UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

18/12/96

Estudo sobre o Limite Não Relativístico em Teorias de Campos em $2 + 1$ Dimensões

Jorge Mário Carvalho Malbouisson

Tese de Doutorado
submetida ao Instituto de Física da
Universidade de São Paulo

Marcelo Otávio Caminha Gomes
ORIENTADOR: Prof. Dr. Marcelo Otávio Caminha Gomes

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Abraham H. Zimmerman (IFT - UNESP)
Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar (IFT - UNESP)
Prof. Dr. Fernando Tadeu Caldeira Brandt (IFUSP)
Prof. Dr. Marcelo Otávio Caminha Gomes (IFUSP)
Prof. Dr. Nami Fux Svaiter (CBPF)

SÃO PAULO
1996

Iberê Luiz Caldas
Prof. Iberê Luiz Caldas
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

SBI-IFUSP

305M610T2531

530.143

M 244

D

ex. 1

FICHA CATALOGRÁFICA

**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Malbouisson, Jorge Mário Carvalho

**Estudo sobre o Limite não Relativístico em Teorias
de Campos em $2 + 1$ Dimensões.**

**Tese (Doutorado) Universidade de São Paulo.
Instituto de Física - Departamento de Física Matemática**

**Área de Concentração: Física das Partículas Elementares
Orientador: Prof. Dr. Marcelo Otávio Caminha Gomes**

**Unitermos: 1. Teoria Quântica de Campos; 2. Limite
não Relativístico; 3. Teoria de Chern-Simons.**

USP/IF/SBI - 72/96

para Cecília e Iara

Agradecimentos

a Marcelo Gomes, pela acolhida no Departamento de Física Matemática do IFUSP e pela orientação ao longo do trabalho,

a Adilson J. da Silva, pelas discussões,

a Adolfo Malbouisson, pelo incentivo,

aos (às) colegas do IFUFBA, pelo apoio, em especial a Ademir Santana, Arthur Matos Neto, Aurino Ribeiro Filho, Delmiro Baqueiro, Hebe Plácido, Manoel Blanco e Raimundo Teixeira Filho,

aos (às) colegas e amigos (as) da pós-graduação do IFUSP, e fora dela, que de diversas formas contribuíram para que este trabalho fosse realizado a contento,

ao CNPq, pelo apoio financeiro

e, sobretudo,

a Maria Cecília Velasco e Cruz, pelo companheirismo em todo o processo.

Resumo

Nesta tese, o limite não relativístico em teorias quânticas de campos em $2+1$ dimensões é discutido, perturbativamente, através da introdução de um corte intermediário que permite o cálculo da expansão $|p|/m$ das amplitudes quânticas, especificando a origem, no espaço dos estados intermediários, de cada uma das contribuições. Este procedimento é aplicado à teoria $\lambda\phi^4$ e um esquema de redução a nível das amplitudes, que identifica a contribuição do setor de baixas energias com o resultado da teoria não relativística, é proposto. Quando aplicado à teoria de Chern-Simons escalar, este procedimento sugere correções relativísticas para o espalhamento Aharonov-Bohm.

Abstract

In this thesis, the nonrelativistic limit of quantum field theories in $2 + 1$ dimensions is discussed, perturbatively, through the introduction of an intermediate cutoff which generates the $|p|/m$ expansion of the quantum amplitudes and specifies the origin of each contribution in the space of the intermediary states. This scheme is applied to the theory $\lambda\phi^4$ and a reduction procedure for the amplitudes that identify the low energy sector contribution with the results of the nonrelativistic theory is proposed. When applied to the scalar Chern-Simons theory, this procedure gives relativistic corrections to the Aharonov-Bohm scattering.

Índice

Introdução	2
1 Limite não relativístico em teorias quânticas de campos	5
1.1 - Redução não relativística	6
1.2 - Expansão $ p /m$ das amplitudes quânticas	12
2 O caso mais simples: a teoria $\lambda\phi^4$	16
2.1 - A teoria $\lambda\phi^4$ em $2 + 1$ dimensões	17
2.2 - Espalhamento partícula-partícula	19
2.3 - Auto-energia em dois loops	25
2.4 - Redução não relativística e Lagrangiana efetiva	30
3 Limite não relativístico da teoria de Chern-Simons escalar e o espalhamento Aharonov-Bohm	38
3.1 - A teoria de Chern-Simons escalar	39
3.2 - Espalhamento de duas partículas	47
3.3 - O modelo não relativístico e o efeito Aharonov-Bohm	54
3.4 - Correção relativística para o espalhamento Aharonov-Bohm	57
4 Conclusões	60
5 Apêndices	62
5.1 - Espalhamento partícula-partícula (teoria ϕ^4) em um referencial arbitrário	62
5.2 - $\hat{\Sigma}_{(2)}^{(dim)}$ na teoria $\lambda\phi^4$	63
5.3 - Espalhamento de Chern-Simons	65
Referências	70

Introdução

Dois pilares fundamentais da física moderna são a teoria da relatividade e a mecânica quântica e pode-se dizer que a Natureza é quanto-relativística. O sucesso da eletrodinâmica quântica é um dos muitos exemplos que alicerçam esta crença. Ao mesmo tempo, a física clássica não relativística produz muito boas descrições de fenômenos macroscópicos envolvendo baixas velocidades, enquanto que a mecânica quântica não relativística é responsável pela quase totalidade do atual "conforto" eletrônico da Humanidade. Além do fascínio fenomenológico que as descrições não relativísticas (clássicas ou quânticas) apresentam, estas teorias, estruturadas em um espaço-tempo galileano, são dotadas de invejáveis elegância e consistência teóricas, a exemplo da queda do monopólio do spin exercido pela invariância de Lorentz [1]. Naturalmente, espera-se que as descrições não relativísticas possam ser obtidas de teorias relativísticas (clássicas ou quânticas) através de um algum procedimento de limite. Esta redução, contudo, não é um problema trivial.

Este trabalho é voltado para a discussão do limite não relativístico em teorias quânticas de campos em $2+1$ dimensões. Há, pelo menos, dois motivos para a escolha do espaço tempo tridimensional. O primeiro deles está ligado às peculiaridades intrínsecas da topologia do espaço de configurações [2] que leva à existência de estatística fracionária [3-6], aos "anyons", com fecundas relações com os fenômenos inimitáveis da física planar, como o efeito Hall quântico fracionário e a supercondutividade a altas temperaturas. Estes efeitos, que tem sido discutidos no âmbito da mecânica quântica (não relativística), são revistos em [7] e [8], respectivamente. A interação estatística

entre os anyons, que se dá através do mecanismo de Aharonov-Bohm [9], pode ser descrita pela intermediação de um campo de calibre cuja cinética é dada por uma ação de Chern-Simons [10].

Em teoria de campos, o termo de Chern-Simons (que pode ser considerado em espaço-tempos de dimensão ímpar), quando adicionado à lagrangiana de Maxwell em $2 + 1$ dimensões, conduz a existência de um campo de calibre massivo [11, 12]. Em teorias envolvendo um campo de Dirac de duas componentes, o termo de Chern-Simons é gerado dinamicamente e desempenha um papel estabilizador, melhorando o comportamento infra-vermelho da teoria, como é o caso com o modelo de Thirring [13]. Este aspecto estabilizador tem motivado o estudo do potencial efetivo de interação entre férmions em $2 + 1$ dimensões [14].

No contexto não relativístico, a teoria de um campo de Chern-Simons acoplado a um campo de matéria é um exemplo de teoria de calibre invariante por transformações de Galileu [15] e suas estruturas clássica e quântica são extensivamente discutidas na ref. [16]. Além disso, este modelo corresponde à formulação de teoria de campos para o efeito Aharonov-Bohm [17, 18]. Neste ponto de vista de campos, os aspectos perturbativos (nada triviais) do efeito Aharonov-Bohm ficam evidentes. A necessidade da interação de contato, para regularizar (e renormalizar) a amplitude de espalhamento, também pode ser discutida do ponto de vista da mecânica quântica [19], para entender a natureza singular da expansão perturbativa deste efeito.

O segundo motivo para considerar um espaço tempo tridimensional diz respeito ao fato de que a natureza do comportamento ultravioleta da teoria muda de modo "crítico" quando se passa da teoria relativística para a correspondente não relativística, mesmo no caso mais simples de $\lambda\phi^4$. A amplitude de espalhamento partícula-partícula que é finita (em um loop) no modelo $\lambda\phi^4$ relativístico, por exemplo, é logaritmicamente divergente no caso não relativístico [20]. Enquanto isto, o espalhamento é finito em $1 + 1$ dimensões e divergente para $D > 3$, em ambos os casos.

Esta tese discute o limite não relativístico de duas teorias de campos em $2 + 1$ dimensões, $\lambda\phi^4$ e Chern-Simons escalar (i.e. campo de matéria escalar, com auto-interação quártica, acoplado minimamente a um campo de Chern-Simons), tratadas perturbativamente e está estruturada da seguinte forma. No primeiro capítulo, após uma breve discussão sobre os procedimentos de redução não relativística usuais, um procedimento para o cálculo da expansão $|p|/m$ das amplitudes de espalhamento, que será usado ao longo do trabalho,

é apresentado. Este procedimento faz uso de um corte auxiliar, introduzido nas integrações de loop, que separa as contribuições que vêm de estados intermediários de baixas e altas energias.

Em seguida, no segundo capítulo, o limite não relativístico da teoria $\lambda\phi^4$. Aí, a amplitude de espalhamento partícula-partícula, até ordem de um loop, e a auto-energia em dois loops são calculados usando o procedimento do corte intermediário e comparados com o resultado exato. Um procedimento de redução que leva a uma clara compreensão da origem dos comportamentos ultravioletas distintos das teorias relativística e não relativística é, então, apresentado e uma lagrangiana efetiva, que leva em conta efeitos dos termos subdominantes em $|p|/m$, é sugerida.

No capítulo terceiro, a mesma abordagem é empregada na análise do limite não relativístico da teoria de Chern-Simons escalar, que é mais envolvente do ponto de vista físico. Após a discussão da renormalização do modelo relativístico, o espalhamento a duas partículas é calculado até ordem de um loop e até ordem p^2/m^2 . Mostra-se que, do mesmo modo que no modelo não relativístico, o termo dominante em $|p|/m$ reproduz o espalhamento Aharonov-Bohm para um certo valor crítico do parâmetro de auto-interação onde a contribuição de um loop se anula. Os termos subdominantes, contudo, não se anulam para este valor crítico e representam correções relativísticas para o espalhamento Aharonov-Bohm. As partes não triviais destas correções podem ser consideradas em um contexto não relativístico via a inclusão de interações não renormalizáveis na lagrangiana.

1

Limite não relativístico em teorias quânticas de campos

Teorias quânticas não relativísticas proporcionam boas descrições de diversos fenômenos físicos e, certamente, espera-se que tais teorias possam ser obtidas de teorias relativísticas como limites apropriados para baixos momentos.

A questão de como é feita a passagem de uma teoria relativística para o modelo correspondente não relativístico contém muitas sutilezas e os procedimentos de redução existentes, usualmente, tomam por base algum tipo de reinterpretação ou redefinição. Alguns destes esquemas são comentados sucintamente na seção 1.1 enquanto que a seção 1.2 apresenta o procedimento de corte intermediário para o cálculo das amplitudes quânticas que será utilizado nos capítulos posteriores.

1.1 Redução não relativística

Uma das primeiras observações que é feita quando se estuda a teoria da relatividade diz respeito ao fato de que a física newtoniana é o limite da física relativística quando $c \rightarrow \infty$. No estágio mais elementar, nota-se que um "boost" de Lorentz na direção x^1

$$\begin{aligned}x'^0 &= (x^0 + \beta x^1)(1 - \beta^2)^{-1/2} \\x'^1 &= (\beta x^0 + x^1)(1 - \beta^2)^{-1/2},\end{aligned}\tag{1.1}$$

onde $x_0 = ct$ e $\beta = v/c$, reduz-se a um "boost" de Galileu,

$$t' = t \quad \text{e} \quad x'^1 = vt + x^1,\tag{1.2}$$

no limite em que $c \rightarrow \infty$ ($\beta \rightarrow 0$) mas com $\beta x_0 = vt$ mantido finito. Uma questão simples que surge é sobre a situação em que c é muito grande (i.e. todas as velocidades $\ll c$) mas não infinita. Uma idéia natural é usar a expansão $(1 - \beta^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \dots$, o primeiro termo correspondendo ao limite $c \rightarrow \infty$ e os outros às correções expressas como potências de v/c . A nível das transformações, pode-se definir, truncando a expansão em $\mathcal{O}(\beta^2)$ por exemplo, a transformação

$$M_\beta : \begin{cases} x'^0 = x^0(1 + \frac{1}{2}\beta^2) + \beta x^1 \\ x'^1 = \beta x^0 + x^1(1 + \frac{1}{2}\beta^2) \end{cases}.\tag{1.3}$$

Percebe-se imediatamente, contudo, que o conjunto destas transformações não constitui um grupo, nem mesmo é fechado com respeito à composição. Esta observação simples indica o fato de que não há teoria intermediária, falta o grupo subjacente, entre as cinéticas de Lorentz e de Galileu. O espírito que usualmente prevalece é aquele de acrescer à teoria não relativística correções relativísticas neste sentido de uma expansão em β . O presente trabalho mantém-se neste veio geral.

A primeira tentativa de construir um procedimento rigoroso para redução não relativística, no âmbito da mecânica quântica relativística, utiliza transformações unitárias sobre as equações de movimento do tipo introduzido por

Foldy e Wouthuysen [21] para partículas de Dirac e adaptado por Case [22] para o caso de partículas de spin inteiro. Uma clara descrição deste esquema de redução, para ambas as equações de Dirac e de Klein-Gordon, é encontrada no livro de Bjorken e Drell [23]. Este procedimento é usualmente aplicado no caso de partículas em campos externos e apresenta aspectos interpretativos sutis no caso de campos dependentes do tempo [24-27]. A transposição de um tal procedimento para o caso de uma teoria de campos com interação não é algo simples, quando possível.

Considere, como exemplo, a teoria $\lambda\phi^4$ cuja equação de campo (com $\hbar = c = 1$) pode ser escrita como

$$\partial_t \dot{\phi} - (\nabla^2 - m^2)\phi = -\frac{\lambda}{6}\phi^3, \quad (1.4)$$

onde $\dot{\phi} = \partial_t \phi$. Esta é uma equação de Klein-Gordon com uma fonte, não linear no próprio campo, advinda da auto-interação. Como na ref. [23], introduzindo a decomposição em partes de energia positiva e negativa (componente grande e pequena) do campo,

$$\begin{cases} \phi = \varphi + \chi \\ \dot{\phi} = -im(\varphi - \chi) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \varphi = \frac{1}{2}(\phi + \frac{i}{m}\dot{\phi}) \\ \chi = \frac{1}{2}(\phi - \frac{i}{m}\dot{\phi}) \end{cases}, \quad (1.5)$$

pode-se escrever

$$i\partial_t \varphi + \frac{\nabla^2}{2m}(\varphi + \chi) - m\varphi = \frac{\lambda}{6m} [\varphi^3 + 3\chi^2\varphi], \quad (1.6)$$

$$i\partial_t \chi - \frac{\nabla^2}{2m}(\chi + \varphi) + m\chi = -\frac{\lambda}{6m} [\chi^3 + 3\varphi^2\chi]. \quad (1.7)$$

Note que (1.6) e (1.7), através de (1.5), levam necessariamente à (1.4) mas, no sentido reverso há uma natural (por ser a forma mais simétrica), porém arbitrária, separação da equação de movimento para produzir o conjunto de equações acopladas de primeira ordem na derivada temporal dadas acima. Definindo um ente a duas componentes (φ e χ), as equações (1.6) e (1.7) podem ser escritas na forma de uma equação de Schrödinger

$$i\partial_t \Phi = H \Phi = (H_0 + H_{int}) \Phi, \quad (1.8)$$

com

$$H_0 = \left(m - \frac{\nabla^2}{2m}\right) \eta - \frac{\nabla^2}{2m} \rho, \quad (1.9)$$

$$H_{int} = \frac{\lambda}{6m} \varphi^2 \eta_+ + \frac{\lambda}{6m} \chi^2 \eta_- + \frac{\lambda}{2m} \varphi \chi \rho, \quad (1.10)$$

onde $\eta = \eta_+ + \eta_-$,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \eta_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } \rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Claramente as matrizes η , η_+ e η_- são pares, ou seja não misturam as componentes φ e χ , enquanto que ρ é ímpar.

O "hamiltoniano" total pode ser escrito, distinguindo a energia de repouso, na forma

$$H = m \eta + \mathcal{E} + \mathcal{O}, \quad (1.12)$$

onde

$$\mathcal{E} = \left(-\frac{\nabla^2}{2m} + \frac{\lambda}{6m} \varphi^2\right) \eta_+ + \left(-\frac{\nabla^2}{2m} + \frac{\lambda}{6m} \chi^2\right) \eta_- \quad (1.13)$$

e

$$\mathcal{O} = \left(-\frac{\nabla^2}{2m} + \frac{\lambda}{2m} \varphi \chi\right) \rho \quad (1.14)$$

são as partes par e ímpar, respectivamente. O procedimento de Foldy-Wouthuysen consiste em realizar transformações unitárias $\Phi' = \exp(iS) \Phi$, onde $S = -\frac{i}{2m} \eta \mathcal{O}$, e gerar outras representações com $i\partial_t \Phi' = H' \Phi'$ onde

$$\begin{aligned} H' &= e^{iS} (H - i\partial_t) e^{-iS} \\ &= H + i[S, H] - \frac{1}{2}[S, [S, H]] - \dots - \partial_t S - \frac{i}{2}[S, \partial_t S] + \dots, \end{aligned} \quad (1.15)$$

de modo a obter-se, sucessivamente, "Hamiltonianas" efetivos H' cada vez mais pares, a parte ímpar ocorrendo a potências mais altas de $1/m$. Com isto poder-se-ia identificar a componente grande, φ , como o campo não relativístico das partículas. Usando as relações $[\eta, \rho] = 2\eta\rho$, $[\eta, \eta_{\pm}] = 0$ e $\eta^2 = -\rho^2 = 1$, tem-se, até ordem m^{-4} ,

$$H_{ef} = m\eta + \mathcal{E} + \frac{1}{2m}\mathcal{O}^2\eta - \frac{1}{8m^2}[\mathcal{O}, [\mathcal{O}, \mathcal{E}]] - \frac{i}{8m^2}[\mathcal{O}, \partial_t\mathcal{O}] . \quad (1.16)$$

Com $\mathcal{E}$ e $\mathcal{O}$ dados por (1.13) e (1.14), obtém-se, indo apenas até ordem m^{-2} e subtraindo a energia de repouso $m\eta$,

$$\begin{aligned} H_{ef} = & \left(-\frac{\nabla^2}{2m} + \frac{\lambda}{6m}\varphi^2 \right) \eta_+ + \left(-\frac{\nabla^2}{2m} + \frac{\lambda}{6m}\chi^2 \right) \eta_- \\ & + \frac{\lambda}{8m} \left[\chi \frac{\nabla^2}{m^2} \varphi + 2 \frac{\nabla\varphi}{m} \cdot \frac{\nabla\chi}{m} + \varphi \frac{\nabla^2}{m^2} \chi + \varphi \chi \frac{\nabla^2}{m^2} \right] (\eta_+ + \eta_-) . \end{aligned} \quad (1.17)$$

Vê-se, claramente, que o último termo do hamiltoniano acima (que vem da auto-interação ϕ^4), embora seja diagonal (2×2), mistura as componentes φ e χ de modo tal que a redução fica complicada. A auto-interação leva a uma equação de movimento não linear no campo (i.e. a lagrangiana contém termo não bilinear no campo) que não permite uma separação simples como no caso da mecânica quântica relativística de uma partícula em um campo externo estático. Nota-se contudo que, em ordem dominante em $1/m$, as duas componentes se desacoplam e pode-se escrever

$$\left(i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m} \right) \varphi = \frac{\lambda}{6m} \varphi^3 \quad (1.18)$$

(e, similarmente, para χ), o que parece vir de uma teoria φ^4 não relativística.

Há uma outra maneira de fazer uma redução não relativística a nível das equações de movimento e da lagrangiana, que consiste em redefinir previamente o campo como (agora com apenas $\hbar = 1$)

$$\phi = \exp(-imc^2t) \phi' , \quad (1.19)$$

extraíndo a fase associada à energia de repouso da partícula, e expandir em potências de $1/c$ (ou $1/m$) [28]. Como observado na ref. [29], a equação (1.19) não é covariante (por Lorentz) e não tem uma origem clara do ponto de vista da teoria de grupos. Este procedimento tem sido aplicado a lagrangianas de campos em interação como, por exemplo, $\lambda\phi^4$ em 3+1 dimensões [30] e

campo de Chern-Simons acoplado a campo de matéria [16], para produzir as lagrangianas não relativísticas correspondentes. Considere, novamente, o caso da teoria $\lambda\phi^4$, cuja lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{c^2} (\partial_t \phi)^2 - (\nabla \phi)^2 \right] - \frac{1}{2} m^2 c^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4, \quad (1.20)$$

que é discutido na ref.[20] em 2 + 1 dimensões. Definindo o “campo não relativístico” ψ através da relação

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2m}} \left(e^{-imc^2 t} \psi + e^{+imc^2 t} \psi^* \right), \quad (1.21)$$

a lagrangiana fica reescrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{i}{2} \psi^* \partial_t \psi - \frac{i}{2} \psi \partial_t \psi^* + \frac{1}{2mc^2} (\partial_t \psi^*) (\partial_t \psi) \\ & - \frac{1}{2m} \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi - \frac{\lambda}{16m^2} (\psi^* \psi)^2 + \mathcal{L}_{osc}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

onde $\mathcal{L}_{osc}$ contém somente termos proporcionais a $e^{\pm 2imc^2 t}$ ou a $e^{\pm 4imc^2 t}$. Desprezando derivadas totais e também os termos que oscilam com frequência $\propto mc^2$ (que não contribuem no limite $c \rightarrow \infty$), definindo $v = \lambda/4m^2$ e mantendo apenas os termos dominantes em $1/c$ (ou $1/mc^2$), chega-se à lagrangiana não relativística

$$\mathcal{L}_{NR} = \psi^* \left(i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m} \right) \psi - \frac{v}{4} (\psi^* \psi)^2. \quad (1.23)$$

Estes procedimentos, sucintamente comentados acima, são de fato procedimentos heurísticos que inspiram o uso de certas das lagrangianas não relativísticas, as quais devem ser invariantes por transformações de Galileu. Eles apresentam uma maneira de passar da cinética de Klein-Gordon para a de Schrödinger, i.e. permitem de algum modo suprimir cinematicamente processos de criação e aniquilação, e assim fazer a redução não relativística em ordem dominante. Em teoria quântica os campos são distribuições, não possuem produto em um mesmo ponto bem definido e o tratamento de interações é delicado.

O procedimento de Foldy-Wouthuysen, em algumas situações, indica interações efetivas que devem ser incluídas na lagrangiana não relativística

para levar em conta correções relativísticas. Isto tem sido usado na construção de teorias efetivas para fenômenos de baixas e médias energias em física de partículas e em física nuclear e, também, em refinamentos na física da matéria condensada. Com inspiração no enfoque de Wilson para o grupo de renormalização [31, 32], todos os efeitos dos estados de energias muito altas do espaço de Hilbert sobre o setor de baixa energia da teoria são simulados através da introdução de outras interações (provavelmente não renormalizáveis) e a nova teoria é tratada como uma teoria efetiva que vale até certa escala de energia. Processos a baixas energias que sejam possíveis de determinar na teoria "completa" são usados para ajustar os parâmetros de acoplamento da teoria efetiva enquanto que a cinética, no caso de energias muito baixas, é usualmente reduzida, com o apelo a transformações de Foldy-Wouthuysen, à cinética de Schrödinger. O interesse recente e o emprego de teorias efetivas em várias áreas da física são revistos nas ref. [33-36]. O procedimento de introdução de corte intermediário para o cálculo das amplitudes quânticas usado nesta tese, e que será apresentado na seção seguinte, incorpora muito deste espírito de separar o espaço dos estados em setores nas várias faixas de energia relevantes.

Por fim, uma palavra acerca da busca de resultados exatos, rigorosos. A relação entre os hamiltonianos de Dirac e de Schrödinger-Pauli para uma partícula em um campo externo [37] e a convergência das soluções das equações de Dirac e Klein-Gordon para as soluções das equações de Pauli e Schrödinger no limite não relativístico ($c \rightarrow \infty$) [38] são, ambas, discutidas em um contexto de primeira quantização. Em teoria de campos, há a prova de que a teoria ϕ^4 em $1 + 1$ dimensões, no setor de duas partículas, converge para a mecânica quântica não relativística com potencial delta [39], que corresponde à teoria ϕ^4 não relativística. Em $2 + 1$ dimensões, por outro lado, o espalhamento partícula-partícula na teoria $\lambda\phi^4$ relativística é finito em um loop enquanto que, na teoria não relativística, é logaritmicamente divergente no ultravioleta, diferentemente do caso bi-dimensional em que em ambas as situações os espalhamentos são finitos. Isto leva a delicadezas no processo de redução não relativística da teoria $\lambda\phi^4$ em $2 + 1$ dimensões, como será visto no Cap. 2.

1.2 Expansão $|p|/m$ das amplitudes quânticas

Neste trabalho, o limite não relativístico de teorias quânticas de campos em $2+1$ dimensões será investigado dentro da teoria de perturbação para a matriz S . A matriz S , o operador unitário que conecta estados e campos iniciais e finais assintóticos, é da forma $S = I + iT$, onde a matriz de transição T representa o espalhamento não trivial e carrega informação sobre as interações. Os elementos de matriz de S devem refletir a conservação do momento de modo que se pode escrever

$$\langle P_f | T | P_i \rangle = (2\pi)^d \delta^{(d)}(P_i - P_f) \mathcal{M}_{fi}, \quad (1.24)$$

onde $\mathcal{M}_{fi} = \langle P_f | M | P_i \rangle$ é a amplitude de transição entre os estados $|P_i\rangle$ e $|P_f\rangle$. O formalismo de Lehman, Symanzik e Zimmermann [40] permite expressar os elementos da matriz S em termos das funções de Green da teoria com interação. Com isto, a amplitude de transição para um certo processo pode ser calculada perturbativamente e, em cada ordem, ser representada pelos gráficos de Feynman 1PI (irredutíveis) para as funções de Green amputadas relativas ao processo específico. Estes aspectos são discutidos extensamente nos textos sobre teoria quântica de campos, [32], [41] e [42] por exemplo.

A expressão analítica associada a um gráfico próprio, que representa uma contribuição para uma função 1PI genérica, em uma teoria envolvendo um campo escalar massivo com auto-interação (e, eventualmente, interagindo com outro campo) tem a da forma

$$\sim \int d^d k_1 \dots d^d k_L \prod_a \mathcal{P}_a(k, p) \prod_{a,b,\sigma} \Delta_F(l_{a,b,\sigma}) D(q_{a,b,\sigma}), \quad (1.25)$$

onde $\mathcal{P}_a(k, p)$ é uma soma de monômios de grau D_a ($= \#$ de derivadas no termo de interação associado ao vértice a) nos momentos das linhas que se juntam no vértice a , $\Delta_F(l_{a,b,\sigma}) = i [l_{a,b,\sigma}^2 - m^2 + i\epsilon]^{-1}$ é um propagador do campo escalar ligando os vértices a e b (rotulado por σ) e $D(q_{a,b,\sigma})$ representa, simbolicamente, o propagador de outro campo. No caso da teoria $\lambda\phi^4$, $\mathcal{P}_a = 1$ e $D(q)$ não existe, enquanto que na teoria de Chern-Simons escalar há dois outros vértices, um derivativo vetorial e outro tensorial, acoplando o campo escalar ao campo de Chern-Simons e o propagador $D(q)$ carrega dois índices de Minkowski. Evidentemente, o cálculo de uma tal contribuição para

amplitude é extremamente complicado e só dá para ser feito analiticamente em ordens baixas, e em alguns casos.

Um dos objetivos principais deste trabalho é obter a expansão $|p|/m$ da amplitude quântica associada ao espalhamento partícula-partícula para baixos momentos na teoria de Chern-Simons escalar, o que será feito até ordem de um loop na Sec. 3.2. Obviamente, se todas as contribuições para uma dada amplitude, em certa ordem, pudessem ser calculadas exatamente, sua expansão $|p|/m$ seria simplesmente a expansão do resultado para $|p|$ pequeno, i.e. a série de Taylor em torno de $|p| = 0$ para a parte analítica. Contudo, no exemplo citado e, certamente para muitas outras teorias, este não é o caso. Um esquema que permite determinar a expansão $|p|/m$ de amplitudes quânticas sem que seja preciso calculá-las exatamente é introduzido a seguir.

O procedimento para calcular a expansão $|p|/m$ das amplitudes, que é usado nesta tese, consiste dos seguintes passos [43-45]. Inicialmente, considere um gráfico qualquer na ordem de um loop com o momento de integração designado por k . Em primeiro lugar, a integração sobre k^0 é feita completamente, sem qualquer restrição, a fim de garantir localidade no tempo. Isto é usualmente possível embora cuidados precisam ser tomados no caso de teorias com acoplamento derivativo, uma vez que potências de k^0 podem aparecer no numerador do integrando da amplitude. Esta situação acontece, por exemplo, na teoria de Chern-Simons escalar.

A integração restante sobre o plano euclidiano k é então separada em duas parcelas através da introdução de um corte intermediário, Λ , na integração sobre $|k|$. Este corte auxiliar é escolhido de modo tal a satisfazer as condições

$$(i) : |p| \ll \Lambda \ll m \quad (1.26)$$

$$(ii) : \left(\frac{|p|}{\Lambda} \right)^2 \approx \left(\frac{\Lambda}{m} \right)^2 \approx \frac{|p|}{m}, \quad (1.27)$$

onde $|p|$ representa (genericamente) os momentos não relativísticos externos e m é a massa física da partícula. A condição (i) pressupõe que os momentos espaciais não relativísticos são, de fato, muito menores que a massa da partícula, ao tempo em que a condição (ii) estabelece $\eta \approx |p|/m$ como um parâmetro de expansão pequeno. Estas condições são facilmente satisfeitas por muitos sistemas não relativísticos da física da matéria condensada [46].

O procedimento aproximativo apresentado abaixo embaza-se fortemente na natureza intrínseca de cada destes setores. No setor L, onde todos os momentos espaciais envolvidos são pequenos ($|\mathbf{p}|/m, |\mathbf{k}|/m \ll 1$), efetua-se uma expansão $1/m$ do integrando da amplitude. Isto significa, por exemplo, que se pode usar uma expansão do tipo

para aproximar a relação de dispersão de partícula livre no setor de baixas energias. O integrando expandido é, então, integrado termo a termo na região $0 < |\mathbf{k}| < \Lambda$ e, naturalmente, um resultado dependente de Λ é obtido. Uma expansão adicional em Λ/m pode ser necessária para gerar a expansão η da contribuição do setor L para a amplitude na ordem desejada.

14

emerge é também dependente de Λ e deve-se expandir em Λ/m para obter a expansão η da contribuição do setor H.

Naturalmente, a parcela da amplitude correspondente a cada gráfico é a soma das contribuições dos setores L e H e deve-se esperar, por requerimento de consistência, que os termos dependentes de Λ cancelem-se identicamente, resultando na expansão $|p|/m$ correta do gráfico, até a ordem trabalhada. Aparentemente os dois setores L e H são tratados diferentemente mas, de fato, a mesma expansão $1/m$ é feita em ambas as regiões e o cancelamento exato dos termos dependentes de Λ reflete, simplesmente, a aditividade da integração. Este cancelamento será explicitamente verificado nos exemplos discutidos nos capítulos subsequentes.

Quando se considera gráficos com mais de um loop, usualmente os momentos de integração aparecem de tal modo misturados que o primeiro passo do procedimento, as integrações sobre os k_i^0 , fica bastante difícil. Neste caso, o uso da parametrização de Feynman e de substituições convenientes permite desembaralhar as variáveis de integração, de modo que as partes temporais dos momentos de loop apareçam no denominador na forma $\sum (k_i^0)^2$, o que simplifica o cálculo das integrações sobre os k_i^0 . Pode-se, então, introduzir cortes intermediários nas integrações sobre os $|k_i|$ e proceder, analogamente, separando os setores L e H para cada integração. Um exemplo desta situação será apresentado na Sec. 2.3.

Deve-se notar que a escolha de uma rota distinta para passagem dos momentos externos através do diagrama leva, obviamente, ao mesmo resultado para a amplitude, mas as partes L e H ficam diferentes. As mudanças, porém, ocorrem somente nos coeficientes dos termos $(|p|/\Lambda)^n$ que não são relevantes para o processo de redução que será discutido no próximo capítulo. O procedimento descrito nesta seção, por ser uma expansão em $|p|/m$, fica restrito à redução não relativística em situações para as quais os campos físicos externos são massivos. Os casos em que campos de calibre com identidade própria possuindo massa nula (ex: eletrodinâmica quântica em $3 + 1$ dimensões) são envolvidos, devem ser tratados de modo diferenciado para levar em conta a especificidade dos fótons.

2

O caso mais simples: a teoria $\lambda\phi^4$

O procedimento discutido genericamente na Sec. 1.2 vai ser agora aplicado à teoria de campos com interação mais simples, embora não trivial, a teoria de um campo escalar neutro com auto-interação quártica [43]. Neste caso, o espalhamento partícula-partícula na ordem de um loop pode ser calculado exatamente de modo que o esquema apresentado pode ser verificado explicitamente. Isto dá confiança para aplicá-lo em situações em que cálculos exatos (seguidos de uma expansão para $|p|/m$ pequeno) não sejam possíveis ou sejam muito complicados. Com a determinação da auto-energia em ordem λ^2 , o uso do corte intermediário Λ é exemplificado em um cálculo de dois loops. A análise das contribuições advindas dos estados intermediários de baixa e alta energias para a função de quatro pontos e para a auto-energia permite a construção de um esquema de redução não relativística para as amplitudes quânticas onde, em ordem dominante, a contribuição do setor L pode ser mapeada no resultado da teoria ϕ^4 não relativística, através de uma reinterpretação do corte intermediário Λ . Termos subdominantes podem ser considerados dentro de um contexto não relativístico via a construção de uma lagrangiana efetiva com a adição de interações não renormalizáveis.

2.1 A teoria $\lambda\phi^4$ em $2 + 1$ dimensões

O modelo relativístico considerado consiste de um campo real com auto-interação quártica cuja densidade de lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \mathcal{L}_{c.t.}, \quad (2.1)$$

onde $\mathcal{L}_{c.t.}$ é a lagrangiana de contratermos necessária para fixar a massa m , a intensidade do campo ϕ e a constante de acoplamento λ em seus valores renormalizados. As unidades usadas são tais que $\hbar = c = 1$ e a métrica de Minkowski é fixada de modo que $g_{\mu\nu} = \text{Diag}(1, -1, -1)$.

O propagador livre é o propagador de Feynman usual

$$\Delta(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (2.2)$$

No espaço-tempo tridimensional, a dimensão de massa do campo escalar ϕ é $1/2$, a do parâmetro λ é 1 e a auto-interação quártica é super-renormalizável. De fato, o grau de divergência superficial de um gráfico genérico G é dado por

$$d(G) = 3 - \frac{N}{2} - V, \quad (2.3)$$

onde V e N são os números de vértices e de pernas externas do diagrama, respectivamente. Vê-se, imediatamente, que apenas a função de dois pontos possui divergências primitivas. Assumindo-se a ordenação de Wick na lagrangiana de interação, o gráfico "alça" (mostrado na fig. 2.1) é eliminado e a única divergência que permanece é aquela da auto-energia em dois loops

$$- \rightarrow \text{---} \bigcirc \text{---} \rightarrow - \quad \sim \quad \int d^3k \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Figura 2.1 - Auto-energia em um loop (sem ordem normal)

que será discutida, na Sec. 2.3, juntamente com a renormalização do modelo. A função de 4 pontos, que representa o espalhamento de duas partículas, é

finita como será visto explicitamente na próxima seção.

Este comportamento ultravioleta do modelo relativístico não se mantém em seu parceiro galileano descrito pela lagrangiana

$$\mathcal{L}_{NR} = \psi^\dagger \left(i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m} \right) \psi - \frac{v_0}{4} : (\psi^\dagger \psi)^2 : , \quad (2.4)$$

onde ψ é um campo escalar e $: :$ representa a ordenação de Wick [20]. A cinética de Schrödinger leva à propagação em um único sentido do tempo, o que implica na inexistência de correções radiativas para a massa e para a intensidade do campo. Por outro lado, a forma do propagador livre não relativístico

$$\Delta_{NR}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{i}{\omega - \mathbf{k}^2/2m + i\epsilon} , \quad (2.5)$$

que reflete a relação de dispersão da partícula livre, leva a uma função de quatro pontos que é logaritmicamente divergente. Estes comportamentos ultravioletas distintos indicam que a redução (limite) não relativística (o) da teoria $\lambda\phi^4$ em 2 + 1 dimensões não é um problema trivial, contém sutilezas.

Outro aspecto que distingue o modelo não relativístico é a invariância de escala do problema clássico. De fato, como enfatizado na ref. [20], a transformação

$$\mathcal{L} \rightarrow m\mathcal{L} , \quad t \rightarrow t/m \quad \text{e} \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} , \quad (2.6)$$

deixa a ação invariante e a lagrangiana torna-se

$$\mathcal{L}_{NR} = \psi^\dagger \left(i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2} \right) \psi - \frac{g}{4} : (\psi^\dagger \psi)^2 : , \quad (2.7)$$

com $g = mv_0$ que é adimensional. Esta invariância é também manifesta no propagador (2.5) onde o parâmetro m aparece multiplicativamente e pode ser absorvido em um reescalonamento de $\mathbf{k}$. Contudo, após a quantização, a renormalização da teoria leva à introdução de uma escala de energia arbitrária e a invariância de escala é quebrada. A “anomalia” de escala associada é expressa em termos do tensor energia-momento [20] e pode também ser calculada diretamente via o potencial efetivo para um gás de bósons em 2 + 1 dimensões [47].

2.2 Espalhamento partícula-partícula

Por definição, a amplitude de espalhamento A será fixada como $-i$ vezes a função 1PI correspondente obtida do dado gráfico usando o propagador (2.2) e $-i\lambda$ como fator de vértice, ou seja, a nível de árvore, tem-se $A^{(0)} = -\lambda$. Esta escolha é arbitrária e irrelevante para a física do problema, apenas deixa $A^{(0)}$ real e facilita a comparação com os resultados dos modelos não relativísticos descritos nas ref. [20, 18]. A contribuição de um loop (ordem λ^2) para a função de quatro pontos 1PI (i.e. irreduzível) é dada diagramaticamente na fig. 2.2. Note que os dois últimos gráficos envolvem propagação em ambos os sentidos no tempo e portanto não existem na teoria não relativística. A amplitude na ordem de um loop para momentos externos pequenos será calculada, até ordem p^2/m^2 , utilizando o esquema introduzido no capítulo anterior e depois comparada com o resultado exato.

Figura 2.2 - Espalhamento partícula-partícula em um loop.

Considere, inicialmente, a contribuição para a amplitude correspondente ao canal s (o gráfico "peixe" da fig. 2.2) que é dada por

$$A^{(s)}(p_1, p_2) = -\frac{i\lambda^2}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)((p_1 + p_2 - k)^2 - m^2 + i\epsilon)}, \quad (2.8)$$

onde p_1 e p_2 são os momentos externos entrantes. Embora os cálculos possam ser realizados em qualquer referencial, por simplicidade, eles serão apresentados no sistema do centro de massa, cuja cinemática é mostrada na fig. 2.3. Com as partículas na concha de massa, tem-se então $p_1 = -p_2 = p$, $p'_1 = -p'_2 = p'$ e $p_1^0 = p_2^0 = p_1'^0 = p_2'^0 = w_p$ onde

$$w_p = \sqrt{m^2 + p^2}. \quad (2.9)$$

Figura 2.3 - Cinemática no referencial do centro de massa.

Neste caso, a contribuição do canal s é escrita como

$$A^{(s)} = -\frac{i\lambda^2}{8\pi^2} \int d^2\mathbf{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk^0}{2\pi} \frac{1}{[(k^0)^2 - w_k^2 + i\epsilon][(2w_p - k^0)^2 - w_k^2 + i\epsilon]}, \quad (2.10)$$

onde $w_k = \sqrt{m^2 + k^2}$. A integração sobre k^0 é feita de modo simples usando o teorema dos resíduos e a integração angular é trivial, obtendo-se, assim,

$$A^{(s)} = -\frac{\lambda^2}{32\pi} \int_0^{\Lambda_0^2} d(k^2) \left(\frac{1}{w_k} \right) \frac{1}{p^2 - k^2 + i\epsilon}, \quad (2.11)$$

onde o corte ultravioleta Λ_0 pode ser feito ∞ a qualquer tempo uma vez que o gráfico é finito.

Introduzindo o corte intermediário Λ , pode-se calcular a contribuição do setor L , a integração de 0 a Λ^2 , usando

$$w_k^{-1} = \frac{1}{m} \left[1 - \frac{k^2}{2m^2} + \frac{3}{8} \frac{k^4}{m^4} - \dots \right], \quad (2.12)$$

uma vez que $|k| \ll m$, $\forall k \in L$. As integrais que surgem são calculadas usando (ref. [48], pg. 69)

$$\int dx \frac{x^n}{x-a} = a^n \log(x-a) + \sum_{j=1}^n \frac{a^{n-j} x^j}{j} \quad (2.13)$$

e obtém-se, após expandir os resultados das integrações até ordem $\eta^2 \approx p^2/m^2$,

$$A_L^{(s)} \simeq \frac{\lambda^2}{32\pi m} \left\{ \left(1 - \frac{p^2}{2m^2}\right) \left[\ln \left(\frac{\Lambda^2}{p^2} \right) + i\pi \right] - \frac{p^2}{\Lambda^2} - \frac{p^4}{2\Lambda^4} - \frac{\Lambda^2}{2m^2} + \frac{3\Lambda^4}{16m^4} \right\}. \quad (2.14)$$

Na equação acima, e daqui em diante, o símbolo $\simeq$ indica que a expressão que segue é correta até ordem p^2/m^2 inclusive.

Para o cálculo da contribuição dos estados intermediários de alta energia (a integração de Λ^2 até $\Lambda_0^2 \rightarrow \infty$) para a amplitude s , a equação (2.12) não pode mais ser utilizada e resta apenas $|p|$ como quantidade pequena. Porém, usando

$$\frac{1}{p^2 - k^2} = -\frac{1}{k^2} \left[1 + \frac{p^2}{k^2} + \frac{p^4}{k^4} + \dots \right], \quad (2.15)$$

aparecem integrais do tipo $\int dx [x^n \sqrt{x+b}]^{-1}$, que são reduzidas (ver ref. [48], pg. 95) ao cálculo de

$$\int dx \frac{1}{x\sqrt{x+b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \left(\frac{\sqrt{x+b} - \sqrt{b}}{\sqrt{x+b} + \sqrt{b}} \right) \quad (\text{para } b > 0), \quad (2.16)$$

e expandindo os resultados em potências de η obtém-se, até $\mathcal{O}(\eta^2)$,

$$A_H^{(s)} \simeq -\frac{\lambda^2}{32\pi m} \left\{ \left(1 - \frac{p^2}{2m^2}\right) \ln \left(\frac{\Lambda^2}{4m^2} \right) - \frac{p^2}{2m^2} - \frac{p^2}{\Lambda^2} - \frac{p^4}{2\Lambda^4} - \frac{\Lambda^2}{2m^2} + \frac{3\Lambda^4}{16m^4} \right\}. \quad (2.17)$$

Vê-se imediatamente, como antecipado na Sec. 1.2, que existe um cancelamento exato entre os termos dependentes de Λ de $A_L^{(s)}$ e $A_H^{(s)}$. Aparentemente, ter-se-ia feito diferentes aproximações com o uso de (2.12) e (2.15) nas partes L e H mas as posteriores expansões para $\eta \approx p^2/\Lambda^2 \approx \Lambda^2/m^2$ pequeno geram de fato as expansões $1/m$ das duas contribuições e a independência de Λ do resultado total meramente manifesta a aditividade da integração. Somando (2.14) e (2.17), chega-se a

$$A^{(s)}(|\mathbf{p}|, \lambda, m) \simeq \frac{\lambda^2}{32\pi m} \left\{ \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2}{2m^2}\right) \left[\ln \left(\frac{4m^2}{\mathbf{p}^2} \right) + i\pi \right] + \frac{\mathbf{p}^2}{2m^2} \right\} . \quad (2.18)$$

Esta mesma expressão pode ser obtida calculando a integral em (2.11) exatamente (e sem introduzir o corte intermediário) e depois expandindo o resultado em torno de $|\mathbf{p}| = 0$. Deve-se salientar que se outro modo de passar o momento externo através do diagrama for escolhido, o que equivale a fazer uma translação no momento de integração, apenas os coeficientes numéricos dos termos $(|\mathbf{p}|/\Lambda)^n$ das partes L e H ficam diferentes.

A contribuição do canal t (segunda parcela na fig. 2.2) para a amplitude é dada por

$$A^{(t)}(p_1, p'_1) = -\frac{i\lambda^2}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)((k - p_1 + p'_1)^2 - m^2 + i\epsilon)} , \quad (2.19)$$

que se reduz, no referencial do centro de massa e após a integração sobre k^0 , a

$$A^{(t)} = -\frac{\lambda^2}{16\pi^2} \int d\left(\frac{\mathbf{k}^2}{2}\right) d\varphi \frac{1}{w_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2 - w_{\mathbf{k}}^2 + i\epsilon} \left(\frac{1}{w_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}} - \frac{1}{w_{\mathbf{k}}} \right) , \quad (2.20)$$

onde $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$ é o momento espacial transferido e, como se vê na fig. 2.3, $w_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} = \sqrt{k^2 + \mathbf{q}^2 + 2|\mathbf{k}||\mathbf{q}|\sin\varphi + m^2}$. A integração angular acima, embora possa ser feita analiticamente, leva a um resultado que obscurece a origem de cada uma das contribuições.

Pode-se, alternativamente, usar a identidade de Feynman

$$\frac{1}{ab^n} = \int_0^1 dx \frac{nx^{n-1}}{[(b-a)x + a]^{n+1}} \quad (2.21)$$

e a translação $k \rightarrow k + (p_1 - p'_1)x$ para reescrever (2.19) na forma

$$A^{(t)}(p_1, p'_1) = -\frac{i\lambda^2}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[k^2 - m^2 + (p_1 - p'_1)^2 x(1-x) + i\epsilon]^2} . \quad (2.22)$$

Calculando a integral sobre k^0 (que é uma integral de contorno em volta de um polo duplo), a integração angular (trivial) e a paramétrica levam, no sistema do centro de massa, a

$$A^{(i)}(|\mathbf{p}|, \theta) = \frac{\lambda^2}{32\pi} \int_0^{\Lambda^2} d(k^2) \frac{1}{w_k(k^2 + \mathbf{q}^2/4 + m^2)}, \quad (2.23)$$

onde $\mathbf{q}^2 = 2\mathbf{p}^2(1 - \cos \theta)$ e θ é o ângulo de espalhamento. Para o cálculo da contribuição do setor L, o integrando de (2.23) é substituído por sua expansão $1/m$, que um polinômio em k^2 , resultando até $\mathcal{O}(\eta^2)$ em

$$A_L^{(i)} \simeq \frac{\lambda^2}{32\pi m} \left\{ \frac{\Lambda^2}{m^2} - \frac{3\Lambda^4}{4m^4} \right\}. \quad (2.24)$$

Por outro lado, a expansão de Taylor do integrando de (2.23) em torno de $|\mathbf{p}| = 0$ é uma série cujos coeficientes são proporcionais a $w_k^{-(2n+1)}$ (com $n = 1, 2, 3, \dots$) e integrando de Λ^2 até ∞ , obtém-se

$$A_H^{(i)} \simeq \frac{\lambda^2}{32\pi m} \left\{ 2 - \frac{\mathbf{q}^2}{6m^2} - \frac{\Lambda^2}{m^2} + \frac{3\Lambda^4}{4m^4} \right\}. \quad (2.25)$$

Estes mesmos resultados teriam sido obtidos caso o corte intermediário fosse introduzido antes da integração angular e, então, realizadas as expansões.

Vê-se, claramente, que a contribuição do canal t para a amplitude, a soma de (2.24) com (2.25), dada por

$$A^{(i)}(|\mathbf{p}|, \theta) \simeq \frac{\lambda^2}{32\pi m} \left\{ 2 - \frac{\mathbf{p}^2}{3m^2}(1 - \cos \theta) \right\}, \quad (2.26)$$

vem inteiramente dos estados intermediários de altas energias enquanto que a amplitude s tem contribuição de ambos os setores, de pequenos e grandes momentos.

A contribuição do canal u para o espalhamento é obtida de $A^{(i)}$ pela troca das partículas no estado final $[p'_1 \leftrightarrow p'_2]$, o que, no referencial do centro de massa, significa

$$A^{(u)}(|\mathbf{p}|, \theta) = A^{(i)}(|\mathbf{p}|, \theta - \pi) \simeq \frac{\lambda^2}{32\pi m} \left\{ 2 - \frac{\mathbf{p}^2}{3m^2}(1 + \cos \theta) \right\} \quad (2.27)$$

e, portanto, a soma destas duas contribuições é independente do ângulo de espalhamento θ e dada por

$$A_t + A_u \simeq \frac{\lambda^2}{32\pi m} \left\{ 4 - \frac{2p^2}{3m^2} \right\} . \quad (2.28)$$

Esta é a parcela da amplitude de espalhamento na ordem de um loop que vem de diagramas que envolvem criação e aniquilação virtual de pares só permitidos na teoria relativística. Esta contribuição, naturalmente, é oriunda exclusivamente da integração em $\Lambda^2 < k^2 < \infty$ mas é maior que a contribuição subdominante para o canal s dada em (2.18). Embora transições envolvendo modos relativísticos tenham probabilidades muito baixas de ocorrer, a soma das contribuições de todos os momentos relativísticos virtuais torna-se significativa a nível da primeira correção.

Adicionado a amplitude em árvore $A^{(0)}$ às contribuições (2.18) e (2.28), obtém-se a amplitude de espalhamento partícula-partícula, até a ordem de um loop (λ^2), no referencia do centro de massa, e até ordem p^2/m^2 (inclusive) como

$$A^{(1)}(|\mathbf{p}|, \lambda, m) \simeq -\lambda + \frac{\lambda^2}{32\pi m} \left\{ \left(1 - \frac{p^2}{2m^2} \right) \left[\ln \left(\frac{4m^2}{p^2} \right) + i\pi \right] + 4 - \frac{p^2}{6m^2} \right\} \quad (2.29)$$

evidenciando que a primeira correção ao termo dominante do espalhamento em um loop para momentos baixos, não relativísticos, vem dos setores com k^2 grandes dos canais t e u que são intrinsecamente relativísticos.

A amplitude de espalhamento partícula-partícula, até a ordem de um loop, pode ser calculada exatamente em um referencial arbitrário (ver Apêndice 5.1) e obtém-se

$$A^{(1)} = -\lambda + \frac{\lambda^2}{32\pi m} \frac{1}{\sqrt{S/4m^2}} \left[\ln \left(\frac{\sqrt{S/4m^2} + 1}{\sqrt{S/4m^2} - 1} \right) + i\pi \right] + [S \leftrightarrow T] + [T \leftrightarrow U] , \quad (2.30)$$

onde

$$\begin{aligned} S &= (p_1 + p_2)^2 \\ T &= (p'_1 - p_1)^2 \\ U &= (p'_2 - p_1)^2 \end{aligned} \quad (2.31)$$

são as variáveis de Mandelstam.

Tomando os momentos externos na concha de massa e expandindo para $|p_i|$ pequenos chega-se a

$$A^{(1)}(p_1, p_2) \simeq -\lambda + \frac{\lambda^2}{32\pi m} \left\{ \left(1 - \frac{(p_1 - p_2)^2}{8m^2} \right) \left[\ln \left(\frac{16m^2}{(p_1 - p_2)^2} \right) + i\pi \right] + 4 - \frac{(p_1 - p_2)^2}{24m^2} \right\}, \quad (2.32)$$

que se reduz a (2.29) quando $p_1 = -p_2$.

Dois aspectos, relativos aos cálculos apresentados nesta seção, são importantes e devem ser frisados para que o procedimento do corte intermediário não seja qualificado, simplesmente, de redundante. O primeiro é que este procedimento leva ao resultado correto, à correta expansão $|p|/m$ da amplitude a dois corpos da teoria $\lambda\phi^4$. Este exemplo explícito do procedimento dá confiança para aplicá-lo em outras situações, como as que surgirão no próximo capítulo, onde cálculos exatos sejam muito difíceis de obter ou não sejam possíveis. Em outro plano, este esquema identifica a origem de cada uma das contribuições e, como será visto, propicia a construção de um processo de redução a nível das amplitudes em que os comportamentos ultravioletas diferentes dos modelos relativístico e não relativístico desempenham papéis fundamentais. Deve-se salientar que a separação das contribuições dos estados intermediários de baixas e altas energias pode, também, ser feita no caso de um sistema de referência arbitrário.

2.3 Auto-energia em dois loops

Tendo assumido a ordenação de Wick, a primeira contribuição não nula para a função de dois pontos vem do diagrama de dois loops, "o sol poente", apresentado na figura 2.4. Esta é a única divergência primitiva da teoria $\lambda\phi^4$ em $2 + 1$ dimensões. Este tipo de diagrama e, de fato, todas as inserções de auto-energia não são permitidas na teoria não relativística onde a propagação é sempre para adiante no tempo. Lá, a massa física é o parâmetro natural e o propagador completo coincide com o propagador livre [20]. Esta contribuição para a auto-energia será calculada exatamente, e também usando o procedimento descrito anteriormente. Neste caso, contudo, o corte ultravioleta Λ_0

não pode ser feito infinito antes de uma subtração apropriada, uma vez que o gráfico é logaritmicamente divergente. Como era de se esperar, ambas as partes finita e divergente emergem da região de integração onde ambos os momentos de loop são grandes.

Figura 2.4 - Auto-energia em dois loops.

Seguindo as regras de Feynman, a auto-energia em dois loops é dada por

$$\hat{\Sigma}_{(2)} = \frac{i\lambda^2}{6} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3l}{(2\pi)^3} \times \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon) [(k-l)^2 - m^2 + i\epsilon] [(l-p)^2 - m^2 + i\epsilon]} \quad (2.33)$$

Antes de tentar calcular qualquer das integrações k ou l é possível desembaraçar completamente as variáveis de integração procedendo como segue. Em primeiro lugar usa-se o truque de Feynman (2.21) no loop k e em seguida faz-se a substituição $k \rightarrow k + lx$. Repetindo então (2.21) (com variável y), redefinindo as variáveis de integração de modo tal que $k \rightarrow k/\sqrt{y}$ e $l \rightarrow l/\sqrt{C}$ e efetuando a translação $l \rightarrow l + \frac{(1-y)}{\sqrt{C}}p$ obtém-se

$$\hat{\Sigma}_{(2)}(p, m, \lambda, \Lambda_0) = \frac{i\lambda^2}{192\pi^6} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{y}{[yC]^{3/2}} \times \int d^3k d^3l \frac{1}{[k^2 + l^2 + Dp^2 - m^2 + i\epsilon]^3} \quad (2.34)$$

onde

$$C = C(x, y) = x(1-x)y + (1-y) \quad (2.35)$$

e

$$D = D(x, y) = \frac{x(1-x)y(1-y)}{C(x, y)} . \quad (2.36)$$

Pode-se mostrar, facilmente, que as funções C e D satisfazem $0 \leq C \leq 1$ e $0 \leq D \leq 1/9$ para todos $0 \leq x, y \leq 1$.

Dada a forma do integrando em (2.34), a integração sobre o "plano" (k^0, l^0) pode ser feita exatamente com o uso de coordenadas polares onde $r = \sqrt{k^0^2 + l^0^2}$ e $\alpha = \arctan(l^0/k^0)$ o que resulta, após uma integração angular trivial, em

$$\hat{\Sigma}_{(2)}(p, m^2, \lambda, \Lambda_0) = \frac{i\lambda^2}{384\pi^3} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{y}{[yC]^{3/2}} F(p^2, m^2, x, y, \Lambda_0) \quad (2.37)$$

onde

$$F(p^2, m^2, x, y, \Lambda_0) = \int_0^{\Lambda_0^2} d(k^2) \int_0^{\Lambda_0^2} d(l^2) \frac{1}{[k^2 + l^2 + m^2 - p^2 D(x, y) - i\epsilon]^2} . \quad (2.38)$$

As integrais sobre k^2 e l^2 acima podem ser feitas exatamente e para $\Lambda_0 \gg m$ obtém-se

$$F(p^2, m^2, x, y, \Lambda_0) = \ln \left(\frac{\Lambda_0^2}{m^2} \right) - \ln \left[2 \left(1 - \frac{p^2}{m^2} D(x, y) \right) \right] . \quad (2.39)$$

A fim de se investigar de onde vem cada contribuição, pode-se introduzir o mesmo corte intermediário Λ^2 em ambas as integrações sobre k^2 e l^2 ficando o quadrante (k^2, l^2) dividido em quatro partes denotadas, de modo auto-explicativo, por L-L, L-H, H-L e H-H. Chega-se, então, às contribuições para F vindas de cada destas partes como

$$F_{L-L} \simeq \frac{\Lambda^4}{b^2 m^4} \quad (2.40)$$

$$F_{L-H} = F_{H-L} \simeq \frac{\Lambda^2}{bm^2} - \frac{3\Lambda^4}{2b^2 m^4} \quad (2.41)$$

$$F_{H-H} \simeq -\frac{2\Lambda^2}{bm^2} + \frac{2\Lambda^4}{b^2 m^4} - \ln 2 - \ln b + \ln \left(\frac{\Lambda_0^2}{m^2} \right) , \quad (2.42)$$

onde

$$b(p^2/m^2, x, y) = 1 - D(x, y) p^2/m^2 - i\epsilon. \quad (2.43)$$

Isto mostra claramente que $\hat{\Sigma}_{(2)}$ vem inteiramente dos estados virtuais de altas energias, estados relativísticos, de ambas as integrações de loop como esperado.

Inserindo (2.39) em (2.37) e usando que

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{y}{[yC]^{3/2}} = 2\pi, \quad (2.44)$$

chega-se a auto-energia em dois loops regularizada por corte, dada por

$$\hat{\Sigma}_{(2)}(p, m, \lambda, \Lambda_0) = \frac{i\lambda^2}{192\pi^2} \left[\ln \left(\frac{\Lambda_0^2}{m^2} \right) - E \left(\frac{p^2}{m^2} \right) \right], \quad (2.45)$$

onde a função $E(z)$, que dá a parte finita, é definida como

$$E(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{\ln(2[1 - zD(x, y)])}{\sqrt{y} [C(x, y)]^{3/2}}. \quad (2.46)$$

Deve-se observar que a sequência de passos descrita logo antes da equação (2.34) pode ser prontamente estendida para qualquer dimensão espaço-tempo levando a um cálculo mais simples do gráfico "sol poente" do que outros encontrados na literatura [42,49]. Ainda, tratando a equação (2.34) por regularização dimensional (ver Apêndice 5.2), chega-se a

$$\hat{\Sigma}_{(2)}^{(\text{dim})}(p, m, \lambda, d) = \frac{i\lambda^2}{192\pi^2} \left[\frac{1}{3-d} + (\ln 2 - \gamma) - E \left(\frac{p^2}{m^2} \right) \right], \quad (2.47)$$

de modo que, fazendo uma subtração mínima, a parte finita obtida difere daquela em (2.45) por um termo constante, como esperado.

O programa de renormalização de massa e de função de onda pode agora ser implementado. O propagador completo é dado por

$$G_R(p^2) = \frac{i}{p^2 - m^2 - i\Sigma}, \quad (2.48)$$

onde

$$\Sigma = \hat{\Sigma} + i(Z-1)(p^2 - m^2) - i\delta m^2 Z. \quad (2.49)$$

O termo adicional em Σ acima vem do vértice bilinear que surge da lagrangiana de contratermos escrita como $\mathcal{L}_{c.t.} = \frac{1}{2}(Z-1)[\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2] - \frac{1}{2}\delta m^2 Z \phi^2$. A interpretação de partícula da teoria requer que o propagador completo G_R tenha um pólo simples de resíduo i para $p^2 = m^2$ o que implica em

$$\delta m^2 = m^2 \left(\frac{\lambda^2}{192\pi^2 m^2} \right) \left[\ln \left(\frac{\Lambda_0^2}{m^2} \right) - E(1) \right] \quad (2.50)$$

e

$$Z = 1 + \left(\frac{\lambda^2}{192\pi^2 m^2} \right) \frac{\partial E}{\partial z} \Big|_{z=1}, \quad (2.51)$$

até ordem λ^2 . Embora a integral definindo a função $E(z)$, equação (2.46), não tenha uma forma simples, para $p^2 \approx m^2$ ou seja $|z| \approx 1$, pode-se expandir o logaritmo no numerador do integrando (lembre-se que $0 \leq D(x, y) \leq 1/9$ na região de integração) e escrever

$$E(z) = (\ln 2) E_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} E_n z^n, \quad (2.52)$$

onde

$$E_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{[D(x, y)]^n}{\sqrt{y} [C(x, y)]^{3/2}} = \frac{1}{(2n+1) 3^{2n}}. \quad (2.53)$$

A fórmula (2.53) pode ser inferida (como foi) a partir dos primeiros valores dos E_n dados por um programa para cálculo algébrico qualquer (Mathematica por exemplo). A partir destas expressões encontra-se, facilmente, $E(1) = 0.654806$ e $\frac{\partial E}{\partial z} \Big|_{z=1} = -0.039721$, até 6 decimais. Note que a expansão da função $E(z)$, dada em (2.52), é válida em uma faixa relativamente grande em torno de $z = 1$. Como foi visto na seção anterior, a função de quatro pontos é finita de modo que não é necessário fazer renormalização da constante de acoplamento.

2.4 Redução não relativística e lagrangiana efetiva

O procedimento de cálculo que foi utilizado, introduzindo um corte intermediário Λ , não somente permite a identificação da origem (no espaço de Hilbert dos estados intermediários) de cada contribuição para a amplitude, mas também, possibilita a construção de um esquema de redução não relativístico a nível das amplitudes. Esta redução, que requer uma reinterpretação do corte intermediário Λ e das contribuições dos setores L e H, propicia uma clara compreensão da origem da divergência ultravioleta da amplitude de espalhamento de duas partículas na teoria não relativística, quando a mesma amplitude, na teoria relativística, é finita.

Somando, separadamente, as contribuições de baixas e altas energias de cada canal para a amplitude de espalhamento, calculadas em um referencial arbitrário com as partículas externas na concha de massa, obtém-se, até $\mathcal{O}(\lambda^2)$ e até ordem p^2/m^2 ,

$$A_L^{(1)} \simeq -\lambda + \frac{\lambda^2}{32\pi m} \left\{ \left(1 - \frac{(p_1 - p_2)^2}{8m^2} \right) \left[\ln \left(\frac{4\Lambda^2}{(p_1 - p_2)^2} \right) + i\pi \right] - \frac{(p_1 - p_2)^2}{4\Lambda^2} - \frac{(p_1 - p_2)^4}{8\Lambda^4} + \frac{3\Lambda^2}{2m^2} - \frac{21\Lambda^4}{16m^4} \right\} \quad (2.54)$$

e

$$A_H^{(1)} \simeq -\frac{\lambda^2}{32\pi m} \left\{ \left(1 - \frac{(p_1 - p_2)^2}{8m^2} \right) \ln \left(\frac{\Lambda^2}{4m^2} \right) - \frac{(p_1 - p_2)^2}{4\Lambda^2} - \frac{(p_1 - p_2)^4}{8\Lambda^4} + \frac{3\Lambda^2}{2m^2} - \frac{21\Lambda^4}{16m^4} - 4 + \frac{(p_1 - p_2)^2}{24m^2} \right\}. \quad (2.55)$$

Deve-se, naturalmente, esperar que a contribuição do setor L, de algum modo, expresse a amplitude obtida da teoria não relativística embora a arbitrariedade associada ao corte intermediário cosba qualquer identificação direta. Note que a amplitude em nível de árvore foi incorporada no setor L.

Antes que estas amplitudes, calculadas com a teoria relativística, possam ser comparadas com aquelas obtidas do modelo não relativístico, a normalização dos estados precisa ser ajustada. No caso relativístico considera-se,

usualmente, $\langle p'|p \rangle = 2w_p \delta(p' - p)$ enquanto que a normalização corriqueira não relativística não contém o fator $2w_p$. Assim, para efeitos de comparação com os resultados do modelo não relativístico, a amplitude partícula-partícula deve ser multiplicada pelo fator

$$(16w_{p_1} w_{p_2} w_{p'_1} w_{p'_2})^{-1/2} = \frac{1}{4m^2} \left(1 - \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m^2} + \dots \right), \quad (2.56)$$

o que dá, até ordem η^2 ,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_L^{(1)} = & -\frac{\lambda}{4m^2} \left(1 - \frac{(p_1 - p_2)^2}{4m^2} - \frac{(p_1 + p_2)^2}{4m^2} \right) \\ & + \frac{\lambda^2}{128\pi m^3} \left\{ \left(1 - \frac{3(p_1 - p_2)^2}{8m^2} - \frac{(p_1 + p_2)^2}{4m^2} \right) \right. \\ & \times \left[\ln \left(\frac{4\Lambda^2}{(p_1 - p_2)^2} \right) + i\pi \right] + \mathcal{P} \left(\frac{|p_1 - p_2|}{\Lambda}, \frac{\Lambda}{m} \right) \Big\} \end{aligned} \quad (2.57)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_H^{(1)} = & -\frac{\lambda^2}{128\pi m^3} \left\{ \left(1 - \frac{3(p_1 - p_2)^2}{8m^2} - \frac{(p_1 + p_2)^2}{4m^2} \right) \ln \left(\frac{\Lambda^2}{4m^2} \right) - 4 \right. \\ & \left. + \frac{25(p_1 - p_2)^2}{24m^2} + \frac{(p_1 + p_2)^2}{m^2} + \mathcal{P} \left(\frac{|p_1 - p_2|}{\Lambda}, \frac{\Lambda}{m} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (2.58)$$

onde $\mathcal{P}$ é a parte polinomial em η , dependente de Λ , que aparece na equação (2.54). De agora por diante, $\mathcal{A}$ (o "A" caligráfico) será usado para indicar que a amplitude considerada está ajustada à normalização não relativística.

Uma questão natural que surge é sobre a relação entre estas quantidades e a amplitude calculada a partir da teoria não relativística descrita pela lagrangiana (2.4). Na teoria não relativística, o espalhamento em um loop tem apenas uma contribuição que corresponde ao gráfico "peixe", o primeiro da fig. 2.2, com os propagadores dados por (2.5) [20]. Os gráficos correspondentes aos canais t e u , como envolvem propagação para trás no tempo, não existem na teoria não relativística. Tem-se, então,

$$\mathcal{A}_{NR}^{(1)} = -v_0 + \frac{-iv_0^2}{8\pi^2} \int d^2k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{(\omega - k^2/2m + i\epsilon)}$$

$$\times \frac{1}{(\omega_1 + \omega_2 - \omega - [\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k}]^2 / 2m + i\epsilon)} . \quad (2.59)$$

A integração acima é muito simples e, tomando as partículas externas na concha de massa não relativística

$$\omega_i = \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} , \quad (2.60)$$

obtem-se

$$\mathcal{A}_{\text{NR}}^{(1)} = -v_0 + \frac{v_0^2 m}{8\pi} \left[\ln \left(\frac{4\Lambda_{\text{NR}}^2}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2} \right) + i\pi \right] , \quad (2.61)$$

onde Λ_{NR} é um corte ultravioleta não relativístico. Para chegar a (2.61), despreza-se a parcela

$$\frac{v^2 m}{8\pi} \ln \left[1 - \frac{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2}{4\Lambda_{\text{NR}}^2} \right] = -\frac{v^2 m}{8\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2}{4\Lambda_{\text{NR}}^2} \right]^n ,$$

que vai a 0 quando $\Lambda_{\text{NR}} \rightarrow \infty$.

Vê-se que a amplitude não relativística em um loop é logaritmicamente divergente, e portanto precisa ser renormalizada, enquanto a amplitude relativística é finita. Somente em $2 + 1$ dimensões os comportamentos ultravioletas do gráfico peixe, nas teorias $\lambda\phi^4$ relativística e não relativística, tornam-se assim distintos. Este diagrama é finito em $1 + 1$ dimensões e divergente para $D > 3$ em ambos os casos. A amplitude renormalizada, até ordem de um loop (v^2), é obtida, redefinindo a constante de acoplamento [20]

$$v_0 = v + \delta v = v + \frac{v^2}{4\pi} \ln \left(\frac{\Lambda_{\text{NR}}}{\mu} \right) + \mathcal{O}(v^3) , \quad (2.62)$$

como

$$\mathcal{A}_{\text{NR}}^{(1)} = -v + \frac{v^2 m}{8\pi} \left[\ln \left(\frac{4\mu^2}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2} \right) + i\pi \right] . \quad (2.63)$$

Considere, agora, a amplitude relativística, em ordem dominante com respeito a $|\mathbf{p}|/m$,

$$\mathcal{A}_{\text{dom}}^{(1)} = -\frac{\lambda}{4m^2} + \frac{\lambda^2}{128\pi m^3} \left[\ln \left(\frac{16m^2}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2} \right) + i\pi \right] , \quad (2.64)$$

cuja decomposição nas contribuições dos setores L e H é dada por

$$\mathcal{A}_{L\text{dom}}^{(1)} = -\frac{\lambda}{4m^2} + \frac{\lambda^2}{128\pi m^3} \left[\ln \left(\frac{4\Lambda^2}{(p_1 - p_2)^2} \right) + i\pi \right] \quad (2.65)$$

e

$$\mathcal{A}_{H\text{dom}}^{(1)} = -\frac{\lambda^2}{128\pi m^3} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{4m^2} \right). \quad (2.66)$$

Esta amplitude, como pode ser constatado na Sec. 2.2, vem inteiramente do canal s (gráfico peixe) além, é claro, do termo em árvore. Comparando os níveis de árvore dos resultados dos casos relativístico e não relativístico, equações (2.63) e (2.64), obtém-se

$$v = \frac{\lambda}{4m^2}, \quad (2.67)$$

o que torna os coeficientes dos termos de segunda ordem na auto-interação iguais. Vê-se ainda, de imediato, que fixando o ponto de renormalização não relativístico tal que $\mu^2 = 4m^2$, as duas expressões coincidem mas esta escolha é completamente arbitrária, porque não se tem critério (dentro de um ponto de vista não relativístico) para estabelecê-la. Igualmente ingênuo, e desprovido de base, é considerar que a teoria não relativística tem "um corte efetivo em $p^2 \approx 4m^2$ ".

Uma visão equivocada da origem da divergência ultravioleta da teoria não relativística, é atribuí-la à não consideração de contribuições que envolvam a criação de pares de partículas em estados intermediários, como advogado na ref. [55]. As equações (2.65) e (2.66) mostram que a amplitude dominante (2.64) recebe contribuições de todas as regiões de energia e lá nada é desconsiderado. Além disso é muito difícil de ver criação de pares no gráfico peixe. Os diagramas que, de fato envolvem criação de pares, os canais t e u , contribuem apenas em ordem subdominante em $|p|/m$. Pode-se tentar buscar a origem da divergência investigando as contribuições das partes de frequências positiva ("partícula") e negativa ("antipartícula") do propagador relativístico para a amplitude. Fazendo a separação,

$$\Delta(k) = \Delta_+ + \Delta_- = \frac{1}{2w_k} \frac{i}{k^0 - w_k + i\epsilon} + \frac{1}{-2w_k} \frac{i}{k^0 + w_k + i\epsilon}, \quad (2.68)$$

com os subscritos + e - denotando as partes de frequências positiva e negativa, a contribuição em um loop para a amplitude no canal s , no referencial do centro de massa, pode ser escrita como $\mathcal{A}^{(s)} = \mathcal{A}_{++}^{(s)} + \mathcal{A}_{--}^{(s)}$, onde

$$\mathcal{A}_{\pm\pm}^{(s)} = -\frac{\lambda^2}{32\pi} \int_0^{\Lambda_0^2} d(k^2) \frac{1}{2w_k^2} \frac{1}{w_p \mp w_k + i\epsilon} \quad (2.69)$$

Esta separação mostra que, no gráfico peixe, ambas as partículas virtuais intermediárias propagam-se no mesmo sentido do tempo. Como pode ser visto imediatamente, ambas as parcelas ($++$ e $--$) são finitas quando $\Lambda_0 \rightarrow \infty$ e, portanto, mesmo excluindo completamente a parte de propagação para trás no tempo de $\Delta(k)$, a amplitude do canal s permanece finita. Obviamente, pode-se introduzir um corte auxiliar Λ e separar as contribuições L e H de cada uma das partes, e fazendo isto, encontra-se que a contribuição $++$ é dominante, como era de se esperar.

A discussão acima deixa claro que a divergência ultravioleta da amplitude partícula-partícula na teoria não relativística é devido exclusivamente a sua própria cinemática, refletida no propagador não relativístico (2.5), com a relação de dispersão da energia para uma partícula livre sendo quadrática no momento espacial e a propagação exclusivamente para frente no tempo. A expansão $1/m$ que foi usada para calcular a contribuição dos estados de baixas energias para a amplitude, na ordem dominante, faz uma mímica destes aspectos e, naturalmente, espera-se que a contribuição do setor L para a amplitude possa ser mapeada em um contexto não relativístico. Um tal processo de redução pode, efetivamente, ser implementado mas, certamente, uma reinterpretação do corte intermediário Λ será requerida.

De fato, comparando a amplitude, regularizada por corte, calculada com a teoria não relativística, equação (2.61), com a contribuição do setor L para a amplitude relativística em ordem dominante, equação (2.65), nota-se que elas coincidem se o corte intermediário Λ for identificado com o corte ultravioleta não relativístico Λ_{NR} . Além de mapear a contribuição do setor L no resultado da teoria não relativística, esta identificação gera, também, o contratermo necessário para fazê-lo finito, através da contribuição que vem do setor de altas energias, o setor H. Como mencionado anteriormente, o que não é conhecida (dentro do contexto não relativístico) é a parte finita do contratermo, que justificaria a escolha de $\mu^2 = 4m^2$ como o "melhor" ponto de renormalização não relativístico. É útil notar, ainda, que em tal redução

não é necessário subtrair a energia de repouso, o que manifesta o fato de que as amplitudes são independentes do zero fixado para a energia das partículas.

A reinterpretação $\Lambda \leftrightarrow \Lambda_{NR}$ pode ser compreendida em um contexto de física de escalas, no espírito do grupo de renormalização, que inspira as teorias efetivas. Ludicamente, pode-se imaginar uma grande lupa colocada para ver a região onde estão os momentos externos não relativísticos, em torno da origem, na fig. 1.1. Aí, parece natural tomar o corte intermediário Λ como o corte ultravioleta da teoria efetiva, pois este é o "limite" do mundo visto pela grande lupa. A visão atrás desta lupa é a visão galileana, não relativística. Um sentido pragmático para a redução da parte dominante da amplitude que aqui é proposta, pode ser sintetizada da seguinte forma. Em primeiro plano, o cálculo da contribuição do setor L, via o procedimento descrito na Sec. 1.2, é "identificado" com a amplitude não relativística. Naturalmente, a parte do setor H produz os contratermos necessários, quando for o caso. Embora não se tenha controle completo do contratermo, dentro de um ponto de vista não relativístico, sua estrutura fica evidente. A renormalização do modelo não relativístico, feita na ref. [20], pode ser também compreendida neste contexto.

Um modo imediato de testar a generalidade, como procedimento e interpretação, de uma tal redução não relativística é considerar a teoria $\lambda\phi^4$ em um espaço-tempo com dimensão $d \neq 3$. No caso genérico, a contribuição do setor L para a amplitude associada ao gráfico peixe (canal s) e a amplitude calculada com a teoria não relativística são dadas (no centro de massa), após efetuar as integrações em k^0 e angular, por

$$A_L^{(s)} = \frac{\lambda^2 m^{-1}}{2^{d+2} \pi^{(d-1)/2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \times \int_0^{\Lambda^2} d(k^2) \frac{(k^2)^{(d-3)/2}}{k^2 - p^2 - i\epsilon} \left[1 - \frac{k^2}{2m^2} + \frac{3k^4}{8m^4} - \dots \right] \quad (2.70)$$

e

$$A_{NR}^{\text{peixe}} = \frac{v_0^2 m}{2^d \pi^{(d-1)/2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \int_0^{\Lambda_{NR}^2} d(k^2) \frac{(k^2)^{(d-3)/2}}{k^2 - p^2 - i\epsilon} . \quad (2.71)$$

Para $d = 1 + 1$, o espalhamento não relativístico é finito. Calculando a expansão η (de fato, em $1 + 1$ dimensões, tem-se uma expansão em $\eta^{1/2}$) da con-

tribuição do setor L para a amplitude, vê-se que o termo dominante é finito, independente de Λ , e coincide com o resultado da teoria não relativística, após o ajuste de normalização. Quando $d > 3$, o termo dominante da expansão η de $\mathcal{A}_L^{(s)}$ tem a mesma forma do resultado da teoria não relativística, de modo que a identificação $\Lambda \leftrightarrow \Lambda_{NR}$ pode ser feita também quando ambas as amplitudes forem divergentes.

Uma observação relativa à massa do campo é necessária, dados os seus distintos papéis nas teorias relativísticas e não relativísticas. No caso não relativístico a massa é um parâmetro fenomenológico fixado e não tem o caráter dinâmico presente na teoria quântica relativística. Na teoria estudada, $\lambda\phi^4$, e no outro exemplo que será discutido, as correções radiativas são de ordens subdominantes e provêm do setor H, o que é esperado acontecer de modo geral. Em qualquer caso, m deve ser tomado como a massa física da partícula, que é o parâmetro que deve aparecer nas equações não relativísticas.

Quando restrito à ordem dominante, o procedimento de redução discutido acima, sugere a mesma lagrangiana para a teoria não relativística que aquela que seria obtida pelos processos descritos na Sec. 1.1, ou seja apenas modifica a parte cinética. Um bônus adicional que o esquema usado aqui dá é a estrutura dos contratermos, caso sejam necessários. Insere-se, de modo relevante, neste contexto de redução, a questão relativa à parte subdominante da amplitude, ou seja, de como compreendê-la dentro de um ponto de vista não relativístico.

Com inspiração nas formas dos termos subdominantes das contribuições L e H para a amplitude, pode-se assumir uma lagrangiana efetiva de interação adicional dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{NR}^{int} = & \frac{v_1}{4} \left[\phi^\dagger \frac{(\nabla^2 \phi^\dagger)}{m^2} \phi^2 - \frac{(\nabla \phi^\dagger)^2}{m^2} \phi^2 \right] \\ & + \frac{v_2}{4} \left[\phi^\dagger \frac{(\nabla^2 \phi^\dagger)}{m^2} \phi^2 + \frac{(\nabla \phi^\dagger)^2}{m^2} \phi^2 \right] , \end{aligned} \quad (2.72)$$

que é a forma mais geral de interação local, quadrilinear, não relativística, de dimensão 6. Os novos vértices (não relativísticos) associados à $\mathcal{L}_{NR}^{int}$ são apresentados na fig. 2.5. É imediato perceber que a adição destas interações deixa a teoria efetiva não renormalizável e ela deve, então, ser vista como uma teoria com corte.

Figura 2.5 - Novos vértices (não relativísticos) de interação.

Vários novos gráficos, envolvendo estes vértices, contribuirão para o espalhamento na ordem de um loop (v^2), mas apenas aqueles mostrados na fig. 2.6 produzem contribuições em ordem p^2/m^2 . No cálculo destas contribuições, cortes ultravioletas tem que ser introduzidos, e as partes polinomiais do resultado (que são dependentes dos cortes) podem ser ajustadas para reproduzir as partes polinomiais da amplitude L . As contribuições não polinomiais para a amplitude, vindas destes gráficos, são dadas por

$$-\frac{m}{8\pi}v_0 \left(v_1 \frac{(p_1 - p_2)^2}{m^2} + v_2 \frac{(p_1 + p_2)^2}{m^2} \right) \left[\ln \left(\frac{4\Lambda_{NR}^2}{(p_1 - p_2)^2} \right) + i\pi \right], \quad (2.73)$$

Figura 2.6 - Diagramas que simulam as correções relativísticas em $\mathcal{O}(p^2/m^2)$.

de modo que, comparando com a parte não polinomial de (2.57), encontra-se

$$v_1 = -\frac{3\lambda}{32m^2} \quad e \quad v_2 = -\frac{\lambda}{16m^2}, \quad (2.74)$$

o que fixa a lagrangiana efetiva até ordem p^2/m^2 . Como antes, os contratermos necessários surgem do setor de energias altas para fazer a amplitude finita. Nota-se, ainda, que as correções relativísticas não podem ser interpretadas como originadas de um potencial a dois corpos.

3

Limite não relativístico da teoria de Chern-Simons escalar e o espalhamento Aharonov-Bohm

A discussão feita no capítulo anterior será aqui estendida para um caso mais envolvente e fisicamente mais significativo considerando, além da auto-interação quártica, o acoplamento mínimo de um campo escalar carregado com um campo de calibre governado por uma ação de Chern-Simons. O acoplamento de um campo de matéria com um campo de Chern-Simons puro, introduzido na ref. [17], foi estudado como um caso limite da teoria de calibre topologicamente massiva [11, 12] no calibre covariante [50, 51], e mais recentemente, a quantização do modelo fermiônico correspondente, no calibre de Coulomb, foi construída [52]. O modelo não relativístico correspondente [15], incluindo a auto-interação quártica [16], tem sido sugerido como uma teoria efetiva para o efeito Hall quântico fracionário [53] e como uma formulação de teoria de campos para o efeito Aharonov-Bohm [18].

3.1 Teoria de Chern-Simons escalar

O modelo considerado consiste de um campo escalar carregado, com auto-interação quártica, minimamente acoplado a um campo de calibre de Chern-Simons descrito pela densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^* \phi)^2 + \frac{\Theta}{2} \epsilon_{\sigma\mu\nu} A^\sigma \partial^\mu A^\nu, \quad (3.1)$$

onde $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ é a derivada covariante, $\epsilon_{\sigma\mu\nu}$ é o tensor completamente anti-simétrico normalizado com $\epsilon_{012} = +1$ e as unidades e métrica são as mesmas já fixadas.

Como está posto, A^μ não é uma variável dinâmica, sua equação de movimento representa, de fato, um vínculo imposto sobre o sistema e portanto não existe partículas reais associadas ao campo de calibre. Contudo, é preciso especificar o calibre para realizar cálculos e, adicionando um termo de fixação de calibre à lagrangiana (3.1), o campo de calibre pode ser tratado dinamicamente nas linhas internas. Por conveniência para a discussão do limite não relativístico da teoria, o calibre de Coulomb onde

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{\xi}{2} (\partial_i A^i)^2 \quad (3.2)$$

será fixado. Neste caso, o propagador livre do campo de calibre é dado por

$$D_{\mu\nu}(k) = -\frac{i}{\xi} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2)^2} + \frac{1}{\Theta} \epsilon_{\mu\nu\rho} \frac{\bar{k}^\rho}{k^2}, \quad (3.3)$$

onde $\bar{k} = (0, k^1, k^2)$, que se reduz, no limite de Landau ($\xi \rightarrow \infty$), a uma forma completamente anti-simétrica nos índices de Minkowski cujas únicas componentes não nulas são

$$D_{0i}(k) = -D_{i0}(k) = \frac{1}{\Theta} \frac{\epsilon_{ij} k^j}{k^2}, \quad (3.4)$$

com $\epsilon_{ij} = \epsilon_{0ij}$. Esta fixação de calibre coincide com a escolha feita na ref. [18] onde o modelo não relativístico correspondente é discutido. Note que, requerendo que ξ em (3.4) seja adimensional, a dimensão de massa de A^μ é

fixada como $1/2$ e o parâmetro Θ fica com dimensão de massa. Os outros parâmetros dimensionais que aparecem em (3.1) são e e λ cujas dimensões são, respectivamente, $1/2$ e 1 . Como mencionado no capítulo anterior, em $2+1$ dimensões, a dimensão do campo de matéria bosônico é igual a $1/2$ e seu propagador livre é dado por

$$\Delta(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (3.5)$$

Como pode ser visto da lagrangiana de interação em (3.1),

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{\lambda}{4}(\phi^*\phi)^2 - ieA_\mu(\phi\partial^\mu\phi^* - \phi^*\partial^\mu\phi) + e^2 A_\mu A^\mu \phi^*\phi, \quad (3.6)$$

além do vértice quadrilinear de auto-interação, há dois vértices que surgem do acoplamento mínimo do campo escalar com A^μ . As regras de Feynman correspondentes são apresentadas na figura 3.1, onde as linhas onduladas representam o propagador do campo de calibre.

Figura 3.1 - Regras de Feynman para os vértices de interação.

A forma do propagador do campo de calibre (3.4) também interfere na contagem de potências. Para um gráfico genérico G , o grau de divergência superficial é dado por

$$d(G) = 3 - \frac{1}{2}N_\phi - N_A - V_{\phi^4}, \quad (3.7)$$

onde N_ϕ e N_A são os números de linhas externas dos campos ϕ e A^μ e V_{ϕ^4} é o número de vértices de auto-interação do diagrama. Como será visto adiante, as correções, em ordem de um loop, para as auto energias de ambos os campos de matéria e de calibre são, de fato, linearmente divergentes enquanto que as correções dos vértices do acoplamento mínimo (trilinear e "gaivota") são

finitas, embora superficialmente divergentes. A função de quatro pontos de partículas, a correção do vértice de auto-interação, tem também contribuições divergentes. De fato, os gráficos de um loop contendo o vértice gaivota são linearmente divergentes. Portanto, a inclusão de um vértice nú ϕ^4 na lagrangiana é necessária para a renormalização da teoria.

Considere, inicialmente, a auto-energia do campo de matéria na ordem de um loop, apresentada diagramaticamente na fig. 3.2. Devido à anti-simetria do propagador livre do campo de calibre (3.4), as contribuições que representam emissão e absorção de um partícula de calibre virtual são identicamente nulas, o que não acontece no caso fermiônico [17, 52]. A alça com pescoço de calibre, a última parcela na fig. 3.2, anula-se por conjugação de carga que se manifesta, no caso de partículas escalares, no fato em que loops de partícula contendo um número ímpar de vértices trilineares ($\sim e^{2n+1}$) trocam de sinal quando o sentido do momento de loop é invertido. Assim, a auto-energia do campo escalar, em um loop, reduz-se ao gráfico alça e um corte ultravioleta simples, Λ_0 , na integração sobre $|k|$ produz

$$\hat{\Sigma}^{(1)}(m; \Lambda_0) = \frac{-i\lambda}{2} \int^{\Lambda_0} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{i}{[k^2 - m^2 + i\epsilon]} = \frac{i\lambda}{8\pi} m - \frac{i\lambda}{8\pi} \Lambda_0. \quad (3.8)$$

Figura 3.2 - Auto-energia do campo de matéria em um loop.

Caso fosse usada regularização dimensional, que atua como uma renormalização a nível de um loop em espaços de dimensão ímpar, obter-se-ia apenas a parte finita da expressão acima. Vê-se que $\hat{\Sigma}^{(1)}$ não depende do momento externo e assim não existe renormalização de função de onda em um loop. O contratermo de massa pode ser escrito como $-\delta m^2 \phi^* \phi$ com $\delta m^2 = -i\hat{\Sigma}^{(1)}$. Obviamente, se a ordenação normal tivesse sido assumida no presente caso, não existiria correção de massa a nível de um loop. De agora por diante, o rótulo ⁽¹⁾ indica quantidades em ordem de um loop e não até um loop como no capítulo anterior.

A auto-energia do campo de calibre, a polarização do vácuo, em um loop possui duas parcelas divergentes representadas pelos diagramas mostrados na figura 3.3, e é dada por

$$\Pi_{\mu\nu}^{(1)}(q) = e^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{(2k+q)_\mu (2k+q)_\nu}{[k^2 - m^2 + i\epsilon] [(k+q)^2 - m^2 + i\epsilon]} - 2e^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{g_{\mu\nu}}{[k^2 - m^2 + i\epsilon]} . \quad (3.9)$$

Figura 3.3 - Polarização do vácuo em um loop.

Uma vez que a polarização do vácuo (em um loop) não envolve o propagador de A^μ , ela é independente da fixação de calibre escolhida. Usando o truque de Feynman (2.21) para simplificar o denominador da primeira parcela (a bolha de partícula) e utilizando a fórmula

$$I_{D,\zeta}(a) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[k^2 - a^2 + i\epsilon]^\zeta} = \frac{i^{1-2\zeta} \Gamma(\zeta - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} \Gamma(\zeta)} [a^2 - i\epsilon]^{\frac{D}{2} - \zeta} , \quad (3.10)$$

chega-se à polarização do vácuo dimensionalmente renormalizada (que é, naturalmente, independente de calibre) dada por

$$\Pi_{\mu\nu}^{(1)}(q) = -\frac{i e^2}{2\pi} m \left(1 - \int_0^1 dx \sqrt{1 - q^2 x(1-x)/m^2} \right) \frac{1}{q^2} [q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu] . \quad (3.11)$$

A integral em x acima pode ser feita exatamente mas será de interesse adiante apenas o regime de momentos baixos, $|q^2| \ll m^2$, onde tem-se

$$\Pi_{\mu\nu}^{(1)}(q) \simeq -\frac{i e^2}{24\pi m} \left(1 + \frac{q^2}{20m^2} \right) [q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu] . \quad (3.12)$$

Usando uma regularização de corte simples, que não é invariante por mudanças de calibre, obtém-se uma parcela adicional, $\frac{ie^2}{6\pi}\Lambda_0 g_{\mu\nu}$, que é divergente, e a transversalidade da polarização do vácuo é perdida. Deve-se salientar também que, a natureza transversal da parte finita requer a inclusão do gráfico alça. Por esta razão é mais conveniente usar o produto ordinário de operadores em $\mathcal{L}_{int}$, dada por (3.6), no lugar da ordem de Wick. Nota-se ainda que, apenas um termo de Maxwell é gerado por correções radiativas ao propagador do campo de calibre, em contraste com o caso fermiônico onde um termo de Chern-Simons também é induzido [12, 56]. A correção na ordem de um loop para o vértice vetorial do acoplamento mínimo, mostrada na fig. 3.4, é finita. A outra possível contribuição, que tem um vértice trilinear e outro de auto-interação inseridos em um loop de partícula, é nula por conjugação de carga. A soma das duas primeiras parcelas, aquelas que envolvem o vértice gaivota, $\Gamma_{3(S)}^{(1)\mu}$, é dada por

$$\Gamma_{3(S)}^{(1)\mu} = \frac{2ie^3}{\Theta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(2p-k)^\sigma \epsilon_{\sigma\nu\rho} \bar{k}^\rho g^{\nu\mu}}{k^2 [(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon]} - [p \leftrightarrow p'] . \quad (3.13)$$

Figura 3.4 - Correção na ordem de um loop para o vértice trilinear.

Esta contribuição pode ser calculada exatamente, com o prévio auxílio de (2.21), e obtém-se, para as pernas externas de partículas na concha de massa,

$$\Gamma_{3(S)}^{(1)0} = 0 \quad (3.14)$$

e

$$\Gamma_{3(S)}^{(1)l} = \frac{-e^3}{2\pi\Theta} \epsilon_{ij} g^{jl} \left[\frac{p^i \sqrt{m^2 + p^2}}{\sqrt{m^2 + \sqrt{m^2 + p^2}}} - \frac{p'^i \sqrt{m^2 + p'^2}}{\sqrt{m^2 + \sqrt{m^2 + p'^2}}} \right] \quad (3.15)$$

para $l = 1, 2$. Esta contribuição não foi considerada no cálculo do momento magnético anômalo usando o calibre de Landau covariante na ref. [50], mas é importante na análise presente. Na situação particular em que $p^0 = p'^0$ (i.e. $p^2 = p'^2$ para as partículas na concha de massa) e que é a relevante na discussão do espalhamento no centro de massa tem-se, definindo $q^\mu = p^\mu - p'^\mu$,

$$\Gamma_{3(s)}^{(1)l} \simeq \frac{-e^3}{4\pi\Theta} [\epsilon_{ij} q^i g^{jl}] \left(1 + \frac{p^2}{m^2}\right). \quad (3.16)$$

A última parcela na fig. 3.4, o gráfico triângulo, é dada por

$$\Gamma_{3(T)}^{(1)\mu} = \frac{ie^3}{\Theta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(2p-k)^\sigma \epsilon_{\sigma\nu\alpha} \bar{k}^\nu (2p'-k)^\nu (p+p'-2k)^\mu}{k^2 [(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon] [(p'-k)^2 - m^2 + i\epsilon]}. \quad (3.17)$$

Usando o truque de Feynman para um denominador com três fatores (i.e. (2.21) aplicada duas vezes) pode-se escrever, para $p^2 = p'^2 = m^2$,

$$\begin{aligned} & \left\{ k^2 [(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon] [(p'-k)^2 - m^2 + i\epsilon] \right\}^{-1} \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{-2y}{[y(k^0 - Q^0)^2 - (k - yQ)^2 - (yQ_0^2 - y^2Q^2) + i\epsilon]^3}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde $Q^\mu(x) = p^\mu - q^\mu(1-x)$. Com isto, fazendo as substituições convenientes, as integrais em k^0 e k podem ser calculadas e obtém-se

$$\Gamma_{3(T)}^{(1)\mu} = \frac{e^3}{8\pi\Theta} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left[\frac{A^\mu}{(Q_0^2 - yQ^2)^{3/2}} + \frac{B^\mu}{(Q_0^2 - yQ^2)^{1/2}} \right] \quad (3.19)$$

com os numeradores dados por

$$A^0 = \epsilon_{ij} p^i q^j Q^0 (P^0 - 2Q^0), \quad (3.20)$$

$$B^0 = \epsilon_{ij} p^i q^j (-2), \quad (3.21)$$

$$A^i = \epsilon_{ij} p^i q^j Q^0 (P^i - 2yQ^i), \quad (3.22)$$

$$B^i = \epsilon_{ij} (4V^i + 2Q^0 q^i) g^{ji}, \quad (3.23)$$

onde $P^\mu = p^\mu + p'^\mu$ e $V^i = q^0 p^i - p^0 q^i$. A integração em y acima é simples mas aquela em x que sobra é muito complicada. Em lugar de buscar resolvê-la exatamente é preferível, para o uso posterior, encontrar o comportamento para momentos baixos e com $p^0 = p'^0$. Neste caso, $Q_0^2 = m^2 + p^2$ e expandindo o integrando de (3.19) para $|p|/m$ pequeno obtém-se, após a adição de (3.19) e até ordem p^2/m^2 , a correção total do vértice trilinear em um loop como

$$\Gamma_3^{(1)0}(p, p - q)|_{q^0=0} \simeq \frac{-e^3}{4\pi\Theta} \left[\frac{\epsilon_{ij} p^i q^j}{m} \right] \quad (3.24)$$

e

$$\begin{aligned} \Gamma_3^{(1)i}(p, p - q)|_{q^0=0} \simeq & \frac{-e^3}{4\pi\Theta} [\epsilon_{ij} q^i g^{jl}] \left(2 + \frac{1}{12}(5 + \cos\theta) \frac{p^2}{m^2} \right) \\ & + \frac{e^3}{4\pi\Theta} \left[\frac{\epsilon_{ij} p^i q^j}{m} \right] \frac{(p + p')^i}{4m} \quad , \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde θ é o ângulo entre os vetores p e p' .

A correção do vértice gaivota, mostrada na fig. 3.5, é de quarta ordem na carga e , e portanto não participa do espalhamento partícula-partícula no nível de um loop. Nenhuma contribuição nova essencial é esperada desta correção uma vez que, devido a invariância de calibre, ela é atrelada àquela do vértice trilinear. De fato, observando que somente a segunda parcela da fig. 3.2 tem o momento externo fluindo através do diagrama, pode-se verificar graficamente as identidades de Ward a nível de um loop

Figura 3.5 - Correção em um loop para o vértice gaivota.

$$-\frac{1}{e}\Gamma_{3\mu}^{(1)}(p,p) = \frac{\partial \hat{\Sigma}^{(1)}}{\partial p^\mu}, \quad (3.26)$$

$$-\frac{1}{e^2}\Gamma_{4\mu\nu}^{(1)}(p,p;0) = \frac{\partial^2 \hat{\Sigma}^{(1)}}{\partial p^\mu \partial p^\nu}. \quad (3.27)$$

No calibre específico que está sendo usado, todas as quantidades acima são identicamente nulas. Note ainda que, há correções para o vértice quadrilinear do acoplamento mínimo com um vértice gaivota e um de auto-interação ou com vértices trilineares inseridos em um loop de partícula que não se anulam separadamente devido à conjugação de carga. Contudo, por causa da identidade de Ward

$$e \frac{\partial}{\partial q_\nu} \Gamma_3^{(1)\mu} = \Gamma_4^{(1)\mu\nu} \Big|_{q'=q}, \quad (3.28)$$

a soma deles não contribui para a correção do vértice.

Resta discutir a correção para o vértice de auto-interação, que representa de fato o espalhamento a duas partículas, na ordem de um loop. Esta função de quatro pontos, que será calculada na seção seguinte, é linearmente divergente e portanto um contratermo da forma $C(\Lambda_0)(\phi^*\phi)^2$ deve ser introduzido na lagrangiana. Contratermo linear em p^μ , correspondendo a uma subtração de Taylor de primeira ordem no esquema BPHZ, não aparece devido a invariância rotacional, um fato que pode ser verificado explicitamente.

O procedimento do corte intermediário pode ser aplicado ao cálculo das correções radiativas apresentadas anteriormente. Para a auto-energia, a separação das contribuições dos setores L e H dá, até ordem $\eta^2 \approx p^2/m^2$,

$$\hat{\Sigma}_L^{(1)}(m;\Lambda) \simeq -\frac{i\lambda}{16\pi}m \left[\frac{\Lambda^2}{m^2} - \frac{1}{4} \frac{\Lambda^4}{m^4} \right] \quad (3.29)$$

e

$$\hat{\Sigma}_H^{(1)}(m;\Lambda,\Lambda_0) \simeq \frac{i\lambda}{16\pi}m \left[\frac{\Lambda^2}{m^2} - \frac{1}{4} \frac{\Lambda^4}{m^4} \right] + \frac{i\lambda}{8\pi}m - \frac{i\lambda}{8\pi}\Lambda_0, \quad (3.30)$$

enquanto que, para $|q^2| \ll m^2$, tem-se

$$\begin{aligned}\Pi_L^{(1)\mu\nu}(q; \Lambda) \simeq & \frac{ie^2}{6\pi} m g^{\mu\nu} \left[\frac{\Lambda^2}{m^2} - \frac{1}{2} \frac{\Lambda^4}{m^4} - \frac{1}{4} \frac{q^2}{m^2} \left(\frac{1}{3} \frac{\Lambda^2}{m^2} - \frac{1}{4} \frac{\Lambda^4}{m^4} \right) \right] \\ & + \frac{ie^2}{16\pi} \frac{q^\mu q^\nu}{m} \left[\frac{1}{3} \frac{\Lambda^2}{m^2} - \frac{1}{4} \frac{\Lambda^4}{m^4} \right]\end{aligned}\quad (3.31)$$

e

$$\begin{aligned}\Pi_H^{(1)\mu\nu}(q; \Lambda, \Lambda_0) \simeq & -\frac{ie^2}{24\pi m} \left(1 + \frac{q^2}{20m^2} \right) [q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu] \\ & + \frac{ie^2}{6\pi} \Lambda_0 g^{\mu\nu} - \Pi_L^{(1)\mu\nu}(q; \Lambda).\end{aligned}\quad (3.32)$$

A contribuição L para a correção do vértice trilinear, quando $p^0 = p'^0$, é dada até $\mathcal{O}(\eta^2)$ por

$$\Gamma_{3L}^{(1)0} \simeq 0 \quad \text{e} \quad \Gamma_{3L}^{(1)i} \simeq \frac{-e^3}{4\pi\Theta} [\epsilon_{ij} q^i g^{jl}] \left\{ \frac{\Lambda^2}{m^2} - \frac{3}{4} \frac{\Lambda^4}{m^4} \right\}. \quad (3.33)$$

Vê-se que todas as contribuições do setor L são polinomiais em Λ/m e que as correções radiativas (partes finita e infinita) vêm dos estados intermediários de altas energias, como era de se esperar.

3.2 Espalhamento de duas partículas

Nesta seção, o espalhamento partícula-partícula é calculado integralmente até ordem p^2/m^2 e até um loop na interação. Por simplicidade, todos os cálculos são feitos no referencial do centro de massa e as partículas externas tomadas na concha de massa, de modo que a amplitude a nível de árvore, representada na fig. 3.6, é dada por

$$\begin{aligned}A^{(0)} &= -\lambda + \left\{ i e^2 (p_1 + p'_1)^\mu D_{\mu\nu}(p_1 - p'_1) (p_2 + p'_2)^\nu \Big|_{\text{CM}} + [p'_1 \leftrightarrow p'_2]_{\text{CM}} \right\} \\ &= -\lambda - i \frac{8e^2}{\Theta} \sqrt{m^2 + p^2} \cot \theta \simeq -\lambda - i \frac{8e^2}{\Theta} m \left(1 + \frac{p^2}{2m^2} \right) \cot \theta, \quad (3.34)\end{aligned}$$

onde θ é o ângulo de espalhamento e m é a massa física da partícula bosônica. Vê-se que, novamente, a amplitude está fixada como $-i$ vezes a função 1P correspondente, a fim de facilitar a comparação com o caso não relativístico discutido na ref. [18].

Figura 3.6 - Espalhamento em nível de árvore.

Considere, inicialmente, as contribuições para a amplitude em um loop que vêm da polarização do vácuo, minimamente subtraída, e da correção do vértice trilinear inseridas no nível de árvore, esboçadas na fig. 3.7. Usando a equação (3.12) para o tensor de polarização com $q^0 = 0$, obtém-se

$$\begin{aligned}
 A^{(p)} &= i e^2 (p_1 + p'_1)^\sigma D_{\sigma\mu}(q_1) \Pi^{\mu\nu}(q_1) D_{\nu\rho}(q_1) (p_2 + p'_2)^\rho \Big|_{\text{CM}} + [p'_1 \leftrightarrow p'_2]_{\text{CM}} \\
 &\simeq -\frac{e^4}{2\pi\Theta^2} m \left\{ \frac{1}{3} + \frac{7}{15} \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} + \frac{1}{5} \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \cos \theta \right\} + (\theta \leftrightarrow \pi - \theta) \\
 &\simeq -\frac{2e^4}{\pi\Theta^2} m \left\{ \frac{1}{6} + \frac{7}{30} \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Figura 3.7 - Contribuições (diretas) das inserções de polarização de vácuo (a) e correção de vértice (b).

De modo similar, a correção do vértice trilinear $\Gamma_3^{(1)\mu}$, dada por (3.24) e (3.25), conduz a seguinte contribuição para a amplitude

$$\begin{aligned}
A^{(v)} &= 2 \left\{ -e \Gamma_3^{(1)\mu}(p_1, p'_1) D_{\mu\nu}(p_1 - p'_1) (p_2 + p'_2)^\nu \right|_{\text{CM}} + [p'_1 \leftrightarrow p'_2]_{\text{CM}} \Big\} \\
&= -\frac{e^4}{\pi \Theta^2} m \left\{ 2 + \frac{5}{3} \frac{p^2}{m^2} + \frac{1}{3} \frac{p^2}{m^2} \cos \theta \right\} + (\theta \leftrightarrow \pi - \theta) \\
&\simeq -\frac{2e^4}{\pi \Theta^2} m \left\{ 2 + \frac{5}{3} \frac{p^2}{m^2} \right\}. \tag{3.36}
\end{aligned}$$

Diagramas, como os mostrados na fig. 3.8, que misturam o auto-acoplamento com a troca de um bóson de calibre, não contribuem para o espalhamento na ordem de um loop. O primeiro anula-se por conjugação de carga, o segundo é zero devido a anti-simetria do propagador do campo de calibre enquanto que o diagrama "cálice" é proporcional a $\sin \theta$ e, portanto, é eliminado pelo seu parceiro com as partículas externas trocadas. Esta não mistura dos vértices do acoplamento mínimo e do vértice de auto-interação (pelo menos na ordem de um loop) significa, como será visto, que a interação $\lambda \phi^4$ comparece fundamentalmente para renormalizar o espalhamento partícula-partícula devido a troca de bósons de Chern-Simons.

Figura 3.8 - Diagramas básicos que misturam as interações.

O espalhamento a duas partícula na ordem de um loop mais importante, genuíno, vem dos diagramas grafados na fig. 3.9 e, para calculá-los será usado o procedimento de corte intermediário introduzido na seção 1.2. O grupo (a) é o espalhamento da auto-interação, que é finito e foi calculado na seção 2.2. Somando separadamente as contribuições de cada gráfico, no referencial do centro de massa, obtém-se

$$A_L^{(a)} \simeq \frac{\lambda^2}{32\pi m} \left\{ \left(1 - \frac{p^2}{2m^2} \right) \left[\ln \left(\frac{\Lambda^2}{p^2} \right) + i\pi \right] - \frac{p^2}{\Lambda^2} - \frac{p^4}{2\Lambda^4} + \frac{3\Lambda^2}{2m^2} - \frac{21\Lambda^4}{16m^4} \right\}, \tag{3.37}$$

$$A_H^{(a)} \simeq \frac{\lambda^2}{32\pi m} \left\{ - \left(1 - \frac{p^2}{2m^2} \right) \ln \left(\frac{\Lambda^2}{4m^2} \right) + 4 - \frac{p^2}{6m^2} + \frac{p^2}{\Lambda^2} + \frac{p^4}{2\Lambda^4} - \frac{3\Lambda^2}{2m^2} + \frac{21\Lambda^4}{16m^4} \right\} \quad (3.38)$$

e, assim, $A^{(a)} = A_L^{(a)} + A_H^{(a)}$ é dada por

$$A^{(a)} \simeq \frac{\lambda^2}{32\pi m} \left\{ \left(1 - \frac{p^2}{2m^2} \right) \left[\ln \left(\frac{4m^2}{p^2} \right) + i\pi \right] + 4 - \frac{p^2}{6m^2} \right\}. \quad (3.39)$$

Figura 3.9 - Espalhamento partícula-partícula na ordem de um loop. Na especificação de momentos apresentada, $s = p_1 + p_2$, $q = p_1 - p_1'$ e $u = p_1' - p_2$.

Como foi enfatizado no capítulo anterior, no caso da teoria $\lambda\phi^4$ somente, o procedimento de corte intermediário utilizado para obter a expansão $|p|/m$

das amplitudes reproduz a expansão correta. No presente caso, e certamente em muitas outras teorias, onde resultados analíticos são muito difíceis (se não impossíveis) de se obter, este procedimento emerge como uma ferramenta de cálculo útil para determinar a expansão $|p|/m$ das amplitudes, tendo no resultado exato do caso ϕ^4 uma base de confiança.

Os diagramas em forma de caixa da fig. 3.9(b) também são calculados separadamente. Considere, inicialmente, o gráfico "caixa reta" correspondendo à troca direta de duas partículas virtuais de calibre, a primeira parcela na fig. 3.9. Após efetuar as integrações

em k^0 e angular, ambas usando o teorema de Cauchy-Goursart [57], e separar a integração em $|k|$ em suas contribuições de alta e baixa energias chega-se, adicionado o parceiro ($p' \leftrightarrow -p'$), a

$$A_L^{(b)dir} \simeq -\frac{2e^4}{\pi\Theta^2}m \left\{ \left(1 + \frac{p^2}{2m^2}\right) [\ln(2|\sin\theta|) + i\pi] - \frac{p^2}{m^2} - \frac{1}{2} \cos\theta \ln\left(\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\right) \frac{p^2}{m^2} - (1-2\cos^2\theta) \frac{p^4}{\Lambda^4} \right\} \quad (3.40)$$

e

$$A_H^{(b)dir} \simeq -\frac{2e^4}{\pi\Theta^2}m \left\{ (1-2\cos^2\theta) \frac{p^4}{\Lambda^4} \right\} . \quad (3.41)$$

Somando (3.40) e (3.41), obtém-se

$$A^{(b)dir} \simeq -\frac{2e^4}{\pi\Theta^2}m \left\{ \left(1 + \frac{p^2}{2m^2}\right) [\ln(2|\sin\theta|) + i\pi] - \frac{p^2}{m^2} - \frac{1}{2} \cos\theta \ln\left(\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\right) \frac{p^2}{m^2} \right\} . \quad (3.42)$$

Vê-se que a contribuição do diagrama caixa reta para a amplitude vem inteiramente do setor de baixa energia dos estados intermediários, de estados não relativísticos. Os principais passos deste cálculo (e dos outros por vir) são apresentados no Apêndice 5.3.

O contrário acontece com o diagrama "caixa torcida", o segundo na fig. 3.9(b), cuja contribuição vem totalmente do setor dos estados intermediários

de altas energias. A integração sobre k^0 é facilmente feita como uma integral de contorno, mas a integração sobre o plano k tem uma parte angular bastante não trivial. A possibilidade alternativa de introduzir parâmetros de Feynman permite que toda a integração sobre k seja efetuada, mas com o custo das integrais paramétricas resultantes serem intratáveis. Porém, introduzindo o corte intermediário e expandindo os integrandos dos setores L e H, as integrações angular e radial são simplificadas e obtém-se, após adicionar o parceiro com partículas finais trocadas,

$$A_L^{(b)torc} \simeq 0 \quad \text{e} \quad A^{(b)torc} \simeq A_H^{(b)torc} \simeq -\frac{2e^4}{\pi\Theta^2}m \left\{ \frac{p^2}{2m^2} \right\}. \quad (3.43)$$

Do mesmo modo que no caso dos dois últimos gráficos da Fig. 3.9(a), diagramas que envolvem propagação para trás no tempo possuem uma contribuição muito pequena, dependente de Λ , vindo do setor L. Para o diagrama da caixa torcida esta contribuição começa em ordem η^3 (ver Apêndice 3) e por isto não aparece em (3.43). A amplitude "caixa" total, $A^{(b)} = A^{(b)dir} + A_L^{(b)torc}$, é finita e, até ordem p^2/m^2 , é dada por

$$A^{(b)} \simeq -\frac{2e^4}{\pi\Theta^2}m \left\{ \left(1 + \frac{p^2}{2m^2}\right) [\ln(2|\sin \theta|) + i\pi] - \frac{p^2}{2m^2} - \frac{1}{2} \cos \theta \ln \left(\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right) \frac{p^2}{m^2} \right\}. \quad (3.44)$$

O terceiro grupo, o espalhamento envolvendo o vértice gaivota, tem que ser tratado mais cuidadosamente, uma vez que ele carrega a divergência da função de quatro pontos. Pode-se ver de imediato que a integração sobre k^0 do primeiro diagrama, a bolha de calibre, divergiria se fosse feita sozinha. Contudo, os dois diagramas triangulares, que dão idênticas contribuições, também possuem integrações sobre k^0 divergentes mas que exatamente compensam a divergência do primeiro gráfico, como se discute no Apêndice 5.3. Portanto, tratando todos os diagramas do grupo (c) conjuntamente, não existe a necessidade de manter nenhum corte e a integração sobre k^0 é irrestrita. A integração restante, no plano k , tem duas partes. Uma é finita e tem a mesma integração angular que aquela aparecendo na caixa reta. A outra, com uma integração angular distinta mas executável nos mesmos

moldes, é infinita, de modo que um corte ultravioleta Λ_0 tem que ser introduzido na integração sobre $|k|$ do setor H. Resulta que a contribuição dos estados intermediários de baixa energia para o espalhamento gaivota, até ordem $\eta^2 \approx p^2/m^2$, é dada por

$$A_L^{(c)} \simeq -\frac{2e^4}{\pi\Theta^2}m \left\{ \left(1 + \frac{p^2}{2m^2}\right) \left[\ln\left(\frac{\Lambda^2}{p^2}\right) - \ln(2|\sin\theta|) \right] + \frac{p^2}{m^2} + \frac{1}{2}\cos\theta \ln\left(\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\right) \frac{p^2}{m^2} + \frac{1}{2}(1-2\cos^2\theta) \frac{p^4}{\Lambda^4} + \frac{\Lambda^4}{16m^4} \right\}, \quad (3.45)$$

enquanto que, a contribuição do setor H, regularizada por corte e na mesma ordem, fica

$$A_H^{(c)} \simeq -\frac{2e^4}{\pi\Theta^2}m \left\{ -\left(1 + \frac{p^2}{2m^2}\right) \ln\left(\frac{\Lambda^2}{4m^2}\right) - 1 - \frac{1}{2}(1-2\cos^2\theta) \frac{p^4}{\Lambda^4} - \frac{\Lambda^4}{16m^4} + \left[\frac{\Lambda_0}{m}\right] \right\}. \quad (3.46)$$

Assim, a contribuição (c) total para a amplitude a dois corpos é

$$A^{(c)} \simeq -\frac{2e^4}{\pi\Theta^2}m \left\{ \left(1 + \frac{p^2}{2m^2}\right) \left[\ln\left(\frac{4m^2}{p^2}\right) - \ln(2|\sin\theta|) \right] - 1 + \frac{1}{2}\cos\theta \ln\left(\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\right) \frac{p^2}{m^2} + \frac{p^2}{m^2} \right\} - \frac{2e^4}{\pi\Theta^2}\Lambda_0. \quad (3.47)$$

O termo constante divergente acima pode ser suprimido por um contratermo da forma $-\frac{2e^4}{\pi\Theta^2}\Lambda_0(\phi^*\phi)^2$ introduzido na lagrangiana. Pode-se também imaginar que a constante de auto-acoplamento nua λ carrega uma parte divergente que exatamente cancela a divergência da função de quatro pontos. Em qualquer caso, a parte finita de (3.47) será tomada como a contribuição (c) renormalizada a nível de um loop. Este seria o resultado caso a renormalização dimensional tivesse sido empregada.

Antes de somar todas as contribuições para obter a amplitude total em um loop, é interessante separar o espalhamento total de Chern-Simons adicionando as partes (b) e (c). Obtém-se

$$A^{(CS)} \simeq -\frac{2e^4}{\pi\Theta^2}m \left\{ \left(1 + \frac{p^2}{2m^2}\right) \left[\ln\left(\frac{4m^2}{p^2}\right) + i\pi \right] - 1 + \frac{p^2}{2m^2} \right\}, \quad (3.48)$$

e é notável que o cancelamento dos termos dependentes de θ das amplitudes caixa e gaivota aconteça para ambas as ordens dominante e subdominante em $|p|/m$. A amplitude de espalhamento total renormalizada em um loop, $A^{(a)} + A^{(CS)} + A^{(p)} + A^{(v)}$, até a ordem p^2/m^2 é dada por

$$\begin{aligned} A^{(1)} \simeq & m \left(\frac{\lambda^2}{32\pi m^2} - \frac{2e^4}{\pi\Theta^2} \right) \left[\ln\left(\frac{4m^2}{p^2}\right) + i\pi \right] \\ & - m \left(\frac{\lambda^2}{32\pi m^2} + \frac{2e^4}{\pi\Theta^2} \right) \frac{p^2}{2m^2} \left[\ln\left(\frac{4m^2}{p^2}\right) + i\pi \right] \\ & + m \left(\frac{\lambda^2}{8\pi m^2} - \frac{7e^4}{3\pi\Theta^2} \right) - m \left(\frac{\lambda^2}{192\pi m^2} + \frac{24e^4}{5\pi\Theta^2} \right) \frac{p^2}{m^2} \quad (3.49) \end{aligned}$$

O termo dominante do resultado acima coincide com o resultado da ref. [55], embora, como já foi mencionado, a interpretação da origem da divergência ultravioleta da teoria não relativística apresentada por estes autores é equivocada. Os termos subdominantes (em $|p|/m$) levam a correções relativísticas ao espalhamento Aharonov-Bohm, como será visto posteriormente.

3.3 O modelo não relativístico e o efeito Aharonov-Bohm

Nesta seção o modelo de Chern-Simons não relativístico e a sua conexão com o espalhamento Aharonov-Bohm, descritos na ref. [18], serão sintetizados. A lagrangiana não relativística, para um campo de spin 0 com auto-interação quártica e acoplado minimamente ao campo de Chern-Simons, é dada por

$$\mathcal{L}_{NR} = \psi^* \left(iD_t + \frac{\mathbf{D}^2}{2m} \right) \psi - \frac{v_0}{4} (\psi^* \psi)^2 + \frac{\Theta}{2} \partial_t \mathbf{A} \times \mathbf{A} - \Theta A_0 \nabla \times \mathbf{A}. \quad (3.50)$$

O auto-acoplamento $(\psi^*\psi)^2$, na dinâmica quântica não relativística, corresponde a um potencial de interação entre pares de partículas dado por $\delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$, i.e. uma interação de contato. Com a mesma fixação de calibre do caso relativístico, equação (3.2) e $(\xi \rightarrow \infty)$, o propagador do campo de Chern-Simons coincide com aquele usado na Sec. 3.1, equação (3.4). O propagador do campo de matéria ψ é dado por (2.5) e os vértices são apresentados na fig. 3.10.

Figura 3.10 - Vértices que aparecem no modelo não relativístico.

O espalhamento partícula-partícula, até ordem de um loop, tem as contribuições mostradas na fig. 3.11 (linhas cheias, agora, representando propagadores não relativísticos) e, usando as regras acima, obtém-se

$$\mathcal{A}_{NR}^{\text{reg}} = -v_0 - i \frac{2e^2}{m\Theta} \cot \theta + \frac{m}{8\pi} \left(v_0^2 - \frac{4e^4}{m^2\Theta^2} \right) \left[\ln \left(\frac{\Lambda_{NR}^2}{\mathbf{p}^2} \right) + i\pi \right], \quad (3.51)$$

Figura 3.11 - Espalhamento não relativístico (direto) em ordem de (a) árvore e de (b) um loop.

onde Λ_{NR} é um corte ultravioleta [18]. Os cálculos no presente caso são mais simples do que aqueles relativísticos e apresentam aspectos similares, como o cancelamento das partes dependentes do ângulo de espalhamento entre os gráficos "caixa" e "triângulo" da fig. 3.11.

A renormalização é implementada através da redefinição da constante de auto-acoplamento, $v_0 = v + \delta v$, de modo tal que a amplitude total renormalizada, até ordem de um loop (e^4, v^2), é dada por

$$\mathcal{A}_{NR}^{ren} = -v - i \frac{2e^2}{m\Theta} \cot \theta + \frac{m}{8\pi} \left(v^2 - \frac{4e^4}{m^2\Theta^2} \right) \left[\ln \left(\frac{\mu^2}{p^2} \right) + i\pi \right], \quad (3.52)$$

onde μ é uma escala de massa (energia) arbitrária, introduzida pela renormalização, que quebra a invariância de escala da amplitude. Contudo, vê-se de imediato que há valores críticos do parâmetro de auto-acoplamento renormalizado, a saber

$$v_c^\pm = \pm \frac{2e^2}{m|\Theta|}, \quad (3.53)$$

para os quais o espalhamento em um loop se anula e a invariância de escala é recuperada. A existência desta invariância de escala para os valores críticos da interação de contato foi explicitamente verificada até três loops usando regularização dimensional [58] e, recentemente, a sua validade foi provada em todas as ordens em teoria de perturbações [59].

A conexão entre este modelo e o efeito Aharonov-Bohm pode ser vista analisando o setor de duas partículas da teoria descrita pela lagrangiana (3.50), excluindo a auto-interação [18,10]. Sem adicionar termo de fixação de calibre, a equação de movimento para A^μ pode ser resolvida em termos da corrente de matéria, e o hamiltoniano gerado leva a uma equação de Schrödinger que, no setor de duas partículas e no referencial do centro de massa, reduz-se à equação resolvida por Aharonov e Bohm [9], a qual traduz o espalhamento de uma partícula por uma linha de fluxo. Considerando partículas idênticas, a amplitude de espalhamento não relativística associada ao efeito Aharonov-Bohm é da forma

$$\mathcal{A}_{AB} = -i \sqrt{\frac{1}{\pi|p|}} \sin(\pi\alpha) [\cot \theta - i \text{sgn}(\alpha)], \quad \theta \neq 0, \pi. \quad (3.54)$$

onde $\alpha = e^2/2\pi\Theta$ é o parâmetro de Aharonov-Bohm. A relação entre a teoria de Chern-Simons e o efeito Aharonov-Bohm fica evidente quando se constata que escolhendo $v = v_c^+$, correspondendo a uma interação de contato repulsiva, a amplitude (3.52) reproduz o espalhamento Aharonov-Bohm primeira ordem (e^2 na carga), a menos de um fator cinemático.

Do exposto acima, dentro do contexto de teorias quânticas de campos, pode-se concluir que a interação de contato é essencial para renormalizar a amplitude de espalhamento de Chern-Simons e reproduzir o espalhamento Aharonov-Bohm perturbativamente. Um aspecto interessante do problema de Aharonov e Bohm é que ele possui solução exata mas, devido a singularidade do potencial, a expansão perturbativa quanto-mecânica, feita ingenuamente, leva a resultados incorretos [54]. A inclusão de um potencial $\delta(x)$ também pode ser feita no contexto da primeira quantização [60-63] e uma recente revisão do papel da interação de contato na descrição perturbativa do espalhamento Aharonov-Bohm e na física dos anyons é apresentada na ref. [64].

3.4 Correção relativística para o espalhamento Aharonov-Bohm

Antes de comparar os resultados do espalhamento obtidos com as teorias relativística e não relativística, as normalizações dos estados precisam ser ajustadas. Usando a versão de (2.56) para o referencial do centro de massa,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2w_p}}\right)^4 = \frac{1}{4m^2} \left[1 - \frac{p^2}{m^2} + \dots\right], \quad (3.55)$$

as amplitudes em nível de árvore e em um loop (equações (3.34) e (3.49)) são reescritas até ordem p^2/m , como

$$\mathcal{A}^{(0)} = -\frac{\lambda}{4m^2} - i\frac{2e^2}{m\Theta} \cot \theta + \left[\frac{\lambda}{4m^2} + i\frac{e^2}{m\Theta} \cot \theta \right] \frac{p^2}{m^2} \quad (3.56)$$

e

$$\mathcal{A}^{(1)} \simeq \frac{m}{8\pi} \left(\frac{\lambda^2}{16m^4} - \frac{4e^4}{m^2\Theta^2} \right) \left[\ln \left(\frac{4m^2}{p^2} \right) + i\pi \right]$$

$$-\frac{m}{8\pi} \left(\frac{3\lambda^2}{32m^4} - \frac{2e^4}{m^2\Theta^2} \right) \frac{p^2}{2m^2} \left[\ln \left(\frac{4m^2}{p^2} \right) + i\pi \right] \\ + \frac{m}{8\pi} \left(\frac{\lambda^2}{4m^4} - \frac{14e^4}{3m^2\Theta^2} \right) - \frac{m}{8\pi} \left(\frac{25\lambda^2}{96m^4} + \frac{74e^4}{15m^2\Theta^2} \right) \frac{p^2}{m^2} \quad (3.57)$$

A parte dominante (em $|p|/m$) da amplitude, até um loop, é dada por

$$\mathcal{A}^{\text{dom}} = -\frac{\lambda}{4m^2} - i\frac{2e^2}{m\Theta} \cot \theta + \frac{m}{8\pi} \left(\frac{\lambda^2}{16m^4} - \frac{4e^4}{m^2\Theta^2} \right) \left[\ln \left(\frac{4m^2}{p^2} \right) + i\pi \right], \quad (3.58)$$

e nota-se, de imediato, que a contribuição de um loop (ordem e^4) se anula para os valores críticos do parâmetro de auto-interação $\lambda_c^\pm = \pm 8me^2/|\Theta|$. Comparando a amplitude dominante com a amplitude determinada pela teoria não relativística (3.52), obtém-se $v = \lambda/4m^2$ (equação (2.67)) e os valores críticos que anulam as contribuições em um loop são relacionados por

$$v_c^\pm = \frac{\lambda_c^\pm}{4m^2} = \pm \frac{2e^2}{m|\Theta|} = \pm \frac{4\pi}{m} \alpha \operatorname{sgn}(\alpha), \quad (3.59)$$

onde $\alpha = e^2/2\pi\Theta$ é o parâmetro de Aharonov-Bohm. Escolhendo $\lambda = \lambda_c^+$, a amplitude (3.58) reduz-se a

$$\mathcal{A}^{\text{dom}}|_{\lambda=\lambda_c^+} = -i\frac{4\pi}{m} \alpha [\cot \theta - i \operatorname{sgn}(\alpha)], \quad (3.60)$$

que, a menos de um fator cinemático, é a amplitude de Aharonov-Bohm em ordem α .

O fato de que as parcelas subdominantes de (3.56) e (3.57) não se anulam para os valores críticos do parâmetro de auto-interação implica na existência de correções relativísticas para o espalhamento Aharonov-Bohm para partículas idênticas. Fixando $\lambda = \lambda_c^+$, obtém-se

$$\mathcal{A}^{\text{sub}} = \frac{4\pi}{m} \alpha \left[\operatorname{sgn}(\alpha) + \frac{i}{2} \cot \theta \right] \frac{p^2}{m^2} + \frac{17\pi}{3m} \alpha^2 \\ - \frac{\pi}{m} \alpha^2 \frac{p^2}{m^2} \left[\ln \left(\frac{4m^2}{p^2} \right) + i\pi \right] - \frac{54\pi}{5m} \alpha^2 \frac{p^2}{m^2}, \quad (3.61)$$

o que representa correções relativísticas para o espalhamento Aharonov-Bohm. Parte da correção do nível de árvore ($\sim \alpha$) é devido a normalização

dos estados e portanto tem origem puramente cinemática, mas não toda, uma vez que a amplitude correspondendo à troca de uma partícula de calibre virtual depende da energia das partículas no centro de massa como consequência do acoplamento mínimo. As outras correções vêm da contribuição de um loop (e^4) da expansão perturbativa e são de fato relativísticas. Termos desta natureza, proporcionais a α^2 , não existem no espalhamento não relativístico cujo resultado exato é ímpar em α . Tais correções podem, em princípio, ser detectadas em experimentos com partículas rápidas.

As contribuições não triviais para a correção não relativística, como a terceira parcela de (3.61), só podem ser incorporadas em um contexto não relativístico através da adição de novas interações não renormalizáveis à lagrangiana, de modo que a teoria resultante deve ser vista como uma teoria efetiva. Tais interações são da mesma natureza que aquelas que aparecem em (2.72) quando a correção relativística vier da auto interação. Pode-se considerar, também, termos de interação que surjam de um acoplamento não mínimo efetivo.

4

Conclusões

Neste trabalho, o limite não relativístico em teorias quânticas de campos, tratadas perturbativamente, é discutido de um ponto de vista novo, através da introdução de um corte intermediário Λ , que permite a determinação da expansão $|p|/m$ das amplitudes de espalhamento e possibilita a identificação das suas partes, oriundas dos estados intermediários de baixas e altas energias. Este procedimento é verificado através da aplicação à teoria $\lambda\phi^4$, para a qual existem resultados exatos para o espalhamento partícula-partícula em um loop, e a auto-energia em dois loops pode ser calculada exemplificando o esquema. Mostra-se que é possível proceder uma identificação entre a contribuição do setor de baixas energias e o resultado da teoria não relativística correspondente, mediante a reinterpretação do corte intermediário Λ como um corte ultravioleta não relativístico genuíno. Com a determinação da expansão $|p|/m$ das amplitudes de transição, encontra-se uma lagrangiana efetiva não relativística que reproduz os resultados até ordem p^2/m^2 . Vê-se que estas correções não podem ser descritas quanto-mecanicamente através de um potencial a dois corpos.

O outro exemplo discutido é a teoria de Chern-Simons escalar, cujo modelo não relativístico apresenta uma restauração da invariância de escala para valores críticos do parâmetro de auto-interação. Para um destes valores, correspondendo a uma interação de contato repulsiva, o modelo descreve corretamente a expansão perturbativa do espalhamento Aharonov-Bohm. Esta invariância de escala é quebrada já pela primeira correção relativística, em ordem p^2/m^2 , que representa uma correção relativística para o espalhamento Aharonov-Bohm. Tal correção possui termos proporcionais a α^2 , não e-

xistentes no espalhamento não relativístico, e que, em princípio, podem ser observados em experimentos com partículas rápidas.

Outros estudos são sugeridos pela discussão desenvolvida neste trabalho. Naturalmente, pode-se investigar esta correção relativística para o espalhamento Aharonov-Bohm dentro do contexto da mecânica quântica (primeira quantização) com o fim de estabelecer comparação e buscar aprimorar o entendimento físico de sua origem. O procedimento discutido nesta tese pode ser generalizado, tanto para outras teorias de campos, quanto para situações mais gerais, como um espaço-tempo de dimensão arbitrária. Uma possibilidade é discutir o limite não relativístico para a teoria de Chern-Simons escalar não abeliana. Um outro problema interessante consiste em investigar as correções relativísticas para o caso da teoria de um campo de Chern-Simons acoplado a um campo fermiônico. O modelo não relativístico correspondente, por causa da introdução de um termo de Pauli na lagrangiana, apresenta de partida invariância de escala. Além disso, pode-se também estudar teorias envolvendo férmions com várias componentes de sabor e investigar a natureza dos potenciais de interação na situação de momentos baixos.

5

Apêndices

5.1 Espalhamento partícula-partícula (teoria ϕ^4) em um referencial arbitrário

Usando o truque de Feynman, equação (2.21), a contribuição do canal s para a amplitude, dada pela equação (2.8), pode ser reescrita como

$$A^{(s)}(p_1, p_2) = \frac{-i\lambda^2}{2} \int_0^1 dx \times \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 - m^2 + [(p_1 + p_2)^2 - 2(p_1 + p_2)k]x + i\epsilon)} \quad (5.1)$$

Fazendo a substituição $k \rightarrow k + (p_1 + p_2)x$, obtém-se

$$A^{(s)} = \frac{-i\lambda^2}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[k^2 - a^2 + i\epsilon]^2} \quad (5.2)$$

onde

$$a^2 = m^2 - x(1-x)S, \quad (5.3)$$

com $S = (p_1 + p_2)^2$ representando uma das variáveis de Mandelstam. A integração sobre k^0 pode ser feita como uma integração de contorno em torno de um dos polos duplos $k^0 = \pm\sqrt{k^2 + a^2}$, resultando em

$$\begin{aligned}
A^{(s)} &= \frac{-i\lambda^2}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left(\frac{i}{4}\right) \frac{1}{[k^2 + a^2]^{3/2}} \\
&= \frac{\lambda^2}{16\pi} \int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{m^2 - x(1-x)\mathcal{S}}} \\
&= \frac{\lambda^2}{16\pi} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{S}}} \left[\ln \left(\frac{\sqrt{\mathcal{S}/4m^2 + 1}}{\sqrt{\mathcal{S}/4m^2 - 1}} \right) + i\pi \right]. \quad (5.4)
\end{aligned}$$

As outras contribuições para a amplitude em um loop, correspondendo aos canais t e u , são obtidas da expressão acima trocando $\mathcal{S}$ pelas outras variáveis de Mandelstam $\mathcal{T}$ e $\mathcal{U}$, dadas por (2.31), o que manifesta a completa "simetria de cruzamento" do espalhamento partícula-partícula na teoria $\lambda\phi^4$. Somando todas as contribuições chega-se, imediatamente, a (2.30).

5.2 $\hat{\Sigma}_{(2)}^{(\dim)}$ na teoria ϕ^4

Neste apêndice, a auto-energia em dois loops na teoria $\lambda\phi^4$ é calculada usando regularização dimensional. Em um espaço-tempo de d dimensões, repetindo os passos descritos logo antes da equação (2.34), obtém-se

$$\begin{aligned}
\hat{\Sigma}_{(2)} &= \frac{i\lambda^2}{3(2\pi)^{2d}} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{y}{[yC]^{d/2}} \\
&\quad \times \int d^d k d^d l \frac{1}{[k^2 + l^2 + Dp^2 - m^2 + i\epsilon]^3}, \quad (5.5)
\end{aligned}$$

onde C e D são dadas por (2.35) e (2.36). Usando (ver ref. [65], eq. (4.4.12), pg. 83)

$$\int d^d q \frac{1}{[-q^2 + M^2]^\epsilon} = i\pi^d \frac{\Gamma(\xi - d/2)}{\Gamma(\xi)} \frac{1}{[M^2]^{\xi - d/2}} \quad (5.6)$$

para calcular as integrais em l e k , obtém-se

$$\hat{\Sigma}_{(2)} = \frac{i\lambda^2}{6(4\pi)^d} \frac{\Gamma(3-d)}{[m^2]^{3-d}} \times \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{y}{[yC]^{d/2}} \left(1 - \frac{p^2}{m^2} D\right)^{d-3}. \quad (5.7)$$

Para $d = 3$, tem-se

$$\Gamma(3-d) \approx \frac{1}{3-d} - \gamma + \mathcal{O}(3-d), \quad (5.8)$$

$$(1-zD)^{d-3} \approx 1 - (3-d) \ln[1-zD] + \mathcal{O}((3-d)^2) \quad (5.9)$$

e, portanto,

$$\hat{\Sigma}_{(2)}^{(\text{dim})} = \frac{i\lambda^2}{6(4\pi)^3} \left\{ \left(\frac{1}{3-d} - \gamma \right) \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{1}{\sqrt{y}C^{3/2}} - \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{\ln(1-zD)}{\sqrt{y}C^{3/2}} \right\}. \quad (5.10)$$

Usando (2.44), chega-se à auto-energia regularizada dimensionalmente dada em (2.47) com a função $E(z)$ definida por (2.46).

Note que, no caso de $d = 4 - \varepsilon$, tem-se

$$\hat{\Sigma}_{(2)}^{(4-\varepsilon)} = \frac{i\lambda^2}{6(4\pi)^{4-\varepsilon}} \frac{\Gamma(-1+\varepsilon)}{[m^2]^{-1+\varepsilon}} \times \int_0^1 dx \int_0^1 dy y^{-1+\varepsilon/2} \left[\frac{(1-zD)^{1-\varepsilon}}{C^{2-\varepsilon/2}} \right], \quad (5.11)$$

e como a função Γ tem um polo simples em -1 , a integral paramétrica deve carregar um polo simples para $\varepsilon = 0$. Esta situação é análoga àquela que aparece no cálculo de $\hat{\Sigma}_{(2)}$ (para $d = 4$) da ref. [49], pg. 124. Neste caso, a determinação da parte finita é mais complicada que para $d = 3$.

5.3 Espalhamento de Chern-Simons

Neste apêndice, apresentam-se os passos principais dos cálculos dos diagramas que contribuem para o espalhamento Chern-Simons, em ordem de um loop e no referencial do centro de massa, cujos resultados foram discutidos na Sec. 3.2. A designação dos momentos usadas nos cálculos é aquela mostrada na fig. 3.9.

(i) Gráfico caixa reta. Seguindo as regras de Feynman, obtém-se

$$\begin{aligned}
 A^{(b)dir} &= -ie^4 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (p_1 + k)^\mu D_{\mu\sigma}(k - p_1) (2p_2 + p_1 - k)^\sigma \\
 &\quad \times \Delta(k) \Delta(p_1 + p_2 - k) \\
 &\quad \times (-k + p_1 + p_2 + p'_2)^\rho D_{\rho\nu}(k - p'_1) (k + p'_1)^\nu |_{CM} + [p'_1 \leftrightarrow p'_2]_{CM} \\
 &= -\frac{4e^4}{\pi^2 \Theta^2} \int d^3k \left(\frac{w_p^2}{w_k} \right) \frac{1}{p^2 - k^2 + i\epsilon} \left[\frac{(k \times p)(k \times p')}{(k - p)^2 (k - p')^2} \right] \\
 &\quad + [p' \leftrightarrow -p'] , \quad (5.12)
 \end{aligned}$$

onde a integração sobre k^0 da amplitude no centro de massa foi feita como uma integral de contorno. A integração angular, que envolve somente o terceiro fator do integrando na última linha acima, pode ser posta na forma $\frac{1}{2} [\cos \theta I_0 - I_2]$ onde

$$I_n = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\cos(n\varphi)}{[2 \cos(\varphi - \theta/2) - \beta][2 \cos(\varphi + \theta/2) - \beta]} \quad (5.13)$$

e $\beta = (k^2 + p^2)/(|k||p|)$. Fazendo a substituição $z = \exp(i\varphi)$ e usando o teorema dos resíduos, obtém-se

$$\begin{aligned}
 I_n &= \frac{\pi}{B\sqrt{\beta^2 - 4}} \left[\frac{(\vartheta^{n-1} + \vartheta^{-n+1}) \sin[(n+1)\theta/2]}{\sin(\theta/2)} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(\vartheta^{n+1} + \vartheta^{-n-1}) \sin[(n-1)\theta/2]}{\sin(\theta/2)} \right] , \quad (5.14)
 \end{aligned}$$

onde $B = \beta^2 - 2(1 + \cos \theta)$ e $\vartheta = \frac{1}{2} [\beta - \sqrt{\beta^2 - 4}]$. Usando esta fórmula, pode-se escrever

$$A^{(b)dir} = -\frac{e^4}{\pi\Theta^2} \int d(k^2) \left(\frac{w_p^2}{w_k} \right) \frac{1}{p^2 - k^2 + i\varepsilon} \times \left[\frac{|k^2 - p^2| (k^2 - p^2)}{(k^2)^2 + (p^2)^2 - 2k^2 p^2 \cos \theta} - 1 \right] + (\theta \leftrightarrow \pi - \theta) \quad (5.15)$$

A integração k^2 restante é então dividida em duas partes, de 0 a Λ^2 (região L) e de Λ^2 a $\Lambda_0^2 \rightarrow \infty$ (setor H). Na parte L, usando

$$\frac{w_p^2}{w_k} = m \left(1 + \frac{p^2}{m^2} \right) \left[1 - \frac{k^2}{2m^2} + \frac{3(k^2)^2}{8m^4} + \dots \right] \quad (5.16)$$

e mantendo termos até ordem η^2 , obtém-se

$$A_L^{(b)dir} \simeq -\frac{e^4}{\pi\Theta^2} m \left\{ \left(1 + \frac{p^2}{2m^2} \right) [\ln(2[1 - \cos \theta]) + i\pi] - \frac{p^2}{m^2} - \cos \theta \left[\ln(2[1 - \cos \theta]) + \ln \left(\frac{p^2}{\Lambda^2} \right) \right] \frac{p^2}{m^2} - (1 - \cos \theta - 2 \cos^2 \theta) \frac{p^4}{\Lambda^4} + 2 \cos \theta \frac{p^2}{\Lambda^2} \right\} + (\theta \leftrightarrow \pi - \theta) \quad (5.17)$$

Uma vez que $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$, recupera-se a equação (3.40). Na região H, o integrando é trocado por sua expansão de Taylor em torno de $p^2 = 0$ que é dada por

$$\left[-\frac{2m^2 \cos \theta}{(k^2)^2 \sqrt{k^2 + m^2}} \right] p^2 + \left[\frac{2m^2(1 - 2 \cos^2 \theta)}{(k^2)^3 \sqrt{k^2 + m^2}} - \frac{2 \cos \theta \sqrt{k^2 + m^2}}{(k^2)^3} \right] p^4 + \mathcal{O}(p^6).$$

Efetuando as integrações sobre k^2 obtém-se, até ordem η^2 ,

$$A_H^{(b)dir} \simeq -\frac{e^4}{\pi\Theta^2} m \left\{ -\cos \theta \ln \left(\frac{\Lambda^2}{4m^2} \right) \frac{p^2}{m^2} - 2 \cos \theta \frac{p^2}{\Lambda^2} + (1 - \cos \theta - 2 \cos^2 \theta) \frac{p^4}{\Lambda^4} - \cos \theta \frac{p^2}{m^2} \right\} + (\theta \leftrightarrow \pi - \theta) \quad (5.18)$$

que é o mesmo que a equação (3.41).

(ii) Diagrama caixa torcida. Após realizar-se a integração sobre k^0 , tem-se

$$A^{(b)torc} = -\frac{e^4}{2\pi^2\Theta^2} \int d^2k \left(\frac{w_k w_{k-s} - w_p^2}{w_k w_{k-s}(w_k + w_{k-s})} \right) \times \left[\frac{(k \times s)^2 - (p \times p')^2}{(k-p)^2(k-p')^2} \right] + [p' \leftrightarrow -p'] \quad (5.19)$$

onde, como antes, $s = p + p'$ e $w_{k-s} = \sqrt{(k-s)^2 + m^2}$. A integração angular acima é muito complicada e, portanto, é de bom alvitre, introduzir o corte intermediário Λ e separar os setores L e H antes tentar fazê-la. A expansão $1/m$ do primeiro fator do integrando em (5.19) é

$$\frac{1}{2} \left(k^2 + \cos \theta p^2 - \sqrt{2(1 + \cos \theta)} |k| |p| \cos \varphi \right) \frac{1}{m^3} + \mathcal{O}(1/m^5).$$

Suspeita-se, imediatamente, que não haverá contribuição vinda do setor L até ordem η^2 . Indo adiante, pode-se fazer a integração angular, que é expressa em termos de I_n ($n = 0, \dots, 3$), e a integração sobre k^2 chegando-se, até ordem η^3 , a

$$A_L^{(b)torc} \approx -\frac{e^4}{4\pi\Theta^2} m(1 + \cos \theta) \frac{p^2 \Lambda^2}{m^4} + (\theta \leftrightarrow \pi - \theta). \quad (5.20)$$

Na região H, todo o integrando é expandido em torno de $|p| = 0$ resultando em

$$\left(\frac{(1 + \cos \theta) \sin^2 \varphi}{(k^2 + m^2)^{3/2}} \right) p^2 + \mathcal{O}(|p|^3),$$

e, assim, as integrações sobre φ e k^2 levam a

$$A_H^{(b)torc} \approx -\frac{e^4}{2\pi\Theta^2} m \left\{ (1 + \cos \theta) \frac{p^2}{m^2} - \frac{1}{2} (1 + \cos \theta) \frac{p^2 \Lambda^2}{m^4} \right\} + (\theta \leftrightarrow \pi - \theta), \quad (5.21)$$

em concordância com (3.43).

(iii) Espalhamento gaivota.

A contribuição da bolha de calibre para a amplitude no centro de massa é dada por

$$-\frac{4e^4}{\Theta^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(k-p) \cdot (k-p')}{(k-p)^2(k-p')^2}.$$

A divergência linear desta expressão manifesta-se de imediato na integração sobre k^0 . Contudo, a soma dos dois diagramas triangulares tem uma parcela com uma integração k^0 divergente que cancela exatamente aquela da bolha de calibre, de modo que, tratando o grupo conjuntamente, obtém-se

$$A^{(c)} = -\frac{e^4}{2\pi^2\Theta^2} \left\{ \int d^2k \left(\frac{w_p^2 + w_k^2}{w_k} \right) \frac{(k-p) \cdot (k-p')}{(k-p)^2(k-p')^2} - \int d^2k \left(\frac{4}{w_k} \right) \left[\frac{(k \times p)(k \times p')}{(k-p)^2(k-p')^2} \right] \right\} + (\theta \leftrightarrow \pi - \theta). \quad (5.22)$$

A integração angular do segundo termo acima é a mesma que a do diagrama caixa reta (ver (5.12)), enquanto que aquela da primeira parcela pode ser escrita como uma combinação linear de I_0 e I_1 e efetuando-as, obtém-se

$$A^{(c)} = -\frac{e^4}{2\pi\Theta^2} \left\{ \int d(k^2) \left(\frac{w_p^2 + w_k^2}{w_k} \right) \frac{\text{sgn}(k^2 - p^2) (k^2 - \cos \theta p^2)}{(k^2)^2 + (p^2)^2 - 2k^2 p^2 \cos \theta} - \int d(k^2) \frac{1}{w_k} \left[\frac{|k^2 - p^2| (k^2 - p^2)}{(k^2)^2 + (p^2)^2 - 2k^2 p^2 \cos \theta} - 1 \right] \right\} + (\theta \leftrightarrow \pi - \theta), \quad (5.23)$$

onde $\text{sgn}(x)$ denota a função sinal. Usando (1.28) e (5.16) e calculando as integrais, a contribuição do setor L é determinada, até ordem η^2 , como

$$A_L^{(c)} \simeq -\frac{e^4}{2\pi\Theta^2} m \left\{ \left(2 + [1 - 2 \cos \theta] \frac{p^2}{m^2} \right) \left[\ln \left(\frac{\Lambda^2}{p^2} \right) - \ln(2[1 - \cos \theta]) \right] + 2 \frac{p^2}{m^2} - 2 \cos \theta \frac{p^2}{\Lambda^2} + (1 - 2 \cos^2 \theta) \frac{p^4}{\Lambda^4} + \frac{\Lambda^4}{8m^4} \right\} + (\theta \leftrightarrow \pi - \theta), \quad (5.24)$$

que coincide com (3.45). A parte H, regularizada por corte, é obtida expandindo o integrando até ordem p^4 e integrando de Λ^2 a Λ_0^2 , o que resulta em

$$\begin{aligned}
 A_H^{(c)} \simeq & -\frac{e^4}{2\pi\Theta^2}m \left\{ -\left(2 + [1 - 2\cos\theta] \frac{p^2}{m^2}\right) \ln\left(\frac{\Lambda^2}{4m^2}\right) - 2 + 2\cos\theta \frac{p^2}{\Lambda^2} \right. \\
 & \left. + \cos\theta \frac{p^2}{m^2} - (1 - 2\cos^2\theta) \frac{p^4}{\Lambda^4} - \frac{\Lambda^4}{8m^4} \right\} - \frac{e^4}{\pi\Theta^2} \Lambda_0 \\
 & + (\theta \leftrightarrow \pi - \theta) , \quad (5.25)
 \end{aligned}$$

o mesmo que (3.46).

Referências

- [1] J.-M. Lévy-Leblond, Commun. Math. Phys. **6**, 286 (1967).
- [2] J. M. Leinaas and J. Myrheim, Nuovo Cimento **37B** (1977) 1.
- [3] F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **48**, 1144 (1982).
- [4] F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **49**, 957 (1982).
- [5] B. I. Halperin, Phys. Rev. Lett. **52**, 1583 (1984).
- [6] D. P. Arovas, R. Schrieffer, F. Wilczek and A. Zee, Nucl. Phys. **B251** (1985) 117.
- [7] R. E. Prange e S. M. Girvin, eds., "The Quantum Hall Effect", Springer-Verlag, Berlim (1990).
- [8] A. P. Balachandran, E. Ercolessi, G. Morandi e A. M. Srivastava, "Hubbard Model and Anyon Superconductivity", World Scientific, Singapore (1990).
- [9] Y. Aharonov e D. Bohm, Phys. Rev. **115**, 485 (1959).
- [10] A. Lerda, "Anyons", Springer-Verlag (1992).
- [11] J. Schonfeld, Nucl. Phys. **B185**, 157 (1981).
- [12] S. Deser, R. Jackiw e S. Templeton, Ann. Phys. (N.Y.) **140**, 372 (1982).
- [13] M. Gomes, R. S. Mendes, R. F. Ribeiro e A. J. da Silva, Phys. Rev. **D43**, 3516 (1991).

- [14] H. O. Girotti, M. Gomes e A. J. da Silva, Phys. Lett. **B274**, 357 (1992).
- [15] C. R. Hagen, Phys. Rev. **D31**, 848 (1985).
- [16] R. Jackiw e S. Y. Pi, Phys. Rev. **D42**, 3500 (1990).
- [17] C. R. Hagen, Ann. Phys. (N.Y.) **156**, 342 (1984).
- [18] O. Bergman e G. Losano, Ann. Phys. (N.Y.) **229**, 416 (1994).
- [19] C. Manuel e R. Tarrach, Phys. Lett. **B328**, 113 (1994)
- [20] O. Bergman, Phys. Rev. **D46**, 5474 (1992).
- [21] L. L. Foldy e S. A. Wouthuysen, Phys. Rev. **78**, 29 (1950).
- [22] K. M. Case, Phys. Rev. **95**, 1323 (1954).
- [23] J. D. Bjorken e S. D. Drell, "Relativistic Quantum Mechanics", McGraw-Hill, New York (1964).
- [24] T. Goldman, Phys. Rev. **D15**, 1063 (1977).
- [25] M. M. Nieto, Phys. Rev. Lett. **38**, 1042 (1977).
- [26] D. H. Kobe e K.-H. Yang, J. Phys. **A13**, 3171 (1980).
- [27] H. W. Fearing, G. I. Poulis e S. Scherer, Nucl. Phys. **A570**, 657 (1994).
- [28] V. B. Berestetskii, E. M. Lifshitz e L. P. Pitaevskii, "Quantum Electrodynamics", Pergamon, Oxford, 1982.
- [29] J. A. de Azcárraga e D. Ginestar, J. Math. Phys. **32**, 3500 (1991).
- [30] M. A. B. Bég e R. C. Furlong, Phys. Rev. **D31**, 1370 (1985).
- [31] K. G. Wilson e J. Kogut, Phys. Repts. **C12**, 75 (1974).
- [32] M. E. Peskin e D. V. Schroeder, "An Introduction to Quantum Field Theory", Addison-Wesley, Reading (1995).
- [33] G. P. Lepage, proceedings of TASI-89 (1989).

- [34] J. Polchinski, proceedings of TASI-92, hep-th/9210046 (1992).
- [35] A. V. Manohar, proceedings of LLWI-95, hep-ph/9508245 (1995).
- [36] D. B. Kaplan, hep-th/9506035 (1995).
- [37] W. Hunziker, Commun. Math. Phys. **40**, 215 (1975).
- [38] R. J. Cinricione e P. R. Chernoff, Commun. Math. Phys. **79**, 33 (1981).
- [39] J. Dimock, Commun. Math. Phys. **57**, 51 (1977).
- [40] H. Lehmann, K. Symanzik e W. Zimmermann, Nuovo Cimento, **1**, 205 (1955).
- [41] C. Itzykson e J.-B. Zuber, "Quantum Field Theory", McGraw-Hill, New York, (1980).
- [42] M. Gomes, "Teoria Quântica de Campos, I e II", Notas de Curso, (1993).
- [43] M. Gomes, J. M. C. Malbouisson e A. J. da Silva, "On the Nonrelativistic Limit of the $\lambda\phi^4$ Theory in 2+1 Dimensions", preprint IFUSP -P/1244, hep-th/9610247 (1996). Apresentado no XVI ENFPC, Caxambu-95. A aparecer em Mod. Phys. Lett. A.
- [44] M. Gomes, J. M. C. Malbouisson e A. J. da Silva, "Relativistic Corrections to the Aharonov-Bohm Scattering", preprint IFUSP -P/1245, hep-th/9611027 (1996).
- [45] M. Gomes, J. M. C. Malbouisson e A. J. da Silva, "Nonrelativistic Limit of the Scalar Chern-Simons Theory", preprint IFUSP (1996). Apresentado no XVII ENFPC, Serra Negra-96.
- [46] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc e J. Grynberg, "Photons and Atoms: Introduction to Quantum Electrodynamics", J. Willey & Sons, (1989).
- [47] T. Haugset e F. Ravndal, Phys. Rev. **D49**, 4299 (1994).
- [48] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, "Table of Integrals, Series, and Products", 5^o ed., A. Jeffrey (ed.), Academic Press, New York, (1994).

- [49] P. Ramond, "Field Theory: A Modern Primer", Addison-Wesley, New York, (1990).
- [50] I. I. Kogan e G. W. Semenoff, Nucl. Phys. **B368**, 718 (1992).
- [51] R. J. Szabo, I. I. Kogan e G. W. Semenoff, Nucl. Phys. **B392**, 700 (1993).
- [52] M. Fleck, A. Foerster, H. O. Girotti, M. Gomes, J. R. S. Nascimento e A. J. da Silva, Int. J. Mod. Phys., a aparecer (1996).
- [53] E. Fradkin, "Field Theories of Condensed Matter Systems", Addison-Wesley, Redwood, (1991).
- [54] S. Ruijsenaars, Ann. Phys. (N.Y.) **146**, 1 (1983).
- [55] M. Boz, V. Fainberg e N. K. Pak, Phys. Lett. **A207**, 1 (1995); Ann. Phys. (N.Y.) **246**, 347 (1996).
- [56] A. N. Redlich, Phys. Rev. Lett. **52**, 18 (1984); Phys. Rev. **D29**, 2366 (1984).
- [57] F. W. Byron Jr. e R. W. Fuller, "Mathematics of Classical and Quantum Physics", vol. II, Addison-Wesley, Reading, (1970).
- [58] D. Z. Freedman, G. Losano e N. Rius, Phys. Rev. **D49**, 1054 (1994).
- [59] S. -J. Kim, Phys. Lett. **B343**, 244 (1995).
- [60] G. Amelino-Camelia, Phys. Lett. **B326**, 282 (1994).
- [61] G. Amelino-Camelia, Phys. Rev. **D51**, 2000 (1995).
- [62] S. Ouvry, Phys. Rev. **D50**, 5296 (1994).
- [63] P. Giacconi, F. Maltoni e R. Soldati, Phys. Rev. **D53**, 952 (1996).
- [64] S. -J. Kim e C. Lee, "Quantum Description of Anyons: Role of Contact Terms", hep-th/9606054 (1996).
- [65] J. Collins, "Renormalization", Cambridge University Press, Cambridge, (1984).