UNIVERSIDADE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

GRAVITAÇÃO COMO QUEBRA ESPONTÂNEA DE SIMETRIA

VANDA LIDIA R. DA SILVEIRA

Juan Luis Fernandez

J. Kinef.

A. R. Agush

Imagem

Cherque (unij)

Tese de Doutorado sob a orientação do Prof. Henrique Fleming, apresentada no Instituto de Física da Universidade de São Paulo

SBI-IFUSP

305M810T0632

SÃO PAULO
1983

539.725

S 587g

D

dx. 1

DADOS PARA FICHA CATALOGRÁFICA DE TESES

AUTOR (NOME COMPLETO): VANDA LÍDIA ROMANO DA SILVEIRA

TÍTULO DA TESE: "GRAVITAÇÃO COMO QUEBRA ESPONTÂNEA DE SIMETRIA"

ANO: 1983

MESTRADO: ☐

DOUTORAMENTO: ☒

ORIENTADOR: HENRIQUE FLEMING

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Teoria de Campos

UNITERMOS (ASSUNTO): Gravitação - Quebra espontânea de Simetria

OBS.: EM CASO DE DÚVIDA, CONSULTAR A BIBLIOTECA DO IFUSP.

R E S U M O

Estudamos duas teorias nas quais o termo de Einstein, $R\sqrt{-g}$, encontra-se ausente da lagrangeana original do problema e é gerado através de mecanismo de quebra espontânea de simetria.

Na primeira delas é introduzido um campo escalar, que é o responsável pelo fenomeno de quebra de simetria. Na segunda, não há campo escalares: a quebra de simetria aparece como um efeito dinâmico.

A B S T R A C T

We study two theories in which the Einstein term, $R\sqrt{-g}$, is not present in the original lagrangian. This term is created by a spontaneous broken symmetry mechanism. In the first theory, there is a scalar field through which the breaking of symmetry occurs. In the second one, there is no scalar field. The symmetry is dynamically broken.

Agradeço ao prof. Henrique Fleming pela paciência, apoio e orientação.

À FAPESP sou grata pelo apoio financeiro durante o período de março/1980 a fevereiro/1981.

Ao Eric agradeço pela alegria e pelo sorriso que me estimulou.

I N D I C E

Introdução.....	1
Parte A - I - A teoria de gravitação com campo escalar.....	5
II - Soluções homogêneas e isotrópicas.....	18
III - Soluções estáticas, com simetria esférica e $T_{\mu\nu}^m = 0$	29
IV - Quantização e renormalização da teoria com campo escalar.....	41
Parte B - I - A gravitação induzida.....	49
II - O modelo de Gross-Neveu.....	67
III - A gravitação induzida no modelo de Gross- -Neveu.....	80
Conclusão	91
Apêndices - A1. Movimento de partículas na teoria com cam- po escalar.....	92
A2. Equações de movimento.....	95
A3. $T_{m;\nu}^{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \left[\partial_\lambda \frac{\delta L_m}{\delta (\partial_\lambda \phi)} - \frac{\delta L_m}{\delta \phi} \right]$	98
A4. $T_{\mu\nu}^{'m} = e^{2\psi} T_{\mu\nu}^m$ para a teoria com campo es- calar e invariância de Weyl.....	101
A5. Cálculo de $T_{\mu\nu}^m$ para métrica Robertson- -Walker.....	104
A6. Soluções homogêneas e isotrópicas para a lagrangeana (3).....	109

B1. Cálculo de $\delta g_{\mu\nu}$	116
B2. R^2 , $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu\lambda\rho} R^{\mu\nu\lambda\rho}$ são proporcionais em duas dimensões de espaço-tempo.....	121
B3. Produtos normais.....	124
B4. Propagador do campo σ	131
Referências.....	134

I N T R O D U Ç Ã O

A teoria da relatividade geral proposta por Einstein¹ introduz um conceito novo e básico que consiste na possibilidade de geometrizar uma interação ou seja, admite-se que, no caso, a interação gravitacional possa ser completamente descrita em termos geométricos. Toda atração gravitacional observada pode ser sempre entendida como resultado de uma deformação na métrica do espaço-tempo. Esta característica tornou a interação gravitacional fundamentalmente distinta das demais interações estudadas. Para superar esta diferença muitas alternativas foram tentadas. Uma possibilidade é "geometrizar" as demais interações, o que foi tentado, sem sucesso, pelo próprio Einstein. Muito embora isto possa fazer sentido enquanto as teorias são consideradas classicamente, problemas aparecem quando se deseja introduzir a quantização para as interações eletromagnéticas, por exemplo.

Caminho diverso pode ser seguido procurando tratar a gravitação em pé de igualdade com as demais interações, deixando de lado, pelo menos temporariamente, o seu caráter geométrico. Neste caso, a semelhança do que ocorre com as outras interações, a gravitação deve ser quantizada e neste ponto surge um problema grave: a relatividade geral não é uma teoria renormalizável.

Procuramos aqui explorar duas possibilidades que podem (uma ou outra) vir a esclarecer este problema. Embora distintas, ambas as teorias tem em comum a mesma essencia. Conjecturamos que a lagrangeana de Einstein, $\sqrt{-g} R$, classicamente reconhecida, não deve ser um termo da lagrangeana fundamental mas uma contribuição gerada espontaneamente pela própria lagrangeana de matéria (e eventualmente de campos auxiliares) escrita sobre background curvo não especificado, e descreveria corretamente a interação gravitacional apenas no limite clássico. Fora deste limite devemos trabalhar com a lagrangeana fundamental que não contem o termo $\sqrt{-g} R$. Admitindo que a interação gravitacional descrita pelo termo de Einstein não seja fundamental é possível até argumentar-se que a própria quantização do campo gravitacional perde o sentido. Esta possibilidade recai em admitir uma diferença essencial entre a interação gravitacional e as demais interações, sendo as últimas interações fundamentais e a primeira um efeito induzido pelas interações fundamentais. A relação seria semelhante àquela que existe entre a eletrodinâmica quântica e o efeito Casimir². Por outro lado, mesmo que este argumento não seja correto e a gravitação deva ser considerada como interação fundamental e consequentemente quantizada, a quantização deverá recair na lagrangeana fundamental da teoria que não contem o termo $\sqrt{-g} R$, o que torna a renormalização pelo menos muito diferente daquela exigida na teoria de Einstein, embora não seja claro, no momento, se esta nova teoria será de fato renormalizável.

A primeira das possibilidades aqui analisada foi proposta por A. Zee³. Consiste basicamente em introduzir um campo escalar ϕ e gerar a lagrangeana de Einstein através de um termo $\sqrt{-g}\phi^2 R$, valendo-se do mecanismo de quebra espontanea de simetria no campo ϕ . A expectativa é que, a semelhança do que

ocorre na teoria de Weinberg-Salam⁴, a ausência de constantes dimensionais na lagrangeana de partida possa vir a ser um fator importante no sentido de tornar explícita a renormalizabilidade da teoria. Inicialmente procuramos estudar as consequências clássicas desta teoria com campo escalar e até que ponto estas consequências estariam de acordo com a relatividade geral. Além disto, procuramos discutir um pouco se a teoria com campo escalar apresenta de fato melhores chances de ser renormalizável ou não.

A segunda alternativa que estudamos foi proposta mais recentemente por S.L.Adler⁵ e A.Zee⁶. Aqui também procura-se obter o termo de Einstein, evitando introduzi-lo diretamente na lagrangeana, porém, não se faz uso de campo escalar. O mecanismo pelo qual gera-se o termo $\sqrt{-g} R$ é basicamente um mecanismo de quebra dinâmica de simetria. A grande dificuldade é a ausência de um método sistemático para estudar os coeficientes dos termos induzidos já que devido a presença de quebra dinâmica de simetria, os métodos perturbativos mostram-se ineficazes. Por este motivo, até o momento, o coeficiente do termo induzido $\sqrt{-g} R$, que é $(16\pi G)^{-1}$ sendo G a constante gravitacional, não pode ser calculado. Procuramos estudar o problema em duas dimensões, numa teoria exata e não trivial (modelo de Gross-Neveu) e obtivemos um coeficiente induzido exato para o termo $\sqrt{-g} R^2$ (o termo $\sqrt{-g} R$ é trivial em duas dimensões).

Temos portanto um trabalho dividido em duas partes bem definidas:

Parte A - Teoria da gravitação com campo escalar

AI - Apresentação da teoria. Discussão sobre o papel do campo escalar ϕ . Equações de movimento. Discussão sobre as consequências da presença de simetria por transformações de Weyl.

- AII - Soluções homogêneas e isotrópicas tipo Robertson-Walker para a teoria com campo ϕ , estudando-se as soluções particulares: ϕ constante e $\phi \propto a^{-1}(\eta)$.
- AIII - Soluções estáticas com simetria esférica e $T^m_{\mu\nu} = 0$ são procuradas. O limite Newtoniano é analisado e são obtidas restrições sobre a constante de acoplamento do campo ϕ .
- AIV - A quantização e renormalização da teoria é analisada. Procura-se saber até que ponto a teoria com campo escalar é melhor que a relatividade geral do ponto de vista da renormalizabilidade.

Parte B - Gravitação induzida

- BI - O fenômeno da gravitação induzida. Dedução das expressões para os coeficientes induzidos.
- BII - Apresentação do modelo de Gross-Neveu e cálculo do traço do tensor energia momento (T) neste modelo.
- BIII - A gravitação induzida no modelo de Gross-Neveu. Usando expressões deduzidas em BI e BII, determina-se exatamente um coeficiente induzido neste modelo específico.

Os apêndices procuram cobrir cálculos excluídos do texto, com exceção de um deles (apêndice B3) que pretende ser um breve resumo sobre produtos normais.

P A R T E A

AI - A TEORIA DE GRAVITAÇÃO COM CAMPO ESCALAR

Chamam-se teorias de gravitação com um campo escalar as teorias em que os efeitos gravitacionais são descritos em parte através da geometria dada por $g_{\mu\nu}(x)$ e em parte através de um campo escalar ϕ . A proposta mais conhecida foi feita por C. Brans e R. Dicke⁷ motivados pelo princípio de Mach, que é incompatível com uma constante de gravitação universal. Segundo eles, G , a constante gravitacional da teoria de Einstein, era substituída por um campo escalar ϕ . A lagrangeana da relatividade geral

$$L = \sqrt{-g} \left[R + 16\pi G L_m \right]$$

sendo L_m lagrangeana da matéria, foi substituída por

$$L = \sqrt{-g} \left[\phi^2 R + L_m - \omega \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right]$$

onde o campo escalar ϕ^2 desempenha o papel de G^{-1} e foi acrescentado o termo cinético correspondente ao campo ϕ , $\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$. ω é uma constante adimensional.

A idéia proposta por Zee³ recai em última análise na introdução de um campo escalar de modo semelhante ao que é pro-

posto por Brans-Dicke. A motivação no entanto é diferente porque o ponto de vista é outro. Com a introdução do campo escalar evita-se que a lagrangeana original do problema contenha parâmetros dimensionais. Estes parâmetros surgem apenas como resultado da presença de quebra espontânea de alguma simetria da teoria. A vantagem é que com isto obtém-se uma teoria com melhores perspectivas de vir a ser renormalizável, em relação a relatividade geral, ao menos segundo o folclore.

A ação proposta difere pouco da de Brans-Dicke, sendo escrita na forma

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \epsilon R \phi^2 - V(\phi) + L_m \right] \quad (1)$$

sendo L_m a lagrangeana de matéria, podendo conter ou não o campo ϕ .

(A matéria que não é descrita por ϕ será chamada ordinária)

R curvatura escalar $R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$ com $R_{\mu\nu}$ tensor de Ricci

$$(R_{\nu\rho} = \Gamma_{\nu\mu,\rho}^\mu - \Gamma_{\nu\rho,\mu}^\mu + \Gamma_{\tau\rho}^\mu \Gamma_{\nu\mu}^\tau - \Gamma_{\tau\mu}^\mu \Gamma_{\nu\rho}^\tau)$$

$V(\phi)$ auto-interação do campo ϕ que será tomado como $(\lambda/6)\phi^4$

ϵ constante de acoplamento adimensional com $\epsilon \leq 1$

Do ponto de vista mais imediato, a diferença reduz-se a presença do termo de auto-interação $V(\phi)$, que não comparece em Brans-Dicke. Há no entanto uma diferença fundamental de interpretação. O campo ϕ será um campo escalar quântico que apresentará, supostamente, o fenômeno de quebra espontânea de simetria. No limite clássico, as equações de movimento da teoria serão dadas em termos do valor esperado no vácuo do campo ϕ , $\phi_0 = \langle 0 | \phi | 0 \rangle$. O papel da "constante" gravitacional da teoria de

Einstein será desempenhado aqui por ϕ_0^{-2} . Isto pode ser visto a partir de (1) admitindo que o campo ϕ apresente valor esperado no vácuo diferente de zero: $\langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle = \phi_0(x) \neq 0$ e seja

$$\chi(x) = \phi(x) - \phi_0(x)$$

Temos, então, $\langle 0 | \chi(x) | 0 \rangle = 0$ e a lagrangeana (1) pode ser re-escrita

$$L = \sqrt{-g} \left[g^{\mu\nu} \partial_\mu (\chi(x) + \phi_0(x)) \partial_\nu (\chi(x) + \phi_0(x)) + \epsilon R \chi^2 + 2\epsilon R \phi_0 \chi + \epsilon R \phi_0^2 - V(\chi(x) + \phi_0(x)) + L_m \right]$$

Vemos portanto que surge um termo proporcional a $R\sqrt{-g}$ como na teoria de Einstein. O coeficiente deste termo aqui não é necessariamente constante porque ϕ_0 no caso geral é função do ponto⁸. Identificamos:

$$\epsilon \phi_0^2 \leftrightarrow \frac{1}{16\pi G} \quad \text{ou} \quad G = \frac{1}{16\pi \epsilon \phi_0^2}$$

e, neste sentido, podemos dizer que a teoria de Zee apresenta uma "constante" gravitacional variável que é gerada por meio de quebra espontânea de simetria.

Usualmente o acoplamento da matéria com a gravitação é feito partindo-se de lagrangeana escrita sobre espaço tempo de Minkowski e substituindo-se $\eta_{\mu\nu}$ por $g_{\mu\nu}$, ∂_μ por D_μ (derivada covariante). É o chamado acoplamento mínimo, expressão do princípio de equivalência. Outras formas de acoplamento mais complicadas podem ser tentadas acrescentando-se termos que envolvam campos de matéria e $g_{\mu\nu}(x)$ e anulem-se no caso de espaço tempo plano⁹. Na teoria de Zee uma possibilidade adicional de acoplamento aparece através do campo escalar $\phi(x)$ e basicamente coloca-

-se a dúvida entre trabalhar apenas com o acoplamento mínimo ou usar esta possibilidade de acoplamento via campo escalar. Em outras palavras, a questão é saber se o campo $\phi(x)$ deve ou não interagir diretamente com a matéria ordinária, ou seja $\phi(x)$ deve ou não estar presente em L_m .

A presença de ϕ na lagrangeana de matéria envolve uma dificuldade básica. Sendo $T_{\mu\nu}^m$ o tensor energia-momento da matéria é essencial que $T_{\mu\nu}^{m;\nu} = 0$ para que a teoria esteja de acordo com o princípio de equivalência (apêndice A1). Esta concordância é importante já que a experiência de Eötvös¹⁰ garante com grande precisão que todas as acelerações gravitacionais num mesmo ponto são iguais e que, portanto, partículas em queda livre movem-se ao longo de geodésicas. Além disto, $T_{\mu\nu}^{m;\nu} = 0$ garante que a troca de energia entre a matéria e o campo gravitacional seja descrita exatamente como na relatividade geral. Na teoria de Zee podemos mostrar que³ (apêndice A3)

$$T_{m;\nu}^{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \left[\partial_\lambda \left(\frac{\delta L_m}{\delta (\partial_\lambda \phi)} \right) - \frac{\delta L_m}{\delta \phi} \right] \quad (2)$$

De (2) fica claro que a ausência de ϕ em L_m é condição necessária para que $T_{\mu\nu}^{m;\nu} = 0$ pelo menos para soluções com $\partial_\mu \phi \neq 0$.

Apesar deste argumento favorável a exclusão de ϕ em L_m , é certo que persiste a possibilidade de ϕ estar presente em L_m desde que a violação da condição $T_{\mu\nu}^{m;\nu} = 0$ seja pequena o suficiente para estar incluída na incerteza das mais precisas verificações disponíveis do princípio de equivalência. Esta possibilidade é interessante. Estando presente em L_m , o campo ϕ pode ser responsável por efeitos de quebra espontânea de simetria e geração de massa a ela associada. Deste modo, partiríamos de uma lagrangeana sem massa e efeitos gravitacionais, através do campo ϕ , dariam origem a campos massivos. A massa das partículas

estaria ligada a $\phi_0(x)$, dependendo portanto da estrutura do vácuo da matéria considerada. Porém, no que segue, optaremos pela exclusão de ϕ em L_m .

Quanto às simetrias apresentadas pela lagrangeana (1), devemos lembrar que teorias de massa zero no espaço-tempo plano possuem, classicamente, invariância sob o grupo conforme de 15 parâmetros. Além disto, teorias invariantes por transformações de Weyl e de Einstein no espaço-tempo curvo apresentam no limite plano invariância sob o grupo conforme de 15 parâmetros¹¹. Assim, dada uma métrica, é possível definir partícula de massa zero como aquela que é invariante por transformações de Weyl e Einstein. É curioso observar que se assumirmos esta posição, recaímos num caso em que ϕ , classicamente, desaparece de cena após cumprir o seu papel. Isto pode ser visto construindo lagrangeana semelhante a (1) que apresenta invariância de Weyl. Para tanto é preciso que os termos $g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$ e $\epsilon R \phi^2$ tenham sinais opostos e ainda $\epsilon = 1/6$ ¹¹. Por outro lado $\epsilon R \phi^2$ e L_m devem ter sempre o mesmo sinal relativo para garantir uma interação gravitacional atrativa. Portanto, a lagrangeana semelhante a (1) que apresenta invariância de Weyl e interação gravitacional atrativa deve ser:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \epsilon R \phi^2 + V(\phi) + L_m \right] \quad (3)$$

com $\epsilon = 1/6$ e L_m invariante por transformações de Weyl. O fato de o termo cinético comparecer com sinal trocado em relação a L_m traz problemas de interpretação e não é claro se a teoria apresenta estado fundamental ou não. Por outro lado a própria invariância de Weyl permite reduzir a teoria com campo escalar (3), no limite clássico, à teoria de Einstein eliminando completamente o campo $\phi_0(x)$. Para tanto basta que $\phi_0(x)$ seja função con

tínua e sem zeros e que seja realizada uma transformação de Weyl, definida por

$$\begin{cases} g'_{\mu\nu}(x) = e^{-2\psi(x)} g_{\mu\nu}(x) \\ \phi'_0(x) = e^{\psi(x)} \phi_0(x) \end{cases}$$

de modo que $\phi'_0(x) = \text{constante}$. Isto pode ser verificado mais facilmente nas próprias equações de movimento que serão desenvolvidas a seguir.

Equações de movimento

Aplicando-se o princípio de mínima ação a (1) em relação a ϕ e a $g_{\mu\nu}$, obtemos as equações de movimento destes dois campos (apêndice A2):

$$\begin{cases} \square \phi - \epsilon R \phi + \frac{\lambda}{3} \phi^3 = 0 \\ 2\epsilon \phi^2 \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right] = - T_{\mu\nu}^{\phi} - T_{\mu\nu}^m + 2\epsilon g_{\mu\nu} \square \phi^2 - \\ - 2\epsilon \left(\frac{\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} + \nabla_{\nu} \nabla_{\mu}}{2} \right) \phi^2 \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{onde } \square f = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} \left[\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_{\nu} f \right]$$

∇_{μ} representa derivada covariante e

$$T_{\mu\nu}^{\phi} = 2\partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi - g_{\mu\nu} \partial_{\lambda} \phi \partial_{\rho} \phi g^{\lambda\rho} + \frac{\lambda}{6} \phi^4 g_{\mu\nu}$$

Fornecendo-se a distribuição de matéria $T_{\mu\nu}^m$, o sistema (2) deve fornecer $\phi(x)$ e $g_{\mu\nu}(x)$ que caracterizam a solução do problema.

De modo semelhante, as equações de movimento para ϕ e

e $g_{\mu\nu}$ no caso da lagrangeana (3) dão:

$$\left\{ \begin{array}{l} \square \phi + \epsilon R \phi + \lambda/3 \phi^3 = 0 \\ 2\epsilon \phi^2 (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) = T_{\mu\nu}^{\phi} - T_{\mu\nu}^m + 2\epsilon g_{\mu\nu} \square \phi^2 - \epsilon (\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} + \nabla_{\nu} \nabla_{\mu}) \phi^2 \end{array} \right. \quad (5a)$$

$$(5b)$$

Soluções com ϕ_0 constante

O limite clássico da teoria de Zee é descrito em termos das funções $\phi_0(x)$ e $g_{\mu\nu}(x)$ satisfazendo as equações (4) e (5) com $\phi \rightarrow \phi_0$ e as soluções deste modelo clássico que se aproximam da relatividade geral são aquelas que correspondem a $\phi_0 = \langle 0 | \phi | 0 \rangle$ constante. É importante notar que, diferentemente do que ocorre na teoria de Brans-Dicke, ϕ_0 não é uma função inicialmente arbitrária e sim o valor esperado no vácuo de um campo ϕ . Desta forma as simetrias de ϕ_0 são determinadas pelo vácuo da teoria. Para ϕ_0 constante as equações (4) e (5) ficam:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\epsilon \phi_0^2 [R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}] = \pm \frac{\lambda}{6} \phi_0^4 g_{\mu\nu} - T_{\mu\nu}^m \\ \epsilon R \pm \frac{\lambda}{3} \phi_0^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \epsilon R = \mp \frac{\lambda}{3} \phi_0^2 \end{array} \right. \quad (6a)$$

$$(6b)$$

onde o segundo sinal corresponde a teoria na qual ϕ_0 comporta-se como matéria ordinária.

A primeira equação equivale, portanto, a teoria de Einstein na presença de constante cosmológica $\pm \frac{\lambda}{6} \phi_0^4$. No entanto, devido a condição adicional $\epsilon R = \mp \frac{\lambda}{3} \phi_0^2$, $T_{\mu\nu}^m$ não pode ser qualquer. De fato, tomando o traço da primeira equação temos

$$2\varepsilon\phi_0^2 [\bar{R} - 2R] = \pm \frac{\lambda}{6} \phi_0^4, \quad 4 - T^m$$

sendo $T^m = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}^m$

$$- 2\varepsilon\phi_0^2 R = \pm \frac{\lambda}{3} 2\phi_0^4 - T^m$$

$$T^m = \pm \frac{2\lambda}{3} \phi_0^4 + 2\varepsilon\phi_0^2 R$$

ou, substituindo (6b)

$$T^m = \pm \frac{2}{3} \lambda \phi_0^4 \mp \frac{2\lambda\phi_0^4}{3} = 0$$

Verificamos portanto que nas duas possibilidades consideradas, (ϕ como matéria ordinária ou não), a teoria com campo escalar apresenta solução com $\phi_0 = \text{constante}$ apenas para o caso onde $T^m = 0$. As demais possibilidades para T^m devem corresponder necessariamente a solução com $\phi_0 \neq \text{constante}$, o que estaria ligado com uma teoria com "constante" gravitacional variável.

A condição $T^m = 0$ é bastante restritiva. Tratando-se por exemplo, de um fluido perfeito, temos

$$T_{\mu\nu}^m = (p + \xi) v_\mu v_\nu - p g_{\mu\nu}$$

sendo ξ a densidade de matéria

p a pressão

v_μ quadrivetor velocidade

Tomando-se o traço vem:

$$T^m = (p + \xi) - 4p = \xi - 3p$$

O anulamento do traço requer $p = \frac{\xi}{3}$ ou simplesmente $p = \xi = 0$ (vazio).

A equação $p = \epsilon/3$ corresponde a equação de estado de máxima pressão, satisfeita apenas por partículas relativísticas (gas de fótons). A teoria de Zee só preve G constante para $\epsilon \neq 0$ neste caso particular e que aparentemente não corresponde a realidade atual.

Satisfeita a condição $T^m = 0$, vemos que $\phi_0 =$ constante implica, através de (6b) em $R =$ constante. Assim, com $\phi_0 =$ constante, $T^m = 0$ temos apenas soluções com curvatura escalar constante. Além disto, no caso de vazio, o espaço é um espaço de Einstein ou seja $R_{\mu\nu} = Kg_{\mu\nu}$ (Isto não é trivial já que $R_{\mu\nu} = Kg_{\mu\nu} \Rightarrow R =$ constante mas a recíproca não é necessariamente verdadeira). Substituindo (6b) em (6a) vem:

$$2\epsilon\phi_0^2 R_{\mu\nu} - \epsilon\phi_0^2 R g_{\mu\nu} = \pm \frac{\lambda}{6} \phi_0^4 g_{\mu\nu}$$

$$2\epsilon\phi_0^2 R_{\mu\nu} = \pm \frac{\lambda}{6} \phi_0^4 g_{\mu\nu} + \epsilon\phi_0^2 R g_{\mu\nu}$$

$$2\epsilon\phi_0^2 R_{\mu\nu} = \pm \frac{\lambda}{6} \phi_0^4 g_{\mu\nu} \mp \frac{\lambda}{3} \phi_0^4 g_{\mu\nu}$$

$$2\epsilon R_{\mu\nu} = \mp \frac{\lambda}{6} \phi_0^2 g_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} = \mp \frac{\lambda}{12\epsilon} \phi_0^2 g_{\mu\nu} \quad (7)$$

Portanto para $\phi_0 =$ constante a teoria com campo escalar reduz-se a de Einstein com constante cosmológica e $T^m = 0$. Em se tratando de vazio, o espaço caracteriza-se também como um espaço de Einstein.

Consequências da presença da simetria por transformações de Weyl

No caso da lagrangeana (3) com $\epsilon = 1/6$, a teoria possui invariância por transformações de Weyl e esta invariância permi-

te que a partir de uma solução $\phi_0(x)$, $g_{\mu\nu}(x)$ de um $T_{\mu\nu}^m(x)$ conhecido seja gerada toda uma classe de soluções através das transformações de Weyl. De fato, sendo $\phi_0(x)$ e $g_{\mu\nu}(x)$ soluções correspondentes a $T_{\mu\nu}^m(x)$ então $\phi'_0(x)$ e $g'_{\mu\nu}(x)$ dados por:

$$\begin{cases} g'_{\mu\nu}(x) = e^{-2\psi(x)} g_{\mu\nu}(x) \\ \phi'_0(x) = e^{\psi(x)} \phi_0(x) \end{cases} \quad (8)$$

serão soluções de $T_{\mu\nu}^m(x)$ dado por

$$T_{\mu\nu}^m(x) = e^{2\psi(x)} T_{\mu\nu}^m(x) \quad (\text{apêndice A4})$$

Em particular, se $\phi_0(x)$ for função contínua e não apresentar zeros, podemos tomar

$$\psi(x) = \ln C - \ln \phi_0(x) \quad (9)$$

Assim, $\phi'_0(x) = C$ (constante) e $g'_{\mu\nu}(x)$ serão soluções de um novo problema caracterizado por

$$T_{\mu\nu}^m(x) = \frac{C^2}{\phi_0^2(x)} T_{\mu\nu}^m(x)$$

No caso particular de vazio, $T_{\mu\nu}^m = T_{\mu\nu}^m$ e ϕ'_0 , $g'_{\mu\nu}$ serão soluções ainda do problema original: vazio. Assim, pelo menos no caso de vazio conseguimos obter toda uma classe de soluções através de (8), partindo de uma única solução.

É interessante observar também que em termos de ϕ'_0 e $g'_{\mu\nu}$ com $\psi(x)$ escolhida da forma (9) conseguimos eliminar completamente o campo escalar, recaiando numa teoria muito semelhante a de Einstein. De fato, as equações de movimento são: (de (5))

$$\begin{cases} 2\epsilon C^2 \left[R'_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R' g'_{\mu\nu} \right] = + \frac{\lambda}{6} C^4 g'_{\mu\nu} - T'_{\mu\nu} \\ \epsilon R' + \frac{\lambda}{3} C^2 = 0 \end{cases}$$

que correspondem, como já foi discutido, à teoria de Einstein com constante cosmológica e duas condições adicionais: $T^m = 0$ e curvatura escalar constante.

No que diz respeito a invariância por transformações de Weyl, é interessante lembrar ainda o seguinte. Mostramos acima que para $\phi_0 = \text{constante}$, devemos ter $T^m = 0$ para as teorias descritas por (1) e (3). Porém, no caso da lagrangeana (3) com $\epsilon=1/6$, ou seja quando existe invariância por transformações de Weyl devemos ter sempre $T^m = 0$, independentemente da particular solução $\phi_0(x)$. De fato, tomando-se o traço da equação (5b), temos:

$$\begin{aligned} 2\epsilon\phi_0^2(R-2R) &= T^\phi - T^m + 2\epsilon\delta^\mu_\mu \square \phi_0^2 - 2\epsilon\nabla^\mu\nabla_\mu \phi_0^2 \\ &- 2\epsilon\phi_0^2 R = T^\phi - T^m + 6\epsilon \square \phi_0^2 \end{aligned} \quad (10)$$

sendo

$$T^\phi = 2g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi_0 \partial_\nu \phi_0 - \delta^\mu_\mu \partial_\lambda \phi_0 \partial^\lambda \phi_0 + \frac{\lambda}{6} \phi_0^4 \delta^\mu_\mu = -2\partial_\lambda \phi_0 \partial^\lambda \phi_0 + \frac{2}{3} \lambda \phi_0^4,$$

e

$$\square \phi_0^2 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \partial_\nu \phi_0^2) = 2\phi_0 \square \phi_0 + 2g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi_0 \partial_\nu \phi_0$$

A equação (10) fica, então:

$$-2\epsilon\phi_0^2 R = -2\partial_\lambda \phi_0 \partial^\lambda \phi_0 + \frac{2}{3} \lambda \phi_0^4 - T^m + 6\epsilon \left[2\phi_0 \square \phi_0 + 2\partial_\lambda \phi_0 \partial^\lambda \phi_0 \right]$$

Por outro lado, a equação (5a) fornece:

$$-2\epsilon\phi_0^2 R = 2\phi_0 \square \phi_0 + \frac{2}{3} \lambda \phi_0^4$$

Comparando estas duas últimas expressões vem:

$$2\phi_0 \square \phi_0 + \frac{2}{3} \lambda \phi_0^4 = - 2\partial_\lambda \phi_0 \partial^\lambda \phi_0 + \frac{2}{3} \lambda \phi_0^4 - T^m + 6\varepsilon \left[2\phi_0 \square \phi_0 + \right. \\ \left. + 2\partial_\lambda \phi_0 \partial^\lambda \phi_0 \right] \\ T^m = 2(6\varepsilon-1) (\phi_0 \square \phi_0 + \partial_\lambda \phi_0 \partial^\lambda \phi_0)$$

o que, para $\varepsilon = 1/6$, dá $T^m = 0$. Como já foi mostrado, esta condição de traço nulo, recai para o caso de fluido perfeito, na equação de estado de pressão máxima característica de partículas sem massa.

Em resumo, com a introdução do campo escalar, temos duas alternativas distintas descritas através das ações (1) e (3). Cada uma delas apresenta vantagens e desvantagens. Na lagrangeana (1), ϕ comparece como um campo de matéria ordinária, não apresentando maiores problemas quanto a definição de um estado de energia mínima. Porém as possibilidades de renormalização desta teoria não parecem ser melhores que as da gravitação usual, o que será confirmado mais adiante. Sob este aspecto a lagrangeana (3) parece mais atrativa. A presença de invariância por transformações de Weyl é importante porque pode limitar os contratermos necessários para a renormalização da teoria; como a lagrangeana de ϕ tem sinal oposto em relação ao sinal da lagrangeana da matéria, é fácil ver que a "matéria ϕ " tem interação gravitacional repulsiva. Isto pode explicar a ausência de aglomerados de matéria ϕ , ou seja, a sua não observabilidade em escala macroscópica. A invariância por transformações de Weyl traz, porém, também consequências indesejáveis. A única equação de estado aceita para a matéria é a de máxima pressão, válida apenas para partículas sem massa. Os termos de massa poderiam em princípio se-

rem gerados através de mecanismos de quebra espontânea de simetria. Porém, o verdadeiro problema desta teoria, que está em saber se existe ou não um estado fundamental, permanece e não é trivial.

No que segue vamos estudar a possibilidade de estas teorias com campo escalar admitirem soluções homogêneas e isotrópicas para os campos $g_{\mu\nu}(x)$ e $\phi_0(x)$ semelhante ao que ocorre na relatividade geral com a métrica de Robertson-Walker. Estudaremos também a solução estática e esfericamente simétrica correspondente a solução de Schwarzschild da relatividade geral.

Os resultados referentes a teoria descrita pela lagrangeana (3) serão discutidos no apêndice A6. Verificamos que estas previsões referentes ao modelo homogêneo e isotrópico são tão aceitáveis quanto as previsões da lagrangeana (1). Quanto a solução de Schwarzschild, as duas teorias prevêm os mesmos resultados. A restrição que se faz a teoria descrita pela lagrangeana (3) está na dificuldade de interpretação para a energia do campo escalar. Por este motivo a ênfase será sempre dada à teoria descrita por (1) que não introduz maiores problemas de interpretação para o campo $\phi(x)$.

AII - SOLUÇÕES HOMOGÊNEAS E ISOTRÓPICAS (ROBERTSON-WALKER)

Desejamos verificar se as equações de movimento (4) para $\phi_0(x)$ e $g_{\mu\nu}(x)$ comportam soluções com características de homogeneidade e isotropia tal como ocorre na relatividade geral com as soluções de Robertson-Walker.

Partindo das equações 4a e 4b,

$$\left\{ \begin{aligned} \square \phi_0 - \epsilon R \phi_0 + \frac{\lambda}{3} \phi_0^3 &= 0 \\ 2\epsilon \phi_0^2 \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right] &= -T_{\mu\nu}^\phi - T_{\mu\nu}^m + 2\epsilon g_{\mu\nu} \square \phi_0^2 - \\ &\quad - 2\epsilon \frac{\nabla_\mu \nabla_\nu + \nabla_\nu \nabla_\mu}{2} \phi_0^2 \end{aligned} \right.$$

vamos procurar $T_{\mu\nu}^m$ que seja compatível com a solução:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad x^0 = \eta, \quad x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \varphi$$

$$g_{00} = a^2(\eta)$$

$$g_{11} = -a^2(\eta)/(1-kr^2)$$

$$g_{22} = -a^2(\eta)r^2$$

$$g_{33} = -a^2(\eta)r^2 \sin^2\theta$$

$$g_{\mu\nu} = 0 \quad \text{para } \mu \neq \nu$$

$$\sqrt{-g} = \frac{a^4(\eta)r^2 \sin\theta}{\sqrt{1-kr^2}}$$

sendo k constante que assume valores $+1, 0$ ou -1 (desde que a unidade conveniente para r seja escolhida).

Estaremos percorrendo um caminho inverso ao caminho usual em que $T_{\mu\nu}^m$ é dado e procuram-se as soluções para a métrica. Aqui damos a forma geral da métrica e procuramos saber se existe algum $T_{\mu\nu}^m$ aceitável que dê origem a esta métrica.

As condições de homogeneidade e isotropia permitem esperar soluções onde ϕ_0 dependa apenas de η podendo ser escrito da forma

$$\phi_0 = \sqrt{3/\lambda} \frac{f(\eta)}{a(\eta)}, \quad f(\eta) \text{ arbitrário.} \quad (11)$$

e

$$\square \phi_0 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi_0) = \frac{\ddot{\phi}_0}{a^2} + \frac{2\dot{a}\dot{\phi}_0}{a^3}$$

onde ponto indica derivada em relação a η . Com (11),

$$\square \phi_0 = \sqrt{\frac{3}{\lambda}} \left[\frac{1}{a^2} \left(\frac{\ddot{f}}{a} - \frac{2\dot{f}\dot{a}}{a^2} + \frac{2f\dot{a}^2}{a^3} \right) + \frac{2\dot{a}}{a^2} \left(\frac{\dot{f}}{a} - \frac{f\dot{a}}{a^2} \right) \right]$$

Substituindo em (4a), $\square \phi_0$ e $R = \frac{6}{a^3} (\ddot{a} + ka)$ recaímos em:

$$\ddot{f} - \frac{f\ddot{a}}{a} (1 + 6\epsilon) + f^3 - 6k\epsilon f = 0 \quad (12)$$

A equação (4b) por sua vez fornece

$$T_{\mu\nu}^m = -2\epsilon\phi_0^2 (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) - T_{\mu\nu}^\phi + 2\epsilon g_{\mu\nu} \square \phi_0^2 - 2\epsilon \frac{\nabla_\mu \nabla_\nu + \nabla_\nu \nabla_\mu}{2} \phi_0^2$$

onde

$$T_{\mu\nu}^\phi = 2\partial_\mu \phi_0 \partial_\nu \phi_0 - g_{\mu\nu} \partial^\lambda \phi_0 \partial_\lambda \phi_0 + \frac{\lambda}{6} \phi_0^4 g_{\mu\nu}$$

Substituindo ϕ_0 por (11) e $R_{00} = \frac{3}{a^2} (a\ddot{a} - \dot{a}^2)$, a componente T_{00}^m fica (apêndice A5)

$$T_{00}^m = \frac{1}{\lambda} \left[-\frac{3\dot{f}^2}{a^2} + \frac{f\dot{f}\dot{a}}{a^3} (6+36\epsilon) - \frac{f^2\dot{a}^2}{a^4} (18\epsilon+3) - \frac{3f^4}{2a^2} + \frac{18\epsilon f^2 k}{a^2} \right]$$

e, como $\mathcal{E}(\eta)$, a densidade de energia, é dada por $\mathcal{E}(\eta) = g^{00} T_{00}^m$

$$\xi(\eta) = \frac{1}{a^2} T_{00}^m = \frac{1}{\lambda a^2} \left[-\frac{3\dot{f}^2}{a^2} + \frac{f\ddot{f}\dot{a}}{a^3} (6+36\epsilon) - \frac{f^2\dot{a}^2}{a^4} (18\epsilon+3) - \frac{3f^4}{2a^2} + \frac{18\epsilon f^2 k}{a^2} \right] \quad (13)$$

As componentes T_{ii} com $i = 1, 2, 3$ dão

$$T_{ii}^m = -2\epsilon\phi_0^2(R_{ii} - \frac{1}{2}g_{ii}R) - T_{ii}^\phi + 2\epsilon g_{ii} \square \phi_0^2 - 2\epsilon \nabla_i \nabla_i (\phi_0^2)$$

$$\text{Já que } \phi_0 = \phi_0(\eta), \partial_i \phi_0 = 0, T_{ii}^\phi = -g_{ii} \partial_\lambda \phi_0 \partial^\lambda \phi_0 + \frac{\lambda}{6} \phi_0^4 g_{ii}$$

$$T_{ii}^m = -2\epsilon\phi_0 \left[R_{ii} - \frac{1}{2}g_{ii}R \right] + g_{ii} \partial_\lambda \phi_0 \partial^\lambda \phi_0 - \frac{\lambda}{6} \phi_0^4 g_{ii} + \\ + 2\epsilon g_{ii} \square \phi_0^2$$

$$\text{e, sendo } R_{ii} = \frac{g_{ii}}{a^2} \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} + 2k \right) \equiv g_{ii} A(\eta),$$

$$T_{ii}^m = g_{ii} \left[-2\epsilon\phi_0^2(A - \frac{1}{2}R) + \partial_\lambda \phi_0 \partial^\lambda \phi_0 - \frac{\lambda}{6} \phi_0^4 + 2\epsilon \square \phi_0^2 \right]$$

Como $T_{ii}^m = -g_{ii} p(\eta)$, temos:

$$p(\eta) = \left[2\epsilon\phi_0^2(A - \frac{1}{2}R) - \partial_\lambda \phi_0 \partial^\lambda \phi_0 + \frac{\lambda}{6} \phi_0^4 - 2\epsilon \square \phi_0^2 \right]$$

e substituindo (11) obtem-se

$$p(\eta) = \frac{3}{\lambda a^2} \left[-\frac{\dot{f}^2}{a^2}(1+4\epsilon) + \frac{f\ddot{f}\dot{a}}{a^3} (8\epsilon+2) - \frac{f^2\dot{a}^2}{a^4} (2\epsilon+1) + \frac{f^4}{2a^2} - \frac{4\epsilon f\ddot{f}}{a^2} - 2k\epsilon \frac{f^2}{a^2} \right] \quad (14)$$

As componentes não diagonais de $T_{\mu\nu}^m$ anulam-se. (apêndice A5).

Vamos analisar a existência das soluções $\phi_0 = \text{constante}$ e $\phi_0 \propto a^{-1}(\eta)$

a) No caso $\phi_0 = \text{constante}$ a única equação de estado para a matéria aceitável é $p = \xi/3$. Isto já foi mostrado. Escrevendo ϕ_0 na forma (11) a condição $\phi_0 = \text{constante}$ é expressa através da relação

$$f(\eta) = A a(\eta) \text{ com } A \text{ constante.}$$

Com isto, as expressões (12), (13) e (14) podem ser reescritas:

$$-6\varepsilon \frac{\ddot{a}}{a} + A^2 a^2 - 6k\varepsilon = 0. \quad (15)$$

$$\xi(\eta) = \frac{A^2}{\lambda a^2} \left[-\frac{3\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} (6+36\varepsilon) - \frac{\dot{a}^2}{a^2} (18\varepsilon+3) - \frac{3A^2}{2} a^2 + 18\varepsilon k \right]$$

$$\xi(\eta) = \frac{3A^2}{\lambda a^2} \left[\frac{\dot{a}^2}{a^2} 6\varepsilon - \frac{A^2 a^2}{2} + 6\varepsilon k \right] \quad (16)$$

$$p(\eta) = \frac{3A^2}{\lambda a^2} \left[-\frac{\dot{a}^2}{a^2} (1+4\varepsilon) + \frac{\dot{a}^2}{a^2} (8\varepsilon+2) - \frac{\dot{a}^2}{a^2} (2\varepsilon+1) + \frac{1}{2} A^2 a^2 - 4\varepsilon \frac{\ddot{a}}{a} - 2k\varepsilon \right]$$

$$p(\eta) = \frac{3A^2}{\lambda a^2} \left[2\varepsilon \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{1}{2} A^2 a^2 - 4\varepsilon \frac{\ddot{a}}{a} - 2k\varepsilon \right]$$

e usando a equação de movimento (15) em $p(\eta)$ obtemos:

$$p(\eta) = \frac{A^2}{\lambda a^2} \left(6\varepsilon \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{1}{2} A^2 a^2 + 6k\varepsilon \right) \quad (17)$$

Verificamos portanto que $p(\eta) = \xi(\eta)/3$ como já era esperado.

Quando a solução $a = a(\eta)$ de (15) ela pode ser estudada através do análogo mecânico, depois de realizada uma primei

ra integração.

$$6\epsilon\ddot{a} - A^2 a^3 \dot{a} + 6k\epsilon\dot{a}a = 0$$

$$6\epsilon\dot{a}^2 - \frac{A^2 a^4}{2} + 6k\epsilon a^2 = C \quad (18)$$

$$a^2 \left(6\epsilon \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{A^2 a^2}{2} + 6k\epsilon \right) = C$$

Comparando com (16)

$$a^2 \cdot \frac{\xi(\eta)\lambda a^2}{3A^2} = C \quad \xi(\eta) = \frac{3A^2}{\lambda a^4} C \quad (19)$$

A equação (18) corresponde a equação para energia de uma partícula de massa 12ϵ sob a ação de potencial

$$V(a) = - \frac{A^2 a^4}{2} + 6k\epsilon a^2$$

A energia total desta partícula é C , constante.

Para $k=+1$ e na ausência de matéria ($C=0$) temos duas possibilidades para $a(\eta)$. A região I onde haveria expansão do universo cada vez mais lenta culminando com o término da expansão em $a_0 = \sqrt{\frac{12k\epsilon}{A^2}}$.

Na região II a expansão seria interminável. Na presença de matéria

($C > 0$) a expansão é sempre ilimitada, passando apenas por período onde esta expansão é desacelerada (região I).

Para $k=0$ e $k=-1$, também ocorre expansão sem volta, e

a uma velocidade cada vez maior qualquer que seja o valor de C .

Assim, apenas o caso onde $k = +1$ admite que um universo em expansão possa vir a sofrer contração, o que pode ocorrer para o vazio.

b) Outra solução interessante é que evita a restrição $p = \frac{1}{3} \epsilon$ é $\phi_0 \propto \frac{1}{a(\eta)}$ caso em que f deve ser constante. As equações (12), (13) e (14) ficam:

$$+ \frac{\ddot{a}}{a} (1 + 6\epsilon) - f^2 + 6k\epsilon = 0 \quad (20)$$

$$\xi(\eta) = \frac{3f^2}{\lambda a^4} \left[- \frac{\dot{a}^2}{a^2} (6\epsilon+1) - \frac{f^2}{2} + 6\epsilon k \right] \quad (21)$$

$$p(\eta) = \frac{3f^2}{\lambda a^4} \left[- \frac{\dot{a}^2}{a^2} (2\epsilon+1) + \frac{1}{2} f^2 - 2k\epsilon \right] \quad (22)$$

A equação de movimento (20) pode ser tratada também através do análogo mecânico.

$$\ddot{a} (1+6\epsilon) - f^2 a + 6k\epsilon a = 0$$

$$\dot{a}^2 (1 + 6\epsilon) - (f^2 - 6k\epsilon) a^2 = C \quad (23)$$

Que corresponde a partícula com energia constante sujeita a ação de potencial

$$V(a) = - (f^2 - 6k\epsilon) a^2$$

que assume as formas:

$$-(f^2 - 6k\epsilon) > 0$$

ou

$$-(f^2 - 6k\epsilon) < 0$$

A equação (21) dá a densidade de energia da matéria no universo. Portanto devemos esperar $\xi(\eta) > 0$ e para tanto é necessário que $k = +1$ e ainda

$$-\frac{f^2}{2} + 6\epsilon k > 0$$

De (22) espera-se que $p(\eta) > 0$, $\frac{1}{2} f^2 > 2k\epsilon$

Portanto

$$6\epsilon k > \frac{f^2}{2} > 2k\epsilon$$

$$12\epsilon k > f^2 > 4k\epsilon$$

e as duas possibilidades acima são admissíveis. b1 dá origem a um universo em expansão temporária que deve evoluir para contração e eventualmente $a=0$. Esta possibilidade não se aplica ao caso em que $C = 0$ e $a \equiv 0$. b2 dá origem o universo sempre em expansão.

Admitindo que $p = \alpha \xi$ temos de (21) e (22):

$$\left[-\frac{\dot{a}^2}{a^2} (2\epsilon+1) + \frac{1}{2} f^2 - 2k\epsilon \right] = \alpha \left[-\frac{\dot{a}^2}{a^2} (6\epsilon+1) - \frac{f^2}{2} + 6\epsilon k \right]$$

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} \left[(6\epsilon+1)\alpha - (2\epsilon+1) \right] = k\epsilon(6\alpha + 2) - \frac{f^2}{2} (\alpha + 1)$$

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{k\varepsilon(6\alpha + 2) - f^2/2 (\alpha+1)}{(6\varepsilon+1)\alpha - (2\varepsilon+1)} \quad (24)$$

Para $\alpha = \text{constante}$, comparando (23) e (24) tem-se
 $C = 0$ e

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{f^2 - 6k\varepsilon}{1 + 6\varepsilon} = \frac{k\varepsilon(6\alpha + 2) - f^2/2 (\alpha + 1)}{(6\varepsilon+1)\alpha - (2\varepsilon+1)}$$

Esta equação relaciona f e α para cada escolha de ε ou seja dado ε , a cada equação de estado especificada através de α corresponde um valor bem definido de f ou seja um valor bem definido para $G = \frac{1}{16\pi\varepsilon\phi_0^2} = \frac{\lambda a^2}{16\pi\varepsilon 3f^2}$

$$f^2 = \frac{k\varepsilon(72\varepsilon\alpha + 12\alpha - 4)}{(9\varepsilon\alpha + \varepsilon + 3/2\alpha - 1/2)} \quad \text{com } k = +1 \quad (25)$$

Devemos ter $f^2 > 0$. Esta condições deve impor restrições a α . Podemos escolher ε , inicialmente arbitrário, de modo que o denominador de f não se anule.

$$9\varepsilon\alpha + \varepsilon + \frac{3}{2}\alpha - \frac{1}{2} = 0$$

$$\alpha_0 = \frac{\frac{1}{2} - \varepsilon}{9\varepsilon + \frac{3}{2}} = \frac{1 - 2\varepsilon}{18\varepsilon + 3}$$

Como $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{3}$, basta tomar ε de modo que $\alpha_0 < 0$ ou $\alpha_0 > \frac{1}{3}$

$$\alpha_0 < 0 \quad \rightarrow \quad \varepsilon > \frac{1}{2}$$

$$\alpha_0 > \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad 3 - 6\varepsilon > 18\varepsilon + 3 \quad \varepsilon < 0 .$$

Estamos analisando o caso em que $\varepsilon > 0$ portanto a única

possibilidade é que $\epsilon > \frac{1}{2}$, Inicialmente ϵ era arbitrário e nem mesmo a escolha $\epsilon = 1/6$ era justificável neste caso já que não garantia invariância de Weyl porisso a restrição $\epsilon > 1/2$ não é incompatível.

Voltando a equação (25) com a restrição $\epsilon > \frac{1}{2}$, podemos analisar quais os valores de α que levam a $f^2 > 0$ como deve ser. A análise do sinal de f^2 entendida como função de α leva a:

$$f^2 > 0 \quad \text{apenas para } \alpha > \alpha'_0 = \frac{1}{3+18\epsilon}$$

Finalmente, podemos analisar a possibilidade de α ser função de η . ($k = +1$). De (23) tira-se:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{1}{(1+6\epsilon)} \cdot \left[(f^2 - 6k\epsilon) + \frac{C}{a^2} \right]$$

e comparando com (24) resulta

$$\frac{\epsilon(6\alpha+2) - f^2/2 (\alpha + 1)}{(6\epsilon+1)\alpha - (2\epsilon+1)} = \frac{1}{(1+6\epsilon)} \left[(f^2 - 6\epsilon) + \frac{C}{a^2} \right]$$

$$\alpha = \frac{\frac{f^2}{2} (2\epsilon-1) - \frac{C}{a^2} (2\epsilon+1) + 4\epsilon}{(6\epsilon+1) (12\epsilon-3f^2/2 - C/a^2)}$$

É interessante observar que para $C \neq 0$, $\lim_{a \rightarrow 0} \alpha = \frac{2\epsilon+1}{6\epsilon+1}$

e para qualquer valor finito de ϵ , $\alpha > \frac{1}{3}$. A conclusão aqui é que α não pode ser função de η . Se insistirmos em $\alpha = \alpha(\eta)$ então devemos admitir que:

- a) O tratamento clássico da teoria como feito aqui não se aplica no limite $a \rightarrow 0$, ou
- b) O tratamento clássico está correto apenas devemos admitir a existência de estados com $\alpha > 1/3$.

Em resumo as conclusões obtidas no caso de métrica de Robertson-Walker são:

1º) Existem soluções com $\phi_0 = \text{constante}$

A equação de estado deve ser necessariamente $p = \epsilon/3$.

São aceitas soluções com $k = +1, 0, -1$.

2º) Existem soluções com $\phi_0 \propto 1/a(\eta)$.

A equação de estado pode ser qualquer: $p = \alpha \epsilon$

Somente soluções com $k = +1$ são aceitas.

Quanto a α :

- se $\alpha = \text{constante}$ então devemos ter

$$\epsilon > 1/2 \quad \text{e} \quad \alpha > \alpha_0 = (3 + 18\epsilon)^{-1}$$

- se $\alpha = \alpha(\eta)$, o limite $a \rightarrow 0$ não pode ser tomando no tratamento clássico a menos que se admita equação de estado com $1 > \alpha > 1/3$.

As soluções com $\phi_0 = \text{constante}$ são aquelas que mais se aproximam da relatividade geral, levando a uma constante gravitacional realmente constante. Porém, estas soluções, no caso da teoria com campo escalar, podem existir apenas no vazio ou para matéria em estado de máxima pressão. Todas as demais soluções correspondem a presença de constante gravitacional G variável.

Quanto ao comportamento $a = a(\eta)$ constata-se que aqui, diferentemente do que ocorre na relatividade geral, não existe

ligação entre os valores de k e o tipo de expansão possível para $a(\eta)$. Por exemplo, em presença da matéria, todas as soluções com $\phi_0 = \text{constante}$, independentemente do valor de k , levam a expansão sem retorno para $a(\eta)$. As soluções com $\phi_0 \propto a^{-1}(\eta)$ são possíveis apenas com $k = +1$. Apesar disto, podemos ter expansão do universo sem retorno, dependendo apenas do sinal assumido pela constante $6\varepsilon - f^2$.

O comportamento da "constante" gravitacional por sua vez é ditado pelo comportamento de $a(\eta)$: $G \propto \lambda a^2(\eta)$. Desta forma, num universo sempre em expansão que é o caso (b2), a gravitação tende a tomar-se cada vez mais importante. Efeito oposto ocorre em (b1) onde $a(\eta)$ oscila podendo vir a anular-se em determinadas épocas quando a interação gravitacional também tenderia a desaparecer.

Existe ainda a possibilidade de universo estático $a(\eta) = \text{constante}$. Ela ocorre para o vazio com $k=+1$. Trata-se entretanto de solução instável.

AIII - SOLUÇÕES ESTÁTICAS, COM SIMETRIA ESFÉRICA e $T_{\mu\nu}^m = 0$

Na ausência de matéria as equações de movimento (4) fornecem

$$\left[\square \phi_0 - \epsilon R \phi_0 + \frac{\lambda}{3} \phi_0^3 = 0 \right. \quad (26)$$

$$\left. 2\epsilon \phi_0^2 \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right] = -T_{\mu\nu}^\phi + 2\epsilon g_{\mu\nu} \square \phi_0^2 - 2\epsilon \frac{\nabla_\mu \nabla_\nu + \nabla_\nu \nabla_\mu}{2} \phi_0^2 \right] \quad (27)$$

Tomando-se o traço da segunda equação tem-se

$$-2\epsilon \phi_0^2 R = -T^\phi + 8\epsilon \square \phi_0^2 - 2\epsilon \square \phi_0^2$$

sendo $T^\phi = -2\partial_\lambda \phi_0 \partial^\lambda \phi_0 + \frac{2}{3} \lambda \phi_0^4$. Portanto

$$-2\epsilon \phi_0^2 R = 2\partial_\lambda \phi_0 \partial^\lambda \phi_0 - \frac{2}{3} \lambda \phi_0^4 + 6\epsilon \square \phi_0^2 \quad (28)$$

Usando a equação de movimento para ϕ , (26),

$$-2\epsilon \phi_0^2 R = -2\phi_0 \square \phi_0 - \frac{2}{3} \lambda \phi_0^4$$

e $\square \phi_0^2 = 2\phi_0 \square \phi_0 + 2\partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0$, obtemos para (28):

$$-2\phi_0 \square \phi_0 - \frac{2}{3} \lambda \phi_0^4 = 2\partial_\lambda \phi_0 \partial^\lambda \phi_0 - \frac{2}{3} \lambda \phi_0^4 + 12\epsilon \phi_0 \square \phi_0 + 12\epsilon \partial_\lambda \phi_0 \partial^\lambda \phi_0$$

$$\phi_0 \square \phi_0 + \partial_\lambda \phi_0 \partial^\lambda \phi_0 = 0$$

$$\square (\phi_0^2) = 0$$

As equações (26) e (27) podem então ser re-escritas na forma mais simples:

$$\left[\square \phi_0^2 = 0 \right. \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} 2\epsilon \phi_0^2 \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right] = & - T_{\mu\nu}^{\phi} + 2\epsilon g_{\mu\nu} \square \phi_0^2 - \\ & - 2\epsilon \frac{\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} + \nabla_{\nu} \nabla_{\mu}}{2} \phi_0^2 \end{aligned} \right] \quad (30)$$

Entre as possíveis soluções deste sistema com simetria esférica, trataremos apenas aquelas caracterizadas por ϕ_0 constante. Estas soluções apresentam R constante com

$$\epsilon R = \frac{\lambda}{3} \phi_0^2$$

que substituído em (30) leva a

$$R_{\mu\nu} = \frac{\lambda}{12\epsilon} \phi_0^2 g_{\mu\nu} \quad (31)$$

o que caracteriza um espaço de Einstein. Temos assim, uma teoria exatamente equivalente a teoria de Einstein em presença de constante cosmológica $\frac{\lambda \phi_0^2}{12\epsilon}$.

A solução procurada para a métrica estática e com simetria esférica para o vazio coincide com a solução de Schwarzschild em presença de constante cosmológica. Esta solução é conhecida. A diferença está apenas no fato de que, aqui, a constante cosmológica está ligada ao campo ϕ e sua constante de acoplamento λ . De qualquer forma, vamos obter esta solução explicitamente: A métrica procurada, estática e esfericamente simétrica pode ser escrita na forma

$$g_{tt} = B(r), \quad g_{rr} = -A(r), \quad g_{\theta\theta} = -r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = -r^2 \sin^2\theta \quad (32)$$

Da equação (6) temos

$$R_{tt} = \alpha g_{tt} \quad \text{com} \quad \alpha = \frac{\lambda \phi_0^2}{12\varepsilon}$$

$$R_{rr} = \alpha g_{rr}$$

$$R_{\theta\theta} = \alpha g_{\theta\theta}$$

$$R_{\varphi\varphi} = \alpha g_{\varphi\varphi}$$

Destas quatro equações apenas três são independentes. Substituindo $R_{\mu\nu}$ em termos de $g_{\mu\nu}$ na forma (32) temos¹³:

$$-\frac{B'}{2A} + \frac{B'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{r} \frac{B'}{A} = + B\alpha$$

$$\frac{B''}{2B} - \frac{B'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{r} \frac{A'}{A} = - \alpha A$$

$$-1 + \frac{r}{2A} \left(-\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{1}{A} = - \alpha r^2$$

$$\text{onde } f' = \frac{df}{dr} \quad f'' = \frac{d^2f}{dr^2}$$

Dividindo-se a primeira equação por B e a segunda por A temos:

$$-\frac{B''}{2AB} + \frac{B'}{4AB} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{r} \frac{B'}{BA} = \alpha$$

$$\frac{B''}{2AB} - \frac{B'}{4BA} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{r} \frac{A'}{AB} = - \alpha$$

que somadas fornecem:

$$-\frac{1}{r} \left(\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) \frac{1}{A} = 0$$

$$\frac{A'}{A} = -\frac{B'}{B} \quad \rightarrow \quad AB = \text{constante} \equiv C_0$$

Usando este resultado as três equações originais podem re-escrever-se de modo simplificado

$$-\frac{B''}{2A} - \frac{1}{r} \frac{B'}{A} = B\alpha \qquad -\frac{B''}{2} - \frac{B'}{r} = +AB\alpha = +C_0\alpha$$

$$\frac{B''}{2B} - \frac{1}{r} \frac{A'}{A} = -\alpha A \qquad \text{ou} \qquad \frac{B''}{2B} - \frac{1}{r} \frac{A'}{A} = -A\alpha$$

$$-1 - r \frac{A'}{A^2} + \frac{1}{A} = -\alpha r^2 \qquad -1 - r \frac{A'}{A^2} + \frac{1}{A} = -\alpha r^2$$

Da primeira equação podemos obter $B = B(r)$.

$$\frac{B''}{2} + \frac{B'}{r} = -C_0\alpha$$

cuja solução é $B(r) = -\frac{1}{3} C_0\alpha r^2 - \frac{B_1}{r} + B_0$

Assim, as soluções para $B(r)$ e $A(r)$ ficam:

$$\left\{ \begin{array}{l} B(r) = -\frac{1}{3} C_0\alpha r^2 - \frac{B_1}{r} + B_0 \\ A(r) = \frac{C_0}{B_0 - \frac{B_1}{r} - \frac{1}{3} C_0\alpha r^2} \end{array} \right. \qquad (33)$$

C_0, B_0 e B_1 constantes arbitrárias até este ponto.

As duas equações restantes devem ser compatíveis com esta solução, colocando, eventualmente alguma restrição nas constantes C_0, B_0 e B_1 .

Substituindo (33) na segunda equação, $\frac{B''}{2B} - \frac{1}{r} \frac{A'}{A} = -A\alpha$ recai-se em identidade e da terceira equação $-1 - r \frac{A'}{A^2} + \frac{1}{A} = -r^2\alpha$

obtem-se $C_0 = B_0$.

O valor de C_0 é usualmente tomado de acordo com condições assintóticas em $r \rightarrow \infty$. No caso da relatividade geral espera-se que neste limite a métrica tenda a métrica de Minkowski e portanto deve-se ter $C_0 = 1$. Aqui, a imposição desta condição não é tão clara. Para que esta teoria concorde com os resultados experimentais disponíveis devemos ter região onde $\frac{1}{r} \ll 1$ e $\alpha r^2 \ll 1$ simultaneamente. Nesta região a métrica deve ser próxima da de Minkowski exatamente como no caso de Schwarzschild, o que justifica tomarmos também aqui $C_0 = B_0 = 1$.

Finalmente, podemos verificar que a solução obtida para $A(r)$ e $B(r)$ com a condição $\phi_0 = \text{constante}$ é solução da equação de movimento do campo ϕ_0 na forma

$$R = \frac{\lambda}{3\epsilon} \phi_0^2$$

De fato, pode-se mostrar que¹²

$$R = -\frac{B''}{AB} + \frac{B'}{2AB} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{2B'}{rAB} + \frac{2}{r^2} - \frac{2}{Ar^2} + \frac{2A'}{A^2r}$$

e substituindo-se $A(r)$ e $B(r)$, recai-se em $R = \frac{\lambda}{3\epsilon} \phi_0^2$.

Limite Newtoniano

O limite Newtoniano é usualmente caracterizado por:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = 1$$

Alem disto, para r não tão grande deve-se ter $B(r) \sim 1 + \varphi$ onde φ é o potencial Newtoniano e deve portanto satisfazer a $\varphi = -\frac{MG}{r}$ sendo G constante gravitacional, M massa do corpo que produz o campo.

Na teoria com campo escalar, temos $B(r) = 1 - B_1/r - \alpha r^2/3$

e vê-se que o limite $r \rightarrow \infty$ da teoria Newtoniana não é satisfeito. O comportamento anômalo em $r \rightarrow \infty$ deve-se a autointeração do campo ϕ ($\alpha = \lambda \phi^2 / 12\epsilon$). Esta autointeração está gerando uma deformação adicional da métrica, importante para distâncias muito grandes.

É importante analisar a possibilidade de existência de uma região intermediária onde a métrica (32), (33) apresenta comportamento Newtoniano. Esta região poderia ser ajustada de modo que sejam explicadas os dados conhecidos, por exemplo do sistema solar. Grosseiramente falando, deveríamos ter, $\frac{B_1}{r} \gg \frac{\lambda \phi_0^2}{36\epsilon} r^2$ para r da ordem de grandeza do diâmetro do sistema solar. Neste caso B seria $2MG$, M massa do Sol. Portanto, deveríamos ter

$$\lambda \ll \frac{72\epsilon MG}{\phi_0^2 r^3}$$

O papel da constante gravitacional é desempenhado na teoria com campo escalar por

$$8\pi G = \frac{1}{2\epsilon \phi_0^2} \quad \text{ou} \quad \phi_0^2 = \frac{1}{16\pi \epsilon G}$$

portanto

$$\lambda \ll 18 \cdot \frac{(64MG^2\pi)}{r^3} \epsilon^2 \quad (34)$$

Em todos os contextos em que a validade da lei de Newton é esperada, a desigualdade acima deve ser satisfeita. Vamos verificar grosseiramente em alguns casos qual deve ser este limite superior. O sistema de unidades usado é aquele em que $\hbar = c = 1$. Neste sistema, temos (34) re-escrito como (considerando $\epsilon \sim 1$):

$$\lambda \ll 10^{-127} \frac{M}{r^3}$$

O limite superior para λ fica:

I) Para o sistema solar considerando a massa do Sol e a distancia Sol- Plutão:

$$\lambda \ll 1,5 \times 10^{-102}$$

II) Sistema proton-eletron, M massa do proton, r distancia proton-eletron

$$\lambda \ll 3,3 \times 10^{-89}$$

III) Corpo na superfície da Terra, M massa da terra, r raio da Terra

$$\lambda \ll 6,8 \times 10^{-89}$$

Verificamos portanto, que, impondo-se a validade do limite Newtoniano no caso do sistema solar, o mesmo mostra-se válido nos demais contextos já que a restrição sobre λ não é tão forte.

A distorção que faz a teoria com campo escalar diferente da de Einstein (sem constante cosmológica) ocorre a grandes distancias. Neste caso, os corpos localizados a grandes distancias tem influencia muito maior. Devido a isotropia do universo pode-se argumentar que esta influencia acabe por se cancelar quase que completamente.

O limite obtido para λ , $\lambda \ll 10^{-102}$ foi conseguido a partir de análise grosseira sobre a validade da lei de Newton. Um cálculo mais preciso, tomando como referência não a lei de Newton, mas a própria teoria de Einstein, pode ser feito. A idéia é usar medidas sobre a precessão do perihélio de Mercúrio

cuja precisão é muito maior havendo portanto a possibilidade de limites mais restritivos para λ serem obtidos.

Precessão do Perihélio de Mercúrio

A teoria de Einstein preve que planetas, orbitando em trajetórias elípticas, devem apresentar precessão do perihélio dada por^{12,13}:

$$\Delta\psi = \frac{6m^2\pi}{h^2} \quad (35)$$

com m - massa do sol

h - constante de movimento do planeta

$$\left(r^2 \frac{d\psi}{dt} = h \right)$$

Na teoria descrita aqui, com campo escalar, a precessão $\Delta\psi$ deve ser corrigida devido a presença do termo adicional $-\lambda\phi_0^2 r^2/(36\epsilon)$ na expressão da métrica.

Os dados experimentais disponíveis concordam com a expressão (35) portanto a eventual correção devido a presença do termo $-\lambda\phi_0^2 r^2/(36\epsilon)$ deve estar contida na barra de erro das medidas disponíveis. Esta condição reflete-se em condição sobre λ .

O cálculo da precessão $\Delta\psi$ na teoria com campo escalar sujeito a condição $\phi = \text{constante}$ é o próprio cálculo da precessão na teoria de Einstein com constante cosmológica, Λ , satisfazendo a

$$-\frac{1}{3}\Lambda = -\frac{\lambda\phi_0^2}{36\epsilon} \quad \Lambda = \frac{\lambda\phi_0^2}{12\epsilon}$$

A métrica usada será (32), (33)

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\lambda\phi_0^2}{36\epsilon} r^2\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\lambda\phi_0^2}{36\epsilon} r^2\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

$$B(r) = \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\lambda\phi_0^2}{36\epsilon} r^2\right), \quad A(r) = \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\lambda\phi_0^2}{36\epsilon} r^2\right)^{-1}$$

m - massa do Sol.

Partindo-se da equação da geodésica obtem-se como equação para a trajetória^{12,13}

$$\frac{A(r)}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{J^2 B(r)} = - \frac{E}{J^2} \quad E \text{ e } J^2 \text{ constantes}$$

Fazendo-se a substituição de variáveis $r = u^{-1}$ tem-se:

$$\begin{cases} B(u) = (1 - 2mu - \lambda\phi_0^2/(36\epsilon)u^{-2}) \\ A(u) = (1 - 2mu - \lambda\phi_0^2/(36\epsilon)u^{-2})^{-1} \end{cases}$$

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 B(u) - \frac{1}{J^2} = - \frac{E}{J^2} B(u)$$

que derivada em relação a φ dá:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + uB(u) + \frac{u^2}{2} \frac{dB}{du} = - \frac{E}{2J^2} \frac{dB}{du}$$

$$\text{e sendo } \frac{dB(u)}{du} = -2m + \frac{2\lambda\phi_0^2}{36\epsilon} u^{-3}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u\left(1 - 2mu - \frac{\lambda\phi_0^2}{36\epsilon} u^2\right) + \frac{u^2}{2} \left(-2m + \frac{2\lambda\phi_0^2}{36\epsilon} u^{-3}\right) &= \\ &= - \frac{E}{2J^2} \left(-2m + \frac{2\lambda\phi_0^2}{36\epsilon} u^{-3}\right) \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 u}{d\psi^2} + u = 3mu^2 + \frac{E}{J^2} m - \frac{E}{J^2} \frac{\lambda \phi_0^2}{36\epsilon} u^{-3}$$

Definindo-se $h^2 = J^2/E$

$$\frac{d^2 u}{d\psi^2} + u = 3mu^2 + \frac{m}{h^2} - \frac{\lambda \phi_0^2}{36\epsilon h^2 u^3} \quad (36)$$

Na teoria Newtoniana temos $\frac{d^2 u}{d\psi^2} + u = \frac{m}{h^2}$ sendo a solução dada por $u = \frac{m}{h^2} (1 + e \cos \psi)$ que é a equação de uma elipse de excentricidade e . Na teoria de Einstein (sem constante cosmológica) aparece o termo adicional $3mu^2$ que perturba a solução na forma de elipse introduzindo a precessão do perihélio. Aqui a perturbação será devida aos dois termos $3mu^2$ e $\lambda \phi_0^2 / (36\epsilon h^2 u^3)$. O razoável acerto da teoria de Einstein (sem constante cosmológica) indica que devemos ter

$$\frac{\lambda \phi_0^2}{36\epsilon h^2 u^3} \sim 3mu^2 \ll \frac{m}{h^2}$$

A presença destes novos termos altera a forma da elipse. Vamos tratar esta deformação procurando soluções na forma

$$u = \frac{m}{h^2} (1 + e \cos[\psi(1 + \delta)]) + g(\psi) \quad (37)$$

onde $g(\psi)$ descreve a deformação e δ descreve a precessão do perihélio.

$g(\psi)$ não contém termos proporcionais a $\cos[\psi(1 + \delta)]$ ou mais exatamente pode conter termos deste tipo mas com coeficientes muito menores que $\frac{me}{h^2}$.

Substituindo (37) na equação da trajetória temos:

$$\begin{aligned}
& - \frac{me}{h^2} \cos[\psi(1+\delta)] (1+\delta)^2 + \frac{d^2 g}{d\psi^2} + \frac{m}{h^2} (1 + e \cos[\psi(1+\delta)]) + g(\psi) \\
& = 3m \left[\frac{m}{h^2} (1 + e \cos[\psi(1+\delta)]) + g(\psi) \right]^2 + \\
& \quad + \frac{m}{h^2} - \frac{\lambda \phi_0^2}{36\epsilon h^2 \left[\frac{m}{h^2} (1 + \cos[\psi(1+\delta)]) + g(\psi) \right]^3} \\
& - \frac{2me}{h^2} \delta \cos[\psi(1+\delta)] + \frac{d^2 g}{d\psi^2} + g(\psi) = \frac{3m^3}{h^4} \left[1 + e \cos[\psi(1+\delta)] \right]^2 + \\
& + \frac{6m^2}{h^2} (1 + e \cos[\psi(1+\delta)]) g(\psi) + 3mg^2(\psi) - \\
& \quad - \frac{\lambda \phi^2}{36\epsilon h^2 \left[\frac{m}{h^2} (1 + e \cos[\psi(1+\delta)]) + g(\psi) \right]^3}
\end{aligned}$$

Estamos admitindo que δ seja pequeno e restringindo nos a primeira ordem em δ . A precessão da elipse $\bar{e}$ obtida determinando-se δ de modo que os termos em $\cos[\psi(1+\delta)]$ da equação acima cancelem-se.

$$\begin{aligned}
- \frac{2me}{h^2} \delta \cos[\psi(1+\delta)] &= \frac{3m^3}{h^4} 2e \cos[\psi(1+\delta)] + \\
& + \frac{\lambda \phi_0^2 h^6 3e}{36\epsilon h^2 m^3} \cos[\psi(1+\delta)] \\
\delta &= - \frac{3m^2}{h^2} - \frac{\lambda \phi_0^2 h^6}{24\epsilon m^4} \tag{38}
\end{aligned}$$

A parte da solução de forma elíptica corresponde portanto a:

$$u = \frac{m}{h^2} \left[1 + e \cos((\delta+1)\overset{\psi}{\psi}) \right]$$

O raio vetor volta ao seu valor em $\psi = 0$ quando

$$(\delta+1)\psi = 2\pi \quad \psi = \frac{2\pi}{1+\delta} \approx 2\pi(1-\delta)$$

A precessão do perihélio é caracterizada então pela defasagem:

$$\Delta\psi = 2\pi(1-\delta) - 2\pi = -2\pi\delta \text{ por volta}$$

Usando (38),

$$\Delta\psi = \frac{6\pi m^2}{h^2} + \frac{\lambda\phi_0^2\pi h^6}{12\epsilon m^4}$$

O termo adicional $\frac{\lambda\phi_0^2\pi h^6}{12\epsilon m^4}$ está ligado a presença do campo escalar e de sua auto-interação. A precisão com que os resultados experimentais confirmam a relatividade geral nas medidas de $\Delta\psi$ fornecem limite superior para λ . No caso de Mercúrio de vemos ter

$$\frac{\lambda\phi_0^2\pi h^6}{12m^4\epsilon} < 1 \text{ arco de segundo por século}$$

$$\text{com } \phi_0^2 = \frac{1}{16\pi\epsilon G} \quad \text{e tomando } \epsilon \sim 1 :$$

$$\frac{\lambda h^6\pi}{12m^4\epsilon} \cdot \frac{1}{16\pi\epsilon G} < 1 \text{ arco de segundo por século, que cor-}$$

que corresponde para o Mercurio, a:

$$\frac{\lambda\phi_0^2}{12\epsilon} = \frac{\lambda}{12 \cdot 16\pi\epsilon^2 G} < 5 \times 10^{-42} \text{ cm}^{-2} \quad \text{ou} \quad \lambda < 7,5 \times 10^{-105}$$

Podemos admitir como limite razoável para λ a ordem de grandeza 10^{-105} , ou seja para que a introdução do campo escalar com interação $\lambda\phi^4$ não traga consequências que possam desde já tornar a teoria incompatível com os dados experimentais disponíveis é preciso que $\lambda \sim 10^{-105}$ (ou menos).

AIV - QUANTIZAÇÃO E RENORMALIZAÇÃO DA TEORIA COMO CAMPO ESCALAR

A teoria descrita pela lagrangeana (1) tem aparentemente melhores chances de ser renormalizável do que a relatividade geral. A ausência de constante dimensional melhora o comportamento quântico da teoria o que pode ser constatado por simples análise dimensional. No entanto, do ponto de vista da estrutura de vértices apresentada, a teoria com campo escalar não apresenta simplificação alguma em relação a relatividade geral.

De qualquer forma, a introdução do campo escalar traz novas contribuições para os propagadores e vértices e é interessante estudar o comportamento desta teoria com campo escalar no contexto quântico. Não estamos convencidos, porém, que ela se mostre superior a teoria usual de Einstein do ponto de vista da renormalizabilidade principalmente quando são levadas em conta lagrangeanas que contem não apenas a gravitação mas também matéria na forma de fermions, ftons, etc.

Para localizarmos o problema devemos ter em mente o que ocorre com a teoria de Einstein onde a gravitação encontra-se descrita apenas pelo campo $g_{\mu\nu}$ e pela lagrangeana $L = \sqrt{-g} R$ (o sistema de unidades pode ser escolhido de modo a termos $(16\pi G)^{-1} = 1$, G constante gravitacional). A quantização da teoria é feita escrevendo-se $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ e tratando $h_{\mu\nu}$ como campo a ser quantizado. A lagrangeana L leva a um número infinito de vértices¹⁴ e cálculos perturbativos de ordem superior a 1-loop não foram feitos. Em 1-loop a teoria mostra-se renormalizável e, mais forte que isto, não há sequer necessidade de contratermos para tornar finitos os resultados nesta ordem¹⁵.

Os problemas com a renormalização começam a aparecer quando passamos a acrescentar na lagrangeana termos que descrevam a matéria. O acréscimo destes termos tem sido feito através de acoplamento mínimo e pode-se constatar que a presença de campo escalar na forma

$$L = \sqrt{-g} \left[R + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi g^{\mu\nu} \right]$$

conduz a necessidade de introdução de contratermo (para correções del-loop) da forma¹⁵

$$L_c = - \frac{\sqrt{-g}}{\varepsilon} \frac{203}{80} R^2$$

onde $\varepsilon = 4-n$, n a dimensão do espaço e o limite $n \rightarrow 4$ deve se tomado.

A introdução da lagrangeana descrevendo ftons leva a mesma consequência sendo que neste caso o contratermo necessário é¹⁶

$$L_c = \frac{1}{\varepsilon} \frac{137}{60} \sqrt{-g} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$$

Do mesmo modo a introdução de fermions exige contratermo estranho a lagrangeana original. Além disto é improvável que as contribuições devidas as diferentes fontes leve a alguma forma de cancelamento substancial quando estas fontes forem incluídas simultaneamente na lagrangeana. A menos que se abandone a idéia de usar tratamento perturbativo para a gravitação devemos, se ainda quisermos manter a lagrangeana de Einstein, admitir a possibilidade de acoplamentos não mínimos com a matéria. A teoria com campo escalar seria mais vantajosa que a teoria de Einstein caso ela se mostrasse renormalizável com acoplamento mínimo com a matéria e caso esta renormalizabilidade pudesse ser obtida sem necessidade de apelar para eventual cancelamento de contribuições devido

a diferentes campos de matéria.

Um estudo da teoria com campo escalar e seus diagramas de Feynman mostra que isto não acontece. Vamos analisar o que se passa começando pelo caso onde a matéria encontra-se ausente.

Tem-se apenas o campo gravitacional descrito através de ϕ e $g_{\mu\nu}$. A lagrangeana neste caso é dada simplesmente por (1)

$$L = \sqrt{-g} \left[g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \epsilon R \phi^2 - V(\phi) \right] \quad (1)$$

Vamos admitir que o campo apresente quebra espontânea de simetria. Com isto teremos termo em L que reproduzirá a lagrangeana de Einstein com $\frac{1}{16\pi G} = \epsilon \phi_0^2$ onde $\phi_0 = \langle 0 | \phi | 0 \rangle$. Sabemos que a quebra espontânea de simetria não altera os contra-termos necessários para a renormalização da teoria e usualmente é mais simples determinar estes contratermos antes da realização do "shift". No entanto, neste caso, devido ao conhecimento de que podemos dispor sobre a renormalização da teoria de gravitação usual é mais conveniente trabalhar com lagrangeana já redefinida em termos de campos com valor esperado no vácuo nulo:

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \phi_0 \quad \langle 0 | \phi' | 0 \rangle = \langle 0 | \phi | 0 \rangle - \phi_0 = 0$$

Substituindo ϕ' em (1) e omitindo a linha temos:

$$L = \sqrt{-g} \left[\epsilon R (\phi + \phi_0)^2 + g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi + \phi_0) \right]$$

Estamos supondo ϕ_0 constante para simplificar o argumento. O desenvolvimento subsequente será útil se pudermos constatar que nem nestes casos mais simples, a teoria é renormalizável. A auto-integração $V(\phi)$ é tomada como $\frac{\lambda}{6} \phi_0^4$

$$L = \sqrt{-g} \left[\epsilon R \phi_0^2 + 2\epsilon R \phi \phi_0 + \epsilon R \phi^2 + g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{\lambda}{6} \phi^4 - \frac{2}{3} \lambda \phi^3 \phi_0 \right. \\ \left. - \lambda \phi_0^2 \phi^2 - \frac{2}{3} \lambda \phi_0^3 \phi - \frac{\lambda}{6} \phi_0^4 \right]$$

A equação de movimento para ϕ deve ser satisfeita por ϕ_0 (que se comporta como campo clássico) e portanto

$$\square \phi_0 - \epsilon R \phi_0 + \frac{\lambda}{3} \phi_0^3 = 0$$

$$- \epsilon R \phi_0 + \frac{\lambda}{3} \phi_0^3 = 0, \text{ reduzindo } L \text{ a :}$$

$$L = \sqrt{-g} \left[\frac{\epsilon R}{2} \phi_0^2 + \epsilon R \phi^2 + g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{\lambda}{6} \phi^4 - \frac{2}{3} \lambda \phi_0 \phi^3 - \lambda \phi_0^2 \phi^2 \right]$$

Escrevendo $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ temos, mantendo apenas termos de segunda ordem em h .

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} (\delta_\alpha^\nu - h_\alpha^\nu + h_\alpha^\beta h_\beta^\nu)$$

O termo $g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$ dá origem portanto a vértices do tipo

$$\begin{array}{ll} h_\alpha^\nu \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \eta^{\mu\alpha} & \dots \quad \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} \quad V_1 \\ h_\alpha^\beta h_\beta^\nu \eta^{\mu\alpha} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi & \dots \quad \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} \quad V_2 \end{array}$$

onde --- representa o campo escalar

~~~~~ representa o graviton ($h_{\mu\nu}$)

Estaremos interessados apenas no propagador do graviton em 1-loop. Assim os vértices contendo apenas o campo ϕ como

$$-\frac{\lambda\phi^4}{6} \quad \text{---} \quad \text{X} \quad , \quad -\frac{2\lambda\phi^3}{3} \quad \text{---} \quad \text{Y}$$

e os gráficos provenientes dos termos de ordem h^3 (ou maior) em

$$g_{\mu\nu} \left[\text{X} \text{ with wavy lines}, \text{Y} \text{ with wavy lines}, \dots \right] \quad \text{n\~ao s\~ao importantes}$$

nos c\~alculos que seguem.

O termo $\frac{\varepsilon}{2} R\phi_0^2$ d\~a os v\~ertices contendo apenas graviton como na teoria de Einstein.

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2} \phi_0^2 R(3) \dots & \quad \text{X with 3 wavy lines} \\ \frac{\varepsilon}{2} \phi_0^2 R(4) \dots & \quad \text{X with 4 wavy lines} \end{aligned} \quad \text{onde } R(n) \text{ \~e a contribui\~ao a } R \text{ de ordem } h^n.$$

Vamos pensar no propagador do graviton em 1-loop. Na teoria com campo escalar contribuem para este propagador os seguintes diagramas:

$$\text{wavy line with bubble} + \text{wavy line with } \bar{V}_1 \text{ bubble} + \text{wavy line with } \bar{V}_1 \text{ bubble} + \text{wavy line with } \bar{V}_1 \text{ bubble}$$

(Estamos omitindo os gr\~aficos de "ghosts" necess\~arios para a fixa\~ao do gauge. Podemos pens\~a-los como inclu\~idos em . Os v\~ertices $\bar{V}_1$ levam em conta as contribui\~oes de $\sqrt{-g} \varepsilon R\phi^2$ e $-\sqrt{-g} \lambda\phi_0^2\phi^2$.)

Na teoria de Einstein ter\~iamos apenas a contribui\~ao do primeiro gr\~afico (onde entendem-se inclu\~idos os ghosts necess\~arios) e sabemos que neste caso a teoria seria renormaliz\~avel sem mesmo haver necessidade de contratermos. O propagador neste caso n\~ao deve conter diverg\~encias. Como este termo \~e exatamente uma das contribui\~oes da teoria com campo escalar p\~odemos usar a informa\~ao de seu caracter n\~ao divergente

finito

A introdução dos novos termos provavelmente torna o propagador global divergente. Na verdade mostra-se

exige contratermo¹⁵ e que este contratermo é proporcional a R^2 .

Devemos ainda introduzir na lagrangeana os campos de matéria e os campos mediadores de outras interações que não a gravitacional. A teoria com campo escalar é tomada de modo que esta introdução seja feita sempre de modo a acoplar diretamente estes novos campos com o campo $h_{\mu\nu}$ e não com o campo ϕ . Isto significa que teremos vértices envolvendo

, etc onde ----- repre

senta estes novos campos a serem introduzidos. Vértices da for-

ma e , indicando interação direta entre o cam

po ϕ e os campos de matéria não ocorrem. A cada campo adicional introduzido teremos uma nova contribuição para o propagador do graviton, na forma . O propagador do graviton fica

Recaímos portanto nos mesmos gráficos e diagramas que devem ser considerados na teoria de Einstein. A introdução do campo eletromagnético, por exemplo, leva também a necessidade de contratermo da forma $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ ¹⁶.

A conclusão é que a teoria com campo escalar tem a sua possibilidade de renormalização assentada nas mesmas condições que a relatividade geral e estas condições são precárias.

Toda esperança reside na possibilidade que prevaleça um cancelamento favorável de divergências quando da consideração de lagrangeana envolvendo todos os campos de matéria e de interações fundamentais.

Uma alternativa para isto seriam os acoplamentos não mínimos com a gravitação que possibilitassem um cancelamento adequado de divergências. No caso da teoria com campo escalar, este acoplamento pode ser introduzido de duas maneiras básicas: através do acoplamento com o campo $h_{\mu\nu}$ ou com o campo ϕ . O acoplamento direto com ϕ introduziria uma contribuição totalmente nova ao problema. Teríamos vértices da forma

O espalhamento gravitacional entre dois ftons, por exemplo, teria contribuições da forma (1-loop)

Basicamente a interação gravitacional estaria se dando através do campo ϕ ou do campo $h_{\mu\nu}$ e os propagadores , estariam originando contribuições que deveriam ser somadas. A cada novo termo introduzido na lagrangeana apareceria nova contribuição para o propagador do graviton que seria tornada não divergente pela presença, da também nova contribuição . A tentativa seria ajustar a interação entre ϕ e a matéria ordinária de modo que estes cancelamentos ocorressem.

Hã objeções a serem feitas aqui. Apelar para acoplamentos não mínimos é solução drástica que não foi devidamente excluída no caso da própria relatividade geral e, a presença do campo ϕ na lagrangeana da matéria leva a violação da conservação de energia, e precisa ser considerada com cautela. Além disto não é claro que seja possível, de fato, um cancelamento de divergências entre contribuições do campo escalar e do campo $g_{\mu\nu}$ já que campos de natureza tensorial diferente apresentam divergências de natureza também diferente.

Por tudo isto, parece claro que a simples eliminação da constante dimensional não leva a lucros óbvios no que diz respeito a renormalização da teoria. Seria desejável que a eliminação do parâmetro dimensional viesse acompanhada de um aumento substancial no conjunto de simetrias da teoria. Embora uma lagrangeana mais simétrica possa ser construída, ela apresenta sérios problemas de interpretação, motivo que leva a descartar esta possibilidade.

P A R T E B

B.I - A GRAVITAÇÃO INDUZIDA

A teoria com campo escalar estudada até aqui apresenta previsões bem definidas sobre modelos cosmológicos que podem vir a ser confirmadas ou não. Do ponto de vista quântico conjecturamos que apesar de a teoria não ter constantes de acoplamento dimensionais, as chances de renormalização não são muito melhores que as da teoria de Einstein. Embora não tenhamos conseguido demonstração definitiva, podemos afirmar que a renormalização de uma teoria global deste tipo está longe de ser ponto passivo. A teoria encontra-se na dependência de fortes cancelamentos extras na sua expansão perturbativa e estes cancelamentos podem depender crucialmente dos campos incluídos na lagrangeana global. Deve-se ter em mente que o problema da renormalização da gravitação surge antes de mais nada em decorrência do coeficiente dimensional necessário ao termo de Einstein em 4 dimensões. Muitas tentativas vem sendo feitas para contornar este problema. A própria teoria da supergravidade é uma tentativa neste sentido.

Além disto, a necessidade de introduzir um campo escalar para gerar, através do mecanismo de quebra espontânea de simetria, a lagrangeana de Einstein, não está livre de desvantagens já que os campos escalares parecem, até agora, não desempe-

nhar papel fundamental na natureza. Caso estes campos estejam realmente presentes na lagrangeana deveremos poder explicar porque eles não foram observados até agora.

Neste sentido, a alternativa natural é apelar para mecanismos de quebra dinâmica de simetria capazes de induzir na lagrangeana o termo de Einstein. No entanto, as primeiras tentativas de tratar a gravitação como efeito induzido foram anteriores ao desenvolvimento do mecanismo de quebra dinâmica de simetria. A idéia básica era apenas não tratar o termo de Einstein $\left(\frac{1}{16\pi G} R \sqrt{-g} \right)$ como parte da lagrangeana fundamental ou seja como um termo que deva ser colocado diretamente na lagrangena inicial. Aceitando-se que classicamente a teoria de Einsten é satisfatória já que dá conta dos resultados experimentais obtidos até agora, a proposta acima fará sentido apenas se o termo de Einstein puder ser gerado por algum mecanismo conveniente de modo a estar presente na lagrangeana efetiva do sistema.

A primeira referência sobre este tipo de tratamento parte de Sakharov¹⁷. Ele propõe que o termo de Einstein seja induzido na lagrangeana efetiva devido a estrutura quântica do vá-cuo. Este programa não teve sucesso uma vez que previa uma constan-te gravitacional induzida dada por uma integral quadraticamente divergente. Porém, isto pode ser contornado fazendo-se uso de desenvolvimentos mais recentes da teoria quântica (regularização dimensional e a própria quebra dinâmica de simetria). Adler⁵ e Zee⁶ trabalharam neste sentido obtendo expressão explícita para a constante gravitacional induzida (G_{ind}) e tentando na medida do possível fazer previsões sobre valor e sinal de G_{ind} em diferentes teorias da matéria. A dificuldade básica reside no fato de não ser possível usar métodos perturbativos já que o mecanismo de indução baseia-se na quebra de simetria que é sempre um efeito não perturbativo.

Nesta teoria de gravitação induzida, o ponto de partida é uma lagrangeana de matéria escrita sobre background curvo não especificado. A lagrangeana de Einstein não está presente. Admite-se que a métrica não seja necessariamente a métrica do espaço tempo plano ($\eta_{\mu\nu}$) e sim a métrica mais geral $g_{\mu\nu}(x)$ porém, fica inicialmente em aberto como deve ser a evolução dinâmica de $g_{\mu\nu}(x)$ já que não há na lagrangeana termos que determinem esta dinâmica. Através de mecanismo de indução, a ser discutido adiante, o termo de Einstein (e eventualmente termos com potências maiores em R) comparece na lagrangeana efetiva. Com isto fica definido, admitindo-se $g_{\mu\nu}(x)$ como variável dinâmica, qual deve ser a evolução da métrica. Como o mecanismo que induz o termo de Einstein baseia-se em última análise nas correções quânticas da lagrangeana de matéria, pode-se dizer que a interação gravitacional surge, neste contexto, como uma consequência natural da quantização dos campos de matéria acoplada a uma quebra espontânea de simetria.

No que segue faremos, inicialmente, uma revisão dos desenvolvimentos realizados nesta linha até agora e a seguir trataremos um modelo específico.

A indução de termos proporcionais a R

O mecanismo pelo qual as flutuações quânticas dão origem a um termo proporcional a R na lagrangeana efetiva pode ser explicado pela não localidade dos efeitos quânticos, o que invalida (no contexto quântico) o princípio de equivalência. Isto pode ser entendido numa situação simples. Classicamente sabemos que o campo gravitacional e uma aceleração do sistema de referência são localmente indistinguíveis. Um elevador acelerado não pode ser distinguido localmente de um elevador em presença do campo gravitacional. Portanto as equações que descrevem

o movimento do elevador na presença do campo gravitacional devem independer de características do campo gravitacional que sobrevivam a passagem para o sistema de referência localmente inercial. Quando efeitos quânticos são levados em conta, a situação modifica-se completamente. Por exemplo, no propagador de uma partícula entre dois pontos do elevador, todos os pontos do espaço, mesmo aqueles externos ao elevador, são relevantes e devem ser levados em conta. A influência do campo gravitacional neste propagador não é local e portanto não deve poder ser anulada pela simples escolha do referencial localmente inercial. Em termos matemáticos o propagador deve depender de parâmetros que descrevam o campo gravitacional e que não se anulem no sistema localmente inercial. Termos com estas características são tipicamente tensores que envolvem derivadas de segunda ordem em $g_{\mu\nu}$, tais como R , $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu\lambda\rho}$, etc..

Assim, na lagrangeana efetiva, contendo as correções quânticas de uma teoria escrita sobre background curvo, o campo gravitacional não deve estar presente apenas através de $g_{\mu\nu}$ e sua derivada primeira pois neste caso o campo gravitacional poderia ser localmente anulado. É natural esperar que a lagrangeana efetiva contenha termos com derivadas de segunda ordem em $g_{\mu\nu}$ (R , R^2 , $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, ...).

Considerando a lagrangeana de matéria renormalizada $L = L_m + \text{contratermos}$ definida sobre espaço tempo curvo, a ação correspondente é dada por $S = \int dx^4 \sqrt{-g} L = \int dx^4 \tilde{L}$. Podemos fazer uma expansão formal em termos de valores esperados vácuo¹⁸:

$$\langle \tilde{L} \rangle_0 = \langle \tilde{L} \rangle_0^{\text{flat}} + \frac{\sqrt{-g}}{16\pi G_{\text{ind}}} R + o(R^2, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, \dots)$$

O objetivo é encontrar as condições que devem ser satisfeitas para que G_{ind} seja calculável. O ponto básico é garantir que a

teoria não tenha contratermos proporcionais a R porque um contratermo deste tipo misturar-se-ia ao termo induzido e o coeficiente global de R seria passível de renormalização, porém não calculável (e, eventualmente, até mesmo anulável pela renormalização).

Algoritmo dimensional¹⁹

Este algoritmo afirma que dada uma lagrangeana, os contratermos admissíveis devem ser polinômios com a mesma dimensão canônica e o mesmo tipo de simetrias que os termos da lagrangeana original, formados de campos, suas derivadas e dos termos de massa. As simetrias a serem levadas em conta devem ser tanto as internas quanto as de espaço-tempo. A dimensão canônica pode ser introduzida usando o sistema de unidades onde $\hbar=c=1$ e lembrando que a ação tem dimensão de $\hbar$.

$$\hbar = c = 1$$

$$[\text{tempo}] = [\text{comprimento}] = L$$

$$[\text{massa}] = L^{-1}.$$

A dimensão canônica d é definida por:

$$\text{dimensão (comp)} = \text{dimensão (tempo)} = -1$$

$$\text{dimensão (massa)} = +1.$$

Assim, $[S] = L^0$ ($d=0$) e como $[dx^4] = L^4$ ($d=-4$), $[g] = L^0$ ($d=0$) e $S = \int \sqrt{-g} L dx^4$, os termos de L devem ter dimensão $[L] = L^{-4}$ ou $d = +4$.

É fácil ver que o campo escalar, devido ao seu termo cinético, deve ter dimensão $[\phi] = L^{-1}$ ($d = +1$) e os campos fer

miônicos devem ter dimensão $[\psi] = L^{-3/2}$ ($d = +3/2$). Finalmente $[R] = [R_{\mu\nu}] = [R_{\mu\nu\lambda\rho}] = L^{-2}$ ou seja $d = 2$.

No caso de uma teoria escrita sobre espaço tempo curvo, os contratermos admissíveis são:

- a) Os contratermos já presentes na teoria sobre espaço tempo plano, apenas usando derivada covariante em vez de derivada usual.
- b) Termos de quarta ordem nas massas que no espaço plano são constantes irrelevantes (aqui deixam de sê-lo devido a presença fator $\sqrt{-g}$ em $S = \int dx^4 \sqrt{-g} L$).
- c) Termos com R , $R_{\mu\nu}$ e $R_{\mu\nu\lambda\rho}$.

Devido ao fato de a dimensão de R (ou $R_{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu\lambda\rho}$) ser 2, os termos contendo potência de ordem n em R devem ser multiplicados por outros campos e (ou) termos de massa formando um fator A com dimensão $d = 4 - 2n$:

$$[AR^n] = L^{-4}$$

$$[A] L^{-2n} = L^{-4} \quad [A] = L^{-4+2n}$$

Assim, para $n=1$, $[A] = L^{-2}$ e se quisermos evitar contratermos desta forma (para garantir que G seja calculável) devemos partir de uma lagrangeana onde termos de dimensão 2 não possam ser construídos.

É possível mostrar que para uma teoria de campo renormalizável contendo partículas de spin zero, spin 1/2 e campos de gauge (spin 1) escrita sobre espaço-tempo curvo e quantizada respeitando as simetrias originais, os termos proporcionais a R admissíveis são:

$$m_0^2 R \quad \text{e} \quad \phi^2 R$$

sendo m_0 - massa ou regulador massivo

ϕ - campo com spin zero (não pertencente a supermultipletos).

Portanto, se não aparecerem massas nem reguladores massivos e nem campos escalares, L não pode conter termos (ou contratermos) proporcionais a R . O único termo proporcional a R será o termo induzido que deverá ter coeficiente finito, independente da renormalização.

(É verdade que este argumento exclui contratermos fazendo uso das simetrias clássicas da lagrangeana e sabe-se que as correções radiativas quebram algumas destas simetrias. Porém é possível mostrar que o mecanismo de quebra de simetria que nos leva da teoria "mais" simétrica para a "menos" simétrica não altera a estrutura de divergências, ou seja os mesmos contratermos que renormalizam a primeira teoria são suficientes para renormalizar a segunda²⁰).

Por tudo que foi dito acima, fica claro que as teorias de gauge de interesse serão aquelas que satisfaçam as duas condições fundamentais:

- não conter parâmetros dimensionais
- não conter campos escalares.

(1)

Numa teoria com estas características, as massas das partículas devem ser geradas por mecanismo de quebra dinâmica de simetria. Assim, parte-se de uma teoria com invariância de escala e como as correções quânticas não preservam esta invariância, o termo de Einstein (proporcional a R) é gerado, comparecendo na lagrangeana efetiva com coeficiente finito e calculável.

Quanto as demais potências de R (ou $R_{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu\lambda\rho}$), devemos lembrar que R^2 , $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ e $R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\mu\nu\lambda\rho}$ tem dimensão 4 e portanto seus coeficientes num espaço de quatro dimensões deve

ser adimensional. Deste modo, termos e contratermos proporcionais a eles podem aparecer ainda que a teoria não tenha termos de massa e nem campos escalares. O coeficiente destes termos não pode ser calculado já que depende da renormalização, isto é, deve ser obtido empiricamente, da mesma forma que a carga do elétron na eletrodinâmica quântica. As potências de R maiores que 2 precisam de coeficiente com dimensão negativa em unidades de massa, devem poder ser calculados já que apenas a contribuição do termo induzido estará presente.

A conclusão é que em quatro dimensões de espaço-tempo, apenas o termo R^2 ($R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ ou $R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\mu\nu\lambda\rho}$) não fica determinado através do mecanismo de indução. Vale lembrar que esta característica é inerente ao espaço-tempo de quatro dimensões. Em duas dimensões, por exemplo, seria o termo em R , com dimensão 2, que teria coeficiente não calculável. Porém, para espaços-tempo com duas dimensões este termo é trivial. Os demais termos, inclusive R^2 , devem ser obtidos pelo mecanismo de indução.

O modelo específico que examinaremos é o modelo de Gross-Neveu²¹. Trata-se de modelo em duas dimensões de espaço-tempo, com N campos fermiônicos. Não há escalares nem termos de massa iniciais. Este modelo apresenta fenômeno de quebra dinâmica de simetria chiral com geração de massa. Isto provoca a violação da invariância da teoria por transformações de escala, o que é fundamental para que termos com coeficientes dimensionais possam aparecer na lagrangeana efetiva. De acordo com a análise feita acima, devemos esperar que os coeficientes de $R^2, R^3, \dots$ possam ser calculados já que eles são dimensionais e aparecem na lagrangeana efetiva apenas via mecanismo de indução. O termo em R , cujo coeficiente é adimensional, não é relevante já que se reduz a diferencial exata (apêndice B2).

Antes de nos voltarmos para este modelo específico,

devemos obter expressões para o cálculo explícito dos coeficientes induzidos numa teoria geral satisfazendo (1).

Cálculo da constante gravitacional induzida (G_{ind})

Como foi explicado acima, estaremos tratando a interação gravitacional como um efeito induzido pela lagrangeana de matéria e suas correções quânticas. Se as condições adicionais (1) forem satisfeitas, então devemos poder calcular explicitamente a intensidade desta interação através de suas constantes como, por exemplo, a própria constante gravitacional G . Basicamente devemos ser capazes de relacionar G com parâmetros e valores esperados da teoria de matéria que induz esta interação gravitacional. Para tanto devemos considerar uma teoria de matéria sobre background curvo $g_{\mu\nu}$, descrito pela lagrangeana L satisfazendo as condições (1). Neste caso podemos considerar a expansão¹⁸

$$\langle \tilde{L} \rangle_0 = \langle \tilde{L} \rangle_0^{flat} + A_1 R \sqrt{-g} + o(R^2, R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}, R_{\mu\nu\lambda\rho} R^{\mu\nu\lambda\rho}) \quad (2)$$

com $\tilde{L} = \sqrt{-g} L$ e onde $\langle L \rangle_0$ representa o valor esperado no vácuo e a constante gravitacional G_{ind} relaciona-se com A_1 através de $A_1^{-1} = 16\pi G_{ind}$. $\langle \dots \rangle_0^{flat}$ indica valor esperado no vácuo para espaço-tempo plano $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$.

A expansão (2) expressa um fato básico: na presença de efeitos quânticos, a interação da matéria com o campo gravitacional assume natureza não local. Assim, levando-se em conta que $\langle L \rangle_0$ não pode estar relacionada com o valor correspondente no espaço-tempo plano pelo princípio de equivalência, entre $\langle L \rangle_0$ e $\langle L \rangle_0^{flat}$ deve haver diferença que envolva termos com derivadas de segunda ordem em $g_{\mu\nu}$ e R é o único escalar de Lorentz envolvendo derivada segunda na métrica (em primeira po-

tência).

O tensor energia-momento desta teoria pode ser obtido através de²²: $T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} (\sqrt{-g} L)$ e o traço de $T^{\mu\nu}$ é dado por

$$T = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = \frac{2g_{\mu\nu}}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} L)}{\delta g_{\mu\nu}} \quad (3)$$

Tomando-se o valor esperado no vácuo de T , usando a expansão (2) obtêm-se:

$$\langle T \rangle_0 = \langle T \rangle_0^{\text{flat}} - 2A_1 g_{\mu\nu} (R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R) + o(R^2)$$

ou
$$\langle T \rangle_0 = \langle T \rangle_0^{\text{flat}} - 2A_1 R(1 - \frac{n}{2}) + o(R^2)$$

sendo $n = g_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$ a dimensão do espaço.

Partindo-se de um espaço-tempo plano e perturbando-o de forma a recair num espaço-tempo curvo com $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}(x)$, tem-se, como consequência, variação em $\langle T \rangle_0$ dada por:

$$\delta \langle T \rangle_0 = \langle T \rangle_0 - \langle T \rangle_0^{\text{flat}} = -2A_1 R(1 - \frac{n}{2}) + o(R^2) \quad (4)$$

O cálculo de A_1 será possível se pudermos calcular $\delta \langle T \rangle_0$ de forma independente de modo a compará-lo com (4). Isto pode ser feito calculando $\delta \langle T \rangle_0$ diretamente através do uso de integrais de trajetória. Podemos escrever²³

$$\langle T \rangle_0 = \frac{\int [d\phi] T \exp \left[i \int \sqrt{-g} L dx^4 \right]}{\int [d\phi] \exp \left[i \int \sqrt{-g} L dx^4 \right]}$$

com ϕ representando os diferentes campos de matéria presentes

em L e $[d\phi]$ representa integral funcional nestes campos.

$$\langle T(0) \rangle_0 = \frac{\int [d\phi] T_\mu^\mu(0) \exp(iS)}{\int [d\phi] \exp(iS)}$$

A partir desta expressão podemos calcular a variação de $\langle T \rangle_0$ quando o espaço-tempo plano é perturbado passando a apresentar métrica $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \delta \langle T_\mu^\mu(0) \rangle_0 &= \frac{i \int dx^4 \int [d\phi] \delta(\sqrt{-g} L) T_\mu^\mu(0) e^{iS}}{\int [d\phi] e^{iS}} - \\ &- \frac{i \int dx^4 \int [d\phi'] \delta(L \sqrt{-g}) e^{iS} \int [d\phi] T_\mu^\mu(0) e^{iS}}{\left[\int [d\phi] e^{iS} \right]^2} \end{aligned}$$

ou,

$$\delta \langle T_\mu^\mu(0) \rangle_0 = i \int dx^4 \left[\langle 0 | \tau \delta(\sqrt{-g} L(x)) T(0) | 0 \rangle - \langle 0 | T(0) | 0 \rangle \langle 0 | \delta(\sqrt{-g} L(x)) | 0 \rangle \right]$$

e usando $\delta(\sqrt{-g} L) = \frac{1}{2} \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$,

$$\delta \langle T_\mu^\mu(0) \rangle_0 = \frac{i}{2} \int dx^4 \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu}(x) \left[\langle 0 | \tau T^{\mu\nu}(x) T(0) | 0 \rangle - \langle 0 | T^{\mu\nu}(x) | 0 \rangle \langle 0 | T(0) | 0 \rangle \right]$$

onde τ indica produto cronológico. Definindo-se

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \langle 0 | T_{\mu\nu} | 0 \rangle \quad \text{vem:}$$

$$\delta \langle T_\mu^\mu(0) \rangle_0 = \frac{i}{2} \int dx^4 \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu}(x) \langle 0 | \tau \tilde{T}^{\mu\nu}(x) \tilde{T}_\lambda^\lambda(0) | 0 \rangle$$

ou simplesmente,

$$\delta \langle T_{\mu}^{\mu}(0) \rangle_0 = \frac{i}{2} \int dx^4 \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu}(x) \langle 0 | \tau T^{\mu\nu}(x) T(0) | 0 \rangle_{\text{conexo}} \quad (5)$$

A partir deste ponto devemos basicamente comparar as expressões (4) e (5). Como desejamos calcular apenas um número, é suficiente fazer este cálculo para um $\delta g_{\mu\nu}$ específico. Em particular é conveniente escolher uma perturbação em torno de $x=0$ da métrica minkowskiana original que seja conformemente plana e com curvatura constante. Em sistema de coordenadas adequado, esta perturbação pode ser escrita como (apêndice B1)

$$\delta g_{\mu\nu}(x) = + \frac{1}{24} R(0) x^2 \eta_{\mu\nu} + \dots \quad (x^2 = x^{0^2} - \vec{x}^2)$$

ou

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} \left[1 + \frac{R(0)}{24} x^2 + \dots \right]$$

É possível mostrar que usando $\delta g_{\mu\nu}$ geral, não sujeito as condições acima, a dedução da expressão para G_{ind} complica-se um pouco, porém o resultado não se altera²⁴.

Com a substituição de $\delta g_{\mu\nu}$ em (5) tem-se:

$$\delta \langle T_{\mu}^{\mu}(0) \rangle_0 = \frac{i}{2} \int dx^4 \sqrt{-g} \frac{R(0)}{24} x^2 \langle 0 | \tau T_{\mu}^{\mu}(x) T_{\lambda}^{\lambda}(0) | 0 \rangle_{\text{conexo}} \quad (6)$$

e, finalmente, comparando (4) e (6) obtemos:

$$\begin{aligned} - 2A R(0) \left(1 - \frac{n}{2}\right) &= \frac{i}{2} \int dx^4 \sqrt{-g} \frac{R(0)x^2}{24} \langle 0 | \tau T_{\mu}^{\mu}(x) T_{\lambda}^{\lambda}(0) | 0 \rangle_{\text{conexo}} \\ - A_1 \left(1 - \frac{n}{2}\right) &= \frac{i}{96} \int dx^4 \sqrt{-g} x^2 \langle 0 | \tau T_{\mu}^{\mu}(x) T_{\lambda}^{\lambda}(0) | 0 \rangle_{\text{conexo}} \end{aligned} \quad (7)$$

onde foi tomado o limite de espaço-tempo plano com quatro dimensões

(n = 4):

$$A_1 = \frac{1}{16\pi G_{ind}} = \frac{i}{96} \int dx^4 \quad x^2 < 0 \quad | \tau \quad T_{\mu}^{\mu}(x) T_{\lambda}^{\lambda}(0) | 0 \rangle_{\substack{\text{plano} \\ \text{conexo}}} \quad (8)$$

Deve-se observar que apesar de a teoria ser definida originalmente sobre background curvo, foi possível obter a expressão para o coeficiente induzido apenas em termos de valores esperados da teoria definida sobre espaço-tempo plano. Esta característica, além de interessante por si mesma, é útil do ponto de vista prático já que a definição de teorias quânticas sobre espaço-tempo curvo não está isenta de problemas atualmente e portanto evitar cálculos de valores esperados em espaço-tempo curvo é muito conveniente.

Sobre a expressão (7) é interessante observar que no caso de $n=2$, o coeficiente A_1 fica indeterminado, o que não causa problemas uma vez que o termo $\sqrt{-g} R$ é uma diferencial exata em duas dimensões. No entanto verificaremos mais adiante que o mesmo fenômeno ocorre para o coeficiente de R^2 , A_2 , em quatro dimensões. A razão disto é que estamos estudando a indução de termos na lagrangeana efetiva através da consequente indução de novas contribuições para o traço do tensor energia-momento. Para uma teoria que classicamente apresenta invariança de escala, o traço do tensor energia-momento (na aproximação clássica) deve ser nulo. Novas contribuições para este traço, torna-lo-ão diferente de zero indicando a violação da simetria de escala. É o que ocorre na teoria considerada e as contribuições induzidas que afetam o traço do tensor energia-momento são sempre provenientes de termos que violam a simetria de escala devendo para isto apresentar coeficientes dimensionais. Para $n=2$, A_1 é adimensional, o termo correspondente, $A_1 R$, não viola a

simetria de escala e portanto não deve dar origem a termo induzido no traço do tensor energia-momento. O mesmo ocorre em quatro dimensões para o termo $A_2 R^2$. De qualquer forma, mesmo a impossibilidade de calcular A_2 em 4-dimensões não é limitação grave porque este termo, tendo coeficiente adimensional, é sempre passível de renormalização e portanto, de qualquer forma, é um coeficiente não calculável.

Para o cálculo de G_{ind} a partir de (8) é conveniente realizar rotação para o espaço Euclidiano:

$$ik_0 = k_4, \quad k^2 = -k_E^2, \quad d^4k = -id^4k_E$$

onde obtêm-se

$$\frac{1}{16\pi G_{ind}} = -\frac{1}{96} \int_E dx^4 x^2 \langle 0 | \tau T_\mu^\mu(x) T_\lambda^\lambda(0) | 0 \rangle_{\text{plano conexo}} \quad (9)$$

Além disto, é fundamental que no cálculo do valor esperado que aparece na expressão de G_{ind} , e na expressão dos demais coeficientes induzidos, seja usado método de regularização dimensional onde, como se sabe, as integrais divergentes são definidas pela continuação analítica de um parâmetro adimensional. Isto é necessário para que o próprio processo de regularização não seja responsável pela violação da simetria de escala.

A principal dificuldade em obter informação sobre G_{ind} através de (9) está no fato de esta expressão ser fortemente dependente do comportamento da teoria na região infravermelha. O próprio sinal de G_{ind} depende deste comportamento. Nas teorias com liberdade assintótica a região infravermelha não é, em geral, acessível por métodos perturbativos, o que dificulta a utilização da expressão (9). No trabalho de Hasslacher-Mottola²⁵

um cut-off artificial é introduzido para simplesmente evitar a região desconhecida. Outra alternativa, mais razoável, é desenvolvida por Zee²⁶ que trabalha com teorias de Yang-Mills (sem campos fermiônicos) que tenham um ponto fixo estável no infravermelho. Os cálculos perturbativos, neste caso, são exatos, na medida em que o valor da constante de interação neste ponto fixo seja pequena. É claro que a existência de um ponto fixo (IRS) arbitrariamente pequeno é uma forte restrição a teoria, sem levar em conta que a introdução da matéria através de campos fermiônicos pode vir a alterar substancialmente as conclusões obtidas.

Uma terceira opção é trabalhar em modelos bidimensionais exatos onde haja quebra dinâmica de simetria. Os modelos bidimensionais, embora pouco realistas, por diversas vezes mostraram-se úteis no estudo e mesmo na previsão de fenômenos característicos de modelos quadridimensionais. Trabalhando com modelos bidimensionais esperamos poder compreender melhor o fenômeno de gravitação induzida. Há, também, a expectativa de que algumas das características observadas em duas dimensões possam vir a ser válidas em quatro dimensões.

Em duas dimensões, os termos de gravitação induzida de ordem mais baixa são R^2 , $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\mu\nu\lambda\rho}$ que podem ser levados em conta através da introdução de apenas um deles, por exemplo R^2 , já que são todos proporcionais (em duas dimensões) (apêndice B2)

$$\langle \tilde{L} \rangle_0 = \langle \tilde{L} \rangle_0^{\text{flat}} + A_2 R^2 \sqrt{-g} + o(R^3) \quad (10)$$

A determinação da expressão para o coeficiente induzido A_2 é o passo seguinte.

Cálculo do coeficiente induzido para R^2

Usando a expressão do traço do tensor energia-momento (3) e expansão (10), válida em duas dimensões, temos

$$\langle T \rangle_0 = \langle T \rangle_0^{\text{plano}} + \frac{2g_{\mu\nu}}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} (\sqrt{-g} R^2 A_2)$$

ou seja

$$\langle T \rangle_0 - \langle T \rangle_0^{\text{plano}} = A_2 \frac{2g_{\mu\nu}}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} (\sqrt{-g} R^2)$$

Usando $\frac{\delta(\sqrt{-g})}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu}$, $\frac{\delta R}{\delta g_{\mu\nu}} = -R^{\mu\nu}$, obtêm-se

$$\langle T \rangle_0 - \langle T \rangle_0^{\text{plano}} = 2A_2 R^2 \left[\frac{n}{2} - 2 \right]$$

e como $n=2$,

$$\langle T \rangle_0 - \langle T \rangle_0^{\text{plano}} = -2A_2 R^2 \quad . \quad (11)$$

Neste ponto vale observar que, se em (10) houvessemos mantido o termo proporcional a R , mesmo sabendo tratar-se de diferencial exata, teríamos obtido:

$$\langle T \rangle_0 - \langle T \rangle_0^{\text{plano}} = -2A_1 R \left(1 - \frac{n}{2}\right) - 2A_2 R^2$$

e constatamos que de qualquer forma, como $n=2$, o termo proporcional a R não contribuiria.

Para obter A_2 , devemos calcular $\delta \langle T \rangle_0 = \langle T \rangle_0 - \langle T \rangle_0^{\text{flat}}$ de forma independente e compará-lo com (11). O procedimento po

de ser o mesmo usado para o cálculo de A_1 , partindo do espaço plano e perturbando a métrica original $\eta_{\mu\nu}$. A expressão (5) pode ser usada diretamente

$$\delta \langle T(0) \rangle_0 = \frac{i}{2} \int dx^2 \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu}(x) \langle 0 | \tau \tilde{T}^{\mu\nu}(x) \tilde{T}(0) | 0 \rangle \quad (12)$$

É conveniente ainda escolher a mesma perturbação da métrica usada no cálculo de A_1 , apenas retendo o termo seguinte na expansão, proporcional a R^2 . Assim para perturbações da métrica que sejam conformemente planas (o que não é uma restrição, porque em duas dimensões todas as métricas são conformemente planas) e com curvatura constante, tem-se (apêndice B1):

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} \left[1 + \frac{R(0)}{2n(n-1)} x^2 + \frac{3R(0)x^4}{16n^2(n-1)^2} + \dots \right]$$

ou

$$\delta_{g_{\mu\nu}}^{(2)}(x) = \eta_{\mu\nu} \frac{3R^2(0)}{16n^2(n-1)^2} x^4.$$

Substituindo em (12) para $n=2$,

$$\delta^{(2)} \langle T \rangle_0 = \frac{3i}{128} \int dx^2 \sqrt{-g} \eta_{\mu\nu} R^2(0) x^4 \langle 0 | \tau \tilde{T}^{\mu\nu}(x) \tilde{T}(0) | 0 \rangle.$$

Comparando-se com (11) e tomando o limite para espaço-tempo plano

$$A_2 = - \frac{3i}{256} \int dx^2 x^4 \langle 0 | \tau \tilde{T}(x) \tilde{T}(0) | 0 \rangle_{\text{plano}}.$$

Com a passagem para o espaço euclidiano recai-se em:

$$A_2 = - \frac{3}{256} \int dx^2 x^4 \langle 0 | \tau T(x) T(0) | 0 \rangle_{\text{plano conexo}}^{\text{plano}} \quad (13)$$

Usaremos a expressão (13) no modelo de Gross-Neveu que é exato no limite de N (número de fermions) grande e apresenta fenômeno de quebra dinâmica de simetria. A seguir faremos um breve resumo deste modelo.

B.II - O MODELO DE GROSS-NEVEU²¹

O modelo de Gross-Neveu descreve N fermions sem massa acoplados através de interação quártica $(\bar{\psi}\psi)^2$ num espaço tempo de duas dimensões. A constante de acoplamento é adimensional e a teoria é renormalizável

$$L = - \bar{\psi} \gamma \cdot \partial \psi + \frac{1}{2} g_0^2 (\bar{\psi}\psi)^2 \quad . \quad (14)$$

Uma característica importante desta teoria é a liberdade assintótica e argumentos gerais mostram que teorias com liberdade assintótica podem apresentar geração de parâmetros dimensionais²¹. No caso de geração de massa, esses são calculáveis em termos da massa.

Examinando o funcional gerador das funções de Green desta teoria, vemos que:

$$\begin{aligned} Z(\eta, \bar{\eta}) &= \text{const} \int [d\psi][d\bar{\psi}] \exp \left[i \int dx^2 \left[- \bar{\psi} \gamma \cdot \partial \psi + \frac{1}{2} g_0^2 (\bar{\psi}\psi)^2 + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta \right] \right] \\ &= \text{const}' \int [d\psi][d\bar{\psi}][d\sigma] \exp \left[i \int dx^2 \left[- \bar{\psi} \gamma \cdot \partial \psi - \frac{1}{2} \sigma^2 + g_0^2 \bar{\psi}\psi\sigma + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta \right] \right] . \end{aligned}$$

Portanto, as funções de Green da lagrangeana

$$L' = - \bar{\psi} \gamma \cdot \partial \psi - \frac{1}{2} \sigma^2 + g_0 \bar{\psi}\psi\sigma \quad (15)$$

sem pernas externas de σ , coincidem com as funções de Green da lagrangeana original (14). O campo $\sigma(x)$ comparece em L' como um campo auxiliar que a nível das equações de movimento clássicas aparece como operador composto:

$$\sigma(x) = g_0 \bar{\psi}(x) \psi(x) \quad .$$

Como as funções de Green com pernas externas de fermions coincidem para as lagrangeanas (14) e (15), o estudo da teoria descrita por (14) pode ser feito através da lagrangeana (15), o que mostrar-se-á útil em vários aspectos. Por exemplo, a presença de quebra espontânea de simetria pode ser constatada em (15), onde ela se manifesta através do próprio campo $\sigma(x)$. Calculando o potencial efetivo $V_{\text{eff}}(\sigma)$, verifica-se que o mínimo ocorre para $\sigma_0 = v \neq 0$. Devemos portanto voltar a lagrangeana (15) e definir $\sigma \rightarrow \sigma - v$ com $v = \sigma_0 = \langle 0 | \sigma | 0 \rangle$, de modo que o novo campo σ tenha valor esperado no vácuo nulo

$$L = - \bar{\psi} \gamma \cdot \partial \psi - \frac{1}{2} (\sigma - v)^2 + g_0 \bar{\psi} \psi (\sigma - v) \quad .$$

É conveniente tratar este modelo no limite N grande, sendo N o número de fermions, o que é possível mantendo-se $g_0^2 N \equiv \lambda_0^2$ finito. A grande vantagem deste tratamento é que para $N \rightarrow \infty$ tem-se, levando em conta apenas contribuição de um loop para funções de Green 1PI, a solução exata. Isto pode ser visto rapidamente através de uma contagem de potências em N das contribuições dos diferentes diagramas de Feynman. Escrevendo

$$L = - \bar{\psi} \gamma \cdot \partial \psi - \frac{1}{2} (\sigma - v)^2 + \frac{\lambda_0}{\sqrt{N}} \mu^{(2-n)/2} \bar{\psi} \psi (\sigma - v) \quad (16)$$

onde μ é um parâmetro arbitrário com dimensão de massa, cuja introdução torna a constante de acoplamento λ adimensional em qualquer dimensão n do espaço, (o que é útil quando pretende-se usar regularização dimensional). As regras de Feynman de (16) são:

$$\frac{1}{(2\pi)^2 i} \frac{(-i\gamma \cdot k + a)}{k^2 + a^2}$$

$$(2\pi)^2 i \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \mu^{(2-n)/2}$$

$\times$ ----- $(2\pi)^2 i v$

----- $\frac{1}{(2\pi)^2 i}$

A lagrangeana de contratermos,

$$L_c = - z \bar{\psi} \gamma \cdot \partial \psi - \frac{z_\sigma}{2} (\sigma - v)^2 + z_\lambda \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \mu^{(2-n)/2} \bar{\psi} \psi (\sigma - v)$$

fornece ainda os diagramas

$$(2\pi)^2 z_\gamma \cdot k - (2\pi)^2 i z_\lambda a$$

$$\frac{(2\pi)^2}{i} z_\sigma$$

$$(2\pi)^2 i z_\sigma v$$

$$(2\pi)^2 i z_\lambda \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \mu^{(2-n)/2}$$

com $a = \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \mu^{(2-n)/2} v$.

Estudando o propagador do campo σ , vemos que a contribuição de um loop tem ordem N^0

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1}{\sqrt{N}} N = N^0$$

↳ loop de fermions.

As contribuições lPI de ordem superior, apresentam sempre potências negativas em N e portanto não contribuem no limite $N \rightarrow \infty$. Por exemplo:

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1}{\sqrt{N}} N = N^{-1}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)^6 N^2 = N^{-1}$$

Quanto ao propagador do fermion, temos como primeira correção

$$\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)^2 = N^{-1}$$

e a seguir

$$\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)^4 = N^{-2}, \text{ e assim por diante.}$$

No limite $N \rightarrow \infty$, o propagador do fermion de zero loop não precisa ser corrigido, sendo portanto exato. O propagador 1PI de σ precisa ser corrigido até 1-loop apenas.

Quanto a renormalização da teoria, temos que em ordem N^0 , $z = z_\lambda = 0$ ou $Z^\lambda = 1 + z_\lambda = 1$ e z_σ pode ser calculado impondo alguma condição sobre o propagador completo.

Usando as regras de Feynman já enunciadas podemos escrever a cor
reção para a função de Green de dois pontos para o campo σ co
mo²⁷

$$\begin{aligned} \Gamma_\sigma^2(k) &= -\lambda^2 \mu^{2-n} \int dq \frac{nq \cdot (k-a) + na^2}{[q^2 + a^2][(k-q)^2 + a^2]} + \frac{(2\pi)^2}{i} z_\sigma \\ &= -i\pi^{n/2} n(1-n)\lambda^2 \Gamma(1-n/2) \int_0^1 dx \frac{1}{[(k^2/\mu^2)x(1-x) + a^2/\mu^2]^{1-n/2}} + \\ &\quad + \frac{(2\pi)^2}{i} z_\sigma . \end{aligned}$$

A renormalização pode ser feita de diferentes maneiras através de diferentes escolhas de z_σ . A única exigência é que o Γ_σ^2 re
sultante seja finito. Para tanto, z_σ deve necessariamente can
celar a parte divergente do primeiro termo, qualquer que seja a renormalização escolhida. Esta divergência pode ser explicitada expandindo-se o denominador do integrando ($\epsilon = n/2 - 1$):

$$a^\varepsilon = e^{\varepsilon \ln a} = 1 + \varepsilon \ln a + \frac{\varepsilon^2 (\ln a)^2}{2!} + \dots$$

$$\Gamma_\sigma^2(k) = -i\pi^{n/2} n(1-n)\lambda^2 \frac{1}{1-\frac{n}{2}} \int_0^1 dx \left[1 - \left(1 - \frac{n}{2}\right) \ln \left[k^2/\mu^2 (1-x)x + a^2/\mu^2 \right] \dots \right] +$$

$$+ \frac{(2\pi)^2 z_\sigma}{i}$$

$$\Gamma_\sigma^2(k) = -i\pi^{n/2} n(1-n)\lambda^2 \int_0^1 dx \left[\frac{1}{1-\frac{n}{2}} + \text{termos finitos para } n \rightarrow 2 \right] + \frac{(2\pi)^2}{i} z_\sigma \quad .$$

Portanto devemos ter:

$$z_\sigma = -\frac{\lambda^2}{2\pi} (1-n) \frac{1}{1-\frac{n}{2}} + \text{termos finitos para } n \rightarrow 2 \quad (17)$$

onde os termos finitos dependem da particular renormalização escolhida.

A constante de acoplamento $\bar{e}$ renormalizada através de

$$g_0^2 = \frac{\lambda^2}{N} \mu^{2-n} Z^{-2} Z_\sigma^{-1} \quad \begin{array}{l} Z = 1+z = 1 \\ Z_\sigma = 1+z_\sigma \end{array} \quad (18)$$

O fator μ introduzido em (16) aparece também como o ponto onde são feitas as subtrações necessárias para renormalizar a teoria. É essencial, em teorias com massa nula, que o ponto de subtração seja escolhido fora da camada de massa, $p^2=0$, já que se isto não for feito, as divergências infravermelhas não poderão ser evitadas.

Sendo μ o único parâmetro dimensional da teo-

ria, é ele o responsável pela fixação da escala dos momentos. Uma mudança neste fator equivale a uma mudança na escala dos momentos e conseqüentemente na escala das distâncias. Como μ atua como ponto de subtração, uma mudança em μ acarreta mudança na constante de acoplamento renormalizada e, já que μ é um parâmetro arbitrário, estas mudanças em μ não se refletem em mudanças nos parâmetros físicos da teoria. Em outras palavras, a escala dos campos e a constante de acoplamento devem transformar-se de modo combinado por mudanças em μ de tal forma que os parâmetros e resultados físicos da teoria permaneçam inalterados. São as equações do grupo de renormalização que traduzem o comportamento das funções de Green e dos parâmetros da teoria por mudanças em μ .

Seja Γ_0^p uma função de Green com p pernas externas e Γ^p a função correspondente renormalizada. Γ_0^p deve independe de μ .

$$\Gamma^p(\lambda, \mu) = Z^{p/2}(\lambda_0, (2-\epsilon)^{-1}, \mu) \Gamma_0^p(\lambda_0, (2-\epsilon)^{-1})$$

sendo Z constante de renormalização.

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \Gamma_0^p(\lambda_0, (2-\epsilon)^{-1}) = 0$$

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \left[Z^{-p/2}(\lambda_0, (2-\epsilon)^{-1}, \mu) \Gamma^p(\lambda, \mu) \right] = 0$$

$$\text{ou} \quad \left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} - p\gamma(\lambda) \right] \Gamma^p(\lambda, \mu) = 0 \quad .$$

$$\text{com} \quad \beta(\lambda) = \mu \left. \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \right|_{\lambda_0, (2-\epsilon)} \quad \text{e} \quad \gamma(\lambda) = \mu \left. \frac{\partial}{\partial \mu} (\ln \sqrt{Z}) \right|_{\lambda_0, 2-\epsilon}$$

No caso de uma razão adimensional de funções de Green (G), a equação acima reduz-se a:

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} \right] G = 0 \quad . \quad (19)$$

O fato de as previsões físicas da teoria independerem de μ pode ser caracterizado como uma invariança por transformações do grupo de renormalização expressas por

$$T: \mu \rightarrow \mu(t) = e^{+t} \mu \quad .$$

A constante de acoplamento efetiva $\lambda(t)$ deve ser definida de modo que para G (razão adimensional de funções de Green) tenhamos: $G(\lambda, \mu) = G(\lambda(t), \mu(t))$. Portanto,

$$\frac{dG}{dt} = 0 = \left[+ \mu(t) \frac{\partial}{\partial \mu(t)} + \frac{\partial \lambda(t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \lambda(t)} \right] G(\lambda(t), \mu(t))$$

$$\left[\mu(t) \frac{\partial}{\partial \mu(t)} + \frac{\partial \lambda(t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \lambda(t)} \right] G(\lambda(t), \mu(t)) = 0 \quad .$$

Comparando-se com a equação (4)

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} \right] G(\lambda, \mu) = 0$$

conclui-se que:

$$\beta(\lambda) = + \frac{\partial \lambda(t)}{\partial t} \quad . \quad (20)$$

Para a massa dos campos fermiônicos, m , devemos ter $m = \mu f(\lambda)$ e sendo m um parâmetro físico, não pode depen-

der de μ , parâmetro que apenas fixa a renormalização. A dependência em μ explícita na expressão $m = \mu f(\lambda)$ deve ser cancelada pela dependência implícita que provém de λ ,

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} \right] m(\mu, \lambda) = 0 \quad . \quad (21)$$

É possível mostrar que esta massa, invariante pelo grupo de renormalização, é dada por²⁸:

$$a = gv = \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \mu^{(1-n/2)} v \quad (22)$$

A constante de acoplamento efetiva

No modelo de Gross-Neveu e na renormalização de Gross-Neveu²⁷, a função $\beta(\lambda)$ do grupo de renormalização é dada por

$$\beta(\lambda) = - \frac{\lambda^3}{2\pi} \quad .$$

Além disto sabemos que $\beta(\lambda) = + \frac{d\lambda}{dt}$. Introduzindo variável τ proporcional a e^{-2t} vem para $\tau = e^{-2t}$

$$+ 2 \frac{d\lambda}{d\tau} \tau = \frac{\lambda^3}{2\pi}$$

$$\ln \tau = - \frac{2\pi}{\lambda^2} + C \quad \tau = \tau_0 \exp \left(- \frac{2\pi}{\lambda^2} \right) \quad (23)$$

$$\text{ou} \quad \lambda^2 = \frac{-2\pi}{\ln(\tau/\tau_0)} \quad (24)$$

Usando a equação (19) e usando que todos parâmetros com dimensão de massa gerados pela teoria devem ser da forma:

$$a = \mu f(\lambda) \quad \text{sendo } f(\lambda) \text{ adimensional, tem-se}$$

$$f(\lambda) - \frac{\lambda^3}{2\pi} \frac{df}{d\lambda} = 0 \quad f(\lambda) = \exp\left(-\frac{\pi}{\lambda^2}\right)$$

$$a = \mu \exp\left(-\frac{\pi}{\lambda^2}\right) \quad (25)$$

Tensor energia-momento

Para determinar os coeficientes da gravitação induzida devemos calcular o traço do tensor energia-momento para a teoria em questão.

No cálculo de funções de Green com pernas externas de fermions temos a alternativa de trabalhar com a teoria com campo σ (15) ou sem campo σ (14). No entanto, não é claro, a priori, que no cálculo do tensor energia-momento esta alternativa seja correta. O mais seguro é trabalhar com a lagrangeana original (14) e recorrer a (15) apenas quando o objetivo for apenas calcular funções de Green.

O tensor energia-momento canônico, $T_{\mu\lambda}$, é dado por

$$T_{\mu\lambda}^c = \frac{\delta L}{\delta(\partial^\mu \phi)} \frac{\partial \phi}{\partial x^\lambda} - \delta_{\mu\lambda} L(\phi) \quad (26)$$

Para a lagrangeana (14), $L = -\bar{\psi}\gamma \cdot \partial\psi + \frac{1}{2} g_0^2 (\bar{\psi}\psi)^2$ temos

$$T_{\mu\lambda}^c = \frac{\delta L}{\delta(\partial^\mu \bar{\psi})} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^\lambda} + \frac{\delta L}{\delta(\partial^\mu \psi)} \frac{\partial \psi}{\partial x^\lambda} - \delta_{\mu\lambda} L(\psi, \bar{\psi})$$

$$T_{\mu\lambda}^c = -\bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\lambda \psi - \delta_{\mu\lambda} \left(-\bar{\psi} \gamma \cdot \partial \psi + \frac{1}{2} g_0^2 (\bar{\psi} \psi)^2 \right) \quad (27)$$

Para obter o tensor energia-momento simétrico em μ e λ , podemos usar o método de Belinfante - Rosenfeld: sendo $\psi^{ik\ell} = -\psi^{i\ell k}$ tensor antissimétrico em $\underline{k}$ e $\underline{\ell}$ e que portanto satisfaz a equação:

$$\frac{\partial^2 \psi^{ik\ell}}{\partial x^k \partial x^\ell} = 0,$$

os tensores $(T^c)^{ik}$ e $T^{ik} = (T^c)^{ik} + \partial_\ell \psi^{ik\ell}$ são equivalentes já que ambos tem divergências iguais,

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^\ell} = \frac{\partial (T^c)^{ik}}{\partial x^\ell} + \frac{\partial^2 (\psi^{ik\ell})}{\partial x^k \partial x^\ell} = \frac{\partial (T^c)^{ik}}{\partial x^\ell},$$

e levam a correntes idênticas

$$\int dx^3 T^{i0} = \int dx^3 \left[(T^c)^{i0} + \partial_\ell \psi^{i0\ell} \right] = \int dx^3 (T^c)^{i0}$$

Valendo-se disto podemos escrever o tensor energia-momento simétrico na forma

$$T_{\mu\lambda} = -\frac{1}{4} \left[\bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\lambda \psi - (\partial_\lambda \bar{\psi}) \gamma_\mu \psi + \bar{\psi} \gamma_\lambda \partial_\mu \psi - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma_\lambda \psi \right] - \delta_{\mu\lambda} \left(-\bar{\psi} \gamma \cdot \partial \psi + \frac{1}{2} g_0^2 (\bar{\psi} \psi)^2 \right)$$

já que os termos acrescentados em relação a $T_{\mu\lambda}^c$ podem ser reu

nidos na forma $\partial_\ell \psi^{ik\ell}$.

Para o traço de $T_{\mu\lambda}$ temos:

$$T = -\frac{1}{2} \left[\bar{\psi} \gamma_\mu \partial^\mu \psi - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi \right] - n \left[-\bar{\psi} \gamma \cdot \partial \psi + \frac{1}{2} g_0^2 (\bar{\psi} \psi)^2 \right] \quad (28)$$

sendo n a dimensão do espaço.

Este traço pode ser escrito de forma mais simples usando as equações de movimento dos campos ψ e $\bar{\psi}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \bar{\psi}_\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi}_\alpha)} &= 0 \quad \rightarrow \quad -\gamma_{\alpha\beta}^\mu \partial_\mu \psi_\beta + g_0^2 (\bar{\psi} \psi) \psi_\alpha = 0 \\ -\bar{\psi} \gamma \cdot \partial \psi + g_0^2 (\bar{\psi} \psi)^2 &= 0 \quad (a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \psi_\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \psi_\alpha)} &= 0 \quad \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu_{\omega\alpha}) + g_0^2 \bar{\psi}_\alpha (\bar{\psi} \psi) = 0 \\ \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma)_\alpha &= -g_0^2 \bar{\psi}_\alpha (\bar{\psi} \psi) \quad (b) \end{aligned}$$

Substituindo as equações de movimento (a) e (b) em (28) recai-se em

$$T = \left(\frac{n}{2} - 1 \right) g_0^2 (\bar{\psi} \psi)^2 \quad (29)$$

O limite $n \rightarrow 2$ pode ser tomado em (29) apenas quando toda dependência da expressão em $\left(\frac{n}{2} - 1 \right)$ for explicitada. Para isto deve-se levar em conta a renormalização de g_0^2 já que $\psi, \bar{\psi}$ não são renormalizados em ordem mais baixa ($z=0$). Usando (18) temos

$$g_0^2 = \frac{\lambda^2}{N} \mu^{2-n} Z^{-2} Z_\sigma^{-1}$$

$$Z = 1, \quad Z_{\sigma}^{-1} \sim 1 - z_{\sigma}$$

$$g_0^2 = \frac{\lambda^2}{N} \mu^{2-n}(1-z_{\sigma})$$

ou substituindo (17):

$$g_0^2 = \frac{\lambda^2}{N} \mu^{2-n} \left[1 + \frac{\lambda^2}{2\pi} (1-n) \frac{1}{1 - \frac{n}{2}} - \text{termos finitos} \right] \text{ para } n \rightarrow 2$$

Portanto $\lim_{n \rightarrow 2} g_0^2 \left(\frac{n}{2} - 1 \right) = \frac{\lambda^4}{2\pi N}$ e, finalmente,

$$T = \frac{\lambda^4}{2\pi N} (\bar{\psi}\psi)^2 \quad (30)$$

Vale lembrar que as diferentes renormalizações dão origem a diferentes "termos finitos" em z_{σ} , o que não é relevante para o resultado final (30).

B.III - A GRAVITAÇÃO INDUZIDA NO MODELO DE GROSS-NEVEU

O primeiro termo relevante para a gravitação induzida em duas dimensões é o termo proporcional a R^2 e o seu coeficiente é dado por (13):

$$A_2 = - \frac{3}{256} \int dx^2 x^4 \langle 0 | \tau T(x) T(0) | 0 \rangle_{\text{plano conexo}}$$

Desejamos determinar este coeficiente A_2 no caso particular do modelo de Gross-Neveu, e para tanto devemos tomar $T(x)$ dado por (30). Como o interesse está em tomar $N \rightarrow \infty$ (onde N , número de fermions) porque neste limite o modelo de Gross-Neveu apresenta solução exata, devemos separar a contribuição dominante (neste limite) para A_2 . Usando (30) em (13) temos, para o modelo de Gross-Neveu

$$A_2 = - \frac{3}{256} \cdot \frac{\lambda^8}{4\pi^2 N^2} \int dx^2 x^4 \langle 0 | \tau (\bar{\Psi}(x)\Psi(x))^2 (\bar{\Psi}(0)\Psi(0))^2 | 0 \rangle_{\text{conexo}} \quad (31)$$

Devido a presença de produtos de operadores aplicados num mesmo ponto no valor esperado $\langle 0 | \tau T(x) T(0) | 0 \rangle$ devemos trabalhar num esquema capaz de levar em conta propagadores entre pontos muito próximos. Isto pode ser feito de forma sistemática introduzindo produtos normais (apêndice B3)²⁹ que em última análise constituem-se numa prescrição para obter contribuições finitas de valores esperados que não sejam funções de Green. Trata-se portanto de um processo de renormalização que se estende a valores esperados de produtos de operadores em um mesmo ponto (por exemplo, valores esperados de correntes).

A definição destes produtos normais, como a renormalização, não é única porém, no contexto da gravitação induzida

zida, onde a simetria de escala e sua violação são fundamentais, deve-se optar pelo procedimento que se baseia na regularização dimensional^{29a}. A dimensão do espaço n é tomada como variável contínua utilizando-se de prolongamento analítico. As divergências dos diagramas aparecem como polos em $n=2$ (ou $n=4$, dependendo da dimensão do espaço ser 2 ou 4) que devem ser subtraídos e finalmente o limite $n \rightarrow 2$ deve ser tomado na parte restante. Os valores esperados $\langle 0 | \tau N \sigma^1(x_1) N \sigma^2(x_2) \dots N \sigma^n(x_n) | 0 \rangle$ (onde N indica ordem normal e $\sigma^i(x_i)$ são monômios dos campos e suas derivadas) devem ser calculados segundo esta prescrição e usando, para as diferentes ordens perturbativas, contribuições derivadas da expressão^{29c}:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \tau N \sigma^1(x_1) \dots N \sigma^n(x_n) | 0 \rangle = \\ = \text{parte finita de } \langle 0 | T : \sigma^{10}(x_1) : \dots : \sigma^{n0}(x_n) : e^{i \int dx^4 : L_I :} | 0 \rangle^0 \end{aligned} \quad (32)$$

onde $: :$ representa ordem normal de Wick³⁰

L_I é a lagrangeana de interação e,

σ^0 é construído a partir de σ substituindo cada campo ϕ pelo campo livre correspondente ϕ^0 .

No cálculo de A_2 , recaímos no valor esperado de produtos de operadores $\bar{\psi}$ e ψ . Neste ponto podemos recorrer ao que foi discutido em B.II, usando, para o cálculo das diferentes contribuições para A_2 , a teoria descrita pela lagrangeana (15) (com o campo σ) e as suas regras de Feynman. Na verdade, devido a presença de quebra espontânea de simetria o correto é trabalhar com a lagrangeana (16) e suas regras de Feynman relacionadas em B.II.

A contribuição da ordem perturbativa mais baixa para o valor esperado

$$\langle 0 | \tau N (\bar{\psi}(x)\psi(x))^2 N (\bar{\psi}(0)\bar{\psi}(0))^2 | 0 \rangle \quad \text{vem de:}$$

$$\langle 0 | \tau : \bar{\psi}_\alpha^i(x) \psi_\alpha^i(x) \bar{\psi}_\beta^j(x) \psi_\beta^j(x) : : \bar{\psi}_\gamma^k(0) \psi_\gamma^k(0) \bar{\psi}_\delta^\ell(0) \psi_\delta^\ell(0) : | 0 \rangle_c .$$

Esta contribuição dá origem a dois termos distintos dependendo da forma como as contrações são efetuadas:

$$\text{a) } \langle 0 | \tau : \bar{\psi}_\alpha^i(x) \psi_\alpha^i(x) \bar{\psi}_\beta^j(x) \psi_\beta^j(x) : : \bar{\psi}_\gamma^k(0) \psi_\gamma^k(0) \bar{\psi}_\delta^\ell(0) \psi_\delta^\ell(0) : | 0 \rangle_c$$

$$\text{b) } \langle 0 | \tau : \bar{\psi}_\alpha^i(x) \psi_\alpha^i(x) \bar{\psi}_\beta^j(x) \psi_\beta^j(x) : : \bar{\psi}_\gamma^k(0) \psi_\gamma^k(0) \bar{\psi}_\delta^\ell(0) \psi_\delta^\ell(0) : | 0 \rangle_c .$$

Usando a notação $\langle 0 | : \bar{\psi}_\alpha^i(x) \psi_\beta^j(y) : | 0 \rangle = \delta^{ij} S_{\alpha\beta}(x-y)$ onde

$S_{\alpha\beta}(x-y) = \int d^2k e^{-ik(x-y)} \frac{(-i\gamma_{\alpha\beta} \cdot k + a)}{k^2 + a^2}$ e os índices i e j caracterizam os diferentes fermions de modo que $\delta_{ij}\delta_{ji} = \delta_{ii} = N$ (número de fermions) temos:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \delta_{ik} S_{\alpha\gamma}(x) \delta_{li} S_{\gamma\beta}(-x) \delta_{jk} S_{\beta\delta}(x) \delta_{lj} S_{\delta\alpha}(-x) = \\ & = \delta_{ik} \delta_{li} \delta_{jk} \delta_{lj} S_{\alpha\gamma}(x) S_{\gamma\beta}(-x) S_{\beta\delta}(x) S_{\delta\alpha}(-x) = \\ & = N \text{Tr}[S(x)S(-x)S(x)S(-x)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & \delta_{il} S_{\delta\alpha}(-x) \delta_{li} S_{\alpha\delta}(x) \delta_{jk} S_{\gamma\beta}(-x) \delta_{kj} S_{\beta\gamma}(x) = \\ & = \delta_{il} \delta_{li} \text{Tr}[S(-x)S(x)] \delta_{jk} \delta_{kj} \text{Tr}[S(-x)S(x)] = \end{aligned}$$

$$= N^2 \text{Tr}[S(-x)S(x)] \text{Tr}[S(-x)S(x)] \quad .$$

Quando as contribuições a e b são introduzidas em (31) vemos que apenas b sobrevive ao limite $N \rightarrow \infty$ já que devido a presença de fator N^{-2} em A_2 , a contribuição devida a a fica

$$- \frac{3}{256} \frac{\lambda^8}{4\pi^2} \frac{1}{N} \int dx^2 x^4 \text{Tr}[S(x)S(-x)S(x)S(-x)] \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0 \quad .$$

A contribuição proveniente de b possui ainda um fator de multiplicidade 2, de modo que este termo contribui para o valor esperado com

$$2N^2 \text{Tr}(S(x)S(-x))^2 \quad . \quad (33)$$

As demais contribuições correspondem a ordens mais altas em teoria de perturbação que podem ser consideradas levando em conta a lagrangeana de interação

$$L_I = \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \bar{\psi} \psi \sigma \quad .$$

Devido a presença do fator N^{-2} na expressão (31) para A_2 , as contribuições que sobreviverão serão aquelas que mostrarem-se proporcionais a N^2 (pelo menos). Todas as outras desaparecem no limite $N \rightarrow \infty$.

Fazendo a expansão da exponencial em (32), tira-se a primeira ordem em L_I , que dá contribuição da forma

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \tau : (\bar{\psi}(x)\psi(x))^2 : : (\bar{\psi}(0)\psi(0))^2 : : i \int dy^2 \frac{\lambda}{\sqrt{N}} : \bar{\psi}(y)\psi(y)\sigma(y) : | 0 \rangle_c = \\ & = i \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \int dy^2 \langle 0 | \tau : (\bar{\psi}(x)\psi(x))^2 : : (\bar{\psi}(0)\psi(0))^2 : : \bar{\psi}(y)\psi(y)\sigma(y) : | 0 \rangle_c = 0 \end{aligned}$$

jã que o campo σ comparece uma única vez, e $\langle 0|\sigma|0\rangle = 0$.

A segunda ordem em L_I fornece contribuição não nula

$$\frac{i^2}{2!N} \lambda^2 \int d^2 y_1 d^2 y_2 \langle 0 | \tau : (\bar{\psi}(x) \psi(x))^2 : : (\bar{\psi}(y) \psi(y))^2 : : \bar{\psi}(y_1) \psi(y_1) \sigma(y_1) : : \bar{\psi}(y_2) \psi(y_2) .$$

$$. \sigma(y_2) : |0\rangle_c =$$

$$= \frac{i^2 \lambda^2}{2!N} \int dy_1^2 dy_2^2 \langle 0 | \tau : \bar{\psi}_\alpha^i(x) \psi_\alpha^i(x) \bar{\psi}_\beta^j(x) \psi_\beta^j(x) : : \bar{\psi}_\gamma^k(0) \psi_\gamma^k(0) \bar{\psi}_\delta^\ell(0) \psi_\delta^\ell(0) : : \bar{\psi}_\tau^m(y_1) \psi_\tau^m(y_1) .$$

$$. \sigma(y_1) : : \bar{\psi}_\nu^n(y_2) \psi_\nu^n(y_2) \sigma(y_2) : |0\rangle \quad . \quad (34)$$

Contraindo-se os campos de diferentes formas obtemos contribuições com as seguintes formas:

$$a) \frac{i^2 \lambda^2}{2!N} \int dy_1^2 dy_2^2 \langle 0 | \tau : \bar{\psi}_\alpha^i(x) \psi_\alpha^i(x) \bar{\psi}_\beta^j(x) \psi_\beta^j(x) : : \bar{\psi}_\gamma^k(0) \psi_\gamma^k(0) \bar{\psi}_\delta^\ell(0) \psi_\delta^\ell(0) : : \bar{\psi}_\tau^m(y_1) \psi_\tau^m(y_1) \sigma(y_1) : : x$$

$$: \bar{\psi}_\nu^n(y_2) \psi_\nu^n(y_2) \sigma(y_2) : |0\rangle =$$

$$= \frac{i^2 \lambda^2}{2!N} \int dy_1^2 dy_2^2 \delta_{im} S_{\alpha\tau}(x-y_1) \delta_{in} S_{\nu\alpha}(y_2-x) \delta_{jk} S_{\beta\gamma}(x) \delta_{jk} S_{\gamma\beta}(-x) \delta_{\ell m} S_{\tau\delta}(+y_1) .$$

$$. \delta_{\ell n} S_{\delta\nu}(-y_2) \Delta_\sigma(y_1-y_2) =$$

$$= \frac{i^2 \lambda^2 N}{2!} \int dy_1^2 dy_2^2 \text{Tr}[S(x-y_1) S(y_1) S(-y_2) S(y_2-x)] \text{Tr}[S(x) S(-x)] \Delta_\sigma(y_1-y_2) .$$

Esta contribuição pode ser graficamente representada por:

fig. 1

A ordem desta contribuição em N mostra que no limite $N \rightarrow \infty$, este termo não contribue para A_2 .

- b) As contribuições de segunda ordem em teoria de perturbação devem apresentar potência 2 (ou maior) em N , o que significa que os diagramas correspondentes devem apresentar maior número de loops fermiônicos do que o diagrama da fig. 1. Embora existam muitas possibilidades de contração entre os campos em (34) correspondendo a diagramas tais como

a única contribuição de ordem N^2 vem do diagrama

fig. 2

que corresponde as contrações

dando contribuição da forma

$$\begin{aligned}
 & \frac{i^2 \lambda^2}{2!N} \int dy_1^2 dy_2^2 \delta_{i\ell} S_{\alpha\delta}(x) \delta_{\ell i} S_{\delta\alpha}(-x) \delta_{jm} S_{\beta\tau}(x-y_1) \delta_{mj} S_{\tau\beta}(y_1-x) \delta_{kn} S_{\gamma\nu}(-y_2) \times \\
 & \times \delta_{nk} S_{\nu\gamma}(+y_2) \Delta_\sigma^0(y_1-y_2) = \\
 & = \frac{i^2 \lambda^2}{2!N} N^3 \int dy_1^2 dy_2^2 \text{Tr}[S(x)S(-x)] \text{Tr}[S(x-y_1)S(y_1-x)] \text{Tr}[S(y_2)S(-y_2)] \Delta_\sigma^0(y_1-y_2) = \\
 & = -\frac{\lambda^2}{2!} N^2 \int dy_1^2 dy_2^2 \text{Tr}[S(x)S(-x)] \text{Tr}[S(x-y_1)S(y_1-x)] \text{Tr}[S(y_2)S(-y_2)] \Delta_\sigma^0(y_1-y_2).
 \end{aligned}$$

Devido as possibilidades de permutação de algumas contrações, de vemos acrescentar um fator de multiplicidade que neste caso é 8, o que pode ser facilmente verificado. Portanto, temos:

$$-4\lambda^2 N^2 \int dy_1^2 dy_2^2 \text{Tr}[S(x)S(-x)] \text{Tr}[S(x-y_1)S(y_1-x)] \text{Tr}[S(y_2)S(-y_2)] \Delta_\sigma^0(y_1-y_2) \quad (35)$$

A terceira ordem de perturbação em λ anula-se pe la mesma razão que a primeira ordem: presença de número ímpar de campos σ .

Em quarta ordem temos contribuição não nula. De vido a presença de um fator N adicional no denominador proveniente de $(L_I)^2$ os diagramas relevantes serão aqueles que puderem apresentar 1-loop de fermions a mais (pelo menos) que o

diagrama da fig. 2. Não é difícil verificar que o único termo que satisfaz a esta condição em ordem quatro é:

$$\begin{aligned}
 & \frac{i^4 \lambda^4}{4! N^2} \int d^2 y_1 d^2 y_2 d^2 y_1' d^2 y_2' \langle 0 | \tau : \bar{\psi}_\alpha^i(x) \psi_\alpha^i(x) \bar{\psi}_\beta^j(x) \psi_\beta^j(x) : : \bar{\psi}_\gamma^k(0) \psi_\gamma^k(0) \bar{\psi}_\delta^\ell(0) \psi_\delta^\ell(0) : \times \\
 & \times : \bar{\psi}_\tau^m(y_1) \psi_\tau^m(y_1) \sigma(y_1) : : \bar{\psi}_\nu^n(y_2) \psi_\nu^n(y_2) \sigma(y_2) : : \bar{\psi}_\tau^{m'}(y_1') \psi_\tau^{m'}(y_1') \sigma(y_1') : : \bar{\psi}_\nu^{n'}(y_2') \psi_\nu^{n'}(y_2') \sigma(y_2') : : | 0 \rangle = \\
 & = \frac{\lambda^4}{4! N^2} \int dy_1^2 dy_2^2 dy_1'^2 dy_2'^2 \delta_{i\tau} S_{\alpha\tau}(x-y_1) \delta_{\tau i} S_{\tau\alpha}(y_1-x) \delta_{m'j} S_{\beta\tau'}(x-y_1') \delta_{m'j} S_{\beta\tau'}(y_1'-x) \times \\
 & \times \Delta_\sigma(y_1-y_2) \delta_{kn} S_{\gamma\nu}(-y_2) \delta_{nk} S_{\nu\gamma}(y_2) \delta_{\ell n'} S_{\delta\nu'}(-y_2') \delta_{n'\ell} S_{\nu'\delta}(y_2') \Delta_\sigma(y_1'-y_2') = \\
 & = \frac{\lambda^4}{4! N^2} N^4 \int dy_1^2 dy_2^2 dy_1'^2 dy_2'^2 \text{Tr}[S(x-y_1)S(y_1-x)] \text{Tr}[S(x-y_1')S(y_1'-x)] \text{Tr}[S(y_2)S(-y_2)] \times \\
 & \times \text{Tr}[S(y_2')S(-y_2')] \Delta_\sigma^0(y_1-y_2) \Delta_\sigma^0(y_1'-y_2')
 \end{aligned}$$

O fator de multiplicidade neste caso é $2 \cdot 4!$ e a contribuição completa fica

$$\begin{aligned}
 & 2\lambda^4 N^2 \int dy_1^2 dy_2^2 dy_1'^2 dy_2'^2 \text{Tr}[S(x-y_1)S(y_1-x)] \text{Tr}[S(x-y_1')S(y_1'-x)] \text{Tr}[S(y_2)S(-y_2)] \times \\
 & \times \text{Tr}[S(y_2')S(-y_2')] \Delta_\sigma^0(y_1-y_2) \Delta_\sigma^0(y_1'-y_2') .
 \end{aligned} \tag{36}$$

Quanto as ordens superiores a quatro em λ pode-

mos dizer que as ordens ímpares, devido a presença de número ímpar de campos $\sigma(x)$ darão sempre contribuição nula. As ordens pares terão a possibilidade de contribuir através de diagramas com número cada vez maior de loops fermiônicos capazes de compensar o aumento de potências de N no denominador provenientes de $\left(\frac{\lambda}{\sqrt{N}}\right)^{2n}$. É fácil ver que a única forma de introduzir novos vértices nos diagramas das fig. 3 e 2, sem diminuir a ordem em N é através da introdução destes vértices no propagador de σ , onde com a introdução de dois novos vértices aparece simultaneamente um loop de fermions, mantendo inalterada a ordem em N .

Deste modo conclui-se que as correções de ordem arbitrária em λ podem ser levadas em conta apenas substituindo o propagador, de σ pelo seu propagador completo ( ) (apêndice B4) nos diagramas das figuras 3 e 2. Desta forma temos no limite

$N \rightarrow \infty$ o resultado exato proveniente da adição dos resultados (33), (35) e (36) com a substituição $\Delta^0(\sigma) \rightarrow \Delta(\sigma)$:

$$\langle 0 | \tau N(\bar{\psi}(x)\psi(x))^2 N(\bar{\psi}(0)\psi(0))^2 | 0 \rangle =$$

$$= 2N^2 \text{Tr}[S(x)S(-x)]^2 +$$

$$- 4\lambda^2 N^2 \int d^2 y_1 d^2 y_2 \text{Tr}[S(x)S(-x)] \text{Tr}[S(x-y_1)S(y_1-x)] \text{Tr}[S(y_2)S(-y_2)] \Delta_\sigma(y_1-y_2) +$$

$$+ 2\lambda^4 N^2 \int d^2 y_1 d^2 y_2 d^2 y_1' d^2 y_2' \text{Tr}[S(x-y_1)S(y_1-x)] \text{Tr}[S(x-y_1')S(y_1'-x)] \times$$

$$\times \text{Tr}[S(y_2)S(-y_2)] \text{Tr}[S(y_2')S(-y_2')] \Delta_\sigma(y_1-y_2) \Delta_\sigma(y_1'-y_2') \quad (37)$$

e finalmente substituindo-se este resultado em (31) obtemos para A_2 o resultado exato e finito no limite $N \rightarrow \infty$:

$$A_2 = - \frac{3}{256} \frac{\lambda^8}{4\pi^2} \int dx^2 x^4 \left\{ 2\text{Tr}[S(x)S(-x)]^2 - 4\lambda^2 \int d^2 y_1 d^2 y_2 \text{Tr}[S(x)S(-x)] \times \right.$$

$$\times \text{Tr}[S(x-y_1)S(y_1-x)] \text{Tr}[S(y_2)S(-y_2)] \Delta_\sigma(y_1-y_2) + 2\lambda^4 \int d^2 y_1 d^2 y_2 d^2 y_1' d^2 y_2' \times$$

$$\times \text{Tr}[S(x-y_1)S(y_1-x)] \text{Tr}[S(x-y_1')S(y_1'-x)] \text{Tr}[S(y_2)S(-y_2)] \text{Tr}[S(y_2')S(-y_2')] \times$$

$$\times \Delta_\sigma(y_1-y_2) \Delta_\sigma(y_1'-y_2') \left. \right\} . \quad (38)$$

Quanto ao comportamento deste integrando no limite ultravioleta, podemos verificar que o resultado será finito

usando a expansão de Wilson para produtos de operadores (apêndice B3). No limite $x \rightarrow 0$ temos:

$$A(x)B(0) = \sum C_n(x) o_n \left(\frac{x}{2} \right)$$

onde o_n são operadores regulares com dimensão compatível e a singularidade está nos coeficientes numéricos $C_n(x)$. Como $T(x)$ tem dimensão L^{-2} , temos, a menos de logaritmos:

$$T(x)T(0) = \frac{o_0}{(x^2)^4} + \frac{o_2}{x^2} + o_4 + o_6 x^2 + \dots$$

onde $[o_0] = L^0$, $[o_2] = L^{-2}$, ...

Portanto, próximo da origem temos:

$$\int dx^2 x^4 \langle 0 | T(x)T(0) | 0 \rangle \sim \int dx^2 x^4 \left[\frac{\langle 0 | o_0 | 0 \rangle}{x^4} + \frac{\langle 0 | o_2 | 0 \rangle}{x^2} + \text{termos finitos} \right]$$

e o limite para $x \rightarrow 0$ mostra-se finito.

Quanto a região infravermelha não é claro o que ocorre sendo necessária uma análise mais detalhada. A geração de massa que ocorre no modelo sugere, porém, que não haja problemas também aí.

CONCLUSÃO

Estudamos uma teoria de gravitação com campo escalar que se mostrou aceitável do ponto de vista fenomenológico, não entrando em desacordo com dados conhecidos astronômicos ou cosmológicos. Para efeitos práticos, a nível clássico, este modelo não difere de Brans-Dicke, a menos da presença de auto-interação para o campo escalar ϕ (que de qualquer forma, devido às restrições que a constante de acoplamento λ deve satisfazer, deve ser pequena).

Para a teoria de gravitação induzida obtivemos pela primeira vez um coeficiente induzido exato e o resultado mostrou-se diferente de zero. A obtenção de um coeficiente exato só foi possível graças ao fato de estarmos trabalhando num modelo bidimensional solúvel no limite tomado. O maior interesse deste resultado é metodológico pelo próprio fato de tratar-se de um resultado num espaço-tempo bidimensional.

Na sequência de trabalho, o que se impõe de forma natural é o estudo do mecanismo de indução em si ou seja, do mecanismo pelo qual é gerada a lagrangeana efetiva com seus termos induzidos. A proposta é que isto seja feito inicialmente para o próprio modelo de Gross-Neveu que já se mostrou útil no cálculo do coeficiente induzido. Para que este programa seja levado adiante será preciso maior conhecimento sobre teorias de campo em espaço-tempo curvo, conhecimento este que pode vir a mostrar-se mais simples em duas dimensões, onde, como se sabe, toda métrica é conformemente plana.

APÊNDICE A1 - MOVIMENTO DE PARTÍCULAS NA TEORIA COM CAMPO ESCALAR

Vamos mostrar que se $T_{m;\nu}^{\mu\nu} = 0$ então em presença de pressão isotrópica e constante, as partículas movem-se em geodésicas. (Assim, para garantir o movimento em geodésicas no caso da teoria com campo escalar será suficiente impedir que o campo ϕ esteja presente em L_m , lagrangeana da matéria ordinária).

Considerando $T_m^{\mu\nu}$ como tensor energia-momento de um fluído em movimento, escrevemos $T_m^{\mu\nu}$ como

$$T_m^{\mu\nu} = (p + \varepsilon)v^\mu v^\nu - p g^{\mu\nu} \quad (A1.1)$$

onde p - pressão do fluído em cada ponto

ε - densidade de energia

$v^\mu = dx^\mu/ds$ - o quadrivetor velocidade em cada ponto do fluído.

Aplicando-se a (A1-1) a condição $T_{\mu\nu}^{m;\nu} = 0$ obtem-se

$$[(p+\varepsilon)v^\mu v^\nu]_{;\nu} - [p g^{\mu\nu}]_{;\nu} = 0$$

como $g^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$,

$$v^\mu [(p+\varepsilon)v^\nu]_{;\nu} + (p+\varepsilon)v^\nu (v^\mu)_{;\nu} - p_{;\nu} g^{\mu\nu} = 0 \quad (A1.2)$$

Multiplicando-se por v_μ e lembrando que

$$v_\mu = \frac{dx_\mu}{ds}, \quad v_\mu v^\mu = \frac{dx_\mu}{ds} \cdot \frac{dx^\mu}{ds} = 1 \quad \text{vem}$$

$$[(p+\varepsilon)v^\nu]_{;\nu} + (p+\varepsilon)v_\mu v^\nu (v^\mu)_{;\nu} - p_{;\nu} v^\nu = 0$$

De $v^\mu v_\mu = 1$, tira-se $(v^\mu v_\mu)_{;\nu} = 0$

$$v_\mu (v^\mu)_{;\nu} = 0$$

$$(\omega v^\nu)_{;\nu} = p_{;\nu} v^\nu \quad \omega = p + \epsilon \quad (A1.3)$$

No caso de $p = \text{constante}$, $(\omega v^\nu)_{;\nu} = 0$ que corresponde a equação de conservação da matéria. Substituindo-se (A1.3) em (A1.2) vem

$$(p + \epsilon) v^\nu (v^\mu)_{;\nu} = p_{;\nu} [g^{\mu\nu} - v^\mu v^\nu]$$

e sendo p um escalar,

$$(p + \epsilon) v^\nu (v^\mu)_{;\nu} = \frac{\partial p}{\partial x^\mu} - \frac{\partial p}{\partial x^\nu} v^\mu v^\nu$$

No caso de $p = \text{constante}$, esta equação fica reduzida a:

$$(p + \epsilon) v^\nu (v^\mu)_{;\nu} = 0$$

que é a equação da geodésica e pode ser reescrita na sua forma mais usual lembrando que

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$$

$$\frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{dx^\mu}{ds} \right) \frac{dx^\nu}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{dx^\mu}{ds} \right) = \frac{d^2 x^\mu}{ds^2}$$

Assim,

$$(p + \epsilon) \frac{dx^\nu}{ds} \left[\frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{dx^\mu}{ds} \right) + \Gamma_{\kappa\nu}^\mu \frac{dx^\kappa}{ds} \right] = 0$$

$$(p + \epsilon) \left[\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\kappa\nu}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\kappa}{ds} \right] = 0$$

e, na presença de matéria $p + \varepsilon \neq 0$,

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\kappa\nu}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\kappa}{ds} = 0$$

APÊNDICE A2 - EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Partindo-se da lagrangeana (1) (da parte A) pode-se determinar as equações de movimento da teoria para o campo ϕ e para o campo $g_{\mu\nu}$

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} \left[g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \epsilon R \phi^2 - \frac{\lambda}{6} \phi^4 + L_m \right]$$

Admite-se que L_m não contenha o campo ϕ .

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} \Lambda \quad \text{onde} \quad \Lambda = g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \epsilon R \phi^2 - V(\phi) + L_m$$

A equação de movimento para o campo ϕ provem de

$$\partial_\mu \left(\frac{\delta L}{\delta (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\delta L}{\delta \phi} = 0 \quad \text{com} \quad L = \Lambda \sqrt{-g}$$

$$\frac{\delta L}{\delta \phi} = \sqrt{-g} \left[2\epsilon R \phi - \frac{2}{3} \lambda \phi^3 \right]$$

$$\frac{\delta L}{\delta (\partial_\mu \phi)} = \sqrt{-g} 2 g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi$$

$$\partial_\mu \left[\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \right] - \sqrt{-g} \epsilon R \phi + \frac{1}{3} \lambda \phi^3 \sqrt{-g} = 0$$

$$\square \phi - \epsilon R \phi + \frac{1}{3} \lambda \phi^3 = 0 \quad (A2.1)$$

A equação de movimento para o campo $g_{\mu\nu}$ pode ser obtida diretamente do princípio de mínima ação:

$\delta S = 0$ para variação arbitrária em $g^{\mu\nu}$ ($\delta g^{\mu\nu}$):

$$\delta(\sqrt{-g} \Lambda) = 0$$

$$(\sqrt{-g} \Lambda) = \delta \left[\sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \epsilon R \phi^2 - \frac{\lambda}{6} \phi^4) \right] + \delta(\sqrt{-g} L_m)$$

$$\text{e com } T_m^{\mu\nu} = - \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} (\sqrt{-g} L_m)$$

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g} \Lambda) &= \delta \left[\sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \epsilon R \phi^2 - \frac{\lambda}{6} \phi^4) \right] - \frac{\sqrt{-g}}{2} T_m^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = \\ &= \underbrace{\delta(\sqrt{-g} [g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{\lambda}{6} \phi^4])}_I + \underbrace{\delta(\sqrt{-g} \epsilon R \phi^2)}_{II} - \frac{\sqrt{-g}}{2} T_m^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = 0 \end{aligned}$$

$$I = \delta(\sqrt{-g} [g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{\lambda}{6} \phi^4]) =$$

$$= \delta(\sqrt{-g}) [g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{\lambda}{6} \phi^4] + \sqrt{-g} \delta [g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{\lambda}{6} \phi^4]$$

$$\delta(\sqrt{-g}) = - \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$$

$$I = - \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} [g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{\lambda}{6} \phi^4] + \sqrt{-g} (\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi) \delta g^{\mu\nu}$$

$$II = (\sqrt{-g} \epsilon R \phi^2) = \delta(\sqrt{-g}) \epsilon R \phi^2 + \epsilon \sqrt{-g} \phi^2 \delta R$$

$$II = - \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} (\epsilon R \phi^2) +$$

$$+ \epsilon \sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \square + \frac{\nabla_\mu \nabla_\nu + \nabla_\nu \nabla_\mu}{2} \right] \phi^2 \delta g^{\mu\nu}$$

Finalmente substituindo em

$$I + II - \frac{\sqrt{-g}}{2} T_m^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = 0 \text{ e usando } T_m^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -T_m^{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$$

$$\begin{aligned} &- \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \left[g^{\rho\lambda} \partial_\rho \phi \partial_\lambda \phi - \frac{\lambda}{6} \phi^4 \right] + \sqrt{-g} (\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi) \delta g^{\mu\nu} + \\ &- \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} (\epsilon R \phi^2) + \epsilon \sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \square + \frac{\nabla_\mu \nabla_\nu + \nabla_\nu \nabla_\mu}{2} \right] \phi^2 \delta g^{\mu\nu} + \\ &+ \frac{\sqrt{-g}}{2} T_m^{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\varepsilon\phi^2 [R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R] &= - 2\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + g_{\mu\nu} [g^{\lambda\rho} \partial_\lambda \phi \partial_\rho \phi - \frac{\lambda}{6} \phi^4] \\
&+ 2\varepsilon \left[g_{\mu\nu} \square - \frac{\nabla_\mu \nabla_\nu + \nabla_\nu \nabla_\mu}{2} \right] \phi^2 - T_{\mu\nu}^m
\end{aligned}
\tag{A2.2}$$

$$2\varepsilon\phi^2 [R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R] = - T_{\mu\nu}^\phi - T_{\mu\nu}^m + 2\varepsilon g_{\mu\nu} \square \phi^2 - 2\varepsilon \frac{\nabla_\mu \nabla_\nu + \nabla_\nu \nabla_\mu}{2} \phi^2$$

com

$$T_{\mu\nu}^\phi = 2\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left[g^{\lambda\rho} \partial_\lambda \phi \partial_\rho \phi - \frac{\lambda}{6} \phi^4 \right]$$

De modo exatamente análogo obtem-se as equações de movimento no caso da lagrangeana (3). Porém a simples observação da lagrangeana (3) permite observar que multiplicada por -1 ela recai em (1) com as alterações $\varepsilon \rightarrow -\varepsilon$ e $L_m \rightarrow -L_m$. As equações de movimento relativas a lagrangeana (3) devem resultar das equações A2-1 e A2-2 com estas mesmas substituições. Portanto

$$\left\{ \begin{aligned}
&\square \phi + \varepsilon R \phi + \frac{\lambda}{3} \phi^3 = 0 \\
&2\varepsilon\phi^2 [R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R] = T_{\mu\nu}^\phi - T_{\mu\nu}^m + 2\varepsilon g_{\mu\nu} \square \phi^2 - \\
&\quad - 2\varepsilon \frac{(\nabla_\mu \nabla_\nu + \nabla_\nu \nabla_\mu)}{2} \phi^2
\end{aligned} \right.
\tag{A2-3}$$

$$\text{APÊNDICE A3} - T_{m;\nu}^{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \left[\partial_\lambda \frac{\delta L_m}{\delta(\partial_\lambda \phi)} - \frac{\delta L_m}{\delta \phi} \right]$$

Vamos considerar em princípio que ϕ pode estar contido em L_m . Partindo-se da lagrangeana (1) podemos encontrar as equações de movimento semelhantes as do apêndice A2. A única correção a ser feita é na equação A2-1 onde a possibilidade $L_m = L_m(\phi)$ leva a novas contribuições.

$$\left\{ \begin{array}{l} \square \phi - \epsilon R \phi + \frac{1}{3} \lambda \phi^3 = \frac{\delta L_m}{\delta \phi} - \partial_\lambda \left(\frac{\delta L_m}{\delta(\partial_\lambda \phi)} \right) \end{array} \right. \quad (\text{A3.1})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\epsilon \phi^2 (R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R) = -T_\phi^{\mu\nu} - T_m^{\mu\nu} + 2\epsilon g^{\mu\nu} \square \phi^2 - \\ - 2\epsilon \frac{\nabla^\mu \nabla^\nu + \nabla^\nu \nabla^\mu}{2} \phi^2 \end{array} \right. \quad (\text{A3.2})$$

Da segunda equação segue

$$T_m^{\mu\nu} = -T_\phi^{\mu\nu} + 2\epsilon g^{\mu\nu} \square \phi^2 - 2\epsilon \frac{\nabla^\mu \nabla^\nu + \nabla^\nu \nabla^\mu}{2} \phi^2 - 2\epsilon \phi^2 (R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R)$$

e tomando-se a derivada covariante,

$$\begin{aligned} \nabla_\nu (T_m^{\mu\nu}) &= -\nabla_\nu T_\phi^{\mu\nu} + 2\epsilon \nabla_\nu (g^{\mu\nu} \square \phi^2) - 2\epsilon \frac{\nabla_\nu (\nabla^\mu \nabla^\nu + \nabla^\nu \nabla^\mu)}{2} \phi^2 - \\ &- 2\epsilon \nabla_\nu \left[\phi^2 (R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R) \right] \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \nabla^\mu \nabla^\nu \phi^2 &= g^{\mu\lambda} \nabla_\lambda \nabla^\nu \phi^2 = g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} \nabla_\lambda \nabla_\rho \phi^2 = \\ &= g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} (\partial_\lambda \partial_\rho \phi^2 - \Gamma_{\lambda\rho}^k \partial_k \phi^2) = g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} (\partial_\rho \partial_\lambda \phi^2 - \Gamma_{\rho\lambda}^k \partial_k \phi^2) \\ &= g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} \nabla_\rho \nabla_\lambda \phi^2 = \nabla^\nu \nabla^\mu \phi^2 \end{aligned}$$

E é possível mostrar que¹²

$$\nabla_\nu g^{\lambda\rho} = 0 \quad \text{e} \quad (R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R)_{;\nu} = 0$$

com isto, obtem-se:

$$\nabla_\nu T_m^{\mu\nu} = -\nabla_\nu T_\phi^{\mu\nu} + 2\varepsilon \nabla^\mu \nabla_\nu \nabla^\nu \phi^2 - 2\varepsilon \nabla_\nu (\nabla^\nu \nabla^\mu \phi^2) - 2\varepsilon \nabla_\nu \phi^2 (R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R)$$

Por outro lado tem-se

$$A^i_{;k;\ell} - A^i_{;\ell;k} = A^m R^i_{mk\ell}$$

o que, para $A^i = \nabla^i \phi$ e $i = k$ dá

$$\nabla^\ell (\nabla_k \nabla^k \phi) = \nabla_k (\nabla^\ell \nabla^k \phi) + A_m R^{m\ell}$$

$$\begin{aligned} \nabla_\nu T_m^{\mu\nu} = & -\nabla_\nu T_\phi^{\mu\nu} + 2\varepsilon \nabla_\nu (\nabla^\mu \nabla^\nu \phi^2) + 2\varepsilon \nabla \phi^2 R^{\mu\nu} - 2\varepsilon \nabla_\nu (\nabla^\nu \nabla^\mu \phi^2) + \\ & - 2\varepsilon \nabla_\nu \phi^2 (R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R) \end{aligned}$$

e sendo ϕ um escalar $\nabla^\mu \nabla^\nu \phi = \nabla^\nu \nabla^\mu \phi$

$$\nabla_\nu T_m^{\mu\nu} = -\nabla_\nu T_\phi^{\mu\nu} + \varepsilon R \nabla^\nu \phi^2 \quad (\text{A3.3})$$

$$\text{com } \nabla_\nu T_\phi^{\mu\nu} = \nabla_\nu (2\nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi - g^{\mu\nu} \nabla_\lambda \phi \nabla^\lambda \phi + \frac{\lambda}{6} \phi^4 g^{\mu\nu})$$

$$\text{ou } \nabla_\nu T_\phi^{\mu\nu} = 2\nabla^\mu \phi \left[\nabla_\nu \nabla^\nu \phi + \frac{1}{3} \lambda \phi^3 \right].$$

Usando a equação de movimento para o campo ϕ (A3.1)

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu}_\phi = 2\nabla^\mu \phi \left[\frac{\delta L_m}{\delta \phi} - \partial_\lambda \left(\frac{\delta L_m}{\delta (\partial_\lambda \phi)} \right) + \epsilon R \phi \right]$$

Voltando a (A3.3),

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = -2\nabla^\mu \phi \left[\frac{\delta L_m}{\delta \phi} - \partial_\lambda \left(\frac{\delta L_m}{\delta (\partial_\lambda \phi)} \right) + \epsilon R \phi \right] + \epsilon R \nabla^\mu \phi^2$$

ou

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu}_m = \partial^\mu \phi \left[\partial_\lambda \frac{\delta L_m}{\delta (\partial_\lambda \phi)} - \frac{\delta L_m}{\delta \phi} \right]$$

APÊNDICE A4 - PARA A TEORIA COM CAMPO ESCALAR E INVARIÂNCIA DE

$$\text{WEYL } T'_{\mu\nu}{}^m = e^{2\psi} T_{\mu\nu}{}^m.$$

Na teoria descrita pela lagrangeana (3) com $\epsilon = 1/6$ a transformação de Weyl caracterizada por:

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu}(x) &= e^{-2\psi(x)} g_{\mu\nu}(x) \\ \phi'_0(x) &= e^{\psi(x)} \phi_0(x) \end{aligned} \quad (\text{A4.1})$$

é uma simetria da teoria: $g'_{\mu\nu}(x)$ e $\phi'_0(x)$ são novas soluções correspondentes ao novo tensor $T'_{\mu\nu}{}^m$ relacionado com $T_{\mu\nu}{}^m$ por

$$T'_{\mu\nu}{}^m = e^{2\psi} T_{\mu\nu}{}^m$$

Inicialmente vamos mostrar que isto vale para $\phi_0 = \text{constante}$.

Das equações (A2.3) (para $\epsilon = 1/6$) vem:

$$\begin{aligned} T'_{\mu\nu}{}^m = & -\frac{1}{3} \phi_0'^2 (R'_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g'_{\mu\nu} R') + T'_{\mu\nu}{}^\phi + \frac{1}{3} g'_{\mu\nu} \square (\phi_0'^2) - \\ & - \frac{1}{3} \frac{\nabla_\mu \nabla_\nu + \nabla_\nu \nabla_\mu}{2} (\phi_0'^2) \end{aligned}$$

Usando (A4.1) temos:

$$\Gamma'_{\lambda\rho}{}^\mu = \Gamma_{\lambda\rho}{}^\mu + A_{\lambda\rho}{}^\mu \quad \text{com } A_{\lambda\rho}{}^\mu = - \left[\delta_{\lambda}^{\mu} \partial_{\rho} \psi + \delta_{\rho}^{\mu} \partial_{\lambda} \psi - g_{\lambda\rho} g^{\mu a} \partial_a \psi \right]$$

$$\begin{aligned} R'_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g'_{\mu\nu} R' = & R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - 2D_{\mu}D_{\nu}\psi - 2D_{\nu}\psi D_{\mu}\psi + \\ & - g_{\mu\nu} \left[-2\square\psi + g^{ab}\partial_a\psi\partial_b\psi \right] \end{aligned}$$

$$\text{a) } T'_{\mu\nu}{}^\phi = 2\phi_0'^2 e^{2\psi} \partial_{\mu}\psi\partial_{\nu}\psi - g_{\mu\nu}\phi_0'^2 e^{2\psi} g^{\lambda\rho} \partial_{\lambda}\psi\partial_{\rho}\psi + \frac{\lambda}{6} \phi_0'^4 e^{2\psi} g_{\mu\nu}$$

$$\text{b) } \frac{1}{3} g'_{\mu\nu} \square (\phi_0'^2) = \frac{1}{3} g_{\mu\nu} e^{-2\psi} \phi_0'^2 g'^{\lambda\rho} D_{\lambda}' D_{\rho}' (e^{2\psi})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} g_{\mu\nu} e^{-2\psi} \phi_0^2 g^{\lambda\rho} e^{2\psi} D'_\lambda D'_\rho (e^{2\psi}) = \\
&= \frac{2}{3} g_{\mu\nu} \phi_0^2 g^{\lambda\rho} \left[2e^{2\psi} \partial_\lambda \psi \partial_\rho \psi + e^{2\psi} D'_\lambda (\partial_\rho \psi) \right] = \\
&= \frac{2}{3} g_{\mu\nu} \phi_0^2 g^{\lambda\rho} e^{2\psi} \left[2\partial_\lambda \psi \partial_\rho \psi + \partial_\lambda \partial_\rho \psi - \Gamma_{\lambda\rho}^\alpha \partial_\alpha \psi - A_{\lambda\rho}^\alpha \partial_\alpha \psi \right] = \\
&= \frac{2}{3} g_{\mu\nu} \phi_0^2 g^{\lambda\rho} e^{2\psi} \left[4\partial_\lambda \psi \partial_\rho \psi + \partial_\lambda \partial_\rho \psi - \Gamma_{\lambda\rho}^\alpha \partial_\alpha \psi - g_{\lambda\rho} g^{\alpha a} \partial_a \psi \partial_\alpha \psi \right] \\
c) &= -\frac{1}{3} \phi_0^2 \frac{\nabla'_\mu \nabla'_\nu + \nabla'_\nu \nabla'_\mu}{2} e^{2\psi} = -\frac{1}{3} \phi_0^2 \frac{1}{2} \left[\nabla'_\mu (2e^{2\psi} \partial_\nu \psi) + \nabla'_\nu (2e^{2\psi} \partial_\mu \psi) \right] = \\
&= -\frac{2}{3} \phi_0^2 \left[2e^{2\psi} \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi + e^{2\psi} \partial_\mu \partial_\nu \psi - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda \psi e^{2\psi} - e^{2\psi} A_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda \psi \right] = \\
&= -\frac{2}{3} \phi_0^2 e^{2\psi} \left[4\partial_\mu \psi \partial_\nu \psi + \partial_\mu \partial_\nu \psi - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda \psi - g_{\mu\nu} g^{\lambda a} \partial_a \psi \partial_\lambda \psi \right]
\end{aligned}$$

Finalmente reunindo todos estes resultados temos

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^m &= -\frac{1}{3} \phi_0^2 e^{2\psi} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - 2D_\mu D_\nu \psi - 2D_\mu \psi D_\nu \psi - \right. \\
&\quad \left. - g_{\mu\nu} (-2\Box \psi + g^{ab} \partial_a \psi \partial_b \psi) \right] + \\
&+ 2\phi_0^2 e^{2\psi} \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi - g_{\mu\nu} \phi_0^2 e^{2\psi} g^{\lambda\rho} \partial_\lambda \psi \partial_\rho \psi + \frac{\lambda}{6} \phi_0^4 g_{\mu\nu} e^{2\psi} + \\
&+ \frac{2}{3} g_{\mu\nu} \phi_0^4 g^{\lambda\rho} e^{2\psi} \left[4\partial_\lambda \psi \partial_\rho \psi + \partial_\lambda \partial_\rho \psi - \Gamma_{\lambda\rho}^\alpha \partial_\alpha \psi - g_{\lambda\rho} g^{\alpha a} \partial_a \psi \partial_\alpha \psi \right] + \\
&- \frac{2}{3} \phi_0^2 e^{2\psi} \left[4\partial_\mu \psi \partial_\nu \psi + \partial_\mu \partial_\nu \psi - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda \psi - g_{\mu\nu} g^{\lambda a} \partial_a \psi \partial_\lambda \psi \right]
\end{aligned}$$

$$\text{Introduzindo } T_{\mu\nu}^m = -\frac{1}{3} \phi_0^2 \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right] + \frac{\lambda}{6} g_{\mu\nu} \phi_0^4$$

Obtem-se , após os devidos cancelamentos

$$T_{\mu\nu}^{'m} = e^{2\psi} T_{\mu\nu}^m \quad \text{para } \phi_0 \text{ constante}$$

Considerando duas transformações de Weyl distintas a partir de ϕ_0 e $g_{\mu\nu}$ caracterizadas por ψ e $\bar{\psi}$ temos

$$\begin{cases} g_{\mu\nu}' = e^{-2\psi} g_{\mu\nu} \\ \phi_0' = e^{\psi} \phi_0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \bar{g}_{\mu\nu}' = e^{-2\bar{\psi}} g_{\mu\nu} \\ \bar{\phi}_0' = e^{\bar{\psi}} \phi_0 \end{cases}$$

$$T_{\mu\nu}^{'m} = e^{2\psi} T_{\mu\nu}^m \quad \bar{T}_{\mu\nu}^{'m} = e^{2\bar{\psi}} T_{\mu\nu}^m$$

com $\bar{\psi}(x) - \psi(x) \equiv \delta(x) \neq 0$. A transformação de Weyl que relaciona

$\bar{\phi}_0'$ e ϕ_0' é obtida facilmente

$$\bar{g}_{\mu\nu}' = e^{-2(\bar{\psi}-\psi)} g_{\mu\nu} = e^{-2\delta(x)} g_{\mu\nu}$$

$$\bar{\phi}_0' = e^{(\bar{\psi}-\psi)} \phi_0' = e^{\delta(x)} \phi_0'$$

Quanto aos tensores energia momento é facil ver que

$$e^{-2\psi} T_{\mu\nu}^{'m} = T_{\mu\nu}^m = e^{-2\bar{\psi}} \bar{T}_{\mu\nu}^{'m}$$

e portanto $\bar{T}_{\mu\nu}^{'m} = e^{2\bar{\psi}-2\psi} T_{\mu\nu}^{'m}$

$$\bar{T}_{\mu\nu}^{'m} = e^{2\delta} T_{\mu\nu}^{'m} \quad \text{válida para } \phi_0' \text{ não constante.}$$

APÊNDICE A5 - CÁLCULO DE $T_{\mu\nu}^m$ PARA MÉTRICA ROBERTSON-WALKER

$$T_{\mu\nu}^m = -2\epsilon\phi_0^2(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) - T_{\mu\nu}^\phi + 2\epsilon g_{\mu\nu} \square \phi_0^2 - 2\epsilon \frac{\nabla_\mu \nabla_\nu + \nabla_\nu \nabla_\mu}{2} \phi_0^2$$

com

$$T_{\mu\nu}^\phi = 2 \partial_\mu \phi_0 \partial_\nu \phi_0 - g_{\mu\nu} \partial_\lambda \phi_0 \partial^\lambda \phi_0 + \frac{\lambda}{6} \phi_0^4 g_{\mu\nu}$$

Quer-se determinar a expressão de $T_{\mu\nu}^m$ para a métrica

$$g_{00} = a^2(\eta) \quad \sqrt{-g} = \frac{a^4 r^2 \sin\theta}{\sqrt{1 - kr^2}}$$

$$g_{11} = - \frac{a^2(\eta)}{1 - kr^2}$$

$$g_{22} = - a^2(\eta) r^2 \quad g_{\mu\nu} = 0 \quad \text{para } \mu \neq \nu$$

$$g_{33} = - a^2(\eta) r^2 \sin\theta$$

$$R = \frac{6}{a^3} (\ddot{a} + ka)$$

$$R_{11} = g_{11} A \quad \text{e } R_{\mu\nu} = 0 \quad \text{para } \mu \neq \nu$$

$$R_{22} = g_{22} A$$

$$R_{00} = \frac{3}{a^2} (\ddot{a}a - \dot{a}^2)$$

$$R_{33} = g_{33} A$$

$$\text{com } A = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} + 2k \right)$$

Admite-se que $\phi_0 = \phi_0(\eta)$. Escrevendo ϕ_0 na forma

$$\phi_0 = \sqrt{3/\lambda} \frac{f(\eta)}{a(\eta)} \quad \text{tem-se:}$$

a) T_{00}^m

$$T_{00}^m = -2\partial_0 \phi_0 \partial_0 \phi_0 + g_{00} \partial_\lambda \phi_0 \partial^\lambda \phi_0 - \frac{\lambda}{6} \phi_0^4 g_{00} - 2\epsilon \phi_0^2 (R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R)$$

$$+ 2\epsilon g_{00} \square \phi_0^2 - 2\epsilon \nabla_0 \nabla_0 \phi_0^2$$

$$a1) -2\partial_0\phi_0\partial_0\phi_0 = -2\dot{\phi}_0^2 = -\frac{6}{\lambda} \left(\frac{\dot{f}^2}{a^2} - \frac{2f\dot{f}\dot{a}}{a^3} + \frac{f^2\dot{a}^2}{a^4} \right)$$

$$a2) g_{00}\partial_\lambda\phi_0\partial^\lambda\phi_0 = g_{00}\partial_0\phi_0\partial^0\phi_0 = +\frac{3}{\lambda} \left(\frac{\dot{f}}{a^2} - \frac{2f\dot{f}\dot{a}}{a^3} + \frac{f^2\dot{a}^2}{a^4} \right)$$

$$a3) -\frac{\lambda}{6}\phi_0^4 g_{00} = -\frac{\lambda}{6}\frac{9}{\lambda^2}\frac{f^4}{a^4}a^2 = -\frac{3}{2\lambda}\frac{f^4}{a^2}$$

$$a4) -2\epsilon\phi_0^2 \left[R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R \right] = -2\epsilon\frac{3}{\lambda}\frac{f^2}{a^2} \left[\frac{3}{a^2}(\ddot{a}a - \dot{a}^2) - \frac{1}{2}a^2\frac{6}{a^3}(\ddot{a}+ka) \right] =$$

$$= \frac{18\epsilon}{\lambda}\frac{f^2}{a^4}(\dot{a}^2 + ka^2)$$

$$a5) 2\epsilon g_{00} \square \phi_0^2 \equiv 2\epsilon a^2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi_0^2) =$$

$$= 4\epsilon \left[2\frac{\dot{a}}{a}\phi_0\dot{\phi}_0 + \dot{\phi}_0^2 + \ddot{\phi}_0\phi_0 \right] = 4\epsilon\frac{3}{\lambda} \left[2\frac{\dot{a}}{a}\frac{f}{a} \left(\frac{\dot{f}}{a} - \frac{f\dot{a}}{a^2} \right) + \left(\frac{\dot{f}}{a^2} - \frac{2f\dot{f}\dot{a}}{a^3} \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{f^2\dot{a}^2}{a^4} \right) + \frac{f}{a} \left(\frac{\ddot{f}}{a} - \frac{2\dot{f}\dot{a}}{a^2} - \frac{f\ddot{a}}{a^2} + \frac{2f\dot{a}}{a^3} \right) \right]$$

$$2\epsilon g_{00} \square \phi_0^2 = \frac{12\epsilon}{\lambda} \left[\frac{\dot{f}^2}{a^2} + \frac{f^2\dot{a}^2}{a^4} - \frac{2f\dot{f}\dot{a}}{a^3} + \frac{f\ddot{f}}{a^2} - \frac{f^2\ddot{a}}{a^3} \right]$$

$$a6) -2\epsilon\nabla_0\nabla_0\phi_0^2 = -2\epsilon(\partial_0\partial_0\phi_0^2 - \Gamma_{00}^0\partial_0\phi_0^2) =$$

$$= -4\epsilon \left[\dot{\phi}_0^2 + \phi_0\ddot{\phi}_0 - \frac{\dot{a}}{a}\phi_0\dot{\phi}_0 \right] =$$

$$= -4\epsilon\frac{3}{\lambda} \left[\frac{\dot{f}}{a^2} - \frac{2f\dot{f}\dot{a}}{a^3} + \frac{f^2\dot{a}^2}{a^4} + \frac{f}{a} \left(\frac{\ddot{f}}{a} - \frac{2\dot{f}\dot{a}}{a^2} + \frac{2f\dot{a}^2}{a^3} - \frac{f\ddot{a}}{a^2} \right) - \frac{\dot{a}f}{a^2} \left(\frac{\dot{f}}{a} - \frac{f\dot{a}}{a^2} \right) \right] =$$

$$-2\epsilon\nabla_0\nabla_0\phi_0^2 = -\frac{12\epsilon}{\lambda} \left[\frac{\dot{f}^2}{a^2} - \frac{5\dot{a}f\dot{f}}{a^3} + \frac{4f^2\dot{a}^2}{a^4} + \frac{f\ddot{f}}{a^2} - \frac{f^2\ddot{a}}{a^2} \right]$$

$$\begin{aligned}
T_{00}^m = & -\frac{6}{\lambda} \left[\frac{\dot{f}^2}{a^2} - \frac{2f\dot{f}\dot{a}}{a^3} + \frac{f^2\dot{a}^2}{a^4} \right] + \frac{3}{\lambda} \left[\frac{\dot{f}^2}{a^2} - \frac{2f\dot{f}\dot{a}}{a^3} + \frac{f^2\dot{a}^2}{a^4} \right] - \frac{3}{2\lambda} \frac{f^4}{a^2} + \\
& + \frac{18\varepsilon}{\lambda} \frac{f^2}{a^4} (\dot{a}^2 + ka^2) + \frac{12\varepsilon}{\lambda} \left[\frac{\dot{f}^2}{a^2} + \frac{f^2\dot{a}^2}{a^4} - \frac{2f\dot{f}\dot{a}}{a^3} + \frac{f\ddot{f}}{a^2} - \frac{f^2\ddot{a}}{a^3} \right] + \\
& - \frac{12\varepsilon}{\lambda} \left[\frac{\dot{f}^2}{a^2} - \frac{5\dot{a}f\dot{f}}{a^3} + \frac{4f^2\dot{a}}{a^4} + \frac{f\ddot{f}}{a^2} - \frac{f^2\ddot{a}^2}{a^3} \right] \\
T_{00}^m = & \frac{1}{\lambda} \left[-\frac{3\dot{f}}{a^2} + \frac{f\ddot{f}\dot{a}}{a^3} (6 + 36\varepsilon) - \frac{f^2\dot{a}^2}{a^4} (18\varepsilon + 3) - \frac{3f^4}{2a^2} + \frac{18\varepsilon f^2 k}{a^2} \right]
\end{aligned}$$

$$b) T_{11}^m, T_{22}^m, T_{33}^m$$

$$\begin{aligned}
T_{11}^m = & -2\partial_1\phi_0\partial_1\phi_0 + g_{11}\partial_\lambda\phi_0\partial^\lambda\phi_0 - \frac{\lambda}{6}\phi_0^4g_{11} - 2\varepsilon\phi_0^2(R_{11} - \frac{1}{2}g_{11}R) \\
& + 2\varepsilon g_{11}\square\phi_0^2 - 2\varepsilon\nabla_1\nabla_1\phi_0^2
\end{aligned}$$

$$\text{e como } \phi_0 = \phi_0(\eta), \quad \partial_1\phi_0 = \partial_2\phi_0 = \partial_3\phi_0 = 0$$

$$\begin{aligned}
T_{11}^m = & g_{11}\partial_\lambda\phi_0\partial^\lambda\phi_0 - \frac{\lambda}{6}\phi_0^4g_{11} - 2\varepsilon\phi_0^2(R_{11} - \frac{1}{2}g_{11}R) + 2\varepsilon g_{11}\square\phi_0^2 \\
R_{11} = & g_{11}A \quad A = \frac{1}{a^2} \left[\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} + 2k \right]
\end{aligned}$$

$$T_{11}^m = g_{11} \left[\partial_\lambda\phi_0\partial^\lambda\phi_0 - \frac{\lambda}{6}\phi_0^4 - 2\varepsilon\phi_0^2A + \varepsilon\phi_0^2R + 2\varepsilon\square\phi_0^2 \right]$$

De modo semelhante mostra-se que

$$T_{22}^m = g_{22} \left[\partial_\lambda\phi_0\partial^\lambda\phi_0 - \frac{\lambda}{6}\phi_0^4 - 2\varepsilon\phi_0^2A + \varepsilon\phi_0^2R + 2\varepsilon\square\phi_0^2 \right]$$

$$T_{33}^m = g_{33} \left[\partial_\lambda \phi_0 \partial^\lambda \phi_0 - \frac{\lambda}{6} \phi_0^4 - 2\epsilon \phi_0^2 A + \epsilon \phi_0^2 R + 2\epsilon \square \phi_0^2 \right]$$

$$\begin{aligned} b1) \quad & \partial_\lambda \phi_0 \partial^\lambda \phi_0 - \frac{\lambda}{6} \phi_0^4 + 2\epsilon \square \phi_0^2 = \partial_0 \phi_0 \partial_0 \phi_0 g^{00} - \frac{\lambda}{6} \phi_0^4 + 2\epsilon \square \phi_0^2 = \\ & = \dot{\phi}_0^2 \frac{1}{a^2} - \frac{\lambda}{6} \frac{3^2}{\lambda^2} \frac{f^4}{a^4} + 2\epsilon \square \phi_0^2 = \\ & = \frac{3}{\lambda} \left[(1+4\epsilon) \frac{\dot{f}^2}{a^4} - \frac{f\dot{f}\ddot{a}}{a^5} (8\epsilon+2) + \frac{f^2\dot{a}^2}{a^6} (1+4\epsilon) - \frac{1}{2} \frac{f^4}{a^4} + \frac{4\epsilon}{\lambda} \frac{f\ddot{f}}{a^4} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{4\epsilon f^2\ddot{a}}{a^5} \right] \end{aligned}$$

$$b2) \quad -2\epsilon \phi_0^2 A = -\frac{6\epsilon}{\lambda} \frac{f^2}{a^4} \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} + 2k \right)$$

$$b3) \quad \epsilon \phi_0^2 R = \frac{3}{\lambda} \frac{f^2}{a^2} \frac{6}{a^3} (\ddot{a} + ka)$$

$$\begin{aligned} & \partial_\lambda \phi_0 \partial^\lambda \phi_0 - \frac{\lambda}{6} \phi_0^4 - 2\epsilon \phi_0^2 A + \epsilon \phi_0^2 R + 2\epsilon \square \phi_0^2 = b1 + b2 + b3 = \\ & = \frac{3}{\lambda} \left[(1+4\epsilon) \frac{\dot{f}^2}{a^4} - \frac{f\dot{f}\ddot{a}}{a^5} (8\epsilon+2) + \frac{f^2\dot{a}^2}{a^6} (1+4\epsilon) - \frac{1}{2} \frac{f^4}{a^4} + 4\epsilon \frac{f\ddot{f}}{a^4} - 4\epsilon \frac{f^2\ddot{a}}{a^5} \right. \\ & \quad \left. - 2\epsilon \frac{f^2\dot{a}^2}{a^6} - 2\epsilon \frac{f^2\ddot{a}}{a^5} - \frac{4\epsilon k f^2}{a^4} + \epsilon 6 \frac{f^2\ddot{a}}{a^5} + \frac{\epsilon 6 f^2 k}{a^4} \right] = \\ & = \frac{3}{\lambda} \left[(1+4\epsilon) \frac{\dot{f}^2}{a^4} - \frac{f\dot{f}\ddot{a}}{a^5} (8\epsilon+2) + \frac{f^2\dot{a}^2}{a^6} (1+2\epsilon) - \frac{1}{2} \frac{f^4}{a^4} + \frac{4\epsilon f\ddot{f}}{a^4} + \frac{2\epsilon k f^2}{a^4} \right] \\ T_{ii}^m & = \frac{g_{ii}}{a^2} \frac{3}{\lambda} \left[\frac{\dot{f}^2}{a^2} (1+4\epsilon) - \frac{f\dot{f}\ddot{a}}{a^3} (8\epsilon+2) + \frac{f^2\dot{a}^2}{a^4} (1+2\epsilon) - \frac{f^4}{2a^2} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{4\epsilon f\ddot{f}}{a^2} + \frac{2\epsilon k f^2}{a^2} \right] \end{aligned}$$

$$c) T_{12}^m = -2\partial_1\phi_0\partial_2\phi_0 + g_{12}\partial_\lambda\phi_0\partial^\lambda\phi_0 - \frac{\lambda}{6}\phi_0^4 g_{12} - \\ - 2\epsilon\phi_0^2(R_{12} - \frac{1}{2}g_{12}R) + 2\epsilon g_{12}\square\phi_0^2 - 2\epsilon\frac{\nabla_1\nabla_2 + \nabla_2\nabla_1}{2}\phi_0^2$$

Sendo $\partial_i\phi_0 = 0$ para $i = 1, 2, 3$ e $g_{ij} = 0$ $i \neq j$

$$T_{12}^m = -2\epsilon\phi_0^2 R_{12} = 0$$

Analogamente:

$$T_{13}^m = -2\epsilon\phi_0^2 R_{13} = 0$$

$$T_{12}^m = T_{23}^m = T_{13}^m = 0$$

$$T_{23}^m = -2\epsilon\phi_0^2 R_{23} = 0$$

$$d) T_{0\alpha}^m = -2\partial_0\phi_0\partial_\alpha\phi_0 + g_{0\alpha}\partial_\lambda\phi_0\partial^\lambda\phi_0 - \frac{\lambda}{6}\phi_0^4 g_{0\alpha} - \\ - 2\epsilon\phi_0^2(R_{0\alpha} - \frac{1}{2}g_{0\alpha}R) + 2\epsilon g_{0\alpha}\square\phi_0^2 - 2\epsilon\frac{\nabla_0\nabla_\alpha + \nabla_\alpha\nabla_0}{2}\phi_0^2$$

$$T_{0\alpha}^m = -2\epsilon\phi_0^2 R_{0\alpha} - \epsilon\nabla_\alpha\nabla_0\phi_0^2$$

$$R_{0\alpha} = 0$$

$$\nabla_\alpha\nabla_0(\phi_0^2) = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\nabla_0\phi_0^2) - \Gamma_{\alpha 0}^0 A_0 = 0$$

$$T_{0\alpha}^m = 0$$

$$T_{01}^m = T_{02}^m = T_{03}^m = 0$$

APÊNDICE A6: I - SOLUÇÕES HOMOGÊNEAS E ISOTRÔPICAS PARA A LAGRANGIANA (3)

A semelhança do que foi feito no texto, desejamos determinar as soluções com métrica homogênea e isotrôpica do sistema de equações (5a) e (5b)

$$\left\{ \begin{array}{l} \square \phi_0 + \epsilon R \phi_0 + \frac{\lambda}{3} \phi_0^3 = 0 \\ 2\epsilon \phi_0^2 (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) = T_{\mu\nu}^{\phi} - T_{\mu\nu}^m + 2\epsilon g_{\mu\nu} \square \phi_0^2 - 2\epsilon \frac{\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} + \nabla_{\nu} \nabla_{\mu}}{2} \end{array} \right. \quad (5a)$$

$$(5b)$$

para $\epsilon = 1/6$. A métrica é a mesma do texto satisfazendo condições de homogeneidade e isotropia

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \quad x^0 = \eta, \quad x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \varphi.$$

$$g_{00} = a^2(\eta)$$

$$g_{11} = -a^2(\eta)/(1-kr^2)$$

$$g_{22} = -a^2(\eta)r^2$$

$$g_{33} = -a^2(\eta)r^2 \sin^2\theta$$

$$g_{\mu\nu} = 0 \quad \text{para} \quad \mu \neq \nu$$

$$\sqrt{-g} = \frac{a^2(\eta)r^2 \sin^2\theta}{\sqrt{1-kr^2}}$$

onde k assume valores $+1$, 0 ou -1 .

O campo ϕ_0 será tomado na forma

$$\phi_0 = \sqrt{\frac{3}{\lambda}} \frac{f(\eta)}{a(\eta)}, \quad \text{função apenas de } \eta \text{ pelas mesmas razões de simetria.}$$

$$\square \phi_0 = \sqrt{\frac{3}{\lambda}} \left[\frac{1}{\dot{a}^2} \left(\frac{\ddot{f}}{\dot{a}} - \frac{2\dot{f}\ddot{a}}{a^2} + \frac{2f\ddot{a}^2}{a^3} \right) + \frac{2\dot{a}}{a^2} \left(\frac{\dot{f}}{a} - \frac{f\dot{a}}{a^2} \right) \right]$$

$$R = \frac{6}{a^3} (\ddot{a} + ka)$$

Substituindo ϕ_0 , $\square \phi_0$ e R em (5a), obtem-se:

$$\ddot{f} + kf + f^3 = 0, \quad (\text{A6.1})$$

que multiplicado por $\dot{f}$, dá como integral primeira

$$\frac{1}{2} \dot{f}^2 + \frac{k}{2} f^2 + \frac{1}{4} f^4 = C \quad (\text{constante}).$$

Da equação (5b) obtem-se:

$$T_{\mu\nu}^m = T_{\mu\nu}^\phi + \frac{1}{3} g_{\mu\nu} \square \phi_0^2 - \frac{1}{3} \frac{\nabla_\mu \nabla_\nu + \nabla_\nu \nabla_\mu}{2} \phi_0^2 - \frac{1}{3} \phi_0^2 R_{\mu\nu} + \frac{1}{6} \phi_0^2 g_{\mu\nu} R$$

onde

$$T_{\mu\nu}^\phi = 2\partial_\mu \phi_0 \partial_\nu \phi_0 - g_{\mu\nu} \partial_\lambda \phi_0 \partial_\rho \phi_0 g^{\lambda\rho} + \frac{\lambda}{6} \phi_0^4 g_{\mu\nu}$$

O cálculo das componentes de $T_{\mu\nu}^m$ segue como no apêndice A5, apenas trocando $T_{\mu\nu}^\phi \rightarrow -T_{\mu\nu}^\phi$, resultando em:

$$T_{00}^m = \frac{3}{a^2 \lambda} \left[\dot{f}^2 + \frac{f^4}{2} + kf^2 \right]$$

$$\mathcal{E}(\eta) = \frac{1}{a^2} T_{00}^m = \frac{3}{a^4 \lambda} \left[\dot{f}^2 + \frac{f^4}{2} + kf^2 \right] = \frac{3C}{a^4 \lambda} \quad (\text{A6.2})$$

Este resultado, no que se refere a dependência

$\mathcal{E}(\eta) \propto a^{-4}(\eta)$ era esperado como decorrência das condições $T^m=0$ e $T_{\mu\nu}^{m;\nu} = 0$. De fato de $T^m = 0$ segue que a equação de estado da matéria deve ser a de máxima pressão, $p = \mathcal{E}/3$. De $T_{\mu\nu}^{m;\nu} = 0$ temos

$$T_{0;\nu}^\nu = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} T_0^{\nu m}) - \frac{1}{2} \partial_0 (g_{\mu\nu}) T^{m\mu\nu} = 0$$

e para um gás no referencial de repouso local

$T_0^{0m} = \mathcal{E}(\eta)$, $T_1^{m1} = T_2^{m2} = T_3^{m3} = -p$, que substituindo na equação acima fornece

$$a \dot{\mathcal{E}} = -3\dot{a}(p + \mathcal{E})$$

Usando $p = \mathcal{E}/3$, tem-se $a \dot{\mathcal{E}} = -3\dot{a} \frac{4\mathcal{E}}{3}$

$$\frac{\dot{\mathcal{E}}}{\mathcal{E}} = -4 \frac{\dot{a}}{a} \quad \text{ou} \quad \mathcal{E} \propto a^{-4}$$

Passando para o cálculo das demais componentes temos, de modo semelhante ao apêndice A5

$$T_{12}^m = T_{23}^m = T_{31}^m = 0 \quad \text{e usando} \quad (\text{A6.1})$$

$$T_1^{m1} = T_2^{m2} = T_3^{m3} = -p(\eta) = -\left[\frac{\mathcal{E}(\eta)}{3} + \frac{2f\dot{a}}{\lambda a^6} (f\dot{a} - a\dot{f}) \right]$$

$$p(\eta) = \frac{\mathcal{E}(\eta)}{3} + \frac{2f\dot{a}}{\lambda a^6} (f\dot{a} - a\dot{f}) \quad (\text{A6.3})$$

Levando em conta que devemos ter $p = \mathcal{E}/3$,

$$\frac{2f\dot{a}}{\lambda a^6} (f\dot{a} - a\dot{f}) = 0$$

para que este tensor energia-momento represente um fluido perfeito.

Assim, as soluções aceitas correspondentes a métrica de Robertson-Walker serão dadas como soluções para $f(\eta)$ e $a(\eta)$ das equações:

$$(A6.4) \quad \ddot{f} + kf + f^3 = 0 \quad \text{ou} \quad \dot{f}^2 + kf^2 + f^4/2 = \text{constante}$$

$$(A6.5) \quad \frac{2f\dot{a}}{\lambda a^6} (f\dot{a} - \dot{f}a) = 0$$

De (A6.5) temos $\dot{a} = 0$ ou $\dot{a}f = \dot{f}a$

a) Se $\dot{a} = 0$, a constante, correspondendo a modelo estático. Simultaneamente deve ser satisfeita a equação (A6-4) sendo os valores possíveis para k , 0, +1 e -1. O campo $\phi_0(\eta)$ terá dependências em η proveniente de $f(\eta)$ já que a é constante.

As soluções para a equação (A6-4) podem ser visualizadas através do análogo mecânico do problema onde f descreve a posição de uma partícula sujeita a ação de potencial

$$V(f) = kf^2 + \frac{f^4}{2}$$

A energia desta partícula, C , está relacionada com a densidade de energia da matéria ordinária através de

$$\mathcal{E}(\eta) = \frac{3C}{a^4\lambda}$$

Para os diferentes valores de k admissíveis o potencial apresenta-se nas formas abaixo

A solução com $C=0$ corresponde a $\mathcal{E}(\eta) = 0$ e portanto vazio de matéria ordinária. Para $k=0$ e $k=+1$, a única solução possível neste caso é $f=0$. A partícula permanece em repouso no ponto de mínimo do potencial. Teríamos $\phi_0 = 0$ o que anulava o termo $\frac{1}{6} \phi_0^2 R$, presente na lagrangeana, o que não nos interessa. O vazio portanto ($\mathcal{E}(\eta) = 0 = C$) conta apenas com a solução $k=-1$ onde $f(\eta)$ apresenta-se como solução que oscila em torno dos mínimos $f = +1$ e $f = -1$. $f(\eta)$ assume comportamento crescente ou decrescente dependendo da época considerada. Este comportamento estende-se a $\phi(\eta)$ e consequentemente a constante gravitacional já que $G \propto \phi_0^{-2} \propto f^{-2}$.

Finalmente, as soluções com $C > 0$, que indicam a presença de matéria ordinária são admitidas para todos valores de k . Novamente f assume comportamento oscilatório, agora em torno do valor $f=0$. Como a constante gravitacional é proporcional a f^{-2} nesta teoria, este comportamento oscilatório em torno de $f=0$ implica num comportamento oscilatório para G que em determinadas épocas deve tornar-se muito grande. Épocas, portanto, em que a interação gravitacional tornar-se-ia muito intensa.

b) $\dot{a} \neq 0$, $a(\eta) \neq \text{constante}$

$$\dot{f}a - \dot{a}f = 0 \quad \frac{\dot{f}}{f} = \frac{\dot{a}}{a} \rightarrow f(\eta) = Aa(\eta)$$

sendo A constante. Aqui temos

$$\phi(\eta) = \sqrt{\frac{3}{\lambda}} \frac{f}{a} = \sqrt{\frac{3}{\lambda}} A \text{ constante.}$$

Temos portanto soluções para as quais a constante gravitacional é realmente constante. Como $a(\eta)$ é proporcional a $f(\eta)$ devemos ter

$$\ddot{a} + ka + A^2 a^3 = 0$$

ou

$$\frac{1}{2} \dot{a}^2 + \frac{1}{2} ka^2 + \frac{1}{4} A^2 a^4 = \text{constante } C$$

Outra vez podemos usar o análogo mecânico para visualizar as soluções possíveis sendo $V(a) = \frac{1}{2} ka^2 + \frac{1}{4} A^2 a^4$, o potencial sentido por partícula de massa unitária e cuja posição é descrita por $a = a(\eta)$. A análise é semelhante a do caso anterior. Para $C = 0$, que corresponde a $\xi(\eta) = 0$ e portanto vazio apenas soluções com $k=-1$ são admitidas e estas soluções apresentam-se como um universo que oscila, ora expandindo-se ora contrariando-se e passando eventualmente por $a(\eta) = 0$. Todas estas soluções são oscilatórias passando sempre por $a(\eta) = 0$.

Em conclusão, as equações (5a) e (5b) apresentam duas classes distintas de soluções em condições de homogeneidade e isotropia. A primeira é dada por um universo estático com a constante e uma "constante" gravitacional que varia com o tempo. Esta solução não encontra análogo no caso da relatividade geral. O segundo conjunto de soluções caracteriza-se por constante gravitacional realmente constante e com $a(\eta)$ variável no tempo apresentando fases de crescimento e outras de decrescimento quando pode atingir valor nulo. Estas soluções, caracterizadas por ϕ constante correspondem às soluções da relatividade geral em presença de constante cosmológica com R constante e negativo.

Observando todas estas soluções, constata-se que existe diferença fundamental entre esta teoria, a teoria de Einstein e a teoria usual com campo escalar (4a e 4b). Aqui, para todas as soluções encontradas com qualquer valor de k (0, -1 ou +1) e $a(\eta)$ não constante, o comportamento de $a(\eta)$ é sempre oscilatório. Isto é completamente diferente da teoria de Einstein ou da teoria com campo escalar (1), onde para diferentes valores de k

ou diferentes valores da densidade de energia da matéria existem soluções com expansão ilimitada para $a(\eta)$.

II. SOLUÇÕES ESTÁTICAS E ESFERICAMENTE SIMÉTRICAS PARA A LAGRANGEANA (3).

Para a Lagrangeana (1) as soluções estáticas, com simetria esférica e $T^m_{\mu\nu} = 0$ correspondem as soluções do sistema

$$\begin{cases} \square \phi_0 - \epsilon R \phi_0 + \frac{\lambda}{3} \phi_0^3 = 0 \\ 2\epsilon \phi_0^2 \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right] = -T^{\phi}_{\mu\nu} + 2\epsilon g_{\mu\nu} \square \phi_0^2 - 2\epsilon \frac{\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} + \nabla_{\nu} \nabla_{\mu}}{2} \phi_0^2 \end{cases}$$

A passagem da lagrangeana (1) para a (3) pode ser feita formalmente trocando-se $\epsilon \rightarrow -\epsilon$ e L_m por $-L_m$. Devido a ausência de matéria, basta levar em conta a troca $\epsilon \rightarrow -\epsilon$.

Para $\phi_0 = \text{constante}$, que é a solução analisada

$$R = -\frac{\lambda}{3\epsilon} \phi_0^2 \quad \text{e} \quad R_{\mu\nu} = -\frac{\lambda}{12\epsilon} \phi_0^2 g_{\mu\nu} \quad (\epsilon = 1/6)$$

e a solução final para a métrica pode ser sumariamente transcrita

$$\begin{cases} B(r) = 1 - \frac{B_1}{r} - \frac{1}{3} \alpha r^2 \\ A(r) = \frac{1}{1 - \frac{B_1}{r} - \frac{1}{3} \alpha r^2} \end{cases} \quad \alpha = -\frac{\lambda \phi_0^2}{12\epsilon} = -\frac{\lambda \phi_0^2}{2}$$

$$\begin{cases} B(r) = 1 - \frac{B_1}{r} + \frac{2\lambda \phi_0^2}{3} r^2 \\ A(r) = \frac{1}{1 - \frac{B_1}{r} + \frac{2}{3} \lambda \phi_0^2 r^2} \end{cases}$$

APÊNDICE B1 - CÁLCULO DE $\delta g_{\mu\nu}$

Partindo da métrica de Minkowski vamos nos limitar as perturbações desta métrica em torno de $x^\mu = 0$ que sejam conformemente planas, de curvatura escalar R constante, da forma

$$g_{\mu\nu}(x) = e^{2\sigma(x)} \eta_{\mu\nu} \quad \text{com} \quad \sigma(0) = 0$$

$$\sigma(x) = \sigma(x^2) \quad . \quad (B1-1)$$

A expansão da métrica $g_{\mu\nu}(x)$ em torno de $x^\mu = 0$ até segunda ordem é:

$$g_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(0) + \left. \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right|_{x=0} x^\alpha + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right|_{x=0} x^\alpha x^\beta$$

$$\left. \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right|_{x=0} = \eta_{\mu\nu} 4x_\alpha \sigma' e^{2\sigma} \Big|_{x=0} = 0 \quad \text{onde} \quad \sigma' = \frac{\partial \sigma}{\partial x^2}$$

$$\left. \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right|_{x=0} = \left[4\eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} \sigma' e^{2\sigma} + 8x_\alpha x_\beta \eta_{\mu\nu} \sigma'' e^{2\sigma} + 16\eta_{\mu\nu} x_\alpha x_\beta (\sigma')^2 e^{2\sigma} \right]_{x=0} =$$

$$= 4\eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} \sigma' e^{2\sigma} \quad .$$

$$\text{Portanto} \quad g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2!} 4\eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} \sigma'(0) e^{2\sigma} x^\alpha x^\beta$$

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} [1 + 2\sigma'(0)x^2] \quad . \quad (B1-2)$$

Por outro lado³¹, a curvatura escalar associada a métrica $g_{\mu\nu}(x)$ dada por (B1-1) é

$$R(x) = e^{-2\sigma(x)} [2(n-1)\Delta_2\sigma(x) + (n-1)(n-2)\Delta_1\sigma] \quad (B1-3)$$

com
$$\Delta_1 \sigma = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial \sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial x^\nu} = \eta^{\mu\nu} \sigma_{,\mu} \sigma_{,\nu}$$

$$\Delta_2 \sigma = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \eta^{\mu\nu} \sigma_{,\mu\nu} \quad .$$

No ponto $x = 0$ e com a restrição (B1-1) tem-se:

$$\Delta_1 \sigma = 4\eta^{\mu\nu} (\sigma')^2 x_\mu x_\nu \Big|_{x=0} = 0$$

$$\Delta_2 \sigma = 4x^2 \sigma'' + 2\sigma' n \Big|_{x=0} = 2\sigma'(0)n$$

sendo $n = \eta_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} = \delta_\mu^\mu$ dimensão do espaço

$$\sigma'' = \frac{d^2 \sigma}{d(x^2)^2} \quad .$$

A expressão para a curvatura escalar em $x = 0$ fica

$$R(0) = 2(n-1)2\sigma'(0)n = 4\sigma'(0)n(n-1)$$

ou
$$\sigma'(0) = \frac{R(0)}{4n(n-1)} \quad .$$

Substituindo esta expressão para $\sigma'(0)$ em (B1-2) ficamos com

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} \left[1 + \frac{R(0)}{2n(n-1)} x^2 \right]$$

e portanto

$$\delta g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \frac{R(0)}{2n(n-1)} x^2 \quad .$$

A correção seguinte a $\delta g_{\mu\nu}(x)$ será de ordem x^4 e proporcional a $R^2(0)$. Para obtê-la precisamos considerar a expansão de $g_{\mu\nu}(x)$ até quarta ordem:

$$g_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(0) + \left. \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right|_{x=0} x^\alpha + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right|_{x=0} x^\alpha x^\beta +$$

$$+ \frac{1}{3!} \left. \frac{\partial^3 g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta \partial x^\gamma} \right|_{x=0} x^\alpha x^\beta x^\gamma + \frac{1}{4!} \left. \frac{\partial^4 g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta \partial x^\gamma \partial x^\delta} \right|_{x=0} x^\alpha x^\beta x^\gamma x^\delta$$

$$\left. \frac{\partial^3 g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta \partial x^\gamma} \right|_{x=0} = \left[4\eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} x_\gamma (e^{2\sigma})'' + 4\eta_{\mu\nu} \eta_{\gamma\alpha} x_\beta (e^{2\sigma})'' + \right.$$

$$\left. + 4\eta_{\mu\nu} \eta_{\beta\gamma} x_\alpha (e^{2\sigma})'' + 8\eta_{\mu\nu} x_\alpha x_\beta x_\gamma (e^{2\sigma})''' \right]_{x=0} = 0$$

$$\left. \frac{\partial^4 g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta \partial x^\gamma \partial x^\delta} \right|_{x=0} = \left[4\eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\gamma\delta} (e^{2\sigma})'' + 8\eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} x_\gamma x_\delta (e^{2\sigma})'' + \right.$$

$$+ 4\eta_{\mu\nu} \eta_{\gamma\alpha} \eta_{\beta\delta} (e^{2\sigma})'' + 8\eta_{\mu\nu} \eta_{\gamma\alpha} x_\beta x_\delta (e^{2\sigma})''' + 4\eta_{\mu\nu} \eta_{\beta\gamma} \eta_{\alpha\delta} (e^{2\sigma})'' +$$

$$+ 8\eta_{\mu\nu} \eta_{\beta\gamma} x_\alpha x_\delta (e^{2\sigma})''' + 8\eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\delta} x_\beta x_\gamma (e^{2\sigma})''' + 8\eta_{\mu\nu} \eta_{\delta\beta} x_\alpha x_\gamma (e^{2\sigma})''' +$$

$$\left. + 8\eta_{\mu\nu} \eta_{\gamma\delta} x_\alpha x_\beta (e^{2\sigma})''' + 16\eta_{\mu\nu} x_\alpha x_\beta x_\gamma x_\delta (e^{2\sigma})'''' \right]_{x=0}$$

$$\left. \frac{\partial^4 g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta \partial x^\gamma \partial x^\delta} \right|_{x=0} = \left[4\eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\gamma\delta} (e^{2\sigma})'' + 4\eta_{\mu\nu} \eta_{\gamma\alpha} \eta_{\delta\beta} (e^{2\sigma})'' + \right.$$

$$\left. + 4\eta_{\mu\nu} \eta_{\beta\gamma} \eta_{\alpha\delta} (e^{2\sigma})'' \right]_{x=0} =$$

$$= 4(e^{2\sigma})'' \eta_{\mu\nu} \left[\eta_{\alpha\beta} \eta_{\gamma\delta} + \eta_{\alpha\gamma} \eta_{\delta\beta} + \eta_{\beta\gamma} \eta_{\alpha\delta} \right] \Big|_{x=0}$$

$$(e^{2\sigma})'' = (2\sigma' e^{2\sigma})' = 2\sigma'' e^{2\sigma} + 4(\sigma')^2 e^{2\sigma}$$

$$\left. \frac{\partial^4 g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta \partial x^\gamma \partial x^\delta} \right|_{x=0} = 8 \left[\sigma''(0) + 2(\sigma'(0))^2 \right] \eta_{\mu\nu} \left[\eta_{\alpha\beta} \eta_{\gamma\delta} + \right. \\ \left. + \eta_{\alpha\gamma} \eta_{\delta\beta} + \eta_{\beta\gamma} \eta_{\alpha\delta} \right] \Big|_{x=0}$$

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \frac{R(0)}{2(n-1)n} x^2 \eta_{\mu\nu} + \frac{8[\sigma''(0) + 2(\sigma'(0))^2]}{4!} \eta_{\mu\nu} x^4$$

Para relacionar $\sigma''(0)$ com $\sigma'(0)$ ou $R(0)$ é preciso levar em conta a condição R constante em torno do zero, o que pode ser feito usando

$$\left. \frac{\partial R}{\partial x^k} \right|_{x=0} = 0 \quad \text{ou se necessário} \quad \left. \frac{\partial^2 R}{\partial x^k \partial x^j} \right|_{x=0} = 0$$

Partindo de

$$R(x) = e^{-2\sigma} \left[8(n-1)\sigma'' x^2 + 4(n-1)n\sigma' + 4(n-1)(n-2)\sigma'^2 x^2 \right]$$

$$\left. \frac{\partial R}{\partial x^k} \right|_{x=0} = 0 \quad \text{e não se obtém relação entre } \sigma' \text{ e } \sigma''.$$

Devemos portanto considerar a derivada segunda. Retendo apenas os termos que podem dar contribuição não nula em $x=0$, tem-se

$$\left. \frac{\partial^2 R}{\partial x^j \partial x^k} \right|_{x=0} = 2\eta_{kj} (e^{-2\sigma})' \left[4n(n-1)\sigma' \right] + e^{-2\sigma} \left[16(n-1)\sigma'' \eta_{jk} + \right. \\ \left. + 8n(n-1)\eta_{kj}\sigma'' + 8(n-1)(n-2)\eta_{kj}\sigma'^2 \right] = 0$$

$$- 16n\sigma'^2(0) + 8(n-2)\sigma'^2(0) + (8n+16)\sigma''(0) = 0$$

ou

$$\sigma''(0) = \sigma'^2(0) = \frac{R^2(0)}{16n^2(n-1)^2}.$$

Finalmente, a expansão para $g_{\mu\nu}(x)$ fica

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \frac{R(0)}{2n(n-1)} x^2 \eta_{\mu\nu} + 3\sigma'^2(0)x^4 \eta_{\mu\nu}$$

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \frac{R(0)}{2n(n-1)} x^2 \eta_{\mu\nu} + \frac{3R^2(0)}{16n^2(n-1)^2} x^4 \eta_{\mu\nu}$$

$$\delta^2 g_{\mu\nu} = \frac{3R^2(0)}{16n^2(n-1)^2} x^4 \eta_{\mu\nu}.$$

APÊNDICE B2 - $R^2, R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}, R_{\mu\nu\lambda\rho} R^{\mu\nu\lambda\rho}$ SÃO PROPORCIONAIS EM
DUAS DIMENSÕES DE ESPAÇO-TEMPO

Sejam g_{11}, g_{12}, g_{21} e g_{22} as componentes do tensor métrico. Temos

$$R_{\lambda\rho} = g^{\mu\nu} R_{\mu\lambda\nu\rho}$$

e

com índices variando de 1 a 2.

$$R = g^{\lambda\rho} R_{\lambda\rho}.$$

O tensor de curvatura $R_{\mu\nu\lambda\rho}$ apresenta as seguintes propriedades

$$R_{\nu\rho\sigma}^{\beta} = - R_{\nu\sigma\rho}^{\beta}$$

$$R_{\nu\rho\sigma}^{\beta} + R_{\rho\sigma\nu}^{\beta} + R_{\sigma\nu\rho}^{\beta} = 0$$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\nu\mu\rho\sigma} = 0$$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu}.$$

Usando estas propriedades é possível mostrar que as únicas componentes não nulas do tensor de curvatura são $R_{1212}, R_{1221}, R_{2112}$ e R_{2121} que satisfazem a

$$R_{1212} = - R_{1221} = - R_{2112} = R_{2121} \equiv \alpha.$$

Quanto a $R_{\mu\nu}$ temos:

$$R_{11} = g^{22} R_{2121} = \alpha g^{22}$$

$$R_{22} = g^{11} R_{1212} = \alpha g^{11}$$

$$R_{12} = g^{21} R_{2112} = -\alpha g^{21}$$

$$R_{21} = g^{12} R_{1221} = -\alpha g^{12} = R_{12}$$

$$e) \quad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{11} R_{11} + g^{12} R_{12} + g^{21} R_{21} + g^{22} R_{22}$$

$$R = 2\alpha \left[g^{11} g^{22} - g^{12} g^{12} \right]$$

Desta forma temos:

$$a) \quad R^2 = 4\alpha^2 \left[g^{11} g^{22} - g^{12} g^{12} \right]^2$$

$$\begin{aligned} b) \quad R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} &= R_{11} R^{11} + 2R_{12} R^{12} + R_{22} R^{22} = \\ &= R_{11} g^{1\lambda} g^{1\rho} R_{\lambda\rho} + 2R_{12} g^{1\lambda} g^{2\rho} R_{\lambda\rho} + R_{22} g^{2\lambda} g^{2\rho} R_{\lambda\rho} = \\ &= \alpha^2 g^{22} \left[g^{11} g^{11} g^{22} - 2g^{11} g^{12} g^{12} + g^{12} g^{12} g^{11} \right] + \\ &\quad - 2\alpha^2 g^{12} \left[g^{11} g^{21} g^{22} - g^{11} g^{22} g^{12} - g^{12} g^{12} g^{12} + g^{12} g^{22} g^{22} \right] \\ &\quad + \alpha^2 g^{11} \left[g^{12} g^{12} g^{22} - 2g^{12} g^{22} g^{12} + g^{22} g^{22} g^{11} \right] = \\ &= 2\alpha^2 \left[g^{11} g^{22} - g^{12} g^{12} \right]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad R_{\mu\nu\lambda\rho} R^{\mu\nu\lambda\rho} &= R_{\mu\nu\lambda\rho} R_{\mu'\nu'\lambda'\rho'} g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} g^{\lambda\lambda'} g^{\rho\rho'} = \\ &= 4R_{\mu\nu\lambda\rho} R_{1212} g^{1\mu} g^{2\nu} g^{1\lambda} g^{2\rho} = \\ &= 4\alpha^2 \left[g^{11} g^{22} - g^{12} g^{12} \right]^2 . \end{aligned}$$

Assim, verificamos explicitamente que

$$R^2 = 2R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\mu\nu\lambda\rho} .$$

Nesta sequência é fácil mostrar que em duas dimensões a contribuição do termo $\sqrt{-g} R$ na lagrangeana é trivial. Para isto basta mostrar que $\frac{\delta(\sqrt{-g} R)}{\delta g^{\mu\nu}} = 0$. De fato,

$$\frac{\delta(\sqrt{-g} R)}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = R_{\mu\nu} - \alpha g_{\mu\nu} [g^{11}g^{22} - g^{12}g^{12}] =$$

$$R_{11} - \alpha g_{11} [g^{11}g^{22} - g^{12}g^{12}] = \alpha g^{22} - \alpha g^{22} = 0$$

$$R_{12} - \alpha g_{12} [g^{11}g^{22} - g^{12}g^{12}] = -\alpha g^{12} + \alpha g^{12} = 0$$

$$R_{21} - \alpha g_{21} [g^{11}g^{22} - g^{12}g^{12}] = -\alpha g^{12} + \alpha g^{12} = 0$$

$$R_{22} - \alpha g_{22} [g^{11}g^{22} - g^{12}g^{12}] = \alpha g_{11} - \alpha g_{11} = 0$$

e portanto
$$\frac{\delta(\sqrt{-g} R)}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 .$$

APÊNDICE B3 - PRODUTOS NORMAIS

Dada uma teoria de campo, é usual entender-se que re-normalizar esta teoria significa renormalizar suas funções de Green

$$G^n(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T \phi(x_1) \dots \phi(x_n) | 0 \rangle \quad (B3-1)$$

onde ϕ são os campos elementares, que aparecem na lagrangeana. No entanto, muitas vezes torna-se necessário o cálculo de funções de Green com inserções de operador $\phi(x)$ formados pelo produto de dois ou mais operadores aplicados a um mesmo ponto ou seja

$$G^n_o(x, x_1 \dots x_n) = \langle 0 | T \phi(x) \phi(x_1) \dots \phi(x_n) | 0 \rangle \quad . \quad (B3-2)$$

Isto acontece quando se deseja estudar correntes $j^\mu(x)$ ou o tensor energia-momento da teoria, para citar dois exemplos. Do ponto de vista clássico a conservação da corrente é expressa por $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$. Do ponto de vista quântico $j^\mu(x)$ é um operador e as relações que satisfaz devem ser válidas para os seus valores esperados. Estes estão sujeitos a efeitos quânticos que podem invalidar as relações clássicas. Para não se deixar enganar por este comportamento anômalo (que na realidade é o comportamento "normal") é preciso refinar o tratamento das funções de Green, de maneira a admitir inserções de operadores. Por exemplo, se $j^\mu(x)$ é uma corrente devemos poder calcular, digamos, perturbativamente, a função de Green:

$$G^n_j(x, x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T j^\mu(x) \phi(x_1) \dots \phi(x_n) | 0 \rangle \quad .$$

No caso específico de gravitação induzida, será de interesse inserção do operador $T(x)$, traço do tensor energia-momento, já que é através do valor esperado no vácuo de produtos de operadores $T(x)$ que se obtém a constante gravitacional.

Um outro resultado importante pela frequência com que se apresenta e onde refinamentos da teoria de campos são essenciais é a expansão de produtos de operadores introduzida por Wilson²⁸. O produto de dois operadores locais A e B pode ser expandido em termos de um conjunto completo de operadores locais $\{o_i\}$ na forma

$$A(x)B(y) \xrightarrow{x \rightarrow y} \sum_i C_i(x-y) o_i \left[\frac{1}{2} (x+y) \right]$$

onde os C_i são coeficientes numéricos e os operadores o_i devem apresentar os mesmos números quânticos do produto AB. Assim, temos por exemplo $\phi(x)\phi(y) \xrightarrow{x \rightarrow y} C(x-y)\phi^2\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) + o((x-y)^2)$. Com o uso desta expansão, funções de Green da forma $\langle 0 | T A(x) B(y) \phi(x_1) \dots \phi(x_n) | 0 \rangle$ recaem, no limite $x \rightarrow y$, em:

$$\begin{aligned} & \sum_i C_i(x-y) \langle 0 | T o_i \left(\frac{1}{2}(x+y) \right) \phi(x_1) \dots \phi(x_n) | 0 \rangle = \\ & = \sum_i C_i(x-y) G_{o_i}^n \left(\frac{1}{2}(x+y), x_1 \dots x_n \right) . \end{aligned}$$

O ponto a ser considerado aqui é que estas funções $G_{o_i}^n$ não estão renormalizadas automaticamente como uma consequência da renormalização das funções (B3-1). É preciso que um processo de subtração bem definido seja escolhido para estas funções. De forma mais completa a teoria estará renormalizada quando estiverem renormalizadas as funções G^n e $G_{o_i}^n$ para os operadores o_i de interesse.

Em termos de lagrangeana, para considerar as funções $G_{o_i}^n$, devemos tomar

$$L(J_1 \dots J_N) = L + \sum_{i=1}^N J_i o_i$$

A esta lagrangeana devem ser acrescentados contratermos da forma $\sum_{i=1}^N C_i o_i$ e se estes contratermos forem suficientes para remover a divergência das funções de Green $G_{o_i}^n$, o conjunto o_i diz-se multiplicativamente renormalizável. Usualmente para que isto ocorra, a soma deve estender-se a todos operadores de dimensão* menor ou igual a dimensão do operador originalmente introduzido o_i . A lagrangeana incluindo os contratermos pode ser escrita na forma

$$L(J_1, \dots, J_N) = L + \sum_{i=1}^N J_i Z_{ij} o_j \quad \text{com} \quad Z_{ij} o_j = o_i^0$$

Z_{ij} sendo uma matriz de constantes de renormalização. Para operadores de dimensão pequena, pode ocorrer de Z_{ij} reduzir-se a matriz 1×1 . É o caso do operador $\phi^2 (d=2)$ para o qual $\Gamma_{\phi^2}^{Rn} = Z_{\phi^2}^{-1} Z^{-n/2} \Gamma_{\phi^2}^n$. Porém, para operadores de dimensão maior recai-se em

$$\Gamma_{o_i}^{Rn} = Z^{+n/2} \sum_j Z_{ij} \Gamma_{o_j}^n.$$

No esquema de regularização dimensional, Z_{ij} devem ser determinados de modo a cancelar os polos das funções de Green divergentes que aparecem como polos da forma $\frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{n-4}$ sendo n a di-

*A dimensão de o é definida por $d_o = n_\phi d_\phi + D$ sendo D o número de derivadas presentes em o , n_ϕ o número de campos ϕ e d_ϕ a dimensão deste campo.

mensão do espaço. Para uma teoria de massa $\underline{m}$ e constante acoplamento g

$$\Gamma_{o_i}^{Rn}(g, m, \mu) = Z_\phi^{n/2}(g, \epsilon) Z_{ij}(g, \epsilon) \Gamma_{oj}^n(g_o, m_o, \epsilon)$$

sendo μ o parâmetro dimensional arbitrário introduzido para permitir que g mantenha-se adimensional para qualquer valor de ϵ , o que é conseguido através da substituição $g \rightarrow \mu^\epsilon g$. Com isto, é possível mostrar que as funções $\Gamma_{o_i}^{Rn}$ satisfazem a equação do grupo de renormalização (Gross na ref. 29b)

$$\left[\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + \gamma_m m \frac{\partial}{\partial m} - n\gamma(g) \right) \delta_{ij} + \gamma_{ij}(g) \right] \Gamma_{oj}^n(g, m, \mu) = 0$$

onde $\beta(g) = \mu \frac{\partial g}{\partial \mu} \Big|_{g_o, \epsilon}$, $\gamma(g) = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z_\phi \Big|_{g_o, \epsilon}$

$$\gamma_m(g) = - \mu \frac{\partial}{\partial \mu} (\ln Z_m) \Big|_{g_o, \epsilon}$$

e a matriz $\gamma(g) = Z^{-1} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \Big|_{g_o, \epsilon} Z$

é a dimensão anômala do operador σ_i .

É possível mostrar que este esquema, baseado na introdução da matriz Z_{ij} , conduz de fato a uma renormalização das funções de Green G_o^n . Esta renormalização pode ser obtida através de esquema equivalente, porém mais conveniente, baseado no método BPHZ. Como usual neste método, $\Gamma_{o_i}^{Rn}$ é obtido através da consideração da parte finita de $\Gamma_{o_i}^n$ definida por (Callan na Ref. 29b)

$$R(\Gamma_{[\sigma]}^n) = \sum_{F \in \mathcal{F}} \prod_{\gamma \in F} (-t_\gamma) I(\Gamma_\sigma^n) \quad (\text{B3-3})$$

sendo $\mathcal{F}$ o conjunto das florestas de Γ_σ

$I(\Gamma)$ o produto dos vrtices e propagadores que formam Γ_σ

t_γ operador de Taylor de ordem d , (considera os primeiros d termos da srie de Taylor em torno de $p=0$, sendo d grau de divergncia de γ).

O processo de subtrao indicado por (B3-3) subtrai o mnimo necessrio para que $R(\Gamma_\sigma^n)$ resulte finito. No formalismo BPHZ h a possibilidade de subtrairmos mais do que o mnimo necessrio o que pode ser feito tratando σ como se ele apresentasse dimenso δ maior que d , (sendo d dimenso de σ), o que indicado por

$$R[\Gamma_{[\sigma]\delta}] = \sum_{F \in \mathcal{F}} \prod_{\gamma \in F} (-t_\gamma^\delta) I(\Gamma_\sigma) \quad (\text{B3-4})$$

Para todo γ com $\sigma \subset \gamma$, a subtrao de Taylor dever ser feita tomando δ como dimenso de σ .

O produto normal a sistematizao deste procedimento onde o operador $N[\sigma]_\delta$ obtido realizando a subtrao usual (B3-4) nas diferentes funes de Green onde σ inserido. A definio completa fica

$$G_\delta^N(x, x_1 \dots x_N) \equiv \langle 0 | T N_\delta[\sigma](x) \phi(x_1) \dots \phi(x_N) | 0 \rangle =$$

= parte finita de BPHZ de

$$\langle 0 | T : i\sigma^{(0)}(x) : \prod_{i=1}^N \phi^0(x_i) \exp \left[i \int dx^4 : L_I[\phi^0(x)] : \right] : | 0 \rangle^0$$

onde σ^0 é obtido a partir de σ pela substituição $\phi \rightarrow \phi^0$.

Caso $\delta > d_\sigma$ com d_σ a dimensão do operador σ , então o operador $N[\sigma]_\delta$ diz-se supersubtraído. É sempre possível reduzir um operador supersubtraído em termos de uma combinação de operadores não supersubtraídos com dimensão menor ou igual a δ . Por exemplo, tendo ϕ dimensão 1, $[\phi^2]_4$ corresponde a um produto normal supersubtraído. É possível expressá-lo por:

$$[\phi^2]_4 = [\phi^2]_2 + a[\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi]_4 + b[\phi \partial^2 \phi]_4 + c[\phi^4]_4 \quad (B3-5)$$

onde os operadores a direita tem dimensão menor ou igual a quatro e não são supersubtraídos.

Definido desta forma, é possível mostrar que o produto normal satisfaz as seguintes propriedades^{29 c}

$$1) \quad \partial_\mu [\sigma]_\delta = [\partial_\mu \sigma]_{\delta+1}$$

De forma mais explícita

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \langle 0 | N[\sigma(x)]_\delta \phi(x_1) \dots \phi(x_n) | 0 \rangle = \langle 0 | N \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \sigma(x) \right]_{\delta+1} \phi(x_1) \dots \phi(x_n) | 0 \rangle$$

$$2) \quad \text{Se } \sigma = \alpha_1 \sigma_1 + \alpha_2 \sigma_2 \quad \text{então}$$

$$N[\sigma]_\delta = \alpha_1 N[\sigma_1]_\delta + \alpha_2 N[\sigma_2]_\delta$$

3) Equações de movimento - são basicamente equações que permitem relacionar produtos normais envolvendo derivadas de 2ª ordem com produtos normais contendo no máximo derivadas de 1ª ordem. Não existe forma concisa de apresentar esta propriedade. Uma forma particular porém frequente destas equações é:

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | T \left\{ \phi_i(z) \left(\frac{\delta L}{\delta \phi_j(z)} - \partial_\mu \frac{\delta L}{\delta (\partial_\mu \phi_j(z))} \right) \right\}_{\delta} \prod_{m=1}^N \phi_{\nu m}(x_m) | 0 \rangle = \\
& = -i \sum_{r=1}^N \delta(z-x_r) \delta_{j\nu r} \langle 0 | T \phi_i(z) \phi_{\nu 1}(x_1) \dots \phi_{\nu r}(x_r) \dots \phi_{\nu N}(x_N) | 0 \rangle .
\end{aligned}$$

Esta definição de produtos normais através do uso do operador "parte finita" de Bogoliubov ($R(\Gamma)$) apresenta problemas. Embora o processo de subtração utilizado seja linear, a subtração depende do grau de divergência do diagrama e isto introduz efeitos não lineares o que dificulta o tratamento de teorias com quebra de simetria. A alternativa proposta por Collins^{29a} é redefinir o operador parte finita. Em vez de subtrair o valor do diagrama num ponto do espaço dos momentos, deve-se simplesmente subtrair a parte singular de cada diagrama. A regularização usada é a dimensional, de modo que a parte singular aparece como polo em ϵ , sendo $n = 4 + \epsilon$ a dimensão do espaço.

$$(parte\ finita)(\Gamma) = \lim_{n \rightarrow 4} \sum_{F \in F} \prod_{\gamma \in F} (-PP_\lambda) I(\Gamma, n) \quad (B3-6)$$

com $PP I(\Gamma, n)$ a parte de $I(\Gamma)$ que apresenta polo em $n=4$ e $PP_\lambda(\Gamma, n) = PP(\Gamma/\lambda, n)$ sendo Γ/λ o diagrama que obtém-se a partir de Γ reduzindo λ a um vértice.

Este novo procedimento de subtração é linear e as propriedades são as mesmas que no caso de subtração BPHZ. É preciso ressaltar que a operação (B3-6) é única não sendo possível de finir aqui operadores supersubtraídos como na equação (B3-4). As propriedades da ordem normal permanecem basicamente as mesmas, apenas a propriedade (B3-5) que relaciona operadores supersubtraídos e não supersubtraídos perde o sentido já que a operação de subtração é uma só.

APÊNDICE B4 - PROPAGADOR DO CAMPO σ

Em ordem mais baixa em λ (ordem zero) o propagador do campo σ é constante representado por

$$----- \Delta^0 = \frac{1}{(2\pi)^2 i}$$

A correção seguinte é obtida através da introdução de um loop de fermions , indicado por Γ^2 que apresenta ordem 2 em λ e ordem zero em N .

$$----- \text{ (loop) } ----- \Delta^0 \Gamma^2 \Delta^0$$

As correções 1PI de ordem superior a 2 em λ desaparecem no limite de $N \rightarrow \infty$. (Estas correções são proporcionais a potências de N^{-1} como já foi discutido em II-2). Portanto, no limite $N \rightarrow \infty$, as diferentes correções que devem ser levadas em conta no propagador completo de σ são formadas por sucessivas contribuições da forma , por exemplo:

$$----- \text{ (loop) } ----- \text{ (loop) } ----- \Delta^0 \Gamma^2 \Delta^0 \Gamma^2 \Delta^0$$

$$----- \text{ (loop) } ----- \text{ (loop) } ----- \text{ (loop) } ----- \Delta^0 \Gamma^2 \Delta^0 \Gamma^2 \Delta^0 \Gamma^2 \Delta^0$$

⋮

Assim, representando o propagador completo por Δ , , temos

$$\Delta = \Delta^0 + \Delta^0 \Gamma^2 \Delta^0 + \Delta^0 \Gamma^2 \Delta^0 \Gamma^2 \Delta^0 + \dots$$

$$\Delta = \Delta^0 \left[1 + \Gamma^2 \Delta^0 + \Gamma^2 \Delta^0 \Gamma^2 \Delta^0 + \dots \right] = \frac{\Delta^0}{1 - \Gamma^2 \Delta^0}$$

De (17), tomando a renormalização que corresponde a extrair o polo em $n=2$, temos

$$z_\sigma = - \frac{\lambda^2}{2\pi} (1-n) \frac{1}{(1-n/2)} \quad e,$$

$$\Gamma_\sigma^2 = + i\pi^{n/2} n(1-n)\lambda^2 \int_0^1 \ln \left[\frac{k^2}{\mu^2} x(1-x) + \frac{a^2}{\mu^2} \right] dx$$

$$\Gamma^2(k) = i\pi^{n/2} n(1-n)\lambda^2 \int_0^1 \ln \left[\frac{k^2}{\mu^2} x(1-x) + \frac{a^2}{\mu^2} \right] dx$$

$$\Gamma^2(k) = i\pi^{n/2} n(1-n)\lambda^2 \int_0^1 \ln \left[\frac{a^2}{\mu^2} \right] \cdot \left[\frac{k^2}{a^2} x(1-x) + 1 \right] dx$$

$$\Gamma^2(k) = i\pi^{n/2} n(1-n) \lambda^2 \left\{ \ln \left[\frac{a^2}{\mu^2} \right] + \int_0^1 dx \ln \left[\frac{k^2}{a^2} x(1-x) + 1 \right] \right\}$$

$$\Gamma^2(k) = i\pi^{n/2} n(1-n)\lambda^2 \left\{ \ln \left[\frac{a^2}{\mu^2} \right] - 2 - \sqrt{1 + \frac{4a^2}{k^2}} \ln \left[\frac{\sqrt{1 + 4a^2/k^2} - 1}{\sqrt{1 + 4a^2/k^2} + 1} \right] \right\}$$

e, substituindo na expressão de Δ , encontramos para o propagador completo de σ no limite de $N \rightarrow \infty$:

$$\Delta = \frac{1}{(\Delta^0)^{-1} - \Gamma^2(k)}$$

$$\Delta(k) = \frac{1}{(2\pi)^2 i - i\pi^{n/2} n(1-n) \lambda^2 \left\{ \ln(a^2/\mu^2) - 2 - \sqrt{1+4a^2/k^2} \ln \left[\frac{\sqrt{1+4a^2/k^2} - 1}{\sqrt{1+4a^2/k^2} + 1} \right] \right\}}$$

$$\Delta(k) = \frac{1}{i \left[(2\pi)^2 - i\pi^{n/2} n(1-n) \lambda^2 \left\{ \ln(a^2/\mu^2) - 2 - \sqrt{1+4a^2/k^2} \ln \left[\frac{\sqrt{1+4a^2/k^2} - 1}{\sqrt{1+4a^2/k^2} + 1} \right] \right\} \right]}$$

com $n = 2$.

REFERÊNCIAS

1. A. Einstein - Ann. der Phys. 49, 769 (1916); tradução dada em The principle of Relativity, H.A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski e H. Weyl (Dover, N.Y.).
2. T. Boyer - Ann. of Phys. 56, 474 (1970).
3. A. Zee - Phys. Rev. Lett. 42, nº 7, 417 (1979).
4. S. Weinberg - Phys. Rev. Lett. 19, 1264 (1967).
A. Salam em Elementary Particle Theory, ed. N. Svartholm (1968) Estocolmo.
5. S. Adler - Phys. Rev. Lett. 44, 1567 (1980).
6. A. Zee - Phys. Rev. D 23, nº 4, 858 (1981).
7. C. Brans-R.Dicke - Phys. Rev. 124, nº 4, 925 (1964).
8. D.J. Toms "Spontaneous symmetry breaking in curve space-time" - preprint ICTP.
9. H. Fleming, J. Lyra, C. Prado, V. Silveira - Lett.Nuov.Cim. 27, 261 (1980).
10. Eötvös - Ann. Phys. 68, 11 (1922).
11. Zumino - "Effective Lagrangians and Broken Symmetries" em Lectures on Elementary Particle and Quantum Field Theory, Brandeis (1970) Vol. 2, ed. S. Deser, M. Grisaru e H. Pendleton.
12. S. Weinberg - "Gravitation and Cosmology", ed. John Wiley and Sons (N.Y.).
13. Rindler - "Essential Relativity" (2.^a edição), ed. Springer-Verlag.
14. M.J. Duff - "Covariant Quantization" em Quantum Gravity (Oxford Symposium), ed. C.J. Isham, R. Penrose e D.W.Sciamia.
15. M. Veltman - "Quantum theory of gravitation" em Methods in Field Theory, Les Houches, 1975, ed. R. Balian, J. Zinn-Justin.

16. S. Deser, P. van Nieuwenhuisen - Phys. Rev. D 10, nº 2, 401 (1974).
17. A. Sakharov - Soviet Phys. Doklady 12, nº 11, 1040 (1968).
18. S. Adler - Phys. Lett. 95B, nº 2, 241 (1980).
S. Adler - Rev. of Mod. Phys. 54, nº 3, 729 (1982).
19. W. Zimmermann, em "Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory", Brandeis (1970), vol. 1, ed. S. Deser, M. Grisaru e H. Pendleton.
20. Zinn-Justin em Trends in Elementary Particle Physics "Renormalization of Gauge Theories".
21. D.J. Gross, A. Neveu - Phys. Rev. D 10, nº 10, 3235 (1974).
22. L. Landau-Lifchitz - The classical theory of fields, ed. Pergamon Press.
23. S.A. Abers, B. Lee - Phys. Rep. 96C, nº 1 (1973).
24. S. Adler - "Induced Gravitation" a ser publicado em High Energy Limit (Erice 1980), ed. A. Zichichi (Plenum Press, N.Y.).
25. B. Hasslacher, E. Mottola - Phys. Lett. B 95, 237 (1980).
26. A. Zee - Phys. Rev. Lett. 48, 295 (1980).
27. H. Fleming, K. Furuya - Il Nuovo Cim. 11, nº 49A, 101 (1979).
28. K. Wilson - Phys. Rev. 179, 1499 (1969).
- 29a. J.C. Collins - Nucl. Phys. B 92, 477 (1975).
- 29b. Callan Jr. - "Introduction to renormalization theory",
D. Gross - "Applications of renormalization group to high energy physics".
Ambos em Methods in field theory, Les Houches (1975), ed. R. Balian, J. Zinn-Justin.
- 29c. J. Lowenstein - "Normal products methods in Renormalised Perturbation Theory " (Lectures on renormalization theory, Mariland U. report 1972).

30. Bjorken, J. Drell - Relativistic Quantum Fields, ed. Mac-Graw Hill (1964).
31. L. Eisenhart - Riemannian Geometry, Princeton University Press (1964).