Refundido a 15/05

Universidade de São Paulo
Instituto de Física

**A ELETRODINÂMICA ESTOCÁSTICA
E O EFEITO COMPTON**

Antonio Vidiella Barranco

Orientador: Prof. Dr. Humberto de Meneses França

Dissertação de Mestrado

São Paulo 1987

SBI-IFUSP

305M810T0073

539.72

B2682

M

p. 1

46

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Barranco, Antonio Vidiella

A eletrodinâmica estocástica e o efeito Compton.
São Paulo, 1987.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo.
Instituto de Física. Departamento de Física Matemática
Área de Concentração: Física das Partículas Elementares.

Orientador: Prof. Dr. Humberto de Menezes França

Unitermos: 1.Eletrodinâmica estocástica; 2.Radiações aleatórias térmica e de ponto zero; 3.Oscilador harmônico; 4.Equilíbrio entre matéria e radiação; 5. Espalhamento Compton.

USP/IF/SBI - 09/87

Para os meus pais

Agradeço ao Prof. Dr. Humberto de Menezes França pela proposição do trabalho e amizade demonstrada durante a orientação.

Agradeço aos meus amigos que de alguma forma contribuíram para que este trabalho fosse concluído, particularmente ao meu pai.

Agradeço à Fapesp pelo auxílio financeiro concedido.

Natura non facit saltus

G.W. Leibniz

INDEX

- RESUMO	
- ABSTRACT	
- INTRODUÇÃO	
- CAPÍTULO I EQUILÍBRIO ENTRE RADIAÇÃO E MATÉRIA	
I _a - INTRODUÇÃO À ELETRODINÂMICA ESTOCÁSTICA	1
I _b - O MODELO ORIGINAL DE EINSTEIN	11
I _c - MODIFICAÇÕES AO MODELO DE EINSTEIN-EHRENFEST	
1- TROCA DE ENERGIA ENTRE RADIAÇÃO E MATÉRIA	16
2- TROCA DE MOMENTO ENTRE RADIAÇÃO E MATÉRIA	21
- CAPÍTULO II O EFEITO COMPTON NA ELETRODINÂMICA ESTOCÁSTICA	
II _a - BREVE HISTÓRICO SOBRE O EFEITO COMPTON	33
II _b - DESCRIÇÃO QUALITATIVA DO EFEITO COMPTON	
NO CONTEXTO DA ELETRODINÂMICA ESTOCÁSTICA	41
- SUMÁRIO DE CONCLUSÕES	55
- APÊNDICE I - ALTERAÇÃO DA DENSIDADE ESPECTRAL	
SOB TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ	59

- APÊNDICE II - ABSORÇÃO E EMISSÃO DE RADIAÇÃO POR UM OSCILADOR	64
- APÊNDICE III - A DEDUÇÃO DA FÓRMULA ESPECTRAL DE PLANCK PARA A RADIAÇÃO DE CORPO NEGRO	70
- REFERÊNCIAS	

RESUMO

A dissertação pode ser dividida em duas partes: a primeira contém uma adaptação do modelo fenomenológico de Einstein conhecido como " método dos coeficientes A e B ". As modificações são feitas no contexto da Eletrodinâmica Estocástica, uma teoria na qual as flutuações de ponto zero do campo eletromagnético são consideradas *reais e clássicas*.

Nós obtemos, num estudo não relativístico e clássico, relações entre a energia e momento de partículas livres e a frequência da radiação transferida. Estas relações coincidem com as bem conhecidas relações que representam a conservação do quadrivetor momento-energia em espalhamento fóton-elétron.

Na segunda parte nós tentamos descrever, de uma maneira qualitativa, o efeito Compton no espírito da Eletrodinâmica Estocástica. Encontramos indicações de que a ação combinada da força da reação da radiação e das flutuações de ponto zero é capaz de conferir à partícula carregada uma alta velocidade de recuo, e verificamos que a mesma é justamente a necessária para explicar o deslocamento da frequência observado como sendo devido ao efeito Doppler. Também calculamos a seção de choque diferencial para o espalhamento de radiação e encontramos a mesma expressão obtida por Compton no seu trabalho fundamental de 1923.

ABSTRACT

The dissertation may be divided in two parts: the first one contains an adaptation of Einstein's phenomenological model known as " method of coefficients A and B ". The modifications are done in the framework of Stochastic Electrodynamics, a theory in wich the zero point fluctuations of the electromagnetic field are considered *real and classical*.

We obtain, in a nonrelativistic and classical approach, relations among the energy and momentum of free particles and the frequency of the exchanged radiation. These relations are coincident with the well known ones who depict the four-momentum conservation in photon- electron scattering.

In the second part, we try to describe, in a qualitative manner, the Compton scattering in the spirit of Stochastic Electrodynamics. We find indications that the combined action of the radiation reaction force and the zero point flutuating field are able to give the charged particle a high recoil velocity, and we verify this one is just the necessary to explain the frequency shift as due to a double Doppler shift. We also calculate the differential cross section for the radiation scattering and we find the same expression as obtained by Compton in his fundamental work of 1923.

INTRODUÇÃO

Indubitavelmente as duas maiores revoluções da física deste século estão diretamente relacionadas com fenômenos eletromagnéticos. A Teoria da Relatividade, por um lado, provocou profundas alterações conceituais e contribuiu para harmonizar a física até então conhecida. Por outro lado temos a Teoria Quântica, que gradativamente assenhoreou-se da qualidade de descrever a natureza microscópica, vindo, após três décadas de desenvolvimento, tornar-se a teoria de maior alcance já concebida até então.

Durante este período (assim como posteriormente), todavia, formaram-se várias linhas de interpretação da Teoria Quântica, todas elas visando um esclarecimento conceitual da mesma. Apesar dos esforços de De Broglie, Schroedinger e do próprio Einstein, prevaleceu a interpretação de Copenhague, encabeçada por Bohr e Heisenberg. Com o advento da Teoria Quântica de Campos e de seu tremendo sucesso, foram então quase que completamente ofuscadas as tentativas de obtenção de novas teorias e interpretações. Na mesma proporção, assistiu-se o afastamento quase total da atuação da Física denominada Clássica no nível microscópico.

A Eletrodinâmica Estocástica, antes de tudo, é uma teoria através da qual se pretende dilatar o alcance da Física Clássica. Com a inclusão de campos eletromagnéticos flutuantes e *persistentes à temperatura zero*, a Eletrodinâmica Clássica é dotada de novas condições de contorno, e com isso torna-se capaz de prever fenômenos tradicionalmente ligados às concepções quânticas. Apesar das dificuldades de efetivação de cálculos rigorosos, existem indicações de que esta teoria pode nos auxiliar na compreensão de um número razoável de fenômenos microscópicos (segundo as hipóteses da Física Clássica). Com a Eletrodinâmica Estocástica, então, surge novamente a discussão em torno do eletromagnetismo e da sua importância para a física.

O efeito Compton é um fenômeno ligado à natureza da radiação que necessitou três décadas de refinamentos experimentais e formulação de teo-

rias que possibilitaram a sua compreensão. Através dele os físicos foram convencendo-se da necessidade de uma teoria quântica para a radiação, necessidade esta não muito evidente na época, apesar da insistência de Einstein neste sentido.

No presente trabalho, a respeito do Efeito Compton, inicialmente, no Capítulo I (seção Ia), apresentaremos uma Introdução à Eletrodinâmica Estocástica, onde procuraremos fornecer uma visão geral da teoria, ressaltando a importância da radiação de fundo para a mesma.

Prosseguiremos (seção Ib), com o objetivo de clarificar os cálculos posteriores, com um sumário do modelo de Einstein que trata da interação entre radiação e matéria conhecido atualmente como método dos coeficientes A e B.

Na próxima seção (Ic), investigaremos este modelo devido a Einstein (assim como modificações posteriores efetuadas pelo próprio Einstein e Ehrenfest) e efetuaremos modificações consistentes com a Eletrodinâmica Estocástica. As hipóteses desta teoria juntamente com os aspectos clássicos do modelo de Einstein-Ehrenfest, nos fornecerão relações interessantes entre a energia e momento trocado entre partículas não relativísticas e a radiação térmica e de ponto zero. Estas mesmas relações, caracterizam, na Mecânica Quântica, a emissão (ou absorção) de *fótons*, presente em processos como o efeito Compton.

Numa segunda parte (Capítulo II), abordaremos de maneira mais específica a questão do espalhamento Compton e, por completeza apresentaremos (seção IIa) um breve histórico sobre as teorias e idéias que envolveram seu estudo desde a descoberta dos raios X. Podemos adiantar que alguns destes modelos desenvolvidos nos serão úteis mais adiante.

Na próxima seção (IIb) estudaremos com um certo detalhe a interação entre uma partícula carregada e uma onda eletromagnética plana e monocromática de frequência ω , e verificaremos que a onda primária, juntamente com a força de reação da radiação, possibilita a absorção de uma quantidade apreciável de energia do campo de ponto zero na frequência ω . Este fato é de fundamental importância, pois a velocidade relativística adquirida pela

partícula será justamente a necessária para que o deslocamento do comprimento de onda observado possa ser calculado como sendo devido ao efeito Doppler. Com esta hipótese para o recuo, podemos também calcular a seção de choque de espalhamento da radiação utilizando a Eletrodinâmica Clássica (assim como foi feito por Compton).

Esta nossa análise é completamente clássica (apesar de simplificada), e traz consigo algumas diferenças fundamentais em relação ao tratamento quântico do fenômeno.

Na parte final reuniremos as conclusões num sumário que também conterá os passos seguidos durante os cálculos.

Alguns cálculos excessivamente longos foram dispostos em três Apêndices, de modo que não interferissem na exposição das idéias principais. Nestes Apêndices obteremos resultados importantes para a nossa análise do modelo de Einstein, como a alteração da densidade espectral sob transformações de Lorentz (Ap.I), a potência absorvida e irradiada por um oscilador em equilíbrio com radiação eletromagnética aleatória (Ap.II), e a dedução da fórmula de Planck (Ap.III).

Capítulo I

EQUILÍBRIO ENTRE RADIAÇÃO E MATÉRIA

Ia - INTRODUÇÃO À ELETRODINÂMICA ESTOCÁSTICA

A noção de energia de ponto zero parece ter surgido juntamente com as idéias que caracterizaram o aparecimento da teoria quântica. Sua introdução é devida a Planck (1911)⁽¹⁾, numa tentativa de estabelecer claramente quais os elementos quânticos presentes nos processos de absorção e emissão de energia eletromagnética por um sistema de osciladores. Numa nova abordagem do problema da radiação do corpo negro, Planck obteve uma energia média de $\frac{1}{2}\hbar\omega$ (por grau de liberdade) para o oscilador harmônico à temperatura zero, sem porém atribuí-la à ação do próprio campo eletromagnético. Foi Nernst (1916)^(1,2), que estendeu a noção de energia de ponto zero, ao considerar a existência das flutuações eletromagnéticas à temperatura zero.

Nos anos subseqüentes a física evoluiu numa direção que culminou na formação da Mecânica Quântica, e posteriormente da Eletrodinâmica Quântica. Foi possível então, conceber novamente a existência das flutuações de ponto zero (estado de vácuo) através do processo de quantização dos campos. Até hoje, no entanto, não foram eliminadas de maneira satisfatória as divergências associadas ao cálculo da densidade de energia contida nesses campos. A sua existência como campos reais, então, tornou-se fonte de controvérsias apesar da observação de efeitos como as forças entre placas condutoras (forças de Casimir), e o Lamb shift, por exemplo, que indicam a intervenção das flutuações eletromagnéticas de ponto zero.

Em 1948, no entanto, Welton⁽³⁾ sugeriu que fenômenos envolvendo flutuações de ponto zero poderiam ser tratados semiclassicamente. Mais tarde, Braffort e Tzara (1954)⁽⁴⁾, admitiram a realidade das flutuações de ponto

zero e também escreveram explicitamente a densidade espectral da *radiação de ponto zero clássica*. Estas flutuações possuíam propriedades estatísticas similares ao vácuo da Eletrodinâmica Quântica. Com isso obtiveram uma energia média para o oscilador eletrizado (interagindo com esses campos) compatível com o resultado quântico.

Entretanto, os primeiros trabalhos mais sólidos nesta linha são devidos a Marshall (1963-65)^(5,6). Ele postulou a existência de flutuações de ponto zero clássicas, necessárias para que o oscilador harmônico eletrizado pudesse manter uma situação de equilíbrio através da emissão e absorção de radiação. Estudou um sistema de osciladores aos quais aplicou-se um campo magnético e encontrou⁽⁵⁾ um comportamento diamagnético de acordo com a teoria quântica. Verificou, também, que densidade espectral da radiação de ponto zero é invariante por transformações de Lorentz⁽⁶⁾.

Configurou-se, então, uma nova versão da Eletrodinâmica Clássica, que pode ser denominada de Eletrodinâmica Clássica Estocástica* ou simplesmente *Eletrodinâmica Estocástica*⁽⁷⁾.

A partir daí um número relativamente reduzido de autores⁽²⁾ tornou-se responsável por trabalhos sobre as consequências, a nível microscópico, da atuação da radiação de ponto zero característica da Eletrodinâmica Estocástica. Estes trabalhos, principalmente os ligados ao estudo de propriedades do oscilador harmônico em interação com a radiação de ponto zero e térmica, forneceram resultados^(2,5) que podem ser considerados no mínimo interessantes senão surpreendentes, já que até então vinham sendo obtidos apenas com a utilização da Mecânica Quântica.

Depois desta breve incursão pelos caminhos que levaram à Eletrodinâmica Estocástica, vejamos de que maneira é possível tornar plausíveis suas hipóteses, e de que forma podemos tratar adequadamente as flutuações de ponto zero clássicas e sua interação com a matéria.

* Na literatura em língua inglesa ocorrem ainda as designações de "Random Electrodynamics" e "Classical Electrodynamics with Classical Zero Point Radiation Field"

O primeiro passo que daremos é a determinação da densidade espectral da radiação de ponto zero. É possível chegar-se à forma da densidade através de argumentos diferentes⁽²⁾. O que mostraremos a seguir está ligado à lei de Wien, e necessita apenas de considerações termodinâmicas e da Eletrodinâmica Clássica.

Consideremos um recipiente com um êmbolo e paredes interiores que reflitam perfeitamente a radiação eletromagnética. Vejamos o que ocorre com a radiação quando o êmbolo sofre uma compressão quaseestática e adiabática, movimentando-se a uma velocidade v . A energia eletromagnética que atinge uma área dA da superfície espelhada do êmbolo, dentro de um ângulo sólido $d\Omega$ e num tempo dt , será, no intervalo de frequência $(\omega, \omega + d\omega)$ ⁽⁸⁾:

$$dE_\omega = \rho(\omega, T) dA \cos \theta c \delta t d\omega \frac{d\Omega}{4\pi} \quad (1.1)$$

onde θ é o ângulo entre a direção de incidência da radiação e a normal ao êmbolo, e $\rho(\omega, T)$ (energia por unidade de volume e unidade de frequência) é a denominada *densidade espectral*. A radiação refletida pelo êmbolo sofrerá efeito Doppler, e a frequência da mesma se relacionará da seguinte forma com a frequência da radiação incidente ω (para $v/c \ll 1$)

$$\frac{\omega'}{\omega} = 1 + 2 \frac{v}{c} \cos \theta \quad (1.2)$$

Dessa maneira, para uma compressão quaseestática, podemos calcular o acréscimo de energia devido à reflexão:

$$\delta E_\omega = dE'_{\omega'} - dE_\omega = dA c \delta t \cos \theta \frac{d\Omega}{4\pi} d\omega [\rho(\omega', T) - \rho(\omega, T)] \quad (1.3)$$

Realizando uma expansão até a primeira ordem em v/c , obtemos

$$\delta E_\omega = \frac{d\Omega}{4\pi} c \cos \theta dA \delta t 2 \omega \frac{v}{c} \cos \theta \frac{\partial \rho(\omega, T)}{\partial \omega} d\omega \quad (1.4)$$

A variação do volume durante dt será $\delta V = dA v dt$, então

$$\delta E_\omega = \delta(\rho V) = \frac{1}{3} \omega \frac{\partial \rho(\omega, T)}{\partial \omega} \delta V \quad (1.5)$$

onde já se integrou sobre o ângulo sólido. Podemos reescrever (1.5) da seguinte forma:

$$\delta\rho(\omega, T) = \left[\frac{\omega}{3} \frac{\partial\rho(\omega, T)}{\partial\omega} - \rho(\omega, T) \right] \frac{\delta V}{V} \quad (1.6)$$

É interessante notar que a expressão acima para a densidade espectral vale para qualquer temperatura do recipiente, e deve ser verdadeira para quaisquer padrões de radiação eletromagnética, seja ela de corpo negro ou não. Observamos também na expressão (1.6) que existe um padrão de radiação⁽⁹⁾ [que será designado por $\rho_0(\omega)$] que não é alterado quando ocorre uma variação no volume no recipiente, ou seja, $\delta\rho(\omega, T) = 0$ para $\delta V \neq 0$. Esta condição nos leva a:

$$\frac{\omega}{3} \frac{\partial\rho_0(\omega)}{\partial\omega} - \rho_0(\omega) = 0 \quad (1.7)$$

A solução de (1.7) será:

$$\rho_0(\omega) = 0 \quad \text{ou} \quad \rho_0(\omega) = \alpha \omega^3 \quad (1.8)$$

A primeira solução é a tradicionalmente escolhida, mas certamente através dela não é possível obter, por exemplo, o comportamento atrativo entre duas placas condutoras paralelas para $T \rightarrow 0$. Podemos examinar agora em qual limite de temperatura se verificam as soluções anteriores. Isto pode ser feito se considerarmos uma compressão adiabática, ou seja, $\delta E + p \delta V = 0$. A pressão exercida pela radiação pode ser escrita como $p = E/3V$. Podemos também invocar agora a lei de Stefan-Boltzmann $E/V = \sigma T^4$. Rigorosamente falando, esta lei só vale para a parte térmica da radiação, já que não inclui as flutuações de ponto zero na sua formulação. No entanto ela serve aos nossos propósitos, já que utilizada juntamente com as duas expressões anteriores, nos permite escrever (1.6) como:

$$\omega \frac{\partial\rho(\omega, T)}{\partial\omega} - 3\rho(\omega, T) = -T \frac{\partial\rho(\omega, T)}{\partial T} \quad (1.9)$$

Para $T = 0$, então, obtemos exatamente a equação (1.7), (desde que a derivada em relação a T seja finita) com as suas respectivas soluções.

Tomaremos, então, a segunda e reescreveremos a constante α como $\hbar/2\pi^2 c^3$ onde $\hbar$ é outra constante que mais tarde será identificada com a constante de Planck e c é a velocidade da luz no vácuo. Assim, para nós:

$$\rho_0(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{2\pi^2 c^3} \quad (1.10)$$

É evidente que um espectro desta natureza acarreta divergências ultravioleta. Até o momento, contudo, não surgiu nenhuma forma convincente de eliminá-las. O fato de as divergências dependerem de contribuições devido às altas frequências, sugere que talvez exista um limite para a frequência da radiação eletromagnética de ponto zero. Não é claro, porém, qual deve ser este limite e até mesmo porque deveria existir. Em cálculos que envolvem a interação da radiação de fundo com a matéria⁽¹⁰⁾, é possível eliminar as divergências que surgem através das introdução de um fator de forma conveniente para as partículas. No entanto a questão para o campo livre continua em aberto. Não trataremos deste problema aqui, supondo que a existência das flutuações de ponto zero com espectro (1.10) deve ser corroborada pelas evidências experimentais.

Vejamos agora qual é a maneira mais conveniente de tratar matematicamente a radiação eletromagnética de ponto zero. Já que a radiação de fundo não possui *fontes bem definidas*, é razoável considerá-la como *radiação eletromagnética aleatória* (assim como também a radiação térmica). Sem dúvida alguma os campos associados a essa radiação devem satisfazer as equações de Maxwell homogêneas, e por isso o potencial vetor admite uma decomposição em ondas planas do seguinte tipo⁽⁷⁾:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = - \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3\vec{k} \, \hat{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) g(\vec{k}, T) \sin[\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \eta(\vec{k}, \lambda)] \frac{c}{\omega_k} \quad (1.11)$$

onde $\hat{\epsilon}$ é o vetor de polarização unitário que obedece:

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) \cdot \hat{\epsilon}(\vec{k}, \lambda') &= \delta_{\lambda\lambda'}, & \vec{k} \cdot \hat{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) &= 0 \\ \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_i(\vec{k}, \lambda) \epsilon_j(\vec{k}, \lambda) &= \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \end{aligned} \quad (1.12)$$

e $\eta(\vec{k}, \lambda)$ é uma fase aleatória uniformemente distribuída de 0 a 2π , na qual se reúne todo o caráter estatístico dos campos. A amplitude $g(\vec{k}, T)$ é uma função que determina a contribuição de cada frequência na superposição. Essa função eventualmente pode depender da temperatura em se tratando de radiação térmica, e veremos adiante que está relacionada com a densidade espectral.

De (1.11) podemos calcular facilmente os campos elétrico e magnético,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3\vec{k} \, \hat{e}(\vec{k}, \lambda) g(\vec{k}, T) \cos[\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \eta(\vec{k}, \lambda)] \quad (1.13)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3\vec{k} g(\vec{k}, T) \frac{\vec{k} \times \hat{e}(\vec{k}, \lambda)}{k} \cos[\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \eta(\vec{k}, \lambda)] \quad (1.14)$$

Dessa maneira os campos eletromagnéticos são funções da variável aleatória $\eta(\vec{k}, \lambda)$, e os resultados que assumirão importância para nós serão as *médias de grandezas físicas* calculadas sobre as fases η .

Vejamos, por exemplo, o cálculo da média do campo elétrico, $\langle \vec{E}(\vec{r}, t) \rangle$. A média sobre η de uma função $f(\eta)$ é definida como sendo:

$$\langle f(\eta) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\eta f(\eta) \quad (1.15)$$

Assim,

$$\langle \vec{E}(\vec{r}, t) \rangle = \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3\vec{k} \, \hat{e}(\vec{k}, \lambda) g(\vec{k}, T) \langle \cos[\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \eta(\vec{k}, \lambda)] \rangle = 0 \quad (1.16)$$

pois $\langle \cos[\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \eta(\vec{k}, \lambda)] \rangle = 0$. Da mesma forma provamos que $\langle \vec{B}(\vec{r}, t) \rangle = 0$.

No Apêndice I, onde se relata a alteração da densidade espectral sob transformações de Lorentz, é efetuado o cálculo da média $\langle \vec{E}^2(\vec{r}, t) \rangle$, obtendo-se como resultado:

$$\langle \vec{E}^2(\vec{r}, t) \rangle = \frac{4\pi}{c^3} \int_0^{\infty} d\omega \omega^2 g^2(\omega, T) \quad (1.17)$$

Então concluímos que a densidade de energia contida no campo eletromagnético pode ser escrita como:

$$\frac{\langle \vec{E}^2 + \vec{B}^2 \rangle}{8\pi} \equiv \int_0^\infty d\omega \rho(\omega, T) = \frac{1}{c^3} \int_0^\infty d\omega \omega^2 g^2(\omega, T) \quad (1.18)$$

onde foi utilizada a definição de densidade espectral $\rho(\omega)$. Das igualdades anteriores podemos identificar:

$$\rho(\omega, T) = \frac{\omega^2 g^2(\omega, T)}{c^3} \quad (1.19)$$

que é a relação já proclamada entre a amplitude $g(\omega, T)$ e a densidade espectral $\rho(\omega, T)$.

É interessante, também, expressar a energia contida no campo eletromagnético (para $T=0$) como uma soma discreta sobre os vetores de onda, o que pode ser feito se transformarmos a primeira integral de (1.18) num somatório⁽¹¹⁾:

$$\langle \vec{E}^2 + \vec{B}^2 \rangle = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} \quad (1.20)$$

onde V é um volume arbitrário. A forma desta expressão é bastante sugestiva e será particularmente útil quando estudarmos o efeito Compton, no Capítulo II.

No próprio Apêndice I chegamos à conclusão de que o único espectro a possuir a propriedade de ser invariante por transformações de Lorentz é justamente o espectro da radiação de fundo, dado por (1.10), como Marshall já havia salientado. Este é um resultado importante, já que conseqüentemente, a radiação de fundo não oferece resistência ao movimento de cargas, quaisquer que sejam suas velocidades. Isto será verificado explicitamente mais adiante.

Assim, um padrão de radiação que não pode ser diferenciado pela passagem um referencial inercial para outro, isto aliado às hipóteses de homogeneidade e isotropia do mesmo, concede à radiação de fundo a prerrogativa de um vácuo clássico⁽⁷⁾. Evidentemente a observação direta da radiação de ponto zero é extremamente dificultada por esses fatos.

Uma vez caracterizados os campos eletromagnéticos da radiação de ponto zero, devemos procurar meios de descrever adequadamente a atuação dos mesmos sobre a matéria. Dentre os possíveis métodos desenvolvidos, o mais utilizado consiste na construção de uma equação diferencial para o movimento da partícula que se encontra sob a ação de forças externas e campos efetivos. Tal equação, de certa maneira já existia anteriormente à Eletrodinâmica Estocástica, sob a designação de equação de Abraham-Lorentz, sem incluir, entretanto, os campos eletromagnéticos flutuantes de ponto zero.

Mesmo a nível de equação de Abraham-Lorentz, porém, verificam-se problemas ligados à noção de causalidade. Esta equação caracteriza-se pela introdução de um termo que representa a interação entre uma partícula puntual carregada e os campos gerados por ela própria, resultando na denominada força de reação da radiação⁽¹²⁾. A resolução da equação de Abraham-Lorentz nos leva à violação da causalidade. Também existem divergências relacionadas com o cálculo da massa eletromagnética m_e (a massa total da partícula carregada seria a soma da massa eletromagnética m_e com sua massa mecânica m_0). Estes problemas já foram tratados na literatura⁽¹³⁾ (onde são consideradas cargas extensas no limite não relativístico), e aqui nos limitaremos a considerar a massa total finita, igual ao seu valor experimental.

A introdução da força devida aos campos eletromagnéticos aleatórios na equação de Abraham-Lorentz resulta na denominada equação de Braffort-Marshall⁽²⁾, a seguir:

$$m \dot{\vec{v}} = \vec{F} + m \Gamma \ddot{\vec{v}} + e \vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{B} \quad (1.21)$$

Nesta equação $\vec{F}$ representa uma força externa qualquer, $m \Gamma \ddot{\vec{v}}$ a força de reação da radiação, e $(e \vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{B})$ a força de Lorentz devido à atuação dos campos aleatórios. O tempo Γ é igual a $2e^2/3mc^3$. Normalmente, com exceção de sistemas como o oscilador harmônico carregado, por exemplo, a equação de Braffort-Marshall é de difícil resolução. Existem, no entanto, técnicas que foram desenvolvidas no contexto da física dos processos

aleatórios, e que podem ser aplicadas à Eletrodinâmica Estocástica. Destes métodos, um dos mais utilizados para obter informações das equações de movimento estocásticas é a construção das equações de Fokker-Planck⁽²⁾. Através da resolução destas equações podemos calcular a distribuição de probabilidade de encontrar a partícula num ponto do espaço de fase, por exemplo, ou se isso não for possível, obter uma descrição simplificada da evolução do sistema utilizando um conjunto de variáveis conveniente. Neste nosso trabalho, no entanto, efetuaremos uma aplicação das técnicas matemáticas mais modestas existentes, tanto na parte que diz respeito ao equilíbrio entre radiação e matéria, quanto na descrição semiquantitativa do efeito Compton.

Nesta breve introdução à Eletrodinâmica Estocástica, tentamos transmitir a importância, para a teoria, da existência das flutuações eletromagnéticas clássicas de ponto zero. A sua interação com sistemas microscópicos que possuam constituintes com carga é certamente capaz de provocar efeitos notáveis, insuspeitos até nossos dias, como já foi salientado. Devido às dificuldades de cálculo, no entanto, apenas um número relativamente reduzido de sistemas tem sido tratado com sucesso. Sem dúvida alguma o oscilador harmônico não relativístico foi o problema mais estudado até agora na Eletrodinâmica Estocástica^(4,5,7,14,15). Nos Apêndices II e III estudamos algumas propriedades deste sistema, podendo adiantar que a energia média do oscilador (por grau de liberdade) encontrada é $\langle E \rangle = \frac{1}{2} \hbar \omega$, o deslocamento quadrático médio é $\langle x^2 \rangle = \hbar / 2m\omega$, e seu o momento quadrático médio, $\langle p^2 \rangle = \hbar m\omega / 2$ (ω é a frequência natural do oscilador). Todos os resultados são idênticos aos valores esperados obtidos para um oscilador quântico no estado fundamental. O estudo do oscilador na Eletrodinâmica Estocástica foi utilizado em descrições clássicas satisfatórias de propriedades da radiação de corpo negro^(16,17) (veja Apêndice III, onde obtemos a fórmula de Planck), assim como do comportamento diamagnético da matéria^(6,7).

Outro sistema tratado com sucesso é o das placas condutoras paralelas. As forças que surgem devido à ação da radiação de fundo (forças de Casimir), previstas pela Eletrodinâmica Estocástica⁽¹⁸⁾, coincidem com o

resultado quântico e os dados experimentais. Tais forças podem ser incluídas numa classe mais ampla de interações entre objetos macroscópicos, que são denominadas forças de Van der Waals⁽⁷⁾.

No entanto, uma teoria que pretenda descrever satisfatoriamente a natureza microscópica, deve, sem dúvida, incorporar os resultados que tradicionalmente permitiram o surgimento da Mecânica Quântica, tais como o espectro atômico, a aparente natureza ondulatória das partículas, e a aparente natureza corpuscular das ondas eletromagnéticas, por exemplo. Até o presente momento, entretanto, nenhum desses problemas foi suficientemente elucidado⁽²⁾, constando apenas explicações qualitativas sobre a estabilidade atômica⁽⁷⁾, assim como tentativas de interpretar as relações de incerteza de Heisenberg em termos de flutuações⁽⁷⁾.

Neste nosso trabalho, ao abordar o efeito Compton, pretendemos, dentro de nossas limitações, verificar como as flutuações eletromagnéticas de ponto zero são capazes de conferir uma natureza aparentemente *corpuscular* à radiação eletromagnética.

Já foram feitas tentativas de considerar a Mecânica Quântica como sendo resultante de um movimento browniano microscópico⁽²⁾, sem que se forneça, no entanto, uma explicação satisfatória sobre a fonte de estocasticidade. Alguns autores crêem que as flutuações de ponto zero são capazes de promover a base física para uma interpretação estocástica da Mecânica Quântica, existindo inclusive tentativas de dedução da equação de Schroedinger^(19,20) através da Eletrodinâmica Estocástica.

Não existe, contudo, nada conclusivo. Acreditamos que não devemos esperar que a Eletrodinâmica Estocástica reproduza totalmente a Mecânica Quântica. Trata-se de uma teoria fundamentalmente diferente que pode nos levar a resultados concordantes com a teoria quântica assim como a algo bem distinto.

Apenas o inevitável confronto com a experiência nos indicará o caminho.

Ib - O MODELO ORIGINAL DE EINSTEIN

O nome de Albert Einstein está diretamente ligado às primeiras tentativas de estabelecimento de uma teoria quântica para a radiação eletromagnética. É de conhecimento geral que Einstein, visando uma explicação para o efeito fotoelétrico⁽²¹⁾, introduziu em 1905 os “quanta de energia” (que posteriormente seriam denominados de fótons) do campo eletromagnético. Subseqüentemente ele preocupou-se em estender suas idéias a uma classe mais ampla de fenômenos (envolvendo absorção e emissão de radiação por átomos ou moléculas), e apresentou em 1917⁽²²⁾ um artigo com uma série de considerações e resultados interessantes. Vestígios deste trabalho são familiares entre os estudantes de física moderna sob a designação de “*método dos coeficientes A e B*”, mas desafortunadamente as principais idéias contidas no mesmo praticamente não são divulgadas⁽²³⁾.

Ao considerar emissão e absorção de radiação eletromagnética por átomos imersos em radiação térmica caracterizada pela densidade espectral $\rho_T(\omega)$, Einstein originalmente partiu das seguintes hipóteses:

- 1- Os átomos ocupam estados de energia discretos.
- 2- É válida a distribuição de Boltzmann para os átomos em tais estados.
- 3- É válida a lei de Wien para a radiação térmica à temperatura T , isto é, $\rho_T(\omega) = \omega^3 F(\omega/T)$, onde F é uma função arbitrária.

A primeira hipótese foi denominada por Einstein de hipótese quântica, devido ao caráter discreto dos estados de energia. No entanto as duas seguintes são hipóteses inteiramente clássicas, baseadas na termodinâmica e eletromagnetismo.

Vejamos agora de que maneira Einstein tratou a troca de energia entre matéria e radiação. Inicialmente supôs (por simplicidade) que o átomo ocupa dois estados de energia interna E_m e E_n ($E_m > E_n$), e que a passagem de um estado para outro é feita através da absorção ou emissão de uma quantidade de energia $E_m - E_n$, sob a forma de radiação eletromagnética com

a frequência ω . A seguir formulou algumas hipóteses sobre as leis válidas para essas transições. Considerou para tal que o átomo comporta-se de maneira análoga a um oscilador harmônico ao emitir e absorver radiação eletromagnética. Se o oscilador está imerso em radiação térmica caracterizada pela densidade espectral $\rho_T(\omega)$, é possível verificar (o cálculo detalhado encontra-se no Apêndice II) que a potência absorvida ou emitida pelo mesmo é proporcional a $\rho_T(\omega)$. Evidentemente Einstein conhecia este fato, o que lhe permitiu escrever a probabilidade de transição (por unidade de tempo) do estado de energia E_n para o estado de energia E_m (através da absorção de uma quantidade de energia $E_m - E_n$) *induzida* pela radiação como:

$$\frac{dW_{nm}}{dt} = B_{nm} \rho_T(\omega) \quad (1.22)$$

onde B_{nm} é uma constante (independente da temperatura). De maneira similar escreveu a probabilidade de transição do estado com energia E_m para o estado com energia E_n , através de uma *emissão induzida*, como:

$$\frac{dW_{mn}}{dt} = B_{mn} \rho_T(\omega) + \text{contribuição da emissão espontânea} \quad (1.23)$$

onde B_{mn} é uma outra constante independente da temperatura.

Entretanto também é possível que o oscilador emita radiação eletromagnética independentemente dele sofrer estímulo de um campo externo. Por isso é que Einstein acrescentou à expressão anterior um termo que representa a probabilidade de *emissão espontânea* de uma quantidade de energia $E_m - E_n$ na frequência ω . Já que a emissão é espontânea, não deve ser proporcional a $\rho_T(\omega)$. Einstein introduziu este efeito em (1.23) simplesmente adicionando uma quantidade A_{mn} independente da temperatura mas que eventualmente pode depender da frequência ω .

$$\frac{dW_{mn}}{dt} = B_{mn} \rho_T(\omega) + A_{mn} \quad (1.24)$$

A seguir procurou encontrar, então, a densidade espectral $\rho_T(\omega)$ necessária para que a troca de energia entre a radiação e os átomos não alterasse a distribuição de Boltzmann dos átomos nos estados de energia (a segunda

das hipóteses iniciais). Desta forma, se n_m é o número de átomos no estado com energia E_m e n_n o número de átomos no estado com energia E_n , a condição de equilíbrio (balanço detalhado) pode ser escrita como:

$$n_m \frac{dW_{mn}}{dt} = n_n \frac{dW_{nm}}{dt} \quad (1.25)$$

Aqui tomaremos $n_m/n_n = e^{-(E_m - E_n)/kT}$ para que a estatística de Boltzmann seja válida.

Assim, desde que $\rho_T(\omega)$ cresça com o aumento da temperatura, o que é razoável, a expressão (1.25) torna-se, no limite para $T \rightarrow \infty$,

$$B_{nm} \rho_T(\omega) \approx B_{mn} \rho_T(\omega) \quad (1.26)$$

pois nessas condições $B_{mn} \rho_T(\omega) \gg A_{mn}$ e $n_m \approx n_n$. A igualdade (1.26) é válida para qualquer temperatura elevada e implica que $B_{mn} = B_{nm}$. Inserindo (1.26) em (1.25), obtêm-se facilmente:

$$\rho_T(\omega) = \frac{A_{mn}/B_{mn}}{e^{(E_m - E_n)/kT} - 1} \quad (1.27)$$

Einstein aplicou, então, a terceira hipótese inicial (a lei de Wien), e com isso obteve:

$$\frac{A_{mn}}{B_{mn}} = \alpha \omega^3 \quad (1.28)$$

e

$$E_m - E_n = \hbar \omega \quad (1.29)$$

onde α e $\hbar$ são constantes. Utilizando (1.28) e (1.29), (1.27) pode ser escrita como:

$$\rho_T(\omega) = \frac{\alpha \omega^3}{e^{\hbar \omega/kT} - 1} \quad (1.30)$$

Nesta primeira parte do trabalho, Einstein obteve dois importantes resultados de uma maneira simples. A expressão (1.29) que representa a relação de Bohr para a energia emitida ou absorvida numa transição atômica, e a fórmula de Planck para a densidade espectral da radiação de corpo negro [expressão (1.30)]. No entanto, se é pouco conhecido o fato de que o

trabalho apresenta uma dedução da fórmula de Planck e da relação de Bohr, menos conhecido ainda é o fato de que estas deduções são baseadas em argumentos que podem ser considerados como sendo clássicos, como veremos em seguida. Das três hipóteses iniciais, apenas a primeira, referente aos estados discretos de energia, possui caráter quântico. Curiosamente, num trabalho posterior de Einstein e Ehrenfest, em 1923^(23,24), apresentou-se o fato de que esta hipótese, na realidade é desnecessária. Neste artigo praticamente desconhecido, os autores provam que os "átomos" podem sofrer transições entre estados de energia quaisquer, *pertencentes a um contínuo*. Usam entretanto a hipótese de que todos os eventos de emissão e absorção são estatisticamente independentes entre si. Para que isto se verifique, não deve ocorrer interferência entre os diferentes processos elementares, o que levou-os à conclusão de que cada emissão (ou absorção) deve ocorrer num tempo curto.

Para Einstein e Ehrenfest, então, a *única hipótese quântica* da dedução seria a de que a radiação eletromagnética se constitui de *fótons*⁽²³⁾, já que através dos mesmos, certamente teríamos o *tempo de absorção (ou emissão) curto*.

Voltando agora para o trabalho de 1917⁽²²⁾, Einstein estuda, na sua segunda parte, o movimento dos átomos devido às interações com a radiação térmica na qual se encontram imersos. Esta análise, também pouco conhecida, foi considerada pelo próprio Einstein como a *mais importante* do trabalho, pois segundo ele sugeria a inevitabilidade de uma teoria quântica da radiação baseada em fótons.

Em linhas gerais* o raciocínio de Einstein foi o seguinte: nos processos de emissão e absorção que forem induzidos pela radiação térmica, ocorrerá uma transferência de momento na direção do feixe de radiação que atua sobre o átomo. Trata-se então de um processo direcionado e é classicamente plausível. Entretanto, para processos espontâneos (não estimulados), não é necessário o direcionamento da emissão, pois esta pode ocorrer através de

* mais adiante apresentaremos o cálculo detalhado com uma interpretação diferente

ondas esféricas. Einstein provou^(22,11) , então, a necessidade de direcionamento de *todos* os processos (induzidos e espontâneos), para que a situação de equilíbrio termodinâmico atingido pelos átomos em movimento (através de absorções e emissões) seja compatível com a forma da distribuição espectral da radiação térmica dada por (1.30).

Sem dúvida este é um trabalho engenhoso, com vários resultados interessantes, e que na próxima seção será focado de uma maneira consistente com a Eletrodinâmica Estocástica.

Ic - MODIFICAÇÕES AO MODELO DE EINSTEIN-EHRENFEST

Na primeira seção apresentamos uma introdução à Eletrodinâmica Estocástica, teoria na qual a radiação eletromagnética de ponto zero possui uma importância fundamental. Veremos agora como é possível conciliar as hipóteses da Eletrodinâmica Estocástica com o modelo de Einstein-Ehrenfest descrito anteriormente, pretendendo obter, com isto, conclusões a respeito do movimento de partículas imersas em radiação térmica (caracterizada pelo espectro de Planck) e na radiação de ponto zero.

Dividirei a exposição em duas partes; uma referente à troca de energia entre radiação e matéria, e a outra referente à troca de momento.

1- TROCA DE ENERGIA ENTRE RADIAÇÃO E MATÉRIA

A expressão (1.28) que relaciona os coeficientes de emissão espontânea e emissão estimulada, nos sugere como introduzir de uma maneira consistente os efeitos das flutuações eletromagnéticas de ponto zero, já que a distribuição espectral $\rho_0(\omega) \propto \omega^3$ para $T = 0$.

Suporemos, então, que a radiação de ponto zero, em princípio, estimula emissões e absorções de radiação numa partícula polarizável que possua oscilações internas harmônicas. Por simplicidade, inicialmente estudaremos, assim como Einstein, um sistema de dois estados de energia E_2 e E_1 (com $E_2 > E_1$) possíveis para as partículas. Para tal sistema, então, a taxa de transição do estado com energia E_2 para o estado com energia E_1 , será:

$$\frac{dW_{21}}{dt} = A_{21} \rho_0(\omega) + B_{21} \rho_T(\omega) \quad (1.31)$$

onde A_{12} e B_{12} são constantes independentes da frequência e temperatura, $\rho_T(\omega)$ é a densidade espectral da radiação térmica apenas, e $\rho_0(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{2\pi^2 c^3}$ [expressão (1.10)], a densidade espectral da radiação de ponto zero. A ex-

pressão (1.31) difere de (1.24) justamente por explicitar a ação das flutuações de ponto zero.

Analogamente podemos escrever a probabilidade de transição do estado de energia E_1 para o estado de energia E_2 como:

$$\frac{dW_{12}}{dt} = A_{12} \rho_0(\omega) + B_{12} \rho_T(\omega) \quad (1.32)$$

A segunda hipótese inicial de Einstein (estatística de Boltzmann para as partículas) será mantida, ou seja, se existirem $n(E_1)$ partículas no estado E_1 e $n(E_2)$ no estado E_2 , vale, em média:

$$\frac{n(E_2)}{n(E_1)} = e^{-(E_2 - E_1)/kT} \quad (1.33)$$

A condição de equilíbrio (balanço detalhado) será escrita como:

$$n(E_2) \frac{dW_{21}}{dt} = n(E_1) \frac{dW_{12}}{dt} \quad (1.34)$$

Estudando esta expressão nos limites $T \rightarrow \infty$ [quando $n(E_2) \approx n(E_1)$ e $\rho_T(\omega) \gg \rho_0(\omega)$] e $T \rightarrow 0$ [quando $n(E_2) \ll n(E_1)$ e $\rho_0(\omega) \gg \rho_T(\omega)$], encontramos respectivamente as relações $B_{12} = B_{21} = B$ e $A_{12} = 0$ com $A_{21} = A \neq 0$. O fato que $A_{12} = 0$ significa que a radiação de fundo não estimula absorções na situação de equilíbrio.

Assim, a expressão (1.34) nos leva a:

$$\rho_T(\omega) = \frac{\frac{A}{B} \rho_0(\omega)}{e^{(E_2 - E_1)/kT} - 1} \quad (1.35)$$

e a lei de Wien (terceira hipótese inicial de Einstein) nos exige $E_2 - E_1 = \hbar\omega$.

O valor para a constante A/B pode ser determinado através da utilização da lei de Rayleigh-Jeans para a radiação de corpo negro. Esta lei é válida para baixas frequências ($\hbar\omega \ll kT$), e portanto deve coincidir com (1.35) neste limite. Dessa maneira, como $\rho_{RJ}(\omega) = \frac{kT}{\pi^2 c^3} \omega^2$, e $\rho_T(\omega) \approx \frac{A}{B} \rho_0(\omega) \frac{kT}{\hbar\omega}$ (para $\hbar\omega \ll kT$), devemos ter $A/B = 2$. A constante $\hbar$ que surge na expressão (1.10), pode ser identificada, a esta altura, com a constante de Planck, que é tradicionalmente associada ao quantum de ação.

Verifica-se, então, que a dedução de Einstein da fórmula de Planck (1.35) se compatibiliza com a existência das flutuações de ponto zero.

Trataremos agora, de remover (baseados, no trabalho de Einstein Ehrenfest⁽²³⁾), a hipótese de estados discretos de energia para as partículas.

Suponhamos que uma partícula sofre N absorções nas frequências $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ e M emissões nas frequências $\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_M$, passando do estado inicial de energia E_I para o estado final de energia E_F qualquer. No diagrama pictórico abaixo podemos visualizar esses processos:

Torna-se necessária, então, uma generalização das expressões (1.31) e (1.32), para que seja possível englobar a sequência de processos esquematizada acima. Para tal, Einstein e Ehrenfest escreveram a probabilidade de transição do estado de energia E_I para o estado E_F qualquer como:

$$\frac{dW_{IF}}{dt} = \overbrace{\prod_{i=1}^N [B \rho_T(\omega_i)]}^{\text{absorções}} \overbrace{\prod_{j=1}^M [A \rho_0(\omega'_j) + B \rho_T(\omega'_j)]}^{\text{emissões}} \quad (1.36)$$

Para o processo inverso, teremos:

$$\frac{dW_{FI}}{dt} = \overbrace{\prod_{i=1}^N [A \rho_0(\omega_i) + B \rho_T(\omega_i)]}^{\text{emissões}} \overbrace{\prod_{j=1}^M [B \rho_T(\omega'_j)]}^{\text{absorções}} \quad (1.37)$$

É importante salientar nesta altura que estas expressões são válidas desde que todos os processos elementares sejam estatisticamente independentes. Isto implica que os processos de emissão e absorção devem ocorrer em tempos curtos, de maneira que não exista interferência entre eles.

Por outro lado, esperamos que sob a influência das *radiações térmica e de ponto zero*, energia e momento sejam subtraídos e adicionados à própria radiação, que por sua vez consiste numa superposição de ondas planas com todas as frequências. Com isso, *todas as emissões e absorções* serão consideradas como sendo *dirigidas*, e serão acompanhadas de transferência de energia e momento para as partículas. Postularemos então, que a energia removida ou devolvida à radiação do recipiente também se converterá em energia cinética de translação ganha ou perdida pela partícula. Essa aproximação é coerente com o modelo, e tornar-se-á perfeitamente clara quando estudarmos a troca de momento, mais adiante.

Levando em conta estas considerações, a conservação da energia será escrita na forma:

$$E_F = E_I + \sum_{i=1}^N \Phi(\omega_i) - \sum_{j=1}^M \Phi'(\omega'_j) \quad (1.38)$$

onde $\Phi(\omega)$ e $\Phi'(\omega')$ são funções positivas ainda desconhecidas de ω e ω' , $\sum_{i=1}^N \Phi(\omega_i)$ representa a fração de energia extraída do campo de radiação depois de N absorções e $\sum_{j=1}^M \Phi'(\omega'_j)$ a energia devolvida ao campo de radiação depois de M emissões.

A população dos estados é dada pela estatística de Boltzmann, como antes:

$$\frac{n(E_I)}{n(E_F)} = e^{(E_F - E_I)/kT} \quad (1.39)$$

e a condição de equilíbrio (balanço detalhado) implica em:

$$n(E_I) \frac{dW_{IF}}{dt} = n(E_F) \frac{dW_{FI}}{dt} \quad (1.40)$$

Colocando (1.36), (1.37), (1.38) e (1.39) em (1.40), obtemos:

$$\left\{ \prod_{i=1}^N \left[\frac{B \rho_T(\omega_i) e^{\Phi(\omega_i)/kT}}{A \rho_0(\omega_i) + B \rho_T(\omega_i)} \right] / \prod_{j=1}^M \left[\frac{B \rho_T(\omega'_j) e^{\Phi'(\omega'_j)/kT}}{A \rho_0(\omega'_j) + B \rho_T(\omega'_j)} \right] \right\} = 1 \quad (1.41)$$

Nessa análise, porém, diferentemente do que foi feito no trabalho de Einstein-Ehrenfest, conhecemos previamente a distribuição de Planck $\rho_T(\omega)$

para a radiação de corpo negro (a sua dedução detalhada se encontra no Apêndice III). Introduzindo em (1.41) a expressão (AIII.11) para $\rho_T(\omega)$, assim como como $\rho_0(\omega)$ dado por (1.10) e $A/B = 2$, verifica-se que a igualdade é satisfeita sempre (para quaisquer valores de M e N) desde que:

$$\begin{aligned}\Phi(\omega) &= \hbar \omega \\ \Phi(\omega') &= \hbar \omega'\end{aligned}\tag{1.42}$$

Assim, a expressão (1.38) fica:

$$E_F + \sum_{j=1}^M \hbar \omega'_j = E_I + \sum_{i=1}^N \hbar \omega_i\tag{1.43}$$

Em particular, para $M=N=1$:

$$E_F + \hbar \omega' = E_I + \hbar \omega\tag{1.44}$$

Concluimos, então, que uma emissão na frequência ω' e uma absorção na frequência ω são responsáveis pelo decréscimo de $\hbar \omega'$ e um acréscimo de $\hbar \omega$ na energia da partícula, desde que se mantenha o equilíbrio com a radiação.

2- TROCA DE MOMENTO ENTRE RADIAÇÃO E MATÉRIA

O estudo detalhado do movimento das partículas sob a influência da radiação encontra-se na segunda parte do artigo de Einstein de 1917^(22,11) e visa, através da manutenção da consistência entre as hipóteses feitas, provar a necessidade de que todos os processos elementares (de emissão ou absorção de radiação) sejam direcionados. Naturalmente o estudo detalhado da alteração do momento linear da partícula requer uma sofisticação maior do que aquela empregada no estudo da troca de energia. No presente trabalho, o cálculo será efetuado no regime não relativístico (assim como apresentado originalmente por Einstein), já que com isso são introduzidas simplificações importantes. Não obstante, existem tentativas⁽²⁵⁾ de estender o cálculo original de Einstein para o regime relativístico.

Passaremos agora ao cálculo da troca de momento baseado no trabalho de Einstein^(22,11) e conciliado com as hipóteses da Eletrodinâmica Estocástica.

Consideremos uma partícula se movendo no interior da cavidade à temperatura T , e dividamos a influência da radiação no seu movimento em duas partes. A primeira será identificada com uma interação flutuante (não sistemática) e a segunda terá caráter dissipativo (sistemático), em analogia com a teoria fenomenológica do movimento browniano. Se inicialmente a partícula possui momento linear com projeção $m v$ na direção x , então depois de um intervalo de tempo curto τ ela terá momento^(22,11) :

$$m v' = m v + \Delta - R v \tau \quad (1.45)$$

Aqui Δ se refere à parte flutuante do momento conferido à partícula pela ação não sistemática da radiação térmica e de ponto zero, e que tende a manter o movimento da mesma. O termo $-R v \tau$ se refere à parte dissipativa (veremos que atua apenas para $T \neq 0$) que tende a trazer a partícula para o repouso. A seguir será efetuado o cálculo explícito da força dissipativa $-R v$ (já escrita de maneira conveniente).

Como as hipóteses de emissão e absorção foram formuladas para partí-

culas em repouso, investigaremos como a radiação aparece no sistema de referência inercial preso instantaneamente à partícula. No sistema de laboratório (no caso o recipiente onde estão contidas as partículas), a radiação eletromagnética se apresenta como isotrópica, de tal forma que a densidade de energia entre ω e $\omega + d\omega$ dentro do ângulo sólido $d\Omega$, em torno de alguma direção arbitrária de propagação, será denotada por:

$$\frac{d\Omega}{4\pi} \rho(\omega, T) d\omega \quad (1.46)$$

É importante ressaltar que a densidade espectral $\rho(\omega, T)$ acima abrange também os efeitos da radiação de ponto zero, e deverá ser escrita como:

$$\rho(\omega, T) = \rho_0(\omega) + \rho_T(\omega) \quad (1.47)$$

onde $\rho_T(\omega)$ é a já conhecida fórmula de Planck.

Para uma partícula que se move com velocidade v (constante), ao longo do eixo x , no sistema de laboratório, a densidade de energia pode não ser isotrópica no sistema próprio da mesma, e conseqüentemente será denotada por:

$$\frac{d\Omega'}{4\pi} \rho'(\omega', \theta') d\omega' \quad (1.48)$$

Aqui θ' é o ângulo entre a direção de propagação da radiação associada ao vetor de onda $\vec{k}'$ (de frequência $\omega' = c|\vec{k}'|$) e o eixo x .

No Apêndice I apresentamos o cálculo detalhado da transformação de Lorentz para a densidade espectral. No caso em que $v/c \ll 1$ o resultado obtido é [expressão (A1.18)]:

$$\rho'(\omega', \theta') = \left[\rho(\omega') + \frac{v}{c} \frac{\partial \rho(\omega')}{\partial \omega} \omega' \cos \theta' \right] \left[1 - \frac{3v}{c} \cos \theta' \right] \quad (1.49)$$

onde $\rho(\omega')$ é a densidade espectral no sistema de laboratório. Esta anisotropia de $\rho'(\omega', \theta')$, ocasionará, evidentemente, uma força sistemática sobre a partícula.

Consideremos por simplicidade que a partícula sofre transições entre dois estados de energia E_1 e E_2 , com $E_2 > E_1$, mas totalmente arbitrários,

i.e. ,pertencendo a um contínuo. Já vimos na seção anterior que esta hipótese é consistente com o caráter clássico do cálculo. Dessa maneira, para a partícula em movimento, um feixe de radiação (térmica e de ponto zero) associado com o ângulo sólido $d\Omega'$ induz^(22,11):

$$N_2 = n(E_2) [B \rho'_T(\omega', \theta') + A \rho'_0(\omega')] \frac{d\Omega'}{4\pi} \quad (1.50)$$

processos de emissão e

$$N_1 = n(E_1) \rho'_T(\omega', \theta') \frac{d\Omega'}{4\pi} B \quad (1.51)$$

processos de absorção por unidade de tempo. Suporemos que todos eles envolvem a mesma frequência ω' , já que pretendemos calcular o momento linear associado a cada emissão ou absorção como função da frequência. Nas expressões acima $n(E_1)$ é o número de partículas com energia E_1 e $n(E_2)$ o número de partículas com energia E_2 , e vale $n(E_1)/n(E_2) = e^{(E_2 - E_1)/kT}$. Os coeficientes A e B são os mesmos das expressões (1.36) e (1.37), com $A/B = 2$.

Neste ponto reside uma diferença fundamental entre a abordagem de Einstein e a nossa abordagem baseada na Eletrodinâmica Estocástica. Para Einstein o fato das emissões e absorções *induzidas pela radiação serem direcionadas* era um fato classicamente plausível, e a necessidade de *direcionamento das emissões espontâneas* levou-o a supor a existência de quanta de radiação ou fótons. Para nós, no entanto, *todos* os processos de emissão e absorção são induzidos (pela radiação térmica e de ponto zero), e esperamos, assim, que em *todos* eles ocorra transferência de momento linear à partícula (momento retirado ou cedido ao feixe de radiação que induz o processo). Já supomos que cada processo envolve uma frequência, digamos ω' , e um vetor de onda $\vec{k}'$ bem definidos. Em analogia com o fenômeno da pressão da radiação sobre a matéria, suporemos que a direção do momento transferido em cada processo elementar possui a direção de $\vec{k}'$, e um valor em módulo que pretendemos calcular e designaremos por uma função da frequência $Q(\omega')$.

Dessa maneira a fração de momento linear na direção x adicionada à partícula por unidade de tempo será:

$$d\dot{p} = (N_1 - N_2) Q(\omega') \cos \theta' \quad (1.52)$$

A variação total do momento, considerando todas as direções de propagação da radiação incidente ou emergente será:

$$\begin{aligned} \int d\dot{p} &= \frac{d\dot{p}}{dt} = \\ &= Q(\omega') B [n(E_1) - n(E_2)] \int \frac{d\Omega'}{4\pi} \cos \theta' \left[\rho(\omega') + \frac{v}{c} \frac{\partial \rho \omega'}{\partial \omega} \omega' \cos \theta' \right] \left[1 - \frac{3v}{c} \right] \\ &\quad - n(E_2) A Q(\omega') \rho'_0(\omega') \int \frac{d\Omega'}{4\pi} \cos \theta' \quad (1.53) \end{aligned}$$

onde usamos (1.50) e (1.51).

A segunda integral é nula, e a primeira é facilmente calculável. Obtemos, assim, depois de desprezar termos de ordem superior a v/c :

$$\frac{d\dot{p}}{dt} = -\frac{Q(\omega)}{c} [n(E_1) - n(E_2)] B \left[\rho(\omega) - \frac{\omega}{3} \frac{\partial \rho(\omega)}{\partial \omega} \right] v \equiv -R(\omega) v \quad (1.54)$$

onde simplificamos a notação fazendo $\omega' \Rightarrow \omega$, já que ω' é arbitrária.

A expressão (1.54) representa a força sistemática de resistência ao movimento da partícula [último termo de (1.45)].

É interessante notar que para $T = 0$, quando temos $\rho(\omega) = \rho_0(\omega) = \hbar \omega^3 / 2\pi^2 c^3$, a expressão se anula, ou seja, a radiação de ponto zero não oferece resistência ao movimento da partícula. Este resultado, que sem dúvida caracteriza um vácuo clássico, é válido também no regime relativístico⁽²⁶⁾.

Prosseguindo com a adaptação do artigo de Einstein, vejamos agora como avaliar a ação flutuante da radiação, objetivando, naturalmente, o cálculo do momento transferido $Q(\omega)$.

Suponhamos que cada processo de emissão ou absorção na frequência ω contribui com um momento linear (projeção na direção x) λ_i para a partícula, e que num intervalo de tempo τ curto, é possível contar N desses processos que suporemos não interferirem entre si. Nesse intervalo de tempo, então, a contribuição total à componente x da parte flutuante do momento será:

$$\Delta = \sum_{i=1}^N \lambda_i \quad (1.55)$$

Como estamos considerando os λ_i como variáveis aleatórias estatisticamente independentes, temos que $\langle \lambda_i \rangle = 0$, e conseqüentemente $\langle \Delta \rangle = 0$. Por outro lado $\langle \Delta^2 \rangle \neq 0$, de tal forma que:

$$\langle \Delta^2 \rangle = \sum_{i=1}^N \langle \lambda_i^2 \rangle \quad (1.56)$$

Conforme já se argumentou na análise da força dissipativa, cada processo elementar envolve uma transferência de momento $\lambda_i = Q(\omega) \cos(\theta_i)$, onde θ_i é o ângulo entre o eixo x e o vetor de onda da radiação emitida (ou absorvida). Quadrando λ_i e tomando a média em todas as direções θ_i do vetor de onda obtemos:

$$\langle \lambda_i^2 \rangle = \frac{Q(\omega)^2}{4\pi} 2\pi \int_0^\pi d\theta_i \sin\theta_i \cos^2\theta_i = \frac{1}{3} Q(\omega)^2 \quad (1.57)$$

Então a expressão (1.56) se simplifica para:

$$\langle \Delta^2 \rangle = \sum_{i=1}^N \langle \lambda_i^2 \rangle = \frac{1}{3} N Q(\omega)^2 \quad (1.58)$$

Vejamos agora com detalhe quanto vale N , que é o número de processos de emissão e absorção que ocorrem durante o intervalo de tempo τ .

Já verificamos na análise para a troca de energia (veja expressões (1.31), (1.32) e discussão subsequente), que $A\rho_0(\omega)$ e $B\rho_T(\omega)$ são as taxas de emissão estimuladas pelas radiações de ponto zero e térmica, respectivamente. Também sabemos que $B\rho_T(\omega)$ representa a taxa de processos de absorção. Assim, se existirem $n(E_1)$ partículas com energia E_1 , e $n(E_2)$ partículas com energia E_2 , obteremos para N , número total de absorções e emissões, o resultado:

$$N = n(E_2) A\rho_0(\omega) \tau + [n(E_2) + n(E_1)] B\rho_T(\omega) \tau \quad (1.59)$$

Colocando então (1.59) em (1.58), obtêm-se:

$$\langle \Delta^2 \rangle = \frac{1}{3} Q(\omega)^2 [n(E_2) A\rho_0(\omega) + [n(E_2) + n(E_1)] B\rho_T(\omega)] \tau \quad (1.60)$$

Podemos, então, a esta altura, retornar à equação (1.45), $m v' = m v + \Delta - R v \tau$. Elevando ao quadrado esta expressão e tomando a média no "ensemble", obtemos:

$$m^2 \langle v'^2 \rangle = m^2 \langle v^2 \rangle + \langle \Delta^2 \rangle + \\ + R^2 \tau^2 \langle v^2 \rangle + 2 m \langle v \Delta \rangle - 2 R \langle v \Delta \rangle \tau - 2 m R \langle v^2 \rangle \tau \quad (1.61)$$

Suporemos agora que não existe correlação entre Δ e v , ou seja, a ação flutuante da radiação é independente da velocidade da partícula, o que nos permite escrever $\langle \Delta v \rangle = \langle \Delta \rangle \langle v \rangle = 0$. Desprezando também o termo da ordem de τ^2 quando comparado com $\langle \Delta^2 \rangle$ e $2 m R \langle v^2 \rangle \tau$ que são da ordem de τ , obtemos:

$$m^2 \langle v'^2 \rangle = m^2 \langle v^2 \rangle \tau + \langle \Delta^2 \rangle - 2 m R \tau \langle v^2 \rangle \quad (1.62)$$

Como estamos considerando que a situação de equilíbrio é atingida através da interação da matéria com a radiação apenas, podemos então utilizar o princípio de equipartição da energia térmica e escrever, de acordo com a distribuição de Boltzmann, que:

$$\frac{1}{2} m \langle v'^2 \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} k T \quad (1.63)$$

Isto porque estamos considerando v como sendo a componente da velocidade na direção x . Substituindo estes resultados em (1.62), obtemos:

$$\frac{\langle \Delta^2 \rangle}{\tau} = 2 R k T \quad (1.64)$$

As expressões para R e $\langle \Delta^2 \rangle$ já calculadas [fórmulas (1.54) e (1.60)] podem ser substituídas em (1.64), resultando em:

$$B [n(E_1) - n(E_2)] \left[\rho_T(\omega) - \frac{\omega}{3} \frac{\partial \rho_T(\omega)}{\partial \omega} \right] = \\ = \frac{Q(\omega)}{6 k T} \{ n(E_2) A \rho_0(\omega) + [n(E_1) + n(E_2)] B \rho_T(\omega) \} \quad (1.65)$$

Para simplificar esta expressão podemos invocar a hipótese do balanço detalhado [fórmula (1.34)] já utilizada anteriormente, isto é:

$$n(E_2) A \rho_0(\omega) + [n(E_1) + n(E_2)] B \rho_T(\omega) = 2 n(E_1) B \rho_T(\omega) \quad (1.66)$$

Substituindo (1.66) em (1.65), chegamos a:

$$[n(E_1) - n(E_2)] \left[\rho_T(\omega) - \frac{\omega}{3} \frac{\partial \rho_T(\omega)}{\partial \omega} \right] = \frac{Q(\omega) c}{3 k T} n(E_1) \rho_T(\omega) \quad (1.67)$$

Porém temos que $n(E_2)/n(E_1) = e^{(E_2 - E_1)/kT}$ e então (1.67) se simplifica para:

$$[1 - e^{(E_1 - E_2)/kT}] \left[\rho_T(\omega) - \frac{\omega}{3} \frac{\partial \rho_T(\omega)}{\partial \omega} \right] = \frac{Q(\omega) c}{3 k T} \rho_T(\omega) \quad (1.68)$$

Podemos introduzir então na expressão acima, a fórmula de Planck [fórmula (AIII.11)] para $\rho_T(\omega)$ e a relação de Bohr $E_2 - E_1 = \hbar \omega$ deduzidas anteriormente. Com isso obtemos:

$$Q(\omega) = \frac{\hbar \omega}{c} \quad (1.69)$$

A quantidade $Q(\omega)$ representa o módulo do momento total adquirido pela partícula em cada processo de emissão (ou absorção) de radiação, com frequência ω , necessário para que se mantenha o equilíbrio com as radiações térmica e de ponto zero.

O resultado pode ser generalizado se considerarmos processos que envolvam N absorções nas frequências ω_i e M emissões nas frequências ω'_j , da mesma maneira como fizemos para a energia. Se $\vec{p}_F(E_F)$ é o momento (energia) final, as relações entre os momentos, energias e frequência, devem ser tais que:

$$\vec{p}_I + \sum_{i=1}^N \hbar \vec{k}_i = \vec{p}_F + \sum_{j=1}^M \hbar \vec{k}'_j \quad (1.70)$$

$$E_F + \sum_{j=1}^M \hbar \omega'_j = E_I + \sum_{i=1}^N \hbar \omega_i \quad (1.43)$$

onde $\hbar$ é a constante de Planck e $\omega = c |\vec{k}|$.

Obtivemos, assim, através dos argumentos clássicos que caracterizam o modelo de Einstein aliados às hipóteses da Eletrodinâmica Estocástica, o valor de $\hbar\omega$ para a energia trocada em cada processo de emissão (ou absorção) de frequência ω [expressão (1.43)]. Cada processo é acompanhado de uma transferência de momento com módulo $Q(\omega) = \hbar\omega/c$ e com a direção de $\vec{k}$ (a direção do vetor de Poynting da radiação emitida).

Na Mecânica Quântica as relações acima representam a conservação do quadrivetor energia-momento em processos de espalhamento de fótons por partículas massivas (elétrons, por exemplo), e $\hbar\omega/c$ é justamente o módulo do momento do *fóton de frequência ω* .

Durante os cálculos fizemos uma série de hipóteses que podem ser consideradas como sendo de caráter fundamental, e outras que apenas permitiram a simplificação dos cálculos. Devemos examinar, porém, algumas dessas hipóteses, principalmente aquelas baseadas na Mecânica Estatística Clássica.

Iniciaremos a discussão da aplicação do Princípio de Equipartição da Energia Térmica ao movimento de translação das partículas livres. O Princípio é utilizado no cálculo da troca de momento entre radiação e matéria, quando atribuímos à energia de translação o valor $\frac{1}{2}\langle m v^2 \rangle = \frac{1}{2}kT$ como sendo a energia cinética média adquirida pela partícula imersa na radiação de Planck à temperatura T . Essa aproximação, porém, implica que as flutuações de ponto zero, importantes na manutenção no equilíbrio entre matéria e radiação, são supostas ter influência desprezível na sua energia cinética de translação quando a temperatura é diferente de zero.

Este ponto pode ser discutido com mais detalhe. Como já verificamos anteriormente, as emissões e absorções promovem alteração na energia cinética de translação de E_1 para E_2 , com $E_2 - E_1 = \hbar\omega$ no caso de um único processo na frequência ω . Na seção anterior, onde calculamos a troca de momento entre matéria e radiação, encontramos o momento quadrático médio flutuante adquirido pela partícula após N absorções e emissões (num

tempo τ), que foi designado por $\langle \Delta^2 \rangle$. Vimos que (expressão 1.60):

$$\begin{aligned} \frac{\langle \Delta^2 \rangle}{Q^2(\omega)} &= \frac{\langle \Delta^2 \rangle}{\hbar^2 \omega^2 / c^2} = \\ &= \frac{\tau}{3} n(E_1) \left[e^{-(E_2 - E_1)/\hbar T} A \rho_0(\omega) + (e^{-(E_2 - E_1)/\hbar T} - 1) B \rho_T(\omega) \right] \quad (1.60a) \end{aligned}$$

onde $n(E_1)/n(E_2) = e^{(E_2 - E_1)/\hbar T}$ são os fatores de Boltzmann. No limite $T \rightarrow 0$, teremos $\rho_T(\omega) \rightarrow 0$ e $e^{-(E_2 - E_1)/\hbar T} \rightarrow 0$, obtendo assim $\langle \Delta^2 \rangle / \frac{\hbar^2 \omega^2}{c^2} \rightarrow 0$. Esse resultado aproximado para as flutuações do momento foi obtido graças ao fator de Boltzmann $e^{-(E_2 - E_1)/\hbar T}$ que devido à sua compatibilidade com o Princípio da Equipartição, corrobora a aplicação deste para o cálculo da energia cinética média das partículas. Se quisermos incorporar as flutuações de ponto zero, seria necessário modificar este ponto. Decidimos, contudo, não alterar a hipótese de equipartição nem a expressão (1.60), e sim manter a simplicidade do modelo de Einstein. No entanto, é possível justificar hipóteses já efetuadas. Para tal investigemos o resultado obtido por Einstein e Hopf^(27,28) em 1910. Neste trabalho é calculado o momento quadrático médio adquirido por uma partícula dipolar sob a influência da radiação aleatória. O cálculo é feito apenas com a utilização da Eletrodinâmica Clássica, e o resultado é:

$$\langle \Delta^2 \rangle = \frac{8\pi^4 e^2 c}{15 m} \frac{\rho^2(\omega, T)}{\omega^2} \tau \quad (1.71)$$

onde e e m são a carga e a massa da parte oscilante (frequência ω) da partícula polarizável. Se o cálculo é feito para observar as flutuações no momento Δ geradas pela radiação aleatória térmica apenas, então de acordo com Jiménez et al⁽²⁸⁾ teremos

$$\langle \Delta^2 \rangle_{\text{térmica}} = \langle \Delta^2 \rangle - \langle \Delta^2 \rangle_0 = \frac{8\pi^4 e^2 c}{15 m} \left[\frac{\rho^2(\omega, T)}{\omega^2} - \frac{\rho_0^2(\omega)}{\omega^2} \right].$$

Segundo a nossa interpretação, entretanto, $\rho(\omega, T) \rightarrow \rho_0(\omega)$ para $T \rightarrow 0$. Neste limite (1.71) fornece:

$$\begin{aligned} \langle \Delta^2 \rangle &= \frac{8\pi^4 e^2 c}{15 m} \frac{\tau}{\omega^2} \left(\frac{\hbar \omega^3}{2\pi^2 c^3} \right)^2 = \\ &= \frac{2}{15} \frac{\tau}{\Gamma} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \left(\frac{\hbar \omega}{m c^2} \right)^4 m^2 c^2 \quad (1.72) \end{aligned}$$

onde $\Gamma = e^2/mc^3$ é o tempo que a luz gasta para atravessar o raio clássico do elétron $r_0 \approx e^2/mc^2$. Podemos escrever (1.72) de maneira a obter uma razão entre energias, isto é:

$$\frac{\langle \Delta^2 \rangle / 2M}{\hbar\omega} = \frac{1}{15} \frac{\tau}{\Gamma} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \left(\frac{\hbar\omega}{mc^2} \right)^2 \left(\frac{\hbar\omega}{Mc^2} \right) \quad (1.73)$$

onde $\Delta^2/2M$ é a energia cinética de translação da massa total M e $\hbar\omega$ a energia trocada internamente.

Verifiquemos agora a importância de cada termo na expressão anterior. No segundo membro, τ é o tempo no qual ocorrem N absorções e emissões e é razoável supor que $\tau \geq \Gamma$. Portanto este não é um fator que contribui para diminuir o segundo membro de (1.73). Também sabemos que $e^2/\hbar c \approx 1/137$. Porém o limite observado em (1.60a) para $T \rightarrow 0$, é assegurado em (1.73) somente quando $mc^2 \gg \hbar\omega$ (evidentemente isto também implica que $Mc^2 \gg \hbar\omega$). Em outras palavras; a energia cinética média de translação da partícula no fundo de radiação atômica é muito menor que a energia característica $\hbar\omega$ de emissão ou absorção. A nossa análise, então, nos trouxe no limite de partículas massivas, no qual deve ser válida a aproximação não relativística usada durante os cálculos anteriores (bem como o Princípio de Equipartição). Argumentos ligados à interação das partículas com as paredes do recipiente também levam a conclusão semelhante⁽⁹⁾.

Outro ponto que necessita um exame mais cuidadoso está relacionado com o que Einstein denominou de emissão espontânea. Um dos principais sustentáculos de nosso cálculo é a introdução de procesos elementares estimulados pela radiação de ponto zero, e que simplesmente substituíram os processos de emissão espontânea presentes no trabalho original de Einstein. Todavia uma partícula que possua oscilações internas (como a que estamos considerando), deve emitir radiação eletromagnética sem necessidade de estímulo externo. No entanto, na nossa adaptação ao modelo de Einstein não explicitamos nenhum termo relativo à emissão espontânea propriamente dita. Vejamos que consequências traria a inclusão de tal termo.

Podemos tomar a equação (1.31) que representa a probabilidade de transição do estado de energia E_2 para o estado de energia E_1 e introduzir-

lhe uma parcela (C) relativa à taxa de emissão espontânea, ou seja:

$$\frac{dW_{21}}{dt} = A' \rho_0(\omega) + B' \rho_T(\omega) + C \quad (1.74)$$

Repetindo o raciocínio original de Einstein, chegamos a:

$$\rho_T(\omega) = \frac{(A' \rho_0(\omega) + C)/B}{e^{(E_2 - E_1)/kT} - 1} \quad (1.75)$$

Com a aplicação da lei de Wien, obtemos

$$\frac{A' \rho_0(\omega) + C}{B} \propto \omega^3 \quad (1.76)$$

Como $\rho_0(\omega) = \hbar \omega^3 / 2\pi^2 c^3$, então concluímos que:

$$\frac{C}{B} \propto \omega^3 \quad (1.77)$$

Isso significa que a emissão espontânea propriamente dita deve possuir um caráter muito semelhante à emissão estimulada pelas flutuações eletromagnéticas de ponto zero. Entretanto esta fenomenologia simples não nos permite dizer mais a respeito desta relação, e seria necessário lançar mão a outras hipóteses.

Existem indicações⁽²⁹⁾ de que a atuação da força da reação da radiação, por si só, possui um papel fundamental na *indução* do que denominamos de emissão espontânea, ou seja, os campos próprios da carga induziriam esta emissão. Os primeiros trabalhos que visavam uma elucidação do fenômeno, devidos a Dirac⁽²⁹⁾, evidentemente no formalismo da Mecânica Quântica, ressaltaram a importância da reação da radiação nos processos de emissão. Apenas em tratamentos posteriores⁽³⁾ utilizou-se a idéia de que a emissão espontânea seria, na realidade, uma emissão induzida pelas flutuações de ponto zero.

No contexto da Eletrodinâmica Estocástica, tanto as flutuações de ponto zero quanto a força de reação da radiação desempenham um papel importante. Não é claro para nós, entretanto, de que maneira os dois efeitos se combinam para que um resultado como a proporcionalidade observada em

(1.77) se verifique. Existem autores, contudo, que tentam determinar a densidade espectral associada ao campo de radiação $\vec{E}_r = \vec{F}_r/e \approx m\Gamma\vec{v}/e$. A idéia consiste em calcular a densidade de energia devida a estes campos, que por sua vez seriam gerados pelo movimento irregular da carga que se encontraria sob a ação de radiação eletromagnética aleatória. Segundo Surdin⁽¹⁹⁾ a densidade espectral associada a $\vec{E}_r$ seria proporcional a ω^3 . Porém, a nosso ver, a abordagem proposta por Surdin não é suficientemente transparente, e decidimos deixar esta discussão em aberto.

Capítulo II

O EFEITO COMPTON NA ELETRODINÂMICA ESTOCÁSTICA

IIa - BREVE HISTÓRICO SOBRE O EFEITO COMPTON

No fim do século passado, através de experiências com raios catódicos, Roentgen (1895) descobriu o que ele próprio denominou de raios X. Desde então, sua natureza foi intensamente discutida⁽³⁰⁾ por aproximadamente três décadas, o que resultou, conseqüentemente, numa miríade de interpretações e teorias diferentes. Somente com a apresentação de uma teoria quântica para a radiação por Compton⁽³¹⁾ (em 1923) visando explicar o fenômeno de espalhamento de raios X e γ pela matéria (o efeito Compton), iniciou-se o esclarecimento do assunto. Posteriormente, em 1929, com a dedução por Klein e Nishina da seção de choque de espalhamento da radiação eletromagnética por elétrons⁽³²⁾, incorporou-se o fenômeno no contexto da então recente Mecânica Quântica.

A seguir exporemos brevemente algumas tentativas de explicação do efeito Compton, assim como de experimentos que gradativamente contribuíram para a compreensão do fenômeno.

Após a descoberta dos raios X, Roentgen verificou que aparentemente não ocorria reflexão, refração e nem polarização dos mesmos, e chegou a propor que consistiam de oscilações longitudinais do éter. Dois anos depois, Stokes, e independentemente Wiechert, propuseram uma teoria baseada em pulsos eletromagnéticos transversais. Mais tarde, em 1903, J.J. Thomson aperfeiçoou a teoria.

Somente em 1905, no entanto, surge uma evidência experimental a favor da teoria de Stokes-Thomson, com a detecção da transversalidade dos raios X por Barkla. Neste ponto, no entanto, começam a surgir as

primeiras controvérsias. Notou-se que a incidência dos raios X sobre a matéria (assim como da radiação γ recém-descoberta) era acompanhada da ejeção de elétrons. Este comportamento apresentava uma certa dificuldade para ser enquadrado na teoria de pulsos eletromagnéticos, levando Bragg (1907) a sugerir que os raios X se constituíam de "pares neutros de partículas viajando com velocidade ainda indeterminada" ⁽³³⁾. Verificou-se então uma divisão dos físicos basicamente em torno das hipóteses corpuscular e ondulatória. Nomes de calibre como Planck e Sommerfeld resistiam à interpretação corpuscular dos raios X, enquanto Stark defendia a identificação dos raios X com os quanta de energia introduzidos em 1905 por Einstein no seu tratamento do efeito fotoelétrico. Chegou inclusive a propor ⁽³⁴⁾ uma explicação para a produção de raios X (fótons com momento linear definido) a partir de colisões entre elétrons e constituintes da matéria.

Essas discussões estimularam uma série de trabalhos experimentais [no período (1908-1914)] que permitiram a obtenção de interessantes resultados. Primeiramente observou-se um desvio (principalmente em experiências com raios γ) da seção de choque diferencial prevista pela teoria ondulatória de Thomson*, que é dada por:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Thomson}} = \frac{(1 + \cos^2 \theta)}{2} \left(\frac{e^2}{m c^2} \right)^2 \quad (2.1)$$

onde θ é o ângulo entre a direção do feixe primário e a direção do feixe secundário. A radiação espalhada no sentido do feixe primário ($\theta = 0$) parecia ser mais intensa do que a espalhada no sentido oposto ($\theta = \pi$), o que não é previsto pela expressão (2.1) simétrica em $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. Também observou-se que a radiação do feixe secundário era, em geral, menos penetrante do que a radiação do feixe primário. Posteriormente verificou-se que a frequência da radiação espalhada apresentava um desvio da frequência original do feixe primário em função do ângulo de espalhamento θ .

Em 1912 Laue descobriu a difração dos raios X, o que certamente aproximou as evidências experimentais da teoria de pulsos eletromagnéticos.

* para feixes não polarizados ou com polarização circular

Vários físicos, então, convenceram-se da validade da teoria eletromagnética de Maxwell aplicada aos raios X. Tentou-se, então, definir claramente o seu comportamento quando em interação com a matéria.

Um dos físicos que iniciou cuidadosas experiências envolvendo os raios X foi Compton, em 1916, e desde então apresentou uma simpatia maior em relação à teoria clássica do que em relação à quântica. Compton é levado, então, a realizar uma sucessão de tentativas baseadas na Eletrodinâmica Clássica objetivando a explicação de resultados aparentemente estranhos à mesma. Concebeu⁽³⁵⁾, então, em 1917, um modelo de elétron extenso o suficiente para que efeitos de interferência fossem responsáveis pela assimetria da intensidade da radiação espalhada. No entanto este modelo exibia dificuldades relacionadas com o cálculo da massa do elétron extenso, já que se considerava um objeto com um raio de cerca de $1/10$ do diâmetro da órbita do átomo de hidrogênio com uma massa eletromagnética duas mil vezes menor do que a observada experimentalmente. A seguir imaginou um elétron fisicamente mais aceitável, i.é, com uma massa maior, resultando então o modelo de um elétron em forma de anel (1918). Ao mesmo tempo desenvolvia e realizava experimentos com o objetivo de testar suas teorias.

Em 1919 Compton viajou para a Inglaterra, e efetuou uma série de experiências (com radiação γ) cujos resultados o fizeram abandonar o modelo do elétron anelar. Apesar da efervescência da física européia da época, em torno da teoria quântica, Compton prefere prosseguir suas experiências e insiste em aplicar a teoria de pulsos eletromagnéticos. Retornando à América, preparou mais experiências, e em 1921 já estava seguro que a radiação espalhada em geral possui uma frequência menor do que a radiação do feixe primário.

Este fato notável encontrava uma certa dificuldade de ser incorporado à teoria eletromagnética clássica, e conduziu Compton em direção à elaboração da teoria quântica para o efeito. Inicialmente Compton sugeriu⁽³⁶⁾ que o elétron recebe da radiação incidente um quantum de energia com momento $h\nu/c$, capaz de conferir ao mesmo uma velocidade $v = h\nu/mc$, onde m é a massa da partícula. O elétron reirradia esta energia durante o movi-

mento, ocorrendo uma modificação de seu comprimento de onda calculada até primeira ordem em v/c de acordo com o efeito Doppler. Obteve com isso, um valor para o comprimento de onda da radiação, espalhada a $\pi/2$ do feixe incidente, muito próximo do valor experimental.

O comportamento de Compton durante estes anos de estudos e experiências era de grande autonomia experimental e com conceitos teóricos basicamente dirigidos para a física clássica. Nos seus primeiros modelos (elétron extenso e anelar), acreditava que o eletromagnetismo clássico adequava-se à explicação do espalhamento de raios X por elétrons e que os desvios observados deviam-se simplesmente à estrutura do elétron. Gradualmente, no entanto, modificou seu ponto de vista em direção à teoria dos quanta de energia (assim como dos conceitos associados de energia e momento). Publicou, então, em 1923⁽³¹⁾ o trabalho fundamental sobre a teoria quântica do efeito.

Compton convenceu-se definitivamente sobre a inadequação da teoria de pulsos eletromagnéticos de Stokes-Thomson. No entanto, como veremos a seguir, sua teoria possui um caráter híbrido, utilizando ainda conceitos clássicos.

Supôs, como já é bem conhecido, que um fóton com frequência ν_0 (momento $h\nu_0/c$) incide sobre um elétron de maneira que ocorre conservação de momento e energia similarmente como num jogo de bilhar. Com um cálculo simples (relativístico), obteve a lei de deslocamento do comprimento de onda⁽³¹⁾:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{h\nu_0}{mc^2}(1 - \cos\theta) \quad (2.2)$$

onde θ é o ângulo entre o feixe primário e a direção na qual é observado o comprimento de onda $\lambda(\theta) = \lambda_0 + \Delta\lambda$.

A existência dos elétrons de recuo auxiliou Compton no cálculo da seção de choque de espalhamento da radiação. Para tal supôs que os elétrons recuam e se comportam como um sistema irradiador de quanta de tal forma que no sistema de referência próprio a intensidade emitida fosse de acordo com a teoria de Thomson. Provou então que se este elétron se movesse com velocidade constante $\beta c = h\nu_0/mc^2/(1 + h\nu_0/mc^2)$ a aplicação do efeito

Doppler Clássico levaria ao deslocamento do comprimento de onda dado por (2.2). Assim, se através de dois métodos diferentes de cálculo obteve o mesmo resultado para o deslocamento do comprimento de onda, postulou que a intensidade da radiação espalhada obtida pelos dois métodos (o primeiro quântico e o segundo clássico) também deveria ser a mesma. Calculou então a distribuição angular dos quanta emitidos por um elétron movendo-se a uma velocidade $\beta c = \alpha c / (1 + \alpha)$ (com $\alpha = h\nu_0/mc^2$), e obteve⁽³¹⁾:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Compton}} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \left\{ \frac{1 + \cos^2 \theta + 2\alpha(1 + \alpha)(1 - \cos \theta)^2}{[1 + \alpha(1 - \cos \theta)]^5} \right\} \quad (2.3)$$

Para $\alpha \rightarrow 0$, temos que $\beta \rightarrow 0$, $h\nu_0/mc^2 \rightarrow 0$ e a expressão se reduz à seção de choque de Thomson como esperaríamos [expressão (2.1)]. O resultado (2.3) também está num bom acordo com os dados experimentais.

Curiosamente, no mesmo ano de 1923, Debye⁽³⁷⁾ publicou um trabalho sobre a teoria quântica do efeito, coincidente em muitos pontos com a teoria de Compton, que foi desenvolvida independentemente. Utilizando as mesmas considerações de Compton calculou não apenas o desvio do comprimento de onda [expressão (2.2)], assim como também efetuou o cálculo da energia dos elétrons secundários e a relação entre o ângulo de espalhamento θ do quantum emitido e o ângulo ϕ dos elétrons de recuo, como nos mostra a figura abaixo.

A relação entre os ângulos é dada por:

$$\tan \phi = -\frac{1}{(1 + \alpha) \tan(\theta/2)} \quad (2.4)$$

com $0 \leq \theta \leq \pi$. Debye concluiu então que os elétrons são sempre espalhados na direção dianteira ($0 \leq \phi \leq \pi/2$) enquanto os fótons o são em todas as direções, resultado que não ficou evidente no trabalho de Compton.

Para o cálculo da seção de choque, Debye corrige o resultado de Thomson multiplicando-o pelo fator $\nu(\theta)/\nu_0$ de acordo com o princípio da correspondência^(37,38). Obteve um resultado qualitativamente semelhante ao de Compton, se bem que mais distante dos dados experimentais.

Imediatamente após esses trabalhos, surgiram uma série de tentativas (por parte de físicos mais conservadores) para incorporar o efeito Compton na Eletrodinâmica Clássica através de teorias semiclássicas. Todas essas teorias partiram do fato, apontado primeiramente por Compton⁽³¹⁾, de que a radiação emitida por um elétron se movendo na direção do feixe incidente sofre efeito Doppler duplo de tal forma que a mudança de comprimento de onda seja dada por (2.2). Como exemplo dessas teorias podemos citar o cálculo de Woo (1925)⁽³⁹⁾, no qual se obtêm a seção de choque dada por (2.3) utilizando a Eletrodinâmica Clássica. Para tal, Woo supôs que a radiação é espalhada por um elétron que se move com a velocidade $\beta c = \alpha/1 + \alpha$ (com $\alpha = h\nu_0/mc^2$) necessária para obter (2.2) através do efeito Doppler. Também podemos citar o trabalho de Breit (1926)⁽⁴⁰⁾ no qual procurou-se aperfeiçoar a teoria de Compton utilizando o princípio da correspondência, sem lançar mão ao conceito de fóton.

Um interessante e controvertido trabalho é devido a Slater, Kramers e Bohr⁽⁴¹⁾ (1924). Trata-se de um trabalho qualitativo cujo principal objetivo é a tentativa de conciliação de duas situações aparentemente contraditórias, isto é, como radiação eletromagnética clássica (variando continuamente) pode interagir com um sistema que apenas pode ocupar níveis discretos de energia (um átomo), de maneira que se verifique a conservação da energia. Os autores afirmaram que os átomos interagem com um *campo de radiação virtual* que contém todas as frequências das possíveis transições, e que a conservação da energia é válida apenas estatisticamente. Essas afirmações ocasionaram discussões acaloradas que rapidamente foram apaziguadas pelas experiências conclusivas de Bothe e Geiger⁽⁴²⁾ (1925) a respeito do recuo dos

elétrons. As previsões sobre os elétrons ejetados feitas por *todas* as teorias semiclássicas foram rejeitadas em vista dos resultados desses experimentos. Tudo indicava que o caminho proposto por Compton é o que deveria ser seguido.

Nesta época, os esforços de De Broglie e Schroedinger criaram uma facção ondulatória da teoria quântica, que se notabilizou rapidamente, em vista do alcance de suas previsões e sua relativa simplicidade. Em 1927 Schroedinger publicou um trabalho não muito conhecido^(43,44) que continha uma abordagem diferente do efeito Compton. Considerou, para tal, que os elétrons são caracterizados por uma função de onda que é solução de uma equação do tipo Klein-Gordon*, ou seja, possuem caráter quântico. Para Schroedinger, no entanto, a radiação consistia de ondas eletromagnéticas clássicas que sofrem difração em *ondas estacionárias* formadas pelos elétrons incidentes e emergentes. Este tratamento semiclássico difere em muito das concepções de Compton e Debye, principalmente pelo fato de não invocar o fóton. Contudo Schroedinger não calculou as seções de choque de espalhamento da radiação e dos elétrons de recuo. O único resultado obtido por ele foi o deslocamento do comprimento de onda dado por (2.2).

Posteriormente, com o advento da proposição de uma equação covariante para os elétrons por Dirac, Klein e Nishina⁽³²⁾ (1929) obtiveram a famosa expressão para a seção de choque de espalhamento da radiação por elétrons. O tratamento inclui efeitos devido ao momento magnético intrínseco do elétron, e o resultado se aproxima bastante dos dados experimentais. A fórmula de Klein-Nishina para feixes não polarizados é dada por:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Klein-Nishina}} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \left\{ \frac{1 + \cos^2 \theta}{[1 + \alpha(1 - \cos \theta)^2]} \right\} \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{\alpha^2(1 - \cos \theta)^2}{[1 + \cos^2 \theta][1 + \alpha(1 - \cos \theta)]} \right\} \quad (2.5)$$

* mais tarde verificou-se que esta equação não era adequada para descrever os elétrons

É interessante notar que a análise de Klein e Nishina é feita sem uma quantização explícita do campo eletromagnético. Somente Tamm (1930) realizou o cálculo no espírito da Eletrodinâmica Quântica pela primeira vez.

IIb - DESCRIÇÃO QUALITATIVA DO EFEITO COMPTON NO CONTEXTO DA ELETRODINÂMICA ESTOCÁSTICA

Na seção anterior tivemos a oportunidade de constatar os motivos que determinaram o fracasso da teoria de pulsos eletromagnéticos proposta por Stokes-Thomson, no que toca à descrição do efeito Compton. A teoria não previa o deslocamento do comprimento de onda, assim como a assimetria da seção de choque de espalhamento da radiação e o recuo dos elétrons.

Pelo que sabemos, entretanto, nenhum tratamento clássico (ou até mesmo semiclassico) inclui os possíveis efeitos ocasionados pelas flutuações eletromagnéticas de ponto zero características da Eletrodinâmica Estocástica. Como tentaremos mostrar a seguir, estes efeitos *não são desprezíveis*, e possuem a virtude de descrever semiquantitativamente alguns aspectos do espalhamento Compton.

Iniciaremos nossa análise examinando com algum detalhe a interação entre uma onda plana monocromática (frequência ω) e uma partícula carregada livre. É possível encontrar as soluções exatas* para as equações de movimento da partícula sob a ação dos campos da onda, até mesmo no caso relativístico (quando a força magnética não é desprezível). No texto de Landau⁽⁴⁵⁾, por exemplo, encontramos uma resolução particularmente sofisticada do problema. Não tornaremos a discussão exaustiva resolvendo a equação, e nos limitaremos apenas em expor a sua solução.

Para uma onda circularmente polarizada propagando-se na direção de $\hat{k}$ com um campo elétrico caracterizado por: $\vec{E} = E_0[\cos \omega(t - z/c)\hat{i} + \sin \omega(t - z/c)\hat{j}]$, a solução estacionária das equações de movimento será tal que a coordenada $\vec{r}$ da partícula fica dada por:

$$\vec{r} = -\frac{ecE_0}{\gamma\omega^2}(\cos \omega t \hat{i} + \sin \omega t \hat{j}) \quad (2.6)$$

com $\gamma^2 = m^2c^2 + e^2E_0^2/\omega^2$. Aqui e representa a carga da partícula e m a

* desprezando a reação da radiação

sua massa de repouso.

Concluimos então que a partícula efetuará um movimento circular com frequência ω (a mesma da onda incidente) no plano $x - y$, ou seja, perpendicularmente à direção de propagação da onda. Verificamos também que a partícula não recua, pois inicialmente situava-se na origem do sistema de coordenadas.

O fato de estarmos considerando o caso de uma onda circularmente polarizada apenas torna mais simples o cálculo, e não ocorre perda de generalidade. Para o caso de polarização linear, por exemplo⁽⁴⁶⁾, verifica-se um movimento periódico mais complicado, com a ausência de um recuo sistemático.

Desejamos analisar a situação em que a intensidade da onda incidente é baixa mas sua frequência é alta. Para feixes de raios X ou γ produzidos em laboratório esta condição implica que $e E_0 / m c \omega \ll 1$. Este fato mostra que sob estas condições o movimento oscilatório será não relativístico, pois $|\vec{r}| \approx e E_0 / m \omega \ll c$ conforme se vê de (2.6).

Podemos agora calcular a seção de choque de espalhamento da radiação. A intensidade da radiação emitida num ângulo sólido $d\Omega$ em torno de uma direção $\hat{n}$ será⁽⁴⁷⁾ :

$$dI = \frac{e^2}{4\pi c^3} (\ddot{\vec{r}} \times \hat{n})^2 d\Omega \quad (2.7)$$

Utilizando a solução (2.6), em (2.7) e tomando a média temporal, obtemos, depois de dividir pelo módulo do vetor de Poynting do feixe incidente ($|\vec{S}| = c E_0^2 / 4\pi$),

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Thomson}} = \frac{(1 + \cos^2 \theta)}{2} \left(\frac{e^2}{m c^2} \right)^2 \quad (2.8)$$

que é a expressão da seção de choque de Thomson. Ela é simétrica em $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ (θ é o ângulo entre a direção de propagação da onda e a direção de observação). No decorrer do cálculo consideramos $\gamma^2 = m^2 c^2 + e^2 E_0^2 / \omega^2 \approx m^2 c^2$, ou seja, $e^2 E_0^2 / m c \omega^2 \ll 1$, que é a condição exibida um pouco atrás. A frequência da radiação emitida será a mesma da onda incidente, o que juntamente com os outros resultados obtidos contradiz frontalmente a experiência.

Argumentaremos, então, que este tratamento é na realidade incompleto, ou seja, não leva em consideração todos os efeitos existentes.

Vejam os o que ocorre se considerarmos a atuação da força da reação da radiação, que é provocada pelos campos gerados pela partícula carregada sobre ela própria.

É possível tratar este problema de maneira iterativa no caso relativístico⁽⁴⁸⁾. Aqui, entretanto, usaremos uma aproximação não relativística mais simples⁽⁴⁹⁾ que verificaremos ser igualmente válida.

A força de reação da radiação pode ser escrita aproximadamente como sendo $\vec{F}_r = 2e^2\ddot{\vec{v}}/3c^3$, no referencial no qual a partícula está com velocidade baixa. Assim, para uma partícula num campo eletromagnético, a equação de movimento será:

$$m\dot{\vec{v}} = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\vec{v}} + e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B} \quad (2.9)$$

Desde que consideremos a força de reação da radiação pequena em comparação com as outras, podemos escrever:

$$\ddot{\vec{v}} \approx \frac{e}{m}\dot{\vec{E}} + \frac{e}{mc}(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.10)$$

no sistema em que a partícula está instantaneamente em repouso. Já que consideramos este referencial, teremos também $\vec{r} \approx e\vec{E}/m$, e com isso a força de reação da radiação fica:

$$\vec{F}_r = \frac{2e^3}{3mc^3}\dot{\vec{E}} + \frac{2e^4}{3m^2c^4}(\vec{E} \times \vec{B}) \quad (2.11)$$

Evidentemente o segundo termo de (2.11) é a parcela da força dirigida na direção de propagação da onda. A força média (deve entender-se média temporal num período) pode ser escrita como:

$$\langle \vec{F}_r \rangle = \sigma \langle W \rangle \hat{k} \quad (2.12)$$

onde $\sigma = 8\pi/3(e^2/mc^2)^2$ e $\langle W \rangle = \langle \vec{E}^2 \rangle/4\pi$ é a densidade de energia média contida na onda incidente. O primeiro termo de de (2.11) é nulo em média.

A força (2.12) está na direção de propagação da onda, mas é geralmente pequena (a não ser para feixes muito intensos), e produz recuos desprezíveis. O movimento oscilatório caracterizado por (2.6) continuará sendo efetuado na frequência ω . Isto é de importância fundamental para a introdução da radiação de fundo no nosso cálculo.

De nossa experiência anterior com sistemas oscilantes, verificamos (veja Apêndice III sobre o oscilador harmônico, por exemplo) que ocorre ressonância entre o sistema e a radiação de ponto zero de mesma frequência do oscilador. Haverá então absorção de energia do campo de fundo na frequência correspondente à oscilação natural do sistema, ou seja, suporemos que ocorre *ressonância* e conseqüentemente haverá *absorção de energia da radiação de fundo com frequência ω* . Estamos supondo que isto sempre acontece visto que a onda primária incide durante um tempo muito longo, infinito na nossa aproximação. Utilizando a equação (1.20) para a densidade de energia da radiação de fundo, obtemos:

$$\langle W_0 \rangle = \frac{1}{V} \hbar \omega \quad (2.13)$$

como sendo o valor médio da densidade de energia existente no volume V onde se encontra a partícula (isto supondo que a onda incidente tem intensidade desprezível).

Podemos, então, calcular a velocidade de recuo que em média a partícula atingirá⁽⁵⁰⁾, em vista da força atuante (2.12).

Para tal passemos para um sistema auxiliar onde a carga repousa e certamente (2.12) é válida. Neste referencial, a aceleração da partícula (na direção de propagação da onda) será escrita como:

$$a' = \frac{\sigma}{m} \langle W' \rangle \quad (2.14)$$

Vejamos agora a transformação para um sistema de referência no qual a partícula se move com velocidade v na direção da onda. No referencial próprio, a aceleração da partícula é constante, e podemos escrever $a' a_i = -a'^2/c^4 = \text{cte}$, onde a' é o quadrivector aceleração. Esta condição pode ser

expressa como:

$$a' = \frac{d}{dt} \frac{v}{(1 - \beta^2)^{1/2}} = \frac{1}{(1 - \beta^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt} \quad (2.15)$$

com $\beta = v/c$. Assim (2.14) ficará:

$$\frac{\sigma}{m} \langle W' \rangle = \frac{1}{(1 - \beta^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt} \quad (2.16)$$

A densidade de energia no sistema próprio (W') se relaciona com a do sistema de laboratório (W) da seguinte maneira⁽⁵¹⁾ :

$$W' = \frac{(1 - \beta)}{1 + \beta} W \quad (2.17)$$

Tomaremos, agora, a expressão (2.13) para a densidade de energia existente na radiação de fundo, com a ressalva que o volume V será simplesmente o volume da partícula em movimento, ou seja, $V = 4\pi r^3/3\gamma$, onde r é o raio da partícula, suposta esférica em seu sistema de repouso, e γ o fator de Lorentz.

Dessa maneira:

$$\langle W \rangle = \langle W_0 \rangle = \frac{\gamma \hbar \omega}{4\pi r^3/3} \quad (2.18)$$

Colocando então (2.18) e (2.17) em (2.16), obtemos a equação diferencial:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\hbar \omega}{4\pi r^3/3} (1 - \beta^2) \frac{\sigma}{m} \quad (2.19)$$

válida no laboratório.

Podemos integrar no intervalo de tempo Δt durante o qual a partícula permanece sob a ação combinada (e ressonante) da onda incidente e da radiação de ponto zero de mesma frequência ω . Depois da integração, obtêm-se:

$$\beta = \frac{\alpha}{1 + \alpha} \quad \text{com} \quad \alpha = \frac{3}{4} \frac{c \Delta t}{r} \frac{\hbar \omega}{m c^2} \quad (2.20)$$

O raio r é suposto estar relacionado com a seção de choque de Thomson $\sigma = 8\pi/3(e^2/mc^2)^2$ i.é. $\sigma \equiv \pi r^2$. Neste caso recebe a denominação conhecida de *raio clássico da partícula*. Proporemos, agora, que o tempo

$\Delta t \approx r/c$, ou seja, a ação ressonante da radiação de fundo se dá num tempo curto, da ordem do tempo de correlação da força aleatória na partícula de raio r . Esta hipótese é baseada em experiência anterior⁽¹⁰⁾, quando se estudou o movimento de cargas extensas no contexto da Eletrodinâmica Estocástica.

Obtemos então o seguinte resultado para α , isto é:

$$\alpha \approx \frac{\hbar \omega}{m c^2} \quad (2.21)$$

em ordem de grandeza.

Percebe-se facilmente que para frequências altas, a contribuição da força proveniente da radiação de fundo será bem superior à força devida ao feixe primário (incidente), e verifica-se que mesmo que a ação ressonante da radiação de fundo ocorra num tempo curtíssimo, a partícula atingirá rapidamente a velocidade relativística (2.20).

Faremos agora uma aproximação que simplificará tremendamente os cálculos. Admitiremos que o pulso de radiação incidente tem duração muito longa, infinita para efeito de cálculo. Suporemos ainda que a partícula entra em ressonância com a radiação de fundo imediatamente após a chegada do pulso e permanece com velocidade constante $\beta c = \alpha c / (1 + \alpha)$ durante todo o tempo seguinte. Estas hipóteses simplificadoras introduzirão alterações no resultado do cálculo da seção de choque que serão corrigidas mais adiante.

Passaremos então a estudar o espalhamento da radiação do feixe primário (frequência ω) por uma partícula carregada movendo-se velozmente. É evidente que com esta aproximação desprezamos o que ocorre na situação transiente durante a qual a partícula é acelerada, ou permanece algum tempo praticamente em repouso antes de entrar em ressonância. Este cálculo, porém, visa apenas obter indicações de como um fenômeno deste tipo pode ser encaixado no contexto da Eletrodinâmica Estocástica, de modo que as considerações feitas são suficientes para nossos propósitos.

Vejamos o que ocorre com o comprimento de onda da radiação espalhada, se levarmos em conta o efeito Doppler. É importante ressaltar que o próprio Compton raciocinou em termos do efeito Doppler, e o que a-

presentaremos de agora em diante é uma adaptação do cálculo híbrido de Compton⁽³¹⁾ para o nosso contexto clássico.

A partícula se move com velocidade βc na direção de propagação da radiação. Devido ao efeito Doppler, o comprimento de onda no referencial próprio será⁽⁵²⁾ :

$$\lambda_1 = \lambda \left[\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right]^{1/2} \quad (2.22)$$

onde λ é o comprimento de onda no laboratório. No seu referencial, a partícula irradiará no comprimento λ_1 . Para um observador no laboratório, porém, a radiação sofrerá novamente o efeito Doppler, e o comprimento de onda observado (λ') será:

$$\lambda' = \lambda_1 \frac{(1 - \beta \cos \theta)}{(1 - \beta^2)^{1/2}} \quad (2.23)$$

onde θ é o ângulo entre a direção de observação e a direção do feixe primário. Colocando (2.22) em (2.23), obtemos:

$$\Delta\lambda \equiv \lambda' - \lambda = \lambda \frac{\beta}{(1 - \beta)} (1 - \cos \theta) \quad (2.24)$$

Utilizando agora a nossa estimativa para β , que é dada por (2.20), obtemos:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \alpha(1 - \cos \theta) \quad \text{onde} \quad \alpha \approx \frac{\hbar \omega}{m c^2} \quad (2.25)$$

Este resultado coincide com aquele obtido por Compton [fórmula (2.2)] através da *cinemática relativística* fóton-elétron desde que $\alpha \equiv \hbar \omega / m c^2$. Convém ressaltar que as mesmas *relações cinemáticas* utilizadas por Compton foram obtidas aqui (*Capítulo I*) num cálculo não relativístico para partículas em equilíbrio com a radiação térmica e de ponto zero, e portanto não pertencem exclusivamente ao domínio quântico. Assim sendo podemos também usar a cinemática de Compton e fixar o valor de α como sendo exatamente $\hbar \omega / m c^2$

Seguindo esta sequência de argumentos, podemos calcular de uma maneira semelhante a Woo⁽³⁹⁾ (utilizando a Eletrodinâmica Clássica), a seção

de choque de espalhamento da radiação por uma partícula na situação estacionária considerada, ou seja, em movimento retilíneo e uniforme com velocidade relativística βc .

O campo de radiação a longa distância R será dado por⁽⁵³⁾ :

$$\vec{E} = \frac{e}{c^2 R} \frac{\hat{n} \times (\hat{n} - \vec{v}/c) \times \dot{\vec{v}}}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{v}/c)^2} \quad \hat{n} = \frac{\vec{R}}{R} \quad (2.26)$$

com o que podemos calcular facilmente a intensidade instantânea de irradiação num ângulo sólido $d\Omega$ em torno de $\hat{n}$, $dI = E^2 R^2 d\Omega/4\pi$, ou:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \left\{ \frac{\dot{v}^2}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{v}/c)^4} + \frac{2(\hat{n} \cdot \dot{\vec{v}})(\vec{v} \cdot \vec{v})}{c(1 - \hat{n} \cdot \vec{v}/c)^5} - \frac{(\hat{n} \cdot \dot{\vec{v}})^2}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{v}/c)^6} (1 - \beta^2) \right\} \quad (2.27)$$

Tomemos, como no início da seção, uma onda incidente sobre a partícula, com o campo elétrico dado por $\vec{E} = E_0[\cos \omega(t - z/c)\hat{i} + \text{sen} \omega(t - z/c)\hat{j}]$. A aceleração será essencialmente transversal e poderá ser escrita como⁽⁵⁴⁾ :

$$\dot{\vec{v}} = \frac{e}{m} \sqrt{(1 - \beta^2)} \left[\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{E}) \right] \quad (2.28)$$

Como a carga se encontra em movimento aproximadamente uniforme, podemos escrever $\vec{v} \cdot \vec{E} \approx 0$ e $\vec{v} \approx \beta c \hat{k}$. Então (2.28) fica:

$$\dot{\vec{v}} = \frac{e}{m} \sqrt{(1 - \beta^2)} (1 - \beta) E_0 [\cos \omega(t - z/c)\hat{i} + \text{sen} \omega(t - z/c)\hat{j}] \quad (2.29)$$

Podemos agora colocar (2.29) em (2.27) e efetuar a média no tempo. Devemos fazer, no entanto, a seguinte ressalva: a expressão (2.26) é válida desde que as quantidades no segundo membro sejam tomadas no tempo retardado $t' = t - R/c$. Portanto ao executarmos a integração (no cálculo da média), a variável dt deverá ser substituída por dt' , o que nos introduz um fator $dt/dt' = (1 - \hat{n} \cdot \vec{v}/c)$ em (2.27). A integração é trivial.

Assim, se dividirmos o resultado pelo módulo do vetor de Poynting do fluxo incidente, obtemos:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = (1 - \beta^2)(1 - \beta)^2 \left(\frac{e^2}{m c^2} \right)^2 \left[\frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^3} - \frac{\text{sen}^2 \theta (1 - \beta^2)}{2(1 - \beta \cos \theta)^5} \right] \quad (2.30)$$

que representa a seção de choque de espalhamento da radiação por uma carga movendo-se rapidamente (com velocidade βc) na direção de propagação da onda.

Substituindo $\beta = \alpha/1 + \alpha$ na expressão acima, obtemos:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (1 + 2\alpha) \left\{ \frac{1 + \cos^2 \theta + 2\alpha(1 + \alpha)(1 - \cos \theta)^2}{[1 + \alpha(1 - \cos \theta)]^5} \right\} \quad (2.31)$$

com $\alpha \equiv \hbar\omega/mc^2$.

No limite $\hbar\omega \ll mc^2$, a seção de choque (2.31) reduz-se, como já esperávamos, a (2.8), que é a seção de Thomson já calculada. Tanto os cálculos de Compton⁽³¹⁾ quanto os de Woo⁽³⁹⁾ conduzem à expressão (2.31) para a seção de choque. Nesta altura, porém, Compton efetuou uma correção no cálculo que tornou a expressão mais próxima dos dados experimentais. Para tal baseou-se no fato (na sua concepção) de que no espalhamento de um fóton na direção $\theta = 0$ não é esperado o recuo do elétron. Neste caso, então, é razoável que a seção de choque seja dada pela teoria clássica, ou seja:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}_{\text{Thomson}}(\theta = 0) = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \quad (2.32)$$

Entretanto na expressão (2.31) se verifica um fator $(1 + 2\alpha)$ excedente para $\theta = 0$. Compton simplesmente eliminou tal fator, já que com isso se obtêm a normalização correta dada por (2.32).

A nossa análise não é suficientemente detalhada a ponto que permita a obtenção da seção de choque correta, de modo que tentaremos argumentar qualitativamente objetivando a melhora de nossos cálculos.

Fizemos uma simplificação bastante importante quando estudamos apenas a situação estacionária na qual a partícula espalha a radiação enquanto viaja a uma velocidade constante (e alta) βc . Na realidade, porém, a partícula é acelerada até esta velocidade (se bem que de uma maneira abrupta) praticamente a partir do repouso. Este fato faz com que a intensidade da radiação emitida seja maior no nosso cálculo do que seria para uma partícula com aceleração gradativa. Isto é, a expressão (2.31) é uma

superestimativa da seção de choque em todas as direções de θ .

Podemos obter uma indicação para a correção da seção de choque de uma maneira similar à de Compton, considerando a radiação emitida na direção de $\theta = 0$. Nessa direção, a contribuição de uma aceleração longitudinal (paralela à velocidade) é nula, dado que a potência irradiada por uma carga nessas condições é proporcional a $\sin^2\theta$ ⁽⁵⁵⁾. No entanto a aceleração transversal provoca emissão de radiação também na direção $\theta = 0$, e visto que nos instantes iniciais a velocidade real ainda é muito menor que βc , podemos concluir que a seção de choque foi superestimada⁽⁵⁵⁾. Portanto, tentaremos retirar o excesso impondo que nessa direção o valor da seção de choque é dado por (2.32), que é o valor clássico obtido no início da seção. Isto significa também que não se espera modificação no comprimento de onda emitido. Tal fato está de acordo com a nossa análise do deslocamento do comprimento de onda, já que na direção $\theta = 0$, $\Delta\lambda = 0$ qualquer que seja a velocidade de recuo.

Assim, dividindo (2.31) por $(1 + 2\alpha)$, obtemos a expressão com a normalização correta, isto é:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \left\{ \frac{1 + \cos^2\theta + 2\alpha(1 + \alpha)(1 - \cos\theta)^2}{[1 + \alpha(1 - \cos\theta)]^5} \right\} \quad (2.33)$$

que coincide com os resultados de Thomson para $\theta = 0$ e de Compton para qualquer θ . Apresentamos na página seguinte um gráfico da seção de choque (2.33) em função do ângulo θ , comparada com os resultados experimentais e com a seção de choque de Thomson.

A expressão obtida possui, então, um comportamento muito próximo do que é observado experimentalmente.

Devemos salientar novamente, porém, que nossos cálculos simplificados apenas pretendem fornecer indicações sobre as possibilidades de abordagem do espalhamento Compton no contexto de uma teoria clássica como a Eletrodinâmica Estocástica. Um tratamento mais adequado provavelmente exigiria um nível de sofisticação elevado o suficiente para caracterizar um novo trabalho.

Na figura abaixo, a linha tracejada representa a seção de choque de Thomson [expressão (2.8)] em função do ângulo de espalhamento θ . A linha contínua representa a seção de choque por nós calculada [expressão (2.33)] para um valor do comprimento de onda $\lambda = 0.022\text{\AA}$. Os pontos indicam os valores experimentais da seção de choque medidos por Compton. A figura foi extraída da referência 31.

Apesar da simplicidade e das aproximações feitas aqui, logramos, a nosso ver, encontrar um caminho que nos possibilitou a justificação do recuo dos elétrons sem utilizar o conceito corpuscular do fóton. Devido a este recuo, foi possível calcular a variação do comprimento de onda e a seção de choque da radiação emitida em função do ângulo de espalhamento θ .

No que concerne aos elétrons de recuo, surge, entretanto, uma diferença apreciável entre nossos cálculos e as observações experimentais, onde se constatou uma *distribuição angular* para os elétrons ejetados.

Baseado em sua teoria quântica para a radiação, Compton (com colaboração de Hubbard)⁽⁵⁶⁾, calculou a seção de choque para os elétrons de recuo. Segundo a concepção quântica, cada fóton é espalhado por um elétron, o que determina de maneira unívoca o ângulo de espalhamento de ambos. Dessa maneira, não experimentaram dificuldade no cálculo da seção de choque para os elétrons a partir da seção de choque (2.33) para o espalhamento da radiação.

Nos nossos cálculos, entretanto, nos limitamos a obter um recuo determinado pela força sistemática (2.12), ou seja, apenas na direção de propagação do feixe primário. De acordo com a nossa visão, porém, não foram considerados todos os efeitos das flutuações de ponto zero. As condições iniciais utilizadas por nós (*partícula em repouso na origem*) não seriam mais válidas se introduzíssemos plenamente a radiação de fundo no cálculo, pois neste caso a partícula estaria executando um passeio aleatório antes de sofrer a ação do feixe primário. Isto introduziria flutuações transversais no momento linear da mesma, que poderiam ser responsáveis por uma distribuição angular dos elétrons de recuo. O fato experimental em que se verifica um aumento da concentração de elétrons em torno da direção de propagação do feixe primário com o aumento da frequência do mesmo, também parece ajustar-se à nossa visão. Esperamos, pois, que as flutuações transversais (e conseqüentemente o afastamento da direção do feixe primário) sejam menos perceptíveis devido ao aumento da componente longitudinal do momento (que acompanha o aumento de ω). No recuo dos elétrons, reside, então, uma diferença importante entre a interpretação quântica e a nossa descrição

qualitativa baseada na Eletrodinâmica Estocástica. Para nós, a distribuição dos elétrons emergentes seria ocasionada também pela radiação de fundo, enquanto que para a teoria quântica, apenas a ação do feixe primário seria suficiente para tal.

Um outro fato muito importante, e que salta imediatamente aos olhos, está relacionado com o balanço energético do processo. Nós concluímos que *a ação da radiação de fundo* juntamente com a reação da radiação confere energia cinética suficientemente alta à partícula de tal forma que esta sofra um recuo relativístico. Segundo a teoria quântica, no entanto, a energia é proveniente somente do feixe primário. Nesta descrição mais convencional aceita amplamente, objetos quânticos de caráter dual (fótons) interagem com objetos igualmente quânticos (elétrons), estes últimos satisfazendo a equação covariante de Dirac, e de maneira que a conservação da energia se refere estritamente ao sistema fóton-elétron, sem invocar as flutuações eletromagnéticas de ponto zero *quânticas*.

É importante porém ressaltar a semelhança entre nossa abordagem do efeito Compton e outras análises em que o conceito de fóton é desnecessário⁽⁵⁷⁾ para a resolução de alguns problemas importantes, como o efeito fotoelétrico e o da absorção estimulada, por exemplo. Nestes tratamentos semiclássicos, a radiação eletromagnética é considerada puramente clássica (ondas) enquanto que o comportamento quântico reside na matéria, já que os elétrons obedecem a equação de Schroedinger. Esta introduz o caráter flutuante (quântico) que teria que ser invocado para explicar a transferência de energia da *onda* clássica incidente para a matéria. É isto que ocorre na descrição de Scully⁽⁵⁷⁾ e outros do efeito fotoelétrico (inclusive encontrada em livros texto de Mecânica Quântica, como o Schiff e o Merzbacher, por exemplo). Os campos eletromagnéticos determinísticos agiriam então como uma perturbação que possibilitaria a transição entre os estados quânticos próprios do sistema material (um átomo, por exemplo). De certa maneira, observa-se neste tratamento a recuperação da visão Planckiana da interação entre a radiação e matéria. Devemos salientar, porém, que para uma descrição acurada de processos como o Lamb shift e o momento magnético

anômalo do elétron (no contexto da Eletrodinâmica Quântica), é necessária a quantização do campo eletromagnético, de modo que se incluem as flutuações eletromagnéticas de ponto zero quânticas.

No nosso cálculo, curiosamente verificamos que a ação da reação da radiação e da onda eletromagnética primária de frequência ω , cria condições para que se verifique a extração de uma quantidade apreciável de energia ($\hbar\omega$) da radiação de fundo clássica. A constante de Planck $\hbar$ seria proveniente deste fundo, e não da onda primária, dado que inicialmente foi introduzida como uma constante multiplicativa que determina a escala da densidade espectral de ponto zero [veja expressão (1.10)].

SUMÁRIO DAS CONCLUSÕES

Neste trabalho, tentamos mostrar de que maneira uma teoria clássica como a Eletrodinâmica Estocástica pode aliar-se a modelos semiclássicos (principalmente aqueles desenvolvidos no contexto da velha teoria quântica) e com isso obter uma descrição aproximada de processos microscópicos sem a utilização de conceitos quânticos.

Numa primeira etapa, estudamos o modelo fenomenológico de Einstein conhecido como método dos coeficientes A e B, visando, com isto, estabelecer relações entre momento, energia e a frequência da radiação trocada entre partículas que se movem sob a influência de radiação térmica à temperatura T e a radiação de ponto zero. Assim como Einstein, efetuamos um cálculo estatístico, ou seja, consideramos um ensemble de partículas populando estados de energia de forma a obedecer a distribuição de Boltzmann. O caráter probabilístico do cálculo é completado pelo fato de estarmos considerando um sistema no qual os campos eletromagnéticos *flutuantes* (da radiação térmica e de ponto zero) induzem transições entre os estados com uma *taxa de probabilidade* que foi denotada por dW/dt . Os detalhes da forma desta taxa foram feitos quando tratamos com partículas que possuem graus de liberdade internos. Tomamos, então, o caso simples no qual se verificam oscilações harmônicas unidimensionais, o que nos permitiu escrever a probabilidade de transição como sendo proporcional à densidade espectral da radiação que estimula o processo, a saber:

$$\frac{dW}{dt} \propto \rho(\omega)$$

Diferentemente de Einstein, porém, introduzimos diretamente a ação das flutuações de ponto zero ao considerar que *todos* os processos *devem* ser induzidos (pela radiação térmica ou de ponto zero). Isso nos conduz à conclusão de que estes processos devem ser direcionados e, desde que a partícula se encontre em equilíbrio com a radiação (balanço detalhado), verificamos

que ocorre extração (ou adição) de energia e momento (em processos de absorção ou emissão na frequência ω). Assim, para N processos de absorção e M de emissão, teremos, como já vimos:

$$\vec{p}_I + \sum_{i=1}^N \hbar \vec{k}_i = \vec{p}_F + \sum_{j=1}^M \hbar \vec{k}'_j$$

e

$$E_F + \sum_{j=1}^M \hbar \omega'_j = E_I + \sum_{i=1}^N \hbar \omega_i$$

Aqui $\vec{p}_I$ e E_I se referem ao estado inicial da partícula e $\vec{p}_F$ e E_F ao estado final.

Este resultado válido estatisticamente para um sistema de partículas em equilíbrio com a radiação, nos sugeriu, então, que fenômenos como o efeito Compton (que envolvem relações do mesmo tipo das anteriores) podem vir a ser abordados por uma teoria como a Eletrodinâmica Estocástica.

Na segunda etapa deste trabalho, tentamos obter indicações de como o espalhamento Compton pode ser descrito (em pelo menos em alguns de seus aspectos) no contexto da Eletrodinâmica Estocástica.

Para tal inicialmente estudamos o comportamento de uma partícula que sofre a ação de uma onda plana monocromática de frequência ω . Em princípio consideramos uma partícula extensa, porém sem explicitar a sua estrutura interna, como de certa maneira fizemos na parte anterior do trabalho.

O ponto mais importante de nossa análise foi o esclarecimento das causas do recuo da partícula. Mostramos que é devido à ação combinada da reação da radiação, da onda incidente e da radiação de fundo. A força da reação da radiação permite que a partícula sofra um pequeno recuo na direção de propagação do feixe primário, ao mesmo tempo que através de uma situação ressonante é possível que ocorra extração de uma quantidade de energia apreciável do fundo. Com isso obtivemos um recuo relativístico para a partícula, e passamos a estudar, então, a situação estacionária na qual a mesma se move com a máxima velocidade adquirida v , enquanto espalha a onda incidente primária. Calculamos esta velocidade de maneira

aproximada e obtivemos como resultado:

$$\frac{v}{c} \equiv \beta = \frac{\alpha}{1 + \alpha} \quad \text{com} \quad \alpha \approx \frac{\hbar \omega}{m c^2}$$

A partir daí, baseados em trabalhos do próprio Compton, foi possível calcular o deslocamento do comprimento de onda através do efeito Doppler duplo sofrido pela radiação quando a partícula (que efetuará o espalhamento) se move com velocidade constante v . Obtivemos com este raciocínio o seguinte resultado:

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} \approx \frac{\hbar \omega}{m c^2} (1 - \cos \theta)$$

A velocidade encontrada também é a necessária para que possamos calcular a seção de choque de espalhamento da radiação utilizando a Eletrodinâmica Clássica. Obtivemos uma expressão para a seção de choque que a menos de um fator $(1 + 2\alpha)$ está em bom acordo com os dados experimentais. Acreditamos que este fator ocorre em vista das aproximações feitas por nós. Como não se trata de um cálculo rigoroso, normalizamos a seção de choque encontrada impondo que o resultado de Thomson vale para a direção dianteira (de uma maneira semelhante a Compton). Obtivemos finalmente:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{m c^2} \right)^2 \left\{ \frac{1 + \cos^2 \theta + 2\alpha(1 + \alpha)(1 - \cos \theta)^2}{[1 + \alpha(1 - \cos \theta)]^5} \right\}$$

Nesta descrição semiquantitativa do espalhamento Compton baseada na Eletrodinâmica Estocástica, chegamos a algumas conclusões interessantes, em vista da intervenção das flutuações de ponto zero no processo.

Primeiramente concluímos que é factível uma análise completamente clássica de alguns aspectos do espalhamento Compton. Para tal foi necessária a inclusão das flutuações eletromagnéticas *clássicas* de ponto zero. A energia cinética do elétron de recuo seria, então, proveniente da radiação de ponto zero, o que implica num balanço energético *diferente* daquele que é previsto pela Teoria Quântica. Isto por que segundo a Mecânica Quântica a ação dos fótons do feixe primário é suficiente para efetuar o recuo dos elétrons, e a conservação da energia se refere apenas ao sistema elétron-fóton incidente.

Acreditamos que esta é uma diferença qualitativa importante entre as duas abordagens, mas infelizmente desconhecemos quaisquer experimentos que possibilitem uma definição.

Não fomos capazes, porém, de calcular com detalhe a distribuição dos elétrons de recuo. Não obstante parece-nos razoável supor que as próprias flutuações de ponto zero poderiam introduzir flutuações no momento transversal dos elétrons, conferindo ao recuo um caráter probabilístico.

Para a realização deste trabalho nos servimos de modelos (de Einstein e Compton) que foram idealizados durante o desenvolvimento da velha teoria quântica, e que portanto traziam ainda muitos elementos clássicos. Curiosamente os dois trabalhos tinham como objetivo construir uma teoria quântica para a radiação baseada nas propriedades corpusculares dos fótons.. Segundo a nossa concepção baseada na Eletrodinâmica Estocástica, porém, a radiação constitui-se de ondas eletromagnéticas, e o caráter aparentemente corpuscular da mesma de alguma forma seria devido às flutuações de ponto zero. O fato é que a densidade de energia dos campos de ponto zero, como já vimos, pode ser escrita como:

$$\langle \vec{E}^2 + \vec{B}^2 \rangle = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}}$$

Esta expressão nos sugere que a “ energia do fóton de frequência ω ”, isto é, $\hbar \omega$ já está presente nas flutuações clássicas, bastando apenas que se criem condições para sua manifestação. Neste trabalho vimos que uma onda plana monocromática incidindo sobre partículas carregadas fornece estas condições. Sob este aspecto, este nosso tratamento do efeito Compton se assemelha à abordagem do efeito fotoelétrico que a teoria semiclássica apresenta, segundo a qual o caráter quântico do processo seria proveniente das “ flutuações do sistema atômico ”, e não da onda eletromagnética incidente. Para nós, então, o caráter “ quântico ” da radiação se manifesta quando esta, ao interagir com sistemas materiais, evidencia a ação das flutuações eletromagnéticas de ponto zero.

Apêndice I

**- ALTERAÇÃO DA DENSIDADE ESPECTRAL SOB
TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ -**

Vejamos como se transforma a densidade espectral $\rho(\omega, T)$ (densidade de energia na frequência ω) quando passamos para um referencial inercial que se move com velocidade constante v (na direção x) em relação ao laboratório (recipiente com temperatura T). Para isso escreveremos a radiação eletromagnética flutuante (térmica ou de ponto zero) no sistema inercial de laboratório, como sendo uma superposição de ondas planas transversais. Assim, o campo elétrico $\vec{E}$ no ponto $\vec{r}$ e no instante t será escrito como:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3\vec{k} \, \hat{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) g(\vec{k}, T) \cos[\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \eta(\vec{k}, \lambda)] \quad (AI.1)$$

onde $g(\omega_{\vec{k}}) \equiv g(\vec{k}, T)$ caracteriza a amplitude da onda de frequência $\omega_{\vec{k}} = c|\vec{k}|$. Os versores de polarização $\hat{\epsilon}$ satisfazem as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) \cdot \hat{\epsilon}(\vec{k}, \lambda') &= \delta_{\lambda\lambda'}, & \vec{k} \cdot \hat{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) &= 0 \\ \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_i(\vec{k}, \lambda) \epsilon_j(\vec{k}, \lambda) &= \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \end{aligned} \quad (AI.2)$$

e $\eta(\vec{k}, \lambda)$ é uma fase aleatória uniformemente distribuída entre 0 e 2π .

Tomando a média sobre η do quadrado de $\vec{E}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \langle \vec{E}^2(\vec{r}, t) \rangle &= \sum_{\lambda_1=1}^2 \sum_{\lambda_2=1}^2 \int d^3\vec{k}_1 \int d^3\vec{k}_2 \, \hat{\epsilon}(\vec{k}_1, \lambda_1) \hat{\epsilon}(\vec{k}_2, \lambda_2) g(\omega_1) g(\omega_2) \times \\ &\times \langle \cos[\omega_1 t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \eta(\vec{k}_1, \lambda_1)] \cos[\omega_2 t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \eta(\vec{k}_2, \lambda_2)] \rangle \end{aligned} \quad (AI.3)$$

Para calcular a média que envolve os cosenos, usamos $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ para separar as fases aleatorias do restante.

As médias sobre as fases nos fornecem, para $\vec{k}_1 \neq \vec{k}_2$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\langle \cos \eta(\vec{k}_1, \lambda_1) \cos \eta(\vec{k}_2, \lambda_2) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\eta_1 \cos \eta(\vec{k}_1, \lambda_1) \int_0^{2\pi} d\eta_2 \cos \eta(\vec{k}_2, \lambda_2) = 0$. Se $\vec{k}_1 = \vec{k}_2$ e $\lambda_1 = \lambda_2$, $\eta_1 = \eta_2$ e obtemos $\langle \cos \eta(\vec{k}_1, \lambda_1) \cos \eta(\vec{k}_2, \lambda_2) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\eta \cos^2 \eta = 1/2$. O mesmo ocorre para $\langle \sin \eta(\vec{k}_1, \lambda_1) \sin \eta(\vec{k}_2, \lambda_2) \rangle$ e ainda temos $\langle \sin \eta(\vec{k}_2, \lambda_2) \cos \eta(\vec{k}_1, \lambda_1) \rangle = 0$ válida sempre.

Esses resultados podem ser reescritos usando a seguinte forma compacta⁽⁷⁾ :

$$\begin{aligned} \langle \cos[\omega_1 t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \eta(\vec{k}_1, \lambda_1)] \cos[\omega_2 t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \eta(\vec{k}_2, \lambda_2)] \rangle &= \cos^2(\omega_1 t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}) \frac{1}{2} \\ \times \delta^3(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \delta_{\lambda_1 \lambda_2} + \sin^2(\omega_1 t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}) \frac{1}{2} \delta^3(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \delta_{\lambda_1 \lambda_2} &= \\ &= \frac{1}{2} \delta^3(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \delta_{\lambda_1 \lambda_2}. \quad (AI.4) \end{aligned}$$

Com isso obtemos:

$$\begin{aligned} \langle \vec{E}^2(\vec{r}, t) \rangle &= \sum_{\lambda_1=1}^2 \sum_{\lambda_2=1}^2 \int d^3 \vec{k}_1 \int d^3 \vec{k}_2 \hat{e}(\vec{k}_1, \lambda_1) \hat{e}(\vec{k}_2, \lambda_2) g(\omega_1) g(\omega_2) \times \\ &\times \frac{1}{2} \delta^3(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \delta_{\lambda_1 \lambda_2} = \int d^3 \vec{k} g(\omega_{\vec{k}})^2 = \frac{4\pi}{c^3} \int_0^\infty d\omega \omega^2 g(\omega)^2 \quad (AI.5) \end{aligned}$$

é fácil ver que se $\vec{B}$ é o campo magnético aleatório, então $\langle \vec{E}^2(\vec{r}, t) \rangle = \langle \vec{B}^2 \rangle$. Dessa maneira, utilizando a definição de densidade espectral, podemos escrever:

$$\frac{\langle \vec{E}^2 + \vec{B}^2 \rangle}{8\pi} \equiv \int_0^\infty d\omega \rho(\omega, T) = \frac{1}{c^3} \int_0^\infty d\omega \omega^2 g^2(\omega, T) \quad (AI.6)$$

Desta última relação obtemos:

$$\rho(\omega) = \frac{g(\omega)^2 \omega^2}{c^3} \quad (AI.7)$$

que será de utilidade mais adiante.

No referencial próprio da partícula, que se move com velocidade $\vec{v} = v \hat{i}$, os versores $\epsilon'_x, \epsilon'_y, \epsilon'_z$ podem ser escritos como função dos versores $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ do

sistema de laboratório.

$$\begin{aligned}\epsilon'_x &= \epsilon_x \\ \epsilon'_y &= \gamma \left[\epsilon_y - \frac{v}{c} \frac{(\vec{k} \times \hat{e})_x}{k} \right] \\ \epsilon'_z &= \gamma \left[\epsilon_z + \frac{v}{c} \frac{(\vec{k} \times \hat{e})_y}{k} \right]\end{aligned}\quad (A1.8)$$

com $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$, visto que eles devem se transformar como os campos eletromagnéticos.

Dessa forma, no referencial da partícula o campo elétrico é dado por:

$$\begin{aligned}\vec{E}'(\vec{r}, t) &= \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3\vec{k} g(\omega) (\epsilon'_x \hat{i} + \epsilon'_y \hat{j} + \epsilon'_z \hat{k}) \cos(\omega'_k t - \vec{k}' \cdot \vec{r}' - \eta') = \\ &= \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3\vec{k} g(\omega) \hat{e}' \cos(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \eta)\end{aligned}\quad (A1.9)$$

onde foi utilizada a invariância da fase da onda plana. Note que $g(\omega_{\vec{k}})$ é a amplitude definida no sistema da cavidade. Quadrando $\vec{E}'$ e tomando a média sobre η , como foi feito anteriormente, obtém-se:

$$\langle \vec{E}'^2(\vec{r}, t) \rangle = \int d^3\vec{k} g(\omega)^2 \sum_{\lambda=1}^2 (\epsilon'^2_x + \epsilon'^2_y + \epsilon'^2_z) \quad (A1.10)$$

Podemos agora utilizar as relações (A1.8) e efetuar a soma sobre os λ [veja (A1.2)], chegando a:

$$\langle \vec{E}'^2(\vec{r}, t) \rangle = \int d^3\vec{k} g(\omega)^2 \gamma^2 \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{k}}{\omega}\right)^2 \quad (A1.11)$$

As propriedades de transformação do quadrivetor $k_\mu \equiv (\vec{k}, \omega/c)$ nos levam a:

$$\begin{aligned}d^3\vec{k} &= d^3\vec{k}' \gamma \left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{k}'}{\omega'_k}\right) \\ k'_x &= \gamma \left(k_x - \frac{v}{c^2} \omega_k\right) \\ \omega'_k &= \gamma (\omega_k - v k_x)\end{aligned}\quad (A1.12)$$

Assim (AI.11) fica:

$$\langle \vec{E}'^2(\vec{r}, t) \rangle = \int \frac{d^3 \vec{k}' g(\omega)^2}{\gamma(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{k}'}{\omega'_k})} \quad (AI.13)$$

Observamos mais uma vez que nesta última expressão $g(\omega)$ é a amplitude da onda no sistema da cavidade. No referencial que se move teremos uma amplitude $g'(\vec{k}')$ que desejamos relacionar com $g(\omega)$. Evidentemente a definição de $g'(\vec{k}')$ será:

$$\langle \vec{E}'^2(\vec{r}, t) \rangle \equiv \int d^3 \vec{k}' g'^2(\vec{k}') \quad (AI.14)$$

Comparando (AI.14) com (AI.13), obtemos:

$$g'^2(\vec{k}') = \frac{g(\omega)^2}{\gamma(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{k}'}{\omega'_k})} \quad (AI.15)$$

Nesta altura é possível verificar que o único espectro invariante por transformações de Lorentz [isto é, $g'(\omega') = g(\omega)$] é da forma $g(\omega)^2 \propto \omega$ já que $\omega = \gamma \omega'(1 + \vec{v} \cdot \vec{k}'/\omega')$. Isto implica que a distribuição espectral [expressão (AI.7)] deve ser $\rho(\omega) \propto \omega^3/c^3$, e tem exatamente a forma da expressão (1.9) encontrada através de argumentos termodinâmicos no Capítulo 1. É simples verificar que a própria distribuição espectral $\rho_0(\omega)$ é invariante por transformações de Lorentz.

Podemos agora multiplicar (AI.15) por ω'^2 e utilizar (AI.7) para obter:

$$\rho'(\vec{k}') \equiv \rho'(\omega', \theta') = \rho(\omega) \gamma (1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{k}}{\omega})^2 / (1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{k}'}{\omega'_k}) \quad (AI.16)$$

Com o objetivo de simplificar (AI.16) de tal forma que os cálculos sejam factíveis, desprezaremos termos de ordem superior a v/c de agora em diante. Nessa aproximação não relativística, $\gamma \approx 1$ e $\cos \theta' \approx \cos \theta - \frac{v}{c} \sin^2 \theta$. Devemos lembrar que θ e θ' são os ângulos que $\vec{k}$ e $\vec{k}'$ formam com o eixo x , respectivamente. Assim (AI.16) fica:

$$\rho'(\omega', \theta') \approx \rho(\omega) (1 - \frac{3v}{c} \cos \theta') \quad (AI.17)$$

Expandindo agora $\rho(\omega)$ em torno de ω' , $\rho(\omega) = \rho(\omega' + \frac{v}{c}\omega' \cos \theta') \approx \rho(\omega') + \frac{\partial \rho(\omega')}{\partial \omega} \omega' \frac{v}{c} \cos \theta' + \dots$, chega-se finalmente a:

$$\rho'(\omega', \theta') = \left[\rho(\omega') + \frac{v}{c} \frac{\partial \rho(\omega')}{\partial \omega} \omega' \cos \theta' \right] \left[1 - \frac{3v}{c} \cos \theta' \right] \quad (A1.18)$$

Obtivemos, assim, a densidade espectral no sistema móvel $[\rho'(\omega', \theta')]$ em termos da densidade do sistema de laboratório $[\rho(\omega')]$.

Apêndice II

- ABSORÇÃO E EMISSÃO DE RADIAÇÃO POR UM OSCILADOR

Calcularemos agora a potência absorvida (da radiação térmica e de ponto zero) por uma partícula polarizável, ou seja, que possui um movimento interno do tipo harmônico. Por questão de simplicidade, restringiremos o movimento de oscilação na direção z e consideraremos que uma fração m da massa total M da partícula oscila com frequência ω_0 .

Para tal partícula submetida à radiação eletromagnética, podemos escrever a potência absorvida pela mesma como sendo a taxa de trabalho que a radiação efetua sobre a partícula, ou seja:

$$\frac{dW_{abs}}{dt} = \langle \dot{z} F_z(\vec{r}, t) \rangle \quad (AII.1)$$

onde F_z é a força devido aos campos aleatórios no ponto $\vec{r} = (x, y, z)$.

A equação para a partícula oscilante (eq. de Braffort-Marshall) será:

$$m \dot{v}_z = -m \omega_0^2 z + \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{v}_z + F_z(\vec{r}, t) \quad (AII.2)$$

Onde o primeiro termo do segundo membro representa a força harmônica, e o segundo é a força de reação da radiação⁽¹²⁾ que atua sobre a carga e .

A equação anterior pode ser simplificada se considerarmos a força harmônica como sendo dominante. Desta maneira,

$$m \ddot{v}_z \approx -m \omega_0^2 v_z, \quad (AII.3)$$

e (AII.2) fica:

$$m \dot{v}_z = -m \omega_0^2 z - m \gamma v_z + F_z(\vec{r}, t) \quad \text{com} \quad \gamma = \frac{2e^2 \omega_0^2}{3mc^3} \quad (AII.4)$$

Consideraremos o movimento da carga como sendo não relativístico, já que com isso conseguimos simplificações importantes na equação (AII.3). A primeira delas é a não consideração da força magnética, já que esperamos que

ela seja muito menor do que a força elétrica no movimento não relativístico. Dessa maneira a força aleatória será simplesmente $F_z(\vec{r}, t) = e E_z(\vec{r}, t)$. O campo elétrico flutuante é dado por (AII.1), e portanto podemos escrever:

$$F_z(\vec{r}, t) = \Re \left\{ e \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3 \vec{k} \epsilon_z g(\omega, T) \exp[i \vec{k} \cdot \vec{r} - i \omega t + \eta(\vec{k}, \lambda)] \right\} \quad (AII.5)$$

Tomando a origem do sistema de coordenadas tal que $\vec{r}(t=0) = \vec{0}$, temos que:

$$\exp[i \vec{k} \cdot \vec{r} - i \omega t] = \exp \left[-i \omega t \left(1 - \frac{\vec{k}}{\omega} \int_0^t \frac{dt'}{t'} \dot{\vec{r}}(t') \right) \right]$$

e como $|\vec{k}|/\omega = 1/c$ e $|\dot{\vec{r}}|/c \ll 1$ na aproximação não relativística, teremos:

$$\exp[i \vec{k} \cdot \vec{r} - i \omega t] \approx \exp(-i \omega t) \quad (AII.6)$$

o que nos lineariza a equação de movimento (AII.4):

$$m \ddot{z} = -m \omega_0^2 z - m \gamma \dot{z} + \Re \left\{ e \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3 \vec{k} \epsilon_z(\vec{k}, \lambda) g(\omega, T) \exp[-i \omega_k t + i \eta(\vec{k}, \lambda)] \right\} \quad (AII.7)$$

Procuraremos agora uma solução estacionária da equação acima dada por:

$$z = \Re \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3 \vec{k} \alpha(\omega) \epsilon_z \exp[-i \omega_k t + i \eta(\vec{k}, \lambda)] \quad (AII.8)$$

Substituindo (AII.8) em (AII.7) encontramos que

$$\alpha(\omega) = \frac{e}{m} \frac{g(\omega, T)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i \omega \gamma}$$

Assim:

$$z = \frac{e}{m} \Re \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3 \vec{k} \frac{g(\omega, T) \epsilon_z \exp[-i \omega_k t + i \eta(\vec{k}, \lambda)]}{\omega_0^2 - \omega^2 - i \gamma \omega} \quad (AII.9)$$

e

$$\dot{z} = -\frac{e}{m} \Re \left\{ i \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3 \vec{k} \frac{g(\omega, T) \epsilon_r \exp[-i\omega_k t + i\eta(\vec{k}, \lambda)]}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \omega \right\} \quad (AII.10)$$

que por sua vez pode ser reescrita como:

$$\dot{z} = \frac{e}{m} \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3 \vec{k} g(\omega, T) \epsilon_r \omega \left[\frac{\gamma\omega \cos(\omega t + \eta) - (\omega_0^2 - \omega^2) \text{sen}(\omega t + \eta)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \right] \quad (AII.11)$$

A potência absorvida fica, então:

$$\begin{aligned} \frac{dW_{abs}}{dt} = \langle \dot{z} F_z(\vec{r}, t) \rangle &= \frac{e^2}{m} \sum_{\lambda_1}^2 \sum_{\lambda_2}^2 \int d^3 \vec{k}_1 \int d^3 \vec{k}_2 \frac{g(\omega_1, T) g(\omega_2, T)}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + \gamma^2 \omega_1^2} \times \\ &\times \epsilon_r(\vec{k}_1, \lambda_1) \epsilon_r(\vec{k}_2, \lambda_2) [\gamma\omega_1 \langle \cos(\omega_1 t + \eta_1) \cos(\omega_2 t + \eta_2) \rangle - \\ &- (\omega_0^2 - \omega^2) \langle \cos(\omega_1 t + \eta_1) \text{sen}(\omega_2 t + \eta_2) \rangle] \quad (AII.12) \end{aligned}$$

As médias sobre η já foram calculadas no Apêndice I (AI.4), e nos fornecem

$$\langle \cos(\omega_1 t + \eta_1) \cos(\omega_2 t + \eta_2) \rangle = \delta^3(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \delta_{\lambda_1 \lambda_2}$$

$$\langle \cos(\omega_1 t + \eta_1) \text{sen}(\omega_2 t + \eta_2) \rangle = 0$$

Utilizando estas últimas relações e efetuando a soma sobre as polarizações, [expressões (AI.2)] obtem-se para a potência:

$$\frac{dW_{abs}}{dt} = \frac{4\pi e^2 \gamma}{3m} \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^2 \rho(\omega, T)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (AII.13)$$

A integral a ser calculada é divergente desde que não sejam efetuados cortes nas altas frequências. Isto pode ser feito através da introdução de um fator $\exp(-a\omega^2)$ que atenua as contribuições devido às frequências altas⁽¹⁰⁾. Depois do cálculo basta tomar $a \rightarrow 0$. Ainda não é claro, no entanto, o significado físico da atenuação dos efeitos devido às altas frequências, como já foi comentado na Introdução à Eletrodinâmica Estocástica (Capítulo I).

Para efetuar o cálculo da integral, observemos que $\gamma/\omega_0 = e^2\omega_0/mc^3 = e^2\hbar\omega_0/\hbar cmc^2 \ll 1$, pois $e^2/\hbar c \approx 1/137$ e $\hbar\omega_0$, duas vezes a energia do estado fundamental do oscilador, é muito menor do que mc^2 na aproximação não relativística feita. Assim, o denominador no integrando de (AII.13) será pequeno quando $\omega \approx \omega_0$. Isso significa que a integral assumirá valores apreciavelmente grandes num pico em torno de ω_0 . Denominando $G(\omega) = \rho(\omega, T) \omega^2 \exp(-a\omega^2)$, a sua expansão em série de potências será: $G(\omega) = G(\omega_0) + \frac{dG(\omega_0)}{d\omega}(\omega - \omega_0) + \dots$ Então :

$$\frac{dW_{abs}}{dt} = \frac{4\pi e^2 \gamma}{3m} \left[I_1 G(\omega_0) + I_2 \frac{dG(\omega_0)}{d\omega} + \dots \right] \quad (AII.14)$$

onde:

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

e

$$I_2 = \int_0^\infty d\omega \frac{(\omega - \omega_0)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

Mudando a variável de integração em I_1 para $\mu = \omega - \omega_0$, podemos simplificar o denominador do integrando já que a integral assume valores expressivos apenas para μ pequeno.

A função $(4\omega_0^2\mu^2 + \gamma^2\omega_0^2)^{-1}$ possui um pico em $\mu = 0$, com uma largura a meia altura dada por γ . Assim, como $\gamma \ll \omega_0$, as contribuições para $\omega < -\omega_0$ serão desprezíveis, e podemos escrever:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu}{4\omega_0^2\mu^2 + \gamma^2\omega_0^2} = \frac{\pi}{2\gamma\omega_0^2} \quad (AII.15)$$

Para o cálculo da integral I_2 , a reescreveremos como:

$$I_2 = \int_0^\infty d\omega \frac{\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} - \omega_0 I_1$$

Mudando a variável para $y = \omega^2$, chegamos a

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dy}{y^2 + (\gamma^2 - 2\omega_0^2)y + \omega_0^4} - \omega_0 I_1$$

A primeira integral é do tipo $\int \frac{dx}{Ax^2+Bx+C} = \frac{2}{\sqrt{-B^2+4AC}} \arctan\left(\frac{2Ax+B}{\sqrt{-B^2+4AC}}\right)$ para $B^2 < 4AC$.

Levando em conta o fato que $\gamma \ll \omega_0$, e desprezando termos de ordem superior a γ/ω_0 , obtemos:

$$I_2 = \frac{\pi}{2\gamma\omega_0} \left(1 - \frac{\gamma}{\pi\omega_0}\right) - \frac{\pi}{2\gamma\omega_0} = -\frac{1}{\omega_0^2} \quad (AII.16)$$

Colocando agora (AII.15) e (AII.16) em (AII.14), obtemos:

$$\frac{dW_{abs}}{dt} = \frac{4\pi e^2}{3m} \gamma \left[\frac{\pi}{2\gamma\omega_0^2} \rho - \frac{\rho}{\omega_0^2} \left(\frac{\omega^2}{\rho} \frac{\partial \rho(\omega_0)}{\partial \omega} + 2\omega_0 - 2a\omega_0^3 \right) \right] \exp(-a\omega_0^2)$$

. Tomando agora $a \rightarrow 0$, chegamos a:

$$\frac{dW_{abs}}{dt} = \frac{2\pi e^2}{3m} \rho(\omega_0, T) \left[1 + \frac{2\gamma}{\omega_0} \left(\frac{\omega_0}{\rho} \frac{\partial \rho(\omega_0)}{\partial \omega} + 2 \right) \right] \quad (AII.17)$$

A densidade espectral $\rho(\omega_0, T)$ engloba a radiação térmica gerada pelas paredes do recipiente e a radiação de ponto zero que preenche o Universo e não está correlacionada com a primeira. Portanto podemos escrever $\rho(\omega_0, T) = \rho_0(\omega_0) + \rho_T(\omega_0)$. Sabemos que a lei de Rayleigh-Jeans nos fornece um valor para a densidade espectral térmica maior ou no mínimo igual ao valor experimental, para todas as frequências do espectro. Como

$$\rho(\omega_0, T) \leq \frac{\hbar \omega_0}{2\pi^2 c^3} + \frac{\omega_0^2 k T}{\pi^2 c^3}$$

podemos estimar um dos termos de (AII.17), isto é:

$$\frac{\omega_0}{\rho} \frac{\partial \rho(\omega_0)}{\partial \omega} \leq 2 + \frac{1}{1 + 2kT/\hbar\omega_0} \leq 3$$

Então podemos escrever:

$$\frac{dW_{abs}}{dt} = \frac{2\pi e^2}{3m} \rho(\omega_0, T) \left[1 + O\left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right) \right]$$

Ou mais abreviadamente:

$$\frac{dW_{abs}}{dt} = \frac{2\pi e^2}{3m} \rho(\omega_0, T) \quad (AII.18)$$

Para o cálculo da potência emitida, notemos que $\langle \ddot{z}^2 \rangle = \omega_0^2 \langle \dot{z}^2 \rangle = e^2 \pi^2 c^3 \rho(\omega_0, T)/m$. Essas igualdades são facilmente verificáveis, apenas seguindo passos já dados no cálculo de médias e integrais. Utilizando então a fórmula de Larmor, obtem-se:

$$\frac{dW_{emit}}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \langle \ddot{z}^2 \rangle = \frac{2\pi e^2}{3m} \rho(\omega_0, T) \quad (AII.19)$$

Concluimos assim que para a partícula polarizável em equilíbrio com a radiação, a taxa de absorção é igual à taxa de emissão (como esperaríamos) e ambas são proporcionais à densidade espectral $\rho(\omega_0, T)$, onde ω_0 é a frequência de oscilação do movimento interno da partícula polarizável.

Este resultado possui uma aplicação importante no primeiro capítulo, quando escrevemos as taxas (assim como Einstein) de transição das partículas entre diferentes estados de energia. A dependência linear da potência irradiada (ou absorvida) em $\rho(\omega, T)$, torna razoável a consideração de uma taxa de transição proporcional à densidade espectral, quando tratamos de processos estimulados.

Apêndice III

- A DEDUÇÃO DA FÓRMULA ESPECTRAL DE PLANCK PARA A RADIAÇÃO TÉRMICA -

Principalmente no estudo da alteração do momento, devida a emissões e absorções, como foi feito no *Capítulo I*, é necessário conhecer de antemão uma expressão explícita para a densidade espectral da radiação térmica. Foi Max Planck, em 1900, o primeiro a obter uma expressão satisfatória para esta densidade, e desde então várias deduções diferentes foram executadas. A que exporei a seguir, baseada num modelo do próprio Planck (1911), é um dos resultados importantes obtidos através da Eletrodinâmica Estocástica. Além disso é *independente* do modelo de Einstein tratado no nosso estudo.

Consideremos um recipiente que se encontra à temperatura T , ou seja, paredes materiais absorvendo e emitindo radiação eletromagnética. Já que a radiação é incapaz de entrar em equilíbrio com si própria, o mesmo é atingido através da interação da radiação com as paredes do recipiente. Isto ocorre através da absorção e emissão da radiação por cargas que por hipótese se encontram ligadas harmonicamente às paredes do mesmo.

A equação de Braffort-Marshall para a carga ligada harmonicamente a uma parede de massa infinita será, como já vimos:

$$m \ddot{\vec{x}} = -m \omega_0^2 \vec{x} + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\vec{v}} + \vec{F}(t) \quad \text{com} \quad \dot{\vec{x}} = \vec{v} \quad (AIII.1)$$

Esta equação é a versão tridimensional da equação (AII.2) já estudada. Assim, tomando a aproximação não relativística, podemos escrever sua solução como sendo:

$$\vec{x} = \frac{e}{m} \Re \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3 \vec{k} \frac{g(\omega, T) \hat{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) \exp[-i\omega_k t + i\eta(\vec{k}, \lambda)]}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (AIII.2)$$

Em posse deste resultado podemos agora calcular o valor médio da energia total da carga, que é dado por:

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{1}{2} m \langle \dot{\vec{x}}^2 \rangle + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \langle \vec{x}^2 \rangle$$

Médias deste tipo que envolvem as fases aleatórias η , já foram calculadas no Apêndice I. Depois de somar sobre as polarizações chegamos facilmente a:

$$\langle \vec{x}^2 \rangle = \frac{2 \pi e^2}{m c^3} \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^2 g^2(\omega, T)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (AIII.3)$$

onde já integrou-se a parte angular de $d^3 \vec{k}$.

Para a velocidade, teremos a expressão:

$$\dot{\vec{x}} = -\frac{e}{m} \Re \left\{ i \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3 \vec{k} \frac{g(\omega, T) \hat{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) \exp[-i\omega_k t + i\eta(\vec{k}, \lambda)]}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \omega \right\}$$

de onde analogamente, obtemos:

$$\langle \dot{\vec{x}}^2 \rangle = \frac{2 \pi e^2}{m^2 c^3} \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^4 g^2(\omega, T)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (AIII.4)$$

Então a energia média fica:

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{2 \pi e^2}{m} \int_0^\infty d\omega \frac{(\omega^2 + \omega_0^2) \rho(\omega, T)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (AIII.5)$$

onde já foi utilizado $\rho(\omega, T) = \omega^2 g^2(\omega, T)/c^3$.

A integral a ser calculada é do mesmo tipo da que foi abordada no Apêndice II [expressão (AII.13)], e portanto aplica-se a ela os mesmos métodos e aproximações já utilizados. Como $\gamma \ll \omega_0$, o resultado para a energia média pode ser escrito como:

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{3 \pi c^3}{\omega_0^2} \rho(\omega_0, T) \quad (AIII.6)$$

Podemos mostrar facilmente que tanto $\vec{x}$ quanto $\vec{p} = \dot{\vec{x}}/m$ são variáveis aleatórias estatisticamente independentes. Portanto podemos usar o teorema central do limite para encontrar a distribuição de probabilidade (no espaço

de fase) do oscilador em equilíbrio⁽⁵⁾. O resultado é o produto de duas Gaussianas, a saber:

$$W(\vec{x}, \vec{p}) = \left(\frac{4\pi^2}{9} \langle \vec{x}^2 \rangle \langle \vec{p}^2 \rangle \right)^{-3/2} \exp \left[\frac{-3}{2} \left(\frac{\vec{x}^2}{\langle \vec{x}^2 \rangle} + \frac{\vec{p}^2}{\langle \vec{p}^2 \rangle} \right) \right] \quad (AIII.7)$$

Utilizando esta distribuição e o fato que: $\langle \epsilon \rangle = m \langle \dot{\vec{x}}^2 \rangle = m \omega_0^2 \langle \vec{x}^2 \rangle = 3\pi^2 c^3 \rho(\omega_0, T) / \omega_0^2$, obtemos:

$$\langle \epsilon^2 \rangle = \int d^3 \vec{x} \int d^3 \vec{p} W(\vec{x}, \vec{p}) \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \vec{x}^2 \right)^2 = \frac{4}{3} \langle \epsilon \rangle^2 \quad (AIII.8)$$

Devemos, agora, prosseguir com cautela, de modo a incorporar adequadamente as flutuações de ponto zero. Certamente a utilização do princípio de equipartição não é o correto, já que o resultado $\langle \epsilon \rangle = 3kT$ em (AIII.6) nos conduz à lei de Rayleigh-Jeans. O procedimento a ser adotado⁽¹⁰⁾ consiste em adaptar a fórmula de Einstein-Gibbs para as flutuações térmicas da energia de um sistema $[(\langle \epsilon^2 \rangle - \langle \epsilon \rangle^2)_{termica}]$, incluindo os efeitos da radiação de ponto zero.

Escreveremos a fórmula como:

$$kT^2 \frac{\partial \langle \epsilon \rangle}{\partial T} = (\langle \epsilon^2 \rangle - \langle \epsilon \rangle^2)_{termica} \equiv (\langle \epsilon^2 \rangle - \langle \epsilon \rangle^2)_{total} - (\langle \epsilon^2 \rangle - \langle \epsilon \rangle^2)_{ponto\ zero} \quad (AIII.9)$$

já que as flutuações térmicas são consideradas estatisticamente independentes das flutuações de ponto zero. Da expressão (AIII.8) temos $\langle \epsilon^2 \rangle - \langle \epsilon \rangle^2 = \langle \epsilon \rangle^2 / 3$, o que nos permite escrever (AIII.9) como:

$$kT^2 \frac{\partial \rho(\omega_0, T)}{\partial T} = \frac{1}{3} \left(\frac{3\pi^2 c^2}{\omega_0^2} \right) \left[\rho^2(\omega_0, T) - \left(\frac{\hbar \omega_0^3}{2\pi^2 c^3} \right)^2 \right] \quad (AIII.10)$$

onde $\rho(\omega_0, T) = \rho_T(\omega_0) + \rho_0(\omega_0)$. A equação diferencial é facilmente resolvida, e nos fornece como resultado:

$$\rho(\omega, T) = \frac{\hbar \omega}{\pi^2 c^3} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\hbar \omega / kT} - 1} \right] \quad (AIII.11)$$

Isto desde que a constante de integração seja escolhida de tal forma que no limite de altas temperaturas $\hbar \omega_0 \ll kT$ se obedeça a lei de Rayleigh-Jeans.

A expressão (AIII.11) para a densidade espectral já contém o termo de ponto zero, e foi obtida sem nenhum postulado de quantização da energia ou radiação.

Nessa dedução, consideramos apenas osciladores presos às paredes do recipiente interagindo com a radiação térmica e de ponto zero. No modelo de Einstein estudado e adaptado por nós, porém, os osciladores são considerados partículas livres que atingem o equilíbrio através da interação com a radiação.

A existência dessas partículas não modifica o padrão da radiação térmica, pois como já vimos no *Capítulo I*, a fórmula de Planck é obtida através do próprio modelo de Einstein.

REFERÊNCIAS

- [1] M.M.S.Bergia et al; *Ann.Fond.L. de Broglie* 5, 39 (1980)
- [2] L. de La Peña;
Stochastic Electrodynamics. Its Development, current situation and perspectives, 1982
Stochastic Processes Applied to Physics and other related fields
p.428, World Scientific, Singapore, 1982
- [3] T.A.Welton; *Phys.Rev.* 74, 1157 (1948)
- [4] P.Braffort and C.Tzara; *C.R.Acad.Sci.* 239, 1779 (1954)
- [5] T.W.Marshall; *Proc.R.Soc.London* 276, 475 (1963)
- [6] T.W.Marshall; *Proc.Cambridge Philos.Soc.* 61, 537 (1965)
- [7] T.H.Boyer; *Phys.Rev. D*11, 790 e 809 (1975)
- [8] P.T.Landsberg;
Thermodynamics, p.293 vol.2
Interscience Publishers 1961
- [9] T.H.Boyer; *Phys.Rev.* 186, 1304 (1969)
- [10] H.M.França e G.C.Santos; *Nuov.Cim.* 86B, 51 (1985)
- [11] P.W.Milonni; *Phys.Rep.* 25, 1 (1976)
- [12] J.D.Jackson;
Eletrodinâmica Clássica
Guanabara Dois 1983
- [13] H.M.França et al; *Nuov.Cim.* 48A, 65 (1978)
- [14] E.Santos; *Nuov.Cim.* 19B, 57 (1974)

- [15] H.M.França and M.T.Thomaz; *Phys.Rev.* D31, 1337 (1985)
- [16] T.H.Boyer; *Phys.Rev.* 182, 1374 (1969)
- [17] T.H.Boyer; *Phys.Rev.* D27, 2906 (1983)
- [18] T.W.Marshall; *Nuov.Cim.* 38, 206 (1965)
- [19] M.Surdin; *Ann.Int.Henri Poincaré* 15, 203 (1972)
- [20] L. de La Peña and A.M.Cetto; *J.Math.Phys.* 18, 1612 (1977)
- [21] A.Einstein; *Ann.Phy.* 17, 132 (1905)
- [22] A.Einstein; *Phys.Z.* 18, 121 (1917)

Obs.: Os dois últimos artigos foram traduzidos para o inglês e se encontram em D.Ter Haar, "The Old Quantum Theory", Pergamon Press, 1967,p. 91 e 167.

- [23] H.R.Lewis; *Am.J.Phys* 41, 38 (1973)
- [24] A.Einstein and P.Ehrenfest; *Z.Physik* 19, 301 (1923)
- [25] Uri Ben Yaacov; *Phys.Rev.* D23, 1441 (1981)
- C.H.Braden et al; *Phys.Rev.* D23, 1455 (1981)
- Asher Peres; *Phys.Rev.* D23, 1458 (1981)
- [26] A.Rueda; *Phys.Rev.A* 23, 2020 (1981)
- [27] A.Einstein and L.Hopf; *Ann.Phy.* 35, 1105 (1910)
- [28] J.L.Jimenez et al; *Am.J.Phys.* 48, 840 (1980)
- [29] P.W.Milonni; *Am.J.Phys.* 52, 340 (1984)
- [30] R.H.Stuewer;

The Compton Effect

Science History Publications 1975

- [31] A.H.Compton; *Phys.Rev.* 21, 483 (1923)
- [32] O.Klein and Y.Nishina; *Z.Phys.* 52, 853 (1929)

- [33] Ref.[30] p.(7)
- [34] Ibid p.(32)
- [35] Ibid p.(96)
- [36] Ibid p.(205)
- [37] P.Debye; *Phys.Z.* **24**, 161 (1923)
- [38] Ref.30 p.(236)
- [39] Y.H.Woo; *Phys.Rev.* **25**, 444 (1925)
- [40] G.Breit; *Phys.Rev.* **27**, 362 (1926)
- [41] N.Bohr, Kramers and Slater; *Phil.Mag.* **47**, 785 (1924)
- [42] Ref.30 p.(299)
- [43] E.Schroedinger;
 Collected Papers on Wave Mechanics
 New York - Chelsea 1978
- [44] J.Strnad; *Eur.J.Phys.* **7**, 217 (1986)
- [45] L.Landau-E.Lifshitz;
 Teoria do Campo, p.154
 Editora Mir 1980
- [46] Ibid p.161
- [47] Ibid p.235
- [48] K.Hagenbush; *Am.J.Phys.* **45**, 693 (1977)
- [49] Ref.[45] p.273-4
- [50] Ibid p.290-1
- [51] Ibid p.154
- [52] R.Kidd et al; *Am.J.Phys.* **53**, 641 (1985)
- [53] Ref.[45] p.219

[54] Ibid p.74

[55] Ref.[12] seção 14.3

[56] A.H.Compton and J.C.Hubbard; *Phys.Rev.* **23**, 439 (1924)

[57] *The concept of the photon*

M.O.Scully and M.Sargent III; *Physics Today* , p.38 (march 1972)