = 0,$$

$$\sum_{i,j=1}^m f_i \bar{f}_j B'_{ij} \leq 0$$

Então a matriz A''_{ij} não é positiva definida, o que pode ser facilmente constatado neste exemplo:

$$\begin{aligned} \langle \pi(\kappa) \oplus \pi(\kappa) \rangle_{\Lambda} &= - \langle \pi(\kappa) \oplus \pi(\kappa) \rangle_{\Lambda} = \\ &= - \langle \phi(\kappa) \oplus \phi(\kappa) \rangle_{\Lambda} < 0 \end{aligned}$$

É claro que podemos ter positividade por reflexão para funções de $\phi(f_i), \pi(g_i)$ desde que $(f_i, g_i)_f = 0$ e desde que utilizemos a definição $(H)_1$, pois neste caso A'_{ij} é positiva definida porque (6.37) se anula. Porém este conjunto de funções de ϕ e π não constitui uma álgebra, o que, repetimos, parece ser necessário para as aplicações.

APÊNDICE A

DESIGUALDADE DE BOGOLIUBOV

A desigualdade (2.2) foi estabelecida pela primeira vez para sistema quânticos por N.N. Bogoliubov [8,9]. Damos a seguir uma dedução desta desigualdade, assim como de sua versão (2.8), para o caso quântico.

Consideremos, então, um sistema quântico, à temperatura inversa β , com o valor esperado de um observável A dado por:

$$\langle A \rangle = \frac{T_\Lambda A e^{-\beta H}}{T_\Lambda e^{-\beta H}} \quad (\text{A.1})$$

onde H é a Hamiltoniana do sistema.

Dados dois observáveis (operadores) A e B definimos a forma sesquilinear

$$(A, B) \equiv \frac{1}{Z} \int_0^1 dx \, T_\Lambda (e^{-x\beta H} A e^{-(1-x)\beta H} B) \quad (\text{A.2})$$

onde $Z = T_\Lambda e^{-\beta H}$.

A forma (A.2) é conhecida na literatura como função de dois pontos de Duhamel, tendo sido assim denominada por Dyson, Lieb e Simon em [33].

As seguintes propriedades de (A.2) serão relevantes para nossas finalidades:

$$a-) (A, B) = \overline{(B, A)} \quad , \text{ que segue do fato } T_\lambda \bar{C} = \overline{T_\lambda C}$$

$$b-) (A, A) \geq 0 \text{ pois } (A, A) \text{ pode ser reescrita como}$$

$$(A, A) = \frac{1}{Z} \int_0^1 dx T_\lambda \left\{ \left(\bar{e}^{-\frac{x}{Z} P_H} \bar{A}^* \bar{e}^{-\frac{1-x}{Z} P_H} \right) \left(\bar{e}^{-\frac{1-x}{Z} P_H} A \bar{e}^{-\frac{x}{Z} P_H} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{Z} \int_0^1 dx T_\lambda \{ C(x) \bar{C}(x) \} \geq 0 \quad \text{onde } C(x) = \bar{e}^{-\frac{x}{Z} P_H} \bar{A}^* \bar{e}^{-\frac{1-x}{Z} P_H}$$

c-) A função

$$f(x) = T_\lambda \left(\bar{e}^{-x P_H} \bar{A}^* \bar{e}^{-(1-x) P_H} A \right)$$

é uma função convexa de x , o que segue diretamente do Teorema Espectral e da convexidade da função exponencial e^x . Como, para uma função convexa integrável, vale a desigualdade

$$\int_a^b f(x) dx \leq \frac{b-a}{2} (f(b) + f(a))$$

temos para (A, A) :

$$(A, A) \leq \frac{1}{2} \langle A \bar{A}^* + \bar{A}^* A \rangle \quad (A.3)$$

As propriedades a e b implicam que (A, B) é uma forma sesquilinear simétrica e não negativa, valendo portanto a desigualdade de Schwartz:

$$|(A, B)|^2 \leq (A, A)(B, B) \quad (\text{A.4})$$

Para obtermos a desigualdade de Bogoliubov (2.2) partimos da identidade:

$$T_n(\bar{e}^{\alpha\beta H} [\beta H, A]^* \bar{e}^{-(1-\alpha)\beta H} B) = \frac{d}{d\alpha} T_n(\bar{e}^{\alpha\beta H} A^* \bar{e}^{-(1-\alpha)\beta H} B)$$

que, substituída em (A.2) nos fornece, após a integração

$$([\beta H, \hat{A}], B) = \langle [A, B] \rangle \quad (\text{A.5})$$

Então, de (A.5):

$$|\langle [A, B] \rangle|^2 = |([\beta H, \hat{A}], B)|^2 \leq$$

$$\leq ([\beta H, \hat{A}], [\beta H, \hat{A}]) (B, B) \leq \quad \text{por (A.4)}$$

$$\leq \frac{1}{2} \langle \hat{B}\hat{B} + \hat{B}\hat{B}^* \rangle ([\beta H, \hat{A}], [\beta H, \hat{A}]) = \quad \text{por (A.3)}$$

$$= \frac{1}{2} \langle \hat{B}\hat{B} + \hat{B}\hat{B}^* \rangle \langle [A, [\beta H, \hat{A}]] \rangle \quad \text{por (A.5),}$$

ou seja, obtemos a desigualdade (2.2)

$$|\langle [A, B] \rangle|^2 \leq \beta \left\langle \frac{\hat{B}\hat{B}^* + \hat{B}^*\hat{B}}{2} \right\rangle \langle [A, [H, \hat{A}]] \rangle \quad (\text{A.6})$$

Passemos agora à dedução da versão (2.8) da desigualdade de Bogoliubov [28] .

Para tanto consideremos um grupo a um parâmetro de transformações $\tau_s, s \in \mathbb{R}$ tal que $\tau_s(AB) = (\tau_s A)(\tau_s B)$ e tal que o traço seja invariante por τ_s ou seja:

$$T_n(\tau_s A) = T_n A \quad (\text{A.7})$$

Utilizando (A.7), temos:

$$\langle \tau_s A \rangle = \frac{T_n\{\tau_s A e^{-\beta H}\}}{T_n e^{-\beta H}} = \frac{T_n\{A e^{-\beta \tau_s H}\}}{T_n e^{-\beta H}} \quad (\text{A.8})$$

Diferenciando (A.8) em relação a s obtemos:

$$\left. \frac{d}{ds} \langle \tau_s A \rangle \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} \frac{T_n\{A e^{-\beta \tau_s H}\}}{T_n e^{-\beta H}} \right|_{s=0} \quad (\text{A.9})$$

Por outro lado:

$$\left. \frac{d}{ds} \frac{T_n\{A e^{-\beta \tau_s H}\}}{T_n e^{-\beta H}} \right|_{s=0} = \left(A, \left. \frac{d}{ds} \tau_s \beta H \right|_{s=0} \right) \quad (\text{A.10})$$

e então:

$$\left. \frac{d}{ds} \langle \tau_s A \rangle \right|_{s=0} = \left(A, \left. \frac{d}{ds} \tau_s \beta H \right|_{s=0} \right) \quad (\text{A.11})$$

A igualdade (A.11) é uma identidade de Ward local, conforme discutido em [28].

De (A.11), com o uso de (A.4) e (A.3), temos:

$$\left| \frac{d}{ds} \langle \tau_s A \rangle \Big|_{s=0} \right|^2 \leq \left\langle \frac{A A^\dagger + A^\dagger A}{2} \right\rangle \left(\frac{d}{dt} \tau_t \beta H \Big|_{t=0}, \frac{d}{ds} \tau_s \beta H \Big|_{s=0} \right) \quad (\text{A.12})$$

Finalmente, substituindo A por $\frac{d}{dt} \tau_t \beta H \Big|_{t=0}$ em (A.11) e substituindo em (A.12), obtemos:

$$\left| \frac{d}{ds} \langle \tau_s A \rangle \Big|_{s=0} \right|^2 \leq \beta \left\langle \frac{A A^\dagger + A^\dagger A}{2} \right\rangle \frac{d}{ds} \frac{d}{dt} \langle \tau_s \tau_t H \rangle \Big|_{s=t=0} \quad (\text{A.13})$$

que corresponde à desigualdade (2.8) do Capítulo 2.

Deve-se notar que as manipulações feitas para se obter (A.6) e (A.13) só são válidas rigorosamente para sistemas a volume finito, pois somente assim podemos fazer sentido à Hamiltoniana H e à definição (A.1).

No entanto podemos estabelecer (A.6) e (A.13) para qualquer volume finito e a desigualdade continua válida no limite em que o volume torna-se infinito, desde que os dois membros das desigualdades tenham um limite bem definido.

Alternativamente, pode-se demonstrar (A.6) diretamente para sistemas de volume infinito, sendo que neste caso o contexto natural para a sua demonstração é a formulação algébrica

ca da Mecânica Estatística [29] . Neste contexto a estrutura (A.1) do estado de equilíbrio, essencial para a validade da desigualdade de Bogoliubov, é substituída pela condição KMS (Kubo, Martin, Schwinger) [26, 27] , que pode ser assim expressa: a álgebra de observáveis $\mathcal{O}$ possui um automorfismo α_t , $t \in \mathbb{R}$ (translações temporais) tal que $B_t = \alpha_t B$; o estado $\omega(\cdot)$ em $\mathcal{O}$ obedece a condição KMS se, para todo B , $C \in \mathcal{O}$

$$\omega(B_{-it} C) = \omega(C B)$$

Esta relação pode ser facilmente verificada para estados do tipo (A.1), com α_t dado por

$$\alpha_t B = e^{itH} B e^{-itH}$$

Para sistemas clássicos valem também as desigualdades (A.6) e (A.13) sendo que o Traço em (A.1) é substituído por uma integral no espaço de fase do sistema e em (A.6) os comutadores são substituídos por parênteses de Poisson [5,28] .

APENDICE B

CÁLCULO DA FUNÇÃO GERATRIZ [44].

Queremos calcular

$$E(f, g, \beta, \mu, n) = \frac{T_{n_f} \left\{ e^{i\phi(f)} e^{i\pi(g)} e^{-\beta(H-\mu N)} \right\}}{T_{n_f} e^{-\beta(H-\mu N)}} = \frac{Z(f, g)}{Z(0, 0)} \quad (\text{B.1})$$

para $f, g \in \mathcal{F}_1$.

Temos:

$$e^{i\phi(f)} = e^{\frac{i}{\sqrt{2}}(\tilde{a}^*(f) + a(f))} \quad (\text{B.2})$$

$$e^{i\pi(g)} = e^{-\frac{i}{\sqrt{2}}(\tilde{a}^*(g) - a(g))}$$

Utilizando as relações de comutação (6.8) entre a e $\tilde{a}^*$ podemos escrever:

$$\begin{aligned} Z(f, g) &= \exp \left\{ -\frac{1}{4} [\|f\|_{\mathcal{F}_1}^2 + \|g\|_{\mathcal{F}_1}^2 + 2i(f, g)_{\mathcal{F}_1}] \right\} \times \\ &\times T_{n_f} \left\{ e^{\frac{i}{\sqrt{2}}\tilde{a}^*(f) - \frac{i}{\sqrt{2}}\tilde{a}^*(g)} e^{\frac{i}{\sqrt{2}}a(f) + \frac{i}{\sqrt{2}}a(g)} e^{-\beta(H-\mu N)} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

O cálculo do traço se realiza mais facilmente no espaço de momentos, com a ajuda da transformação de Fourier, definida em (6.22).

Os operadores de criação e aniquilação no espaço de momentos se escrevem:

$$a(p) = \frac{1}{\sqrt{|A|}} \sum_{x \in A} e^{ip \cdot x} a(x)$$

$$a^*(p) = \frac{1}{\sqrt{|A|}} \sum_{x \in A} e^{-ip \cdot x} a^*(x)$$

com as relações de comutação

$$[a(p), a(q)] = [a^*(p), a^*(q)] = 0$$

e

$$[a(p), a^*(q)] = \delta_{p,q}$$

(B.4)

A Hamiltoniana e o operador de número, diagonalizam-se:

$$H = \sum_{p \in \Lambda^*} E(p) a^*(p) a(p) = \sum_{p \in \Lambda^*} H(p)$$

(B.5)

$$N = \sum_{p \in \Lambda^*} a^*(p) a(p) = \sum_{p \in \Lambda^*} N(p)$$

onde

$$E(p) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (1 - \cos p^i)$$

Temos também:

$$e \quad \tilde{a}(f) = \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \tilde{f}(p) \tilde{a}(p) \quad (\text{B.6})$$

$$a(f) = \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \overline{\tilde{f}(p)} a(p)$$

Com o auxílio de (B.4), (B.5) e (B.6), temos para (B.3):

$$Z(f, g) = E_0(f, g) T_{n_f} \left\{ \prod_{p \in \mathbb{N}^*} \left(e^{\delta(p) \tilde{a}(p)} e^{\gamma(p) a(p)} e^{-\beta(H(p) - \mu N(p))} \right) \right\} \quad (\text{B.7})$$

onde

$$E_0(f, g) = \exp \left\{ -\frac{1}{4} \left[\|f\|_{\mathcal{F}_1}^2 + \|g\|_{\mathcal{F}_1}^2 + 2i(f, g)_{\mathcal{F}_1} \right] \right\} \quad (\text{B.8})$$

$$\delta(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(i \tilde{f}(p) - \tilde{g}(p) \right) \quad (\text{B.9})$$

$$\gamma(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(i \overline{\tilde{f}(p)} + \overline{\tilde{g}(p)} \right)$$

Para calcular o traço em $\mathcal{F}$, notamos que $\mathcal{F}_1 = \mathcal{L}^2(\Lambda)$ pode ser escrito como:

$$\mathcal{F}_1 \simeq \bigoplus_{p \in \mathbb{N}^*} \mathcal{H}_p$$

onde

$$\mathcal{H}_p = \left\{ \alpha \frac{e^{ip \cdot x}}{\sqrt{|A|}}, \alpha \in \mathbb{C} \right\}$$

são espaços de Hilbert unidimensionais. Então $\mathcal{F}$, o espaço de Fock construído sobre $\mathcal{F}_\lambda = \ell^2(\Lambda)$ pode ser decomposto num produto tensorial.

$$\mathcal{F} = \bigotimes_{p \in \Lambda^*} \mathcal{F}_p \quad (\text{B.10})$$

onde $\mathcal{F}_p$ são os espaços de Fock construído sobre $\mathcal{H}_p$ (corresponde à definição (6.3) com $\ell^2(\Lambda)$ substituído por $\mathcal{H}_p$).

A decomposição (B.10) nos fornece para (B.7):

$$Z(f, g) = E_0(f, g) \prod_{p \in \Lambda^*} T_{\mathcal{F}_p} \left\{ e^{\delta(p) \hat{a}^*(p)} e^{\gamma(p) a(p)} e^{-\beta(H(p) - \mu N(p))} \right\} \quad (\text{B.11})$$

Escolhemos uma base ortonormal em $\mathcal{F}_p$ dada por:

$$\psi_{n,p} = \frac{\hat{a}^*(p)^n}{\sqrt{n!}} \Omega_p$$

onde Ω_p é o estado de vácuo em $\mathcal{F}_p$, que, na decomposição (6.4) de $\mathcal{F}_p$ é

$$\Omega_p = \{1, 0, 0, \dots\}$$

Utilizando as relações de comutação (B.4), e (B.5), temos as relações:

$$-\beta(H(p) - \mu N(p)) \psi_{n,p} = -n\beta(E(p) - \mu) \psi_{n,p} \equiv n\omega(p) \psi_{n,p}$$

com

$$\omega(p) = \beta(\mu - E(p))$$

e

$$e^{\gamma(p) a(p)} \hat{a}^*(p)^n = [\hat{a}^*(p) + \gamma(p)]^n e^{\gamma(p) a(p)}$$

o que nos dá para (B.11)

$$Z(f, g) = E_0(f, g) \prod_{p \in \Lambda^*} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{n\omega(p)}}{n!} \left([\tilde{a}(p) + \tilde{\delta}(p)]^n \Omega_p, [\tilde{a}(p) + \tilde{\gamma}(p)]^n \Omega_p \right)_{\mathcal{F}_p}$$

Expandindo $(\tilde{a} + \tilde{\delta})^n$ e $(\tilde{a} + \tilde{\gamma})^n$ e utilizando a ortonormalidade de $\frac{\tilde{a}(p)^n}{\sqrt{n!}} \Omega_p$ obtemos:

$$\begin{aligned} Z(f, g) &= E_0(f, g) \prod_{p \in \Lambda^*} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^n \frac{n! [\delta(p) \gamma(p)]^{\ell}}{(\ell!)^2 (n-\ell)!} e^{n\omega(p)} = \\ &= E_0(f, g) \prod_{p \in \Lambda^*} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\delta(p) \gamma(p)]^n}{(n!)^2} \sum_{n=n}^{\infty} e^{n\omega(p)} n(n-1) \dots (n-n+1) \end{aligned}$$

Mas como

$$\begin{aligned} \sum_{n=n}^{\infty} e^{n\omega(p)} n(n-1) \dots (n-n+1) &= e^{n\omega(p)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Big|_{x=e^{\omega(p)}} = \\ &= e^{n\omega(p)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \left(\frac{1}{1-x} \right) \Big|_{x=e^{\omega(p)}} = e^{n\omega(p)} \frac{n!}{(1-e^{\omega(p)})^{n+1}} \end{aligned}$$

desde que $e^{\omega(p)} < 1$, ou seja

$$\beta(\mu - E(p)) < 0$$

obtemos finalmente para $Z(f, g)$ e $Z(0, 0)$:

$$Z(f, g) = E_0(f, g) \prod_{p \in \Lambda^*} \frac{1}{1 - e^{\omega(p)}} \exp \left\{ \frac{e^{\omega(p)} \delta(p) \tilde{g}(p)}{1 - e^{\omega(p)}} \right\} \quad (\text{B.12})$$

$$Z(0, 0) = \prod_{p \in \Lambda^*} \frac{1}{1 - e^{\omega(p)}} \quad (\text{B.13})$$

Dividindo-se (B.12) por (B.13), e levando em conta (B.9), resulta:

$$\begin{aligned} E(f, g, \beta, \mu, \Lambda) = & \exp \left\{ -\frac{1}{4} \left[\|f\|_{\mathcal{H}}^2 + \|g\|_{\mathcal{H}}^2 + 2i(f, g)_{\mathcal{H}} \right] \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{p \in \Lambda^*} W(p) \left| i \tilde{f}(p) - \tilde{g}(p) \right|^2 \right\} \end{aligned}$$

com

$$W(p) = \frac{1}{e^{-\omega(p)} - 1}$$

APÊNDICE C

A soma (6.35), que queremos calcular, é da forma:

$$S = \sum_{k=-L-1}^L \frac{e^{i\delta k}}{e^{\frac{\alpha - r \cos \frac{\pi k}{L+1}}}{e^{\frac{\pi k}{L+1}} - 1}} \quad (C.1)$$

onde

$$\delta = \frac{\pi}{L+1} (\alpha^\nu + y^\nu + 1) \quad (C.2)$$

$$\alpha = -\beta\mu + \frac{\beta}{m} \sum_{i=1}^{\nu-1} (1 - \cos \gamma^i) + \frac{\beta}{m}$$

$$\gamma = \frac{\beta}{m}$$

Reescrevemos (C.1) de uma forma simétrica:

$$S = \sum_{k=-L-1}^{L+1} \frac{e^{i\delta k}}{e^{\frac{\alpha - r \cos \frac{\pi k}{L+1}}}{e^{\frac{\pi k}{L+1}} - 1}} - \frac{e^{-i\delta(L+1)}}{e^{\frac{\alpha + r}{L+1}} - 1} \quad (C.3)$$

Para calcular a soma em (C.3) utilizamos a fórmula de soma de Poisson [50], ou seja:

dadas duas funções $f(x)$, $\varphi(t)$ tais que

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx} dx \quad (C.4)$$

então teremos

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\beta k) = \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha n) \quad , \quad \alpha, \beta > 0 \quad \text{e} \quad \alpha \cdot \beta = 2\pi$$

Em (C.4) escolhemos $\beta = 1$, $\alpha = 2\pi$ e

$$f(x) = \chi_L(x) \frac{e^{i\delta x}}{e^{\alpha - \gamma \cos \frac{\pi x}{L+1}} - 1}$$

onde

$$\chi_L(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq L+1 \\ 0 & \text{se } |x| > L+1 \end{cases}$$

e então obtemos

$$\sum_{k=-L-1}^{L+1} \frac{e^{i\delta k}}{e^{\alpha - \gamma \cos \frac{\pi k}{L+1}} - 1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n) \quad (C.5)$$

com $\varphi(2\pi n)$ dado por:

$$\begin{aligned} \varphi(2\pi n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi n x} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-L-1}^{L+1} \frac{e^{i\delta x} e^{-i2\pi n x}}{e^{\alpha - \gamma \cos \frac{\pi x}{L+1}} - 1} dx = \\ &= \frac{L+1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\alpha x}}{e^{\alpha - \gamma \cos x} - 1} dx . \end{aligned} \quad (C.6)$$

onde

$$\alpha = (\delta - 2\pi n) \frac{L+1}{\pi}$$

O valor desta integral, calculada mais adiante, é:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\alpha x}}{e^{\alpha - \gamma \cos x} - 1} dx = \frac{2\pi}{A B^{|\alpha|}} \quad (C.7)$$

onde

$$A = \left[\left(\frac{\alpha}{\gamma} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}, \quad B = \frac{\alpha}{\gamma} + \left[\left(\frac{\alpha}{\gamma} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}$$

e

$$\frac{\alpha}{\gamma} = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} (1 - \cos p_i) - n\mu > 1 \quad \text{pois } \mu < 0.$$

A substituição de (C.6) e (C.7) em (C.3), e notando que

$$|\alpha| = \begin{cases} x^y + y^y + 2|m|(L+1) + 1 & \text{se } n \leq 0 \\ 2n(L+1) - (x^y + y^y + 1) & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

nos fornece

$$S = \frac{2L+2}{AB} B^{x^v+y^v} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{B^{2L+2}} \right)^n + \\ + (2L+2) \frac{B}{A} B^{x^v+y^v} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{B^{2L+2}} \right)^n + \frac{(-1)^{x^v+y^v}}{e^{\alpha+\gamma} - 1}$$

Como $B > 1$ a soma das séries geométricas resulta em

$$S = \frac{2L+2}{A} \frac{B^{2L+1}}{B^{2L+2} - 1} B^{x^v+y^v} + \frac{2L+2}{A} \frac{B}{B^{2L+2} - 1} B^{x^v+y^v} + \\ + \frac{(-1)^{x^v+y^v}}{e^{\alpha+\gamma} - 1}$$

que é da forma (6.35):

$$S = \sum_{k=1}^3 G_k(p^1, \dots, p^{r-1}) [F_k(p^1, \dots, p^{r-1})]^{x^v+y^v}$$

com

$$G_k(p^1, \dots, p^{r-1}) \geq 0, \quad F_k(p^1, \dots, p^{r-1}) \text{ real.}$$

Resta-nos calcular a integral (C.7)

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{iax}}{e^{\alpha-\gamma\cos x} - 1} dx = \int_0^{\pi} \frac{e^{-iax}}{e^{\alpha-\gamma\cos x} - 1} dx + \int_0^{\pi} \frac{e^{iax}}{e^{\alpha-\gamma\cos x} - 1} dx$$

Para $x \in [0, \pi]$ fazemos a transformação de va
riáveis:

$$\cos x = y, \quad dx = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy, \quad -1 \leq y \leq 1$$

$$e^{iax} = \begin{cases} \left[\frac{1}{y - i\sqrt{1-y^2}} \right]^a & \text{se } a > 0 \\ \left[\frac{1}{y + i\sqrt{1-y^2}} \right]^{|a|} & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

obtendo

$$I = \int_{-1}^1 \frac{dy}{(e^{a-y} - 1)(\sqrt{1-y^2})(y - i\sqrt{1-y^2})^{|a|}} + \int_{-1}^1 \frac{dy}{(e^{a-y} - 1)(\sqrt{1-y^2})(y + i\sqrt{1-y^2})^{|a|}}$$

Definimos no plano complexo z a função:

$$F(z) = \frac{1}{(e^{a-y} - 1) \sqrt{1-z^2} (z - i\sqrt{1-z^2})^{|a|}}$$

de modo que o corte de $\sqrt{1-z^2}$ situe-se entre $z = -1$ e $z = 1$
ou seja, adotamos a parametrização:

$$\sqrt{1-z^2} = |1-z|^{\frac{1}{2}} |1+z|^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta_1}{2}} e^{i\frac{\theta_2}{2}}$$

com $0 \leq \theta_1 \leq 2\pi$, $-\pi \leq \theta_2 \leq \pi$ dado pela figura abaixo:

Com a escolha (C.8), teremos para z real, na parte superior do corte

$$\sqrt{1-z^2} = |\sqrt{1-z^2}|$$

e na parte inferior

$$\sqrt{1-z^2} = -|\sqrt{1-z^2}|$$

Assim, podemos escrever:

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{C_\epsilon} F(z) dz$$

onde C_ϵ é o contorno ilustrado abaixo:

Facilmente se verifica que as contribuições das circunferências de raio ε se anulam quando $\varepsilon \gg 0$.

Agora, estendendo o contorno C_ε para o contorno $\Gamma_{R,\varepsilon}$ abaixo:

podemos escrever:

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \gg 0} \oint_{\Gamma_{R,\varepsilon}} F(z) dz \quad (C.9)$$

pois, no limite $R \rightarrow \infty$ a contribuição para (C.9) da integral na circunferência C_R se anula.

A função $F(z)$ possui um único polo simples, em $z = \frac{\alpha}{\gamma} > 1$ no interior do contorno $\Gamma_{R,\varepsilon}$ cujo resíduo é

$$\text{Res } F(z) \Big|_{z = \frac{\alpha}{\gamma}} = \frac{1}{i \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 - 1} \left(\frac{\alpha}{\gamma} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 - 1} \right)^{|\alpha|}}$$

resultando então:

$$\oint_{\Gamma_{k,l}} F(z) dz = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 - 1} \left(\frac{\alpha}{\gamma} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 - 1} \right)^{|a|}}$$

donde segue imediatamente (C.7).

REFERÊNCIAS

- 1 - C.H.Herring, C.Kittel - Phys.Rev, 81, 869 (1951).
- 2 - G.Wannier: "Elements of Solid State Theory", Cambridge University Press, pgs. 111-113 (1959).
- 3 - P.C.Hohenberg - Phys.Rev. 158, 383 (1967).
- 4 - N.D. Mermin, H. Wagner - Phys.Rev.Letters 17, 1133 (1966).
- 5 - N.D. Mermin - J.Math.Phys. 8 , 1061 (1967).
- 6 - N.D. Mermin - Phys.Rev. 176, 250 (1968).
- 7 - G.V. Chester, M.E.Fisher, N.D.Mermin - Phys.Rev. 185, 760 (1969).
- 8 - N.N. Bogoliubov - Phys.Abh.S.U. 6, 113 (1962).
- 9 - N.N. Bogoliubov - "Lectures on Quantum Statistics", vol.2, pg. 41, Gordon and Breach, New York (1970).
- 10 - J.C. Garrison, H.L. Morrison, J.Wong - J.Math.Phys. 13 , 1735 (1972).
- 11 - R.L. Dobrushin, S.B. Shlosman - Commun.Math.Phys. 42, 31, (1975).
- 12 - S.B. Shlosman - Theor.Math.Phys. 33, 897 (1977).
- 13 - P.A. Vuillermot - Phys.Letters, 61, 9 (1977).
- 14 - P.A. Vuillermot, M.V.Romerio - Commun.Math.Phys. 41; 281 (1975).
- 15 - A.Klein, L.J.Landau, D.Schucker - J.Stat.Phys.26, 505 (1981).
- 16 - J.Fröhlich, C.E.Pfister - Commun.Math.Phys.81, 277 (1981).
- 17 - C.E. Pfister - Commun.Math.Phys. 79, 181 (1981)
- 18 - B.Simon, A.Sokal - J.Stat.Phys. 25, 679 (1981).
- 19 - J.Rogers, C.Thompson - J.Stat.Phys.25, 669 (1981).
- 20 - C.A.Bonato, J.F.Perez, A.Klein - J.Stat.Phys. 29, 159 (1982).
- 21 - M.Fannes, J.V.Pulě, A.Verbeure - Letters Math.Phys.6, 385 (1982).
- 22 - H.Ezawa, J.A.Swieca - Commun.Math.Phys. 5, 330 (1967)
- 23 - S.Coleman - Commun.Math.Phys.31, 259 (1978).
- 24 - N.D.Mermin - J.Phys.Soc.Japan 26 Supplement, 203 (1969).
- 25 - R.E.Peierls - Helv.Phys.Acta, 7 Suppl.2, 81 (1934); Annales de l'Institut Henri Poincaré 5, 177 (1935).

- 26 - D.Ruelle - "Statistical Mechanics - Rigorous Results", Benjamin, New York (1969).
- 27 - G.G.Emch - "The C^* - Algebra Approach to Phase Transitions" in "Phase Transitions and Critical Phenomena" eds.C.Domb,M.S.Green, vol.1, pg.137, Academic Press Inc., London (1972).
- 28 - W.Driessler L.J.Landau, J.F.Perez - J.Stat.Phys. 20 , 123 (1979).
- 29 - J.C.Garrison, J.Wong - Commun.Math.Phys. 26, 1(1972).
- 30 - J.Fröhlich, B.Simon, T.Spencer - Commun.Math.Phys.50, 79 (1976).
- 31 - J.Fröhlich, R.Israel, E.H.Lieb, B.Simon - Commun.Math. Phys. 62, 1 (1978).
- 32 - R.Griffiths - Phys.Rev. 152, 240 (1966).
- 33 - F.J.Dyson, E.H.Lieb, B.Simon - J.Stat.Phys.18,335(1978)
- 34 - S.B. Shlosman - Commun.Math.Phys.71, 207 (1980).
- 35 - D.Jasnow, M.E.Fisher - Phys.Rev. B 3, 895 (1971).
- 36 - D.Jasnow, M.E.Fisher - Phys.Rev. B 3, 907 (1971).
- 37 - K.R.Ito - J.Stat.Phys. 29, 747 (1982)
- 38 - O.A.Mc Bryan, T.Spencer - Commun.Math.Phys.53, 299 (1973).
- 39 - R.L.Dobrushin - Commun.Math.Phys. 32, 269 (1973).
- 40 - M.Cassandro, E.Olivieri - Commun.Math.Phys. 80, 255 , (1981):
- 41 - J.Fröhlich, E.H.Lieb. - Commun.Math.Phys.60, 233(1978).
- 42 - M.B.Ruskai - Commun.Math.Phys.26, 280 (1972).
- 43 - R.F.Streater, A.S.Wightman - "PCT,Spin,Statistics and All That" Benjamin, New York (1964).
- 44 - H.Araki, E.J.Woods - J.Math.Phys. 4, 637 (1963).
- 45 - J.T. Canon - Commun.Math.Phys. 29, 89 (1973).
- 46 - J.T.Lewis, J.V.Pule - Commun.Math.Phys. 36, 1 (1974).
- 47 - I.M.Gelfand. N.Y.Vilenkin - "Generalized Functions" Vol.4, Academic Press, New York (1964) - O Lema 6.1 corresponde ao Teorema 4 do Capítulo III, § 4 da referência. É preciso acrescentar a condição no enunciado do Teorema 4.
- 48 - G.C.Hegerfeldt - Commun.Math.Phys. 35, 155 (1974).
- 49 - K.Osterwalder, R.Schrader - Commun.Math.Phys. 31, 83 (1973); Commun.Math.Phys. 42, 281(1973); "Euclidean

- Green's Functions and Wightman Distributions" in
 "Constructive Quantum Field Theory" Lectures Notes
 in Physics, Springer Verlag, vol. 25 (1973).
- 50 - W. Rudin - "Real and Complex Analysis" - Mc Graw-Hill ,
 London (1970).
- 51 - Uma visão geral do emprego de álgebras C^* em Mecânica
 Estatística, incluindo a construção GNS pode ser
 encontrada nas ref. 26, 27 . Uma excelente revisão
 sobre álgebras C^* incluindo extensa bibliografia
 pode ser encontrada em: "Aspects of Algebraic
 Quantum Theory" por I.F. Wilde - Preprint IFUSP/P -
 - 113 (1977).
- 52 - R. Brout - Phys. Rev. 115, 824 (1959)
 P.A. Vuillermot - J. Phys. A 10, 1319 (1977).
- 53 - J.B. Kogut - Rev. Mod. Phys. 51, 659 (1979).
- 54 - M. Lüscher - "Absence of Spontaneous Gauge Symmetry Breaking
 in Hamiltonian Lattice Gauge Theories" - pre -
 print DESY 77/16 (não publicado(?)).
- 55 - J. Glimm, A. Jaffe - Physics Letters 66, 67 (1977).
- 56 - M. Göpfert, G. Mack - Commun. Math. Phys. 82, 545 (1982).
- 57 - J.F. Perez - Rev. Bras. Física 10, 293 (1980).
- 58 - F.J. Dyson - Phys. Rev. 102, 1217 (1956).
- 59 - F.J. Dyson - Phys. Rev. 102, 1230 (1956).
- 60 - J.F. Perez - Tese de Doutorado, E.T.H., Zurique (1973).
- 61 - L.J. Landau, J.F. Perez, W.F. Wreszinski - J. Stat. Phys.
26, 755 (1981).
- 62 - C. Borgs, E. Seiler - Nuclear Physics B, 215, 125 (1983).
- 63 - M. Aizenman, P.A. Martin - Commun. Math. Phys. 78, 99 (1980).
- 64 - M. Aizenman, J. Fröhlich - J. Stat. Phys. 26, 347 (1981).