UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

PARTÍCULAS E CORDAS EM ESPAÇOS COM MÉTRICAS DEGENERADAS

SBI-IFUSP

305M810T3206

LUÍS ANTONIO CABRAL

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Marcelo Otávio Caminha Gomes (IFUSP)
Prof. Dr. Adilson José da Silva (IFUSP)
Prof. Dr. Nathan Jacob Berkovits (IFT/UNESP)
Prof. Dr. João Barcelos Neto (UFRJ)

Tese de Doutorado

submetida ao Instituto de Física
da Universidade de São Paulo

ORIENTADOR: PROF. DR. VICTOR DE OLIVEIRA RIVELLES

Sylvio Caminha
Prof. Sylvio Roberto Caminha
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

SÃO PAULO

1999

539.72
C117p
D
ex. 1

Sysmo
1071265

FICHA CATALOGRÁFICA

**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Cabral, Luís Antonio

Partículas e Cordas em Espaços com Métricas
Degeneradas. São Paulo, 1999.

Tese (Doutoramento) - Universidade de São Paulo.
Instituto de Física - Departamento de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Victor de Oliveira Rivelles
Área de Concentração: Física das Partículas Elementares
e Campos

Unitermos: 1. Sistemas Vinculados; 2. Partículas;
3. Cordas.

USP/IF/SBI-052/99

Resumo

Neste trabalho estudamos a dinâmica de partículas e cordas num campo gravitacional com métrica degenerada. Utilizamos o formalismo Hamiltoniano para determinar os vínculos da teoria e a dinâmica efetiva do sistema. Classificamos a estrutura dos vínculos de acordo com a forma da métrica e dimensão do espaço(-tempo). Obtemos também a representação das simetrias em termos de isometrias geradas por auto-vetores nulos da métrica.

Abstract

In this work we study the dynamics of particles and strings in a gravitational field with degenerate metric. We use the Hamiltonian formalism to find out the constraints and the effective dynamics of the system. We classify the constraint structure according to the form of the metric and the space(time) dimension. We also obtain the representation of the symmetries in terms of the isometries generated by the null eigenvectors of the metric.

Para a minha filha Clara.

Agradecimentos

É com grande satisfação que chego a esta etapa da minha formação para prestar a muitas pessoas os meus sinceros agradecimentos.

Agradeço com muita satisfação:

Ao meu orientador, o Prof. Rivelles, que me acompanhou em todas as fases deste trabalho, prestando toda ajuda necessária nos momentos mais importantes do projeto;

Aos funcionários do departamento pelo auxílio durante a minha permanência no IFUSP;

Aos colegas de vários projetos – Leônidas, Mônica, Otávio, Marcelo, Luiz, Cândido e outros;

Às amigas que me deram incentivo constante – Sandra, Joana, Lilian, Sílvia, Andréia, Dolores e Stela;

A todos os meus familiares que me transmitiram alegria e esperança;

À Camila e à Clara pela dedicação e paciência em toda a nossa existência;

À FAPESP pelo auxílio financeiro.

Conteúdo

1	Introdução	3
2	A Partícula Não Relativística	8
2.1	A Partícula em Campo de Fundo Gravitacional Não Degenerado	9
2.2	A Partícula num Campo de Fundo Gravitacional Degenerado	11
2.3	Vetores de Base Integráveis	14
2.4	Vetores de Base Não Integráveis	15
2.4.1	$D - r$ Par	15
2.4.2	$D - r$ Ímpar	16
2.5	Caso $N_\mu = 0$	17
2.6	Isometrias e Vínculos de Primeira Classe com Métricas Degeneradas	20
3	A Partícula Relativística	23
3.1	A Partícula num Campo de Fundo Gravitacional não Degenerado	24
3.2	A Partícula em Campo de Fundo Gravitacional Degenerado	26
3.2.1	Caso $D - r$ Par	29
3.2.2	Caso $D - r$ Ímpar	30
4	A Corda Bosônica	37
4.1	Algumas Soluções Clássicas para a Corda em Campos de Fundo Gravitacionais	38

4.2	Formalismo Hamiltoniano	41
4.2.1	Campo de Fundo Gravitacional não Degenerado	41
4.2.2	Campo de Fundo Gravitacional Degenerado	43
4.2.3	Caso $D - r$ Par	48
4.2.4	Caso $D - r$ Ímpar	50
4.3	Isometrias na Corda com Métrica Degenerada e Vínculos de Primeira Classe	54
4.4	Invariância Conforme em Nível Quântico	56
5	Conclusão	59
A	Propriedades dos Auto-Vetores Nulos em $D - r$ Ímpar	61
B	Dedução da Hamiltoniana Canônica da Corda com Métrica Degenerada e Vínculos Secundários	65
C	Dedução da Álgebra dos Vínculos para a Corda	72

Capítulo 1

Introdução

As singularidades têm um papel fundamental na relatividade geral [1]. Entretanto, não está claro como incorporá-las em uma teoria quântica da gravitação. As singularidades do espaço-tempo têm uma característica importante na gravitação quântica como demonstrado em processos envolvendo a radiação térmica de Hawking. No entanto, o nosso conhecimento atual para descrever o processo da evaporação de buracos negros até a sua extinção ainda está incompleto. Porém, a situação é menos limitada no contexto da teoria de cordas. Neste caso, a entropia dos buracos negros extremos e quase-extremos, pode ser calculada considerando a presença de D-branas próximas ao horizonte de eventos [2]. No acoplamento fraco, estas D-branas são descritas por uma teoria de gauge supersimétrica na qual é possível contar os estados relevantes para a entropia. Já que as D-branas estão localizadas próximas ao horizonte, as singularidades no interior do buraco negro ainda não foram tratadas completamente na teoria de cordas, porém, há algumas tentativas neste contexto [3].

As singularidades que dão lugar aos buracos negros manifestam-se no tensor de curvatura. O efeito deste tipo de singularidade na evolução quântica de partículas foi estudado recentemente em [4]. Neste caso, o argumento principal é que uma partícula movendo-se num espaço-tempo que é geodesicamente incompleto, possui uma evolução quântica bem

definida desde que o operador Hamiltoniano seja essencialmente auto-adjunto.

Há, também, um outro tipo de singularidade em que o tensor de curvatura não se torna singular. Isto acontece quando a métrica é degenerada, isto é, quando não possui inversa. Neste caso, se a métrica é degenerada em um conjunto de medida zero, i.e., se ocorre em pontos isolados do espaço, então a curvatura não diverge e a topologia do espaço-tempo pode mudar [5]. Este tipo de singularidade é também compatível com a estrutura causal do espaço-tempo [6].

As métricas degeneradas aparecem na relatividade geral na formulação de Palatini, onde a ação é definida em termos das tetradas e da conexão de Lorentz. Nesta formulação, a ação e as equações de movimento não dependem do inverso da tetrada e assim são bem definidas mesmo quando a tetrada é degenerada [5].

Em uma outra situação, as métricas degeneradas também aparecem como métricas induzidas em hipersuperfícies nulas [7], sendo a geometria da hipersuperfície considerada sob o ponto de vista do espaço alvo, ou seja, sob o ponto de vista extrínseco à hipersuperfície. Neste aspecto, a métrica do espaço alvo, que não é degenerada, se relaciona com a métrica da hipersuperfície imersa neste espaço. Nesta condição é possível definir uma métrica inversa *estendida* para a hipersuperfície nula. Por outro lado, as métricas degeneradas podem ser consideradas sob o ponto de vista intrínseco, ou seja, consideradas exclusivamente sob a hipersuperfície em que estão definidas sem recorrer a imersões em espaços com dimensão superior à hipersuperfície. Definidas desta forma, tornam-se métricas auxiliares para o estudo da radiação gravitacional [8], sendo que em quatro dimensões são métricas de posto três.

Em outros contextos, temos a presença de tetradas e as generalizações destas para outras dimensões, que denominam-se *vielbeins*, que também são degenerados. Neste aspecto, há a formulação de Ashtekar da relatividade geral, que utiliza um espaço de fase com variáveis complexas definidas por meio de uma teoria de gauge do tipo Yang-Mills

com grupo $SO(3)$ [9]. O formalismo de Ashtekar permanece bem definido quando a métrica obtida na sua formulação é degenerada. Devido a esta propriedade da métrica, muitas questões relativas a esta formulação continuam sendo objeto de pesquisa recente [10]. Além da formulação de Ashtekar, existem outras teorias da gravitação em duas e três dimensões que podem ser formuladas como teorias de gauge topológicas do tipo BF e de Chern-Simons [11]. Como um exemplo de uma teoria abeliana do tipo BF, devemos ter uma ação em uma variedade M , com dimensão arbitrária, independente do tensor métrico e escrita em termos de campos na formulação das formas diferenciais. Esta ação irá fornecer uma descrição da cohomologia de de Rham sobre M [12]. Estas teorias surgem também como uma generalização da teoria de Chern-Simons para dimensões maiores que três, permitindo obter generalizações dos invariantes topológicos na teoria dos nós obtidos inicialmente em [13]. As teorias topológicas estão envolvidas numa descrição de uma fase topológica da gravitação quântica na qual a tetrada se anula e a invariância por difeomorfismo é quebrada [14]. Adicionalmente, as teorias topológicas foram recentemente utilizadas com um meio auxiliar de se obter soluções degeneradas na relatividade geral [15].

No contexto da teoria de cordas foi demonstrado que cordas podem se propagar em campos de fundo gravitacionais degenerados. Quando as coordenadas da corda satisfazem determinadas condições a métrica é degenerada de posto um [16]. Sabemos, também, que p-branas portando-se como instantons são descritas por uma métrica degenerada na hipersuperfície de evolução [17]. Cordas com tensão nula [18] e D-branas com tensão nula [19], são também descritas por uma ação que envolve métricas degeneradas. Neste caso, a ação é construída na formulação de primeira ordem, i.e., linear com respeito às derivadas das coordenadas do espaço alvo, sendo que a métrica auxiliar é degenerada e não o campo de fundo gravitacional. A forma da métrica degenerada é do tipo $g_{\mu\nu} = E_\mu^A E_\nu^B \eta_{AB}$ com E_μ^A formando matrizes não quadradas e retratando uma imersão que implica num espaço

tangente com métrica η_{AB} e dimensão menor que a da hipersuperfície de evolução.

Tudo o que consideramos até o momento indica que as métricas degeneradas podem ter um papel importante na gravitação quântica. Num tratamento em nível clássico a principal consequência das métricas degeneradas é permitir a mudança de topologia do espaço-tempo [5]. Porém como não observamos este processo diretamente deve existir algum mecanismo que o suprime, provavelmente em nível quântico. Por outro lado, o comportamento da matéria num espaço-tempo com métrica degenerada não tem sido propriamente explorado. Para o caso das teorias de campo topológicas não há presença de métricas na ação dos modelos, assim, espaço-tempos com métricas degeneradas, podem ser considerados nestas teorias. No entanto, quando consideramos campos de matéria com termos cinéticos, o acoplamento da gravitação requer a introdução de campos tensoriais contravariantes. O exemplo mais simples é a ação do campo escalar que depende do inverso da métrica. Para tratar estes casos foi proposto um procedimento [20] que não necessita de campos tensoriais contravariantes e assim são obtidas ações numa formulação estendida que admite tetradas degeneradas, além de conter o limite original da teoria quando a tetrada é inversível.

Uma importante classe de matéria, que pode ser acoplada ao tensor métrico, é constituída por partículas e cordas [21]. A ação e as equações de movimento das partículas e cordas não dependem do inverso da métrica e são bem definidas mesmo quando a métrica se torna degenerada. Nesta tese, iremos considerar a dinâmica de partículas e cordas movendo-se em espaços ou espaço-tempos com uma métrica degenerada. Os espaços em estudo estão associados a regiões com métrica degenerada em toda extensão. Analisaremos a estrutura dos vínculos impostos pela métrica degenerada e encontraremos os graus de liberdade efetivos que descrevem o movimento de partículas e cordas. Desta forma obteremos a dinâmica efetiva para partículas e cordas em movimento num campo de fundo gravitacional degenerado. Iremos considerar inicialmente a partícula não relativística

no Capítulo 2. Este capítulo será desenvolvido em detalhes, visto que a análise dos vínculos contida nos capítulos seguintes terão alguns aspectos similares aos da partícula não relativística. Demonstramos, também, que as isometrias da métrica degenerada estão associadas às simetrias locais geradas pelos vínculos de primeira classe. No Capítulo 3 estudaremos a partícula relativística e no Capítulo 4 a corda bosônica. Neste capítulo discutimos também alguns aspectos em aberto da quantização da corda em campos de fundo gravitacional degenerados. No Capítulo 5 apresentaremos algumas observações finais e conclusões, bem como algumas questões que poderão ser exploradas no futuro.

Capítulo 2

A Partícula Não Relativística

Introdução

O modelo de uma partícula não relativística em campo de fundo gravitacional tem sido objeto de bastante pesquisa na literatura [22]. Quando a métrica do espaço admite inversa, ou seja, não é degenerada, não há vínculos no sistema. Apesar disto, a ação e as equações de movimento não apresentam o inverso da métrica, de tal forma que possamos considerar nestas, o caso em que a métrica é degenerada. Porém, quando a métrica é degenerada, surgem vínculos já que neste caso não podemos isolar todas as velocidades em função dos momentos canonicamente conjugados. Sendo assim, utilizamos o procedimento de Dirac [23] para o desenvolvimento do formalismo Hamiltoniano para sistemas vinculados e verificaremos que ainda surgem vínculos adicionais com uma estrutura não trivial.

O caso degenerado apresenta uma estrutura rica de vínculos. No formalismo Hamiltoniano, temos situações que dependem do posto da métrica e da dimensão do espaço que influenciam na existência de uma determinada classe de vínculos. Esta estrutura de vínculos será bastante útil como modelo simplificado no tratamento dos vínculos do caso da corda em campo de fundo gravitacional.

Como discutimos na Introdução geral, o fato da métrica poder estar definida sem

inversa na ação e nas equações de movimento de um modelo, abre uma linha de análise que terá resultados não triviais, visto que para um espaço com métrica degenerada, o movimento de uma partícula neste espaço admite uma característica notavelmente distinta do caso em que a métrica admite uma inversa. É o que veremos nas seções a seguir.

2.1 A Partícula em Campo de Fundo Gravitacional Não Degenerado

Uma partícula sujeita a um campo gravitacional é descrita pela ação

$$S = \frac{1}{2}m \int_{t_1}^{t_2} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j dt, \quad (2.1)$$

onde m é a massa da partícula. A partir desta ação as equações de movimento obtidas são

$$g_{ij} \ddot{x}^j + \Gamma_{ijl} \dot{x}^i \dot{x}^j = 0, \quad (2.2)$$

onde

$$\Gamma_{ijl} = \frac{1}{2} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}).$$

Notemos que a ação e as equações de movimento estão bem definidas mesmo que a métrica não possua inversa. Ao considerarmos o momento canonicamente conjugado a x^i ,

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = m \dot{x}^j g_{ij}, \quad (2.3)$$

se g_{ij} não for degenerada, temos que

$$\dot{x}^j = g^{ji} \frac{P_i}{m}. \quad (2.4)$$

Com isto, podemos construir a Hamiltoniana canônica associada a esta ação a partir de $H_c = P_i \dot{x}^i - L$, obtendo

$$H_c = \frac{1}{2m} g^{ij} P_i P_j. \quad (2.5)$$

Neste caso, o sistema não possui vínculos, o que possibilita estudar a evolução da partícula utilizando H_c .

Adicionalmente, devemos notar que com o determinante de g_{ij} sendo diferente de zero, podemos escrever

$$g_{ij} = e_i^a e_j^b h_{ab}, \quad (2.6)$$

onde, e_i^a são vetores de base com $i = 1, \dots, D$; $a = 1, \dots, D$ e h_{ab} é a métrica euclideana, i.e. plana, não degenerada, com assinatura $(+ + + \dots +)$ e com o mesmo posto de g_{ij} .

Já no caso em que g_{ij} possui determinante nulo, ou seja, sendo uma métrica degenerada, uma forma de definir g_{ij} com posto arbitrário é considerar os vetores de base, assim como a métrica h_{ab} , como tendo os índices a num intervalo numericamente inferior ao dos índices i . Neste caso, o posto de g_{ij} é numericamente inferior à dimensão D do espaço. Desta forma iremos considerar uma métrica degenerada conforme veremos na seção a seguir.

2.2 A Partícula num Campo de Fundo Gravitacional Degenerado

Vamos considerar um espaço genérico com dimensão D que possui uma métrica degenerada. Vamos definir a métrica degenerada de dimensão D e posto r por

$$g_{ij} = e_i^a e_j^b h_{ab}, \quad (2.7)$$

onde e_i^a são vetores de base com $i = 1, \dots, D$; $a = 1, \dots, r$ ($r < D$); h_{ab} é uma métrica euclideana, i.e. plana, não degenerada e com assinatura $(++ \dots +)$, porém com posto diferente de g_{ij} . Notemos também que e_i^a não são matrizes quadradas e assim não possuem inversa.

Desta maneira o determinante de g_{ij} é zero e assim a métrica possui $D - r$ auto-valores nulos, o que implica em $g_{ij} U_\alpha^j = 0$, sendo U_α^j os $(D - r)$ auto-vetores associados.

Para uma partícula de massa m movendo-se em um espaço com métrica degenerada, vamos considerar a lagrangeana como sendo

$$L = \frac{1}{2} m g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = \frac{1}{2} m \dot{x}^a \dot{x}^b h_{ab}, \quad (2.8)$$

onde $\dot{x}^a = e_i^a \dot{x}^i$. O momento canonicamente conjugado é então

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = m e_i^a \dot{x}_a, \quad (2.9)$$

onde $\dot{x}_a = h_{ab} \dot{x}^b$. Como a métrica é degenerada, não podemos inverter esta equação para obtermos as velocidades $\dot{x}^i$ em termos dos momentos P_i . Isto indica a presença de vínculos no sistema. Se considerarmos os $D - r$ auto-vetores U_α^j aplicados em (2.9), temos

$$P_i U_\alpha^i = m g_{ij} U_\alpha^i \dot{x}^j = 0, \quad (2.10)$$

implicando nos vínculos primários

$$\Phi_\alpha = P_i U_\alpha^i, \quad (2.11)$$

onde escolhemos $\alpha = r + 1, \dots, D$ representando $D - r$ componentes.

Podemos achar uma forma explícita para U_α^i a partir das equações dos momentos (2.9). Nestas equações podemos resolver as velocidades em função dos momentos apenas para as r componentes iniciais:

$$\begin{aligned} P_1 &= m e_1^a \dot{x}_a \\ &\vdots \\ P_r &= m e_r^a \dot{x}_a, \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde obtemos $\dot{x}_a = \dot{x}_a(P_{i'})$, $(i' = 1, \dots, r)$.

As $D - r$ equações restantes,

$$\begin{aligned} P_{r+1} &= m e_{r+1}^a \dot{x}_a \\ &\vdots \\ P_D &= m e_D^a \dot{x}_a, \end{aligned} \quad (2.13)$$

são relações algébricas que formam os vínculos conforme veremos a seguir.

Antes, devemos notar que e_i^a possui inversa em um setor reduzido, definida por $\bar{e}_a^{i'}$ com $i' = 1, \dots, r$ e $a = 1, \dots, r$. Neste caso a matriz associada é quadrada e inversível.

Então para

$$P_{i'} = m e_{i'}^a \dot{x}_a, \quad (2.14)$$

onde podemos usar que

$$\bar{e}_a^{i'} e_{i'}^a = \delta_{i'}^{i'}, \quad (2.15)$$

temos

$$\frac{\bar{e}_a^{i'} P_{i'}}{m} = \dot{x}_a. \quad (2.16)$$

Considerando os $D - r$ momentos restantes P_α ,

$$P_\alpha = m e_a^b \dot{x}_b = m e_a^b \frac{\tilde{e}_b^{j'} P_{j'}}{m}, \quad (2.17)$$

temos os $D - r$ vínculos

$$\Phi_\alpha = P_\alpha - e_a^b \tilde{e}_b^{j'} P_{j'} = 0 \quad (2.18)$$

Os vínculos, na forma deduzida acima, permitem obter uma forma explícita para U_α^i em (2.11),

$$P_i U_\alpha^i = 0 = P_\alpha - e_a^b \tilde{e}_b^{j'} P_{j'}, \quad (2.19)$$

ou seja,

$$U_\alpha^i = \delta_\alpha^i - e_a^b \tilde{e}_b^{j'} \delta_{j'}^i. \quad (2.20)$$

A Hamiltoniana canônica do sistema é dada por

$$H_c = P_i \dot{x}^i - L = \frac{1}{2m} \tilde{g}^{i'j'} P_{i'} P_{j'}, \quad (2.21)$$

com $\tilde{g}^{i'j'} = \tilde{e}_a^{i'} \tilde{e}_b^{j'} h^{ab}$ sendo a inversa da métrica não degenerada $\tilde{g}_{i'j'} = \tilde{e}_i^a \tilde{e}_j^b h_{ab}$.

Levando-se em conta os vínculos primários, a Hamiltoniana será

$$H = H_c + \lambda^\alpha \Phi_\alpha, \quad (2.22)$$

onde λ^α são os multiplicadores de Lagrange associados aos vínculos Φ_α .

Construímos também a álgebra de Poisson dos vínculos:

$$\{\Phi_\alpha, \Phi_\beta\} = M_{\alpha\beta}, \quad M_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}^{i'} P_{i'} \quad (2.23)$$

$$M_{\alpha\beta}^{i'} = \partial_{[\alpha} (e_{\beta]}^a e_a^{i'}) - e_{[\alpha}^a \tilde{e}_a^{j'} \partial_{j'} (e_{\beta]}^b \tilde{e}_b^{i'}) \quad (2.24)$$

A evolução temporal do vínculos, dada por $\dot{\Phi}_\alpha = \{\Phi_\alpha, H\}$, como condição de consistência, fornece:

$$\dot{\Phi}_\alpha = N_\alpha + M_{\alpha\beta} \lambda^\beta = 0, \quad (2.25)$$

onde

$$\begin{aligned} N_\alpha &= N_\alpha^{i'j'} P_{i'} P_{j'}, \\ N_\alpha^{i'j'} &= \frac{1}{2m} \left[-\partial_\alpha \bar{g}^{i'j'} + e_\alpha^a \bar{e}_a^{k'} \partial_{k'} \bar{g}^{i'j'} - 2\bar{g}^{k'i'} \partial_{k'} (e_\alpha^a \bar{e}_a^{j'}) \right]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Vamos a seguir considerar os casos em que os vetores de base e_i^a são integráveis ou não.

2.3 Vetores de Base Integráveis

Vamos considerar a situação em que e_i^a é integrável, ou seja, se satisfaz a $\partial_{[i} e_{j]}^a = 0$ em todo o espaço.

Neste caso, $M_{\alpha\beta} = 0$, $N_\alpha = 0$ e $\Phi_\alpha = 0$, significa então que Φ_α são os únicos vínculos do sistema e são todos de primeira classe.

A simetria local gerada pelos vínculos é dada por

$$\delta x^{i'} = \epsilon^\alpha \{ \Phi_\alpha, x^{i'} \} = \epsilon^\alpha e_\alpha^b \bar{e}_b^{i'} \quad \delta x^\alpha = -\epsilon^\alpha, \quad (2.27)$$

onde ϵ^α é o parâmetro infinitesimal.

A Lagrangiana do sistema pode também ser escrita como

$$L = \frac{1}{2} m \Delta^a \Delta^b h_{ab}, \quad \Delta^a = \bar{e}_i^a \dot{x}^{i'} + e_\alpha^a \dot{x}^\alpha. \quad (2.28)$$

A simetria dada por (2.27), implica em $\delta \Delta^a = 0$, que faz a Lagrangiana ser invariante.

Usando (2.27), todos os x^α podem ser fixados por uma escolha de gauge, pois temos $D - r$ vínculos de primeira classe Φ_α e então restam $D - (D - r) = r$ graus de liberdade. Desta forma a Lagrangiana (2.28) passa a ser

$$L = \frac{1}{2} m \bar{g}_{i'j'} \dot{x}^{i'} \dot{x}^{j'}, \quad (2.29)$$

que descreve uma partícula em movimento num espaço com uma métrica não degenerada $\hat{g}_{ij}$ em r dimensões.

2.4 Vetores de Base Não Integráveis

Neste caso $\partial_{[i}e^a_{j]} \neq 0$, o que faz $M_{\alpha\beta} \neq 0$. Então a condição de consistência (2.25) precisa ser resolvida para os multiplicadores de Lagrange λ^α , o que envolve a utilização do inverso de $M_{\alpha\beta}$. Porém $M_{\alpha\beta}$ é uma matriz antissimétrica quadrada de ordem $(D - r)$ e a existência da sua inversa dependerá então do valor de $(D - r)$. Devido a isto, existem duas possibilidades, i.e., $D - r$ par ou ímpar.

2.4.1 $D - r$ Par

Neste caso $M_{\alpha\beta}$ possui uma inversa $M^{\alpha\beta}$ de tal forma que

$$\lambda^\alpha = -M^{\alpha\beta} N_\beta. \quad (2.30)$$

Todos os multiplicadores de Lagrange λ^α são resolvidos. Então, todos os vínculos são de segunda classe. Desta forma o número dos graus de liberdade será dado por $D - \frac{1}{2}(D - r) = \frac{1}{2}(D + r)$.

Adicionalmente podem ocorrer outras restrições na métrica que implicam em $\det(M_{\alpha\beta}) = 0$ no caso $D - r$ par. Assim teremos uma variedade de situações entre os casos extremos $D - r$ par e ímpar. Porém vamos considerar apenas estes extremos, o que é suficiente para percebermos como se torna a estrutura dos vínculos do caso com métrica degenerada envolvendo $\partial_{[i}e^a_{j]} \neq 0$.

2.4.2 $D - r$ Ímpar

Neste caso $\det(M_{\alpha\beta}) = 0$ e com isto não podemos resolver (2.25) para todos os λ^α . O número de vínculos Φ_α também é ímpar, significando que existem vínculos de primeira classe entre os Φ_α ou existem novos vínculos. Da mesma forma como analisamos as velocidades em (2.12) e (2.13), seguimos um raciocínio similar para estudar as equações em (2.25). Visto que M possui inversa para as primeiras $D - r - 1$ componentes, vamos resolver as primeiras $D - r - 1$ componentes de (2.25) para obtermos as componentes associadas a $\lambda^{\alpha'}$:

$$\lambda^{\beta'} = M^{\alpha'\beta'} (N_{\alpha'} + M_{\alpha', D-r} \lambda^{D-r}), \quad (2.31)$$

com $\alpha', \beta' = 1, \dots, D - r - 1$, onde devemos notar que reescalamos os índices α para α' envolvendo uma contagem efetiva do número de componentes utilizadas, ou seja, $(D-r-1)$ componentes.

A componente restante $\dot{\Phi}_{D-r}$ passa a ser o novo vínculo

$$\begin{aligned} \chi = \dot{\Phi}_{D-r} &= N_{D-r} + M_{D-r, \beta'} \lambda^{\beta'} \\ &= (N_{D-r} - M_{D-r, \beta'} M^{\alpha'\beta'} N_{\alpha'}) \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde utilizamos (2.31).

Devemos notar que como em (2.25) obtemos os vínculos através dos auto-vetores com auto-valores correspondentes nulos, é de se esperar que o mesmo aconteça com χ . Podemos então definir o auto-vetor de M neste caso, conforme está descrito no apêndice A.

A álgebra de Poisson para os novos vínculos é dada por

$$\{\Phi_\alpha, \chi\} = \partial_{P'} \Phi_\alpha \frac{\partial \chi}{\partial P_{P'}} - \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial P_{P'}} \partial_{P'} \chi - \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial P_\beta} \partial_\beta \chi \quad (2.33)$$

A Hamiltoniana fica então da seguinte forma

$$H = H_c + \lambda^\alpha \Phi_\alpha + \mu \chi, \quad (2.34)$$

onde μ é o novo multiplicador de Lagrange associado ao vínculo χ . A partir da Hamiltoniana (2.34), as condições de consistência serão agora dadas por:

$$\dot{\chi} = \{\chi, H_0\} + \lambda^{\alpha'} \{\chi, \Phi_{\alpha'}\} + \lambda^{D-r} \{\chi, \Phi_{D-r}\} = 0, \quad (2.35)$$

$$\dot{\Phi}_{\alpha'} = N_{\alpha'} + \lambda^{\beta'} M_{\alpha'\beta'} + \lambda^{D-r} M_{\alpha', D-r} + \mu \{\Phi_{\alpha'}, \chi\} = 0 \quad (2.36)$$

$$\dot{\Phi}_{D-r} = N_{D-r} + \lambda^{\beta'} M_{D-r, \beta'} + \mu \{\Phi_{D-r}, \chi\} = 0 \quad (2.37)$$

A partir de (2.36), sabendo que M possui inversa, obtemos então $\lambda^{\beta'}$:

$$\lambda^{\beta'} = -M^{\alpha'\beta'} \left(N_{\alpha'} + \lambda^{D-r} M_{\alpha', D-r} + \mu \{\Phi_{\alpha'}, \chi\} \right). \quad (2.38)$$

Substituindo $\lambda^{\beta'}$ na equação (2.37), resulta em

$$N_{D-r} - M^{\alpha'\beta'} N_{\alpha'} M_{D-r, \beta'} + \mu \left[-M^{\alpha'\beta'} \{\Phi_{\alpha'}, \chi\} M_{D-r, \beta'} + \{\Phi_{D-r}, \chi\} \right] = 0, \quad (2.39)$$

que equivale a

$$\chi + \mu \left[-M^{\alpha'\beta'} \{\Phi_{\alpha'}, \chi\} M_{D-r, \beta'} + \{\Phi_{D-r}, \chi\} \right] = 0, \quad (2.40)$$

que na superfície dos vínculos implica em $\mu = 0$. Além disto, da equação (2.35) obtemos o valor de λ^{D-r} :

$$\lambda^{D-r} = \frac{\{\chi, H_0\} + M^{\alpha'\beta'} N_{\alpha'} \{\chi, \Phi_{\beta'}\}}{\{\chi, \Phi_{D-r}\} - M^{\alpha'\beta'} M_{\alpha', D-r} \{\chi, \Phi_{\beta'}\}}. \quad (2.41)$$

Determinamos então todos os multiplicadores de Lagrange, de modo que isto faz com que todos os vínculos sejam de segunda classe. Como temos $(D - r + 1)$ vínculos de segunda classe, o espaço de fase tem $2D - (D - r + 1) = D + r - 1$ dimensões.

2.5 Caso $N_\mu = 0$

Das equações da evolução de Φ_α , sabemos que

$$N_\alpha^{i'j'} = \frac{1}{2m} [-\partial_\alpha \tilde{g}^{i'j'} + e_\alpha^a \tilde{e}_a^{k'} \partial_{k'} \tilde{g}^{i'j'} - 2\tilde{g}^{k'i'} \partial_{k'} (e_\alpha^a \tilde{e}_a^{j'})]. \quad (2.42)$$

Entretanto, podemos escrever $N_{\alpha}^{ij'}$ em termos dos vetores de base, ou seja,

$$N_{\alpha}^{ij'} = \frac{1}{2m} \left[-\partial_{\alpha} (\tilde{e}_a^{i'} \tilde{e}_b^{j'} \delta^{ab}) + e_{\alpha}^b \tilde{e}_b^{k'} \partial_{k'} (\tilde{e}_c^{i'} \tilde{e}_d^{j'} \delta^{cd}) + -2\tilde{e}_m^{i'} \tilde{e}_n^{k'} \delta^{mn} \partial_{k'} (e_{\alpha}^b \tilde{e}_b^{j'}) \right] \quad (2.43)$$

$$= \frac{1}{2m} \left[-2\partial_{\alpha} \tilde{e}_a^{i'} \tilde{e}_b^{j'} \delta^{ab} + 2e_{\alpha}^b \tilde{e}_b^{k'} \partial_{k'} \tilde{e}_c^{i'} \tilde{e}_d^{j'} \delta^{cd} + -2\tilde{e}_c^{i'} \tilde{e}_d^{k'} \delta^{cd} (\partial_{k'} e_{\alpha}^b \tilde{e}_b^{j'} + e_{\alpha}^b \partial_{k'} \tilde{e}_b^{j'}) \right]. \quad (2.44)$$

Usando que

$$\partial_{\alpha} \tilde{e}_a^{i'} = -\tilde{e}_a^{k'} \tilde{e}_c^{i'} \partial_{\alpha} \tilde{e}_c^k, \quad (2.45)$$

$$\partial_{k'} \tilde{e}_d^{j'} = -\tilde{e}_d^{i'} \tilde{e}_a^{j'} \partial_{k'} \tilde{e}_a^i, \quad (2.46)$$

obtemos

$$N_{\alpha}^{ij'} = \tilde{e}_a^{k'} \tilde{e}_c^{i'} \tilde{e}_b^{j'} \delta^{ab} (\partial_{[\alpha} \tilde{e}_{k']}^c - f_{\alpha}^{i'} \partial_{[i'} \tilde{e}_{k']}^c]), \quad (2.47)$$

onde

$$f_{\alpha}^{i'} = \tilde{e}_{i'}^{\nu} e_{\alpha}^{\nu}. \quad (2.48)$$

Logo,

$$N_{\alpha}^{ij'} P_i P_{j'} = N_{\alpha} = (\partial_{[\alpha} \tilde{e}_{k']}^c - f_{\alpha}^{i'} \partial_{[i'} \tilde{e}_{k']}^c) \tilde{e}_a^{k'} \delta^{ab} \tilde{P}_b \tilde{P}_c, \quad (2.49)$$

onde $\tilde{P}_b = \tilde{e}_b^{i'} P_{i'}$.

Podemos então concluir que se os vetores de base satisfazem a

$$\partial_{\alpha} \tilde{e}_{k'}^c - \partial_{k'} \tilde{e}_{\alpha}^c = e_{\alpha}^b \tilde{e}_b^{i'} (\partial_{i'} \tilde{e}_{k'}^c - \partial_{k'} \tilde{e}_{i'}^c), \quad (2.50)$$

temos $N_{\alpha} = 0$. Neste caso, veremos a seguir como ficará $M_{\alpha\beta}$. Substituindo (2.50) nas componentes de $M_{\alpha\beta}$, temos que

$$M_{\alpha\beta} = \tilde{e}_a^{i'} P_{i'} (\partial_{[\alpha} e_{\beta]}^a - e_{[\alpha}^b e_{\beta]}^c \tilde{e}_a^{k'} \tilde{e}_b^{j'} \partial_{k'} \tilde{e}_j^c). \quad (2.51)$$

Então, $N_\alpha = 0$, com as condições (2.50), implicam em

$$M_{\alpha\beta} = \bar{e}_a^i P_i \left(\partial_{[\alpha} e_{\beta]}^a - f_{[\alpha}^{k'} f_{\beta]}^{l'} \partial_{k'} \bar{e}_{l'}^c \right) \quad (2.52)$$

Podemos notar que mesmo com $\partial_{[i} e_{j]}^a \neq 0$, a partir das relações acima, ainda podemos ter $N_\alpha = 0 = M_{\alpha\beta}$, caso que ocorre diretamente quando $\partial_{[i} e_{j]}^a = 0$.

A relação entre $N_\alpha = 0 = M_{\alpha\beta}$ com $\partial_{[i} e_{j]}^a \neq 0$ ainda poderá revelar propriedades geométricas que relacionam os casos integrável e não integrável. Isto será tratado em um futuro projeto.

Vamos analisar o caso em que $N_\alpha = 0$ e $M_{\alpha\beta} \neq 0$. Neste caso,

$$\dot{\Phi}_\alpha = M_{\alpha\beta} \lambda^\beta = 0. \quad (2.53)$$

Para $D - r$ par existe a inversa $M^{\alpha\beta}$. Então,

$$\lambda^\beta M_{\alpha\beta} M^{\alpha\rho} = 0, \quad (2.54)$$

o que resulta $\lambda^\rho = 0$.

Para $D - r$ ímpar não existe a inversa $M^{\alpha\beta}$. Mas

$$M_{\alpha\beta} \lambda^\beta = \lambda^{\beta'} M_{\alpha\beta'} + \lambda^{D-r} M_{\alpha D-r} = 0, \quad (2.55)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \lambda^{\beta'} M_{\alpha'\beta'} + \lambda^{D-r} M_{\alpha' D-r} &= 0 \\ \lambda^{\beta'} M_{D-r\beta'} &= 0. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Segue que

$$\lambda^{\beta'} = -\lambda^{D-r} M_{\alpha' D-r} M^{\alpha'\beta'}, \quad (2.57)$$

ficando λ^{D-r} indeterminado.

Mas $\{\phi_\alpha, \phi_\beta\} \neq 0$, o que implica num conjunto com um número ímpar de vínculos de segunda classe. Neste caso existirá uma combinação dos vínculos que será de primeira classe.

Se considerarmos as combinações

$$\Phi_{\beta'} = 0 \quad \Gamma = \Phi_{D-r} - M_{\alpha'D-r} M^{\alpha'\beta'} \Phi_{\beta'} = 0, \quad (2.58)$$

verificamos que

$$\{\Phi_{\beta'}, \Gamma\} = \{\Phi_{\beta'}, \Phi_{D-r}\} - \{\Phi_{\beta'}, M_{\alpha'D-r} M^{\alpha'\beta'} \Phi_{\beta'}\} = M_{\beta'D-r} - M_{\beta'D-r} = 0. \quad (2.59)$$

Analogamente $\{\Phi_{D-r}, \Gamma\} = 0$. Então temos que $\Phi_{\beta'}$ são de segunda classe e Γ é de primeira classe. Podemos verificar ainda que $\dot{\Gamma} = 0 = \dot{\Phi}_{\alpha'}$.

Então concluímos que para o caso em que $N_\alpha = 0$ e $M_{\alpha\beta} \neq 0$ temos, para $D - r$ ímpar, $D - r - 1$ vínculos de segunda classe e um vínculo de primeira classe de tal forma que o sistema terá $D + r - 1$ graus de liberdade no espaço de fase. Para $D - r$ par há $D - r$ vínculos de segunda classe implicando em um sistema com $D + r$ graus de liberdade no espaço de fase.

2.6 Isometrias e Vínculos de Primeira Classe com Métricas Degeneradas

Uma isometria é definida como um automorfismo de uma variedade, sendo assim, é uma transformação que preserva a métrica da variedade. A derivada de Lie da métrica g_{ij} com respeito ao vetor de Killing K_α é que representa a isometria [24]. Em componentes, isto significa

$$(\mathcal{L}_{K_\alpha} g)_{ij} = K_\alpha^m \partial_m g_{ij} + (\partial_i K_\alpha^m) g_{mj} + (\partial_j K_\alpha^m) g_{im} = 0, \quad (2.60)$$

onde $\alpha = 1, \dots, r$ é o índice associado ao número de vetores de Killing existentes para uma determinada isometria; m é o índice das componentes de um vetor K_α .

Para a Lagrangiana da partícula não relativística num fundo gravitacional, escrita em (2.8), consideremos a seguinte transformação:

$$\delta x^i = -\epsilon^\alpha K_\alpha^i, \quad (2.61)$$

onde ϵ^α é um parâmetro infinitesimal constante.

Com (2.61), vejamos como a Lagrangiana em (2.8) se transforma, ou seja,

$$\delta L = m\left(\frac{1}{2}\delta g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j + g_{ij}\dot{x}^i\delta\dot{x}^j\right), \quad (2.62)$$

onde temos

$$\begin{aligned} \delta g_{ij} &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \delta x^l \\ &= -\partial_l g_{ij} \epsilon^\alpha K_\alpha^l, \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} \delta\dot{x}^i &= -(\epsilon^\alpha K_\alpha^i)' \\ &= -\epsilon^\alpha \partial_j K_\alpha^i \dot{x}^j - \dot{\epsilon}^\alpha K_\alpha^i. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Substituindo (2.63) e (2.64) em (2.62), temos

$$\begin{aligned} \delta L &= -m\epsilon^\alpha \left(\frac{1}{2}K_\alpha^l \partial_l g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j + g_{ij} \partial_l K_\alpha^j \dot{x}^i \dot{x}^l\right) - m\dot{\epsilon}^\alpha K_\alpha^i g_{ij} \dot{x}^j \\ &= -\frac{1}{2}m\epsilon^\alpha (K_\alpha^l \partial_l g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j + \partial_l K_\alpha^j g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^l + \partial_l K_\alpha^i g_{ij} \dot{x}^j \dot{x}^l) - m\dot{\epsilon}^\alpha K_\alpha^i g_{ij} \dot{x}^j \\ &= -\frac{1}{2}m\epsilon^\alpha (K_\alpha^l \partial_l g_{ij} + g_{ij} \partial_i K_\alpha^l + g_{il} \partial_j K_\alpha^l) \dot{x}^i \dot{x}^j - m\dot{\epsilon}^\alpha K_\alpha^i g_{ij} \dot{x}^j. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Então, para a transformação (2.61), a Lagrangiana é invariante desde que a métrica satisfaça à condição de isometria (2.60) e o parâmetro ϵ^α seja constante.

Devemos notar que tanto para a definição de isometria em (2.60) como para a transformação infinitesimal efetuada na Lagrangiana não foi necessário o inverso de g_{ij} . Com isto, podemos analisar tais operações no caso em que a métrica é degenerada.

Neste caso, vamos considerar a métrica definida em (2.7) sabendo que esta possui $D-r$ auto-vetores nulos U_α^i que implicarão em $D-r$ vínculos $\Phi_\alpha = 0$. Conforme demonstrado na Seção 2.2 do Capítulo 2, sabemos que quando os vetores de base satisfazem a $\partial_i e_j^a = 0$, os vínculos $\Phi_\alpha = 0$ são de primeira classe. Os vínculos sendo de primeira classe geram as transformações (2.27) que deixam a Lagrangiana na forma (2.28) invariante. Entretanto, ao considerarmos as transformações (2.27) reescritas como

$$\delta x^i = -\epsilon^\alpha(t) U_\alpha^i, \quad (2.66)$$

temos que a Lagrangiana na forma (2.8) se transforma proporcionalmente a

$$U_\alpha^m \partial_m g_{ij} + (\partial_i U_\alpha^m) g_{mj} + (\partial_j U_\alpha^m) g_{im}, \quad (2.67)$$

que ao compararmos com (2.60), corresponde a $(\mathcal{L}_{U_\alpha} g)_{ij}$. Com isto, temos que a Lagrangiana é invariante se ocorrer uma isometria para a métrica degenerada. Nesta isometria os auto-vetores nulos correspondem aos vetores de Killing.

Devemos notar que para a ação com métrica degenerada, existe uma característica especial, i.e., a transformação infinitesimal (2.66) já é local, ou seja, o parâmetro ϵ^α depende do tempo, ao contrário de uma métrica que não é degenerada. Esta localidade é devido a transformação (2.66) ser gerada por vínculos de primeira classe. Para o caso em que a métrica não é degenerada, não existem vínculos primários e nem os de primeira classe porque não há auto-vetores nulos para esta métrica. Assim, para haver uma isometria, no caso de uma métrica não degenerada, que permita a invariância da Lagrangiana, é necessário que o parâmetro ϵ^α seja constante e a derivada de Lie seja considerada com vetores de Killing específicos de acordo com a geometria do espaço. Neste caso a condição de isometria é a usual, ou seja, é considerada como o anulamento da derivada covariante simetrizada do vetor de Killing [25].

Capítulo 3

A Partícula Relativística

Introdução

Uma partícula relativística massiva movendo-se num espaço-tempo de Minkowski com D dimensões é descrita por uma ação proporcional ao comprimento da trajetória da partícula ao longo da linha de universo [26]. Ao considerarmos o movimento em um espaço-tempo curvo de D dimensões com métrica $g_{\mu\nu}$ e determinante diferente de zero apresentaremos, na Seção 3.1, a formulação Hamiltoniana, cuja álgebra dos vínculos é de primeira classe.

Considerando que a ação e as equações de movimento na Seção 3.1 estão bem definidas mesmo no caso em que o determinante de $g_{\mu\nu}$ é nulo, ou seja, sem admitir a existência do inverso da métrica, construímos na Seção 3.2 o formalismo Hamiltoniano. Neste caso, encontramos vínculos adicionais que serão de primeira ou segunda classe, dependendo explicitamente da métrica. Apresentamos para cada forma da métrica a classificação dos vínculos e a dinâmica efetiva que descreve o movimento da partícula.

3.1 A Partícula num Campo de Fundo Gravitacional não Degenerado

A ação de uma partícula relativística de massa m , movendo-se em um espaço-tempo curvo descrito por uma métrica $g_{\mu\nu}$, é dada por:

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(\frac{1}{2e} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - \frac{e}{2} m^2 \right), \quad (3.1)$$

onde τ é o parâmetro de evolução e e é uma variável auxiliar que é conhecida como *einbein*.

As equações de movimento obtidas a partir de (3.1) são dadas por:

$$\frac{\delta S}{\delta e} = \frac{1}{2e^2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \frac{m^2}{2} = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\delta S}{\delta x^\rho} = g_{\mu\rho} \dot{x}^\mu + \Gamma_{\mu\nu\rho} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - \frac{\dot{e}}{e} g_{\mu\rho} \dot{x}^\mu = 0, \quad (3.3)$$

onde $\Gamma_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu})$ é o símbolo de Christoffel de primeira espécie. Devemos notar que a partir de (3.2) podemos obter a forma usual da ação que é proporcional ao comprimento da trajetória da partícula. Com isto substituímos e obtido de (3.2) em (3.1) e obtemos

$$S = m \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu g_{\mu\nu})^{1/2} d\tau. \quad (3.4)$$

A formulação em (3.4) é importante como uma motivação básica para definirmos, conforme veremos no capítulo seguinte, a ação de uma corda, uma vez que uma corda movendo-se no espaço-tempo gera uma superfície. Entretanto, a formulação da ação em (3.1) em termos da variável auxiliar e permite considerar o limite de massa zero.

Outro aspecto importante é que (3.1), (3.2) e (3.3) estão bem definidas mesmo se a métrica não possuir inversa.

Vamos considerar os momentos canonicamente conjugados a e e x^μ respectivamente dados por

$$\Pi_e = \frac{\partial L}{\partial \dot{e}} = 0, \quad P_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = e^{-1} g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu. \quad (3.5)$$

Considerando que $g_{\mu\nu}$ admite inversa, construímos a Hamiltoniana canônica, que é dada por

$$H_c = \frac{e}{2} (P_\mu P_\nu g^{\mu\nu} + m^2). \quad (3.6)$$

Como o momento associado a e não é proporcional à velocidade, temos a existência de um vínculo $\Pi_e = 0$ no sistema. Considerando a evolução deste vínculo, obtemos

$$\dot{\Pi}_e = \frac{e}{2} (P^2 + m^2) = 0, \quad (3.7)$$

onde $P^2 = P_\mu P_\nu g^{\mu\nu}$, que implica na existência do vínculo

$$\varphi = P^2 + m^2 = 0. \quad (3.8)$$

Como $\{\varphi, \Pi_e\} = 0$, então os vínculos $\varphi = 0$ e $\Pi_e = 0$ são de primeira classe e a Hamiltoniana canônica é diretamente proporcional a φ . Esta proporcionalidade é uma característica das teorias invariantes por reparametrização, sendo o vínculo de primeira classe o gerador da simetria.

Consideremos a seguir quais as propriedades que irão surgir no caso em que $g_{\mu\nu}$ não admite inversa.

3.2 A Partícula em Campo de Fundo Gravitacional Degenerado

Na seção anterior, observamos que para obtermos as velocidades associadas a x^μ necessitamos do inverso de $g_{\mu\nu}$. Assim como no caso da partícula não relativística, o fato de $g_{\mu\nu}$ ser degenerada implicará numa condição adicional, que representa a existência de um novo vínculo primário.

Utilizando a mesma ação, equações de movimento e momentos, considerados na seção anterior, vamos construir a Hamiltoniana canônica para o caso em que $g_{\mu\nu}$ é degenerada.

Vamos considerar novamente a métrica na seguinte forma:

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^{a'} e_\nu^{b'} \eta_{a'b'}, \quad \eta_{a'b'} = \text{diag}(-1, +1, +1, \dots, +1), \quad (3.9)$$

tal que $\mu = 0, 1, \dots, D-1$ $a' = 0, 1, \dots, r-1$. Verificamos facilmente que o determinante da métrica se anula.

Analogamente ao que ocorreu no caso da partícula não relativística, pelo fato de não podermos obter todos os $\dot{x}^\mu$ a partir de P_μ em (3.5), temos um vínculo primário adicional $\Phi_{\underline{\mu}}$ de tal forma que os vínculos primários são

$$\Pi_e = 0, \quad (3.10)$$

$$\Phi_{\underline{\mu}} = P_{\underline{\mu}} - e_{\underline{\mu}}^{a'} \tilde{e}_{a'}^{\nu'} P_{\nu'} = 0, \quad (3.11)$$

onde $\mu' = 0, 1, \dots, r-1$; $\underline{\mu} = r, \dots, D-1$.

Considerando (3.11) e utilizando a seguinte relação entre os vetores de base

$$\tilde{e}_{a'}^{\mu'} e_{\mu'}^{b'} = \delta_{a'}^{b'} \quad \tilde{e}_{a'}^{\mu'} e_{\nu'}^{a'} = \delta_{\nu'}^{\mu'}, \quad (3.12)$$

a Hamiltoniana canônica, $H_c = P_\mu \dot{x}^\mu - L$, é dada por:

$$H_c = \frac{e}{2} (\tilde{P}^2 + m^2), \quad (3.13)$$

onde,

$$\tilde{P}^2 = \tilde{g}^{\mu'\nu'} P_{\mu'} P_{\nu'}, \quad (3.14)$$

$$\tilde{g}^{\mu'\nu'} = \eta^{a'b'} \tilde{e}_{a'}^{\mu'} \tilde{e}_{b'}^{\nu'}. \quad (3.15)$$

Devemos notar em (3.14) e (3.15) que aparece apenas $\tilde{e}_{b'}^{\nu'}$ que é o setor de $g_{\mu\nu}$ que possui inversa. Neste setor os índices estão definidos por $\mu' = 0, 1, \dots, r-1$ e $a' = 0, 1, \dots, r-1$ de tal forma que $\tilde{e}_{a'}^{\mu'}$ se torna uma matriz quadrada que admite inversa.

Considerando os vínculos primários obtidos em (3.10) e (3.11), temos a Hamiltoniana primária

$$H_p = \frac{e}{2} (\tilde{P}^2 + m^2) + \lambda \Pi_e + \lambda^\mu \Phi_\mu, \quad (3.16)$$

onde λ e λ^μ são os multiplicadores de Lagrange associados respectivamente aos vínculos Π_e e Φ_μ . Vamos efetuar a evolução temporal dos vínculos utilizando H_p . Como

$$\{e, \Pi_e\} = 1, \quad \{x^\mu, P_\nu\} = \delta_\nu^\mu,$$

obtemos que

$$\dot{\Pi}_e = -\frac{1}{2} (\tilde{P}^2 + m^2) \equiv \varphi = 0, \quad (3.17)$$

$$\dot{\Phi}_\mu = e \left\{ \Phi_\mu, \frac{1}{2} (\tilde{P}^2 + m^2) \right\} + \lambda \{ \Phi_\mu, \Pi_e \} + \lambda^\nu \{ \Phi_\mu, \Phi_\nu \} = 0. \quad (3.18)$$

Devemos observar que a evolução de Π_e resulta em um vínculo $\varphi = (\tilde{P}^2 + m^2) = 0$ que se assemelha ao vínculo φ em (3.8) do caso não degenerado. Entretanto, no caso degenerado, $\tilde{P}^2$ é construído em apenas um setor de $g_{\mu\nu}$ conforme podemos notar em (3.14).

Calculemos a seguir os parênteses de Poisson entre os vínculos. Em (3.18) temos

$$\begin{aligned} \left\{ \Phi_\mu, \frac{1}{2} (\tilde{P}^2 + m^2) \right\} &= \frac{1}{2} [-\partial_\mu \tilde{g}^{\rho'\lambda'} P_{\rho'} P_{\lambda'} \\ &- (e_{\mu}^{a'} \tilde{e}_{a'}^{\nu'} \partial_{\nu'} \tilde{g}^{\rho'\lambda'} P_{\rho'} P_{\lambda'} + P_{\rho'} \partial_{(\rho'} (e_{\mu}^{a'} \tilde{e}_{a'}^{\nu'}) P_{\lambda'}) \tilde{g}^{\rho'\lambda'})]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Vamos reescrever (3.19) considerando (3.12) e

$$\partial_\rho \tilde{e}_{a'}^{\nu'} = -\tilde{e}_{a'}^{\mu'} \tilde{e}_{b'}^{\nu'} \partial_\rho \tilde{e}_{\mu'}^{b'} \quad \partial_\rho e_{\nu'}^{b'} = -e_{\nu'}^{a'} e_{\mu'}^{b'} \partial_\rho \tilde{e}_{a'}^{\mu'}, \quad (3.20)$$

onde (3.20) é obtida a partir de (3.12). Com isto passamos a ter

$$\begin{aligned} \left\{ \Phi_{\underline{\mu}}, \frac{1}{2} (\tilde{P}^2 + m^2) \right\} = & -2P_{\rho'} P_{\lambda'} \partial_{\underline{\mu}} \tilde{e}_{a'}^{\rho'} \eta^{a'b'} \tilde{e}_{b'}^{\lambda'} + \\ & 2e_{\underline{\mu}}^{a'} \tilde{e}_{a'}^{\nu'} (\partial_{\nu'} \tilde{e}_{c'}^{\rho'}) \eta^{c'd'} \tilde{e}_{d'}^{\lambda'} P_{\rho'} P_{\lambda'} - \\ & 2P_{\nu'} P_{\lambda'} (\tilde{e}_{a'}^{\nu'} \partial_{\rho'} e_{\underline{\mu}}^{a'} + e_{\underline{\mu}}^{a'} \partial_{\rho'} \tilde{e}_{a'}^{\nu'}) \tilde{g}^{\rho'\lambda'} \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$= P_{\nu'} P_{\lambda'} (\tilde{e}_{a'}^{\nu'} \tilde{e}_{d'}^{\lambda'} \tilde{e}_{c'}^{\rho'} \eta^{c'd'} \partial_{[\underline{\mu}} e_{\rho']}^{a'} + e_{\underline{\mu}}^{a'} \tilde{e}_{d'}^{\lambda'} \eta^{c'd'} \tilde{e}_{c'}^{\rho'} \partial_{\rho'} \tilde{e}_{a'}^{\nu'}) \quad (3.22)$$

$$= \tilde{P}_{a'} \tilde{P}_{d'} \tilde{e}_{c'}^{\lambda'} \eta^{c'd'} (\partial_{[\underline{\mu}} e_{\lambda']}^{a'} - h_{\underline{\mu}}^{\lambda'} \partial_{[\lambda'} e_{\lambda']}^{a'}), \quad (3.23)$$

onde

$$h_{\underline{\mu}}^{\lambda'} = e_{\underline{\mu}}^{a'} \tilde{e}_{a'}^{\lambda'} \quad \tilde{P}_{a'} = \tilde{e}_{a'}^{\lambda'} P_{\lambda'}. \quad (3.24)$$

Consideremos agora

$$\begin{aligned} \{ \Phi_{\underline{\mu}}, \Phi_{\underline{\nu}} \} = & P_{\lambda'} [\partial_{\underline{\mu}} (e_{\underline{\nu}}^{b'} \tilde{e}_{b'}^{\lambda'}) - \partial_{\underline{\nu}} (e_{\underline{\mu}}^{a'} \tilde{e}_{a'}^{\lambda'})] \\ & + e_{\underline{\mu}}^{b'} \tilde{e}_{b'}^{\rho'} \partial_{\rho'} (e_{\underline{\nu}}^{a'} \tilde{e}_{a'}^{\lambda'}) - e_{\underline{\nu}}^{a'} \tilde{e}_{a'}^{\rho'} \partial_{\rho'} (e_{\underline{\mu}}^{b'} \tilde{e}_{b'}^{\lambda'}) \\ = & P_{\lambda'} (\partial_{[\underline{\mu}} h_{\underline{\nu}]}^{\lambda'} - h_{[\underline{\mu}}^{\rho'} \partial_{\rho'} h_{\underline{\nu}]}^{\lambda'}). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Então, podemos escrever (3.18) como:

$$\dot{\Phi}_{\underline{\mu}} = N_{\underline{\mu}} + \lambda^{\underline{\nu}} M_{\underline{\mu}\underline{\nu}} = 0, \quad (3.26)$$

onde

$$N_{\underline{\mu}} = e \tilde{P}_{a'} \tilde{P}_{a'} \tilde{e}_c^{\lambda'} \eta^{c a'} \left(\partial_{[\underline{\mu}} e_{\lambda']}^{a'} - h_{[\underline{\mu}}^{\lambda'} \partial_{\lambda']} e_{\underline{\nu}]}^{a'} \right), \quad (3.27)$$

$$M_{\underline{\mu}\underline{\nu}} = \{ \Phi_{\underline{\mu}}, \Phi_{\underline{\nu}} \} = P_{\lambda'} \left(\partial_{[\underline{\mu}} h_{\underline{\nu}]}^{\lambda'} - h_{[\underline{\mu}}^{\lambda'} \partial_{\underline{\nu}]} h_{\underline{\lambda}]}^{\lambda'} \right). \quad (3.28)$$

A partir destas últimas equações, observamos que $\partial_{[\underline{\mu}} e_{\underline{\nu}]}^{a'} = 0$, implica em $M_{\underline{\mu}\underline{\nu}} = 0$ e $N_{\underline{\mu}} = 0$ e analogamente ao caso da partícula não relativística, não há novos vínculos, o que torna todos os vínculos presentes como sendo de primeira classe. Neste caso, existem $r - 1$ graus de liberdade no espaço de configuração.

Porém, considerando que $M_{\underline{\mu}\underline{\nu}} \neq 0$ e $N_{\underline{\mu}} \neq 0$ temos os seguintes casos a considerar:

3.2.1 Caso $D - r$ Par

Para $D - r$ par, sabemos que existe a inversa de $M_{\underline{\mu}\underline{\nu}}$ que representaremos por $(M)^{\underline{\mu}\underline{\nu}}$. Então, de (3.26) obtemos

$$\lambda^{\underline{\nu}} = -N_{\underline{\mu}} (M)^{\underline{\mu}\underline{\nu}}. \quad (3.29)$$

Mas

$$\{ \Phi_{\underline{\mu}}, \Phi_{\underline{\nu}} \} = M_{\underline{\mu}\underline{\nu}} \neq 0; \quad \{ \Phi_{\underline{\mu}}, \varphi \} = N_{\underline{\mu}} \neq 0. \quad (3.30)$$

Então, existem $D - r + 1$ vínculos de segunda classe, ou seja, um número ímpar destes vínculos. Para termos um número par de vínculos de segunda classe será necessário extrair uma combinação linear dos vínculos que seja de primeira classe. Vamos escrever essa combinação linear como

$$\phi = f\varphi + f^{\underline{\mu}}\phi_{\underline{\mu}}. \quad (3.31)$$

Assumindo que ϕ é de primeira classe, obtemos

$$\{\phi, \varphi\} = f^\mu \{\phi_\mu, \varphi\} = \frac{2}{e} f^\mu N_\mu = 0, \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \{\phi, \Phi_\rho\} &= f \{\varphi, \Phi_\rho\} + f^\mu \{\Phi_\mu, \Phi_\rho\} \\ &= \frac{-2}{e} f N_\rho + f^\mu M_{\mu\rho} = 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Uma solução para (3.32) é dada por

$$f^\mu = N_\rho M^{\mu\rho}, \quad (3.34)$$

uma vez que $M^{\mu\rho} N_\rho N_\mu = 0$ devido à antissimetria de $M^{\mu\rho}$.

Substituindo (3.34) em (3.33), temos

$$f \frac{2}{e} N_\rho = N_\rho M^{\mu\nu} M_{\mu\rho} = N_\rho \delta_\rho^\nu, \quad (3.35)$$

que resulta em $f = \frac{e}{2}$. Logo, o vínculo de primeira classe que envolve a combinação dos vínculos iniciais, é dado por:

$$\phi = \frac{e}{2} \varphi + M^{\mu\rho} N_\rho \Phi_\mu. \quad (3.36)$$

Desta forma existem $(D-r)$ vínculos de segunda classe Φ_μ e dois vínculos de primeira classe ϕ e Π_e . Então existem $D+r-2$ graus de liberdade no espaço de fase.

3.2.2 Caso $D-r$ Ímpar

Para $D-r$ ímpar não existe inversa de $M_{\mu\nu}$. Então, seja $\underline{\mu}' = 1, \dots, D-r-1$ de tal forma que $\underline{\mu} = (\underline{\mu}', \underline{D-r})$. Neste caso, a partir de (3.26), obtemos

$$N_{\underline{\mu}'} + M_{\underline{\mu}'\underline{\nu}'} \lambda^{\underline{\nu}'} + M_{\underline{\mu}'\underline{D-r}} \lambda^{\underline{D-r}} = 0 = \dot{\Phi}_{\underline{\mu}'}, \quad (3.37)$$

$$N_{\underline{D-r}} + M_{\underline{D-r}\beta} \lambda^{\beta} = 0 = \dot{\Phi}_{\underline{D-r}}. \quad (3.38)$$

Então

$$\lambda^{\underline{\epsilon}'} = -M^{\underline{\epsilon}'\underline{\epsilon}} \left(N_{\underline{\epsilon}'} + M_{\underline{\epsilon}'\underline{D-r}} \lambda^{\underline{D-r}} \right). \quad (3.39)$$

Substituindo (3.39) em (3.38), temos

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_{\underline{D-r}} &= N_{\underline{D-r}} + M_{\underline{D-r}\beta} \left[-M^{\beta'\underline{\epsilon}'} \left(N_{\underline{\epsilon}'} + M_{\underline{\epsilon}'\underline{D-r}} \lambda^{\underline{D-r}} \right) \right] \\ &= N_{\underline{D-r}} - M_{\underline{D-r}\beta'} M^{\beta'\underline{\epsilon}'} N_{\underline{\epsilon}'} = 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Verificamos que a expressão de $\dot{\Phi}_{\underline{D-r}}$, através da substituição de $\lambda^{\underline{\epsilon}'}$ encontrado, envolve uma combinação de N e M . De fato, encontramos um novo vínculo dado por

$$\chi = N_{\underline{D-r}} - M_{\underline{D-r}\beta'} M^{\beta'\underline{\epsilon}'} N_{\underline{\epsilon}'} = 0. \quad (3.41)$$

Vejamos como fica a evolução dos novos vínculos:

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= \frac{e}{2} \{ \chi, \varphi \} + \lambda^{\underline{\epsilon}'} \{ \chi, \Phi_{\underline{\epsilon}'} \} + \lambda^{\underline{D-r}} \{ \chi, \Phi_{\underline{D-r}} \} \\ &= \frac{e}{2} \{ \chi, \varphi \} - M^{\underline{\epsilon}'\underline{\epsilon}} N_{\underline{\epsilon}'} \{ \chi, \Phi_{\underline{\epsilon}'} \} \\ &\quad + \lambda^{\underline{D-r}} \left(\{ \chi, \Phi_{\underline{D-r}} \} - M^{\underline{\epsilon}'\underline{\epsilon}} M_{\underline{\epsilon}'\underline{D-r}} \{ \chi, \Phi_{\underline{\epsilon}'} \} \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \lambda^{\underline{\epsilon}} \{ \varphi, \Phi_{\underline{\epsilon}} \} = \lambda^{\underline{\epsilon}'} \{ \varphi, \Phi_{\underline{\epsilon}'} \} + \lambda^{\underline{D-r}} \{ \varphi, \Phi_{\underline{D-r}} \} \\ &= -\frac{2}{e} \left[\lambda^{\underline{\epsilon}'} N_{\underline{\epsilon}'} + \lambda^{\underline{D-r}} N_{\underline{D-r}} \right] \\ &= -\frac{2}{e} \left[-M^{\underline{\epsilon}'\underline{\epsilon}} \left(N_{\underline{\epsilon}'} + M_{\underline{\epsilon}'\underline{D-r}} \lambda^{\underline{D-r}} \right) N_{\underline{\epsilon}'} + \lambda^{\underline{D-r}} N_{\underline{D-r}} \right] \\ &= -\frac{2}{e} \lambda^{\underline{D-r}} \left(M^{\underline{\epsilon}'\underline{\epsilon}} M_{\underline{\epsilon}'\underline{D-r}} N_{\underline{\epsilon}'} - N_{\underline{D-r}} \right) \\ &= -\frac{2}{e} \lambda^{\underline{D-r}} \chi = 0. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Da evolução de φ não obtemos novos vínculos. Da evolução de χ obtemos

$$\lambda^{D-r} = - \frac{\frac{e}{2} \{ \chi, \varphi \} + M^{\underline{e}' \underline{e}'} N_{\underline{e}'} \{ \chi, \Phi_{\underline{e}'} \}}{\left(\{ \chi, \Phi_{D-r} \} - M^{\underline{e}' \underline{e}'} M_{\underline{e}' D-r} \{ \chi, \Phi_{\underline{e}'} \} \right)}, \quad (3.44)$$

desde que $\{ \chi, \Phi_{D-r} \} - M^{\underline{e}' \underline{e}'} M_{\underline{e}' D-r} \{ \chi, \Phi_{\underline{e}'} \} \neq 0$. De acordo com o apêndice A, o autovetor nulo de $M_{\underline{\mu} \underline{\nu}}$ é dado por

$$V^{\underline{\mu}} = \delta_{D-r}^{\underline{\mu}} - M_{D-r \underline{\beta}'} M^{\underline{\beta}' \underline{\nu}'} \delta_{\underline{\nu}'}^{\underline{\mu}}. \quad (3.45)$$

Porém,

$$\begin{aligned} V^{\underline{\mu}} \{ \chi, \Phi_{\underline{\mu}} \} &= \delta_{D-r}^{\underline{\mu}} \{ \chi, \Phi_{\underline{\mu}} \} - M_{D-r \underline{\beta}'} M^{\underline{\beta}' \underline{\nu}'} \delta_{\underline{\nu}'}^{\underline{\mu}} \{ \chi, \Phi_{\underline{\mu}} \} \\ &= \{ \chi, \Phi_{D-r} \} - M_{D-r \underline{\beta}'} M^{\underline{\beta}' \underline{\nu}'} \{ \chi, \Phi_{\underline{\nu}'} \}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

que corresponde ao denominador da expressão de λ^{D-r} em (3.44). Então,

$$\dot{\chi} = \frac{e}{2} \{ \chi, \varphi \} - M^{\underline{e}' \underline{\alpha}'} N_{\underline{\alpha}'} \{ \chi, \Phi_{\underline{e}'} \} + \lambda^{D-r} V^{\underline{\mu}} \{ \chi, \Phi_{\underline{\mu}} \} = 0. \quad (3.47)$$

Devemos observar que

$$V^{\underline{\mu}} \{ \varphi, \Phi_{\underline{\mu}} \} = \frac{-2}{e} V^{\underline{\mu}} N_{\underline{\mu}} = 0, \quad (3.48)$$

$$V^{\underline{\mu}} \{ \Phi_{D-r}, \Phi_{\underline{\mu}} \} = V^{\underline{\mu}} M_{D-r \underline{\mu}} = 0. \quad (3.49)$$

Porém sabemos que $\chi = \Phi_{D-r} \neq \Phi_{D-r}$, que comparando com (3.49), nos permite concluir que $V^{\underline{\mu}} \{ \chi, \Phi_{\underline{\mu}} \} \neq 0$. Então (3.47) permite determinar

$$\lambda^{D-r} = \frac{M^{\underline{e}' \underline{\alpha}'} N_{\underline{\alpha}'} \{ \chi, \Phi_{\underline{e}'} \} - \frac{e}{2} \{ \chi, \varphi \}}{V^{\underline{\mu}} \{ \chi, \Phi_{\underline{\mu}} \}}, \quad (3.50)$$

onde o denominador não se anula. Logo, determinamos $\lambda^{\underline{\mu}}$ e λ^{D-r} . Isto implica que os vínculos $\Phi_{\underline{\mu}}$ são de segunda classe.

Vamos agora determinar se χ é de segunda classe. Isto será determinado de forma análoga àquela apresentada no caso não relativístico, com a diferença que no presente caso existe um vínculo adicional φ . A Hamiltoniana é dada por

$$H = \frac{e}{2}\varphi + \lambda^{\underline{\mu}}\Phi_{\underline{\mu}} + \mu\chi. \quad (3.51)$$

Vamos verificar se a evolução dos vínculos permite determinar o multiplicador de Lagrange μ associado ao vínculo χ .

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \lambda^{\underline{\mu}}\{\varphi, \Phi_{\underline{\mu}}\} + \mu\{\varphi, \chi\} \\ &= \frac{-2}{e}\lambda^{\underline{\mu}'}N_{\underline{\mu}'} - \frac{2}{e}\lambda^{\underline{D}-\underline{r}}N_{\underline{D}-\underline{r}} + \mu\{\varphi, \chi\} = 0, \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\dot{\chi} = \frac{e}{2}\{\chi, \varphi\} + \lambda^{\underline{\mu}}\{\chi, \Phi_{\underline{\mu}}\} = 0, \quad (3.53)$$

$$\dot{\Phi}_{\underline{\mu}} = N_{\underline{\mu}} + \lambda^{\underline{\nu}}\{\Phi_{\underline{\mu}}, \Phi_{\underline{\nu}}\} + \mu\{\Phi_{\underline{\mu}}, \chi\} = 0. \quad (3.54)$$

Considerando (3.54) com $\underline{\mu} = \underline{\mu}', \underline{D}-\underline{r}$, temos

$$\dot{\Phi}_{\underline{\mu}'} = N_{\underline{\mu}'} + \lambda^{\underline{\nu}'}M_{\underline{\mu}'\underline{\nu}'} + \lambda^{\underline{D}-\underline{r}}M_{\underline{\mu}'\underline{D}-\underline{r}} + \mu\{\Phi_{\underline{\mu}'}, \chi\} = 0 \quad (3.55)$$

$$\dot{\Phi}_{\underline{D}-\underline{r}} = N_{\underline{D}-\underline{r}} + \lambda^{\underline{\nu}'}M_{\underline{D}-\underline{r}'\underline{\nu}'} + \mu\{\Phi_{\underline{D}-\underline{r}}, \chi\} = 0. \quad (3.56)$$

De (3.55) obtemos

$$\lambda^{\underline{\alpha}'} = -M^{\underline{\alpha}'\underline{\mu}'}\left(N_{\underline{\mu}'} + \lambda^{\underline{D}-\underline{r}}M_{\underline{\mu}'\underline{D}-\underline{r}} + \mu\{\Phi_{\underline{\mu}'}, \chi\}\right). \quad (3.57)$$

Substituindo (3.57) em (3.56), obtemos

$$N_{\underline{D}-\underline{r}} - M^{\underline{\alpha}'\underline{\mu}'}\left(N_{\underline{\mu}'} + \lambda^{\underline{D}-\underline{r}}M_{\underline{\mu}'\underline{D}-\underline{r}} + \mu\{\Phi_{\underline{\mu}'}, \chi\}\right)M_{\underline{D}-\underline{r}\underline{\alpha}'} + \mu\{\Phi_{\underline{D}-\underline{r}}, \chi\} = 0, \quad (3.58)$$

que é equivalente a

$$N_{\underline{D-r}} - M^{\underline{\alpha}'} \underline{\mu}' M_{\underline{D-r} \underline{\alpha}'} N_{\underline{\mu}'} + \mu \left(\{ \Phi_{\underline{D-r}}, \chi \} - M^{\underline{\alpha}'} \underline{\mu}' M_{\underline{D-r} \underline{\alpha}'} \{ \Phi_{\underline{\mu}'}, \chi \} \right) = 0. \quad (3.59)$$

Isto resulta em

$$\chi - \mu \left(V^{\underline{\mu}} \{ \chi, \Phi_{\underline{\nu}} \} \right) = 0. \quad (3.60)$$

De (3.60) concluímos, então, que $\mu = 0$.

Então em (3.52) temos:

$$\frac{-2}{e} \left(\lambda^{\underline{\mu}'} N_{\underline{\mu}'} + \lambda^{\underline{D-r}} N_{\underline{D-r}} \right) = 0, \quad (3.61)$$

que equivale a

$$\frac{-2}{e} \left[-M^{\underline{\mu}'} \underline{\alpha}' \left(N_{\underline{\alpha}'} + \lambda^{\underline{D-r}} M_{\underline{\alpha}' \underline{D-r}} \right) N_{\underline{\mu}'} + \lambda^{\underline{D-r}} N_{\underline{D-r}} \right] = 0, \quad (3.62)$$

resultando em

$$\frac{-2}{e} \lambda^{\underline{D-r}} \left(N_{\underline{D-r}} - M^{\underline{\mu}'} \underline{\alpha}' M_{\underline{\alpha}' \underline{D-r}} N_{\underline{\mu}'} \right) = \frac{-2}{e} \lambda^{\underline{D-r}} \chi = 0. \quad (3.63)$$

Com esta última equação concluímos que $\dot{\varphi} = 0$ não gera novos vínculos. Em (3.53) temos

$$\frac{e}{2} \{ \chi, \varphi \} + \lambda^{\underline{\mu}'} \{ \chi, \Phi_{\underline{\mu}'} \} + \lambda^{\underline{D-r}} \{ \chi, \Phi_{\underline{D-r}} \} = 0, \quad (3.64)$$

que equivale a

$$\frac{e}{2} \{ \chi, \varphi \} - M^{\underline{\mu}'} \underline{\beta}' \left(N_{\underline{\beta}'} + \lambda^{\underline{D-r}} M_{\underline{\beta}' \underline{D-r}} \right) \{ \chi, \Phi_{\underline{\mu}'} \} + \lambda^{\underline{D-r}} \{ \chi, \Phi_{\underline{D-r}} \} = 0. \quad (3.65)$$

Esta última implica no valor de $\lambda^{\underline{D-r}}$ já encontrado anteriormente em (3.44) ou na forma equivalente em (3.50).

Determinamos então todos os multiplicadores de Lagrange associados aos vínculos χ e $\Phi_{\underline{\mu}}$, o que implica que estes são vínculos de segunda classe. Porém, sabemos que $\{ \varphi, \Phi_{\underline{\mu}} \} = -\frac{2}{e} N_{\underline{\mu}} \neq 0$. Então φ também é de segunda classe.

Para $(D-r)$ ímpar obtivemos um conjunto de vínculos formado por um número ímpar de vínculos de segunda classe. Com isto, a matriz formada pelos parênteses de Poisson dos vínculos de segunda classe não é inversível. Desta maneira, deve existir uma combinação dos vínculos que será de primeira classe.

Seja o conjunto dos vínculos de segunda classe

$$\Gamma_{(\xi)} = (\varphi, \chi, \Phi_{\underline{\mu}}) = (\Gamma_{(A)}, \Gamma_{(B)}, \Gamma_{(\underline{\mu})}). \quad (3.66)$$

Considerando a representação matricial,

$$\gamma_{(\xi)(\eta)} = \{\Gamma_{(\xi)}, \Gamma_{(\eta)}\}, \quad (3.67)$$

sabemos que $\det||\gamma_{(\xi)(\eta)}|| = 0$, já que a ordem de γ é ímpar, mas por ser uma matriz antissimétrica, seu posto será uma unidade inferior à sua ordem, conforme discutimos no Apêndice A. Sendo assim, existe um único auto-vetor $W^{(\xi)}$ com auto-valor nulo tal que

$$W^{(\xi)} \gamma_{(\xi)(\eta)} = 0, \quad (3.68)$$

onde

$$W^{(\xi)} = \delta_{(D-r)}^{(\xi)} - \gamma_{(D-r)(\eta')} \gamma^{(\eta')(\xi')} \delta_{(\xi')}^{(\xi)}. \quad (3.69)$$

Consideremos a seguinte combinação

$$\Xi = W^{(\xi)} \Gamma_{(\xi)}. \quad (3.70)$$

Então,

$$\begin{aligned} \{\Xi, \Gamma_{(\xi)}\} &= W^{(\eta)} \{\Gamma_{(\eta)}, \Gamma_{(\xi)}\} + \{W^{(\eta)}, \Gamma_{(\xi)}\} \Gamma_{(\eta)} \\ &= W^{(\eta)} \gamma_{(\eta)(\xi)} = 0. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Logo,

$$\Xi = \Phi_{\underline{D-r}} - \left\{ \Phi_{\underline{D-r}}, \Gamma_{(\eta')} \right\} \gamma^{(\eta')(\xi')} \Gamma_{(\xi')}, \quad (3.72)$$

é a combinação dos vínculos que é de primeira classe.

Temos $\Gamma_{(\xi')} = (\varphi, \chi, \Phi_{\underline{\rho}'})$ como o conjunto com vínculos de segunda classe e os vínculos de primeira classe Ξ e Π_e . Assim existem $D + r - 5$ graus de liberdade no espaço de fase.

Capítulo 4

A Corda Bosônica

Introdução

Quando consideramos a partícula relativística movendo-se no espaço-tempo esta realiza uma trajetória que define uma linha de evolução. No caso de uma corda movendo-se no espaço-tempo existe uma superfície de evolução associada ao trajeto da corda. Neste caso, a ação do modelo de uma corda será proporcional à área da superfície de evolução. Esta superfície, por estar imersa no espaço-tempo, possui uma métrica induzida pela imersão. A ação, por ser proporcional a uma área, e esta área estar relacionada ao determinante da métrica induzida, define a formulação do modelo de corda através da ação de Nambu-Goto [26]. Numa outra formulação, que é equivalente a de Nambu-Goto, temos a ação de Polyakov, que por ser de primeira ordem nas derivadas dos campos, é muito útil no desenvolvimento da Teoria de Cordas em vários aspectos.

Neste trabalho, um aspecto importante é a definição da ação com o campo de fundo gravitacional, sendo este campo representado pela métrica do espaço-tempo no qual a superfície de evolução está imersa. Neste caso, a ação e as equações de movimento não envolvem o inverso da métrica do espaço-tempo sendo possível considerarmos o que ocorre quando a métrica passa a ser degenerada, conforme veremos ao longo das seções seguintes.

Vamos construir o formalismo Hamiltoniano e considerar uma contagem efetiva dos graus de liberdade para a corda imersa num espaço-tempo que admite métricas degeneradas. Em analogia aos modelos das partículas, os vínculos presentes irão depender de algumas propriedades dos vetores de base que constituem a métrica degenerada. Entretanto, por ser um objeto estendido comparada a uma partícula, surgem propriedades no formalismo Hamiltoniano que tornam o modelo bastante diferente do caso em que a métrica do espaço-tempo não é degenerada.

Apresentaremos na Seção 4.1 o caso em que a corda está imersa num campo de fundo gravitacional arbitrário. Obtemos soluções clássicas que são independentes da métrica do espaço-tempo quando as invariâncias da ação não são totalmente fixas. Ao fixarmos as invariâncias restantes notamos que a métrica deve satisfazer algumas condições, resultando em campos de fundo gravitacionais específicos, sendo que alguns destes podem ser degenerados.

Na Seção 4.2 apresentamos o desenvolvimento do formalismo Hamiltoniano no caso em que a corda está imersa num campo de fundo gravitacional não degenerado e degenerado, tratados separadamente. No caso degenerado, obtemos vínculos com uma estrutura algébrica não trivial comparada ao caso não degenerado. A evolução destes vínculos irá gerar detalhes importantes na forma como a corda interage com a estrutura geométrica do espaço-tempo que admite métricas degeneradas.

4.1 Algumas Soluções Clássicas para a Corda em Campos de Fundo Gravitacionais

A ação de uma corda em um fundo gravitacional $G_{\mu\nu}(X)$, definido em um espaço-tempo de dimensão D onde $(\mu, \nu = 0, \dots, D-1)$, é dada por

$$S = \frac{-1}{4\pi\alpha'} \int d\sigma d\tau \sqrt{-h} h^{(a)(b)}(\sigma, \tau) G_{\mu\nu}(X(\sigma, \tau)) \partial_{(a)} X^\mu \partial_{(b)} X^\nu, \quad (4.1)$$

onde $h_{(a)(b)}$ ($(a) = 0, 1$) é a métrica da superfície de evolução da corda. As equações de movimento para X^μ e h^{ab} são respectivamente

$$\frac{1}{\sqrt{-h}} \partial_{(a)} (\sqrt{-h} h^{(a)(b)} \partial_{(b)} X^\mu) G_{\lambda\mu} + \Gamma_{\mu\nu\lambda} h^{(a)(b)} \partial_{(a)} X^\mu \partial_{(b)} X^\nu = 0, \quad (4.2)$$

$$T_{(a)(b)} = G_{\mu\nu} (\partial_{(a)} X^\mu \partial_{(b)} X^\nu - \frac{1}{2} h_{(a)(b)} h^{(a') (b')} \partial_{(a')} X^\mu \partial_{(b')} X^\nu) = 0. \quad (4.3)$$

Observemos que as expressões de (4.1) a (4.3) não dependem do inverso de $G_{\mu\nu}$, portanto, estão bem definidas mesmo quando $G_{\mu\nu}$ for degenerada.

No gauge ortonormal, i.e. $h_{ab} = \eta_{ab}$, (4.2) e (4.3) se reduzem a

$$G_{\lambda\mu} \hat{\partial}_+ \hat{\partial}_- X^\mu + \Gamma_{\mu\nu\lambda} \hat{\partial}_+ X^\mu \hat{\partial}_- X^\nu = 0, \quad (4.4)$$

$$T_{\pm\pm} = G_{\mu\nu} \hat{\partial}_\pm X^\mu \hat{\partial}_\pm X^\nu = 0, \quad (4.5)$$

onde $\hat{\partial}_\pm = (\partial_\tau \pm \partial_\sigma)$, $\partial_\tau = \partial_0$ e $\partial_\sigma = \partial_1$.

Como podemos ver, existem soluções para as equações de movimento (4.4) e (4.5) da forma $\hat{\partial}_+ X^\mu = 0$ ou $\hat{\partial}_- X^\mu = 0$ que são independentes da métrica $G_{\mu\nu}$ [16]. No espaço-tempo de Minkowski em duas dimensões, campos que satisfazem soluções da forma $\hat{\partial}_\pm X^\mu = 0$, são chamados de bósons quirais. Nesta terminologia, denotaremos a coordenada da corda envolvida em tais soluções como sendo quiral.

Porém, sabemos que a escolha do gauge conforme, relacionado à invariância de reparametrização e de Weyl, ainda deixa uma invariância residual [27] que pode ser fixada com a escolha de gauge $X^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 + X^{D-1}) = (X^0_\sigma + P\tau)$, sendo P uma constante. Neste gauge a coordenada X^+ não é mais quiral, ou seja, $\hat{\partial}_+ X^+ \neq 0$. Desta maneira, as soluções $\hat{\partial}_+ X^i = 0 = \hat{\partial}_+ X^-$ nas equações (4.4) e (4.5) já não são mais exatas, visto que existem termos contendo $\hat{\partial}_+ X^+$ que não irão se anular. Com isto se quisermos obter

a solução quiral $\hat{\partial}_+ X^\mu = 0$ (para $\mu = -, i$) devemos impor que o conjunto dos termos contendo $\hat{\partial}_+ X^+$ se anule.

As componentes das equações (4.4) contendo os termos $\hat{\partial}_+ X^+ = P$ e $\hat{\partial}_+ X^\mu = 0$ para $\mu = -, i$ podem ser escritas como

$$P(2\partial_+ G_{+i} - \partial_i G_{++}) + (\partial_+ G_{-i} + \partial_- G_{i+} - \partial_i G_{+-})\hat{\partial}_- X^- + \\ + (\partial_+ G_{ij} + \partial_{[j} G_{+i]})\hat{\partial}_- X^j = 0,$$

$$\partial_+ G_{++} + \partial_- G_{++}\hat{\partial}_- X^- + \partial_j G_{++}\hat{\partial}_- X^j = 0, \quad (4.6)$$

$$P(2\partial_+ G_{+-} - \partial_- G_{++}) + \partial_+ G_{--}\hat{\partial}_- X^- + \\ + (\partial_+ G_{j-} + \partial_j G_{-+} - \partial_- G_{+j})\hat{\partial}_- X^j = 0.$$

Analogamente para (4.5), resulta em

$$G_{++}(P)^2 = 0 \quad (4.7)$$

$$2G_{+-}P\hat{\partial}_- X^- + 2G_{+i}P\hat{\partial}_- X^i + \\ + 2G_{-i}\hat{\partial}_- X^-\hat{\partial}_- X^i + G_{--}\hat{\partial}_- X^-\hat{\partial}_- X^- + G_{ij}\hat{\partial}_- X^i\hat{\partial}_- X^j = 0. \quad (4.8)$$

As equações de (4.6) à (4.8) possuem soluções que irão depender da forma de $G_{\mu\nu}$. Com isto, uma solução destas equações (independente de X^+) é dada por:

$$G_{--} = \tilde{g}_{--} \quad G_{-i} = \tilde{g}_{-i} \quad G_{+j} = \tilde{g}_{ij} \quad (4.9)$$

$$G_{+i} = \partial_i \tilde{h} \quad G_{+-} = \partial_- \tilde{h} \quad G_{++} = 0, \quad (4.10)$$

onde $\tilde{g}$ e $\tilde{h}$ são funções apenas de X^- e X^i .

Temos, então, uma forma para $G_{\mu\nu}$ que permite a solução quiral para as componentes X^- e X^i , com todas as invariâncias da ação (4.1) completamente fixas.

Além dos possíveis $G_{\mu\nu}$ não-degenerados existe também uma forma de $G_{\mu\nu}$ que também satisfaz (4.6) à (4.8), porém com determinante nulo. As componentes de $G_{\mu\nu}$ são

$$\begin{aligned} G_{+-} &= \partial_- h & G_{++} &= 0 & G_{-i} &= [a_i X^+ + g_i(X^i)] G_{+-} \\ G_{+i} &= a_i h + \partial_i h & G_{--} &= 0 & G_{ij} &= \frac{G_{+i} G_{-j}}{G_{+-}}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde a_i são constantes e $h = h(X^-, X^i)$. Vemos, então, a presença direta de uma métrica degenerada na solução das equações de movimento da corda em campo de fundo gravitacional, desde que as coordenadas da corda sejam do tipo quiral.

Consideremos a seguir o formalismo Hamiltoniano em que será considerada a presença de campos de fundo com métricas não degeneradas e degeneradas.

4.2 Formalismo Hamiltoniano

4.2.1 Campo de Fundo Gravitacional não Degenerado

Para a construção da Hamiltoniana associada a ação (4.1) consideremos as densidades de momento

$$\mathcal{P}_{(a)(b)} = \frac{\partial L}{\partial \dot{h}^{(a)(b)}} = 0, \quad (4.12)$$

$$\mathcal{P}_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} = -T \sqrt{-h} h^{0(b)} \partial_{(b)} X^\nu G_{\mu\nu}(X), \quad (4.13)$$

onde $T = \frac{1}{2\pi\alpha'}$.

No caso em que $\det G_{\mu\nu} \neq 0$, temos o seguinte conjunto de vínculos primários:

$$\Phi_{(a)(b)} = \mathcal{P}_{(a)(b)} = 0. \quad (4.14)$$

Vamos introduzir os seguintes parênteses de Poisson

$$\{h^{(a)(b)}(\sigma), \mathcal{P}_{(c)(d)}(\sigma')\}_\tau = \frac{1}{2}(\delta_{(c)}^{(a)}\delta_{(d)}^{(b)} + \delta_{(c)}^{(b)}\delta_{(d)}^{(a)})\delta(\sigma - \sigma') \quad (4.15)$$

$$\{X^\mu(\sigma), \mathcal{P}_\nu(\sigma')\}_\tau = \delta_\nu^\mu \delta(\sigma - \sigma').$$

Vamos calcular a dependência temporal dos vínculos em (4.14) através da Hamiltoniana primária H

$$H = \int_0^{2\pi} d\sigma (\mathcal{H}_c + \lambda^{(a)(b)} \Phi_{(a)(b)}), \quad (4.16)$$

onde $\lambda^{(a)(b)}$ são multiplicadores de Lagrange e

$$\mathcal{H}_c = \frac{-1}{2h^{00}} \left[\frac{(-h)^{-1/2}}{T} \mathcal{P}_\mu \mathcal{P}_\nu G^{\mu\nu} + 2h^{01} \mathcal{P}_\mu X'^\mu + T(-h)^{-1/2} X'^\mu X'^\nu G_{\mu\nu} \right] \quad (4.17)$$

onde $X'^\mu = \frac{\partial}{\partial \sigma} X^\mu$. Da evolução temporal de Φ_{ab} , cujos detalhes dos cálculos se encontram no apêndice B, obtemos os seguintes vínculos secundários:

$$\varphi_1 = \frac{1}{T} \mathcal{P}_\mu X'^\mu = 0, \quad (4.18)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{T^2} \mathcal{P}_\mu \mathcal{P}_\nu G^{\mu\nu} + X'^\mu X'^\nu G_{\mu\nu} \right) = 0. \quad (4.19)$$

A evolução temporal de (4.18) e (4.19) não gera novos vínculos e todos os vínculos da teoria são de primeira classe, como podemos constatar através da álgebra

$$\{\varphi_1(\sigma), \varphi_1(\sigma')\} = T^{-1}[\varphi_1(\sigma) + \varphi_1(\sigma')]\partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma') \quad (4.20)$$

$$\{\varphi_1(\sigma), \varphi_2(\sigma')\} = T^{-1}[\varphi_2(\sigma) + \varphi_2(\sigma')]\partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma') \quad (4.21)$$

$$\{\varphi_2(\sigma), \varphi_2(\sigma')\} = T^{-1}[\varphi_1(\sigma) + \varphi_1(\sigma')]\partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma'). \quad (4.22)$$

4.2.2 Campo de Fundo Gravitacional Degenerado

Consideremos uma métrica degenerada, num espaço-tempo de D dimensões, dada por $G_{\mu\nu} = e_\mu^{a'} e_\nu^{b'} \eta_{a'b'}$. Desta forma, $\det(G_{\mu\nu}) = 0$, já que o posto de G , que é igual a r , é menor que D .

Quando $\det(G_{\mu\nu}) = 0$, temos o mesmo vínculo $\Phi_{(a)(b)} = 0$, mas da definição de $\mathcal{P}_\mu$ em (4.13), vemos que para eliminarmos $\hat{X}^\nu$ necessitamos da inversa de $G_{\mu\nu}$. Como esta não existe, iremos mostrar que surge um novo vínculo.

Vamos escrever $\mathcal{P}_\mu$ como:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\mu &= \Delta_{a'} e_\mu^{a'}, \\ \Delta_{a'} &= M^{0(b)} \partial_{(b)} X^\nu e_\nu^{b'} \eta_{a'b'}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Considerando uma divisão do índice μ da forma $\mu = (\mu', \underline{\mu})$, onde $\mu' = 0, 1, \dots, r-1$; $\underline{\mu} = r, \dots, D-1$, temos

$$\mathcal{P}_{\mu'} = \Delta_{a'} e_{\mu'}^{a'} \quad (4.24)$$

$$\mathcal{P}_{\underline{\mu}} = \Delta_{a'} e_{\underline{\mu}}^{a'}. \quad (4.25)$$

Porém, no setor $(a'; \mu')$ podemos definir uma inversa dada por $\tilde{e}_{\nu'}^{\mu'}$, então

$$e_{\mu'}^{a'} \tilde{e}_{\delta'}^{\mu'} = \delta_{\delta'}^{a'} \quad (4.26)$$

$$e_{\mu'}^{a'} \tilde{e}_{a'}^{\nu'} = \delta_{\nu'}^{\mu'}. \quad (4.27)$$

De (4.24) temos que

$$\Delta_{a'} = \tilde{e}_{a'}^{\mu'} \mathcal{P}_{\mu'}. \quad (4.28)$$

Logo

$$\mathcal{P}_{\underline{\mu}} = e_{\underline{\mu}}^{a'} \tilde{e}_{a'}^{\nu'} \mathcal{P}_{\nu'}. \quad (4.29)$$

Temos, então, o seguinte vínculo primário:

$$\Phi_{\underline{\mu}} = \mathcal{P}_{\underline{\mu}} - e_{\underline{\mu}}^{a'} \tilde{e}_{a'}^{\nu'} \mathcal{P}_{\nu'} = 0. \quad (4.30)$$

Devemos notar ainda que

$$\Phi_{\underline{\mu}} = \mathcal{U}_{\underline{\mu}}^{\lambda} \mathcal{P}_{\lambda}, \quad (4.31)$$

$$\mathcal{U}_{\underline{\mu}}^{\lambda} = \delta_{\underline{\mu}}^{\lambda} - e_{\underline{\mu}}^{a'} \tilde{e}_{a'}^{\nu'} \delta_{\nu'}^{\lambda}, \quad (4.32)$$

onde (4.32) corresponde a uma representação dos auto-vetores nulos de $G_{\mu\nu}$, ou seja,

$$\mathcal{U}_{\underline{\mu}}^{\lambda} G_{\lambda\nu} = 0. \quad (4.33)$$

Sendo assim, $G_{\lambda\nu}$ possui $D - r$ auto-vetores com auto-valor zero, i.e., $D - r$ auto-vetores nulos.

Para a métrica degenerada em estudo, obtemos a densidade de hamiltoniana canônica $\mathcal{H}_c$, cujos cálculos estão efetuados no apêndice B ,

$$\mathcal{H}_c = \frac{-1}{2h^{00}} \left[\frac{(-h)^{-1/2}}{T} \bar{p}^2 + 2h^{01} \mathcal{P}_{\mu} X'^{\mu} + T(-h)^{-1/2} X'^{\mu} X'^{\nu} G_{\mu\nu} \right] \quad (4.34)$$

onde,

$$\tilde{\mathcal{P}}^2 = \tilde{G}^{\mu' \nu'} \mathcal{P}_{\mu'} \mathcal{P}_{\nu'} = \eta^{\alpha' \epsilon'} \tilde{e}_{\alpha'}^{\mu'} \tilde{e}_{\epsilon'}^{\nu'} \mathcal{P}_{\mu'} \mathcal{P}_{\nu'} \quad (4.35)$$

$$X'^2 = X'^{\mu} X'^{\nu} G_{\mu\nu} = X'^{\mu} e_{\mu}^{\alpha'} X'^{\nu} e_{\nu}^{\beta'} \eta_{\alpha'\beta'}.$$

Como já obtivemos todos os vínculos primários, vamos evoluir estes vínculos com a Hamiltoniana primária H_p

$$H_p = \int \left(\mathcal{H}_c + \lambda^{(a)(b)} \mathcal{P}_{(a)(b)} + \lambda^{\underline{\mu}} \Phi_{\underline{\mu}} \right) d\sigma' \quad (4.36)$$

Inicialmente vamos evoluir o vínculo $\mathcal{P}_{(a)(b)} = 0$. Porém devemos antes notar que

$$\left\{ \mathcal{P}_{(a)(b)}, \Phi_{\underline{\mu}} \right\} = 0. \quad (4.37)$$

Como $\mathcal{H}_c$ apresenta a mesma forma do caso não degenerado, a partir de

$$\dot{\mathcal{P}}_{(a)(b)} = 0, \quad (4.38)$$

obtemos os seguintes vínculos secundários

$$\varphi_1 = \frac{1}{T} \mathcal{P}_{\mu} X'^{\mu} = 0, \quad (4.39)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{\mathcal{P}}^2}{T^2} + X'^2 \right) = 0, \quad (4.40)$$

conforme demonstrado no apêndice B.

A partir destes últimos vínculos podemos reescrever $\mathcal{H}_c$ como

$$\mathcal{H}_c = -\frac{T}{h^{00}} \left[(-h)^{-1/2} \varphi_2 + h^{01} \varphi_1 \right]. \quad (4.41)$$

Evolvindo $\Phi_{\underline{\mu}}$,

$$\dot{\Phi}_{\underline{\mu}} = \int \left(\{ \Phi_{\underline{\mu}}(\sigma), \mathcal{H}_c(\sigma') \} + \lambda^{\underline{\nu}} \{ \Phi_{\underline{\mu}}(\sigma), \Phi_{\underline{\nu}}(\sigma') \} \right) d\sigma', \quad (4.42)$$

temos

$$\{ \Phi_{\underline{\mu}}(\sigma), \mathcal{H}_c(\sigma') \} = c_1 \{ \Phi_{\underline{\mu}}(\sigma), \varphi_1(\sigma') \} + c_2 \{ \Phi_{\underline{\mu}}(\sigma), \varphi_2(\sigma') \}, \quad (4.43)$$

onde

$$c_1 = -T \frac{h^{01}}{h^{00}}, \quad (4.44)$$

$$c_2 = -\frac{T}{2} \frac{(-h)^{-1/2}}{h^{00}}. \quad (4.45)$$

Os parênteses de Poisson restantes, cujos cálculos se encontram no Apêndice C, são dados por:

$$\{ \Phi_{\underline{\mu}}(\sigma), \varphi_1(\sigma') \} = -\Phi_{\underline{\mu}}(\sigma') \partial_{\sigma'} \delta(\sigma - \sigma'), \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} \{ \Phi_{\underline{\mu}}(\sigma), \varphi_2(\sigma') \} &= 2\tilde{\mathcal{P}}_{\alpha'} \tilde{\mathcal{P}}_{\alpha''} \tilde{e}_{\alpha'}^{\lambda'} \eta^{\alpha'' \alpha'} \partial_{[\underline{\mu}} e_{\lambda']}^{\alpha'} \delta(\sigma - \sigma') \\ &\quad + 2\tilde{\mathcal{P}}_{\nu'} \tilde{\mathcal{P}}_{\alpha'} e_{\alpha'}^{\alpha''} \tilde{e}_{\alpha'}^{\lambda'} \tilde{e}_{\alpha'}^{\gamma'} \eta^{\alpha'' \alpha'} \partial_{[\gamma'} e_{\lambda']}^{\nu'} \delta(\sigma - \sigma') \\ &\quad - U_{\underline{\mu}}^{\mu}(\sigma) \partial_{\mu} G_{\lambda\rho}(\sigma) X'^{\lambda} X'^{\rho}(\sigma) \delta(\sigma - \sigma') \\ &\quad + 2U_{\underline{\mu}}^{\mu}(\sigma) G_{\mu\rho}(\sigma') X'^{\rho}(\sigma') \partial_{\sigma'} \delta(\sigma - \sigma'), \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\{ \Phi_{\underline{\mu}}(\sigma), \Phi_{\underline{\nu}}(\sigma') \} = \mathcal{M}_{\underline{\mu}\underline{\nu}}(\sigma) \delta(\sigma - \sigma'), \quad (4.48)$$

$$\mathcal{M}_{\underline{\mu}\underline{\nu}} = \mathcal{P}_{\lambda'} \tilde{e}_{\nu'}^{\lambda'} \partial_{[\underline{\mu}} e_{\underline{\nu}]}^{\nu'}(\sigma) + \mathcal{P}_{\mu'} e_{[\underline{\mu}}^{\mu'} \partial_{\underline{\nu}]} \tilde{e}_{\nu'}^{\mu'}(\sigma)$$

$$\begin{aligned}
& + \mathcal{P}_{\lambda'} \partial_{\mu'} \tilde{e}_{\alpha'}^{\lambda'} e_{[\underline{\mu}}^{\alpha'} e_{\underline{\nu}]}^{\delta'} \tilde{e}_{\mu'}^{\delta'}(\sigma) \\
& + \mathcal{P}_{\lambda'} \tilde{e}_{\alpha'}^{\lambda'} \tilde{e}_{\nu'}^{\delta'} e_{[\underline{\mu}}^{\delta'} \partial_{\mu'} e_{\underline{\mu}]}^{\alpha'}(\sigma).
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Para o último termo de (4.47) vamos utilizar que

$$\begin{aligned}
& \partial_{\sigma}(U_{\underline{\mu}}^{\mu}(\sigma') G_{\lambda\mu}(\sigma') X'^{\lambda}(\sigma') \delta(\sigma - \sigma')) = 0 \\
& = \partial_{\sigma}(U_{\underline{\mu}}^{\mu}(\sigma) G_{\lambda\mu}(\sigma') X'^{\lambda}(\sigma') \delta(\sigma - \sigma')) \\
& = \partial_{\sigma} U_{\underline{\mu}}^{\mu}(\sigma) G_{\lambda\mu}(\sigma') X'^{\lambda}(\sigma') \delta(\sigma - \sigma') \\
& + U_{\underline{\mu}}^{\mu}(\sigma) G_{\lambda\mu}(\sigma') X'^{\lambda}(\sigma') \partial_{\sigma} \delta(\sigma - \sigma').
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Então,

$$U_{\underline{\mu}}^{\mu}(\sigma) G_{\lambda\mu}(\sigma') X'^{\lambda}(\sigma') \partial_{\sigma} \delta(\sigma - \sigma') = -\partial_{\sigma} U_{\underline{\mu}}^{\mu}(\sigma) G_{\lambda\mu}(\sigma') X'^{\lambda}(\sigma') \delta(\sigma - \sigma'). \tag{4.51}$$

Com isto, podemos reescrever (4.47) como

$$\begin{aligned}
\{\Phi_{\underline{\mu}}(\sigma), \varphi_2(\sigma')\} & = n_{\underline{\mu}}(\sigma) \delta(\sigma - \sigma'), \\
n_{\underline{\mu}}(\sigma) & = 2\tilde{\mathcal{P}}_{\alpha'} \tilde{\mathcal{P}}_{\sigma'} \eta^{\sigma'\alpha'} \tilde{e}_{\sigma'}^{\lambda'}(\sigma) \left[\partial_{[\underline{\mu}} e_{\lambda']}^{\alpha'}(\sigma) - e_{\underline{\mu}}^{\delta'} \tilde{e}_{\nu'}^{\delta'} \partial_{[\sigma'} e_{\lambda']}^{\alpha'}(\sigma) \right] \\
& \quad - U_{\underline{\mu}}^{\beta} \partial_{\beta} G_{\lambda\rho} X'^{\lambda} X'^{\rho}(\sigma) - 2\partial_{\sigma} U_{\underline{\mu}}^{\nu} G_{\lambda\nu} X'^{\lambda}(\sigma).
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Desta forma, segue que

$$\begin{aligned}
\{\Phi_{\underline{\mu}}(\sigma), \mathcal{H}_c(\sigma')\} & = c_1 \left(-\Phi_{\underline{\mu}}(\sigma') \partial_{\sigma'} \delta(\sigma - \sigma') \right) + c_2 n_{\underline{\mu}}(\sigma') \delta(\sigma - \sigma') \\
& = \mathcal{N}_{\underline{\mu}}(\sigma') \delta(\sigma - \sigma'),
\end{aligned} \tag{4.53}$$

$$\mathcal{N}_{\underline{\mu}}(\sigma) = c_2(\sigma) n_{\underline{\mu}}(\sigma). \tag{4.54}$$

Considerando todas as contribuições de (4.42), ficamos com:

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}_{\underline{\mu}}(\sigma) &= \int \left(\mathcal{N}_{\underline{\mu}}(\sigma') + \lambda^{\underline{\mu}} \mathcal{M}_{\underline{\mu}\underline{\nu}}(\sigma') \right) \delta(\sigma - \sigma') d\sigma' \\ &= \mathcal{N}_{\underline{\mu}}(\sigma) + \lambda^{\underline{\mu}} \mathcal{M}_{\underline{\mu}\underline{\nu}}(\sigma) = 0.\end{aligned}\quad (4.55)$$

Observamos que (4.55) possui uma forma correspondente aos casos das partículas relativísticas e não relativísticas. Sendo assim, analisaremos os casos em que a dimensão de $\mathcal{M}$ é par ou ímpar.

4.2.3 Caso $D - r$ Par

Existe a inversa de $\mathcal{M}_{\underline{\mu}\underline{\nu}}$, portanto, a partir de (4.55), determinamos os multiplicadores de Lagrange $\lambda^{\underline{\mu}} = -\mathcal{M}^{\underline{\mu}\underline{\nu}} \mathcal{N}_{\underline{\nu}}$.

Vejamos como ficam as evoluções dos vínculos secundários φ_1 e φ_2 .

$$\dot{\varphi}_1(\sigma) = \int \left(\{ \varphi_1(\sigma), \mathcal{H}_c(\sigma') \} + \lambda^{\underline{\mu}} \{ \varphi_1(\sigma), \Phi_{\underline{\mu}}(\sigma') \} \right) d\sigma', \quad (4.56)$$

$$\dot{\varphi}_2(\sigma) = \int \left(\{ \varphi_2(\sigma), \mathcal{H}_c(\sigma') \} + \lambda^{\underline{\mu}} \{ \varphi_2(\sigma), \Phi_{\underline{\mu}}(\sigma') \} \right) d\sigma', \quad (4.57)$$

$$\{ \varphi_1(\sigma), \mathcal{H}_c(\sigma') \} = c_1 \{ \varphi_1(\sigma), \varphi_1(\sigma') \} + c_2 \{ \varphi_1(\sigma), \varphi_2(\sigma') \}, \quad (4.58)$$

$$\{ \varphi_2(\sigma), \mathcal{H}_c(\sigma') \} = c_1 \{ \varphi_2(\sigma), \varphi_1(\sigma') \} + c_2 \{ \varphi_2(\sigma), \varphi_2(\sigma') \}. \quad (4.59)$$

No apêndice C apresentamos os cálculos envolvidos para a obtenção da seguinte álgebra dos vínculos:

$$\{ \varphi_1(\sigma), \varphi_1(\sigma') \} = [\varphi_1(\sigma) + \varphi_1(\sigma')] \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma') \quad (4.60)$$

$$\{\varphi_1(\sigma), \varphi_2(\sigma')\} = [\varphi_2(\sigma) + \varphi_2(\sigma')] \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma') \quad (4.61)$$

$$\{\varphi_2(\sigma), \varphi_2(\sigma')\} = [\varphi_1(\sigma) + \varphi_1(\sigma')] \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma') \quad (4.62)$$

Então, podemos concluir que

$$\dot{\varphi}_1 = 0 \quad (4.63)$$

não gera novos vínculos.

Porém, de

$$\{\varphi_2(\sigma), \Phi_\mu(\sigma')\} = -n_\mu(\sigma') \delta(\sigma - \sigma') = -\frac{\mathcal{N}_\mu}{c_2}(\sigma') \delta(\sigma - \sigma'), \quad (4.64)$$

segue que

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_2 &= - \int \lambda^\mu \frac{\mathcal{N}_\mu}{c_2}(\sigma') \delta(\sigma - \sigma') d\sigma' \\ &= -\frac{1}{c_2} \lambda^\mu \mathcal{N}_\mu(\sigma). \end{aligned} \quad (4.65)$$

Como $\lambda^\mu = -\mathcal{M}^{\mu \nu} \mathcal{N}_\nu$, verificamos que

$$\dot{\varphi}_2 = -\frac{1}{c_2} \mathcal{M}^{\mu \nu} \mathcal{N}_\mu \mathcal{N}_\nu = 0, \quad (4.66)$$

não gera novos vínculos.

Temos então um conjunto com um número ímpar de vínculos de segunda classe, Φ_μ e φ_2 . Desta forma, vamos considerar uma combinação dos vínculos que seja de primeira classe

$$\phi = \xi \varphi_2 + f^\mu \Phi_\mu, \quad (4.67)$$

e determinar os coeficientes ξ e f^μ a partir de

$$\begin{aligned}\{\phi, \varphi_2\} &= f^\mu \{\Phi_\mu, \varphi_2\} = f^\mu \mathcal{N}_\mu \delta = 0 \\ \{\phi, \Phi_\rho\} &= \xi \{\varphi_2, \Phi_\rho\} + f^\mu \mathcal{M}_{\mu\rho} \delta = 0.\end{aligned}\quad (4.68)$$

Temos que a solução para (4.68) é dada por

$$f^\mu = \mathcal{N}_\rho \mathcal{M}^{\rho\mu} \quad \xi = c_2. \quad (4.69)$$

Então,

$$\phi = c_2 \varphi_2 + \mathcal{N}_\rho \mathcal{M}^{\rho\mu} \Phi_\mu \quad (4.70)$$

é a combinação procurada.

Ficamos com um número par de vínculos de segunda classe definidos por Φ_μ e com os vínculos de primeira classe dados por ϕ , φ_1 e $\mathcal{P}_{(a)(b)}$. Então existem $D + r - 4$ graus de liberdade no espaço de fase.

4.2.4 Caso $D - r$ Ímpar

Neste caso, como o determinante de $\mathcal{M}_{\mu\rho}$ é nulo, sabemos que existe um auto-vetor nulo $\mathcal{V}^\mu$ de $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{V}^\mu \mathcal{M}_{\mu\rho} = 0$. Então, em $\dot{\Phi}_\mu = 0$ na equação (4.55), de modo análogo ao que foi realizado na partícula relativística, surgirá o vínculo

$$\chi = \mathcal{V}^\mu \mathcal{N}_\mu = 0, \quad (4.71)$$

onde ao utilizarmos a representação de $\mathcal{V}^\mu$, obtida no apêndice A, obtemos

$$\chi = \mathcal{N}_{D-r} - \mathcal{M}_{D-r}{}^\rho \mathcal{M}^{\rho\sigma} \mathcal{N}_\sigma = 0. \quad (4.72)$$

Utilizando novamente a analogia da partícula relativística, porém desta vez comparando com a equação (3.39) do Capítulo 3, o valor de $\lambda^{\underline{\nu}'}$ dado por

$$\lambda^{\underline{\nu}'} = -\mathcal{M}^{\underline{\mu}' \underline{\nu}'} \left(\mathcal{N}_{\underline{\mu}'} + \mathcal{M}_{\underline{\mu}' \underline{D-r}} \lambda^{\underline{D-r}} \right). \quad (4.73)$$

Vamos, agora, determinar a evolução temporal de χ , φ_1 e φ_2 .

Analogamente ao que foi realizado no caso $D - r$ par, a evolução temporal de φ_1 não gera novos vínculos. Para φ_2 , temos

$$\dot{\varphi}_2 = -\frac{\lambda^{\underline{\nu}}}{c_2} \mathcal{N}_{\underline{\nu}}(\sigma) = \frac{1}{c_2} \left(\lambda^{\underline{\nu}'} \mathcal{N}_{\underline{\nu}'} + \lambda^{\underline{D-r}} \mathcal{N}_{\underline{D-r}} \right). \quad (4.74)$$

Substituindo $\lambda^{\underline{\nu}'}$ temos

$$\dot{\varphi}_2 = \lambda^{\underline{D-r}} \chi = 0, \quad (4.75)$$

ou seja, nenhum vínculo é gerado.

Vejamos a evolução de χ

$$\dot{\chi} = \{\chi, H_p\} = \int \left(\{\chi(\sigma), \mathcal{H}_c(\sigma')\} + \lambda^{\underline{\nu}} \{\chi(\sigma), \Phi_{\underline{\nu}}(\sigma')\} \right) d\sigma', \quad (4.76)$$

$$\{\chi, \mathcal{H}_c(\sigma')\} = c_1 \{\chi(\sigma), \varphi_1(\sigma')\} + c_2 \{\chi(\sigma), \varphi_2(\sigma')\}. \quad (4.77)$$

Para ficar com uma forma conveniente, análoga à partícula relativística, consideremos

$$\mathcal{H}_c(\sigma') = \frac{\bar{c}}{2} \varphi, \quad (4.78)$$

onde $\varphi = \bar{c}_1 \varphi_1 + \bar{c}_2 \varphi_2$. Mas $\mathcal{H}_c(\sigma') = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2$. Logo: $c_{1(2)} = \frac{\bar{c}}{2} \bar{c}_{1(2)}$. Então

$$\{\chi, \mathcal{H}_c(\sigma')\} = \{\chi, \frac{\bar{c}}{2} \varphi\}. \quad (4.79)$$

Ainda temos

$$\lambda^\mu \{ \chi, \Phi_\mu \} = \lambda^{\mu'} \{ \chi, \Phi_{\mu'} \} + \lambda^{\underline{D-r}} \{ \chi, \Phi_{\underline{D-r}} \}, \quad (4.80)$$

logo

$$\dot{\chi}(\sigma) = \int \left(\left\{ \chi(\sigma), \frac{\bar{c}}{2} \varphi(\sigma') \right\} + \lambda^{\mu'} \left\{ \chi(\sigma), \Phi_{\mu'}(\sigma') \right\} + \lambda^{\underline{D-r}} \left\{ \chi(\sigma), \Phi_{\underline{D-r}}(\sigma') \right\} \right) d\sigma'. \quad (4.81)$$

Nesta última expressão, vamos substituir $\lambda^{\mu'}$, de modo análogo ao que foi realizado na partícula relativística, resultando em:

$$\begin{aligned} \dot{\chi}(\sigma) = & \int \left(\left\{ \chi(\sigma), \frac{\bar{c}}{2} \varphi(\sigma') \right\} - \mathcal{M}^{\underline{\mu'} \underline{\mu'}} \mathcal{N}_{\underline{\mu'}} \left\{ \chi, \Phi_{\underline{\mu'}} \right\} \right. \\ & \left. + \lambda^{\underline{D-r}} \left[\left\{ \chi, \Phi_{\underline{D-r}} \right\} - \mathcal{M}_{\underline{\mu'} \underline{D-r}} \mathcal{M}^{\underline{\mu'} \underline{\mu'}} \left\{ \chi, \Phi_{\underline{\mu'}} \right\} \right] \right) d\sigma'. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Devemos notar que

$$\mathcal{V}^\mu \{ \chi, \Phi_\mu \} = \left\{ \chi, \Phi_{\underline{D-r}} \right\} - \mathcal{M}_{\underline{\mu'} \underline{D-r}} \mathcal{M}^{\underline{\mu'} \underline{\mu'}} \left\{ \chi, \Phi_{\underline{\mu'}} \right\} \quad (4.83)$$

não se anula. Então

$$\lambda^{\underline{D-r}} = \frac{- \left\{ \chi(\sigma), \frac{\bar{c}}{2} \varphi(\sigma') \right\} + \mathcal{M}^{\underline{\mu'} \underline{\mu'}} \mathcal{N}_{\underline{\mu'}} \left\{ \chi, \Phi_{\underline{\mu'}} \right\}}{\mathcal{V}^\mu \{ \chi, \Phi_\mu \}} \quad (4.84)$$

Determinamos, então, $\lambda^{\mu'}$ e $\lambda^{\underline{D-r}}$. Desta forma Φ_μ é um vínculo de segunda classe.

Como a Hamiltoniana estendida apresenta a mesma forma da partícula relativística concluímos que o multiplicador de Lagrange μ é nulo, o que permite determinar χ como vínculo de segunda classe. Como $\{\varphi_2(\sigma), \Phi_\mu(\sigma')\} \neq 0$ concluímos que φ_2 é de segunda classe.

Resta analisar $\{\varphi_1, \chi\}$. Temos que,

$$\begin{aligned}
\{\varphi_1, \chi\} &= \{\mathcal{P}_\mu X'^\mu, \mathcal{V}^\mu \mathcal{N}_\mu\} \\
&= \{\mathcal{P}_\mu, \mathcal{V}^\mu\} X'^\mu \mathcal{N}_\mu + \{X'^\mu, \mathcal{V}^\mu\} \mathcal{P}_\mu \mathcal{N}_\mu \\
&\quad + \{\mathcal{P}_\mu, \mathcal{N}_\mu\} X'^\mu \mathcal{V}^\mu + \{X'^\mu, \mathcal{N}_\mu\} \mathcal{P}_\mu \mathcal{V}^\mu.
\end{aligned} \tag{4.85}$$

Não é possível determinar se (4.85) anula-se ou não pois o cálculo envolvido depende explicitamente da métrica.

Então, se $\{\varphi_1, \chi\} \neq 0$, teremos um número par de vínculos de segunda classe. Neste caso existem $D + r - 3$ graus de liberdade no espaço de fase.

Por outro lado, se $\{\varphi_1, \chi\} = 0$, teremos um número ímpar de vínculos de segunda classe e neste caso existe uma combinação dos vínculos que é de primeira classe. Como a estrutura dos vínculos e evoluções deste são similares ao da partícula relativística, a combinação dos vínculos, denominada Ξ , será da mesma forma. Assim, temos os vínculos de segunda classe $\Phi_{\underline{\mu}}$, φ_2 e χ e os vínculos de primeira classe φ_1 , $\mathcal{P}_{(a)(b)}$ e Ξ . Neste caso existem $D + r - 3$ graus de liberdade no espaço de fase.

Podemos concluir que a contagem dos graus de liberdade, que é definida localmente para cada ponto ao longo de σ , é independente do valor de $\{\varphi_1(\sigma), \chi(\sigma')\}$.

Adicionalmente, concluímos que o estudo inicial das partículas em espaços com métricas degeneradas, foi bastante útil para auxiliar o desenvolvimento da álgebra dos vínculos no caso da corda, sendo que esta apresenta uma estrutura de vínculos mais complexa. A estrutura dos vínculos das partículas se assemelhando com a estrutura do caso da corda, serviu de comparação para também determinar a combinação correta dos vínculos que deveriam ser de primeira classe, como também para determinar corretamente as evoluções dos vínculos primários e secundários. Estas evoluções por serem constituídas de equações não triviais, só foram simplificadas através de uma analogia com respeito ao tratamento dos vínculos de um modelo simplificado em relação ao da corda, ou seja, o das partículas em espaços com métricas degeneradas.

Com o uso da partícula não relativística em espaços com métricas degeneradas, que possui uma estrutura de vínculos similar ao da corda, conseguimos resolver de forma consistente a relação entre a ordem da matriz $M_{\underline{\mu}\underline{\nu}}$ e a condição de consistência para o vínculo $\Phi_{\underline{\mu}}$. Entretanto, por não apresentar analogia aos vínculos secundários da corda, i.e., φ_1 e φ_2 , uma generalização do modelo para o caso relativístico, trouxe condições e motivações adicionais. No caso relativístico desenvolvido no Capítulo 3, o vínculo secundário para a partícula, ou seja, o vínculo φ , serve como analogia para simplificar os vínculos secundários da corda. Esta simplificação é útil principalmente com respeito a consistência dos vínculos para o caso em que os vetores de base não são integráveis e quando $M_{\underline{\mu}\underline{\nu}}$ não possui inversa.

4.3 Isometrias na Corda com Métrica Degenerada e Vínculos de Primeira Classe

Conforme vimos nos modelos das partículas descritos nos Capítulos 2 e 3, a condição

$$\partial_{[\mu} e^{\alpha'}_{\nu]} = 0$$

tornava os vínculos de primeira classe. Se considerarmos $\partial_{[\mu} e^{\alpha'}_{\nu]} = 0$ para a corda, obtemos a partir de (4.49), (4.52) e (4.54) que

$$\mathcal{M}_{\underline{\mu}\underline{\nu}}(\sigma) = 0, \quad (4.86)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\underline{\mu}}(\sigma) &= c_2(-\mathcal{U}_{\underline{\mu}}^{\alpha} \partial_{\alpha} G_{\lambda\rho} X'^{\lambda} X'^{\rho}(\sigma) \\ &\quad - 2 \frac{\partial \mathcal{U}_{\underline{\mu}}^{\alpha}}{\partial \sigma} G_{\lambda\mu} X'^{\lambda}(\sigma)). \end{aligned} \quad (4.87)$$

Esta forma de $\mathcal{N}_{\underline{\mu}}$ não permite que todos os vínculos da teoria sejam de primeira classe. Porém, devemos notar que os termos restantes em $\mathcal{N}_{\underline{\mu}}$ podem ser reescritos de uma forma especial se considerarmos que a métrica degenerada implica em uma isometria no modelo.

Vamos considerar a condição de isometria na forma

$$\mathcal{U}_{\underline{\nu}}^{\mu} \partial_{\mu} G_{\lambda\rho} + G_{\lambda\mu} \partial_{\rho} \mathcal{U}_{\underline{\nu}}^{\mu} + G_{\mu\rho} \partial_{\lambda} \mathcal{U}_{\underline{\nu}}^{\mu} = 0, \quad (4.88)$$

onde $\mathcal{U}_{\underline{\nu}}$ representa um auto-vetor nulo de $G_{\lambda\mu}$.

Partindo de (4.88) temos que

$$\mathcal{U}_{\underline{\nu}}^{\mu} \partial_{\mu} G_{\lambda\rho} = -G_{\lambda\mu} \partial_{\rho} \mathcal{U}_{\underline{\nu}}^{\mu} - G_{\mu\rho} \partial_{\lambda} \mathcal{U}_{\underline{\nu}}^{\mu}, \quad (4.89)$$

onde podemos utilizar

$$\mathcal{U}_{\underline{\nu}}^{\mu} \partial_{\mu} G_{\lambda\rho} X'^{\lambda} X'^{\rho} = -2G_{\lambda\mu} \partial_{\rho} \mathcal{U}_{\underline{\nu}}^{\mu} X'^{\lambda} X'^{\rho}. \quad (4.90)$$

Mas

$$\partial_{\rho} \mathcal{U}_{\underline{\nu}}^{\mu} X'^{\rho} = \frac{\partial \mathcal{U}_{\underline{\nu}}^{\mu}}{\partial \sigma}, \quad (4.91)$$

logo

$$\mathcal{U}_{\underline{\nu}}^{\mu} \partial_{\mu} G_{\lambda\rho} X'^{\lambda} X'^{\rho} = -2 \frac{\partial \mathcal{U}_{\underline{\nu}}^{\mu}}{\partial \sigma} G_{\lambda\mu} X'^{\lambda}. \quad (4.92)$$

Substituindo (4.92) em (4.87), temos $\mathcal{N}_{\underline{\nu}}(\sigma) = 0$.

Assim temos $\dot{\Phi}_{\underline{\mu}} = 0$, que não gera novos vínculos e ficamos com um conjunto de vínculos de primeira classe dado por $\Phi_{\underline{\mu}}$, φ_1 e φ_2 . Então a teoria terá $D - [D - r + 2] = r - 2$ graus de liberdade no espaço de configuração.

Com este resultado podemos concluir que a análise da isometria para a métrica degenerada no caso da partícula não relativística foi bastante útil para o caso da corda, servindo como motivação na obtenção dos vínculos de primeira classe.

Apesar da condição de integrabilidade dos vetores de base permitir uma obtenção imediata dos vínculos de primeira classe para as partículas relativísticas e não relativísticas, o mesmo não ocorreu para o caso das cordas, visto que a condição de integrabilidade não tornou todos os vínculos de primeira classe. Neste ponto um recurso importante, que é a isometria associada à métrica degenerada, permitiu a obtenção completa dos vínculos de primeira classe da corda com métrica degenerada.

Além disto, no caso da corda com métrica degenerada, os vínculos de primeira classe só estão presentes para o caso em que ocorre a isometria em termos dos vetores de Killing, sendo estes identificados com os auto-vetores nulos da métrica degenerada.

Adicionalmente, a existência de isometrias no modelo da corda em campo de fundo gravitacional, é de importância fundamental para a formulação de ações duais [28, 29, 30]. Nesta formulação, a ação obtida a partir de transformações específicas nas componentes da métrica inicial, é classicamente equivalentente à ação inicial, sendo chamada de ação dual. Porém o procedimento utilizado, não utiliza o inverso da métrica. Sendo assim, é de se esperar que uma ação dual à ação com métrica degenerada possa dar outras interpretações, neste contexto de dualidade, às métricas degeneradas na teoria de cordas.

4.4 Invariância Conforme em Nível Quântico

Uma vez encontrado um sistema de vínculos de primeira classe na teoria de cordas, podemos verificar se a simetria gerada por estes é preservada em nível quântico, e, se não for, que condições devem ser impostas para que seja.

No caso usual em que a métrica do espaço-tempo possui inversa, a álgebra dos vínculos em nível quântico é estudada em [31, 32], onde são obtidas condições sobre os campos de fundo de modo que a álgebra continue de primeira classe, implicando nas condições de invariância conforme em nível quântico encontradas em [33].

Entretanto é possível tratar a álgebra dos vínculos para a corda com métrica degenerada utilizando método descrito em [32], em que é usado como ponto de partida a relação de comutação canônica das coordenadas e seus momentos canonicamente conjugados, que só é válida se os vínculos forem de primeira classe em nível clássico.

Para encontrarmos a álgebra em nível quântico necessitamos de um ordenamento que permita tratar convenientemente funções do operador posição X de tal forma que:

$$: F(X) : = F(X). \quad (4.93)$$

Este ordenamento é justificado com uma escolha conveniente do vácuo da teoria escrevendo

$$X^{\mu} = \frac{T}{2} \int_0^{\sigma} d\sigma e^{-2im\sigma} X^{\mu} = -\frac{i}{4} T \int d\xi \xi^{-m-1} X^{\mu}(\xi) = \int_m X^{\mu}, \quad (4.94)$$

$$P_{\mu}^m = \int_m P_{\mu} \quad \xi = e^{2i\sigma},$$

onde os modos positivos e o modo zero de P^m são colocados à direita, os modos negativos e o modo zero de X^m são colocados à esquerda das expressões escritas em função de X e P . Os produtos ordenados não triviais são produtos de X e P , e.g.,

$$P_{\mu}(\sigma) X^{\nu}(\bar{\sigma}) = : P_{\mu}(\sigma) X^{\nu}(\bar{\sigma}) : + \underline{P_{\mu}(\sigma) X^{\nu}(\bar{\sigma})} \quad (4.95)$$

com

$$\underline{P_{\mu}(\sigma) X^{\nu}(\bar{\sigma})} = -\frac{i}{\pi} \delta_{\mu}^{\nu} \frac{\bar{\xi}}{\xi - \bar{\xi}} \quad |\xi| < |\bar{\xi}| \quad (4.96)$$

Uma relação geral e importante é:

$$[\int_m A, \int_n B] = -\frac{T^2}{16} \int d\xi \int d\bar{\xi} \xi^{-m-1} \bar{\xi}^{-n-1} A(\xi) B(\bar{\xi}). \quad (4.97)$$

Aplicando (4.96) e (4.97) aos vínculos usuais da corda, com o campo de fundo não degenerado, encontramos a álgebra em nível quântico cujos termos adicionais, i.e., aqueles não proporcionais aos vínculos, também chamados de termos de Schwinger, se anulam se o campo de fundo satisfaz as equações de Einstein. Temos então que as equações de Einstein são as condições para a invariância conforme em nível quântico.

Com o estudo do método desenvolvido em [32], podemos fazer o tratamento quântico da álgebra dos vínculos de primeira classe da corda num campo de fundo degenerado. Com isto, encontraremos os termos de Schwinger correspondentes à quebra da invariância conforme e demais simetrias, tratadas quanticamente e estendidas para o caso degenerado.

É importante notarmos que esta extensão envolvendo métricas degeneradas não é possível se o ponto de partida for a álgebra usual do caso não degenerado. Isto porque o último caso, ao admitir uma métrica inversa, permite a inclusão de contra-termos, no tratamento em nível quântico, proporcionais ao tensor de Riemann [31] e com isto inviabiliza uma extensão direta para o caso degenerado. Vemos então que tal extensão deve partir do cálculo envolvendo a álgebra dos vínculos de primeira classe descrita exclusivamente com a métrica degenerada.

O cálculo em nível quântico ainda está em aberto, porém quando concluído futuramente, poderá indicar um comportamento quântico para as métricas degeneradas consideradas no contexto da teoria de cordas.

Capítulo 5

Conclusão

Os resultados obtidos nesta tese, revelam aspectos importantes da dinâmica de partículas e cordas em espaços com métricas degeneradas que ainda não foram completamente tratados na literatura. Neste trabalho conseguimos desenvolver o formalismo Hamiltoniano de forma a obter os vínculos e calcularmos a álgebra dos mesmos.

Ao desenvolvermos o formalismo Hamiltoniano de forma a obter o conjunto completo dos vínculos conseguimos determinar a dinâmica efetiva para as partículas relativísticas e não relativísticas e cordas em movimento num campo de fundo gravitacional degenerado. Verificamos que quando a métrica é degenerada há o surgimento de vínculos adicionais no espaço de fase os quais não possuem correspondência no caso em que a métrica não é degenerada. Estes vínculos são características importantes para os movimentos em espaços com métricas degeneradas. A estrutura dos vínculos é semelhante para todos os modelos que tratamos. Porém, os vínculos apresentam maior complexidade quando há invariância por reparametrização que caracteriza as partículas relativísticas e as cordas.

Um aspecto bastante motivador foi considerar a isometria no caso da partícula não relativística. Este modelo, por ser o caso mais simples envolvendo métrica degenerada, possibilitou uma análise simplificada da presença de isometrias associada à métrica degenerada. No caso usual em que a métrica não é degenerada, uma isometria está associada

a uma simetria intrínseca da métrica. Porém, no caso da corda com métrica degenerada, concluímos que a isometria está fortemente associada à simetria local gerada pelos vínculos de primeira classe. Isto mostra como o formalismo Hamiltoniano para a corda em campo de fundo degenerado revela aspectos geométricos que não estavam explícitos na construção algébrica dos vínculos de primeira classe. Convém ressaltar que estes aspectos são exclusivos da corda com métrica degenerada que desenvolvemos nesta tese.

Ainda podemos notar que o uso da isometria para a métrica degenerada permite algumas motivações adicionais para o desenvolvimento de projetos futuros oriundos desta tese. Estas motivações estão associadas à obtenção de ações duais discutidas em [28, 29]. Estas ações são assim definidas por serem classicamente equivalentes à ação original de uma corda em campo de fundo gravitacional porém com métricas diferentes [30]. Um aspecto marcante nestas ações duais é que para a sua construção não é necessário o inverso da métrica. Então, podemos analisar futuramente como as métricas degeneradas podem se relacionar com as métricas obtidas nas ações duais.

Um trabalho importante para ser desenvolvido é o estudo de aspectos quânticos envolvendo métricas degeneradas. Conforme discutimos no final do Capítulo 4, o desenvolvimento da álgebra em nível quântico poderá fornecer outras aplicações para a teoria de cordas em campo de fundo gravitacional degenerado. Este resultado poderá dar uma descrição alternativa para o estudo das dualidades em nível quântico para as ações duais. Isto se deve ao fato de que as isometrias, que são a base para esta simetria de dualidade, também estão presentes na métrica degenerada. Assim, podemos esperar que exista uma relação específica entre as métricas degeneradas e as não degeneradas no contexto da teoria de cordas.

Apêndice A

Propriedades dos Auto-Vetores Nulos em $D - r$ Ímpar

Sabemos de (3.26), que

$$\dot{\Phi}_{\underline{\mu}} = N_{\underline{\mu}} + \lambda^{\underline{\mu}} M_{\underline{\mu}\underline{\nu}} = 0. \quad (\text{A.1})$$

Porém, para $D - r$ ímpar, $M_{\underline{\mu}\underline{\nu}}$ não possui inversa, i.e., $\det M = 0$. Sendo assim, vamos considerar o índice $\underline{\mu}$ com a seguinte representação: $\underline{\mu} = (\underline{\mu}', \underline{D} - r)$. Então, temos que $M_{\underline{\mu}'\underline{\nu}'}$ possui inversa, já que $\underline{\mu}'$ representa um número par de índices. Assim, $M_{\underline{\mu}'\underline{\nu}'}$ é de ordem par além de possuir componentes independentes, o que torna $\det(M_{\underline{\mu}'\underline{\nu}'}) \neq 0$. Desta forma podemos concluir que $M_{\underline{\mu}\underline{\nu}}$ tem posto $D - r - 1$, possuindo apenas um auto-vetor nulo.

Seja $V^{\underline{\mu}}$ o auto-vetor nulo, então

$$V^{\underline{\mu}} M_{\underline{\mu}\underline{\nu}} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Multiplicando (A.1) por $V^{\underline{\mu}}$, temos

$$V^{\underline{\mu}} N_{\underline{\mu}} + \lambda^{\underline{\mu}} V^{\underline{\mu}} M_{\underline{\mu}\underline{\nu}} = 0, \quad (\text{A.3})$$

que implica em

$$\chi \equiv V^{\underline{\mu}} N_{\underline{\mu}} = 0. \quad (\text{A.4})$$

Entretanto, sabemos que

$$\chi = N_{\underline{D-r}} - M_{\underline{D-r} \underline{\beta}'} M_{\underline{\beta}'}^{\underline{\beta}'} N_{\underline{\nu}'} = 0. \quad (\text{A.5})$$

De (A.5) e (A.4), podemos fazer a seguinte identificação:

$$V^{\underline{\mu}} = \delta_{\underline{D-r}}^{\underline{\mu}} - M_{\underline{D-r} \underline{\beta}'} M_{\underline{\beta}'}^{\underline{\beta}'} \delta_{\underline{\nu}'}^{\underline{\mu}}. \quad (\text{A.6})$$

A partir de (A.6) podemos checar diretamente que

$$\begin{aligned} V^{\underline{\mu}} M_{\underline{\mu} \underline{\nu}} &= M_{\underline{D-r} \underline{\nu}} - M_{\underline{D-r} \underline{\beta}'} M_{\underline{\beta}'}^{\underline{\beta}'} M_{\underline{\alpha}'}^{\underline{\alpha}'} M_{\underline{\alpha}'}^{\underline{\nu}} \\ &= M_{\underline{D-r} \underline{\nu}} - M_{\underline{D-r} \underline{\beta}'} \delta_{\underline{\nu}}^{\underline{\beta}'} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Então podemos concluir que $V^{\underline{\mu}}$ é uma representação do auto-vetor com auto-valor nulo para qualquer que seja a ordem ímpar de $M_{\underline{\mu} \underline{\nu}}$. Assim podemos escrever o vínculo χ de uma forma compacta, ou seja, $\chi = V^{\underline{\mu}} N_{\underline{\mu}}$.

Uma observação importante é que $V^{\underline{\mu}}$ pode também ser construído diretamente a partir da equação de auto-valores. Consideremos o caso particular $(D-r) = 3$ com a matriz associada a $M_{\underline{\mu} \underline{\nu}}$ e um vetor em três dimensões:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & M_{12} & M_{13} \\ -M_{12} & 0 & M_{23} \\ -M_{13} & -M_{23} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V^1 \\ V^2 \\ V^3 \end{pmatrix}.$$

Consideremos as equações para o auto-valor nulo de $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{V} = 0 \implies \begin{cases} V^2 M_{12} + V^3 M_{13} = 0 \\ -V^1 M_{12} + V^3 M_{23} = 0 \\ -V^1 M_{13} + V^2 M_{23} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

A partir de (A.8) obtemos o auto-vetor de M cujo auto-valor é nulo:

$$\mathbf{V} = V^3 \begin{pmatrix} \frac{M_{23}}{M_{12}} \\ -\frac{M_{13}}{M_{12}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Vamos considerar simplesmente que

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{M_{23}}{M_{12}} \\ -\frac{M_{13}}{M_{12}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Desta forma

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{V} = \begin{pmatrix} -M_{13} + M_{13} \\ -M_{23} + M_{23} \\ -\frac{M_{13}M_{23}}{M_{12}} + \frac{M_{23}M_{13}}{M_{12}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

que garante (A.10) como uma representação conveniente do auto-vetor nulo de $\mathbf{M}$.

Vamos então, identificar as componentes de $\mathbf{V}$ em (A.10) com $V^\mu = \delta_{\underline{3}}^\mu - M_{\underline{3}\underline{\beta}'} M^{\underline{\beta}'}{}^{\underline{\alpha}'} \delta_{\underline{\alpha}'}^\mu$, considerando que $(\underline{D} - r) = \underline{3}$ e $\underline{\alpha}' = (1, 2)$.

Neste caso usaremos:

$$\mathbf{M}' = \begin{pmatrix} 0 & M_{12} \\ -M_{12} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{M}'^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{M_{12}} \\ \frac{1}{M_{12}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.12})$$

onde devemos notar que $\mathbf{M}$ é constituída apenas das componentes $M_{\underline{\alpha}'}{}^{\underline{\beta}'}$, e que estas componentes são independentes e não nulas, conforme vemos diretamente na matriz bi-dimensional anterior.

Ficamos então com

$$V^{\underline{\mu}'} = -M_{\underline{3}\underline{\beta}'} M^{\underline{\beta}'}{}^{\underline{\mu}'}, \quad (\text{A.13})$$

cujas componentes são detalhadas a seguir.

Temos

$$V^{\underline{1}'} = -M_{\underline{3}\underline{1}'} M^{\underline{1}'}{}^{\underline{1}'} - M_{\underline{3}\underline{2}'} M^{\underline{2}'}{}^{\underline{1}'}, \quad (\text{A.14})$$

Mas $M_{\underline{3}\underline{2}'} = -M_{23} = M_{32}$. Logo,

$$V^{\underline{1}'} = -M_{32} \cdot \frac{1}{M_{12}} = \frac{M_{23}}{M_{12}}, \quad (\text{A.15})$$

é o primeiro termo de $\mathbf{V}$ em (A.10). Considerando

$$\begin{aligned} V^{\underline{2}'} &= -M_{\underline{3}\underline{1}'} M^{\underline{1}'\underline{2}'} - M_{\underline{3}\underline{2}'} M^{\underline{2}'\underline{2}'} \\ &= -M_{31} \cdot \left(\frac{-1}{M_{12}} \right) = -\frac{M_{13}}{M_{12}}, \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

vemos que é o segundo termo de $\mathbf{V}$ em (A.10). E

$$V^{\underline{D-r}} = V^{\underline{3}} = \delta_{\underline{3}}^{\underline{3}} = 1, \quad (\text{A.17})$$

é o terceiro termo de $\mathbf{V}$ em (A.10).

Devemos observar que os resultados obtidos são válidos para as partículas e para a corda bastando considerar os índices apropriados.

Apêndice B

Dedução da Hamiltoniana Canônica da Corda com Métrica Degenerada e Vínculos Secundários

Hamiltoniana Canônica

Vamos considerar a Lagrangeana na formulação de Polyakov:

$$\begin{aligned} L &= \int \mathcal{L} d\sigma \\ \mathcal{L} &= -\frac{T}{2} \sqrt{-h} h^{(a)(b)} \partial_{(a)} X^\mu \partial_{(b)} X^\nu G_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

onde $(a) = 0, 1$. A densidade de momento é dada por:

$$\mathcal{P}_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = -T \sqrt{-h} h^{0(b)} \partial_{(b)} X^\nu G_{\mu\nu} = M^{0(b)} \partial_{(b)} X^\nu G_{\mu\nu}, \quad (\text{B.2})$$

onde

$$\partial_0 X^\mu = \dot{X}^\mu \quad \partial_1 X^\mu = X'^\mu. \quad (\text{B.3})$$

Para $G_{\mu\nu} = e_\mu^{\alpha'} e_\nu^{\beta'} \eta_{\alpha'\beta'}$, sabemos que $\det(G_{\mu\nu}) = 0$, já que o posto de G é r .

Vamos escrever $\mathcal{P}_\mu$ como

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_\mu &= \Delta_{a'} e_\mu^{a'}, \\ \Delta_{a'} &= M^{0(b)} \partial_{(b)} X^\nu e_\nu^{b'} \eta_{a'\nu}.\end{aligned}\tag{B.4}$$

Vamos considerar que $\mu = \mu', \underline{\mu}$, onde $\mu' = 0, 1, \dots, r-1$; $\underline{\mu} = r, \dots, D-1$. Então escrevemos (B.4) como

$$\mathcal{P}_{\mu'} = \Delta_{a'} e_{\mu'}^{a'} \tag{B.5}$$

$$\mathcal{P}_{\underline{\mu}} = \Delta_{a'} e_{\underline{\mu}}^{a'} \tag{B.6}$$

Mas:

$$e_{\mu'}^{a'} \tilde{e}_{\nu'}^{\mu'} = \delta_{\nu'}^{a'}, \tag{B.7}$$

$$e_{\mu'}^{a'} \tilde{e}_{a'}^{\nu'} = \delta_{\nu'}^{\mu'}. \tag{B.8}$$

De (B.5) temos que

$$\Delta_{a'} = \tilde{e}_{a'}^{\mu'} \mathcal{P}_{\mu'}. \tag{B.9}$$

Usando esta última em (B.6), temos

$$\mathcal{P}_{\underline{\mu}} = e_{\underline{\mu}}^{a'} \tilde{e}_{a'}^{\nu'} \mathcal{P}_{\nu'}, \tag{B.10}$$

que corresponde ao vínculo primário

$$\Phi_{\underline{\mu}} \equiv \mathcal{P}_{\underline{\mu}} - e_{\underline{\mu}}^{a'} \tilde{e}_{a'}^{\nu'} \mathcal{P}_{\nu'} = 0. \tag{B.11}$$

Vamos considerar que

$$\Delta_{a'} = M^{00} \dot{X}^\nu e_\nu^{b'} \eta_{a'\nu} + M^{01} X'^\nu e_\nu^{b'} \eta_{a'\nu}. \tag{B.12}$$

Então,

$$\dot{X}^\nu e_\nu^{\nu'} \eta_{\alpha'\nu'} = \frac{\Delta_{\alpha'}}{M^{00}} - \frac{M^{01}}{M^{00}} X'^\nu e_\nu^{\nu'} \eta_{\alpha'\nu'}. \quad (\text{B.13})$$

A partir desta última, temos

$$\begin{aligned} \dot{X}^\mu e_\mu^{\alpha'} \dot{X}^\nu e_\nu^{\nu'} \eta_{\alpha'\nu'} &= \left(\eta^{\alpha'\nu'} \Delta_{\alpha'} - M^{01} X'^\mu e_\mu^{\alpha'} \right) \left(\Delta_{\alpha'} - M^{01} X'^\nu e_\nu^{\nu'} \eta_{\alpha'\nu'} \right) (M^{00})^{-2} \\ &= \left[\eta^{\alpha'\nu'} \Delta_{\alpha'} \Delta_{\nu'} - 2M^{01} X'^\mu e_\mu^{\alpha'} \Delta_{\alpha'} + (M^{01})^2 X'^\mu e_\mu^{\alpha'} X'^\nu e_\nu^{\nu'} \eta_{\alpha'\nu'} \right] \\ &\quad \times (M^{00})^{-2}. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Sabendo que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = M^{00} \dot{X}^\nu G_{\mu\nu} + M^{01} X'^\nu G_{\mu\nu}, \quad (\text{B.15})$$

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} \dot{X}^\mu - \mathcal{L} &= \frac{1}{2} M^{00} \dot{X}^\mu e_\mu^{\alpha'} \dot{X}^\nu e_\nu^{\nu'} \eta_{\alpha'\nu'} \\ &\quad - \frac{1}{2} M^{11} X'^\mu e_\mu^{\alpha'} X'^\nu e_\nu^{\nu'} \eta_{\alpha'\nu'}. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Ao considerarmos (B.9), obtemos as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \eta^{\alpha'\nu'} \Delta_{\alpha'} \Delta_{\nu'} &= \eta^{\alpha'\nu'} \tilde{e}_{\alpha'}^{\mu'} \tilde{e}_{\nu'}^{\nu'} \mathcal{P}_{\mu'} \mathcal{P}_{\nu'} = \tilde{G}^{\mu'\nu'} \mathcal{P}_{\mu'} \mathcal{P}_{\nu'}, \\ X'^\mu e_\mu^{\alpha'} \Delta_{\alpha'} &= X'^\mu \mathcal{P}_\mu. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Substituindo (B.17) em (B.14) e (B.16), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c &= \mathcal{P}_\mu \dot{X}^\mu - \mathcal{L} \\ &= \frac{\tilde{\mathcal{P}}^2}{2M^{00}} - \frac{M^{01}}{M^{01}} \mathcal{P}_\mu X'^\mu + \left[\frac{(M^{01})^2}{M^{00}} - M^{11} \right] \frac{(X')^2}{2}, \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

onde

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{P}}^2 &= \tilde{G}^{\mu'\nu'} \mathcal{P}_{\mu'} \mathcal{P}_{\nu'}, \\ (X')^2 &= X'^{\mu} X'^{\nu} G_{\mu\nu}.\end{aligned}$$

Adicionalmente, sabemos que

$$\det(h^{(a)(b)}) = \frac{1}{h} = h^{00} h^{11} - (h^{01})^2, \quad (\text{B.19})$$

onde $h = \det(h_{(a)(b)})$ e $h < 0$. Considerando que $M^{(a)(b)} = -T\sqrt{-h}h^{(a)(b)}$ temos a partir de (B.19):

$$\frac{(M^{01})^2}{M^{00}} - M^{11} = -\frac{T}{\sqrt{-h}h^{00}}. \quad (\text{B.20})$$

Substituindo estas propriedades em (B.18), ficamos com a densidade de Hamiltoniana canônica dada por:

$$\mathcal{H}_c = -\frac{1}{2h^{00}} \left[\frac{\tilde{\mathcal{P}}^2}{T\sqrt{-h}} + 2h^{01} \mathcal{P}_\mu X'^{\mu} + \frac{T}{\sqrt{-h}} (X')^2 \right]. \quad (\text{B.21})$$

Devemos notar que quando a métrica não for degenerada, basta substituírmos $\tilde{\mathcal{P}}^2$ por $\mathcal{P}^2 = G^{\mu\nu} \mathcal{P}_\mu \mathcal{P}_\nu$ para obtermos a forma padrão de $\mathcal{H}_c$ do caso não degenerado.

Vínculos Secundários

Na evolução dos vínculos primários $\mathcal{P}_{(a)(b)} = 0$ através da Hamiltoniana primária H_P , temos que considerar as contribuições vindas de cada componente, ou seja, precisamos calcular $\dot{\mathcal{P}}_{00}$, $\dot{\mathcal{P}}_{01}$ e $\dot{\mathcal{P}}_{11}$. Assim temos

$$\dot{\mathcal{P}}_{(c)(d)}(\sigma) = \left\{ \mathcal{P}_{(c)(d)}(\sigma'), H_p \right\} = \int_0^{\sigma'} \left(\left\{ \mathcal{P}_{(c)(d)}(\sigma), \mathcal{H}_c(\sigma') \right\} \right) d\sigma', \quad (\text{B.22})$$

onde $\mathcal{H}_c$ está definida em (B.21) e também usamos que

$$\left\{ \mathcal{P}_{(c)(d)}(\sigma), \mathcal{P}_{(a)(b)}(\sigma') \right\} = 0, \quad (\text{B.23})$$

$$\left\{ \mathcal{P}_{(c)(d)}(\sigma), \Phi_{\underline{\mu}}(\sigma') \right\} = 0. \quad (\text{B.24})$$

A contribuição em (B.22) é dada por

$$\begin{aligned} & \left\{ \mathcal{P}_{(c)(d)}(\sigma), \mathcal{H}_c(\sigma') \right\} = \\ & \left\{ \mathcal{P}_{(c)(d)}(\sigma), -\frac{1}{2h^{00}(\sigma')} \right\} \left[\frac{\tilde{\mathcal{P}}^2}{T\sqrt{-h}} + 2h^{01}\mathcal{P}_{\mu}X'^{\mu} + \frac{T}{\sqrt{-h}}(X')^2 \right](\sigma') \\ & - \frac{1}{2h^{00}(\sigma')} \left\{ \mathcal{P}_{(c)(d)}(\sigma), \left[\frac{\tilde{\mathcal{P}}^2}{T\sqrt{-h}} + 2h^{01}\mathcal{P}_{\mu}X'^{\mu} + \frac{T}{\sqrt{-h}}(X')^2 \right](\sigma') \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Em (B.25) vamos considerar o termo

$$\begin{aligned} & \left\{ \mathcal{P}_{(c)(d)}(\sigma), \left[\frac{\tilde{\mathcal{P}}^2}{T\sqrt{-h}} + 2h^{01}\mathcal{P}_{\mu}X'^{\mu} + \frac{T}{\sqrt{-h}}(X')^2 \right](\sigma') \right\} = \\ & \left\{ \mathcal{P}_{(c)(d)}(\sigma), \frac{1}{\sqrt{-h}}(\sigma') \right\} \left(\frac{\tilde{\mathcal{P}}^2}{T}(\sigma') + T(X')^2(\sigma') \right) \\ & + \left\{ \mathcal{P}_{(c)(d)}(\sigma), h^{01}(\sigma') \right\} 2\mathcal{P}_{\mu}X'^{\mu}(\sigma'). \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

No termo (B.26) precisamos calcular $\left\{ \mathcal{P}_{(c)(d)}(\sigma), \frac{1}{\sqrt{-h}}(\sigma') \right\}$. Porém, vamos considerar

$$\left\{ \mathcal{P}_{(c)(d)}(\sigma), f(\sigma') \right\} = -\delta_{(c)(d)}^{(a)(b)} \delta(\sigma - \sigma') \frac{\partial f(\sigma')}{\partial h^{(a)(b)}(\sigma')}. \quad (\text{B.27})$$

Mas, para $f(\sigma) = (-h)^{-1/2}(\sigma)$, temos

$$\frac{\partial f(\sigma')}{\partial h^{(a)(b)}(\sigma'')} = -\frac{1}{2}(-h)^{-1/2}(\sigma')h_{(a)(b)}(\sigma')\delta(\sigma' - \sigma''). \quad (\text{B.28})$$

Então, substituindo (B.28) em (B.27), ficamos com

$$\left\{ \mathcal{P}_{(c)(d)}(\sigma), \frac{1}{\sqrt{-h}}(\sigma') \right\} = -\frac{1}{2}(-h)^{-1/2}(\sigma')h_{(c)(d)}(\sigma')\delta(\sigma - \sigma') \quad (\text{B.29})$$

Um outro parênteses de Poisson em (B.25) é dado por

$$\begin{aligned} \left\{ \mathcal{P}_{(c)(d)}(\sigma), -\frac{1}{2h^{00}(\sigma')} \right\} &= -\frac{1}{2}\delta_{(c)(d)}^{(a)(b)} \frac{\partial(-\frac{1}{h^{00}})}{\partial h^{(a)(b)}} \\ &= \frac{1}{2}\delta_{(c)(d)}^{00}(h^{00})^{-2}(\sigma')\delta(\sigma - \sigma'), \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

onde $\delta_{(c)(d)}^{(a)(b)} = \frac{1}{2}(\delta_{(c)}^{(a)}\delta_{(d)}^{(b)} + \delta_{(c)}^{(b)}\delta_{(d)}^{(a)})$.

Então, usando (B.30) e (B.29), ficamos com (B.25) dada por

$$\begin{aligned} \left\{ \mathcal{P}_{(c)(d)}(\sigma), \mathcal{H}_c(\sigma') \right\} &= \frac{1}{2}\delta_{(c)(d)}^{00}(h^{00})^{-2}(\sigma') \left[\frac{\tilde{\mathcal{P}}^2}{T} + TX'^2 + \mathcal{P}_\mu X'^\mu \right] (\sigma')\delta(\sigma - \sigma') \\ &+ \frac{1}{2} \frac{1}{h^{00}(\sigma')} (-h)^{-1/2}(\sigma')h_{(c)(d)}(\sigma') \left[\frac{\tilde{\mathcal{P}}^2}{T} + TX'^2 \right] \delta(\sigma - \sigma') \\ &+ \delta_{(c)(d)}^{01}(h^{00})^{-1}(\sigma')\mathcal{P}_\mu X'^\mu(\sigma')\delta(\sigma - \sigma'). \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

A partir de (B.31), temos em (B.22)

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{P}}_{01}(\sigma) &= \dot{\mathcal{P}}_{10}(\sigma) = \frac{1}{2} \frac{h^{01}}{h^{00}} (-h)^{-1/2}(\sigma) \left[\frac{\tilde{\mathcal{P}}^2}{T} + TX'^2 \right] (\sigma) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{1}{h^{00}(\sigma)} \mathcal{P}_\mu X'^\mu(\sigma) = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{P}}_{00}(\sigma) &= \frac{1}{2} \frac{1}{(h^{00})^2(\sigma)} \left[\frac{\tilde{\mathcal{P}}^2}{T} + TX'^2 + \mathcal{P}_\mu X'^\mu \right] (\sigma) \\ &+ \frac{1}{2} (-h)^{-1/2}(\sigma) \frac{h_{00}}{h^{00}} \left[\frac{\tilde{\mathcal{P}}^2}{T} + TX'^2 \right] (\sigma) = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{P}}_{11}(\sigma) &= \frac{1}{2} \frac{h_{11}}{h^{00}} (-h)^{-1/2}(\sigma) \left[\frac{\tilde{\mathcal{P}}^2}{T} + T X'^2 \right](\sigma) \\
&= \frac{1}{2} \frac{h_{11}}{h^{00}} (-h)^{-1/2}(\sigma) \left[\frac{\tilde{\mathcal{P}}^2}{T^2} + X'^2 \right](\sigma) = 0.
\end{aligned} \tag{B.34}$$

Como $h_{11} \neq 0$, $h^{00} \neq 0$ e $h \neq 0$, (B.34) é equivalente a

$$\frac{\tilde{\mathcal{P}}^2}{T}(\sigma) + T X'^2(\sigma) = 0. \tag{B.35}$$

Usando (B.35), vemos que (B.32) e (B.33) se reduzem apenas a

$$\frac{1}{2h^{00}} \mathcal{P}_\mu X'^\mu(\sigma) = 0. \tag{B.36}$$

Então, multiplicando (B.35) e (B.36) por T^{-1} e sabendo que $h^{00} \neq 0$ em (B.36), temos os vínculos secundários

$$\varphi_1 \equiv \frac{1}{T} \mathcal{P}_\mu X^\mu = 0, \tag{B.37}$$

$$\varphi_2 \equiv \frac{\tilde{\mathcal{P}}^2}{T^2} + X'^2 = 0. \tag{B.38}$$

Apêndice C

Dedução da Álgebra dos Vínculos para a Corda

Neste apêndice vamos calcular alguns parênteses de Poisson envolvendo os vínculos da corda com métrica degenerada e utilizados no Capítulo 4.

A seguir, temos os parênteses de Poisson envolvendo os vínculos $\mathcal{P}_{(a)(b)}$ com os demais vínculos, $\Phi_{\underline{\mu}}$, φ_1 e φ_2 , que não dependem de $h^{(a)(b)}$, encontrados no Capítulo 4.

$$\{\mathcal{P}_{(a)(b)}, \Phi_{\underline{\mu}}\} = 0, \quad (\text{C.1})$$

$$\{\mathcal{P}_{(a)(b)}, \varphi_1\} = 0 = \{\mathcal{P}_{(a)(b)}, \varphi_2\}. \quad (\text{C.2})$$

Para os vínculos φ_1 e $\Phi_{\underline{\mu}}$ temos

$$\begin{aligned} \{\varphi_1(\sigma), \Phi_{\underline{\mu}}(\sigma')\} &= \mathcal{P}_{\mu}(\sigma) \{X'^{\mu}(\sigma), \mathcal{P}_{\underline{\mu}}(\sigma')\} \\ &- \mathcal{P}_{\mu}(\sigma) \{X'^{\mu}(\sigma), \mathcal{P}_{\beta'}(\sigma')\} \tilde{e}_{\alpha'}^{\beta'}(\sigma') e_{\underline{\mu}}^{\alpha'}(\sigma') \\ &+ X'^{\mu}(\sigma) \mathcal{P}_{\beta'}(\sigma') \{\mathcal{P}_{\mu}(\sigma), \tilde{e}_{\alpha'}^{\beta'}(\sigma') e_{\underline{\mu}}^{\alpha'}(\sigma')\}. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Na equação (C.3), podemos considerar o seguinte termo:

$$\{\mathcal{P}_{\mu}(\sigma), \tilde{e}_{\alpha'}^{\beta'}(\sigma') e_{\underline{\mu}}^{\alpha'}(\sigma')\} = \{\mathcal{P}_{\mu}(\sigma), \tilde{e}_{\alpha'}^{\beta'}(\sigma')\} e_{\underline{\mu}}^{\alpha'}(\sigma') + \{\mathcal{P}_{\mu}(\sigma), e_{\underline{\mu}}^{\alpha'}(\sigma')\} \tilde{e}_{\alpha'}^{\beta'}(\sigma'). \quad (\text{C.4})$$

Mas,

$$\{f(X(\sigma')), \mathcal{P}_\mu(\sigma)\}_{\tau=\tau'} = \partial_\mu^{(\sigma')} f(X(\sigma')) \delta(\sigma - \sigma'), \quad (\text{C.5})$$

$$\{X^\nu(\sigma'), \mathcal{P}_\mu(\sigma)\}_{\tau=\tau'} = \delta_\mu^\nu \delta(\sigma - \sigma'). \quad (\text{C.6})$$

Logo,

$$\{\mathcal{P}_\mu(\sigma), \tilde{e}_{\alpha'}^{\beta'} e_{\underline{\nu}}^{\alpha'}(\sigma')\} = \left[-\partial_\mu^{(\sigma')} \tilde{e}_{\alpha'}^{\beta'}(\sigma') e_{\underline{\nu}}^{\alpha'}(\sigma') - \partial_\mu^{(\sigma')} e_{\underline{\nu}}^{\alpha'}(\sigma') \tilde{e}_{\alpha'}^{\beta'}(\sigma') \right] \delta(\sigma - \sigma'). \quad (\text{C.7})$$

Também temos, a partir de (C.5),

$$\{X'^\mu(\sigma), \mathcal{P}_{\underline{\nu}}(\sigma')\} = \delta_{\underline{\nu}}^\mu \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma'). \quad (\text{C.8})$$

Então, (C.3) equivale a

$$\begin{aligned} \{\varphi_1(\sigma), \Phi_{\underline{\nu}}(\sigma')\} &= \mathcal{P}_{\underline{\nu}}(\sigma) \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma') - \mathcal{P}_{\beta'}(\sigma) \tilde{e}_{\alpha'}^{\beta'}(\sigma') e_{\underline{\nu}}^{\alpha'} \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma') \\ &\quad + X'^\mu(\sigma) \mathcal{P}_{\beta'}(\sigma') \left(\partial_\mu^{\sigma'} \tilde{e}_{\alpha'}^{\beta'}(\sigma') \right) e_{\underline{\nu}}^{\alpha'}(\sigma') \delta(\sigma - \sigma') \\ &\quad + X'^\mu(\sigma) \mathcal{P}_{\beta'} \left(\partial_\mu^{\sigma'} e_{\underline{\nu}}^{\alpha'}(\sigma') \right) \tilde{e}_{\alpha'}^{\beta'}(\sigma') \delta(\sigma - \sigma'). \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Porém, o segundo termo de (C.9) pode ser escrito como

$$\tilde{e}_{\alpha'}^{\beta'} e_{\underline{\nu}}^{\alpha'}(\sigma') \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma') = \partial_\sigma \left(\tilde{e}_{\alpha'}^{\beta'} e_{\underline{\nu}}^{\alpha'}(\sigma') \right) \delta(\sigma - \sigma') + \tilde{e}_{\alpha'}^{\beta'} e_{\underline{\nu}}^{\alpha'}(\sigma') \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma') \quad (\text{C.10})$$

Logo,

$$\begin{aligned} \{\varphi_1(\sigma), \Phi_{\underline{\nu}}(\sigma')\} &= \\ &\mathcal{P}_{\underline{\nu}}(\sigma) \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma') - \mathcal{P}_{\beta'}(\sigma) \left[\tilde{e}_{\alpha'}^{\beta'}(\sigma') e_{\underline{\nu}}^{\alpha'} \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma') + \partial_\sigma \left(\tilde{e}_{\alpha'}^{\beta'} e_{\underline{\nu}}^{\alpha'}(\sigma') \right) \delta(\sigma - \sigma') \right] \\ &\quad + X'^\mu(\sigma) \mathcal{P}_{\beta'} \partial_\sigma \left(\tilde{e}_{\alpha'}^{\beta'} e_{\underline{\nu}}^{\alpha'}(\sigma') \right) \delta(\sigma - \sigma'). \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Ao usarmos em (C.11), a seguinte propriedade,

$$\begin{aligned} X'^{\mu}(\sigma) \partial_{\mu}^{\sigma} \left(\tilde{e}_{a'}^{\beta'} e_{\underline{\nu}}^{a'}(\sigma') \right) \delta(\sigma - \sigma') &= X'^{\mu}(\sigma) \partial_{\mu}^{\sigma} \left(\tilde{e}_{a'}^{\beta'} e_{\underline{\nu}}^{a'}(\sigma) \right) \delta(\sigma - \sigma') \\ &= \partial_{\sigma} \left(\tilde{e}_{a'}^{\beta'} e_{\underline{\nu}}^{a'}(\sigma) \right), \end{aligned} \quad (C.12)$$

ficamos finalmente com

$$\begin{aligned} \{\varphi_1(\sigma), \Phi_{\underline{\nu}}(\sigma')\} &= \left[\mathcal{P}_{\underline{\nu}}(\sigma) - \mathcal{P}_{\beta'}(\sigma) \tilde{e}_{a'}^{\beta'} e_{\underline{\nu}}^{a'} \right] \partial_{\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \\ &= \Phi_{\underline{\nu}}(\sigma) \partial_{\sigma} \delta(\sigma - \sigma'). \end{aligned} \quad (C.13)$$

Consideremos agora o parênteses de Poisson entre os vínculos $\Phi_{\underline{\nu}}$ e φ_2 :

$$\begin{aligned} \{\Phi_{\underline{\nu}}(\sigma), \varphi_2(\sigma')\} &= \left\{ \mathcal{P}_{\underline{\nu}}(\sigma), \tilde{G}^{\mu'\rho'}(\sigma') \mathcal{P}_{\mu'}(\sigma') \mathcal{P}_{\rho'}(\sigma') \right\} \quad (I) \\ &+ \left\{ \mathcal{P}_{\underline{\nu}}(\sigma), X'^{\mu}(\sigma') X'^{\rho}(\sigma') G_{\mu\rho}(\sigma') \right\} \quad (II) \\ &- \left\{ \mathcal{P}_{\mu'}(\sigma) \tilde{e}_{a'}^{\mu'}(\sigma) e_{\underline{\nu}}^{a'}(\sigma), \tilde{G}^{\lambda'\rho'}(\sigma') \mathcal{P}_{\lambda'} \mathcal{P}_{\rho'}(\sigma') \right\} \quad (III) \\ &- \left\{ \mathcal{P}_{\mu'}(\sigma) \tilde{e}_{a'}^{\mu'}(\sigma) e_{\underline{\nu}}^{a'}(\sigma), X'^{\lambda} X'^{\rho}(\sigma') G_{\lambda\rho}(\sigma') \right\}. \quad (IV) \end{aligned} \quad (C.14)$$

Vamos analisar cada termo. O termo (I) de (C.14) é dado por

$$\begin{aligned} \left\{ \mathcal{P}_{\underline{\nu}}(\sigma), \tilde{G}^{\mu'\rho'}(\sigma') \mathcal{P}_{\mu'}(\sigma') \mathcal{P}_{\rho'}(\sigma') \right\} &= \left\{ \mathcal{P}_{\underline{\nu}}(\sigma), \tilde{G}^{\mu'\rho'}(\sigma') \right\} \mathcal{P}_{\mu'} \mathcal{P}_{\rho'}(\sigma') \\ &= -\partial_{\underline{\nu}}^{\sigma'} \tilde{G}^{\mu'\rho'}(X(\sigma')) \mathcal{P}_{\mu'} \mathcal{P}_{\rho'}(\sigma') \delta(\sigma - \sigma') \end{aligned} \quad (C.15)$$

O termo (II) de (C.14) é dado por

$$\begin{aligned} \left\{ \mathcal{P}_{\underline{\nu}}(\sigma), X'^{\mu}(\sigma') X'^{\rho}(\sigma') G_{\mu\rho}(\sigma') \right\} &= 2 \left\{ \mathcal{P}_{\underline{\nu}}(\sigma), X'^{\mu}(\sigma') \right\} X'^{\rho}(\sigma') G_{\mu\rho}(\sigma') \\ &+ \left\{ \mathcal{P}_{\underline{\nu}}(\sigma), G_{\mu\rho}(\sigma') \right\} X'^{\mu}(\sigma') X'^{\rho}(\sigma') \\ &= 2 X'^{\rho}(\sigma') G_{\underline{\nu}\rho}(\sigma') \partial_{\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \\ &- \partial_{\underline{\nu}}^{\sigma'} G_{\mu\rho}(X(\sigma')) X'^{\mu} X'^{\rho}(\sigma') \delta(\sigma - \sigma') \end{aligned} \quad (C.16)$$

O termo (III) de (C.14) é dado por

$$\begin{aligned} \left\{ \mathcal{P}_{\mu'}(\sigma) \tilde{e}_{a'}^{\mu'}(\sigma) e_{\underline{\nu}}^{a'}(\sigma), \tilde{G}^{\lambda'\rho'}(\sigma') \mathcal{P}_{\lambda'} \mathcal{P}_{\rho'}(\sigma') \right\} &= \left\{ \mathcal{P}_{\mu'}(\sigma), \tilde{G}^{\lambda'\rho'}(\sigma') \right\} \tilde{e}_{a'}^{\mu'}(\sigma) e_{\underline{\nu}}^{a'}(\sigma) \mathcal{P}_{\lambda'} \mathcal{P}_{\rho'} \\ &+ \mathcal{P}_{\mu'}(\sigma) \left\{ \tilde{e}_{a'}^{\mu'}(\sigma) e_{\underline{\nu}}^{a'}(\sigma), \mathcal{P}_{\lambda'} \mathcal{P}_{\rho'}(\sigma') \right\} \\ &\times \tilde{G}^{\lambda'\rho'}(\sigma'), \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

onde

$$\begin{aligned} \left\{ \tilde{e}_{a'}^{\mu'}(\sigma) e_{\underline{\nu}}^{a'}(\sigma), \mathcal{P}_{\lambda'} \mathcal{P}_{\rho'}(\sigma') \right\} \tilde{G}^{\lambda'\rho'}(\sigma') &= 2 \left\{ \tilde{e}_{a'}^{\mu'}(\sigma) e_{\underline{\nu}}^{a'}(\sigma), \mathcal{P}_{\lambda'}(\sigma') \right\} \mathcal{P}_{\rho'}(\sigma') \tilde{G}^{\lambda'\rho'}(\sigma') \\ &= 2 \left(\tilde{e}_{a'}^{\mu'}(\sigma) \partial_{\lambda'} e_{\underline{\nu}}^{a'}(\sigma) + e_{\underline{\nu}}^{a'}(\sigma) \partial_{\lambda'} \tilde{e}_{a'}^{\mu'}(\sigma) \right) \\ &\times \mathcal{P}_{\rho'}(\sigma') \tilde{G}^{\lambda'\rho'}(\sigma') \delta(\sigma - \sigma'). \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Então, o lado direito da equação (C.17) vale

$$\begin{aligned} & - \partial_{\mu'}^{\sigma'} \tilde{G}^{\lambda'\rho'}(\sigma') \tilde{e}_{a'}^{\mu'}(\sigma) e_{\underline{\nu}}^{a'}(\sigma) \mathcal{P}_{\lambda'} \mathcal{P}_{\rho'}(\sigma') \delta(\sigma - \sigma') \\ & + 2 \left(\tilde{e}_{a'}^{\mu'}(\sigma) \partial_{\lambda'} e_{\underline{\nu}}^{a'}(\sigma) + e_{\underline{\nu}}^{a'}(\sigma) \partial_{\lambda'} \tilde{e}_{a'}^{\mu'}(\sigma) \right) \mathcal{P}_{\mu'} \mathcal{P}_{\rho'}(\sigma') \tilde{G}^{\lambda'\rho'}(\sigma') \delta(\sigma - \sigma'). \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

O termo (IV) de (C.14) é dado por

$$\begin{aligned} & \left\{ \mathcal{P}_{\mu'}(\sigma) \tilde{e}_{a'}^{\mu'}(\sigma) e_{\underline{\nu}}^{a'}(\sigma), X'^{\lambda} X'^{\rho}(\sigma') G_{\lambda\rho}(\sigma') \right\} = \tilde{e}_{a'}^{\mu'}(\sigma) e_{\underline{\nu}}^{a'}(\sigma) \left\{ \mathcal{P}_{\mu'}(\sigma), X'^{\lambda} X'^{\rho}(\sigma') G_{\lambda\rho}(\sigma') \right\} \\ &= \tilde{e}_{a'}^{\mu'}(\sigma) e_{\underline{\nu}}^{a'}(\sigma) (2 \left\{ \mathcal{P}_{\mu'}(\sigma), X'^{\lambda}(\sigma') \right\} X'^{\rho}(\sigma') G_{\lambda\rho}(\sigma') + \left\{ \mathcal{P}_{\mu'}(\sigma), G_{\lambda\rho}(\sigma') \right\} X'^{\lambda}(\sigma') X'^{\rho}(\sigma')) \\ &= 2 \tilde{e}_{a'}^{\mu'}(\sigma) e_{\underline{\nu}}^{a'}(\sigma) X'^{\rho}(\sigma') G_{\mu'\rho} \partial_{\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \\ &- \tilde{e}_{a'}^{\mu'}(\sigma) e_{\underline{\nu}}^{a'}(\sigma) \hat{\partial}_{\mu'}^{(\sigma')} G_{\lambda\rho}(\sigma') X'^{\lambda}(\sigma') X'^{\rho}(\sigma') \delta(\sigma - \sigma'). \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Vamos reagrupar os termos anteriormente descritos, de modo que possamos simplificar $\{\Phi_{\underline{\nu}}, \varphi_2\}$. Com isto, ficamos com

$$\begin{aligned}
& \left\{ \Phi_{\underline{\nu}}(\sigma), \varphi_2(\sigma') \right\} = \\
& \mathcal{P}_{\lambda'} \mathcal{P}_{\rho'}(\sigma') \left[\partial_{\mu'}^{(\sigma')} \tilde{G}^{\lambda' \rho'}(\sigma') \tilde{e}_{\alpha'}^{\mu'}(\sigma') e_{\underline{\nu}}^{\alpha'}(\sigma') - \partial_{\underline{\nu}}^{(\sigma')} \tilde{G}^{\lambda' \rho'}(\sigma') \right] \delta(\sigma - \sigma') \quad (a) \\
& - 2 \mathcal{P}_{\rho'}(\sigma) \tilde{G}^{\lambda' \rho'}(\sigma) \mathcal{P}_{\mu'}(\sigma) \left[\tilde{e}_{\alpha'}^{\mu'}(\sigma) \partial_{\lambda'} e_{\underline{\nu}}^{\alpha'}(\sigma) + \partial_{\lambda'} \tilde{e}_{\alpha'}^{\mu'} e_{\underline{\nu}}^{\alpha'}(\sigma) \right] \delta(\sigma - \sigma') \quad (b) \\
& + \left[\tilde{e}_{\alpha'}^{\mu'} e_{\underline{\nu}}^{\alpha'}(\sigma) \partial_{\mu'}^{(\sigma')} G_{\lambda \rho}(\sigma') - \partial_{\underline{\nu}}^{(\sigma')} G_{\lambda \rho}(\sigma') \right] X'^{\lambda}(\sigma') X'^{\rho}(\sigma') \delta(\sigma - \sigma') \quad (c) \\
& + 2 \left[G_{\underline{\nu} \rho}(\sigma') - \tilde{e}_{\alpha'}^{\mu'} e_{\underline{\nu}}^{\alpha'}(\sigma) G_{\mu' \rho}(\sigma') \right] X'^{\rho}(\sigma') \partial_{\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \quad (d)
\end{aligned} \tag{C.21}$$

Considerando o termo (a), temos que

$$\begin{aligned}
& \mathcal{P}_{\lambda'} \mathcal{P}_{\rho'}(\sigma') \left[\partial_{\mu'}^{(\sigma')} \tilde{e}_{\alpha'}^{\lambda'}(\sigma') \tilde{e}_{\alpha'}^{\rho'}(\sigma') \eta^{c' d'} + \tilde{e}_{\alpha'}^{\lambda'}(\sigma') \partial_{\mu'}^{(\sigma')} \eta^{c' d'} \right] \tilde{e}_{\alpha'}^{\mu'} e_{\underline{\nu}}^{\alpha'}(\sigma') \delta(\sigma - \sigma') \\
& - \mathcal{P}_{\lambda'} \mathcal{P}_{\rho'}(\sigma') \left[\partial_{\underline{\nu}}^{(\sigma')} \tilde{e}_{\alpha'}^{\lambda'}(\sigma') \tilde{e}_{\alpha'}^{\rho'}(\sigma') \eta^{c' d'} + \tilde{e}_{\alpha'}^{\lambda'}(\sigma') \partial_{\underline{\nu}}^{(\sigma')} \tilde{e}_{\alpha'}^{\rho'}(\sigma') \eta^{c' d'} \right] \delta(\sigma - \sigma'),
\end{aligned} \tag{C.22}$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned}
& 2 \mathcal{P}_{\lambda'}(\sigma') \mathcal{P}_{\rho'}(\sigma') \partial_{\mu'}^{(\sigma')} \tilde{e}_{\alpha'}^{\lambda'} \tilde{e}_{\alpha'}^{\rho'} \eta^{c' d'} \tilde{e}_{\alpha'}^{\mu'} e_{\underline{\nu}}^{\alpha'}(\sigma') \delta(\sigma - \sigma') \\
& - 2 \mathcal{P}_{\lambda'}(\sigma') \mathcal{P}_{\rho'}(\sigma') \partial_{\underline{\nu}}^{(\sigma')} \tilde{e}_{\alpha'}^{\lambda'} \tilde{e}_{\alpha'}^{\rho'} \eta^{c' d'} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (a)
\end{aligned} \tag{C.23}$$

Vamos considerar nos termos (a) e (b) que

$$\partial_{\mu} \tilde{e}_{\alpha'}^{\lambda'} = - \tilde{e}_{\alpha'}^{\beta'} \tilde{e}_{\beta'}^{\lambda'} \partial_{\mu} e_{\rho'}^{\beta'}. \tag{C.24}$$

Então a soma dos termos (a) e (b) é dada por:

$$\begin{aligned}
(a) + (b) &= 2 \mathcal{P}_{\lambda'} \mathcal{P}_{\rho'}(\sigma') \left(- \tilde{e}_{\alpha'}^{\beta'} \tilde{e}_{\beta'}^{\lambda'} \partial_{\mu'} e_{\rho'}^{\beta'} \right) \tilde{e}_{\alpha'}^{\mu'} \eta^{c' d'} \tilde{e}_{\alpha'}^{\mu'} e_{\underline{\nu}}^{\alpha'}(\sigma') \delta(\sigma - \sigma') \\
&+ 2 \mathcal{P}_{\mu'}(\sigma') e_{\underline{\nu}}^{\alpha'}(\sigma') \left(\tilde{e}_{\alpha'}^{\mu'} \tilde{e}_{\alpha'}^{\lambda'} \partial_{\lambda'} e_{\mu'}^{\beta'} \right) \mathcal{P}_{\rho'}(\sigma') \tilde{e}_{\alpha'}^{\mu'} \tilde{e}_{\alpha'}^{\rho'} \eta^{c' d'} \delta(\sigma - \sigma') \\
&+ 2 \mathcal{P}_{\lambda'} \mathcal{P}_{\rho'}(\sigma') \left(\tilde{e}_{\alpha'}^{\beta'} \tilde{e}_{\beta'}^{\lambda'} \partial_{\underline{\nu}} e_{\rho'}^{\beta'} \right) \tilde{e}_{\alpha'}^{\mu'} \eta^{c' d'} \delta(\sigma - \sigma') \\
&- 2 \partial_{\lambda'} e_{\underline{\nu}}^{\alpha'} \mathcal{P}_{\mu'} \tilde{e}_{\alpha'}^{\mu'} \mathcal{P}_{\rho'} \tilde{e}_{\alpha'}^{\rho'} \tilde{e}_{\alpha'}^{\lambda'} \eta^{c' d'} \delta(\sigma - \sigma'),
\end{aligned} \tag{C.25}$$

que reagrupando os termos acima, resulta em

$$\begin{aligned}
(a) + (b) &= 2 \left(\partial_{\underline{\nu}} e_{\lambda'}^{\alpha'} - \partial_{\lambda'} e_{\underline{\nu}}^{\alpha'} \right) \mathcal{P}_{\mu'} \tilde{e}_{\alpha'}^{\mu'} \mathcal{P}_{\rho'} \tilde{e}_{\alpha'}^{\rho'} \tilde{e}_{\alpha'}^{\lambda'} \eta^{c'd'} \delta(\sigma - \sigma') \\
&\quad + 2 \left(\partial_{\nu'} e_{\lambda'}^{\beta'} - \partial_{\lambda'} e_{\nu'}^{\beta'} \right) \mathcal{P}_{\mu'} \tilde{e}_{\alpha'}^{\mu'} \mathcal{P}_{\rho'} \tilde{e}_{\alpha'}^{\rho'} \tilde{e}_{\alpha'}^{\lambda'} \tilde{e}_{\nu'}^{\mu'} \tilde{e}_{\alpha'}^{\nu'} \eta^{c'd'} \delta(\sigma - \sigma') \\
&= 2 \tilde{\mathcal{P}}_{\alpha'} \tilde{\mathcal{P}}_{\alpha'} \tilde{e}_{\alpha'}^{\lambda'} \eta^{c'd'} \partial_{\underline{\nu}} e_{\lambda'}^{\alpha'} \delta(\sigma - \sigma') \\
&\quad + 2 \tilde{\mathcal{P}}_{\nu'} \tilde{\mathcal{P}}_{\alpha'} \tilde{e}_{\alpha'}^{\beta'} \eta^{c'd'} e_{\underline{\nu}}^{\alpha'} \tilde{e}_{\alpha'}^{\lambda'} \partial_{[\beta'} e_{\lambda']}^{\alpha'} \delta(\sigma - \sigma').
\end{aligned} \tag{C.26}$$

Ao considerarmos o termo (c), devemos notar que:

$$(c) = \left(e_{\underline{\nu}}^{\alpha'} \tilde{e}_{\alpha'}^{\mu'}(\sigma') \partial_{\mu'}^{(\sigma')} G_{\lambda\rho}(\sigma') - \partial_{\underline{\nu}}^{(\sigma')} G_{\lambda\rho}(\sigma') \right) X'^{\lambda} X'^{\rho}(\sigma) \delta(\sigma - \sigma') \tag{C.27}$$

$$= -\mathcal{U}_{\underline{\nu}}^{\mu}(\sigma) \partial_{\mu}^{(\sigma')} G_{\lambda\rho}(\sigma') X'^{\lambda} X'^{\rho}(\sigma) \delta(\sigma - \sigma'), \tag{C.28}$$

onde

$$\mathcal{U}_{\underline{\nu}}^{\mu} = \delta_{\underline{\nu}}^{\mu} - e_{\underline{\nu}}^{\alpha'} \tilde{e}_{\alpha'}^{\lambda'} \delta_{\lambda'}^{\mu} \quad e \quad \mathcal{U}_{\underline{\nu}}^{\mu} G_{\mu\nu} = 0 \tag{C.29}$$

Da mesma forma para o termo (d):

$$\begin{aligned}
(d) &= 2 \left[G_{\underline{\nu}\rho}(\sigma') - \tilde{e}_{\alpha'}^{\mu'}(\sigma) e_{\underline{\nu}}^{\alpha'}(\sigma) G_{\mu'\rho}(\sigma') \right] X'^{\rho}(\sigma') \partial_{\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \\
&= 2 \mathcal{U}_{\underline{\nu}}^{\mu}(\sigma) G_{\mu\rho}(\sigma') X'^{\rho}(\sigma') \partial_{\sigma} \delta(\sigma - \sigma')
\end{aligned} \tag{C.30}$$

Então

$$\begin{aligned}
\{ \Phi_{\underline{\nu}}(\sigma), \varphi_2(\sigma') \} &= 2 \tilde{\mathcal{P}}_{\alpha'} \tilde{\mathcal{P}}_{\alpha'} \tilde{e}_{\alpha'}^{\lambda'} \eta^{c'd'} \partial_{\underline{\nu}} e_{\lambda'}^{\alpha'} \delta(\sigma - \sigma') \\
&\quad + 2 \tilde{\mathcal{P}}_{\nu'} \tilde{\mathcal{P}}_{\alpha'} \tilde{e}_{\alpha'}^{\beta'} \eta^{c'd'} e_{\underline{\nu}}^{\alpha'} \tilde{e}_{\alpha'}^{\lambda'} \partial_{[\beta'} e_{\lambda']}^{\alpha'} \delta(\sigma - \sigma') \\
&\quad - \mathcal{U}_{\underline{\nu}}^{\mu}(\sigma) \partial_{\mu}^{(\sigma')} G_{\lambda\rho}(\sigma') X'^{\lambda} X'^{\rho}(\sigma) \delta(\sigma - \sigma') \\
&\quad + 2 \mathcal{U}_{\underline{\nu}}^{\mu}(\sigma) G_{\mu\rho}(\sigma') X'^{\rho}(\sigma') \partial_{\sigma} \delta(\sigma - \sigma').
\end{aligned} \tag{C.31}$$

O parênteses de Poisson entre os vínculos $\Phi_{\underline{\mu}}$, considerados em pontos diferentes, é dado por

$$\begin{aligned}
\{\Phi_{\underline{\mu}}(\sigma), \Phi_{\underline{\nu}}(\sigma')\} &= \{\mathcal{P}_{\underline{\mu}}(\sigma) - \mathcal{P}_{\lambda'}(\sigma) \tilde{e}_{\alpha'}^{\lambda'} e_{\underline{\mu}}^{\alpha'}(\sigma), \mathcal{P}_{\underline{\nu}}(\sigma') - \mathcal{P}_{\rho'}(\sigma') \tilde{e}_{\beta'}^{\rho'} e_{\underline{\nu}}^{\beta'}(\sigma')\} \\
&= -\mathcal{P}_{\rho'}(\sigma') \{\mathcal{P}_{\underline{\mu}}(\sigma), \tilde{e}_{\beta'}^{\rho'} e_{\underline{\nu}}^{\beta'}(\sigma')\} - \mathcal{P}_{\lambda'}(\sigma) \{\tilde{e}_{\alpha'}^{\lambda'}(\sigma) e_{\underline{\mu}}^{\alpha'}(\sigma), \mathcal{P}_{\underline{\nu}}(\sigma')\} \\
&\quad + \{\mathcal{P}_{\lambda'}(\sigma) \tilde{e}_{\alpha'}^{\lambda'}(\sigma) e_{\underline{\mu}}^{\alpha'}(\sigma), \mathcal{P}_{\rho'}(\sigma') \tilde{e}_{\beta'}^{\rho'} e_{\underline{\nu}}^{\beta'}(\sigma')\} \\
&= -\mathcal{P}_{\rho'}(\sigma') (-\partial_{\underline{\nu}}^{(\sigma')} \tilde{e}_{\beta'}^{\rho'}(\sigma')) e_{\underline{\nu}}^{\beta'}(\sigma') \delta(\sigma - \sigma') \\
&\quad + \mathcal{P}_{\rho'}(\sigma') \partial_{\underline{\mu}}^{(\sigma')} e_{\underline{\nu}}^{\beta'}(\sigma') \tilde{e}_{\beta'}^{\rho'}(\sigma') \delta(\sigma - \sigma') \\
&\quad - \mathcal{P}_{\lambda'}(\sigma) \tilde{e}_{\alpha'}^{\lambda'}(\sigma) \partial_{\underline{\nu}} e_{\underline{\mu}}^{\alpha'}(\sigma') \delta(\sigma - \sigma') - \mathcal{P}_{\lambda'} e_{\underline{\mu}}^{\alpha'}(\sigma) \partial_{\underline{\nu}} \tilde{e}_{\alpha'}^{\lambda'}(\sigma) \delta(\sigma - \sigma') \\
&\quad + [\partial_{\rho'}^{(\sigma')} (\tilde{e}_{\alpha'}^{\lambda'}(\sigma) e_{\underline{\mu}}^{\alpha'}(\sigma)) e_{\underline{\nu}}^{\beta'}(\sigma) - \partial_{\rho'}^{\sigma} (\tilde{e}_{\alpha'}^{\lambda'}(\sigma) e_{\underline{\nu}}^{\beta'}(\sigma)) e_{\underline{\mu}}^{\alpha'}(\sigma)] \\
&\quad \times \mathcal{P}_{\lambda'}(\sigma) e_{\beta'}^{\rho'} \delta(\sigma - \sigma'). \tag{C.32}
\end{aligned}$$

Reagrupando os termos de (C.32), finalmente temos

$$\begin{aligned}
\{\Phi_{\underline{\mu}}(\sigma), \Phi_{\underline{\nu}}(\sigma')\} &= \mathcal{P}_{\rho'}(\sigma) e_{\underline{\nu}}^{\beta'} \partial_{\underline{\mu}} \tilde{e}_{\beta'}^{\rho'}(\sigma) \delta(\sigma - \sigma') \\
&\quad + \mathcal{P}_{\rho'}(\sigma) \partial_{\underline{\mu}} e_{\underline{\nu}}^{\beta'} \tilde{e}_{\beta'}^{\rho'}(\sigma) \delta(\sigma - \sigma') \\
&\quad + \partial_{\rho'} (\tilde{e}_{\alpha'}^{\lambda'}(\sigma) e_{\underline{\mu}}^{\alpha'}(\sigma)) e_{\underline{\nu}}^{\beta'} \mathcal{P}_{\lambda'}(\sigma) e_{\beta'}^{\rho'}(\sigma) \delta(\sigma - \sigma'), \tag{C.33}
\end{aligned}$$

que apresenta uma forma similar à da partícula relativística.

Considerando o parênteses de Poisson entre os vínculos φ_1 , temos

$$\begin{aligned}
\{\varphi_1(\sigma), \varphi_1(\sigma')\} &= \mathcal{P}_{\mu}(\sigma) \{X'^{\mu}(\sigma), \mathcal{P}_{\nu}(\sigma')\} X'^{\nu}(\sigma') \\
&\quad + X'^{\mu}(\sigma) \mathcal{P}_{\nu}(\sigma') \{\mathcal{P}_{\mu}(\sigma), X'^{\nu}(\sigma')\} \\
&= \mathcal{P}_{\mu}(\sigma) X'^{\mu}(\sigma') \partial_{\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \\
&\quad - \mathcal{P}_{\mu}(\sigma') X'^{\mu}(\sigma) \partial_{\sigma'} \delta(\sigma - \sigma'). \tag{C.34}
\end{aligned}$$

Porém, vamos reescrever (C.34) utilizando as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}
 \partial_\sigma (X'^\mu(\sigma')\delta(\sigma - \sigma')) &= X'^\mu(\sigma')\partial_\sigma\delta(\sigma - \sigma') \\
 &= \partial_\sigma (X'^\mu(\sigma)\delta(\sigma - \sigma')) \\
 &= X''^\mu(\sigma)\delta(\sigma - \sigma') + X'^\mu(\sigma)\partial_\sigma\delta(\sigma - \sigma') \quad (C.35)
 \end{aligned}$$

$$X'^\mu(\sigma')\partial_\sigma\delta(\sigma - \sigma') = X''^\mu(\sigma) + X'^\mu(\sigma)\partial_\sigma\delta(\sigma - \sigma') \quad (C.36)$$

$$\partial_{\sigma'}\delta(\sigma - \sigma') = -\partial_\sigma\delta(\sigma - \sigma') \quad (C.37)$$

Usando (C.35) à (C.37) em (C.34), ficamos com

$$\begin{aligned}
 &\mathcal{P}_\mu(\sigma) [X''^\mu(\sigma)\delta(\sigma - \sigma') - X'^\mu(\sigma)\partial_\sigma\delta(\sigma - \sigma')] \\
 &- \mathcal{P}_\mu(\sigma') [X''^\mu(\sigma')\delta(\sigma - \sigma') - X'^\mu(\sigma')\partial_{\sigma'}\delta(\sigma - \sigma')] \\
 &= \mathcal{P}_\mu(\sigma)X'^\mu(\sigma)\partial_\sigma\delta(\sigma - \sigma') + \mathcal{P}_\mu(\sigma')X'^\mu(\sigma')\partial_\sigma\delta(\sigma - \sigma'). \quad (C.38)
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\{\varphi_1(\sigma), \varphi_1(\sigma')\} = [\varphi_1(\sigma) + \varphi_1(\sigma')] \partial_\sigma\delta(\sigma - \sigma'). \quad (C.39)$$

Agora vamos considerar o parênteses de Poisson entre φ_1 e φ_2 :

$$\begin{aligned}
 \{\varphi_1(\sigma), \varphi_2(\sigma')\} &= \{\mathcal{P}_\mu(\sigma), \tilde{G}^{\alpha'\beta'}(\sigma')\} X'^\mu \mathcal{P}_{\alpha'}(\sigma') \mathcal{P}_{\beta'}(\sigma') \\
 &+ \mathcal{P}_\mu(\sigma) \{X'^\mu(\sigma), \mathcal{P}_{\alpha'} \mathcal{P}_{\beta'}(\sigma')\} \tilde{G}^{\alpha'\beta'}(\sigma') \\
 &+ \{\mathcal{P}_\mu(\sigma), X'^\alpha X'^\beta G_{\alpha\beta}(\sigma')\} X'^\mu(\sigma). \quad (C.40)
 \end{aligned}$$

Vamos reescrever cada termo de (C.40):

$$\{\mathcal{P}_\mu(\sigma), \tilde{G}^{\alpha'\beta'}(\sigma')\} = -\partial_\mu^{(\sigma')} \tilde{G}^{\alpha'\beta'}(\sigma') \delta(\sigma - \sigma'). \quad (\text{C.41})$$

$$\begin{aligned} \{\mathcal{P}_\mu(\sigma), X'^\alpha X'^\beta G_{\alpha\beta}(\sigma')\} &= 2G_{\mu\beta}(\sigma') X'^\beta(\sigma') \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma') \\ &\quad - \partial_\mu^{(\sigma')} G_{\alpha\beta}(\sigma') X'^\alpha X'^\beta \delta(\sigma - \sigma'). \end{aligned} \quad (\text{C.42})$$

$$\{X'^\mu(\sigma), \mathcal{P}_{\alpha'} \mathcal{P}_{\beta'}(\sigma')\} = \delta_\alpha^\mu \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma') \mathcal{P}_{\beta'}(\sigma') + \delta_{\beta'}^\mu \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma') \mathcal{P}_{\alpha'}(\sigma'). \quad (\text{C.43})$$

Consideremos as seguintes contribuições :

$$\begin{aligned} -\partial_\mu^{(\sigma')} G_{\alpha\beta}(\sigma') X'^\alpha(\sigma') X'^\beta(\sigma') X'^\mu(\sigma') \delta(\sigma - \sigma') = \\ -\partial_{\sigma'} G_{\alpha\beta}(\sigma') X'^\alpha(\sigma') X'^\beta(\sigma') \delta(\sigma - \sigma') \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

Porém, para uma função $f(\sigma)$:

$$\begin{aligned} f(\sigma') \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma') &= \partial_\sigma f(\sigma) \delta(\sigma - \sigma') + f(\sigma) \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma') \\ -\partial_\sigma f(\sigma) \delta(\sigma - \sigma') &= [f(\sigma) - f(\sigma')] \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma') \end{aligned} \quad (\text{C.45})$$

Considerando $f(\sigma) = G_{\alpha\beta}(\sigma) X'^\alpha(\sigma) X'^\beta(\sigma)$ temos:

$$\begin{aligned} -\partial_{\sigma'} G_{\alpha\beta}(\sigma') X'^\alpha(\sigma') X'^\beta(\sigma') \delta(\sigma - \sigma') &= +2G_{\alpha\beta} X''^\alpha X'^\beta \delta(\sigma - \sigma') \\ &\quad + [f(\sigma) - f(\sigma')] \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma'). \end{aligned} \quad (\text{C.46})$$

Então, com (C.44) e (C.46) temos:

$$\begin{aligned}
& -\partial_{\mu}^{(\sigma')} G_{\alpha\beta}(\sigma') X'^{\alpha}(\sigma') X'^{\beta}(\sigma') X'^{\mu}(\sigma') \delta(\sigma - \sigma') = \\
& 2G_{\alpha\beta}(\sigma') X''^{\alpha} X'^{\beta}(\sigma') \delta(\sigma - \sigma') + [f(\sigma) - f(\sigma')] \partial_{\sigma} \delta(\sigma - \sigma')
\end{aligned} \tag{C.47}$$

Para analisarmos $2G_{\mu\beta}(\sigma') X'^{\beta}(\sigma') X'^{\mu}(\sigma) \partial_{\sigma} \delta(\sigma - \sigma')$, devemos antes notar que:

$$X'^{\mu}(\sigma) \partial_{\sigma} \delta(\sigma - \sigma') = -X''^{\mu}(\sigma') \delta(\sigma - \sigma') + X'^{\mu}(\sigma') \partial_{\sigma} \delta(\sigma - \sigma'), \tag{C.48}$$

onde usamos (C.45).

Então:

$$\begin{aligned}
& 2G_{\mu\beta}(\sigma') X'^{\beta}(\sigma') X'^{\mu}(\sigma) \partial_{\sigma} \delta(\sigma - \sigma') = \\
& 2G_{\mu\beta}(\sigma') X'^{\beta}(\sigma') X'^{\mu}(\sigma') \partial_{\sigma} \delta(\sigma - \sigma') - 2G_{\mu\beta}(\sigma') X'^{\beta}(\sigma') X''^{\mu}(\sigma') \delta(\sigma - \sigma')
\end{aligned} \tag{C.49}$$

Somando (C.49) e (C.47) obtemos:

$$\left[G_{\mu\beta}(\sigma') X'^{\beta}(\sigma') X'^{\mu}(\sigma') + G_{\mu\beta}(\sigma) X'^{\beta}(\sigma) X'^{\mu}(\sigma) \right] \partial_{\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \tag{C.50}$$

Uma outra contribuição em (C.40) é dada por:

$$\begin{aligned}
& -\partial_{\mu}^{(\sigma')} \tilde{G}^{\alpha'\beta'} X'^{\mu}(\sigma') \mathcal{P}_{\alpha'}(\sigma') \mathcal{P}_{\beta'}(\sigma') \delta(\sigma - \sigma') = \\
& -\partial_{\sigma'} \tilde{G}^{\alpha'\beta'}(\sigma') \mathcal{P}_{\alpha'}(\sigma') \mathcal{P}_{\beta'}(\sigma') \delta(\sigma - \sigma')
\end{aligned} \tag{C.51}$$

Considerando que $g(\sigma) = \tilde{G}^{\alpha'\beta'}(\sigma) \mathcal{P}_{\alpha'}(\sigma) \mathcal{P}_{\beta'}(\sigma)$ temos a partir de (C.45):

$$\begin{aligned}
-\partial_{\sigma} \tilde{G}^{\alpha'\beta'}(\sigma) \mathcal{P}_{\alpha'} \mathcal{P}_{\beta'}(\sigma) \delta(\sigma - \sigma') &= 2\tilde{G}^{\alpha'\beta'}(\sigma) \partial_{\sigma} \mathcal{P}_{\alpha'}(\sigma) \mathcal{P}_{\beta'}(\sigma) \delta(\sigma - \sigma') \\
&+ [g(\sigma) - g(\sigma')] \partial_{\sigma} \delta(\sigma - \sigma')
\end{aligned} \tag{C.52}$$

A partir de (C.52) e (C.51) obtemos

$$\begin{aligned}
 -\partial_{\mu}^{(\sigma')} \tilde{G}^{\alpha'\beta'} X'^{\mu}(\sigma') \mathcal{P}_{\alpha'}(\sigma') \mathcal{P}_{\beta'}(\sigma') \delta(\sigma - \sigma') &= 2\tilde{G}^{\alpha'\beta'}(\sigma) \partial_{\sigma} \mathcal{P}_{\alpha'}(\sigma) \mathcal{P}_{\beta'}(\sigma) \delta(\sigma - \sigma') \\
 &+ [g(\sigma) - g(\sigma')] \partial_{\sigma} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (C.53)
 \end{aligned}$$

Analogamente à (C.48), temos

$$\mathcal{P}_{\alpha'}(\sigma) \partial_{\sigma} \delta(\sigma - \sigma') = -\mathcal{P}'_{\alpha'} \delta(\sigma - \sigma') + \mathcal{P}_{\alpha'}(\sigma') \partial_{\sigma'} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (C.54)$$

Somando (C.54) e (C.52) obtemos

$$\left[\tilde{G}^{\alpha'\beta'}(\sigma') \mathcal{P}_{\alpha'}(\sigma') \mathcal{P}_{\beta'}(\sigma') + \tilde{G}^{\alpha'\beta'}(\sigma) \mathcal{P}_{\alpha'}(\sigma) \mathcal{P}_{\beta'}(\sigma) \right] \partial_{\sigma} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (C.55)$$

Então, considerando todas as contribuições ficamos com

$$\{\varphi_1(\sigma), \varphi_2(\sigma')\} = [\varphi_2(\sigma) + \varphi_2(\sigma')] \partial_{\sigma} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (C.56)$$

Bibliografia

- [1] S. W. Hawking e R. Penrose, Proc. Roy. Soc. Lond. **A314**, 529 (1970); S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-time* (Cambridge, 1973); G. T. Horowitz and R. Myers, Gen. Rel. Grav. **27** (1995) 915; R. H. Brandenberger, gr-qc/9503001 (não publicado).
- [2] A. Strominger e E. Martinec, Phys. Lett. **B379** (1996) 99; C.G. Callan, Jr. e J. M. Maldacena, Nucl. Phys. **B472** (1996) 591; G. T. Horowitz e A. Strominger, Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 2368.
- [3] G. T. Horowitz e S. F. Ross, "Possible Resolution of Black Holes Singularities from Large N Gauge Theory", hep-th/9803085 e JHEP 9804 (1998) 015; A. Lawrence e E. Martinec, Class. Quant. Grav. **13** (1996) 63.
- [4] G. T. Horowitz and D. Marolf, Phys. Rev. **D52** (1995) 5670
- [5] G. T. Horowitz, Class. Quant. Grav. **8**, 587 (1991) ; J. Louko e R. D. Sorkin, Class. Quant. Grav. **14** (1997) 179.
- [6] A. Chamblin, *Topology and Causal Structure* gr-qc/9509046 (não publicado).
- [7] J. Smallwood, J. Math. Phys. **20** (1979) 459.
- [8] L. M. Sokolowski, Acta Phys. Pol. **B6** (1975) 529, ibid. 657

- [9] I. Bengtsson, Class. Quant. Grav. **8**, 1847 (1991); T. Jacobson e J. D. Romano, Class. Quant. Grav. **9**, L 119 (1992).
- [10] Y. Ma, C. Liang e Z. Kuang, Class. Quant. Grav. **16**(1999) 605; *ibid.*, Phys. Rev. **D59** (1999) 044008.
- [11] A. Achúcarro e P. Townsend, Phys. Lett **B 180**, 89 (1986); E. Witten, Nucl. Phys. **B 311**, 46 (1988); K. Isler e C. Trungenberger, Phys. Rev. Lett. **63** , 834 (1989); A. Chamseddine e D. Wyler, Phys. Lett. **B228**, 75 (1989); D. Cangemi e R. Jackiw, Phys. Rev. Lett. **69**, 233 (1992).
- [12] M. Blau e G. Thompson, Ann. Phys. **205** (1991) 130.
- [13] E. Witten, Comm. Math. Phys. **121** (1989) 351.
- [14] E. Witten, Comm. Math. Phys. **117**, 353 (1988).
- [15] J.C. Baez, Commun. Math. Phys. **193** (1998) 219.
- [16] O. A. Mattos e V. O. Rivelles, Phys. Rev. Lett. **70**, 1583 (1993).
- [17] R. P. Zaikov, Phys. Lett. **B263** (1991) 206.
- [18] A. Karlhede e U. Lindstrom, Class. Quant. Grav. **3** (1986) L73.
- [19] U. Lindstrom e R. von Unge, Phys. Lett. **B403** (1997) 233; H. Gustafsson e U. Lindstrom, Nucl. Phys. **B540** (1999) 520.
- [20] D. M. Marolf, Class. Quant. Grav. **11** (1994) 239.
- [21] L.A. Cabral e V.O. Rivelles, *Particles and Strings in Degenerate Metric Spaces*, preprint 1999.

- [22] H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics and Polymer Physics* (World Scientific, Singapore, Second Edition, 1995).
- [23] P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* (Yeshiva University Press, NY, 1964).
- [24] D. Lovelock e H. Rund, *Tensors, Differential Forms and Variational Principles* (JOHN WILEY & SONS, New York, 1975).
- [25] C. W. Misner, K.S. Thorne e J.A. Wheeler, *Gravitation* (W.H.FREEMAN and Company, San Francisco, 1973).
- [26] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics* (Springer-Verlag, 1982).
- [27] M. Green, J. Schwartz e E. Witten, *Superstring Theory* (Cambridge U. Press, NY, 1987).
- [28] A. Givoeon e M. Rocek, *Introduction to Duality*, hep-th/9406178.
- [29] A. Givoeon e M. Rocek, Nucl. Phys. **B421** (1994) 173.
- [30] T. Buscher, Phys. Lett. **B194** (1987) 59.
- [31] M.Diakonou, K.Farakos, G.Koutsoumbas e E.Papantonopoulos, Phys. Lett. **B240** (1990) 351; *ibid.* **B247** (1990) 273.
- [32] J.Wess, Nucl. Phys. **B15**(*Proc. Suppl.*) (1990) 35.
- [33] C.G.Callan, D.Friedan, E.J. Martinec e M.J. Perry, Nucl. Phys. **B262** (1985) 593.