UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

SBI-IFUSP
305M810T1697

PARTICULAS RELATIVISTICAS COM SPIN E CAMPOS TENSORIAIS ANTISSIMÉTRICOS

Leonidas Sandoval Junior

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
1697
e.2
INSTITUTO DE FÍSICA

Orientador: Prof. Dr. Victor de Oliveira Rivelles

Dissertação de Mestrado apresentada no Instituto de Física da Universidade de São Paulo.

SÃO PAULO

Setembro de 1990

Defesa: 24/09/90

530.14
S218p
M
e.2

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Sandoval Junior, Leonidas
Partículas relativísticas com spin e campos tensoriais antissimétricos. São Paulo, 1990.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Departamento de Física Matemática.
Área de Concentração: Física de Partículas Elementares
Orientador: Profº Dr. Victor de Oliveira Rivelles

Unitermos: 1. Tensor antissimétrico; 2. Quantização BRST; 3. Partículas supersimetricas.

USP/IF/SBI - 19/90

Eles sempre vêm em pares!
(Poltergeist, 1982)

ão
ulo

À minha família
e à Nossa Senhora.

Resumo

Neste trabalho, fazemos um estudo dos campos tensoriais antissimétricos em geral e, em particular, do campo tensorial antissimétrico de ordem dois. Utilizando o método de quantização BRST-BFV para teorias redutíveis no formalismo hamiltoniano, mostramos a equivalência quântica do campo tensorial antissimétrico de ordem dois não-massivo ao campo escalar em 4 dimensões e ao campo vetorial no gauge de Lorentz em 5 dimensões. Também é mostrada a equivalência entre as formulações de 1ª e 2ª ordem do campo tensorial antissimétrico de ordem dois. Por fim, é efetuada a quantização BRST-BFV de um modelo de partícula relativística com spin com duas supersimetrias acrescido de um termo de Chern-Simons, mostrando que a amplitude de transição obtida equivale à amplitude de transição do "rotacional" de um campo tensorial antissimétrico de ordem qualquer. O caso massivo também é tratado brevemente.

Abstract

In this work, we make a study os antisymmetric tensor fields in general, and, in particular, of the antisymmetric tensor field of order two. Using the BRST-BFV quantization method for reducible theories in the Hamiltonian formalism, we show the quantum equivalence of the massless antisymmetric tensor field of order two to the scalar field in 4 dimensions, and to the vector field in the Lorentz gauge in 5 dimensions. It is also shown the quantum equivalence between the 1st and 2nd order formulations for the antisymmetric tensor field of order two. Finally, it is made the BRST-BFV quantization of a model of relativistic spinning particle with two supersymmetries with a Chern-Simons term, showing that the transition amplitude obtained is equivalent to the transition amplitude for the field strentgh of an antisymmetric tensor field of any order. The massive case is also treated in brief.

Agradecimentos

Ao leitor que passa os olhos por estas páginas, o tamanho dos agradecimentos pode parecer um exagero. O motivo é que eu realmente tenho muito (e a muitos) que agradecer.

Em primeiro lugar, quero agradecer ao Prof. Victor Rivelles, meu orientador, por toda a atenção e paciência que teve comigo. Por ter pego aquele estudante que um dia pôs a cabeça pela porta de sua sala e tê-lo ensinado o que é ser um pesquisador, ora me deixando solto para aprender a andar sozinho, ora me levantando quando eu caía e ensinando o jeito mais correto e simples de fazer as coisas. Agradeço ainda por ter sido compreensivo com os meus erros e minha teimosia e por ter me apoiado em minhas decisões.

Também quero agradecer à minha irmãzinha Mônica por toda a ajuda que tem me dado, me explicando e guiando pelos tortuosos caminhos das partículas supersimétricas que ela ia percorrendo antes de mim. Agradeço ao Jorge Gamboa pelos conselhos e explicações que me deu. Agradeço também ao André (Estática), pela ajuda que me deu em alguns problemas que tive com as contas e à Nadja e ao Carlos (Zeus), pelos conselhos em relação à dissertação. Agradeço ao Paulo Sérgio, por ter ajudado na revisão. Gostaria de agradecer também ao Prof. Adilson, por ter me ajudado desde o começo, ao Prof. Lyra, pela ajuda com o LaTeXe ao Prof. Fleming, pelos conselhos. Meus agradecimentos às secretárias do departamento e às secretárias da pós-graduação pela paciência e dedicação que tiveram comigo: à Cecília, Mariazinha, Kelma, à Ellen, Cláudia e à Janete.

À minha família eu devo os maiores agradecimentos. A meu pai, por ter sabido quando elogiar e quando me dar os puxões de orelha necessários, à minha mãe, pelo apoio incondicional em todas as minhas decisões e por ter sabido ser uma ótima mãe, à Bete, pela compreensão e auxílio, a meus irmãos Plinio, Inaiá, Paulinho e Alzirinha, por terem me compreendido e por terem sido muito companheiros e à minha madrinha, pelas orações . A estes eu devo tudo o que sou, e aprendi a admirá-los muito durante todos esses anos. É muito bom ter um lugar a que possamos chamar de lar, para onde sabemos que podemos sempre voltar e encontrar descanso e

compreensão.

Agradeço aos meus amigos da Física, sobretudo ao Carlos (Zeus), à Nadja, ao André (Estática), João Paulo (Jota), Regina, Maurício, Bete, Gustavo, Valdir, Garabed (Gará), Paschoal (Pacheco), Márcio, Norberto (Norbi), Sandra, Lin, lígia, ao Paulo Piquini e Stela, Brunelli, Wagner (Franz), Wagner (Barbeta), Hamilton, Paulo Sérgio, Álvaro, Alfredo (Alfie), Mônica (π), Mônica (Pô), Hatsumi, Samuel, Waldecir (Sal), Justo, ao Shintaro, Barbie, Airton, Augusto (Pang), Leonardo (Leo), Ricardo, ao Jorge Cieza, Rudney, Sérgio, Carlos, ao Manoel e ao casal Leonardo e Cris (de Minas Gerais) e todos aqueles que transformaram este instituto em meu terceiro lar. Essas pessoas me deram incríveis demonstrações de soliedariedade e companheirismo. A elas eu devo muito.

A meus amigos de fora da Física, principalmente ao Helder, amigo quase irmão, ao Aluisio, que foi o primeiro a me explicar as maravilhas da Física, ao Sílvio e ao Antônio Carlos.

Ao pessoal do Centro de Estudos, por terem me mostrado (sobretudo com o exemplo) o valor do trabalho.

Ao Padre Décio, ao Padre Vicente e ao Padre João Sérgio, por terem mantido o edifício espiritual em pé.

Gostaria ainda de agradecer ao CNPq, por ter investido em mim durante esses anos, e ao estado de São Paulo, onde nasci e me criei, por ter fornecido um centro como a USP, onde pude realizar os meus estudos.

Finalmente, agradeço a Deus, por ter tantas pessoas a quem agradecer.

Índice

1 INTRODUÇÃO 3

2 DINÂMICA CLÁSSICA DE SISTEMAS COM VÍNCULOS 5
2.1 Partículas 6
2.2 Campos 8
2.3 Variáveis de Grassmann 20

3 QUANTIZAÇÃO BRST-BFV 24
3.1 Integral de Trajetória para Sistemas com Vínculos 25
3.1.1 Sistemas sem vínculos 25
3.1.2 A integral de trajetória para campos 30
3.1.3 Sistemas com vínculos 31
3.2 Invariância por Osp(1,1|2) e Quantização BRST-BFV . . . 36

4 SISTEMAS REDUTÍVEIS 46
4.1 Quantização BRST-BFV de sistemas irredutíveis 47
4.2 Sistemas redutíveis em primeiro estágio 51
4.3 Sistemas redutíveis em estágio n 55

5 EQUIVALÊNCIA DO CAMPO TENSORIAL ANTISSIMÉTRICO DE ORDEM DOIS AO CAMPO ESCALAR E AO CAMPO VETORIAL 57
5.1 Equivalência clássica ao campo escalar e ao campo vetorial 59
5.2 Quantização BRST-BFV 62

6 EQUIVALÊNCIA ENTRE AS FORMULAÇÕES DE 1ª E 2ª ORDEM DO TENSOR ANTISSIMÉTRICO **75**
6.1 Equivalência ao campo escalar 76
6.2 Equivalência a nível clássico 77
6.3 Equivalência a nível quântico 80

7 FORMULAÇÃO DE PARTÍCULA **88**
7.1 Discussão sobre a anomalia 90
7.2 Equivalência via quantização canônica 95
7.3 Equivalência via integral de trajetória 101
7.4 Caso massivo 115

A COMENTÁRIOS **122**
A.1 Vínculos de 1ª classe e transformações de gauge 123
A.2 A álgebra dos vínculos de 1ª classe e as funções de estrutura 125
A.3 A carga de BRST 128

B CÁLCULO DE ALGUNS DETERMINANTES **131**
B.1 $\det \partial_0^2$ 132
B.2 $\det \partial_0$ 134
B.3 $\det(\delta_{ij}\partial_0 - f\epsilon_{ij})$ 136

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A física contemporânea vive em compasso de espera. Após ter tido duas de suas maiores revoluções no início do século: a relatividade geral e a mecânica quântica, ela vem esperando por uma outra, que unifique essas duas teorias. Mas o caminho para ela mostrou-se não ser fácil.

A relatividade geral trata do enorme, das grandes massas, descrevendo-as em termos de curvaturas do espaço-tempo. Sua linguagem é a dos tensores e da geometria. A mecânica quântica trata do microscópico, das partículas, descrevendo-as como campos no espaço. Sua linguagem é a dos espaços vetoriais e da álgebra. Como, então, unificá-las?

Este final de século tem assistido a muitas tentativas. Procura-se escrever os campos em termos de curvaturas de espaço-tempos de dimensões maiores, ou então tenta-se aplicar os métodos da teoria quântica de campos, vitoriosa na eletrodinâmica e na teoria da força fraca, à gravitação. Outras teorias utilizam ferramentas matemáticas mais pesadas como a geometria diferencial e outras, como as de supercordas, generalizam o conceito de partícula.

Pois bem, a eletrodinâmica, a mais bem sucedida das teorias que se tem hoje, é baseada em um potencial cujo rotacional é um tensor antissimétrico. As teorias de supercordas e de gravitação estendida fazem uso de um tensor

antissimétrico de ordem dois, o estudo da constante cosmológica sob o ponto de vista da física de partículas utiliza um tensor antissimétrico de ordem três e a geometria diferencial, a arma matemática da física moderna, é baseada nas formas, que são objetos antissimétricos.

O propósito desta dissertação é fazer um estudo dos campos tensoriais antissimétricos, sobretudo do campo tensorial antissimétrico de ordem dois, pesquisando a sua equivalência a outros campos e a sua quantização através da integral de trajetória. Por ser uma teoria que apresenta vínculos, e por essses vínculos não serem linearmente independentes, sua integração funcional nos faz recorrer a formalismos recentes, como o é o formalismo BRST-BFV para sistemas redutíveis. Também é estudado um modelo de partícula proposto recentemente que se revela equivalente a campos tensoriais antissimétricos de ordem qualquer.

Começaremos fazendo uma revisão do formalismo clássico para teorias que apresentam vínculos (capítulo 2), passando depois para o formalismo quântico para essas teorias via integral de trajetória (capítulo 3). É também mostrado o método BRST-BFV para o formalismo hamiltoniano de sistemas irredutíveis e redutíveis (capítulo 4).

Após essa revisão, passa-se ao estudo do campo tensorial antissimétrico de ordem dois, de sua quantização via integral de trajetória e de sua equivalência ao campo escalar e ao campo vetorial não-massivos[29] (capítulo 5). Também é mostrada (capítulo 6) a equivalência entre duas formulações para o tensor antissimétrico. No capítulo 7, é introduzido o modelo de partícula para campos tensoriais antissimétricos e é mostrada a equivalência entre as duas teorias usando a integral de trajetória[34].

Cada capítulo contém uma breve introdução onde estão indicados os tópicos de que ele trata e referências.

Capítulo 2

DINÂMICA CLÁSSICA DE SISTEMAS COM VÍNCULOS

Neste capítulo, fazemos uma exposição da mecânica clássica de sistemas que apresentam vínculos , que foi desenvolvida em trabalhos de Dirac, Bergmann, Anderson e outros autores[1]. Na primeira parte, tratamos brevemente do caso de sistemas com um número finito de graus de liberdade (partículas), passando, logo em seguida, à descrição de sistemas com infinitos graus de liberdade (campos), onde introduzimos a idéia de vínculos e sua classificação segundo Dirac. Também apresentamos o procedimento de Dirac para a eliminação dos vínculos de 2ª classe e o método da introdução de vínculos extras como fixadores das transformações de gauge geradas pelos vínculos de 1ª classe. Na parte três, desenvolvemos uma mecânica clássica para variáveis de Grassmann[2], com a intenção de generalizar alguns conceitos vistos na sessão anterior. Exposições mais detalhadas podem ser encontradas nas referências listadas em [3].

2.1 Partículas

Vamos considerar um sistema com um número finito de graus de liberdade cuja dinâmica pode ser deduzida da ação

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\ L(q^i, \dot{q}^i, t) \quad , \tag{2.1}$$

onde L é uma função chamada *lagrangiana* que depende das coordenadas generalizadas q^i (i=1,...,n), das velocidades generalizadas dadas por

$$\dot{q}^i = \frac{d}{dt} q^i$$

e do tempo t. Todas essas variáveis comutam entre si ($q^i q^j = q^j q^i$).

Efetuando a primeira variação da ação com relação às variáveis acima, obtemos:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i \right) =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \Big|_{t_1}^{t_2} \quad .$$

De acordo com o princípio de mínima ação, as trajetórias clássicas são pontos estacionários da ação. Portanto, para as trajetórias clássicas, devemos ter $\delta S = 0$. Fazendo isso e mantendo os extremos fixos, isto é, considerando $\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0$, obtemos as chamadas *equações de Euler-Lagrange*:

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = 0 \quad . \tag{2.2}$$

Tomando a diferencial da lagrangiana L, temos

$$dL = \frac{\partial L}{\partial t} dt + \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} d\dot{q}^i = \frac{\partial L}{\partial t} dt + \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i + d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i \right) - \dot{q}^i d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L \right) = -\frac{\partial L}{\partial t} dt - \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i + \dot{q}^i d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \quad . \tag{2.3}$$

Vamos definir os *momentos canonicamente conjugados* a q^i

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \tag{2.4}$$

e a *hamiltoniana canônica*, dada por

$$H_c \equiv p_i \dot{q}^i - L \quad . \tag{2.5}$$

Fazendo as substituições em (2.3)

$$dH = -\frac{\partial L}{\partial t} dt - \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i + \dot{q}^i dp_i \quad .$$

Da equação acima, vemos que, para que a hamiltoniana não tenha dependência nas velocidades $\dot{q}^i$, é necessário que essas velocidades possam ser expressas em termos das coordenadas q^i e dos momentos p_i.

Derivando (2.4) em relação às velocidades, obtemos

$$\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j} = W_{ij} \quad , \tag{2.6}$$

onde W_{ij} são os elementos da matriz $n \times n$ $||W_{ij}||$, que chamamos de *hessiano* e que são dados por

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \quad . \tag{2.7}$$

Da relação (2.6), podemos ver que só haverá uma relação única entre cada par $(\dot{q}^i, p^i)$ se a matriz $||W_{ij}||$ for invertível, ou seja

$$\det ||W_{ij}|| \neq 0 \quad . \tag{2.8}$$

Caso a condição acima seja obedecida, o sistema é chamado regular. No entanto, caso tenhamos $\det ||W_{ij}|| = 0$, temos um sistema chamado singular, onde existirá um número m de velocidades $\dot{q}^i$ que não podem ser expressas em termos das coordenadas e dos momentos.

Antes de continuarmos esta exposição sobre sistemas singulares, passaremos para a discussão do caso dos campos, onde poderemos tratar o problema de uma forma mais geral.

2.2 Campos

Definimos, agora, a ação como o funcional dado por

$$S = S[\varphi_i] = \int_{t_1}^{t_2} dt\ L(\varphi_i, \partial_\mu \varphi_i) \ , \tag{2.9}$$

onde L é a lagrangiana, que é uma função das funções do espaço-tempo $\varphi_i(x_\mu)$, que chamaremos de campos e de suas derivadas $\partial_\nu \varphi(x_\mu)$. Na nossa notação,

$$\partial_\mu \varphi_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^\mu} \ ; \quad \mu = 1, \ldots, D \ ; \quad i = 1, \ldots, n \ ,$$

onde D é o número de dimensões do espaço-tempo em questão e n é o número de campos da teoria. É importante salientar que podemos ter campos com outros índices de Lorentz (exs. ϕ, A_μ, $B_{\mu\nu}$), para os quais os resultados aqui obtidos se aplicam de maneira semelhante.

Definimos, agora, a *densidade lagrangiana* por

$$L \equiv \int d^{D-1}x\ \mathcal{L} \ , \tag{2.10}$$

onde estamos integrando somente sobre as dimensões espaciais.

Podemos, então, escrever (2.9) como

$$S = \int d^D x\ \mathcal{L} \ .$$

Fazendo a primeira variação da ação, chegamos a

$$\delta S = \int d^D x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \delta(\partial_\mu \varphi_i) \right] =$$

$$= \int d^D x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \right] \delta\varphi_i + \int d^D x\ \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \delta\varphi_i \right] \ .$$

Utilizando o teorema de Gauss, podemos escrever o segundo termo da equação acima como

$$\int_S d\sigma\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \delta\varphi_i n_\mu \ ,$$

onde a integração é sobre uma superfície que envolva o volume de integração e que pode ser posta no infinito. Considerando campos cujas variações se anulam nessa superfície ($\varphi_i|_S = 0$), temos, então,

$$\delta S = \int d^D x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \right] \delta\varphi_i \ .$$

Novamente, o princípio de mínima ação implica em

$$\delta S = 0 \Longrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^i)} = 0 \ , \tag{2.11}$$

que são as equações de Euler-Lagrange generalizadas para campos.

Também aqui podemos definir os momentos canonicamente conjugados aos campos φ_i como

$$\pi^i_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^\mu_i} \tag{2.12}$$

e a *densidade hamiltoniana canônica* por

$$\mathcal{H}_c \equiv \pi^i \dot{\varphi}_i - \mathcal{L} \ . \tag{2.13}$$

A hamiltoniana canônica será, então,

$$H_c = \int d^{D-1} x \ \mathcal{H}_c \ . \tag{2.14}$$

Escrevendo a ação em termos da densidade hamiltoniana canônica e variando em relação a φ^i e π_i, temos

$$S = \int d^D x \ (\pi^i \dot{\varphi}_i - \mathcal{H}_c) = \int d^D x \ (-\dot{\pi}^i \varphi_i - \mathcal{H}_c) \ ,$$

onde as integrais acima diferem apenas por termos de superfície.

A variação da ação fica, agora,

$$\delta S = \int d^D x \left[\left(-\dot{\pi}_i - \frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial \varphi^i} \right) \delta\varphi^i + \left(\dot{\varphi}_i - \frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial \pi^i} \right) \delta\pi^i \right]$$

Pelo princípio de mínima ação , as trajetórias clássicas são pontos estacionários da ação e devemos ter $\delta S = 0$, o que nos leva às *equações de Hamilton*

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial \pi^i} \quad , \quad \dot{\pi}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial \varphi^i} \ . \tag{2.15}$$

Vamos, agora, estudar o desenvolvimento no tempo de uma função qualquer dos campos, dos momentos e do tempo (chamaremos, daqui em diante, essas variáveis de variáveis do espaço de fase)

$$\dot{A}(\varphi^i, \pi_i, t) = \frac{d}{dt}A + \frac{\partial A}{\partial \varphi^i}\dot{\varphi}^i + \frac{\partial A}{\partial \pi^i}\dot{\pi}^i \quad .$$

Utilizando as equações de Hamilton, temos

$$\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial \varphi_i}\frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial \pi^i} - \frac{\partial A}{\partial \pi_i}\frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial \varphi^i} \quad .$$

Os *parênteses de Poisson* são dados por

$$\{A(\varphi_i, \pi^i, t), B(\varphi_i, \pi^i, t)\} \equiv \int d^{D-1}\left(\frac{\partial A}{\partial \varphi^i}\frac{\partial B}{\partial \pi_i} - \frac{\partial A}{\partial \pi_i}\frac{\partial B}{\partial \varphi^i}\right) \quad , \qquad (2.16a)$$

onde os campos devem encontrar-se no mesmo instante de tempo.

Para o caso de partículas, os parênteses de Poisson são definidos como

$$\{f(q^i, p_i), g(q^i, p_i)\} = \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q^i}\frac{\partial f}{\partial p_i} \quad . \qquad (2.16b)$$

Em termos dos parênteses de Poisson, a evolução temporal de uma função do espaço de fase pode ser expressa por

$$\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, \mathcal{H}_c\} \quad . \qquad (2.17)$$

As equações de Hamilton ficam

$$\dot{\varphi}_i = \{\varphi_i, \mathcal{H}_c\} \quad , \quad \dot{\pi}_i = \{\pi_i, \mathcal{H}_c\} \quad .$$

Também no caso dos campos, podemos generalizar o conceito de Hessiano

$$W_{ij}^{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^i)\partial(\partial_\nu \varphi^j)} \quad . \qquad (2.18)$$

Particularmente, para $\mu = \nu = 0$

$$W_{ij}^{00} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^i \partial \dot{\varphi}^j} = \frac{\partial \pi_i}{\partial \dot{\varphi}^j} \quad . \qquad (2.19)$$

Vemos que só se pode escrever as "velocidades" $\dot{\varphi}^i$ em termos dos momentos π_i se tivermos

$$\det ||W_{ij}^{00}|| \neq 0 \ . \tag{2.20}$$

Caso a equação acima seja obedecida, teremos um sistema regular em que todas as velocidades $\dot{\varphi}^i$ podem ser expressas em termos dos campos φ^i e dos momentos π_i. Caso isso não ocorra, teremos m ($m < n$) velocidades $\dot{\varphi}^l$ que não podem ser expressas em termos dos campos e dos momentos.

Para um sistema em que $\det ||W_{ij}^{00}|| = 0$, podemos escalonar a matriz $||W_{ij}^{00}||$, obtendo algumas linhas inteiramente compostas por zeros. O efeito desse escalonamento é que, no lado direito de (2.19), não temos mais as derivadas dos momentos em relação às velocidades, mas sim as derivadas de uma combinação linear dos campos, momentos, das velocidades e das derivadas espaciais dessas variáveis que chamaremos de

$$g_k = g_k(\varphi^i, \dot{\varphi}^i, \pi_i, \partial_j\varphi^i, \partial_j\dot{\varphi}^i, \partial_j\pi_i) \ ,$$

onde $i, k = 1, \ldots, n$ (n é o número de campos) e $j = 1, \ldots, (D-1)$ (D é o número de dimensões do espaço-tempo).

Caso escrevamos todas as velocidades que podem ser expressas apenas em termos dos campos, dos momentos e suas derivadas espaciais em termos dessas variáveis, teremos uma função do tipo

$$f_k = f_k(\varphi^i, \pi_i, \dot{\varphi}^l, \partial_j\varphi^i, \partial_j\pi^i, \partial_j\dot{\varphi}^l) \ ,$$

onde $l = 1, \ldots, m$.

A eq. (2.19) fica, então,

$$\frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}^j} f_k = \overline{W}_{kj}^{00} \ ,$$

onde $||\overline{W}_{kj}^{00}||$ é a matriz escalonada.

Para sistemas com vínculos, existirão m linhas nulas

$$\frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}^j} f_l = 0 \ .$$

Vemos, da equação acima, que as funções f_l não dependem das velocidades e, portanto, são funções apenas dos campos, dos momentos e de suas derivadas espaciais

$$f_l = f_l(\varphi^i, \pi_i, \partial_j\varphi^i, \partial_j\pi_i)$$

Isolando os momentos relativos às linhas l em função das outras variáveis, temos

$$\pi_l = h_l(\varphi^i, \pi_i, \partial_l\varphi^i, \partial_j\pi_i)$$

e definimos

$$\phi_l \equiv \pi_l - h_l(\varphi^i, \pi_i, \partial_j\varphi^i, \partial_j\pi_i) \ .$$

Chamamos as funções ϕ_l de *vínculos de 1ª ordem*, pois elas estabelecem relações entre alguns momentos e outras variáveis, definindo um subespaço Γ_v no espaço de fase Γ onde os vínculos são nulos. Podemos, então, estabelecer a notação (introduzida por Dirac) de sinal de *igualdade fraca* "$\approx$". Esse sinal indica que as grandezas relacionadas por ele só são iguais no subespaço Γ_v do espaço de fase. Podemos, então, escrever

$$\phi_l \approx 0 \ , \tag{2.21}$$

indicando que os vínculos são nulos no subespaço Γ_v, mas que fora dele são consideradas variáveis não nulas utilizando o sinal de igualdade fraca.

Como os vínculos são nulos no espaço de fase físico, a hamiltoniana canônica fica determinada a menos de fatores que dependem dos vínculos

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H}_c + t_l\phi^l \ ,$$

onde t_l são quaisquer funções do tipo $t_l(\varphi^i, \pi_i, \partial_j\varphi^i, \partial_j\pi_i)$.

As equações de Hamilton podem ser deduzidas mediante a condição de que $\phi_l = 0 \ , \ l = 1, \ldots, m$.

A fim de eliminar essa condição, vamos introduzir novas variáveis chamadas *multiplicadores de Lagrange* (λ_l) que devem depender apenas das coordenadas do espaço-tempo. A ação com o espaço de fase extendido fica

$$S = \int d^D x \ (\pi^i\dot{\varphi}_i - \mathcal{H}_c - \lambda^l\phi_l) \ .$$

A condição de que S seja estacionária implica nas seguintes equações

$$\dot{\varphi}^i = \{\varphi^i, \mathcal{H}_c\} + \lambda^l\{\varphi^i, \phi_l\}$$

$$\dot{\pi}_i = \{\pi_i, \mathcal{H}_c\} + \lambda^l\{\pi_i, \phi_l\}$$

$$\phi_l = 0$$

Portanto, as condições de vínculo são obtidas do princípio variacional nessa formulação.

Definindo a *densidade hamiltoniana canônica primária* como

$$\mathcal{H}_p \equiv \mathcal{H}_c + \lambda^l \phi_l \quad , \tag{2.22}$$

temos que

$$\dot{\varphi}^i = \{\varphi^i, \mathcal{H}_p\} \quad , \quad \dot{\pi}_i = \{\pi_i, \mathcal{H}_p\} \quad . \tag{2.23}$$

Uma exigência que se impõe sobre os vínculos é a de que eles permaneçam ao menos fracamente nulos com o decorrer do tempo. Essa condição (chamada de condição de consistência dos vínculos) implica em que

$$\dot{\phi}_l \approx 0 \Longrightarrow \{\phi_l, \mathcal{H}_p\} \approx 0 \Longrightarrow \{\phi_l, \mathcal{H}_c\} + \lambda^k \{\phi_l, \phi_k\} \approx 0$$

A equação acima tem três tipos de solução: a) $\{\phi_l, \mathcal{H}_p\} = 0$, b) soluções que envolvem os λ^k ou c) soluções que não envolvem os λ^k. Vamos a uma breve discussão dessas soluções.

Tipo a: essas soluções não impõem nenhuma relação entre as variáveis do espaço de fase.

Tipo b: essas soluções impõem relações que definem alguns dos multiplicadores de Lagrange. Estes devem ser substituídos na densidade hamiltoniana primária para assegurar a consistência dos vínculos de 1ª ordem.

Tipo c: esse tipo de solução estabelece relações extras entre as variáveis do espaço de fase que chamaremos de *vínculos de 2ª ordem*, que serão representados por

$$\phi_r^{(2)} \approx 0 \quad , \tag{2.24}$$

$r = 1, \ldots, (n^{\underline{o}}$ de vínculos de 2ª ordem).

A fim de preservar as equações de movimento, devemos introduzir novos multiplicadores de Lagrange para esses vínculos . Seguindo o procedimento usado com os vínculos de 1ª ordem, introduzimos a *densidade hamiltoniana secundária*

$$\mathcal{H}_s = \mathcal{H}_c + \lambda^l \phi_l + \alpha^r \phi_r^{(2)} \quad .$$

A evolução temporal de uma função A qualquer do espaço de fase ficará, então,

$$\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, \mathcal{H}_s\} \quad .$$

Aplicando a condição de consistência para os vínculos de 2ª ordem, poderemos ainda obter mais relações que determinem mais multiplicadores de Lagrange ou que exijam mais vínculos. Esse procedimento tem que ser repetido até que todas as soluções sejam do tipo a.

De agora em diante, não faremos mais distinção entre vínculos de 1ª,-2ª,3ª ou n-ésima ordem. A densidade hamiltoniana obtida no final desse processo é chamada de *densidade hamiltoniana estendida*

$$\mathcal{H}_e = \mathcal{H}_c + \lambda^s \phi_s \quad , \tag{2.25a}$$

onde $s = 1, \ldots, v$ (v é o número total de vínculos).

Alguns autores preferem trabalhar com a *densidade hamiltoniana total*, que só contém os vínculos de 1ª ordem

$$\mathcal{H}_t = \mathcal{H}_c + \lambda^l \phi_l \quad , \tag{2.25b}$$

onde $l = 1, \ldots,$(número total de vínculos de 1ª ordem).

Existem objeções [4] quanto ao uso da hamiltoniana estendida, baseadas no fato de que as equações de movimento obtidas a partir de H_e não são estritamente equivalentes às equações de Euler-Lagrange. Advoga-se, então, o uso da hamiltoniana total, que fornece as equações de movimento desejadas. No entanto, não vamos nos aprofundar nessa discussão, pois tanto a hamiltoniana estendida quanto a total fornecem a mesma evolução temporal para uma função do espaço de fase quando consideramos as condições de vínculo [17]

$$\{A, \mathcal{H}_c\} \approx \{A, \mathcal{H}_t\} \approx \{A, \mathcal{H}_e\} \quad .$$

A evolução temporal de uma função qualquer do espaço de fase em termos da densidade hamiltoniana estendida é dada por

$$\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, \mathcal{H}_c\} + \lambda^s \{A, \phi_s\} \quad . \tag{2.26}$$

São chamados de *vínculos de 1ª classe* os vínculos que têm parênteses de Poisson fracamente nulos com todos os outros vínculos da teoria e *vínculos de 2ª classe*, os vínculos que não gozam dessa propriedade.

Passaremos, agora, a representar os t vínculos de 2ª classe de uma teoria que tem n vínculos como χ_k $(k = 1, \ldots, t)$, sendo que os vínculos de 1ª

classe continuarão a ser representados por ϕ_i $(i = 1, \ldots, v - t)$. Temos, então

$$\{\phi_i, \phi_j\} = \{\phi_i, \chi_k\} \approx 0 \tag{2.27a}$$

$$\{\chi_k, \chi_l\} \not\approx 0 \ . \tag{2.27b}$$

Vamos representar os parênteses de Poisson dos vínculos de $2^{\underline{a}}$ classe como uma matriz $t \times t$ cujos elementos são dados por

$$\{\chi_k, \chi_l\} \equiv M_{kl} \quad , \quad k, l = 1, \ldots, t \tag{2.28}$$

$$\det ||M_{kl}|| \neq 0 \ .$$

Se o determinante da matriz $||M_{kl}||$ for nulo, então teremos combinações lineares de vínculos de $2^{\underline{a}}$ classe que serão vínculos de $1^{\underline{a}}$ classe. Isso pode ser visto facilmente escalonando a matriz $||M_{kl}||$, obtendo

$$\{G_k, G_l\} = \overline{M}_{kl} \quad ,$$

onde $||\overline{M}_{kl}||$ é a matriz escalonada e os G_k são combinações lineares dos vínculos de $2^{\underline{a}}$ classe e de suas derivadas espaciais.

Se $\det ||M_{ij}|| = 0$, então existirão linhas nulas na matriz $||\overline{M}_{kl}||$. Teremos, então, para os valores de k cujas linhas são nulas

$$\{G_r, G_l\} = 0 \quad , \quad r = 1, \ldots, (n^{\underline{o}} \text{ de linhas nulas}) \ .$$

Pela definição de vínculos de $1^{\underline{a}}$ e $2^{\underline{a}}$ classe, vemos que as combinações lineares de vínculos de $2^{\underline{a}}$ classe dadas pelos G_r são vínculos de $1^{\underline{a}}$ classe. Isso pode ocorrer em algumas teorias. Nesse caso, deve-se tomar os G_r como vínculos de $1^{\underline{a}}$ classe. Por isso, devemos introduzir na definição de vínculos de $2^{\underline{a}}$ classe que nenhuma combinação linear destes poderá ser um vínculo de $1^{\underline{a}}$ classe.

Vamos, agora, mostrar que o número de multiplicadores de Lagrange que podem ser determinados usando as condições de consistência dos vínculos é igual ao número de vínculos de $2^{\underline{a}}$ classe. A densidade hamiltoniana estendida pode ser escrita como

$$\mathcal{H}_e = \mathcal{H}_c + \lambda^i \phi_i + \alpha^k \chi_k \quad , \quad i = 1, \ldots, v - t \quad e \quad k = 1, \ldots, t \quad , \tag{2.29}$$

onde v é o número total de vínculos e t é o número de vínculos de $2^{\underline{a}}$ classe.

A condição de consistência para vínculos de 1ª e 2ª classe implica em

$$\dot{\phi}_i = 0 \Longrightarrow \{\phi_i, \mathcal{H}_e\} \approx 0 \Longrightarrow \{\phi_i, \mathcal{H}_c\} \approx 0$$

$$\dot{\chi}_k = 0 \Longrightarrow \{\chi_k, \mathcal{H}_e\} \approx 0 \Longrightarrow \{\chi_k, \mathcal{H}_c\} + \alpha^j\{\chi_k, \chi_j\} \approx 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \{\chi_k, \mathcal{H}_c\} + \alpha^j M_{kj} \approx 0 \Longrightarrow \alpha_j \approx -M^{-1}_{jk}\{\chi^k, \mathcal{H}_c\} \quad . \tag{2.30}$$

Portanto, os multiplicadores de Lagrange que podem ser determinados por meio da condição de consistência dos vínculos são somente aqueles relativos aos vínculos de 2ª classe (note a condição $\det ||M_{kj}|| \neq 0$ imposta pela existência da inversa da matriz $||M_{kj}||$). Separando os vínculos de 1ª e 2ª classe, temos para a eq. (2.26) a forma

$$\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, \mathcal{H}_c\} + \lambda^i\{A, \phi_i\} + \alpha^k\{A, \chi_k\} \quad . \tag{2.31}$$

Substituindo os multiplicadores de Lagrange α^k

$$\dot{A} \approx \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, \mathcal{H}_c\} + \lambda^i\{A, \phi_i\} - \{A, \chi^k\}M^{-1}_{kj}\{\chi^j, \mathcal{H}_c\} \quad . \tag{2.32}$$

Podemos, agora, introduzir os *parênteses de Dirac*, definidos por

$$\{A, B\}_D \equiv \{A, B\} - \{A, \chi^j\}M^{-1}_{jk}\{\chi^k, B\} \quad , \tag{2.33}$$

em termos dos quais a eq. (2.32) fica

$$\dot{A} \approx \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, \mathcal{H}_c\}_D + \lambda^i\{A, \phi_i\} \quad . \tag{2.34}$$

Os parênteses de Dirac de uma função qualquer do espaço de fase com vínculos de 2ª classe são dados por

$$\{A, \chi_k\}_D = \{A, \chi_k\} - \{A, \chi^r\}M^{-1}_{rs}\{\chi^s, \chi_k\} = 0 \quad .$$

Portanto, vemos que os parênteses de Dirac de qualquer função do espaço de fase com vínculos de 2ª classe são fortemente iguais a zero, isto é, são zero em todo o espaço de fase. Isso nos torna possível igualar os vínculos de 2ª classe a zero antes mesmo de computar os parênteses de

Dirac, eliminando, assim, t variáveis da teoria (t é o número de vínculos de $2^{\underline{a}}$ classe). Podemos, então, escrever (2.34) na forma de igualdade forte

$$\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, \mathcal{H}_c\}_D + \lambda^i \{A, \phi_i\} \quad . \tag{2.35}$$

De acordo com a eq. (2.35), a evolução temporal de uma função depende de termos não determinados (os multiplicadores de Lagrange dos vínculos de $1^{\underline{a}}$ classe). É razoável imaginar que um observável físico não deva depender desses termos indeterminados. Isso implica em que, para um observável físico $\mathcal{O}$,

$$\{\mathcal{O}, \phi_i\}_D \approx 0 \quad .$$

Vemos, então, que os observáveis são invariantes por uma mudança de multiplicadores de Lagrange. Isso pode ser interpretado como uma invariância dos observáveis por transformações geradas pelos vínculos, que pode ser relacionada às transformações de gauge em teorias de campos. Esse assunto é discutido na Apêndice A (sessão A.1), onde também são fornecidas referências.

Para fixar um valor para esses multiplicadores de Lagrange introduzimos na teoria mais vínculos (tantos quantos forem os vínculos de $1^{\underline{a}}$ classe) com seus respectivos multiplicadores de Lagrange. A intenção é impor condições extras sobre a teoria que fixem os valores dos multiplicadores de Lagrange associados aos vínculos de $1^{\underline{a}}$ classe. Do ponto de vista das teorias de gauge, esses vínculos adicionais fazem o papel das condições fixadoras de gauge.

Temos, então, uma densidade hamiltoniana (que chamaremos de *densidade hamiltoniana física*) dada por

$$\mathcal{H}_f = \mathcal{H}_c + \lambda^i \phi_i + p^i \psi_i \quad , \quad i = 1, \ldots, v - t \quad ,$$

onde os ψ_i são chamados de *vínculos fixadores de gauge* e os p^i são os seus respectivos multiplicadores de Lagrange. Aplicando a condição de consistência para os vínculos iniciais de $1^{\underline{a}}$ classe, temos

$$\dot{\phi}_i \approx 0 \Longrightarrow \{\phi_i, \mathcal{H}_c\}_D + p^j \{\phi_i, \psi_j\}_D \approx 0 \quad .$$

Definimos, agora, a matriz cujos elementos são dados por

$$N_{ij} \equiv \{\phi_i, \psi_j\}_D = -\{\psi_j, \phi_i\}_D$$

e exigimos que $\det ||N_{ij}|| \neq 0$.

Podemos, então, determinar os multiplicadores de Lagrange associados aos novos vínculos ψ_i

$$p_j = -N^{-1}_{ji}\{\phi^i, \mathcal{H}_c\}_D \quad .$$

Aplicando, agora, a condição de consistência para os vínculos fixadores de gauge, podemos também determinar os multiplicadores de Lagrange dos vínculos iniciais

$$\dot{\psi}_i \approx 0 \Longrightarrow \{\psi_i, \mathcal{H}_c\}_D + \lambda^j\{\psi_i, \phi_j\}_D + p^j\{\psi_i, \psi_j\}_D \approx 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \lambda_j \approx -N^{-1}_{ji}\{\psi^i, \mathcal{H}_c\}_D + N^{-1}_{ji}N^{-1}_{lk}\{\phi^k, \mathcal{H}_c\}_D\{\psi^i, \psi^l\}_D \quad .$$

A evolução temporal de uma função qualquer do espaço de fase fica, agora,

$$\dot{A} \approx \frac{\partial A}{\partial t} - \{A, \phi^i\}_D N^{-1}_{ij}\{\psi^j, \mathcal{H}_c\}_D +$$

$$+\{A, \phi_i\}_D N^{-1}_{ij}N^{-1}_{lk}\{\psi^j, \psi^l\}_D\{\phi^k, \mathcal{H}_c\}_D - \{A, \psi^i\}_D N^{-1}_{ij}\{\phi^j, \mathcal{H}_c\}_D \quad . \quad (2.36)$$

Podemos, então, definir novos parênteses de Dirac

$$\{A, B\}_{D'} \equiv \{A, B\}_D - \{A, \phi^i\}_D N^{-1}_{ij}\{\psi^j, B\}_D +$$

$$+\{A, \phi^i\}_D N^{-1}_{ij}N^{-1}_{lk}\{\psi^j, \psi^l\}_D\{\phi^k, B\}_D - \{A, \psi^i\}_D N^{-1}_{ij}\{\phi^j, B\}_D \quad , \quad (2.37)$$

em termos dos quais a eq. (2.36) fica

$$\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, \mathcal{H}_c\}_{D'} \quad .$$

Isso indica que ao adicionarmos vínculos fixadores de gauge sujeitos à condição

$$\det ||\{\phi_i, \psi_j\}_D|| \neq 0 \quad , \quad (2.38)$$

transformamos os vínculos de 1ª classe ϕ_i em vínculos de 2ª classe, que podem ser eliminados da teoria por meio de parênteses de Dirac adequados.

Com esse procedimento, nós reduzimos o número de variáveis físicas do espaço de fase a $2(n - v)$, onde n é o número inicial de campos e v é o número total de vínculos de 1ª classe.

Algo que não chegamos a discutir é o caso em que os vínculos de 1ª classe não são linearmente independentes, o que indica que existem relações entre eles que possibilitam escrever alguns desses vínculos em termos dos outros. Portanto, o número real de vínculos da teoria será um número $v' < v$, e a dimensão do espaço de fase físico é, nesse caso, $2(n - v')$. Teorias que apresentam essa característica são chamados sistemas redutíveis, e serão discutidas no capítulo 4.

2.3 Variáveis de Grassmann

Variáveis de Grassmann são variáveis que anticomutam, ou seja,

$$\theta^i\theta^j = -\theta^j\theta^i \quad . \tag{2.39}$$

Elas são muito úteis na descrição clássica de partículas com spin[2] e, como serão utilizadas mais tarde, merecerão uma breve descrição de seu formalismo a nível clássico. Não trataremos aqui do problema de campos anticomutantes, mas os resultados aqui obtidos podem ser facilmente extendidos para o caso de campos.

Para fazer o tratamento do caso de partículas, consideramos uma ação S_F que depende exclusivamente de variáveis de Grassmann e de suas derivadas no tempo. O caso mais geral de uma ação dependendo tanto de variáveis reais quanto de Grassmann é facilmente tratável utilizando o formalismo que descreveremos aqui em conjunto com o formalismo descrito nas sessões anteriores.

Escrevemos a ação S_F como

$$S_F = \int_{t_1}^{t_2} dt\ L_F(\theta, \dot{\theta}) \quad ,$$

onde L_F é a lagrangiana.

Efetuando a variação da ação, obtemos

$$\delta S_F = \int_{t_1}^{t_2} dt\ \left(\frac{\partial L_F}{\partial \theta^i}\delta\theta^i + \frac{\partial L_F}{\partial \dot{\theta}^i}\delta\dot{\theta}^i\right) =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt\ \left(\frac{\partial L_F}{\partial \theta^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L_F}{\partial \dot{\theta}^i}\right)\delta\theta^i + \frac{\partial L_F}{\partial \dot{\theta}^i}\delta\theta^i\Big|_{t_1}^{t_2} \quad .$$

Fazendo $\delta S_F = 0$ para as trajetórias clássicas e mantendo os extremos fixos $[\delta\theta^i(t_1) = \delta\theta^i(t_2) = 0]$, obtemos as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L_F}{\partial \theta^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L_F}{\partial \dot{\theta}^i} = 0 \quad ,$$

que são idênticas às obtidas no caso de variáveis reais. As diferenças aparecem quando fazemos a mudança para o formalismo hamiltoniano. De maneira análoga ao caso das variáveis reais, tomamos a diferencial da lagrangiana

$$dL_F = \frac{\partial L_F}{\partial t}dt + \frac{\partial L_F}{\partial \theta^i}d\theta^i + \frac{\partial L_F}{\partial \dot{\theta}^i}d\dot{\theta}^i =$$

$$\frac{\partial L_F}{\partial t}dt + \frac{\partial L_F}{\partial \theta^i}d\theta^i - d\left(\frac{\partial L_F}{\partial \dot{\theta}^i}\dot{\theta}^i\right) - d\left(\frac{\partial L_F}{\partial \dot{\theta}^i}\right)\dot{\theta}^i \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow d\left(-\frac{\partial L_F}{\partial \dot{\theta}^i}\dot{\theta}^i - L_F\right) = -\frac{\partial L_F}{dt}dt - \frac{\partial L_F}{\partial \theta^i}d\theta^i - \dot{\theta}^i\, d\left(\frac{\partial L_F}{\partial \dot{\theta}^i}\right) \quad .$$

A fim de que possamos definir a hamiltoniana canônica da maneira usual

$$H_c \equiv \pi^i\dot{\theta}_i - L_F \quad ,$$

temos que definir os momentos canonicamente conjugados às variáveis θ^i como

$$\pi_i \equiv -\frac{\partial L_F}{\partial \dot{\theta}^i} \quad . \tag{2.40}$$

Essa definição difere por um sinal da definição para o caso de variáveis reais.

Efetuando a variação da ação em termos da hamiltoniana, obtemos

$$S_F = \int_{t_1}^{t_2} dt(\pi^i\dot{\theta}_i - H_c) = \int_{t_1}^{t_2} dt(\theta^i\dot{p}i_i - H_c) \quad ,$$

$$\delta S_F = \int_{t_1}^{t_2} dt\left[\left(\dot{\pi}_i - \frac{\partial H_c}{\partial \theta^i}\right)\delta\theta^i + \left(\dot{\theta}_i - \frac{\partial H_c}{\partial \pi^i}\right)\delta\pi^i\right] \quad .$$

A condição $\delta S_F = 0$ implica nas seguintes equações de Hamilton

$$\dot{\pi}_i = \frac{\partial H_c}{\partial \theta^i} \quad , \quad \dot{\theta}^i = \frac{\partial H_c}{\partial \pi_i} \quad , \tag{2.41}$$

que não têm exatamente a mesma forma que as obtidas no caso de variáveis reais.

O desenvolvimento no tempo de uma função qualquer das variáveis de Grassmann será dado por

$$\dot{\Lambda}(\theta^i, \pi_i) = \frac{\partial \Lambda}{\partial t} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta^i}\dot{\theta}^i + \frac{\partial \Lambda}{\partial \pi^i}\dot{\pi}^i \quad .$$

Utilizando as equações de Hamilton para variáveis de Grassmann, obtemos

$$\dot{\Lambda}(\theta^i, \pi_i) = \frac{\partial \Lambda}{\partial t} + \{\Lambda, H_c\} \quad , \tag{2.42}$$

onde $\{\Lambda, H_c\}$ são os parênteses de Poisson para variáveis de Grassmann, que são dados por

$$\{\Lambda, \Gamma\} = \frac{\Lambda \partial_{\leftarrow}}{\partial \theta^i} \frac{\partial_{\rightarrow} \Gamma}{\partial \pi_i} + \frac{\Gamma \partial_{\leftarrow}}{\partial \theta^i} \frac{\partial_{\rightarrow} \Gamma}{\partial \pi_i} \quad , \tag{2.43}$$

onde $\partial_{\rightarrow}$ indica derivação pela esquerda e $\partial_{\leftarrow}$, derivação pela direita (a ordem em que os termos são derivados torna-se importante para variáveis de Grassmann).

Essa diferença entre os parênteses de Poisson para variáveis reais e de Grassmann nos leva à definição dos *parênteses de Poisson generalizados*

$$\{A, B\} = \frac{A \partial_{\leftarrow}}{\partial q^i} \frac{\partial_{\rightarrow} B}{\partial p_i} - (-1)^{P_A P_B} \frac{B \partial_{\leftarrow}}{\partial q^i} \frac{\partial_{\rightarrow} A}{\partial p_i} \quad , \tag{2.44}$$

onde P_A, P_B são as *paridades de Grassmann* de A e B ($P_X = 0$ se X for real e $P_X = 1$ se X for de Grassmann). As variáveis q^i, p_i podem ser reais ou de Grassmann.

Da mesma forma, a condição de consistência de um vínculo de 2ª classe grassmaniano é dada por (o caso de variáveis reais é dado pela eq. 2.30)

$$\dot{\chi}_k = 0 \Longrightarrow \{\chi_k, H_e\} \approx 0 \Longrightarrow \{\chi_k, H_c\} - \alpha^j \{\chi_k, \chi_j\} \approx 0$$

$$\Longrightarrow \{\chi_k, H_c\} - \alpha^j M_{kj} \approx 0 \Longrightarrow \alpha_j \approx \{\chi^k, H_c\} M^{-1}_{jk} = M^{-1}_{jk} \{\chi^k, H_c\} \quad ,$$

onde devemos notar que a paridade de Grassmann da matriz M^{-1}_{ij} de dois vínculos grassmanianos é sempre par ($P_M = 0$).

A evolução temporal de uma função do espaço de fase (real ou grassmaniana) será dada por

$$\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial t} + (-1)^{P_A} \lambda^l \{A, \phi_l\} + (-1)^{P_A} \alpha^k \{A, \chi_k\} \quad .$$

Substituindo os valores dos multiplicadores de Lagrange α^k, obtemos

$$\dot{A} \approx \frac{\partial A}{\partial t} + (-1)^{P_A} \lambda^l \{A, \phi_l\} - \{A, \chi^k\} M^{-1}_{kj} \{\chi^j, H_c\} \quad .$$

Definimos, então, os parênteses de Dirac para variáveis de Grassmann como sendo

$$\{A, B\}_D \equiv \{A, B\} - \{A, \chi^k\} M^{-1}_{kj} \{\chi^j, B\} \quad .$$

Vê-se que a definição acima é idêntica à definição para o caso real. Portanto, a forma geral para os parênteses de Dirac é dada pela eq. (2.33).

Os parênteses de Dirac generalizados têm as seguintes propriedades

$$\{A, B\}_D = (-1)^{P_A P_B + 1} \{B, A\}_D \tag{2.45a}$$

$$\{A, BC\}_D = \{A, B\}_D C + (-1)^{P_A P_B} B \{A, C\}_D \tag{2.45b}$$

$$\begin{aligned} &\{\{A, B\}_D, C\}_D + (-1)^{P_A (P_B + P_C)} \{\{B, C\}_D, A\}_D + \\ &+ (-1)^{P_C (P_A + P_B)} \{\{C, A\}_D, B\}_D \quad , \end{aligned} \tag{2.45c}$$

onde chamamos (2.45c) de *identidade de Jacobi generalizada.*

Com isso, encerramos nossa discussão sobre a mecânica clássica para variáveis de Grassmann, tendo generalizado as definições dos parênteses de Poisson e de Dirac para cobrir tanto variáveis reais quanto de Grassmann.

Capítulo 3

QUANTIZAÇÃO BRST-BFV

Este capítulo é dedicado à introdução não rigorosa dos conceitos de integral de trajetória para sistemas sem vínculos e com vínculos e da simetria de BRST. Procuramos fazer a exposição de forma a enfocar os aspectos físicos desses conceitos.

3.1 Integral de Trajetória para Sistemas com Vínculos

Nesta seção , vamos introduzir o conceito de integrais de trajetória, introduzido por Feynman[5] e baseado em algumas idéias de Dirac[6]. Começaremos indicando o procedimento de quantização para sistemas com um número finito de graus de liberdade (partículas) que não possuem vínculos. Passaremos, depois, para uma breve exposição da integral funcional no caso de campos, passando depois para o caso da integração funcional de sistemas que apresentam vínculos .

3.1.1 Sistemas sem vínculos

Introduziremos, agora, o conceito de integral de trajetória para sistemas que não apresentam vínculos. A "dedução" da integral de trajetória que será mostrada nesta sessão não tem o intuito de ser rigorosa. Ela não tem alcance geral e procura somente introduzir a idéia da integral de trajetória e mostrar as diferenças entre a integração de teorias com e sem vínculos.

Partimos do processo de quantização canônica, quando postulamos que a quantização de um sistema se faz escrevendo as grandezas físicas como operadores e transformando os parênteses de Poisson em comutadores (no caso de sistemas que apresentam vínculos , devemos utilizar os parênteses de Dirac). O comutador de dois operadores (os operadores serão identificados pelo acento circunflexo) é dado pela expressão

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad . \tag{3.1}$$

A passagem da mecânica clássica para a quântica será dada pelas relações

$$\begin{aligned} [\hat{q}_i, \hat{q}_j] &= i\hbar\{q_i, q_j\} = 0 \\ [\hat{p}_i, \hat{p}_j] &= i\hbar\{p_i, p_j\} = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\{q_i, p_j\} = i\hbar\delta_{ij} \quad ,$$

onde $\hbar$ é a constante de Planck dividida por 2π.

Os operadores $\hat{q}_i$ e $\hat{p}_i$ atuam em autovetores (que representam estados físicos), resultando em grandezas que chamaremos de autovalores desses operadores. Na representação das coordenadas, temos

$$\hat{q}_i|q_k >= q_i\delta_{ik}|q_k >= q_i|q_i > \quad . \tag{3.3}$$

Os autovetores obedecem às relações

$$< q_i|q_j >= \delta(q_i - q_j)$$

$$\int dq_i \; |q_i >< q_i| = 1 \quad . \tag{3.4}$$

De agora em diante, vamos considerar os operadores e autovalores sem os índices, a fim de simplificar a notação.

Aplicando o comutador de $\hat{q}$ com $\hat{p}$ em um autovetor de $\hat{q}$, podemos obter uma representação do operador $\hat{p}$ em termos das coordenadas

$$(\hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q})|q >= i\hbar|q >\Rightarrow -\hat{p}q|q >= i\hbar|q >\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{p}|q >= -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}|q > \quad . \tag{3.5}$$

Fazendo um "sanduíche" do operador $\hat{p}$ com um autovetor de $\hat{q}$ e um autovetor de $\hat{p}$, obtemos

$$< q|\hat{p}|p >=< q| - i\hbar\frac{\partial}{\partial q}p >\Rightarrow< q|p >= g(p)e^{iqp/\hbar} \quad .$$

Utilizando a condição de normalização dos autovetores, temos

$$< p'|p >= \delta(p' - p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int dq \;\; < p'|q >< q|p >= 2\pi|g(p)|^2\delta(p' - p) = \delta(p' - p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{i\alpha} \quad ,$$

onde α é uma fase qualquer.

Como estamos interessados somente no módulo dessa expressão, podemos escolher $\alpha = 0$, obtendo a expressão

$$< q|p >= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{iqp/\hbar} \quad . \tag{3.6}$$

Definiremos, agora, o operador de evolução temporal. Sendo $|\psi(t) >$ o autovetor de um estado físico no instante de tempo t, o operador de evolução temporal $\hat{U}(t',t)$ é definido como o operador que leva o autovetor no instante de tempo t para o autovetor no instante de tempo t'

$$|\psi(t') >\equiv \hat{U}(t',t)|\psi(t) > \quad . \tag{3.7}$$

Devido à sua definição , o operador de evolução temporal deve ter as seguintes propriedades

$$\hat{U}(t,t) = \hat{1} \quad (\hat{1} \text{ sendo o operador identidade}) \quad \text{e} \tag{3.8a}$$

$$< \psi(t')|\psi(t') >=< \psi(t)|\psi(t) >\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{1} \quad (\hat{U} \text{ é unitário}) \quad . \tag{3.8b}$$

Formulando a equação de Scrödinger em termos do operador hamiltoniano $\hat{H}$ e usando e eq. (3.7), obtemos a seguinte equação para o operador $\hat{U}(t',t)$

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t') >= \hat{H}(t')|\psi(t') >\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\hat{U}(t',t) = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t')\hat{U}(t',t) \quad . \tag{3.9}$$

Considerando que o operador $\hat{U}(t',t)$ esteja agindo sobre uma mudança infinitesimal no tempo, podemos considerar que a hamiltoniana não dependa explicitamente do tempo nesse pequeno intervalo. Podemos, então, escrever a solução de (3.9) sujeita à condição inicial (3.8a) como

$$\hat{U}(t',t) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(t'-t)\hat{H}\right] \quad . \tag{3.10}$$

Vamos, agora, considerar o operador de evolução temporal agindo sobre autovetores do operador $\hat{q}$. Define-se o propagador $K(q',t',q,t)$ como

$$K(q',t',q,t) \equiv< q'|\hat{U}(t',t)|q > \quad , \tag{3.11}$$

ou seja, o propagador é a amplitude de probabilidade de que uma partícula esteja no autoestado q' do operador $\hat{q}$, tendo estado inicialmente no autoestado q.

Consideremos o propagador de um sistema que vai de (q,t) até (q',t') em diversos estágios infinitesimais. Tomaremos um número n de estágios, sendo que $t_n \equiv t'$ e $t_0 \equiv t$ e exigindo que os instantes de tempo sejam ordenados $(t_n > t_{n-1} > \ldots > t_1 > t_0)$. Tomaremos o limite de $n \to \infty$ e $\text{máx}\{t_i - t_{i-1}\} \equiv \delta t \to 0$.

$$K(q',t',q,t) =< q'|\hat{U}(t',t)|q >=$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta t\to 0}} < q_n|\hat{U}(t_n,t_{n-1})\hat{U}(t_{n-1},t_{n-2})\ldots\hat{U}(t_1,t_0)|q_0 >=$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta t\to 0}} \int dq_{n-1}dq_{n-2}\ldots dq_1 < q_n|\hat{U}(t_n,t_{n-1})|q_{n-1} >$$

$$< q_{n-1}|\hat{U}(t_{n-1},t_{n-2})|q_{n-2} > \ldots < q_1|\hat{U}(t_1,t_0)|q_0 > \quad .$$

Introduzindo um conjunto completo de autovetores intermediários do momento, temos

$$K(q',t',q,t) =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta t\to 0}} \int dq_{n-1}\ldots dq_1 dp_n dp_1 < q_n|\hat{U}(t_n,t_{n-1})|p_n >< p_n|q_{n-1} >$$

$$< q_{n-1}|\hat{U}(t_{n-1},t_{n-2})|p_{n-1} > \ldots < q_1|\hat{U}(t_1,t_0)|p_1 >< p_1|q_0 > \quad . \tag{3.12}$$

Para intervalos infinitesimais, podemos fazer a expansão

$$\hat{U}(t_i,t_{i-1}) \approx \hat{1} - \frac{i}{\hbar}(t_i - t_{i-1})\hat{H} \quad ,$$

onde desprezamos os termos de ordens iguais ou superiores a $(\delta t)^2$.

Podemos, então, escrever para cada intervalo infinitesimal de tempo (t_i, t_{i-1})

$$< q_i|\hat{U}(t_i,t_{i-1})|p_i >\approx< q_i|1 - \frac{i}{\hbar}\hat{H}|p_i >=$$

$$= \left[1 - \frac{i}{\hbar}(t_i - t_{i-1})H(q_i,p_i)\right] < q_i|p_i > \quad ,$$

onde $H(q_i,p_i)$ é o autovalor do operador hamiltoniana aplicado em $|p_i >$.

Utilizando a eq.(3.6), temos

$$< q_i|\hat{U}(t_i, t_{i-1})|p_i >< p_i|q_{i-1} >\approx$$

$$\approx \frac{1}{2\pi\hbar} \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(t_i - t_{i-1})H(q_i, p_i)\right] \exp\left[\frac{i}{\hbar}p_i(q_i - q_{i-1})\right] \quad .$$

Substituindo esses fatores na eq. (3.12), temos

$$K(q', t', q, t) \approx \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta t\to 0}} \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int dq_{n-1} \ldots dq_1 dp_n \ldots dp_1$$

$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[p_n(q_n - q_{n-1}) + \ldots + p_1(q_1 - q_0)\right]\right\}$$

$$\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\left[(t_i - t_{i-1})H(q_i, p_i) + \ldots + (t_1 - t_0)H(q_1, p_1)\right]\right\} \quad .$$

Tomando o limite, obtemos a seguinte expressão

$$K(q', t', q, t) \approx N' \int \mathcal{D}q\mathcal{D}p \ \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'} (p\dot{q} - H)dt''\right] \quad , \tag{3.13}$$

onde $\mathcal{D}q \equiv \prod_{t,i} dq(t)$ e $\mathcal{D}p \equiv \prod_{t,i} dp(t)$ são como que "produtórias contínuas" do tempo e N' é um fator de normalização adequado. Se considerarmos esta expressão como correta, chegamos à definição de integral de trajetória para sistemas que não apresentam vínculos

$$K(q_2, t_2, q_1, t_1) = N \int \mathcal{D}q\mathcal{D}p \ \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_{t_1}^{t_2} dt \ L\right) \quad .$$

Podemos notar que a expressão acima fornece o limite clássico correto pois, por $\hbar$ ser muito pequeno, mesmo variações muito pequenas na ação acarretam amplitudes de oscilação muito fortes, que geram interferência destrutiva. No limite clássico ($\hbar \to 0$), a única amplitude remanescente é a que tem $\delta S = 0$, que é justamente o que define a ação clássica. Daqui em diante, vamos utilizar somente unidades naturais, em que $\hbar = 1$. Por isso, vamos redefinir a integral de trajetória (aproveitando para generalizá-la para o caso de várias coordenadas e momentos)

$$K(q_2, t_2, q_1, t_1) = N \int \mathcal{D}q_i\mathcal{D}p_i \ \exp(iS) \quad , \tag{3.14}$$

onde S é a ação .

O método de dedução da integral de trajetória aqui utilizado, embora seja melhor no sentido de se entender a física do problema, apresenta o inconveniente da necessidade de discretizar o tempo. Formulações mais rigorosas da integral de trajetória (utilizando uma matemática mais sofisticada) podem ser encontradas em [7].

3.1.2 A integral de trajetória para campos

O caso dos campos[8] pode ser tomado como um caso limite em que dividimos o espaço em infinitos blocos de volume infinitesimal. Podemos considerar as variáveis q_i $(i = 1, \ldots, n)$ da integral funcional (3.14) como representando a função (campo) $\varphi_j(q_i)$ naquele determinado ponto do espaço. Levando ao limite de $n \to \infty$ e volumes tendendo a zero, temos a equivalência ao caso dos campos.

Portanto, definiremos a integral de trajetória (que chamaremos agora de função de partição) para campos como sendo dada por

$$Z \equiv \int \mathcal{D}\varphi_i \mathcal{D}\pi_i \ \exp\left(i \int d^D x \ \mathcal{L}\right) \quad , \tag{3.15}$$

onde $\mathcal{D}\varphi_i = \prod_{t,i} d\varphi_i(x_j, t)$, $\mathcal{D}\pi_i = \prod_{t,i} \pi_i(x_j, t)$ e n é uma constante de normalização .

A integração funcional acima é feita sobre todo o volume do espaço-tempo, e representa a amplitude de transição que vai do estado do vácuo em $t = -\infty$ para o estado do vácuo em $t = +\infty$. Essa amplitude não representa o propagador de um campo. Para que possamos calcular o propagador, é necessário adicionar uma fonte na integral funcional, resultando na amplitude de propagação vácuo-vácuo na presença de fontes

$$Z(J^i) = N \int \mathcal{D}\varphi_i \mathcal{D}\pi_i \ \exp\left[i \int d^D x (\mathcal{L} + J^i \varphi_i)\right] \quad . \tag{3.16}$$

A expressão (3.15) torna-se, então, um caso particular em que $J = 0$. Podemos, agora, tratar desse problema utilizando teoria de perturbação .

onde $M_{ji} = \{\Phi_j, \Phi_i\}_D$, $\det ||M_{ji}|| \neq 0$.

A passagem para a mecânica quântica será, agora, dada por (lembre-se que estamos considerando $\hbar = 1$)

$$[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = i\{q_i, q_j\}_{D'} = -i\{q_i, \Phi^m\}_D M^{-1}_{mn}\{\Phi^n, q_j\}_D \tag{3.22a}$$

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = i\{p_i, p_j\}_{D'} = -i\{p_i, \Phi^m\}_D M^{-1}_{mn}\{\Phi^n, p_j\}_D \tag{3.22b}$$

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\{q_i, p_j\}_{D'} = i\delta_{ij} - i\{q_i, \Phi^m\}_D M^{-1}_{mn}\{\Phi^n, p_j\}_D \ , \tag{3.22c}$$

com as condições

$$\det ||M_{mn}|| = \det ||\{\Phi_m, \Phi_n\}_D|| \neq 0 \quad e \quad \hat{\Phi}_i|\psi(q,p,t)> \approx 0 \ . \tag{3.22d}$$

Aplicando, como antes, o comutador de $\hat{q}$ e $\hat{p}$ (sem índices) em um autovetor de $\hat{q}$, obtemos a equação para $\hat{p}$

$$\hat{p}\hat{q}|q> = -i|q> -i\frac{\partial \Phi^m}{\partial p} M^{-1}_{mn} \frac{\partial \Phi^n}{\partial q}|q> \ . \tag{3.23}$$

Como podemos ver, a solução para $\hat{p}$ é bastante complicada. Vamos, então, considerar uma solução para a integral de trajetória e, depois, mostrar que ela equivale à solução física do problema. Vamos, primeiro, explicar o que chamamos de "solução física". Os vínculos de 1ª classe ϕ_i e os vínculos fixadores de gauge ψ_i definem um subespaço Γ_f do espaço de fase 2-n dimensional Γ (n é o número de coordenadas) cuja dimensão é $2(n-m)$. Esses $2m$ graus de liberdade são retirados devido às relações entre alguns dos momentos e coordenadas impostas pelos vínculos acima (já estamos considerando o espaço de fase Γ como sendo o espaço de fase em que os vínculos de 2ª classe são fortemente obedecidos). Portanto, teremos $(n-m)$ coordenadas e $(n-m)$ momentos independentes. Chamaremos essas variáveis do subespaço Γ_f de coordenadas físicas q_i^* e momentos físicos p_i^*, com $i = 1, \ldots, (n-m)$.

Devido à arbitrariedade na escolha dos vínculos fixadores de gauge e à condição (3.19), é sempre possível escolher um conjunto desses vínculos de tal forma que eles correspondam às m coordenadas não físicas do espaço de fase

$$q_i = (\psi_l, q_j^*) \ , \quad i = 1, \ldots, n \ ; \quad j = m+1, \ldots, n \ . \tag{3.24}$$

Isso se faz expandindo $Z(J^i)$ em termos dos J^i, obtendo

$$Z(J^i) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^D x_1 d^D x_2 \ldots d^D x_n J_1^i J_2^i \ldots J_n^i G^{(n)}(1,2,\ldots,n) \quad , \tag{3.17}$$

onde $J_k^i = J^i(x_k)$ e $G^{(n)}(1,2,\ldots,n) = G^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Os coeficientes da expansão são as funções de Green, dadas por

$$G^{(n)}(1,2,\ldots,n) = \frac{1}{i^n} \frac{\partial}{\partial J_1^i} \frac{\partial}{\partial J_2^i} \cdots \frac{\partial}{\partial J_n^i} Z(J) \Big|_{Z=0} \quad . \tag{3.18}$$

No espaço dos momentos, essas funções de Green representam amplitudes de transição .

3.1.3 Sistemas com vínculos

Vamos tratar, agora, de sistemas que apresentam vínculos e que, por isso, obedecem a outras relações regidas pelos parênteses de Dirac. Nosso procedimento basear-se-á na formulação proposta por Fradkin e Vilkovisky[9]. Por simplicidade (e para manter as fórmulas legíveis), vamos considerar sistemas onde os vínculos de 2ª classe foram extintos via parênteses de Dirac e onde introduzimos vínculos fixadores de gauge ψ_i que, além da exigência (2.38)

$$\det ||\{\phi_i, \psi_j\}_D|| \neq 0 \quad ,$$

têm ainda a nova exigência de que

$$\{\psi_i, \psi_j\}_D = 0 \quad . \tag{3.19}$$

Podemos, então, definir os vetores de vínculos

$$\Phi_i \equiv \begin{pmatrix} \phi_i \\ \psi_i \end{pmatrix} \quad , \tag{3.20}$$

em termos dos quais os novos parênteses de Dirac (2.37) podem ser escritos como

$$\{A, B\}_{D'} = \{A, B\}_D - \{A, \Phi^i\}_D M_{ij}^{-1} \{\Phi^j, B\}_D \quad , \tag{3.21}$$

Vamos, então, escrever os momentos do espaço de fase em função dos momentos físicos e dos momentos não-físicos p_l, que são os momentos canonicamente conjugados aos vínculos ψ_l

$$p_i = (p_l, p_j^*) \quad . \tag{3.25}$$

Em termos dessas variáveis, a eq. (2.38) fica

$$\det \left\| \frac{\partial \phi_k}{\partial p_l} \right\| \neq 0 \quad , \quad k, l = 1, \ldots, m \quad , \tag{3.26}$$

de modo que os vínculos dependerão dos momentos físicos p_l. Usando a equação

$$\phi_k(q^i, p_i) \approx 0 \quad ,$$

podemos resolvê-la em termos dos momentos não-físicos p_l, o que, mediante a condição $\psi_l \approx 0$, resulta em

$$p_l \approx p_l(q_j^*, p_j^*) \quad . \tag{3.27}$$

Portanto, a mesma física descrita pelo espaço de fase com as equações de vínculos pode ser descrita em termos das variáveis físicas. Chegamos, então, à conclusão de que a integral de trajetória escrita em termos das variáveis físicas deve ser dada por uma expressão semelhante à expressão final (3.14)

$$Z = N \int \mathcal{D}q_i^* \mathcal{D}p_i^* \ \exp\left\{ i \int_{t_1}^{t_2} dt [p^{*i} \dot{q}_i^* - H^*(p^{*i}, q_i^*)] \right\} \quad , \tag{3.28}$$

$i = 1, \ldots, (n-m)$.

A expressão em termos das variáveis do espaço de fase deve ter embutida as equações para os vínculos . Isso se consegue mediante a introdução de funções delta na integral de trajetória. Devemos, também, ter a condição (3.26), que resultará na eq. (3.27).

Consideremos, então uma solução do tipo

$$Z = N \int \mathcal{D}q_i \mathcal{D}p_i \prod_{i,l} \delta(\phi_l)\delta(\psi_l) \det ||\{\phi_j, \psi_k\}||$$

$$\exp\left\{ i \int_{t_1}^{t_2} dt [p^i \dot{q}_i - H(q^i, p_i)] \right\} \quad , \tag{3.29}$$

$i = 1, \ldots, n \;\; ; \;\; j, k, l = 1, \ldots, m.$

Note que nós escrevemos a condição do determinante em termos dos parênteses de Poisson, em virtude da presença de vínculos de 1ª classe, pois estes têm parênteses de Poisson nulos com todos os vínculos de 2ª classe, não havendo, assim, diferença entre os parênteses de Dirac e de Poisson nesse caso.

Podemos mostrar a equivalência da expressão (3.29) com (3.28) separando em (3.29) as variáveis físicas das não-físicas

$$Z = N \int \mathcal{D}q_l \mathcal{D}p_l \mathcal{D}q_j^* \mathcal{D}p_j^* \prod_{t,l} \delta(\phi_l)\delta(\psi_l) \det ||\{\phi_j, \psi_k\}||$$

$$\exp\left\{\int_{t_1}^{t_2} dt[p^{*j}\dot{q}_j^* + p^l \dot{q}_l - H(q^{*j}, p_j^*, q^l, p_l)]\right\} \quad .$$

Escolhendo os vínculos fixadores de gauge da maneira mostrada em (3.24), temos

$$Z = N \int \mathcal{D}q_l \mathcal{D}p_l \mathcal{D}q_j^* \mathcal{D}p_j^* \prod_{t,l} \delta(\phi_l)\delta(\psi_l) \det \left|\left| \frac{\partial \phi_j}{\partial p^k} \right|\right|$$

$$\exp\left\{i \int_{t_1}^{t_2} dt[p^{*j}\dot{q}_j^* + p^l \dot{q}_l - H(q^{*j}, p_j^*, q^l, p_l)]\right\} =$$

$$= N \int \mathcal{D}q_l \mathcal{D}p_l \mathcal{D}q_j^* \mathcal{D}p_j^* \prod_{t,l} \delta(q_l)\delta[p_l - p_l(q^{*j}.p_j^*)]$$

$$\exp\left\{i \int_{t_1}^{t_2} dt[p^{*j}\dot{q}_j^* + p^l \dot{q}_l - H(q^{*j}, p_j^*, q^l, p_l)]\right\}$$

Integrando em q_l e em p_l, chegamos à expressão (3.28). Mostramos, então, que a integral de trajetória para sistemas com vínculos é dada pela expressão (3.29).

Exponenciando os deltas e o determinante, podemos escrever (3.29) em termos das variáveis q^i, p_i, dos multiplicadores de Lagrange λ_l, p_l e de variáveis anticomutativas $\eta_i, \bar{\eta}_j$, que são chamadas de *fantasmas de Fadeev-Popov*[10]

$$Z = N \int \mathcal{D}q^i \mathcal{D}p_i \mathcal{D}\lambda^l \mathcal{D}p_l \mathcal{D}\eta_j \mathcal{D}\bar{\eta}_k$$

$$\exp\left[i \int_{t_1}^{t_2} dt(p^i \dot{q}_i - H_c - \lambda^l \phi_l - p^l \psi_l - \eta^j \{\phi_j, \psi_k\} \bar{\eta}^k)\right] \quad . \qquad (3.30)$$

A equivalência à expressão (3.29) pode ser mostrada integrando-se nos multiplicadores de Lagrange, obtendo-se, assim, as funções delta dos vínculos e efetuando as integrações nos fantasmas, obtendo, assim, o determinante.

3.2 Invariância por Osp(1,1|2) e Quantização BRST-BFV

Notamos na expressão (3.30) a presença dos multiplicadores de Lagrange λ_l e p_l dos vínculos iniciais ϕ_l e dos vínculos fixadores de gauge ψ_l. Poderíamos ficar tentados a promover esses multiplicadores de Lagrange a variáveis do espaço de fase fazendo com que uns sejam os momentos canonicamente conjugados aos outros, de forma que os parênteses de Dirac entre os dois sejam

$$\{\lambda_i, p_j\}_D = \delta_{ij} \quad . \tag{3.31}$$

Essa promoção tem que vir acompanhada da condição de que os momentos se anulem fracamente, isto é, devem ser considerados nulos a fim de obter as equações de movimento

$$p_l \approx 0 \quad . \tag{3.32}$$

Sendo n o número de coordenadas iniciais do espaço de fase e m o número de vínculos de $1^{\underline{a}}$ classe, essa promoção dos multiplicadores de Lagrange a variáveis do espaço de fase nos custou um aumento no número de dimensões deste. A dimensão do espaço de fase inicial Γ era $2n$, e a do novo espaço de fase aumentado Γ_a é $2(n+m)$. No entanto, vimos na seção anterior que o número de dimensões do espaço de fase físico Γ_f é $2(n-m)$. Isso nos mostra que estamos com $4m = 2m + 2m$ dimensões sobrando. Temos, então, que adicionar ao nosso espaço de fase um conjunto de $2m$ variáveis (e seus respectivos momentos canonicamente conjugados) que tenham o efeito de "dimensões negativas".

Um sistema com essas características nos é fornecido a partir do mecanismo de Parisi-Sourlas[11], que foi inicialmente utilizado em quantização estocástica, tendo sido depois adaptado para sistemas que apresentam vínculos por Aratyn, Ingermanson e Niemi[12]. Consideramos um superespaço Σ de $(D+2)$ dimensões com coordenadas $y^\alpha = (x^\mu, \theta, \bar{\theta})$, sendo que x^μ são D coordenadas reais e $\theta, \bar{\theta}$, variáveis de Grassmann. Vamos definir a norma

$|y|^2$ do vetor y^α como sendo

$$|y|^2 = y^\alpha y_\alpha = g_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta = x^\mu x_\mu + \frac{4}{\Delta}\bar{\theta}\theta \quad , \tag{3.33}$$

onde Δ é um parâmetro qualquer. Da definição acima, devemos ter o tensor métrico na forma

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} \\ g_{\theta\bar{\theta}} &= -g_{\bar{\theta}\theta} = -\frac{2}{\Delta} \\ g_{\mu\theta} &= g_{\mu\bar{\theta}} = g_{\theta\theta} = g_{\bar{\theta}\bar{\theta}} = 0 \quad , \end{aligned} \tag{3.34}$$

sendo $\eta_{\mu\nu}$ a métrica de um espaço de Minkowski com D dimensões.

Vamos definir o grupo Osp(D|2) como o grupo de rotações que deixa a norma (3.33) invariante. Esse grupo é chamado de grupo ortossimplético e contém o grupo de rotações O(D) que deixam $x^\mu x_\mu$ invariante e o grupo simplético Sp(2), que deixa $\bar{\theta}\theta$ invariante. Além disso, esse grupo também gera transformações de supersimetria da forma

$$\begin{aligned} x^\mu \to x'^\mu &= x^\mu + \frac{2}{\Delta} a^\mu (\bar{\epsilon}\theta + \bar{\theta}\epsilon) \\ \theta \to \theta' &= \theta - \sqrt{\Delta} a^\mu x_\mu \epsilon \\ \bar{\theta} \to \bar{\theta}' &= \bar{\theta} - \sqrt{\Delta} a^\mu x_\mu \bar{\epsilon} \quad , \end{aligned} \tag{3.35}$$

onde os a^μ são D números bosônicos e $\epsilon, \bar{\epsilon}$ são números fermiônicos. A superálgebra de Lie dos geradores do grupo Osp(D|2) é deduzida das invariâncias da norma e é dada por

$$\begin{aligned} [R^{\alpha\beta}, R^{\gamma\delta}\} = &-g^{\alpha\delta} R^{\gamma\beta} + (-1)^{P_\alpha P_\delta} g^{\alpha\gamma} R^{\delta\beta} + (-1)^{P_\alpha P_\delta} g^{\beta\delta} R^{\gamma\alpha} - \\ &-(-1)^{P_\alpha P_\beta} (-1)^{P_{\beta\delta}} g^{\beta\gamma} R^{\delta\alpha} \quad , \end{aligned} \tag{3.36}$$

onde [, } é o comutador generalizado dado por

$$[A, B\} = AB - (-1)^{P_A P_B} BA \quad . \tag{3.37}$$

Da expressão (3.34), podemos verificar que todos os geradores do tipo

$$Q^{\mu\nu} = R^{\mu\theta} + iR^{\nu\theta} \quad \text{ou} \quad \bar{Q}^{\mu\nu} = R^{\mu\bar{\theta}} + iR^{\nu\bar{\theta}} \quad , \quad \mu \neq \nu \quad , \tag{3.38}$$

são nilpotentes, isto é,

$$[Q^{\mu\nu}, Q^{\mu\nu}\} = 0 \ . \tag{3.39}$$

Vamos, em analogia com o grupo de rotações comuns, tomar a seguinte representação para os elementos do grupo Osp(D|2)

$$R^{\alpha\beta} = (-1)^{P_\alpha P_\beta} y^\alpha \partial^\beta - y^\beta \partial\alpha \tag{3.40}$$

onde

$$\partial_\alpha = (\partial_\mu, \partial_\theta, \partial_{\bar\theta}) \ \ e \ \ \partial_\alpha = g_{\alpha\beta}\partial^\beta \ . \tag{3.41}$$

Se efetuarmos a integração de uma função $F(x^\mu, \theta, \bar\theta)$ que depende apenas da norma $|y|^2$, isto é, é invariante por transformações Osp(D|2), de acordo com as definições sobre integração em variáveis fermiônicas, obtemos[12]

$$\int d^D x d\bar\theta d\theta \ F(|y|^2) = \int d^D x d\bar\theta d\theta \ F\left(x^2 + \frac{4}{\Delta}\bar\theta\theta\right) =$$

$$= \frac{\Delta}{4\pi}\int d^{D-2}x \ F(x^2) - F(\infty) \ . \tag{3.42}$$

Tomando $F(\infty) = 0$, chegamos ao resultado de que as variáveis anticomutantes $\theta, \bar\theta$ têm o efeito de reduzir a dimensão de integração , como se tivessem dimensões negativas. Isso é justamente o que estávamos procurando para resolver o nosso problema de dimensão do espaço de fase para sistemas com vínculos !

Antes de compararmos a invarância por super-rotações com sistemas que apresentam vínculos, vamos considerar um problema que aparece na integral (3.42) quando consideramos as transformações de supersimetria (3.35) escolhendo $\epsilon = 0$ e $\bar\epsilon$ e a^μ de tal forma que

$$\begin{array}{lllll} x^\mu & \rightarrow & x'^\mu & = & x^\mu + \frac{\Psi}{N}\eta^{\mu\nu}\theta \\ \theta & \rightarrow & \theta' & = & \theta \\ \bar\theta & \rightarrow & \bar\theta' & = & \bar\theta + \frac{\Psi}{N}\frac{\Delta}{2}x^\nu \ , \end{array}$$

onde Ψ é uma função fermiônica arbitrária e N é uma constante bosônica.

Essas transformações podem ser expressas como as transformações geradas por um operador nilpotente $R^{\nu\theta}$

$$\begin{array}{lllll} x^\mu & \rightarrow & x'^\mu & = & x^\mu + [x^\mu, R^{\nu\theta}\}\frac{\Psi}{N} \\ \theta & \rightarrow & \theta' & = & \theta \\ \bar\theta & \rightarrow & \bar\theta' & = & \bar\theta + [\bar\theta, R^{\nu\theta}\}\frac{\Psi}{N} \ . \end{array}$$

Considerando a nilpotência de $R^{\nu\theta}$

$$[[\Psi, R^{\nu\theta}\}, R^{\nu\theta}\} = 0 \quad , \tag{3.44}$$

o jacobiano dessa mudança de coordenadas é dado por

$$J = 1 - \frac{1}{N}[\Psi, R^{\nu\theta}\} \quad , \tag{3.45}$$

o que indica que a medida em (3.42) não é invariante pela transformação (3.43)

$$\int d^D x d\bar{\theta} d\theta \; F(|y|^2) \rightarrow \int d^D x d\bar{\theta} d\theta (1 - [\Psi, R^{\nu\theta}\})F(|y|^2) \quad .$$

Efetuando essa transformação um número N de vezes, o jacobiano torna-se

$$J_N = \left(1 - \frac{1}{N}[\Psi, R^{\nu\theta}\}\right)^N \quad .$$

Se tomarmos o limite de $N \rightarrow \infty$, temos, então, o jacobiano

$$J = \exp(-[\Psi, R^{\nu\theta}\}) \quad . \tag{3.46}$$

Substituindo na integral (3.42), temos, então, que

$$\int d^D x d\bar{\theta} d\theta \; F(|y|^2) = \int d^D x d\bar{\theta} d\theta e^{-[\Psi, R^{\nu\theta}\}} F(|y|^2) \quad , \tag{3.47}$$

o que mostra que a integral da direita não depende da função arbitrária Ψ.

Após esses resultados gerais, vamos tentar estabelecer uma analogia entre os elementos do superespaço definido em (3.33) e as variáveis do espaço de fase de sistemas que apresentam vínculos. Vamos começar particularizando o superespaço Σ para quando tivermos $D = 2$ e utilizando como coordenadas bosônicas as coordenadas do cone de luz x_+ e x_-. Nesse caso, e escolhendo $\Delta = 2$, a métrica é dada por

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.48}$$

Temos, então, um superespaço cujos elementos são dados por $y^i_\alpha = (x_+, x_-, \theta, \bar{\theta})$. A esses elementos, nós podemos adicionar os momentos canonicamente conjugados $p^\alpha_i = (p_-, p_+, \bar{\pi}, \pi)$. Note que introduzimos um índice extra i, que nos será útil mais tarde. Essas variáveis satisfazem à relação de comutação

$$\{y^\alpha_i, p_{i\beta}\} = \delta^\alpha_\beta \quad . \tag{3.49}$$

Em termos dessas coordenadas, a representação dos geradores da álgebra de Lie do grupo Osp(2|2) fica

$$R^{\alpha\beta}_i = y^\beta_i p^\alpha_i - (-1)^{\epsilon_\alpha \epsilon_\beta} y^\alpha_i p^\beta_i \quad . \tag{3.50}$$

Em termos das componentes, os geradores ficam

$$\begin{array}{lllll}
R^{++}_i & = & R^{--}_i & = & 0 \\
R^{+-}_i & = & -R^{-+}_i & = & x_- p_+ - x_+ p_- \\
R^{+\theta}_i & = & -R^{\theta+}_i & = & \theta p_+ - x_+ \pi \\
R^{+\bar{\theta}}_i & = & -R^{\bar{\theta}+}_i & = & \bar{\theta} p_+ - x_+ \bar{\pi} \\
R^{-\theta}_i & = & -R^{\theta-}_i & = & \theta p_- - x_- \pi \\
R^{-\bar{\theta}}_i & = & R^{\bar{\theta}-}_i & = & \bar{\theta} p_- - x_- \bar{\pi} \\
R^{\theta\theta}_i & = & 2\theta\pi & & \\
R^{\bar{\theta}\bar{\theta}}_i & = & 2\bar{\theta}\bar{\pi} & & \\
R^{\theta\bar{\theta}}_i & = & R^{\bar{\theta}\theta}_i & = & \bar{\pi}\theta + \bar{\theta}\pi \quad .
\end{array}$$

Quatro desses geradores $(R^{-\theta}_i, R^{-\bar{\theta}}_i, R^{+\theta}_i, R^{+\bar{\theta}}_i)$ são nilpotentes, e as transformações geradas por eles dão origem à invariância descrita pela eq. (3.47).

Vamos, agora, supor que os vínculos de 1ª classe do nosso sistema obedeçam à seguinte álgebra

$$\{\phi_i, \phi_j\}_D = 0 \quad . \tag{3.52}$$

Isso não é sempre verdade, mesmo para vínculos de 1ª classe, pois os parênteses de Dirac podem resultar em combinações lineares de outros vínculos de 1ª classe, que são fracamente nulas (ver apêndice A, sessão A.2).

Também vamos supor que estamos escolhendo vínculos fixadores de gauge ψ_i de forma que

$$\{\psi_i, \psi_j\}_D = 0$$

$$\{\psi_i, \phi_j\}_D = \delta_{ij} \tag{3.53}$$
$$\det ||\{\phi_i, \psi_j\}_D|| \neq 0 \ .$$

Notamos que os vínculos de 1ª classe funcionam como momentos canonicamente conjugados aos vínculos fixadores de gauge.

Podemos, então, relacionar os vínculos e seus multiplicadores de Lagrange com as coordenadas reais do superespaço Σ. Às coordenadas grassmanianas, nós vamos associar variáveis fantasmas $(\eta_i, \mathcal{P}_i)$ e seus respectivos momentos canonicamente conjugados $(\bar{\mathcal{P}}^i, \bar{\eta}^i)$. Temos, então,

$$y_i^\alpha = (x_+, x_-, \theta, \bar{\theta}) \equiv (\psi_i, -\pi_i, \eta_i, \bar{\eta}_i)$$
$$p_{i\alpha} = (p_-, p_+, \bar{\pi}_i, \pi_i) \equiv (\phi_i, \lambda_i, \bar{\mathcal{P}}_i, \mathcal{P}_i) \ . \tag{3.54}$$

Substituindo essas variáveis nas representações dos geradores da álgebra do grupo Osp(2|2), obtemos as seguintes expressões

$$\begin{array}{lllll}
R_i^{++} & = & R_i^{--} & = & 0 \\
R_i^{+-} & = & -R_i^{-+} & = & -\psi_i\phi_i - \pi_i\lambda_i \\
R_i^{+\theta} & = & -R_i^{\theta+} & = & \eta_i\lambda_i - \mathcal{P}_i\psi_i \\
R_i^{+\bar{\theta}} & = & -R_i^{\bar{\theta}+} & = & \bar{\eta}_i\lambda_i + \bar{\mathcal{P}}_i\psi_i \\
R_i^{-\theta} & = & -R_i^{\theta-} & = & \eta_i\phi_i + \mathcal{P}_i\pi_i \\
R_i^{-\bar{\theta}} & = & R_i^{\bar{\theta}-} & = & \bar{\eta}_i\phi_i - \bar{\mathcal{P}}_i\pi_i \\
R_i^{\theta\theta} & = & 2\eta_i\mathcal{P}_i & & \\
R_i^{\bar{\theta}\bar{\theta}} & = & 2\bar{\mathcal{P}}_i\bar{\eta}_i & & \\
R_i^{\theta\bar{\theta}} & = & R_i^{\bar{\theta}\theta} & = & \bar{\eta}_i\mathcal{P}_i + \bar{\mathcal{P}}_i\eta_i \ .
\end{array}$$

Para o caso de mais de um vínculo, devemos efetuar a somatória sobre os índices, de forma que vamos definir

$$R^{\alpha\beta} \equiv \sum_{i=1}^{m} R_i^{\alpha\beta} \ , \tag{3.56}$$

onde m é o número de vínculos de 1ª classe da teoria.

Um dos quatro geradores nilpotentes, $R^{-\theta}$, pode ser identificado com a carga de BRST, introduzida por Becchi, Rouet, Stora[13] e, independentemente, por Tyutin[14].

Se considerarmos, agora, uma integral de trajetória contendo uma ação efetiva invariante por transformações Osp(2|2) (ou apenas transformações

geradas pelas cargas de BRST), temos , de acordo com a eq. (3.47), que a integral de trajetória pode ter a forma da integral do lado direito da equação, sendo, então, independente de uma função Ψ fermiônica qualquer.

Vamos escrever a integral de trajetória para um sistema com m vínculos de 1ª classe ϕ_i como sendo dada por

$$Z = N \int \mathcal{D}q_i \mathcal{D}\pi_i \mathcal{D}\lambda_j \mathcal{D}p_j \mathcal{D}\eta_j \mathcal{D}\bar{\mathcal{P}}_j \mathcal{D}\mathcal{P}_j \mathcal{D}\bar{\eta}_j \ \exp(iS_{ef}) \ , \tag{3.57}$$

onde S_{ef} é chamada de ação efetiva, que é dada por

$$S_{ef} = \int_{t_1}^{t_2} dt(p^i \dot{q}_i + \pi^j \dot{\lambda}_j + \bar{\mathcal{P}}^j \dot{\eta}_j + \bar{\eta}^j \dot{\mathcal{P}}_j - H_c - \{\Psi, Q\}_D) \ ,$$

sendo Ψ uma função fermiônica qualquer.

Essa ação efetiva tem que ser invariante por transformações geradas pela carga de BRST, a fim de que ela seja independente da função Ψ (que será chamada de função fixadora de gauge). Essa invariância é conhecida por Teorema de Fradkin e Vilkovisky[15].

Para simplificar a notação , vamos definir a lagrangiana efetiva como sendo dada por

$$S_{ef} = \int_{t_1}^{t_2} dt \ L_{ef} \tag{3.58}$$

e a lagrangiana efetiva cinética

$$L_{ef}^k = p^i \dot{q}_i + \pi^j \dot{\lambda}_j + \bar{\mathcal{P}}^j \dot{\eta}_j + \bar{\eta}^j \dot{\bar{\mathcal{P}}}_j \ . \tag{3.59}$$

A equivalência dessa formulação à que foi considerada na seção anterior se faz mostrando que se pode escolher uma função fixadora de gauge Ψ de forma que cheguemos à forma da integral (3.29).

Para isso, vamos escolher a seguinte função fixadora de gauge[9]

$$\Psi = \psi^i \bar{\eta}_i + \frac{1}{\varepsilon} \lambda^i \bar{\mathcal{P}}_i \ ,$$

onde ε é uma constante arbitrária.

Temos, então, que

$$\{\Psi, Q\}_D = \eta^i \{\phi_i, \psi_j\}_D \bar{\eta}^j + \pi^i \psi_i + \frac{1}{\varepsilon} \lambda^i \phi_i + \frac{1}{\varepsilon} \bar{\mathcal{P}}^i \mathcal{P}_i \ ,$$

e a integral (3.57) fica, agora,

$$Z = N \int \mathcal{D}q_i \mathcal{D}\pi_i \mathcal{D}\lambda_j \mathcal{D}p_j \mathcal{D}\eta_j \mathcal{D}\bar{\mathcal{P}}_j \mathcal{D}\mathcal{P}_j \mathcal{D}\bar{\eta}_j \ \exp\left\{ \int_{t_1}^{t_2} dt \left[p^i \dot{q}_i + \pi^j \dot{\lambda}_j + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \bar{\mathcal{P}}^j \left(\dot{\eta}_j - \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{P}_j \right) + \bar{\eta}^j \dot{\mathcal{P}}_j - \pi^j \psi_j - \frac{1}{\varepsilon} \lambda^j \phi_j - H_c - \eta^j \{\phi_j, \psi_k\}_D \bar{\eta}^k \right] \right\} \ .$$

Fazemos, então, uma transformação de coordenadas

$$\begin{array}{lcl} \lambda_j & \rightarrow & \varepsilon \lambda_j \\ \mathcal{P}_j & \rightarrow & \varepsilon \mathcal{P}_j \ , \end{array}$$

cujo jacobiano é igual a um ($J = 1$). Depois, fazemos $\varepsilon \rightarrow 0$ (como a integral não depende da função Ψ, ela pode ser divergente), obtendo

$$Z = N \int \mathcal{D}q_i \mathcal{D}\pi_i \mathcal{D}\lambda_j \mathcal{D}p_j \mathcal{D}\eta_j \mathcal{D}\bar{\mathcal{P}}_j \mathcal{D}\mathcal{P}_j \mathcal{D}\bar{\eta}_j \ \exp\left\{ \int_{t_1}^{t_2} dt \left[p^i \dot{q}_i + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \bar{\mathcal{P}}^j (\dot{\eta}_j - \mathcal{P}_j) - \lambda^j \phi_j - \pi^j \psi_j - H_c - \eta^j \{\phi_j, \psi_k\}_D \bar{\eta}^k \right] \right\} \ .$$

Integrando em $\bar{\mathcal{P}}_j$, obtemos

$$Z = N \int \mathcal{D}q_i \mathcal{D}\pi_i \mathcal{D}\lambda_j \mathcal{D}p_j \mathcal{D}\eta_j \mathcal{D}\bar{\mathcal{P}}_j \mathcal{D}\mathcal{P}_j \mathcal{D}\bar{\eta}_j \ \delta(\dot{\eta}_j - \mathcal{P}_j)$$

$$\exp\left[\int_{t_1}^{t_2} dt \left(p^i \dot{q}_i - \lambda^j \phi_j - \pi^j \psi_j - H_c - \eta^j \{\phi_j, \psi_k\}_D \bar{\eta}^k \right) \right] \ .$$

Podemos, agora, integrar em $\mathcal{P}_j$, obtendo, a integral (3.30). Está mostrada, então, a consistência de (3.57) como a integral de trajetória para sistemas com vínculos.

Resta-nos, agora, construir os geradores de transformações Osp(2|2) (e, particularmente, de transformações BRST) para o caso em que, ao invés da álgebra (3.52), os vínculos de 1ª classe obedecem à algebra mais geral

$$\{\phi_i, \phi_j\}_D = U_k^{ij} \phi^k \ . \tag{3.60}$$

Para isso, vamos supor que existam certas variáveis G_i que obedeçam à álgebra (3.52)

$$\{G_i, G_j\} = 0 \tag{3.61}$$

e vamos fazer as suposições de que os fatores U_k^{ij} são constantes (o que caracteriza uma álgebra de Lie) e de que ϕ_i difere de G_i apenas infinitesimalmente

$$\phi_i = G_i + \varepsilon_{ij} G^j \quad . \tag{3.62}$$

Para qualquer teoria cujos vínculos formam uma álgebra não-abeliana, é sempre possível[18] escolher um gerador de transformações canônicas que relaciona essa teoria a uma teoria em que os vínculos formam uma álgebra abeliana.

Podemos escrever todos os geradores da álgebra Osp(2|2) considerando G_i no lugar onde estava ϕ_i

$$\begin{array}{lllll}
R_i^{++} & = & R_i^{--} & = & 0 \\
R_i^{+-} & = & -R_i^{-+} & = & -\psi_i G_i - \pi_i \lambda_i \\
R_i^{+\theta} & = & -R_i^{\theta+} & = & \eta_i \lambda_i - \mathcal{P}_i \psi_i \\
R_i^{+\bar\theta} & = & -R_i^{\bar\theta+} & = & \bar\eta_i \lambda_i + \bar{\mathcal{P}}_i \psi_i \\
R_i^{-\theta} & = & -R_i^{\theta-} & = & \eta_i G_i + \mathcal{P}_i \pi_i \\
R_i^{-\bar\theta} & = & R_i^{\bar\theta-} & = & \bar\eta_i G_i - \bar{\mathcal{P}}_i \pi_i \\
R_i^{\theta\theta} & = & 2\eta_i \mathcal{P}_i & & \\
R_i^{\bar\theta\bar\theta} & = & 2\bar{\mathcal{P}}_i \bar\eta_i & & \\
R_i^{\theta\bar\theta} & = & R_i^{\bar\theta\theta} & = & \bar\eta_i \mathcal{P}_i + \bar{\mathcal{P}}_i \eta_i \quad .
\end{array}$$

Considerando, agora, uma transformação canônica unitária gerada por

$$\varphi = -\eta^i \varepsilon_{ij} \bar{\mathcal{P}}^j + \mathcal{P}^i \varepsilon_{ij} \bar\eta^j + p^i \varepsilon_{ij} \lambda^j + \eta^i \bar\eta^j \lambda^k \{G_i, \varepsilon_{jk}\}_D \tag{3.63}$$

até a primeira ordem em ε_i^j, alguns dos geradores tornam-se

$$\begin{array}{lll}
R^{-\theta} & \rightarrow & e^{-\varphi} R^{-\theta} e^{\varphi} = R^{-\theta} + \{R^{-\theta}, \varphi\}_D = \eta^i \phi_i + p^i \mathcal{P}_i + \frac{1}{2} U_{ij}^k \eta^i \eta^j \bar{\mathcal{P}}_k \\
R^{-\bar\theta} & \rightarrow & \bar\eta^i \phi_i - \bar{\mathcal{P}}^i \lambda_i + \frac{1}{2} U_{ij}^k \bar\eta^i \bar\eta^j \mathcal{P}_k + U_{ij}^k \bar\eta^i \eta^j \bar{\mathcal{P}}_k - U_{ij}^k \bar\eta^i \lambda^j p_k \\
R^{\theta\bar\theta} & \rightarrow & \bar\eta^i \mathcal{P}_i + \bar{\mathcal{P}}^i \eta_i \\
R^{\theta\theta} & \rightarrow & 2\eta^i \mathcal{P}_i - U_{ij}^k \eta^i \eta^j p_k \\
R^{\bar\theta\bar\theta} & \rightarrow & 2\bar{\mathcal{P}}^i \bar\eta_i + U_{ij}^k \bar\eta^i \bar\eta^j p_k \quad .
\end{array}$$

Portanto, a carga de BRST, de uma forma mais geral, é dada por

$$Q = \eta^i \phi_i + p^i \mathcal{P}_i + \frac{1}{2} U_{ij}^k \eta^i \eta^j \bar{\mathcal{P}}_k \quad . \tag{3.64}$$

Podemos também associar outros dos geradores da álgebra Osp(2|2) a operadores que são utilizados em teorias de gauge, como a carga de anti-BRST, dada pelo gerador $R^{-\bar{\theta}}$ e o operador número fantasma $R^{\theta\bar{\theta}}$.

No capítulo seguinte introduziremos definições mais rigorosas (generalizando para o caso de vínculos fermiônicos) da teoria BRST-BFV, introduzindo também o método de quantização para sistemas redutíveis.

Capítulo 4

SISTEMAS REDUTÍVEIS

O método de quantização BRST-BFV para sistemas redutíveis foi desenvolvido recentemente por Batalin, Fradkin e Vilkovisky[30] no formalismo lagrangiano e adaptado para o formalismo hamiltoniano por Henneaux[18]. Esse desenvolvimento se deu como uma resposta às dúvidas lançadas por diversos artigos[21] (entre os quais se destacam os que tratam do tensor antissimétrico) sobre a contagem correta de fantasmas dos fantasmas.

Começaremos este capítulo expondo uma formulação mais rigorosa e geral da integração BRST-BFV para sistemas irredutíveis. Introduziremos, depois, a noção de sistemas redutíveis e mostraremos como se efetua a quantização via integral de trajetória desses sistemas.

4.1 Quantização BRST-BFV de sistemas irredutíveis

O método BRST-BFV de quantização de sistemas com vínculos visto até agora exige três postulados[15]: 1) a ação clássica tem que ser estacionária em relação às variáveis do espaço de fase (o que nos leva às equações de movimento); 2) irredutibilidade e 3) completeza.

O postulado da irredutibilidade implica em que os vínculos da teoria sejam linearmente independentes no ponto estacionário da ação e o da completeza requer que a invariância da ação por transformações de gauge seja totalmente devida a certas combinações lineares dos vínculos de 1ª classe e de suas derivadas espaciais.

Vamos supor que tenhamos inicialmente n coordenadas φ^i do espaço de fase inicial Γ (por coordenadas podemos também entender campos) e n momentos canonicamente conjugados a elas π_i. Essas variáveis definem um espaço de fase de $2n$ dimensões e podem ser reais ou de Grassmann.

A paridade de Grassmann dessas variáveis é dada por

$$P(\varphi^i) = P(\pi_i) = 0 \tag{4.1a}$$

se φ^i for real e

$$P(\varphi^i) = P(\pi_i) = 1 \tag{4.1b}$$

se φ^i for grassmaniana. Essa função tem a seguinte propriedade

$$P(AB) = P(A) + P(B) \quad . \tag{4.2}$$

Suponhamos a existência de m_0 vínculos de 1ª classe ϕ_j cuja álgebra é dada por

$$\{\phi_i, \phi_j\}_D = U^k_{ij}\phi_k \quad , \tag{4.3}$$

sendo U^k_{ij} chamadas de funções de estrutura.

Para cada um desses vínculos, nós adicionamos ao espaço de fase um par (λ^j, p_j), onde λ^j são os multiplicadores de Lagrange associados aos vínculos e p_j são os momentos canonicamente conjugados a estes

$$\{\lambda^j, p_k\}_D = \delta^j_k \quad . \tag{4.4}$$

As paridades de Grassmann dessas novas variáveis são dadas por

$$P(\lambda^j) = P(p_j) = P(\phi_j) \quad . \tag{4.5}$$

A fim de preservarmos as equações de movimento, devemos impor a seguinte condição aos momentos canonicamente conjugados aos multiplicadores de Lagrange

$$p_j \approx 0 \quad . \tag{4.6}$$

Essa condição nos permitiria concluir que acabamos dobrando o número de vínculos da teoria quando adicionamos a ela essas variáveis extras.

Também adicionamos, para cada vínculo de 1ª classe ϕ^j, um fantasma η^j e seu momento canonicamente conjugado $\bar{\mathcal{P}}_j$. Fazemos o mesmo para os momentos canonicamente conjugados aos multiplicadores de Lagrange, adicionando mais um par $(\mathcal{P}, \bar{\eta})$

$$\{\eta^j, \bar{\mathcal{P}}_k\}_D = \{\mathcal{P}^j, \bar{\eta}_k\}_D = \delta^j_k \quad . \tag{4.7}$$

Essas variáveis fantasmas devem ter paridades opostas às dos vínculos aos quais estão associadas

$$P(\eta^j) = P(\bar{\mathcal{P}}_j) = P(\mathcal{P}^j) = P(\bar{\eta}_j) = P(\phi^j) + 1 \quad . \tag{4.8}$$

É conveniente, ainda, que introduzamos o conceito de *número fantasma*. A cada uma das variáveis do espaço de fase expandido nós associaremos um número fantasma dado por $gh(var.)$

$$\begin{aligned} gh(\varphi^i) &= gh(\pi_i) = 0 \\ gh(\phi^j) &= gh(\lambda^j) = gh(p_j) = 0 \\ gh(\eta^j) &= gh(\mathcal{P}^j) = 1 \\ gh(\bar{\mathcal{P}}_j) &= gh(\bar{\eta}_j) = -1 \end{aligned} \tag{4.9}$$

com a seguinte propriedade:

$$gh(AB) = gh(A) + gh(B) \quad . \tag{4.10}$$

Após essas definições , vamos considerar que a integral de trajetória para sistemas com vínculos e que obedecem aos três postulados anteriormente enunciados seja dada por

$$Z = \int \mathcal{D}\varphi^i \mathcal{D}\pi_i \mathcal{D}\lambda^j \mathcal{D}p_j \mathcal{D}\eta^j \mathcal{D}\bar{\mathcal{P}}_j \mathcal{D}\mathcal{P}^j \mathcal{D}\bar{\eta}_j \quad \exp\left(iS_{ef}\right) \quad , \tag{4.11a}$$

onde S_{ef} é a ação efetiva

$$S_{ef} = \int d^D x \left(\pi^i \dot{\varphi}_i + p^j \dot{\lambda}_j + \bar{\mathcal{P}}^j \dot{\eta}_j + \bar{\eta}^j \dot{\mathcal{P}}_j - \mathcal{H}_c - \{\Psi, Q\}_D \right) \quad , \qquad (4.11b)$$

integrada em D dimensões. Ψ é uma função grassmaniana qualquer das variáveis do espaço de fase chamada de *função fixadora de gauge* e Q é a carga de BRST, da qual se exige as seguintes propriedades:

1) ela tem que ser nilpotente

$$\{Q, Q\}_D = 0 \quad ; \qquad (4.12a)$$

2) deve ter número fantasma igual a 1

$$gh(Q) = 1 \quad \text{e} \qquad (4.12b)$$

3) a ação efetiva tem que ser invariante pelas transformações geradas por ela (chamaremos essas transformações de transformações de BRST)

$$\delta S_{ef} = \{S_{ef}, Q\}_D = 0 \quad . \qquad (4.12c)$$

A carga de BRST que obedece a essas condições é estudada no apêndice A (sessão A.3).

Exige-se, ainda, que a ação efetiva tenha número fantasma igual a zero, o que impõe a seguinte condição sobre a função fixadora de gauge

$$gh(\Psi) = -1 \quad . \qquad (4.13)$$

Também é exigido que as condições de contorno da integração funcional sejam invariantes pelas transformações de BRST, que garantam a invariância da ação efetiva por essas transformações e que façam com que a carga de BRST se anule nos extremos

$$Q(t_2) = Q(t_1) = 0 \quad . \qquad (4.14)$$

Essas condições são satisfeitas, por exemplo, pelo seguinte conjunto de condições de contorno

$$p_j(t_2) = p_j(t_1) = 0$$
$$\eta^j(t_2) = \eta^j(t_1) = 0$$

$$\bar{\mathcal{P}}_j(t_2) = \bar{\mathcal{P}}_j(t_1) = 0 \tag{4.15}$$
$$\mathcal{P}^j(t_2) = \mathcal{P}^j(t_1) = 0$$
$$\bar{\eta}_j(t_2) = \bar{\eta}(t_1) = 0 \ .$$

À função fixadora de gauge cabe a tarefa de fixar um determinado gauge para a teoria, reduzindo o espaço de fase extendido para as dimensões do espaço de fase físico Γ_f, onde Γ_f tem dimensão $2(n - m_0)$.

4.2 Sistemas redutíveis em primeiro estágio

O caso de sistemas redutíveis ocorre quando o postulado da irredutibilidade não é mais válido. Nesse caso, existem combinações lineares entre os vínculos de 1ª classe que tornam os vínculos linearmente dependentes, ou seja, existem m_1 funções $Z_k^{(1)\,j}$ não-nulas tais que

$$Z_k^{(1)\,j}\phi_j = 0 \quad k = 1, \ldots, m \quad . \tag{4.16}$$

As paridades de Grassmann e os números fantasma dessas funções são dados por

$$P(Z_k^{(1)\,j}) = P(\phi_j) \quad , \quad gh(Z_k^{(1)\,j}) = 0 \quad . \tag{4.17}$$

Isso implica em que podemos escrever um número m_1 dos vínculos de 1ª classe em função dos outros, eliminando-os da teoria. A dimensão do espaço de fase físico será dada, então, por $2[n-(m_0-m_1)] = 2(n-m_0+m_1)$.

Vamos supor que as funções $Z_k^{(1)\,j}$ sejam linearmente independentes. Isso caracteriza um sistema que chamaremos de redutível em primeiro estágio.

É possível (pelo menos em teoria) escrever um novo conjunto de $(m_0 - m_1)$ vínculos tal que eles sejam linearmente independentes. No entanto, esse procedimento geralmente resulta na perda da localidade ou da covariância relativística da teoria. Se quisermos mantê-las, teremos que utilizar os m_0 vínculos iniciais da teoria, adicionando novos fantasmas a fim de garantir o número correto de dimensões para o espaço de fase físico.

Nossa situação original é a de que temos $2n$ variáveis do espaço de fase original mais $2m_0$ variáveis dadas pelos multiplicadores de Lagrange dos vínculos de 1ª classe e de seus momentos canonicamente conjugados. Os fantasmas adicionados à teoria têm a função de remover $2m_0 + 2m_0$ graus de liberdade, assegurando a dimensão $2(n-m_0)$ para o espaço de fase físico.

No entanto, isso não é mais verdade, pois um número m_1 dos vínculos de 1ª classe podem ser retirados da teoria, escrevendo-os em termos dos vínculos restantes. Isso implica em que existem $2m_1$ graus de liberdade em excesso devidos aos multiplicadores de Lagrange e seus momentos canonicamente conjugados. Esses graus de liberdade extras podem ser retirados

por m_1 pares de fantasmas extras $(\eta'^{(1)\ k}, \bar{\mathcal{P}}_i'^{(1)})$ de paridades opostas às dos multiplicadores de Lagrange aos quais estão associados

$$(\lambda^j, p_j) \longrightarrow (\eta'^{(1)\ k}, \bar{\mathcal{P}}_k'^{(1)}) \quad , \quad j = 1, \ldots, m_0 \quad ; \quad k = 1, \ldots, m_1$$

$$\{\eta'^{(1)\ k}, \bar{\mathcal{P}}_k'^{(1)}\}_D = \delta_l^k \tag{4.18}$$

$$P(\eta'^{(1)\ k}) = P(\bar{\mathcal{P}}_k'^{(1)}) = P(\lambda^j) + 1 \quad . \tag{4.19}$$

A essas variáveis, atribuimos os números fantasma

$$gh(\eta'^{(1)\ k}) = 2 \quad , \quad gh(\bar{\mathcal{P}}_k'^{(1)}) = -2 \quad . \tag{4.20}$$

Também temos que levar em conta que um número $2m_1$ dos fantasmas introduzidos inicialmente (mais $2m_1$ momentos canonicamente conjugados a eles) está em excesso. O efeito desses fantasmas tem que ser neutralizado adicionando-se à teoria mais $2m_1$ pares de fantasmas $(\eta^{(1)\ k}, \bar{\mathcal{P}}_k^{(1)})$, $(\mathcal{P}^{(1)\ k}, \bar{\eta}_k^{(1)})$ de paridades opostas às dos fantasmas aos quais eles estão associados

$$(\eta^j, \bar{\mathcal{P}}_j) \longrightarrow (\eta^{(1)\ k}, \bar{\mathcal{P}}_k^{(1)})$$

$$(\mathcal{P}^j, \bar{\eta}_j) \longrightarrow (\mathcal{P}^{(1)\ k}, \bar{\eta}_k^{(1)})$$

$$\{\eta^{(1)\ k}, \bar{\mathcal{P}}_l^{(1)}\}_D = \{\mathcal{P}^{(1)\ k}, \bar{\eta}_l^{(1)}\}_D = \delta_l^k \tag{4.21a}$$

$$P(\eta^{(1)\ k}) = P(\bar{\mathcal{P}}_k^{(1)}) = P(\mathcal{P}^{(1)\ k}) = P(\bar{\eta}_k^{(1)}) = P(\eta^j) + 1 \quad . \tag{4.21b}$$

A esses *fantasmas de fantasmas*, associamos os números fantasma

$$gh(\eta^{(1)\ k}) = gh(\mathcal{P}^{(1)\ k}) = 2 \tag{4.22a}$$

$$gh(\bar{\mathcal{P}}_k^{(1)}) = gh(\bar{\eta}_k^{(1)}) = -2 \quad . \tag{4.22b}$$

Associaremos às funções $Z_k^{(1)\ j}$ multiplicadores de Lagrange e momentos canonicamente conjugados a estes

$$Z_k^{(1)\ j} \longrightarrow (\lambda^{(1)\ k}, p_k^{(1)})$$

$$\{\lambda^{(1)\ k}, p_l^{(1)}\}_D = \delta_l^k \quad . \tag{4.23}$$

Esses multiplicadores de Lagrange têm que ter paridades opostas às das funções às quais estão relacionadas.

$$P(\lambda^{(1)\ k}) = P(p_k^{(1)}) = P(Z_k^{(1)}) + 1 \quad . \tag{4.24}$$

Um motivo que poderíamos alegar para que eles tenham paridades opostas às de $Z_k^{(1)\ j}$, ao contrário dos multiplicadores de Lagrange associados aos vínculos, que possuem as mesmas paridades que esses, é que esses novos multiplicadores de Lagrange estão relacionados à devolução ao sistema dos m_1 graus de liberdade que haviam sido retirados pelos vínculos de 1ª classe linearmente dependentes.

Associamos a essas novas variáveis os números fantasma

$$gh(\lambda^{(1)\ k}) = 1 \quad , \quad gh(p_k^{(1)}) = -1 \quad . \tag{4.25}$$

Se fizermos uma avaliação dos graus de liberdade, veremos que ainda temos que eliminar os $2m_1$ graus de liberdade devidos à introdução dos novos multiplicadores de Lagrange e de seus momentos canonicamente conjugados. Novamente, adicionamos mais um par $(\lambda'^{(1)\ k}, p_k'^{(1)})$ de fantasmas extras com as seguintes paridades e números fantasma

$$(\lambda^{(1)\ k}, p_k^{(1)}) \longrightarrow (\lambda'^{(1)\ k}, p_k'^{(1)})$$

$$\{\lambda'^{(1)\ k}, p_k^{(1)}\}_D = \delta_l^k \tag{4.26}$$

$$P(\lambda'^{(1)\ k}) = P(p_k'^{(1)}) = P(\lambda^{(1)\ k}) + 1 \tag{4.27}$$

$$gh(\lambda'^{(1)\ k}) = 0 \quad , \quad gh(p_k'^{(1)}) = 0 \quad . \tag{4.28}$$

Com isso, conseguimos obter o número correto de dimensões para o espaço de fase físico Γ_f: $D = 2(n - m_0 + m_1)$. Recordando o procedimento que usamos, tivemos que associar à teoria original mais dois pares de fantasmas de fantasmas $(\eta^{(1)\ k}, \bar{\mathcal{P}}_k^{(1)})$, $(\mathcal{P}^{(1)\ k}, \bar{\eta}_k^{(1)})$, um novo par de multiplicadores de Lagrange e seus momentos canonicamente conjugados $(\lambda^{(1\ k)}, p_k^{(1)})$ e dois pares de fantasmas extras $(\lambda'^{(1)\ k}, p_k'^{(1)})$, $(\eta'^{(1)\ k}, \bar{\mathcal{P}}_k'^{(1)})$.

A carga de BRST para sistemas redutíveis em primeioro estágio deve obedecer às mesmas condições impostas para a carga de BRST em sistemas irredutíveis. A carga que obedece a essas condições no caso abeliano $(\{\phi_i, \phi_j\}_D = 0)$ é da forma[18]

$$Q = \eta^j \phi_j + \eta^{(1)\ k} Z_l^{(1)\ k} \bar{\mathcal{P}}^l + p^j \mathcal{P}_j + p^{(1)\ k} \mathcal{P}_k^{(1)} + p'^{(1)\ k} \mathcal{P}_k'^{(1)} \quad . \tag{4.29}$$

Ao que podemos ver, esse procedimento aplicado a teorias redutíveis de ordens maiores gera um número ainda maior de multiplicadores de Lagrange, fantasmas e momentos canonicamente conjugados a estes. Veremos, a seguir, o caso geral de teorias redutíveis em estágio n.

4.3 Sistemas redutíveis em estágio n

O caso de teorias redutíveis em estágio n[30] se dá quando as próprias funções $Z_k^{(1)\,j}$ são linearmente dependentes. Isso significa que existem m_2 funções $Z_l^{(2)\,k}$ não-nulas tais que

$$Z_l^{(2)\,k} Z_k^{(1)\,j} = 0 \ . \tag{4.30}$$

Se essas funções $Z_l^{(2)\,k}$ forem linearmente independentes, a teoria é redutível em segundo estágio. No entanto, se elas forem linearmente dependentes, teremos mais m_3 funções $Z_m^{(3)\,l}$ e assim por diante. Podemos repetir esse processo até que achemos funções $Z_{a_2}^{(n)\,a_1}$ que sejam linearmente independentes (a única exigência é a de que esses processo seja finito). Teremos, assim, uma teoria redutível em estágio n.

A fim de estudar o caso geral de teorias redutíveis em estágio n, vamos modificar um pouco a notação utilizada até agora. Os vínculos de $1^{\underline{a}}$ classe originais da teoria serão dados por

$$\phi_{\alpha_0} \quad , \quad \alpha_0 = 0, \ldots, m_0 \ . \tag{4.31}$$

As funções que determinam o estágio de redutibilidade da teoria serão escritas como

$$Z_{(s-1)\alpha_s}^{\alpha_{s-1}} \quad , \quad s = 0, \ldots, n \quad ; \quad \alpha_s = 0, m_s \ . \tag{4.32}$$

A essas variáveis, nós adicionamos novos multiplicadores de Lagrange e seus momentos canonicamente conjugados

$$(\lambda_s^{\alpha_s}, p_{s\ \alpha_s}) \ . \tag{4.33}$$

Também adicionamos os fantasmas

$$(\eta_s^{\alpha_s}, \bar{\mathcal{P}}_{s\ \alpha_s}) \ . \tag{4.34}$$

Finalmente, adicionamos os fantasmas extras

$$(\lambda_s^{s'\ \alpha_s}, p_{s\ \alpha_s}^{s'}) \quad , \quad (\eta_s^{s'\ \alpha_s}, \bar{\mathcal{P}}_{s\ \alpha_s}^{s'}) \ , \tag{4.35}$$

$$s' = 1, \ldots, n \quad ; \quad s = s', s'+1, \ldots, n \ .$$

As paridades e os números fantasma dessas variáveis são dados nas tabelas a seguir, considerando a definição

$$P_{\alpha_0} \equiv P(\phi_{\alpha_0}) \ .$$

Víncs. e mult. Lagr.	ϕ_{α_0}	$Z^{\alpha_{s-1}}_{(s-1)\ \alpha_s}$	$\lambda^{\alpha_s}_s$	$p_{s\ \alpha_s}$
P(var.)	P_{α_0}	$P_{\alpha_{s-1}} + P_{\alpha_s}$	$P_{\alpha_s} + s$	$P_{\alpha_s} + s$
gh(var.)	0	0	s	$-s$

Fantasmas	$\eta^{\alpha_s}_s$	$\bar{\mathcal{P}}_{s\ \alpha_s}$
P(var.)	$P_{\alpha_s} + s + 1$	$P_{\alpha_s} + s + 1$
gh(var.)	$s + 1$	$-(s+1)$

Fantasmas	$\mathcal{P}^{\alpha_s}_s$	$\bar{\eta}_{s\ \alpha_s}$
P(var.)	$P_{\alpha_s} + s + 1$	$P_{\alpha_s} + s + 1$
gh(var.)	$s + 1$	$-(s+1)$

Fantasmas extras	$\lambda^{s'\ \alpha_s}_s$	$p^{s'}_{s\ \alpha_s}$
P(var.)	$P_{\alpha_s} + s - s'$	$P_{\alpha_s} + s - s'$
gh(var.)	$s - s'$	$-(s - s')$

Fantasmas extras	$\eta^{s'\ \alpha_s}_s$	$\bar{\mathcal{P}}^{s'}_{s\ \alpha_s}$
P(var.)	$P_{\alpha_s} + s + s'$	$P_{\alpha_s} + s + s'$
gh(var.)	$s - s' + 1$	$-(s - s' + 1)$

A carga de BRST que obedece às condições impostas em (4.12) para teorias abelianas é dada[18] por

$$Q = \eta^{\alpha_0}_0 \phi_{\alpha_0} + \sum_{s=1}^{n} \eta^{\alpha_s}_s Z^{\alpha_{s-1}}_{(s-1)\ \alpha_s} \bar{\mathcal{P}}_{(s-1)\ \alpha_{s-1}} +$$

$$+ p^{\alpha_s}_s \mathcal{P}_{s\ \alpha_s} + \sum_{s'=1}^{n} \sum_{s=s'}^{n} p^{s'\ \alpha_s}_s \bar{\mathcal{P}}^{s'}_{s\ \alpha_s} \ . \tag{4.36}$$

Para teorias não-abelianas, não parece haver ainda uma fórmula geral na literatura.

Com isso, encerramos nossa exposição da quantização BRST-BFV de sistemas redutíveis.

Capítulo 5

EQUIVALÊNCIA DO CAMPO TENSORIAL ANTISSIMÉTRICO DE ORDEM DOIS AO CAMPO ESCALAR E AO CAMPO VETORIAL

Campos tensoriais antissimétricos foram inicialmente objetos de grande atenção devido à sua associação a teorias de gravitação estendida[19] e por tratarem-se de teorias redutíveis. Isso faz com que sejam estudados com a finalidade de se atingir um maior conhecimento desse formalismo com a motivação das teorias de supercordas, que também são redutíveis[22]. Dentre os campos tensoriais antissimétricos, os que foram mais estudados são o tensor antissimétrico de ordem dois e o tensor antissimétrico de ordem três. O tensor antissimétrico de ordem três está associado à constante cosmológica[23]. No entanto, não chegaremos a estudá-lo.

O campo tensorial antissimétrico de ordem dois, ou simplesmente tensor antissimétrico, aparece em teorias de gravitação estendida obtida a partir de supercordas[24] como uma das três partículas que correspondem ao estado fundamental das cordas (as outras duas partículas são o gráviton e o dílaton). Da mesma forma como o gráviton está relacionado à curvatura do espaço-tempo na Relatividade Geral, o tensor antissimétrico está relacionado à torção do espaço-tempo na teoria de Einstein-Cartan da gravitação , onde é associado ao spin.

O tensor antissimétrico também aparece em teorias de ação à distância de cordas[25] e outras[26], como por exemplo no confinamento de quarks, em quebra espontânea de simetria e como uma partícula complementar do fóton. Neste capítulo, nosso interesse maior será sobre o tensor antissimétrico como teoria redutível em primeiro estágio e na sua equivalência a outros campos. Essa equivalência já foi discutida por vários autores, seja por meio de um acoplamento a um campo de fundo[27] ou usando o método de quantização BRST no formalismo lagrangiano[28] mediante uma cuidadosa escolha dos fantasmas de fantasmas. Neste capítulo, apresentamos uma prova dessa equivalência[29] utilizando o método de quantização BRST de teorias redutíveis no formalismo hamiltoniano[30], que apresenta a contagem correta de fantasmas de fantasmas e fantasmas extras.

Iniciaremos o capítulo com uma breve discussão da equivalência do tensor antissimétrico ao campo escalar e ao campo vetorial a nível clássico, passando depois para a demonstração da equivalência a nível quântico.

5.1 Equivalência clássica ao campo escalar e ao campo vetorial

A densidade lagrangiana do campo tensorial antissimétrico é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{24} F^{\mu\nu\rho} F_{\mu\nu\rho} \quad , \tag{5.1}$$

$$F_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu} \quad ,$$

$$\text{com} \quad B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu} \quad .$$

Utilizando as equações de movimento para o campo $B_{\mu\nu}$, obtemos

$$\partial^\mu F_{\mu\nu\rho} = 0 \quad . \tag{5.2}$$

Essa equação pode ser resolvida em D dimensões pela solução

$$F_{\mu_1\mu_2\mu_3} = \epsilon_{\mu_1\ldots\mu_D} \partial^{\mu_4} A^{\mu_5\ldots\mu_D} \quad . \tag{5.3}$$

Em quatro dimensões, essa solução representa um campo escalar ϕ, pois podemos contrair a expressão (5.3) com o tensor de Levi-Civita, obtendo

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu B^{\rho\sigma} = \partial_\mu \phi \quad , \tag{5.4a}$$

Derivando essa expressão,temos que

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\mu \partial^\nu B^{\rho\sigma} = 0 \quad ,$$

obtendo, assim, as equações de movimento para o campo escalar

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi = \partial^2 \phi = 0 \quad . \tag{5.4b}$$

Em cinco dimensões, podemos contrair (5.3) com o tensor de Levi-Civita, obtendo

$$\epsilon^{\mu\ldots\mu_5} F_{\mu_1\mu_2\mu_3} = \partial^{[\mu_4} A^{\mu_5]} = F^{\mu_4\mu_5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_5} \partial_{\mu_1} B_{\mu_2 \mu_3} = F^{\mu_4 \mu_5} \quad . \tag{5.5a}$$

Derivando em relação a x_4^μ, obtemos, então, as equações de Maxwel

$$\partial_{\mu_4} F^{\mu_4 \mu_5} \quad . \tag{5.5b}$$

No entanto, não há garantias de que essas equivalências perdurem a nível quântico, pois elas foram provadas utilizando as equações de movimento.

Vamos, agora, mostrar que os campos ϕ e $B_{\mu\nu}$ descrevem a mesma dinâmica em 4 dimensões a nível clássico, mostrando que se pode passar de uma representação para a outra por meio de uma transformação canônica.

A densidade lagrangiana para o campo escalar sem massa é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi = \pi \dot{\phi} - \mathcal{H}_c \quad , \tag{5.6}$$

onde o momento canonicamente conjugado a ϕ é

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = -\dot{\phi} \tag{5.7}$$

e $\mathcal{H}_c$ é a densidade hamiltoniana.

Vamos, agora, considerar a densidade lagrangiana para o tensor antissimétrico

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2} \pi^{\mu\nu} \dot{B}_{\mu\nu} - \mathcal{H}'_c \quad . \tag{5.8}$$

Aplicando o princípio de mínima ação para ambas as lagrangianas

$$\delta \int dt \; L \quad , \quad \delta \int dt \; L' \quad ,$$

temos que elas estão relacionadas por

$$\delta L = \delta L' + dF \quad , \tag{5.9}$$

onde dF é a diferencial de uma função F que é chamada de *função geradora* da transformação canônica.

A relação acima pode ser escrita como

$$\int d^3x (\pi \dot{\phi} - \mathcal{H}_c) = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \pi^{\mu\nu} \dot{B}_{\mu\nu} - \mathcal{H}'_c \right) + \frac{dF}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dF = \int d^3x \left[\pi d\phi - \frac{1}{2}\pi^{\mu\nu} dB_{\mu\nu} - (\mathcal{H}_c - \mathcal{H}'_c)\right] \ .$$

Podemos definir a seguinte densidade para a função geradora

$$F = \int d^3x \ d\mathcal{F} \ ,$$

de forma que podemos escrever as seguintes equações a partir de ()

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi} \ , \ \pi_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial B^{\mu\nu}} \ , \ \mathcal{H}'_c = \mathcal{H}_c + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \ . \tag{5.10}$$

Tomemos, agora, como função geradora da transformação canônica

$$F = \int d^3x \ \mathcal{F} = 2\int d^3x \ \epsilon^{ijk} B_{ij}\partial_k \phi \ , \tag{5.11}$$

$$\frac{dF}{dt} = 2\int d^3x \ \epsilon^{ijk}(\dot{B}_{ij}\partial_k\phi + B_{ij}\partial_k\dot{\phi}) \ . \tag{5.12}$$

A relação entre as duas densidades lagrangianas será, então,

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} - \frac{d\mathcal{F}}{dt} \Rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} - 2\epsilon^{ijk}(\dot{B}_{ij}\partial_k\phi + B_{ij}\partial_k\dot{\phi}) \ . \tag{5.13}$$

As relações definidas por essa função geradora são

$$\pi = -\epsilon^{ijk}\partial_i B_{jk} \ , \ \pi_{0i} = 0 \ , \ \pi_{ij} = -\epsilon_{ijk}\partial^k\phi \ , \ \mathcal{H}_c = \mathcal{H}'_c \ . \tag{5.14}$$

Substituindo em (5.13), obtemos

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{8}(\partial_i B_{jk})^2 + \frac{1}{4}(\partial_i B_{ij})^2 - \frac{1}{2}(\pi_{ij})^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\pi^{ij}\dot{B}_{ij} + B^{0j}\partial^i\pi_{ij} = \frac{1}{3}F^{\mu\nu\rho}F_{\mu\nu\rho} \ . \tag{5.15}$$

Portanto, podemos ver que as duas densidades lagrangianas estão relacionadas por uma transformação canônica.

5.2 Quantização BRST-BFV

Tomemos a densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{24} F^{\mu\nu\rho} F_{\mu\nu\rho} \quad , \tag{5.16}$$

$$F_{\mu\nu\rho} = \partial_{[\mu} B_{\nu\rho]} = \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu} \quad ,$$

$$B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu} \quad .$$

Escrevendo-a em termos de $B_{\mu\nu}$, temos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8} \partial^\rho B^{\mu\nu} \partial_\rho B_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \partial^\rho B^{\mu\nu} \partial_\mu B_{\rho\nu} \quad . \tag{5.17}$$

A ação é definida por

$$S = \int d^D x \; \mathcal{L} \tag{5.18}$$

e é invariante pela transformação de gauge

$$\delta B_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu \quad . \tag{5.19}$$

Podemos reparar que os termos ξ_μ também são invariantes pela transformação de gauge

$$\delta \xi_\mu = \partial_\mu \zeta \quad .$$

Essa invariância se refletirá na redutibilidade da teoria.

Separando a parte espacial da temporal, obtemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8}(\dot{B}_{ij})^2 - \frac{1}{2}\dot{B}^{ij}\partial_{[i}B_{0j]} + \frac{1}{2}(\partial_{[i}B_{0j]})^2 - \frac{1}{8}(\partial_i B_{jk})^2 - \frac{1}{4}\partial^i B^{jk}\partial_j B_{ik} \quad , \tag{5.20}$$

onde definimos

$$\partial_{[i}B_{0j]} \equiv \frac{1}{2}(\partial_i B_{0j} - \partial_j B_{0i}) \quad . \tag{5.21}$$

Os momentos canonicamente conjugados são dados por

$$\pi_{0i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{B}^{0i}} = 0 \tag{5.22}$$

$$\pi_{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{B}^{ij}} = \frac{1}{2}\dot{B}_{ij} - \partial_{[i}B_{0j]} \quad . \tag{5.23}$$

Então, a densidade hamiltoniana canônica é dada por

$$\mathcal{H}_c = \frac{1}{2}\pi^{\mu\nu}\dot{B}_{\mu\nu} - \mathcal{L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}_c = \frac{1}{2}(\pi_{ij})^2 - B^{0j}\partial^i \pi ij - \frac{1}{4}(\partial_i B_{ij})^2 + \frac{1}{8}(\partial_i B_{jk})^2 \quad . \tag{5.24}$$

Outra maneira de escrevê-la[20] é

$$\mathcal{H}_c = \frac{1}{2}(\pi_{ij})^2 - B^{0j}\partial^i \pi_{ij} - \frac{1}{16}(\epsilon_{ijk}\partial_i B_{jk})^2 \quad . \tag{5.25}$$

Passemos, agora, para a procura dos vínculos dessa teoria. Os vínculos de 1ª ordem são dados pelas equações

$$\pi_{0i} \approx 0 \quad . \tag{5.26}$$

Montamos, então, a densidade hamiltoniana primária

$$\mathcal{H}_p = \mathcal{H}_c + \lambda^{0i}\pi_{0i} \quad , \tag{5.27}$$

onde λ^{0i} são os multiplicadores de Lagrange associados aos vínculos π_{0i}.

A condição de consistência dos vínculos implica em

$$\dot{\pi}_{0i} = \{\pi_{0i}, \mathcal{H}_p\} \approx 0 \Rightarrow \partial^j \pi_{ji} \approx 0 \quad .$$

Temos, então, os vínculos de 2ª ordem

$$\phi_i = \partial^j \pi_{ji} \quad . \tag{5.28}$$

Repetindo o procedimento anterior, montamos a densidade hamiltoniana secundária

$$\mathcal{H}_s = \mathcal{H}_p + \lambda^i \phi_i \quad , \tag{5.29}$$

λ^i sendo os multiplicadores de Lagrange associados aos vínculos ϕ_i.

A evolução temporal desses vínculos resulta em

$$\dot{\phi}_i = \{\phi_i, \mathcal{H}_s\} = 0 \quad . \tag{5.30}$$

Portanto, não há mais vínculos na teoria.

Vamos, agora, estudar a álgebra dos vínculos a fim de poder classificá-los em vínculos de 1ª ou 2ª classe

$$\{\pi_{0i}(x), \pi_{0j}(y)\} = \{\phi_i(x), \phi_j(y)\} = \{\pi_{0i}(x), \phi_j(y)\} = 0 \quad . \tag{5.31}$$

Portanto, todos os vínculos da teoria são de 1ª classe e não será necessário o uso dos parênteses de Dirac.

Temos, agora, que verificar se a teoria é ou não irredutível. Ela só será irredutível se os vínculos forem linearmente independentes. Isso é verdadeiro para os vínculos π_{0i}, mas para os vínculos ϕ_i, isso não acontece.

Para mostrar isso, tomemos

$$\int d^{D-1}x' \; Z^j(x,x')\phi_j(x') \quad ,$$

onde $Z^j(x,x')$ é uma função arbitrária.

Se pudermos escolher $Z^j(x,x') \neq 0$ tal que a integral acima seja nula sem usar as equações de movimento, então os vínculos ϕ_j não serão linearmente independentes.

Escolhendo $Z^j(x,x') = \frac{\partial}{\partial x'_j} f(x,x')$, temos

$$\int d^{D-1}x' \; Z^j(x,x')\phi_j(x') = \int d^{D-1}x' \; \partial^j f(x,x')\partial^i \pi_{ij}(x') =$$

$$= \int d^{D-1}x' \; \partial^j[f(x,x')\partial^i \pi_{ij}(x')] - \int d^{D-1}x' f(x,x')\partial^i\partial^j \pi_{ij}(x') \quad .$$

A segunda integral se anula identicamente, enquanto se escolhermos

$$f(x,x') = \delta(x-x') \quad , \tag{5.32}$$

obtemos, segundo o teorema de Gauss

$$\int d^{D-1}x' \; \partial^j[f(x,x')\partial^i \pi_{ij}(x')] = \int dS \; \delta(x-x')\partial^i \pi_{ij}(x') = 0 \quad ,$$

onde a integração se faz sobre uma superfície que envolve o volume de integração da integral da esquerda.

Obtemos, então, o resultado

$$\int d^{D-1}x' \; Z^j(x,x')\phi_j(x') = 0 \quad . \tag{5.33}$$

Portanto, os vínculos ϕ_i não são linearmente independentes e a teoria é redutível.

Vamos analizar as funções $Z^j(x,x')$ a fim de saber se elas não são também linearmente dependentes. Para isso, teremos que achar funções $Z^{(2)\,j}$ tais que

$$\int d^{D-1}x'\; Z^{(2)\,j}(x,x')Z_j(x',x'') = 0 \quad . \tag{5.34}$$

Essa condição implica em

$$\int d^{D-1}x'\; Z^{(2)\,j}(x,x')\partial_j\delta(x'-x'') =$$

$$= \int d^{D-1}x'\; \partial_j\left[Z^{(2)\,j}(x,x')\delta(x'-x'')\right] - \int d^{D-1}x'\; \delta(x'-x'')\partial^j Z_j^{(2)}(x,x') =$$

$$= -\int d^{D-1}x'\; \delta(x'-x'')\partial^j Z_j^{(2)}(x,x') = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x'_i} Z_j^{(2)}(x,x') = 0 \Rightarrow Z_j^{(2)}(x,x') = g_j(x) \quad ,$$

o que impossibilita que façamos combinações lineares de $Z_j(x',x'')$ que sejam nulas.

Portanto, as funções $Z_J(x,x')$ são linearmente independentes e a teoria é redutível em 1ª estágio.

De acordo com o procedimento exposto na sessão 4.2 para teorias redutíveis em 1º estágio, vamos aumentar o espaço de fase adicionando à teoria momentos canonicamente conjugados aos multiplicadores de Lagrange

$$\lambda^{0i} \to p_{0i} \quad , \quad \{\lambda^{0i}, p_{0j}\} = \delta^i_j \tag{5.36}$$

$$\lambda^i \to p_i \quad , \quad \{\lambda^i, p_j\} = \delta^i_j \quad , \tag{5.37}$$

sendo esses momentos sujeitos à condição de vínculo

$$p_{0i} \approx 0 \quad , \quad p_i \approx 0 \quad . \tag{5.38}$$

Também associamos os fantasmas

$$\pi_{0i} \quad , \quad p_{0i} \longrightarrow (\eta^{0i}, \bar{\mathcal{P}}_{0i}) \quad , \quad (\mathcal{P}^{0i}, \bar{\eta}_{0i})$$

$$\phi_i \quad , \quad p_i \longrightarrow (\eta^i, \bar{\mathcal{P}}_i) \quad , \quad (\mathcal{P}^i, \bar{\eta}_i) \quad ,$$

$$\{\eta^{0i}, \bar{\mathcal{P}}_{0j}\} = \{\mathcal{P}^{0i}, \bar{\eta}_{0j}\} = \delta^i_j \quad , \tag{5.39}$$

$$\{\eta^i, \bar{\mathcal{P}}_j\} = \{\mathcal{P}^i, \bar{\eta}_j\} = \delta^i_j \quad . \tag{5.40}$$

Temos, ainda, que adicionar um multiplicador de Lagrange e seu momento canonicamente conjugado relativos à função $Z_i(x, x')$

$$Z_i \longrightarrow (\xi, \pi_\xi) \quad , \{\xi, \pi_\xi\} = 1 \tag{5.41}$$

e os fantasmas de fantasmas

$$(c, \bar{b}) \quad ; \quad (b, \bar{c}) \quad ,$$

$$\{c, \bar{b}\} = \{b, \bar{c}\} = 1 \quad . \tag{5.42}$$

Finalizando, adicionamos os pares de fantasmas extras

$$(\lambda', \pi') \quad ; \quad (\xi', \pi_{\xi'}) \quad ,$$

$$\{\lambda', \pi'\} = \{\xi', \pi_{\xi'}\} = 1 \quad . \tag{5.43}$$

De acordo com as tabelas da sessão 4.3, as paridades e os números fantasma das variáveis acima são dados pelas tabelas a seguir, onde P representa a paridade de Grassmann e gh, o número fantasma da variável do espaço de fase.

Vínculos	π_{0i}	ϕ_i
P	0	0
gh	0	0

Multipls. de Lagr. e momts.	λ_{0i}	p_{0i}	λ_i	p_i	ξ	π_ξ
P	0	0	0	0	1	1
gh	0	0	0	0	1	-1

Fantasmas	η_{0i}	$\bar{\mathcal{P}}_{0i}$	$\mathcal{P}_{0i}$	$\bar{\eta}_{0i}$
P	1	1	1	1
gh	1	-1	1	-1

Fantasmas	η_i	$\bar{\mathcal{P}}_i$	$\mathcal{P}_i$	$\bar{\eta}_i$
P	1	1	1	1
gh	1	−1	1	−1

Fantasmas de fantasmas	c	$\bar{b}$	b	$\bar{c}$
P	2	2	2	2
gh	2	−2	2	−2

Fantasmas extras	λ'	π'	ξ'	$\pi_{\xi'}$
P	0	0	1	1
gh	1	−1	2	−2

Segundo (4.35), a carga de BRST é dada por

$$Q = \int d^{D-1}x(\eta^{0i}\pi_{0i} + \eta^i\phi_i + c\partial^i\bar{\mathcal{P}}_i + p^{0i}\mathcal{P}_{0i} + p^i\mathcal{P}_i + \pi_\xi b + \pi'\xi') \quad . \tag{5.44}$$

Essa carga gera as seguintes transformações de BRST

$$\begin{array}{ll}
\delta B_{0i} = \eta_{0i} & \delta\pi_{0i} = 0 \\
\delta B_{ij} = \partial_j\eta_i - \partial_i\eta_j & \delta\pi_{ij} = 0 \\
\delta\lambda_{0i} = \mathcal{P}_{0i} & \delta p_{0i} = 0 \\
\delta\lambda_i = \mathcal{P}_i & \delta p_i = 0 \\
\delta\xi = b & \delta\pi_\xi = 0 \\
\delta\eta_{0i} = 0 & \delta\bar{\mathcal{P}}_{0i} = \pi_{0i} \\
\delta\mathcal{P}_{0i} = 0 & \delta\bar{\eta}_{0i} = p_{0i} \\
\delta\eta_i = -\partial_i c & \delta\bar{\mathcal{P}}_i = \phi_i = \partial^j\pi_{ji} \\
\delta\mathcal{P}_i = 0 & \delta\bar{\eta}_i = p_i \\
\delta c = 0 & \delta\bar{b} = -\partial^i\bar{\mathcal{P}}_i \\
\delta b = 0 & \delta\bar{c} = -\pi_\xi \\
\delta\lambda' = \xi' & \delta\pi' = 0 \\
\delta\xi' = 0 & \delta\pi_{\xi'} = \pi'
\end{array}$$

A lagrangiana efetiva é dada por

$$L_{ef} = L_k - H_c - \{\Psi, Q\} \quad , \tag{5.45}$$

onde L_k é a lagrangiana cinética

$$L_k = \int d^{D-1}x \left(\pi^{0i}\dot{B}_{0i} + \frac{1}{2}\pi^{ij}\dot{B}_{ij} + p^{0i}\dot{\lambda}_{0i} + p^i\dot{\lambda}_i + \bar{\eta}^{0i}\dot{\mathcal{P}}_{0i} + \bar{\mathcal{P}}^{0i}\dot{\eta}_{0i} + \right.$$

$$\left. + \bar{\eta}^i\dot{\mathcal{P}}_i + \bar{\mathcal{P}}^i\dot{\eta}_i + \bar{b}\dot{c} + \bar{c}\dot{b} + \pi_\xi\dot{\xi} + \pi'\dot{\lambda}' + \pi_{\xi'}\dot{\xi}'\right) \quad , \tag{5.46}$$

H_c é a hamiltoniana canônica

$$H_c = \int d^{D-1}x \left[\frac{1}{2}(\pi_{ij})^2 - \frac{1}{4}(\partial_i B_{ij})^2 + \frac{1}{8}(\partial_i B_{jk})^2\right] \tag{5.47}$$

e Ψ é a função fixadora de gauge.

Escolhemos para Ψ a função

$$\Psi = \int d^{D-1}x \left[\frac{1}{\varepsilon}\bar{\eta}^{0i}(\lambda_i - B_{0i}) - \bar{\eta}^i\partial^j B_{ji} + \bar{\mathcal{P}}^{0i}\lambda_{0i} - \bar{\mathcal{P}}^i\lambda_i + \right.$$

$$\left. + \bar{c}\partial^i\eta_i + \bar{b}\xi + \pi_{\xi'}\partial^i\lambda_i - \bar{\eta}^i\partial_i\lambda'\right] \quad , \tag{5.48}$$

onde ε é um parâmetro constante qualquer.

Temos, então,

$$\{\Psi, Q\} = \int d^{D-1}x \left[\pi^{0i}\lambda_{0i} + \pi^{ij}\partial_i\lambda_j + \frac{1}{\varepsilon}p^{0i}(\lambda_i - B_{0i}) - p^i(\partial^j B_{ji} + \partial_i\lambda') + \right.$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon}\bar{\eta}^{0i}(\mathcal{P}_i - \eta_{0i}) + \bar{\eta}^i(\partial^j\partial_j\eta_i - \partial^j\partial_i\eta_j - \partial_i\xi') + \bar{\mathcal{P}}^{0i}\mathcal{P}_{0i} -$$

$$\left. - \bar{\mathcal{P}}^i(\mathcal{P}_i + \partial_i\xi) - \bar{c}\partial^i\partial_i c + \bar{b}b + \pi_\xi\partial^i\eta_i + \pi'\partial^i\lambda_i + \pi_{\xi'}\partial^i\mathcal{P}_i\right] \quad . \tag{5.49}$$

Fazemos, agora, a transformação de variáveis

$$p_{0i} \longrightarrow \varepsilon p_{0i}$$

$$\bar{\eta}_{0i} \longrightarrow \varepsilon\bar{\eta}_{0i}$$

cujo determinante do jacobiano é igual a um.

Temos, então, a densidade lagrangiana efetiva

$$\mathcal{L}_{ef} = \pi^{0i}(\dot{B}_{0i} - \lambda_{0i}) + \left[-\frac{1}{2}(\pi_{ij})^2 + \frac{1}{2}\pi^{ij}\dot{B}_{ij} - \pi^{ij}\partial_i\lambda_j\right] +$$

$$+p^{0i}(\varepsilon\dot{\lambda}_{0i} - \lambda_i + B_{0i}) + p^i(\dot{\lambda}_i + \partial^j B_{ji} + \partial_i\lambda') + \bar{\eta}^{0i}(\varepsilon\dot{\mathcal{P}}_{0i} - \mathcal{P}_i + \eta_{0i}) +$$
$$+\bar{\eta}^i(\dot{\mathcal{P}}_i + \partial^j\partial_i\eta_j - \partial^j\partial_j\eta_i + \partial_i\xi') + \bar{\mathcal{P}}^{0i}(\dot{\eta}_{0i} - \mathcal{P}_{0i}) + \bar{\mathcal{P}}^i(\dot{\eta}_i + \mathcal{P}_i + \partial_i\xi) +$$
$$+\bar{c}(\dot{b} + \partial^i\partial_i c) + \bar{b}(\dot{c} - b) + \pi_\xi(\dot{\xi} - \partial^i\eta_i) + \pi'(\dot{\lambda}' - \partial^i\lambda_i) +$$
$$+\pi_{\xi'}(\dot{\xi}' - \partial^i\mathcal{P}_i) + \frac{1}{4}(\partial_i B_{ij})^2 - \frac{1}{8}(\partial_i B_{jk})^2 \quad . \tag{5.50}$$

Completando quadrados, podemos escrever o termo em π_{ij} como

$$\pi^{ij}\pi_{ij} - \pi^{ij}\dot{B}_{ij} + 2\pi^{ij}\partial_{[i}\lambda_{j]} =$$
$$= \left(\pi_{ij} - \frac{1}{2}\dot{B}_{ij} + \partial_{[i}\lambda_{j]}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\dot{B}_{ij} - \partial_{[i}\lambda_{j]}\right)^2 \quad .$$

Fazemos, agora, $\varepsilon \to 0$ e colocamos o termo ξ' em evidência, obtendo

$$\mathcal{L}_{ef} = \pi^{0i}(\dot{B}_{0i} - \lambda_{0i}) - \frac{1}{2}\left(\pi_{ij} - \frac{1}{2}\dot{B}_{ij} - \partial_{[i}\lambda_{j]}\right)^2 + \frac{1}{8}(\dot{B}_{ij} - 2\partial_{[i}\lambda_{j]})^2 +$$
$$+p^{0i}(B_{0i} - \lambda_i) + p^i(\dot{\lambda}_i + \partial^j B_{ji} + \partial_i\lambda') + \bar{\eta}^{0i}(\eta_{0i} - \mathcal{P}_i) +$$
$$+\bar{\eta}^i(\dot{\mathcal{P}}_i + \partial^j\partial_i\eta_j - \partial^j\partial_j\eta_i) + \bar{\mathcal{P}}^{0i}(\dot{\eta}_{0i} - \mathcal{P}_{0i}) + \bar{\mathcal{P}}^i(\dot{\eta}_i + \mathcal{P}_i + \partial_i\xi) +$$
$$+\bar{c}(\dot{b} + \partial^i\partial_i c) + \bar{b}(\dot{c} - b) + \pi_\xi(\dot{\xi} - \partial^i\eta_i) + \pi'(\dot{\lambda}' - \partial^i\lambda_i) - \pi_{\xi'}\partial^i\mathcal{P}_i +$$
$$+\xi'(\dot{\pi}_{\xi'} + \partial^i\bar{\eta}_i) + \frac{1}{4}(\partial_i B_{ij})^2 - \frac{1}{8}(\partial_i B_{jk})^2 \quad . \tag{5.51}$$

A função de partição é dada por

$$Z = N\int \mathcal{D}\mu\ e^{iS_{ef}} \quad , \quad S_{ef} = \int d^D x\ \mathcal{L} \quad , \tag{5.53}$$

onde N é uma constante de normalização apropriada e $\mathcal{D}\mu$ é a medida, que envolve todas as variáveis

$$\mathcal{D}\mu = \mathcal{D}B_{0i}\mathcal{D}\pi_{0i}\mathcal{D}B_{ij}\mathcal{D}\pi_{ij}\mathcal{D}\lambda_{0i}\mathcal{D}p_{0i}\mathcal{D}\lambda_i\mathcal{D}p_i\mathcal{D}\eta_{0i}\mathcal{D}\bar{\mathcal{P}}_{0i}\mathcal{D}\mathcal{P}_{0i}\mathcal{D}\bar{\eta}_{0i}$$
$$\mathcal{D}\eta_i\mathcal{D}\bar{\mathcal{P}}_i\mathcal{D}\mathcal{P}_i\mathcal{D}\bar{\eta}_i\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{b}\mathcal{D}b\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}\xi\mathcal{D}\pi_\xi\mathcal{D}\lambda'\mathcal{D}\pi'\mathcal{D}\xi'\mathcal{D}\pi_{\xi'} \quad . \tag{5.53}$$

A integração está sujeita às seguintes condições de contorno invariantes pelas transformações de BRST

$$
\begin{array}{ll}
x^\mu(t_1) = x_1^\mu & x^\mu(t_2) = x_2^\mu \\
\lambda_{0i}(t_1) = \lambda_{0i}(t_2) = 0 & p_{0i}(t_1) = p_{0i}(t_2) = 0 \\
\lambda_i(t_1) = \lambda_i(t_2) = 0 & p_i(t_1) = p_i(t_2) = 0 \\
\xi(t_1) = \xi(t_2) = 0 & \pi_\xi(t_1) = \pi_\xi(t_2) = 0 \\
\eta_{0i}(t_1) = \eta_{0i}(t_2) = \bar{\mathcal{P}}_{0i}(t_1) = \bar{\mathcal{P}}_{0i}(t_2) & \mathcal{P}_{0i}(t_1) = \mathcal{P}_{0i}(t_2) = \bar{\eta}_{0i}(t_1) = \bar{\eta}_{0i}(t_2) = 0 \\
\eta_i(t_1) = \eta_i(t_2) = \bar{\mathcal{P}}_i(t_1) = \bar{\mathcal{P}}_i(t_2) & \mathcal{P}_i(t_1) = \mathcal{P}_i(t_2) = \bar{\eta}_i(t_1) = \bar{\eta}_i(t_2) = 0 \\
c(t_1) = c(t_2) = \bar{b}(t_1) = \bar{b}(t_2) = 0 & b(t_1) = b(t_2) = \bar{c}(t_1) = \bar{c}(t_2) = 0 \\
\lambda'(t_1) = \lambda'(t_2) = \pi'(t_1) = \pi'(t_2) = 0 & \\
\xi'(t_1) = \xi'(t_2) = \pi_{\xi'}(t_1) = \pi_{xi'}(t_2) = 0 &
\end{array}
$$

Integrando sobre π_{0i}, π_{ij}, p_{0i}, p_i, $\bar{\eta}_{0i}$, $\bar{\mathcal{P}}_{0i}$, $\bar{\mathcal{P}}_i$, $\bar{b}$, π_ξ, π' e ξ', obtemos

$$
Z = N \int \mathcal{D}B_{0i}\mathcal{D}B_{ij}\mathcal{D}\lambda_{0i}\mathcal{D}\lambda_i\mathcal{D}\eta_{0i}\mathcal{D}\mathcal{P}_{0i}\mathcal{D}\eta_i\mathcal{D}\mathcal{P}_i\mathcal{D}\bar{\eta}_i\mathcal{D}c\mathcal{D}b\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}\xi\mathcal{D}\lambda'\mathcal{D}\pi_{\xi'}
$$

$$
\delta(\dot{B}_{0i} - \lambda_{0i})\delta(B_{0i} - \lambda_i)\delta(\dot{\lambda}_i + \partial^j B_{ji} + \partial_i\lambda')\delta(\eta_{0i} - \mathcal{P}_i)\delta(\dot{\eta}_{0i} - \mathcal{P}_{0i})
$$

$$
\delta(\dot{\eta}_i + \mathcal{P}_i + \partial_i\xi)\delta(\dot{c} - b)\delta(\dot{\xi} - \partial^i\eta_i)\delta(\dot{\lambda}' - \partial^i\lambda_i)\delta(\dot{\pi}_{\xi'} + \partial^i\bar{\eta}_i)
$$

$$
\exp\left\{ i \int d^Dx \left[\frac{1}{8}(\dot{B}_{ij} - \partial_i\lambda_j + \partial_j\lambda_i)^2 + \bar{\eta}^i(\dot{\mathcal{P}}_i + \partial^j\partial_i\eta_j - \partial^j\partial_j\eta_i) + \bar{c}(\dot{b} + \partial^i\partial_i c) - \right.\right.
$$

$$
\left.\left. -\pi_{\xi'}\partial^i\mathcal{P}_i + \frac{1}{4}(\partial_i B_{ij})^2 - \frac{1}{8}(\partial_i B_{jk})^2 \right] \right\} . \qquad (5.54)
$$

Integrando em λ_i, $\mathcal{P}_i$, b, λ_{0i}, η_{0i} e $\mathcal{P}_{0i}$, obtemos a seguinte integral

$$
Z = N \int \mathcal{D}B_{0i}\mathcal{D}B_{ij}\mathcal{D}\eta_i\mathcal{D}\bar{\eta}_i\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}\xi\mathcal{D}\lambda'\mathcal{D}\pi_{\xi'}
$$

$$
\delta(\dot{B}_{0i} + \partial^j B_{ji} + \partial_i\lambda')\delta(\dot{\eta}_i + \eta_{0i} + \partial_i\xi)\delta\dot{\xi} - \partial^i\eta_i)\delta(\dot{\lambda}' - \partial^i B_{0i})\delta(\dot{\pi}_{\xi'} + \partial^i\bar{\eta}_i)
$$

$$
\exp\left\{ i \int d^Dx \left[\frac{1}{8}(\dot{B}_{ij} - \partial_i B_{0j} + \partial_j B_{0i})^2 - \bar{\eta}^i(\ddot{\eta}_i + \partial^j\partial_j\eta_i) + \bar{c}(\ddot{c} + \partial^i\partial_i c) + \right.\right.
$$

$$
\left.\left. +\pi_{\xi'}(\ddot{\xi} + \partial^i\partial_i\xi) + \frac{1}{4}(\partial_i B_{ij})^2 - \frac{1}{8}(\partial_i B_{jk})^2 \right] \right\} . \qquad (5.55)
$$

Usando os funcionais delta no integrando de (5.55), podemos reescrever alguns termos da ação em uma forma covariante

$$\frac{1}{8}(\dot{B}_{ij} - \partial_i B_{0j} + \partial_j B_{0i})^2 + \frac{1}{4}(\partial_i B_{ij})^2 - \frac{1}{8}(\partial_i B_{jk})^2 - \frac{1}{4}\lambda'\partial^2\lambda' =$$

$$= \frac{1}{8}\partial^\mu B^{\nu\rho}\partial_\mu B_{\nu\rho} \quad . \tag{5.56}$$

Redefinindo outras variáveis da seguinte forma

$$\eta_\mu \equiv (\xi,\ -\eta_i) \quad ; \quad \bar{\eta}_\mu \equiv (\pi_{\xi'},\ \bar{\eta}_i) \quad , \tag{5.57}$$

obtemos a seguinte forma para a função de partição

$$Z = N \int \mathcal{D}B_{\mu\nu}\mathcal{D}\eta_\mu\mathcal{D}\bar{\eta}_\mu\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}\lambda'\delta(\partial^\mu\eta_\mu)\delta(\partial^\mu\bar{\eta}_\mu)\delta(\partial^\nu B_{\mu\nu} - \partial_\mu\lambda')$$

$$\exp\left[i\int d^Dx\left(-\frac{1}{8}B^{\mu\nu}\partial^2 B_{\mu\nu} + \bar{\eta}^\mu\partial^2\eta_\mu + \bar{c}\partial^2 c + \frac{1}{4}\lambda'\partial^2\lambda'\right)\right] \quad . \tag{5.58}$$

De acordo com o funcional delta $\delta(\partial^\nu B_{\mu\nu} - \partial_\mu\lambda')$, temos que

$$\partial^2\lambda' = \partial^\mu\partial_\mu\lambda' = \partial^\mu\partial^\nu B_{\mu\nu} = 0 \quad . \tag{5.59}$$

Portanto, o último termo da ação em (5.58) é nulo. Exponenciando os funcionais delta, obtemos a seguinte integral

$$Z = N \int \mathcal{D}B_{\mu\nu}\mathcal{D}\eta_\mu\mathcal{D}\bar{\eta}_\mu\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}\lambda'\mathcal{D}\pi\mathcal{D}\bar{\pi}\mathcal{D}\alpha_\mu$$

$$\exp\Big\{i\int d^Dx\big[-\frac{1}{8}B^{\mu\nu}\partial^2 B_{\mu\nu} + \bar{\eta}^\mu\partial^2\eta_\mu + \bar{c}\partial^2 c +$$

$$+\pi\partial^\mu\eta_\mu + \bar{\pi}\partial^\mu\bar{\eta}_\mu + \alpha^\mu(\partial^\nu B_{\mu\nu} - \partial_\mu\lambda')\big]\Big\} \quad . \tag{5.60}$$

Integrando em η_μ, $\bar{\eta}_\mu$, π e $\bar{\pi}$, obtemos

$$Z = N \int \mathcal{D}B_{\mu\nu}\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}\lambda'\mathcal{D}\alpha_\mu\ (\det\partial^2)^D$$

$$\exp\left[i\int d^Dx\left(-\frac{1}{8}B^{\mu\nu}\partial^2 B_{\mu\nu} + +\bar{c}\partial^2 c + \alpha^\mu\partial^\nu B_{\mu\nu} - \alpha^\mu\partial_\mu\lambda'\right)\right] \quad . \tag{5.61}$$

Integrando em c, $\bar{c}$,

$$Z = N \int \mathcal{D}B_{\mu\nu}\mathcal{D}\lambda'\mathcal{D}\alpha_\mu \, (\det \partial^2)^{(D-1)}$$

$$\exp\left[i \int d^D x \left(-\frac{1}{8}B^{\mu\nu}\partial^2 B_{\mu\nu} + +\alpha^\mu \partial^\nu B_{\mu\nu} - \alpha^\mu \partial_\mu \lambda'\right)\right] \quad . \tag{5.62}$$

Efetuando a integração em λ' e completando quadrados em $B_{\mu\nu}$, obtemos

$$Z = N \int \mathcal{D}B_{\mu\nu}\mathcal{D}\alpha_\mu \, (\det \partial^2)^{(D-1)}\delta(\partial^\mu \alpha_\mu)$$

$$\exp\left\{i \int d^D x \left[-\frac{1}{8}(B^{\mu\nu} + 4\partial^{-2}\partial^{[\nu}\alpha^{\mu]})\partial^2(B_{\mu\nu} + 4\partial^2\partial_{[\nu}\alpha_{\mu]}) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -2\partial^{[\nu}\alpha^{\mu]}\partial^{-2}\partial_{[\nu}\alpha_{\mu]}\right]\right\} \quad . \tag{5.63}$$

Integrando agora em $B_{\mu\nu}$, chegamos a

$$Z = N \int \mathcal{D}\alpha_\mu \, (\det \partial^2)^{(D-1)-D(D-1)/4}\delta(\partial^\mu \alpha_\mu)$$

$$\exp\left[i \int d^D x (-2\partial^{[\nu}\alpha^{\mu]}\partial^{-2}\partial_{[\nu}\alpha_{\mu]})\right] \quad . \tag{5.64}$$

No entanto,

$$-2\partial^{[\nu}\alpha^{\mu]}\partial^{-2}\partial_{[\nu}\alpha_{\mu]} = \alpha^\mu \alpha_\mu + \partial^\mu \alpha_\mu \partial^{-2}\partial^\nu \alpha_\mu \quad . \tag{5.65}$$

Valendo-nos do funcional $\delta(\partial^\mu \alpha_\mu)$, podemos zerar a segunda metade da expressão, ficando com

$$Z = N \int \mathcal{D}\alpha_\mu \, (\det \partial^2)^{(D-1)-D(D-1)/4}\delta(\partial^\mu \alpha_\mu) \, \exp\left(i \int d^D x \; \alpha^\mu \alpha_\mu\right) \quad . \tag{5.66}$$

Esta é a função de partição a partir da qual mostraremos a equivalência da teoria do campo tensorial antissimétrico com outras teorias.

Exponenciando o funcional delta, chegamos a

$$Z = N \int \mathcal{D}\alpha_\mu \mathcal{D}\phi \, (\det \partial^2)^{(D-1)-D(D-1)/4}$$

$$\exp\left[i\int d^Dx\ (\alpha^\mu\alpha_\mu + \phi\partial^\mu\alpha_\mu)\right] \ . \tag{5.67}$$

Integrando em α_μ, chegamos finalmente à expressão

$$Z = N\int \mathcal{D}\alpha_\mu\mathcal{D}\phi\ (\det\partial^2)^{(D-1)-D(D-1)/4}\ \exp\left(i\int d^Dx\ \frac{1}{4}\phi\partial^2\phi\right) \ . \tag{5.68}$$

A função de partição para um campo escalar ϕ tem a forma da expressão acima, não tendo, porém, nenhum termo $\det\partial^2$. Por isso, para que essa expressão corresponda à função de partição de um campo escalar, devemos ter

$$D - 1 - \frac{D(D-1)}{4} = 0 \ . \tag{5.69}$$

Para que a equação acima se verifique, devemos ter $D = 1$ ou $D = 4$. Uma vez que o tensor antissimétrico de ordem dois necessita de $D \geq 3$, chegamos à conclusão de que o campo tensorial antissimétrico é equivalente ao campo escalar somente em quatro dimensões, o que mostra que também no caso quântico o campo tensorial antissimétrico é equivalente a um campo escalar em quatro dimensões.

Vamos, agora, efetuar a seguinte mudança de variáveis na eq. (5.66)

$$\alpha_\mu \longrightarrow (\partial^2)^{\frac{1}{2}}\alpha_\mu \ . \tag{5.70}$$

O jacobiano dessa transformação é dado por

$$J = (\det\partial^2)^{\frac{D}{2}} \ . \tag{5.71}$$

Temos, agora, a seguinte forma para a função de partição

$$Z = N\int \mathcal{D}\alpha_\mu\ (\det\partial^2)^{(D-1)-D(D-1)/4}(\det\partial^2)^{\frac{D}{2}}\delta[(\partial^2)^{\frac{1}{2}}\partial^\mu\alpha_\mu]$$

$$\exp\left(-i\int d^Dx\ \alpha^\mu\partial^2\alpha_\mu\right) =$$

$$= N\int \mathcal{D}\alpha_\mu\ (\det\partial^2)^{(D-1)-D(D-1)/4+D/2-1/2}\delta(\partial^\mu\alpha_\mu)$$

$$\exp\left(-i\int d^Dx\ \alpha^\mu\partial^2\alpha_\mu\right) \ . \tag{5.72}$$

A expressão acima equivale à expressão obtida para um campo vetorial sem massa no gauge de Lorentz se tivermos um termo linear em $\det \partial^2$. Por isso, para que a expressão acima seja equivalente à função de partição para um campo vetorial, devemos ter

$$D - 1 - \frac{D(D-1)}{4} + \frac{D}{2} - \frac{1}{2} = 1 \ . \tag{5.73}$$

Essa equação resulta em $D = 2$ ou $D = 5$. Novamente, considerando as condições de existência do tensor antissimétrico, chegamos ao resultado de que ele equivale a um campo vetorial somente em cinco dimensões, conforme fora obtido classicamente.

Capítulo 6

EQUIVALÊNCIA ENTRE AS FORMULAÇÕES DE $1^{\underline{a}}$ E $2^{\underline{a}}$ ORDEM DO TENSOR ANTISSIMÉTRICO

Existe uma formulação da teoria do tensor antissimétrico baseada em dois campos chamada de formulação de $1^{\underline{a}}$ ordem, um sendo o tensor antissimétrico $B_{\mu\nu}$ e o outro, um campo auxiliar A_μ. Essa formulação é bastante utilizada para a teoria do tensor antissimétrico massivo[31] e, portanto, é interessante mostrar que ela equivale tanto clássica quanto quanticamente à formulação de $2^{\underline{a}}$ ordem. Vamos, para isso, considerar o caso de massa nula e compará-lo à formulação de $2^{\underline{a}}$ ordem desenvolvida no capítulo anterior.

Iniciaremos este capítulo mostrando a equivalência a nível clássico da formulação de $1^{\underline{a}}$ ordem ao campo escalar em 4 dimensões, passando depois para a demonstração da equivalência clássica e quântica (via quantização BRST-BFV) à formulação de $2^{\underline{a}}$ ordem.

6.1 Equivalência ao campo escalar

A densidade lagrangiana para a formulação de 1ª ordem em quatro dimensões é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}B^*_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}A^\mu A_\mu \quad , \tag{6.1}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial\nu A_\mu \quad , \quad B^*_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}B^{\rho\sigma} \quad .$$

Usando as equações de movimento para $B_{\mu\nu}$, obtemos

$$F_{\mu\nu} = F_{\nu\mu} \Rightarrow F_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \partial_\mu A_\nu = \partial_\nu A_\mu \Rightarrow A_\mu = \partial_\mu \phi \quad , \tag{6.2}$$

onde ϕ é um campo escalar.

Aplicando as equações de movimento para A_μ, obtemos a relação

$$A_\mu = \partial^\nu B^*_{\nu\mu} \quad . \tag{6.3}$$

Igualando (6.2) a (6.3), obtemos

$$\partial_\mu \phi = \partial^\nu B^*_{\nu\mu} \Rightarrow \partial^\mu \partial_\mu \phi = \partial^\mu \partial^\nu B^*_{\mu\nu} = 0 \quad . \tag{6.4}$$

Esta é a equação de movimento para um campo escalar. Portanto, podemos escrever os campos $B_{\mu\nu}$ e A_μ em termos de um campo escalar. Devemos nos lembrar, no entanto, que essa equivalência está sujeita aos mesmos limites discutidos na seção 5.1 .

6.2 Equivalência a nível clássico

Dadas as densidades lagrangianas de 1ª ordem e 2ª ordem

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{4}B^*_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}A^\mu A_\mu \quad , \tag{6.5a}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial\nu A_\mu \quad , \quad B^*_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}B^{\rho\sigma} \quad ;$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8}\partial^\rho B^{\mu\nu}\partial_\rho B_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\partial^\mu B_{\mu\nu}\partial_\rho B^{\rho\nu} \quad , \tag{6.5b}$$

queremos mostrar que, a partir da densidade lagrangiana $\mathcal{L}'$, podemos chegar a $\mathcal{L}$. Para isso, usamos as equações de movimento para A_μ, que resultam na equação

$$A_\mu = \partial^\nu B^*_{\nu\mu} \quad . \tag{6.6}$$

Substituindo (6.6) em (6.5a), obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= -\frac{1}{4}B^*_{\mu\nu}(\partial^\mu\partial_\rho B^{*\rho\sigma} - \partial^\nu\partial_\rho B^{*\rho\mu}) - \frac{1}{4}\partial^\mu B^*_{\mu\nu}\partial_\rho B^{*\rho\nu} = \\ &= \frac{1}{4}\partial_\mu B^{*\mu\nu}\partial^\rho B^*_{\rho\nu} = \frac{1}{8}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{\rho\nu\gamma\delta}\partial_\mu B_{\alpha\beta}\partial^\rho B^{\gamma\delta} = \\ &= \frac{1}{8}B_{\alpha\beta}\partial^\mu\partial\mu B^{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\partial_\alpha B^{\alpha\beta}\partial^\mu B_{\mu\beta} = \mathcal{L} \quad .\end{aligned} \tag{6.7}$$

Portanto, chegamos ao resultado de que as duas formulações são equivalentes a nível clássico quando usamos as equações de movimento.

Também é possível mostrar que existe uma transformação canônica que relaciona as duas formulações. Para isso, vamos escrever a densidade lagrangiana da formulação de 1ª ordem separando a parte espacial da temporal

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\epsilon_{0ijk}B^{jk}(\dot{A}^i - \partial^i A^0) - \frac{1}{4}\epsilon_{0ijk}(\partial^i A^j - \partial^j A^i) - \frac{1}{4}(A_0)^2 + \frac{1}{4}(A_i)^2 \quad . \tag{6.8}$$

Os momentos canonicamente conjugados são

$$\pi_0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}^0} = 0 \quad , \quad \pi_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}^i} = -\frac{1}{4}\epsilon_{0ijk}B^{jk} \tag{6.9}$$

$$\pi_{0i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{B}^{0i}} = 0 \quad , \quad \pi_{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{B}^{ij}} = 0 \quad . \tag{6.10}$$

Obtemos, então, a densidade hamiltoniana canônica

$$\mathcal{H}_c{}' = \pi^0 \dot{A}_0 + \pi^i \dot{A}_i + \pi^{0i} \dot{B}_{0i} + \frac{1}{2}\pi^{ij}\dot{B}_{ij} - \mathcal{L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}_c = \pi^0 A_0 + \left(\pi^i + \frac{1}{4}\epsilon^{0ijk}B_{jk}\right)\dot{A}_i + \pi^{0i}\dot{B}_{0i} + \frac{1}{2}\pi^{ij}\dot{B}_{ij} -$$

$$-\frac{1}{4}\epsilon^{0ijk}B_{jk}\partial_i A_0 + \frac{1}{4}\epsilon^{0ijk}B_{0k}(\partial_i A_j - \partial_j A_i) + \frac{1}{4}(A_0)^2 - \frac{1}{4}(A_i)^2 \quad . \tag{6.11}$$

Podemos, então, escrever a densidade lagrangiana da formulação de 1ª ordem como sendo dada por

$$\mathcal{L}' = \pi^0 \dot{A}_0 + \pi^i \dot{A}_i + \pi^{0i}\dot{B}_{0i} + \frac{1}{2}\pi^{ij}\dot{B}_{ij} - \mathcal{H}_c{}' = \pi^i \dot{A}_i - \mathcal{L}' \tag{6.12a}$$

e a densidade lagrangiana da formulação de 2ª ordem como

$$\mathcal{L} = \pi^{0i}\dot{B}_{0i} + \frac{1}{2}\pi^{ij}\dot{B}_{ij} - \mathcal{H}_c = \frac{1}{2}\pi^{ij}\dot{B}_{ij} - \mathcal{L} \quad . \tag{6.12b}$$

Seguindo o mesmo procedimento utilizado no capítulo 5, chegamos às equações

$$\pi_i = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial A^i} \quad , \quad \pi_{ij} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial B^{ij}} \quad , \quad \mathcal{H}_c{}' = \mathcal{H}_c + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \quad , \tag{6.13}$$

onde $\mathcal{F}$ é a densidade da função geradora de uma transformação canônica.

Se escolhermos para essa densidade a expressão

$$\mathcal{F} = \frac{1}{4}\epsilon_{0ijk}B^{ij}A^k \quad , \tag{6.14}$$

chegamos às relações

$$\pi_i = \frac{1}{4}\epsilon_{0ijk}B^{jk} \quad , \quad \pi_{ij} = \frac{1}{2}\epsilon_{0ijk}A^k \quad \text{e}$$

$$\mathcal{H}_c{}' = \mathcal{H}_c \quad . \tag{6.15}$$

Substituindo o valor de π_i em (6.12a) e considerando a igualdade entre as duas densidades hamiltonianas canônicas, obtemos

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{4}\epsilon_{0ijk}B^{jk}\dot{A}^i - \mathcal{H}_c =$$

$$= -\frac{1}{4}\epsilon_{0ijk}A^k\dot{B}^{ij} - \mathcal{H}_c \ .$$

Considerando, agora, a relação dada para π_{ij}, obtemos o resultado

$$\mathcal{L}' = \pi^{ij}\dot{B}_{ij} - \mathcal{H}_c = \mathcal{L} \ , \tag{6.16}$$

mostrando a equivalência entre as duas formulações mediante a transformação canônica gerada pela integral no espaço da densidade de função geradora dada por (6.13).

6.3 Equivalência a nível quântico

Vamos agora mostrar a equivalência quântica entre a formulação do tensor antissimétrico de 1ª ordem e a formulação de 2ª ordem. Para isso, efetuaremos a quantização BRST-BFV da formulação de 1ª ordem e mostraremos que, por meio de uma escolha apropriada das funções fixadoras de gauge de ambas as formulações , podemos chegar a funções de partição idênticas.

Das equações para os momentos canonicamente conjugados (6.9) e (6.10) obtidas na sessão anterior, nós obtemos os seguintes vínculos de 1ª ordem

$$\pi_0 \approx 0 \qquad \phi_i = \pi_i + \tfrac{1}{2}\epsilon^{0ijk}b^{jk} \approx 0$$
$$\pi_{0i} \approx 0 \qquad \pi_{ij} \approx 0$$

Montamos a hamiltoniana primária adicionando ao espaço de fase os multiplicadores de Lagrange relativos a cada vínculo

$$\mathcal{H}_p = \mathcal{H}_c + \lambda^0\pi_0 + \lambda^i\phi_i + \lambda^{0i}\pi_{0i} + \frac{1}{2}\lambda^{ij}\pi_{ij} \quad . \tag{6.17}$$

Aplicando a condição de consistência para os vínculos de 1ª ordem, podemos fixar os valores dos seguintes multiplicadores de Lagrange

$$\dot{\phi} \approx 0 \Rightarrow \lambda_{ij} \approx \partial_i B_{0j} - 2\epsilon_{0ijk}\dot{\pi}^k + \epsilon_{0ijk}A^k \quad , \tag{6.18}$$

$$\dot{\pi}_{ij} \approx 0 \Rightarrow \lambda_i \approx \partial_i A_0 - \dot{A}_i \quad . \tag{6.19}$$

Também obtemos os seguintes vínculos de 2ª ordem

$$\dot{\pi}_0 \approx 0 \Rightarrow \varphi_0 = 2\partial^i\pi_i - A_0 \approx 0 \quad , \tag{6.20}$$

$$\dot{\pi}_{0i} \approx 0 \Rightarrow \varphi_{0i} = \epsilon_{0ijk}(\partial^j A^k - \partial^k A^j) \approx 0 \quad . \tag{6.21}$$

Substituindo os multiplicadores de Lagrange cujos valores foram fixados e adicionando os vínculos de 2ª ordem e seus respectivos multiplicadores de Lagrange, obtemos a densidade hamiltoniana secundária

$$\mathcal{H}_s = \pi^0\dot{A}_0 + \pi^{0i}\dot{A}_{0i} + \frac{1}{2}\pi^{ij}\dot{B}_{ij} + \frac{1}{4}\epsilon^{0ijk}B_{0k}(\partial_i A_j - \partial_j A_i) + \frac{1}{2}\pi^{ij}(\partial_i B_{0j} +$$

$$+\epsilon_{0ijk}A^k)\pi^i\partial_i A_0 - \pi^{ij}\epsilon_{0ijk}\dot{\pi}^k + \frac{1}{4}(\dot{A}_0)^2 - \frac{1}{4}(\dot{A}_i)^2 + \lambda^0\pi_0 +$$
$$+\lambda^{0i}\pi_{0i} + \alpha^0\varphi_0 + \alpha^{0i}\varphi_{0i} \quad . \tag{6.22}$$

Aplicando a condição de consistência para os vínculos de 2ª ordem, encontramos

$$\dot{\varphi}_0 \approx 0 \Rightarrow \lambda_0 = -\dot{A}_0 \quad , \tag{6.23a}$$
$$\dot{\varphi}_{0i} = 0 \quad . \tag{6.23b}$$

Substituindo o multiplicador de Lagrange, obtemos a densidade hamiltoniana estendida

$$\mathcal{H}_e = \pi^{0i}\dot{A}_{0i} + \frac{1}{2}\pi^{ij}\dot{B}_{ij} + \frac{1}{4}\epsilon^{0ijk}B_{0k}(\partial_i A_j - \partial_j A_i) + \frac{1}{2}\pi^{ij}(\partial_i B_{0j} + \epsilon_{0ijk}A^k) +$$
$$+\pi^i\partial_i A_0 - \pi^{ij}\epsilon_{0ijk}\dot{\pi}^k + \frac{1}{4}(\dot{A}_0)^2 - \frac{1}{4}(\dot{A}_i)^2 + \lambda^{0i}\pi_{0i} + \alpha^0\varphi_0 + \alpha^{0i}\varphi_{0i} \quad . \tag{6.24}$$

Vamos, agora, estudar a álgebra dos vínculos. Os parênteses de Poisson que não são nulos são

$$\{\pi_0(x), \varphi^0(y)\} = -\delta(x-y) \quad , \tag{6.25}$$

$$\{\phi_i(x), \pi_{jk}(y)\} = \frac{1}{4}\epsilon_{0ijk}\delta(x-y) \quad . \tag{6.26}$$

Vemos, então, que temos vínculos de 2ª classe, o que nos permite eliminá-los através dos parênteses de Dirac.

Para isso, montamos a matriz de Dirac e calculamos a sua inversa

$$||Q_{rs}|| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta(x-y) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4}\epsilon_{0ijk}\delta(x-y) & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\epsilon_{0ijk}\delta(x-y) & 0 & 0 \\ -\delta(x-y) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$||Q_{rs}||^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta(x-y) \\ 0 & 0 & 4\epsilon_{0ijk}\delta(x-y) & 0 \\ 0 & -4\epsilon_{0ijk}\delta(x-y) & 0 & 0 \\ \delta(x-y) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Os parênteses de Dirac ficam definidos como

$$\{f,g\}_D = \{f,g\}_D - \{f,\pi_0\}\{\varphi_0,g\} + \{f,\varphi\}\{\pi_0,g\} +$$
$$+4\epsilon^{0ijk}\{f,\phi_i\}\{\pi_{jk},g\} - 4\epsilon^{0ijk}\{f,\pi_{jk}\}\{\phi_i,g\} \quad . \tag{6.27}$$

Esse procedimento nos torna possível eliminar os vínculos de 2ª classe, igualando-os fortemente a zero. Ficamos, então, com os vínculos de 1ª classe

$$\pi_{0i} \quad , \quad \varphi_{0i} = \epsilon_{0ijk}(\partial^j A^k - \partial^k A^j) \quad . \tag{6.28}$$

No entanto, os vínculos φ_{0i} não são linearmente independentes, como mostramos a seguir

$$\int d^D x' \; Z^i(x,x')\varphi_{0i}(x') = \int d^D x' \; Z^i(x,x')\epsilon_{0ijk}[\partial^j A^k(x') - \partial^k A^j(x')] \quad .$$

Escolhendo $Z^i(x,x') = \frac{\partial}{\partial x'_i}\delta(x-x')$, obtemos que

$$\int d^D x' \; Z^i(x,x')\varphi_{0i}(x') = 0 \quad . \tag{6.29}$$

Da mesma forma como foi mostrado para a formulação de 2ª ordem, essas funções $Z^i(x,x')$ são linearmente independentes e a teoria é, também aqui, redutível em 1ª estágio.

Quando igualamos fortemente os vínculos de 2ª classe a zero, estabelecemos certas relações entre algumas das variáveis

$$\pi_0 = \pi_{ij} = 0 \quad , \tag{6.30}$$

$$\phi_i = 0 \Rightarrow \pi_i = -\frac{1}{4}\epsilon_{0ijk}B^{jk} \quad , \tag{6.31}$$

$$\varphi_0 = 0 \Rightarrow 2\partial^i \pi_i = A_0 \quad . \tag{6.32}$$

Portanto, podemos estabelecer uma relação entre A_0 e B_{ij} que é a mesma estabelecida a nível clássico (6.3) pelas equações de movimento

$$A_0 = -\frac{1}{2}\epsilon_{0ijk}\partial^i B^{jk} \quad . \tag{6.33}$$

Com isso, podemos eliminar algumas variáveis desta formulação , escrevendo-as em termos das outras.

A densidade hamiltoniana canônica fica, agora

$$\mathcal{H}_c = -\frac{1}{4}(A_i)^2 + \frac{1}{4}\epsilon_{0ijk}B^{0k}(\partial^i A^j - \partial^j A^i) \ . \tag{6.34}$$

Os parênteses de Dirac dos vínculos de 1ª classe são nulos, o que nos mostra que as funções de estrutura são nulas (a álgebra é abeliana).

Vamos, agora, associar os momentos canonicamente conjugados aos multiplicadores de Lagrange, de acordo com o procedimento mostrado na sessão 4.2

$$\lambda^{0i} \to p_{0i} \ , \ \{\lambda^{0i}, p_{0j}\} = \delta^i_j \tag{6.35}$$

$$\lambda^i \to p_i \ , \ \{\lambda^i, p_j\} = \delta^i_j \ , \tag{6.36}$$

sendo esses momentos sujeitos à condição de vínculo

$$p_{0i} \approx 0 \ , \ p_i \approx 0 \ . \tag{6.37}$$

Também associamos os fantasmas

$$\pi_{0i} \ , \ p_{0i} \longrightarrow (\eta^{0i}, \bar{\mathcal{P}}_{0i}) \ , \ (\mathcal{P}^{0i}, \bar{\eta}_{0i})$$

$$\varphi_{0i} \ , \ p_i \longrightarrow (\eta^i, \bar{\mathcal{P}}_i) \ , \ (\mathcal{P}^i, \bar{\eta}_i) \ ,$$

$$\{\eta^{0i}, \bar{\mathcal{P}}_{0j}\} = \{\mathcal{P}^{0i}, \bar{\eta}_{0j}\} = \delta^i_j \ , \tag{6.38}$$

$$\{\eta^i, \bar{\mathcal{P}}_j\} = \{\mathcal{P}^i, \bar{\eta}_j\} = \delta^i_j \ . \tag{6.39}$$

Temos, ainda, que adicionar um multiplicador de Lagrange e seu momento canonicamente conjugado relativos à função $Z_i(x, x')$

$$Z_i \longrightarrow (\xi, \pi_\xi) \ , \{\xi, \pi_\xi\} = 1 \tag{6.40}$$

e os fantasmas de fantasmas

$$(c, \bar{b}) \ ; \ (b, \bar{c}) \ ,$$

$$\{c, \bar{b}\} = \{b, \bar{c}\} = 1 \ . \tag{6.41}$$

Finalizando, adicionamos os pares de fantasmas extras

$$(\lambda', \pi') \ ; \ (\xi', \pi_{\xi'}) \ ,$$

$$\{\lambda', \pi'\} = \{\xi', \pi_{\xi'}\} = 1 \ . \tag{6.42}$$

Existem dois motivos para estarmos usando aqui os mesmos símbolos para representar os fantasmas, multiplicadores de Lagrange e seus momentos canonicamente conjugados que foram usados no capítulo anterior para a formulação de 2ª ordem. O primeiro é para simplificar a notação e o segundo ficará claro no final deste capítulo.

As paridades de Grassmann e os números fantasma das variáveis acima são dados pelas tabelas a seguir (de acordo com a sessão 4.3), onde P representa a paridade de Grassmann e gh, o número fantasma da variável do espaço de fase.

Vínculos	π_{0i}	φ_{0i}
P	0	0
gh	0	0

Multipls. de Lagr. e moms.	λ_{0i}	p_{0i}	λ_i	p_i	ξ	π_ξ
P	0	0	0	0	1	1
gh	0	0	0	0	1	-1

Fantasmas	η_{0i}	$\bar{\mathcal{P}}_{0i}$	$\mathcal{P}_{0i}$	$\bar{\eta}_{0i}$
P	1	1	1	1
gh	1	-1	1	-1

Fantasmas	η_i	$\bar{\mathcal{P}}_i$	$\mathcal{P}_i$	$\bar{\eta}_i$
P	1	1	1	1
gh	1	-1	1	-1

Fantasmas de fantasmas	c	$\bar{b}$	b	$\bar{c}$
P	2	2	2	2
gh	2	-2	2	-2

Fantasmas extras	λ'	π'	ξ'	$\pi_{\xi'}$
P	0	0	1	1
gh	1	-1	2	-2

A carga de BRST é dada por (4.30)

$$Q' = \int d^{D-1}x(\eta^{0i}\pi_{0i} + \eta^i\varphi_{0i} + c\partial^i\bar{\mathcal{P}}_i + p^{0i}\mathcal{P}_{0i} + p^i\mathcal{P}_i + \pi_\xi b + \pi'\xi') \quad , \quad (6.43)$$

e gera as transformações

$$\begin{array}{ll}
\delta B_{0i} = \eta_{0i} & \delta\pi_{0i} = 0 \\
\delta B_{ij} = 0 & \delta A_i = \epsilon_{0ijk}(\partial^j\eta^k - \partial^k\eta^j) \\
\delta\lambda_{0i} = \mathcal{P}_{0i} & \delta p_{0i} = 0 \\
\delta\lambda_i = \mathcal{P}_i & \delta p_i = 0 \\
\delta\xi = b & \delta\pi_\xi = 0 \\
\delta\eta_{0i} = 0 & \delta\bar{\mathcal{P}}_{0i} = \pi_{0i} \\
\delta\mathcal{P}_{0i} = 0 & \delta\bar{\eta}_{0i} = p_{0i} \\
\delta\eta_i = -\partial_i c & \delta\bar{\mathcal{P}}_i = \varphi_i = \epsilon_{0ijk}(\partial^j A^k - \partial^k A^j) \\
\delta\mathcal{P}_i = 0 & \delta\bar{\eta}_i = p_i \\
\delta c = 0 & \delta\bar{b} = -\partial^i\bar{\mathcal{P}}_i \\
\delta b = 0 & \delta\bar{c} = -\pi_\xi \\
\delta\lambda' = \xi' & \delta\pi' = 0 \\
\delta\xi' = 0 & \delta\pi_{\xi'} = \pi'
\end{array}$$

A lagrangiana efetiva é dada por

$$L'_{ef} = L'_k - H'_c - \{\Psi', Q'\} \quad , \quad (6.44)$$

onde L'_k é a lagrangiana cinética

$$L'_k = \int d^{D-1}x \left(-\frac{1}{4}\epsilon_{0ijk}B^{jk}\dot{A}_i + \pi^{0i}\dot{B}_{0i} + p^{0i}\dot{\lambda}_{0i} + p^i\dot{\lambda}_i + \bar{\eta}^{0i}\dot{\mathcal{P}}_{0i} + \bar{\mathcal{P}}^{0i}\dot{\eta}_{0i} + \right.$$

$$\left. + \bar{\eta}^i\dot{\mathcal{P}}_i + \bar{\mathcal{P}}^i\dot{\eta}_i + \bar{b}\dot{c} + \bar{c}\dot{b} + \pi_\xi\dot{\xi} + \pi'\dot{\lambda}' + \pi_{\xi'}\dot{\xi}'\right) \quad , \quad (6.45)$$

H'_c é a hamiltoniana canônica

$$H'_c = \int d^{D-1}x \left[-\frac{1}{4}(A_i)^2 + \frac{1}{4}\epsilon_{0ijk}B^{0k}(\partial^i A^j - \partial^j A^i)\right] \quad (6.46)$$

e Ψ' é a função fixadora de gauge.

Notemos, agora, que existem muitas semelhanças entre as densidades lagrangianas efetivas das duas teorias, que são dadas abaixo para as formulações de 2ª e 1ª ordem, respectivamente

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{ef} = \pi^{0i}\dot{B}_{0i} + \frac{1}{2}\pi^{ij}\dot{B}_{ij} + p^{0i}\dot{\lambda}_{0i} + p^{i}\dot{\lambda}_{i} + \bar{\eta}^{0i}\dot{\mathcal{P}}_{0i} + \bar{\mathcal{P}}^{0i}\dot{\eta}_{0i} + \\ + \bar{\eta}^{i}\dot{\mathcal{P}}_{i} + \bar{\mathcal{P}}^{i}\dot{\eta}_{i} + \bar{b}\dot{c} + \bar{c}\dot{b} + \pi_{\xi}\dot{\xi} + \pi'\dot{\lambda}' + \pi_{\xi'}\dot{\xi}' - \\ - \frac{1}{2}(\pi_{ij})^2 + \frac{1}{4}(\partial_i B_{ij})^2 - \frac{1}{8}(\partial_i B_{jk})^2 - \{\Psi, Q\} \quad ,\end{aligned} \tag{6.47}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'_{ef} = -\frac{1}{4}\epsilon_{0ijk}B^{jk}\dot{A}_i + \pi^{0i}\dot{B}_{0i} + p^{0i}\dot{\lambda}_{0i} + p^{i}\dot{\lambda}_{i} + \bar{\eta}^{0i}\dot{\mathcal{P}}_{0i} + \bar{\mathcal{P}}^{0i}\dot{\eta}_{0i} + \\ + \bar{\eta}^{i}\dot{\mathcal{P}}_{i} + \bar{\mathcal{P}}^{i}\dot{\eta}_{i} + \bar{b}\dot{c} + \bar{c}\dot{b} + \pi_{\xi}\dot{\xi} + \pi'\dot{\lambda}' + \pi_{\xi'}\dot{\xi}' + \\ + \frac{1}{4}(A_i)^2 - \frac{1}{4}\epsilon_{0ijk}B^{0k}(\partial^i A^j - \partial^j A^i) - \{\Psi', Q'\} \quad .\end{aligned} \tag{6.48}$$

Se fizermos a seguinte redefinição dos campos A_i

$$A_i = \epsilon_{0ijk}\pi^{jk} \quad , \tag{6.49}$$

temos que

$$\frac{1}{4}(A_i)^2 = -\frac{1}{2}(\pi_{ij})^2 \quad . \tag{6.50}$$

Substituindo o valor do momento π_{ij} [eq. (5.23)], obtemos a seguinte relação

$$A_i = \frac{1}{2}\epsilon_{0ijk}\dot{B}^{jk} + \epsilon_{0ijk}\partial^j B^{0k} \quad . \tag{6.51}$$

Combinando essa relação à relação (6.32)

$$A_0 = -\frac{1}{2}\epsilon_{0ijk}\partial^i B^{jk} \tag{6.52}$$

obtida através do vínculos , obtemos a forma covariante

$$A_\nu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\mu B^{\rho\sigma} = \partial^\mu B^*_{\mu\nu} \quad . \tag{6.53}$$

Esta é justamente a relação obtida classicamente [eq. (6.6)], utilizando as equações de movimento!

Também podemos estabelecer uma equivalência entre os vínculos das duas formulações

$$\varphi_{0i} = \epsilon_{0ijk}(\partial^j A^k - \partial^k A^j) = 4\partial^j \pi_{ji} \quad . \tag{6.54}$$

Considerando, ainda, que

$$-\frac{1}{4}\epsilon_{0ijk}B^{0k}(\partial^i A^j - \partial^j A^i) = \frac{1}{16}(\epsilon_{0ijk}\partial^i B^{jk})^2 = \frac{1}{4}(\partial_i B_{ij})^2 - \frac{1}{8}(\partial_i B_{jk})^2$$

e fazendo uma correspondência um a um entre os fantasmas, obtemos para a lagrangiana efetiva de 1ª ordem, a expressão

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'_{ef} = {} & \pi^{0i}\dot{B}_{0i} + \frac{1}{2}\pi^{ij}\dot{B}_{ij} + p^{0i}\dot{\lambda}_{0i} + p^i\dot{\lambda}_i + \bar{\eta}^{0i}\dot{\mathcal{P}}_{0i} + \bar{\mathcal{P}}^{0i}\dot{\eta}_{0i} + \\ & + \bar{\eta}^i\dot{\mathcal{P}}_i + \bar{\mathcal{P}}^i\dot{\eta}_i + \bar{b}\dot{c} + \bar{c}\dot{b} + \pi_\xi\dot{\xi} + \pi'\dot{\lambda}' + \pi_{\xi'}\dot{\xi}' - \\ & - \frac{1}{2}(\pi_{ij})^2 + \frac{1}{4}(\partial_i B_{ij})^2 - \frac{1}{8}(\partial_i B_{jk})^2 - \{\Psi', Q'\} \quad ,\end{aligned} \tag{6.55}$$

Como as integrais de trajetória não dependem das funções fixadoras de gauge, chegamos à conclusão de que as duas formulações são equivalentes também a nível quântico.

Vimos, então, que podemos chegar à equivalência quântica entre as duas formulações utilizando somente os vínculos de 2ª classe e uma redefinição de variáveis.

Capítulo 7

FORMULAÇÃO DE PARTÍCULA

Neste capítulo, expomos um modelo de partícula com spin com $N = 2$ supersimetrias acrescida de um termo de Chern-Simons dependente de uma carga q inteira cuja função de onda se mostra equivalente ao "rotacional" (field setrentgh) de um campo tensorial antissimétrico de ordem $(q-1)$. Esse modelo foi proposto recentemente por Howe, Penati, Pernice e Townsend[32] em um artigo onde a equivalência foi mostrada por meio de quantização canônica. O modelo foi primeiramente descoberto quando Howe e Townsend[33] estudavam a ocorrência de anomalias globais a dimensões ímpares em modelos de partículas com spin $N/2$ (N sendo um número natural). O modo de remover essa anomalia para partículas com $N = 2$ supersimetrias é introduzir na ação um termo proporcional a um termo de Chern-Simons, que é exatamente aquele que torna o modelo equivalente ao modelo de campos tensoriais antissimétricos.

Começaremos este capítulo fazendo uma análise do problema da anomalia global que ocorre para partículas com spin com $N = 2$ supersimetrias. Uma análise do problema da anomalia para partículas com N qualquer pode ser encontrada em [35] e uma boa discussão sobre anomalias globais é feita em [36]. Ilustraremos, depois, a equivalência entre a formulação de partícula e os campos tensoriais antissimétricos por meio da quantização canônica[32]. Na sessão 7.3, demonstraremos a equivalência entre as duas formulações utilizando a quantização via integral de trajetória (método BRST-BFV)[34]. Uma expressão formal para a amplitude de transição foi encontrada em

[37]. Por fim, faremos uma breve ilustração do caso massivo[32] dessa teoria utilizando a quantização BRST-BFV[34].

7.1 Discussão sobre a anomalia

Equações de campo livre de partículas relativísticas com spin inteiro ou semi-inteiro qualquer podem ser obtidas a partir da quantização de modelos clássicos de partículas com spin (spinning particles) com duas supersimetrias ($N = 2$). A equação de Klein-Gordon pode ser obtida a partir de um modelo de partícula sem spin e a equação de Dirac, de um modelo de partícula com spin 1/2.

Podemos, também, obter um modelo para o caso geral de uma partícula com spin N/2. Esse modelo é dado pela seguinte ação [32,35]

$$S = \int dt \left[\frac{1}{2e}(\dot{x}^\mu - i\chi_i\theta_i^\mu)^2 + \frac{1}{2}\theta_i^\mu\dot{\theta}_{i\mu} - \frac{1}{2}f\epsilon_{ij}\theta_i^\mu\theta_{j\mu}\right] - \frac{i}{2}\theta_{i\mu}(t_1)\theta_i^\mu(t_2) \quad , \quad (7.1)$$

$i, j = 1, 2$; $\mu = 1, \ldots, D$, (D é o número de dimensões do espaço-tempo), onde $x^\mu(t)$ são as coordenadas da partícula, $\theta_{i\mu}(t)$ são coordenadas anticomutantes, $e(t)$ é um campo unidimensional (einbein), χ_i são gravitinos unidimensionais e f são conexões internas para a simetria O(2). Também foi adicionado um termo de superfície necessário para que a variação da ação seja nula.

A ação (7.1) é invariante pelas seguintes transformações

a) reparametrizações na linha de universo

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= \epsilon\dot{x}^\mu & \qquad \delta e &= (\epsilon e)^{\cdot} \\ \delta\theta\mu_i &= \epsilon\dot{\theta}_i^\mu & \qquad \delta\chi_i &= (\epsilon\chi_i)^{\cdot} \\ & & \qquad \delta f &= (\epsilon f\epsilon_{ij})^{\cdot} \end{aligned} \tag{7.2}$$

onde ϵ é um parâmetro que satisfaz às condições de contorno

$$\epsilon(t_1) = \epsilon(t_2) = 0 \ .$$

b) transformações locais de supersimetria N-estendida na linha de universo

(7.3)

$$
\begin{aligned}
\delta x^\mu &= i\alpha_i\theta_i^\mu & \delta e &= 2i\chi_i\alpha_i \\
\delta\theta_i^\mu &= -\tfrac{1}{e}\alpha_i(\dot{x}^\mu - i\chi_j\theta_j^\mu) & \delta\chi_i &= \dot{\alpha}_i - \epsilon_{ij}f\alpha_j \\
& & \delta f &= 0 \ ,
\end{aligned}
$$

onde α_i são parâmetros grassmanianos que satisfazem à condição

$$\alpha_i(t_1) = \alpha_i(t_2) = 0 \ .$$

c) transformações internas locais O(2)

$$
\begin{aligned}
\delta x^\mu &= 0 & \delta e &= 0 \\
\delta\theta_i^\mu &= b_{ij}\theta_j^\mu & \delta\chi_i &= b_{ij}\chi_j \\
& & \delta f &= \dot{b} \ ,
\end{aligned}
\tag{7.4}
$$

onde b obedece às condições de contorno

$$b(t_1) = b(t_2) = 0 \ .$$

d) transformações discretas

$$
\begin{aligned}
x^\mu &\to x^\mu & e &\to e \\
\theta_1^\mu &\to \theta_1^\mu & \chi_1 &\to \chi_1 \\
\theta_2^\mu &\to -\theta_2 & \chi_2 &\to -\chi_2 \\
& & f &\to -f \ .
\end{aligned}
\tag{7.5}
$$

Essas transformações sugerem que utilizemos como condições fixadoras de gauge as condições $\dot{e} = \dot{\chi}_i = \dot{f} = 0$, que geram as condições de contorno apropriadas para os parâmetros dessas transformações .

No entanto, quando passamos para a quantização dessa teoria, a simetria O(2) não se conserva para dimensões ímpares, caracterizando uma anomalia. Essa anomalia pode ser cancelada se adicionarmos um termo extra à ação, mas isso só pode ser feito para o caso $N = 2$ (este é o motivo de só estarmos tratando desse caso). O caso geral da anomalia para um N natural qualquer é tratado na referência [35].

O problema da anomalia pode ser visto quando observamos a quantização via integral de trajetória. De acordo com o que foi visto na sessão

3.1c, a integral de trajetória de sistemas com vínculos pode ser escrita da seguinte forma [eq.(3.29)]

$$Z = N \int \mathcal{D}q_i \mathcal{D}p_i \prod_{t,l} \delta(\phi_l)\delta(\psi_l) \det ||\{\phi_j, \psi_k\}||$$

$$\exp\left\{ i \int_{t_1}^{t_2} dt[p^i \dot{q}_i - H(q^i, p_i)] \right\} \quad , \tag{7.6}$$

$i = 1, \ldots, n$; $j, k, l = 1, \ldots, m$. onde q^l e p_l representam as variáveis do espaço de fase da teoria (reais ou de Grassmann), ϕ_l são os vínculos de primeira classe e ψ_l são os vínculos fixadores de gauge. Para fazer nossa análise sobre anomalias, vamos considerar somente a parte da integral de trajetória dada pela exponencial da ação (7.1) e considerando e, χ_i e f como campos externos (o motivo será visto na sessão seguinte)

$$Z' = N' \int \mathcal{D}x^\mu \mathcal{D}p_\mu \mathcal{D}\theta_i^\mu \exp\left\{ i \int dt \left[\frac{1}{2e}(\dot{x}^2 - 2i\chi_i \theta_i^\mu \dot{x}_\mu + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \chi_i \chi_j \theta_i^\mu \theta_{j\mu}) + + \frac{i}{2}\theta_i^\mu \dot{\theta}_{i\mu} - \frac{i}{2} f \epsilon_{ij} \theta_i^\mu \theta_{j\mu} \right] \right\} \quad . \tag{7.7}$$

Podemos fazer uma redefinição de variáveis

$$\frac{1}{2e}\chi_i \chi_j - \frac{i}{2} f \epsilon_{ij} \longrightarrow -\frac{i}{2} f \epsilon_{ij} \quad , \tag{7.8}$$

de forma que temos, agora, a expressão

$$Z' = N' \int \mathcal{D}x^\mu \mathcal{D}p_\mu \mathcal{D}\theta_i^\mu \exp\left\{ i \int dt \left[\frac{1}{2e}(\dot{x}^2 - 2i\chi_i \theta_i^\mu \dot{x}_\mu) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{i}{2}\theta_i^\mu \dot{\theta}_{i\mu} - \frac{i}{2} f \epsilon_{ij} \theta_i^\mu \theta_{j\mu} \right] \right\} \quad .$$

Podemos fazer a seguinte mudança de variáveis

$$\theta_{i\mu} = \psi_{i\mu} + \gamma_{i\mu} \quad , \tag{7.9}$$

ficando com a expressão

$$Z' = N' \int \mathcal{D}x^\mu \mathcal{D}p_\mu \mathcal{D}\psi_i^\mu$$

$$\exp\left\{i\int dt\left[\frac{1}{2e}(\dot{x}^2+2i\psi_i^\mu\chi_i\dot{x}_\mu+2i\gamma_i^\mu\chi_i\dot{x}_\mu)+\frac{i}{2}(\psi_i^\mu\dot{\psi}_{i\mu}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\gamma_{i\mu}\dot{\psi}_i^\mu)-\frac{1}{2}f\epsilon_{ij}(\psi_i^\mu\psi_{j\mu}+2\gamma_i^\mu\psi_{j\mu}+\gamma_i^\mu\gamma_{j\mu})\right]\right\} \quad . \tag{7.10}$$

Podemos agrupar os termos que dependem das variáveis ψ_i^μ, ficando com a expressão

$$\frac{1}{2}(\psi_i^\mu\dot{\psi}_{i\mu}-f\epsilon_{ij}\psi_i^\mu\psi_{j\mu})+i\psi_i^\mu\left(\frac{1}{e}\chi_i\dot{x}_\mu+f\epsilon_{ij}\gamma_{j\mu}\right) \quad .$$

Efetuando a integral gaussiana sobre ψ_i^μ, obtemos o determinante

$$[\det(\delta_{ij}\partial_0-f\epsilon_{ij})]^{\frac{D}{2}} \quad .$$

Esse determinante pode ser calculado (o cálculos está feito no apêndice B) utilizando as condições de contorno antiperiódicas

$$\psi_i^\mu(t_1)+\psi_i^\mu(t_2)=0 \quad , \tag{7.11}$$

obtendo como resultado

$$[\det(\delta_{ij}\partial_0-f\epsilon_{ij})]^{\frac{D}{2}}=(-4)^D\left[\cos\left(\frac{f\Delta t}{2}\right)\right]^D \quad . \tag{7.12}$$

Podemos ver daqui que a variável f tem dimensão [1/tempo] (isso também pode ser visto na própria ação). Portanto, é conveniente que façamos a seguinte mudança de variável

$$f\Delta t=f' \quad , \tag{7.13}$$

sendo f' uma variável adimensional, em termos da qual o determinante fica

$$[\det(\delta_{ij}\partial_0-f\epsilon_{ij})]^{\frac{D}{2}}=(-4)^D\left[\cos\left(\frac{f'}{2}\right)\right]^D \quad . \tag{7.14}$$

Se fizermos uma transformação SO(2) não conectada à identidade

$$f'\longrightarrow f'+2\pi \quad , \tag{7.15}$$

o determinante se transforma da seguinte maneira

$$\left[\cos\left(\frac{f'}{2}\right)\right]^D \longrightarrow \left[\cos\left(\frac{f'}{2}+\pi\right)\right]^D = (-1)^D\left[\cos\left(\frac{f'}{2}\right)\right]^D \quad . \tag{7.16}$$

Portanto, vemos que a teoria apresenta anomalias para dimensões ímpares.

Uma maneira de contornar esse problema é adicionando à lagrangiana dada em (7.1) um termo de Chern-Simons

$$f\left(q-\frac{D}{2}\right) \quad , \tag{7.17}$$

onde D é o número de dimensões do espaço-tempo e q é um número inteiro qualquer.

Mediante a transformação de SO(2) dada por (7.15), a exponencial desse termo se transforma da seguinte maneira

$$\exp\left[i\int_{t_1}^{t_2} dt\; f\left(q-\frac{D}{2}\right)\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \exp\left[2\pi\left(q-\frac{D}{2}\right)\right]\exp\left[i\int_{t_1}^{t_2} dt\; f\left(q-\frac{D}{2}\right)\right] =$$

$$= (-1)^D \exp\left[i\int_{t_1}^{t_2} dt\; f\left(q-\frac{D}{2}\right)\right] \quad ,$$

removendo a anomalia.

Porém, o cancelamento dessa anomalia se fez às custas da simetria discreta (7.5), que não existe mais a nível clássico a menos que tenhamos $q=\frac{D}{2}$.

A ação fica, agora, da seguinte forma

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\; \left\{\frac{1}{2e}(\dot{x}^\mu - i\chi^i\theta_i^\mu)^2 + \frac{i}{2}\theta_i^\mu\dot{\theta}_\mu^i - f\left[\frac{i}{2}\epsilon^{ij}\theta_i^\mu\theta_{j\mu} + \left(q-\frac{d}{2}\right)\right]\right\} -$$

$$-\frac{i}{2}\theta_{i\mu}(t_1)\theta_i^\mu(t_2) \quad ,$$

$$i,j=1,2 \quad ; \quad \mu,\nu=1,\ldots,D \quad , \tag{7.18}$$

e é invariante por reparametrizações na linha de universo, transformações locais de supersimetria N-estendida e transformações locais SO(2).

7.2 Equivalência via quantização canônica

Vamos, agora, mostrar que a teoria dada pela ação (7.18) equivale à formulação de campos tensoriais antissimétricos utilizando a quantização canônica[32]. Para isso, faremos a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{aligned} \xi_\mu &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\theta_{1\mu} + i\theta_{2\mu}) \quad , \quad \bar{\xi}_\mu = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\theta_{1\mu} - i\theta_{2\mu}) \quad , \\ \psi &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\chi_1 + i\chi_2) \quad , \quad \bar{\psi} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\chi_1 - i\chi_2) \quad , \end{aligned}$$

obtendo a seguinte forma para a ação

$$S = \int dt \left\{ \frac{1}{2e}\left[\dot{x}^2 - 2i(\psi\bar{\xi}^m u + \bar{\psi}\xi^\mu)\dot{x}_\mu - 2\psi\bar{\psi}\xi^\mu\bar{\xi}_\mu\right] + i\bar{\xi}^\mu\dot{\xi}_\mu - \right.$$

$$\left. -f\left[\frac{1}{2}[\bar{\xi}^\mu, \xi_\mu] + \left(q - \frac{D}{2}\right)\right]\right\} - \frac{i}{2}\left[\xi^\mu(t_1)\bar{\xi}^\mu(t_2) - \bar{\xi}^\mu(t_1)\xi_\mu(t_2)\right] \quad , \qquad (7.20)$$

onde $[\bar{\xi}^\mu, \xi_\mu] = \bar{\xi}^\mu\xi_\mu - \xi^\mu\bar{\xi}_\mu$.

Os momentos canonicamente conjugados a essas variáveis são

$$\begin{aligned} p_\mu &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{1}{e}[\dot{x}_\mu - i(\psi\bar{\xi}_\mu + \bar{\psi}\xi_\mu)] \quad , \\ \pi_\mu &= -\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^\mu} = i\bar{\xi}_\mu \quad , \quad \bar{\pi}_\mu = -\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{\xi}}^\mu} = 0 \quad , \\ \pi &= -\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = 0 \quad , \quad \bar{\pi} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{\psi}}} = 0 \quad , \\ \pi_e &= \frac{\partial L}{\partial \dot{e}} = 0 \quad , \quad \pi' = \frac{\partial L}{\partial \dot{f}} = 0 \quad . \end{aligned} \qquad (7.21)$$

Os vínculos primários são, então, dados por

$$\begin{aligned} &\phi_\mu = \pi_\mu - i\bar{\xi}_\mu \approx 0 \quad , \\ &\bar{\pi}_\mu \approx 0 \quad , \quad \pi \approx 0 \quad , \quad \bar{\pi} \approx 0 \quad , \\ &\pi' \approx 0 \quad , \quad \pi_e \approx 0 \quad . \end{aligned} \qquad (7.22)$$

A hamiltoniana canônica é dada por

$$H_c = \frac{1}{2}ep^2 + (\psi\pi^\mu + i\bar{\psi}\xi^\mu)p_\mu + f\left\{\frac{i}{2}[\xi^\mu, \pi_\mu] + \left(q - \frac{D}{2}\right)\right\} \quad . \tag{7.23}$$

Associando multiplicadores de Lagrange aos vínculo, temos a hamiltoniana primária

$$H_p = H_c + \lambda^\mu\phi_\mu + \bar{\lambda}^\mu\bar{\pi}_\mu + \lambda\pi + \bar{\lambda}\bar{\pi} + \lambda'\pi' \quad .$$

A condição de consistência dos vínculos fixa os valores dos seguintes multiplicadores de Lagrange

$$\dot{\phi}_\mu \approx 0 \Rightarrow \bar{\lambda}_\mu = \bar{\psi}p_\mu - f\pi_\mu \quad \text{e}$$

$$\dot{\bar{\pi}}_\mu \approx 0 \Rightarrow \lambda_\mu \overset{\text{def}}{=} 0 \quad . \tag{7.24}$$

Substituindo esses valores, a hamiltoniana primária toma a forma

$$H_p = \frac{1}{2}ep^2 + (\psi\pi^\mu + i\bar{\psi}\xi^\mu)p_\mu + f\left[\frac{i}{2}(\xi^\mu\pi_\mu - \pi^\mu\xi_\mu) + \left(q - \frac{D}{2}\right)\right] +$$

$$+(\bar{\psi}p^\mu - f\pi^\mu)\bar{\pi}_\mu + \lambda\pi + \bar{\lambda}\bar{\pi} + \lambda_e\pi_e + \lambda'\pi' \quad .$$

Obtemos, ainda, os seguintes vínculos de 2ª ordem

$$\dot{\pi} \approx 0 \Rightarrow \varphi = p^\mu\pi_\mu \approx 0 \quad ,$$

$$\dot{\bar{\pi}} \approx 0 \Rightarrow \bar{\varphi} = p^\mu(\bar{\pi}_\mu + i\xi_\mu) \approx 0 \quad ,$$

$$\dot{\pi}_e \approx 0 \Rightarrow \varphi_e = p^2 \approx 0 \quad , \tag{7.25}$$

$$\dot{\pi}' \approx 0 \Rightarrow \varphi' = \pi^\mu(\bar{\pi}_\mu + i\xi_\mu) - \left(q - \frac{D}{2}\right) \approx 0 \quad .$$

Podemos, agora, escrever a hamiltoniana secundária

$$H_s = H_p + \alpha_e\varphi_e + \alpha\varphi + \bar{\alpha}\bar{\varphi} + \alpha'\varphi' \quad ,$$

onde associamos multiplicadores de Lagrange aos vínculos de 2ª ordem.

A condição de consistência dos vínculos de 2ª ordem resulta em

$$\dot{\varphi} = (\bar{\psi} + \bar{\alpha})p^2 \approx 0 \quad ,$$

$$\dot{\bar{\varphi}} = (\psi + \alpha)p^2 \approx 0 \ ,$$
$$\dot{\varphi}_e = 0 \ , \tag{7.26}$$
$$\dot{\varphi}' = 0 \ .$$

Portanto, não há mais vínculos na teoria, e ficamos com os vínculos

$$\phi_\mu = \pi_\mu - i\bar{\xi}_\mu \quad , \quad \bar{\pi}_\mu \ ,$$
$$\pi \ , \ \bar{\pi} \ , \ \pi_e \ , \ \pi' \ ,$$
$$\varphi = p^\mu \pi_\mu \quad , \quad \bar{\varphi} = p^\mu(\bar{\pi}_\mu + i\xi_\mu) \ ,$$
$$\varphi' = \pi^\mu(\bar{\pi}_\mu + i\xi_\mu) - \left(q - \frac{D}{2}\right) \quad , \quad \varphi_e = p^2 \ .$$

A álgebra dos vínculos é dada a seguir

$$\{\phi_\mu, \bar{\pi}_\nu\} = -i\delta_{\mu\nu} \ ,$$
$$\{\varphi, \bar{\varphi}\} = i\varphi_e \approx 0 \ ,$$
$$\{\varphi, \varphi'\} = -i\varphi \approx 0 \ , \tag{7.27}$$
$$\{\bar{\varphi}, \varphi'\} = i\bar{\varphi} \approx 0 \ .$$

sendo os outros parênteses de Poisson iguais a zero.

Temos, então, os vínculos de 2ª classe

$$\phi_\mu = \pi_\mu - i\bar{\xi}_\mu \quad \text{e} \quad \bar{\pi}_\mu \ ,$$

que podem ser eliminados utilizando os parênteses de Dirac

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - i\delta_{\mu\nu}\left(\{A, \phi^\mu\}\{B, \bar{\pi}^\nu\} + \{A, \bar{\pi}^\mu\}\{B, \phi^\nu\}\right) \ . \tag{7.28}$$

Podemos, então, igualar esses vínculos fortemente a zero, eliminando algumas variáveis do espaço de fase

$$\phi_\mu = 0 \Rightarrow \pi_\mu = i\bar{\xi}_\mu \quad , \quad \bar{\pi}_\mu = 0 \ . \tag{7.29}$$

Os demais vínculos podem ser escritos, agora, na forma

$$\varphi = ip^\mu \bar{\xi}_\mu \quad , \quad \bar{\varphi} = ip^\mu \xi_\mu \ ,$$

$$\varphi' = \xi\bar{\xi} - \left(q - \frac{D}{2}\right) \quad . \tag{7.30}$$

Vamos redefinir os seguintes vínculos

$$\begin{array}{lcl} \varphi \longrightarrow \phi & = & p^\mu \bar{\xi}_\mu \quad \text{e} \\ \bar{\varphi} \longrightarrow \bar{\phi} & = & p^\mu \xi_\mu \quad . \end{array}$$

Os parênteses de Dirac não-nulos entre os vínculos de 1ª classe são

$$\begin{array}{lcl} \{\phi, \bar{\phi}\}_D & = & -i\varphi_e \quad , \\ \{\phi, \varphi'\}_D & = & -i\phi \quad , \\ \{\bar{\phi}, \varphi'\}_D & = & i\bar{\phi} \quad . \end{array}$$

Temos, ainda, os parênteses de Dirac das variáveis ξ_μ e $\bar{\xi}_\mu$

$$\{\xi_\mu, \bar{\xi}_\nu\}_D = \{\bar{\xi}_\mu, \xi_\nu\}_D = -i\delta_{\mu\nu} \quad . \tag{7.32}$$

Vamos, agora, demonstrar a equivalência via quantização canônica desse modelo com campos tensoriais antissimétricos[32].

A quantização canônica se faz passando dos parênteses de Dirac para os comutadores, considerando que as variáveis do espaço de fase passam agora a ser operadores em um espaço de Hilbert.

Aplicando os vínculos (em forma de operadores) $\hat{\pi}_e$, $\hat{\pi}$, $\hat{\bar{\pi}}$ e $\hat{\pi}'$ na função de onda de uma partícula com spin com $N = 2$ supersimetrias (que representaremos por Ψ), obtemos as seguintes condições sobre esta

$$\begin{array}{lcl} \hat{\pi}_e|\Psi> & = & 0 \\ \hat{\pi}|\Psi> & = & 0 \\ \hat{\bar{\pi}}|\Psi> & = & 0 \\ \hat{\pi}'|\Psi> & = & 0 \quad . \end{array}$$

UNIVERSIDADE ... INSTITUTO DE ...
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
1697
e. 2

Utilizando representações do momento em termos das coordenadas, obtemos as equações

$$\begin{array}{lcl} \frac{\partial}{\partial e}|\Psi> & = & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \psi}|\Psi> & = & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}}|\Psi> & = & 0 \\ \frac{\partial}{\partial f}|\Psi> & = & 0 \quad . \end{array}$$

As equações acima indicam que a função de onda não depende das variáveis e, ψ, $\bar{\psi}$ e f. Mediante uma redefinição de variáveis, podemos

considerá-las como sendo os multiplicadores de Lagrange associados aos vínculos φ_e, ϕ, $\bar{\phi}$ e φ', respectivamente.

A função de onda Ψ pode, então, ser representada como o produto dos autovetores

$$\Psi(x^\mu, \alpha^\mu) = (\, < x_\mu | \otimes < \alpha_\mu |)|\Psi > \quad , \tag{7.33}$$

onde $|x_\mu >$ formam uma base do espaço de autovetores de $\hat{x}_\mu$ e $|\alpha_\mu >$ formam uma base do espaço de autovetores de $\hat{\xi}_\mu$.

Devido à propriedade de anticomutação dos elementos de base α_μ, podemos, então, expandir a função de onda em uma série de potências de α_μ

$$\Psi = F(x^\mu) + \alpha^\mu F_\mu(x^\mu) + \frac{1}{2}\alpha^\mu\alpha^\nu F_{\mu\nu}(x^\mu) +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{D!}\alpha^{\mu_1}\alpha^{\mu_2}\ldots\alpha^{\mu_D} F_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_D}(x^\mu) \quad . \tag{7.34}$$

Aplicando o vínculo $\hat{\varphi}'$ sobre a função de onda, obtemos

$$\hat{\varphi}'|\Psi >= 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\hat{\xi}^\mu\hat{\bar{\xi}}^\mu - \left(q - \frac{D}{2}\right)\right]|\Psi >= \left[-\frac{1}{2}(\xi^\mu\bar{\xi}_\mu - \bar{\xi}^\mu\xi_\mu) + \left(q - \frac{D}{2}\right)\right]|\Psi >= 0 \quad .$$

Utilizando a relação $[\hat{\xi}^\mu, \hat{\bar{\xi}}_\mu] = D$, obtemos

$$\hat{\varphi}|\Psi >= 0 \Rightarrow (\hat{\xi}^\mu\hat{\bar{\xi}}_\mu - q)|\Psi >= 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{\xi}^\mu\hat{\bar{\xi}}_\mu|\Psi >= q|\Psi > \quad . \tag{7.35}$$

Escrevendo $\hat{\bar{\xi}}_\mu$ na representação das coordenadas do espaço de autovetores $|\alpha_\mu >$, obtemos a expressão

$$\alpha^\mu\frac{\partial}{\partial\alpha^\mu}\Psi = q\Psi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^\mu\Big(F_\mu + \alpha^\nu F_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\alpha^\nu\alpha^\rho F_{\mu\nu\rho} + \ldots + \frac{1}{(D-1)!}\alpha^{\mu_2}\ldots\alpha^{\mu_D}F_{\mu_1\ldots\mu_D}\Big) =$$

$$= q\Big(F + \alpha^\mu F_\mu + \frac{1}{2}\alpha^\mu\alpha^\nu F_{\mu\nu} + \ldots + \frac{1}{D!}\alpha^{\mu_1}\ldots\alpha^{\mu_D}F_{\mu_1\ldots\mu_D}\Big) \quad .$$

Fazendo uma comparação termo a termo dos dois lados da equação acima, chegamos ao resultado

$$\Psi(x^\mu, \alpha^\mu) = \frac{1}{q!}\alpha^{\mu_1} \dots \alpha^{\mu_q} F_{\mu_1 \dots \mu_q}(x^\mu) \quad . \tag{7.36}$$

Se aplicarmos agora os vínculos $\hat{\phi}$ e $\hat{\bar{\phi}}$ nesta função de onda, obtemos as equações

$$\hat{\phi}|\Psi >= 0 \Rightarrow \hat{\xi}^\mu \hat{p}_\mu |\Psi >= 0 \quad , \tag{7.37a}$$

$$\hat{\bar{\phi}}|\Psi >= 0 \Rightarrow \hat{\bar{\xi}}^\mu \hat{p}_\mu |\Psi >= 0 \quad . \tag{7.37b}$$

Passamos, então, para a representação em termos das coordenadas dos espaços de autovetores $|x^\mu >$ e $|\alpha^\mu >$

$$\alpha^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Psi(x, \alpha) = 0 \quad ,$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Psi(x, \alpha) = 0 \quad ,$$

ou seja,

$$\alpha^\mu \frac{1}{q!} \alpha^{\mu_1} \dots \alpha^{\mu_q} \partial_\mu F_{\mu_1 \dots \mu_q} = 0$$

$$\partial^\mu \frac{1}{(q-1)!} \alpha^{\mu_2} \dots \alpha^{\mu_q} F_{\mu \mu_2 \dots \mu_q} = 0 \quad .$$

Essas equações podem ser reescritas nas formas

$$\partial_{[\mu} F_{\mu_1 \dots \mu_q]} = 0 \quad \text{e} \tag{7.38}$$

$$\partial^\mu F_{\mu \mu_2 \dots \mu_q} = 0 \quad . \tag{7.39}$$

A primeira equação tem como solução

$$F_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_q} = q \partial_{[\mu_1} A_{\mu_2 \dots \mu_q]} \quad , \tag{7.40}$$

que dá a forma de um campo tensorial antissimétrico de ordem $(q-1)$. Substituindo (7.40) em (7.39), obtemos as equações de movimento para esses campos

$$\partial^{\mu_1} \partial_{[\mu_1} A_{\mu_2 \dots \mu_q]} \quad , \tag{7.41}$$

mostrando a equivalência entre as duas teorias.

7.3 Equivalência via integral de trajetória

Para mostrar a equivalência da teoria dada pela ação (7.18) à teoria dos campos tensoriais antissimétricos utilizando a quantização via integral funcional[34], partimos da ação (7.18) sem efetuar mudanças de variáveis. Os momentos canonicamente conjugados às variáveis do espaço de fase inicial são, agora, dados por

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{1}{e}(\dot{x}_\mu - i\chi_i\theta_{i\mu}) \quad , \quad \pi_e = \frac{\partial L}{\partial \dot{e}} = 0 \ ,$$

$$\pi_{i\mu} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i^\mu} = \frac{i}{2}\theta_{i\mu} \quad , \quad \pi_{\chi i} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}_i} = 0 \ , \tag{7.42}$$

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{f}} = 0 \ .$$

A hamiltoniana canônica é dada por

$$H_c = p^\mu \dot{x}_\mu + \pi_i^\mu \dot{\theta}_{i\mu} + \pi_e \dot{e} + \pi_{\chi i}\dot{\chi}_i + \pi \dot{f} - L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_c = \frac{1}{2}ep^2 + i\chi_i\theta_i^\mu p_\mu - f\left[2i\epsilon_{ij}\pi_i^\mu\pi_{j\mu} - \left(q - \frac{D}{2}\right)\right] \ . \tag{7.43}$$

Os vínculos em termos destas variáveis podem ser obtidos a partir dos vínculos para as variáveis definidas na sessão anterior. Obtemos, então, os vínculos de 2ª classe

$$\phi_{i\mu} = \pi_{i\mu} - \frac{i}{2}\theta_{i\mu} \approx 0 \tag{7.44}$$

e os vínculos de 1ª classe

$$\pi_e \approx 0 \quad , \quad \pi_{\chi i} \approx 0 \quad , \quad \pi \approx 0 \ ,$$

$$\varphi_e = p^2 \approx 0 \quad , \quad \varphi_i = p^\mu\left(\pi_{i\mu} + \frac{i}{2}\theta_{i\mu}\right) \approx 0 \quad \text{e} \tag{7.45}$$

$$\varphi = \epsilon_{ij}\theta_i^\mu\pi_{j\mu} + \left(q - \frac{d}{2}\right) \approx 0 \ .$$

Os vínculos de 2ª classe podem ser eliminados utilizando os parênteses de Dirac

$$\{A,B\}_D = \{A,B\} - i\delta_{\mu\nu}\delta_{ij}\{A,\phi_i^\mu\}\{\phi_j^\nu,B\} \quad . \tag{7.46}$$

Podemos, agora, considerar os vínculos de 2ª classe $\phi_{i\mu}$ como sendo fortemente iguais a zero, eliminando, assim, os momentos $\pi_{i\mu}$ da teoria

$$\phi_{i\mu} = 0 \Rightarrow \pi_{i\mu} = \frac{i}{2}\theta_{i\mu} \quad . \tag{7.47}$$

Os vínculos de 1ª classe φ_i e φ podem ser reescritos como

$$\varphi_i = ip^\mu\theta_{i\mu}$$

$$\varphi = \frac{i}{2}\epsilon_{ij}\theta_i^\mu\theta_{j\mu} + \left(q - \frac{d}{2}\right) \quad .$$

É conveniente que façamos certas redefinições de variáveis antes que pasemos para a quantização BRST-BFV. Redefinimos os seguintes vínculos de 1ª classe

$$\varphi_i \longrightarrow \phi_i = p^\mu\theta_{i\mu}$$

$$\varphi \longrightarrow \phi = \epsilon_{ij}\theta_i^\mu\theta_{j\mu} - 2i\left(q - \frac{d}{2}\right) \quad .$$

A hamiltoniana estendida fica, então

$$H_s = \frac{1}{2}(e + 2\alpha_e)\varphi_e + i(\chi_i + \alpha_i)\phi_i + \frac{i}{2}(f + \alpha)\phi + \lambda_e\pi_e + \lambda_{\chi i}\pi_{\chi i} + \lambda\pi \quad ,$$

onde λ_e, λ_{χ_i} e λ são os multiplicadores de Lagrange dos vínculos π_e, $\pi_{\chi i}$ e π, respectivamente, e α_e, α_i e α são os multiplicadores de Lagrange dos vínculos φ_e, ϕ_i e ϕ.

Devido à arbitrariedade dos multiplicadores de Lagrange α_e, α_i e α, podemos redefini-los de forma que eles absorvam as variáveis e, χ_i e f. Por conveniência, vamos fazer a redefinição da seguinte forma

$$\begin{array}{lcl} \frac{1}{2}(e + 2\alpha_e) & \longrightarrow & e \\ i(\chi_i + \alpha_i) & \longrightarrow & \chi_i \quad \text{e} \\ \frac{i}{2}(f + \alpha) & \longrightarrow & f \quad , \end{array}$$

de modo que possamos considerar as variáveis redefinidas e, χ_i e f como sendo os multiplicadores de Lagrange dos vínculos φ_e, ϕ_i e ϕ, respectivamente. Os momentos π_e, $\pi_{\chi i}$ e π passam a ser, então, os momentos canonicamente conjugados aos multiplicadores de Lagrange da teoria.

Essa redefinição tenciona reduzir o número de variáveis da teoria, pois assim não teremos que associar novos momentos para os multiplicadores de Lagrange, causando a introdução posterior de mais pares de fantasmas. Pode-se mostrar que, mediante uma escolha apropriada da função fixadora de gauge, podemos eliminar todas as variáveis extras que de outra forma apareceriam na teoria.

Os parênteses de Dirac dos vínculos de 1ª classe são dados por

$$\begin{aligned} \{\phi_i, \phi_j\}_D &= -2i\delta_{ij}\varphi_e \ , \\ \{\phi_i, \phi\}_D &= -2ie_{ij}\phi^j \ , \end{aligned} \tag{7.48}$$

sendo os outros iguais a zero. Os parênteses de Dirac das coordenadas grassmanianas ficam

$$\{\theta_{i\mu}, \theta_{j\nu}\}_D = -i\delta_{\mu\nu}\delta_{ij} \tag{7.49}$$

Pode-se verificar que todos os vínculos de 1ª classe são linearmente independentes, o que implica em que a teoria é irredutível. Podemos, então, de acordo com o método mostrado na sessão 4.1 para sistemas irredutíveis, associar os fantasmas aos vínculos de 1ª classe

$$\begin{array}{lcccl} \varphi_e & \longrightarrow & (\eta_e, \bar{\mathcal{P}}_e) & , & \{\eta_e, \bar{\mathcal{P}}_e\}_D = 1 \ , \\ \pi_e & \longrightarrow & (\mathcal{P}_e, \bar{\eta}_e) & , & \{\mathcal{P}_e, \bar{\eta}_e\}_D = 1 \ ; \\ \phi_i & \longrightarrow & (c_i, \bar{b}_i) & , & \{c_i, \bar{b}_j\}_D = \delta_{ij} \ , \\ \pi_i & \longrightarrow & (b_i, \bar{c}_i) & , & \{b_i, \bar{c}_j\}_D = \delta_{ij} \ ; \\ \phi & \longrightarrow & (\eta, \bar{\mathcal{P}}) & , & \{\eta, \bar{\mathcal{P}}\}_D = 1 \ , \\ \pi & \longrightarrow & (\mathcal{P}, \bar{\eta}) & , & \{\mathcal{P}, \bar{\eta}\}_D = 1 \ . \end{array}$$

As paridades e os números fantasmas são dados (segundo as tabelas da sessão 4.3) a seguir, onde P representa a paridade de Grassmann e gh, o número fantasma de cada variável do espaço de fase

Vínculos	φ_e	ϕ_i	ϕ
P	0	1	0
gh	0	0	0

Multipls. de Lagr. e momts.	e	π_e	χ_i	$\pi_{\chi i}$	f	π
P	0	0	1	1	0	0
gh	0	0	0	0	0	0

Fantasmas	η_e	$\bar{\mathcal{P}}_e$	$\mathcal{P}_e$	$\bar{\eta}_e$
P	1	1	1	1
gh	1	-1	1	-1

Fantasmas	c_i	b_i	b_i	$\bar{c}_i$
P	0	0	0	0
gh	1	-1	1	-1

Fantasmas	η	$\bar{\mathcal{P}}$	$\mathcal{P}$	$\bar{\eta}$
P	1	1	1	1
gh	1	-1	1	-1

A carga de BRST [eq. (3.65)]é dada por

$$Q = \eta_e\varphi_e + \eta_i\phi_i + \eta\phi + \pi_e\mathcal{P}_e + \pi_{\chi i}\mathcal{P}_i + \pi\mathcal{P} + 2i\bar{\mathcal{P}}_e c^i c_i + 2i\epsilon_{ij}\bar{b}_j c_i\eta \quad . \quad (7.51)$$

Essa carga gera as seguintes transformações de BRST

$$\begin{aligned}
\delta x^\mu &= c_i\theta_i^\mu + 2\eta p^\mu & \delta p_\mu &= 0 \\
\delta\theta_{i\mu} &= -ic_i p_\mu + 2i\epsilon_{ij}\eta\theta_{j\mu} & & \\
\delta e &= \mathcal{P}_e & \delta\pi_e &= 0 \\
\delta\chi_i &= b_i & \delta\pi_{\chi i} &= 0 \\
\delta f &= \mathcal{P} & \delta\pi &= 0 \\
\delta\eta_e &= \tfrac{i}{2}c_i c_i & \delta\bar{\mathcal{P}}_e &= p^2 \\
\delta\mathcal{P}_e &= 0 & \delta\bar{\eta}_e &= \pi_e \\
\delta c_i &= -2i\epsilon_{ij}c_j\eta & \delta\bar{b}_i &= -p^\mu\theta_{i\mu} - i\bar{\mathcal{P}}_e c_i - 2i\epsilon_{ij}\bar{b}_j\eta \\
\delta b_i &= 0 & \delta\bar{c}_i &= -\pi_{\chi i} \\
\delta\eta &= 0 & \delta\bar{\mathcal{P}} &= \epsilon_{ij}(\theta_i^\mu\theta_{j\mu} + 2i\bar{b}_j c_i) - 2i\left(q - \tfrac{d}{2}\right) \\
\delta\mathcal{P} &= 0 & \delta\bar{\eta} &= \pi
\end{aligned}$$

Escolhemos a seguinte função fixadora de gauge

$$\Psi = -\frac{1}{(\gamma_1^\mu \gamma_{2\mu})^{q-1}} e\bar{\mathcal{P}}_e + \chi_i \bar{b}_i \quad , \tag{7.53}$$

onde γ_1^μ e γ_2^μ são variáveis de Grassmann constantes. Temos, então, que

$$\{\Psi, Q\} = -\frac{1}{(\gamma_1^\mu \gamma_{2\mu})^{q-1}} \bar{\mathcal{P}}\mathcal{P} - \frac{1}{(\gamma_1^\mu \gamma_{2\mu})^{q-1}} ep^2 +$$

$$+\bar{b}_i b_i - p^\mu \chi_i \theta_{i\mu} - i\bar{\mathcal{P}}\chi_i c_i - 2i\epsilon_{ij}\bar{b}_i\bar{b}_j\eta \quad . \tag{7.54}$$

Escolhemos essa função fixadora de gauge porque ela nos fornecerá os gauges

$$\dot{e} = \dot{\chi}_i = \dot{f} = 0 \quad ,$$

que concordam com as condições de contorno impostas sobre os parâmetros das transformações pelas quais a ação (7.18) é invariante e também por que ela nos fornece os vínculos da teoria (com excessão do vínculo ϕ). O motivo de não termos adicionado à função fixadora de gauge o termo usual $f\bar{\mathcal{P}}$, que nos forneceria o vínculo ϕ é que este nos fornece integrais trigonométricas em f que não puderam ser resolvidas. Por isso, introduzimos a dependência em q através do termo $(\gamma_1^\mu \gamma_{2\mu})^{q-1}$.

A função de partição fica, então

$$Z = N \int \mathcal{D}T \exp\left(i \int dt\ L_{ef}\right) - \frac{i}{2}\theta_{i\mu}(t_1)\theta_i^\mu(t_2) \quad , \tag{7.55}$$

onde

$$\mathcal{D}T = \mathcal{D}x^\mu \mathcal{D}p_\mu \mathcal{D}\theta_i^\mu \mathcal{D}e \mathcal{D}\pi_e \mathcal{D}\chi_i \mathcal{D}\pi_{\chi i} \mathcal{D}f \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\eta_e$$

$$\mathcal{D}\bar{\mathcal{P}}_e \mathcal{D}\mathcal{P}_e \mathcal{D}\bar{\eta}_e \mathcal{D}c_i \mathcal{D}\bar{b}_i \mathcal{D}b_i \mathcal{D}\bar{c}_i \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\mathcal{P}} \mathcal{D}\mathcal{P} \mathcal{D}\bar{\eta} \quad \text{e}$$

$$L_{ef} = p^\mu \dot{x}_\mu + \frac{1}{(\gamma_1^\mu \gamma_{2\mu})^{q-1}} ep^2 + \frac{i}{2}\theta_i^\mu \dot{\theta}_{i\mu} + \chi_i p^\mu \theta_{i\mu} + \pi_{\chi i}\dot{\chi}_i + \pi_e \dot{e} + \pi \dot{f} +$$

$$+\bar{\mathcal{P}}_e(\dot{\eta}_e + i\chi_i c_i) + \mathcal{P}_e\left[\dot{\bar{\eta}}_e - \frac{1}{(\gamma_1^\mu \gamma_{2\mu})^{q-1}}\bar{\mathcal{P}}_e\right] + \bar{b}_i(\dot{c}_i - b_i) + \bar{c}_i \dot{b}_i +$$

$$+\bar{\mathcal{P}}\dot{\eta} + \bar{\eta}\dot{\mathcal{P}} + 2i\epsilon_{ij}\bar{b}_i\bar{b}_j\eta) \quad . \tag{7.56}$$

A integração será sujeita às seguintes condições de contorno invariantes pelas transformações de BRST

$$
\begin{array}{ll}
x^\mu(t_1) = x_1^\mu & , \quad x^\mu(t_2) = x_2^\mu \\
\theta_i^\mu(t_1) + \theta_i^\mu(t_2) = \gamma_i^\mu & \\
e(t_1) = e(t_2) = 0 & \pi_e(t_1) = \pi_e(t_2) = 0 \\
\chi_i(t_1) = \chi_i(t_2) = 0 & \pi_{\chi_i}(t_1) = \pi_{\chi_i}(t_2) = 0 \\
f(t_1) = f(t_2) = 0 & \pi(t_1) = \pi(t_2) = 0 \\
\eta_e(t_1) = \eta_e(t_2) = \bar{\mathcal{P}}(t_1) = \bar{\mathcal{P}}(t_2) & \mathcal{P}(t_1) = \mathcal{P}(t_2) = \bar{\eta}(t_1) = \bar{\eta}(t_2) = 0 \\
c_i(t_1) = c_i(t_2) = \bar{b}_i(t_1) = \bar{b}_i(t_2) = 0 & b_i(t_1) = b_i(t_2) = \bar{c}_i(t_1) = \bar{c}_i(t_2) = 0 \\
\eta(t_1) = \eta(t_2) = \bar{\mathcal{P}}(t_1) = \bar{\mathcal{P}}(t_2) = 0 & \mathcal{P}(t_1) = \mathcal{P}(t_2) = \bar{\eta}(t_1) = \bar{\eta}(t_2) = 0
\end{array}
$$

Como vimos na sessão 7.1, a variável f tem dimensão [1/tempo], o que torna recomendável que façamos uma mudança de variável igual à que foi feita naquela sessão antes de fazermos qualquer integração

$$f' = f\Delta t \quad . \tag{7.57}$$

Associamos à variável f' o momento canonicamente conjugado π'. Esse momento se relaciona com o momento π da seguinte forma

$$\pi' = \pi\Delta t \quad . \tag{7.58}$$

Substituimos ambas as variáveis (agora unidimensionais) na ação, resultando na seguinte forma para a função de partição

$$Z = N \int \mathcal{D}x^\mu \mathcal{D}p_\mu \mathcal{D}\theta_i^\mu \mathcal{D}e \mathcal{D}\chi \mathcal{D}f' \mathcal{D}\eta_e \mathcal{D}\bar{\mathcal{P}}_e \mathcal{D}\mathcal{P}_e \mathcal{D}\bar{\eta}_e$$

$$\mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{b}_i \mathcal{D}b \mathcal{D}\bar{c}_i \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\mathcal{P}} \mathcal{D}\mathcal{P} \mathcal{D}\bar{\eta} \quad \frac{1}{(\Delta t)^2}$$

$$\exp\left(i \int dt \left\{ p^\mu \dot{x}_\mu + \frac{1}{(\gamma_1^\mu \gamma_{2\mu})^{q-1}} e p^2 + \frac{i}{2}\theta_i^\mu \dot{\theta}_{i\mu} + \chi_i p^\mu \theta_{i\mu} + \pi_e \dot{e} + \frac{1}{(\Delta t)^2}\pi' \dot{f}' + \right.\right.$$

$$+ \pi_{\chi_i}\dot{\chi}_i + \bar{\mathcal{P}}_e(\dot{\eta}_e + i\chi c_i) + \mathcal{P}_e\left[\dot{\bar{\eta}}_e - \frac{1}{(\gamma_1^\mu \gamma_{2\mu})^{q-1}}\bar{\mathcal{P}}_e\right] +$$

$$\left.\left. + \bar{b}_i(\dot{c}_i - b_i) + \bar{c}_i \dot{b}_i + \bar{\mathcal{P}}\dot{\eta} + \bar{\eta}\dot{\mathcal{P}} + 2i\epsilon_{ij}\bar{b}_i\bar{b}_j\eta) \right\}\right) -$$

$$-\frac{i}{2}\theta_{i\mu}(t_1)\theta_i^\mu(t_2) \quad . \tag{7.59}$$

Integrando em π_e, $\pi\chi i$ e π', obtemos

$$Z = N \int \mathcal{D}x^\mu \mathcal{D}p_\mu \mathcal{D}\theta_i^\mu \mathcal{D}e \mathcal{D}\chi \mathcal{D}f' \mathcal{D}\eta_e \mathcal{D}\bar{\mathcal{P}}_e \mathcal{D}\mathcal{P}_e \mathcal{D}\bar{\eta}_e$$

$$\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{b}_i\mathcal{D}b\mathcal{D}\bar{c}_i\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\bar{\mathcal{P}}\mathcal{D}\mathcal{P}\mathcal{D}\bar{\eta} \ \frac{1}{(\Delta t)^2}\ \delta(\dot{e})\delta(\dot{\chi}_i)\delta\left[\frac{1}{(\Delta t)^2}\dot{f}'\right]$$

$$\exp\left(i\int dt\ \left\{p^\mu\dot{x}_\mu + \frac{1}{(\gamma_1^\mu\gamma_{2\mu})^{q-1}}ep^2 + \frac{i}{2}\theta_i^\mu\dot{\theta}_{i\mu} + \chi_i p^\mu\theta_{i\mu} + \bar{\mathcal{P}}_e(\dot{\eta}_e + i\chi c_i) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \mathcal{P}_e\left[\dot{\bar{\eta}}_e - \frac{1}{(\gamma_1^\mu\gamma_{2\mu})^{q-1}}\bar{\mathcal{P}}_e\right] + \bar{b}_i(\dot{c}_i - b_i) + \bar{c}_i\dot{b}_i + \bar{\mathcal{P}}\dot{\eta} + \bar{\eta}\dot{\mathcal{P}} + 2i\epsilon_{ij}\bar{b}_i\bar{b}_j\eta)\right\}\right) -$$

$$-\frac{i}{2}\theta_{i\mu}(t_1)\theta_i^\mu(t_2) \quad .$$

Os funcionais delta obtidos indicam que os campos e, χ_i e f' são constantes no tempo. Podemos, então, escrevê-los como constantes e_0, χ_{0i} e f'_0, respectivamente, e a integração sobre essas variáveis passa a ser uma integração ordinária.

O funcional delta em f' fornece um termo de $\left[\det\frac{1}{(\Delta t)^2}\right]^{-1} = (\Delta t)^2$ que cancela o termo originário do jacobiano da mudança de variável feita anteriormente

$$Z = N \int de_0 d\chi_{0i} df'_0 \mathcal{D}x^\mu \mathcal{D}p_\mu \mathcal{D}\theta_i^\mu \mathcal{D}\eta_e \mathcal{D}\bar{\mathcal{P}}_e \mathcal{D}\mathcal{P}_e \mathcal{D}\bar{\eta}_e$$

$$\mathcal{D}c_i\mathcal{D}\bar{b}_i\mathcal{D}b_i\mathcal{D}\bar{c}_i\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\bar{\mathcal{P}}\mathcal{D}\mathcal{P}\mathcal{D}\bar{\eta}$$

$$\exp\left(i\int dt\ \left\{p^\mu\dot{x}_\mu + \frac{1}{(\gamma_1^\mu\gamma_{2\mu})^{q-1}}e_0p^2 + \frac{i}{2}\theta_i^\mu\dot{\theta}_{i\mu} + \chi_{0i}p^\mu\theta_{i\mu} + \bar{\mathcal{P}}_e(\dot{\eta}_e + i\chi_i c_i) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \mathcal{P}_e\left[\dot{\bar{\eta}}_e - \frac{1}{(\gamma_1^\mu\gamma_{2\mu})^{q-1}}\bar{\mathcal{P}}_e\right] + \bar{b}_i(\dot{c}_i - b_i) + \bar{c}_i\dot{b}_i + \bar{\mathcal{P}}\dot{\eta} + \bar{\eta}\dot{\mathcal{P}} + 2i\epsilon_{ij}\bar{b}_i\bar{b}_j\eta\right\}\right) -$$

$$-\frac{i}{2}\theta_{i\mu}(t_1)\theta_i^\mu(t_2) \quad .$$

Como a variável f'_0 é a geradora de transformações SO(2), a integração é feita nos limites de 0 a 2π. Essa integração resulta em um fator 2π, que

pode ser absorvido pela constante de normalização.A integração sobre a variável e deve ser feita no intervalo $[0, \infty)$.

Integrando em $\mathcal{P}_e$, obtemos a função delta

$$\delta\left[\dot{\bar{\eta}}_e - \frac{1}{(\gamma_1^\mu \gamma_{2\mu})^{q-1}}\bar{\mathcal{P}}_e\right] \quad .$$

Podemos escrever essa função delta da seguinte forma

$$\delta\left[\dot{\bar{\eta}}_e - \frac{1}{(\gamma_1^\mu \gamma_{2\mu})^{q-1}}\bar{\mathcal{P}}_e\right] = -[\det(\gamma_1^\mu \gamma_{2\mu})^{q-1}]^{-1}\delta[\bar{\mathcal{P}}_e - (\gamma_1\gamma_2)^{q-1}\dot{\eta}_e] \quad .$$

Integrando em $\bar{\mathcal{P}}_e$, obtemos a seguinte expressão

$$Z = N \int de_0 d\chi_{0i}\mathcal{D}x^\mu \mathcal{D}p_\mu \mathcal{D}\theta_i^\mu \mathcal{D}\eta_e \mathcal{D}\bar{\eta}_e \mathcal{D}c_i \mathcal{D}\bar{b}_i \mathcal{D}b_i \mathcal{D}\bar{c}_i \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\mathcal{P}} \mathcal{D}\mathcal{P} \mathcal{D}\bar{\eta}$$

$$[\det(\gamma_1^\mu \gamma_{2\mu})^{q-1}]^{-1} \exp\left\{ i \int dt \left[p^\mu \dot{x}_\mu + \frac{1}{(\gamma_1^\mu \gamma_{2\mu})^{q-1}} e_0 p^2 + \frac{i}{2}\theta_i^\mu \dot{\theta}_{i\mu} + \right.\right.$$

$$+\chi_{0i} p^\mu \theta_{i\mu} + (\gamma_1^\mu \gamma_{2\mu})^{q-1}\dot{\bar{\eta}}_e(\dot{\eta}_e + i\chi_i c_i) + \bar{b}_i(\dot{c}_i - b_i) +$$

$$\left.\left. +\bar{c}_i \dot{b}_i + \bar{\mathcal{P}}\dot{\eta} + \bar{\eta}\dot{\mathcal{P}} + 2i\epsilon_{ij}\bar{b}_i\bar{b}_j\eta) \right] \right\} -$$

$$-\frac{i}{2}\theta_{i\mu}(t_1)\theta_i^\mu(t_2) \quad .$$

A integração em η_e resulta na seguinte função delta

$$\delta[(\gamma_1^\mu \gamma_{2\mu})^{q-1}\ddot{\bar{\eta}}_e] = \det(\gamma_1^\mu \gamma_{2\mu})^{q-1} \det(\partial_0^2)\delta(\bar{\eta}_e) \quad .$$

Podemos calcular o valor do $\det(\partial_0^2)$. Esse cálculo é feito no Apêndice B, resultando em

$$\det(\partial_0^2) = -2i\Delta t \quad . \tag{7.60}$$

Integrando em $\bar{\eta}_e$, obtemos

$$Z = N \int de_0 d\chi_{0i}\mathcal{D}x^\mu \mathcal{D}p_\mu \mathcal{D}\theta_i^\mu \mathcal{D}c_i \mathcal{D}\bar{b}_i \mathcal{D}b_i \mathcal{D}\bar{c}_i \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\mathcal{P}} \mathcal{D}\mathcal{P} \mathcal{D}\bar{\eta}$$

$$\Delta t \quad \exp\left\{ i \int dt \left[p^\mu \dot{x}_\mu + \frac{1}{(\gamma_1^\mu \gamma_{2\mu})^{q-1}} e_0 p^2 + \frac{i}{2}\theta_i^\mu \dot{\theta}_{i\mu} + \right.\right.$$

$$+\chi_{0i}p^\mu\theta_{i\mu} + \bar{b}_i(\dot{c}_i - b_i) + \bar{c}_i\dot{b}_i + \bar{\mathcal{P}}\dot{\eta} + \bar{\eta}\dot{\mathcal{P}} + 2i\epsilon_{ij}\bar{b}_i\bar{b}_j\eta)\Big]\Big\} -$$

$$-\frac{i}{2}\theta_{i\mu}(t_1)\theta_i^\mu(t_2) \quad .$$

Se integrarmos sobre $\mathcal{P}$, $\bar{\mathcal{P}}$ e $\bar{b}_i$, obtemos

$$Z = N\int de_0 d\chi_{0i}\mathcal{D}x^\mu\mathcal{D}p_\mu\mathcal{D}\theta_i^\mu\mathcal{D}c_i\mathcal{D}b_i\mathcal{D}\bar{c}_i\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\bar{\eta}$$

$$\Delta t \quad \delta(-\dot{\bar{\eta}})\delta(\dot{\eta})\delta(\dot{c}_i - b_i)\exp\Big\{i\int dt\ \Big[p^\mu\dot{x}_\mu + \frac{1}{(\gamma_1^\mu\gamma_{2\mu})^{q-1}}e_0p^2 + \frac{i}{2}\theta_i^\mu\dot{\theta}_{i\mu} +$$

$$+\chi_{0i}p^\mu\theta_{i\mu} + \bar{c}_i\dot{b}_i + 2i\epsilon_{ij}\bar{b}_i\bar{b}_j\eta)\Big]\Big\} - \frac{i}{2}\theta_{i\mu}(t_1)\theta_i^\mu(t_2) \quad .$$

Podemos escrever a expressão acima como

$$Z = N\int de_0 d\chi_{0i}\mathcal{D}x^\mu\mathcal{D}p_\mu\mathcal{D}\theta_i^\mu\mathcal{D}c_i\mathcal{D}b_i\mathcal{D}\bar{c}_i\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\bar{\eta}$$

$$\Delta t \quad \det\partial_0\delta(\bar{\eta}) \ \det\partial_0\delta(\eta)\delta(\dot{c}_i - b_i)\exp\Big\{i\int dt\ \Big[p^\mu\dot{x}_\mu + \frac{1}{(\gamma_1^\mu\gamma_{2\mu})^{q-1}}e_0p^2 +$$

$$+\frac{i}{2}\theta_i^\mu\dot{\theta}_{i\mu} + \chi_{0i}p^\mu\theta_{i\mu} + \bar{c}_i\dot{b}_i + 2i\epsilon_{ij}\bar{b}_i\bar{b}_j\eta)\Big]\Big\} - \frac{i}{2}\theta_{i\mu}(t_1)\theta_i^\mu(t_2) \quad ,$$

onde os determinantes podem ser absorvidos na constante de normalização (conforme o apêndice B, sessão B.2).

Integrando sobre $\bar{\eta}$, η e b_i, ficamos com a expressão

$$Z = N\int de_0 d\chi_{0i}\mathcal{D}x^\mu\mathcal{D}p_\mu\mathcal{D}\theta_i^\mu\mathcal{D}c_i\mathcal{D}\bar{c}_i \quad \Delta t$$

$$\exp\Big\{i\int dt\ \Big[p^\mu\dot{x}_\mu + \frac{1}{(\gamma_1^\mu\gamma_{2\mu})^{q-1}}e_0p^2 + \frac{i}{2}\theta_i^\mu\dot{\theta}_{i\mu} + \chi_{0i}p^\mu\theta_{i\mu} + \bar{c}_i\ddot{c}_i\Big]\Big\} -$$

$$-\frac{i}{2}\theta_{i\mu}(t_1)\theta_i^\mu(t_2) \quad .$$

Se efetuarmos a integral em $\bar{c}_i$, obteremos a seguinte função delta, que pode ser escrita em termos de um determinante e de outra função delta, resultando em

$$\delta(\ddot{c}_i) = \det\partial_0^2\ \delta(c_i) = -\frac{1}{4}(\Delta t)^{-2}\ \delta(c_i) \quad .$$

A integração sobre c_i nos fornece a expressão

$$Z = N \int de_0 d\chi_{0i} \mathcal{D}x^\mu \mathcal{D}p_\mu \mathcal{D}\theta_i^\mu \ \ (\Delta t)^{-1}$$

$$\exp\left\{ i \int dt \ \left[p^\mu \dot{x}_\mu + \frac{1}{(\gamma_1^\mu \gamma_{2\mu})^{q-1}} e_0 p^2 + \frac{i}{2} \theta_i^\mu \dot{\theta}_{i\mu} + \chi_{0i} p^\mu \theta_{i\mu} \right] \right\} -$$

$$-\frac{i}{2} \theta_{i\mu}(t_1) \theta_i^\mu(t_2) \ . \tag{7.61}$$

Os dois primeiros termos da exponencial podem ser escritos com

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \ \left[p^\mu \dot{x}_\mu + \frac{1}{(\gamma_1^\mu \gamma_{2\mu})^{q-1}} e_0 p^2 \right] = \int_{t_1}^{t_2} dt \ (p^\mu \dot{x}_\mu) + \frac{1}{(\gamma_1^\mu \gamma_{2\mu})^{q-1}} e_0 p^2 \ \Delta t =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \ [(p^\mu x_\mu)^\cdot - \dot{p}^\mu x_\mu] + \frac{1}{(\gamma_1^\mu \gamma_{2\mu})^{q-1}} e_0 p^2 \ \Delta t =$$

$$= p^\mu(t_2) x_\mu(t_2) - p^\mu(t_1) x_\mu(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} dt \ (\dot{p}^\mu x_\mu) + \frac{1}{(\gamma_1^\mu \gamma_{2\mu})^{q-1}} e_0 p^2 \ \Delta t \ .$$

Integrando em e_0, obtemos

$$Z = N \int d\chi_{0i} \mathcal{D}x^\mu \mathcal{D}p_\mu \mathcal{D}\theta_i^\mu \ \ (\Delta t)^{-2} \frac{(\gamma_1^\mu \gamma_{2\mu})^{q-1}}{p^2}$$

$$\exp\left[p^\mu(t_2) x_\mu(t_2) - p^\mu(t_1) x_\mu(t_1) \right]$$

$$\exp\left\{ i \int_{t_1}^{t_2} dt \ \left[-(\dot{p}^\mu x_\mu) + \frac{i}{2} \theta_i^\mu \dot{\theta}_{i\mu} + \chi_{0i} p^\mu \theta_{i\mu} \right] \right\} \ .$$

Utilizando as condições de contorno para $x^\mu(t)$ e p_μ, obtemos

$$Z = N \int d\chi_{0i} \mathcal{D}x^\mu \mathcal{D}p_\mu \mathcal{D}\theta_i^\mu \ \ (\Delta t)^{-2} \frac{(\gamma_1^\mu \gamma_{2\mu})^{q-1}}{p^2}$$

$$\exp\left[p^\mu(t_1) x_1^\mu - p^\mu(t_2) x_2^\mu \right]$$

$$\exp\left\{ i \int_{t_1}^{t_2} dt \ \left[-(\dot{p}^\mu x_\mu) + \frac{i}{2} \theta_i^\mu \dot{\theta}_{i\mu} + \chi_{0i} p^\mu \theta_{i\mu} \right] \right\} \ .$$

A integração em x^μ resulta em

$$Z = N \int d\chi_{0i} \mathcal{D}x^\mu \mathcal{D}p_\mu \mathcal{D}\theta_i^\mu \ \ (\Delta t)^{-2} \frac{(\gamma_1^\mu \gamma_{2\mu})^{q-1}}{p^2} \delta(\dot{p}_\mu)$$

$$\exp\left[p_\mu(t_1)x_1^\mu - p_\mu(t_2)x_2^\mu\right]$$
$$\exp\left\{i\int_{t_1}^{t_2} dt\ \left[\frac{i}{2}\theta_i^\mu\dot{\theta}_{i\mu} + \chi_{0i}p^\mu\theta_{i\mu}\right]\right\}\ .$$

A função delta implica em que o momento é constante

$$\dot{p}_\mu = 0 \Rightarrow p_\mu = p_{0\mu} = \text{cte.}\ . \tag{7.62}$$

Substituindo os momentos na integral e considerando a definição

$$\Delta x^\mu \equiv x_1^\mu - x_2^\mu\ , \tag{7.63}$$

obtemos

$$Z = N\int d\chi_{0i}\mathcal{D}x^\mu\mathcal{D}p_\mu\mathcal{D}\theta_i^\mu\ \ (\Delta t)^{-2}\frac{(\gamma_1^\mu\gamma_{2\mu})^{q-1}}{p^2}$$
$$\exp(-ip_0^\mu\Delta x_\mu)\exp\left\{i\int_{t_1}^{t_2} dt\ \left[\frac{i}{2}\theta_i^\mu\dot{\theta}_{i\mu} + \chi_{0i}p^\mu\theta_{i\mu}\right]\right\} -$$
$$-\frac{i}{2}\theta_{i\mu}(t_1)\theta_i^\mu(t_2)\ .$$

Vamos, agora, fazer a seguinte mudança de variáveis

$$\theta_{i\mu} = \psi_{i\mu}(t) + \frac{1}{2}\gamma_{i\mu}\ . \tag{7.64}$$

As condições de contorno para as variáveis $\theta_{i\mu}$ implicam nas seguintes condições de contorno para $\psi_{i\mu}$

$$\psi_{i\mu}(t_1) + \psi_{i\mu}(t_2) = 0\ . \tag{7.65}$$

Substituindo as novas variáveis, obtemos a expressão

$$Z = N\int d\chi_{0i}\mathcal{D}x^\mu\mathcal{D}p_\mu\mathcal{D}\psi_{i\mu}\ \ (\Delta t)^{-2}\frac{(\gamma_1^\mu\gamma_{2\mu})^{q-1}}{p^2}\exp(-ip_0^\mu\Delta x_\mu)$$
$$\exp\left\{i\int_{t_1}^{t_2} dt\ \left[\frac{i}{2}\left(\psi_i^\mu\dot{\psi}_{i\mu} + \frac{1}{2}\gamma_i^\mu\dot{\psi}_{i\mu}\right) + \chi_{0i}p^\mu\psi_{i\mu} + \frac{1}{2}\chi_{0i}p^\mu\gamma_{i\mu}\right]\right\} =$$
$$= N\int d\chi_{0i}\mathcal{D}x^\mu\mathcal{D}p_\mu\mathcal{D}\psi_{i\mu}\ \ (\Delta t)^{-2}\frac{(\gamma_1^\mu\gamma_{2\mu})^{q-1}}{p^2}\exp(-ip_0^\mu\Delta x_\mu)$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} dt\ \left(\psi_i^\mu \dot{\psi}_{i\mu} - 2i\psi_i^\mu \chi_{0i} p_\mu\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{i}{2}\chi_{0i} p^\mu \gamma_{i\mu} \Delta t\right\} \quad ,$$

onde tivemos o cancelamento dos termos de superfície.

O termo no interior da integral no tempo pode ser calculado se completarmos os quadrados a fim efetuarmos uma integração gaussiana

$$\psi_i^\mu \dot{\psi}_{i\mu} = (\psi_i^\mu + i\partial_0^{-1} p_0^\mu \chi_{0i})\partial_0(\psi_{i\mu} + i\partial_0^{-1} p_{0\mu}\chi_{0i}) - (p_0^\mu \chi_{0i}\partial_0^{-1} p_{0\mu}\chi_{0i}) \quad ,$$

onde ∂_0^{-1} representa o operador inverso de ∂_0. A segunda parte da expressão no lado direito da equação acima se anula devido ao fato de apresentar o quadrado de uma variável de Grassmann, que é sempre igual a zero. Temos, então, efetuando a integral gaussiana

$$Z = N \int d\chi_{0i} \mathcal{D}x^\mu \mathcal{D}p_\mu \ \ (\Delta t)^{-2} \frac{(\gamma_1^\mu \gamma_{2\mu})^{q-1}}{p^2} \det \partial_0$$
$$\exp(-ip_0^\mu \Delta x_\mu) \exp\left(\frac{i}{2}\chi_{0i} p^\mu \gamma_{i\mu} \Delta t\right).$$

Esse determinante pode ser calculado utilizando as condições de contorno (o cálculo encontra-se no apêndice B), resultando em

$$\det \partial_0 = 1 - \pi \quad , \tag{7.66}$$

e pode ser absorvido pela constante de normalização.

Integrando agora sobre χ_0^i, obtemos a expressão

$$Z = N \int dp_{0\mu} \ \frac{\not{p}_1 \not{p}_2}{p^2} (\gamma_1^\mu \gamma_{2\mu})^{q-1} \exp(-ip_0^\mu \Delta x_\mu), \tag{7.67}$$

onde $\not{p}_1 = \gamma_1^\mu p_\mu$ e $\not{p}_2 = \gamma_2^\mu p_\mu$.

Essa é a expressão a partir da qual será mostrada a equivalência a campos tensoriais antissimétricos.

Para isso, vamos considerar primeiramente o propagador do rotacional de um campo tensorial antissimétrico de ordem $(q-1)$. Definimos esses campos da seguinte maneira

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \qquad (q = 2) \quad ,$$

$$F_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu A_{\nu\rho} + \partial_\nu A_{\rho\mu} + \partial_\rho A_{\mu\nu} \quad (q=3) \ ,$$
$$F_{\mu\nu\rho\sigma} = \partial_\mu A_{\nu\rho\sigma} - \partial_\nu A_{\rho\sigma\mu} + \partial_\mu A_{\sigma\mu\nu} - \partial_\sigma A_{\mu\nu\rho} \quad (q=4) \ ,$$
$$F_{\mu_1\ldots\mu_q} = \delta^{\nu_1\ldots\nu_q}_{\mu_1\ldots\mu_q}\partial_{\nu_1}A_{\nu_2\ldots\nu_q} \quad (q \text{ qualquer}) \ , \tag{7.68}$$

onde $\delta^{\nu_1\ldots\nu_q}_{\mu_1\ldots\mu_q}$ é um tensor totalmente antissimétrico nos índices inferiores e nos índices superiores.

O propagador desses campos é dado, então, por

$$< F_{\mu_1\ldots\mu_q}, F_{\rho_1\ldots\rho_q} >= \delta^{\nu_1\ldots\nu_q}_{\mu_1\ldots\mu_q}\delta^{\sigma_1\ldots\sigma_q}_{\rho_1\ldots\rho_q}\partial_{\nu_1}\partial\sigma_1 < A_{\nu_2\ldots\nu_q}, A_{\sigma_1\ldots\sigma_q} >=$$
$$= \delta^{\nu_1\ldots\nu_q}_{\mu_1\ldots\mu_q}\delta^{\sigma_1\ldots\sigma_q}_{\rho_1\ldots\rho_q}\eta_{\nu_2\sigma_2}\ldots\eta_{\nu_q\sigma_q}\int d^Dp\ \frac{p_{\nu_1}p_{\sigma_1}}{p^2}e^{-ip^\mu\Delta x_\mu} \ . \tag{7.69}$$

Voltemos agora à expressão (7.67) e façamos $q = 2$. Nesse caso, ela toma a forma

$$Z = N\int dp_{0\mu}\ \frac{\not{p}_1\not{p}_2}{p^2}\ \gamma_1^\rho\gamma_{2\rho}\exp(-ip_0^\mu\Delta x_\mu),$$

ou seja,

$$Z = N\int dp_{0\mu}\ \frac{\gamma_1^\mu p_\mu\gamma_2^\nu p_\nu}{p^2}\ \gamma_1^\rho\gamma_{2\rho}\exp(-ip_0^\mu\Delta x_\mu), \tag{7.70}$$

Tomamos, agora, a seguinte realização das variáveis grassmanianas γ_1^μ e γ_2^μ em função das matrizes de Dirac em D dimensões

$$\gamma_1^\mu = \gamma^\mu\otimes 1 \quad , \quad \gamma_2^\nu = \gamma_5\otimes\gamma^\nu \ , \tag{7.71}$$

Essa realização mantém a forma dos parênteses de Dirac entre as variáveis de Grassmann usadas até agora. Com isso, obtemos a expressão

$$Z = N\int dp_{0\mu}\ \gamma^\rho\gamma_\rho\frac{\gamma^\mu\gamma^\nu p_\mu p_\nu}{p^2}\exp(-ip_0^\mu\Delta x_\mu), \tag{7.72}$$

Se especificarmos a expressão (7.68) para a do propagador do campo $F_{\alpha\beta}$, obtemos

$$< F_{\alpha\beta}, F_{\delta\lambda} >= \delta^{\mu\rho}_{\alpha\beta}\delta^{\nu\sigma}_{\delta\lambda}\eta_{\rho\sigma}\int d^Dp\ \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}e^{-ip^\mu\Delta x_\mu} \ . \tag{7.73}$$

Se contrairmos esse propagador com as matrizes de Dirac $\gamma^\alpha\gamma^\delta$, obtemos o resultado

$$\gamma^\rho\gamma_\rho\gamma^\alpha\gamma^\delta < F_{\alpha\beta}, F_{\gamma\delta} >= \gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu \int d^D p \, \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} e^{-ip^\mu \Delta x_\mu} \quad , \tag{7.74}$$

com as matrizes de Dirac antissimetrizadas.

Se passarmos ao caso geral, teremos a seguinte expressão para (7.67)

$$Z = N \, (\gamma^5)^q \, \gamma^{[\mu_1}\gamma^{\mu_2} \ldots \gamma^{\mu_q]} \, \gamma^{[\nu_1}\gamma^{\mu_2} \ldots \gamma^{\mu_q]} \int dp_{0\mu} \, \frac{p_{\mu_1} p_{\nu_1}}{p^2} \exp(-ip_0^\mu \Delta x_\mu) =$$

$$= N \, (\gamma^5)^q \, \gamma^{[\mu_1}\gamma^{\mu_2} \ldots \gamma^{\mu_q]} \, \gamma^{[\nu_1}\gamma^{\nu_2} \ldots \gamma^{\nu_q]}$$

$$\eta_{\mu_2\nu_2} \cdots \eta_{\mu_q\nu_q} \int dp_{0\mu} \, \frac{p_{\mu_1} p_{\nu_1}}{p^2} \exp(-ip_0^\mu \Delta x_\mu) \quad . \tag{7.75}$$

Devido à propriedade de anticomutação das matrizes de Dirac, podemos escrever essa expressão em termos de tensores dos tensores $\delta^{\mu_1 \ldots \mu_q}_{\rho_1 \ldots \mu_q}$

$$Z = N \, (\gamma^5)^q \, \delta^{\mu_1 \ldots \mu_q}_{\rho_1 \ldots \rho_q} \delta^{\nu_1 \ldots \nu_q}_{\sigma_1 \ldots \sigma_q} \gamma_{\rho_1}\gamma_{\rho_2} \cdots \gamma_{\rho_q} \, \gamma_{\sigma_1}\gamma_{\sigma_2} \cdots \gamma_{\sigma_q}$$

$$\eta_{\mu_2\nu_2} \cdots \eta_{\mu_q\nu_q} \int dp_{0\rho} \, \frac{p_{\rho_1} p_{\sigma_1}}{p^2} \exp(-ip_0^\mu \Delta x_\mu) =$$

$$= N \, (\gamma^5)^q \gamma_{\rho_1}\gamma_{\rho_2} \cdots \gamma_{\rho_q} \gamma_{\sigma_1}\gamma_{\sigma_2} \cdots \gamma_{\sigma_q} < F_{\mu_1 \ldots \mu_q}, F_{\nu_1 \ldots \nu_q} > \quad . \tag{7.76}$$

Portanto, está mostrada a equivalência das duas teorias por meio de quantização via integral de trajetória.

7.4 Caso massivo

O caso massivo da formulação de partícula dos campos tensoriais antissimétricos é muito semelhante ao caso sem massa. Por isso, não nos alongaremos muito nos cálculos, mostrando somente as diferenças que existem entre os dois casos. A ação que fornece o caso massivo da representação de partícula é semelhante à ação de uma partícula de spin 1 massiva, mas adicionada do mesmo termo de Chern-Simons que foi adicionado ao caso não-massivo

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{1}{2e}(\dot{x}^\mu - i\chi^i\theta_i^\mu)^2 + em^2 + i\chi_i m\theta_{5i} + \frac{i}{2}(\theta_i^\mu\dot{\theta}_\mu^i - \theta_{5i}\dot{\theta}_{5i}) - \right.$$

$$\left. -f\left[\frac{i}{2}\epsilon^{ij}(\theta_i^\mu\theta_{j\mu} - \theta_{5i}\theta_{5j}) + \left(q - \frac{d}{2}\right)\right]\right\} - \frac{i}{2}\theta_{i\mu}(t_1)\theta_i^\mu(t_2) + \frac{i}{2}\theta_{5i}(t_1)\theta_{5i}(t_2) \quad , \tag{7.77}$$

$$i, j = 1, 2 \quad ; \quad \mu, \nu = 1, \ldots, D \quad ,$$

onde m é a massa da partícula e θ_{5i} são variáveis grassmanianas extras.

Se definirmos os momentos canonicamente conjugados a essas novas variáveis como

$$\pi_{5i} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{5i}} \quad , \tag{7.78}$$

a hamiltoniana canônica será dada por

$$H_c = \frac{1}{2}e(p^2 - m^2) + i\chi_i(\theta_i^\mu p_\mu + m\pi_{5i}) -$$

$$-f\left[2i\epsilon_{ij}(\pi_i^\mu\pi_{j\mu} - \pi_{5i}\pi_{5j}) - \left(q - \frac{D}{2}\right)\right] \tag{7.79}$$

e teremos mais vínculos de 2ª classe dados por

$$\phi_{5i} = \pi_{5i} + \frac{i}{2}\theta_{5i} \approx 0 \quad . \tag{7.80}$$

A condição de consistência dos vínculos nos fornecerá, então, os vínculos de 2ª ordem

$$\varphi_e = \frac{1}{2}(p^2 - m^2) \approx 0 \quad ,$$

$$\varphi_i = p^\mu \left(\pi_{i\mu} + \frac{i}{2}\theta_{i\mu}\right) + m\left(\pi_{5i} - \frac{i}{2}\theta_{5i}\right) \quad , \tag{7.81}$$

$$\varphi = \epsilon_{ij}(\theta_i^\mu \pi_{j\mu} - \theta_{5i}\pi_{5i}) + \left(q - \frac{D}{2}\right) \approx 0 \quad .$$

Pode-se mostrar que esses vínculos são todos de 1ª classe e que a teoria é irredutível. Utilizando os parênteses de Dirac

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - i\delta_{ij}\left(\delta_{\mu\nu}\{A, \phi_i^\mu\}\{\phi_j^\mu, B\} - \{A, \phi_{5i}\}\{\phi_{5j}, B\}\right) \quad , \tag{7.82}$$

podemos fazer os vínculos de 2ª classe fortemente iguais a zero

$$\phi^m u_i = 0 \Rightarrow \pi_i^\mu = \frac{i}{2}\theta_i^\mu \quad ,$$

$$\phi_{5i} = 0 \Rightarrow \pi_{5i} = -\frac{i}{2}\theta_{5i} \quad , \tag{7.83}$$

o que nos permite redefinir alguns dos vínculos

$$\varphi_i \longrightarrow \phi_i = p^\mu \theta_{i\mu} - m\theta_{5i} \quad ,$$

$$\varphi \longrightarrow \phi = \epsilon_{ij}(\theta_i^\mu \theta_{j\mu} - \theta_{5i}\theta_{5j}) - 2i\left(q - \frac{D}{2}\right) \quad . \tag{7.84}$$

Os parênteses de Dirac dos vínculos de 1ª classe resultam em

$$\{\phi_i, \phi_j\}_D = -2i\delta_{ij}\varphi_e \quad ,$$

$$\{\phi_i, \phi\}_D = -2i\epsilon_{ij}\phi^j \quad , \tag{7.85}$$

sendo os outros iguais a zero. Os parênteses de Dirac das coordenadas grassmanianas ficam

$$\{\theta_{i\mu}, \theta_{j\nu}\}_D = -i\delta_{\mu\nu}\delta_{ij} \tag{7.86}$$

$$\{\theta_{5i}, \theta_{5j}\}_D = i\delta_{ij} \quad . \tag{7.87}$$

Efetuando as mesmas redefinições de multiplicadores de Lagrange feita na sessão 7.3, podemos associar os fantasmas da mesma forma como foi feito anteriormente (com as mesmas paridades de Grassmann e os mesmos números fantasma) e montar a seguinte carga de BRST

$$Q = \eta_e\varphi_e + \eta_i\phi_i + \eta\phi + \pi_e\mathcal{P}_e + \pi_{\chi i}\mathcal{P}_i + \pi\mathcal{P} + 2i\bar{\mathcal{P}}_e c^i c_i + 2i\epsilon_{ij}\bar{b}_j c_i \eta \quad . \tag{7.88}$$

Essa carga gera tranformações de BRST semelhantes às mostradas em (7.50)

$$
\begin{array}{lcll}
\delta x^\mu & = & c_i\theta_i^\mu + 2\eta p^\mu & \delta p_\mu = 0 \\
\delta\theta_{i\mu} & = & -ic_i p_\mu + 2i\epsilon_{ij}\eta\theta_{j\mu} & \\
\delta\theta_{5i} & = & ic_i m - 2i\epsilon_{ij}\eta\theta_{5j} & \\
\delta e & = & \mathcal{P}_e & \delta\pi_e = 0 \\
\delta\chi_i & = & b_i & \delta\pi_{\chi i} = 0 \\
\delta f & = & \mathcal{P} & \delta\pi = 0 \\
\delta\eta_e & = & \frac{i}{2}c_i c_i & \delta\bar{\mathcal{P}}_e = \frac{1}{2}(p^2 - m^2) \\
\delta\mathcal{P}_e & = & 0 & \delta\bar{\eta}_e = \pi_e \\
\delta c_i & = & -2i\epsilon_{ij}c_j\eta & \delta\bar{b}_i = -(p^\mu\theta_{i\mu} - m\theta_{5i}) - i\bar{\mathcal{P}}_e c_i - 2i\epsilon_{ij}\bar{b}_j\eta \\
\delta b_i & = & 0 & \delta\bar{c}_i = -\pi_{\chi i} \\
\delta\eta & = & 0 & \delta\bar{\mathcal{P}} = \epsilon_{ij}(\theta_i^\mu\theta_{j\mu} - \theta_{5i}\theta_{5j} + 2i\bar{b}_j c_i) - 2i\left(q - \frac{d}{2}\right) \\
\delta\mathcal{P} & = & 0 & \delta\bar{\eta} = \pi
\end{array}
$$

Escolhemos a função fixadora de gauge

$$
\Psi = -\frac{1}{(\gamma_1^\mu\gamma_{2\mu})^{q-1}}e\bar{\mathcal{P}}_e + \chi_i\bar{b}_i \quad , \tag{7.89}
$$

onde γ_1^μ e γ_2^μ são variáveis de Grassmann constantes, ficando, então, com

$$
\{\Psi, Q\} = -\frac{1}{(\gamma_1^\mu\gamma_{2\mu})^{q-1}}\bar{\mathcal{P}}\mathcal{P} - \frac{1}{2(\gamma_1^\mu\gamma_{2\mu})^{q-1}}e(p^2 - m^2) +
$$

$$
+\bar{b}_i b_i - \chi_i(p^\mu\theta_{i\mu} - m\theta_{5i}) - i\bar{\mathcal{P}}\chi_i c_i - 2i\epsilon_{ij}\bar{b}_i\bar{b}_j\eta \quad . \tag{7.90}
$$

A função de partição fica, então

$$
Z = N\int \mathcal{D}T \exp\left(i\int dt\ L_{ef}\right) \quad , \tag{7.91}
$$

onde

$$
\mathcal{D}T = \mathcal{D}x^\mu\mathcal{D}p_\mu\mathcal{D}\theta_i^\mu\mathcal{D}\theta_{5i}\mathcal{D}e\mathcal{D}\pi_e\mathcal{D}\chi_i\mathcal{D}\pi_{\chi i}\mathcal{D}f\mathcal{D}\pi\mathcal{D}\eta_e
$$

$$
\mathcal{D}\bar{\mathcal{P}}_e\mathcal{D}\mathcal{P}_e\mathcal{D}\bar{\eta}_e\mathcal{D}c_i\mathcal{D}\bar{b}_i\mathcal{D}b_i\mathcal{D}\bar{c}_i\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\bar{\mathcal{P}}\mathcal{D}\mathcal{P}\mathcal{D}\bar{\eta} \quad \text{e}
$$

$$
L_{ef} = p^\mu\dot{x}_\mu + \frac{1}{2(\gamma_1^\mu\gamma_{2\mu})^{q-1}}e(p^2 - m^2) + \frac{i}{2}\theta_i^\mu\dot{\theta}_{i\mu} - \frac{i}{2}\theta_{5i}\dot{\theta}_{5i} + \chi_i(p^\mu\theta_{i\mu} - m\theta_{5i}) +
$$

$$
+\pi_{\chi i}\dot{\chi}_i + \pi_e\dot{e} + \pi\dot{f} + \bar{\mathcal{P}}_e(\dot{\eta}_e + i\chi_i c_i) + \mathcal{P}_e\left[\dot{\bar{\eta}}_e - \frac{1}{(\gamma_1^\mu\gamma_{2\mu})^{q-1}}\bar{\mathcal{P}}_e\right] +
$$

$$+\bar{b}_i(\dot{c}_i - b_i) + \bar{c}_i\dot{b}_i + \bar{\mathcal{P}}\dot{\eta} + \bar{\eta}\dot{\mathcal{P}} + 2i\epsilon_{ij}\bar{b}_i\bar{b}_j\eta) \quad . \tag{7.92}$$

As condições de contorno são as mesmas que em (7.53), a menos da condição

$$\theta_{5i}(t_1) + \theta_{5i}(t_2) = \gamma_{5i} \quad , \tag{7.93}$$

Podemos efetuar as mesmas integrações que foram feitas na sessão 7.3, chegando à expressão

$$Z = N \int de_0 d\chi_{0i}\mathcal{D}x^\mu \mathcal{D}p_\mu \mathcal{D}\theta_i^\mu \mathcal{D}\theta_{5i} \ (\Delta t)^{-1}$$

$$\exp\left\{ i \int dt \ \left[p^\mu \dot{x}_\mu + \frac{1}{2(\gamma_1^\mu \gamma_{2\mu})^{q-1}} e_0(p^2 - m^2) + \frac{i}{2}\theta_i^\mu \dot{\theta}_{i\mu} - \right.\right.$$

$$\left.\left. -\frac{i}{2}\theta_{5i}\dot{\theta}_{5i} + \chi_{0i}(p^\mu \theta_{i\mu} - m\theta_{5i}) \right] \right\} \quad .$$

Integrando em e_0 e x^μ, obtemos

$$Z = N \int d\chi_{0i}\mathcal{D}x^\mu \mathcal{D}p_\mu \mathcal{D}\theta_i^\mu \mathcal{D}\theta_{5i} \ (\Delta t)^{-2} \frac{(\gamma_1^\mu \gamma_{2\mu})^{q-1}}{p^2 - m^2}$$

$$\exp(-ip_0^\mu \Delta x_\mu) \exp\left\{ i \int_{t_1}^{t_2} dt \ \left[\frac{i}{2}\theta_i^\mu \dot{\theta}_{i\mu} - \frac{i}{2}\theta_{5i}\dot{\theta}_{5i} + \chi_{0i}(p^\mu \theta_{i\mu} - m\theta_{5i}) \right] \right\} \quad .$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$\theta_{i\mu} = \psi_{i\mu}(t) + \frac{1}{2}\gamma_{i\mu} \quad ,$$

$$\theta_{5i} = \psi_{5i}(t) + \frac{1}{2}\gamma_{5i} \tag{7.94}$$

e integrando sobre as novas variáveis chegamos a

$$Z = N \int d\chi_{0i}\mathcal{D}x^\mu \mathcal{D}p_\mu \ (\Delta t)^{-2} \frac{(\gamma_1^\mu \gamma_{2\mu})^{q-1}}{p^2 - m^2}$$

$$\exp(-ip_0^\mu \Delta x_\mu) \exp\left[\frac{i}{2}\chi_{0i}(p^\mu \gamma_{i\mu} - m\gamma_{5i})\Delta t \right] .$$

Integrando sobre χ_{0i}, obtemos finalmente a expressão

$$Z = N \int dp_{0\mu} \ \frac{(\not{p} - \gamma_{5\ 1}m)(\not{p} - \gamma_{5\ 2}m)}{p^2 - m^2} (\gamma_1^\mu \gamma_{2\mu})^{q-1} \exp(-ip_0^\mu \Delta x_\mu), \tag{7.95}$$

onde devemos fazer as associações

$$\gamma_1^\mu = \gamma^\mu \otimes 1 \ , \ \gamma_2^\nu = \gamma_5 \otimes \gamma^\nu \ , \ \gamma_{5\,1} = \gamma^D \otimes 1 \ , \ \gamma_{5\,2} = \gamma_5 \otimes \gamma^D \ . \quad (7.96)$$

A partir dessa expressão, podemos mostrar a equivalência do modelo dado pela ação (7.72) a campos tensoriais antissimétricos massivos utilizando o mesmo método da sessão anterior.

Conclusão

O estudo dos campos tensoriais antissimétricos nos mostra que estes têm um importante papel a desempenhar na física de campos, seja como modelos para o estudo de teorias redutíveis, seja como campos que podem ser acoplados a outros. O tensor antissimétrico de ordem dois, particularmente, devido à sua íntima ligação com a gravidade (seja na teoria clássica de Einstein-Cartan, seja nas teorias de gravitação estendida ou mesmo na teoria de supercordas) parece ter um importante papel a representar nesta. Um bom caminho de pesquisa seria procurar um análogo na teoria de campos da ligação que tensores antissimétricos de ordem dois têm com o spin a nível clássico na teoria de gravitação de Einstein-Cartan e as probabilidades do tensor antissimétrico de ordem dois representar a partícula de uma nova força do tipo gravitacional, mas de médio alcance. Uma teoria consistente do dílaton e do tensor antissimétrico como partículas mediadoras de forças do tipo gravitacional poderia representar uma indicação de sucesso para a teoria de supercordas, pois esses campos, ao lado do gráviton, representam os campos correspondentes ao estado fundamental de uma supercorda[24].

Outro, seria um estudo mais aprofundado da quantização BRST do campo tensorial antissimétrico de ordem três e sua possível ligação com a constante cosmológica, que pode representar uma ponte entre a física clássica, segundo a qual a constante cosmológica deve ser zero, e a física quântica, onde a afirmação de que ela seja nula nada tem de trivial[23].

A importância dos campos tensoriais antissimétricos pode, ainda, ser notada pelo número e diversidade de artigos que os citam ou deles tratam, importância esta que aumenta conforme a física teórica de campos se volta para a linguagem da geometria diferencial e das formas.

O estudo de partículas relativísticas com spin e suas relações com teorias de campos (não só os campos tensoriais antissimétricos) pode ser muito útil no estudo das simetrias que um modelo de partícula deve apresentar e do problema das anomalias globais que costumam aparecer na quantização de teorias clássicas baseadas em coordenadas grassmanianas[36]. Podemos, ainda, considerar a partícula supersimétrica como um campo de provas para

as supercordas, que são como generalizações daquelas, na procura de uma teoria de campos que as represente.

Para a teoria de supercordas, ocorrem dificuldades para se encontrar as simetrias de um modelo de campo que as represente. O problema do modelo de partícula representar os rotacionais (field strentghs) dos campos tensoriais antissimétricos, e não os próprios campos em questão, indica a dificuldade de se construir um modelo de partícula que apresente as mesmas simetrias desses campos. O mesmo pode estar ocorrendo para as supercordas. Outra característica que apareceu no modelo de partícula tratado no capítulo 7 é o fato de ele ser quantizado mais facilmente mwediante uma escolha não-usual da função fixadora de gauge. Casos semelhantes podem aparecer em outras teorias.

Apêndice A

COMENTÁRIOS

Este apêndice tem a função de fornecer explicações mais detalhadas de certos assuntos que de outra forma estariam deslocadas no texto, dificultando sua leitura. Aqui procurar-se-á fazer exposições rápidas de tópicos necessários ao bom entendimento do texto principal, mas sem entrar em discussões muito profundas ou em demonstrações longas. Para isso, serão indicadas referências onde esses assuntos são melhor tratados.

A.1 Vínculos de 1ª classe e transformações de gauge

De acordo com a eq. (2.34), a evolução temporal de uma função A qualquer do espaço de fase depende de quantidades indeterminadas (os multiplicadores de Lagrange)

$$\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, \mathcal{H}_c\}_D + \lambda^i \{A, \phi_i\}_D \quad .$$

Portanto, se tomarmos a função A em um certo instante de tempo t_0, teremos, em um instante t posterior, diversos valores da função $A(t)$ dependendo do conjunto de multiplicadores de Lagrange a que eles se referem.

Tomemos dois desses valores de $A(t)$, chamando de A_λ o valor da função para um conjunto $\{\lambda^i\}$ de multiplicadores de Lagrange e de $A_{\lambda'}$, o valor da função para um outro conjunto $\{\lambda'^i\}$. Se considerarmos $A(t)$ como sendo uma função que não depende explicitamente do tempo, podemos expandi-la em termos do intervalo de tempo $(t - t_0)$.

$$A_\lambda(t) = A(t_0) + \frac{dA_\lambda}{dt}(t - t_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2 A_\lambda}{dt^2}(t - t_0)^2 + \dots \quad . \tag{A.1}$$

Se tomarmos um intervalo de tempo $\delta t = (t - t_0)$ muito pequeno, podemos considerar a expressão acima somente até o termo de primeira ordem em δt

$$A_\lambda(t) \approx A(t_0) + \dot{A}_\lambda \delta t \quad . \tag{A.2}$$

A diferença entre os dois valores da função A no instante t será dada, então, por

$$\delta A \equiv A_\lambda - A_{\lambda'} = \delta t(\lambda^i - \lambda'^i)\{A, \phi_i\}_D$$

Escrevendo $\varepsilon(t) = \delta t(\lambda^i - \lambda'^i)$, podemos escrever a expressão acima da seguinte forma

$$\delta A = \varepsilon(t)\{A, \phi_i\}_D \quad . \tag{A.3}$$

Portanto, vemos que os vínculos de 1ª classe são geradores de transformações infinitesimais que relacionam funções que se encontram em diferentes classes determinadas pelos multiplicadores de Lagrange λ^i.

Para observáveis físicos (grandezas que podem ser medidas), é razoável se esperar que eles não dependam de quantidades indeterminadas do tipo dos multiplicadores de Lagrange. Espera-se, então, que para um observável $\mathcal{O}$ valha a expressão

$$\{\mathcal{O}, \phi_i\}_D \approx 0 \ . \qquad (A.4)$$

Isso indica que os observáveis físicos são grandezas invariantes pelas transformações geradas pelos vínculos de 1ª classe ϕ_i. Dizemos, então, que um conjunto de multiplicadores de Lagrange relacionados pelas transformações infinitesimais (A.3) constituem classes de equivalência que correspondem ao mesmo estado físico.

No entanto, podemos ver que qualquer combinação linear dos vínculos de 1ª classe e de suas derivadas no tempo também geram transformações pelas quais os observáveis são invariantes. Se considerarmos teorias de gauge, as transformações geradas pelos vínculos de 1ª classe e combinações lineares destes com suas derivadas no tempo em geral excedem em muito o número de transformações de gauge pelas quais a teoria é invariante. Isso significa que nem todas as transformações que conectam pontos de uma determinada classe de equivalência são transformações de gauge.

Uma boa discussão desse problema (com um método para identificar as combinações lineares que geram transformações de gauge) pode ser encontrada nas referências [3], [17] e [18].

A.2 A álgebra dos vínculos de 1ª classe e as funções de estrutura

De acordo com a definição dada pela eq. (2.27a), os vínculos de 1ª classe têm parênteses de Poisson (e, conseqüentemente, de Dirac) fracamente nulos com todas as variáveis do espaço de fase ou funções que delas dependam. Mais particularmente, isso implica em que

$$\{\phi_i, \phi_j\}_D \approx 0 \qquad (A.5a)$$

$$\{\mathcal{H}_c, \phi_i\}_D \approx 0 \ . \qquad (A.5b)$$

Por serem apenas fracamente iguais a zero, os parênteses de Dirac acima podem ser considerados, de um modo geral, como fortemente iguais a combinações lineares dos vínculos de 1ª classe e de suas derivadas espaciais. Expressamos essa relação na seguinte forma

$$\{\phi_i, \phi_j\}_D = U_{ij}^k \phi_k \qquad (A.6b)$$

$$\{\mathcal{H}_c, \phi_i\}_D = V_i^l \phi_j \ , \qquad (A.6b)$$

onde U_{ij}^K e V_j^i são chamadas de funções de estrutura de primeira ordem, e podem ser constantes ou funções das variáveis do espaço de fase. Consideraremos que as paridades dessas funções de estrutura são dadas por

$$P(U_{ij}^k) = P_i + P_j + P_k \qquad (A.7a)$$

$$P(V_i^j) = P_i + P_j \ , \qquad (A.7b)$$

onde designamos $P_i \equiv P(\phi_i)$.

Podemos notar que a álgebra dos vínculos só será uma álgebra de Lie quando as funções de estrutura forem constantes.

Se impusermos as identidades de Jacobi para os vínculos,

$$(-1)^{P_iP_k}\{\{\phi_i, \phi_j\}_D, \phi_k\}_D + (-1)^{P_iP_j}\{\{\phi_j, \phi_k\}, \phi_i\}_D +$$
$$+(-1)^{P_jP_k}\{\{\phi_k, \phi_i\}_D, \phi_j\}_D = 0 \ , \qquad (A.7)$$

chegamos à seguinte condição sobre as funções de estrutura

$$D^i_{jkm}\phi_i = 0 \quad , \tag{A.8}$$

onde

$$\begin{aligned} D^i_{jkm} &= (-1)^{P_m(P_i+P_k)+P_jP_k}\{U^i_{jk},\phi_m\}_D + \\ &+(-1)^{P_j(P_i+P_m)+P_mP_k}\{U^i_{km},\phi_j\}_D + (-1)^{P_k(P_i+P_j)+P_mP_j}\{U^i_{mj},\phi_k\}_D + \\ &+(-1)^{P_k(P_m+P_j)}U^n_{jk}U^i_{nm} + (-1)^{P_m(P_j+P_k)}U^n_{km}U^i_{nj} + \\ &+(-1)^{P_j(P_m+P_k)}U^n_{mj}U^i_{nk} \quad . \end{aligned} \tag{A.9}$$

A expressão acima foi escrita de forma que ela seja totalmente antissimétrica nos índices inferiores.

A condição (A.9) pode ser escrita[18] na forma

$$D^i_{jkm} = 2U^{(2)\ \ in}_{jkm}\phi_n \quad , \tag{A.10}$$

onde $U^{(2)\ \ in}_{jkm}$ são as chamadas funções de estrutura de 2ª ordem. Impondo a identidade de Jacobi para os parênteses de Dirac de D^i_{jkm} com os vínculos de 1ª classe, chegamos às funções de estrutura de 3ª ordem e o processo se repete até que tenhamos funções de estrutura de ordem n. É importante notar, olhando para a eq. (A.9), que o fato de uma dessas funções de estrutura ser nula faz com que todas as funções de ordens superiores a ela também sejam nulas.

Esse processo é longo e trabalhoso, mas pode ser simplificado se trabalharmos com as funções de estrutura antissimetrizadas nos índices inferiores. Uma boa maneira de se fazer isso é contraindo as funções de estrutura com produtos de certas variáveis η^i (que chamaremos de variáveis fantasmas) que tenham paridades opostas às delas. Esse produto fica da seguinte forma

$$K^{(n)\ \ a_1\ldots a_m} \equiv \eta^{b_{m+1}}\eta^{b_m}\ldots\eta^{b_1}U^{(n)\ \ a_1\ldots a_m}_{b_1\ldots b_{m+1}} \quad . \tag{A.11a}$$

Podemos também definir

$$P^{(n)\ \ a_1\ldots a_n} \equiv \eta^{b_{n+2}}\ldots\eta^{b_1}D^{(n)\ \ a_1\ldots a_m}_{b_1\ldots b_{m+2}} \quad . \tag{A.11b}$$

Utilizando essas definições e considerando a relação

$$\eta^m\eta^k\eta^j\{U^i_{jk},\phi_m\}_D = (-1)^{P_i(P_m+1)}\{K^i,K\}_D \quad ,$$

onde estamos considerando $K = \eta^m U_m^{(0)} = \eta^m \phi_m$, e a relação

$$\eta^m \eta^k \eta^j U_{jk}^n U_{nm}^i = (-1)^{P_m+1} K^n \frac{\partial_{\rightarrow} K^i}{\partial \eta^n} \quad ,$$

obtemos a expressão simplificada

$$P^i = (-1)^{P_i} \left(\{K^i, K\}_D + (-1)^{P_i P_n} K^n \frac{\partial_{\rightarrow} K^i}{\partial \eta^n} \right) \quad . \qquad (A.12)$$

Para o caso de funções de estrutura de ordem n, a fórmula geral é dada nas referências [17],[30], embora utilizando notações um pouco diferentes da que se usa aqui.

A rigor, deveríamos repetir o mesmo processo para as funções de estrutura V_i^j obtidas dos parênteses de Dirac da densidade hamiltoniana canônica com os vínculos de 1ª classe. No entanto, não se conhece nenhuma teoria em que essas funções não sejam nulas. A fórmula geral para essas funções é dada na ref. [18].

A.3 A carga de BRST

De acordo com o que foi visto no capítulo 4, a carga de BRST deve obedecer certas condições que reproduziremos aqui para maior conveniência

1) a carga tem que ser nilpotente

$$\{Q, Q\}_D = 0 \quad ; \tag{A.13a}$$

2) deve ter número fantasma igual a um

$$gh(Q) = 1 \quad \text{e} \tag{A.13b}$$

3) a ação efetiva tem que ser invariante pelas transformações geradas por ela (transformações de BRST)

$$\delta S_{ef} = \{S_{ef}, Q\}_D = 0 \quad . \tag{A.13c}$$

Vamos supor inicialmente uma parcela da carga de BRST que é chamada de carga mínima (Q_{min}) e que deve obedecer todas as propriedades acima.

A essas propriedades adicionaremos mais uma: 4) a de que, em primeira ordem, a carga de BRST mínima deve ser dada pela expressão encontrada para teorias irredutíveis abelianas a menos do termo dependente dos fantasmas $\mathcal{P}^i$ e dos momentos p_i

$$Q_{min} = \eta^i \phi_i \quad . \tag{A.14}$$

Vamos supor que a carga de BRST mínima no caso mais geral pode ser escrita sob a forma de uma série dos momentos dos fantasmas

$$Q_{min} = \eta^i \phi_i + \sum_{n \geq 0} \alpha^{(n)\, a_1 \ldots a_n} \bar{\mathcal{P}}_{a_n} \ldots \bar{\mathcal{P}}_{a_1} \quad . \tag{A.15}$$

A expressão acima automaticamente obedece à condição número 2, contanto que os coeficientes da série tenham número fantasma igual a zero.

Utilizando as condições impostas acima, é possível provar[18] que os coeficientes dessa expansão são as próprias funções de estrutura da álgebra

dos vínculos de 1ª classe. Mostraremos aqui somente o caso da primeira ordem dessa expansão.

Tomemos a seguinte expressão para a carga mínima de BRST

$$Q_{min} = \eta^i \phi_i + \alpha^i \bar{\mathcal{P}}_i \quad . \tag{A.16}$$

A condição de nilpotência (condição 1) implica em

$$\{Q_{min}, Q_{min}\} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\eta^i \phi_i, \eta^j \phi_j\}_D + \{\alpha^i \bar{\mathcal{P}}_i, \alpha^j \bar{\mathcal{P}}_j\}_D + 2\{\alpha^i \bar{\mathcal{P}}_i, \eta^j \phi_j\}_D = 0 \quad .$$

Expandindo esta expressão e escrevendo as funções de estrutura de 1ª ordem

$$\{\phi_j, \phi_k\}_D = U^i_{jk} \phi_i \quad ,$$

obtemos a seguinte equação

$$2(-1)^{P_i} \alpha^i \phi_i + (-1)^{P_j(P_k+1)} \eta^j \eta^k U^i_{jk} \phi_i + 2\bar{\mathcal{P}}^i \{\alpha_i, K\}_D +$$

$$+2(-1)^{P_i P_j} \bar{\mathcal{P}}^i \alpha^j \frac{\partial \alpha_i}{\partial \eta^j} + (-1)^{P_i(P_j+1)} \bar{\mathcal{P}}^i \bar{\mathcal{P}}^j \{\alpha_i, \alpha_j\}_D = 0 \quad , \tag{A.17}$$

onde fizemos a substituição $\eta^i \phi_i = K$.

A solução dessa equação implica nas três expresões seguintes

$$\alpha^i = -\frac{1}{2}(-1)^{P_i + P_k + 1} \eta^k \eta^j U^i_{jk} \quad , \tag{A.18}$$

$$\{\alpha^i, K\}_D + (-1)^{P_i P_j} \alpha^j \frac{\partial \alpha^i}{\partial \eta^j} = 0 \quad \text{e} \tag{A.19}$$

$$\{\alpha^i, \alpha^j\}_D = 0 \quad . \tag{A.20}$$

A primeira expressão dá a forma dos coeficientes e a terceira nos fornece a álgebra destes (no caso, ela é abeliana). A segunda expressão pode ser comparada com a expressão obtida na sessão anterior para as funções de estrutura de primeira ordem. Como tanto os coeficientes da série da carga de BRST mínima quanto as funções de estrutura redefinidas são soluções da mesma equação , podemos associá-las em uma relação de igualdade. O mesmo pode ser feito para ordens maiores, mostrando que os coeficientes da série em que foi expandida a carga de BRST mínima correspondem às

funções de estrutura antissimetrizadas.Em particular, a equação (A.19) nos revela que não há termos de ordens maiores na série (A.16).

Para montar a carga de BRST total, adicionamos mais termos que dependem dos fantasmas $\mathcal{P}^i$ e dos momentos p_i. Esses termos obedecem às três propriedades definidas no início desta sessão e fornecem a seguinte expressão para a carga de BRST

$$Q = Q_{min} + p^i \mathcal{P}_i.$$

No caso de sistemas redutíveis, uma fórmula para a carga de BRST em qualquer estágio de redutibilidade é fornecida apenas para teorias abelianas[18], e é dada pela expressão (4.35). Para o caso de teorias não-abelianas, o melhor procedimento é considerar caso a caso as teorias, pois não parece existir uma fórmula geral na literatura.

Apêndice B

CÁLCULO DE ALGUNS DETERMINANTES

Este apêndice traz os cálculos de alguns determinantes que, se estivessem feitos no texto, dificultariam o seu entendimento.

Como norma geral, esse cálculo será feito passando do espaço de Minkowski para o espaço euclidiano por meio de uma rotação de Wick, onde serão calculados os determinantes, voltando, depois, para o espaço de Minkowski.

A fim de regularizar os determinantes, será usado o método de regularização da função zeta, que significa fazer uma extensão analítica da função $\zeta(s)$ para $s < 1$, uma vez que $s = 1$ é o único polo dessa função .

B.1 $\det \partial_0^2$

Para calcular esse determinante, fazemos primeiro uma rotação de Wick para passar do espaço de Minkowski para o euclidiano

$$t \longrightarrow it \quad \Rightarrow \quad \partial_0^2 \longrightarrow -\partial_0^2 \ .$$

Devemos, agora, diagonalizar a matriz infinita do operador $-\partial_0^2$. O determinante será, então, igual à produtória dos elementos da diagonal. Para isso, resolvemos a equação de autovalores do operador $-\partial_0^2$

$$-\partial_0^2 \eta = \alpha_n^2 \eta \Rightarrow \eta = A e^{i\alpha_n t} + B e^{-i\alpha_n t} \ .$$

Se considerarmos as condições de contorno

$$\eta(t_2) = \eta(t_1) = 0 \ , \tag{B.1}$$

chegamos aos seguintes valores para os autovalores de $-\partial_0^2$

$$\alpha_n^2 = \left(\frac{n\pi}{\Delta t}\right)^2 \quad , \quad n = 1, 2, \ldots \ ,$$

onde $\Delta t = t_2 - t_1$.

Temos, então, a seguinte forma para o $\det(-\partial_0^2)$

$$\det(-\partial_0^2) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{\Delta t}\right)^2 n^2 \ . \tag{B.2}$$

Essa expressão diverge, mas pode ser regularizada utilizando a *função* $\zeta(s)$, que pode ser definida como

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \ . \tag{B.3}$$

Para fazer a chamada regularização zeta, vamos tomar o caso geral para um determinante qualquer de uma matriz A que possa ser escrito como

$$\det A = \prod_{n=1}^{\infty} a n^b = \prod_{n=1}^{\infty} \exp\left[\ln(a n^b)\right] =$$

$$= \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} +(\ln a + \ln n)\right] = \exp\left(\ln a \sum_{n=1}^{\infty} 1 + b \sum_{n=1}^{\infty} \ln n\right) \quad .$$

Essa expressão pode ser escrita da seguinte forma

$$\prod_{n=1}^{\infty} an^b = \exp\left(\ln a \lim_{s\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - b \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\right) \quad .$$

Podemos escrever essa expressão em termos da função ζ

$$\prod_{n=1}^{\infty} an^b = \exp\left[\ln a \zeta(0) - b\zeta'(0)\right] \quad ,$$

onde $\zeta'(s)$ é a derivada de $\zeta(s)$ em relação a s. Esses valores estão tabelados

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2} \quad , \quad \zeta'(0) = -\frac{1}{2}\ln(2\pi) \quad . \qquad (B.4)$$

Substituindo esses valores, obtemos para o determinante a expressão

$$\prod_{n=1}^{\infty} an^b = a^{-1/2}(2\pi)^{b/2} \quad . \qquad (B.5)$$

Se aplicarmos esse resultado ao cálculo do $\det(-\partial_0^2)$, obtemos

$$\det(-\partial_0^2) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{\Delta t}\right)^2 n^2 = 2\Delta t \quad .$$

Voltando agora para o espaço de Minkowski, temos, finalmente,

$$\det \partial_0^2 = -2i\Delta t \quad . \qquad (B.6)$$

B.2 det ∂_0

Novamente, passamos do espaço de Minkowski para o espaço euclidiano

$$\det \partial_0 \longrightarrow \det(i\partial_0) \ .$$

Para calcular esse determinante, primeiro calculamos os autovetores da matriz $i\partial_0$

$$i\partial_0\psi = \lambda_n\psi \Rightarrow \psi(t) = A\exp(-i\lambda_n t) \ .$$

Se utilizarmos duas condições de contorno, os autovalores ficam indeterminados, que é o caso de alguns dos determinantes obtidos no texto. Esses determinantes podem ser absorvidos pela constante de normalização . No entanto, para o caso em que utilizamos uma única condição de contorno antiperiódica

$$\psi(t_1) + \psi(t_2) = 0 \ , \tag{B.7}$$

obtemos que os autovalores são dados por

$$\lambda_n = (2n+1)\frac{\pi}{\Delta t} \ . \tag{B.8}$$

O determinante, então, é dado por

$$\det(i\partial_0) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n = \prod_{n=-\infty}^{\infty} (2n+1)\frac{\pi}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\pi}{\Delta t}\prod_{n=-\infty}^{-1}(2n+1)\frac{\pi}{\Delta t}\prod_{n=1}^{\infty}(2n+1)\frac{\pi}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\pi}{\Delta t}\prod_{m=1}^{\infty}(-2m+1)\frac{\pi}{\Delta t}\prod_{n=1}^{\infty}(2n+1)\frac{\pi}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\pi}{\Delta t}\prod_{n=1}^{\infty}(1-4n^2)\left(\frac{\pi}{\Delta t}\right)^2 =$$

$$= \frac{\pi}{\Delta t}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{\Delta t}\right)^2 - \frac{\pi}{\Delta t}\prod_{n=1}^{\infty}4n^2\left(\frac{\pi}{\Delta t}\right)^2 \ .$$

Utilizando a fórmula (B.5), chegamos ao resultado

$$\det(i\partial_0) = 1 - \pi \quad .$$

Voltando para o espaço de Minkowski, temos o resultado final

$$\det \partial_0 = 1 - \pi \quad . \qquad (B.9)$$

B.3 $\det(\delta_{ij}\partial_0 - f\epsilon_{ij})$

Para calcular esse determinante, temos primeiro que passar para o espaço euclidiano

$$\det(\delta_{ij}\partial_0 - f\epsilon_{ij}) \longrightarrow \det(i\delta_{ij}\partial_0 - f\epsilon_{ij})$$

e calcular o $\det(i\delta_{ij}\partial_0 - f\epsilon_{ij})$. Para isso, vamos calcular o determinante externo da matriz do operador $(i\delta_{ij}\partial_0 - f\epsilon_{ij})$

$$\det(i\delta_{ij}\partial_0 - f\epsilon_{ij}) = \begin{vmatrix} i\partial_0 & -f \\ f & i\partial_0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\det(\partial_0^2 - f^2) = -\det(\partial_0 + f)\det(\partial_0 - f) \ .$$

Para calcular os autovalores das matrizes desses operadores, nós voltamos ao espaço de Minkowski, ficando com a expressão

$$\det(\delta_{ij}\partial_0 - f_{ij}) = -\det(i\partial_0 - f)\det(i\partial_0 + f) \ .$$

Começaremos calculando os autovalores da matriz $(i\partial_0 + f)$

$$(i\partial_0 + f)\psi = \lambda_n\psi \Rightarrow \psi(t) = A\exp[-i(\lambda_n - f)t] \ .$$

Utilizando uma condição de contorno antiperiódica

$$\psi(t_1) + \psi(t_2) = 0 \ , \qquad (B.10)$$

obtemos os autovalores

$$\lambda_n = (2n+1)\frac{\pi}{\Delta t} + f \ . \qquad (B.11)$$

O determinante pode ser escrito, então, como

$$\det(i\partial_0 + f) = \left(\frac{\pi}{\Delta t} + f\right)\prod_{n=-\infty}^{-1}\left[(2n+1)\frac{\pi}{\Delta t} + f\right]\prod_{n=1}^{\infty}\left[(2n+1)\frac{\pi}{\Delta t} + f\right] =$$

$$= \left(\frac{\pi}{\Delta t} + f\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{\pi}{\Delta t} + f\right)^2 - \left(2\frac{\pi}{\Delta t}\right)^2 n^2\right] =$$

$$= -\left(\frac{\pi}{\Delta t} + f\right) \prod_{m=1}^{\infty} \left(2\frac{\pi}{\Delta t}\right)^2 m^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{f\Delta t}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{n^2}\right] \quad .$$

Se considerarmos a seguinte expressão regularizadora

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a^2}{n^2}\right) = \frac{1}{a\pi}\text{sen}(a\pi) \qquad (B.12)$$

e a fórmula (B.5), obtemos o resultado

$$\det(i\partial_0 + f) = -2\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{f\Delta t}{2}\right) = -2\cos\left(\frac{f\Delta t}{2}\right) \quad . \qquad (B.13)$$

Podemos ver da expressão acima que o sinal de f não influencia o valor do determinante. Portanto, podemos aplicar o resultado acima para ambos os determinantes, obtendo o resultado

$$\det(\delta_{ij} - f\epsilon_{ij}) = -4\left[\cos\left(\frac{f\Delta t}{2}\right)\right]^2 \quad . \qquad (B.14)$$

Referências

[1] P.A.M.Dirac, Can.J.Math. 2 (1950) 129

P.A.M.Dirac, Proc.Roy.Soc. A246 (1958) 326

P.Bergmann, Rev.Mod.Phys. 33 (1961) 510

J.Anderson e P.Bergmann, Phys.Rev. 83 (1951) 1081

[2] R.Casalbuoni, Nuov.Cim. 33A (1976) 115

A.Barducci, R.Casalbuoni e L.Lusanna, Nuov.Cim. 35A (1976) 377

[3] K.Sundermeyer, "Constrained Dynamics", Lecture Notes in Physics, vol.169 (1982)

H.O.Girotti, "Classical and Quantum Dynamics of Constrained Systems", lecture delivered at the V Escola de Verão Jorge André Swieca, Section: Field Theory and Particles (1989)

P.T.Sobrinho, dissertação de mestrado (IFUSP, 1989)

[4] L.Castellani, Ann.Phys. (NY) 143 (1982) 357

N.Mukunda, Phys.Scr. 21 (1980) 783

R.Sugano e T.Kimura, Prog.Theor.Phys. 69 (1983) 252

[5] R.P.Feynman, Rev.Mod.Phys. 20 (1948) 267

[6] P.A.M.Dirac, Phys.Zeit.der Sowjetunion 3 (1933) 1

[7] C.DeWitt-Morette, A.Maheshwari e B.Nelson, Phys.Rep. 50 (1979) 255

J.Glimm e A.Jaffe, "Quantum Physics, a Functional Integral Point of View", second edition (1987), Springer-Verlag

[8] P.Ramond, "Field Theory: A Modern Primer", Addison Wesley Publ.C.Inc. (1989)

[9] E.S.Fradkin e G.A.Vilkovisky, CERN preprint TH-2332 (1977), não-publicado

[10] L.D.Fadeev e V.Popov, Phys.Lett. 25B (1967) 29
L.D.Fadeev, Theor.Math.Phys. 1 (1969) 29

[11] G.Parisi e N.Sourlas, Phys.Rev.Lett. 198B (1987) 427

[12] H.Aratyn e R.Ingermanson, Phys,Lett. 198B (1987) 427
H.Aratyn, R.Ingermanson e A.J.Niemi, Nucl.Phys. B307 (1988) 157
A.J.Niemi, Ann.Phys. (NY) 187 (1988) 369

[13] C.Becchi, A.Rouet e R.Stora, Ann.Phys. (NY) 98 (1976) 287

[14] I.V.Tyutin, Lebedev preprint 39 (1975)

[15] E.S.Fradkin e G.A.Vilkovisky, Phys.Lett. 55B (1975) 224
I.A.Batalin e G.A.Vilkovisky, Phys.Lett. 69B (1977) 309
I.A.Batalin e G.A.Vilkovisky, Phys.Lett. 102B (1981) 27

[16] B.S.DeWitt, Phys.Rev. 162 (1967) 1195

[17] J.A.Anderson e P.G.Bergmann, Phys.Rev. 83 (1951) 1018
M.E.V.Costa, H.Girotti e T.J.S.Simões, Phys.Rev. D32 (1985) 405
X.Gràcia e J.M.Pons, Ann.Phys. (NY) 187 (1988) 355

[18] M.Henneaux, Phys.Rep. 126 (1985) 1

[19] E.S.Fradkin e M.A.Vasiliev, Lett.Nuov.Cim. 25 (1979) 79

[20] P.K.Townsend, Phys.Lett. 88B (1979) 97

[21] P.K.Townsend, Phys.Lett. 90B (1980) 275
W.Siegel, Phys.Lett. 103B (1981) 107

[22] E.Witten, Nucl.Phys. B268 (1986) 253

[23] S.W.Hawking, Phys.Lett. 134B (1984) 403
M.J.Duff e P.van Nieuwenhuizen, Phys.Lett. 94B (1980) 179
A.Aurelia, H.Nicolai e P.K.Townsend, Nucl.Phys. B176 (1980) 509
M.J.Duff, Phys.Lett. 226B (1989) 36
M.J.Duncan e L.G.Jensen, preprint CERN-TH.5520/89

[24] M.B.Green, J.H.Schwarz e E.Witten, Superstring Theory (vol.1) - Cambridge University Press (1987)

[25] M.Kalb e P.Ramond, Phys.Rev. D9 (1974) 2273

[26] V.I.Ogievetskii e I.V.Polubarinov, Sov.J.Nucl.Phys. 4 (1967) 156
H.Hata e T.Kugo, Nucl.Phys. B178 (1981) 527
R.L.Davis e E.P.S.Shellard, Phys.Lett. 214B (1988) 219

[27] E.Sezgin e P.vanNieuwenhuizen, Phys.Rev. D22 (1980) 301
W.Siegel, Phys.Lett. 93B (1980) 170

[28] J.Thierry-Mieg, Nucl.Phys. B228 (1983) 259

[29] V.O.Rivelles e L.Sandoval Jr., On the Quantum Equivalence of Antisymmetric Tensor Field Theories, preprint IFUSP (1990)

[30] I.A.Batalin e E.S.Fradkin, Phys.Lett. 122B (1983) 157
I.A.Batalin e G.A.Vilkovisky, Phys.Rev. D28 (1983) 2567

[31] S.P.de Alwis, M.T.Grisaru e L.Mezincescu, Phys.Lett. 190B (1987) 122; Nucl.Phys. B303 (1987) 57
A.H.Diaz, Phys.Lett. 203B (1988) 408
L.Baulieu, E.Bergshoeff e E.Sezgin, Nucl.Phys. B307 (1988) 348
R.Potting, H.S.Tao e C.Taylor, Phys.Lett. 215B (1988) 537
M.Blagojevic, D.S.Popovic e B.Sazdovic, Phys.Lett. 214B (1988) 47; Nucl.Phys. B322 (1989) 587
C.Batlle e J.Gomis, Phys.Rev. D38 (1988) 1169

[32] P.Howe, S.Penati, C.Pernici e P.K.Townsend, Class.Quant.Grav. 6 (1989) 1125

[33] P.Howe e P.K.Townsend, Global Anomalies of Point Particles, preprint CERN/TH-5519/89 (1989)

[34] V.O.Rivelles e L.Sandoval Jr., BRST Quantization of Relativistic Spinning Particles with a Chern-Simons Term, preprint IFUSP (1990)

[35] M.Pierri e V.O.Rivelles, BRST Quantization of Spinning Relativistic Particles with Extended Supersymmetries, preprint IFUSP/P-838

[36] S.Elitzur, E.Rabinovici, Y.Frishman e A.Schwimmer, Nucl.Phys. B237 (1986) 93

[37] G.Papadopoulos, Class.Quant.Grav. 6 (1989) 1745

A Deus eu dedico a última página,
a última pedra, a mais importante,
sinal do trabalho concluído.
Gloria in excelsis Deo!