

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE FÍSICA

ELETRODINÂMICA QUÂNTICA  
SEM MASSA NUA DO ELÉTRON :  
UM ESTUDO VARIACIONAL

Paulo Cesar Piquini

*Cristina Batoni Abdalla*  
*Francisco*



Orientador: Prof. Dr. Adilson José da Silva

Dissertação de Mestrado  
apresentada no Instituto  
de Física da Universidade  
de São Paulo.

SBI-IFUSP



*Defesa: 20.09.90*  
SÃO PAULO

1990

530:1433

P666e

M

e.2

#### FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação  
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Piquini, Paulo Cesar

Eletrodinâmica Quântica sem massa nua do elétron:  
um estudo variacional. São Paulo, 1990.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo.  
Instituto de Física. Departamento de Física Matemática.

Área de Concentração: Física de Partículas Elementares  
(Modalidade de Física)

Orientador: Prof<sup>o</sup> Dr. Adilson José da Silva

Unitermos: 1. Quebra de simetria quival; 2. Geração  
dinâmica de massa; 3. Fantasma de Landau.

USP/IF/SBI - 30/90

# AGRADECIMENTOS

- Ao Adilson José da Silva, pela orientação e amizade.
- A todos meus colegas e amigos da Universidade de São Paulo, do IFT, especialmente aos que partilharam a sala 204-A comigo, ao Sal, à Mônica, ao Teotônio, a Tuca, ao Marcelo, ao Zé Roberto
- Aos meus irmãos, Marco, Jamir e Leyla pela eterna amizade e carinho
- A todos aqueles que reconhecem em mim um amigo e que peço que não se sintam diminuídos por não terem sido aqui citados
- À CAPES e ao CNPQ, pelo apoio financeiro.

*Aos  
meus pais  
e à Stela*

*"Precisa perder o medo da musa*

*Precisa perder o medo da ciência*

*Precisa perder o medo da perda da consciência*

*O que se vê não ~~de~~ via*

*O que se crê não se cria*

**Titãs "**

## RESUMO

O método variacional foi usado para estudar a possibilidade de existência de um vácuo composto da Eletrodinâmica Quântica. Um ansatz contendo um condensado de pares elétron-pósitron foi investigado e uma equação de otimização para a função de onda do condensado foi encontrada. A prescrição de renormalização utilizada quebrou a simetria de escala inicialmente presente no Lagrangiano. A equação de otimização foi rededuzida resolvendo-se a equação de Schwinger-Dyson para a auto-energia do elétron. Expressões tanto para a massa dinamicamente gerada para o elétron, em termos da função de onda dos pares, quanto para a dependência da constante de acoplamento com o parâmetro de massa (ponto de renormalização) foram apresentadas.

Nossos cálculos, entretanto, nos levaram a concluir que, pelo menos dentro de nossa abordagem, não é possível a existência de tal vácuo composto da Eletrodinâmica Quântica.

## ABSTRACT

The variational method was used to study the possibility of existence of a composed vacuum of the Quantum Electrodynamics. An ansatz containing a condensate of electron-positron pairs was investigated and an optimization equation for the condensate wave function was encountered. The renormalization prescription used broke the scale symmetry initially present in the Lagrangian. Once more the optimization equation was derived. This time this was done by the resolution of the Schwinger-Dyson equation to the electron self-energy. An expression to the dynamically generated mass of the electron, in terms of the condensate wave function, was presented, as well as the mass parameter dependence of the coupling constant.

Our calculations, however, lead us to conclude that the existence of such composed vacuum of the Quantum Electrodynamics is not possible, at least within our approach.

## ÍNDICE

<b>Capítulo 1</b>	<b>1</b>
<b>Introdução</b>	
Referências	6
<b>Capítulo 2</b>	<b>7</b>
<b>Campos Básicos</b>	
2.1) Campo Eletromagnético	8
2.2) Quantização	12
2.3) Campo de Dirac	14
2.4) Quantização	19
2.5) Equação de Dirac sem massa	21
Referências	23
<b>Capítulo 3</b>	<b>24</b>
<b>Estrutura do Vácuo Composto da E.D.Q.</b>	
3.1) Valor Esperado do Hamiltoniano no vácuo	26
3.2) Anzats para o vácuo da fase forte	31
3.3) Equação de gap para $\Psi$	34
3.4) Renormalização	38
3.5) Analogia com a equação de Schwinger-Dyson	47
Referências	54
<b>Capítulo 4</b>	<b>55</b>
<b>Conclusões</b>	



# CAPÍTULO 1

## Introdução

Desde os seus primeiros tempos, o homem, por razões das mais diversas, tem buscado com os meios que possui, um entendimento de si mesmo e do mundo que o cerca.

Foi assim que, na mais primitiva antiguidade, levados principalmente por questões de sobrevivência, buscaram o domínio de utensílios que lhes auxiliassem na obtenção das coisas de que mais necessitavam.

Com o passar do tempo e a evolução de sua capacidade mental, pôde o homem utilizar-se de seu maior dote, o privilégio de pensar, para tentar desvendar os segredos daqueles acontecimentos que lhe conferiria poderes dos mais nobres e cobiçados, os fenômenos naturais.

Essa busca dos mistérios da natureza e de seus fenômenos, que até Aristóteles não era ainda diferenciada da Filosofia, foi aos poucos e com muito sacrifício, revelando ao homem fatos que a crença comum não julgaria reais.

A Física situa-se então, dentro do conjunto de intelectualidades humanas, como uma das mais ricas e abrangentes ciências da natureza.

Fortemente fundamentado na Matemática, o Físico tenta através de suas teorias, descrever e compreender os acontecimentos naturais terrestres e até mesmo extra-terrestres.

Para que uma teoria física seja aceita como uma boa interpretação destes acontecimentos, ela deve satisfazer a dois princípios básicos de consistência:

- 1) consistência interna : com isso queremos dizer que a teoria deve ser logicamente coerente, ou seja, que sua estrutura matemática e lógica não nos conduza a resultados ambíguos.
- 2) consistência externa : os resultados apresentados pela teoria devem ser comprovados através de experiências criteriosamente elaboradas com este intuito.

Atualmente, uma das teorias físicas mais bem comprovadas experimentalmente é aquela que vem descrever fenômenos relacionados às interações luz-matéria, conhecida com o elegante nome de Eletrodinâmica Quântica (E.D.Q.).

Quase todo o sucesso conseguido pela E.D.Q. está ligado a um método de aproximação, o método perturbativo. Porém, ligados a este método estão também os maiores problemas desta teoria.

Já há muito se sabe que, não somente as soluções em séries perturbativas para a E.D.Q. são, na melhor das hipóteses, assintóticas [1], como também, até energias muito altas ou distâncias muito curtas, a análise perturbativa indica-nos que a teoria é inconsistente ou no mínimo trivial. Esta última característica desagradável da E.D.Q. é conhecida como o " Fantasma de Landau " ou " zero de Moscou " [2].

Na linguagem de teoria de campos dizemos que, no limite de altas energias, para qualquer valor da constante de acoplamento  $\alpha_0$ , os efeitos da polarização do vácuo levam-nos a um zero da constante de acoplamento "running" [3],  $\alpha(r)$ , ou seja, até distâncias bastante curtas

$$\alpha(r) = 0 \text{ para } r > 0$$

$$\text{e } \alpha(0) = \alpha_0$$

Em 1954, Gell-Mann and Low [4] indicaram que a E.D.Q. somente existiria em tal limite, se a constante de acoplamento nua,  $\alpha_0$ , fosse determinada por um zero ultravioleta estável da função  $\beta$  (beta) do grupo de renormalização [3].

Nos anos 60, estudos no sentido de determinar tal zero da função  $\beta$  foram realizados [5], sem contudo dar-nos uma resposta definitiva.

Todavia recentemente, Miransky e colaboradores têm apontado que uma teoria de campo não trivial pode ser obtida se partirmos da E.D.Q. sem massa (do férmion), na região de altos momentos. Isso acontece mesmo que o acoplamento da E.D.Q. usual se anule nessa região [6].

Nesse esquema de obtenção da E.D.Q. não trivial, o ingrediente indispensável é a existência de quebra espontânea de simetria quiral. Miransky observou que, para valores suficientemente grandes da constante de acoplamento nua da E.D.Q. sem massa,  $\alpha_0 \cong 1$ , o mecanismo de quebra de simetria quiral levaria a uma contribuição para a massa do férmion e, além disso, do ponto de vista do grupo de renormalização, o valor crítico,  $\alpha_c$ , separando as fases massiva e sem massa seria um ponto ultra-violeta estável da função  $\beta$  [6].

Notamos entretanto, que esse ponto ultravioleta estável da função  $\beta$  proposto por Miransky não surge como uma consequência interna da teoria, mas sim é uma hipótese externa a teoria que parece resolver este problema da trivialidade da E.D.Q. [7].

Vale aqui lembrar que, todas tentativas de resolver o problema do Fantasma de Landau acima citadas não utilizam o método perturbativo, o que é obvio, mas sim métodos de aproximação auto-consistentes, via equações integrais para as funções de Green da teoria, tipo Schwinger-Dyson e Bethe-Salpeter [8].

Até pouco tempo atrás, a resolução deste problema da E.D.Q. tinha dois objetivos. Um era o de tornar a E.D.Q., além de muito bem comprovada experimentalmente, também internamente consistente. O outro era o de utilizar a E.D.Q. como um guia para as possíveis realizações da teoria mais aceita hoje em dia para as forças nucleares fortes, a Cromodinâmica Quântica (C.D.Q.).

Entretanto, tal fase não perturbativa da E.D.Q. aparece como um bom candidato para explicar os estranhos resultados de experimentos envolvendo colisões de íons pesados até altas energias [7,9]. O que só vem aumentar o interesse neste problema.

Esses experimentos de colisões de íons pesados até energias por volta de 6 MeV por nucleon, tinham como interesse inicial a observação da emissão espontânea de pósitrons, prevista teoricamente [10]. Os dados obtidos, entretanto, não apresentavam as características esperadas: os picos de emissão de pósitrons eram muito estreitos, sua posição não mudava apreciavelmente com o número atômico,  $Z$ , e os picos eram observados para  $Z$ 's menores do que aqueles necessários à ocorrência do fenômeno.

Dadas estas evidências, um dos grupos que realizavam tais experimentos (EPOS group) ofereceu a explicação de que um objeto neutro (carga zero), essencialmente em repouso no centro de massa (momento zero), estava decaindo até pares elétron-pósitron.

Para testar tal hipótese, modificaram-se os detectores de modo a incluir detectores de elétrons e passaram a procurar elétrons e pósitrons em coincidência. Foram encontrados então três picos de elétrons e pósitrons em coincidência, com as seguintes características : as posições dos picos são independentes de  $Z$  e os elétrons e pósitrons têm mesma energia e direção, só que sentidos opostos. As somas das energias + massas destes picos são : 1.64 MeV, 1.77 MeV e 1.83 MeV [7].

Raciocinando por inversão temporal, deveria ser possível encontrar tais picos em colisões entre elétrons e pósitrons de baixa energia (espalhamento Bhabha). Entretanto os resultados são negativos [11]. Isto indica-nos então que os campos eletromagnéticos de fundo, presentes nas colisões de íons pesados, são de importância crucial na produção destes estados.

Uma tentativa de explicar tais dados, utilizando-se a fase não perturbativa da E.D.Q. acima citada, é a seguinte :

Quando os íons pesados colidem, dando origem a um núcleo super pesado instável, a presença de campos de fundo fortes e que variam rapidamente induziria uma transição de fase para o vácuo não perturbativo da E.D.Q. . Esse vácuo seria um estado composto de pares elétron-pósitron. Depois que os íons se separassem e os campos enfraquecessem, este novo vácuo da E.D.Q. tornar-se-ia metaestável, ou seja, um falso vácuo, que eventualmente decairia liberando os elétrons e pósitrons. Uma vez que os campos não são agora intensos, os elétrons e pósitrons poderiam sair com energias iguais e em sentidos opostos.

Note que, nessa explicação, temos usado que o vácuo desta nova fase seria um estado composto de pares elétron-pósitron. Um tal estado é conhecido, é o positrônio. Contudo, os níveis de energia do positrônio estão todos situados abaixo de  $2m_e = 2 \times 0.5 \text{ MeV} = 1.0 \text{ MeV}$ , o que não daria conta dos picos observados experimentalmente. Portanto devemos supor que estes estados são pares elétron-pósitron, os quais têm associados uma escala de massa superior a usual.

Uma maneira de gerarmos uma nova escala de massa é através da quebra espontânea de simetria quiral, de tal forma que o elétron tenha uma contribuição para sua massa e, dessa maneira, os estados ligados possam estar nas vizinhanças de 1.7 MeV.

Não havíamos apontado antes mas, Miransky também ressaltou que, uma das características da fase de acoplamento forte da E.D.Q. seria a aparição de uma interação induzida, tipo Yukawa, entre férmions, anti-férmions e bósons pseudoescalares compostos [6].

Vemos então que, muito mais do que razões de consistência interna da E.D.Q. e de problemas relacionados com a C.D.Q. podem nos levar a estudar o fantasma de Landau, já que a ele está ainda relacionada uma explicação razoável de dados experimentais.

Dentro das abordagens teóricas deste problema, a mais utilizada tem sido o estudo das equações de Schwinger-Dyson e Bethe-Salpeter, que vale lembrar, só são solúveis com aproximações bastante fortes.

Outra abordagem não perturbativa que tem sido utilizada para o estudo de quebra dinâmica de simetria quiral e a geração de massa na C.D.Q., é uma aproximação variacional ao vácuo da teoria[12]. As aproximações são introduzidas via o ansatz escolhido para o vácuo.

Nosso programa é estudar a Eletrodinâmica (originalmente) sem massa pelo método variacional, fazendo um ansatz para o vácuo, como um estado coerente de elétrons e

pósitrons. Também veremos a possibilidade de geração dinâmica de massa para o elétron, bem como a possível existência de uma fase de acoplamento forte da teoria.

As etapas do nosso trabalho podem ser postas da seguinte maneira:

- a) Estabelecemos um ansatz para o vácuo quebrado da E.D.Q. como um estado coerente de elétrons e pósitrons, construído sobre o vácuo original (estado de não partículas) da teoria. Este ansatz é inspirado em proposta semelhante [12] para a C.D.Q.. O parâmetro variacional a ser otimizado é a função de onda relativa  $\Psi(|\vec{p}|)$  dos pares elétron-pósitron que compõem o estado "fundamental" na fase quebrada.
- b) Calculamos o valor esperado  $E[\Psi] = \langle \Psi | H | \Psi \rangle$  da energia desse estado usando uma transformação de Bogoliubov-Valatin.
- c) Obtemos a equação de "gap", isto é, a equação de otimização da energia desse novo possível vácuo da teoria  $\left( \frac{\delta E[\Psi]}{\delta \Psi(|\vec{p}|)} = 0 \right)$ .
- d) Como subsídio extra à intuição, uma relação entre a aproximação variacional e um cálculo pelas equações de Schwinger-Dyson (S.D.) é estabelecida, permitindo entender melhor o significado da aproximação variacional.
- e) A relação entre  $\Psi(|\vec{p}|)$  e a massa gerada para o férmion e também uma expressão para a função  $\beta$  da teoria são estabelecidas.
- f) O zero da função que pudemos achar, nos levou à conclusão de que, pelo menos dentro de nossa abordagem, a E.D.Q. é uma teoria livre.

Aqui um esclarecimento é necessário. Como em geral em qualquer cálculo em Teoria Quântica de Campos, a equação de  $\Psi(|\vec{p}|)$  é assolada por divergências ultra-violeta. A definição da teoria se dá achando uma prescrição de renormalização das constantes que são introduzidas na Lagrangiana, de modo a fazer finitas todas as grandezas físicas derivadas da teoria. Em abordagens autoconsistentes, usando as equações de S.D. ou método variacional é possível achar mais de uma prescrição, levando a soluções da teoria com características físicas diferentes em diferentes fases do modelo. É assim com a proposta de Miransky de uma renormalização aditiva extra à carga da E.D.Q..

Estrutura da dissertação : O capítulo 2 é uma recapitulação da quantização do campo eletromagnético no gauge de Coulomb e do campo de Dirac sem massa. No capítulo 3 apresentamos inicialmente o cálculo da renormalização de fundo da teoria e em seguida introduzimos o ansatz para o vácuo da possível fase quebrada. Depois de uma transformação de Bogoliubov-Valatin, calculamos a equação de gap para a função de onda do estado ligado elétron-pósitron presente no ansatz  $|\Psi \rangle$ . Uma vez obtida essa equação de gap, partimos para sua renormalização. O capítulo é concluído com uma ponte entre nosso cálculo variacional e análises via equações de S.D.. O capítulo 4 compreende nossas conclusões.

## Referências

- [1] J.D.Bjorken and S.D.Drell, "Relativistic Quantum Fields" (McGraw-Hill Book Co., New York, 1965)
- [2] L.D.Landau in, "Niels Bohr and the Development of Physics", ed. by W.Pauli (McGraw-Hill Book Co., New York, 1955)
- [3] K.Huang, "Quark, Leptons and Gauge Fields" (World Scientific, Singapore, 1982)
- [4] M.Gell-Mann and F.Low, Phys.Rev. **95**(1954),1300
- [5] K.Johnson, M.Baker and R.Willey, Phys.Rev. **136B**(1964),111 and **163**(1967),1699  
S.L.Adler and W.A.Bardeen, Phys.Rev. **D4**(1971),3045  
S.L.Adler, Phys.Rev. **D5**(1972),3021
- [6] V.A.Miransky, Nuovo Cimento **90A**(1985),149
- [7] D.G.Caldi, Comments on Nucl.Part.Phys. **19**(1989),137
- [8] C.Itzykson and J.D.Zuber, "Quantum Field Theory" (McGraw-Hill Book Co., New York, 1980)
- [9] T.Cowan and J.Greenberg in, "Physics of Strong Fields", ed. by W.Greiner (Plenum, New York, 1987)
- [10] B.Müller, J.Rafelski and W.Greiner, Z.Phys. **257**(1972),62
- [11] A.P.Mills, Jr. and J.Levy, Phys.Rev. **D36**(1987),707
- [12] J.Finger and J.Mandula, Nucl.Phys **B199**(1982),168  
S.L.Adler and A.C.Davies, Nucl.Phys. **B244**(1984),469

## CAPÍTULO 2

### Campos Básicos

## 2.1) O Campo Eletromagnético

As equações de Maxwell, que governam os fenômenos eletromagnéticos, são escritas abaixo em sua forma diferencial

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \quad (2.1.1a) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.1.1b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.1.1c) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J} \quad (2.1.1d)$$

Derivando (2.1.1a) com respeito ao tempo e tomando o divergente de (2.1.1d), obteremos a equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J} \quad (2.1.2)$$

A resolução das equações de Maxwell em termos das intensidades de campo,  $\vec{E}(\vec{x}, t)$  e  $\vec{B}(\vec{x}, t)$ , só é possível em casos bastante simples. Para atacarmos problemas mais complexos é necessário que escrevamos os campos em função do potencial vetor,  $\vec{A}(\vec{x}, t)$  e do potencial escalar  $\phi(\vec{x}, t)$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2.1.3a)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (2.1.3b)$$

Estas relações, claramente, satisfazem as duas equações não homogêneas de Maxwell, (2.1.1b) e (2.1.1c).

Quando substituirmos (2.1.3) nas duas equações não homogêneas de Maxwell, obteremos um sistema de equações diferenciais parciais de segunda ordem acopladas

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})}{\partial t} = -\rho \quad (2.1.4a)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \left[ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] = \vec{J} \quad (2.1.4b)$$

onde  $\rho$  é a densidade de carga e  $\vec{J}$  a densidade de corrente.

Contudo, os potenciais  $\vec{A}(\vec{x}, t)$  e  $\phi(\vec{x}, t)$  não definem univocamente os campos  $\vec{E}(\vec{x}, t)$  e  $\vec{B}(\vec{x}, t)$  pois, se fizermos a transformação



$$\begin{aligned}\vec{A} &\longrightarrow \vec{A}^* = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \\ \phi &\longrightarrow \phi^* = \phi + \frac{\partial\Lambda}{\partial t}\end{aligned}$$

onde  $\Lambda$  é uma função escalar arbitrária, os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  (que são as quantidades fisicamente relevantes) permanecerão inalterados.

Essa liberdade na definição de  $\vec{A}$  e  $\phi$ , chamada liberdade de gauge, pode ser utilizada de modo a facilitar-nos a resolução das equações (2.1.4). A escolha de um determinado gauge depende exclusivamente da caracterização do problema a ser atacado.

O gauge que utilizaremos daqui para diante é o chamado "gauge de Coulomb", definido por [1]

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) = 0 \quad (2.1.5)$$

Dessa maneira, as equações (2.1.4) tomam a seguinte forma

$$-\nabla^2 \phi = \rho \quad (2.1.6a)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \vec{J} \quad (2.1.6b)$$

A equação (2.1.6a) tem como solução

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{\rho(\vec{y}, t)}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (2.1.7)$$

visto que

$$\nabla_x^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{y})$$

Se usarmos que a corrente  $\vec{J}(\vec{x}, t)$  pode ser escrita como a soma de dois termos, uma componente longitudinal e outra transversal

$$\vec{J} = \vec{J}_l + \vec{J}_t$$

tal que,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_t = 0$  e  $\vec{\nabla} \times \vec{J}_l = 0$  e notarmos que da identidade

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{J}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) - \nabla^2 \vec{J}$$

$\vec{J}_t$  e  $\vec{J}_l$  podem ser obtidos diretamente de  $\vec{J}$ , via

$$\begin{aligned}\vec{J}_l &= -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}_x \int d^3y \frac{\vec{\nabla}_y \cdot \vec{J}(\vec{y}, t)}{|\vec{x} - \vec{y}|} \\ \vec{J}_t &= \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left[ \vec{\nabla} \times \int d^3y \frac{\vec{J}(\vec{y}, t)}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right]\end{aligned}$$

chegaremos a conclusão de que, com a utilização de (2.1.2),

$$\vec{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\vec{J}_1 \quad (2.1.8)$$

o que, substituindo em (2.1.6b) dar-nos-á

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{J}_t \quad (2.1.9)$$

Soluções arbitrárias para a equação homogênea associada a (2.1.9) que também satisfazem a condição de gauge (2.1.5), podem ser escritas em termos de ondas planas,

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{2|\vec{p}|} \sum_{j=1}^2 \vec{\epsilon}_j \left[ e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} a_j(\vec{p}) + e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} a_j^\dagger(\vec{p}) \right] \quad (2.1.10)$$

onde  $\vec{\epsilon}_j$ ,  $j = 1, 2$ , são dois versores ortogonais entre si e ao vetor  $\vec{p}$ , satisfazendo portanto

$$\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_2 = \vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{p} = \vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{p} = 0 \quad (2.1.11a)$$

$$\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_1 = \vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{\epsilon}_2 = 1 \quad (2.1.11b)$$

e a relação de completeza, dado que formam uma base,

$$\epsilon_1^i \epsilon_1^j + \epsilon_2^i \epsilon_2^j + p^i p^j = \delta^{i,j} \quad (2.1.12)$$

ou seja,

$$\sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_\lambda^i \epsilon_\lambda^j = \delta_{i,j} - \frac{p^i p^j}{|\vec{p}|^2} \quad (2.1.13)$$

Notamos então que, com a fixação do gauge através de (2.1.5), os únicos graus de liberdade físicos do sistema são as componentes transversais dos campos em relação à direção de propagação, dada por  $\vec{p}$ . Isto é assim pois,  $\phi(\vec{x}, t)$  está completamente determinado por (2.1.7) (que é exatamente a expressão do potencial Coulombiano) para todos os instantes, e a componente longitudinal de  $\vec{A}(\vec{x}, t)$  completamente eliminada através de (2.1.8). Como podemos ver, o gauge de Coulomb é interessante quando temos  $\vec{J} = 0$ .

Até este ponto temos tratado o tempo somente como um parâmetro. Entretanto, ao dirigir nossa atenção para sistemas onde a velocidade característica é comparável àquela da luz, a relatividade entra em jogo e devemos expressar as equações de Maxwell, os campos, as correntes e cargas de uma maneira covariante, isto é, onde o tempo é tomado em pé de igualdade às coordenadas espaciais.

A quantidade covariante, que desempenha um papel fundamental, é um tensor anti-simétrico construído a partir das componentes dos campos  $\vec{E}(\vec{x}, t)$  e  $\vec{B}(\vec{x}, t)$ , chamado Tensor de Campo Eletromagnético,  $F_{\mu\nu}$ , e definido por [2]

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1.14)$$

onde  $\mu$  e  $\nu = 0, 1, 2, 3$ .

Definindo ainda o quadripotencial  $A_\mu(\mathbf{x})$  e a quadricorrente  $J_\mu(\mathbf{x})$  por

$$A_\mu(\mathbf{x}) = \left( \phi(\vec{\mathbf{x}}, t), \vec{A}(\vec{\mathbf{x}}, t) \right) \quad (2.1.15a)$$

$$J_\mu = \left( \rho(\vec{\mathbf{x}}, t), \vec{J}(\vec{\mathbf{x}}, t) \right) \quad (2.1.15b)$$

a relação entre o tensor  $F_{\mu\nu}$ , ou seja, os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  e o quadripotencial  $A_\mu$ , ou seja,  $\vec{A}$  e  $\phi$ , passa a ser dada por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.1.16)$$

com a métrica de Minkowsky,  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ , tal que

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu \quad e \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

Antes de partirmos para a quantização da teoria eletromagnética, deduziremos, rapidamente, o Hamiltoniano associado ao campo eletromagnético livre de fontes ( $J_\nu = 0$ ).

O Lagrangiano apropriado para tal situação é dado por [2]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.1.17)$$

os momentos canonicamente conjugados serão

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^0)} = 0 \quad (2.1.18a)$$

$$\pi^k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^k)} = -\partial_0 A^k - \partial_k A^0 = E^k \quad (2.1.18b)$$

Assim teremos o Hamiltoniano como:

$$\begin{aligned} H &= \int d^3 \mathbf{x} \left( \pi_k \dot{A}^k \right) = \\ &= \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{x} \left[ \vec{E}^2(\vec{\mathbf{x}}, t) + \vec{B}^2(\vec{\mathbf{x}}, t) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \phi \right] = \\ &= \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{x} \left[ \vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right] \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

onde usamos  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ .

Lembrando que a equação para  $A_0(\vec{\mathbf{x}}, t)$  será

$$\nabla^2 A_0(\vec{\mathbf{x}}, t) = 0$$

que admite a solução  $A_0(\mathbf{x}) = 0$ , e usando a expansão de  $A_k(\mathbf{x})$  em termos de ondas planas, ficaremos com o Hamiltoniano da forma

$$H = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{2p^0} \sum_{j=1}^2 \left[ a_j^\dagger(p) a_j(p) + a_j(p) a_j^\dagger(p) \right] p^0 \quad (2.1.20)$$

## 2.2) Quantização

Se fossemos quantizar da maneira canônica usual, isto é, elevando as variáveis dinâmicas,  $A_\mu(\mathbf{x})$ , e seu momento canonicamente conjugado,  $\pi_\mu(\mathbf{x})$ , à condição de operadores atuando no espaço de Hilbert dos estados físicos e impondo relações de comutação canônicas entre eles, seríamos levados a problemas pois, conforme a estrutura que tomariam,

$$[A_k(\vec{x}, t), A_l(\vec{y}, t)] = [\pi_k(\vec{x}, t), \pi_l(\vec{y}, t)] = 0 \quad (2.2.1a)$$

$$[\pi_k(\vec{x}, t), A_l(\vec{y}, t)] = -i\delta_{k,l}\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.2.1b)$$

$$[A_0(\vec{x}, t), \pi_0(\vec{y}, t)] = 0 \quad (2.2.1c)$$

teríamos, além do vínculo  $\pi_0 = 0$  (que pode ser contornado se notarmos que o operador  $A_0(\mathbf{x})$  não é um operador mas sim um número "C" pois comuta com todos os demais operadores e esta completamente determinado por (2.1.7)), que a lei de Gauss na ausência de cargas,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}, t) = 0$ , não seria satisfeita por (2.2.1b) (visto que,  $\pi^k = E^k$  e  $\vec{\nabla} \cdot (i\delta_{k,l}\delta^3(\vec{x} - \vec{y})) \neq 0$ ) mas, ao contrário, divergiria no espaço dos momentos [3].

Contudo, se tomarmos como guia para a quantização a condição de que o Hamiltoniano seja positivo definido, de tal forma que seu espectro também o seja, e impusermos relações de comutação usuais para as transformadas de Fourier dos potenciais  $A_k(\mathbf{x})$ , quais sejam

$$[a_j(p), a_l(q)] = [a_j(p)^\dagger, a_l^\dagger(q)] = 0 \quad (2.2.2a)$$

$$[a_j^\dagger(p), a_l(q)] = -2p_0\delta_{j,l}\delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \quad (2.2.2b)$$

então, teremos que as relações (2.2.1a) e (2.2.1b) serão levadas a

$$[\pi_k(\vec{x}, t), A_l(\vec{y}, t)] = -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left( \delta_{k,l} - \frac{p_k p_l}{|\vec{p}|^2} \right) e^{-i\vec{p}(\vec{x} - \vec{y})} \quad (2.2.1b^*)$$

$$\begin{aligned} [A_k(\vec{x}, t), A_l(\vec{y}, t^*)] &= \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p_0} \left( \delta_{k,l} - \frac{p_k p_l}{|\vec{p}|^2} \right) \left[ e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)} \right] \end{aligned} \quad (2.2.1a^*)$$

Notemos agora que a lei de Gauss na ausência de cargas será satisfeita por (2.2.1b\*) [3] e que (2.2.1a\*), para tempos iguais, será igual a zero, como desejado. Contudo, será diferente de zero para distâncias tipo-espaço. Assim sendo, os potenciais passam a ser vistos como quantidades não locais. Entretanto, não devemos nos preocupar com isto pois, os potenciais não são, na realidade, as quantidades físicas relevantes para o problema, mas sim os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , que podem ser verificados locais [4].

Observando o Hamiltoniano (2.1.19) vemos que, se definirmos o vácuo da teoria ( $|0\rangle$ ) como sendo aniquilado por  $a_j(p)$ , ou seja

$$a_j(p)|0\rangle = 0 \quad (2.2.3)$$

e adotarmos a ordenação de Wick para o produto de campos [5],

$$: a_j^\dagger(p) a_j(p) : := a_j(p) a_j^\dagger(p) + \langle 0 | a_j(p) a_j^\dagger(p) | 0 \rangle$$

o Hamiltoniano seria levado a

$$H = \int \frac{d^3(p)}{2p^0} \sum_{j=1}^2 [a_j^\dagger(p) a_j(p)] p^0 \quad (2.2.4)$$

que tem o valor esperado no vácuo igual a zero.

Das relações de comutação (2.2.2), podemos facilmente ver que o estado  $a_j^\dagger(p)|0\rangle$ , terá conteúdo de energia (e também de momento) igual ao de uma partícula sem massa, que chamaremos fóton. Dessa forma, diremos ser  $a_j^\dagger(p)$  o operador que cria fótons de momento  $\vec{p}$ , energia  $p^0$  e polarização  $j$  a partir do vácuo. De maneira análoga  $a_j(p)$  será o operador que destrói fótons.

### 2.3) O Campo de Dirac

O início do século 20 será sempre lembrado como um dos períodos mais renovadores para o desenvolvimento da Física. Nessa época surgiram, quase que conjuntamente, duas novas teorias que, cada uma no seu âmbito, resolviam problemas profundos da Mecânica Newtoniana, que até aquele momento era aceita como uma teoria final de todos os fenômenos físicos.

Uma destas teorias, a Relatividade, que substitui e complementa a Mecânica Newtoniana para sistemas onde a velocidade característica é próxima da velocidade da luz, surgia quase como uma imposição das equações de Maxwell (2.1.1).

Devido às consequências bastante polêmicas a que levava esta teoria, só com muito custo e trabalho árduo para sua comprovação, foi que Einstein (seu fundador) e colaboradores conseguiram que a comunidade fosse aos poucos aceitando essa nova realidade.

A outra teoria que surgia, a Quântica, que veio dar cabo de problemas relativos à sistemas cujas dimensões fossem comparáveis ou mesmo menores que aquelas de um átomo, embora também sofresse enormes resistências, teve sua validade mais prontamente verificada.

Entretanto, para sistemas como os de um elétron movendo-se ao redor de um núcleo num átomo, ambas teorias deveriam ser combinadas pois, as dimensões e velocidades características se enquadram dentro de seus limites de aplicabilidade.

Uma primeira tentativa de acoplar estas teorias foi a chamada equação de Klein-Gordon [3] que, todavia, apresentava problemas, já que dava origem a auto-estados de energia negativa e não apresentava uma densidade de probabilidade positiva definida, requisito exigido para uma teoria quântica.

Dirac contudo, propôs uma equação que resolvia o problema da densidade de probabilidade e também, posteriormente, deu uma interpretação para os estados de energia negativa, que evoluiria, no formalismo da segunda quantização, para o conceito de anti-partícula [5].

A equação proposta por Dirac foi

$$(i\partial - m)\psi(x) = 0 \quad (2.3.1)$$

onde  $\psi(x)$  é um bi-espinor

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix} \quad (2.3.2)$$

tal que  $\varphi(x)$  e  $\chi(x)$  tem duas componentes cada e  $\partial = \gamma^\mu \partial_\mu$ , sendo  $\gamma^\mu$  matrizes  $4 \times 4$  as quais obedecem as relações de anticomutação

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (2.3.3)$$

com  $g^{\mu\nu}$  a métrica de Minkowsky;  $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ .

Uma possível representação das matrizes  $\gamma^\mu$  é:

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (2.3.4a)$$

$$\gamma^k = \beta \alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3.4b)$$

onde  $I$  é a identidade  $2 \times 2$  e os  $\sigma^k$  são as matrizes de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.3.5)$$

Podemos verificar facilmente que a equação de Dirac (2.3.1) (juntamente com sua adjunta) é dedutível do seguinte Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x) (i\not{\partial} - m)\psi(x) \quad (2.3.6)$$

sendo, dessa maneira, imediato obtermos a expressão para o Hamiltoniano, visto que o momento canonicamente conjugado a  $\psi(x)$  será

$$\pi_\psi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)} = i\bar{\psi}(x)\gamma^0 = i\psi^\dagger(x) \quad (2.3.7)$$

O campo  $\bar{\psi}(x)$  é o chamado adjunto de  $\psi(x)$  e foi definido na última passagem como,  $\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x)\gamma^0$ .

Com isso teremos o Hamiltoniano dado por

$$H = \int d^3x \psi^\dagger(x) (-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m) \psi(x) \quad (2.3.8)$$

Uma vez escolhida uma representação para os  $\gamma^\mu$ , buscaremos agora soluções para a equação (2.3.1), na forma de ondas planas

$$\psi_\alpha(x) = e^{-ipx} w_\alpha(p) \quad (2.3.9)$$

Substituindo em (2.3.1) teremos

$$(\not{p} - m)w_\alpha(p) = 0 \quad (2.3.10)$$

A equação acima compreende um conjunto de quatro equações lineares e homogêneas nas componentes  $w_\alpha(p)$  ( $\alpha = 1, 2, 3, 4$ ), que só apresenta solução não trivial quando temos  $\det(\not{p} - m) = 0$ . Com ajuda da relação,  $(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$ , vemos que só existe solução quando

$$p^0 = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} = \pm E_p \quad (2.3.11)$$

Dessa forma, a solução em ondas planas pode ser escrita como a soma de dois termos, um para a parte de energia positiva e outro para a parte de energia negativa.

$$\psi_{\alpha}(x) = e^{-ipx} u_{\alpha}(p) + e^{ipx} v_{\alpha}(p) \quad (2.3.12)$$

onde  $p^0 > 0$  agora.

Substituindo na equação de Dirac (2.3.1), vemos que  $u^{\alpha}(p)$  e  $v^{\alpha}(p)$  devem satisfazer

$$(\not{p} - m)u(p) = 0 \quad (2.3.13a)$$

$$(\not{p} + m)v(p) = 0 \quad (2.3.13b)$$

No referencial de repouso ( $p^0 = m, \vec{p} = 0$ ) temos

$$(\gamma^0 - I)u(0) = 0 \quad (2.3.14a)$$

$$(\gamma^0 + I)v(0) = 0 \quad (2.3.14b)$$

donde podemos ver que existe ainda uma degenerescência para as soluções com energia positiva e negativa pois, cada uma das equações (2.3.14) apresenta duas soluções linearmente independentes. Isso pode ser resolvido se escolhermos  $u(0)$  e  $v(0)$  como autofunções simultâneas do operador correspondente à projeção do spin na direção  $\vec{z}$ , definido por

$$S_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (2.3.15)$$

ou seja,  $u(0)$  e  $v(0)$ , serão dados por

$$\begin{aligned} u^{(1)}(0) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & u^{(2)}(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ v^{(1)}(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & v^{(2)}(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

As soluções para referenciais movendo-se com velocidade  $\vec{v} = -\frac{\vec{p}}{m}$  em relação ao referencial de repouso, podem ser verificadas ter a forma,

$$u^r(p) = \frac{\not{p} + m}{\sqrt{2m(m + E_p)}} u^r(0) \quad (2.3.17a)$$

$$v^r(p) = \frac{-\not{p} + m}{\sqrt{2m(m + E_p)}} v^r(0) \quad (2.3.17b)$$



Essas soluções já estão normalizadas, ou seja, os  $u$ 's e  $v$ 's satisfazem as seguintes relações

$$\bar{u}_r(p)u_s(p) = -\bar{v}_r(p)v_s(p) = \delta_{r,s} \quad (2.3.18a)$$

$$u_r^\dagger(p)u_s(p) = v_r^\dagger(p)v_s(p) = \frac{E_p}{m}\delta_{r,s} \quad (2.3.18b)$$

As soluções que então obtivemos, são autofunções simultâneas do Hamiltoniano e do spin na direção  $\vec{z}$ . Quando construímos uma solução arbitrária, o fazemos como uma superposição destas autofunções, que diferem entre si por suas componentes de energia e spin.

Algumas vezes estaremos interessados em tomar só a parte de  $\psi(x)$  com energia positiva, ou spin  $+\frac{1}{2}$ , etc, e para conseguirmos isto deveremos então construir os chamados projetores.

Os operadores que tem como propriedade projetar a parte de energia positiva e/ou energia negativa,  $\Lambda_+$  e  $\Lambda_-$ , respectivamente, de um espinor genérico, são dados por [3]

$$(\Lambda_+)_{\alpha,\beta} = \sum_r u_\alpha^{(r)}\bar{u}_\beta^{(r)} = \left(\frac{\not{p} + m}{2m}\right)_{\alpha,\beta} \quad (2.3.19a)$$

$$(\Lambda_-)_{\alpha,\beta} = -\sum_r v_\alpha^{(r)}\bar{v}_\beta^{(r)} = \left(\frac{-\not{p} + m}{2m}\right)_{\alpha,\beta} \quad (2.3.19b)$$

No caso do spin, no referencial de repouso, o projetor do spin ao longo da direção  $+\vec{z}$  é dado por

$$P = \frac{I + \sigma_z}{2} = \frac{I + \gamma^5 \gamma^3 \gamma^0}{2} = \frac{I + \gamma^5 \not{\eta}_{(3)} \gamma^0}{2} \quad (2.3.20)$$

onde  $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$  e  $\eta_{(3)}$  é o quadrivetor tipo-espaço tal que

$$\eta_{(3)} = (0, 0, 0, 1)$$

$$\eta_{(3)}^2 = -1$$

$$e \quad \eta_{(3)}^\mu p_\mu = 0$$

Note que, devido a presença de  $\gamma^0$ , o projetor  $P(\eta)$  não é covariante. Entretanto, podemos fazê-lo covariante se usarmos que, no referencial de repouso,  $\gamma^0$  atuando sobre o espinor de Dirac torna-se  $\pm 1$ . Assim definimos o seguinte projetor covariante

$$\pi(\eta_{(3)}) = \frac{I + \gamma^5 \not{\eta}_{(3)}}{2} \quad (2.3.21)$$

ou, para um  $\eta$  genérico, satisfazendo  $\eta^2 = 1$  e  $\eta^\mu p_\mu = 0$

$$\pi(\eta) = \frac{I + \gamma^5 \not{\eta}}{2} \quad (2.3.22)$$

Portanto no referencial de repouso teremos

$$\begin{aligned} \pi(\eta_{(3)})u^{(1)}(0) &= u^{(1)}(0) & \pi(\eta_{(3)})u^{(2)}(0) &= 0 \\ \pi(-\eta_{(3)})u^{(2)}(0) &= u^{(2)}(0) & \pi(-\eta_{(3)})u^{(1)}(0) &= 0 \\ \pi(\eta_{(3)})v^{(2)}(0) &= v^{(2)}(0) & \pi(\eta_{(3)})v^{(1)}(0) &= 0 \\ \pi(-\eta_{(3)})v^{(1)}(0) &= v^{(1)}(0) & \pi(-\eta_{(3)})v^{(2)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

e por causa da covariância do operador de projeção, podemos ainda escrever, para um  $\eta$  genérico

$$\begin{aligned} \pi(\eta)u(p, \eta) &= u(p, \eta) \\ \pi(\eta)v(p, \eta) &= v(p, \eta) \\ \pi(-\eta)u(p, \eta) &= \pi(\eta)v(p, \eta) = 0 \end{aligned}$$

Em particular, para  $\eta_h = \left( \frac{|\vec{p}|}{m}, \frac{p^0}{m} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \right)$ ,  $\pi(\eta_h)$  projeta sobre estados com  $\text{spin } \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{2} = \frac{1}{2}$ , ou seja, projeta o spin paralelamente a direção do movimento. Esses estados são chamados de “estados de helicidade” [4].

Temos até aqui falado, sem maiores preocupações, de soluções da equação de Dirac que apresentam autovalor negativo de energia. Vejamos o que isto quer dizer.

Se pudessemos dizer, “ora, o que nos interessa são os elétrons de energia positiva, então descartamos as soluções de energia negativa e o problema estará resolvido”. Isso seria verdade no caso de uma partícula livre, onde a probabilidade de transição de um estado de energia positiva para um estado de energia negativa é zero. Contudo, quando tivermos a presença de uma fonte externa acoplada ao campo livre, essa probabilidade deixa de ser zero e o problema reaparece, apesar de tal transição não ter sido observada até hoje [6].

Uma solução para este problema das energias negativas foi proposta por Dirac em 1930, sendo chamada de “teoria do buraco” [6]. Ele supôs que, no vácuo, todos os estados de energia negativa estivessem ocupados. Assim as transições entre estados de energia positiva para estados de energia negativa estariam, pelo princípio de Pauli, proibidas. Entretanto, elétrons pertencentes a esse “mar” de energia negativa poderiam absorver radiação e transicionar para estados de energia positiva. O buraco deixado pelos elétrons de energia negativa e carga  $-|e|$  seriam interpretados, por um observador fazendo medidas relativas ao vácuo, como um elétron de energia positiva e carga  $+|e|$ , não sendo portanto um elétron, mas sim o que passaremos a chamar de pósitron, que mais adiante seria observado experimentalmente.

Vemos então que a teoria do buraco leva-nos necessariamente a uma teoria de muitas partículas.

A assimetria de cargas, que traz no seu bojo essa suposição, foi contornada mais tarde, dentro do formalismo da teoria quântica de campos, pelo conceito de anti-partícula.

## 2.4) Quantização

Iniciaremos observando que uma solução arbitrária de (2.3.1) pode ser escrita como

$$\psi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{m}{E_p} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_s [b_s(p) u_s(p) e^{-ipx} + d_s^\dagger(p) v_s(p) e^{ipx}] \quad (2.4.1a)$$

$$\psi^\dagger(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{m}{E_p} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_s [b_s^\dagger(p) u_s^\dagger(p) e^{ipx} + d_s(p) v_s^\dagger(p) e^{-ipx}] \quad (2.4.1b)$$

Nosso guia para a quantização será novamente a condição de que o espectro de energia seja positivo definido. Examinaremos então o Hamiltoniano (2.3.8) da teoria, com  $\psi(\mathbf{x})$  e  $\psi^\dagger(\mathbf{x})$  substituídos por (2.4.1). Teremos, depois de algumas passagens

$$H = \sum_r \int d^3 p \left( \frac{m}{E_p} \right) [b_r^\dagger(p) b_r(p) - d_r(p) d_r^\dagger(p)] E_p \quad (2.4.2)$$

Podemos observar que o Hamiltoniano não é positivo definido e assim, a energia não é limitada inferiormente. Contudo, se impusermos a seguinte regra de anti-comutação

$$\{d_r^\dagger(p), d_s(p)\} = \text{numero } C \quad (2.4.3)$$

ficaremos com o Hamiltoniano, a menos de uma constante, dado por

$$H = \sum_r \int d^3 p \left( \frac{m}{E_p} \right) [b_r^\dagger(p) b_r(p) + d_r^\dagger(p) d_r(p)] E_p \quad (2.4.4)$$

Isto nos sugere que devemos impor regras de anti-comutação para quantizarmos o campo de Dirac, ou seja, devemos ter

$$\{\psi^\alpha(\vec{x}, t), \psi^\beta(\vec{y}, t)\} = \{\psi^{\dagger\alpha}(\vec{x}, t), \psi^{\dagger\beta}(\vec{y}, t)\} = 0 \quad (2.4.5a)$$

$$\{\psi^\alpha(\vec{x}, t), \psi^{\dagger\beta}(\vec{y}, t)\} = \delta^{\alpha,\beta} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.4.5b)$$

o que nos leva às seguintes regras de anticomutação para os  $b$ 's e  $d$ 's

$$\{d_r(p), d_s^\dagger(q)\} = \{b_r(p), b_s^\dagger(q)\} = \delta_{r,s} \frac{E_p}{m} \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \quad (2.4.6)$$

e todos os outros anticomutadores iguais a zero.

Se levarmos em conta a seguinte regra de anticomutação

$$\{A, BC\} = \{A, B\}C - B\{A, C\}$$

e calcularmos os anticomutadores dos  $b$ 's e  $d$ 's com o Hamiltoniano, teremos

$$\begin{aligned} [d_r(p), H] &= E_p d_r(p) & [b_r(p), H] &= E_p b_r(p) \\ [d_r^\dagger(p), H] &= E_p d_r^\dagger(p) & [b_r^\dagger(p), H] &= E_p b_r^\dagger(p) \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Poderemos então definir o vácuo da teoria ( $|0\rangle$ ), de forma que o valor esperado do Hamiltoniano nesse vácuo seja um mínimo, ou seja, o vácuo deverá ser aniquilado por  $b_r(p)$  e  $d_r(p)$

$$b_r(p)|0\rangle = d_r(p)|0\rangle = 0 \quad (2.4.8)$$

Observando o conteúdo de energia (e também de momento) dos estados obtidos através da aplicação de  $b_r^\dagger(p)$  e  $d_r^\dagger(p)$  no vácuo, poderemos então conferir as seguintes interpretações para os operadores  $b$ 's e  $d$ 's

$b_r^\dagger(p)(b_r(p))$  = operador de criação (destruição) de elétrons de momento  $\vec{p}$ , energia  $E_p$  e spin  $r$

$d_r^\dagger(p)(d_r(p))$  = operador de criação (destruição) de pósitrons de momento  $\vec{p}$ , energia  $E_p$  e spin  $r$

Os estados de  $n$  pósitrons e  $m$  elétrons de momentos  $p_n$  e  $q_m$ , energias  $E_{p,n}$  e  $E_{q,m}$  e spins  $s_n$  e  $r_m$  serão então obtidos da seguinte forma

$$\begin{aligned} & b_{r_1}^\dagger(q_1) \dots b_{r_m}^\dagger(q_m) d_{s_1}^\dagger(p_1) \dots d_{s_n}^\dagger(p_n) |0\rangle = \\ & = |q_1, q_2, \dots, q_m, p_1, p_2, \dots, p_n; r_1, \dots, r_m, s_1, \dots, s_n\rangle \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

## 2.5) Equação de Dirac sem massa

A motivação para o estudo de uma tal equação, a qual é obtida de (2.3.1) fazendo-se  $m = 0$ , ou seja

$$(i\partial)\psi(x) = 0 \quad (2.5.1a)$$

poderia ser aquela de que, na realidade, as partículas que essa equação descreveria após sua quantização, verdadeiramente existem. São os neutrinos, que tem massa zero, spin  $\frac{1}{2}$  e carga zero. Contudo, podemos ainda pensar no caso em que temos elétrons e/ou pósitrons massivos até energias muito altas, onde quase toda energia da partícula se concentra no momento que ela carrega.

Observando que (2.5.1a) pode ainda ser escrita como

$$\not{p}\psi(x) = 0 \quad (2.5.1b)$$

e multiplicando (2.5.1b) à direita por  $\gamma^5\gamma^0 = -i\gamma^1\gamma^2\gamma^3$  teremos,

$$\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}\psi(x) = \gamma^5 p^0 \psi(x) \quad (2.5.2)$$

onde  $\vec{\Sigma} = \gamma^5\gamma^0\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$ .

Buscando agora soluções tipo onda plana para (2.5.1b) e escrevendo a parte de energia positiva como

$$\psi(x) = e^{-ipx}U(p) \quad (2.5.3)$$

vemos que a aplicação de (2.5.1a) sobre (2.5.3) nos levará a seguinte condição

$$p^2 = 0 \quad \text{com} \quad p^0 = E_p = |\vec{p}| \quad (2.5.4)$$

o que implica que podemos escrever (2.5.2) como

$$\vec{\Sigma} \cdot \hat{p}\psi(x) = \gamma^5 \psi(x) \quad (2.5.5)$$

Notemos então que, pela estrutura de  $\vec{\Sigma}$ , o operador do lado direito de (2.5.5) é o operador helicidade e a matrix  $\gamma^5$  do lado esquerdo de (2.5.5) é o chamado operador de quiralidade da partícula [7]. Portanto nesse caso, a quiralidade é igual a helicidade. Poderíamos ver ainda que, no caso de soluções em ondas planas, para a parte de energia negativa, a quiralidade seria igual a menos a helicidade. Esta associação entre quiralidade e helicidade facilita-nos a busca por  $U$ 's e  $V$ 's de helicidade definida, o que nos é importante pois, assim eliminaremos a degenerescência que ainda observamos nas soluções com energia bem definida.

A simplificação vem do fato que a matriz de quiralidade,  $\gamma^5$ , na representação que estamos empregando para os  $\gamma^\mu$  será

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto os  $U's$  e  $V's$ , autofunções do operador helicidade, deverão satisfazer

$$\begin{aligned} \gamma^5 U_s(p) &= s U_s(p) \\ \gamma^5 V_s(p) &= -s V_s(p) \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

onde  $s = \pm 1$

Podemos verificar que os seguintes  $U's$  e  $V's$  satisfazem (2.5.6)

$$\begin{aligned} U_+(p) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \text{sen} \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \\ \cos \frac{\theta}{2} \\ \text{sen} \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} & U_-(p) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\text{sen} \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \cos \frac{\theta}{2} \\ \text{sen} \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ -\cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ V_+(p) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \text{sen} \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \\ -\text{sen} \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} & V_-(p) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ -\text{sen} \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ -\text{sen} \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

onde  $\theta$  e  $\varphi$  são os ângulos polares de  $\vec{p}$

Além de (2.5.6), esse  $U's$  e  $V's$  também satisfazem

$$\begin{aligned} \sum_s U_s(p) U_s^\dagger(p) &= \sum_s V_s(p) V_s^\dagger(p) = \frac{1}{2} (I - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} \gamma^0) \\ \gamma^0 s V_s(-p) &= U_s(p) \\ U_r^\dagger(p) U_r(p) &= V_s^\dagger(p) V_s(p) = \delta_{r,s} \\ \bar{U}_s(p) U_r(p) &= \bar{V}_s(p) V_r(p) = 0 \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

Podemos então escrever uma solução arbitrária para (2.5.1) como

$$\psi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_s [b_s(p) U_s(p) e^{-ipx} + d_s^\dagger(p) V_s(p) e^{ipx}] \quad (2.5.9)$$

Se seguíssemos os passos do processo de quantização da seção (2.4), veríamos que as relações de comutação a serem satisfeitas pelos  $\psi's$ ,  $b's$  e  $d's$  seriam

$$\begin{aligned} \{\psi(\vec{x}, t), \psi(\vec{y}, t)\} &= \{\psi^\dagger(\vec{x}, t), \psi^\dagger(\vec{y}, t)\} = 0 \\ \{\psi^\dagger(\vec{x}, t), \psi^\beta(\vec{y}, t)\} &= \delta^{\alpha,\beta} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{b_s^\dagger(\vec{p}, t), b_r(\vec{q}, t)\} &= \{d_s^\dagger(\vec{p}, t), d_r(\vec{q}, t)\} = \delta_{r,s} \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

e todos os outros anticomutadores iguais a zero.

Notemos que agora os  $b's$  e  $d's$  criam e destroem elétrons e pósitrons sem massa.

## Referências

- [1] J.D.Jackson, "Classical Electrodynamics" (John Wiley and Sons, New York, 1962)
- [2] L.D.Landau and E.M.Lifshitz, "The Classical Theory of Fields" (Pergamon Press, London, 1959)
- [3] B.J.Bjorken and S.D.Drell, "Relativistic Quantum Fields" (McGraw-Hill Book Co., New York, 1965)
- [4] M.Gomes, Notas de Aula do Curso "Introdução a Teoria Quântica dos Campos", 1990, USP, São Paulo-Brasil
- [5] N.N.Bogoliubov and D.V.Shirkov, "Introduction to the Theory of Quantized Fields" (Interscience Publishers, New York, 1959)
- [6] S.Schweber, "Relativistic Quantum Fields" (Harper and Row, New York, 1961)
- [7] C.Itzykson and J.B.Zuber, "Quantum Field Theory" (McGraw-Hill Book Co., New York, 1980)

## CAPITULO 3

### Estrutura do Vácuo Composto da E.D.Q.



Temos até aqui visto os campos eletromagnético e de Dirac livres de interação. Entretanto, tais desenvolvimentos não são suficientes para os processos que desejamos descrever, uma vez que é necessária a interação entre os campos para que possamos obter quantidades observáveis e, dessa forma, tornar a teoria em questão passível de verificação.

Dentro da formulação Lagrangiana de uma teoria de campos, a interação entre campos é levada em conta através da adição no Lagrangiano (até este ponto composto somente das partes livres) de termos especificamente relacionados à interação. A princípio, as formas que podem tomar estes termos de interação podem ser as mais diversas; contudo, razões de simplicidade, simetria e renormalizabilidade restringem bastante os candidatos [1].

As equações dinâmicas a que os campos devem obedecer, derivadas do Lagrangiano, serão equações não lineares, não homogêneas em que aparecem quantidades mal definidas, os produtos de campos (distribuições) no mesmo ponto. Soluções exatas para tais equações só são possíveis de se obter a duas dimensões de espaço-tempo, onde a simetria conforme subjacente fornece-nos infinitas quantidades conservadas. Já a quatro dimensões, que é o caso que estaremos tratando, as maneiras de abordagem para tais soluções são os métodos de aproximação.

O método de aproximação que utilizaremos em nossos cálculos será o método variacional. Neste método construímos um ansatz para o vácuo da teoria como função de alguns parâmetros, que serão otimizados pela condição de minimização da energia nesse vácuo.

O interessante nesse método é que não precisaremos nos preocupar com somas infinitas de diagramas de Feynman, como em cálculos perturbativos, além de estarmos, claramente, definindo o conteúdo de partícula dos estados sobre os quais estaremos trabalhando. Entretanto, não temos nenhuma prescrição bem definida para o cálculo das quantidades renormalizadas da teoria.

### 3.1) Valor Esperado do Hamiltoniano no vácuo

Iniciaremos definindo o Lagrangiano da Eletrodinâmica Espinorial sem massa

$$L = \int d^3x \mathcal{L} = \int d^3x \left( \bar{\psi}(x) i \not{\partial} \psi(x) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + e \bar{\psi}(x) A \psi(x) \right) \quad (3.1.1)$$

onde  $e$  é a carga do elétron.

Podemos ainda explicitar a forma do escalar  $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ , isto é,

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = & 2 (\partial_0 A_i \partial^0 A^i - \partial_0 A_i \partial^i A^0 - \partial_i A_0 \partial^0 A^i + \partial_i A_0 \partial^i A^0) + \\ & + 2 (\partial_i A_j \partial^i A^j - \partial_i A_j \partial^j A^i - \partial_j A_i \partial^i A^j + \partial_j A_i \partial^j A^i) \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Usando agora a condição de gauge de Coulomb ( $\partial_i A^i = 0$ ) e integrando por partes, a equação (3.1.2) torna-se

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2 (\partial_i A_0 \partial^i A^0 + \partial_0 A_i \partial^0 A^i + \partial_i A_j \partial^i A^j + \partial_j A_i \partial^j A^i) \quad (3.1.3)$$

Se tomarmos as definições dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  em termos dos potenciais  $\vec{A}$  e  $\phi$ , dadas por (2.1.3), na notação covariante, ou seja

$$\begin{aligned} E_i &= \partial_i A_0 - \partial_0 A_i \\ B_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j A_k \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

seremos levados a

$$\mathcal{L} = i \bar{\psi}(x) \not{\partial} \psi(x) + \frac{1}{2} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) + e \bar{\psi}(x) A \psi(x) \quad (3.1.4)$$

Para obtermos o Hamiltoniano, precisaremos dos momentos canonicamente conjugados. Estes serão

$$\begin{aligned} \pi_\psi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i \bar{\psi}(x) \gamma^0 = i \psi^\dagger(x) \\ \pi_i &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = -\dot{A}_i \\ \pi_0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0 \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Conforme discussão feita nas seções (2.1) e (2.2),  $A_0(x)$  não é um operador, mas sim um "número C", no sentido de que, quando quantizarmos a teoria, ele comutará com todos

os demais operadores. Como também já dissemos, entretanto, ele pode ser completamente determinado através da solução de sua equação de movimento

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_0} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_0)} = \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i A_0)}$$

$$\longrightarrow \nabla^2 A_0(x) = e\psi^\dagger(x)\psi(x) \quad (3.1.6)$$

$$A_0(\vec{x}) = -\frac{e}{4\pi} \int d^3 y \frac{\psi^\dagger(y)\psi(y)}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (3.1.7)$$

Dessa forma, teremos que (3.1.4) tornar-se-á

$$\mathcal{L} = i\psi^\dagger(x)\dot{\psi}(x) + i\bar{\psi}(x)\gamma^i \partial_i \psi(x) + \frac{e^2}{8\pi} \int d^3 y \frac{\rho(x)\rho(y)}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

$$- \frac{e^2}{4\pi} \int d^3 y \frac{\rho(x)\rho(y)}{|\vec{x} - \vec{y}|} + e\bar{\psi}(x)\gamma^i A_i \psi(x) \quad (3.1.8)$$

onde  $\rho(x) = \psi^\dagger(x)\psi(x)$ .

Com o auxílio então de (3.1.5), teremos o Hamiltoniano dado por

$$H = \int d^3 x \left( \pi_i \dot{A}^i + \pi_\psi \dot{\psi} - \mathcal{L} \right) =$$

$$= \int d^3 x \left[ -i\bar{\psi}(x)\gamma^k \partial_k \psi(x) + \frac{1}{2} \left( \vec{E}_i^2 + \vec{B}^2 \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{e^2}{8\pi} \int d^3 y \frac{\rho(x)\rho(y)}{|\vec{x} - \vec{y}|} - e\bar{\psi}(x)\gamma^k A_k \psi(x) \right] \quad (3.1.9)$$

onde  $\vec{E}_i^2 = \partial_0 A_i \partial^0 A^i$ . Nesse ponto, faremos uso das relações obtidas no capítulo 2 para  $\psi(x)$  e  $A_\mu(x)$ , quais sejam

$$A^i(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{2p^0} \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_\lambda^i \left[ e^{-i\vec{p}\vec{x}} a_\lambda(p) + e^{i\vec{p}\vec{x}} a_\lambda^\dagger(p) \right] \quad (2.1.10)$$

$$\text{com } \epsilon_\lambda^i \epsilon_r^i = \delta_{\lambda,r} ; \quad \epsilon_\lambda^i p^i = 0 \quad (2.1.11)$$

$$\psi(\vec{x}, 0) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_s [b_s(p)U_s(p)e^{i\vec{p}\vec{x}} + d_s^\dagger(p)V_s(p)e^{-i\vec{p}\vec{x}}] \quad (2.5.9)$$

e também as relações de comutação e anticomutação dadas por (2.2.1), (2.2.2) e (2.5.10) e com os  $U$ 's e  $V$ 's satisfazendo (2.5.8).

Assim o Hamiltoniano será

$$\begin{aligned}
H = & \int d^3x \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^3} \sum_{s,r} [b_s^\dagger(p) U_s^{\dagger\alpha}(p) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} + d_s(p) V_s^{\dagger\alpha}(p) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}] \\
& (\vec{\alpha}\cdot\vec{q})_{\alpha,\beta} [b_r(q) U_r^\beta(q) e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} - d_r^\dagger(q) V_r^\beta(q) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}] + \\
& + \frac{1}{2} \int d^3x \frac{d^3k d^3q}{(2\pi)^3} \left\{ -\frac{1}{4} \sum_{\lambda=1}^2 [a_\lambda(k) a_\lambda(q) e^{-i(\vec{k}+\vec{q})\cdot\vec{x}} + \right. \\
& - a_\lambda^\dagger(k) a_\lambda(q) e^{i(\vec{k}-\vec{q})\cdot\vec{x}} - a_\lambda(k) a_\lambda^\dagger(q) e^{-i(\vec{k}-\vec{q})\cdot\vec{x}} - a_\lambda^\dagger(k) a_\lambda^\dagger(q) e^{+i(\vec{k}+\vec{q})\cdot\vec{x}}] + \\
& - \sum_{\lambda,r=1}^2 \frac{\epsilon_\lambda^l(k) \epsilon_r^m(q)}{4k_0 q_0} k^l q^m \delta^{l,m} [a_\lambda(k) a_r(q) e^{-i(\vec{k}-\vec{q})\cdot\vec{x}} \\
& - a_\lambda(k) a_r^\dagger(q) e^{-i(\vec{k}-\vec{q})\cdot\vec{x}} - a_\lambda^\dagger(k) a_r(q) e^{i(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{x}} + a_\lambda^\dagger(k) a_r^\dagger(q) e^{i(\vec{k}+\vec{q})\cdot\vec{x}}] \left. \right\} + \\
& - e \int d^3x \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_{r,s,\lambda} [b_s(p) U_s(p) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + d_s^\dagger(p) V_s(p) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}] \\
& \frac{1}{2k_0} \epsilon_\lambda^i \gamma_i [e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} a_\lambda(k) + e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} a_\lambda^\dagger(k)] [b_r(q) U_r(q) e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} + d_r^\dagger(q) V_r(q) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}] + \\
& + \frac{e^2}{8\pi} \int \frac{d^3x d^3y d^3p d^3q d^3k d^3\kappa}{|\vec{x}-\vec{y}| (2\pi)^6} \sum_{r,s,t,\lambda} : [b_s^\dagger(p) U_s^\alpha(p) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \\
& + d_s(p) V_s^{\dagger\alpha}(p) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}] [b_t(q) U_t^\alpha(q) e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} + d_t^\dagger(q) V_t^\alpha(q) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}] : \\
& : [b_r^\dagger(k) U_r^{\dagger\beta}(k) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{y}} + d_r(k) V_r^{\dagger\beta}(k) e^{i\vec{k}\cdot\vec{y}}] [b_\lambda(\kappa) U_\lambda^\beta(\kappa) e^{i\vec{\kappa}\cdot\vec{y}} + \\
& + d_\lambda^\dagger(\kappa) V_\lambda^\beta(\kappa) e^{-i\vec{\kappa}\cdot\vec{y}}] : \tag{3.1.10}
\end{aligned}$$

Neste último termo do Hamiltoniano utilizamos o produto de Wick nas correntes,  $j_0 = \rho = \psi^\dagger \psi$ , de tal forma que  $\langle 0|j_0|0 \rangle = 0$ . Isto, contudo, não evita outros infinitos que possam surgir quando da ordenação das duas correntes  $j_0(x)$  e  $j_0(y)$  que, embora estejam em pontos diferentes, estão relacionados pelo kernel  $\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}$ .

Partiremos agora para o cálculo do valor esperado de (3.1.10), no vácuo definido por

$$b_s(p)|0 \rangle = d_s(p)|0 \rangle = a_\lambda(p)|0 \rangle = 0 \tag{3.1.11}$$

$$\text{tal que } \langle 0|0 \rangle = 1$$

Vale notar que não temos parametrizado o vácuo, de modo que não obteremos uma equação de otimização, quando da minimização do valor esperado do Hamiltoniano. Não o fizemos pois, nosso interesse neste cálculo é, simplesmente, definir a energia do vácuo como sendo o zero das energias a serem medidas.

Os valores diferentes de zero obtidos neste cálculo serão devidos à energia de ponto zero e poderão ser absorvidos numa definição do zero de energia, sem que com isso a física seja afetada [2].

O valor esperado do Hamiltoniano será então

$$\begin{aligned}
\langle 0|H|0 \rangle = E_0 = & - \int d^3x \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^3} \sum_{r,s} V_s^{\dagger\alpha}(p) V_r^\beta(p) (\vec{\alpha} \cdot \vec{q})_{\alpha,\beta} \\
& e^{i(\vec{p}-\vec{q}) \cdot \vec{x}} \langle 0|d_s(p) d_r^\dagger(q)|0 \rangle + \\
& + \frac{1}{2} \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} d^3p d^3q \left\{ \frac{1}{4} \sum_{\lambda=1}^2 e^{-i(\vec{p}-\vec{q}) \cdot \vec{x}} \langle 0|a_\lambda(p) a_\lambda^\dagger(q)|0 \rangle + \right. \\
& \left. + \sum_{\lambda,r=1}^2 \frac{\epsilon_\lambda^i \epsilon_r^j}{4p_0 q_0} p^i q^j e^{-i(\vec{p}-\vec{q}) \cdot \vec{x}} \langle 0|a_\lambda(p) a_r^\dagger(q)|0 \rangle \right\} + \\
& + \frac{e^2}{8\pi} \int \frac{d^3x d^3y}{|\vec{x}-\vec{y}|} \frac{d^3p d^3q d^3k d^3\kappa}{(2\pi)^6} \sum_{r,s,t,\lambda} e^{i(\vec{p}-\vec{q}) \cdot \vec{x}} e^{-i(\vec{k}-\vec{\kappa}) \cdot \vec{y}} \\
& V_s^{\dagger\alpha}(p) U_t^\alpha(q) U_r^{\dagger\beta}(k) V_\lambda^\beta(\kappa) \langle 0|d_s(p) b_t(q) b_r^\dagger(k) d_\lambda^\dagger(\kappa)|0 \rangle
\end{aligned}$$

Todos os outros termos serão zero, devido à definição do vácuo (3.1.11). Levando em conta as relações de comutação e anticomutação entre os campos e sabendo que para partículas sem massa vale a relação  $p_0^2 = |\vec{p}|^2$ , teremos

$$\begin{aligned}
E_0 = & - \int d^3p \sum_r V_r^{\dagger\alpha}(p) V_r^\beta(p) (\vec{\alpha} \cdot \vec{p})_{\alpha,\beta} \delta^3(0) + \int d^3p |\vec{p}| \delta^3(0) \\
& + \frac{e^2}{8\pi} \int \frac{d^3x d^3y}{|\vec{x}-\vec{y}|} \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^6} e^{i(\vec{p}+\vec{q}) \cdot (\vec{x}-\vec{y})} \sum_{r,s} V_s^{\dagger\alpha}(p) V_s^\beta(p) U_r^{\dagger\beta}(q) U_r^\alpha(q) \quad (3.1.12)
\end{aligned}$$

onde  $\delta^3(0) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} = \frac{V}{(2\pi)^3}$

Chamando de  $I(p, q)$  a última integral de (3.1.12) e fazendo a seguinte transformação de variáveis em  $I(p, q)$

$$\vec{x} \longrightarrow \vec{z} = \vec{x} - \vec{y}$$

$$\vec{y} \longrightarrow \vec{y}^* = \vec{y}$$

com jacobiano = 1, ficaremos com

$$\begin{aligned}
I(p, q) = & \int_0^\infty r^2 dr \int_{-1}^1 d(\cos\theta) 2\pi \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i|\vec{p}+\vec{q}|r \cos\theta}}{r} f(p, q) \delta^3(0) \\
= & \int_0^\infty dr \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^2} \left[ \frac{e^{i|\vec{p}+\vec{q}|r}}{i|\vec{p}+\vec{q}|} - \frac{e^{-i|\vec{p}+\vec{q}|r}}{i|\vec{p}+\vec{q}|} \right] f(p, q) \delta^3(0) = \\
= & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty dr \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^2} \left[ \frac{e^{i|\vec{p}+\vec{q}|r - \epsilon r}}{i|\vec{p}+\vec{q}|} - \frac{e^{-i|\vec{p}+\vec{q}|r - \epsilon r}}{i|\vec{p}+\vec{q}|} \right] f(p, q) \delta^3(0) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^3 p d^3 q}{(2\pi)^2} \frac{2}{|\vec{p} + \vec{q}|^2 + \epsilon^2} f(p, q) \delta^3(0) = \\
&= \int \frac{d^3 p d^3 q}{(2\pi)^2} \frac{2}{|\vec{p} + \vec{q}|^2} f(p, q) \delta^3(0) \quad (3.1.13)
\end{aligned}$$

onde  $f(p, q) = \sum_{r,s} V_s^{\dagger\alpha}(p) V_s^\beta(p) U_r^{\dagger\beta}(q) U_r^\alpha(q)$ ,  $r$  é o módulo de  $\vec{z}$ , sendo que  $\vec{z}$  é tomado na direção  $\vec{k}$  e  $\theta$  é o ângulo entre  $\hat{z}$  e  $\frac{(\vec{p} + \vec{q})}{|\vec{p} + \vec{q}|}$ .

Substituindo então (3.1.13) em (3.1.12), usando as relações (2.5.8) e tomando alguns traços, seremos levados a

$$E_0 = \int d^3 p 2|\vec{p}| + \int d^3 k |\vec{k}| + \frac{e^2}{16\pi^3} \int \frac{d^3 p d^3 q}{|\vec{p} - \vec{q}|^2} (1 - \hat{p} \cdot \hat{q}) \delta^3(0) \quad (3.1.14)$$

Note então que, se quisermos que o valor esperado no vácuo do Hamiltoniano seja zero, isto é, que a energia do vácuo seja zero, devemos adicionar ao Lagrangiano de partida a quantidade  $E_0$  dada por (3.1.14). Assim se tivermos

$$\begin{aligned}
L = \int d^3 x \left[ i\psi^\dagger(x) \dot{\psi}(x) + i\bar{\psi}(x) \gamma^i \partial_i \psi(x) + \frac{1}{2} (\vec{E}_i^2 - \vec{B}^2) + \right. \\
\left. - \frac{e^2}{4\pi} \int d^3 y \frac{\rho(x) \rho(y)}{|\vec{x} - \vec{y}|} + e\bar{\psi}(x) \gamma^j A_j \psi(x) \right] + E_0 \quad (3.1.15)
\end{aligned}$$

O Hamiltoniano será

$$\begin{aligned}
H = \int d^3 x \left[ -i\bar{\psi}(x) \gamma^k \partial_k \psi(x) + \frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + \right. \\
\left. \left[ + \int d^3 y \frac{\rho(x) \rho(y)}{|\vec{x} - \vec{y}|} - e\bar{\psi}(x) \gamma^k A_k \psi(x) \right] - E_0 \right] \quad (3.1.16)
\end{aligned}$$

de tal forma que o valor esperado do Hamiltoniano será zero

$$\langle 0|H|0 \rangle = E_0 - E_0 = 0 \quad (3.1.17)$$

### 3.2) Anzats para o vácuo composto

Tendo obtido o valor da energia do vácuo na fase em que o esquema perturbativo é perfeitamente aplicável e, além disso, tendo definido o zero da escala de energia através da subtração das contribuições da energia do vácuo, podemos agora iniciar a construção do vácuo (não perturbativo) da fase quebrada da E.D.Q..

Como dissemos na introdução, esse estado deve ser composto de estados ligados de pares elétron-pósitron com momento total zero.

O ansatz que utilizaremos para o nosso cálculo variacional será então um estado coerente da seguinte forma[7]:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{N(\Psi)} \exp \left[ - \sum_{s,t} \int d^3p \Psi(|\vec{p}|) U_s(p) V_t(-p) b_s^\dagger(p) d_t^\dagger(-p) \right] |0\rangle \quad (3.2.1)$$

onde  $N(\Psi)$  é escolhido de tal forma que  $\langle \Psi | \Psi \rangle = 1$  e  $\Psi(|\vec{p}|) = \Psi^*(|\vec{p}|)$ .

A função  $\Psi(|\vec{p}|)$ , que aparece no integrando de (3.2.1), é a função de onda do par elétron-pósitron. Será ela, justamente, nosso parâmetro variacional, e deverá ser determinada quando da minimização do valor esperado do Hamiltoniano no vácuo (por ela parametrizado).

Observemos que, o fato de  $\Psi(|\vec{p}|)$  ter como argumento o módulo do vetor  $\vec{p}$ , asseguramos que  $\Psi(|\vec{p}|)$  é esfericamente simétrica no espaço dos momentos, devendo assim representar uma função de onda S e tendo portanto, momento angular igual a zero.

Os argumentos dos operadores de criação de elétrons e pósitrons, por sua vez, levam-nos à conclusão de que o momento total dos pares será zero.

Os  $U's$  e  $V's$  são espinores de helicidade, definidos na seção (2.5), de tal maneira que obedecem (2.5.8). Em particular veremos que duas daquelas relações podem ser usadas para simplificar o integrando de (3.2.1), quais sejam

$$\gamma^0_s V_s(-p) = U_s(p) \quad (*); \quad U_s^\dagger(p) U_r(p) = \delta_{s,r} \quad (**)$$

Se multiplicarmos (\*) pela esquerda por  $U_r^\dagger(p)$  e usarmos (\*\*), ficaremos com

$$U_r^\dagger(p) \gamma^0_s V_s(-p) = \delta_{r,s}$$

sabendo que  $U^\dagger \gamma^0 = \bar{U}$  e que  $s^2 = 1$ , teremos finalmente

$$\bar{U}_r(p) V_s(-p) = s \delta_{r,s} \quad (3.2.2)$$

que pode ser diretamente substituído em (3.2.1).

Se agora discretizarmos o espaço dos momentos sobre uma rede cúbica de espaçamento  $\epsilon$ , as integrais em  $\vec{p}$  serão trocadas por somas sobre os pontos da rede, e a função delta de Dirac pelo delta de Kronecker, ou seja

$$\int_V d^3p \longrightarrow \sum_{\vec{p} \text{ em } V} \epsilon^3$$

$$\delta(\vec{p} - \vec{q}) \longrightarrow \delta_{\vec{p}, \vec{q}} \epsilon^{-3} \quad (3.2.3)$$

Substituindo (3.2.3) e (3.2.2) em (3.2.1), ficaremos com

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{N(\Psi)} \exp \left[ \sum_{p,s} -s\Psi(|\vec{p}|) b_s^\dagger(p) d_s^\dagger(-p) \epsilon^3 \right] |0\rangle =$$

$$= \frac{1}{N(\Psi)} \prod_{p,s} [1 - s\Psi(|\vec{p}|) b_s^\dagger(p) d_s^\dagger(-p) \epsilon^3] |0\rangle \quad (3.2.4)$$

Acima usamos o fato dos  $b's$  e  $d's$  serem variáveis grassmannianas [3]. A normalização é facilmente vista ser

$$N(\Psi) = \prod_{p,s} \sqrt{1 + \Psi^2(|\vec{p}|)} \quad (3.2.5)$$

Seria bastante interessante que, quando fôssemos calcular o valor esperado do Hamiltoniano (3.1.16) nesse novo vácuo, expressássemos os espinores de Dirac (2.5.9) em termos de novos operadores  $B's$  e  $D's$  (em substituição aos  $b's$  e  $d's$ ), que aniquilassem esse vácuo  $|\Psi\rangle$ .

Se observarmos que

$$b_s(p)|\Psi\rangle = \left[ b_s(p), \frac{1}{N(\Psi)} \prod_{p,s} (1 - s\Psi(|\vec{p}|) b_s^\dagger(p) d_s^\dagger(-p) \epsilon^3) \right] |0\rangle =$$

$$= -s\Psi(|\vec{p}|) d_s^\dagger(-p) |\Psi\rangle$$

$$d_s(p)|\Psi\rangle = \left[ d_s(p), \frac{1}{N(\Psi)} \prod_{p,s} (1 - s\Psi(|\vec{p}|) b_s^\dagger(p) d_s^\dagger(-p) \epsilon^3) \right] |0\rangle =$$

$$= s\Psi(|\vec{p}|) b_s^\dagger(-p) |\Psi\rangle \quad (3.2.6)$$

poderemos então construir os novos  $B's$  e  $D's$  da seguinte forma:

$$B_s(p) = \frac{1}{N(\Psi)} [b_s(p) + s\Psi(|\vec{p}|) d_s^\dagger(-p)]$$

$$D_s(p) = \frac{1}{N(\Psi)} [d_s(p) - s\Psi(|\vec{p}|) b_s^\dagger(-p)] \quad (3.2.7)$$



Podemos ainda inverter as relações (3.2.7), dando

$$\begin{aligned} b_s(p) &= \frac{1}{N(\Psi)} [B_s(p) - s\Psi(|\vec{p}|)D_s^\dagger(-p)] \\ d_s(p) &= \frac{1}{N(\Psi)} [D_s(p) + s\Psi(|\vec{p}|)B_s^\dagger(-p)] \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Uma vez feitas estas transformações (chamadas de transformações de Bogoliubov-Valatin) nos operadores, poderemos agora expressar os espinores de Dirac (2.5.9) em termos dos  $B's$  e  $D's$  (3.2.7), que podem ser verificados anular o vácuo  $|\Psi\rangle$ .

Substituindo (3.2.8) em (2.5.9), teremos

$$\psi(\vec{x}, 0) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_s [B_s(p)W_s(p)e^{i\vec{p}\vec{x}} + D_s^\dagger(p)M_s(p)e^{-i\vec{p}\vec{x}}] \quad (3.2.9)$$

onde

$$\begin{aligned} W_s(p) &= \frac{1}{N(\Psi)} (1 + \gamma^0\Psi(|\vec{p}|)) U_s(p) \\ M_s(p) &= \frac{1}{N(\Psi)} (1 - \gamma^0\Psi(|\vec{p}|)) V_s(p) \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Das relações (2.5.8), vemos que os  $W's$  e  $M's$  satisfarão

$$\begin{aligned} \sum_s W_s^\beta(p)W_s^{\dagger\alpha}(p) &= \frac{1}{2N^2(\Psi)} [1 + 2\gamma^0\Psi(|\vec{p}|) + \\ &+ \Psi^2(|\vec{p}|) - \vec{\gamma}\cdot\hat{p}\gamma^0 (1 - \Psi^2(|\vec{p}|))]^{\beta\alpha} \\ \sum_s M_s(p)^\beta M_s^{\dagger\alpha}(p) &= \frac{1}{2N^2(\Psi)} [1 - 2\gamma^0\Psi(|\vec{p}|) + \\ &\Psi^2(|\vec{p}|) - \vec{\gamma}\hat{p}\gamma^0 (1 - \Psi^2(|\vec{p}|))]^{\beta\alpha} \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Note que temos escrito o espinor de Dirac no tempo  $t = 0$ . Essa escolha particular é possível pois, sendo o Hamiltoniano da teoria independente do tempo, a quantidade que estaremos calculando, isto é, o valor esperado no vácuo do Hamiltoniano, deverá por consequência ser independente do tempo. Dessa forma a escolha  $t = 0$  é perfeitamente válida.

Outra observação a ser feita é que, os anticomutadores entre os novos  $B's$  e  $D's$  tomarão os mesmos valores que os correspondentes anticomutadores entre os antigos  $b's$  e  $d's$ . Embora isto seja verdade (o que pode ser verificado), o conteúdo de energia associado aos estados criados à partir da aplicação dos  $B's$  e  $D's$  serão diferentes daqueles obtidos via os antigos  $b's$  e  $d's$ .

Isso é assim pois os comutadores  $[B, H]$ ,  $[D, H]$ ,  $[B^\dagger, H]$  e  $[D^\dagger, H]$  não são iguais àqueles obtidos trocando-se  $B$  por  $b$  e  $D$  por  $d$ .

Dessa forma podemos esperar que os elétrons e positrons criados na fase quebrada da E.D.Q., onde o vácuo é aniquilado pelos  $B's$  e  $D's$ , tenham uma massa diferente de zero.

### 3.3) Equação de gap para $\Psi$

Notemos que o estado  $\Psi(|\vec{p}|)$ , o qual pretendemos que represente o vácuo de uma fase quebrada da E.D.Q., difere do vácuo usual pela presença de um condensado de pares elétron-pósitron.

O que faremos nesta seção será verificar que, ao minimizarmos o valor esperado do Hamiltoniano no estado  $|\Psi\rangle$ , com respeito ao parâmetro variacional  $\Psi$ , obteremos estados ótimos, isto é, estados que minimizem o funcional energia  $E[\Psi]$ , onde ainda será possível a existência de pares elétron-pósitron. Isso acontecerá desde que ao menos uma das soluções da equação de otimização apresente  $\Psi$ , a função de onda do par, diferente de zero. Se além disso, a energia que obtivermos para a teoria, quando da substituição da equação de otimização que preserva os pares no funcional  $E[\Psi]$ , for menor que a energia do vácuo original (que significa dizer  $E[\Psi] < 0$ ), poderemos então, seguramente, atribuir a este estado a condição de vácuo físico.

O Hamiltoniano a ser minimizado será aquele de (3.1.16), de onde foi subtraída a energia do vácuo.

O estado teste é aquele definido na seção anterior, o qual é aniquilado pelos operadores (3.2.7). Uma vez que os operadores que aniquilam esse novo vácuo são aqueles de (3.2.7), seria bastante conveniente se escrevessemos o Hamiltoniano em termos dos espiniores (3.2.9).

Novamente tomaremos a ordenação de Wick nas correntes,  $j_0$ , com respeito ao vácuo  $|0\rangle$ , isto é, tal que  $\langle 0|j_0|0\rangle = 0$ .

Depois destas observações, teremos

$$\begin{aligned}
 E[\Psi] = & \langle \Psi | H | \Psi \rangle = \langle \Psi | \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} d^3p d^3q \sum_{r,s} [B_s^\dagger(p) W_s^{\dagger\alpha}(p) e^{-i\vec{p}\vec{z}} + \\
 & D_s(p) M_s^{\dagger\alpha}(p) e^{i\vec{p}\vec{z}}] \cdot (\gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{q})_{\alpha\beta} [B_r(q) W_r^\beta(q) e^{i\vec{q}\vec{z}} + \\
 & - D_r^\dagger(q) M_r^\beta(q) e^{-i\vec{q}\vec{z}}] | \Psi \rangle + \\
 & + \int d^3k |\vec{k}| \delta^3(0) + \frac{e^2}{8\pi} \int \frac{d^3x d^3y}{|\vec{x} - \vec{y}|} \frac{d^p d^3q d^3k d^3\kappa}{(2\pi)^6} \sum_{r,s,t,\lambda} \\
 & \langle \Psi | : [B_s^\dagger(p) W_s^{\dagger\alpha}(p) e^{-i\vec{p}\vec{z}} + D_s(p) M_s^{\dagger\alpha}(p) e^{i\vec{p}\vec{z}}] \\
 & [B_r(q) W_r^\alpha(q) e^{i\vec{q}\vec{z}} + D_r^\dagger(p) M_r^\alpha(q) e^{-i\vec{q}\vec{z}}] : \\
 & : [B_t^\dagger(k) W_t^{\dagger\beta}(k) e^{-i\vec{k}\vec{y}} + D_t(k) M_t^{\dagger\beta}(k) e^{i\vec{k}\vec{y}}] [B_\lambda(\kappa) W_\lambda^\beta(\kappa) e^{i\vec{\kappa}\vec{y}} + \\
 & + D_\lambda^\dagger(\kappa) M_\lambda^\beta(\kappa) e^{-i\vec{\kappa}\vec{y}}] : | \Psi \rangle - E_0
 \end{aligned}$$

Podemos, rapidamente, ver que o termo de interação entre elétrons e fótons transversais não contribui aqui. Isto acontece pois, neste termo aparecem isoladamente ou um operador de criação ou um de destruição de fótons, o que só poderia nos levar a contribuições para o valor esperado de  $H$  se o estado teste contivesse uma "nuvem" de fótons, o que não é verdade. O número de fótons presentes no ansatz é zero.

Outro fato é que, a contribuição da parte de fótons livres é igual àquela do cálculo da seção anterior. Isto ocorre, novamente, devido ao fato que  $|\Psi\rangle$  é equivalente ao  $|0\rangle$  no que se refere aos fótons.

Continuando o cálculo, teremos ainda

$$E[\Psi] = \langle \Psi | H | \Psi \rangle = - \int d^3 p \sum_s M_s^{\dagger\alpha}(p) M_s^\beta(p) (\gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{p})_{\alpha\beta} \delta^3(0) +$$

$$+ \int d^3 k |\vec{k}| \delta^3(0) + \frac{e^2}{8\pi} \int \frac{d^3 x d^3 y}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 p d^3 q$$

$$\left[ \sum_{r,s} e^{i(\vec{p} + \vec{q})(\vec{x} - \vec{y})} M_s^{\dagger\alpha}(p) M_s^\beta(p) W_r^\alpha(q) W_r^{\dagger\beta}(q) \right] - E_0$$

Usando os resultados obtidos em (3.1.13), (3.2.11) e mais ainda a seguinte relação

$$\sum_s M_s^\beta(p) M_s^{\dagger\alpha}(p) (\gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{p})_{\alpha\beta} = \frac{2|\vec{p}| (1 - \Psi^2(|\vec{p}|))}{N^2(\Psi)} \quad (3.3.1)$$

ficaremos com

$$E[\Psi] = \langle \Psi | H | \Psi \rangle = - \int d^3 p \frac{1}{N^2(\Psi)} [2|\vec{p}| (1 - \Psi^2(|\vec{p}|))] \delta^3(0) +$$

$$+ \int d^3 k |\vec{k}| \delta^3(0) + \frac{e^2}{8\pi} \int \frac{d^3 p d^3 q}{(2\pi)^2} \frac{2}{|\vec{p} + \vec{q}|} \frac{1}{N^2(\Psi(|\vec{p}|)) N^2(\Psi(|\vec{q}|))}$$

$$[N^2(\Psi(|\vec{p}|)) N^2(\Psi(|\vec{q}|)) - 4\Psi(|\vec{p}|)\Psi(|\vec{q}|) +$$

$$+ (1 - \Psi^2(|\vec{p}|)) (1 - \Psi^2(|\vec{q}|)) \hat{p} \cdot \hat{q}] \delta^3(0) - E_0 \quad (3.3.2)$$

Substituindo o valor de  $E_0$ , dado em (3.1.14), e simplificando a expressão (3.3.2), seremos levados a

$$E[\Psi] = \langle \Psi | H | \Psi \rangle = \int d^3 p \frac{4|\vec{p}| \Psi^2(|\vec{p}|)}{1 + \Psi^2(|\vec{p}|)} \delta^3(0)$$

$$- \frac{e^2}{4\pi^3} \int \frac{d^3 p d^3 q}{|\vec{p} - \vec{q}|^2} \left[ \frac{\Psi(|\vec{p}|)\Psi(|\vec{q}|)}{[1 + \Psi^2(|\vec{p}|)][1 + \Psi^2(|\vec{q}|)]} - \frac{1}{4} + \right.$$

$$\left. + \left( \frac{\Psi^2(|\vec{p}|)}{1 + \Psi^2(|\vec{p}|)} - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\Psi^2(|\vec{q}|)}{1 + \Psi^2(|\vec{q}|)} - \frac{1}{2} \right) \hat{p} \cdot \hat{q} \right] \delta^3(0) +$$

$$-\frac{e^2}{16\pi^3} \int \frac{d^3 p d^3 q}{|\vec{p} - \vec{q}|^2} (1 - \hat{p} \cdot \hat{q}) \delta^3(0) \quad (3.3.3)$$

O que obtivemos em (3.3.3) nada mais é do que a energia como um funcional da função de onda do par elétron-pósitron.

A determinação do valor ótimo do parâmetro variacional (a função  $\Psi$ ) é efetuada minimizando o funcional (3.3.3) em relação às variações de  $\Psi$ .

Como já dissemos, para que seja possível a existência da fase quebrada da E.D.Q., é necessário que dessa otimização surjam soluções diferentes de zero para  $\Psi$ , com  $E[\Psi] < 0$ .

Antes de passarmos para a minimização de (3.3.3) em relação a  $\Psi$ , enunciaremos as seguintes relações úteis

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \Psi} \left[ \frac{\Psi}{(1 + \Psi^2)} \right] &= \frac{1 - \Psi^2}{(1 + \Psi^2)^2} \\ \frac{\partial}{\partial \Psi} \left[ \frac{\Psi^2}{(1 + \Psi^2)} \right] &= \frac{2\Psi}{(1 + \Psi^2)^2} \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Com o auxílio de (3.3.4), teremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \Psi(|\vec{p}|)} [ \langle \Psi | H | \Psi \rangle ] &= \frac{\partial}{\partial \Psi(|\vec{p}|)} E[\Psi] = \\ &= \frac{8|\vec{p}|\Psi(|\vec{p}|)}{(1 + \Psi^2(|\vec{p}|))^2} - \frac{e^2}{4\pi^3} \frac{2(1 - \Psi^2(|\vec{p}|))}{(1 + \Psi^2(|\vec{p}|))^2} \int \frac{d^3 q}{|\vec{p} - \vec{q}|^2} \frac{\Psi(|\vec{q}|)}{(1 + \Psi^2(|\vec{q}|))} + \\ &+ \frac{e^2}{4\pi^3} \frac{2\Psi(|\vec{p}|)}{(1 + \Psi^2(|\vec{p}|))^2} \int \frac{d^3 q}{|\vec{p} - \vec{q}|^2} \left[ \frac{2\Psi^2(|\vec{q}|)}{1 + \Psi^2(|\vec{q}|)} - 1 \right] \hat{p} \cdot \hat{q} = 0 \end{aligned}$$

que simplificando dará finalmente[5]

$$\begin{aligned} |\vec{p}|\Psi(|\vec{p}|) &= \frac{e^2}{16\pi^3} \int \frac{d^3 q}{|\vec{p} - \vec{q}|^2} \left[ \frac{\Psi(|\vec{q}|)(1 - \Psi^2(|\vec{p}|))}{(1 + \Psi^2(|\vec{q}|))} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Psi(|\vec{p}|)(1 - \Psi^2(|\vec{q}|)) \hat{p} \cdot \hat{q}}{(1 + \Psi^2(|\vec{q}|))} \right] \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Esta equação que acabamos de obter é a de "gap" para  $\Psi(|\vec{p}|)$ . Dela devemos tirar se é possível ou não que o vácuo com a presença de estados ligados elétron-pósitron seja um estado energeticamente favorável.

Note que, através de (3.3.5), poderemos determinar tanto  $\Psi(0)$  quanto o comportamento assintótico de  $\Psi(|\vec{p}|)$  com  $|\vec{p}| \rightarrow \infty$ .

Fazendo  $|\vec{p}| = 0$  em (3.3.5), ficamos com

$$\frac{e^2}{16\pi^3} (1 - \Psi^2(0)) \int \frac{d^3 q}{|\vec{q}|^2} \frac{\Psi(|\vec{q}|)}{1 + \Psi^2(|\vec{q}|)} = 0 \quad (3.3.6)$$

Então tiramos que, ou  $\Psi$  é zero em todo o espaço dos momentos, o que nos levaria ao vácuo usual, ou  $\Psi(0) = 1$ . No limite em que a variável de integração vai a infinito, nossa única possibilidade de manter  $\Psi(|\vec{p}|)$  finito em (3.3.5) é termos  $\Psi(|\vec{q}|) \xrightarrow{q \rightarrow \infty} 0$ .

Isto está em completo acordo com a interpretação de  $\Psi$  como a função de onda do estado ligado, uma vez que este estado ligado deve romper-se para momentos relativos muito altos entre as partículas constituintes.

Resumindo, de (3.3.6) tiramos que

$$\Psi(0) = 1 \tag{3.3.7}$$

$$\Psi(|\vec{q}|) \xrightarrow{q \rightarrow \infty} 0 \tag{3.3.8}$$

### 3.4) Renormalização

Sempre que estivermos trabalhando com uma teoria quântica de campos locais em interação, seremos forçados a efetuar sua renormalização.

O processo de renormalização de uma teoria, consiste em absorver os infinitos que surgem no decorrer dos cálculos necessários à resolução de suas equações de campo, numa reparametrização da teoria. Em outras palavras, os parâmetros (massa, carga, etc) que inicialmente aparecem numa teoria de campos em interação não são, na realidade, os parâmetros observáveis, isto é, não podem ser comparados com resultados experimentais. Isso acontece porque os efeitos quânticos da interação alterarão seus valores por quantidades infinitas.

Assim, a única maneira de chegarmos a resultados finitos para os parâmetros físicos da teoria é supormos que os parâmetros iniciais, também chamados de parâmetros nus, são quantidades elas mesmas infinitas, de tal modo que a combinação "parâmetro nú + infinito" tenha como resultado uma quantidade finita, que associaremos à quantidade física correspondente ao parâmetro nú recombinação.

Os infinitos de que estamos falando surgem devido aos produtos de campos (distribuições) no mesmo ponto, quantidades estas que não são bem definidas.

Uma das maneiras de renormalizarmos a teoria é introduzirmos os chamados "contra-termos" no Lagrangiano inicial [3,4]. Estes contra-termos são termos de mesma estrutura daqueles que já ocorriam no Lagrangiano, só que multiplicados por constantes infinitas a serem determinadas.

Por exemplo, a densidade de Lagrangiano (3.1.1) passará então a ter a seguinte forma, após a introdução dos contra-termos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} i \not{\partial} \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + e \bar{\psi} A \psi + \\ & + B e \bar{\psi} A \psi - \frac{C}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + D \bar{\psi} i \not{\partial} \psi \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

se agora agruparmos os termos e definirmos

$$Z_1 = (1 + B)$$

$$Z_2 = (1 + D)$$

$$Z_3 = (1 + C)$$

teremos

$$\mathcal{L} = Z_2 \bar{\psi} i \not{\partial} \psi - \frac{Z_3}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + Z_1 e \bar{\psi} A \psi \quad (3.4.2)$$

Nosso próximo passo será analisar os infinitos que temos pela frente e tentar absorvê-los numa definição das constantes  $Z_1$ ,  $Z_2$  e  $Z_3$ .

Se seguirmos, passo a passo, a propagação da alteração no Lagrangiano, através da introdução dos contra-termos, teremos

$$\begin{aligned}\pi_\psi &= iZ_2\psi^\dagger \\ \pi_i &= -Z_3\dot{A}_i \\ \pi_0 &= 0\end{aligned}\tag{3.4.3}$$

O Hamiltoniano (3.1.9) será

$$\begin{aligned}H &= \int d^3x \left[ -iZ_2\bar{\psi}(x)\gamma^k\partial_k\psi(x) + \frac{Z_3}{2}(\vec{E}_t^2 + \vec{B}^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^2}{8\pi} \frac{Z_1^2}{Z_3} \int d^3y \frac{\rho(x)\rho(y)}{|\vec{x}-\vec{y}|} - Z_1 e\bar{\psi}(x)\gamma^k A_k\psi \right]\end{aligned}\tag{3.4.4}$$

A expressão para  $E_0$  ficará

$$\begin{aligned}E_0 &= \left\{ Z_2 \int d^3p 2|\vec{p}| + Z_3 \int d^3k |\vec{k}| + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^2}{16\pi^3} \frac{Z_1^2}{Z_3} \int \frac{d^3p d^3q}{|\vec{p}-\vec{q}|^2} (1 - \hat{p}\cdot\hat{q}) \right\} \delta^3(0)\end{aligned}\tag{3.4.5}$$

O funcional  $E[\Psi]$  dado por (3.3.3), será levado até

$$\begin{aligned}E[\Psi] &= Z_2 \int d^3p \frac{4|\vec{p}|\Psi(|\vec{p}|)}{(1 + \Psi^2(|\vec{p}|))} \delta^3(0) + \\ &\quad - \frac{e^2}{4\pi^3} \frac{Z_1^2}{Z_3} \int \frac{d^3p d^3q}{|\vec{p}-\vec{q}|^2} \left[ \frac{\Psi(|\vec{p}|)\Psi(|\vec{q}|)}{[1 + \Psi^2(|\vec{p}|)][1 + \Psi^2(|\vec{q}|)]} - \frac{1}{4} + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\Psi^2(|\vec{p}|)}{1 + \Psi^2(|\vec{p}|)} - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\Psi^2(|\vec{q}|)}{1 + \Psi^2(|\vec{q}|)} - \frac{1}{2} \right) \hat{p}\cdot\hat{q} \right] \delta^3(0) + \\ &\quad - \frac{e^2}{16\pi^3} \frac{Z_1^2}{Z_3} \int \frac{d^3p d^3q}{|\vec{p}-\vec{q}|^2} (1 - \hat{p}\cdot\hat{q}) \delta^3(0)\end{aligned}\tag{3.4.6}$$

e finalmente a equação de gap (3.3.5) ficará

$$\begin{aligned}Z_2|\vec{p}|\Psi(|\vec{p}|) &= \frac{e^2}{16\pi^3} \frac{Z_1^2}{Z_3} \int \frac{d^3q}{|\vec{p}-\vec{q}|^2} \left\{ \frac{\Psi(|\vec{q}|)(1 - \Psi^2(|\vec{p}|))}{1 + \Psi^2(|\vec{q}|)} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Psi(|\vec{p}|)(1 - \Psi^2(|\vec{q}|))}{1 + \Psi^2(|\vec{q}|)} \hat{p}\cdot\hat{q} \right\}\end{aligned}\tag{3.4.7}$$

Deixando de lado, por enquanto, as divergências infra-vermelhas de (3.4.7), associadas ao comportamento da integral quando  $\vec{p} \rightarrow \vec{q}$ , e analisando a região ultra-violeta (alguma forma de regularização ultra-violeta, como por exemplo um cutoff nos momentos, é suposto em todas as integrais) dessa equação integral de interesse, isto é, a região em que  $q \rightarrow \infty$  de (3.4.7) vemos que, para um  $\vec{p}$  fixo teremos

$$Z_2 |\vec{p}| \Psi(|\vec{p}|) = \frac{e^2}{16\pi^3} \frac{Z_1^2}{Z_3} (1 - \Psi^2(|\vec{p}|)) F(p) - \frac{e^2}{16\pi^3} \frac{Z_1^2}{Z_3} \Psi(|\vec{p}|) G(p) \quad (3.4.8)$$

onde

$$F(p) = \int \frac{d^3 q}{|\vec{p} - \vec{q}|^2} \frac{\Psi(|\vec{q}|)}{1 + \Psi^2(|\vec{q}|)}$$

$$G(p) = \int \frac{d^3 q}{|\vec{p} - \vec{q}|^2} \frac{(1 - \Psi^2(|\vec{q}|))}{1 + \Psi^2(|\vec{q}|)} \hat{p} \cdot \hat{q}$$

Essa separação que fizemos em (3.4.8), em termos das integrais  $F(p)$  e  $G(p)$ , nos é útil pois, podemos imediatamente ver que  $F(p)$  é ultra-violeta finita devido a propriedade (3.3.8), ao passo que  $G(p)$  é, por contagem de potências [4], linearmente divergente, de modo que só precisaremos trabalhar sobre  $G(p)$ .

Nossa tarefa agora, será separar a parte finita e a parte infinita de  $G(p)$ , absorver a parte infinita em definições das constantes  $Z_1$ ,  $Z_2$  e  $Z_3$  e obter assim a equação de gap ultra-violeta renormalizada.

Efetuiremos a separação das partes finita e infinita, através da observância da expansão em série do kernel  $\frac{1}{|\vec{p} - \vec{q}|}$ , na região assintótica, ou seja, na região em que temos  $|\vec{q}| \gg |\vec{p}|$ .

A expansão, na região assintótica, do kernel será

$$\frac{1}{|\vec{p} - \vec{q}|} = \frac{1}{|\vec{q}|} \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{2\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{q}|^2} - \frac{|\vec{p}|^2}{|\vec{q}|^2}\right)\right]} =$$

$$= \frac{1}{|\vec{q}|} \left[ 1 + \frac{2\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{q}|^2} - \frac{|\vec{p}|^2}{|\vec{q}|^2} + \frac{4\vec{p}^i \vec{q}^i \vec{p}^k \vec{q}^k}{|\vec{q}|^4} + \frac{|\vec{p}|^4}{|\vec{q}|^4} - \frac{4|\vec{p}|^2 \vec{p}^i \vec{q}^i}{|\vec{q}|^4} + \dots \right] \quad (3.4.9)$$

Substituindo esta expansão na expressão de  $G(p)$ , temos

$$G(p) = \frac{p^k}{|\vec{p}|} \int d^3 q \left\{ \frac{q^k}{|\vec{q}|^3} + \frac{2p^i q^i q^k}{|\vec{q}|^5} + \right.$$

$$\left. + [\text{termos ultra - violeta convergentes}] \right\} \quad (3.4.10)$$

Dessa maneira vemos que, na região assintótica, a parte divergente de  $G(p)$  será dada pela contribuição dos dois primeiros termos em (3.4.10).

A tarefa se torna mais fácil se observarmos que, se integrarmos nos ângulos o primeiro termo na integral (3.4.10), ficaremos com

$$\int d^3 q \frac{q^k}{|\vec{q}|^3} = 0 \quad (3.4.11)$$



de forma que só teremos infinitos vindos de

$$2 \frac{p^i p^j}{|\vec{p}|} \int d^3 q \frac{q^i q^j}{|\vec{q}|^5} \quad (3.4.12)$$

Antes de tentarmos absorver o infinito de (3.4.12) em definições dos  $Z'_s$ , trabalharemos com essa expressão divergente, de forma a simplificá-la. A simplificação de (3.4.12) vem diretamente, se notarmos que:

$$\int d^3 q \frac{q^i q^j}{|\vec{q}|^5} = g^{ij} L \quad (3.4.13)$$

onde  $L$  é uma integral a ser determinada.

Da relação (3.4.13) podemos inferir que

$$g_i^i L = \int d^3 q \frac{q_i q^i}{|\vec{q}|^5} = \int d^3 q \frac{1}{|\vec{q}|^3}$$

o que implica que  $L$  será dada por

$$L = \frac{1}{3} \int d^3 q \frac{1}{|\vec{q}|^3} \quad (3.4.14)$$

Com este resultado, temos que (3.4.12) pode ainda ser escrita como

$$\frac{2}{3} |\vec{p}| \int d^3 q \frac{1}{|\vec{q}|^3} \quad (3.4.15)$$

que é uma expressão logaritmicamente divergente.

Temos agora ingredientes suficientes para tentarmos renormalizar a equação de gap (3.4.8). Sabemos, do desenvolvimento anterior, que ainda podemos escrever (3.4.8), na região assintótica, da seguinte forma

$$\begin{aligned} & \left[ Z_2 + \frac{e^2}{24\pi^3} \frac{Z_1^2}{Z_3} \int d^3 q \frac{1}{|\vec{q}|^3} \right] |\vec{p}| \Psi(|\vec{p}|) = \\ & = \frac{e^2}{16\pi^3} \frac{Z_1^2}{Z_3} \left[ F(p) + \hat{p} \Psi(|\vec{p}|) \int d^3 q (\text{termos convergentes}) \right] \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

Uma possível definição dos  $Z'_s$ , que nos levaria a uma equação de gap finita seria

$$(1 - Z_2) = \frac{e^2}{24\pi^3} \int d^3 q \frac{1}{|(q^2 + M^2)|^{\frac{3}{2}}}$$

$$Z_1 \text{ e } Z_3 \text{ finitas} \quad (3.4.17)$$

A introdução de um parâmetro com dimensão de massa (ponto de renormalização),  $M$ , se faz necessário para que não introduzamos no problema novas divergências infravermelhas não inicialmente presentes. O parâmetro  $M$  introduz no problema uma escala de massa que "quebra" a aparente simetria de escala, que poderia ser "lida" da Lagrangiana.

De fato, uma teoria quântica de campos é definida por :

- a. Lagrangiana
- b. Relações de comutação
- c. Condições de renormalização

e portanto, mesmo uma teoria sem termo de massa na Lagrangiana acaba recebendo uma escala de massa através do ponto de renormalização.

Contudo, tal escolha dos  $Z$ 's contradiria frontalmente um resultado que vale, ordem a ordem, em teoria de perturbação e que também esperaríamos que valesse em nosso caso. Tal resultado é a igualdade entre  $Z_1$  e  $Z_2$  e é obtido através da chamada Identidade de Ward [6].

Não sabemos até que ponto tal resultado se estende para um cálculo variacional, entretanto contradizê-lo seria, no mínimo, bastante temeroso de nossa parte.

Nesse ponto devemos notar que, devido a forma escolhida para o ansatz do vácuo da fase quebrada (3.2.1), não estamos levando em conta (quando do cálculo do valor esperado do Hamiltoniano nesse vácuo) a dinâmica relativística da teoria, contida no termo  $e\bar{\psi}\gamma^k A_k \psi$ , mas sim somente a cinemática Coulombiana.

Vemos aqui que o parâmetro de massa que aparece devido ao processo de renormalização nos dá uma justificativa "a posteriori" para o fato de estarmos usando um ansatz não relativístico numa teoria inicialmente sem massa. Com isto estamos escolhendo um referencial privilegiado, o referencial de repouso da partícula. Sendo assim podemos dizer que, os resultados obtidos utilizando-se (3.2.1) não serão em geral covariantes, visto que o ansatz trata diferentemente as componentes temporal e espaciais de  $A_\mu$ .

Essa evidência faz-nos esperar que, os infinitos surgidos após a utilização de (3.2.1), devam também ser absorvidos de maneira não covariante pelos  $Z$ 's.

Para que isso seja possível é necessário que os contratermos, ao serem introduzidos na teoria, também o façam não covariantemente.

Com isto posto, nosso Lagrangiano (3.4.2) deve então ser levado em

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & Z_{2,0} i\bar{\psi}\gamma^0 \partial_0 \psi + Z_2 i\bar{\psi}\gamma^j \partial_j \psi + \\ & + \frac{1}{2} Z_3 (\vec{E}_i^2 - \vec{B}^2) + \frac{1}{2} Z_{3,0} \vec{E}_i^2 + e Z_{1,0} \bar{\psi}\gamma^0 A_0 \psi + \\ & + e Z_1 \bar{\psi}\gamma^j A_j \psi \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

onde  $\vec{E}_i^2 = \frac{e^2}{8\pi} \int d^3y \frac{\rho(x)\rho(y)}{|\vec{x}-\vec{y}|}$ . Os momentos canonicamente conjugados serão

$$\pi_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i Z_{2,0} \psi^\dagger$$

$$\pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = -Z_3 \dot{A}_i$$

$$\pi_0 = 0 \quad (3.4.19)$$

O Hamiltoniano ficará

$$H = \int d^3x \left[ -iZ_2 \bar{\psi} \gamma^k \partial_k \psi + \frac{Z_3}{2} (\vec{E}_i^2 + \vec{B}^2) + \frac{e^2 Z_{1,0}^2}{8\pi Z_{3,0}} \int d^3y \frac{\rho(x)\rho(y)}{|\vec{x}-\vec{y}|} - eZ_1 \bar{\psi} \gamma^k \partial_k \psi \right] \quad (3.4.20)$$

o valor da energia do vácuo,  $E_0$ , será

$$E_0 = \left\{ -Z_2 \int d^3p 2|\vec{p}| + Z_3 \int d^3k |\vec{k}| + \frac{e^2 Z_{1,0}^2}{16\pi^3 Z_{3,0}} \int \frac{d^3p d^3q}{|\vec{p}-\vec{q}|^2} (1 - \hat{p} \cdot \hat{q}) \right\} \delta^3(0) \quad (3.4.21)$$

O funcional  $E[\Psi]$  será levado em

$$E[\Psi] = Z_2 \int d^3p \frac{4|\vec{p}| \Psi(|\vec{p}|)}{1 + \Psi^2(|\vec{p}|)} \delta^3(0) + \frac{e^2 Z_{1,0}^2}{4\pi^3 Z_{3,0}} \int \frac{d^3p d^3q}{|\vec{p}-\vec{q}|^2} [\dots] \delta^3(0) + \frac{e^2 Z_{1,0}^2}{16\pi^3 Z_{3,0}} \int \frac{d^3p d^3q}{|\vec{p}-\vec{q}|^2} (1 - \hat{p} \cdot \hat{q}) \delta^3(0) \quad (3.4.22)$$

Finalmente a equação de gap (3.4.16), já com a separação da parte ultra-violeta divergente, ficará

$$\left[ Z_2 + \frac{e^2 Z_{1,0}^2}{24\pi^3 Z_{3,0}} \int d^3q \frac{1}{q^3} \right] |\vec{p}| \Psi(|\vec{p}|) = \frac{e^2 Z_{1,0}^2}{16\pi^3 Z_{3,0}} \left( F(p) + \hat{p} \Psi(|\vec{p}|) \int d^3q [\text{termos convergentes}] \right) \quad (3.4.23)$$

Impondo agora a Identidade de Ward separadamente, tanto para as componentes espaciais como para as temporais, ou seja, assumindo que

$$Z_1 = Z_2 \quad (3.4.24)$$

$$Z_{1,0} = Z_{2,0}$$

teremos que, com a seguinte prescrição de renormalização da equação de gap, análoga àquela em (3.4.17),

$$(1 - Z_2) = \frac{e^2}{24\pi^3} \int d^3q \frac{1}{(\vec{q}^2 + M^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$Z_{1,0} \text{ e } Z_{3,0} \text{ finitas} \quad (3.4.25)$$

de modo que  $\alpha = \frac{Z_{1,0}^2 e^2}{Z_{3,0} 4\pi}$ , e assim a teoria não apresentará mais problemas com a verificação da Identidade de Ward.

Com as definições dos  $Z$ 's já implementadas, podemos então retornar a nossa equação de gap original (3.4.8), agora ultra-violeta finita

$$\begin{aligned} |\vec{p}| \Psi(|\vec{p}|) &= |\vec{p}| \Psi(|\vec{p}|) (1 - Z_2) + \\ &+ \frac{\alpha}{4\pi^2} \int \frac{d^3 q}{|\vec{p} - \vec{q}|^2} \frac{\Psi(|\vec{q}|) (1 - \Psi^2(|\vec{p}|)) - \Psi(|\vec{p}|) (1 - \Psi^2(|\vec{q}|)) \hat{p} \cdot \hat{q}}{1 + \Psi^2(|\vec{q}|)} \end{aligned} \quad (3.4.26)$$

Se utilizarmos ainda as seguintes integrais nos ângulos

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3 q}{|\vec{p} - \vec{q}|^2} &= \int_0^\infty dq |\vec{q}| \ln \left( \frac{|\vec{p} - \vec{q}|}{|\vec{p} + \vec{q}|} \right)^2 \\ \int \frac{d^3 q}{|\vec{p} - \vec{q}|^2} \hat{p} \cdot \hat{q} &= \frac{-\pi}{|\vec{p}|} \int_0^\infty dq |\vec{q}| \left[ 2 + \frac{p^2 + q^2}{2|\vec{p}||\vec{q}|} \ln \left( \frac{|\vec{p} - \vec{q}|}{|\vec{p} + \vec{q}|} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.4.27)$$

ficaremos com a seguinte expressão para a equação de gap

$$\begin{aligned} |\vec{p}| \Psi(|\vec{p}|) &= \frac{\alpha}{6\pi} \int_0^\infty dq \left[ \frac{4|\vec{p}|^2 |\vec{q}|^2}{(q^2 + M^2)^{\frac{3}{2}}} \Psi(|\vec{p}|) + \right. \\ &+ \left. \frac{3|\vec{q}|}{|\vec{p}|} \Psi(|\vec{p}|) \left( 1 + \frac{p^2 + q^2 + 2}{2|\vec{p}||\vec{q}|} \ln \left( \frac{|\vec{p} - \vec{q}|}{|\vec{p} + \vec{q}|} \right) \right) \right] + \\ &- \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^\infty dq \left\{ \frac{\Psi(|\vec{q}|) (1 - \Psi^2(|\vec{p}|))}{1 + \Psi^2(|\vec{q}|)} \frac{|\vec{q}|}{|\vec{p}|} \ln \left( \frac{|\vec{p} - \vec{q}|}{|\vec{p} + \vec{q}|} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{2|\vec{q}|}{|\vec{p}|} \frac{\Psi^2(|\vec{q}|) \Psi(|\vec{p}|)}{1 + \Psi^2(|\vec{q}|)} \left[ 1 + \frac{p^2 + q^2}{2|\vec{p}||\vec{q}|} \ln \left( \frac{|\vec{p} - \vec{q}|}{|\vec{p} + \vec{q}|} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.4.28)$$

Se definirmos agora as variáveis adimensionais :  $x = \frac{|\vec{p}|}{M}$  e  $y = \frac{|\vec{q}|}{M}$ , podemos reescrever a equação de gap (3.4.28) como

$$\begin{aligned} x \Psi(Mx) &= \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \left[ (-2\Psi(Mx)) \int_0^\infty \frac{y}{x} \left( 1 + \frac{x^2 + y^2}{2xy} \ln \left( \frac{x-y}{x+y} \right) \frac{\Psi^2(My)}{1 + \Psi^2(My)} \right) + \right. \\ &- \left. (1 - \Psi^2(Mx)) \int_0^\infty dy \frac{y}{x} \ln \left( \frac{x-y}{x+y} \right) \frac{\Psi(My)}{1 + \Psi^2(My)} \right] + \end{aligned}$$

$$\Psi(Mx) \frac{\alpha}{\pi} \left\{ \frac{2x}{3} \int_0^\infty dy \frac{y^2}{(y^2+1)^{\frac{3}{2}}} + \int_0^\infty dy \frac{y}{x} \left[ 1 + \frac{x^2+y^2}{2xy} \ln \left( \frac{x-y}{x+y} \right) \right] \right\} \quad (3.4.29)$$

Vemos da equação acima que, a única dependência explícita em  $\Psi$  é com o acoplamento  $\alpha$ . A dependência de  $\Psi$  com  $M$  deverá ser dada de uma maneira implícita, através do acoplamento  $\alpha$ . Tal dependência do acoplamento com o parâmetro de massa deve ser encarada como uma renormalização de carga na teoria. Veremos mais adiante que tal renormalização de carga será necessária para a interpretação correta da massa gerada para o férmion.

Assim teremos

$$\begin{aligned} \Psi(Mx) &\longrightarrow \phi_\alpha(x) \\ \alpha &\longrightarrow \alpha(M) \end{aligned} \quad (3.4.30)$$

o que nos deixará com

$$\begin{aligned} x\phi_\alpha(x) &= \\ &= \frac{\alpha(m)}{2\pi} \left[ -2\phi_\alpha(x) \int_0^\infty dy \frac{y}{x} \left( 1 + \frac{x^2+y^2}{2xy} \ln \left( \frac{x-y}{x+y} \right) \right) \frac{\phi_\alpha^2(y)}{1+\phi_\alpha^2(y)} + \right. \\ &\quad \left. - (1-\phi_\alpha(x)) \int_0^\infty dy \frac{y}{x} \ln \left( \frac{x-y}{x+y} \right) \frac{\phi_\alpha^2(y)}{1+\phi_\alpha^2(y)} \right] + \\ &\quad + \phi_\alpha(x) \frac{\alpha(M)}{\pi} \left[ \frac{2x}{3} \int_0^\infty dy \frac{y^2}{(y^2+1)^{\frac{3}{2}}} + \int_0^\infty dy \frac{y}{x} \left( 1 + \frac{x^2+y^2}{2xy} \ln \left( \frac{x-y}{x+y} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.4.31)$$

Essa equação acima só é possível de ser resolvida numericamente.

Temos, neste ponto, terminado a análise do comportamento ultra-violeta da equação de gap. Entretanto, isso não encerra todos infinitos que, aparentemente, a equação (3.4.26) apresenta, uma vez que na região onde  $\vec{p} \rightarrow \vec{q}$ , o kernel  $\left( \frac{1}{|\vec{p}-\vec{q}|^2} \right)$ , a princípio, é responsável pelo aparecimento de divergências infra-vermelhas.

Novamente, analisaremos esta singularidade através de uma expansão em série do integrando, da parte que parece apresentar divergência infra-vermelha.

Na região de interesse, isto é, quando  $\vec{p} \rightarrow \vec{q}$ , teremos válidas as seguintes aproximações

$$\vec{p} - \vec{q} = \vec{\epsilon}$$

$$\Psi(|\vec{q}|) = \Psi(|\vec{p}|) + \frac{\vec{p} \cdot \vec{\epsilon}}{|\vec{p}|} \Psi'(|\vec{p}|) + O(\epsilon^2)$$

$$\begin{aligned}\Psi^2(|\vec{q}|) &= \Psi^2(|\vec{p}|) + \frac{2\hat{p}\cdot\vec{\epsilon}}{|\vec{p}|}\Psi'(|\vec{p}|)\Psi(|\vec{p}|) + O(\epsilon^2) \\ \hat{p}\cdot\vec{q} &= \hat{p}\cdot\frac{\vec{q}}{|\vec{q}|} = \frac{\hat{p}\cdot(\vec{p} + \vec{\epsilon})}{\left(|\vec{p}| + \frac{\hat{p}\cdot\vec{\epsilon}}{|\vec{p}|}\right)} = \frac{\hat{p}\cdot(\vec{p} + \vec{\epsilon})}{|\vec{p}|} \left(1 - \frac{\hat{p}\cdot\vec{\epsilon}}{|\vec{p}|^2}\right) = \\ &= 1 + \frac{\hat{p}\cdot\vec{\epsilon}}{|\vec{p}|} - \frac{\hat{p}\cdot\vec{\epsilon}}{|\vec{p}|^2} + O(\epsilon^2) = 1 + O(\epsilon^2)\end{aligned}\quad (3.4.32)$$

onde  $\vec{\epsilon}$  é arbitrariamente pequeno.

Substituindo as expansões (3.4.32) no integrando da parte em análise de (3.4.26), teremos

$$\begin{aligned}\int \frac{d^3q}{|\vec{\epsilon}|^2} \left\{ \left[ \left( \Psi(|\vec{p}|) + \frac{\hat{p}\cdot\vec{\epsilon}}{|\vec{p}|}\Psi'(|\vec{p}|) + O(\epsilon^2) \right) (1 - \Psi^2(|\vec{p}|)) + \right. \right. \\ \left. \left. - \Psi(|\vec{p}|) \left( 1 - \Psi^2(|\vec{p}|) - \frac{2\hat{p}\cdot\vec{\epsilon}}{|\vec{p}|}\Psi'(|\vec{p}|)\Psi(|\vec{p}|) + O(\epsilon^2) \right) \right] \right. \\ \left. \frac{1}{(1 + \Psi^2(|\vec{p}|)) \left( 1 + \frac{2\hat{p}\cdot\vec{\epsilon}}{|\vec{p}|}\Psi'(|\vec{p}|)\Psi(|\vec{p}|) + O(\epsilon^2) \right)} \right\}\end{aligned}$$

que após algumas passagens e cancelamentos ficará

$$\int \frac{d^3q}{|\vec{\epsilon}|^2} \left[ \frac{\hat{p}\cdot\vec{\epsilon}}{|\vec{p}|}\Psi'(|\vec{p}|) + O(\epsilon^2) \right] \quad (3.4.33)$$

Dessa expressão podemos inferir que, aparte o primeiro termo no integrando, todos os demais serão infra-vermelho convergentes.

Uma vez identificado o termo divergente, precisamos trabalhar sua expressão e tentar de alguma maneira eliminá-lo. Já sabemos que sua expressão será

$$\frac{\hat{p}^j}{|\vec{p}|}\Psi'(|\vec{p}|) \int \frac{d^3q}{|\vec{p}-\vec{q}|} (\vec{p}-\vec{q})^j \quad (3.4.34)$$

Agora não precisaremos mais nos valer da hipótese que  $(\vec{p}-\vec{q}) = \vec{\epsilon}$ , visto que já isolamos o termo de interesse. Dessa maneira, se fizermos a seguinte substituição de variáveis em (3.4.34)

$$\begin{aligned}\vec{q} &\rightarrow \vec{q}' = \vec{q} - \vec{p} \\ d\vec{q}' &= d\vec{q}\end{aligned}$$

e integrarmos nos ângulos a expressão divergente veremos que, devido a simetria esférica, o único termo que poderia nos levar até infinitos é na realidade igual a zero, sendo portanto (3.4.26) infra-vermelho finita [5].

### 3.5) Analogia com a Equação de Schwinger-Dyson

Como temos dito na introdução, a maioria dos desenvolvimentos teóricos não perturbativos realizados até o momento, na tentativa tanto de buscar uma E.D.Q. logicamente completa como de tentar fornecer uma explicação razoável para os resultados de colisões entre íons super pesados, utilizam como fundamento teórico as equações integrais de auto-consistência para as funções de Green da teoria, isto é, as chamadas equações de Schwinger-Dyson[1].

Seria-nos pois interessante, se pudessemos erigir uma ponte entre a análise variacional que estamos efetuando e aquelas realizadas com as equações de Schwinger-Dyson.

Na verdade, veremos nesta seção que, se implementarmos as mesmas aproximações contidas no ansatz (3.2.4), seremos capazes de obter a mesma equação de gap para  $\Psi$  (3.3.5), só que agora partindo das equações de auto-consistência.

Antes de iniciarmos, lembramos que os resultados que temos obtido utilizando o ansatz (3.2.4), não levam em conta as correções quânticas que possam surgir devido aos fótons transversais. Isto quebra a covariância dos resultados da teoria e esta é, basicamente, a aproximação implementada pelo ansatz variacional.

A equação de Schwinger-Dyson para a auto-energia do elétron, que é a equação que iremos empregar para obter a equação de gap (3.3.5) é dada por [6]

$$-i \Sigma(p) = -(ie)^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} i D'_f(p)_{\mu\nu} \Gamma^\mu(p, p-k) i S_f^{(4)}(p-k) \gamma^\nu \quad (3.5.1)$$

onde  $\Sigma(p)$  representa as contribuições para a auto-energia do elétron,  $D'_f(p)_{\mu\nu}$  é o propagador do fóton,  $\Gamma^\mu(p, p-k)$  é a chamada função de vértice e  $S_f^{(4)}(p-k)$  é o propagador do elétron.

Se quiséssemos calcular qualquer uma das grandezas acima, deveríamos computar gráficos de Feynman de todas as ordens, o que nos seria impossível. Assim sendo, usaremos expressões aproximadas para estes operadores que nos permitam um cálculo analiticamente factível.

Usaremos que o propagador do elétron sem massa é obtido, via o operador de auto-energia do elétron, da seguinte maneira [6]

$$S_f^{(4)}(p) = \frac{1}{\not{p} - \Sigma(p)} \quad (3.5.2)$$

Introduziremos então um ansatz tridimensional, não relativístico para  $\Sigma(p)$  [6], de forma a obtermos uma expressão para  $S_f^{(4)}$ .

$$\Sigma(\vec{p}) = |\vec{p}| A(|\vec{p}|) + \vec{\gamma} \cdot \vec{p} B(|\vec{p}|) + C \gamma^0 \quad (3.5.3)$$

onde  $A(|\vec{p}|)$  e  $B(|\vec{p}|)$  são duas funções escalares arbitrárias a serem determinadas.

O propagador pode então ser escrito como

$$S_f^{(4)}(p) = \frac{1}{(p_0 - C)\gamma^0 - A(|\vec{p}|)|\vec{p}| - [1 + B(|\vec{p}|)]\vec{\gamma}\cdot\vec{p}} = \frac{\gamma^0(p_0 - C) - \vec{\gamma}\cdot\vec{p}[1 + B(|\vec{p}|)] + A(|\vec{p}|)|\vec{p}|}{(p_0 - C)^2 - w^2(p)} \quad (3.5.4)$$

onde  $w^2(p) = p^2 \{A^2(|\vec{p}|) + [1 + B(|\vec{p}|)]^2\}$

Note aqui que, os pontos de pólo do denominador ocorrem em  $p_0 = w(p) + C$  e em  $p_0 = -(w(p) - C)$ . Sabemos então, pela teoria do mar de Dirac, que isso corresponde a um espectro de elétrons com energia  $(w(p) + C)$  e de pósitrons com energia  $(w(p) - C)$ . Isto é, se  $C \neq 0$  teremos uma assimetria do espectro em relação ao zero de energia

Faremos então, daqui pra diante, a escolha de  $C = 0$ , de modo a obtermos um espectro simétrico em relação à origem.

Também não estaremos considerando, neste cálculo, contribuições para a função de vértice e nem mesmo as polarizações do vácuo, ou seja, a função de vértice e o propagador do fóton serão dados por

$$\Gamma^\mu(p, q) = \gamma^\mu$$

$$D_f'(p - q)_{\mu\nu} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p - q)^2} \quad (3.5.5)$$

Esta aproximação acima é chamada de aproximação de Hartree [8]

Substituindo agora (3.5.5) e (3.5.4) em (3.5.1), teremos

$$-i \sum(p) = e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{g^{\mu\nu}}{(p - q)^2} \gamma_\mu \frac{[\gamma^0 p_0 - \vec{\gamma}\cdot\vec{p}(1 + B(|\vec{p}|)) + |\vec{p}|A(|\vec{p}|)]}{p_0^2 - w^2(p)} \gamma_\nu \quad (3.5.6)$$

Tudo o que temos feito até aqui são aproximações que nos facilitarão os cálculos posteriores. Entretanto, não temos ainda introduzido as aproximações equivalentes às efetuadas quando da utilização de (3.2.4). Para isso devemos notar que no nosso cálculo, devido a escolha do gauge de Coulomb e a estrutura do ansatz (3.2.4), só temos considerado a parte temporal do termo de interação  $e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$ , ou seja, selecionamos os fótons tipo-tempo. Além disso, podemos notar de (3.3.3) que, a interação resultante entre os férmions é efetuada instantaneamente, sem termos de retardamento, através do potencial Coulombiano

$$\int d^3 y \frac{\rho(x)\rho(y)}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$



Devemos implementar estas aproximações dentro da expressão para o propagador do fóton. Em primeiro lugar, se quisermos selecionar, à priori, os fótons tipo-tempo, deveremos desprezar as componentes da métrica de Minkowsky diferentes de  $g^{00}$ . Por fim, se a interação entre os férmions deve ser instantânea, deveremos desprezar ainda o retardamento presente na expressão do propagador do fóton, ou seja, deveremos ter  $(p_0 - q_0)^2 = 0$ .

Se considerarmos tais asserções, teremos que (3.5.6) será levada a

$$-i \sum(p) = -e^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{|\vec{p} - \vec{q}|^2} \gamma^0 \frac{[\gamma^0 p_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{p}(1 + B(|\vec{p}|)) + |\vec{p}|A(|\vec{p}|)]}{p_0^2 - w^2(p)} \gamma_0 \quad (3.5.7)$$

Guardemos por enquanto esta expressão pois, veremos mais adiante que a partir dela, rededuziremos a equação de gap para  $\Psi$ .

Passamos agora a construir a ligação entre os dois tipos de análise. Faremos tal conexão utilizando a expressão para o propagador de Feynman do elétron [6]

$$\begin{aligned} \langle \Psi | T \psi_\alpha(\vec{x}, t) \bar{\psi}_\beta(\vec{y}, 0) | \Psi \rangle &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} S^{(4)}(p) = \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{i}{(\not{p} - \Sigma)_{\alpha\beta}} \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

onde temos assumido que o vácuo é representado pelo ket  $|\Psi\rangle$ .

Podemos ainda trabalhar o lado esquerdo desta última equação, da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \langle \Psi | T \psi_\alpha(\vec{x}, t) \bar{\psi}_\beta(\vec{y}, 0) | \Psi \rangle &= \\ &= \langle \Psi | \theta(t) \psi_\alpha(\vec{x}, t) \bar{\psi}_\beta(\vec{y}, 0) - \theta(-t) \bar{\psi}_\beta(\vec{y}, 0) \psi_\alpha(\vec{x}, t) | \Psi \rangle = \\ &= \langle \Psi | \frac{1 + \epsilon(t)}{2} \psi_\alpha(\vec{x}, t) \bar{\psi}_\beta(\vec{y}, 0) - \frac{1 - \epsilon(t)}{2} \bar{\psi}_\beta(\vec{y}, 0) \psi_\alpha(\vec{x}, t) | \Psi \rangle = \\ &= \langle \Psi | \frac{1}{2} [\psi_\alpha(\vec{x}, t) \bar{\psi}_\beta(\vec{y}, 0)] + \frac{\epsilon(t)}{2} \{\psi_\alpha(\vec{x}, t), \bar{\psi}_\beta(\vec{y}, 0)\} | \Psi \rangle = \end{aligned}$$

usando agora que  $\epsilon(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow 0$ , ficaremos com

$$\langle \Psi | T \psi_\alpha(\vec{x}, 0) \bar{\psi}_\beta(\vec{y}, 0) | \Psi \rangle = \langle \Psi | \frac{1}{2} [\psi_\alpha(\vec{x}, 0), \bar{\psi}_\beta(\vec{y}, 0)] | \Psi \rangle \quad (3.5.9)$$

o que nos leva a

$$\langle \Psi | \frac{1}{2} [\psi_\alpha(\vec{x}, 0), \bar{\psi}_\beta(\vec{y}, 0)] | \Psi \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} i S^4(p). \quad (3.5.10)$$

Esta última expressão que obtivemos para o propagador de Feynman do férmion a tempos iguais, pode ser agora avaliada de duas maneiras diferentes: 1) através do cálculo

do comutador entre  $\psi$  e  $\bar{\psi}$ , utilizando-se a expressão (3.2.9), anteriormente obtida. 2) substituindo-se (3.5.4) diretamente

Substituindo (3.2.9) e sua adjunta no lado direito de (3.5.10) teremos, economizando algumas passagens

$$\begin{aligned} & \langle \Psi | \frac{1}{2} [\psi_\alpha(\vec{x}, 0), \bar{\psi}_\beta(\vec{y}, 0)] | \Psi \rangle = \\ & \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sum_s \left[ W_{s,\alpha}(p) W_{s,\nu}^\dagger(p) \gamma_{0,\beta}^\nu e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} - M_{s,\alpha}(p) M_{s,\mu}^\dagger \gamma_{0,\beta}^\mu e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \right] = \\ & = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \left[ \frac{\Psi(|\vec{p}|)}{1 + \Psi^2(|\vec{p}|)} - \frac{1}{2} \frac{1 - \Psi^2(|\vec{p}|)}{1 + \Psi^2(|\vec{p}|)} \vec{\gamma} \cdot \vec{p} \right]_{\alpha,\beta} \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

onde temos usado os resultados de (3.2.11) e (3.2.5).

Por outro lado, substituindo (3.5.4) no lado esquerdo de (3.5.10) teremos

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} i S^{(4)}(p) = \\ & = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ i\gamma^0 \int \frac{dp_0}{2\pi} \frac{p_0}{p_0^2 - w^2(p)} + \right. \\ & \left. + [i|\vec{p}|A(|\vec{p}|) - \vec{\gamma} \cdot \vec{p}(1 + B(|\vec{p}|))] \int \frac{dp_0}{2\pi} \frac{1}{p_0^2 - w^2(p)} \right\} \end{aligned}$$



A primeira integral em  $p_0$  é igual a zero, por paridade. Já a segunda pode ser calculada utilizando-se o método dos resíduos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{dp_0}{2\pi} \frac{i}{p_0^2 - w^2(p) + i\epsilon} = \frac{1}{2w(p)} \quad (3.5.12)$$

Como queremos a função de Green de Feynman, então o regulador  $i\epsilon$  aparece com o sinal positivo [9].

Com estas observações teremos

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} i S^{(4)}(p) = \\ & = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{-\vec{\gamma} \cdot \vec{p}(1 + B(|\vec{p}|)) + |\vec{p}|A(|\vec{p}|)}{2w(p)} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \end{aligned} \quad (3.5.13)$$

Se agora substituirmos os lados direito e esquerdo de (3.5.10) pelos resultados de (3.5.11) e (3.5.13), respectivamente, seremos levados às seguintes relações entre o parâmetro variacional  $\Psi(|\vec{p}|)$  e as funções escalares,  $A(|\vec{p}|)$  e  $B(|\vec{p}|)$ , que aparecem na equação de Schwinger-Dyson (3.5.7)

$$\frac{A(|\vec{p}|)}{\sqrt{A^2(|\vec{p}|) + [1 + B(|\vec{p}|)]^2}} = \frac{2\Psi(|\vec{p}|)}{1 + \Psi^2(|\vec{p}|)}$$

$$\frac{1 + B(|\vec{p}|)}{\sqrt{A^2(|\vec{p}|) + [1 + B(|\vec{p}|)]^2}} = \frac{1 - \Psi^2(|\vec{p}|)}{1 + \Psi^2(|\vec{p}|)} \quad (3.5.14)$$

Estas relações são a base da conexão entre o cálculo variacional que estamos efetuando e uma análise tipo Schwinger-Dyson.

Retornando à equação de auto-consistência para a auto-energia do férmion (3.5.7) e notando que, os únicos pólos que aparecem na integração em  $p_0$  são aqueles que já atacamos em (3.5.12), teremos

$$\Sigma(p) = \frac{e^2}{16\pi^3} \int d^3q \frac{1}{|\vec{p} - \vec{q}|^2} \gamma^0 \frac{[|\vec{q}|A(|\vec{q}|) - \vec{\gamma} \cdot \vec{q}(1 + B(|\vec{q}|))]}{w(q)} \gamma^0 \quad (3.5.15)$$

Com a ajuda das relações (3.5.14), teremos ainda

$$\Sigma(p) = \frac{e^2}{8\pi^3} \int d^3q \frac{1}{|\vec{p} - \vec{q}|^2} \gamma^0 \left[ \frac{\Psi(|\vec{q}|)}{1 + \Psi^2(|\vec{q}|)} + \frac{1}{2} \frac{1 - \Psi^2(|\vec{q}|)}{1 + \Psi^2(|\vec{q}|)} \vec{\gamma} \cdot \hat{q} \right] \gamma^0 \quad (3.5.16)$$

Comparando-se agora (3.5.16) com (3.5.3), tiraremos que

$$\begin{aligned} |\vec{p}|A(|\vec{p}|) &= \frac{e^2}{8\pi^3} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{|\vec{p} - \vec{q}|^2} \frac{\Psi(|\vec{q}|)}{1 + \Psi^2(|\vec{q}|)} \\ |\vec{p}|B(|\vec{p}|) &= \frac{e^2}{8\pi^3} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{|\vec{p} - \vec{q}|^2} \frac{1 - \Psi^2(|\vec{q}|)}{1 + \Psi^2(|\vec{q}|)} \hat{p} \cdot \hat{q} \end{aligned} \quad (3.5.17)$$

Substituindo agora as equações (3.5.17), na identidade, facilmente deduzida das relações (3.5.14)

$$|\vec{p}| \Psi(|\vec{p}|) = \frac{1}{2} [1 - \Psi^2(|\vec{p}|)] |\vec{p}|A(|\vec{p}|) - \Psi(|\vec{p}|) |\vec{p}|B(|\vec{p}|) \quad (3.5.18)$$

teremos finalmente

$$\begin{aligned} |\vec{p}| \Psi(|\vec{p}|) &= \frac{e^2}{16\pi^3} \int d^3q \frac{1}{|\vec{p} - \vec{q}|^2} \left[ \frac{\Psi(|\vec{q}|) [1 - \Psi^2(|\vec{p}|)]}{1 + \Psi^2(|\vec{q}|)} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Psi(|\vec{p}|) [1 - \Psi^2(|\vec{q}|)]}{1 + \Psi^2(|\vec{q}|)} \hat{p} \cdot \hat{q} \right] \end{aligned} \quad (3.5.19)$$

que é exatamente a equação de gap (3.3.5) que já obtivemos com o nosso cálculo variacional.

O interessante é notar aqui que, além da conexão estabelecida entre os dois tipos de análise, obtivemos ainda uma expressão para a energia da quase-partícula em termos da função de onda do estado ligado  $\Psi$ .

Essa energia da quase partícula é justamente o ponto do pólo do propagador do elétron,  $w(p)$ , que esta relacionado com  $\Psi$  da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
w(p) &= \frac{1 + \Psi^2(|\vec{p}|)}{2\Psi(|\vec{p}|)|\vec{p}|} A(|\vec{p}|) = \\
&= \frac{1 + \Psi^2(|\vec{p}|)}{2\Psi(|\vec{p}|)} \frac{e^2}{8\pi^3} \int d^3q \frac{1}{|\vec{p} - \vec{q}|^2} \frac{\Psi(|\vec{q}|)}{1 + \Psi^2(|\vec{q}|)}
\end{aligned} \tag{3.5.20}$$

Podemos ver que, devido a (3.3.8), a expressão para a energia da quase partícula é ultra-violeta convergente. Além disso, fazendo a seguinte substituição de variáveis em (3.5.20)

$$\begin{aligned}
\vec{q} &\longrightarrow \vec{q}' = \vec{q} - \vec{p} \\
d\vec{q} &= d\vec{q}'
\end{aligned}$$

ficaremos com

$$w(p) = \frac{1 + \Psi^2(|\vec{p}|)}{2\Psi(|\vec{p}|)} \frac{e^2}{8\pi} \int \frac{d^3q}{|\vec{q}|^2} \frac{\Psi(|\vec{q} + \vec{p}|)}{1 + \Psi^2(|\vec{q} + \vec{p}|)} \tag{3.5.21}$$

que é facilmente vista ser infra-vermelha convergente.

Se utilizarmos agora as variáveis adimensionais definidas na seção anterior,  $x = \frac{|\vec{p}|}{M}$  e  $y = \frac{|\vec{q}|}{M}$ , e ainda as considerações resumidas em (3.4.30), teremos que (3.5.20) transformar-se-á em

$$w(Mx) = \frac{\alpha(M)}{4\pi^2} M \int \frac{d^3y}{y^2} \frac{\phi_\alpha(y)}{\phi_\alpha(x)} \frac{1 + \phi_\alpha^2(x)}{1 + \phi_\alpha^2(y)} \tag{3.5.22}$$

É interessante observar aqui que  $w(p)$ , ao qual deve estar associada a energia do elétron, depende do ponto de renormalização  $M$ . Esta é uma situação desagradável pois, uma quantidade física, como deveria ser  $w(p)$ , não deve depender do ponto de renormalização.

Note ainda que, além da dependência explícita de  $w(p)$  com  $M$ , existe ainda uma dependência implícita através de  $\alpha(M)$ . Utilizando este fato podemos impor que a variação total de  $w(p)$  com  $M$  seja zero, o que nos levará a uma expressão para a dependência de  $\alpha$  com  $M$ .

$$\begin{aligned}
\frac{dw(Mx)}{dM} &= \frac{\alpha(M)}{4\pi^2} \int \frac{d^3y}{y^2} \frac{\phi_\alpha(y)}{\phi_\alpha(x)} \frac{1 + \phi_\alpha^2(x)}{1 + \phi_\alpha^2(y)} + \\
&\quad + \frac{d\alpha(M)}{M} M \int \frac{d^3y}{y^2} \frac{\phi_\alpha(y)}{\phi_\alpha(x)} \frac{1 + \phi_\alpha^2(x)}{1 + \phi_\alpha^2(y)} + \\
&\quad + \frac{M}{4\pi^2} \int \frac{d^3y}{y^2} \left\{ \frac{d}{d\alpha(M)} \left[ \frac{\phi_\alpha(y)}{\phi_\alpha(x)} \frac{1 + \phi_\alpha^2(x)}{1 + \phi_\alpha^2(y)} \right] \right\} \frac{d\alpha(M)}{dM} = 0
\end{aligned}$$

o que nos leva a uma expressão para a dependência de  $\alpha$  com  $M$ , que só poderá ser resolvida uma vez que encontrarmos uma solução da equação de gap

$$\frac{d\alpha(M)}{dM} =$$

$$= \frac{\frac{\alpha(M)}{4\pi^2} \int \frac{d^3y}{y^2} \frac{\phi_\alpha(y) (1+\phi_\alpha^2(x))}{\phi_\alpha(x) (1+\phi_\alpha^2(y))}}{\frac{-M}{4\pi^2} \int \frac{d^3y}{y^2} \left\{ \frac{d}{d\alpha(M)} \left[ \frac{\phi_\alpha(y) (1+\phi_\alpha^2(x))}{\phi_\alpha(x) (1+\phi_\alpha^2(y))} \right] \frac{d\alpha(M)}{dM} \right\} + M \int \frac{d^3y}{y^2} \frac{\phi_\alpha(y) (1+\phi_\alpha^2(x))}{\phi_\alpha(x) (1+\phi_\alpha^2(y))}} \quad (3.5.23)$$

Fazendo agora

$$X = \frac{1 + \phi_\alpha^2(x)}{\phi_\alpha(x)}$$

$$Y = \frac{1 + \phi_\alpha^2(y)}{\phi_\alpha(y)}$$

$$e \quad A = \frac{X}{Y}$$

teremos

$$\frac{dA}{d\alpha} = \left( \frac{dX}{d\alpha} \right) \left( \frac{1}{Y} \right) + X \left( -\frac{1}{Y^2} \frac{dY}{d\alpha} \right)$$

Com estas simplificações podemos obter uma expressão para a função  $\beta$  (beta) [10], dada abaixo:

$$\begin{aligned} \beta &= M \frac{d\alpha(M)}{dM} = \frac{-\alpha X \int \frac{1}{X}}{X \int \frac{1}{Y} + \alpha \frac{dX}{d\alpha} \int \frac{1}{Y} - \alpha X \int \frac{dY/d\alpha}{y^2}} = \\ &= -\frac{\alpha}{1 + \alpha \frac{dX/d\alpha}{X} - \alpha \frac{(\int dY/d\alpha)}{(\int \frac{1}{Y})}} \end{aligned} \quad (3.5.24)$$

Vemos então que os possíveis zeros da função  $\beta$  serão dados por :

$$\beta = M \frac{d\alpha}{dM} = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{ou } \alpha = 0, \quad \text{ou } \frac{dX}{d\alpha} \rightarrow 0 \quad (3.5.25)$$

A primeira condição  $\alpha = 0$ , não é nada mais do que a condição obtida por Landau [11], que nos leva à teoria livre.

Já a segunda condição,  $\frac{dX/d\alpha}{X}$ , que parece a primeira vista nos levar a um ponto fixo ultra-violeta finito, na realidade não é possível ser observada pois, a dependência somente no módulo do momento relativo da função de onda do estado ligado, que aparece em nosso ansatz, implica que essa função de onda tenha um caráter tipo 'S' e assim a função  $X$  não deveria alcançar o valor 'zero', a não ser no limite  $x \rightarrow \infty$ .

Assim temos que nosso estudo nos levou até o fato de que, na região de grandes momentos, ou curtas distâncias, a E.D.Q. torna-se uma teoria livre ou trivial, como sugerido por Landau.

## Referências

- [1] C.Itzykson and J.B.Zuber, "Quantum Field Theory" (McGraw-Hill Book Co., New York, 1980)
- [2] J.M.Jauch and F.Rohrlich, "The Theory of Photons and Electrons" (Springer Verlag, New York, 1955)
- [3] C.Nash, "Relativistic Quantum Fields" (Academic Press, London, 1978)
- [4] S.Coleman, "Aspects of Symmetry" (Cambridge University Press, Cambridge, 1985)
- [5] S.L.Adler and A.C.Davies, Nucl.Phys. B244(1984),469
- [6] J.D.Bjorken and S.D.Drell, "Relativistic Quantum Fields" (McGraw-Hill Book Co., New York, 1965)
- [7] J.Finger and J.Mandula, Nucl.Phys. B199(1982),168
- [8] L.D.Kadanoff and G.Baym, "Quantum Statistical Mechanics" (W. A. Benjamin, New York, 1962)
- [9] M.Gomes, Notas de Aula do Curso "Introdução a Teoria Quântica dos Campos", 1990, USP, São Paulo-Brasil
- [10] K.Huang, "Quarks, Leptons and Gauge Fields"(World Scientific, Singapore, 1982)
- [11] L.D.Landau in, "Niels Bohr and the Development of Physics", ed. by W.Pauli (McGraw-Hill Book Co., New York, 1955)

## **CAPITULO 4**

### **Conclusões**

Temos calculado variacionalmente o valor esperado do Hamiltoniano da Eletrodinâmica Quântica sem massa, utilizando como ansatz um estado coerente (tipo BCS) de pares elétron-pósitron,  $|\Psi\rangle$ . Obtivemos assim uma equação de gap para a função de onda dos pares presentes no ansatz,  $\Psi$ , que é o nosso parâmetro variacional.

Ao analisarmos os infinitos presentes na equação de gap, observamos ser necessária uma renormalização infinita na função de onda do elétron ao mesmo tempo que (para evitarmos divergências infra-vermelhas, não inicialmente presentes, que o contra-termo para de função de onda do elétron introduziria) inserimos uma escala de massa na teoria,  $M$ , que nos levaria, dada a adimensionalidade da equação de gap, a uma renormalização finita para a carga.

Posteriormente, através de uma analogia com as análises via equações de Schwinger-Dyson, estabelecemos uma expressão para a massa dinamicamente gerada para o férmion, em termos dos parâmetros  $\Psi$  e  $M$ .

O fato de que uma quantidade física não deva depender do ponto de renormalização, guiou-nos até a obtenção de uma expressão para a dependência do acoplamento,  $\alpha$ , com o ponto de renormalização,  $M$  (renormalização finita da carga), e de posse desta informação foi-nos possível obter uma expressão para a função  $\beta$  (beta) do grupo de renormalização.

Analisando os zeros da função  $\beta$  obtida, verificamos que o único valor fisicamente possível para a constante de acoplamento "running",  $\alpha$ , seria zero, ou seja, obtivemos a teoria livre ou trivial.