UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

Estudos sobre Teorias com Chern-Simons: Equivalência entre Modelos e Efeito Aharonov-Bohm Não-Abeliano

Luís Carlos Malacarne

Tese de Doutorado
submetida ao Instituto de Física da
Universidade de São Paulo

ORIENTADOR: Prof. Dr. Marcelo Otavio Caminha Gomes

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Horácio O. Girotti (UFRGS)
Prof. Dr. Luiz Agostinho Ferreira (IFT)
Prof. Dr. Marcelo O. C. Gomes (IFUSP)
Prof. Dr. Paulo Teotônio Sobrinho (IFUSP)
Prof. Dr. Walter F. Wreszinski (IFUSP)

São Paulo
1999

Sylvio Camuto

530.14.
M236
D
ex. 1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Malacarne, Luís Carlos

Estudos sobre Teorias com Chern-Simons: Equivalência
entre Modelos e Efeito Aharonov-Bohm não-Abeliano.
São Paulo, 1999.

Tese (Doutoramento) Universidade de São Paulo.
Instituto de Física - Departamento de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Otávio Caminha Gomes
Área de Concentração: Física de Partículas Elementares
e Campos

Unitermos: 1. Teoria de Campos em (2+1) Dimensões;
2. Teoria de Chern-Simons; 3. Efeito Arahonov-Bohm;
4. Modelos de Maxwell-Chern-Simons e Self-Dual.

USP/IF/SBI-008/99

ABSTRACT

The aim of this work is to study some models with Chern-Simons term, which induces several properties such as topological mass and fractional spin. We start studying the exact equivalence between the Self-Dual model minimally coupled to a Dirac field and the Maxwell-Chern-Simons model with non-minimal magnetic coupling to fermions. We show that the fermions sectors of the models are equivalent only if a Thirring like interaction is included. Next we analyze the non-Abelian Aharonov-Bohm scattering for 0 and $1/2$ spin particles. Starting from the relativistic quantum field theory and using a Coulomb gauge formalism, the one loop renormalization is implemented. Through the introduction of an intermediary cutoff, separating the regions of high and low integration momentum, the nonrelativistic limit is derived. In this approach quantum field theory vacuum polarization and anomalous magnetic momentum are automatically incorporated. We also study some properties of the charged one spin particles interacting with Chern-Simons field.

RESUMO

O objetivo desta tese é estudar alguns modelos contendo o termo de Chern-Simons, cuja presença induz várias características tais como massa topológica e spin fracionário. Iniciamos tratando o problema da equivalência entre os modelos Auto-Dual minimamente acoplado com o campo de Dirac, e o modelo Maxwell-Chern-Simons com um acoplamento magnético com férmions. Nós mostramos que os setores fermiônicos dos modelos somente são equivalentes se adicionarmos uma auto-interação tipo Thirring. Em seguida analisamos o efeito Aharonov-Bohm não-Abeliano para partículas de spin 0 e $1/2$. Partindo da teoria quântica de campos relativística no gauge de Coulomb e usando o procedimento do corte intermediário, para separar o momento de integração nas regiões de baixa e alta energia, nós obtemos o limite não relativístico dos modelos. Desta forma as correções radiativas, tais como polarização do vácuo e correção de vértice, são automaticamente incluídas. Finalizando estudamos algumas propriedades de modelos descrevendo partículas carregadas de spin 1 interagindo com o campo de Chern-Simon.

Dedicatória,
Aos Meus Pais e
a Rosângela.

Agradecimentos

- Ao Prof. Dr. Marcelo Otavio Caminha Gomes pela orientação;
- Aos meus pais e irmãos: Aurélio, Lúcia, Gilmar, Neodir, Ademar, Ademir e Marilene;
- A Rosângela, Isabela, Olga e Francisco;
- Aos amigos, em especial Rênio, Sérgio, Van Sérgio;
- Ao Prof. Adilson J. da Silva;
- Ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá;
- Ao Departamento de Física Matemática do Instituto de Física da USP;
- Ao CNPq e CAPES pelo apoio financeiro.

Conteúdo

Introdução	8
1 Equivalência entre os Modelos Auto-Dual e Maxwell-Chern-Simons Acoplados com Férmions	12
1.1 Introdução	12
1.2 Identificação Clássica	14
1.3 Identificação Quântica	17
2 Espalhamento Aharonov-Bohm Não-Abeliano para Partícula Escalar	22
2.1 Introdução	22
2.2 Modelo Não Relativístico	23
2.3 Modelo Relativístico	26
2.3.1 Correção para a Auto-Energia	29
2.3.2 Tensor de Polarização	30
2.3.3 Correção de Vértice	32
2.3.4 Espalhamento Partícula-Partícula	33
2.4 Análise	44
3 Espalhamento Aharonov-Bohm Não-Abeliano para Partícula de Spin $1/2$	52
3.1 Introdução	52
3.2 O Modelo Não Relativístico	52
3.3 O Modelo Relativístico	57
3.3.1 Correção para a Auto-Energia	59
3.3.2 Tensor de Polarização	61
3.3.3 Correção de Vértice	63
3.3.4 Espalhamento em 1-Loop	65
3.4 Análise	70
4 Partícula Massiva de Spin 1 Interagindo com Chern-Simons	72
4.1 Introdução	72
4.2 Vetores de Polarização e Regras de Feynman	73

4.2.1	Modelo de Proca	73
4.2.2	Modelo de Maxwell-Chern-Simons	78
4.3	Correção de 1-Loop	80
4.3.1	Auto-Energia	81
4.3.2	Tensor de Polarização	83
4.3.3	Correção de Vértice e Momento Magnético	84
4.3.4	Espalhamento	88
4.4	Análise	91
Conclusão		93
A Tensor de Polarização para MCS com Acoplamento Magnético		95
B Integrais		97
C Espalhamento em 1-Loop (Spin 0)		100
D Espalhamento em 1-Loop (Spin 1/2)		103
E Cálculos em 1-Loop (Spin 1)		107
E.1	Auto-Energia	107
E.2	Polarização	108
E.3	Espalhamento	109
Bibliografia		112

Introdução

Teorias com o termo de Chern-Simons tem constituído objeto de interesse a partir de 1980, devido a importantes propriedades teóricas[1] e possíveis aplicações em sistemas cujo comportamento principal se reduz a interações num plano. Por exemplo, essas teorias tem sido úteis na explicação do efeito Hall fracionário[2] e, possivelmente, no entendimento da supercondutividade a alta temperatura [3].

Entre as várias características que surgem em teorias em $(2+1)D$ com a presença do termo de Chern-Simons (CS), ressaltam-se certos aspectos inusitados, tais como a existência de campos de gauge massivos e a possibilidade de spin fracionário. A presença do termo de Chern-Simons, adicionado a Lagrangeana do campo eletromagnético, gera uma massa topológica para o campo vetorial, sem quebrar a invariância de gauge[1]. A existência desta massa pode ser verificada explicitamente pela presença de um pólo em um valor não nulo do momento no propagador do campo vetorial. Este fato é importante para eliminar os problemas de divergências infravermelhas que aparecem na QED em $(2+1)D$ [4].

A possibilidade de spin fracionário está associada ao fato de que em $(2+1)D$ a álgebra de rotações é Abeliã, eliminando desta forma as restrições ao valor do spin. Assim a estatística quântica é definida por uma fase associada ao movimento de uma partícula em relação a outra[5]. A relação entre partículas de spin fracionário (também conhecidas como anyons) e a presença do termo de Chern-Simons foi verificada primeiramente nas referências [6, 7]. Os autores introduziram um campo de gauge $\vec{A}$ acoplado minimamente com a matéria, sendo que a dinâmica deste campo vetorial é dada pelo termo de Chern-Simons. Deste modo o spin e a estatística são mudados pela interação deste campo vetorial com a matéria. Neste contexto, partículas carregadas interagindo via potencial de Chern-Simons tem associadas a si um fluxo magnético pontual. Assim, podemos simular o efeito Aharonov-Bohm[8] pela interação de duas partículas via campo de Chern-Simons.

Nesta tese vamos estudar algumas propriedades de teorias contendo o termo de Chern-Simons e outros campos com vários valores do spin. Mais explicitamente, no capítulo 1, trataremos o problema da equivalência entre o modelo de Maxwell-Chern-Simons (MCS) e o modelo Auto-Dual (AD). Nos capítulos 2 e 3 vamos trabalhar com campos não-Abelianos de spin 0 e 1/2 interagindo com o campo de CS. No último capítulo analisaremos algumas propriedades de modelos para partículas carregadas de spin 1 interagindo com o campo

de CS.

O modelo Auto-Dual dado pela Lagrangeana

$$\mathcal{L}_{AD} = \frac{1}{2}m^2 f_\mu f^\mu - \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho} f_\mu \partial_\nu f_\rho$$

foi originalmente introduzido por Townsend et al.[9] como uma espécie de raiz quadrada do modelo de Proca, para descrever um único modo massivo, de spin ± 1 , propagando livremente. Foi mostrado, inicialmente por Jackiw e Deser[10] e posteriormente por vários autores[11, 12, 13], que o modelo AD livre, ou mesmo com fontes externas, é equivalente ao modelo de MCS descrito pela Lagrangeana

$$\mathcal{L}_{MCS} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}m\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu F_{\nu\rho}.$$

Este fato foi usado para mostrar que no setor de baixa energia o modelo de Thirring massivo pode ser bosonizado[14]. Isto pode ser visto pela uso da equivalência do funcional gerador do Modelo de Thirring como o funcional gerador do modelo de MCS e a identificação da corrente fermiônica com uma corrente bosônica.

A equivalência dos modelos AD e MCS livres está bem estabelecida. No entanto, não é imediato que esta equivalência persista quando acoplamos estes modelos (MCS e AD) a outros campos dinâmicos. Verificaremos explicitamente no capítulo 1 o que acontece no caso do acoplamento como o campo de Dirac[15]. Mostraremos que para que exista a equivalência entre os modelos de MCS e AD quando acoplados com férmions, são necessários acoplamentos diferentes e específicos. Por exemplo, como veremos, um modelo onde o campo AD é acoplado minimamente com o campo de Dirac, será equivalente ao modelo de MCS acoplado via uma interação magnética com o campo fermiônico, mais um termo de auto-interação tipo Thirring.

Nos capítulos 2 e 3 exploraremos o fato que o efeito Aharonov-Bohm (AB) pode ser simulado, em teoria quântica de campos em $(2+1)D$, por um sistema de partículas carregadas interagindo via termo de CS. O efeito AB tem se mostrado objeto de grande interesse na consolidação da mecânica quântica e no esclarecimento da relevância do papel do potencial vetor da eletrodinâmica. A importância do potencial eletromagnético tem sido bastante estudada, tanto no campo experimental quanto através da análise teórica via a mecânica quântica. Trabalhos de revisão podem ser encontrados nos artigos de Olariu e Popescu[16] e Ruijsenaars[17] ou no livro de Peshkin e Tonomura[18]. Outros trabalhos tratando o problema via cálculo exato, usando a mecânica quântica, são dados nas referências[19, 20, 21].

O problema perturbativo pode ser tratado em teoria quântica de campos, como já foi dito, usando-se o fato do termo de CS simular o potencial de AB. Foi verificado para a teoria não relativística que no caso de spin zero é necessário adicionar um termo de interação de contato, $(\phi^*\phi)^2$, de modo a manter a teoria renormalizável e recuperar a invariância conforme[22]. Esta interação de contato aparece naturalmente no caso de férmions, via termo magnético de Pauli[23].

Várias pessoas trabalharam tentando entender a relação entre o termo de contato na teoria de campos não relativística e certas classes de Hamiltonianos auto-adjuntos em mecânica quântica[24, 25, 26]. Em particular, na referência [25], sob certas condições e para um valor específico da constante de acoplamento, os autores verificaram que a divergência é cancelada em todas as ordens da teoria de perturbação e a invariância de escala é recuperada, além de desenvolverem uma conexão apropriada com a descrição de primeira quantização. No entanto, essa equivalência direta parece ser válida somente para algumas sub-famílias de extensões auto-adjuntas de Hamiltonianos quânticos[26].

Partindo de um ponto de vista mais básico, podemos tratar o efeito AB a partir da teoria de campos relativística e então tomar o limite não relativístico apropriado. Procedendo desta maneira, efeitos das correções radiativas, como polarização do vácuo e momento magnético anômalo, são incluídos automaticamente. No entanto esse limite em teoria quântica de campos não é trivial. Um procedimento equivalente ao usado na redução da mecânica quântica relativística, tal como Foldy-Wouthuysen[27], não é capaz de levar em conta todos os efeitos devido às correções radiativas[28]. Recentemente tem sido proposto um procedimento alternativo e sistemático para obter esse limite em teoria quântica de campos[23, 29, 30]. Deste modo obtém-se o resultado da teoria não relativística, além dos referidos efeitos vindos das correções radiativas.

O procedimento citado acima consiste em calcular a amplitude de espalhamento relativística, e, posteriormente, tomar o limite para pequenos momentos externos ($p \ll m$). Os momentos internos (integrações nos loops) são separados em duas regiões: a primeira contendo os estados intermediários de baixa energia (L), correspondendo aos momentos internos no intervalo de $(0, \Lambda)$, onde Λ é um corte auxiliar intermediário e que será identificado com o corte não relativístico; a segunda região, de altas energias (H), correspondendo ao intervalo de (Λ, Λ_0) , onde Λ_0 é o corte relativístico ($\Lambda_0 \rightarrow \infty$). Assim podemos observar quais são os efeitos dos estados de altas energias sobre os estados de baixas energias. Para termos controle nas expansões que serão efetuadas nas duas regiões de integração adotaremos as seguintes condições

$$|p| \ll \Lambda \ll m \quad \left(\frac{|p|}{\Lambda} \right)^2 \approx \left(\frac{\Lambda}{m} \right)^2 \approx \frac{|p|}{m} = \eta,$$

onde η é o parâmetro de expansão. Na região de baixas energias, todos os momentos espaciais envolvidos são pequenos, e assim podemos efetuar uma expansão em $1/m$. Na região de altas energias o integrando pode ser expandido em série de Taylor em torno de $p \approx 0$.

Este procedimento quando aplicado à teoria abeliana, tanto escalar quanto espinorial[23, 29, 30], mostra que a contribuição dominante de baixa energia reproduz o resultado obtido pela teoria não relativística, com Λ_{NR} identificado com Λ . A contribuição de alta energia funciona como contra-termo para a parte de baixa energia. Os termos sub-dominantes seriam correções e sugerem novos termos de interação na Lagrangeana não relativística, como acontece em teorias efetivas[31].

Os resultados do estudo do efeito AB para os casos escalar e espinorial das referências acima, mostraram que existem algumas particularidades devidas ao spin da partícula[23, 29, 30]. Nos capítulos 2 e 3 vamos verificar qual é o efeito de adicionarmos um índice de simetria interna para o campo de matéria, ou seja, se existe alguma peculiaridade no caso do efeito AB não-Abeliano.

O efeito AB não-Abeliano[32, 33, 34, 35] tem se mostrado interessante, tanto no aspecto da investigação teórica, como em possíveis aplicações em física de cordas, buracos negros e na gravitação em $(2+1)$ dimensões[36, 37, 38, 39, 40, 41]. De acordo com idéias modernas, num estágio inicial da evolução, o universo era caracterizado por altas temperaturas e grau de simetria maior que agora. Com o resfriamento haveria uma série de transições de fase e quebras de simetria. Como resultado foram formados defeitos topológicos (monopólos, cordas e paredes de domínio) cuja existência tem importantes consequências em cosmologia[40]. Entre estes, as cordas contendo fluxos não-Abelianos são objetos cosmológicos de especial importância e podem ter um papel relevante nos centros de nucleação de galáxias e lentes gravitacionais[41]. Neste sentido é interessante considerar situações onde há partículas espalhadas por um fluxo de campo magnético não-Abeliano.

No último capítulo vamos estudar o problema da partícula carregada de spin 1 interagindo com o campo de CS. Um aspecto interessante decorre do fato que em $(2+1)D$ temos mais do que uma formulação para descrever uma partícula massiva de spin 1. Mesmo que aparentemente essas formulações tenham alguma relação, quando acoplamos estes modelos com o campo de CS começam a surgir as diferenças. No caso dos modelos de Proca e MCS, vemos que já a nível de árvore, para que a seção de choque dos dois modelos sejam equivalentes, não podemos ter o mesmo tipo de acoplamento. Ou seja, se acoplamos o modelo de Proca minimamente com CS, o acoplamento do modelo de MCS com o campo de CS não será minimal. A nível de 1-loop o problema começa a ficar mais complexo. Isto devido a estrutura dos propagadores dos modelos de Proca e MCS que apresentam diferenças significativas. Além disto, no caso específico do modelo de MCS, os cálculos começam a se tornar inviáveis devido ao grande número de parâmetros de Feynman que surgem. Devido a isto, nós iremos implementar a correção de 1-loop, para os gráficos potencialmente divergentes, somente no caso do modelo de Proca acoplado minimamente com CS.

Finalizando, faremos alguns comentários sobre os resultados obtidos, e, apresentaremos alguns apêndices com o objetivo de deixar mais claro o procedimento usado no cálculo dos gráficos de Feynman.

Capítulo 1

Equivalência entre os Modelos Auto-Dual e Maxwell-Chern-Simons Acoplados com Férmions

1.1 Introdução

A análise da equivalência de modelos aparentemente não relacionados, tem se mostrado interessante principalmente na física em duas e três dimensões. Exemplo disto em 3D, é o estudo da equivalência entre o modelo de Thirring e o setor fermiônico do campo de Dirac interagindo via acoplamento derivativo com dois campos bosônicos[43]. Neste mesmo sentido, temos os trabalhos sobre bosonização, relacionando modelos fermiônicos com modelos bosônicos[44].

Em 3D, algumas tentativas de bosonização partem do fato que há duas maneiras para descrever um único modo massivo, de spin 1, se propagando livremente. De fato, nós temos o modelo Auto-Dual (AD) livre descrito por

$$\mathcal{L}_{AD} = \frac{1}{2}m^2 f_\mu f^\mu - \frac{m}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho} f_\mu \partial_\nu f_\rho, \quad (1.1)$$

e o modelo de Maxwell-Chern-Simons (MCS) livre, dado pela densidade de Lagrangeana

$$\mathcal{L}_{MCS} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}m\varepsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu F_{\nu\rho}, \quad (1.2)$$

na qual $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ e λ é o parâmetro de fixação de gauge. Os modelos em (1.1) e (1.2) aparentemente não são equivalentes, visto que o primeiro não é invariante de gauge enquanto o modelo dado em (1.2) é invariante de gauge. Apesar disto, ambos os modelos acima descrevem um único modo massivo de spin 1 se propagando. O fato

dos dois modelos terem o mesmo espectro massivo pode ser visto direto dos pólos dos propagadores. Realmente, de (1.1) e (1.2) obtemos os propagadores

$$\Delta_{AD}^{\mu\nu} = \frac{-i}{k^2 - m^2} \left[g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{m^2} + im\varepsilon^{\mu\nu\rho} \frac{k_\rho}{m^2} \right] \quad (1.3)$$

para o campo f_μ e

$$D_{MCS}^{\mu\nu} = \frac{-i}{k^2 - m^2} \left[g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} + im\varepsilon^{\mu\nu\rho} \frac{k_\rho}{k^2} \right] + i\lambda \frac{k^\mu k^\nu}{k^4}, \quad (1.4)$$

para o campo A_μ , mostrando que ambos tem o mesmo pólo em $k^2 = m^2$. Deser e Jackiw[10] mostraram que na realidade ambos os modelos são equivalentes e estão relacionados através da identificação

$$f^\mu \leftrightarrow F^\mu = \frac{1}{m} \varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho. \quad (1.5)$$

Isto pode ser visto tanto via análise direta das equações de movimento para f_μ e A_μ , ou através do uso da Lagrangeana "master" ou interpolante

$$\mathcal{L}_I = \frac{m^2}{2} f_\mu f^\mu - m^2 f_\mu F^\mu + \frac{1}{2} F^\mu A_\mu, \quad (1.6)$$

a qual evidencia que os modelos tem uma origem comum. Realmente, da variação de $\mathcal{L}_I$ em relação a f_μ temos que $f^\mu = F^\mu$, e usando isto para eliminar f_μ de (1.6) obtemos $\mathcal{L}_{MCS}$. Por outro lado, da variação em relação a A_μ , temos $\varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\alpha f_\beta = \varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\alpha A_\beta = mF^\mu$, e assim eliminando A_μ de (1.6) obtemos (1.1). Estas duas descrições são equivalentes mesmo quando temos acoplamentos com fontes externas[10]. Estudos adicionais sobre a conexão destes modelos[11, 12, 13, 66] tem mostrado que o modelo Auto-Dual é uma versão com gauge fixado do modelo de Maxwell-Chern-Simons.

A relação mencionada entre os modelos AD e MCS tem sido usada para mostrar que no setor de baixa energia o modelo de Thirring massivo pode ser bosonizado[14]. Mais precisamente, introduzindo um campo auxiliar (f_μ), o funcional gerador do modelo de Thirring pode ser escrito como

$$Z_{Th} = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}f_\mu \exp \left\{ - \int d^3x \left[\bar{\psi} (\not{\partial} + M + gf) \psi + \frac{1}{2} f_\mu f^\mu \right] \right\}, \quad (1.7)$$

na qual g^2 é a constante de acoplamento do modelo de Thirring¹. Efetuando a integração nos campos fermiônicos e mantendo termos na ordem dominante na expansão em $1/M$,

¹Para vermos que este funcional gerador é equivalente ao funcional gerador do modelo de Thirring, basta integrarmos a equação (1.7) sobre o campo auxiliar f_μ .

com a massa do frmion M grande, podemos relacionar o funcional gerador do modelo de Thirring com o funcional gerador do modelo AD, isto

$$Z_{Th} \approx Z_{AD} = \int \mathcal{D}f_\mu \exp \left\{ - \int d^3x \mathcal{L}_{AD} \right\}. \quad (1.8)$$

Por outro lado, usando a equivalncia entre os modelos AD e MCS, temos

$$Z_{Th} \approx Z_{MCS}. \quad (1.9)$$

A extenso deste resultado para o caso no-Abeliano tem sido considerada por vrios autores[46, 47, 48, 49, 50].

A equivalncia entre os modelos AD e MCS est bem estabelecida para o caso de campos livres. Neste caso, o campo bsico do modelo AD, f_μ , visto ser substituído pelo rotacional do campo bsico do modelo de MCS, A_μ . Resta entender o que acontece quando acoplamos estes modelos (MCS e AD) a outros campos dinmicos. Aqui vamos especificamente estudar a equivalncia entre os modelos AD e MCS quando so acoplados com frmions[15]. Por uma analogia com a equivalncia no caso livre, quando acoplamos o modelo AD minimamente com os frmions ($f_\mu J^\mu$, onde J^μ a corrente ferminica), este modelo aparenta ser equivalente ao modelo de MCS acoplado com uma interao magntica, ou seja, ao rotacional da corrente ferminica. Esta equivalncia aparente vista nas equaes de movimento para os campos AD e MCS. Contudo, como veremos na seo seguinte, contrariamente ao que acontece no caso de fontes externas, a equivalncia clssica das correspondentes equaes do campo ferminico, requer a incluso de uma interao adicional tipo Thirring.

1.2 Identificao Clssica

Vamos iniciar nossa anlise considerando o campo de Dirac acoplado minimamente com o campo vetorial do modelo AD, tal que a densidade de Lagrangeana vem a ser

$$\mathcal{L}_{AD}^{min} = \mathcal{L}_{AD} - e f_\mu J^\mu + \bar{\psi}(i\rlap{\not}{\partial} - M)\psi, \quad (1.10)$$

onde $J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ e M a massa do frmion². Atravs da equivalncia entre os modelos AD e MCS, notamos que a simples identificao $f^\mu \leftrightarrow F^\mu$, a menos de uma derivada total, muda o acoplamento minimal para um acoplamento magntico, isto ,

²Ns usamos o sistema de unidades naturais ($c = \hbar = 1$) e nossa mtrica dada por $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = 1$. O tensor totalmente anti-simtrico $\epsilon^{\mu\nu\rho}$ normalizado por $\epsilon^{012} = 1$. Para as matrizes γ adotamos a representao $\gamma^0 = \sigma^3$, $\gamma^1 = i\sigma^1$, $\gamma^2 = i\sigma^2$, onde σ^i , $i = 1, 2, 3$, so as matrizes de spin de Pauli.

$$f_\mu J^\mu \rightarrow A_\mu G^\mu, \quad (1.11)$$

sendo $G^\mu = \frac{1}{m} \varepsilon^{\alpha\beta\mu} \partial_\alpha J_\beta$. Isto sugere a equivalência do modelo (1.10) com o modelo descrito pela densidade de Lagrangeana

$$\mathcal{L}_{MCS}^{mag} = \mathcal{L}_{MCS} - e A_\mu G^\mu + \bar{\psi}(i\rlap{\not{D}} - M)\psi. \quad (1.12)$$

De fato, uma inspeção direta nas equações de movimento para o campo f^μ e A^μ levam a

$$-m\varepsilon^{\nu\alpha\beta} \partial_\alpha f_\beta + m^2 f^\nu = e J^\nu, \quad (1.13)$$

$$-m\varepsilon^{\nu\alpha\beta} \partial_\alpha F_\beta + m^2 F^\nu = e G^\nu, \quad (1.14)$$

mostrando que o dual do campo de MCS satisfaz uma equação similar a equação obedecida pelo campo AD mas com a corrente mudada pelo seu rotacional, isto é,

$$f^\mu \leftrightarrow F^\nu \implies J^\mu \leftrightarrow G^\nu. \quad (1.15)$$

No entanto, para que a equivalência dos modelos seja completa, é também necessário uma análise dos setores fermiônicos. Vamos usar as equações (1.13) e (1.14) para demonstrar que o setor fermiônico dos dois modelos serão iguais somente se uma auto interação tipo Thirring com um constante de acoplamento específica for adicionada a Lagrangeana (1.10).

Para vermos isto, consideremos a equação de movimento para o campo fermiônico. Temos no caso do modelo AD

$$(i\rlap{\not{D}} - M)\psi = e f_\mu \gamma^\mu \psi, \quad (1.16)$$

e para o modelo de MCS

$$(i\rlap{\not{D}} - M)\psi = -\frac{e}{m} \varepsilon^{\alpha\beta\mu} \partial_\alpha A_\beta \gamma_\mu \psi. \quad (1.17)$$

Através de (1.14) nós podemos expressar o campo de gauge A_μ em termos da fonte G^μ . Realmente, (1.14) pode ser escrita como

$$\Gamma^{\nu\mu} A_\mu = e G^\nu \quad (1.18)$$

sendo, $\Gamma^{\nu\mu} = \partial^2 \delta^{\nu\mu} - (1 - 1/\lambda) \partial^\nu \partial^\mu + m\varepsilon^{\nu\mu\alpha} \partial_\alpha$ (temos incluído um termo de fixação de gauge). Assim, usando que $\Gamma^{\mu\nu} D_{R\nu\alpha} = \delta_\alpha^\mu$, obtemos

$$A_\alpha(x) = e \int dy D_{R\alpha\mu}(x-y) G^\mu(y), \quad (1.19)$$

onde $D_{R\alpha\mu}$ é o propagador retardado para o campo de MCS , que no espaço dos momentos é dado por

$$D_{R\alpha\mu}(k) = \frac{-1}{k^2 - m^2 + i\epsilon k_0} \left[g_{\mu\alpha} - \frac{k_\mu k_\alpha}{k^2 + i\epsilon k_0} + im\varepsilon_{\alpha\mu\rho} \frac{k^\rho}{k^2 + i\epsilon k_0} \right] + \text{fix. gauge.} \quad (1.20)$$

Substituindo (1.19) em (1.17) obtemos³

$$(i \not{\partial} - M)\psi = ef_\mu \gamma^\mu \psi - \frac{e^2}{m^2} J^\beta \gamma_\beta \psi, \quad (1.21)$$

na qual

$$f_\mu(x) = e \int dy \Delta_{R\mu\alpha}(x-y) J^\alpha(y) \quad (1.22)$$

e

$$\Delta_{R\mu\alpha}(k) = \frac{-1}{k^2 - m^2 + i\epsilon k_0} \left[g_{\mu\alpha} - \frac{k_\mu k_\alpha}{m^2} + im\varepsilon_{\mu\alpha\rho} \frac{k^\rho}{m^2} \right] \quad (1.23)$$

é o propagador retardado para o campo AD^4 . Basicamente este resultado é devido a identidade algébrica

$$-\frac{i}{m} \varepsilon^{\alpha\beta\mu} k_\alpha D_{R\mu\nu}(k) \frac{i}{m} \varepsilon^{\sigma\rho\nu} k_\sigma = \Delta_R^{\beta\rho}(k) - \frac{g^{\beta\rho}}{m^2} \quad (1.24)$$

relacionando os propagadores do modelo AD e MCS .

Comparando as equações (1.16) e (1.21) vemos que o setor fermiônico dos dois modelos são equivalentes somente se incluirmos em um dos modelos a interação tipo Thirring. Ou seja, o modelo

$$\mathcal{L}_{AD} = ef_\mu J^\mu + \bar{\psi}(i \not{\partial} - M)\psi + \frac{e^2}{2m^2} J^\mu J_\mu \quad (1.25)$$

e não (1.10) tem o mesmo setor fermiônico que (1.12). Usando (1.19), (1.20) e a definição de F^μ é fácil verificar que podemos escrever

$$F^\mu = f^\mu - \frac{e}{m^2} J^\mu. \quad (1.26)$$

Através desta relação podemos ver que (1.14) vai em (1.13). A partir do que foi visto, é claro que a interação tipo Thirring pode ser incorporada ao modelo AD como feito acima ou ao modelo de MCS como veremos na seção seguinte.

³O termos de fixação de gauge não dará nenhuma contribuição.

⁴A equação (1.22) pode ser obtida escrevendo (1.16) como $\Gamma^{\mu\beta} f_\beta = e J^\mu$, com $\Gamma^{\mu\beta} = m\varepsilon^{\nu\beta\alpha} \partial_\alpha + m^2 \delta^{\nu\beta}$, e usando que $\Gamma^{\beta\nu} \Delta_{R\nu\mu} = \delta_\mu^\beta$.

1.3 Identificação Quântica

Nós queremos investigar se esta equivalência continua válida a nível quântico. Aqui nós esperamos alguns problemas pois o sistema descrito por (1.10) é renormalizável perturbativamente⁵, enquanto a Lagrangeana (1.12) é não-renormalizável. Isto pode ser visto direto pela contagem de potência. A dimensão em unidades de massa de A_μ e ψ são 1/2 e 1, respectivamente. Assim a dimensão da interação magnética e de Thirring são iguais a 7/2 e 4, respectivamente, estragando a renormalizabilidade dos modelos⁶. Contudo esta dificuldade pode ser eventualmente contornada. Por exemplo, se tomarmos o caso de N férmions a teoria passa a ser renormalizável via expansão $1/N$ e neste contexto os modelos são renormalizáveis.

Para uma fundamentação mais sólida, nós iremos usar o funcional gerador

$$Z(\psi) = \int Df^\mu DA^\nu \exp[i \int \mathcal{L}_I(f, A, \psi)], \quad (1.27)$$

com uma Lagrangeana interpolante que generaliza (1.10) e (1.12),

$$\mathcal{L}_I = \frac{m^2}{2} f_\mu f^\mu - m^2 f_\mu F^\mu + \frac{m^2}{2} F^\mu A_\mu - e J_\mu f^\mu - e A^\mu g_\mu + \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 + \mathcal{L}_D, \quad (1.28)$$

na qual $\mathcal{L}_D$ é a Lagrangeana de Dirac livre e g_μ , J_μ são correntes dependendo somente dos campos ψ e $\bar{\psi}$. Nós tomaremos J_μ como a corrente $\bar{\psi} \gamma_\mu \psi$ mas manteremos a forma de g_μ arbitrária, exigindo, no entanto, que não dependa dos campos vetoriais⁷.

Integrando sobre a configuração do campo f_μ temos

$$Z(\psi) = \int DA^\mu \exp[i \int \mathcal{L}_{eff}^{(1)}(A, \psi)], \quad (1.29)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff}^{(1)}(A, \psi) = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{4} m \varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu F_{\nu\rho} + \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 - \\ & e A^\mu (g_\mu + G_\mu) - \frac{e^2}{2m^2} J^\mu J_\mu + \mathcal{L}_D. \end{aligned} \quad (1.30)$$

⁵Similarmente ao caso da QED massiva em quatro dimensões, o modelo Auto-Dual minimamente acoplado com os férmions é renormalizável. A parte longitudinal do propagador do campo vetorial tem um comportamento ruim no ultravioleta, não se anulando para grandes momentos. Contudo, como este vetor interage com uma corrente conservada, existe um setor do modelo que continua fazendo sentido. Este setor inclui a matriz de espalhamento das partículas carregadas. Detalhes desta discussão pode ser encontrado nas referências [51, 52]

⁶Logicamente, um modelo contendo a interação tipo Thirring ou interação magnética será não renormalizável perturbativamente. Porém se o modelo tiver ambas as interações com constantes específicas as contribuições podem ser somadas de modo a tornar o modelo renormalizável.

⁷Podemos observar que a equação de movimento para f^μ que vem de (1.28) reproduz a relação (1.26).

Por outro lado, integrando (1.28) sobre A_μ obtemos

$$Z(\psi) = \int Df^\mu \exp[i \int \mathcal{L}_{eff}^{(2)}(f, \psi)], \quad (1.31)$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff}^{(2)}(f, \psi) = & \frac{m^2}{2} f^\mu f_\mu - \frac{m}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} f^\alpha \partial^\beta f^\gamma - e f^\alpha [J_\alpha + (g_{\alpha\beta} - \frac{\partial_\alpha \partial_\beta}{\partial^2}) g^\beta] + \\ & \frac{e^2}{2m} g_\mu [\varepsilon^{\mu\beta\gamma} \frac{\partial_\beta}{\partial^2} + \frac{m}{\lambda} \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{(\partial^2)^2}] g_\nu + \mathcal{L}_D. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Agora nós podemos considerar algumas possibilidades:

1. $g_\mu = 0$. Nesta situação, (1.30) e (1.32) provam a equivalência quântica dos setores fermiônicos dos modelos discutidos na seção anterior, isto é, as Lagrangeanas (1.30) e (1.32) ficam

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff}^{(1)}(A, \psi) = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{4} m \varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu F_{\nu\rho} + \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 - \\ & e A^\mu G_\mu - \frac{e^2}{2m^2} J^\mu J_\mu + \mathcal{L}_D. \end{aligned} \quad (1.33)$$

$$\mathcal{L}_{eff}^{(2)}(f, \psi) = \frac{m^2}{2} f^\mu f_\mu - \frac{m}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} f^\alpha \partial^\beta f^\gamma - e f^\alpha J_\alpha + \mathcal{L}_D. \quad (1.34)$$

2. Se em vez disso, nós tomamos $g_\mu = -G_\mu$ então o campo de MCS desacopla e os férmions interagem através de uma interação de Thirring, ou seja,

$$\mathcal{L}_{eff}^{(1)}(A, \psi) = \mathcal{L}_{MCS} + \mathcal{L}_D - \frac{e^2}{2m^2} J^\mu J_\mu + \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (1.35)$$

Este modelo de campos fermiônicos e vetoriais não-interagentes é equivalente a um modelo que, além de uma auto-interação, os férmions são acoplados a um campo Auto-Dual. Este último modelo é descrito pela Lagrangeana

$$\mathcal{L}_{eff}^{(2)}(f, \psi) = \mathcal{L}_{AD} + \mathcal{L}_D - e f^\alpha (J_\alpha - G_\alpha) - \frac{e^2}{2m^2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} J^\alpha \partial^\beta J^\gamma \quad (1.36)$$

3. Como outra possibilidade tomemos $g^\mu = -J^\mu$. Neste caso (1.32) fica

$$\mathcal{L}_{eff}^{(2)} = \mathcal{L}_{AD} + \mathcal{L}_D + \frac{e^2}{2m} \varepsilon^{\mu\beta\gamma} J_\mu \frac{\partial_\beta}{\partial^2} J_\nu, \quad (1.37)$$

descrevendo campos Auto-Dual livres e fermions auto-interagentes. Por (1.30) este modelo equivalente a um com fermions e campos vetoriais interagindo como especificado pela Lagrangeana efetiva

$$\mathcal{L}_{eff}^{(1)} = \mathcal{L}_{MCS} + \mathcal{L}_D + eA^\mu(J_\mu - G_\mu) - \frac{e^2}{2m^2}J_\mu J^\mu + \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2. \quad (1.38)$$

A generalizao da equivalncia dos modelos MCS e AD interagindo com outros campos dinamicos, como por exemplo o campo escalar, no trivial. De fato, neste caso a corrente depende explicitamente do campo de gauge e, com isso, o determinante funcional tem uma dependncia no-trivial com os campos de materia.

Os modelos considerados envolvem acoplamentos no-renormalizaveis perturbativamente, como a interao de Thirring e a magntica. Contudo, se os campos de fermions so campos de N componentes, os modelos so renormalizaveis na expanso $1/N$. Para o modelo de Thirring isto foi provado em [52]. Aqui ns examinaremos o caso quando o campo de MCS interage atravs de um acoplamento magntico, $A_\mu G^\mu$. O propagador $1/N$ dado pela soma da srie

$$D_{MCS}^{\mu\nu}(1/N) = D_{MCS}^{\mu\nu} + D_{MCS}^{\mu\alpha}\Pi_{\alpha\beta}D_{MCS}^{\beta\nu} + D_{MCS}^{\mu\alpha}\Pi_{\alpha\beta}D_{MCS}^{\beta\rho}\Pi_{\rho\sigma}D_{MCS}^{\sigma\nu} + \dots \quad (1.39)$$

$$D_{MCS}^{\mu\nu}(1/N) = D_{MCS}^{\mu\beta} \left[g_\beta^\nu - \Pi_{\beta\rho} D_{MCS}^{\rho\nu} \right]^{-1}, \quad (1.40)$$

com $\Pi^{\mu\nu}$ sendo o tensor de polarizao⁸

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = -i\alpha^2 \frac{k^2}{m^2} \left[\Pi_e \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) - iM\Pi_0 \varepsilon^{\mu\nu\rho} k_\rho \right], \quad (1.41)$$

no qual $\alpha = \sqrt{N}e$, Π_0 e Π_e so dados por

$$\Pi_e = \frac{1}{4\pi} \int_0^1 dx \frac{2k^2 x(1-x)}{[\Lambda^2 - k^2 x(1-x)]^{1/2}}$$

$$\Pi_0 = \frac{1}{4\pi} \int_0^1 dx \frac{1}{[\Lambda^2 - k^2 x(1-x)]^{1/2}}.$$

Usando a expresso para $\Pi^{\mu\nu}$ e $D_{MCS}^{\mu\nu}$ podemos escrever o propagador completo na forma

$$D_{MCS}^{\mu\nu}(1/N) = \frac{-i}{\left[k^2 - m^2 - \alpha^4 \frac{k^4}{m^4} \left(\Lambda^2 \Pi_0^2 - \frac{\Pi_e^2}{k^2} \right) + 2\alpha^2 \frac{k^2}{m^2} (\Pi_e + m\Lambda\Pi_0) \right]} \quad (1.42)$$

$$\left\{ \left[1 - \alpha^2 \frac{\Pi_e}{m^2} \right] \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) - im \left[1 + \alpha^2 \frac{\Lambda}{m} \frac{k^2}{m^2} \Pi_0 \right] \varepsilon^{\mu\nu\rho} \frac{k_\rho}{k^2} \right\}$$

⁸Veja apndice A

Para $k \rightarrow \infty$, temos

$$\Pi_e \rightarrow \sqrt{k^2} \quad \Pi_0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{k^2}}. \quad (1.43)$$

Assim, é fácil verificar que o propagador para o campo vetorial tem um comportamento com o momento k , tendendo para o infinito, como $1/(k^2)^{3/2}$. Isso nos leva, pelo critério de contagem de potência, a conclusão que o grau de divergência superficial de um gráfico genérico G é

$$d(G) = 3 - N_F, \quad (1.44)$$

sendo N_F é o número de linhas externas de férmions em G . Aparentemente, aqui nós nos defrontamos com uma dificuldade visto que $d(G)$ não decresce com o número de linhas externas do campo vetorial crescendo. Contudo, (1.44) não leva em conta que, para um linha externa do vetor, o fator de momento associado com o vértice em que a linha é ligada não depende da variável de integração⁹, tal que o grau de divergência efetivo é abaixado para

$$d(G) = 3 - N_F - N_B, \quad (1.45)$$

que, como esperado, é o mesmo que no modelo de Thirring. Neste caso, é fácil de ver que os contra-termos necessários para fazer finita a função de Green, tem a mesma forma dos termos já presentes na Lagrangeana original. Isto significa que a teoria é renormalizável.

Por completeza, podemos verificar explicitamente a equivalência descrita no item 1, isto é, com $g^\mu = 0$, calculando a matriz $\mathcal{M}$ correspondente ao espalhamento de dois férmions. Para as Lagrangeanas (1.33) e (1.34) os vértices de interação são

$$\Gamma_{AD}^\mu = -ie\gamma^\mu \quad (1.46)$$

$$\Gamma_{MCS}^\mu = -\frac{e}{m}\gamma_\beta \varepsilon^{\beta\alpha\mu} k_\alpha \quad (1.47)$$

$$\Gamma_{Th} = \frac{ie^2}{m^2}\gamma^\mu \gamma_\mu, \quad (1.48)$$

onde $k = p' - p$, é o momento transferido. Os propagadores para os campos vetoriais f_μ e A_μ são os mesmos dados por (1.3) e (1.4). Para o propagador do férmion temos

$$S(p) = \frac{i}{\not{p} - M}. \quad (1.49)$$

A nível de árvore, a matriz espalhamento $\mathcal{M}$ para o modelo descrito por (1.33) é

⁹Isto pode ser visto explicitamente no cálculo do tensor de polarização, calculado no apêndice A

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{MCS-Th} &= \bar{u}(p')\Gamma_{MCS}^\mu u(p)D_{\mu\nu}^{MCS}(k)\bar{u}(q')\Gamma_{MCS}^\nu u(q) \\
&+ \bar{u}(p')(-ie\gamma^\mu)u(p)\left[\frac{i}{m^2}g_{\mu\nu}\right]\bar{u}(q')(-ie\gamma^\nu)u(q) .
\end{aligned} \tag{1.50}$$

Usando as expressões para $D_{\mu\nu}^{MCS}$, Γ_{MCS}^ν , Γ_{Th} e após algumas manipulações, nós podemos reescrever (1.50) na forma

$$\mathcal{M}_{MCS-Th} = \bar{u}(p')(-ie\gamma^\mu)u(p)\left\{\frac{-i}{k^2 - m^2}\left[g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{m^2} + im\varepsilon^{\mu\nu\rho}\frac{k_\rho}{m^2}\right]\right\}\bar{u}(q')(-ie\gamma^\nu)u(q) . \tag{1.51}$$

isto é

$$\mathcal{M}_{MCS-Th} = \mathcal{M}_{AD} . \tag{1.52}$$

Podemos facilmente verificar que a contração de dois vértices do acoplamento magnético com o propagador de MCS , leva a um termo que é equivalente a contração de dois vértices minimais com o propagador de AD , mais um termo que cancela a contribuição do vértice de Thirring. Devido a isto, é fácil observar que a equivalência pode ser demonstrada ordem-a-ordem para a matriz espalhamento dos férmions.

Capítulo 2

Espalhamento Aharonov-Bohm Não-Abeliano para Partícula Escalar

2.1 Introdução

O efeito AB não-Abeliano tem sido analisado por vários autores[32, 33, 34, 35] e tem se mostrado interessante tanto no estudo de gravitação em $(2 + 1)$ dimensões como na física de cordas cósmicas e buracos negros[36, 37, 38, 39, 40, 41]. No caso especial de cordas cósmicas, temos associado a cada corda um fluxo magnético, de modo que o espalhamento de partículas carregadas por cordas, ou o próprio espalhamento entre cordas, pode ser tratado como um espalhamento AB.

O estudo do efeito AB citado nas referências acima foi feito através do cálculo exato via mecânica quântica. Como conhecido, no tratamento perturbativo da mecânica quântica para o caso Abelian, a aproximação de Born falha em reproduzir a expansão do resultado exato[42], visto que o segundo termo da série de Born é infinito. Esta discrepância se deve ao fato que a auto-função perturbativa não satisfazer as mesmas condições de contorno do que no caso exato. Por outro lado, no tratamento perturbativo em teoria de campos não relativística para spin zero Abelian, foi mostrado que para eliminar as divergências, restaurar a invariância de escala e reproduzir o resultado da expansão da solução exata, é necessário adicionar um termo de contato $(\phi^* \phi)^2$ [22].

Recentemente o tratamento perturbativo foi aplicado para a teoria de campos não relativística não-Abeliana[61], isto é, partindo de um modelo para partículas escalares não relativísticas, com um índice de simetria interna, acoplado minimamente com o campo de CS não-Abeliano, foi calculado o espalhamento até 1-loop. Neste caso os autores mostram que para manter a teoria finita e recuperar a invariância de escala, e também para obter o resultado da expansão do cálculo exato, é necessário a adição de uma interação quártica, como acontece no caso Abelian.

Neste capítulo vamos estudar o efeito AB não-Abeliano de spin zero, como o limite

da teoria quântica de campos relativística, usando o procedimento do corte intermediário descrito na introdução. Com o objetivo de fixar a notação e facilitar a comparação com o resultado obtido da teoria relativística, vamos considerar brevemente o caso não relativístico, usando a regularização por corte. Depois disto, vamos calcular o espalhamento AB a partir da teoria relativística tomando o limite para pequenos momentos externos[62]. Veremos que este procedimento, além de reproduzir o caso Abelian, nos dá em ordem dominante o resultado obtido via cálculo da teoria não relativística. Em ordem sub-dominante surgem correções que induzem novos termos na Lagrangeana efetiva não relativística. No apêndice B nós temos algumas relações e integrais úteis no cálculo dos gráficos. No apêndice C nós explicitaremos as contas de dois gráficos, com o objetivo de deixar claro o procedimento aplicado no cálculo das amplitudes de Feynman.

2.2 Modelo Não Relativístico

Inicialmente, vamos analisar o tratamento perturbativo para o modelo não-Abeliano não relativístico. A Lagrangeana não relativística classicamente pode ser obtida da relativística¹ por uma redefinição dos campos, extraíndo-se o fator de fase associado a energia de repouso da partícula, $\exp(-imc^2t/\hbar)$, e expandindo em potências de $1/c$ (ou $1/m$). Até ordem dominante e eliminando-se os termos rapidamente oscilantes[63] temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{NR} = & -\Theta\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}tr\left(A_\alpha\partial_\beta A_\gamma + \frac{2g}{3}A_\alpha A_\beta A_\gamma\right) + i\Phi^\dagger D_t\Phi - \frac{1}{2m}(\mathbf{D}\Phi)^\dagger(\mathbf{D}\Phi) \\ & - \frac{1}{4}\Phi_n^\dagger\Phi_{m'}^\dagger C_{n'm'nm}\Phi_m\Phi_m, \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde Φ é um campo complexo transformando-se com a representação fundamental do grupo de gauge $SU(n)$, gerado pelas matrizes T^a , com $a = 1, 2, \dots, N = n^2 - 1$, e $A_\mu = A_\mu^a T^a$ e $D_\mu = \partial_\mu + gA_\mu$. As matrizes T^a satisfazem a álgebra de Lie

$$[T^a, T^b] = f_{abc}T^c, \quad (2.2)$$

normalizadas por

$$tr(T^a, T^b) = -\frac{1}{2}\delta_{ab}. \quad (2.3)$$

A constante $C_{n'm'nm}$ pode assumir a forma mais geral mantendo a invariância da ação sobre as transformações do grupo $SU(n)$.

¹Podemos também usar o procedimento de Foldy-Wouthuysen. No entanto, este procedimento é usualmente aplicado no caso de campos externos. A transposição para campos em interação não é muito fácil. Uma discussão mais detalhada se encontra na referência [28].

Para facilitar o cálculo da amplitude de espalhamento vamos abstrair os índices de matéria, trabalhando com uma matriz $\mathcal{M}(\theta)$ tal que a amplitude de espalhamento será dada por

$$-i\mathcal{A} = \langle n', m' | \mathcal{M}(\theta) | n, m \rangle + \langle m', n' | \mathcal{M}(\theta + \pi) | n, m \rangle , \quad (2.4)$$

onde θ é o ângulo de espalhamento. Assim,

$$\begin{aligned} C_{n'm'nm} &= \langle n', m' | C | n, m \rangle \\ (T^a)_{n'n}(T^b)_{m'm} &= \langle n', m' | T^a \otimes T^b | n, m \rangle \\ C_{n'm'nm}^2 &= \sum_{l,l'} \langle n', m' | C | l, l' \rangle \langle l, l' | C | n, m \rangle . \end{aligned} \quad (2.5)$$

Para obter as regras de Feynman vamos adicionar na Lagrangeana (2.1) o termo de fixação de gauge (gauge de Coulomb)

$$\mathcal{L}_{FG} = -\frac{1}{\xi} \text{tr}(\nabla \mathbf{A})^2 , \quad (2.6)$$

e o termo de fantasma (ghost)

$$\mathcal{L}_{GH} = -\eta^{*a}(\nabla^2 + g f_{abc} \mathbf{A}^c \cdot \nabla) \eta^b . \quad (2.7)$$

No limite $\xi \rightarrow 0$ as regras de Feynman, representadas graficamente na figura (2.1), são:

Propagador do campo de matéria

$$D(p)_{nm} = D(p) \delta_{nm} = \frac{i}{p_0 - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + i\epsilon} \delta_{nm} \quad (2.8)$$

Propagador para o Campo Fantasma

$$G(p)_{ba} = G(p) \delta_{ba} = \frac{-i}{\mathbf{p}^2} \delta_{ba} \quad (2.9)$$

Propagador para o campo de gauge

$$D^{\mu\nu}(k)_{ba} = D^{\mu\nu}(k) \delta_{ba} = \frac{1}{\Theta} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \frac{\bar{k}_\lambda}{\mathbf{k}^2} \delta_{ba} \quad (2.10)$$

Vértices de Interação

$$\Gamma_{nm}^{a,0}(p, p') = -g(T^a)_{nm} \quad (2.11)$$

$$\Gamma_{nm}^{a,i}(p, p') = -\frac{g}{2m}(T^a)_{nm}(p + p')^i \quad (2.12)$$

Figura 2.1: Regras de Feynman - Teoria Não Relativística.

$$\Gamma^{abc,i}(p, p') = -g f^{abc} p^i \quad (2.13)$$

$$\Gamma^{abc,\mu\nu\lambda}(p, p') = ig \Theta f^{abc} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \quad (2.14)$$

$$\Gamma_{nm}^{ab,ij}(p, p') = -\frac{ig^2}{2m} [T^a T^b + T^b T^a]_{nm} g^{ij} \quad (2.15)$$

$$\Gamma(p, p')_{m'n'mn} = \frac{-i}{2} C_{m'n'mn} \quad (2.16)$$

Onde, no propagador do campo de gauge, $\vec{k}_\lambda = (0, k_1, k_2)$.

Os gráficos que contribuem para o espalhamento na ordem de árvore são representados na figura (2.2), e nos levam a amplitude de espalhamento²

$$\mathcal{M}(\theta) = -\frac{C}{2} - i \frac{2\pi}{m} \Omega \cot(\theta/2), \quad (2.17)$$

onde estamos usando a mesma notação da referência [61]

$$\Omega = \frac{-g^2}{2\pi\Theta} T^a \otimes T_a, \quad \Omega^2 = \frac{g^4}{4\pi^2\Theta^2} T^a T^b \otimes T_a T_b. \quad (2.18)$$

A contribuição de 1-loop é representada na figura (2.3). O gráfico (2.3d) não existe na teoria Abeliã, e vai ser essencial para cancelar as divergências e reproduzir o resultado da expansão do caso exato. O cálculo destes gráficos nos leva a³ (para $\theta \neq 0$)

²Todos os cálculos da amplitude de espalhamento serão feitos no centro de massa.

³No apêndice C explicitaremos as contas do gráfico (2.3b).

Figura 2.2: *Espalhamento a nível de Árvore - Teoria Não Relativística.*

$$\mathcal{M}_a(\theta) = \frac{mC^2}{16\pi} \left[\log \left(\frac{\Lambda_{NR}^2}{p^2} \right) + i\pi \right] \quad (2.19)$$

$$\mathcal{M}_b(\theta) = \frac{-\pi\Omega^2}{m} [2 \log |2 \sin(\theta/2)| + i\pi] \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_c(\theta) = & \frac{-\pi\Omega^2}{m} \left[\log \left(\frac{\Lambda_{NR}^2}{p^2} \right) - 2 \log |2 \sin(\theta/2)| \right] \\ & + \frac{g^4}{8\pi m\Theta} [f^{abc}T_c \otimes T_a T_b] \left[\log \left(\frac{\Lambda_{NR}^2}{p^2} \right) - 2 \log |2 \sin(\theta/2)| \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\mathcal{M}_d(\theta) = \frac{-g^4}{8\pi m\Theta} [f^{abc}T_c \otimes T_a T_b] \left[\log \left(\frac{\Lambda_{NR}^2}{p^2} \right) - 2 \log |2 \sin(\theta/2)| + 1 \right] . \quad (2.22)$$

Aqui foi usado que $[T^a, T^b] = f^{abc}T_c$ e $f_{abc}f_{abd} = \delta_{cd}$. Observe que a contribuição de $\mathcal{M}_d(\theta)$, a menos do termo constante, cancela a segunda parte de $\mathcal{M}_c(\theta)$ que surge devido a estrutura do grupo não-Abeliano. Assim temos que, a menos do termo constante em (2.22) que pode ser absorvido em C ,

$$\mathcal{M}_{1-loop}(\theta) = \frac{m}{16\pi} \left(C^2 - \frac{16\pi^2\Omega^2}{m^2} \right) \left[\log \left(\frac{\Lambda_{NR}^2}{p^2} \right) + i\pi \right] . \quad (2.23)$$

Observemos que para $C^2 = 16\pi^2\Omega^2/m^2$ não temos correção de 1-loop para o espalhamento de AB na teoria não relativística. O resultado da equação (2.23) é o mesmo da referência [61], só que os autores usaram a regularização dimensional, enquanto que aqui foi usado a regularização por corte.

2.3 Modelo Relativístico

O efeito AB pode ser tratado a partir de um ponto mais fundamental, isto é, podemos tratar o problema através do cálculo da amplitude relativística, usando o método de separação das regiões de alta e baixa energia, como descrito inicialmente. Isto nos

Figura 2.3: *Espalhamento 1-loop - Teoria Não Relativística.*

dará contribuições advindas das correções radiativas e que não aparecem na teoria não relativística. No caso do modelo relativístico as amplitudes de Feynman ficam complicadas no caso de uma matriz geral $C_{n'm'n m}$ do acoplamento quártico. O problema torna-se razoavelmente mais simples no caso do grupos de simetria de gauge SU(2). Neste caso a Lagrangeana para o campo carregado de spin zero, minimamente acoplado com CS, e com a auto-interação mais geral que mantém a simetria do grupo, é

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\Theta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \text{tr} \left(A_\alpha \partial_\beta A_\gamma + \frac{2g}{3} A_\alpha A_\beta A_\gamma \right) + (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) \\ & - m^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{\lambda_1}{4} (\Phi^\dagger \Phi)^2 - \frac{\lambda_2}{4} (\Phi^\dagger T^a \Phi)^2, \end{aligned} \quad (2.24)$$

na qual T^a são matrizes anti-hermitianas 2×2 , com $a = 1, 2, 3$, satisfazendo a álgebra de Lie

$$[T_a, T_b] = -2c_f \varepsilon_{abc} T^c, \quad (2.25)$$

e normalizadas por⁴

$$\text{tr}(T_a T_b) = -\frac{1}{2} \delta_{ab}. \quad (2.26)$$

Além disso temos outras relação para as matrizes T^a ,

$$\text{tr}(I) = n \quad \text{tr}(T^a) = 0$$

⁴Obs: Temos que $c_f = -1/2$, $\delta_a^a = 3$ e $n = 2$, porém vamos mantê-las a fim de facilitar o limite para o caso Abelian.

Figura 2.4: Regras de Feynman - Teoria Relativística.

$$\begin{aligned}
\text{tr}(T^a T^b T^c) &= \frac{1}{2} c_f \varepsilon^{abc}, \\
T^a T^b &= -\frac{1}{2n} \delta^{ab} I - c_f \varepsilon^{abc} T_c \\
\{T^a, T^b\} &= -\frac{1}{n} \delta^{ab} I \quad T^a T_a = -\frac{\delta_a^a}{2n} I \\
T^a T^b \otimes T_a T_b &= \frac{1}{4n^2} \delta_a^a I \otimes I + 2c_f^2 T^a \otimes T_a \\
T^a T^b \otimes T_b T_a &= \frac{1}{4n^2} \delta_a^a I \otimes I - 2c_f^2 T^a \otimes T_a
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Novamente, para obtermos as regras de Feynman, vamos adicionar a Lagrangeana (2.24) o termo de fixação de gauge, equação (2.6), e o termo do campo fantasma, equação (2.7). No limite $\xi \rightarrow 0$, obtemos as regras representadas na figura (2.4), e que analiticamente são dadas por

Propagador do campo de matéria

$$\Delta(p)_{nm} = \Delta(p) \delta_{nm} = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \delta_{nm}. \tag{2.28}$$

O propagador do campo de gauge e do campo fantasma são os mesmos dado por (9) e (10). Para os vértices de interação temos⁵

⁵Os vértices Γ_1 e Γ_2 vem dos termos de interação $\frac{\lambda_1}{4} (\Phi^\dagger \Phi)^2$ e $\frac{\lambda_2}{4} (\Phi^\dagger T^a \Phi)^2$ respectivamente. A notação com a linha pontilhada é usada para facilitar a visualização do fluxo do campo de matéria. Ou seja, a linha pontilhada funciona como um campo auxiliar cujo propagador é a identidade.

Vértices de Interação

$$\Gamma_{nm}^{a,\mu}(p, p') = -g(T^a)_{nm}(p + p')^\mu \quad (2.29)$$

$$\Gamma_{nm}^{ab,\mu\nu}(p, p') = -ig^2[T^a T^b + T^b T^a]_{nm} g^{\mu\nu} \quad (2.30)$$

$$\Gamma_1^{n'm'nm}(p, p') = \frac{-i\lambda_1}{2} f^{n'n} f^{m'm} \quad (2.31)$$

$$\Gamma_2^{n'm'nm}(p, p') = \frac{-i\lambda_2}{2} (T^a)^{n'n} (T^a)^{m'm} \quad (2.32)$$

$$\Gamma^{abc,i}(p, p') = -g\varepsilon^{abc} p^i \quad (2.33)$$

$$\Gamma^{abc,\mu\nu\lambda}(p, p') = -2ic_f g \Theta \varepsilon^{abc} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \quad (2.34)$$

$$(2.35)$$

2.3.1 Correção para a Auto-Energia

Os gráficos que aparecem na função de dois pontos para o campo de matéria, a nível de 1-loop, são mostrados na figura (2.5). Os únicos gráficos diferentes de zero são (2.5.a), (2.5.b) e (2.5.c),

$$\Sigma_a^{nm}(p) = \delta^{nm} \Sigma_a(p) \quad (2.36)$$

$$\Sigma_b^{nm}(p) = \text{tr}(I) \delta^{nm} \Sigma_a(p) \quad (2.37)$$

$$\Sigma_c^{nm}(p) = [T^a T_a]^{nm} \Sigma_a(p)_{\lambda_1 \rightarrow \lambda_2}, \quad (2.38)$$

no qual

$$\Sigma_a(p) = -i \frac{\lambda_1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \Delta(k) = \frac{\lambda_1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (2.39)$$

Efetuada a integração em k^0 com o uso do teorema dos resíduos, temos que

$$\Sigma_a(p) = \frac{-i\lambda_1}{2} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{1}{2\omega_k}. \quad (2.40)$$

Agora separando na parte de baixa e alta energia e mantendo termos até ordem η^2 , temos que

$$\Sigma_a^L(p) = \frac{-i\lambda_1}{16\pi} \left[m \left(\frac{\Lambda^2}{2m^2} - \frac{\Lambda^4}{4m^4} \right) \right] \quad (2.41)$$

$$\Sigma_a^H(p) = \frac{-i\lambda_1}{16\pi} \left[2(\Lambda_0 - m) - m \left(\frac{\Lambda^2}{2m^2} - \frac{\Lambda^4}{4m^4} \right) \right] \quad (2.42)$$

Observe que toda contribuição vem da parte de alta energia. A parte de baixa energia é polinomial em Λ e se cancela quando somado com a de alta energia. Se tivéssemos usado a regularização dimensional só teríamos a parte finita (nenhuma dependência em Λ_0). Como Σ não depende do momento externo não teremos nenhuma renormalização para a função de onda até 1-loop. O termo acima pode ser absorvido numa renormalização de massa. Os demais gráficos se anulam pela anti-simetria do propagador de gauge ou por conjugação de carga.

2.3.2 Tensor de Polarização

Os gráficos que surgem na função de dois pontos para o campo de gauge estão representados na figura (2.6). Observamos que para Π_c e Π_d só temos as componentes espaciais. Usando as regras de Feynman temos que[64]

$$\Pi_c^{ij,ab}(q) + \Pi_d^{ij,ab}(q) = \delta^{ab} Cte \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k^i(k-q)^j - k^j(k-q)^i}{k^2(k-q)^2} = 0. \quad (2.43)$$

Assim nós obtemos para $\Pi^{\mu\nu}$

$$\Pi^{\mu\nu,ab}(q) = \Pi_a^{\mu\nu,ab}(q) + \Pi_b^{\mu\nu,ab}(q) = tr(T^a T^b) \Pi^{\mu\nu}(q), \quad (2.44)$$

onde $\Pi^{\mu\nu}(q)$ é o mesmo obtido na teoria abeliana[29]

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = \frac{ig^2}{8\pi} P^{\mu\nu}(q) \Pi(q^2), \quad (2.45)$$

com

$$P^{\mu\nu}(q) = q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu \quad (2.46)$$

$$\Pi(q^2) = \int_0^1 dx \frac{1 - 4x + 4x^2}{[m^2 - q^2 x(1-x)]^{(1/2)}} \approx \frac{1}{3m} \left[1 + \frac{q^2}{20m^2} \right]. \quad (2.47)$$

Como no caso da teoria abeliana, a contribuição para o tensor de polarização vem somente da parte de altas energia. Este fato era esperado, pois esses gráficos não existem na teoria não relativística.

Figura 2.5: *Auto-Energia - Teoria Relativística.*

Figura 2.6: *Tensor de Polarização - Teoria Relativística.*

2.3.3 Correção de Vértice

A correção de vértice, como a polarização do vácuo e auto-energia do campo de matéria tem contribuição somente da parte de altas energias. Os gráficos para o vértice trilinear ($A\Phi^1\Phi$) são mostrados na figura (2.7). Os Gráficos (2.7.e), (2.7.f), (2.7.g) e (2.7.h) são nulos devido a integração ímpar nos momentos (fazendo uma mudança de variável vemos que $\int d^3k f(k) \rightarrow -\int d^3k f(k)$). O gráfico (2.7.d), após a integração em k^0 e fazendo o uso da parametrização de Feynman, pode ser visto facilmente que também se anula. O gráfico (2.7.a) é dado analiticamente por

$$\Gamma_{ann}^{\mu,a}(p, p') = [T^c T^a T_c]_{nm} \Gamma_a^\mu(p, p') \quad (2.48)$$

com

$$\Gamma_a^\mu(p, p') = \frac{-g^3}{\Theta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\frac{(2p-k)^\sigma \varepsilon_{\sigma\rho\lambda} \bar{k}^\lambda (2p'-k)^\rho (p+p'-k)^\mu}{k^2[(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon][(p'-k)^2 - m^2 + i\epsilon]} \right] \quad (2.49)$$

A equação acima nos leva a (para $p \ll m$)

$$\Gamma_a^0(p, p') = \frac{ig^3}{4\pi\Theta m} \varepsilon_{ij} p^i q^j, \quad (2.50)$$

$$\Gamma_a^i(p, p') = \frac{-ig^3}{8\pi\Theta} \left[\varepsilon_{ij} \frac{p^i q^j}{m} \left(\frac{p^i + p'^i}{2m} \right) - 2\varepsilon^{il} q_l \left(1 + \frac{\mathbf{p}^2}{12m^2} [2 + \cos(\theta)] \right) \right], \quad (2.51)$$

no qual $q^i = p^i - p'^i$.

Para os gráficos (2.7.b) e (2.7.c) temos

$$\begin{aligned} \Gamma_{bnn}^{\mu,a}(p, p') &= [(T^a T^c + T^c T^a) T_c]_{nm} \Gamma_b^\mu(p, p') \\ \Gamma_{cnn}^{\mu,a}(p, p') &= [T_b (T^a T^b + T^b T^a)]_{mn} \Gamma_c^\mu(p, p'), \end{aligned} \quad (2.52)$$

sendo

$$\Gamma_b^\mu(p, p') = \frac{g^3}{\Theta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\frac{(2p-k)^\sigma \varepsilon_{\sigma\rho\lambda} \bar{k}^\lambda g^{\rho\mu}}{k^2[(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon]} \right] \quad (2.53)$$

$$\Gamma_c^\mu(p, p') = \frac{g^3}{\Theta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\frac{(2p'-k)^\sigma \varepsilon_{\sigma\rho\lambda} \bar{k}^\lambda g^{\rho\mu}}{k^2[(p'-k)^2 - m^2 + i\epsilon]} \right]. \quad (2.54)$$

Após as integrações obtemos até ordem η^2

$$\Gamma_b^0(p, p') = \Gamma_c^0(p, p') \approx 0 \quad (2.55)$$

$$\Gamma_b^l(p, p') + \Gamma_c^l(p, p') = \frac{ig^3}{4\pi\Theta} \varepsilon_{ij} g^{jl} q^i f(\mathbf{p}^2, m^2) , \quad (2.56)$$

sendo $f(p^2, m^2)$ dado por

$$f(\mathbf{p}^2, m^2) = \frac{\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}}{\sqrt{m^2} + \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}} \approx \frac{1}{2} + \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2} . \quad (2.57)$$

O gráfico da figura (2.7.i) na forma analítica é escrito como

$$\begin{aligned} \Gamma_{nm}^{\mu,a} &= -2ig^3\Theta[c_f\varepsilon^{abc}T_cT_b]_{nm} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \\ &\times \left[\Delta(k)(p+k)^\sigma (p'+k)^\rho \varepsilon^{\mu\sigma'\rho'} D_{\sigma\sigma'}(p-k) D_{\rho'\rho}(p'-k) \right] , \end{aligned} \quad (2.58)$$

e será calculado explicitamente quando incorporado no gráfico de espalhamento.

As correções para os vértices trilineares AAA e $A\eta^*\eta$ estão mostradas graficamente na figura (2.8). O gráfico (2.8.d) é nulo devido a forma do propagador de gauge e o tensor $\varepsilon_{\mu\nu\alpha}$ que aparece no vértice AAA . O gráfico (2.8.e) é zero devido ao fato do vértice $A\eta^*\eta$ só conter a parte espacial do campo de gauge e que $D_{00} = D_{ij} = 0$. Os gráficos (2.8.a) e (2.8.b) quando somados se cancelam[64], do mesmo modo que os tensores de polarizações $\Pi_c^{\mu\nu}$ e $\Pi_d^{\mu\nu}$. O gráfico (2.8.c) tem divergência superficial logaritmica, no entanto, por simetria na integração ele torna-se finito. Este gráfico junto com o loop de férmions com quatro pernas externas⁶ de campo de gauge contribuem para completar o termo de Maxwell induzido

$$\mathcal{L}_{ind} = \frac{1}{4} \left(\frac{g^2}{24\pi m} \right) \text{tr}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) \quad (2.59)$$

2.3.4 Espalhamento Partícula-Partícula

Os gráficos que contribuem para a amplitude de espalhamento na ordem de árvore estão representados na figura (2.9). Usando a regras de Feynman, obtemos,

$$\mathcal{M}_{O-loop}(\theta) = -\frac{\lambda_{eff}}{2} - i(8\pi)\Omega \omega_p \cot(\theta/2) . \quad (2.60)$$

Aqui nós temos usado que

$$\lambda_{eff} = \lambda_1[I \otimes I] + \lambda_2[T^a \otimes T_a] \quad (2.61)$$

Figura 2.7: Correção ao Vértice $A\Phi^\dagger\Phi$ - Teoria Relativística.

Figura 2.8: Correção ao Vértice AAA e $A\eta^*\eta$ - Teoria Relativística.

Figura 2.9: *Espalhamento a Nível de Árvore - Teoria Relativística.*

e Ω dado pela equação (2.18).

Vamos agora obter a contribuição de 1-loop para o espalhamento. Os gráficos que contribuirão estão representados nas figuras (2.10), (2.11), (2.12) e (2.13). Vamos detalhar o cálculo do primeiro gráfico para deixar claro o procedimento que será usado em todos os gráficos. No apêndice C vamos explicitar as contas do gráfico (2.11.c4), pois ele exige a introdução de um corte extra na variável de integração k^0 . Exemplo do procedimento do corte intermediário aplicado para a teoria Abeliiana pode ser visto na referência [28].

Ordem λ^2

Para calcular a contribuição para a amplitude de espalhamento, vinda da ordem de 1-loop, vamos iniciar com a contribuição de ordem λ^2 . Os gráficos desta ordem estão mostrados na figura (2.10). Os gráficos (2.10.a1) a (2.10.a4) dão

$$\mathcal{M}_{a1-4}(\theta) = \frac{i}{4} \left[-\lambda_1^2 I \otimes I - 2\lambda_1 \lambda_2 T^a \otimes T_a - \lambda_2^2 T^a T^b \otimes T_a T_b \right] I_k^{(1)}(\theta), \quad (2.62)$$

com

$$\begin{aligned} I_k^{(1)} &= -i \int \frac{d^k}{(2\pi)^3} \Delta(k) \Delta(p_1 + p_2 - k) \\ &= \frac{i}{4\pi^2} \int d^2 \mathbf{k} \int \frac{dk_0}{(2\pi)} \frac{1}{[k_0^2 - w_k^2 + i\epsilon]} \frac{1}{[(2w_p - k_0)^2 - w_k^2 + i\epsilon]}, \end{aligned}$$

onde $w_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$. Integrando em k_0 usando o teorema dos resíduos

$$I_k^{(1)} = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^{\Lambda_0} \frac{1}{2} d(\mathbf{k})^2 \int_0^{2\pi} d\alpha \frac{1}{w_k} \frac{1}{p^2 - \mathbf{k}^2 + i\epsilon}.$$

A integração angular é trivial, ou seja

$$I_k^{(1)} = \frac{1}{16\pi} \int_0^{\Lambda_0} d(\mathbf{k})^2 \frac{1}{w_k} \frac{1}{p^2 - \mathbf{k}^2 + i\epsilon}. \quad (2.63)$$

⁶Estes gráficos não darão nenhuma contribuição para o espalhamento na ordem de 1-loop. Somente o tensor de polarização contribui nesta ordem.

Separando a integração restante na região de baixa e alta energia, temos

$$I_k^{(1)L} = \frac{1}{16\pi} \int_0^\Lambda d(\mathbf{k})^2 \frac{1}{w_k} \frac{1}{\mathbf{p}^2 - \mathbf{k}^2 + i\epsilon} \quad (2.64)$$

$$I_k^{(1)H} = \frac{1}{16\pi} \int_\Lambda^{\Lambda_0} d(\mathbf{k})^2 \frac{1}{w_k} \frac{1}{\mathbf{p}^2 - \mathbf{k}^2 + i\epsilon} \quad (2.65)$$

Na parte de baixo, vamos fazer a expansão em $1/m$, ou seja,

$$\frac{1}{w_k} = \frac{1}{m} \left[1 - \frac{\mathbf{k}^2}{2m} + \dots \right] . \quad (2.66)$$

e na parte de alta energia, fazemos uma expansão em torno de $\mathbf{p} = 0$, isto é

$$\frac{1}{\mathbf{p}^2 - \mathbf{k}^2} = -\frac{1}{\mathbf{k}^2} \left[1 + \frac{\mathbf{p}^2}{\mathbf{k}^2} + \dots \right] . \quad (2.67)$$

Os tipos de integrais que surgem estão mostradas no apêndice (B). Assim após as integrações restantes

$$I_k^{(1)L}(\theta) = \frac{-1}{16\pi m} \left\{ \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2}{2m^2} \right) \left[\log \left(\frac{\Lambda^2}{\mathbf{p}^2} \right) + i\pi \right] - \frac{\mathbf{p}^2}{\Lambda^2} - \frac{\mathbf{p}^4}{2\Lambda^4} - \frac{\Lambda^2}{2m^2} + \frac{3\Lambda^4}{16m^4} \right\} , \quad (2.68)$$

$$I_k^{(1)H}(\theta) = \frac{1}{16\pi m} \left\{ \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2}{2m^2} \right) \log \left(\frac{\Lambda^2}{4m^2} \right) - \frac{\mathbf{p}^2}{2m^2} - \frac{\mathbf{p}^2}{\Lambda^2} - \frac{\mathbf{p}^4}{2\Lambda^4} - \frac{\Lambda^2}{2m^2} + \frac{3\Lambda^4}{16m^4} \right\} , \quad (2.69)$$

ou seja

$$I_k^{(1)}(\theta) = I_k^{(1)L}(\theta) + I_k^{(1)H}(\theta) = \frac{-1}{16\pi m} \left\{ \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2}{2m^2} \right) \left[\log \left(\frac{4m^2}{\mathbf{p}^2} \right) + i\pi \right] + \frac{\mathbf{p}^2}{2m^2} \right\} . \quad (2.70)$$

Neste ponto, podemos observar que a contribuição dominante, que vem da parte de baixa energia, equação (2.68), é a mesma que no cálculo não relativístico, equação (2.19), se o corte Λ for identificado com Λ_{NR} . No entanto aqui, a parte de alta energia funciona como um corte natural, mantendo amplitude finita. O procedimento acima, isto é, integrando primeiro em k^0 , depois na parte angular, e finalmente fazendo a separação na parte L e H, será aplicado no cálculo dos gráfico restantes. Para evitarmos a repetição nós detalharemos somente alguns pontos que achamos serem úteis no entendimento.

Os gráficos (2.10.a5) e (2.10.a6) são dados por

$$\mathcal{M}_{a5-6}(\theta) = \frac{1}{4} \left[-n\lambda_1^2 I \otimes I + \frac{\lambda_2^2}{2} T^a \otimes T^a \right] I_k^{(2)}(\theta) , \quad (2.71)$$

onde

$$I_k^{(2)}(\theta) = -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Delta(k) \Delta(k - q) . \quad (2.72)$$

Após a integração em k^0 e separação na parte de baixa e alta energia obtemos,

$$I_k^{(2)L}(\theta) = \frac{-1}{16\pi m} \left[\frac{\Lambda^2}{m^2} - \frac{3\Lambda^4}{4m^4} \right] , \quad (2.73)$$

$$I_k^{(2)H}(\theta) = \frac{-1}{16\pi m} \left[2 - \frac{\mathbf{p}^2}{3m^2} (1 - \cos \theta) - \frac{\Lambda^2}{m^2} + \frac{3\Lambda^4}{4m^4} \right] , \quad (2.74)$$

ou seja

$$I_k^{(2)}(\theta) = I_k^{(2)L}(\theta) + I_k^{(2)H}(\theta) = \frac{-1}{16\pi m} \left[2 - \frac{\mathbf{p}^2}{3m^2} (1 - \cos \theta) \right] . \quad (2.75)$$

Os gráficos de (2.10.a7) a (2.10.a10) levam a

$$\mathcal{M}_{a7-10}(\theta) = \frac{1}{4} \left[-\lambda_1^2 I \otimes I - 2\lambda_1 \lambda_2 T^a \otimes T_a - \lambda_2^2 T^b T^a \otimes T_a T_b \right] I_k^{(3)}(\theta) , \quad (2.76)$$

com

$$I_k^{(3)}(\theta) = -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Delta(k) \Delta(k + p_2 - p_3) . \quad (2.77)$$

Novamente após a integração em k^0 e separação na parte de baixa e alta energia obtemos

$$I_k^{(3)L}(\theta) = \frac{-1}{16\pi m} \left[\frac{\Lambda^2}{m^2} - \frac{3\Lambda^4}{4m^4} \right] , \quad (2.78)$$

$$I_k^{(3)H}(\theta) = \frac{-1}{16\pi m} \left[2 - \frac{\mathbf{p}^2}{3m^2} (1 + \cos \theta) - \frac{\Lambda^2}{m^2} + \frac{3\Lambda^4}{4m^4} \right] , \quad (2.79)$$

ou seja

$$I_k^{(3)}(\theta) = I_k^{(3)L}(\theta) + I_k^{(3)H}(\theta) = \frac{-1}{16\pi m} \left[2 - \frac{\mathbf{p}^2}{3m^2} (1 + \cos \theta) \right] . \quad (2.80)$$

Os gráficos (2.10.a11) a (2.10.a14) dão

$$\mathcal{M}_{a11-14}(\theta) = \frac{1}{4} \left[-\lambda_1^2 I \otimes I - \lambda_1 \lambda_2 T^a T_a \otimes I - \lambda_1 \lambda_2 T^a \otimes T_a - \lambda_2^2 T^a T^b T_a \otimes T_b \right] I_k^{(2)}(\theta) . \quad (2.81)$$

Finalmente, os gráficos (2.10.a15) a (2.10.a18) fornecem

$$\mathcal{M}_{a15-18}(\theta) = \frac{1}{4} \left[-\lambda_1^2 I \otimes I - \lambda_1 \lambda_2 I \otimes T^a T_a - \lambda_1 \lambda_2 T^a \otimes T_a - \lambda_2^2 T_a \otimes T^b T^a T_b \right] I_k^{(2)}(\theta). \quad (2.82)$$

Assim temos que a soma de (2.62), (2.71), (2.76), (2.81) e (2.82) nos dá

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_a(\theta) = & \frac{-1}{64\pi m} \left[\left(-\lambda_1^2 - \frac{\delta^{aa}}{4n^2} \lambda_2^2 \right) I \otimes I + \left(-2c_f^2 \lambda_2^2 - 2\lambda_1 \lambda_2 \right) T^a \otimes T^a \right] \\ & \left\{ \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2}{2m^2} \right) \left[\log \left(\frac{4m^2}{\mathbf{p}^2} \right) + i\pi \right] + \frac{\mathbf{p}^2}{2m^2} \right\} \\ & - \frac{1}{64\pi m} \left[\left(-[n+3]\lambda_1^2 + \frac{\delta^{aa}}{n} \lambda_1 \lambda_2 - \frac{\delta^{aa}}{4n^2} \lambda_2^2 \right) I \otimes I \right. \\ & + \left. \left(-4\lambda_1 \lambda_2 + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n} - 2c_f^2 \right] \lambda_2^2 \right) T^a \otimes T^a \right] \left(2 - \frac{\mathbf{p}^2}{3m^2} \right) \\ & - \frac{1}{64\pi m} \left[\left(-[n+1]\lambda_1^2 + \frac{\delta^{aa}}{n} \lambda_1 \lambda_2 + \frac{\delta^{aa}}{4n^2} \lambda_2^2 \right) I \otimes I \right. \\ & + \left. \left(\left[-6c_f^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right] \lambda_2^2 \right) T^a \otimes T^a \right] \frac{\mathbf{p}^2}{3m^2} \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Ordem g^4

Os gráficos mais importantes com vértices de CS estão representados na figura (2.11). Os gráficos (2.11.b1) e (2.11.b2) nos levam a

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{b1}(\theta) = & -i(-g)^4 [T^a T^c \otimes T_c T_c] \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \{ \Delta(k) \Delta(p_1 + p_2 - k) \\ & [(p_1 + k)^\mu D_{\sigma\mu}(k - p_1)(2p_2 + p_1 - k)^\sigma] \\ & [(p_3 + k)^\nu D_{\nu\rho}(k - p_3)(p_2 + p_1 + p_3 - k)^\rho] \} , \end{aligned} \quad (2.84)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{b2}(\theta) = & -i(-g)^4 [T^a T^c \otimes T_c T_a] \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \{ \Delta(k) \Delta(k + p_2 - p_3) \\ & [(p_1 + k)^\mu D_{\mu\sigma}(p_1 - k)(k + p_2 - p_3 + p_4)^\sigma] \\ & [(2p_2 - p_3 + k)^\nu D_{\nu\rho}(p_3 - k)(k + p_3)^\rho] \} . \end{aligned} \quad (2.85)$$

Após a integração em k^0 e a separação na parte de baixa energia e alta energia, temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{b1}^L(\theta) &= \frac{-g^4 m}{\pi \Theta^2} [T^a T^c \otimes T_a T_c] \left\{ \left(1 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m^2} \right) [\log[2(1 - \cos \theta)] + i\pi] + 2 \cos \theta \frac{\mathbf{p}^2}{\Lambda^2} \right. \\ &\quad \left. - \cos \theta \left[\log[2(1 - \cos \theta)] - \log \left(\frac{\Lambda^2}{\mathbf{p}^2} \right) \right] \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} - \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} - (1 - 2 \cos \theta - 4 \cos^2 \theta) \frac{\mathbf{p}^4}{2\Lambda^4} \right\} \\ &\quad (2.86)\end{aligned}$$

$$\mathcal{M}_{b2}^L(\theta) = \frac{-g^4 m}{4\pi \Theta^2} [T^a T^c \otimes T_a T_c - 2c_f \varepsilon_{abc} T^a T^b \otimes T^c] \left\{ (1 + \cos \theta) \frac{\mathbf{p}^2 \Lambda^2}{m^4} \right\} \quad (2.87)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{b1}^H(\theta) &= \frac{-g^4 m}{\pi \Theta^2} [T^a T^c \otimes T_a T_c] \left\{ -\cos \theta \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \log \left(\frac{\Lambda^2}{4m^2} \right) - 2 \cos \theta \frac{\mathbf{p}^2}{\Lambda^2} \right. \\ &\quad \left. + (1 - 2 \cos \theta - 4 \cos^2 \theta) \frac{\mathbf{p}^4}{2\Lambda^4} - \cos \theta \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \right\} \\ &\quad (2.88)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{b2}^H(\theta) &= \frac{-g^4 m}{4\pi \Theta^2} [T^a T^c \otimes T_a T_c - 2c_f \varepsilon_{abc} T^a T^b \otimes T^c] \\ &\quad \left\{ -(1 + \cos \theta) \frac{\mathbf{p}^2 \Lambda^2}{m^4} + 2(1 + \cos \theta) \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \right\}, \\ &\quad (2.89)\end{aligned}$$

usando que $\varepsilon_{abc} T^a T^b \otimes T^c = -2c_f T^a \otimes T_a$ temos que $M_b = M_{b1} + M_{b2}$ fica

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_b(\theta) &= \frac{-g^4 m}{2\pi \Theta^2} [T^a T^c \otimes T_a T_c] \left\{ 2 \left(1 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m^2} \right) [\log[2(1 - \cos \theta)] + i\pi] + \right. \\ &\quad \left. - 2 \cos \theta \left[\log[2(1 - \cos \theta)] - \log \left(\frac{4m^2}{\mathbf{p}^2} \right) \right] \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} - \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} (1 + \cos \theta) \right\} + \\ &\quad + \frac{g^4 m}{\pi \Theta^2} [c_f^2 T^a \otimes T_a] \left(2(1 + \cos \theta) \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \right). \\ &\quad (2.90)\end{aligned}$$

Vamos agora calcular as segunda família de gráficos da figura (2.11). Os gráficos (2.11.c1) a (2.11.c3) individualmente apresentam divergência na integral em k_0 , porém quando somados esta divergência se cancela. Analiticamente temos

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{c1}(\theta) &= -g^4 [(T^a T^c + T^c T^a) \otimes T_c T_a] \\ &\quad \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \{ [(p_3 + k)^\nu \Delta(k) (p_1 + k)^\mu] g^{\sigma\rho} D_{\sigma\mu}(k - p_1) D_{\nu\rho}(k - p_3) \} \\ &\quad (2.91)\end{aligned}$$

$$\mathcal{M}_{c2}(\theta) = -g^4 [T^c T^a \otimes (T_a T_c + T_c T_a)] \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \{ [(p_4 + k)^\nu \Delta(k) (p_2 + k)^\mu] g^{\sigma\rho} D_{\sigma\mu}(k - p_2) D_{\nu\rho}(k - p_4) \} \quad (2.92)$$

$$\mathcal{M}_{c3}(\theta) = i \frac{g^4}{2} [(T^a T^c + T^c T^a) \otimes (T_c T_a + T_a T_c)] \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \{ g^{\mu\nu} g^{\sigma\rho} D_{\sigma\mu}(k - p_1) D_{\nu\rho}(k - p_3) \} . \quad (2.93)$$

Somando estas três contribuições, integrando em k^0 e na parte angular, e então fazendo a separação na parte de alta e baixa energia obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{c1-3}^L(\theta) &= \frac{-g^4 m}{2\pi\Theta^2} [T^a T^c \otimes T_a T_c] \left\{ -2 \cos \theta \frac{\mathbf{p}^2}{\Lambda^2} + \frac{\Lambda^4}{8m^4} + (1 - 2 \cos^2 \theta) \frac{\mathbf{p}^4}{\Lambda^4} \right. \\ &\quad + \left(2 + [1 - 2 \cos \theta] \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \right) \left[\log \left(\frac{\Lambda^2}{\mathbf{p}^2} \right) - [\log[2(1 - \cos \theta)]] \right] + \frac{2\mathbf{p}}{m^2} \Big\} \\ &\quad + \frac{g^4 m}{\pi\Theta^2} [c_f^2 T^a \otimes T_a] \left\{ -2 \cos \theta \frac{\mathbf{p}^2}{\Lambda^2} + \frac{\Lambda^4}{8m^4} + (1 - 2 \cos^2 \theta) \frac{\mathbf{p}^4}{\Lambda^4} \right. \\ &\quad + \left(2 + [1 - 2 \cos \theta] \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \right) \left[\log \left(\frac{\Lambda^2}{\mathbf{p}^2} \right) - [\log[2(1 - \cos \theta)]] \right] + \frac{2\mathbf{p}}{m^2} \Big\} \end{aligned} \quad (2.94)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{c1-3}^H(\theta) &= \frac{-g^4 m}{2\pi\Theta^2} [T^a T^c \otimes T_a T_c] \left\{ -2 + 2 \cos \theta \frac{\mathbf{p}^2}{\Lambda^2} + 2 \frac{\Lambda_0}{m} - \frac{\Lambda^4}{8m^4} \right. \\ &\quad - \left(2 + [1 - 2 \cos \theta] \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \right) \log \left(\frac{\Lambda^2}{4m^2} \right) - (1 - 2 \cos^2 \theta) \frac{\mathbf{p}^4}{\Lambda^4} + \cos \theta \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \Big\} \\ &\quad + \frac{g^4 m}{\pi\Theta^2} [c_f^2 T^a \otimes T_a] \left\{ -2 + 2 \cos \theta \frac{\mathbf{p}^2}{\Lambda^2} + 2 \frac{\Lambda_0}{m} - \frac{\Lambda^4}{8m^4} \right. \\ &\quad - \left(2 + [1 - 2 \cos \theta] \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \right) \log \left(\frac{\Lambda^2}{4m^2} \right) - (1 - 2 \cos^2 \theta) \frac{\mathbf{p}^4}{\Lambda^4} + \cos \theta \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \Big\} , \end{aligned} \quad (2.95)$$

isto é,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{c1-3}(\theta) &= \frac{-g^4 m}{2\pi\Theta^2} [T^a T^c \otimes T_a T_c] \left\{ -2 + (2 + \cos \theta) \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} + 2 \frac{\Lambda_0}{m} + \right. \\ &\quad + \left. \left(2 + [1 - 2 \cos \theta] \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \right) \left[\log \left(\frac{4m^2}{\mathbf{p}^2} \right) - [\log[2(1 - \cos \theta)]] \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{g^4 m}{\pi \Theta^2} [c_f^2 T^a \otimes T_a] \left\{ -2 + (2 + \cos \theta) \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} + 2 \frac{\Lambda_0}{m} + \right. \\
& + \left. \left(2 + [1 - 2 \cos \theta] \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \right) \left[\log \left(\frac{4m^2}{\mathbf{p}^2} \right) - [\log[2(1 - \cos \theta)]] \right] \right\} . \quad (2.96)
\end{aligned}$$

Os dois últimos gráficos da figura (2.11) são mais problemáticos, pois estes gráficos apresentam divergência na integração em k_0 que não é cancelada pela contribuição de outros gráficos, como aconteceu anteriormente. No entanto este problema pode ser contornado se introduzirmos algum tipo de regularização na integral em k_0 . O resultado final, após a integração na parte espacial, é finito, visto que a integral espacial restante, para o termo dependente do corte, é identicamente nula. Para deixar claro como isto acontece, nós explicitamos as contas do gráfico (2.11.c4) no apêndice C. Os gráficos (2.11.c4) e (2.11.c5) são dados por

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{c4}(\theta) &= -g^4 \Theta [(-2c_f) \varepsilon_{bac} T^b \otimes T^c T^a] D_{\sigma'\sigma}(q) \varepsilon^{\sigma'\mu'\nu'} (p_2 + p_4)^\sigma \\
&\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} [(k + p_3)^\nu \Delta(k) (k + p_1)^\mu] D_{\mu'\mu}(k - p_1) D_{\nu'\nu}(k - p_3) , \quad (2.97)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{c5}(\theta) &= -g^4 \Theta [T^c T^a \otimes (-2c_f) \varepsilon_{bac} T^b] D_{\sigma\sigma'}(q) \varepsilon^{\sigma'\mu'\nu'} (p_1 + p_3)^\sigma \\
&\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} [(k + p_4)^\nu \Delta(k) (k + p_2)^\mu] D_{\mu'\mu}(k - p_2) D_{\nu'\nu}(k - p_4) . \quad (2.98)
\end{aligned}$$

Após a integração em k^0 e separação nas partes L e H obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{c4-5}^L(\theta) &= -\frac{g^4 m}{\pi \Theta^2} [c_f^2 T^a \otimes T_a] \left\{ 2 + \frac{7}{2} \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} - \frac{\Lambda^2}{m^2} + \frac{3\Lambda^4}{8m^4} \right. \\
&- (4 + 6 \cos \theta) \frac{\mathbf{p}^2}{\Lambda^2} + [1 - 4 \cos \theta - 6 \cos^2 \theta] \frac{\mathbf{p}^4}{\Lambda^4} \\
&+ \left. \left(2 + [1 - 2 \cos \theta] \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \right) \left[\log \left(\frac{\Lambda^2}{\mathbf{p}^2} \right) - [\log[2(1 - \cos \theta)]] \right] \right\} , \quad (2.99)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{c4-5}^H(\theta) &= -\frac{g^4 m}{\pi \Theta^2} [c_f^2 T^a \otimes T_a] \left\{ \frac{\Lambda^2}{m^2} - \frac{3\Lambda^4}{8m^4} + (4 + 6 \cos \theta) \frac{\mathbf{p}^2}{\Lambda^2} + (2 + 3 \cos \theta) \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \right. \\
&- \left. [1 - 4 \cos \theta - 6 \cos^2 \theta] \frac{\mathbf{p}^4}{\Lambda^4} - \left(2 + [1 - 2 \cos \theta] \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \right) \log \left(\frac{\Lambda^2}{4m^2} \right) \right\} , \quad (2.100)
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{c4-5}(\theta) = & -\frac{g^4 m}{\pi \Theta^2} [c_f^2 T^a \otimes T_a] \left\{ 2 + \left[\frac{11}{2} + 3 \cos \theta \right] \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} + \right. \\ & \left. + \left(2 + [1 - 2 \cos \theta] \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \right) \left[\log \left(\frac{4m^2}{\mathbf{p}^2} \right) - [\log[2(1 - \cos \theta)]] \right] \right\}. \quad (2.101) \end{aligned}$$

Somando as contribuições de (2.96) e (2.101) temos que $\mathcal{M}_c = \mathcal{M}_{c1-3} + \mathcal{M}_{c4-5}$ é

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_c(\theta) = & \frac{-g^4 m}{2\pi \Theta^2} [T^a T^c \otimes T_a T_c] \left\{ -2 + (2 + \cos \theta) \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} + 2 \frac{\Lambda_0}{m} + \right. \\ & + \left(2 + [1 - 2 \cos \theta] \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \right) \left[\log \left(\frac{4m^2}{\mathbf{p}^2} \right) - [\log[2(1 - \cos \theta)]] \right] \Big\} \\ & - \frac{g^4 m}{\pi \Theta^2} [c_f^2 T^a \otimes T_a] \left\{ 4 + \left[\frac{7}{2} + 2 \cos \theta \right] \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} - 2 \frac{\Lambda_0}{m} \right\}. \quad (2.102) \end{aligned}$$

Podemos observar que o termo dependente de Λ_0 pode ser escrito como *Constante* $[I \otimes I] \Lambda_0$, ou seja, pode ser absorvido numa renormalização de λ_1 .

É fácil de verificar que (a menos de constantes que podem ser absorvidas em λ_1 e λ_2) temos para $\mathcal{M}_{cs} = \mathcal{M}_b + \mathcal{M}_c$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{cs}(\theta) = & \frac{-g^4 m}{2\pi \Theta^2} [T^a T^c \otimes T_a T_c] \left\{ 2 \left(1 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m^2} \right) \left[\log \left(\frac{4m^2}{\mathbf{p}^2} \right) + i\pi \right] + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \right\} \\ & - \frac{g^4 m}{\pi \Theta^2} [c_f^2 T^a \otimes T_a] \frac{3 \mathbf{p}^2}{2 m^2}. \quad (2.103) \end{aligned}$$

Correções Radiativas

Vamos considerar agora a amplitude que vem da inserção dos gráficos de polarização do vácuo e correção de vértices e que não aparecem na teoria não relativística. Esses gráficos contribuirão somente com a parte de alta energia. A parte de baixa energia é polinomial em Λ e se cancela com a parte, que depende de Λ , que vem da contribuição de alta energia. Esses gráficos estão mostrados na figura (2.12). Para obter a contribuição que vem do tensor de polarização, vamos usar o resultado da equação (2.45). Assim o gráfico (2.12.P1-P2) pode ser escrito

$$\mathcal{M}_P(\theta) = \frac{g^4 m}{4\pi \Theta^2} [T^a \otimes T_a] \left\{ \frac{1}{3} + \frac{7}{15} \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} + \frac{1}{5} \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \cos \theta \right\}. \quad (2.104)$$

Usando as equações (2.50), (2.51), e (2.56) nós obtemos para os gráficos (2.12.V1) a (2.12.V6),

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_V(\theta) = & -\frac{g^4 m}{4\pi\Theta^2} [T^a \otimes T_a] \left\{ -4 \left(\frac{1}{n} - 2c_f^2 \right) + \left(\frac{22}{3}c_f^2 - \frac{10}{3n} \right) \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \right. \\
& + \left. \left(2c_f^2 - \frac{1}{2n} \right) \frac{4}{3} \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \cos \theta \right\} .
\end{aligned}
\tag{2.105}$$

Ordem λg^2

Por último, vamos calcular os gráficos da ordem λg^2 mostrados na figura (2.13). Os gráficos (2.13.i) a (2.13.m) são zero devido a anti-simetria do propagador de gauge. Os gráficos (2.13.n) a (2.13.u) são zero por conjugação de carga. O cálculo dos gráficos (2.13.a) a (2.13.h), nos mostra que a parte de baixa energia é nula até ordem η^2 . A parte de cima nos dá

$$\mathcal{M}_{\lambda g^2}(\theta) = -\frac{ig^2}{8\pi\Theta} \left[\frac{\delta^{aa}}{2n} \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2n} \right) I \otimes I + \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2n} - 4c_f^2 \lambda_2 \right) T^a \otimes T_a \right] \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \sin \theta .
\tag{2.106}$$

Das equações (2.83), (2.103), (2.104), (2.105) e (2.106), temos (a menos de constantes que podem ser absorvidas numa redefinição de λ_1 e λ_2)

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{1-loop} = & \frac{-1}{64\pi m} \left[\left(-\lambda_1^2 - \frac{\delta^{aa}}{4n^2} \lambda_2^2 \right) I \otimes I + \left(-2c_f^2 \lambda_2^2 - 2\lambda_1 \lambda_2 \right) T^a \otimes T_a \right] \\
& \left\{ \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2}{2m^2} \right) \left[\log \left(\frac{4m^2}{\mathbf{p}^2} \right) + i\pi \right] + \frac{\mathbf{p}^2}{2m^2} \right\} + \\
& - \frac{1}{64\pi m} \left[\left(-[n+3]\lambda_1^2 + \frac{\delta_a^a}{n} \lambda_1 \lambda_2 - \frac{\delta_a^a}{4n^2} \lambda_2^2 \right) I \otimes I + \right. \\
& + \left. \left(-4\lambda_1 \lambda_2 + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n} - 2c_f^2 \right] \lambda_2^2 \right) T^a \otimes T_a \right] \left(-\frac{\mathbf{p}^2}{3m^2} \right) \\
& - \frac{1}{64\pi m} \left[\left(-[n+1]\lambda_1^2 + \frac{\delta_a^a}{n} \lambda_1 \lambda_2 + \frac{\delta_a^a}{4n^2} \lambda_2^2 \right) I \otimes I + \right. \\
& + \left. \left(\left[-6c_f^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right] \lambda_2^2 \right) T^a \otimes T_a \right] \frac{\mathbf{p}^2}{3m^2} \cos \theta \\
& - \frac{g^4 m}{2\pi\Theta^2} [T^a T^c \otimes T_a T_c] \left\{ 2 \left(1 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m^2} \right) \left[\log \left(\frac{4m^2}{\mathbf{p}^2} \right) + i\pi \right] + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \right\} \\
& - \frac{g^4 m}{4\pi\Theta^2} [T^a \otimes T_a] \left\{ \left(\frac{40}{3}c_f^2 - \frac{7}{15} - \frac{10}{3n} \right) \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} + \left(\frac{8}{3}c_f^2 - \frac{1}{5} - \frac{2}{3n} \right) \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \cos \theta \right\}
\end{aligned}$$

$$- \frac{ig^2}{8\pi\Theta} \left[\frac{\delta_a^a}{2n} \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2n} \right) I \otimes I + \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2n} - 4c_f^2 \lambda_2 \right) T^a \otimes T_a \right] \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \sin \theta. \quad (2.107)$$

A seguir vamos fazer uma análise do nosso resultado, e a comparação com o caso não relativístico e com o caso Abelian.

2.4 Análise

Para podermos comparar com os resultados não relativísticos precisamos ajustar a normalização dos estados. No caso relativístico temos que $\langle \mathbf{p}' | \mathbf{p} \rangle = 2\omega_p \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p})$, enquanto que na normalização não relativística a teoria não tem o fator $2\omega_p$. Além disso, temos um fator $f = \sqrt{\omega_p/m}$, onde f^2 a razão da velocidades relativística e não relativística, oriundo da divisão pelos fluxos incidentes nos cálculos da seção de choque. Assim multiplicando a amplitude (2.60) e (2.107) por

$$f \left(\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \right)^4 = \frac{1}{4m^2} \left[1 - \frac{3\mathbf{p}^2}{4m^2} + \dots \right], \quad (2.108)$$

obtemos para o termo dominante em $\mathbf{p}/m$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{Dom}(\theta) &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_{eff}}{4m^2} \right) - i \frac{2\pi}{m} \Omega \cot(\theta/2) \\ &+ \frac{m}{16\pi} \left[\left(\frac{\lambda_{eff}}{4m^2} \right)^2 - \frac{16\pi^2}{m^2} \Omega^2 \right] \left\{ \log \left[\frac{4m^2}{\mathbf{p}^2} \right] + i\pi \right\}, \end{aligned} \quad (2.109)$$

onde λ_{eff} e Ω são dados pelas equações (2.61) e (2.18). Temos que no termo $\log(4m^2/\mathbf{p}^2)$, o fator $4m^2$ vem da parte de alta energia, e funciona como um contra-termo para a parte de baixa energia. Isto é, se considerarmos apenas a parte não polinomial em Λ que vem do setor de baixa energia teríamos como resultado para o termo dominante

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{Dom}(\theta) &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_{eff}}{4m^2} \right) - i \frac{2\pi}{m} \Omega \cot(\theta/2) \\ &+ \frac{m}{16\pi} \left[\left(\frac{\lambda_{eff}}{4m^2} \right)^2 - \frac{16\pi^2}{m^2} \Omega^2 \right] \left\{ \log \left[\frac{\Lambda^2}{\mathbf{p}^2} \right] + i\pi \right\}. \end{aligned} \quad (2.110)$$

O resultado da equação acima é o mesmo obtido pela teoria não relativística, equações (2.17) e (2.23), se identificarmos $\lambda_{eff}/4m^2 = C$ e $\Lambda \rightarrow \Lambda_{NR}$. Igualmente ao caso não relativístico, até ordem η , não teremos contribuição de 1-loop para o espalhamento AB se $\lambda_{eff}^2 = (16\pi m)^2 \Omega^2$. Usando a forma explícita de λ_{eff}^2 e Ω^2 , temos

$$\lambda_{eff}^2 = \left(\lambda_1^2 + \frac{\delta_a^2}{4n^2} \lambda_2^2 \right) [I \otimes I] + (2c_f^2 \lambda_2^2 + 2\lambda_1 \lambda_2) [T^a \otimes T_a] \quad (2.111)$$

e

$$\Omega^2 = \frac{g^4}{4\pi^2 \Theta^2} \left[\frac{\delta_a^2}{4n^2} [I \otimes I] + 2c_f^2 [T^a \otimes T_a] \right]. \quad (2.112)$$

O ponto crítico $\lambda_{eff}^2 = (16\pi m)^2 \Omega^2$ nos leva ao conjunto de equações

$$\left(\lambda_1^2 + \frac{\delta_a^2}{4n^2} \lambda_2^2 \right) = \frac{\delta_a^2 16m^2 g^4}{n^2 \Theta^2} \quad (2.113)$$

$$(c_f^2 \lambda_2^2 + \lambda_1 \lambda_2) = \frac{64c_f^2 m^2 g^4}{\Theta^2}. \quad (2.114)$$

As equações acima apresentam quatro soluções,

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = \pm \frac{8mg^2}{|\Theta|} \quad (2.115)$$

ou

$$\lambda_1 = \frac{\delta_a^2 \lambda_2}{4n^2 c_f^2} \quad \lambda_2 = \pm \sqrt{\frac{4n^2 c_f^4}{4n^2 c_f^4 + \delta_a^2}} \left(\frac{8mg^2}{|\Theta|} \right). \quad (2.116)$$

A solução $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = \frac{8mg^2}{|\Theta|}$ e a mesma obtida no caso não relativístico[61], e nos dá o mesmo resultado da expansão da solução exata até segunda ordem⁷. Neste caso o termo sub-dominante (substituindo $c_f = -1/2$, $n = 2$ e o fator de normalização)

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{Sub} &= \frac{i\pi}{2m} \left[\Omega \cot(\theta/2) - i\frac{3}{4}|\Omega| \right] \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \\ &- \frac{g^4}{4\pi m \Theta^2} \left[\frac{3}{16} I \otimes I - \frac{1}{2} T^a \otimes T_a \right] \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \left(\log \left[\frac{4m^2}{\mathbf{p}^2} \right] + i\pi \right) \\ &- \frac{g^4}{4\pi m \Theta^2} \left\{ \left[\frac{1}{16} I \otimes I + \frac{2}{15} T^a \otimes T_a \right] \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} + \left[\frac{1}{16} I \otimes I - \frac{2}{15} T^a \otimes T_a \right] \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \cos \theta \right\} \\ &+ \frac{ig^4}{4\pi m \Theta |\Theta|} \left[\frac{3}{16} I \otimes I - \frac{3}{4} T^a \otimes T_a \right] \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.117)$$

⁷A solução com λ_1 diferente de zero não leva ao resultado da expansão exata para o termo dominante. Na solução com $\lambda_1 = 0$ e λ_2 negativo levaria a um Hamiltoniano não limitado inferiormente.

Da equação (2.107) também podemos obter facilmente o limite para a teoria Abelianana ($c_f = 0$, $n = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_A$, $g = e\sqrt{2}$, $T = i/\sqrt{2}$),

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_A(\theta) + \mathcal{M}_A(\theta + \pi) = & -\lambda_A - i \frac{8me^2}{\Theta} \left(1 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m^2}\right) \cot \theta - \left(\frac{5\lambda_A^2}{192\pi m} + \frac{24e^2 m}{5\pi\Theta^2}\right) \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \\ & + \left(\frac{\lambda_A^2}{32\pi m} - \frac{2e^2 m}{\pi\Theta^2}\right) \left[\log\left(\frac{4m^2}{\mathbf{p}^2}\right) + i\pi\right] \\ & - \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \left(\frac{\lambda_A^2}{64\pi m} + \frac{e^2 m}{\pi\Theta^2}\right) \left[\log\left(\frac{4m^2}{\mathbf{p}^2}\right) + i\pi\right]. \end{aligned} \quad (2.118)$$

O resultado acima, multiplicado pelo fator (2.108), é essencialmente o resultado obtido na referência[29] para teoria abeliana.

O efeito AB não-Abeliano estudado neste capítulo, nos leva a uma estrutura muito mais complexa do que no caso Abeliano. Neste caso temos uma série de novos tipos de gráficos de Feynman. Estes gráficos surgem devido a presença do vértice trilinear no campo de gauge e do vértice contendo campo fantasma. As amplitudes de Feynman contendo os vértices trilineares são importantes para, em parte, cancelarem a contribuições vinda dos gráficos contendo campos fantasma, e também se somarem as contribuições que surgem devido a estrutura de grupo nos gráficos que igualmente estão presentes na teoria Abeliana.

Outra diferença fundamental na teoria não-Abeliana é que devido ao índice de simetria interna, o termo de troca na amplitude de espalhamento não se reduz a fazermos $\theta \rightarrow \theta + \pi$, mas é necessário também a troca nos índices do campo de matéria. Isto não leva a um cancelamento imediato dos termos contendo a parte angular na contribuição sub-dominante, dada na equação (2.117).

Também, no gauge de Coulomb, pelo fato do propagador do campo de gauge só depender da componente espacial, temos a possibilidade de divergências espúrias nas integrações em k_0 . Para o caso Abeliano essas divergências acabam se cancelando na soma das contribuições dos gráficos que apresentam divergência. No caso não-Abeliano, além disto, é necessário introduzirmos algum tipo de regulador, para a integração temporal, na amplitude que contém o vértice com três gluons. No entanto, após a integração espacial as contribuições dependentes do regulador se anulam, eliminando-se assim este problema da divergência em k_0 .

Do resultado final, obtemos que a interação quártica é fundamental para que a contribuição dominante reproduza o resultado da expansão da expressão exata. Os termos sub-dominantes, equação (2.117), em parte são correções relativísticas ao espalhamento AB que não surgem na teoria não relativística. Além disso, temos que a introdução das correções relativísticas induzem um fluxo magnético não nulo fora da origem, ou seja, quando levamos em conta os efeitos relativísticos não temos mais um espalhamento AB puro, pois temos que levar em consideração o efeito do campo gerados pelas correções radiativas. Estas contribuições extras correspondem, em uma Lagrangeana efetiva para

baixos momentos, a auto-interações com derivadas do campo de matéria.

Figura 2.10: *Espalhamento 1-loop - Teoria Relativística - Ordem λ^2 .*

Figura 2.11: *Espalhamento 1-loop - Teoria Relativística - Ordem g^4 .*

Figura 2.12: Espalhamento 1-loop - Teoria Relativística - Polarização e Correções Vértice.

Figura 2.13: *Espalhamento 1-loop - Teoria Relativística - Ordem λg^2 .*

Capítulo 3

Espalhamento Aharonov-Bohm Não-Abeliano para Partícula de Spin 1/2

3.1 Introdução

Foi mostrado no caso do efeito AB Abelian, que existem algumas características específicas devido a presença do spin[19, 23, 30]. Por exemplo, não há necessidade de introduzirmos um termo de auto-interação, como acontecia no caso escalar, pois o termo de Pauli faz o papel do termo de contato.

Neste capítulo vamos estender este estudo para o caso do efeito Aharonov-Bohm (AB) não-Abeliano para a partícula de spin 1/2, e ver se para este caso temos algumas características extras. Inicialmente vamos analisar o caso da teoria não relativística e posteriormente vamos estudar o limite para pequenos momentos na teoria relativística. O procedimento para os cálculos é semelhante ao do capítulo anterior. Em pontos que acharmos útil nós explicitaremos alguns detalhes da conta. No apêndice D faremos explicitamente o cálculo de um dos gráficos.

3.2 O Modelo Não Relativístico

O sistema de férmions não relativístico em $(2 + 1)$ dimensões, acoplado minimamente com o campo de Chern-Simons não-Abeliano, é dado pela densidade de Lagrangeana

$$\mathcal{L} = -\Theta \epsilon^{\alpha\beta\lambda} \text{tr} \left(A_\alpha \partial_\beta A_\lambda + \frac{2g}{3} A_\alpha A_\beta A_\lambda \right) + \psi^\dagger \left[i\partial_t + \frac{(\vec{\nabla} - g\vec{A})^2}{2m} + igA_0 - i\frac{g}{2m}B \right] \psi$$

$$- \frac{1}{\xi} \text{tr}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})^2 - \eta^{*a} (\nabla^2 + g f_{abc} A^c \cdot \nabla) \eta^b, \quad (3.1)$$

onde ψ é um campo de uma componente de Lorentz que anti-comuta, transformando-se com a representação fundamental do grupo de gauge SU(2), gerado pelas matrizes T^a , com $a = 1, 2, 3$, e $A_\mu = A_\mu^a T^a$. Sendo T^a matrizes anti-hermitianas 2×2 , satisfazendo a álgebra de Lie

$$[T_a, T_b] = -2c_f \varepsilon_{abc} T^c, \quad (3.2)$$

normalizadas por

$$\text{tr}(T_a T_b) = -\frac{1}{2} \delta_{ab}. \quad (3.3)$$

O termo que contém a interação do campo magnético B é conhecido como termo de Pauli. O campo η^a é o campo fantasma.

As regras de Feynman para o modelo descrito pela densidade de Lagrangeana (3.1), representadas graficamente na figura (3.1), são dadas no espaço dos momentos por

Propagador do campo de matéria

$$S(p)_{nm} = S(p) \delta_{nm} = \frac{i}{p_0 - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + i\epsilon} \delta_{nm} \quad (3.4)$$

Propagador auxiliar $\Delta_B^{ba} = \langle T B(x) A_0(0) \rangle = -\frac{i}{\Theta} \delta(x) \delta^{ba}$

$$\Delta_B^{ba}(p) = -\frac{i}{\Theta} \delta^{ba} \quad (3.5)$$

Propagador para o campo fantasma

$$G(p)_{ba} = G(p) \delta_{ba} = \frac{-i}{\mathbf{p}^2} \delta_{ba} \quad (3.6)$$

Propagador para o campo de gauge

$$D^{\mu\nu}(k)_{ba} = D^{\mu\nu}(k) \delta_{ba} = \frac{1}{\Theta} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \frac{\bar{k}_\lambda}{k^2} \delta_{ba} \quad (3.7)$$

$$(3.8)$$

onde $\vec{k} = (0, k^1, k^2)$

Vértices de Interação

$$\Gamma_{nm}^{a,0}(p, p') = -g T^a \quad (3.9)$$

$$\Gamma_{nm}^{a,i}(p, p') = -\frac{g}{2m} (T^a)_{nm} (p^i + p'^i) \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}
D(p)_{mn} &= \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} \\
G(p)_{ba} &= \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} \\
D^{\mu\nu}(k)_{ba} &= \text{---} \xrightarrow{k} \text{---} \\
\Delta^B(p)_{ba} &= \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} \\
\Gamma_{nm}^{a,0}(p,p') &= \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} \xrightarrow{p'} \text{---} \\
\Gamma_{nm}^{a,i}(p,p') &= \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} \xrightarrow{p'} \text{---} \\
\Gamma_{nm}^{abc,j}(p,p') &= \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} \xrightarrow{p'} \text{---} \\
\Gamma_{nm}^{abc,\mu\nu\lambda}(p,p') &= \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} \xrightarrow{p'} \text{---} \\
\Gamma_{nm}^{ab,jl}(p,p') &= \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} \xrightarrow{p'} \text{---} \\
\Gamma_{nm}^{a,B}(p,p') &= \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} \xrightarrow{p'} \text{---}
\end{aligned}$$

Figura 3.1: Regras de Feynman- Teoria não relativística.

Figura 3.2: Espalhamento a nível de árvore - Teoria não relativística.

$$\Gamma_{nm}^{ab,ij}(p,p') = -i \frac{g^2}{2m} (T^a T^b + T^b T^a) g^{ij} \quad (3.11)$$

$$\Gamma_{nm}^{a,B}(p,p') = \frac{g}{2m} (T^a)_{nm} \quad (3.12)$$

$$\Gamma_{nm}^{abc,\mu\nu\lambda}(p,p') = -2ic_f g \Theta f^{abc} \epsilon^{\mu\nu\lambda} \quad (3.13)$$

$$\Gamma_{nm}^{abc,i}(p,p') = -g \epsilon^{abc} p^i \quad (3.14)$$

No cálculo do espalhamento, vamos abstrair os índices externos de matéria como feito no caso escalar, isto é

$$\mathcal{A} = \langle n', m' | \mathcal{M}(\theta) | n, m \rangle = \langle m', n' | \mathcal{M}(\theta + \pi) | n, m \rangle, \quad (3.15)$$

onde θ é o ângulo de espalhamento¹. Os gráficos que contribuem para o espalhamento a nível de árvore, representados na figura (3.2), nos levam a

$$\mathcal{M}(\theta) = \frac{ig^2}{m\Theta} [T^a \otimes T_a] \left[1 + i \frac{\sin \theta}{(1 - \cos \theta)} \right], \quad (3.16)$$

¹Todos os cálculos da amplitude de espalhamento serão feitos no centro de massa.

Os gráficos que contribuem (não nulos) para o espalhamento em 1-loop estão representados na figura (3.3). O primeiro gráfico, (3.3a), é dado por

$$\mathcal{M}_a(\theta) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[\Gamma^{d,a}(p_1 + p_2 - k, p_4) S(p_1 + p_2 - k) \Gamma^{c,\nu}(p_2, p_1 + p_2 - k) \right. \\ \left. D_{\mu\nu}^{ac}(k - p_1) D_{\alpha\beta}^{db}(k - p_3) \Gamma^{b,\beta}(k, p_3) S(k) \Gamma^{a,\mu}(p_1, k) \right] . \quad (3.17)$$

Usando as regras de Feynman e integrando em k_0 obtemos

$$\mathcal{M}_a(\theta) = -\frac{4ig^4}{m\Theta^2} [T^b T^a \otimes T_b T_a] \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{1}{\mathbf{p}^2 - \mathbf{k}^2 + i\epsilon} \left[\frac{(\mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{k})(\mathbf{p}_3 \wedge \mathbf{k})}{(\mathbf{k} - \mathbf{p}_1)^2 (\mathbf{k} - \mathbf{p}_3)^2} \right] \quad (3.18)$$

Efetuada primeiro a integração angular e depois a integração no módulo de $\mathbf{k}$, na qual introduzimos um corte ("cutoff") ultravioleta Λ_{NR} , obtemos

$$\mathcal{M}_a(\theta) = -\frac{ig^4}{4\pi m\Theta^2} [T^b T^a \otimes T_b T_a] \left\{ \log \left[\frac{\mathbf{q}^2}{\mathbf{p}^2} \right] + i\pi \right\} . \quad (3.19)$$

O gráfico (3.3b) analiticamente é dado por

$$\mathcal{M}_b(\theta) = -\frac{g^4}{m^2 \Theta^2} [T^b T^a \otimes T_b T_a] \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} S(p_1 + p_2 - k) S(k) . \quad (3.20)$$

Efetuada as integrações do mesmo modo que no gráfico $\mathcal{M}_a$ temos

$$\mathcal{M}_b(\theta) = \frac{ig^4}{4\pi m\Theta^2} [T^b T^a \otimes T_b T_a] \left\{ \log \left[\frac{\Lambda_{NR}^2}{\mathbf{p}^2} \right] + i\pi \right\} . \quad (3.21)$$

O gráfico (3.3c) é dado por

$$\mathcal{M}_c(\theta) = 2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[\Gamma^{cd,ij} D_{0i}^{ac}(k) D_{j0}^{db}(k + q) \Gamma^{b,0} \Gamma^{a,0} \right] , \quad (3.22)$$

no qual o fator 2 é devido ao gráfico invertido, obtido pela troca da linha fermiônica inferior com a superior. Após a integração em k_0 temos

$$\mathcal{M}_c(\theta) = \frac{ig^4}{2m\Theta^2} [(T^a T^b + T^b T^a) \otimes T_b T_a] \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{\mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{q})}{\mathbf{k}^2 (\mathbf{k} + \mathbf{q})^2} . \quad (3.23)$$

Efetuada as integrações espaciais e usando as relações entre as matrizes T ,

$$\mathcal{M}_c(\theta) = \frac{ig^4}{4\pi m\Theta^2} [T^b T^a \otimes T_b T_a - c_f \varepsilon^{cab} T_c \otimes T_b T_a] \left\{ \log \left[\frac{\mathbf{q}^2}{\Lambda_{NR}^2} \right] \right\} . \quad (3.24)$$

Finalmente o gráfico (3.3d) , que contém o vértice com três campos de gauge, corresponde a

$$\mathcal{M}_d(\theta) = 2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[\Gamma^{b,\nu}(p_2, p_4) D_{\nu\mu}^{ab}(q) \Gamma^{ac'd',\mu\rho\sigma} D_{\sigma\alpha}^{d'd}(k - p_3) \Gamma^{d,\alpha}(k, p_3) S(k) \Gamma^{c,\beta}(p_1, k) D_{\beta\rho}^{cc'}(k - p_1) \right] . \quad (3.25)$$

Integrando em k_0 temos

$$\mathcal{M}_d(\theta) = -\frac{2ig^4}{m\Theta^2} [c_f \varepsilon^{cab} T_c \otimes T_b T_a] \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{[\mathbf{q} \wedge \mathbf{k} - \mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{p}_3](\mathbf{q} \wedge \mathbf{k})}{\mathbf{q}^2 (\mathbf{k} - \mathbf{p}_1)^2 (\mathbf{k} - \mathbf{p}_3)^2} , \quad (3.26)$$

que nos leva a

$$\mathcal{M}_d(\theta) = -\frac{ig^4}{4\pi m\Theta^2} [c_f \varepsilon^{cab} T_c \otimes T_b T_a] \left\{ 1 - \log \left[\frac{\mathbf{q}^2}{\Lambda_{NR}^2} \right] \right\} . \quad (3.27)$$

Assim, obtemos das equações (3.19), (3.21), (3.24) e (3.27)

$$\mathcal{M}_{1-loop}(\theta) = -\frac{ig^4}{4\pi m\Theta^2} [c_f \varepsilon^{cab} T_c \otimes T_b T_a] = -\frac{ic_f^2 g^4}{2\pi m\Theta^2} [T^a \otimes T_a] . \quad (3.28)$$

O termo dado na equação acima é devido a regularização empregada. Realmente, lembrando que a divergência dos gráficos é logaritmica, então nós podemos ter uma certa ambiguidade na constante finita. Por outro lado, se tivéssemos usado a regularização dimensional como feito na referência [22] para o caso escalar, não teríamos o termo (3.28). Este fator constante pode ser eliminado por uma redefinição do corte Λ_{NR} na equação (3.27) ou pela adição de um contra-termo da forma $\mathcal{L}_{CT} = c_1 B \psi^\dagger \psi + c_2 (\psi^\dagger \psi)^2$ na densidade de Lagrangeana inicial, com c_1 e c_2 ajustados de modo que fator do momento magnético seja $g/2m$ e o resultado final do espalhamento continue finito até 1-loop. Este problema aparece no caso da teoria não relativística porque os gráficos são dependentes do corte introduzido. No caso da teoria relativística, a menos da função de dois pontos, os gráficos individualmente são finitos e independentes do corte introduzido para regularizar a teoria, assim não teremos a ambiguidade no termo finito. Podemos também observar no cálculo de $\mathcal{M}_b$, equação (3.21) e na amplitude (2.19), que a interação $\psi^\dagger B \psi$ faz o mesmo papel da interação $(\phi^\dagger \phi)^2$ no caso escalar.

Figura 3.3: *Espalhamento 1-loop - Teoria não relativística.*

3.3 O Modelo Relativístico

Como no caso escalar, vamos tratar o problema através do cálculo relativístico e fazendo a separação na regiões de alta e baixa energia. A Lagrangeana do modelo é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\Theta \varepsilon^{\alpha\beta\lambda} \text{tr} \left(A_\alpha \partial_\beta A_\lambda + \frac{2g}{3} A_\alpha A_\beta A_\lambda \right) + i\bar{\Psi}(\not{D} - m)\Psi \\ & - \frac{1}{\xi} \text{tr}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})^2 - \eta^* (\nabla^2 + g f_{abc} \mathbf{A}^c \cdot \nabla) \eta^b . \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde Ψ é um campo de Dirac transformando-se com a representação fundamental do grupo de gauge $\text{SU}(2)$, gerado pelas matrizes T^a , com $a = 1, 2, 3$, $A_\mu = A_\mu^a T^a$ e $D_\mu = \partial_\mu + g A_\mu$. As matrizes de Dirac são dadas por

$$\gamma^0 = \sigma^3 \quad \gamma^1 = i\sigma^1 \quad \gamma^2 = i\sigma^2 , \quad (3.30)$$

sendo σ as matrizes de Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (3.31)$$

O que nos leva as relações $\text{tr}(\gamma^a) = 0$ e $\gamma^\alpha \gamma^\beta = g^{\alpha\beta} - i\varepsilon^{\alpha\beta\rho} \gamma_\rho$.

As soluções de onda plana para a equação de Dirac livre

$$\Psi^\dagger(x) = u(\mathbf{p}) e^{-ipx} \quad (3.32)$$

$$\Psi(x) = v(\mathbf{p}) e^{ipx} \quad (3.33)$$

nos dão[67] para a solução de energia positiva e negativa

$$u(\mathbf{p}) = \left(\frac{w_p + m}{2w_p} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-ip_+}{w_p + m} \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

$$v(\mathbf{p}) = \left(\frac{w_p + m}{2w_p} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \frac{ip_-}{w_p + m} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

com $w_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, $p_{\pm} = p^{(1)} \pm ip^{(2)}$, normalizadas por

$$u^\dagger(\mathbf{p})u(\mathbf{p}) = v^\dagger(\mathbf{p})v(\mathbf{p}) = 1 \quad (3.36)$$

$$\bar{u}(\mathbf{p})u(\mathbf{p}) = \bar{v}(\mathbf{p})v(\mathbf{p}) = \frac{m}{w_p}. \quad (3.37)$$

Para pequenos momentos ($\mathbf{p} \ll m$) temos que

$$\bar{u}(\mathbf{p}_3)\gamma^0 u(\mathbf{p}_1) = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{\mathbf{p}^2}{m^2}\right) \quad (3.38)$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_3)\gamma^i u(\mathbf{p}_1) = \frac{1}{2m}[P^i + i\varepsilon^{ij}q^j] + \mathcal{O}\left(\frac{\mathbf{p}^2}{m^2}\right), \quad (3.39)$$

no qual $P^i = p_1^i + p_3^i$, $q^i = p_1^i - p_3^i$ e $|p_1| = |p_3| = |\mathbf{p}|$.

As regras de Feynman, representadas na figura (3.4), são dadas por

Propagador do campo de matéria

$$S(p)_{nm} = S(p)\delta_{nm} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}\delta_{nm} \quad (3.40)$$

Propagador para o campo fantasma

$$G(p)_{bn} = G(p)\delta_{bn} = \frac{-i}{p^2}\delta_{bn} \quad (3.41)$$

Propagador para o campo de gauge

$$D^{\mu\nu}(k)_{ba} = D^{\mu\nu}(k)\delta_{ba} = \frac{1}{\Theta}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\frac{\bar{k}_\lambda}{k^2}\delta_{ba} \quad (3.42)$$

$$(3.43)$$

onde $\bar{k} = (0, k^1, k^2)$

Figura 3.4: Regras de Feynman- Teoria Relativística.

Vértices de Interação

$$\Gamma_{nm}^{a,\mu}(p, p') = -g(T^a)_{nm}(\gamma^\mu) \quad (3.44)$$

$$\Gamma^{abc,\mu\nu\lambda}(p, p') = -2ic_f g \Theta f^{abc} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \quad (3.45)$$

$$\Gamma_{nm}^{abc,i}(p, p') = -g \varepsilon^{abc} p'^i \quad (3.46)$$

Nas próximas seções iremos calcular a correção de 1-loop e analisar a estrutura ultravioleta da teoria. Os gráficos que não contém o campo de matéria não dão nenhuma contribuição[64], como no caso escalar. Assim nos restringiremos a análise dos gráficos restantes.

3.3.1 Correção para a Auto-Energia

A correção de 1-loop para a função de dois pontos do campo de matéria, representada na figura (3.5), é dada por

$$\begin{aligned} \Sigma(p) &= - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[\Gamma^{a,\mu}(p+k, p) S(p+k) \Gamma^{b,\nu}(p, p+k) D_{\nu\mu}^{ab}(k) \right] , \\ &= \frac{ig^2}{\Theta} [T^a T_a] \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{[\gamma^\mu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\nu] \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \vec{k}^\lambda}{[(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon] k^2} \end{aligned} \quad (3.47)$$

no qual o sinal $-$ é introduzido de modo que $S^{-1}(p) = \not{p} - m + i\Sigma$. Usando as propriedades da matrizes γ podemos escrever o numerador do integrando como

$$N = -2i(p+k) \wedge k + im \gamma \cdot k . \quad (3.48)$$

Figura 3.5: Auto-Energia do Férmião.

Integrando em k_0 e na parte angular obtemos

$$\Sigma(p) = -\frac{ig^2}{8\pi\Theta}[T^a T_a] \int_0^{\Lambda_0} dk^2 \frac{1}{w_k} \left[\frac{m}{p^2} \gamma \cdot \mathbf{p} (1 - \sin[\mathbf{k}^2 - \mathbf{p}^2]) + (1 + \sin[\mathbf{k}^2 - \mathbf{p}^2]) \right], \quad (3.49)$$

com $w_k = \sqrt{k^2 + m^2}$. Separando na parte de baixa e alta energia

$$\Sigma^L(p) = -\frac{ig^2}{2\pi\Theta}[T^a T_a] \left\{ \gamma \cdot \mathbf{p} \frac{m}{p^2} (w_p - |m|) + \sqrt{\Lambda^2 + \mathbf{p}^2} - w_p \right\} \quad (3.50)$$

$$\Sigma^H(p) = -\frac{ig^2}{2\pi\Theta}[T^a T_a] \left\{ \sqrt{\Lambda_0^2 + m^2} - \sqrt{\Lambda^2 + m^2} \right\}, \quad (3.51)$$

ou seja, para $\Lambda_0 \rightarrow \infty$ e com m positivo,

$$\Sigma(p) = \Sigma^L(p) + \Sigma^H(p) = -\frac{ig^2}{2\pi\Theta}[T^a T_a] \left\{ \frac{m \gamma \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p}^2}{w_p + m} - m + \Lambda_0 \right\}. \quad (3.52)$$

O propagador completo é dado por

$$S(p) = \frac{i}{\not{p} - m + i\Sigma_R} \quad (3.53)$$

com $\Sigma_R = \Sigma + i\delta m - i\delta Z \not{p}$, sendo δm e δZ contra-termos de massa e função de onda. Como a forma de Σ não é covariante de Lorentz, então, para determinarmos o propagador, vamos, do mesmo modo aplicado para a eletrodinâmica em (3+1)D no gauge de Coulomb[68], assumir que o seu inverso tenha a forma

$$S^{(-1)}(p) = \not{p} - m + i\Sigma_R = am + b\gamma \cdot p + c\xi\gamma \cdot n, \quad (3.54)$$

com $n = (1, \vec{0})$, $\xi = p \cdot n = w_p$ e a , b e c funções de p^2 que são calculadas ordem a ordem pelos gráficos de Feynman. Usando que $S^{-1}S = i$ podemos inverter (3.54)

$$S(p) = i \frac{am - b\gamma \cdot p - c\xi\gamma \cdot n}{m^2 \Delta(p^2, \xi)} \quad (3.55)$$

com

$$\Delta(p^2, \xi) = a^2(p^2, \xi) - b^2(p^2, \xi) \left[\frac{p^2}{m^2} \right] - c^2(p^2, \xi) \left[\frac{\xi^2}{m^2} \right] - 2b(p^2, \xi)c(p^2, \xi) \left[\frac{\xi^2}{m^2} \right] \quad (3.56)$$

e a condição que $\Delta(p^2 = m^2, \xi) = 0$, ou seja m é a massa física.

Usando a forma explícita de $\Sigma(p)$ nós obtemos que

$$a(p^2, \xi) = \left[-1 - \frac{\delta m}{m} + \frac{\alpha}{m}(\xi - \Lambda_0) \right] \quad (3.57)$$

$$b(p^2, \xi) = \left[1 - \frac{\alpha}{m}(m - \xi) + \delta Z \right] \quad (3.58)$$

$$c(p^2, \xi) = \left[\frac{\alpha}{m} \frac{m^2}{p^2} (m - \xi) \right], \quad (3.59)$$

no qual $\alpha = -g^2[T^a T_a]/(2\pi\Theta)$. Lembrando que δm e δZ são da ordem de α , mantendo termos até primeira ordem e usando a condição $\Delta(p^2 = m^2, \xi) = 0$, obtemos que $\delta m/m = \alpha(1 - \Lambda_0/m) + \delta Z$. Assim temos que

$$\Delta(p^2, \xi) = \frac{p^2 - m^2}{m^2} (-1 - 2\delta Z). \quad (3.60)$$

Logo o propagador completo

$$\begin{aligned} S(p) &= i \frac{-am + b\gamma \cdot p + c \xi \gamma \cdot n}{[p^2 - m^2](1 + 2\delta Z)} \\ &= i \frac{(\not{p} + m) + \alpha(m - w_p) \left[1 + \frac{m}{p^2} \gamma \cdot \mathbf{p} \right]}{(p^2 - m^2)(1 + 2\delta Z)} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Temos que o propagador renormalizado é definido $S(p) = Z_2 S_R(p)$. Como podemos ver na equação (3.61), o segundo termo do propagador $S(p)$ tem uma dependência complicada com o momento p . Para fixarmos a constante de renormalização da função de onda Z_2 , vamos usar a mesma condição sugerida em [68], ou seja que o propagador renormalizado no referencial de repouso seja igual ao propagador livre, isto é, $S_R(p_0, \mathbf{p} = 0) = S(p_0, \mathbf{p} = 0)$. Assim obtemos $Z_2 = 1$ ou $\delta Z = 0$, e então podemos escrever

$$S_R(p) = i \frac{(\not{p} + m) + \alpha(m - w_p) \left[1 + \frac{m}{p^2} \gamma \cdot \mathbf{p} \right]}{(p^2 - m^2)}. \quad (3.62)$$

Desta forma, até esta ordem, não temos renormalização para a função de onda.

3.3.2 Tensor de Polarização

O único gráfico que contribui para o tensor de polarização está representado da figura (3.6). Observemos que este gráfico é independente de gauge[1] e apresenta divergência

Figura 3.6: *Tensor de Polarização*

linear no ultravioleta. No entanto, esta divergência pode ser eliminada se usarmos alguma regularização invariante de gauge. Analiticamente o gráfico é dado por

$$\begin{aligned}\Pi^{\mu\nu} &= (-1) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{tr} [\Gamma^{a,\mu}(k, k+q) S(k+q) \Gamma^{b,\nu}(k+q, k) S(k)] \\ &= g^2 \text{tr}[T^a T^b] \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{tr}[\gamma^\mu (\not{k} + \not{q} + m) \gamma^\nu (\not{k} + m)]}{[(k+q)^2 - m^2][k^2 - m^2]}.\end{aligned}\quad (3.63)$$

O integrando é o mesmo do caso abeliano[23, 67], e nos leva a

$$\Pi^{\mu\nu} = \frac{ig^2}{4\pi} \text{tr}[T^a T^b] \left[\left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \Pi_1(q^2) + im \varepsilon^{\mu\nu\lambda} q_\lambda \Pi_2(q^2) \right], \quad (3.64)$$

sendo

$$\Pi_1(q^2) = \int_0^1 dx \frac{2q^2 x(1-x)}{[m^2 - q^2 x(1-x)]^{1/2}} \approx \frac{q^2}{3|m|} \quad (3.65)$$

$$\Pi_2(q^2) = \int_0^1 dx \frac{1}{[m^2 - q^2 x(1-x)]^{1/2}} \approx \frac{1}{|m|}. \quad (3.66)$$

Escrevendo o tensor de polarização renormalizado $\Pi_R^{\mu\nu} = \Pi^{\mu\nu} - 2\delta\Theta \varepsilon^{\mu\nu\lambda} q_\lambda$, e escolhendo $\delta\Theta$ de modo a assegurar que não teremos indução do termo de Chern-Simons, isto é, para não precisarmos redefinir o parâmetro de Chern-Simons, obtemos para pequenos momentos,

$$\Pi_R^{\mu\nu} = \frac{ig^2}{12\pi|m|} \text{tr}[T^a T^b] (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu). \quad (3.67)$$

Os gráficos com duas linhas externas do campo de gauge, mas sem campos de matéria, como no caso escalar, não dão nenhuma contribuição para o tensor de polarização.

3.3.3 Correção de Vértice

Os gráficos que darão contribuição para a correção de vértice são mostrados na figura (3.7a-c). Os gráficos (3.7d-e) são necessários para o cálculo do momento magnético e também contribuirão no espalhamento. O gráfico (3.7a) nos leva a

$$\Gamma_a^{\mu} = \frac{g^3}{\Theta} [T^b T^a T_b] \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{N^\mu}{[(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon][(p'-k)^2 - m^2 + i\epsilon] [-k^2]} \quad (3.68)$$

sendo

$$N^\mu = \varepsilon_{\rho\sigma\lambda} \bar{k}^\lambda \bar{u}(p') [\gamma^\sigma (\not{p}' - \not{k} + m) \gamma^\mu (\not{p} - \not{k} + m) \gamma^\rho] u(p) . \quad (3.69)$$

Usando as propriedades das matrizes de Dirac obtemos para a componente 0

$$N^0 = \bar{u}(p') \{ -4w_p [\mathbf{q} \wedge \mathbf{k} + ik^2] \gamma^0 + 2(\mathbf{q} \wedge \mathbf{k}) \gamma \cdot \mathbf{k} + 4ik^2 k^0 + 2k^0 \gamma^0 (\mathbf{q} \wedge \mathbf{k}) \} u(p) , \quad (3.70)$$

e para a componente i

$$\begin{aligned} N^i &= \bar{u}(p') \{ 2(\mathbf{q} \wedge \mathbf{k}) (k^0 - 2p^0) \gamma^i - 2ik^2 P^i \\ &\quad + [2(\mathbf{q} \wedge \mathbf{k}) \gamma^0 + 2i\mathbf{P} \cdot \mathbf{k} + 2ik^2 + 2ik_0^2] k^i \} u(p) \end{aligned} \quad (3.71)$$

Fazendo a expansão para pequenos momentos, usando (3.39), e mantendo termos até ordem p/m , obtemos, como no caso abeliano[67], para a componente 0 de (3.68)

$$\Gamma_a^{a,0} = \mathcal{O}(\eta^2) . \quad (3.72)$$

$$(3.73)$$

Para a componente i de (3.68), após a integração em k^0 ,

$$\Gamma_a^{a,i} = -\frac{ig^3}{8\pi^2\Theta} [T^b T^a T_b] \int d^2 \mathbf{k} \frac{1}{k^2} \frac{w_{p-k} - w_{p'-k}}{2\mathbf{q} \cdot \mathbf{k}} \left[B^i - \frac{A^i}{w_{p-k} w_{p'-k}} \right] , \quad (3.74)$$

sendo

$$\begin{aligned} A^i &= -2w_p (\mathbf{q} \wedge \mathbf{k}) \gamma^i + [2(\mathbf{q} \wedge \mathbf{k}) \gamma^0 + 2iw_p^2 + 2i\mathbf{P} \cdot \mathbf{K} + 2ik^2] k^i - 2ik^2 P^i \\ B^i &= 2ik^i \end{aligned} \quad (3.75)$$

Fazendo a separação nos setores L e H , obtemos para o setor de baixa energia

$$\Gamma_{aL}^{a,i} = \mathcal{O}(\eta^2) , \quad (3.76)$$

e para a parte de alta energia

$$\Gamma_{aH}^{a,i} = \frac{g^3}{4\pi\Theta} [T^b T^a T_b] \frac{1}{2m} [P^i - i\varepsilon^{ij} q_j] + \mathcal{O}(\eta^2) . \quad (3.77)$$

Figura 3.7: Correção de Vértice.

Como era de se esperar, a contribuição vem somente do setor de alta energia.

O gráfico (3.7c), cuja divergência logarítmica é cancelada pela simetria na integração, juntamente com o gráfico com quatro linhas externas do campo de gauge e o tensor de polarização induzem um termo de Maxwell para a Lagrangeana original. Porém eles não darão nenhuma contribuição para o espalhamento até 1-loop. O Gráfico (3.7b) é dado por

$$\Gamma_b^{a,\mu} = \frac{g^3}{\Theta} [2c_f \epsilon^{abc} T_b T_c] \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\bar{u}(\mathbf{p}') [\gamma^\alpha (\not{k} + m) \gamma^\beta] u(\mathbf{p}) \epsilon^{\mu\sigma\rho} \epsilon_{\sigma\beta\lambda} (\overline{p-k})^\lambda \epsilon_{\alpha\rho\xi} (\overline{p'-k})^\xi}{[k^2 - m^2 + i\epsilon] (p-k)^2 (p'-k)^2}, \quad (3.78)$$

e nos leva a

$$\Gamma_b^{a,0} = \mathcal{O}(\eta^2) \quad (3.79)$$

e para a componente i ,

$$\Gamma_b^{a,i} = \frac{-g^3}{4\pi m \Theta} [c_f \epsilon^{abc} T_c T_b] \left\{ p^i + i \epsilon^{ij} q_j \left[1 + \log \left(\frac{4m^2}{q^2} \right) \right] \right\} \quad (3.80)$$

Os gráficos (3.7d-e) são dados por

$$\begin{aligned} \Gamma_d^{a,\mu} &= \bar{u}(\mathbf{p}') [\Gamma^{a,mu}(p, p') S(p) \Sigma_R(p)] u(\mathbf{p}) \\ \Gamma_e^{a,\mu} &= \bar{u}(\mathbf{p}') [\Sigma_R(p') S(p') \Gamma^{a,mu}(p, p')] u(\mathbf{p}), \end{aligned} \quad (3.81)$$

Da equação (3.52) e da relação $\Sigma_R = \Sigma + i\delta m$, temos

$$\Gamma_d^{a,0} = \Gamma_e^{a,0} = \mathcal{O}(\eta^2) \quad (3.82)$$

$$\Gamma_{de}^{a,i} = \Gamma_d^{a,i} + \Gamma_e^{a,i} = -\frac{g^3}{4\pi\Theta}[(T^b T_b)T^a] \left\{ \frac{1}{2m}[P^i + i\varepsilon^{ij}q_j] \right\}. \quad (3.83)$$

Dos gráficos acima, podemos verificar qual a correção para o momento magnético. Temos que a contribuição da parte local proporcional a $\varepsilon_{ij}q^j$ que vem da equação (3.80) cancela exatamente a contribuição extra que vem de (3.77) devido a estrutura do grupo. Ou seja, usando (3.2) temos que $T^b T^a T_b = T^a(T^b T_b) - 2c_f \varepsilon^{abc} T_c T_b$. Assim em (3.77), a contribuição proporcional a $\varepsilon^{abc} T_c T_b$ cancela a contribuição que vem de (3.78), enquanto a parte proporcional a $T^a(T^b T_b)$ e a parcela de (3.83) nos dão a contribuição para a correção do momento magnético. Assim o termo que contribui para o momento magnético fica

$$\Gamma_{mag}^{i,a} = \frac{ig^3}{4\pi m\Theta}[(T^b T_b)T^a]\varepsilon^{ij}q^j, \quad (3.84)$$

levando a um momento magnético

$$\mu_{1-loop}^a = \frac{ig^3}{4\pi m\Theta}[T^a(T^b T_b)], \quad (3.85)$$

Podemos ver que a equação acima difere do caso Abeliño devido ao fator de grupo, porém no limite Abeliño ($g = e\sqrt{2}$ e $T = i/\sqrt{2}$) recuperamos o resultado da referência [23].

3.3.4 Espalhamento em 1-Loop

Nesta seção vamos calcular o espalhamento férmion-férmion, até 1-loop, tomando o limite para momentos externos pequenos. Para os momento internos faremos a separação de baixa e alta energia, introduzindo o corte intermediário Λ , como feito no caso escalar. No apêndice D explicitaremos a contas para um gráfico. Na figura (3.8) temos os gráficos que contribuem para o espalhamento até 1-loop. A nível de árvore temos o gráfico (3.8a),

$$\mathcal{M}_a(\theta) = [\bar{u}(p_4)\Gamma^{b,\nu}(p_2, p_4)u(p_2)]D_{\nu\mu}^{ba}(q)[\bar{u}(p_3)\Gamma^{a,\mu}(p_1, p_3)u(p_1)] \quad (3.86)$$

que com o uso da regras de Feynman e das relações (3.39) a equação acima nos leva, em ordem dominante, a

$$\mathcal{M}_a(\theta) = \frac{ig^2}{m\Theta}[T^a \otimes T_a] \left\{ 1 + i \frac{\sin \theta}{(1 - \cos \theta)} \right\}. \quad (3.87)$$

O resultado acima é exatamente o resultado obtido na teoria não relativística a nível de árvore.

Figura 3.8: *Espalhamento Férmion-Férmion - Teoria Relativística.*

A seguir vamos calcular as correções de 1-loop para o espalhamento. Os gráficos que irão contribuir nesta ordem são dados na figura (3.8b-h). O gráfico (3.8d) não existem na teoria Abeliana, enquanto que os outros aparecem na teoria Abeliana, porém com o fator multiplicativo extra que vem da grupo de simetria interna.

Gráfico Direto

A amplitude de espalhamento do diagrama (3.8b) é

$$\mathcal{M}_b(\theta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [\bar{u}(\mathbf{p}_4)\Gamma^{c,\alpha}(t, p_4)S(t)\Gamma^{d,\beta}(p_2, t)u(\mathbf{p}_2)]D_{\alpha\mu}^{ca}(l') [\bar{u}(\mathbf{p}_3)\Gamma^{a,\mu}(r, p_3)S(r)\Gamma^{b,\nu}(p_1, r)u(\mathbf{p}_1)]D_{\nu\beta}^{bd}(l), \quad (3.88)$$

onde $l = (k^0, \mathbf{k} - \mathbf{p}_1)$, $l' = (k^0, \mathbf{k} - \mathbf{p}_3)$, $r = (w_p + k^0, \mathbf{k})$, e $t = (w_p + k^0, -\mathbf{k})$. Usando o fato que o propagador do campo de matéria pode ser escrito como [67]

$$S(p) = i \left[\frac{u(\mathbf{p})\bar{u}(\mathbf{p})}{p^0 - w_p + i\epsilon} + \frac{v(-\mathbf{p})\bar{v}(-\mathbf{p})}{p^0 + w_p - i\epsilon} \right], \quad (3.89)$$

obtemos, após a integração em k^0 ,

$$\mathcal{M}_b(\theta) = \frac{ig^4}{2} [T^a T^b \otimes T_a T_b] \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \left[\frac{T(k, p_1)T^*(k, p_3)}{w_k - w_p} + \frac{H(p_3, k)H^*(p, k)}{w_k + w_p} \right] \quad (3.90)$$

sendo

$$T(k, p_1) = [\bar{u}(k)\gamma^\nu u(p_1)]D_{\nu\beta}(l)[\bar{u}(-k)\gamma^\beta u(-p_1)] \quad (3.91)$$

$$T^*(k, p_3) = [\bar{u}(p_3)\gamma^\mu u(k)]D_{\mu\alpha}(l')[\bar{u}(-p_3)\gamma^\alpha u(-k)] \quad (3.92)$$

$$H(p_3, k) = [\bar{u}(p_3)\gamma^\mu v(-k)]D_{\mu\alpha}(l')[\bar{u}(-p_3)\gamma^\alpha v(k)] \quad (3.93)$$

$$H^*(p_1, k) = [\bar{v}(-k)\gamma^\nu u(p_1)]D_{\nu\beta}(l)[\bar{v}(k)\gamma^\beta u(-p_1)] \quad (3.94)$$

Utilizando as equações (3.39) verificamos que

$$\begin{aligned} T(k, p) &= \frac{2i}{\Theta(k-p)^2} \left\{ \left(\frac{w_k + m}{2w_k} \right) \left(\frac{w_p + m}{2w_p} \right) \left[1 + \frac{k_- p_+}{(w_k + m)(w_p + m)} \right] \right. \\ &\quad \times \left. \left(\frac{l_- p_+}{w_p + m} - \frac{l_+ k_-}{w_k + m} \right) \right\} \\ H(p', k) &= \frac{2i}{\Theta(l')^2} \left\{ \left(\frac{w_{p'} + m}{2w_{p'}} \right) \left(\frac{w_k + m}{2w_k} \right) \left[\frac{p'_-}{w_{p'} + m} - \frac{k_-}{w_k + m} \right] \right. \\ &\quad \times \left. \left(l'_- + l'_+ \frac{p'_- k_-}{(w_k + m)(w_{p'} + m)} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Dividindo a amplitude (3.90) em duas partes, $\mathcal{M}_b^{ee}(\theta)$ e $\mathcal{M}_b^{pp}(\theta)$, onde

$$\mathcal{M}_b^{ee}(\theta) = \frac{ig^4}{2} [T^a T^b \otimes T_a T_b] \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \left[\frac{T(k, p_1) T^*(k, p_3)}{w_k - w_p} \right] \quad (3.96)$$

e

$$\mathcal{M}_b(\theta) = \frac{ig^4}{2} [T^a T^b \otimes T_a T_b] \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \left[\frac{H(p_3, k) H^*(p, k)}{w_k + w_p} \right], \quad (3.97)$$

e fazendo a separação no setor de baixa e alta energia, obtemos

$$\mathcal{M}_{bL}^{ee}(\theta) = \frac{ig^4}{4\pi m \Theta^2} [T^a T^b \otimes T_a T_b] \left\{ \log \left(\frac{\Lambda^2}{q^2} \right) + \mathcal{O}(\eta) \right\} \quad (3.98)$$

$$\mathcal{M}_{bH}^{ee}(\theta) = \frac{ig^4}{4\pi m \Theta^2} [T^a T^b \otimes T_a T_b] \left\{ \log \left(\frac{2m^2}{\Lambda^2} \right) + \mathcal{O}(\eta) \right\} \quad (3.99)$$

$$\mathcal{M}_{bL}^{pp}(\theta) = \frac{ig^4}{4\pi m \Theta^2} [T^a T^b \otimes T_a T_b] \{ \mathcal{O}(\eta) \} \quad (3.100)$$

$$\mathcal{M}_{bH}^{pp}(\theta) = \frac{ig^4}{4\pi m \Theta^2} [T^a T^b \otimes T_a T_b] \{ \log(2) + \mathcal{O}(\eta) \}. \quad (3.101)$$

Ou seja, em ordem dominante temos

$$\mathcal{M}_b(\theta) = \frac{ig^4}{4\pi m \Theta^2} [T^a T^b \otimes T_a T_b] \left\{ \log \left(\frac{4m^2}{q^2} \right) \right\}. \quad (3.102)$$

Gráfico Cruzado

Agora vamos calcular o gráfico (3.8c), cuja amplitude de espalhamento correspondente é

$$\mathcal{M}_C(\theta) = -\frac{g^4}{\Theta^2} [T^b T^a \otimes T_a T_b] \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(p_3 - k)^2 (p_1 - k)^2} \times \left[\frac{N_C}{[k^2 - m^2 + i\epsilon][(k - p_2 - p_1)^2 - m^2 + i\epsilon]} \right], \quad (3.103)$$

com

$$N_C = [\bar{u}(p_4) \gamma^\sigma (\not{k} + \not{p}_2 - \not{p}_3 + m) \gamma^\rho u(p_2)] [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu (\not{k} + m) \gamma^\mu u(p_1)] \times \varepsilon_{\mu\sigma\lambda} (\overline{p_1 - k})^\lambda \varepsilon_{\nu\rho\xi} (\overline{p_3 - k})^\xi. \quad (3.104)$$

Usando as propriedades das matrizes de Dirac, as relações (3.39), integrando em k^0 e repetindo o mesmo procedimento do corte intermediário obtemos

$$\mathcal{M}_{CL}(\theta) = -\frac{ig^4}{\pi m \Theta^2} [T^b T^a \otimes T_a T_b] \left\{ \frac{1}{2} \log \left(\frac{\Lambda^2}{q^2} \right) + \mathcal{O}(\eta) \right\} \quad (3.105)$$

$$\mathcal{M}_{CH}(\theta) = \frac{ig^4}{2\pi m \Theta^2} [T^b T^a \otimes T_a T_b] \left\{ 1 + \frac{1}{2} \log \left(\frac{\Lambda^2}{4m^2} \right) + \mathcal{O}(\eta) \right\}. \quad (3.106)$$

Isto é

$$\mathcal{M}_C(\theta) = \frac{ig^4}{2\pi m \Theta^2} [T^b T^a \otimes T_a T_b] \left\{ 1 + \frac{1}{2} \log \left(\frac{q^2}{4m^2} \right) + \mathcal{O}(\eta) \right\}. \quad (3.107)$$

Observemos que o fator de grupo $[T^b T^a \otimes T_a T_b] = [T^b T^a \otimes T_b T_a] - 2c_f \varepsilon^{acd} T_c T_a \otimes T_d$.

Gráfico com Três Gluons

O gráfico que contém o vértice com três gluons, (3.8d) é dado analiticamente por²

$$\begin{aligned} M_d &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left\{ [\bar{u}(p_4) \Gamma^{b,\nu} u(p_2)] D_{\nu\eta}^{ba}(q) \Gamma^{ac'd',\mu\rho\sigma} D_{\sigma\alpha}^{d'd}(k - p_3) \right. \\ &\quad \times D_{\beta\rho}^{cc'}(k - p_1) [\bar{u}(p_3) \Gamma^{d,\alpha} S(k) \Gamma^{c,\beta} u(p_1)] \left. \right\} \\ &= \frac{i(-g)^3}{(\Theta)^3} [-2ic_f g \Theta \varepsilon^{acd} T_a \otimes T_d T_c] \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{N_d}{[k^2 - m^2 + i\epsilon](k - p_1)^2 (k - p_3)^2 q^2} \end{aligned} \quad (3.108)$$

²veja apêndice D

com

$$N_d = [\bar{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2)]\varepsilon_{\nu\mu\lambda}\bar{q}^\lambda\varepsilon^{\mu\rho\sigma}\varepsilon_{\sigma\alpha\xi}(\bar{k}-p_3)^\xi\varepsilon_{\beta\rho\delta}(\bar{k}-p_1)^\delta[\bar{u}(p_4)\gamma^\alpha(k+m)\gamma^\beta u(p_1)] . \quad (3.109)$$

Usando que $\gamma^\alpha\gamma^\beta = g^{\alpha\beta} - i\varepsilon^{\alpha\beta\rho}\gamma_\rho$, eliminando os termos ímpares em k_0 e lembrando que $\varepsilon_{0ij}a^ib^j = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, podemos escrever até ordem η

$$N_d = [\mathbf{q} \wedge \mathbf{k} - \mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{p}_3] \left\{ 2i[\mathbf{k}^2 + \mathbf{p}^2] - 2[\mathbf{q} \wedge \mathbf{k} + i\mathbf{P} \cdot \mathbf{k}] \right\} . \quad (3.110)$$

Substituindo na equação (3.108) e integrando em k_0 e na parte angular obtemos

$$M_d = \frac{-ig^4}{4\pi\Theta^2} [c_f\varepsilon^{acd}T_a \otimes T_d T_c] T_k , \quad (3.111)$$

com

$$\begin{aligned} T_k = & \int_0^{\Lambda_0^2} \frac{d\mathbf{k}^2}{\mathbf{q}^2 w_k} \left\{ [(1 - \cos\theta) + i\sin\theta][1 - Sg(\mathbf{k}^2 - \mathbf{p}^2)] \right. \\ & \left. + Sg(\mathbf{k}^2 - \mathbf{p}^2) \left[2\mathbf{p}^2(1 - \cos\theta) \frac{\mathbf{k}^2 + \mathbf{p}^2}{R} \right] \right\} , \end{aligned} \quad (3.112)$$

onde $Sg(\mathbf{k}^2 - \mathbf{p}^2)$ é sinal de $(\mathbf{k}^2 - \mathbf{p}^2)$ e $R = (\mathbf{k}^4 + \mathbf{p}^4 - 2\mathbf{p}^2\mathbf{k}^2 \cos\theta)$.

Vamos separar a integral em $\mathbf{k}^2$ na parte de baixa energia (L) e alta energia (H). Na parte de baixa energia fazemos uma expansão em $1/m$ e na parte de alta fazemos uma expansão em torno de $\mathbf{p} \approx 0$. Assim para o setor de baixa energia

$$\begin{aligned} M_d^L = & \frac{-ig^4}{4\pi m\Theta^2} [c_f\varepsilon^{acd}T_a \otimes T_d T_c] \left\{ 1 + i\frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} \right. \\ & \left. + \left[\log\left(\frac{\Lambda^2}{\mathbf{q}^2}\right) - \frac{\Lambda^2}{2m^2} - (1 + 2\cos\theta)\frac{\mathbf{p}^2}{\Lambda^2} \right] \right\} , \end{aligned} \quad (3.113)$$

e para o setor de alta energia

$$M_d^H = \frac{-ig^4}{4\pi m\Theta^2} [c_f\varepsilon^{acd}T_a \otimes T_d T_c] \left\{ -\log\left(\frac{\Lambda^2}{4m^2}\right) + \frac{\Lambda^2}{2m^2} + (1 + 2\cos\theta)\frac{\mathbf{p}^2}{\Lambda^2} \right\} . \quad (3.114)$$

Somando a contribuição das equações (3.113) e (3.114) obtemos

$$M_d = \frac{-ig^4}{4\pi m\Theta^2} [c_f\varepsilon^{acd}T_a \otimes T_d T_c] \left\{ 1 + i\frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} + \log\left(\frac{4m^2}{\mathbf{q}^2}\right) \right\} . \quad (3.115)$$

Correções Radiativas

Consideremos agora as correções radiativas para os propagadores e vértice (3.7a). As contribuições que vem da inclusão da correção de vértice e auto-energia do férmion são representadas nas figuras (3.8e-g). Utilizando as equações (3.77) e (3.83) obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{e-g}(\theta) = & - \frac{ig^4}{4\pi m\Theta^2} [T^a \otimes (T^b T_b) T_a] \{1\} \\ & + \frac{ig^4}{4\pi m\Theta^2} [c_f \varepsilon^{abc} T_a \otimes T_c T_b] \left\{ 1 + i \frac{\sin \theta}{(1 - \cos \theta)} \right\}. \end{aligned} \quad (3.116)$$

Lembrando que para os gráficos (3.8d-g) temos um fator 2 devido ao gráfico invertido.

Por último temos a incorporação do tensor de polarização, representado na figura (3.8h),

$$\mathcal{M}_h(\theta) = \frac{ig^4}{24\pi m\Theta^2} [T^a \otimes T_a]. \quad (3.117)$$

A soma das contribuições, equações (3.102), (3.107), (3.115), (3.116) e (3.117) leva a

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{1-loop}(\theta) = & - \frac{ig^4}{4\pi m\Theta^2} \{ [T^a \otimes (T^b T_b) T_a](2) - [T^b T^a \otimes T_b T_a](2) \\ & + [c_f \varepsilon^{acd} T_a \otimes T_d T_c](4) - [T^a \otimes T_a](1/6) \}, \end{aligned} \quad (3.118)$$

que com o uso das propriedades das matrizes T pode ser escrito na forma

$$\mathcal{M}_{1-loop}(\theta) = \frac{ig^4}{4\pi m\Theta^2} \left\{ \frac{3}{8} [J \otimes J] + \frac{2}{3} [T^a \otimes T_a] \right\}. \quad (3.119)$$

3.4 Análise

Observemos inicialmente que os dois primeiros termos, inclusive o fator dependente do ângulo de espalhamento, da equação (3.115), são cancelados pela segunda parte de (3.116). No entanto, no primeiro caso esta contribuição vem do setor de baixa energia (L), enquanto no segundo caso vem do setor de alta energia (H). A segunda parcela em (3.115) vem exclusivamente do gráfico (3.8e). Isto também acontece no cálculo das correções radiativas da inserção de vértice e auto-energia, primeira parcela da equação (3.116). Esta primeira parcela tem contribuição dos gráficos (3.8e-g). Também verificamos que os termos que dependem de $\log(\Lambda^2)$, no setor L são exatamente cancelados pela contribuição do setor H . Isto é, a parte de alta energia fornece um contra-termo natural como acontece

no caso escalar. Porém, diferentemente do caso escalar, os gráficos do espalhamento não relativístico são finitos e invariantes de escala. No caso fermiônico o termo de interação de Pauli faz o papel do termo de contato que aparecia no caso de spin 0.

A contribuição para o espalhamento dada pela equação (3.119), são correções ao espalhamento e não aparecem na teoria não relativística. Esta contribuição, como vemos, aparece já em ordem dominante. Um extensão possível ao espalhamento AB não-Abeliano de spin $1/2$ seria estendermos os cálculos, como foi feito no caso escalar, para obtermos as correções sub-dominantes. No entanto isto implica num trabalho mais extenso do que no caso escalar, e fica como uma possibilidade futura.

Capítulo 4

Partícula Massiva de Spin 1 Interagindo com Chern-Simons

4.1 Introdução

Como vimos nos capítulos anteriores, o espalhamento de uma partícula carregada por um campo de CS tem se mostrado um problema interessante. Neste capítulo gostaríamos de estender a discussão para o caso de spin 1. Uma análise usando a mecânica quântica tem sido feito nas referências [20] e [21]. No primeiro caso os autores trabalharam com o modelo de Proca carregado enquanto no segundo caso foi empregado modelo de Yang-Mills linearizado. No caso de um estudo perturbativo através da teoria de campos, mesmo para o caso Abelian, o problema apresenta dificuldades adicionais devido a certas características que surgem na formulação de um modelo descrevendo um méson vetorial massivo.

O problema inicial reside no fato que temos mais do que uma formulação para tratarmos uma partícula carregada de spin 1, como já ressaltado no capítulo 1. Como foi visto, para descrevermos um campo vetorial massivo livre temos formulações equivalentes, isto é, o modelo AD é equivalente ao modelo de MCS [10]. Por outro lado o modelo AD [9] é uma espécie de “raiz quadrada” do modelo de Proca[65]. No entanto, quando estes modelos estão acoplados a outro campo dinâmico, como por exemplo o campo de Dirac, temos que ter acoplamentos diferentes para que a identificação seja possível.

Neste capítulo vamos analisar especificamente os modelos de MCS e Proca carregados, quando acoplados com um campo de CS. Veremos, que devido a forma dos vértices e propagadores que aparecem em ambos os modelos, uma análise completa até 1-loop se torna inviável. Isto é devido ao número de termos e parâmetros de Feynman que aparecem no cálculo das integrais. Temos também que no caso do modelo de Proca, a forma do propagador do campo de gauge carregado, pode levar a um comportamento ruim no ultravioleta. Isto não acontece no caso do modelo de MCS , mas neste caso a dificuldade

reside no número de parâmetros de Feynman nas integrais de 1-loop. Entretanto, mesmo não tendo sido finalizado os cálculos até 1-loop, nós obtemos alguns resultados interessantes já a nível de árvore. Além disto, faremos uma análise das correções radiativas para o modelo de Proca minimamente acoplado com CS.

O modelo de Proca carregado com massa M , é descrito pela densidade de Lagrangeana

$$\mathcal{L}_P = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^* F^{\mu\nu} - M^2 \phi_\mu^* \phi^\mu, \quad (4.1)$$

onde $F^{\mu\nu} = \partial_\mu \phi_\nu - \partial_\nu \phi_\mu$. O modelo Maxwell-Chern-Simons (MCS) carregado é dado por

$$\mathcal{L}_{MCS} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^* F^{\mu\nu} + \frac{m}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} \phi_\rho^* \partial_\nu \phi_\mu + \frac{m}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} \phi_\mu (\partial_\nu \phi_\rho)^*. \quad (4.2)$$

Como veremos, o primeiro descreve dois modos massivos de massa M e spin ± 1 , enquanto o que o segundo apenas um modo massivo¹ de massa m e spin $\frac{m}{|m|}$.

A seguir vamos introduzir o modelo de Proca, determinar os vetores de polarização, as regras de Feynman e a amplitude de espalhamento a nível de árvore. Posteriormente repetiremos para o caso de MCS. Na seção 2.3 vamos implementar a correção de 1-loop para o modelo de Proca.

4.2 Vetores de Polarização e Regras de Feynman

4.2.1 Modelo de Proca

Vamos primeiramente tomar a Lagrangeana de Proca dada por (4.1). Para uso futuro vamos estudar alguns aspectos do modelo livre. Para isto, vamos expandir ϕ^μ em ondas planas

$$\phi^\mu = \frac{1}{(2\pi)} \int \frac{d^2 p}{2w_p} \sum_\lambda \epsilon_\lambda^\mu(p) \left[a_\lambda(p) e^{-ipx} + b_\lambda^\dagger(p) e^{ipx} \right], \quad (4.3)$$

onde a , b , $a^\dagger$ e $b^\dagger$ são os operadores de criação e destruição de partículas e antipartículas, e, $\epsilon_\lambda^\mu(p)$ são os vetores de polarização. Como consequência direta da equação de movimento obtemos que ϕ^μ é transversal. Isso reduz o número de componentes de três para dois. Uma possível escolha para os vetores de polarização é

¹Poderíamos ter dois campos de MCS com massas topológicas de sinais diferentes para descrever os dois modos de spin ± 1 .

$$\epsilon_1^\mu(p) = (0, \epsilon^{ij} \hat{p}_j) \quad \epsilon_2^\mu(p) = \left(\frac{|\mathbf{p}|}{M}, \frac{w_p}{M} \hat{p}^i \right), \quad (4.4)$$

com $w_p = \sqrt{M^2 + |\mathbf{p}|^2}$ e $\hat{p} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$.

Por outro lado, se considerarmos o operador de momento angular

$$J = \int d^2x \epsilon_{ij} x^i : T^{0j} :, \quad (4.5)$$

onde $T^{\mu\nu}$ é o tensor de energia momento simétrico

$$T^{\mu\nu} = F^{\dagger\mu\rho} F_\rho{}^\nu + F^{\mu\rho} F_\rho{}^\dagger{}^\nu - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (4.6)$$

obteremos

$$\begin{aligned} J = & \int d^2x \left\{ \epsilon_{ij} x^i : [(\partial_\mu \partial^\mu \phi^{\dagger 0}) \phi^j + (\partial_\mu \partial^\mu \phi^0) \phi^{\dagger j}] : \right. \\ & + \epsilon_{ij} x^i : [\phi^{\dagger 0} \partial^j \partial^0 \phi + \phi^0 \partial^j \partial^0 \phi^\dagger - \partial^0 \phi^{\dagger k} \partial^j \phi_k - \partial^0 \phi^k \partial^j \phi_k^\dagger] : \\ & \left. + \epsilon_{ij} : [-\partial^0 \phi^{\dagger i} \phi^j - \partial^0 \phi^i \phi^{\dagger j}] : \right\}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Usando $\phi^\mu(x)$ dado na equação (4.3) podemos separar J nas partes J^{++} , J^{+-} , J^{-+} e J^{--} , onde $+$ e $-$ referem-se as partes de criação e destruição de cada fator. Por exemplo o termo J^{+-} é

$$\begin{aligned} J^{+-} = & \int d^2x \left\{ \epsilon_{ij} x^i : [(\partial_\mu \partial^\mu \phi_{(+)}^{\dagger 0}) \phi_{(-)}^j + a.h.] : - \epsilon_{ij} : [\partial^0 \phi_{(+)}^{\dagger i} \phi_{(-)}^j + a.h.] : \right. \\ & \left. + \epsilon_{ij} x^i : [\phi_{(+)}^{\dagger 0} \partial^j \partial^0 \phi_{(-)} - \partial^0 \phi_{(+)}^{\dagger k} \partial^j \phi_{k(-)} + a.h.] : \right\}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde *a.h.* designa o adjunto hermitiano. Escrevendo explicitamente em termos dos operadores a , $a^\dagger$, b e $b^\dagger$, e integrando em x podemos decompor J^{+-} em três partes

$$J^{+-} = J_L^{+-} + J_S^{+-} + J_{p_\mu p^\mu}^{+-} \quad (4.9)$$

sendo

$$\begin{aligned} J_L^{+-} = & i \int \frac{d^2p}{4w_p} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \epsilon_{ij} p^j \left[\epsilon^\mu(p, \lambda') a_{\lambda'}^\dagger(p) \frac{\partial}{\partial p^i} \left(\epsilon_\mu(p, \lambda) a_\lambda(p) \right) \right. \\ & \left. + \epsilon^\mu(p, \lambda') b_{\lambda'}^\dagger(p) \frac{\partial}{\partial p^i} \left(\epsilon_\mu(p, \lambda) b_\lambda(p) \right) \right] \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$J_S^{+-} = -i \int \frac{d^2p}{4w_p} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \epsilon_{ij} \epsilon^i(p, \lambda') \epsilon^j(p, \lambda) [a_{\lambda'}^\dagger(p) a_\lambda(p) + b_{\lambda'}^\dagger(p) b_\lambda(p)] \quad (4.11)$$

$$J_{p_\mu p^\mu}^{+-} = i \int \frac{d^2 p}{4w_p} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \varepsilon_{ij} p^\mu p_\mu \left[\frac{\epsilon^0(p, \lambda') a_{\lambda'}^\dagger(p) e^{i w_p x^0}}{2w_p} \frac{\partial}{\partial p^i} \left(\frac{\epsilon^j(p, \lambda) a_\lambda(p) e^{-i w_p x^0}}{2w_p} \right) \right. \\ \left. + \frac{\epsilon^0(p, \lambda') b_{\lambda'}^\dagger(p) e^{i w_p x^0}}{2w_p} \frac{\partial}{\partial p^i} \left(\frac{\epsilon^j(p, \lambda) b_\lambda(p) e^{-i w_p x^0}}{2w_p} \right) \right] \quad (4.12)$$

Podemos fazer o mesmo para os outros termos. Vemos que J^{++} e J^{--} são nulos. Para obtermos a contribuição do spin, vamos calcular o operador de momento angular no estado de repouso, $(J | p = 0, s >)$. Neste caso o termo J_L é nulo e o termo $J_{p_\mu p^\mu}^{+-}$ se cancela com $J_{p_\mu p^\mu}^{-+}$. Assim a parte que contribui para o spin é dada por

$$J_S = J_S^{+-} + J_S^{-+} = -i \int \frac{d^2 p}{2w_p} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \epsilon_{\lambda'}(p) \wedge \epsilon_\lambda(p) [a_{\lambda'}^\dagger(p) a_\lambda(p) + b_{\lambda'}^\dagger(p) b_\lambda(p)] \quad (4.13)$$

Usando os vetores (4.4), podemos escrever, para o setor de partículas,

$$J_S = i \int \frac{d^2 p}{2w_p} [a_2^\dagger(p) a_1(p) - a_1^\dagger(p) a_2(p)] \quad (4.14)$$

ou seja, os estados

$$| p = 0, \lambda = 1 > = a_1^\dagger(0) | 0 > \quad \text{e} \quad | p = 0, \lambda = 2 > = a_2^\dagger(0) | 0 > \quad (4.15)$$

não são auto-estados do operador J . Os auto-estados do operador J com auto-valores ± 1 são dados por

$$| p = 0, s = \pm 1 > = \frac{a_1^\dagger(0) \pm a_2^\dagger(0)}{\sqrt{2}} | 0 > \quad (4.16)$$

Isto é,

$$J | p = 0, s = \pm 1 > = \pm | p = 0, s = \pm 1 > \quad (4.17)$$

Assim, para construir um estado de spin ± 1 , temos que tomar uma combinação dos estados (4.15).

Vamos agora fazer o acoplamento minimal do modelo de Proca com o campo de CS. Deste modo (4.1) fica sendo

$$\mathcal{L}_P = \frac{1}{2} G_{\mu\nu}^* G^{\mu\nu} - M^2 \phi_\mu^* \phi^\mu + \frac{\theta}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu \partial^\nu A^\rho, \quad (4.18)$$

com

$$G^{\mu\nu} = D^\mu \phi^\nu - D^\nu \phi^\mu \quad \text{e} \quad D^\mu = \partial^\mu - ie A^\mu. \quad (4.19)$$

$$\Delta_P^{\alpha\beta}(p) = \begin{array}{c} \alpha \quad p \quad \beta \\ \hline \end{array}$$

Fig. 1.a

$$D^{\mu\nu}(k) = \begin{array}{c} \mu \quad k \quad \nu \\ \hline \end{array}$$

Fig. 1.b

$$\Gamma_1^{\mu\alpha\beta}(p, p') = \begin{array}{c} \mu \quad q=p-p' \\ \hline \alpha \quad p \quad \beta \quad p' \end{array}$$

Fig. 1.c

$$\Gamma_2^{\mu\nu\alpha\beta} = \begin{array}{c} \mu \quad \nu \\ \hline \alpha \quad p \quad \beta \quad p' \end{array}$$

Fig. 1.d

Figura 4.1: Regras de Feynman.

As regras de Feynman no Calibre de Landau para a Lagrangeana (4.18), representadas graficamente na figura (4.1) são:

Propagador para o campo de matéria

$$\Delta_P^{\alpha\beta} = \frac{-i}{p^2 - M^2} \left[g^{\alpha\beta} - \frac{p^\alpha p^\beta}{M^2} \right] \quad (4.20)$$

Propagador para o campo de Chern-Simons

$$D_{\mu\nu}(k) = -\frac{1}{\theta} \varepsilon_{\mu\nu\rho} \frac{k^\rho}{k^2} \quad (4.21)$$

Vértices de Interação

$$\Gamma_1^{\mu\alpha\beta}(p, p') = -ic \left[(p + p')^\mu g^{\alpha\beta} - p^\beta g^{\mu\alpha} - p'^\alpha g^{\mu\beta} \right] \quad (4.22)$$

$$\Gamma_2^{\mu\nu\alpha\beta} = ic^2 \left[g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} + g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - 2g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \right]. \quad (4.23)$$

A partir de (4.22) é fácil verificar que

$$p'_3 \Gamma_1^{\mu\alpha\beta}(0, p') = p_\alpha \Gamma_1^{\mu\alpha\beta}(p, 0) = 0. \quad (4.24)$$

Esta propriedade será útil para a discussão do comportamento ultravioleta das funções de Green.

Neste ponto já podemos obter a amplitude de espalhamento a nível de árvore. O gráfico que contribui para a amplitude de espalhamento de duas partículas entrando com

Fig. 2

Figura 4.2: Espalhamento 0-Loop.

momentos p_1, p_2 e spins s_1, s_2 e saindo com momentos p_3, p_4 e spins s_3, s_4 , é representado na figura (4.2). Analiticamente temos

$$M_{fi}^{s_1, s_2, s_3, s_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \left[\epsilon_\beta^*(p_3, s_3) \Gamma_1^{\mu\alpha\beta}(p_1, p_3) \epsilon_\alpha(p_1, s_1) \right] D_{\mu\nu}(q) \left[\epsilon_\rho^*(p_4, s_4) \Gamma_1^{\nu\sigma\rho}(p_2, p_4) \epsilon_\sigma(p_2, s_2) \right] + (p_3 \leftrightarrow p_4; s_3 \leftrightarrow s_4), \quad (4.25)$$

onde

$$\epsilon_\alpha(p, s) = \frac{\epsilon_1^\alpha(p) + i s \epsilon_2^\alpha(p)}{\sqrt{2}}, \quad (4.26)$$

com $\epsilon_1^\alpha(p)$ e $\epsilon_2^\alpha(p)$ sendo as polarizações dadas por (4.4) e $q = p_1 - p_3 = p_4 - p_2$ o momento transferido.

No centro de massa as partículas entrando e saindo tem momentos $p_1 = (w_p, \mathbf{p})$, $p_2 = (w_p, -\mathbf{p})$, $p_3 = (w_p, \mathbf{p}')$ e $p_4 = (w_p, -\mathbf{p}')$, onde $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'|$ e $w_p = \sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}$. Assim, usando (4.4), (4.26) e as regras de Feynman (4.21) e (4.22), obtemos com a ajuda das relações²

$$\begin{aligned} \epsilon_\mu(p, s) \epsilon^{*\mu}(p', s') &= \frac{1}{2} \left[-(1 + ss') \cos \alpha + i \frac{w_p}{M} (s + s') \sin \alpha + \frac{\mathbf{p}^2}{M^2} \right], \\ p_\mu \epsilon^{*\mu}(p', s') &= \frac{|\mathbf{p}|}{\sqrt{2}} \left[-i s' \frac{w_p}{M} (1 - \cos \alpha) + \sin \alpha \right], \\ p'_\mu \epsilon^\mu(p, s) &= \frac{|\mathbf{p}|}{\sqrt{2}} \left[i s \frac{w_p}{M} (1 - \cos \alpha) - \sin \alpha \right], \end{aligned} \quad (4.27)$$

que, em ordem dominante em $\mathbf{p}/M$, a amplitude de espalhamento fica

$$M_P^{s_1=1, s_2=1, s_3, s_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{ie^2 M}{\theta} \{ \cos \alpha - i \sin \alpha \} \left\{ (1 + s_3)(1 + s_4) \left[1 + \frac{i \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \right] \right\}, \quad (4.28)$$

²Onde temos que $\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{p}}' = \cos \alpha$ e $\hat{\mathbf{p}} \wedge \hat{\mathbf{p}}' = \sin \alpha$. De (4.4) obtemos também que $\epsilon_1(p) \cdot \epsilon_1(p') = \epsilon_{ij} \hat{p}_j \epsilon_i(p') = \epsilon_{ij} \hat{p}'_j \epsilon_i(p) = \cos \alpha$ e $\hat{\mathbf{p}} \cdot \epsilon_1(p') = -\hat{\mathbf{p}}' \cdot \epsilon_1(p) = -\sin \alpha$.

$$M_P^{s_1=-1, s_2=-1, s_3, s_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{ie^2 M}{\theta} (\cos \alpha + i \sin \alpha) \left\{ (1-s_3)(1-s_4) \left[-1 + \frac{i \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \right] \right\}, \quad (4.29)$$

$$M_P^{s_1=1, s_2=-1, s_3, s_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{ie^2 M}{\theta} \left\{ (1+s_3)(1-s_4) \left[\frac{i \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \right] \right\}, \quad (4.30)$$

$$M_P^{s_1=-1, s_2=1, s_3, s_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{ie^2 M}{\theta} \left\{ (1-s_3)(1+s_4) \left[\frac{i \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \right] \right\}. \quad (4.31)$$

As contribuições não nulas em (4.28)-(4.31) são aquelas onde há conservação de spin em cada vértice. Adicionando o gráfico de troca podemos escrever os resultados acima compactamente como

$$M_P(s, \alpha) = \frac{4ie^2 M}{\theta} e^{\frac{-i\alpha}{2}} [s + 2i \cotg(\alpha)], \quad (4.32)$$

sendo $s = s_1 + s_2$ a soma dos spins das partículas entrando.

Para $s = 0$, ou seja, quando o spin das partículas entrando forem anti-paralelos, o resultado é aquele obtido para a partícula escalar sem o termo de contato extra[29]. Igualmente, (4.32) é equivalente, a menos do fator constante fora do parêntese, ao caso espinorial descrito na referência [30].

4.2.2 Modelo de Maxwell-Chern-Simons

Vamos agora considerar o caso do méson vetorial topologicamente massivo, substituindo o termo de massa em (4.18) pela massa topológica,

$$M^2 \phi_\mu^* \phi^\mu \rightarrow \frac{m}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} \phi_\mu^* \partial_\nu \phi_\rho + \frac{m}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} \phi_\mu (\partial_\nu \phi_\rho)^*. \quad (4.33)$$

Observemos que o termo de massa topológica não está contribuindo no termo de interação, i.e., o acoplamento não é minimal. Nós veremos explicitamente mais adiante qual a implicação de termos o acoplamento minimal no caso do espalhamento. Deste modo o propagador de CS e os vértices de interação permanecem os mesmos do modelo de Proca. Para determinarmos o propagador do campo de matéria, precisamos introduzir um termo de fixação de gauge (por conveniência usaremos o gauge de Landau). Assim obtemos que o propagador do campo ϕ^μ é dado por

$$\Delta_{MCS}^{\alpha\beta} = \frac{-i}{p^2 - m^2} \left[g^{\alpha\beta} - \frac{p^\alpha p^\beta}{p^2} + im \varepsilon^{\alpha\beta\rho} \frac{p_\rho}{p^2} \right]. \quad (4.34)$$

Para vermos que agora temos apenas um modo se propagando, vamos, de maneira semelhante como foi feito na referência [54], obter os vetores de polarização. Para isso vamos usar a equação de movimento

$$\left[-\partial^2 g_{\beta\mu} - m\varepsilon_{\beta\alpha\mu}\partial^\alpha \right] \phi^\mu(x) = 0. \quad (4.35)$$

Escrevendo $\phi^\mu(x) = \epsilon^\mu(k) \exp(ikx)$ com $k_\mu \epsilon^\mu(k) = 0$, temos

$$\Sigma_{\beta\mu} \epsilon^\mu(k) = 0, \quad (4.36)$$

com $\Sigma_{\beta\mu} = [k^2 g_{\beta\mu} - im\varepsilon_{\beta\alpha\mu} k^\alpha]$. Para que a equação (4.36) tenha solução diferente da trivial temos que ter

$$\det \Sigma = (k^2)^2 [k^2 - m^2] = 0. \quad (4.37)$$

Para solução com $k^2 = 0$, temos de (4.36) que $\epsilon^\mu(k) = k^\mu \eta(k)$, onde $\eta(k)$ é uma função arbitrária de k . Assim a excitação sem massa é um puro artefato de gauge, visto que numa transformação de gauge, $\phi^\mu \rightarrow \phi^\mu + \partial^\mu \eta$.

A outra solução, $k^2 = m^2$, quando substituída em (4.36) para o sistema em repouso, leva a

$$\epsilon^\mu(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(0, 1, i \frac{m}{|m|} \right). \quad (4.38)$$

Fazendo uma transformação de Lorentz $\epsilon_\mu(k) = L_\mu^\nu \epsilon_\nu(0)$, com

$$L_\mu^\nu = \left(\frac{w_k/|m|}{k^{(i)}/|m|} \mid \frac{k^{(j)}/|m|}{\delta_i^j - k_{(i)} k^{(j)}/|m|(w_k + |m|)} \right)$$

nós obtemos

$$\epsilon_a(k) = (\epsilon_0(k), \epsilon_i(k)), \quad (4.39)$$

onde

$$\epsilon_0(k) = \frac{\mathbf{k} \cdot \epsilon(0)}{|m|} \quad \epsilon_i(k) = \epsilon_i(0) + \frac{\mathbf{k} \cdot \epsilon(0)}{m(w_p + m)}. \quad (4.40)$$

Os vetores de polarização acima descrevem um estado com spin $s = \frac{m}{|m|}$ [54].

Para compararmos com o resultado (4.32), vamos usar esses vetores de polarização e as regras de Feynman para obtermos amplitude de espalhamento partícula-partícula. No centro de massa e até ordem $\mathbf{p}/m$, teremos

$$M_{MCS}(s, \alpha) = \frac{4ie^2 m}{\theta} [s + 2i \cotg(\alpha)] , \quad (4.41)$$

onde novamente $s = s_1 + s_2$ é a soma dos spins das partículas entrando e α é o ângulo de espalhamento.

De (4.32) e (4.41) observamos que os resultados diferem por uma fase. No entanto as seções de choque são exatamente as mesmas. Esta fase aparece devido a forma dos vetores de polarização. No caso de Proca temos

$$\varepsilon_\mu^*(p', \lambda) \varepsilon^\mu(p, \lambda) = -\epsilon^{ia} + \mathcal{O}(\mathbf{p}^2/M^2) , \quad (4.42)$$

enquanto que para MCS temos

$$\epsilon_\mu^*(p') \epsilon^\mu(p) = -1 + \mathcal{O}(\mathbf{p}^2/m^2) . \quad (4.43)$$

Outro detalhe é que se tivéssemos feito um acoplamento mínimo do campo de AB com o méson topologicamente massivo, isto é, o termo de Chern-Simons do campo de matéria induzindo um termo extra na Lagrangeana de interação, teríamos um fator constante 1/4 multiplicando (4.41).

A parcela constante em (4.32) e (4.41) pode ser interpretada como decorrente de uma interação de contato tipo Pauli entre o momento magnético do méson vetorial e o campo de AB. No caso de spins anti-paralelos há um cancelamento deste termo.

4.3 Correção de 1-Loop

Se a análise for estendida até 1-loop, esperamos encontrar algumas diferenças entre as duas formulações. Isto pode ser visto diretamente do comportamento ultravioleta para o campo de matéria nos dois casos, equações (4.20) e (4.34). No caso do modelo de Proca o termo $p^\mu p^\nu / M^2$ induz um comportamento ruim no ultravioleta. No entanto, quando o momento da linha interna do propagador de matéria é contraído com o vértice, a ordem da divergência³ abaixa, levando a um comportamento equivalente para os dois termos do propagador de matéria. Esta característica será explicitada mais adiante no cálculo da auto-energia para o campo de matéria. Com isso o grau de divergência superficial efetivo pode ser escrito como

$$d(\gamma) = 3 - N_A - \frac{1}{2} N_\phi , \quad (4.44)$$

³veja a propriedade (4.24)

Figura 4.3: *Auto-Energia do Méson Vetorial.*

onde N_A e N_ϕ são os números de linhas externas do campo de Chern-Simons e do campo de matéria. Temos assim que a teoria é renormalizável. Por outro lado se incorporarmos à Lagrangeana inicial os contra-termos induzidos pelas correções radiativas a relação (4.44) não será mais válida. Isto se deve ao fato que as correções para as funções de quatro e seis pontos do campo ϕ induzirão vértices não renormalizáveis, e o termo $p^\mu p^\nu / M^2$ produzirá divergências nos gráficos contento estes novos tipos de vértices. Se usarmos a regularização dimensional, todos os contra-termos serão finitos⁴, e podemos tratar como uma teoria efetiva, pois os termos dos vértices induzidos são de ordem sub-dominantes na constante de acoplamento (e). Esse problema não aparece na formulação de massa topológica, descrita pela Lagrangeana (4.2). No entanto, devido a forma do propagador de matéria, os cálculos em 1-loop se tornam mais complicados do que no caso do modelo de Proca. Assim nas seções seguintes vamos nos restringir na análise do modelo de Proca minimamente acoplado com o campo de CS.

Da equação (4.44) vemos que os gráficos com $N_A = 0$ e $N_\phi = 6$ e com $N_A = 2$ e $N_\phi = 2$ apresentam divergências logarítmicas, mas como o espaço de fase é ímpar, o termo divergente é cancelado por simetria na integração. Em seguida analisaremos as correções radiativas vindas dos outros gráficos que apresentam divergências. Nestes gráficos usaremos a regularização dimensional para efetuarmos a integração nos momentos internos.

4.3.1 Auto-Energia

A auto-energia para o campo de matéria é dada em 1-loop pelos gráficos da figura (4.3). Os gráficos (4.3b) e (4.3c) são nulos. O gráfico (4.3a) é

$$\Sigma^{\alpha\beta}(p) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Gamma_1^{\nu\alpha\alpha'}(p, p+k) \Delta_{\alpha'\beta'}(p+k) \Gamma_1^{\mu\beta'\beta}(p+k, p) D_{\mu\nu}(k) \quad (4.45)$$

⁴A regularização dimensional consiste em irmos pra um espaço-tempo n -dimensional de modo que as integrações nos "loops" fiquem finitas. As integrais de Feynman são definidas como funções analíticas neste espaço e os infinitos aparecem na forma $1/\epsilon$, onde $\epsilon = D - n$, quando $n \rightarrow D$. No caso de $D = 3$ existe uma peculiaridade devido ao fato dos pólos gerados serem na forma de funções gamas, $\Gamma(A - n/2)$, e até 1-loop temos que A é sempre inteiro[55], levando a resultados finitos.

Aqui podemos ver explicitamente como o grau de divergência diminui. Realmente, no produto

$$\begin{aligned} & \Gamma_1^{\nu\alpha\alpha'}(p, p+k)\Delta_{\alpha'\beta'}(p+k)\Gamma_1^{\mu\beta'\beta}(p+k, p) \\ &= \frac{ie^3}{[(p+k)^2 - M^2]} \left[(2p+k)^\nu g^{\alpha\alpha'} - p^{\alpha'} g^{\nu\alpha} - (p+k)^\alpha g^{\nu\alpha'} \right] \\ & \left[g_{\alpha'\beta'} - \frac{(p+k)_{\alpha'}(p+k)_{\beta'}}{M^2} \right] \left[(2p+k)^\mu g^{\beta'\beta} - (p+k)^\beta g^{\mu\beta'} - p^{\beta'} g^{\mu\beta} \right] \quad (4.46) \end{aligned}$$

temos, devido a contração

$$\begin{aligned} (p+k)_{\alpha'} \left[(2p+k)^\nu g^{\alpha\alpha'} - p^{\alpha'} g^{\nu\alpha} - (p+k)^\alpha g^{\nu\alpha'} \right] &= [p^\nu k^\alpha - g^{\nu\alpha} p \cdot k] \\ (p+k)_{\beta'} \left[(2p+k)^\mu g^{\beta'\beta} - (p+k)^\beta g^{\mu\beta'} - p^{\beta'} g^{\mu\beta} \right] &= [p^\mu k^\beta - g^{\mu\beta} p \cdot k] \end{aligned}$$

que a potência em k no termos que vem da primeira contribuição do propagador ($g_{\alpha'\beta'}$) é a mesma do termo $(p+k)_{\alpha'}(p+k)_{\beta'}/M^2$. Assim o grau de divergência é quadrático, como definido na equação (4.44). Usando a regularização dimensional para a integração no momento interno, obtemos para a auto-energia do méson vetorial⁵

$$\Sigma^{\alpha\beta}(p) = \frac{e^2}{8\pi\theta} F(p) \varepsilon^{\alpha\beta\rho} p_\rho, \quad (4.47)$$

onde

$$F(p) = \frac{(3M^2 + p^2)}{2Mp^2} \left[(M^2 + p^2) - \frac{1}{2M\sqrt{p^2}} (M^2 - p^2)^2 \text{Log} \left(\frac{|M| + \sqrt{p^2}}{|M| - \sqrt{p^2}} \right) \right]. \quad (4.48)$$

Podemos ver que $\Sigma^{\alpha\beta}$ não é zero para $p^2 = M^2$, e que também não temos nenhum termo na Lagrangiana inicial que tenha a forma tensorial acima, de tal modo este termo possa ser absorvido por uma reparametrização⁶. Por outro lado, se introduzirmos um contra-termo com a forma tensorial dada pela equação (4.47), de tal forma que propagador continue tendo pólo em $p^2 = M^2$, obtemos

$$\begin{aligned} \Sigma_R^{\alpha\beta}(p) &= \Sigma^{\alpha\beta}(p) - \delta M \varepsilon^{\alpha\beta\rho} p_\rho \\ &= \frac{e^2}{8\pi\theta} F_R(p) \varepsilon^{\alpha\beta\rho} p_\rho. \end{aligned} \quad (4.49)$$

⁵Veja apêndice E.

⁶Vemos que $\Sigma(p)$ é divergente, no entanto com o uso da regularização dimensional essa divergência ficou obscurecida. Isso nos leva que por um processo de renormalização somos obrigados a incluir um termo de CS na Lagrangiana original, levando a presença de uma massa topológica.

Com a imposição $\Sigma_R^{\alpha\beta}(p) |_{p^2=M^2} = 0$, temos

$$\delta M = \frac{e^2 M}{2\pi\theta} \quad (4.50)$$

e

$$F_R(p) = \frac{(M^2 - p^2)}{p^2} \left[\frac{(3M^2 - p^2)}{2M} + \frac{(M^2 - p^2)(3M^2 + p^2)}{4M^2\sqrt{p^2}} \text{Log} \left(\frac{|M| - \sqrt{p^2}}{|M| + \sqrt{p^2}} \right) \right]. \quad (4.51)$$

O propagador renormalizado é dado por

$$\begin{aligned} \Delta_R^{\alpha\beta} &= \Delta^{\alpha\beta} + \Delta^{\alpha\sigma} \Sigma_{\sigma\rho} \Delta^{\rho\beta} + \Delta^{\alpha\sigma} \Sigma_{\sigma\rho} \Delta^{\rho\lambda} \Sigma_{\lambda\delta} \Delta^{\delta\beta} + \dots \\ &= \Delta^{\alpha\sigma} \left[g_\sigma^\beta - \Sigma_{\sigma\rho} \Delta^{\rho\beta} \right]^{(-1)}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Usando as equações para Σ e para Δ , obtemos

$$\Delta_R^{\alpha\beta} = \frac{-i}{p^2 - M^2 - \Sigma'(p^2)} \left[g^{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{\Sigma'(p^2)}{p^2} \right) \frac{p^\alpha p^\beta}{M^2} - i\Theta(p) \varepsilon^{\alpha\theta\rho} p_\rho \right]. \quad (4.53)$$

Na equação acima temos que

$$\Sigma'(p^2) = \frac{e^2}{8\pi\theta} \frac{p^2 F_R^2(p)}{(p^2 - M^2)} \quad \Theta(p) = \frac{e^2}{8\pi\theta} \frac{F_R(p)}{(p^2 - M^2)}, \quad (4.54)$$

satisfazendo

$$\Sigma'(p^2) |_{p^2=M^2} = 0; \quad F_R(p) |_{p^2=M^2} = 0; \quad \Theta(p) |_{p^2=M^2} = \frac{e^2}{8\pi\theta M}. \quad (4.55)$$

Observando o propagador renormalizado, equação (4.53), verificamos, devido a forma do último termo, que temos a indução de um termo de Chern-Simons para o campo de matéria.

4.3.2 Tensor de Polarização

No caso da polarização do vácuo temos a contribuição dos gráficos da figura (4.4). Analiticamente temos

$$\Pi^{\mu\nu} = \Pi_A^{\mu\nu} + \Pi_B^{\mu\nu}, \quad (4.56)$$

com

$$\begin{aligned} \Pi_A^{\mu\nu} &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \Gamma_1^{\mu\beta\alpha}(p+k, k) \Delta_{\alpha\alpha'}(k) \Gamma_1^{\nu\alpha'\beta'}(k, p+k) \Delta_{\beta\beta'}(p+k) \\ \Pi_B^{\mu\nu} &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \Gamma_2^{\mu\nu\alpha\beta} \Delta_{\alpha\beta}(k). \end{aligned} \quad (4.57)$$

Fig. 4.a

Fig. 4.b

Figura 4.4: Polarização do Vácuo.

Novamente, usando a regularização dimensional, obtemos⁷

$$\Pi^{\mu\nu} = \frac{ie^2}{8\pi} \Pi(p^2) \left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right), \quad (4.58)$$

com $\Pi(p^2)$ dado por

$$\Pi(p^2) = \frac{(p^2 - 4M^2)}{4M^2} \left[4 |M| - (p^2 + 4M^2) I_0 \right], \quad (4.59)$$

onde

$$I_0 = \int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{M^2 - p^2 x(1-x)}} = \frac{1}{\sqrt{p^2}} \text{Ln} \left[\frac{2\sqrt{M^2 p^2} + p^2}{2\sqrt{M^2 p^2} - p^2} \right]. \quad (4.60)$$

Para $p^2 \ll M^2$, temos que $\Pi(p^2) \approx 4p^2/3M$. Ou seja, temos a indução de um termo de Maxwell para o campo de AB, como acontece nos casos de spin zero e 1/2.

4.3.3 Correção de Vértice e Momento Magnético

A correção de 1-loop para o vértice trilinear, é dada pelos três primeiros gráficos da figura (4.5). Os dois últimos gráficos serão posteriormente usados no cálculo do momento magnético e da função de quatro pontos. Analiticamente o gráfico (4.5a) tem a forma

$$\begin{aligned} \Gamma_a^{\mu\alpha\beta}(p, p') &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\Gamma_1^{\rho\alpha\alpha'}(p, p+k) \Delta_{\alpha'\rho'}(p+k) \right. \\ &\quad \left. \Gamma_1^{\mu\rho'\sigma'}(p+k, p'+k) \Delta_{\sigma'\beta'}(p'+k) \Gamma_1^{\sigma\beta'3}(p'+k, p') D_{\sigma\rho}(k) \right]. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Usando as regras de Feynman temos

$$\Gamma_a^{\mu\alpha\beta}(p, p') = \frac{ie^3}{(2\pi)^3 \theta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{N_0^{\mu\alpha\beta}}{[(p+k)^2 - M^2][(p'+k)^2 - M^2][k^2 - \mu^2]}, \quad (4.62)$$

⁷veja apêndice E.

Figura 4.5: Correção de Vértice.

onde μ^2 é um corte infravermelho que é tomado indo a zero no final dos cálculos, e

$$\begin{aligned}
 N_0^{\mu\alpha\beta} = & [(2p+k)^\rho g^{\alpha\alpha'} - p^{\alpha'} g^{\rho\alpha} - (p+k)^\alpha g^{\rho\alpha'}][g_{\alpha'\rho'} - k_{\alpha'} k_{\rho'}/M^2] \\
 & [(p+p'+2k)^\mu g^{\rho'\rho'} - (p+k)^{\rho'} g^{\rho'\mu} - (p'+k)^{\rho'} g^{\rho'\mu}][g_{\rho'\sigma'} - k_{\rho'} k_{\sigma'}/M^2] \\
 & [(2p'+k)^\sigma g^{\beta'\beta} - (p'+k)^\beta g^{\beta'\sigma} - (p')^{\beta'} g^{\sigma\beta}]\varepsilon_{\sigma\rho\lambda} k^\lambda.
 \end{aligned} \quad (4.63)$$

Com o auxílio da parametrização

$$\frac{1}{abc} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{2y}{[(b-c)xy + (c-a)y + a]^3} \quad (4.64)$$

podemos escrever (4.62) como

$$\Gamma_a^{\mu\alpha\beta}(p, p') = \frac{ie^3}{(2\pi)^3\theta} \int_0^1 dx \int_0^1 dy 2y \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{N_0^{\mu\alpha\beta}}{[(k+ly)^2 - C^2]^3}, \quad (4.65)$$

onde $l = p(1-x) + p'x$ e $C^2 = M^2y + \mu^2(1-y) - (p-p')^2x(1-x)y^2$. Fazendo a translação⁸ $k \rightarrow k - ly$ nós podemos reescrever (4.65) como

$$\Gamma_a^{\mu\alpha\beta}(p, p') = \frac{ie^3}{(2\pi)^3\theta} \int_0^1 dx \int_0^1 dy 2y \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{N_1^{\mu\alpha\beta}}{[k^2 - C^2]^3}, \quad (4.66)$$

com $N_1^{\mu\alpha\beta} = N_0^{\mu\alpha\beta}|_{k \rightarrow k - ly}$. Como o denominador é par em k podemos eliminar os termos ímpares em k no numerador. A integração em k é feita usando-se regularização dimensional[55]. As integrações paramétricas restantes são extremamente complicadas,

⁸Devido ao grande número de termos que aparecem nesta parte do cálculo, nós usamos um programa de cálculo algébrico (Mathematica). Os cálculos das funções de quatro pontos também são efetuadas com a ajuda do Mathematica, de modo contrário seriam inviáveis.

assim, para efetuá-las iremos para a concha de massa ($p^2 = p'^2 = M^2$) e faremos uma expansão para $Q = p - p'$ pequeno, mantendo termos até ordem Q . Nesta aproximação C^2 é independente de x , então a integração nesta variável fica fácil de ser executada. Posteriormente podemos efetuar a integração em y . Neste ponto vemos que aparecem termos divergentes com $\mu \rightarrow 0$, porém esses termos são proporcionais a p^α e p'^β e se anulam quando contraídos com as polarizações externas. Assim a menos destes termos obtemos até ordem $1/M$,

$$\begin{aligned} \Gamma_a^{\mu\alpha\beta}(p, p') = & \frac{-e^3 M}{8\pi\theta} \left[\frac{5}{4M^2} g^{\beta\mu} \varepsilon^{\alpha\sigma\rho} p_\sigma p'_\rho + \frac{5}{4M^2} g^{\alpha\mu} \varepsilon^{\beta\sigma\rho} p_\sigma p'_\rho - \frac{14}{4M^2} g^{\alpha\beta} \varepsilon^{\mu\sigma\rho} p_\sigma p'_\rho \right. \\ & + p^\beta \left(-\frac{17}{24M^2} \varepsilon^{\alpha\mu\rho} p_\rho - \frac{15}{8M^2} \varepsilon^{\alpha\mu\rho} p'_\rho \right) + p'^\alpha \left(\frac{15}{8M^2} \varepsilon^{\beta\mu\rho} p_\rho + \frac{17}{24M^2} \varepsilon^{\beta\mu\rho} p'_\rho \right) \\ & \left. + p^\mu \left(\frac{2}{3M^2} \varepsilon^{\alpha\beta\rho} p_\rho + \frac{1}{M^2} \varepsilon^{\alpha\beta\rho} p'_\rho \right) + p'^\mu \left(\frac{1}{M^2} \varepsilon^{\alpha\beta\rho} p_\rho + \frac{2}{3M^2} \varepsilon^{\alpha\beta\rho} p'_\rho \right) \right] . \quad (4.67) \end{aligned}$$

Os outros quatro gráficos da figura (4.5) são dados por

$$\Gamma_b^{\mu\alpha\beta}(p, p') = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[\Gamma_1^{\rho\alpha\alpha'}(p, p+k) \Delta_{\alpha'\beta'}(p+k) \Gamma_2^{\mu\sigma\theta\beta} D_{\sigma\rho}(k) \right] , \quad (4.68)$$

$$\Gamma_c^{\mu\alpha\beta}(p, p') = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[\Gamma_2^{\mu\rho\alpha\alpha'} \Delta_{\alpha'\beta'}(p'+k) \Gamma_1^{\sigma\beta'\beta}(p'+k, p') D_{\sigma\rho}(k) \right] , \quad (4.69)$$

$$\Gamma_d^{\mu\alpha\beta}(p, p') = \left[\Sigma_R^{\alpha\alpha'}(p) \Delta_{\alpha'\beta'}(p) \Gamma_1^{\mu\beta'\beta}(p, p') \right] , \quad (4.70)$$

$$\Gamma_e^{\mu\alpha\beta}(p, p') = \left[\Gamma_1^{\mu\alpha\alpha'}(p, p') \Delta_{\alpha'\beta'}(p') \Sigma_R^{\beta'\beta}(p') \right] . \quad (4.71)$$

Os gráficos (4.5b) e (4.5c) são feitos de mesmo modo que o gráfico (4.5a), porém os cálculos ficam mais simples pois é necessário apenas um parâmetro de Feynman. Os gráficos (4.5d) e (4.5e) são feitos com a ajuda da equação (4.49). Na concha de massa e mantendo termos até ordem $1/M$, a menos de termos proporcionais a p^α e p'^β que se anulam quando contraídos pelas polarizações, temos que

$$\Gamma_b^{\mu\alpha\beta}(p, p') = \frac{-e^3 M}{8\pi\theta} \left[-2\varepsilon^{\alpha\beta\mu} + \frac{4}{3M^2} p^\beta \varepsilon^{\alpha\mu\rho} p_\rho - \frac{2}{3M^2} p^\mu \varepsilon^{\alpha\beta\rho} p_\rho \right] , \quad (4.72)$$

$$\Gamma_c^{\mu\alpha\beta}(p, p') = \frac{-e^3 M}{8\pi\theta} \left[-2\varepsilon^{\alpha\beta\mu} - \frac{4}{3M^2} p'^\alpha \varepsilon^{\beta\mu\rho} p'_\rho - \frac{2}{3M^2} p'^\mu \varepsilon^{\alpha\beta\rho} p'_\rho \right] , \quad (4.73)$$

$$\Gamma_a^{\mu\alpha\beta}(p, p') = \frac{-e^3 M}{8\pi\theta} \left[-\frac{1}{M^2} p^\beta \varepsilon^{\alpha\mu\rho} p_\rho + \frac{1}{M^2} g^{\mu\beta} \varepsilon^{\alpha\sigma\rho} p_\sigma p'_\rho + \frac{(p+p')^\mu}{M^2} \varepsilon^{\alpha\beta\rho} p_\rho \right], \quad (4.74)$$

$$\Gamma_e^{\mu\alpha\beta}(p, p') = \frac{-e^3 M}{8\pi\theta} \left[\frac{1}{M^2} p'^\alpha \varepsilon^{\beta\mu\rho} p'_\rho + \frac{1}{M^2} g^{\mu\alpha} \varepsilon^{\beta\sigma\rho} p_\sigma p'_\rho + \frac{(p+p')^\mu}{M^2} \varepsilon^{\alpha\beta\rho} p'_\rho \right]. \quad (4.75)$$

A correção do vértice quadrilinear não contribuirá para a amplitude de espalhamento em 1-loop e nem para o momento magnético. Além disso, como visto pela equação (4.44), as divergências destes gráficos são logarítmicas. Porém o espaço de fase é ímpar, então essas divergências se cancelam pela simetria da integração, tornando esses gráficos finitos. É fácil de verificar de (4.47), (4.67), (4.72) e (4.73) que a identidade de Ward é satisfeita, ou seja,

$$e \frac{d\Sigma^{\alpha\beta}(p-q)}{d(q-p)^\mu} \Big|_{q=0, p^2=M^2} = \Gamma_a^{\mu\alpha\beta}(p, p) + \Gamma_b^{\mu\alpha\beta}(p, p) + \Gamma_c^{\mu\alpha\beta}(p, p). \quad (4.76)$$

Podemos também calcular a correção para o momento magnético do méson vetorial. Isso é feito acoplado um campo externo ao campo de matéria. Porém para esse cálculo é conveniente irmos para o referencial de Breit[53, 59, 60]. Neste referencial o momento da partícula final é na mesma direção da partícula inicial, porém no sentido contrário ($\mathbf{p} = -\mathbf{p}'$). O momento magnético para spin $s = \pm 1$ está relacionado com a função de vértice por[60]

$$\mu^i = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{|q|} \frac{1}{2w_p} \Gamma^i(\mathbf{p}, -\mathbf{p}), \quad (4.77)$$

onde

$$\Gamma^i(\mathbf{p}, -\mathbf{p}) = \varepsilon_\beta^*(-\mathbf{p}, s) \Gamma_1^{\mu\alpha\beta}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}) \varepsilon_\alpha(\mathbf{p}, s), \quad (4.78)$$

e $q = p - p' = 2\mathbf{p}$ é o momento transferido. A prescrição do limite $q \rightarrow 0$ serve para reter somente o termo proporcional a q . A nível de árvore e em ordem dominante em $\mathbf{p}/M$, obtemos de (4.22), (4.78) e usando (4.27) que

$$\Gamma^i(\mathbf{p}, -\mathbf{p}) = se \varepsilon^{ij} q_j, \quad (4.79)$$

isto é, o momento magnético para spin $s = \pm 1$ é

$$\mu = \frac{e}{2M}gs = \pm \frac{e}{2M} , \quad (4.80)$$

levando a um fator giromagnético $g = 1$. Para obtermos um fator $g = 2$ teríamos que adicionar em (4.18) o termo de momento magnético[56]

$$\mathcal{L}_{mag} = -ie\gamma(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\phi^{*\mu}\phi^\nu . \quad (4.81)$$

Teríamos assim um momento magnético $\mu = \frac{e}{2M}g$ com $g = (1 + \gamma)$. Para $\gamma = 1$ implicaria em $g = 2^9$. Porém com a adição deste termo, a equação (4.44) não é mais válida. Assim o comportamento ruim do propagador no ultravioleta leva a termos com altas divergência que aumentam com o número de loops, deixando a teoria não renormalizável[57]. Para o caso de $g = 2$ talvez seja conveniente tratar o problema com uma teoria não-Abeliana[21]. Porém isso implicaria em uma análise detalhada de todas as consequência resultantes da teoria não-Abeliana. Devido a estas considerações, nós continuaremos nossa análise sem incluímos o termo (4.81) na lagrangiana original.

A correção para o momento magnético a 1-loop é dada pelos gráficos da figura (4.5). Usando as equações (4.67) e (4.72) - (4.75) temos

$$\begin{aligned} \Gamma_{1L}^i(\mathbf{p}, -\mathbf{p}) &= \varepsilon_\beta^*(-\mathbf{p}, s) \left[\Gamma_{1L}^{i\alpha\beta}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}) \right] \varepsilon_\alpha(\mathbf{p}, s) \\ \Gamma_{1L}^i(\mathbf{p}, -\mathbf{p}) &= \frac{e^3}{8\pi\theta} \varepsilon^{ij} q_j . \end{aligned} \quad (4.82)$$

Isso nos dá para o momento magnético até 1-loop

$$\mu = \pm \frac{e}{2M} \left[1 \pm \frac{e^2}{8\pi\theta} \right] . \quad (4.83)$$

Observe que a correção é a mesma independentemente do spin. Portanto, como no caso de spin 1/2 [23], ela gera um acréscimo no momento magnético positivo e um decréscimo no momento magnético negativo.

4.3.4 Espalhamento

Para a correção da amplitude de espalhamento em 1-loop é necessário o cálculo dos gráficos da figura (4.6). Os gráficos de (4.6.1) a (4.6.6) apesar de muito trabalhosos são possíveis de serem calculados. Porém os gráficos (4.6.7) e (4.6.8) mesmo na concha de

⁹Evidências experimentais e cálculos a nível de árvore de um partícula interagindo com um campo externo em (3+1)D prevém $g \approx 2$ [58]

massa e na aproximação $\mathbf{p}/M$ se tornam inviáveis. Isto se deve ao fato que as integrações paramétricas resultantes, quando aplicada a parametrização de Feynman, se tornam muito complicadas¹⁰.

A contribuição dominante que vem da correção de vértice estão representadas nos gráficos (4.6.1) e (4.6.2). Usando as equações (4.67), e (4.72) a (4.75) obtemos para o gráfico (4.6.1)

$$\mathcal{M}_1^{s_1=1, s_2=1, s_3, s_4} = \frac{ie^4 M}{8\pi\theta^2} (\cos \alpha - i \sin \alpha) \left\{ \frac{1+s_4}{1-\cos \alpha} [-2 + (1-s_3) \cos \alpha + (1+s_3) \cos^2 \alpha - i(1+s_3) \sin \alpha \cos \alpha] \right\} \quad (4.84)$$

$$\mathcal{M}_1^{s_1=-1, s_2=-1, s_3, s_4} = \frac{ie^4 M}{8\pi\theta^2} (\cos \alpha + i \sin \alpha) \left\{ \frac{-1+s_4}{1-\cos \alpha} [2 - (1+s_3) \cos \alpha - (1-s_3) \cos^2 \alpha - i(1-s_3) \sin \alpha \cos \alpha] \right\} \quad (4.85)$$

$$\mathcal{M}_1^{s_1=1, s_2=-1, s_3, s_4} = \frac{ie^4 M}{8\pi\theta^2} \left\{ \frac{-1+s_4}{1-\cos \alpha} [(1+s_3) - 2s_3 \cos \alpha - (1-s_3) \cos^2 \alpha + 2i \sin \alpha - i(1-s_3) \sin \alpha \cos \alpha] \right\} \quad (4.86)$$

$$\mathcal{M}_1^{s_1=-1, s_2=1, s_3, s_4} = \frac{ie^4 M}{8\pi\theta^2} \left\{ \frac{1+s_4}{1-\cos \alpha} [(-1+s_3) - 2s_3 \cos \alpha + (1+s_3) \cos^2 \alpha + 2i \sin \alpha - i(1+s_3) \sin \alpha \cos \alpha] \right\} . \quad (4.87)$$

O gráfico (4.6.2) nos leva a

$$\mathcal{M}_2^{s_1=1, s_2=1, s_3, s_4} = \frac{ie^4 M}{8\pi\theta^2} (\cos \alpha - i \sin \alpha) \left\{ \frac{1+s_3}{1-\cos \alpha} [-2 + (1-s_4) \cos \alpha + (1+s_4) \cos^2 \alpha - i(1+s_4) \sin \alpha \cos \alpha] \right\} \quad (4.88)$$

$$\mathcal{M}_2^{s_1=-1, s_2=-1, s_3, s_4} = \frac{ie^4 M}{8\pi\theta^2} (\cos \alpha + i \sin \alpha) \left\{ \frac{-1+s_3}{1-\cos \alpha} [2 - (1+s_4) \cos \alpha - (1-s_4) \cos^2 \alpha - i(1-s_4) \sin \alpha \cos \alpha] \right\} \quad (4.89)$$

¹⁰No apêndice E nós explicitaremos o cálculo de alguns gráficos

$$\mathcal{M}_2^{s_1=1, s_2=-1, s_3, s_4} = \frac{ie^4 M}{8\pi\theta^2} \left\{ \frac{1+s_3}{1-\cos\alpha} [(-1+s_4) - 2s_4 \cos\alpha] \right. \\ \left. + (1+s_4) \cos^2\alpha + 2i \sin\alpha - i(1+s_4) \sin\alpha \cos\alpha \right\} \quad (4.90)$$

$$\mathcal{M}_2^{s_1=-1, s_2=1, s_3, s_4} = \frac{ie^4 M}{8\pi\theta^2} \left\{ \frac{-1+s_3}{1-\cos\alpha} [(1+s_4) - 2s_4 \cos\alpha] \right. \\ \left. - (1-s_4) \cos^2\alpha + 2i \sin\alpha - i(1-s_4) \sin\alpha \cos\alpha \right\} \quad (4.91)$$

A contribuição dominante que vem da polarização do vácuo está representada no gráfico (4.6.3). Usando a equação (4.58) temos

$$\mathcal{M}_3^{s_1, s_2, s_3, s_4} = \frac{ie^4 M}{8\pi\theta^2} \left\{ \frac{16}{3} [(1+s_1 s_3) \cos\alpha - i(s_1 + s_3) \sin\alpha] \right. \\ \left. [(1+s_2 s_4) \cos\alpha - i(s_2 + s_4) \sin\alpha] \right\}. \quad (4.92)$$

O gráfico (4.6.4) é dado por

$$\mathcal{M}_4^{s_1, s_2, s_3, s_4} = \frac{-ie^4 M}{8\pi\theta^2} \left\{ \mathcal{O}\left(\frac{\mathbf{p}}{M}\right) \right\} \quad (4.93)$$

O gráfico (4.6.5) dá a mesma contribuição que o gráfico (4.6.6). Na ordem dominante,

$$\mathcal{M}_5^{s_1=1, s_2=1, s_3, s_4} = \frac{-ie^4 M}{8\pi\theta^2} (\cos\alpha - i \sin\alpha) \left\{ \frac{(1+s_3)(1+s_4)}{64} \right. \\ \left. [-28 + 55 \ln(3)] (\cos\alpha - i \sin\alpha) \right\} \quad (4.94)$$

$$\mathcal{M}_5^{s_1=-1, s_2=-1, s_3, s_4} = \frac{-ie^4 M}{8\pi\theta^2} (\cos\alpha + i \sin\alpha) \left\{ \frac{(1-s_3)(1-s_4)}{64} \right. \\ \left. [-28 + 55 \ln(3)] (\cos\alpha + i \sin\alpha) \right\} \quad (4.95)$$

$$\mathcal{M}_5^{s_1=1, s_2=-1, s_3, s_4} = \frac{-ie^4 M}{8\pi\theta^2} \left\{ (-1+s_3 s_4) [-36 + 73 \ln(3)] \right. \\ \left. + (s_3 - s_4) [-20 + 37 \ln(3)] \right\} \quad (4.96)$$

$$\mathcal{M}_5^{s_1=-1, s_2=1, s_3, s_4} = \frac{-ie^4 M}{8\pi\theta^2} \left\{ (1 - s_3 s_4)[-36 + 73 \ln(3)] - (s_3 - s_4)[-20 + 37 \ln(3)] \right\} \quad (4.97)$$

Para os gráficos (4.6.7) e (4.6.8), apesar de não chegarmos a um resultado final, podemos verificar que o termo de mais alta potência na variável de integração é dado por

$$\mathcal{M}_7^{s_1, s_2, s_3, s_4} = [\epsilon_\alpha(p_1, s_1) \epsilon_\beta^*(p_3, s_3)] [\epsilon_\sigma(p_2, s_2) \epsilon_\rho^*(p_4, s_4)] T_7^{\alpha\beta\sigma\rho}(p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 = 0, p_4 = 0) \quad (4.98)$$

onde

$$T_7^{\alpha\beta\sigma\rho}(p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 = 0, p_4 = 0) = \frac{e^4}{\theta^2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{[2k^\alpha k^\beta k^\sigma k^\rho]}{k^2 [k^2 - M^2]^2} \quad (4.99)$$

Igualmente para o gráfico (4.15.8)

$$\mathcal{M}_8^{s_1, s_2, s_3, s_4} = [\epsilon_\alpha(p_1, s_1) \epsilon_\beta^*(p_3, s_3)] [\epsilon_\sigma(p_2, s_2) \epsilon_\rho^*(p_4, s_4)] T_8^{\alpha\beta\sigma\rho}(p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 = 0, p_4 = 0) \quad (4.100)$$

onde

$$T_8^{\alpha\beta\sigma\rho}(p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 = 0, p_4 = 0) = \frac{e^4}{\theta^2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{[2k^\alpha k^\beta k^\sigma k^\rho]}{k^2 [k^2 - M^2]^2} \quad (4.101)$$

Vemos assim que a divergência destes dois gráficos é linear, do mesmo modo dos gráficos anteriores, que devido a regularização dimensional tornam-se finitos.

4.4 Análise

Nós observamos que os modelos de Proca e *MCS* quando acoplados com *CS*, levam a resultados levemente diferentes para amplitude de espalhamento a nível de árvore. Se a análise for estendida a 1-loop, começam a aparecer problemas devido ao comportamento ultravioleta, que difere nos dois casos. Especificamente, no espalhamento em 1-loop, os cálculos começam a ser impraticáveis, principalmente no modelo de *MCS*. Neste caso o número de parâmetros de Feynman torna as integrações paramétricas muito difíceis de serem efetuadas. Para o modelo de Proca, o cálculo em 1-loop, relativo as parametrizações, fica um pouco mais fácil. Porém, devido a forma das regras de Feynman, os integrandos

Figura 4.6: *Espalhamento 1-loop.*

ficam extensos, fazendo com que o desenvolvimento da álgebra, só se torne possível com a ajuda de um programa de cálculo algébrico. Mesmo não tendo calculado explicitamente todas as contribuições para a amplitude de espalhamento em 1-loop, conseguimos fazer uma análise dos gráficos que apresentam divergências. Obtemos assim, além da correção para a auto-energia e polarização do vácuo, a correção para o momento magnético. Como no caso de spin 1/2, esta correção é a mesma independentemente do sinal do spin. Para função de quatro pontos do campo de matéria, calculamos explicitamente os gráficos que poderiam apresentar divergências. Para os gráficos box e cross-box (figura (4.6.7-8)) o cálculo completo não pode ser concluído pela forma da integrais paramétricas finais e devido a extensão do integrando.

Conclusão

Nesta tese abordamos algumas teorias contendo o termo de Chern-Simons e outros campos para vários valores de spin. Procuramos identificar relações entre modelos e também fizemos uma análise do limite não relativístico nos processos de espalhamento de duas partículas.

No primeiro capítulo estudamos o problema da equivalência de modelos de gauge quando acoplados a outro campo dinâmico, neste caso o campo de Dirac. Como vimos, para que a equivalência entre os modelos Self-Dual e Maxwell-Chern-Simons permaneça válida quando interagindo com férmions, é necessário termos acoplamentos específicos e diferentes em cada modelo.

Nos capítulos 2 e 3 verificamos explicitamente qual a influência de adicionarmos um índice de simetria interna para o campo de matéria acoplado com Chern-Simons, isto é, nós estudamos o efeito Aharonov-Bohm não-Abeliano para partículas de spin 0 e 1/2. O cálculo foi feito no gauge de Coulomb e usando o procedimento de corte intermediário, com o objetivo de facilitar a comparação com o resultado da teoria não relativística e também com o caso Abeliano.

No caso de spin 0, verificamos que o setor de alta energia funciona como contra-termo natural para o setor de baixa energia, deixando a teoria finita. No caso da teoria não relativística escalar é necessário a introdução de um corte, que só é eliminado para um valor crítico da constante de acoplamento do termo de auto-interação. Temos também que a teoria relativística, além de reproduzir o resultado não relativístico em ordem dominante, dá em ordem sub-dominante contribuições extras que vem das correções radiativas. Estas contribuições extras poderiam em princípio ser observadas por experimentos mais refinados. Esses termos também poderiam ser adicionados na Lagrangeana da teoria não relativísticas no mesmo espírito de teorias efetivas.

No caso de spin 1/2, nós nos detemos na análise da contribuição dominante. No caso da teoria não relativística vemos que os termos dependentes do corte Λ_{NR} se cancelam. Isto devido ao fato que para os férmions temos o termo de interação de Pauli que faz o mesmo papel do termo de interação de contato da teoria escalar. No caso relativístico, nós também obtemos as correções radiativas para a auto-energia, tensor de polarização e para o vértice trilinear. No cálculo do vértice obtemos a correção para momento magnético do férmion. Vimos que ele difere do caso Abeliano, devido ao fator de grupo, no entanto

no limite Abelian ($g = e\sqrt{2}$ e $T = i/\sqrt{2}$) recuperamos o resultado da referência [23]. No caso do espalhamento, o resultado relativístico nos dá contribuições extras que não aparecem no caso não relativístico.

Além disso, observamos que aparecem gráficos extras na teoria não-Abeliana, tanto escalar quanto espinorial, cujo papel básico é cancelar as contribuições adicionais, que vem devido aos campos fantasmas e também se somarem as contribuições que surgem devido a estrutura de grupo nos gráficos que igualmente estão presentes na teoria Abeliana.

No último capítulo nós exploramos o fato de que em três dimensões o campo de gauge massivo e carregado de spin 1, pode ser descrito por várias formulações, que no caso livre estão aparentemente relacionadas. Quando esses modelos são acoplados com um potencial tipo Aharonov-Bohm verificamos que, mesmo na aproximação de árvore, eles apresentam algumas diferenças, como visto pelos resultados das equações (4.32) e (4.41). Vimos também, que na amplitude de espalhamento a nível de árvore, temos um termo que pode ser interpretado como uma interação magnética, de tal forma que quando espalhamos partículas de spins anti-paralelos este termo se cancela, produzindo o mesmo resultado que o espalhamento de partículas sem spin. Nesse capítulo também implementamos a análise dos gráficos potencialmente divergentes, até 1-loop, para o modelo de Proca minimamente acoplado com Chern-Simons, onde obtivemos além da auto-energia e polarização do vácuo a correção ao momento magnético.

Apêndice A

Tensor de Polarização para MCS com Acoplamento Magnético

Para o cálculo do tensor de polarização na expansão $1/N$, para o modelo de MCS com acoplamento magnético, nós redefinimos a constante de acoplamento $e \rightarrow \alpha/\sqrt{N}$, tal que a o termo de interação fica,

$$\mathcal{L}_I = \frac{\alpha}{m\sqrt{N}} \varepsilon_{\mu\alpha\beta} \partial^\alpha A^\beta \bar{\psi}_a \gamma^\mu \psi_a. \quad (\text{A.1})$$

Assim o tensor de polarização é dado por

$$\Pi_{MCS}^{\mu\nu} = -tr \int \frac{d^3q}{(2\pi^3)} \left[\left(\frac{-i\alpha}{m\sqrt{N}} \right)^2 \gamma_\beta \varepsilon^{\beta\alpha\mu} (ik_\alpha) S(k+q) \gamma_\sigma \varepsilon^{\sigma\rho\nu} (-ik_\rho) S(q) \right]. \quad (\text{A.2})$$

Como vemos aqui, a contribuição que vem devido aos vértices, não depende do momento de integração, o que leva ao grau de divergência da integral acima a $d(\gamma) = 1$ como dado pela equação (1.45). Usando a forma dos propagadores e após efetuarmos o traço podemos escrever

$$\begin{aligned} \Pi_{MCS}^{\mu\nu} = N \left(\frac{-i\alpha}{m\sqrt{N}} \right)^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi^3)} \left\{ \frac{\varepsilon^{\beta\alpha\mu} \varepsilon^{\sigma\rho\nu}}{[(k+q)^2 - M^2][q^2 - M^2]} \right. \\ \left. \left[2k_\alpha k_\rho q_\beta q_\sigma - k_\alpha k_\rho (k \cdot q + q^2) g_{\beta\sigma} - iM \varepsilon_{\beta\sigma\lambda} k_\alpha k_\rho k^\lambda + M^2 k_\alpha k_\rho g_{\beta\sigma} \right] \right\}. \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

O fator N multiplicando vem da efetuação do traço. Usando agora o truque de Feynman

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[(A-B)x + B]^2} \quad (\text{A.4})$$

obtemos, após usar a regularização dimensional para a integração no momento interno,

$$\Pi_{MCS}^{\mu\nu} = \frac{-i\alpha^2}{4\pi} \int_0^1 dx \frac{k^2}{m^2} \left[\frac{P^{\mu\nu} 2k^2 x(1-x) - iM \varepsilon^{\mu\nu\rho} k_\rho}{[M^2 - k^2 x(1-x)]^{1/2}} \right] , \quad (\text{A.5})$$

onde $P^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu / k^2$. Podemos ainda escrever $\Pi^{\mu\nu}$ de uma forma mais simples,

$$\Pi_{MCS}^{\mu\nu} = -i\alpha^2 \frac{k^2}{m^2} \left[\Pi_e(k^2) P^{\mu\nu} - iM \Pi_0 \varepsilon^{\mu\nu\rho} k_\rho \right] , \quad (\text{A.6})$$

com

$$\Pi_e = \frac{1}{4\pi} \int_0^1 dx \frac{2k^2 x(1-x)}{[M^2 - k^2 x(1-x)]^{1/2}} , \quad (\text{A.7})$$

$$\Pi_0 = \frac{1}{4\pi} \int_0^1 dx \frac{1}{[M^2 - k^2 x(1-x)]^{1/2}} . \quad (\text{A.8})$$

Apêndice B

Integrais

Neste apêndice vamos escrever algumas relações e integrais usadas no cálculo dos gráficos do capítulo 3 e 4. Nos gráficos de 1-Loop, após a integração em k^0 , ficamos com integrais do tipo

$$\int_0^\infty d(k)^2 \int_0^{2\pi} d\alpha f(p, p', k, m) \quad (B.1)$$

De acordo com a figura (B.1) temos que

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' = |\mathbf{p}|^2 \cos \theta \quad (B.2)$$

$$\mathbf{p} \wedge \mathbf{p}' = |\mathbf{p}|^2 \sin \theta \quad (B.3)$$

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{k} = |\mathbf{p}| |\mathbf{k}| \cos(\alpha + \theta/2) \quad (B.4)$$

$$\mathbf{p}' \cdot \mathbf{k} = |\mathbf{p}| |\mathbf{k}| \cos(\alpha - \theta/2) \quad (B.5)$$

$$\mathbf{p} \wedge \mathbf{k} = |\mathbf{p}| |\mathbf{k}| \sin(\alpha + \theta/2) \quad (B.6)$$

$$\mathbf{p}' \wedge \mathbf{k} = |\mathbf{p}| |\mathbf{k}| \sin(\alpha - \theta/2) . \quad (B.7)$$

Para a integração angular (α), usando as relações acima teremos integrais do tipo[67].

$$I_n = \int_0^{2\pi} d\alpha \frac{\cos(n\alpha)}{[2 \cos(\alpha - \theta/2) - f][2 \cos(\alpha + \theta/2) - f]} , \quad (B.8)$$

com $n = 0, 1$ e 2 , sendo $f = (\mathbf{k}^2 + \mathbf{p}^2)/(|\mathbf{k}| |\mathbf{p}|)$. Fazendo a substituição $z = \exp(i\alpha)$ e $w = \exp(i\theta/2)$ e usando o teorema dos resíduos, obtemos[28, 67]

$$I_n = \frac{2\pi}{B\sqrt{f^2 - 4} \sin(\theta/2)} \left[Z^{n-1} \sin[(n+1)\theta/2] - Z^{n+1} \sin[(n-1)\theta/2] \right] , \quad (B.9)$$

Figura B.1: $p_1 = p$, $p_3 = p'$ e θ é o ângulo de espalhamento.

sendo $B = f^2 - 2(1 + \cos \theta)$ e $Z = \frac{1}{2}[f - \sqrt{f^2 - 4}]$. Assim

$$I_0 = \frac{2\pi f}{B\sqrt{f^2 - 4}} = \frac{2\pi(k^2 + p^2)k^2 p^2}{|k^2 - p^2|(k^4 + p^4 - 2p^2 k^2 \cos \theta)} \quad (B.10)$$

$$I_1 = \frac{2 \cos \theta/2}{f} I_0 \quad (B.11)$$

$$I_2 = I_0 - \frac{\pi f}{\sqrt{f^2 - 4}} + \pi = \left(1 - \frac{B}{2}\right) I_0 + \pi. \quad (B.12)$$

Após a integração angular, e separando na região de baixa e alta energia, nos resta as integrais do tipo,

$$\int_0^{\Lambda^2} d(k)^2 f(|p|, k^2, m) + \int_{\Lambda^2}^{\Lambda_0^2} d(k)^2 f(|p|, k^2, m), \quad (B.13)$$

com Λ_0 um cutoff ultravioleta. No setor de baixa energia, faremos uma expansão em $1/m$, assim nos resta integrais do tipo[69] (para $D = x^2 + bx + a$ e $\Delta = 4a - b^2$)

$$\mathcal{I}_0 = \int dx \frac{1}{D} = \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \arctg \left(\frac{b + 2x}{\sqrt{\Delta}} \right) \quad \Delta > 0 \quad (B.14)$$

$$\mathcal{I}_1 = \int dx \frac{x}{D} = \frac{1}{2} \log D - \frac{b}{2} \mathcal{I}_0 \quad (B.15)$$

$$\mathcal{I}_2 = \int dx \frac{x^2}{D} = x - b \mathcal{I}_1 - a \mathcal{I}_0. \quad (B.16)$$

Para $x = k^2$, $a = p^4$ e $b = 2p^2 \cos \theta$ temos ($p^2 \ll \Lambda^2$) até ordem η^2 ($\eta \approx \frac{p}{m} \approx \frac{\Lambda^2}{m^2} \approx \frac{p^2}{\Lambda^2}$),

$$\mathcal{I}_0(p^2, \Lambda^2) - \mathcal{I}_0(0, p^2) = -\frac{1}{p^2} \left[\frac{p^2}{\Lambda^2} + \frac{p^2}{\Lambda^2} \cos \theta + \dots \right] \quad (B.17)$$

$$\mathcal{I}_1(\mathbf{p}^2, \Lambda^2) - \mathcal{I}_1(0, \mathbf{p}^2) = \log \frac{\Lambda^2}{\mathbf{q}^2} - 2 \cos \theta \frac{\mathbf{p}^2}{\Lambda^2} + (1 - 4 \cos^2 \theta) \frac{\mathbf{p}^4}{2\Lambda^4} + \dots \quad (\text{B.18})$$

No setor de alta energia faremos expansões em torno de $p \approx 0$, e obteremos integrais do tipo[69]

$$\mathcal{J}_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{x+m^2}} = 2\sqrt{x+m^2} \quad (\text{B.19})$$

$$\mathcal{J}_1 = \int \frac{dx}{x\sqrt{x+m^2}} = \frac{1}{m} \log \left(\frac{\sqrt{m^2+x} - \sqrt{m^2}}{\sqrt{m^2+x} + \sqrt{m^2}} \right) \quad (\text{B.20})$$

$$\mathcal{J}_2 = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x+m^2}} = -\frac{\sqrt{m^2+x}}{m^2x} - \frac{1}{2m^2} \mathcal{J}_1. \quad (\text{B.21})$$

Com $x = \mathbf{k}^2$ obtemos das equações acima que (para $\Lambda \ll m$) até ordem η^2 ,

$$\mathcal{J}_1(\Lambda^2, \Lambda_0^2) = \frac{1}{m} \left[-\log \left(\frac{\Lambda^2}{4m^2} \right) + \frac{\Lambda^2}{2m^2} - \frac{3\Lambda^4}{16m^4} + \dots \right] \quad (\text{B.22})$$

Apêndice C

Espalhamento em 1-Loop (Spin 0)

Neste apêndice vamos explicitar o cálculo em 1-loop do espalhamento Aharonov-Bohm não-Abeliano para partículas escalares. Detalharemos o caso gráfico (2.3b) no caso não relativístico, e o gráfico (2.11.c4) no caso relativístico.

- Gráfico (2.3.b)

O gráfico (2.3b) é dado por

$$\mathcal{M}_b(\theta) = -i \left(\frac{2g^2}{m\Theta} \right)^2 [T^c T^a \otimes T_c T_a] \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{(\mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{k})(\mathbf{p}_3 \wedge \mathbf{k})}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{k})^2 (\mathbf{p}_3 - \mathbf{k})^2} I_{k^0} \quad (\text{C.1})$$

com

$$I_{k^0} = \int \frac{dk^0}{(2\pi)} \Delta(k) \Delta(p_1 + p_3 + k) = \frac{-im}{\mathbf{p}^2 - \mathbf{k}^2 + i\epsilon}, \quad (\text{C.2})$$

sendo que a integração em k^0 foi feita usando o teorema dos resíduos e na concha de massa. Assim

$$\mathcal{M}_b(\theta) = -\frac{4g^4}{m\Theta^2} [T^c T^a \otimes T_c T_a] \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{(\mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{k})(\mathbf{p}_3 \wedge \mathbf{k})}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{k})^2 (\mathbf{p}_3 - \mathbf{k})^2 [\mathbf{p}^2 - \mathbf{k}^2 + i\epsilon]}. \quad (\text{C.3})$$

Conforme a figura (B.1), e equações (B.9)-(B.12), podemos fazer a integração angular, obtendo

$$\mathcal{M}_b(\theta) = -\frac{g^4}{4\pi^2 m\Theta^2} [T^c T^a \otimes T_c T_a] \int_0^{\Lambda_{NR}} d(k)^2 \frac{1}{\mathbf{p}^2 - \mathbf{k}^2 + i\epsilon} [\cos \theta I_0 - I_2], \quad (\text{C.4})$$

ou seja

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_b(\theta) = & -\frac{g^4}{4\pi^2 m\Theta^2} [T^c T^a \otimes T_c T_a] \int_0^{\Lambda_{NR}} d(k)^2 \left\{ \frac{1}{\mathbf{p}^2 - \mathbf{k}^2 + i\epsilon} \right. \\ & \left. + Sg(\mathbf{k}^2 - \mathbf{p}^2) \frac{\mathbf{k}^2 + \mathbf{p}^2}{\mathbf{k}^4 + \mathbf{p}^4 - 2\mathbf{k}^2 \mathbf{p}^2 \cos \theta} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Usando as equações (B.14) a (B.16) obtemos o resultado (2.20).

• Gráfico (2.11.c4)

Analicamente o gráfico (2.11.c4) é dado por

$$\mathcal{M}_{c4}(\theta) = -g^4 \Theta[(-2c_f)\varepsilon_{bac}T^b \otimes T^c T^a] D_{\sigma'\sigma}(q) \varepsilon^{\sigma'\mu'\nu'}(p_2 + p_4)^\sigma \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [(k + p_3)^\nu \Delta(k)(k + p_1)^\mu] D_{\mu'\mu}(k - p_1) D_{\nu\nu'}(k - p_3), \quad (C.6)$$

onde q é o momento transferido. Usando as regras de Feynman podemos escrever

$$\mathcal{M}_{c4}(\theta) = \frac{-g^4}{\Theta^2} [(-2c_f)\varepsilon_{bac}T^b \otimes T^c T^a] \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{N_{c4}}{[k^2 - m^2 + i\epsilon][(k - p_1)^2][(k - p_3)^2][q^2]}, \quad (C.7)$$

com

$$N_{c4} = [q \wedge k - p_1 \wedge p_3] \{2w_q(k^0 + w_q)[2q \wedge k] + (k^0 + w_q)^2[2p_1 \wedge p_3]\}, \quad (C.8)$$

e $w_q = \sqrt{q^2 + m^2}$. Separando a integração em k^0 ,

$$\mathcal{M}_{c4}(\theta) = \frac{-2g^4}{\Theta^2} [(-2c_f)\varepsilon_{bac}T^b \otimes T^c T^a] \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{[q \wedge k - p_1 \wedge p_3]}{[(k - p_1)^2][(k - p_3)^2][q^2]} T_0, \quad (C.9)$$

com

$$T_0 = \int \frac{dk^0}{(2\pi)} \frac{2w_q(k^0 + w_q)[q \wedge k] + (k^0 + w_q)^2[p_1 \wedge p_3]}{k_0^2 - w_k^2 + i\epsilon}. \quad (C.10)$$

A integração em k^0 tem problema de divergência, por isso precisamos usar algum tipo de regularização para podermos calcular a integral. Os termos ímpares em k_0 são nulos por simetria de integração. Colocando um regulador no limite de integração ($-l < k_0 < l$), obtemos podemos escrever T_0 como

$$T_0 = [q \wedge k] \frac{w_p^2}{w_k} + [p_1 \wedge p_3] \frac{w_p^2 + w_k^2}{2w_k} + \frac{l}{\pi} [p_1 \wedge p_3], \quad (C.11)$$

onde temos usado $|p_1| = |p_3| = |p|$. O termo dependente de l é

$$M_{c4}^T \propto \frac{l}{\pi} [p_1 \wedge p_3] \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{[q \wedge k - p_1 \wedge p_3]}{[(k - p_1)^2][(k - p_3)^2]}, \quad (C.12)$$

porém a integração espacial na equação acima é identicamente nula. Isto pode ser facilmente visto se usarmos a parametrização de Feynman e fazendo um deslocamento na

variável de integração. Assim, substituindo (C.11) em (C.9) podemos separar a integração angular, isto é,

$$\mathcal{M}_{c4}(\theta) = \frac{-2g^4}{\Theta^2} [(-2c_f)\varepsilon_{bac}T^b \otimes T^c T^a] \int_0^{\Lambda_0^2} \frac{1}{2} \frac{dk^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{q}^2 w_k} J(\alpha), \quad (\text{C.13})$$

onde

$$J(\alpha) = \int_0^{2\pi} d\alpha \frac{[\mathbf{q} \wedge \mathbf{k} - \mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{p}_3]}{[(\mathbf{k} - \mathbf{p}_1)^2][(\mathbf{k} - \mathbf{p}_3)^2]} \left\{ [\mathbf{q} \wedge \mathbf{k}] \frac{w_p^2}{w_k} + [\mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{p}_3] \frac{w_p^2 + w_k^2}{2w_k} \right\}. \quad (\text{C.14})$$

De acordo com a figura (B.1), e equações (B.9)-(B.12), podemos escrever a integração angular na forma

$$\begin{aligned} J(\alpha) = & \left[2w_p^2(1 - \cos \theta)[I_0 + I_2] + \frac{\mathbf{p}^2}{|\mathbf{p}| |\mathbf{k}|} \sin \theta (w_k^2 - w_p^2) 2 \sin \theta / 2 I_1 \right. \\ & \left. - \frac{\mathbf{p}^2}{\mathbf{k}^2} \sin^2 \theta (w_p^2 + w_k^2) I_0 \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Assim, podemos escrever, após algumas manipulações, que

$$\begin{aligned} J(\alpha) = & 2\pi(1 - \cos \theta) \left\{ w_p^2 + \sin \theta (\mathbf{k}^2 - \mathbf{p}^2) \times \left[\frac{-(\mathbf{p}^2 + m^2)\mathbf{k}^4}{\mathbf{k}^4 + \mathbf{p}^4 - 2\mathbf{p}^2\mathbf{k}^2 \cos \theta} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(3\mathbf{p}^2 + 2m^2)\mathbf{p}^2(1 - \cos \theta)\mathbf{k}^2 + [(2 + \cos \theta)\mathbf{p}^6 + (3 + 2\cos \theta)m^2\mathbf{p}^4]}{\mathbf{k}^4 + \mathbf{p}^4 - 2\mathbf{p}^2\mathbf{k}^2 \cos \theta} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Substituindo (C.16) em (C.13) e fazendo a separação na parte de alta e baixa energia, como descrito no capítulo 2, nós obtemos os resultados (2.99) e (2.100).

Apêndice D

Espalhamento em 1-Loop (Spin 1/2)

Neste apêndice vamos explicitar as contas para o gráfico (3.8d). Este gráfico que contém o vértice com três gluons e é dado analiticamente por (estamos omitindo os índices externos)

$$\begin{aligned}
 M_d &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ [\bar{u}(p_4)\Gamma^{b,\nu}u(p_2)] D_{\nu\mu}^{ba}(q) \Gamma^{ac'd'\mu\rho\sigma} D_{\sigma\alpha}^{d'd}(k-p_3) \right. \\
 &\quad \times \left. D_{\beta\rho}^{cc'}(k-p_1) [\bar{u}(p_3)\Gamma^{d,\alpha}S(k)\Gamma^{e,\beta}u(p_1)] \right\} \\
 &= \frac{i(-g)^3}{(\Theta)^3} [-2ic_f g \Theta \varepsilon^{acd} T_a \otimes T_d T_c] \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{N_d}{[k^2 - m^2 + i\epsilon](k-p_1)^2(k-p_3)^2 q^2}
 \end{aligned} \tag{D.1}$$

com

$$N_d = [\bar{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2)] \varepsilon_{\nu\mu\lambda} \bar{q}^\lambda \varepsilon^{\mu\rho\sigma} \varepsilon_{\sigma\alpha\xi} (\overline{k-p_3})^\xi \varepsilon_{\beta\rho\delta} (\overline{k-p_1})^\delta [\bar{u}(p_3)\gamma^\alpha (\not{k} + m) \gamma^\beta u(p_1)] . \tag{D.2}$$

Usando que $\gamma^\alpha \gamma^\beta = g^{\alpha\beta} - i\varepsilon^{\alpha\beta\theta} \gamma_\theta$, temos que

$$\gamma^\alpha (\not{k} + m) \gamma^\beta = \gamma^\alpha k^\beta + k^\alpha \gamma^\beta - \not{k} g^{\alpha\beta} + m g^{\alpha\beta} + i\varepsilon^{\alpha\beta\theta} k_\theta - im\varepsilon^{\alpha\beta\theta} \gamma_\theta , \tag{D.3}$$

logo

$$\begin{aligned}
 N_d &= [\bar{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2)] (\varepsilon_{\nu\alpha\xi} \varepsilon_{\beta\lambda\delta} - \varepsilon_{\lambda\alpha\xi} \varepsilon_{\beta\nu\delta}) \bar{q}^\lambda (\overline{k-p_3})^\xi (\overline{k-p_1})^\delta \\
 &\quad [\bar{u}(p_3) (\gamma^\alpha k^\beta + k^\alpha \gamma^\beta - \not{k} g^{\alpha\beta} + m g^{\alpha\beta} + i\varepsilon^{\alpha\beta\theta} k_\theta - im\varepsilon^{\alpha\beta\theta} \gamma_\theta) u(p_1)] .
 \end{aligned} \tag{D.4}$$

Abrindo as componentes e lembrando que os termos ímpares em k^0 são nulos pela simetria na integração em k^0 , temos

$$N_d = [\bar{u}(p_4)\gamma^0 u(p_2)] [\bar{u}(p_3) (\gamma^0 k^j + i\varepsilon^{j0r} k_r - im\varepsilon^{j0r} \gamma_r) u(p_1)] \varepsilon_{0jm} \varepsilon_{0ln} q^l (k-p_1)^m (k-p_3)^n$$

$$\begin{aligned}
& - [\bar{u}(p_4)\gamma^0 u(p_2)][\bar{u}(p_3)(\gamma^0 k^j + i\varepsilon^{0jr} k_r - im\varepsilon^{0jr} \gamma_r)u(p_1)]\varepsilon_{l0m}\varepsilon_{j0n}q^l(k-p_1)^m(k-p_3)^n \\
& + [\bar{u}(p_4)\gamma^i u(p_2)][\bar{u}(p_3)(k_j\gamma^j + m)u(p_1)](\varepsilon_{i0n}\varepsilon_{0lm} - \varepsilon_{l0n}\varepsilon_{0im})q^l(k-p_1)^m(k-p_3)^n
\end{aligned} \tag{D.5}$$

usando que $\varepsilon_{0ij}a^i b^j = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ podemos escrever

$$\begin{aligned}
N_d &= \left\{ [\bar{u}(p_4)\gamma^0 u(p_2)][\bar{u}(p_3)(\gamma^0 k^j + i\varepsilon^{0jr} k_r - im\varepsilon^{0jr} \gamma_r)u(p_1)]\varepsilon_{0jm}(k-p_1)^m \right. \\
&+ [\bar{u}(p_4)\gamma^0 u(p_2)][\bar{u}(p_3)(\gamma^0 k^j + i\varepsilon^{0jr} k_r - im\varepsilon^{0jr} \gamma_r)u(p_1)]\varepsilon_{j0n}(k-p_3)^n \\
&+ [\bar{u}(p_4)\gamma^i u(p_2)][\bar{u}(p_3)(k_j\gamma^j + m)u(p_1)](\varepsilon_{i0n}(k-p_3)^n - \varepsilon_{0in}(k-p_1)^m) \Big\} \\
&\times [\mathbf{q} \wedge \mathbf{k} - \mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{p}_3] .
\end{aligned} \tag{D.6}$$

Temos que até ordem $\mathbf{p}/m$

$$[\bar{u}(p')\gamma^0 u(p)] = [\bar{u}(p')u(p)] = 1, \quad [\bar{u}(p')\gamma^i u(p)] = \frac{1}{2m}[P^i + i\varepsilon^{ij}q^j] \tag{D.7}$$

onde $P^i = p^j + p'^i$ e $q^i = p^i - p'^i$. Isso nos leva a

$$N_d = [\mathbf{q} \wedge \mathbf{k} - \mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{p}_3] \left\{ 2i[\mathbf{k}^2 + \mathbf{p}^2] - 2[\mathbf{q} \wedge \mathbf{k} + i\mathbf{P} \cdot \mathbf{k}] \right\} . \tag{D.8}$$

Substituindo na equação (D.1) temos

$$\begin{aligned}
M_d &= \frac{-2g^4}{\Theta^2} [c_f \Theta \varepsilon^{acd} T_a \otimes T_d T_c] \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{[\mathbf{q} \wedge \mathbf{k} - \mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{p}_3]}{(\mathbf{k} - \mathbf{p}_1)^2 (\mathbf{k} - \mathbf{p}_3)^2 \mathbf{q}^2} \\
&\quad \left\{ 2i[\mathbf{k}^2 + \mathbf{p}^2] - 2[\mathbf{q} \wedge \mathbf{k} + i\mathbf{P} \cdot \mathbf{k}] \right\} I_{k^0}
\end{aligned} \tag{D.9}$$

na qual

$$I_{k^0} = \int \frac{dk^0}{2\pi} \frac{1}{[k_0^2 - w_k^2 + i\epsilon]} = -\frac{i}{2w_k} , \tag{D.10}$$

com $w_k^2 = \mathbf{k}^2 + m^2$. Separando a parte angular na integração espacial

$$M_d = \frac{-ig^4}{4\pi^2 \Theta^2} [c_f \Theta \varepsilon^{acd} T_a \otimes T_d T_c] \int_0^{y_0} \frac{1}{2} d\mathbf{k}^2 \frac{1}{\mathbf{q}^2 w_k} J_\alpha , \tag{D.11}$$

sendo

$$J_\alpha = \int_0^{2\pi} d\alpha \frac{[\mathbf{q} \wedge \mathbf{k} - \mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{p}_3] \{ 2[\mathbf{q} \wedge \mathbf{k} + i\mathbf{P} \cdot \mathbf{k}] - 2i[\mathbf{k}^2 + \mathbf{p}^2] \}}{(\mathbf{k} - \mathbf{p}_1)^2 (\mathbf{k} - \mathbf{p}_3)^2} \tag{D.12}$$

De acordo com a figura (B.1), do apêndice B, podemos escrever,

$$[\mathbf{q} \wedge \mathbf{k} - \mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{p}_3] = [2|\mathbf{p}||\mathbf{k}| \sin(\theta/2) \cos(\alpha) - \mathbf{p}^2 \sin(\theta)] \tag{D.13}$$

e também que

$$\begin{aligned}
& [\mathbf{q} \wedge \mathbf{k} - \mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{p}_3] \left\{ 2[\mathbf{q} \wedge \mathbf{k} + i\mathbf{P} \cdot \mathbf{k}] - 2i[\mathbf{k}^2 + \mathbf{p}^2] \right\} = \\
& = 2|\mathbf{p}||\mathbf{k}|[2\sin^2(\theta/2) + 2i\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)] \\
& \quad \times [|\mathbf{p}||\mathbf{k}|(1 + \cos 2(\alpha)) - 2\mathbf{p}^2 \cos(\theta/2)\cos(\alpha)]
\end{aligned} \tag{D.14}$$

para o denominador temos

$$\begin{aligned}
(\mathbf{k} - \mathbf{p}_1)^2 &= |\mathbf{p}||\mathbf{k}|[2\cos(\alpha + \theta/2) - f] \\
(\mathbf{k} - \mathbf{p}_3)^2 &= |\mathbf{p}||\mathbf{k}|[2\cos(\alpha - \theta/2) - f]
\end{aligned} \tag{D.15}$$

Assim, podemos escrever, com o uso da relação (B.8) e (B.9), que

$$\begin{aligned}
J_\alpha &= 2 \frac{|\mathbf{p}||\mathbf{k}|}{\mathbf{p}^2 \mathbf{k}^2} (1 - \cos \theta + i \sin \theta) \{ |\mathbf{p}||\mathbf{k}|(J_0 + I_2) - 2\mathbf{p}^2 \cos(\theta/2)I_1 \} \\
&\quad - 2i \frac{\mathbf{k}^2 + \mathbf{p}^2}{\mathbf{p}^2 \mathbf{k}^2} [2|\mathbf{p}||\mathbf{k}| \sin(\theta/2)I_1 - \mathbf{p}^2 \sin(\theta)I_0]
\end{aligned} \tag{D.16}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
J_\alpha &= 2\pi \left\{ [(1 - \cos \theta) + i \sin \theta][1 - \text{sinal}(\mathbf{k}^2 - \mathbf{p}^2)] \right. \\
&\quad \left. + \text{sinal}(\mathbf{k}^2 - \mathbf{p}^2) \left[2\mathbf{p}^2(1 - \cos \theta) \frac{\mathbf{k}^2 + \mathbf{p}^2}{R} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{D.17}$$

onde $R = (\mathbf{k}^4 + \mathbf{p}^4 - 2\mathbf{p}^2 \mathbf{k}^2 \cos \theta)$. Substituindo (D.17) em (D.11) temos

$$M_d = \frac{-ig^4}{4\pi\Theta^2} [c_f \Theta \varepsilon^{acd} T_a \otimes T_d T_c] \mathcal{T}_k \tag{D.18}$$

com

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_k &= \int_0^{\Lambda^2} \frac{d\mathbf{k}^2}{\mathbf{q}^2 w_k} \left\{ [(1 - \cos \theta) + i \sin \theta][1 - Sg(\mathbf{k}^2 - \mathbf{p}^2)] \right. \\
&\quad \left. + Sg(\mathbf{k}^2 - \mathbf{p}^2) \left[2\mathbf{p}^2(1 - \cos \theta) \frac{\mathbf{k}^2 + \mathbf{p}^2}{R} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{D.19}$$

Vamos separar a integral em $\mathbf{k}^2$ na parte de baixa energia (L) e alta energia (H). Na parte de baixa energia fazemos uma expansão em $1/m$. Assim

$$\frac{1}{w_k} = \frac{1}{m} \left(1 - \frac{\mathbf{k}^2}{2m^2} + \dots \right)$$

Na parte de alta energia fazemos uma expansão em torno de $\mathbf{p} = 0$. Então

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{k^4} \left(1 + \frac{2\mathbf{p}^2}{k^2} \cos \theta + \dots \right) .$$

Assim, usando as equações (B.14) - (B.18), obtemos para a parte de baixa energia, temos até ordem η

$$\begin{aligned} M_d^L = & \frac{-ig^4}{4\pi m \Theta^2} [c_f \Theta \varepsilon^{acd} T_a \otimes T_d T_c] \left\{ 1 + i \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \right. \\ & \left. + \left[\log \left(\frac{\Lambda^2}{\mathbf{q}^2} \right) - \frac{\Lambda^2}{2m^2} - (1 + 2 \cos \theta) \frac{\mathbf{p}^2}{\Lambda^2} \right] \right\} , \end{aligned} \quad (D.20)$$

e para a parte de alta energia, com a ajuda da equações (B.19) a (B.22)

$$M_d^H = \frac{-ig^4}{4\pi m \Theta^2} [c_f \Theta \varepsilon^{acd} T_a \otimes T_d T_c] \left\{ -\log \left(\frac{\Lambda^2}{4m^2} \right) + \frac{\Lambda^2}{2m^2} + (1 + 2 \cos \theta) \frac{\mathbf{p}^2}{\Lambda^2} \right\} . \quad (D.21)$$

Somando a contribuição das equações (D.20) e (D.21) obtemos

$$M_d = \frac{-ig^4}{4\pi m \Theta^2} [c_f \Theta \varepsilon^{acd} T_a \otimes T_d T_c] \left\{ 1 + i \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} + \log \left(\frac{4m^2}{\mathbf{q}^2} \right) \right\} . \quad (D.22)$$

Apêndice E

Cálculos em 1-Loop (Spin 1)

E.1 Auto-Energia

A contribuição para a auto-energia do méson vem do gráfico (2.3.a), que analiticamente é dado por

$$\Sigma^{\alpha\beta}(p) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Gamma_1^{\nu\alpha\alpha'}(p, p+k) \Delta_{\alpha'\beta}(p+k) \Gamma_1^{\mu\beta'\beta}(p+k, p) D_{\mu,\nu}(k) . \quad (\text{E.1})$$

Usando que a parametrização de Feynman

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[(A-B)x+B]^2} , \quad (\text{E.2})$$

e fazendo a translação $k \rightarrow k + px$, podemos escrever

$$\Sigma^{\alpha\beta}(p) = \frac{-ie^2}{\theta} \int_0^1 dx \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{N_S^{\alpha\beta}}{[k^2 - C^2]} , \quad (\text{E.3})$$

onde $C^2 = M^2(1-x) - p^2x(1-x)$ e

$$\begin{aligned} N_S^{\alpha\beta} = & \left\{ [3M^2 + xp^2](\varepsilon^{\sigma\beta\rho} k_\sigma k^\alpha + \varepsilon^{\alpha\sigma\rho} k_\sigma k^\beta) p_\rho + [(1-x)M^2 p^2 \right. \\ & \left. - (1-x)(p_\mu k^\mu)^2 (x^2 - x^3) p^4] \varepsilon^{\alpha\beta\sigma} p_\sigma + 2xp^2 \varepsilon^{\alpha\beta\rho} k_\rho k_\sigma p^\sigma \right\} / M^2 . \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Através do uso da regularização dimensional, obtemos

$$\Sigma^{\alpha\beta}(p) = \frac{e^2}{8\pi\theta M^2} \int_0^1 dx \frac{6M^4 + [p^4 - M^2 p^2 - 6M^4]x + [M^2 p^2 - 7p^4]x^2 + 6p^4 x^3}{\sqrt{M^2(1-x) - p^2x(1-x)}} \varepsilon^{\alpha\beta\sigma} p_\sigma \quad (\text{E.5})$$

Após efetuarmos a integração paramétrica

$$\Sigma^{\alpha\beta}(p) = \frac{e^2}{8\pi\theta} F(p) \varepsilon^{\alpha\beta\rho} p_\rho, \quad (\text{E.6})$$

onde

$$F(p) = \frac{(3M^2 + p^2)}{2Mp^2} \left[(M^2 + p^2) - \frac{1}{2\sqrt{p^2}} (M^2 - p^2)^2 \text{Log} \left(\frac{\sqrt{M^2} + \sqrt{p^2}}{\sqrt{M^2} - \sqrt{p^2}} \right) \right]. \quad (\text{E.7})$$

E.2 Polarização

A contribuição para o tensor de polarização vem dos gráficos da figura (2.4)

$$\Pi^{\mu\nu} = \Pi_A^{\mu\nu} + \Pi_B^{\mu\nu}, \quad (\text{E.8})$$

com

$$\begin{aligned} \Pi_A^{\mu\nu} &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Gamma_1^{\mu\alpha\beta}(p+k, k) \Delta_{\alpha\alpha'}(k) \Gamma_1^{\nu\alpha'\beta'}(k, p+k) \Delta_{\beta'\beta}(p+k) \\ \Pi_B^{\mu\nu} &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Gamma_2^{\mu\nu\alpha\beta} \Delta_{\alpha\beta}(k). \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

Usando as regras de Feynman podemos escrever

$$\Pi^{\mu\nu} = \frac{e^2}{M^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{N_{P_1}^{\mu\nu}}{[k^2 - M^2][(k+p)^2 - M^2]}, \quad (\text{E.10})$$

onde

$$\begin{aligned} N_{P_1}^{\mu\nu} &= [k^2(p^\mu k^\nu + k^\mu p^\nu) - 2k^\mu k^\nu k^\alpha p_\alpha] + [8M^2 k^\mu k^\nu - (4M^2 g^{\mu\nu} + p^\mu p^\nu) k^2 \\ &+ k^\alpha p_\alpha (2p^\mu k^\nu + 2k^\mu p^\nu - 2g^{\mu\nu} k^\beta p_\beta) + p^2 \{-3k^\mu k^\nu + 2g^{\mu\nu} k^2\}] \\ &+ [3M^2 (p^\mu k^\nu + k^\mu p^\nu - 6g^{\mu\nu} k^\alpha p_\alpha)] + [M^2 (4M^2 g^{\mu\nu} + p^\mu p^\nu - 3p^2 g^{\mu\nu})]. \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

Usando (E.2) depois fazendo um translação $k \rightarrow k - px$ e eliminando os termos ímpares em k ,

$$\Pi^{\mu\nu} = \frac{e^2}{M^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{N_{P_2}^{\mu\nu}}{[k^2 - a^2]}, \quad (\text{E.12})$$

onde $a^2 = M^2 - p^2 x(1-x)$ e

$$\begin{aligned} N_{P_2}^{\mu\nu} &= M^2 [4M^2 g^{\mu\nu} + p^\mu p^\nu (1 - 6x + 8x^2) + p^2 g^{\mu\nu} (-3 + 6x - 4x^2)] \\ &+ k^\mu k^\nu [8M^2 - 3p^2 + 2p^2 x] + k^2 [-4M^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu (1 + 2x) + 2p^2 g^{\mu\nu}] \\ &+ [2k^\mu p^\nu k^\alpha p_\alpha + 2p^\mu k^\nu k^\alpha p_\alpha - 2g^{\mu\nu} (k^\alpha p_\alpha)^2]. \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

Novamente para a integração no momento interno vamos usar a regularização dimensional. Deste modo temos

$$\Pi^{\mu\nu} = \frac{ie^2}{8\pi M^2} \int_0^1 dx \frac{N_{P_3}^{\mu\nu}}{[M^2 - p^2 x(1-x)]^{1/2}} , \quad (\text{E.14})$$

com

$$\begin{aligned} N_{P_3}^{\mu\nu} &= M^2(2 - 12x + 8x^2)[p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}] \\ &+ p^2[p^\mu p^\nu(-x + 7x^2 - 6x^3) + p^2 g^{\mu\nu}(-x - x^2 + 2x^3)] . \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

Efetuada a integração em x obtemos

$$\Pi^{\mu\nu} = \frac{ie^2}{8\pi} \Pi(p^2) \left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right) , \quad (\text{E.16})$$

com $\Pi(p^2)$ dado por

$$\Pi(p^2) = \frac{(p^2 - 4M^2)}{4M^2} \left[4\sqrt{M^2} - (p^2 + 4M^2)I_0 \right] , \quad (\text{E.17})$$

onde

$$I_0 = \int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{M^2 - p^2 x(1-x)}} = \frac{1}{\sqrt{p^2}} \text{Ln} \left[\frac{2\sqrt{M^2 p^2} + p^2}{2\sqrt{M^2 p^2} - p^2} \right] . \quad (\text{E.18})$$

E.3 Espalhamento

O gráfico (2.6.4) analiticamente é dado por

$$\mathcal{M}_4^{s_1, s_2, s_3, s_4} = [\varepsilon_\alpha(p_1, s_1) \varepsilon_\sigma(p_2, s_2) \varepsilon_\beta^*(p_3, s_3) \varepsilon_\alpha^*(p_4, s_4)] T_4^{\alpha\beta\sigma\rho} , \quad (\text{E.19})$$

onde

$$T_4^{\alpha\beta\sigma\rho} = \frac{-e^4}{(2\pi)^3 \theta^2} \int d^3 k \frac{N_{4a}^{\alpha\beta\sigma\rho}}{[(k + p_1)^2 (k + p_3)^2]} , \quad (\text{E.20})$$

com

$$\begin{aligned} N_{4a}^{\alpha\beta\sigma\rho} &= [g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} - 2g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}] \varepsilon_{\mu\mu'\lambda} (k + p_1)^\lambda \\ &[g^{\mu'\sigma} g^{\nu'\rho} + g^{\mu'\rho} g^{\nu'\sigma} - 2g^{\mu'\nu'} g^{\sigma\rho}] \varepsilon_{\nu'\nu\xi} (k + p_3)^\xi . \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

Na concha de massa e usando a equação (E.2) podemos, após uma translação $k \rightarrow k - p_1 x - p_3(1-x)$, escrever (E.20) como

$$T_4^{\alpha\beta\sigma\rho} = \frac{-e^4}{(2\pi)^3 \theta^2} \int_0^1 dx \int d^3 k \frac{N_{4b}^{\alpha\beta\sigma\rho}}{[k^2 - C^2]^2} , \quad (\text{E.22})$$

onde $N_{4b}^{\alpha\beta\sigma\rho} = N_{4a}^{\alpha\beta\sigma\rho} |_{k \rightarrow k-p_1x-p_3(1-x)}$ e $C^2 = (p_1 - p_3)^2[x^2 - x]$. Usando [55] podemos integrar em k e posteriormente em x . Substituindo esse resultado em (E.19) e fazendo as contrações com as polarizações externas obtemos¹

$$\mathcal{M}_4^{s_1, s_2, s_3, s_4} = \frac{-ie^4 M}{8\pi\theta^2} \left\{ \mathcal{O} \left(\frac{\mathbf{p}}{M} \right) \right\}. \quad (\text{E.23})$$

O gráfico (2.6.5) usando-se as regras de Feynman é dado por

$$\mathcal{M}_5^{s_1=1, s_2=1, s_3, s_4} = [\varepsilon_\alpha(p_1, s_1) \varepsilon_\sigma(p_2, s_2) \varepsilon_\beta^*(p_3, s_3) \varepsilon_\alpha^*(p_4, s_4) \mathcal{T}_5^{\alpha\beta\sigma\rho}], \quad (\text{E.24})$$

no qual

$$\mathcal{T}_5^{\alpha\beta\sigma\rho} = \frac{-e^4}{(2\pi)^3\theta^2} \int d^3k \frac{N_{5a}^{\alpha\beta\sigma\rho}}{[k^2 - M^2][(k - p_1)^2(k - p_3)^2]}, \quad (\text{E.25})$$

e

$$\begin{aligned} N_{5a}^{\alpha\beta\sigma\rho} = & [(p_1 + k)^\mu g^{\alpha\alpha'} - p_1^{\alpha'} g^{\mu'\alpha} - k^\alpha g^{\mu'\alpha'}][g_{\alpha'\beta'} - k_{\alpha'} k_{\beta'}/M^2] \\ & [(p_3 + k)^\nu g^{\beta\beta'} - p_3^{\beta'} g^{\nu'\beta} - k^\beta g^{\nu'\beta'}] \varepsilon_{\nu'\lambda}(k - p_3)^\lambda \\ & [g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - 2g^{\mu\nu} g^{\sigma\rho}] \varepsilon_{\mu\mu'} \varepsilon_{\nu\nu'}(k - p_1)^\xi. \end{aligned} \quad (\text{E.26})$$

Com o auxílio da parametrização (4.64) podemos escrever (E.25), na concha de massa, como

$$\mathcal{T}_5^{\alpha\beta\sigma\rho} = \frac{-e^4}{(2\pi)^3\theta^2} \int_0^1 dx \int_0^1 dy 2y \int d^3k \frac{N_{5b}^{\alpha\beta\sigma\rho}}{[k^2 - C^2]^3}, \quad (\text{E.27})$$

onde $N_{5b}^{\alpha\beta\sigma\rho} = N_{5a}^{\alpha\beta\sigma\rho} |_{k \rightarrow k+ly, l = p_3(1-x)+p_1x}$ e $C^2 = M^2(1-y)+l^2y^2$. Integrando em k com o auxílio de [55] e fazendo aproximação até ordem $\mathbf{p}/M$ tal que $C^3 \approx M^2[1-y+y^2]$, podemos fazer a integração em x e posteriormente a integração em y . Substituindo esse resultado em (E.24) e fazendo a contração com as polarizações externas obtemos, na ordem dominante em $\mathbf{p}/M$,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_5^{s_1=1, s_2=1, s_3, s_4} = & \frac{-ie^4 M}{8\pi\theta^2} (\cos \alpha - i \sin \alpha) \left\{ \frac{(1+s_3)(1+s_4)}{64} \right. \\ & \left. [-28 + 55 \ln(3)] (\cos \alpha - i \sin \alpha) \right\} \end{aligned} \quad (\text{E.28})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_5^{s_1=-1, s_2=-1, s_3, s_4} = & \frac{-ie^4 M}{8\pi\theta^2} (\cos \alpha + i \sin \alpha) \left\{ \frac{(1-s_3)(1-s_4)}{64} \right. \\ & \left. [-28 + 55 \ln(3)] (\cos \alpha + i \sin \alpha) \right\} \end{aligned} \quad (\text{E.29})$$

¹Lembrando que devido o grande número de termos que aparecem, nós usamos o matemática para integrações e as contrações tensoriais.

$$\mathcal{M}_5^{s_1=1, s_2=-1, s_3, s_4} = \frac{-ie^4 M}{8\pi\theta^2} \{(-1 + s_3 s_4)[-36 + 73 \ln(3)] + (s_3 - s_4)[-20 + 37 \ln(3)]\} \quad (\text{E.30})$$

$$\mathcal{M}_5^{s_1=-1, s_2=1, s_3, s_4} = \frac{-ie^4 M}{8\pi\theta^2} \{(1 - s_3 s_4)[-36 + 73 \ln(3)] - (s_3 - s_4)[-20 + 37 \ln(3)]\} . \quad (\text{E.31})$$

O gráfico (2.5.6) é feito de modo semelhante.

Bibliografia

- [1] J. F. Schonfeld, Nucl. Phys. **B185** (1981) 157; S. Deser, R. Jackiw e S. Templeton, Ann. Phys. (N.Y.) **140** (1982) 372; R. Jackiw and S. Templeton, Phys. Rev **D23** (1981) 2291;
- [2] R. B. Laughlin, Phys. Rev. **B39** (1989) 9679; Y.-H. Chen, F. Wilczek, E. Witten and B. Halperin, Int. J. Mod. Phys. **B3** (1989) 1001; *The Quantum Hall Effect*, edited by R. Prange and S. Girvin (Springer, Berlin, 1990).
- [3] P. B. Wiegmann, Phys. Rev. Lett. **60** (1988) 821; F. Wilczek, *Fractional Statistics and Anyon Superconductivity*, Word Scientific, Singapore (1990); A. P. Balachandran, G. Landi, B. Rai, Int. J. Mod. Phys. **A5** (1990) 4501; A. Zee, *25° Int. Conf. on High Energy Physics*, Singapore (1990). Published in Singapore H. E. Phys. 1990:206-212, Ed. K. K. Phua and Y. Yamaguchi.
- [4] H. O. Girotti, M. Gomes e A. J. da Silva, Mod. Phys. **29** (1994) 2699.
- [5] F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **48** (1982) 1144; J. M. Leinass and J. Myrheim, Il Nuovo Cimento **37** (1977) 1.
- [6] C. R. Hagen, Ann. Phys. (N.Y.) **140** (1984) 342, Phys. Rev. **D 31** (1985) 2135.
- [7] D. P. Arovas, J. R. Schrieffer and F. Wilczek. Phys. Rev. Lett. **53** (1984) 772.
- [8] Aharonov and Bohm, Phys. Rev. **115** (1959) 485.
- [9] P. K. Townsend, K. Pilch and P. Van Nieuwenhuizen, Phys. Lett. **B136** (1984) 38;
- [10] S. Deser, R. Jackiw, Phys. Lett. **B139** (1984) 371.
- [11] R. Banerjee, H. J. Rothe and K. D. Rothe, Phys. Rev. **D52** (1995) 3750.
- [12] I. A. Batalin and E. S. Fradkin, Nucl. Phys. **B279** (1987) 514.
- [13] R. Banerjee, H. J. Rothe and K. D. Rothe, Phys. Rev **D55** (1997) 6339.

- [14] E. Fradkin, F. A. Schaposnik, Phys. Lett. **B338** (1994) 253; K. Kondo, Prog. Theor. Phys. **94** (1995) 869.
- [15] M. Gomes, L. C. Malacarne and A. J. da Silva, Phys. Lett. **B439** (1998) 137.
- [16] S. Olariu and I. I. Popescu, Rev. Mod. Phys. **57** (1985) 339.
- [17] S. Ruijsenaars, Ann. Phys. (N.Y.) **146** (1983) 1.
- [18] M. Peshkin and A. Tonomura, *The Aharonov-Bohm Effect*, Lecture Notes in Physics **340** Springer, Verlag, (1989).
- [19] C. R. Hagen, Phys. Rev. Lett., **64** (1990) 503; C. R. Hagen, Phys. Rev. **D41** (1990) 2015; C. R. Hagen, Phys. Rev. **D48** (1993) 5935.
- [20] C. R. Hagen and S. Ramaswamy, Phys. Rev **D42** (1990) 3524.
- [21] M. L. Horner and A. S. Goldhaber, Phys. Rev. **D55** (1997) 5951.
- [22] O. Bergman and G. Lozano, Ann. Phys. (N.Y.) **229** (1994) 416 .
- [23] H. O. Girotti, M. Gomes, J. R. S. Nascimento, A. J. da Silva, Phys. Rev. **D56** (1997) 3623.
- [24] G. Amelino-Camelia and D. Bak, Phys. Lett. **B 343** (1995) 231.
- [25] S. J. Kim and C. Lee, Phys. Rev. **D 55** (1997) 2227. S. J. Kim, Phys. Lett. **B 343** (1995) 244.
- [26] P. Giacconi, F. Maltoni, R. Soldati, hep-th/9706198.
- [27] L. L. Foldy and S. A. Wouthuysen, Phys. Rev. **78**(1950)78.
- [28] J. M. C. Malbouisson, *Estudos sobre o Limite Não Relativístico em Teorias de Campos em $2 + 1$ Dimensões*, Tese de Doutorado, IFUSP, São Paulo, 1996.
- [29] M. Gomes, J. M. C. Malbouisson, A. J. da Silva, Mod. Phys Lett. **A11** (1996) 2825; Phys. Lett. **A207** (1997) 373.
- [30] M. Gomes, A. J. da Silva, Phys. Rev. **D57** (1998) 3579.
- [31] K. G. Wilson, Phys. Rev. **B4** (1971) 3174; W. e. Caswell and G. P. Lepage, Phys. Lett. **B167** (1986) 437; G. P. Lepage, proceedings of TASI-89, 11989; T. Kinoshita and G. Lepage in "Quantum Electrodynamics", T. Kinoshita ed., World Scientific, Singapore, 1990; J. Polchinski, proceedings os TASI-92, J. Harvey and J. Polchinski eds.,World Scientific. Singapore, 1993; A. V. Manohar, Proceedings of the International Winter School of Nuclear and Particle Physics, Schladming, Austria,1996(hep-ph/9606222).

- [32] T. Lee, P. Oh, Ann. Phys. (N.Y.) **235** (1994) 413; H. Lo and J. Preskill, Phys. Rev. **D48** (1993) 4821.
- [33] T. T. Wu e C. N. Yang, Phys. Rev. **D12** (1975) 3845.
- [34] P. A. Horvathy, Phys. Rev. **D33** (1986) 407.
- [35] E. Verlinde, *Proceedings of the International Colloquium on Modern Quantum Field Theory*, Bombay, January 1990.
- [36] W. Witten, Nucl. Phys. **B311** (1988) 46.
- [37] M. G. Alford e F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **62** (1989) 1071.
- [38] F. Wilczek e Y. S. Wu, Phys. Rev. Lett. **65** (1990) 13.
- [39] M. G. Alford, J. March-Russel e F. Wilczek, Nucl. Phys. **B337** (1990) 695.
- [40] T. W. B. Kibble, J. Phys **A9** (1976) 1387.
- [41] A. Vilenkin, Phys. Rev. **D23** (1981) 852;
- [42] E. L. Feinberg, Sov. Phys. Usp. **5** (1963) 753; E. Corinaldesi and F. Rafeli, Am. J. Phys. **46** (1978) 1185; K. M. Purcell and W. C. Henneberger, Am. J. Phys. **46** (1978) 1255.
- [43] M. Gomes and A. J. da Silva, Phys. Rev **D34** (1986) 3916.
- [44] J. A. Swieca, Fort. der Physik, **25** (1977) 303; S. Coleman, Phys. Rev. **D11** (1975) 2088; S. Mandelstan, Phys. Rev. **D11** (1975) 3026; M Bander, Phys. Rev. **D13** (1976) 1566.
- [45] F. A. Schaposnik, Phys. Lett. **B356** (1995) 39; R. Banerjee and E.C. Marino, Nucl.Phys. **B507** (1997) 501; E. C. Marino, Phys.Lett. **B393** (1997) 383; R. Banerjee, Nucl.Phys. **B465** (1996) 157.
- [46] A. Karlhede et al, Phys. Lett. **B186** (1987) 96.
- [47] P. J. Arias. A. Restuccia. Phys. Lett **B347** (1993) 1241; P. J. Arias, L. Leal and A. Restuccia. Phys. Lett **B 367** (1996) 170.
- [48] N. Bralić, E. Fradkin, V. Manias and F. A. Schaposnik, Nucl. Phys. **B 446** (1995) 144.
- [49] J. C. Le Guillou, E. Moreno, C. Núñez and F. A. Schaposnik, Nucl. Phys. **B 484** (1997) 682.

- [50] N. Banerjee, R. Banerjee, S. Ghosh, Nucl. Phys. **B 481** (1996) 421.
- [51] J. H. Lowenstein and B. Schroer, Phys. Rev. **D6**, (1972) 1553.
- [52] M. Gomes, R. S. Mendes, R. F. Ribeiro and A. J. da Silva, Phys. Rev. **D43**, (1991) 3516.
- [53] R. G. Arnold, C. E. Carlson and F. Gross, Phys. Rev. **C21** (1980) 1426. Phys. Lett. **B136** (1984) 38.
- [54] F. P. Devecchi, M. Fleck, H. O. Girotti, M. Gomes and A. J. da Silva, Ann. Phys. (N.Y.) **242** (1995) 275,
- [55] Existe uma certa controvérsia no uso da regularização dimensional, devido a dificuldade na definição do tensor $\varepsilon^{\mu\nu\alpha}$ para dimensões não inteiras. Porém no nosso caso, nós iremos efetuar toda a álgebra tensorial em 3-dimensões e só iremos para D dimensões no cálculo explícito da integral. Assim usaremos que as integrações dimensionais em 1-Loop podem ser escritas na forma geral como

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{(k^2)^a}{[k^2 - C^2]^b} = (-1)^{n-a} \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} [C^2]^{n/2+a-b} \frac{\Gamma(b-a-n/2)\Gamma(a+n/2)}{\Gamma(n/2)\Gamma(b)}.$$
- [56] H.C. Corben and J. Schwinger, Phys. Rev **58** (1962) 953.
- [57] T. D. Lee and C. N. Yang, Phys. Rev. **128** (1962) 885.
- [58] S. Ferrara and M. Porrati, Phys. Rev. **D46** (1992) 3529.
- [59] L. Durand, P. C. DeCelles and r. B. Marr, Phys. Rev **126** (1962) 1882.
- [60] K. J. Kim and Y. S. Tsai, Phys. Rev. **D7** (1973) 3710.
- [61] D. Bak and O. Bergman, Phys. Rev. **D51** (1995) 1994.
- [62] M. Gomes, L. C. Malacarne and A. J. da Silva, Phys. Rev. **D59** 045015-1 (1999).
- [63] R. Jackiw and S. Y. Pi, Phys.Rev. **D42** (1990) 3500.
- [64] F. Ferrari and L. Lazzizzera, Int. J. Mod. Phys. **A13** (1998)1773: hep-th/9712076;
- [65] S. K. Paul and A. Khare, Phys Lett. **B171** (1986) 244.
- [66] R. Gianvittorio, A. Restuccia and J. Stephany, Mod. Phys. Lett. **A6** (1991) 2121.
- [67] J. R. S. do Nascimento, *Estudo da Teoria de Chern-Simons no Gauge de Coulomb*, Tese de Doutorado, IFUSP, São Paulo, 1995.

- [68] G. S. Adkins, Phys. Rev. D **27** (1983) 1814.
- [69] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, 1963.