

1327

Dr
Rubens
Camelo Júnior
Rubens Camelo Júnior

O LOOP DE WILSON EM
QUARTA ORDEM



Rubens de Melo Marinho Júnior

SBI-IFUSP



305M810T1327

INSTITUTO DE FÍSICA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

RUBENS DE MELO MARINHO JUNIOR

O LOOP DE WILSON EM QUARTA ORDEM

Tese apresentada ao
Instituto de Física da
Universidade de São Paulo
para a obtenção do
título de Doutor

SÃO PAULO

DEZ - 1983

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pela Biblioteca do
Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Marinho Jr., Rubens de Melo
O Loop de Wilson em quarta ordem. São
Paulo, 1984.

Tese (Doutoramento) - Universidade de
São Paulo. Instituto de Física. Departamen-
to de Física Matemática.

Área de Concentração: Física da Partí-
culas Elementares.

Orientador: Prof. Adilson José da Sil-
va.

Unitermos: 1. Teoria quântica de cam-
pos. 2. Teoria de perturbação. 3. Confinamen-
to de quarks.

USP/IF-B38

ESTUDO DE SISTEMAS DE COMPUTAÇÃO

ESTUDO DE SISTEMAS DE COMPUTAÇÃO - ESTUDO DE SISTEMAS DE COMPUTAÇÃO

ESTUDO DE SISTEMAS DE COMPUTAÇÃO
ESTUDO DE SISTEMAS DE COMPUTAÇÃO
ESTUDO DE SISTEMAS DE COMPUTAÇÃO

ESTUDO DE SISTEMAS DE COMPUTAÇÃO
ESTUDO DE SISTEMAS DE COMPUTAÇÃO
ESTUDO DE SISTEMAS DE COMPUTAÇÃO
ESTUDO DE SISTEMAS DE COMPUTAÇÃO

ESTUDO DE SISTEMAS DE COMPUTAÇÃO
ESTUDO DE SISTEMAS DE COMPUTAÇÃO

Este trabalho é dedicado
à minha esposa Edith ao
meu filho Eeandro Augusto
e aos meus pais

HOMENAGEM PÓSTUMA

Presto esta homenagem ao Prof. Dr. José Alberto Albano do Amarante, que muito contribuiu para a minha formação. Foi meu orientador desde a Iniciação Científica até o início dos trabalhos para o doutoramento, ocasião do seu falecimento. Era uma pessoa enérgica, pragmática, sincera, cordial e com grande senso de justiça, sempre dispensando elevada consideração aos seus orientados. As nossas reuniões semanais serviram de estímulo e entusiasmo ao prosseguimento dos meus trabalhos. Fica portanto de público o reconhecimento pelos benefícios que recebi e a gratidão para com este com quem tive o privilégio de conviver e cuja memória em mim permanecerá.

AGRADECIMENTOS

Aos professores Adilson José da Silva e Juan José Giambiagi pela orientação, amizade e consideração, sempre me atendendo tardes inteiras em prejuízo de seus afazeres. As sugestões dadas, críticas construtivas, o apoio e o incentivo nas horas de desânimo muito contribuiram para o aprimoramento do trabalho. Sou grato ainda pela liberdade dada na escolha dos rumos e métodos para a consecução deste trabalho e pelo tratamento cordial, considerando-me como colega de trabalho em vez do relacionamento aluno-professor.

Aos professores José Roberto Leite e Henrique Fleming pelo período em que me orientaram formalmente.

Ao professor Abel Rosato, meu conselheiro na época em que estudava no ITA, que percebeu minhas tendências científicas e que me colocou em contato com o Cel Amante.

Ao Rogério Lopez Garcia por ter lido parte dos manuscritos, pelo período que trabalhamos juntos utilizando a linguagem simbólica SCHOONSCHIP e pelos conselhos, principalmente aqueles que geravam lucro.

Ao Jair Lucinda por ter lido parte dos manuscritos, pelos períodos de estudo em conjunto e discussões saudáveis.

Ao Cesar Linhares pelo companheirismo, incentivo, discussões produtivas e pelas caronas.

Aos demais amigos do IEAv que de uma forma ou de outra influenciaram durante esse período.

À minha esposa Edith V.A. Marinho pela atenção, tolerância e apoio nas horas difíceis. Pela compreensão que teve quando eu abandonava o lar para trabalhar durante a noite nos fins de semana e feriados.

À Rita, secretária da pós-graduação do IFUSP pelo atendimento eficiente e atencioso.

à Célia Regina Rosa por ter tido a paciência e a boa vontade de datilografar este trabalho, o qual foi feito com estética e elegância.

Ao CPD do IEAv/CTA pela eficiência do trabalho de seus integrantes, muitas vezes nos deixando constrangidos quando observávamos que eles paravam os seus trabalhos para cuidar dos nossos. Em especial agradeço ao Valentim Novackoski por ter alterado o compilador do PASCAL, para que este ficasse compatível com a saída gerada pelo REDUCE2; ao chefe da operação Bolis e ao operador Mariotto.

Finalmente agradeço ao suporte financeiro do IEAv/CTA dado através do meu contrato de pesquisador, que aliás é a única instituição do país que considera uma tese como trabalho profissional.

O décimo primeiro mandamento

Herdarás o solo sagrado e a fertilidade
será transmitida de geração em geração.
Protegerás teus campos contra a erosão
e tuas florestas contra a desolação e im
pedirás que tuas fontes sequem e que
teus campos sejam devastados pelo gado,
para que teus descendentes tenham abun
dância para sempre. Se falhares, ou al
guém depois de ti, na eterna vigilância
de tuas terras, teus campos abundantes
se transformarão em solo estéril e pe
dregoso ou em grotões áridos, teus des
cendentes serão cada vez menos numero
sos, viverão miseravelmente e serão eli
minados da face da terra.

Dr. Walter Clay Lowdermil

RESUMO

O loop de Wilson se apresenta como uma variável muito apropriada para servir de base para uma teoria das forças nucleares. Esta afirmação é justificada se lembrarmos que a apresentação usual da cromodinâmica quântica perturbativa parte de variáveis coloridas, um fato altamente criticável, pois elas não representam qualquer variável física, enquanto que na eletrodinâmica as variáveis que descrevem os elétrons e fôtons são físicas.

Esta possibilidade de estudar as interações fortes implica na necessidade de um claro entendimento da estrutura analítica dos loops de Wilson.

O objetivo deste trabalho é usar a técnica da regularização dimensional para discutir a estrutura dos diagramas da expansão perturbativa do loop de Wilson em quarta ordem. A introdução do número de dimensões como variável analítica, isola as divergências sob a forma de polos no plano complexo da dimensão, facilita a discussão da renormalização, além de proporcionar um método invariante de gauge.

Com esta técnica renormalizamos a constante de acoplamento das interações fortes até a quarta ordem e mostramos que em quatro dimensões o resíduo não depende nem da curva nem do arco no qual ele é calculado. Também mostramos que é possível calcular a parte finita do loop de Wilson para o caso especial de duas semi-retas de mesma origem.

ABSTRACT

The Wilson loop shows itself as a very appropriate variable to be used as a base in a theory of nuclear forces. This statement is justified if we remember that the usual presentation of perturbative quantum chromodynamics starts from colored variables, a fact itself subject to criticism since they do not represent any physical variable, whereas in the usual quantum electrodynamics the variables that describes electrons and photons are physical.

This possibility of studying strong interactions implies the need of clear a understanding of the analytical structure of the Wilson loops.

The purpose of this dissertation is to use the technique of dimensional regularization to discuss the structure of perturbative expansion diagrams of the Wilson loops up to fourth order. The introduction of the number of dimensions as an analytical variable isolates the divergences in the form of poles in the complex plane of the dimensions, make the renormalization procedure easier and also makes the method gauge invariant.

With these techniques we have renormalized the coupling constant of strong interactions up to fourth order and have also show that in four dimension the residue is dependent neither on the curve nor on the arc on which it is calculated. We have also shown that it is possible to calculate the finit part of the Wilson loops for the special. Case of two half lines with the same origin.

INTRODUÇÃO

O loop de Wilson se apresenta como uma variável adequada para tratar a cromodinâmica, principalmente no que diz respeito ao confinamento.

Neste trabalho nos propusemos a renormalizar a constante de acoplamento das interações fortes até a quarta ordem utilizando a regularização dimensional. A fim de concretizar tal objetivo, devemos mostrar que o resíduo obtido no cálculo do loop de Wilson independe da curva e do arco, se aquela for lisa. Essa demonstração está apresentada no capítulo 4. Os cálculos dos diagramas são extensos e complicados a ponto de justificar a utilização da linguagem simbólica SCHOONSCHIP [0.1]. Essa linguagem foi escrita por Veltman com a finalidade de se calcular diagramas de Feynman.

Calculamos o fator de fase quântico para a família de hipérboles que têm em comum duas semirectas como assintotas.

Em continuidade ao trabalho de Abud, Bollini e Giambiagi [4.3], calculamos em quarta ordem o loop de Wilson para a circunferência.

A seqüência de apresentação desse trabalho é a seguinte:

- No capítulo um damos uma idéia do que seja o loop de Wilson, mostramos que ele é invariante por transformações de gauge, o seu papel no contexto do confinamento além de apresentar motivações para o seu uso.
- No segundo capítulo, fizemos um breve resumo sobre a regularização dimensional, a qual foi usada para a renormalização da carga.

- No terceiro capítulo, deduzimos as regras de Feynman para o loop de Wilson.
- No quarto capítulo, renormalizamos a carga da cromodínamica quântica em quarta ordem.
- No quinto capítulo, mostramos que o resíduo que se obtém do cálculo do loop de Wilson para curvas lisas, em quatro dimensões, não depende do arco nem da curva. Mostramos, também, que é possível calcular a parte finita do fator de fase quântico para duas semiretas de mesma origem.
- No sexto capítulo, calculamos o loop de Wilson para a circunferência em quarta ordem.
- Finalmente, no último capítulo, apresentamos as conclusões.

ÍNDICE

Pág.

<u>CAPÍTULO 1 - CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES</u>	1
1.1 - Teorias de gauge [1.1]	2
1.2 - Motivações para introdução do conceito do fator de fase não integrável	4
1.3 - O fator de fase não integrável em teorias de gauge não abelianas	8
1.4 - O loop de Wilson é invariante por transformações de gauge	10
1.5 - O critério de Wilson para o confinamento de quarks	12
 <u>CAPÍTULO 2 - A REGULARIZAÇÃO DIMENSIONAL</u>	15
2.1 - Divergências ultravioleta em teorias quânticas.	16
2.2 - Fundamentos matemáticos	18
2.3 - Prescrições para se regularizar dimensionalmen- te	20
2.4 - Algumas relações úteis	22
2.5 - Extensão da regularização dimensional para cam- pos sem massa	23
 <u>CAPÍTULO 3 - OBTENÇÃO DOS DIAGRAMAS</u>	31
3.1 - Obtenção do loop de Wilson na representação de interação	31
3.2 - Regras de Feynman	33
3.3 - Regras de Feynman para o loop de Wilson	37
3.3.1 - O propagador de glúon	39
3.3.2 - O propagador do fantasma	40
3.3.3 - O vértice de três glúons	40
3.3.4 - O vértice de quatro glúons	43
3.3.5 - O vértice com fantasmas	45
3.3.6 - O vértice no contorno	45

	Pág.
3.4 - Fatores combinatórios	46
3.5 - Expressões dos diagramas de 4 ^a ordem	48
<u>CAPÍTULO 4 - CÁLCULOS DOS DIAGRAMAS</u>	57
4.1 - Análise das divergências	57
4.2 - Cálculo dos diagramas	58
4.2.1 - Diagrama de segunda ordem	59
4.2.2 - Girino com duas pernas em quarta ordem	60
4.2.3 - Cálculo do diagrama do girino com uma perna..	61
4.2.4 - Cálculo do diagrama com fantasmas	62
4.2.5 - Cálculo dos diagramas de dois glúons não integrantes	64
4.2.6 - Cálculo do diagrama com um vértice de três glúons	73
4.2.7 - Cálculo do diagrama de dois vértices com três glúons	76
4.2.8 - Renormalização da carga	78
<u>CAPÍTULO 5 - PROVA DA INDEPENDÊNCIA DO RESÍDUO EM RELAÇÃO AO ARCO E A CURVA E CÁLCULO DA HIPÉRBOLE EM SEGUNDA ORDEM</u>	81
5.1 - Independência do resíduo em relação à curva e ao arco	81
5.2 - Cálculo de V(C) para a hipérbole	88
<u>CAPÍTULO 6 - CALC. PARTES FINITAS PARA A CIRCUNFERÊNCIA</u>	95
6.1 - Integral necessária para o cálculo dos diagramas G_{4a} , G_{4b} , G_{4c} do capítulo quatro	95
6.2 - Resolução da integral do diagrama G_{4g} sobre a circunferência	99
6.3 - Cálculo das integrais da expressão K	100
<u>CAPÍTULO 7 - CONCLUSÕES</u>	119

Pág.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	125
APÊNDICE A - ALGUMAS INTEGRAIS ÚTEIS	
APÊNDICE B - CÁLCULO DO DIAGRAMA DE UM VÉRTICE COM TRÊS GLÚONS	
APÊNDICE C - CÁLCULO DO DIAGRAMA DE DOIS VÉRTICES COM TRÊS GLÚONS	

CAPÍTULO I

CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

Este capítulo tem por finalidade fazer um histórico dos loops de Wilson, dar motivação para o seu uso mostrando como esse novo conceito pode servir de base para uma formulação mais satisfatória do que a cromodinâmica quântica.

Na seção 1.1 temos alguns aspectos das teorias de gauge. Mostramos como esse conceito evolui a partir da eletrodinâmica e se generalizar para grupos de simetria que não o $U(1)$.

Na seção 1.2 apresentamos a ambiguidade da formulação diferencial das teorias de gauge, mostrando que situações físicas diferentes podem ser descritas pelo mesmo tensor de intensidade dos campos, para regiões multiplemente conexas. Impõe-se então o desenvolvimento de um novo conceito para o tratamento dessas teorias.

Na seção 1.3 discorremos brevemente sobre os trabalhos atuais, principalmente os de Migdal e Makeenko, a fim de mostrar a aplicação desse conceito em teorias de gauge não abelianas.

Na seção 1.4 mostramos que o loop de Wilson é invariante sob transformações de gauge, e na última seção falamos sobre critério de confinamento de Wilson.

1.1 - TEORIAS DE GAUGE* [1.1]

Há fortes indícios de que a natureza seja descrita pelas teorias de gauge. Esta opinião é baseada nos seguintes fatos:

- a) a única teoria completamente confirmada experimentalmente, a eletrodinâmica quântica, é um caso particular das teorias de gauge;
- b) a formulação de modelos fenomenológicos das interações fracas, adquiriram elegância e consistência com o formalismo das teorias de gauge. A interação fenomenológica de quatro férmiões, foi substituída pela interação com bosons vetoriais intermediários, que são os campos de gauge de uma teoria de Yang-Mills;
- c) tem-se mostrado que os modelos fenomenológicos com quarks se apresentam mais naturais no contexto das teorias de gauge. Além disso as teorias de gauge são a única possibilidade conhecida de descrever o fenômeno da liberdade assintótica no formalismo das teorias de campos. Estas teorias têm recursos para explicar o fenômeno do confinamento dos quarks, apesar do mecanismo correspondente disto não estar muito claro atualmente;
- d) finalmente, é possível considerar a gravitação como uma teoria de gauge.

* Weyl foi o primeiro a introduzir o termo "transformações de gauge" numa tentativa de unificar o eletromagnetismo com a gravitação.

Teorias de gauge são aquelas cujas lagrangianas são invariantes por transformações do tipo

$$\phi(x) \rightarrow e^{-ig\lambda^a \alpha^a(x)} \phi(x), \quad (1.1)$$

onde $\phi(x)$ é qualquer campo, α^a é uma função arbitrária, λ^a são os geradores do grupo de simetria da lagrangiana, e g uma constante de acoplamento.

No caso simples do grupo de simetria ser o $U(1)$ e, g a carga do elétron, obtemos a eletrodinâmica impondo que a lagrangiana seja invariante por transformações de gauge locais. A eletrodinâmica vista deste modo foi introduzida por Weyl em 1929 [1.2].

A obtenção do tensor das intensidades de campo a partir da invariância de gauge local das teorias está exaustivamente estudado nas referências [1.3], [1.4], [1.5].

Aqui somente relembramos que o acoplamento dos campos de gauge A_μ^a com os campos de matéria ψ é obtido pela seguinte prescrição: substituindo ∂_μ pela derivada covariante [1.6].

$$D_\mu \equiv (\partial_\mu + ig A_\mu^a \lambda^a) \quad (1.2)$$

A teoria invariante pelo grupo de simetria $SU(2)$ foi primeiramente estudado por Yang-Mills em 1954 [1.7] e daí por diante todas as teorias invariantes por transformações de gauge e cujo grupo de simetria é não abeliana recebem os seus nomes. A lagrangiana de Yang-Mills tem a forma

$$L_{YM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + L_0(\psi, D^\mu \psi) \quad (1.3)$$

onde

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) - g t^{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) \quad (1.4)$$

e

$$D^\mu \psi(x) \equiv [\partial^\mu + ig A^\mu(x)] \psi(x) \quad (1.5)$$

são as constantes de estrutura do grupo. $F_{\mu\nu}^a$ é o tensor das intensidades de campo.

No nosso caso o grupo de simetria é o SU(3), sendo assim temos que os campos $A_\mu^a(x)$ são os campos de glúons, g é a constante de acoplamento das interações fortes e $\psi(x)$ são os campos dos quarks.

1.2 - MOTIVAÇÕES PARA INTRODUÇÃO DO CONCEITO DO FATOR DE FASE NÃO INTEGRÁVEL

O conceito do eletromagnetismo foi proposto por Maxwell e Faraday para descrever efeitos eletromagnéticos numa região do espaço tempo. De acordo com este conceito a intensidade de campo $F_{\mu\nu}$ descreve os fenômenos eletromagnéticos. Concluiu-se mais tarde [1.8] que $F_{\mu\nu}$ sozinho, na teoria quântica, não conseguia descrever completamente os efeitos eletromagnéticos da função de onda do elétron. O experimento de Aharonov-Bohm, primeiramente realizado por Chambers [1.9], mostrou que se um feixe de elétrons for emitido em uma região onde $F_{\mu\nu} = 0$, exceto em um buraco, como mostra a figura 1.1, convém salientar que a região é simplicemente conexa, isto é, o buraco onde $F_{\mu\nu} \neq 0$ não pertence à região. Isto significa que o elétron está sempre na região onde $F_{\mu\nu} = 0$.

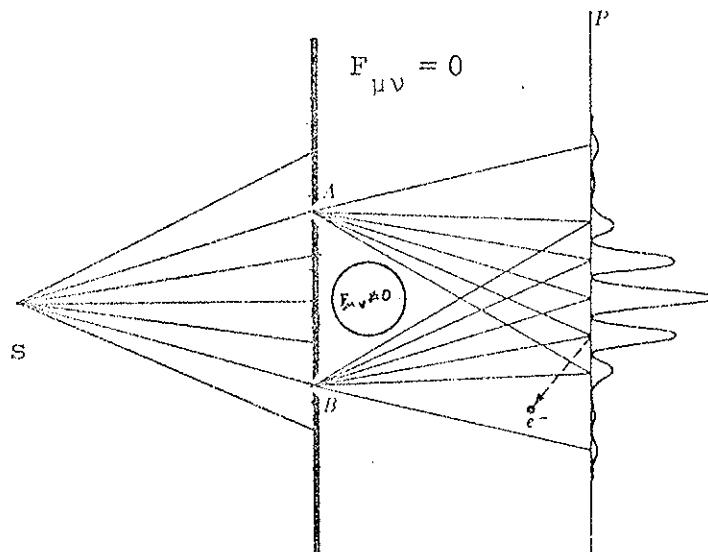


fig. 1.1

então as franjas de interferência vão depender do fator de fase (chamado pelos matemáticos de fator de fase não integrável)

$$e^{\frac{ie}{\hbar c} \int A_\mu(x) dx^\mu}. \quad (1.6)$$

Para mostrar esta dependência vamos precisar da função de onda ψ do elétron na região de interferência. Consideramos então uma solução da equação de Schrödinger na região onde o vetor potencial A_μ é diferente de zero, a qual é dada por

$$S = \psi_i^0 e^{\frac{ie}{\hbar c} \int (i) A_\mu(x) dx^\mu}, \quad (1.7)$$

onde ψ_i^0 é a solução da equação quando $A_\mu(x) = 0$ e i é o caminho percorrido pelo elétron.

Portanto na região de interferência da fig. 1.1 a função de onda tem a forma

$$\psi = \psi_1^0 e^{\frac{ie}{\hbar c} \int (1) A_\mu(x) dx^\mu} + \psi_2^0 e^{\frac{ie}{\hbar c} \int (2) A_\mu(x) dx^\mu} \quad (1.8)$$

e

$$|\psi|^2 = |\psi_1^0|^2 + |\psi_2^0|^2 + \psi_1^* \psi_2 e^{-\frac{ie}{\hbar c} \oint A_\mu(x) dx^\mu} + \\ + \psi_2^* \psi_1 e^{\frac{ie}{\hbar c} \oint A_\mu(x) dx^\mu}$$

ou

$$|\psi|^2 = |\psi_1^0|^2 + |\psi_2^0|^2 + 2\operatorname{Re}(\psi_2^* \psi_1 e^{\frac{ie}{\hbar c} \oint A_\mu(x) dx^\mu}). \quad (1.9)$$

Se fizermos uma transformação de gauge nos campos ψ e A_μ como segue

$$\psi' = U^{-1} \psi = e^{ia} \psi,$$

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{i\hbar c}{e} U \partial_\mu U^{-1} \quad (1.10)$$

ou

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{\hbar c}{e} \partial_\mu a,$$

teremos na região de interferência,

$$|\psi'|^2 = |\psi_1'^0|^2 + |\psi_2'^0|^2 + 2\operatorname{Re}(\psi_2'^* \psi_1 e^{\frac{ie}{\hbar c} \oint A'_\mu(x) dx^\mu}). \quad (1.11)$$

Substituindo as equações (1.10) na equação (1.11) temos

$$|\psi|^2 = |\psi_1^0|^2 + |\psi_2^0|^2 + 2\operatorname{Re}(\psi_2^* \psi_1) e^{\frac{ie}{\hbar c} \oint A_\mu(x) dx^\mu + i \oint \partial_\mu^\alpha dx^\mu}. \quad (1.12)$$

Comparando a equação (1.12) com a equação (1.9) temos

$$\operatorname{Re} \left[e^{i(\theta + \Omega + A)} \right] = \operatorname{Re} \left[e^{i(\theta + \Omega)} \right], \quad (1.13)$$

onde fizemos as substituições

$$\psi_2^* \psi_1 = e^{i\theta}, \quad (1.14)$$

$$\frac{e}{\hbar c} \oint A_\mu(x) dx^\mu = \Omega \quad (1.15)$$

$$\oint \partial_\mu^\alpha(x) dx^\mu = \Delta. \quad (1.16)$$

Então temos

$$\cos(\theta + A + \Omega) = \cos(\theta + \Omega)$$

$$\text{ou} \quad (1.17)$$

$$\theta + \Omega + \Delta = \theta + \Omega \pm 2\pi n,$$

onde n é um número inteiro. Logo

$$\Delta = 2\pi n. \quad (1.18)$$

Finalmente temos ao integrar a última das equações (1.10) no contorno delimitado pelos caminhos (1) e (2) da fig. 1.1

$$\Omega' = \Omega + 2\pi n \frac{ie}{e}, \quad (1.19)$$

onde o fluxo magnético Ω' é definido pela equação (1.15) substituindo-se A_μ por A'_μ . Como os fluxos magnéticos Ω' e Ω , são mensuráveis temos duas situações físicas diferentes descritas pelo mesmo tensor $F_{\mu\nu}$; portanto a formulação diferencial subdescreve o eletromagnetismo.

1.3 - O FATOR DE FASE NÃO INTEGRÁVEL EM TEORIAS DE GAUGE NÃO ABELIANAS

A cromodinâmica quântica trata de objetos não físicos como quarks e glúons. A dinâmica dos glúons é descrita pelo tensor das intensidades de campos $F_{\mu\nu}^k$ que é covariante de gauge. Em contraste o fator de fase $\phi(C)$ é invariante de gauge, além de estabelecer um critério natural para o confinamento. O valor esperado no vácuo desse fator de fase recebe o nome de loop de Wilson, cuja expressão é

$$W(C) = \langle 0 | e^{-S} e^{\oint_C A_\mu(x) dx^\mu} | 0 \rangle, \quad (1.20)$$

onde no nosso caso S é a ação efetiva de Yang-Mills. A QCD pode ser completamente formulada em termos dos campos compostos singletos de cor

$$\phi(C) = \frac{1}{N} \text{tr } P e^{\int_C g \oint A_\mu(x) dx^\mu} \quad (1.21)$$

aqui N é o número de cores, P é a ordenação de Dyson ao longo da curva, g é a constante de acoplamento das interações fortes, $A_\mu(x) = A_\mu^{a\lambda} \lambda^a$ onde λ^a são os geradores do grupo na representação fundamental. Assim todos os observáveis e suas dinâmicas são inteiramente reformuladas em ter

mos do fator $\phi(C)$. Essa idéia aplicada a uma rede foi de fendiada por Wilson [1.10] e as fórmulas apropriadas para o continuo foram derivadas por Migdal e Makeenko [1.11]. Para um número finito de cores N , os observáveis são expressos através da média de m loops

$$W_m(C_1, C_2 \dots C_m) = \langle \phi(C_1) \phi(C_2) \dots \phi(C_m) \rangle. \quad (1.22)$$

Grandes simplificações ocorrem nestas fórmulas para um número infinito de cores, onde todos os observáveis são expressos por $W_1(C)$, pois W_m fatora como segue

$$W_m(C_1, C_2, \dots C_m) = W_1(C_1) W_1(C_2) W_1(C_3) \dots W_1(C_m), \quad (1.23)$$

onde

$$W_1(C) = \langle \phi(C) \rangle = \frac{1}{N} \int dA dC d\bar{C} e^{-S_{\text{ef}}} \text{Tr } P e^{\int_C g \phi A_\mu(x) dx^\mu} \quad (1.24)$$

e C e \bar{C} são os campos de fantasmas.

A equação para os fatores $\phi(C)$, ainda sem solução para um número finito de cores, foi deduzido por Migdal e Makeenko [1.12] e é a seguinte

$$\begin{aligned} \frac{1}{g^2 N} \partial_\mu^x \frac{\delta W_m(C_1, C_2, \dots)}{\delta \sigma_{\mu\nu}^1(x)} &= \oint_{C_1} dy_\nu \delta(x-y) \times \\ &\times \left\{ W_{n+1}(C_1_{xy}, C_1_{yx}, C_2 \dots C_n) - \frac{1}{N^2} W_n(C_1, C_2 \dots C_n) \right\} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{N^2} \sum_{i=2}^{\infty} \int_{C_i} dy_v \delta(x-y) [W_{n-1}(C_1 + C_i, C_2, \dots, \not{C}_i \dots) - \\ - W_n(C_1 \dots C_n)], \quad (1.25)$$

onde x é um ponto da curva C_1 ; $C_1 + C_i$ é a curva resultante da união de C_1 e C_i ; \not{C}_i significa que C_i é omitido.

Esta equação para um número infinito de cores ($Ng^2 \sim 1$) fica simplificada para

$$\partial_\mu^x \frac{\delta W_n(C, \dots)}{\delta \sigma_{\mu\nu}(x)} = g^2 N \int_{C_1} dy_v \delta(x-y) W_{n+1}(C_{1xy}, C_{1yx}, C_2 \dots C_n). \quad (1.26)$$

Nesse limite

$$W_n(C_1, C_2 \dots) = W_1(C_1) W_1(C_2) \dots W_1(C_n) \quad (1.27)$$

desde que $W_1(C)$ satisfaça a equação

$$\partial_\mu^x \frac{\delta W_1(C)}{\delta \sigma_{\mu\nu}(x)} g^2 N \int_C dy_v \delta(x-y) W_1(C_{xy}) W_1(C_{yx}). \quad (1.28)$$

O modo de se obter $W(C)$ nesta tese é através da teoria de perturbação, depois de fixada o gauge.

1.4 - O LOOP DE WILSON É INVARIANTE POR TRANSFORMAÇÕES DE GAUGE

O fator de fase $\phi(C)$ é o responsável pelo transporte paralelo de ψ de x a x' ao longo da curva C ou seja

$$\psi(x') = \phi(C) \psi(x), \quad (1.29)$$

onde ψ é um campo de matéria.

Se for feita uma transformação de gauge $U(x)$ nos campos o fator de fase fica transformado do seguinte modo

$$\psi'(x') = \phi'(C) \psi'(x) \quad (1.30)$$

$$\text{onde } \psi'(x') = U(x') \psi(x')$$

e C é a curva que liga os pontos x e x' . Temos então

$$U(x') \psi(x') = \phi'(C) U(x) \psi(x) \quad \text{ou} \quad (1.31)$$

$$\psi(x') = U^{-1}(x') \phi'(C) U(x) \psi(x).$$

Utilizando as equações (1.29) e (1.31) temos

$$\phi(C) = U^{-1}(x') \phi'(C) U(x)$$

ou

$$U(x') \phi(C) U^{-1}(x) = \phi'(C). \quad (1.32)$$

Se a curva for fechada, isto é se $x' \equiv x$ temos

$$\phi'(C) = U(x) \phi(C) U^{-1}(x). \quad (1.33)$$

O loop de Wilson é o valor esperado no vácuo do traço do fator de fase. Portanto

$$\begin{aligned} \text{Tr } <\phi'(C)> &= \text{Tr } <U(x) \phi(C) U^{-1}(x)> \\ \therefore w'(C) &= w(C). \end{aligned} \quad (1.34)$$

1.5 - O CRITÉRIO DE WILSON PARA O CONFINAMENTO DE QUARKS

Se o loop de Wilson depender de $\exp(-a)$, onde a é a área isto implica que o potencial entre os quarks depende linearmente da distância entre eles e, portanto a teoria é confinante. Para justificar esse critério, iremos considerar o experimento imaginário descrito a seguir [1.13].

Inicialmente separamos adiabaticamente o par de quark Q antiquark \bar{Q} a uma distância relativa R , e a mantenemos assim por um tempo $T \rightarrow \infty$. Então, deixamos que os quarks se juntem e se aniquilem. A linha do universo dos quarks é mostrada na fig. 1.2

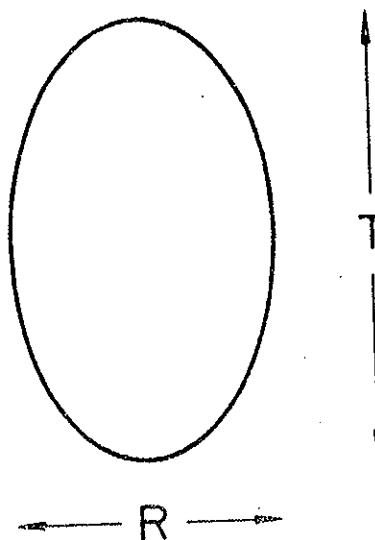


fig. 1.2

A amplitude Euclidiana para esse processo é o elemento de matriz do operador de evolução e^{-HT} entre os estados inicial e final,

$$\langle i | e^{-HT} | f \rangle. \quad (1.35)$$

onde H é a Hamiltoniana da cromodinâmica quântica. O operador de evolução decai no tempo e não oscila pelo fato de

estarmos formulando o problema no espaço Euclidiano. A equação (1.35) pode ser escrita através da integração funcional

$$\langle i | e^{-HT} | f \rangle = \frac{\int dA_\mu^a dC_a d\bar{C}_a e^{-S+ig} \int A_\mu^a J_\mu^a d^4x}{\int dA_\mu^a dC_a d\bar{C}_a e^{-S}} , \quad (1.36)$$

onde S é a ação da teoria de Yang-Mills pura, J_μ^a ($a=1, 2, \dots, 8$) é uma corrente externa descrevendo a linha do universo dos quarks pesados e a integração funcional é sobre os campos de gauge e os campos de fantasmas de Fadeev-Popov. Para a curva da fig. 1.2 parametrizada por s , a corrente $J_\mu^a(x)$ tem a forma.

$$J_\mu^a(x) = \oint \lambda^a \delta(x-x(s)) \frac{dx^\mu}{ds} ds . \quad (1.37)$$

Substituindo essa expressão na equação (1.36) resulta,

$$\langle i | e^{-HT} | f \rangle = \frac{\int dA_\mu^a dC_a d\bar{C}_a e^{-S+ig} \oint A_\mu^a \lambda^a \frac{dx^\mu}{ds} ds}{\int dA_\mu^a dC_a d\bar{C}_a e^{-S}}$$

ou

$$\langle 0 | e^{-HT} | 0 \rangle = \langle e^{ig \oint A_\mu^a \lambda^a dx^\mu} \rangle . \quad (1.38)$$

Como os quarks estão estáticos a Hamiltoniana é simplesmente a energia potencial $V(R)$, ou seja, é a energia que mantém os quarks a uma distância R . $V(R)$ é obtida da expressão

$$e^{-V(R)T} \langle 0 | 0 \rangle = \langle e^{ig \int A_\mu^a \lambda^a dx^\mu} \rangle \quad (1.39)$$

Resolvendo para $V(R)$ temos

$$V(R) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} L(\langle \text{Tr } P e^{ig \int A_\mu^a(x) \lambda^a dx^\mu} \rangle). \quad (1.40)$$

se o loop de Wilson depender da área, ou seja

$$W(C) = e^{-as} \quad (1.41)$$

onde s é a área do loop e a uma constante, temos no nosso caso

$$V(R) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} L(e^{-aRT}) = aR \quad (1.42)$$

concluimos que a força de atração dos quarks é constante sendo necessário uma quantidade de energia infinita para separá-los. No caso de $V(R)$ depender do perímetro, a força de atração daqueles é nula, sendo possível separá-los.

CAPÍTULO 2

A REGULARIZAÇÃO DIMENSIONAL

A regularização dimensional foi introduzida por J.J. Giambiagi e C.G. Bollini [2.1] e t' Hooft e Veltman [2.2]. Giambiagi e Bollini observaram que a solução das equações de ondas, têm propriedades diferentes quando o número de dimensões espaço-temporais é par ou ímpar. Como exemplo, lembramos que o princípio de Huyghens só vale para dimensões espaço-temporais pares. Notaram também que uma teoria escalar tem gráficos de ordem mais baixa finitos em espaços de dimensão ímpar. Como resultado obtiveram funções analíticas da variável ν (número de dimensões), isto os levou a tratar as teorias quânticas usando a dimensão como um parâmetro regularizador.

Este capítulo está disposto da seguinte forma:

- Na Seção 2.1, mostramos o que é a regularização dimensional e como as divergências iniciais se refletem no parâmetro ν .
- Na Seção 2.2 justificamos, matematicamente, a possibilidade de se extender o número de dimensões do espaço-tempo para um valor complexo.
- Na Seção 2.3 damos as prescrições para se regularizar dimensionalmente uma teoria.
- Em 2.4 reescrevemos algumas relações matemáticas úteis, encontradas no artigo de Giambiagi e Bollini [2.1].
- E na última seção falamos sobre a extensão do método para teorias com campos sem massa.

2.1 - DIVERGÊNCIAS ULTRAVIOLETA EM TEORIAS QUÂNTICAS

Regularizações são quaisquer prescrições para tornar finitas integrais divergentes. Na regularização dimensional o parâmetro regularizador é a própria dimensão do espaço-tempo. O que se faz é uma continuação analítica [2.3] no número de dimensões do espaço-tempo (v) sendo v um número complexo, deste modo, o resultado das integrais é uma função analítica da dimensão, de tal forma que a divergência aparece como polos dessa função.

A utilidade dessa regularização, reside no fato de que ela mantém a invariância de gauge da teoria, para qualquer valor do parâmetro v . Isso não ocorre com outras regularizações. Para ilustrar o que dissemos, considere a integral

$$I(4) \equiv \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 [(k-p)^2 + m^2]} , \quad (2.1)$$

definida sobre o espaço de momenta Euclidiano. No limite de grandes momenta $k^2 \rightarrow \infty$, a integral $I(4)$ diverge, mas em três dimensões a integral correspondente

$$\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 [(k-p)^2 + m^2]} , \quad (2.2)$$

no mesmo limite é finita. Podemos observar que integrais divergentes numa dimensão, pode muito bem ser finita em outra. Portanto, a idéia é: primeiro generalizar a dimensionalidade do espaço de 4 para n onde $n = 0, 1, 2 \dots$; segundo continuar analiticamente de n para v , com v complexo. Simbolicamente

$$I(4) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} J(k^2, k.p) \implies \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} J(n, k^2, k.p)$$

$$\implies \int \frac{d^v k}{(2\pi)^v} J(v, k^2, k.p). \quad (2.3)$$

A integral $I(4)$ não é definida, no entanto a integral $I(v)$ pode ser definida de tal forma que ela seja uma função analítica de v , que em princípio pode ser calculada explicitamente. Uma vez que as manipulações formais envolvendo integrais, tais como integrações simétricas, mudanças de variáveis e integrações por parte tenham sido feitas, nós podemos invocar o princípio da continuação analítica e voltar para o espaço quadridimensional.

Este é o momento oportuno para perguntar o significado, se há algum, para associar ao espaço de v dimensões. Apesar de sermos incapazes, no momento, para darmos um tal significado físico, é bom lembrar que abstrações desta natureza, não são incomuns na física. E só observar, por exemplo, que a transição da mecânica do ponto para a teoria de campos clássicos é feita substituindo $q_j(t)$ por $\psi_\sigma(x,t)$. Aqui $\sigma = 0, 1, 2\dots$ denota os componentes do campo e $j = 0, 1, 2\dots N$, conta o número de graus de liberdade do sistema. Na transição mencionada, $q_j(t) \rightarrow \psi_\sigma(x,t)$, o índice discreto j é formalmente substituído pela variável discreta σ e a variável contínua x . Em linguagem matemática, essa transição nada mais é que uma continuação analítica de um parâmetro espacial discreto para um contínuo. Portanto, não é de se estarrecer com o uso desse princípio matemático.

2.2 - FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

Para ajudar a esclarecer o significado da continuação analítica, nós vamos, inicialmente, discutir um teorema básico e então aplicá-lo na função Γ de Euler.

Teorema. Seja uma função analítica $g_1(z)$ definida numa região D_1 e seja D_2 outra região que tem uma e somente uma subregião R em comum com D_1 . Então se uma função $g_2(z)$ existe e é analítica em D_2 e coincide com $g_1(z)$ em R , então existe somente uma função $g_2(z)$. Chamamos $g_1(z)$ e $g_2(z)$ a continuação analítica uma da outra. Veja figura abaixo (Knopp, 1945).

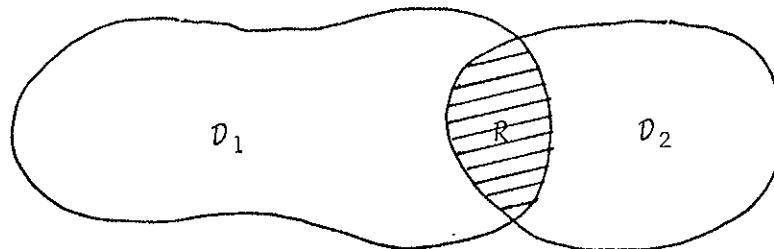


fig. 2.1

O teorema diz que $g_2(z)$ é única desde que R não seja um conjunto vazio, $R = D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ (R contém uma infinidade de pontos). Ele posteriormente implica que a representação de $g_1(z)$ e $g_2(z)$ são iguais na subregião R . Fora de R g_1 e g_2 possuem representações diferentes.

A função $\Gamma(z)$, z complexo, aparece naturalmente no método da regularização dimensional no cálculo de integrais gaussianas no espaço de momenta. A representação de $\Gamma(z)$ que nos interessa é a de Euler.

Seja a função gama de Euler $\Gamma_E(z)$,

$$\Gamma_E(z) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{z-1} \quad \operatorname{Re}(z) > 0 \quad (2.4)$$

que é analítica em toda área hachurada da fig. 2.2.

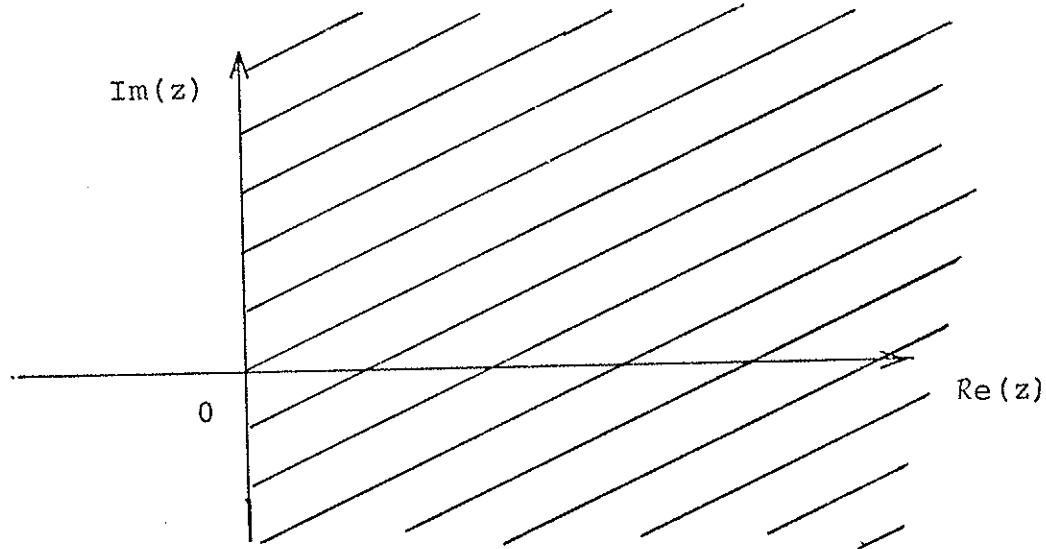


fig. 2.2

Se desejarmos um valor de $\Gamma_E(z)$ que está na região $\text{Re}(z) < 0$, será necessário fazer uma continuação analítica dessa função nessa região. Isso se consegue utilizando a fórmula de recorrência da Γ que é

$$\Gamma_E(z) = \frac{1}{z} \Gamma_E(z+1). \quad (2.5)$$

Se definirmos uma $\Gamma(z)$ por

$$\Gamma(z) = \frac{1}{\prod_{m=0}^n (z+m)} \Gamma_E(z+n+1), \quad z+n \neq 0 \quad (2.6)$$

então, escolhendo adequadamente um n poderemos definir $\Gamma(z)$ para quaisquer valores de $\text{Re}(z) < 0$. Portanto $\Gamma(z)$ é a continuação analítica de $\Gamma_E(z)$. Observe que se $\text{Re}(z) > 0$ então n pode ser 0, e

$$\Gamma(z) = \Gamma_E(z). \quad (2.7)$$

2.3 - PRESCRIÇÕES PARA SE REGULARIZAR DIMENSIONALMENTE

Seja a integral

$$I(p) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} J(k^2, k.p) \quad (2.8)$$

que tem divergências ultravioletas. Considere que ela está no espaço Euclidiano. Deveremos seguir os seguintes passos:

- a) definimos o produto escalar para o espaço de v dimensões,
- b) substituimos os propagadores, que aparecem nas expressões dos diagramas de Feynman em v dimensões, por integrais sobre os parâmetros de Feynman ou parametrizando-os de acordo com a identidade

$$\frac{1}{k^2 + m^2} = \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha(k^2 + m^2)}, \quad m^2 \neq 0 \quad (2.9)$$

- c) efetuamos, sobre os momenta, integrais do tipo

$$\int \frac{d^v k}{(2\pi)^v} e^{-xk^2 + 2k.b} = (\frac{\pi}{x})^{v/2} \frac{1}{(2\pi)^v} e^{b^2/x} \quad (2.10)$$

e

$$\int \frac{d^v k}{(2\pi)^v (k^2 + m^2)^\alpha} \approx \frac{\pi^{v/2} (m^2)^{v/2 - \alpha}}{(2\pi)^v \Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha - v/2), \quad (2.11)$$

e outras que poderão ser encontradas no apêndice A1. Convém salientar que se v for complexo nas integrais (2.10) e (2.11), os lados direitos passam a ser as definições delas,

- d) determinamos os resíduos e as partes finitas das integrais com as prescrições

$$\text{Res } f(v) = \lim_{v \rightarrow a} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dv^{n-1}} (v-a)^n f(v),$$

$$\text{considere } \frac{d^0 f(x)}{dx^0} = f(x) \quad (2.12)$$

onde n é a ordem do polo a

$$\text{pf } f(v) = \lim_{v \rightarrow a} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dv^n} (v-a)^n f(v), \quad (2.13)$$

- e) a amplitude resultante é uma função analítica em todo o plano complexo v . As divergências ultravioletas iniciais se manifestam como polos dessa função em $v=4$. Cancelamos esses polos adicionando convenientemente contra-termos na lagrangiana de interação original. O resultado do cálculo da amplitude fica sendo a sua parte finita,
- f) finalmente, continuamos analiticamente do espaço euclidiano para o espaço de Minkowski.

Essas prescrições são suficientes para manusear as divergências ultravioletas; no caso de aparecer anomalias de correntes vetoriais axiais parcialmente conservadas que implicam na presença de γ^5 , Akycampong e Delbourgo [2.5] introduziram uma representação para esta matriz em v

dimensões. Divergências infravermelhas, que estão intimamente ligadas a partículas sem massa, não foram, em princípio, o alvo da regularização dimensional, no entanto Leibbrandt e Capper, 1974(a,b) [2.4], propuseram um método para tratá-las, que será discutida mais adiante.

2.4 - ALGUMAS RELAÇÕES ÚTEIS

No cálculo das integrais de Feynman nós usaremos a seguintes regras [2.1]

$$\begin{aligned} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} &= v, \\ \delta_{\alpha\alpha} &= v, \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\int d^v p \ p_\alpha p_\beta f(p^2) = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{v} \int d^v p \ p^2 f(p^2).$$

Para uma álgebra espinorial temos que acrescentar as regras $\{\gamma_\alpha, \gamma_\beta\} = 2\delta_{\alpha\beta}$,

$$\text{Tr } \gamma_\alpha \gamma_\beta = d(v) \delta_{\alpha\beta}, \tag{2.15}$$

$$\text{Tr } \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\rho \gamma_\sigma = d(v) \left\{ \delta_{\alpha\beta} \delta_{\rho\sigma} - \delta_{\alpha\rho} \delta_{\beta\sigma} + \delta_{\alpha\sigma} \delta_{\beta\rho} \right\},$$

onde $d(v)$ é uma função analítica que, para v inteiro par, coincide com o número de componentes do espinor no espaço n -dimensional, como exemplos podemos ter

$$d(v) = 2^{v/2}, \tag{2.16}$$

ainda temos

$$\gamma_\alpha \not{p} \gamma_\alpha = (2-v) \not{p}, \quad (2.17)$$

$$\gamma_\alpha \not{p} \not{A} \gamma_\alpha = 4 p \cdot q + (2-v) \not{p} \not{A}, \quad (2.17)$$

onde $\not{p} \equiv \gamma \cdot p$ etc.

Outra característica útil da regularização dimensional é que nós podemos fazer uma mudança nas variáveis de integração, por exemplo, de k_μ para $k_\mu + ap_\mu$, logo após tenhamos feito a continuação analítica para o espaço de v dimensões. Em quatro dimensões esta mudança só é permitida para integrais convergentes ou logaritmicamente divergentes.

2.5 - EXTENSÃO DA REGULARIZAÇÃO DIMENSIONAL PARA CAMPOS SEM MASSA

O método até agora exposto é suficiente para tratar o problema das divergências ultravioletas. Esse procedimento no entanto, não é adequado para tratar divergências infravermelhas, que estão relacionadas com campos sem massa.

A tentativa de integrar

$$\int \frac{d^v k}{(2\pi)^v k^2} \quad (2.18)$$

através da integral

$$I(m, v, \alpha) = \int \frac{d^v k}{(2\pi)^v (k^2 + m^2)^\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha - v/2)}{(4\pi)^{v/2} (m^2)^{\alpha - v/2} \Gamma(\alpha)},$$

(2.19)

fazendo o limite quando m tende para zero, é infrutífera, pois, além de depender da relação entre v e α , que no caso de $v > 2\alpha$ temos uma divisão por zero, temos também, em geral,

$$\lim_{v \rightarrow 4} [\lim_{m^2 \rightarrow 0} I(m, v, \alpha)] \neq \lim_{m^2 \rightarrow 0} [\lim_{v \rightarrow 4} I(m, v, \alpha)]. \quad (2.20)$$

Portanto, a integral (2.18) não pode ser deduzida, sem ambiguidade, da integral (2.19).

Um outro modo de atacar o problema é utilizar a parametrização (2.9) na integral 2.18, o que nos dá

$$I = \int \frac{d^\nu k}{(2\pi)^v k^2} = \int \frac{d^\nu k}{(2\pi)^v} \int_0^\infty e^{-xk^2} dx, \quad (2.21)$$

utilizando (2.10) segue

$$I = \int_0^\infty dx \frac{\pi^{v/2}}{(2\pi)^v} x^{-v/2}. \quad (2.22)$$

Essa integral diverge para qualquer valor de v . Em virtude dessa divergência, não é permitido a troca das integrações feita acima.

Uma outra tentativa é escrever (2.21) da seguinte forma:

$$I = \int \frac{d^\nu k}{(2\pi)^v} \frac{1}{k^2} \frac{(k-p)^2}{(k-p)^2}, \quad p^2 \neq 0. \quad (2.23)$$

Desenvolvendo o numerador da integral (2.33) e resolvendo as integrais com o auxílio daquelas que estão no apêndice A1, temos

$$\begin{aligned}
 I = & (4\pi)^{-v/2} \left\{ (p^2)^{v/2-1} \Gamma\left(\frac{2-v}{2}\right) \left[\frac{2-v}{2} B\left(\frac{v-2}{2}, \frac{v-2}{2}\right) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - 2\left(\frac{2-v}{2}\right) B\left(\frac{v-2}{2}, \frac{v}{2}\right) + \left(\frac{2-v}{2}\right) B\left(\frac{v-2}{2}, \frac{v+2}{2}\right) \right] \right\} + \\
 & + \frac{v}{2} (4\pi)^{-v/2} (p^2)^{\frac{v-2}{2}} \Gamma\left(\frac{2-v}{2}\right) B\left(\frac{v}{2}, \frac{v}{2}\right), \quad (2.24)
 \end{aligned}$$

onde B é a função Beta.

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (2.25)$$

As funções gama devem ser entendidas como sendo a continuação analítica da gama de Euler. Somando os termos acima utilizando a fórmula de recursividade das gamas, ou seja, $\Gamma(z) = (z-1) \Gamma(z-1)$, obtemos $I \equiv 0$ para qualquer valor de v . Essas duas últimas tentativas nos mostra que há uma ambiguidade no cálculo da integral sem massa.

Para resolver esse problema Leibbrandt e Capper 1974(a,b) [2.4] propuseram a redefinição da integral Gaussiana generalizada:

$$\int \frac{d^v k}{(2\pi)^v} e^{-xk^2 + 2b \cdot k} \equiv (4\pi x)^{-v/2} e^{b^2/x - xf(v)}, \quad (2.26)$$

para $x > 0$,

onde b_μ é um vetor do espaço de v dimensões, x é um número c. A função $f(v)$, que não é única, é chamada de função de continuidade e satisfaz as seguintes quatro condições:

- a) $f(v)$ é uma função analítica não nula exceto para um conjunto enumerável de pontos;
- b) $f(v) = 0$ para $v = \pm 0, 1, 2 \dots$;
- c) $f^\ell(v) = 0$ para $v = \pm 0, 1, 2 \dots$ e $\ell \leq \ell_0$ onde ℓ_0 é finito; ℓ é o número de derivações com relação a v ;
- d) $\operatorname{Re}[f(v)] > 0$ para qualquer $\operatorname{Re}(v) \neq \pm 0, 1, 2 \dots$ e para alguns valores $\operatorname{Im}(v)$.

A última propriedade nos garante que a integral

$$\int_0^\infty dx x^{-v/2} e^{-xf(v)} \quad (2.27)$$

existe.

Uma função que satisfaz as propriedades acima, proposta por Leibbrandt e Capper [2.4] tem a forma

$$f(v) = 1 - \cos(\pi \cos\pi(\cos \dots \cos v)) \dots \quad (2.28)$$

que contém n cosenos encadeados, com n finito. A função (2.28) ainda tem as propriedades adicionais:

- e) $f^\ell(v) = 0$ para $v = \pm 0, 1, 2, \dots$, onde $2^n > \ell+1$, n tem o significado mencionado acima e ℓ tem o significado que está definido em c,

f) $f^\ell(v) \neq 0$ para $v = \pm 0, 1, 2, \dots$, tal que $2^n \leq \ell+1$,

Com essas propriedades podemos mostrar que

$$I = \int \frac{d^v k}{(2\pi)^v} \frac{1}{k^2} = 0, \quad \text{quando } v \rightarrow 4, \quad (2.29)$$

então temos

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{d^v k}{(2\pi)^v} \frac{1}{k^2} = \int \frac{d^v k}{(2\pi)^v} \int_0^\infty dx e^{-xk^2} = \\ &= (4\pi)^{-v/2} \int_0^\infty dx x^{-v/2} e^{-xf(v)}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

mudando a variável, fazendo $y = xf(v)$, temos a definição da função gama, ficando

$$I = (4\pi)^{-v/2} \Gamma\left(\frac{2-v}{2}\right) [f(v)]^{\frac{v-2}{2}} \quad (2.31)$$

Escolhendo a $f(v)$ com n cosenos encadeados, temos pela propriedade f que $f^\ell(v) \neq 0$ para $\ell \geq 2^n - 1$. Sendo assim o desenvolvimento de f em série de Taylor em torno de $v=4$ fica

$$\begin{aligned} f(v) &= f(4) + f'(4)(v-4) + \frac{f''(4)}{2!} (v-4)^2 + \dots \times \\ &\times \frac{f^\ell(4)}{\ell!} (v-4)^\ell + \frac{f^{\ell+1}(4)}{(\ell+1)!} (v-4)^{\ell+1} + \dots = \\ &= \frac{f^{\ell+1}(4)}{(\ell+1)!} (v-4)^{\ell+1} + \dots . \end{aligned} \quad (2.32)$$

Colocando $(v-4)^{\ell+1}$ em evidência temos

$$\begin{aligned}
 I &= (4\pi)^{-v/2} \Gamma\left(\frac{6-v}{2}\right) \frac{2}{(2-v)} \frac{2}{(4-v)} (v-4)^{(\ell+1)\left(\frac{v-2}{2}\right)} \times \\
 &\quad \times \left[\frac{f^{\ell+1}(4)}{(\ell+1)!} + \frac{f^{\ell+2}(4)(v-4)}{(\ell+2)!} + \dots \right]^{\frac{v-2}{2}} = \\
 &= -(4\pi)^{-v/2} \frac{2}{(2-v)} \Gamma\left(\frac{6-v}{2}\right) (v-4)^{(\ell+1)(v-2/2)-1} \times \\
 &\quad \times \left[\frac{f^{\ell+1}(4)}{(\ell+1)!} + \frac{f^{\ell+2}(4)(v-4)}{(\ell+2)!} + \dots \right]^{\frac{v-2}{2}}, \tag{2.33}
 \end{aligned}$$

que nos dá para $v \rightarrow 4$, $I \rightarrow 0$.

Portanto, o limite

$$\lim_{v \rightarrow 4} \int \frac{d^v k}{(2\pi)^v} \frac{1}{k^2} = 0. \tag{2.34}$$

O que se quer dizer com esse resultado é que, no contexto da regularização dimensional, não há inconsistência em colocar como sendo zero essa integral altamente divergente.

O próximo passo será provar que

$$\int \frac{d^v k}{(2\pi)^v} (k^2)^{\beta-1} = 0. \tag{2.35}$$

Partimos da integral (2.26), com $b=0$, e derivamos β vezes em relação a x a integral

$$\int d^v k e^{-xk^2} = \pi^{v/2} x^{-v/2} e^{-xf(v)}. \quad (2.36)$$

Efetuando essas derivadas, temos

$$\begin{aligned} \int d^v k (k^2)^\beta e^{-xk^2} &= \pi^{v/2} x^{-v/2} \sum_{j=0}^{\beta} x \\ &\times \frac{\Gamma(\beta+1) \Gamma(v/2 + j)}{\Gamma(j) \Gamma(\beta-j+1) \Gamma(v/2)} x^{-v/2 - j} \times \\ &\times e^{-xf(v)}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

então a integral (2.35) fica

$$I = (4\pi)^{-v/2} f(v)^{v/2 + \beta - 1} \Gamma(1 - \frac{v}{2}) \sum_{j=0}^{\beta} \frac{(-1)^j \Gamma(\beta+1)}{\Gamma(j+1) \Gamma(\beta-j+1)} = 0,$$

para $\beta = 0, 1, 2\dots$ (2.38)

Na verdade quando $v/2 > \beta - 1$ podemos, sem problemas, usar a integral com massa (2.19) e verificar que ela é zero no limite $m \rightarrow 0$. Consequentemente, há uma definição em que (2.38) vale para quaisquer v e β .

Esse capítulo foi necessário para introduzir o método que será extensivamente utilizado no Cápitolo 4.

CAPÍTULO 3

OBTENÇÃO DOS DIAGRAMAS

O objetivo deste capítulo é obter as regras de Feynman para o loop de Wilson na teoria de Yang-Mills pura cujo grupo de invariância é o SU(3).

Na seção 3.1 partimos do loop de Wilson na representação de Heisenberg para reescrevê-lo na representação de Dirac.

Na seção 3.2 reapresentamos as regras gerais, dadas por 't Hooft e Veltman [3.1], para se obter os diagramas correspondentes a uma lagrangiana.

Na seção 3.3 mostramos como se calculam os fatores de simetria para esta teoria.

E, na última seção, utilizando as regras apresentadas na seção 3.2 obtivemos as expressões dos diagramas até a quarta ordem.

Neste trabalho a rotação de Wick para o espaço Euclidiano de n dimensões já está feita.

3.1 - OBTENÇÃO DO LOOP DE WILSON NA REPRESENTAÇÃO DE INTEGRAÇÃO

Na representação de Heisenberg o loop de Wilson tem a forma

$$W(C) = \langle 0_{\text{fin}} | T \text{ tr } P e^{\int g \Phi A_\mu^H(x) dx^\mu} | 0_{\text{ini}} \rangle \quad (3.1)$$

onde T é o operador de ordenação temporal; P é o operador

de Dyson que ordena pontos na curva fechada C ; $A_{\mu}^H(x) = A_{\mu}^{aH}(x)$ são os campos de gauge (glúons), o sobrescrito H se refere à representação de Heisenberg; o traço é calculado sobre os geradores do grupo (no caso o $SU(3)$) λ^a que estão na representação fundamental; g é a constante de acoplamento das interações fortes.

O tratamento perturbativo na representação de Heisenberg é trabalhoso, vide Roman [3.2]; portanto se faz necessário usar a representação de interação (ou de Dirac), que tem como característica a covariância explícita.

As relações entre os vácuos e os campos destas duas representações são:

$$|0_{ini}\rangle = U(0, -\infty) |0\rangle,$$

$$|0_{fin}\rangle = U(0, \infty) |0\rangle, \quad (3.2)$$

$$\phi(x, t) = U(t, 0)^{-1} \phi^H(x, t) U(t, 0),$$

aqui U é o operador de evolução temporal; $|0_{ini}\rangle$ e $|0_{fin}\rangle$ são, respectivamente, os vácuos iniciais e finais da representação de Heisenberg e $|0\rangle$ é o vazio na de Dirac e ϕ é qualquer campo; vide Lurié [3.3], substituindo as relações (3.2) em (3.1) teremos

$$\begin{aligned} W(C) &= T \text{ tr } P \langle 0 | U(\infty, 0) U(0, t) e^{ig \oint A_{\mu}(x) dx^{\mu}} \\ &\quad \times U(t, 0) U(0, -\infty) |0\rangle \\ &= T \text{ tr } P \langle 0 | U(\infty, t) e^{ig \oint A_{\mu}(x) dx^{\mu}} U(t, -\infty) |0\rangle. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Podemos mudar a ordem dos campos sobre os quais age o operador de ordenação temporal, para obter:

$$W(C) = T \operatorname{tr} P \langle 0 | S e^{ig \oint A_\mu(x) dx^\mu} | 0 \rangle . \quad (3.4)$$

Na dedução da expressão anterior foram usadas as propriedades de grupo do operador U:

$$U(t_1, t_2) U(t_2, t_3) = U(t_1, t_3),$$

$$U(t_1, t_2) = U(t_2, t_1)^{-1}, \quad (3.5)$$

$$U(t_1, t_2)^+ = U(t_1, t_2)^{-1} = U(t_2, t_1),$$

onde

$$S = U(\infty, -\infty) = T \left\{ e^{\int dx L'(x)} \right\}$$

é a matriz de espalhamento e $L'(x)$ é a lagrangiana de interação da teoria.

3.2 - REGRAS DE FEYNMAN

As definições das regras como estão apresentadas aqui são essencialmente o capítulo 2 do Diagrammar [3.1].

A lagrangiana mais geral aqui discutida é da forma

$$\begin{aligned} L(x) &= \psi_i^*(x) V_{ij} \psi_j(x) + \frac{1}{2} \phi_i(x) W_{ij} \phi_j(x) + \\ &+ L_I(\psi^*, \psi, \phi), \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde ψ_i e ϕ_i são, respectivamente, campos complexos e reais que podem ser; escalares, vetores, tensores, Os índices i simbolizam os índices de Lorentz ou de isospin ou espinor etc.. V e W são operadores que podem conter derivadas e cujas transformadas de Fourier possuem inverso. O termo

$$L_I(\psi^*, \psi, \phi)$$

É um polinômio nos campos e na constante de acoplamento g . Podem ser não locais, isto é, depender não só de x , mas de outros pontos do espaço tempo, x' , x'' , etc. Um termo típico de L_I tem a forma

$$\int d^\nu x_1 d^\nu x_2 \dots \alpha_{i_1 i_2} \dots (x, x_1, x_2, \dots)$$

$$\psi_{i_1}^*(x_1) \dots \psi_{i_m}(x_m) \dots \phi_{i_n}(x_n) \dots, \quad (3.7)$$

onde o coeficiente α pode conter um número qualquer de operadores diferenciais atuando sobre os campos.

A ação é definida por

$$S = \int d^\nu x L(x). \quad (3.8)$$

Fazendo na lagrangiana as substituições

$$\psi_i(x) = \int d^\nu k a_i(k) e^{ikx},$$

$$\psi_i^*(x) = \int d^\nu k b_i(k) e^{-ikx}, \quad (3.9)$$

$$\phi_i(x) = \int d^\nu k c_i(k) e^{ikx}$$

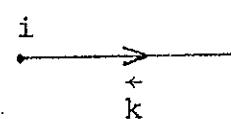
e

$$\begin{aligned} \alpha_{i_1 i_2 \dots} (x, x_1, \dots) &= \int d^v k \, d^v k_1 \, d^v k_2 \dots \\ &\quad e^{ikx + ik_1(x-x_1) + ik_2(x-x_2) \dots \times} \\ &\quad \times \bar{\alpha}_{i_1 \dots} (k, k_1, k_2, \dots) \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} S &= (2\pi)^v \int d^v k \, b_i(k) \bar{V}_{ij}(k) a_j(k) + \\ &+ \frac{(2\pi)^v}{2} \int d^v k \, c_i(k) \bar{W}_{ij}(k) c_j(k) + \dots + \\ &+ (2\pi)^v \int d^v k \, d^v k_1 \dots \delta(k+k_1+\dots) \times \\ &\times \bar{\alpha}_{i_1 i_2 \dots} (k, k_1, k_2 \dots) b_{i_1}(k_1) \dots a_{i_m}(k_m) \dots \times \\ &\times \dots c_{i_m}(k_m) \dots \end{aligned} \tag{3.10}$$

Das partes quadráticas da ação tiramos os propagadores e do restante os vértices. Os propagadores, portanto, são definidos como sendo

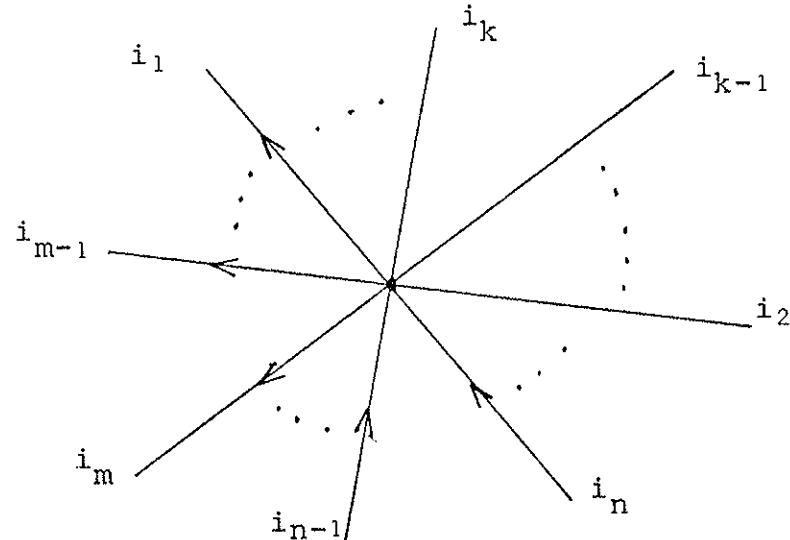


$$= \Delta_{F_{ij}}(k) = -\frac{1}{(2\pi)^v} \left[\bar{V}^{-1}(k) \right]_{ij},$$

$$i \quad j = \Delta_{F_{ij}} = - \frac{1}{(2\pi)^v} \left[\frac{1}{2} \bar{W}(k) + \frac{1}{2} \tilde{\bar{W}}(-k) \right]^{-1}_{ij}$$

$$\text{onde } \tilde{\bar{W}}_{ij} = \bar{W}_{ji}, \quad (3.11)$$

enquanto os vértices são dados por



$$= (2\pi)^v \sum_{\{1\dots m-1\}} \sum_{\{m\dots m-1\}} \sum_{\{n\dots\}} (-1)^P \delta(k+k_1+\dots)$$

$$\bar{\alpha}_{i_1 i_2 \dots} (k_1, k_2, \dots), \quad (3.12)$$

o símbolo $\{1\dots m-1\}$ indica que a somatória é feita sobre todas as permutações de linhas do mesmo tipo. Linhas orientadas para fora correspondendo a campos ψ^* , linhas orientadas para dentro correspondendo a campos ψ e aquelas sem orientação correspondendo a campos ϕ . Em (3.12) P é o número de permutações de férmons.

Como foi indicado, os coeficientes α podem ser funções de x , correspondendo a alguma dependência arbitrária no momentum k , como em (3.12). Este momentum não está associado com nenhuma das linhas do vértice. Se tivermos uma tal dependência em k , estaremos na presença de uma fonte.

Um diagrama é obtido ligando vértices e fontes por meio de propagadores de acordo com a orientação das linhas. Qualquer diagrama é provido de um fator combinatório que corrige a dupla contagem no caso em que ocorrem partículas idênticas. Um exemplo do cálculo do fator de simetria pode ser visto na seção 3.4. Devem ser feitas integrações em todos os momenta das quais os propagadores são funções. Se houver férmiões os diagramas devem ter um sinal de acordo com as seguintes regras:

- há um sinal menos para cada loop fechado de férmiões.
- diagramas que diferem pela adição ou eliminação de linhas de bósons tem o mesmo sinal.
- diagramas que diferem pela troca de linhas de férmiões tem sinais opostos.

3.3 - REGRAS DE FEYNMAN PARA O LOOP DE WILSON

Na linguagem das integrais funcionais o loop de Wilson é definido como

$$W(C) = \frac{1}{N} \int dA d\bar{C} dC e^{\int d^4x L_{\text{ef}}(x) \text{Tr } P e^{ig \oint A_\mu(x) dx^\mu}}$$

(3.13)

A interação funcional é feita nos campos de gauge $A_\mu^a(x)$, cuja dinâmica é aqui descrita pela teoria de Yang Mills pura. A ação efetiva no gauge a tem a forma [3.4]

$$\int d^4x L_{\text{ef}}(x) = -\frac{1}{4} \int d^4x (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g t^{abc} A_\mu^b A_\nu^c)^2 -$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2\alpha} \int d^4x (\partial_\mu A_\mu)^2 - \\
 & - i \int d^4x \partial_\mu \bar{C}^a (\partial_\mu C^a - g t^{abc} A_\mu^b C^c), \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

onde \bar{C}^a e C^a são os campos de fantasmas, t^{abc} são as constantes de estrutura do grupo SU(3); N uma constante de normalização; e λ^a , como já foi mencionado, são os geradores do grupo na representação adjunta.

As regras de comutação para os λ^a são:

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2it^{abc} \lambda^c$$

e as condições de normalização para esta representação são

$$\text{Tr}(\lambda^a \lambda^b) = 2\delta^{ab}.$$

A relação

$$t^{abc} \text{Tr} \lambda^a \lambda^b \lambda^c = 2inC_2$$

será usada no capítulo seguinte e é obtida facilmente das relações acima e da relação $t^{abc} t^{abd} = C_2 \delta^{cd}$. Aqui n é a dimensão do grupo e C_2 é a constante de Casimir quadrática.

Passamos agora, com a ajuda das prescrições dadas na seção 3.2, a obter as regras de Feynman para a teoria de Yang-Mills, e o vértice do fator de fase não integrável.

3.3.1 - O PROPAGADOR DE GLÚON

Este é obtido dos termos quadráticos nos campos de gange da L_{ef} . Efetuando algumas passagens obtemos para a ação correspondente, a estes termos, a seguinte expressão

$$I = \int d^v x \left\{ -\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu^a \partial_\mu A_\nu^a + \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu^a \partial_\nu A_\mu^a - \frac{1}{2\alpha} \partial_\mu A_\mu^a \partial_\nu A_\nu^a \right\}. \quad (3.15)$$

Integrando por partes e desprezando os termos de superfície, pois, pela hipótese adiabática os campos vão a zero no infinito, obtemos

$$I = \int d^v x \frac{1}{2} A_\mu^a \left\{ (\delta_{\mu\nu} \partial^2 - (1 - \frac{1}{\alpha}) \partial_\mu \partial_\nu) \delta^{ab} \right\} A_\nu^b \quad (3.16)$$

O integrando da expressão acima tem a forma do segundo termo da eq. (3.6).

A transformada de Fourier do operador entre colchetes da expressão (3.16) tem a forma

$$\bar{W}_{\mu\nu}(k) = (-\delta_{\mu\nu} k^2 + (1 - \frac{1}{\alpha}) k_\mu k_\nu) \delta^{ab} \quad (3.17)$$

Para acharmos o inverso deste operador, escrevemos sem perda de generalidades, a equação

$$\left\{ -\delta_{\mu\rho} k^2 + (1 - \frac{1}{\alpha}) k_\mu k_\nu \right\} \left\{ \delta_{\rho\nu} A + B k_\rho k_\nu \right\} = \delta_{\mu\nu}. \quad (3.18)$$

Resolvendo-a para as incógnitas A e B temos

$$[\bar{W}_{\mu\nu}(k)]^{-1} = -\frac{\delta_{\mu\nu}}{k^2} + \frac{(1-\alpha)}{k^4} k_\mu k_\nu \quad (3.19)$$

e o propagador como definido em (3.11) tendo a forma

$$\begin{array}{c} a \\ \sim \sim \sim \sim \sim \sim \\ \mu \end{array} \begin{array}{c} b \\ \sim \sim \sim \sim \sim \sim \\ \nu \end{array} = D_{\mu\nu}^{ab}(k) = \frac{\delta^{ab}}{(2\pi)^v} \left\{ \frac{\delta_{\mu\nu}}{k^2} - A \frac{k_\mu k_\nu}{k^4} \right\}, \quad (3.20)$$

onde $A = 1-\alpha$.

3.3.2 - O PROPAGADOR DO FANTASMA

É obtido do termo quadrático nos campos de fantasmas da ação efetiva

$$-i \int d^v x \partial_\mu \bar{C}^a \partial_\mu C^b \delta^{ab}, \quad (3.21)$$

devemos fazer como foi feito para o propagador do glúon, diferindo apenas no fato de que os campos de fantasmas são complexos. Portanto temos para o propagador do fantasma

$$\begin{array}{c} \leftarrow \rightarrow \\ a \quad k \quad b \end{array} = G^{ab}(k) = \frac{-i \delta^{ab}}{(2\pi)^v k^2} \quad (3.22)$$

3.3.3 - O VÉRTICE DE TRÊS GLÚONS

É obtido dos termos cúbicos nos campos de gauge da ação efetiva

$$\int d^v x q t^{a_1 a_2 a_3} \delta_{\mu_1 \mu_2} \partial_{\mu_2}^x A_{\mu_1}^{a_1}(x) A_{\mu_2}^{a_2}(x) A_{\mu_3}^{a_3}(x) \quad (3.23)$$

da eq. (3.14)

onde $a_1=a$, $a_2=b$, $a_3=c$, $\mu_1=v$, $\mu_2=u$, $\mu_3=p$.

Substituindo os campos $A_{\mu_i}^{a_i}(x)$ por suas transformadas de Fourier $a_{\mu_i}^{a_i}(k_i)$, aplicando o operador $\partial_{\mu_2}^x$ e integrando em x chegamos a

$$-ig t^{a_1 a_2 a_3} \left\{ dk_1 dk_2 dk_3 (2\pi)^v \delta(k_1 + k_2 + k_3) \right. \\ \left. \delta_{\mu_1 \mu_3}^{a_1 a_3} k_{\mu_2}^{a_2} a_{\mu_1}^{a_1}(k_1) a_{\mu_2}^{a_2}(k_2) a_{\mu_3}^{a_3}(k_3) \right. . \quad (3.24)$$

Daqui obtemos

$$\alpha_{i_1 i_2 i_3}^{a_1 a_2 a_3}(k_1, k_2, k_3) = -ig t^{a_1 a_2 a_3} \delta_{\mu_1 \mu_3}^{a_1 a_3} k_{\mu_2}^{a_2}, \quad (3.25)$$

onde os índices i_1, i_2, i_3 se referem respectivamente aos termos (μ_1, a_1, k_1) , (μ_2, a_2, k_2) , (μ_3, a_3, k_3) . Como definido na seção 3.2 o vértice é dado por

$$V_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}^{a_1 a_2 a_3}(k_1, k_2, k_3) = -i g(2\pi)^v \delta(k_1 + k_2 + k_3) \\ \sum_{\{1,2,3\}} t^{a_1 a_2 a_3} \delta_{\mu_1 \mu_3}^{a_1 a_3} k_{\mu_2}^{a_2} \quad (3.26)$$

A soma é feita sobre todas as permutações dos elementos do conjunto $\{1,2,3\}$.

Consequentemente temos para aquele,

$$V_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}^{a_1 a_2 a_3}(k_1, k_2, k_3) = -i g(2\pi)^v \delta(k_1 + k_2 + k_3)$$

$$\left\{ t^{a_1 a_2 a_3} {}_{k_1 \mu_2} \delta_{\mu_1 \mu_3} + t^{a_1 a_3 a_2} {}_{k_1 \mu_3} \delta_{\mu_1 \mu_2} + \right. \\ (3.27) \\ + t^{a_2 a_1 a_3} {}_{k_2 \mu_1} \delta_{\mu_2 \mu_3} + t^{a_2 a_3 a_1} {}_{k_2 \mu_3} \delta_{\mu_2 \mu_1} + \\ \left. + t^{a_3 a_1 a_2} {}_{k_3 \mu_1} \delta_{\mu_3 \mu_2} + t^{a_3 a_2 a_1} {}_{k_3 \mu_2} \delta_{\mu_3 \mu_1} \right\}$$

e finalmente

$$V_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}^{a_1 a_2 a_3}(k_1, k_2, k_3) = -i g(2\pi)^v \times$$

$$\times \delta(k_1 + k_2 + k_3) t^{a_1 a_2 a_3} \left\{ (k_1 - k_3) {}_{\mu_2} \delta_{\mu_1 \mu_3} + \right. \\ \left. + (k_2 - k_1) {}_{\mu_3} \delta_{\mu_1 \mu_2} + (k_3 - k_2) {}_{\mu_1} \delta_{\mu_2 \mu_3} \right\} \quad (3.28)$$

Depois de feita a simetrização acima a expressão (3.24) fica igual a

$$\frac{1}{3!} \int dk_1 dk_2 dk_3 V_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}^{a_1 a_2 a_3}(k_1, k_2, k_3) a_{\mu_1}^{a_1}(k_1) a_{\mu_2}^{a_2}(k_2) a_{\mu_3}^{a_3}(k_3).$$

(3.29)

O fator $1/3!$ foi colocado para compensar a soma que foi feita.

3.3.4 - O VÉRTICE DE QUATRO GLÚONS

Este vem do termo quádruplo nos campos de gauge da ação efetiva

$$S_4 = -\frac{g^2}{4} \int d^v x \ t^{ab_1 b_2} \ t^{ab_3 b_4} \ \delta_{\mu_1 \mu_3} \ \delta_{\mu_2 \mu_4} \ A_{\mu_1}^{b_1} A_{\mu_2}^{b_2} A_{\mu_3}^{b_3} A_{\mu_4}^{b_4}$$

(3.30)

da eq. (3.14),

onde $b_1=b$, $b_2=c$, $b_3=d$, $b_4=c$,

$\mu_1=\mu$, $\mu_2=v$, $\mu_3=\lambda$, $\mu_4=\rho$;

no espaço de momenta ela fica

$$S_4 = -\frac{g^2}{4} (2\pi)^v \int dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 \ t^{ab_1 b_2} \ t^{ab_3 b_4} \ \delta_{\mu_1 \mu_3} \ \delta_{\mu_2 \mu_4} \times$$

$$\times a_{\mu_1}^{b_1}(k_1) \ a_{\mu_2}^{b_2}(k_2) \ a_{\mu_3}^{b_3}(k_3) \ a_{\mu_4}^{b_4}(k_4), \quad (3.31)$$

da expressão acima tiramos o termo α definido em (3.10):

$$\alpha_{i_1 i_2 i_3 i_4}(k_1, k_2, k_3, k_4) = -\frac{g^2}{4} \ t^{ab_1 b_2} \ t^{ab_3 b_4} \ \delta_{\mu_1 \mu_3} \ \delta_{\mu_2 \mu_4},$$

(3.32)

onde i_1, i_2, i_3, i_4 se referem respectivamente aos termos:

(μ_1, b_1, k_1) , (μ_2, b_2, k_2) , (μ_3, b_3, k_3) , (μ_4, b_4, k_4)

como definido na seção 4.2, o vértice tem a forma

$$V_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}^{a_1 a_2 a_3 a_4}(k_1, k_2, k_3, k_4) = -\frac{g^2}{4} (2\pi)^v \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)$$

$$\sum_{\{1,2,3,4\}} t^{ab_1 b_2} t^{ab_3 b_4}$$

$$\delta_{\mu_1 \mu_3} \delta_{\mu_2 \mu_4} \quad (3.33)$$

somando sobre todas as permutações, fazendo algumas manipulações com índices e reduzindo termos semelhantes temos

$$V_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}^{b_1 b_2 b_3 b_4} = g^2 (2\pi)^v \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)$$

$$\left\{ t^{ab_1 b_2} t^{ab_3 b_4} (\delta_{\mu_1 \mu_4} \delta_{\mu_2 \mu_3} - \delta_{\mu_1 \mu_3} \delta_{\mu_2 \mu_4}) + t^{ab_1 b_3} t^{ab_2 b_4} (\delta_{\mu_1 \mu_4} \delta_{\mu_2 \mu_3} - \delta_{\mu_1 \mu_2} \delta_{\mu_3 \mu_4}) + t^{ab_1 b_4} t^{ab_2 b_3} (\delta_{\mu_1 \mu_3} \delta_{\mu_2 \mu_4} - \delta_{\mu_1 \mu_2} \delta_{\mu_3 \mu_4}) \right\} =$$

$$(3.34)$$

Para complementar, temos que o termo da ação no espaço de momento que gera este vértice tem a forma

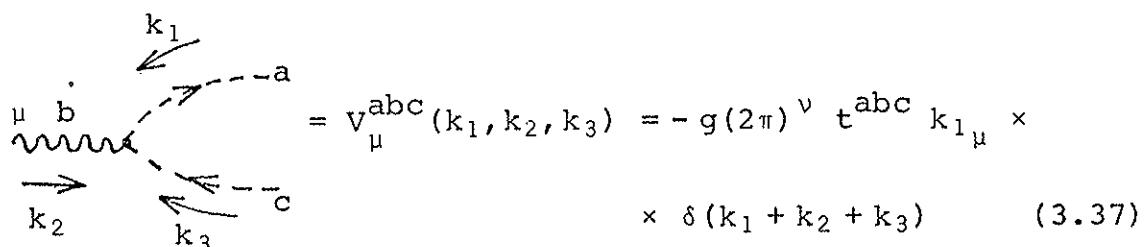
$$\frac{1}{4!} \int dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 V_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}^{b_1 b_2 b_3 b_4}(k_1, k_2, k_3, k_4) a_{\mu_1}^{b_1}(k_1) \times a_{\mu_2}^{b_2}(k_2) a_{\mu_3}^{b_3}(k_3) a_{\mu_4}^{b_4}(k_4) \quad (3.35)$$

3.3.5 - O VÉRTICE COM FANTASMAS

É obtido do termo

$$i \int dx g t^{abc} \partial_\mu \bar{C}^a A_\mu^b C^c = i g t^{abc} \int dk_1 dk_2 dk_3 k_{1\mu} \times \\ \times \delta(k_1 + k_2 + k_3) (2\pi)^v \bar{C}^a(k_1) a^b(k_2) c^c(k_3). \quad (3.36)$$

Portanto



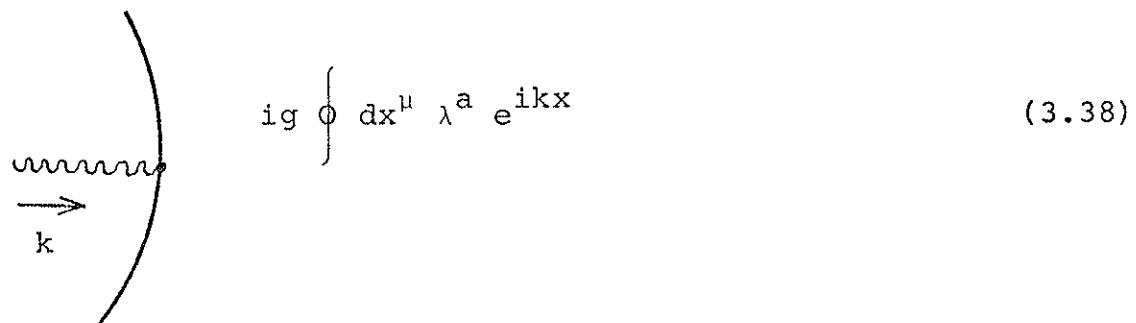
$$V_\mu^{abc}(k_1, k_2, k_3) = -g(2\pi)^v t^{abc} k_{1\mu} \times \\ \times \delta(k_1 + k_2 + k_3) \quad (3.37)$$

3.3.6 - O VÉRTICE NO CONTORNO

É obtido do fator de fase não integrável da eq. (3.13),

$$ig \oint A_\mu(x) dx^\mu = ig \oint A_\mu^a(x) \lambda^a dx^\mu \\ = ig \int dk \oint a_\mu^a(k) \lambda^a e^{ikx} dx^\mu$$

portanto o vértice fica

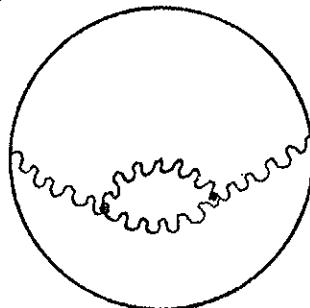


$$ig \oint dx^\mu \lambda^a e^{ikx} \quad (3.38)$$

3.4 - FATORES COMBINATÓRIOS

O cálculo destes fatores para o loop de Wilson, é feito como o da teoria de Yang-Mills para pontos fora do contorno, sendo que os propagadores que ligam a pontos deste, devem ser considerados como pernas externas. Posteriormente deverá haver um fator $1/n!$ onde n é o número de pontos na curva. No caso em que o propagador liga dois pontos no contorno, deve-se contar o número de possibilidades dele se ligar aos vários pontos do contorno de modos topologicamente distintos. Para se construir diagramas topologicamente distintos devemos considerar que os vários pontos no contorno são diferentes.

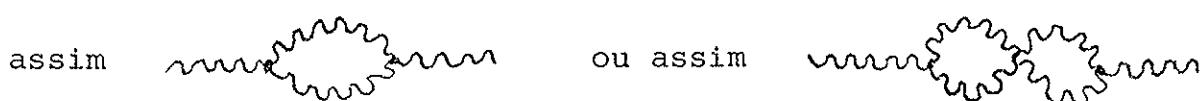
Seja o diagrama



vamos separar os dois vértices fora do loop.



Existem 6 possibilidades para escolher a perna esquerda daquele diagrama; depois do que, com o vértice que sobra, existem três possibilidades para se escolher a perna direita, finalmente existem duas maneiras de se unir as pernas restantes,



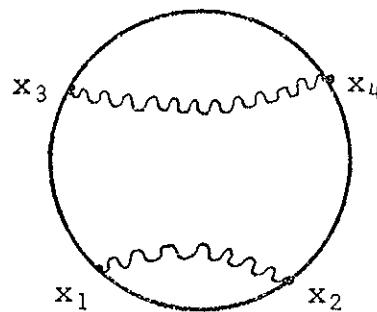
O fator combinatório será obtido da seguinte maneira: Inicialmente multiplicamos as possibilidades deduzidas anteriormente, em seguida deveremos dividir pelo factorial do número de vértices iguais fora do contorno; dividir pelo factorial do número de pontos do contorno; multiplicar pelo coeficiente do termo na L_{ef} (depois de feita a simetrização explicada na seção 3.3.3) que no caso do vértice de três glúons é $1/3!$, veja eq. (3.29).

Portanto o fator combinatório fica:

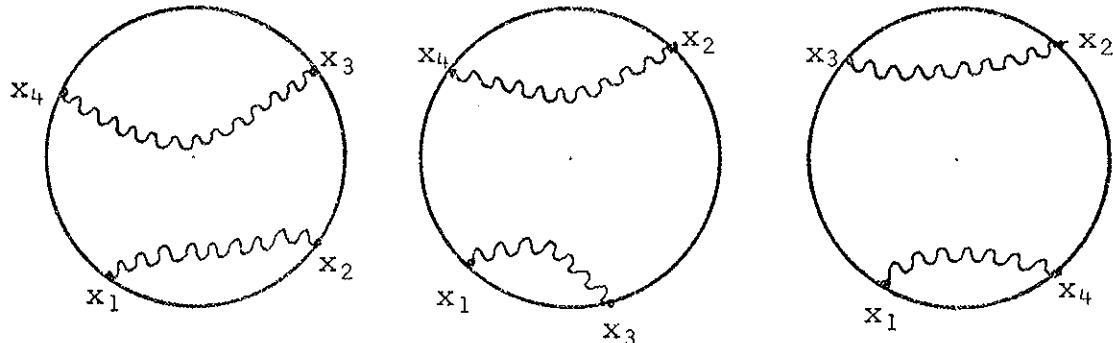
$$f = \frac{6 \times 3 \times 2}{2! \ 3! \ 3! \ 2!} = \frac{1}{4} .$$

No caso em que os propagadores estão entre pontos no loop devemos contar o número de possibilidades, considerando que os pontos são distinguíveis. Tomamos o cuidado de manter a topologia do diagrama.

Ex.: Existem três possibilidades para o diagrama



que são:



O fator combinatório, portanto, fica três dividido pelo factorial do número de pontos do loop.

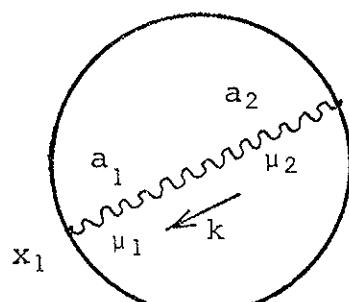
3.5 - EXPRESSÕES DOS DIAGRAMAS ATÉ A 4^a ORDEM

Convém salientar que para cada loop de fantasmas corresponde um fator (-1); deve-se tomar o traço sobre os geradores do grupo e fazer a ordenação de Dyson ao longo da curva.

Chegamos no ponto de escrever as expressões dos diagramas que serão calculados do capítulo seguinte.

Em segunda ordem temos:

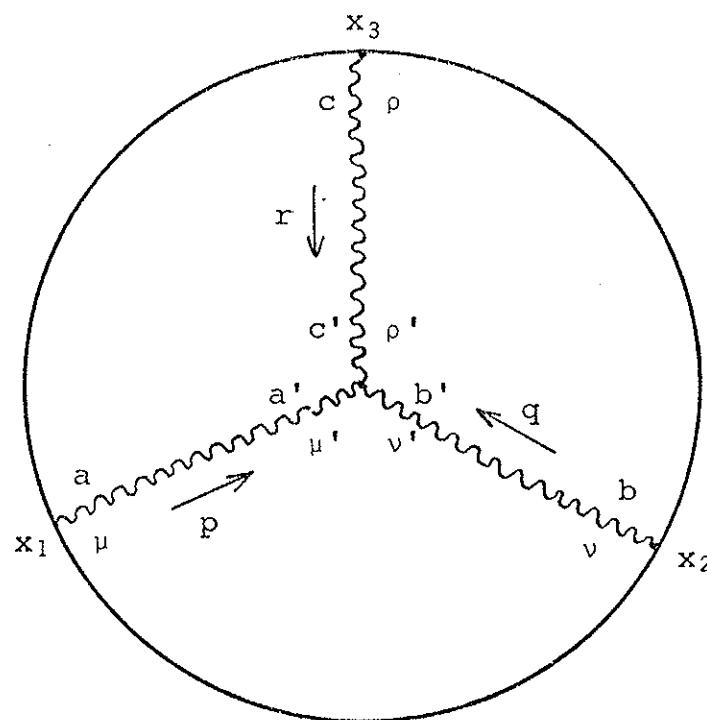
$$G_2 =$$


$$x_2 = \frac{-q^2}{2!} \text{Tr } \lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \left\{ \int dx_1^{\mu_1} dx_2^{\mu_2} \right. \\ \left. \times \int d^v k e^{ik(x_1-x_2)} D_{\mu_1 \mu_2}^{a_1 a_2}(k) \right\}. \quad (3.39)$$

Em quarta ordem temos:

O vértice com três glúons:

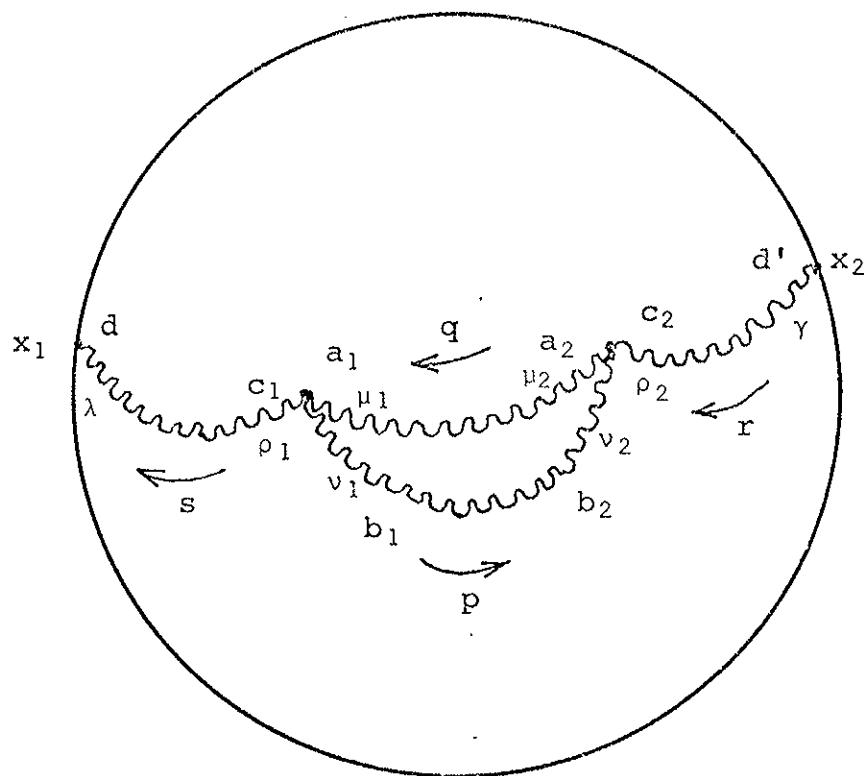
G_{4a}



$$\begin{aligned}
 &= -i \frac{g^3}{3!} P \text{Tr} \lambda^a \lambda^b \lambda^c \left\{ \left\{ \left\{ dx_1^\mu dx_2^\nu dx_3^\rho \right\} d^\nu p d^\nu q d^\nu r \times \right. \right. \\
 &\quad \times e^{-i(px_1 + qx_2 + rx_3)} V_{\mu\nu\rho}^{a'b'c'}(p, q, r) D_{\mu\mu}^{aa'}(p) D_{\nu\nu}^{bb'}(q) D_{\rho\rho}^{cc'}(r).
 \end{aligned}
 \tag{3.40}$$

O gráfico com loop de glúons

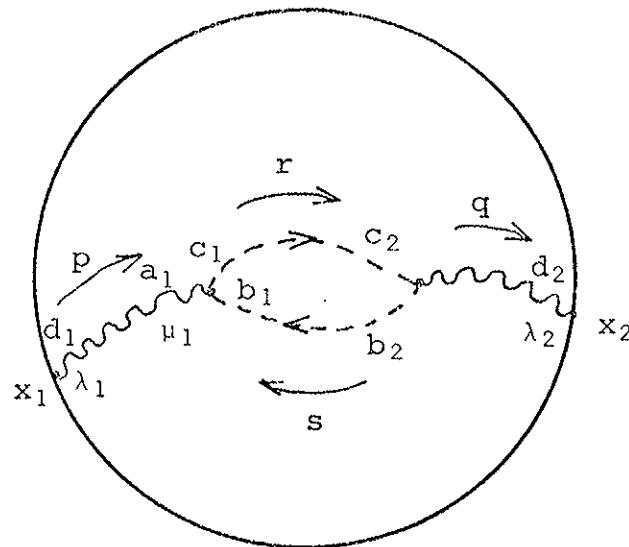
$G_{4b} =$



$$\begin{aligned}
 &= -\frac{g^2}{2!} \frac{\text{Tr } \lambda^d \lambda^{d'}}{2} \left\langle \left\langle dx_1^\lambda dx_2^\gamma \right\rangle \right\rangle \int d^\nu p d^\nu q d^\nu r d^\nu s e^{i(p x_1 - r x_2)} \times \\
 &\times V_{\mu_1 \rho_1 v_1}^{a_1 c_1 b_1}(q, -s, -p) V_{\mu_2 v_2 \rho_2}^{a_2 b_2 c_2}(-q, p, r) D_{\lambda \rho_1}^{dc_1}(s) D_{v_1 v_2}^{b_1 b_2}(p) \times \\
 &\times D_{\mu_1 \mu_2}^{a_1 a_2}(q) D_{\rho_2 \gamma}^{c_2 d}(r). \tag{3.41}
 \end{aligned}$$

O gráfico com fantasmas

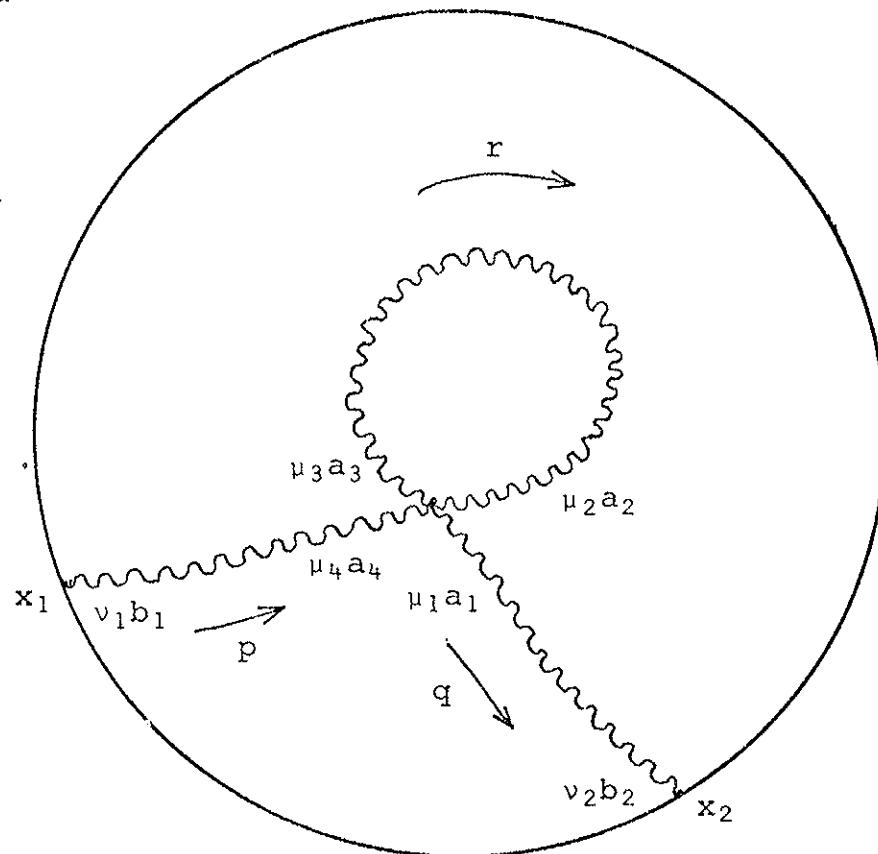
$G_{4C} =$



$$\begin{aligned}
 &= + \frac{g^2}{2! 2} \text{Tr } \lambda^{d_1} \lambda^{d_2} \left\{ \left\{ dx_1^{\lambda_1} dx_2^{\lambda_2} \right\} \right\} d^\nu p d^\nu q d^\nu r d^\nu s \times \\
 &\times e^{i(qx_2 - px_1)} D_{\lambda_1 \mu_1}^{d_1 a_1}(p) D_{\mu_2 \lambda_2}^{a_2 d_2}(q) V_{\mu_1}^{c_1 a_1 b_1}(-r, p, s) \times \\
 &\times V_{\mu_2}^{b_2 a_2 c_2}(-s, -q, r) G^{c_1 c_2}(r) G^{b_1 b_2}(s). \tag{3.42}
 \end{aligned}$$

O gráfico do girino com duas pernas

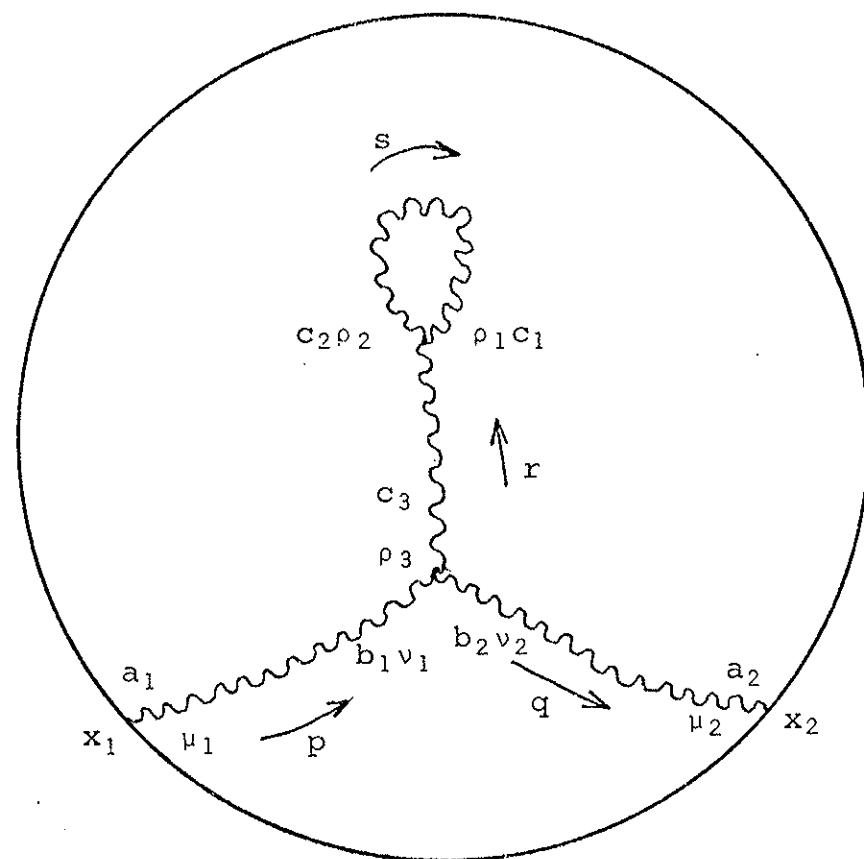
$G_4 d =$



$$\begin{aligned}
 &= -\frac{g^2}{2!} \frac{\text{Tr } \lambda^{b_1} \lambda^{b_2}}{2} \left\langle \left\langle dx_1^{v_1} dx_2^{v_2} \right\rangle \right\rangle \int d^\nu p d^\nu q d^\nu r e^{i(qx_2 - px_1)} \times \\
 &\times D_{v_1 \mu_4}^{b_1 a_4}(p) D_{v_2 \mu_1}^{b_2 a_1}(q) D_{\mu_3 \mu_2}^{a_3 a_2}(r) V_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}^{a_1 a_2 a_3 a_4}(-q, r, -r, p). \quad (3.43)
 \end{aligned}$$

O gráfico do girino com uma perna

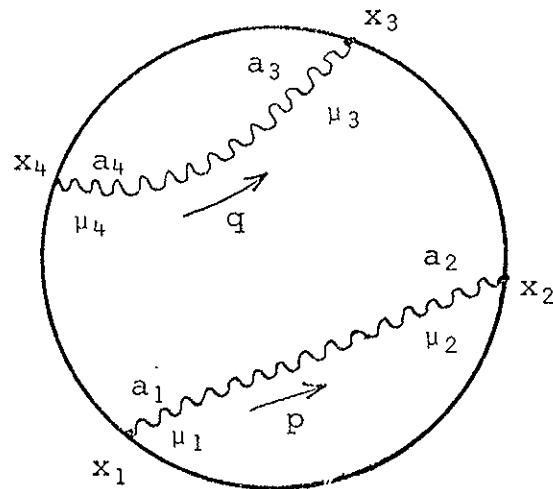
$G_{4e} =$



$$\begin{aligned}
 &= -\frac{3}{8} \text{Tr } \lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \left(\int dx_1^{\mu_1} dx_2^{\mu_2} \right) \left[d^v p d^v q d^v r d^v s e^{i(qx_2 - px_1)} \times \right. \\
 &\times D_{\mu_1 v_1}^{a_1 b_1}(p) D_{\mu_2 v_2}^{a_2 b_2}(q) D_{v_3 \rho_3}^{b_3 c_3}(r) D_{\rho_1 \rho_2}^{c_1 c_2}(s) V_{v_1 v_2 v_3}^{b_1 b_2 b_3}(p, -q, -r) \times \\
 &\times \left. V_{\rho_1 \rho_2 \rho_3}^{c_1 c_2 c_3}(-s, s, r) \right]. \tag{3.44}
 \end{aligned}$$

O gráfico com dois glúons não interagentes.

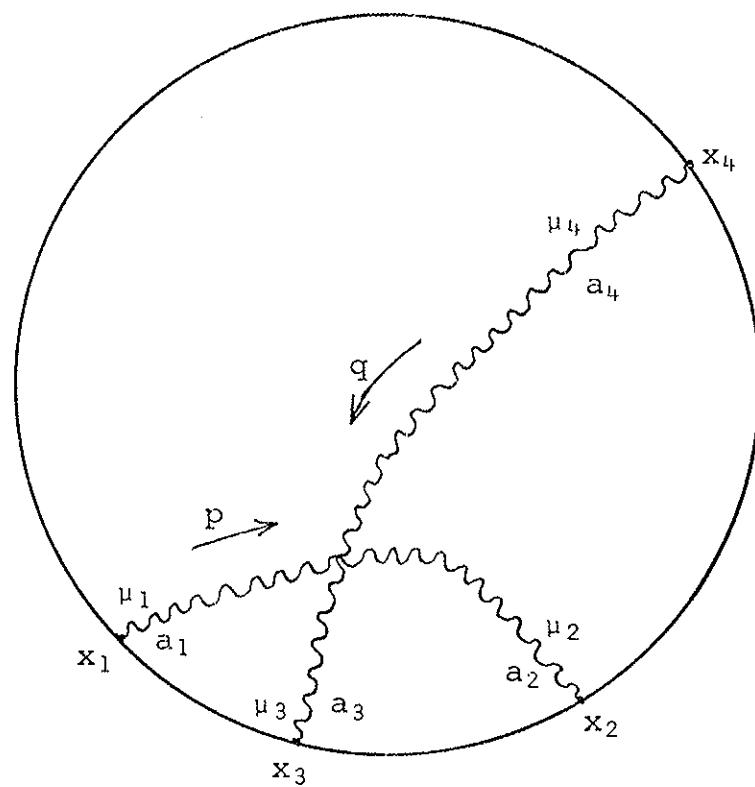
$$G_{4f} =$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{3g^4}{4!} P \text{Tr } \lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4} \left\{ \left\{ \left\{ \left\{ dx_1^{\mu_1} dx_2^{\mu_2} dx_3^{\mu_3} dx_4^{\mu_4} \right. \right. \right. \right. \times \right. \\
 &\times e^{ip(x_2-x_1)} e^{iq(x_3-x_4)} D_{\mu_1 \mu_2}^{a_1 a_2}(p) D_{\mu_3 \mu_4}^{a_3 a_4}(q). \quad (3.45)
 \end{aligned}$$

O gráfico com 2 glúons não interagentes cruzados.

$$G_{4g} =$$



$$= \frac{3}{4!} g^4 P \text{Tr } \lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4} \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} dx_1^{\mu_1} dx_2^{\mu_2} dx_3^{\mu_3} dx_4^{\mu_4} \times$$

$$\times e^{ip(x_2-x_1)} e^{iq(x_3-x_4)} D_{\mu_1 \mu_2}^{a_1 a_2}(p) D_{\mu_3 \mu_4}^{a_3 a_4}(q). \quad (3.46)$$

CAPÍTULO 4

CÁLCULOS DOS DIAGRAMAS

Neste capítulo calculamos as expressões correspondentes aos diagramas de segunda e quarta ordens. Alguns cálculos, devido a sua extensão, tiveram que ser feitas com o auxílio do programa SCHOONSCHIP. Esses cálculos se encontram nos apêndices B e C. Finalizamos mostrando a expressão da carga renormalizada da cromodinâmica quântica em quarta ordem.

4.1 - ANÁLISE DAS DIVERGÊNCIAS

Nesta seção apresentamos algumas dificuldades inerentes ao cálculo perturbativo do loop de Wilson. No cálculo do valor esperado no vácuo do fator de fase, ou seja, o loop de Wilson, envolvem integrações no contorno que são divergentes. Esse problema pode ser sanado, como mostrado por Dotsenko e Vergelles [4.1] e Brandt, Neri, Sato [4.2]. Aqueles para curvas lisas e estes para curvas que se interceptam as quais podem ter pontas. Essas divergências que aparecem são removidas com a renormalização.

Quando os vértices no contorno coalescem, como está na fig. 4.1, surgem divergências lineares.

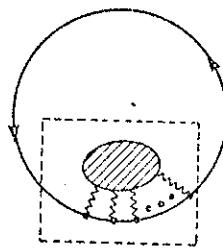


fig. 4.1

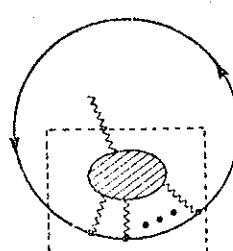


fig. 4.2

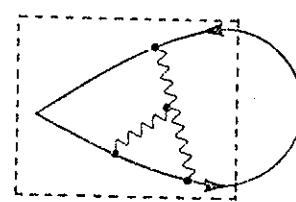


fig. 4.3

Tais divergências aparecem em todas as ordens de perturbação, mas elas não são difíceis de se lidar. Giambiagi, Bollini e Abud [4.3] mostraram, explicitamente, que se usarmos a regularização dimensional, as divergências lineares são automaticamente removidas. Neste trabalho também não aparecem essas divergências por esse motivo.

Outras divergências aparecem quando os vértices, exceto um, coalescem fig. (4.2). Essas divergências são logarítmicas e são removidas com a renormalização da constante de acoplamento. Neste capítulo, fizemos essa renormalização até a quarta ordem na constante de acoplamento usando a regularização dimensional. Há um outro tipo de divergências que são devidas à existência de possíveis pontas e interseções na curva C (fig. 4.3). Esse tipo de divergência continua sendo multiplicativamente renormalizável, isto é, existe um $Z(\gamma)$, onde gama é o ângulo formado pelas curvas que dão origem à ponta no ponto de intercessão, tal que, $W_R(C_\gamma) = Z(\gamma) W(C)$. Onde $W_R(C_\gamma)$ é o loop de Wilson renormalizado e $Z(\gamma)$ não depende de nenhuma outra característica da curva C que não seja o ângulo γ .

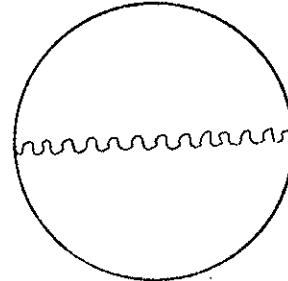
O cálculo perturbativo do loop de Wilson em segunda ordem foi feito por Giambiagi, Bollini e Abud, que obtiveram resultados finitos em quatro dimensões para curvas lisas. Em quarta ordem, no entanto, aparecem divergências, como já foi dito. A seguir renormalizamos o loop de Wilson em quarta ordem usando a regularização dimensional.

4.2 - CÁLCULO DOS DIAGRAMAS

No capítulo anterior deduzimos as regras de Feynman e obtivemos as expressões dos diagramas da teoria até a quarta ordem.

4.2.1 - DIAGRAMA DE SEGUNDA ORDEM

Nessa ordem temos a expressão (3.39):



$$G_2 = -\frac{g^2}{2!} \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2}) \left[d^\nu_k \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) dx_1^{\mu_1} dx_2^{\mu_2} e^{ik(x_1-x_2)} D_{\mu_1 \mu_2}^{a_1 a_2}(k), \quad (4.1)$$

$$\text{onde } D_{\mu_1 \mu_2}^{a_1 a_2}(k) = \delta^{a_1 a_2} D_{\mu_1 \mu_2}(k). \quad (4.2)$$

Substituindo (4.2) em (4.1) e usando a propriedade $\text{Tr } \lambda^a \lambda^b = 2\delta^{ab}$, temos

$$\begin{aligned} G_2 &= -g^2 n \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) dx_1^{\mu_1} dx_2^{\mu_2} \left[d^\nu_k e^{ik(x_1-x_2)} D_{\mu_1 \mu_2}(k) \right. \\ &\quad \left. = -g^2 n \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) dx_1^{\mu_1} dx_2^{\mu_2} D_{\mu_1 \mu_2}(x_1-x_2), \right. \quad (4.3) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} D_{\mu_1 \mu_2}(x_1-x_2) &= \left[d^\nu_k e^{ik(x_1-x_2)} D_{\mu_1 \mu_2}(k) \right] = \\ &= \int d^\nu_k \left\{ \frac{\delta_{\mu_1 \mu_2}}{k^2} - \frac{Ak_{\mu_1} k_{\mu_2}}{k^4} \right\} e^{ik(x_1-x_2)} \end{aligned}$$

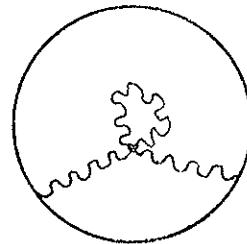
ou

$$D_{\mu_1 \mu_2}(x_1 - x_2) = \frac{\Gamma(\frac{v-2}{2})}{4\pi^{v/2}} \left\{ \delta_{\mu_1 \mu_2} |x_1 - x_2|^{2-v} - \right.$$

$$\left. - \frac{A \partial_{\mu_1}^{x_1} \partial_{\mu_2}^{x_2}}{2(v-4)} |x_1 - x_2|^{4-v} \right\}. \quad (4.4)$$

4.2.2 - GIRINO COM DUAS PERNAS EM QUARTA ORDEM

Mostramos, em seguida, que os diagramas dos girinos nesta ordem são nulos. A expressão para o gráfico do girino com duas pernas G_{4d} eq. (3.43), tem a forma



$$G_{4d} = - \frac{q^2}{2!} \frac{\text{Tr}(\lambda^{b_1} \lambda^{b_2})}{2} \left\{ \left\{ dx_1^v dx_2^v \right\} \right\} \int d^v p d^v q d^v r \times$$

$$\times e^{i(qx_2 - px_1)} D_{\nu_1 \mu_4}^{b_1 a_4}(p) D_{\nu_2 \mu_1}^{b_2 a_1}(q) D_{\mu_3 \mu_2}^{a_3 a_2}(r) \times$$

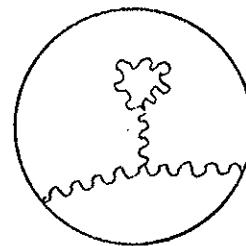
$$\times v_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}^{a_1 a_2 a_3 a_4}(-q, r, -r, p). \quad (4.5)$$

Da expressão anterior podemos observar que a única dependência em r está no propagador $D_{\mu_3 \mu_2}^{a_3 a_2}(r)$, pois a dependência de r que deveria existir na função delta do vértice de quatro glúons desaparece porque o momentum r sai de uma e entra em outra perna dele. Então a dependência em r da integração fica

$$\int d^v r \left\{ \frac{\delta_{\mu_3 \mu_2}}{k^2} - \frac{A}{v} \frac{\delta_{\mu_3 \mu_2}}{k^2} \right\} = 0 \quad (4.6)$$

Usamos o fato de que a integral sem massa é nula, vide seção 2.5 e as relações (2.14). Portanto $G_4 d = 0$.

4.2.3 - CÁLCULO DO DIAGRAMA DO GIRINO COM UMA Perna



De 3.44 temos

$$G_{4e} = -\frac{3g^2}{8} \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2}) \left\{ \int dx_1^{\mu_1} dx_2^{\mu_2} \int d^v p d^v q d^v r d^v s \times \right. \\ \times e^{i(qx_2 - px_1)} D_{\mu_1 v_1}^{a_1 b_1}(p) D_{\mu_2 v_2}^{a_2 b_2}(q) D_{v_3 \rho_3}^{b_3 c_3}(r) D_{\rho_1 \rho_2}^{c_1 c_2}(s) \times \\ \times V_{v_1 v_2 v_3}^{b_1 b_2 b_3}(p, -q, -r) V_{\rho_1 \rho_2 \rho_3}^{c_1 c_2 c_3}(-s, s, r). \quad (4.7)$$

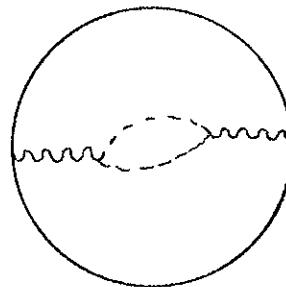
Nesse caso a dependência em s é responsável pela anulação da integral. O vértice V depende linearmente de s , portanto temos integrais do tipo

$$\int d^v s \frac{s_{\rho_i}}{s^2} \quad \text{e} \quad \int d^v s \frac{s_{\rho_i} s_{\rho_j} s_{\rho_k}}{s^4}. \quad (4.8)$$

Ambas as integrais se anulam por simetria, portanto

$$G_{4e} = 0. \quad (4.9)$$

4.2.4 - CÁLCULO DO DIAGRAMA COM FANTASMAS



Este é o diagrama G_{4C} (expressão (3.42)):

$$\begin{aligned}
 G_{4C} = & \frac{g^2}{2} \text{Tr}(\lambda^{d_1} \lambda^{d_2}) \left\langle \left\langle dx_1^{\lambda_1} dx_2^{\lambda_2} \right\rangle \right\rangle d^v p d^v q d^v r d^v s \times \\
 & \times e^{(qx_2 - px_1)} D_{\lambda_1 \mu_1}^{d_1 a_1}(p) D_{\mu_2 \lambda_2}^{a_2 d_2}(q) V_{\mu_1}^{c_1 a_1 b_1}(-r, p, s) \times \\
 & \times V_{\mu_2}^{b_2 a_2 c_2}(-s, -q, r) G^{c_1 c_2}(r) G^{b_1 b_2}(s). \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

Substituindo os propagadores e os vértices por suas expressões dadas no Capítulo 3 e utilizando as relações (4.21) temos

$$\begin{aligned}
 G_{4C} = & ngC_2 \left\langle \left\langle dx_1^{\lambda_1} dx_2^{\lambda_2} \right\rangle \right\rangle d^v p d^v q d^v r d^v s e^{i(qx_2 - px_1)} \times \\
 & \times \frac{1}{(2\pi)^v} \left\{ \frac{\delta_{\lambda_1 \mu_1}}{p^2} - \frac{A p_{\lambda_1} p_{\mu_1}}{p^4} \right\} \frac{1}{(2\pi)^v} \left\{ \frac{\delta_{\mu_2 \lambda_2}}{q^2} - \frac{A q_{\mu_2} q_{\lambda_2}}{q^4} \right\} \times \\
 & \times (-1) g(2\pi)^v r_{\mu_1} \delta(-r+p+s) (-1) g(2\pi)^v s_{\mu_2} \delta(-s-q+r) \times \\
 & \times \frac{(-i)}{(2\pi)^v r^2} \frac{(-i)}{(2\pi)^v s^2}. \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

Multiplicando os termos e eliminando aqueles que contêm p_{λ_1} ou q_{λ_2} , uma vez que

$$\left\{ \int dx_1^{\lambda_1} p_{\lambda_1} e^{-ipx_1} = 0 \right. \quad \text{e} \quad \left. \int dx_2 q_{\lambda_2} e^{iqx_2} = 0 \right. . \quad (4.12)$$

Com isso obtemos,

$$G_{4C} = \frac{g^4 n C_2}{(2\pi)^{2v}} \left\{ \int \int dx_1^{\lambda_1} dx_2^{\lambda_2} \left[\frac{d^v p d^v q d^v r d^v s}{p^2 q^2 r^2 s^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \delta(p+s-r) \delta(r-s-q) r_{\lambda_1} s_{\lambda_2} e^{-ipx_1 + iqx_2} \right] \right\}. \quad (4.13)$$

Integrando em r temos

$$G_{4C} = \frac{g^4 n C_2}{(2\pi)^{2v}} \left\{ \int \int dx_1^{\lambda_1} dx_2^{\lambda_2} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{d^v p d^v q d^v s s_{\lambda_2} (p+s)_{\lambda_1} e^{-ipx_1 + iqx_2} \delta(p-q)}{p^2 q^2 s^2 (p+s)^2} \right] \right\}. \quad (4.14)$$

Integrando em q e em s , usando a fórmula 3 do apêndice A resulta

$$G_{4C} = \frac{n g^4 C_2}{(2\pi)^{2v}} \left\{ \int \int dx_1^{\lambda_1} dx_2^{\lambda_2} \left[d^v p \frac{e^{ip(x_2 - x_1)}}{p^4} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\pi^{v/2} \delta_{\lambda_1 \lambda_2} (p^2)^{\frac{v}{2}-1} \Gamma(2-\frac{v}{2}) \Gamma(\frac{v}{2}-1) \Gamma(\frac{v}{2}-1)}{4 \Gamma(v-2) (v-1)} \right] \right\}. \quad (4.15)$$

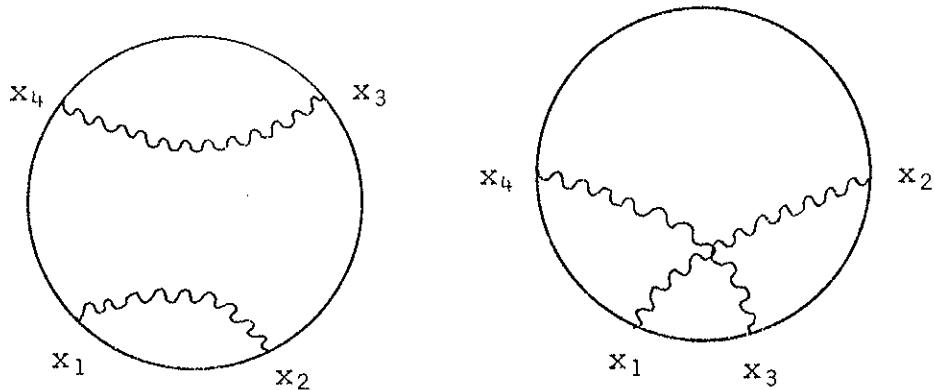
Finalmente, integrando em p , usando a integral 8 do apêndice A, segue

$$G_{4C} = \frac{n g^4 C_2 \Gamma(2 - \frac{v}{2}) \Gamma(\frac{v}{2} - 1) \Gamma(\frac{v}{2} - 1) \Gamma(v - 3)}{2^8 \pi^v (v-1) \Gamma(\frac{6-v}{2}) \Gamma(v-2)} \times$$

$$\times \oint \oint dx_1^{\lambda_1} dx_2^{\lambda_2} \frac{\delta^6 \lambda_1 \lambda_2}{|x_2 - x_1|^{2v-6}} . \quad (4.16)$$

4.2.5 - CÁLCULO DOS DIAGRAMAS DE DOIS GLÚONS NÃO INTERAGENTES

Esses são os diagramas G_{4f} e G_{4g} cujas expressões são respectivamente (3.45) e (3.46), reescritas a seguir:



ou

$$G_{4f} + G_{4g} = \frac{3}{4!} g^4 (\text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4}) +$$

$$+ \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4})) \delta^{a_1 a_2} \delta^{a_3 a_4} I, \quad (4.17)$$

onde

$$I = P \left\{ \left\{ \left\{ \left\{ dx_1^{\mu_1} dx_2^{\mu_2} dx_3^{\mu_3} dx_4^{\mu_4} D_{\mu_1 \mu_2}(x_1 - x_2) \times \right. \right. \right. \right. \right. \\ \times D_{\mu_3 \mu_4}(x_3 - x_4). \quad (4.18)$$

Seja C o coeficiente de I da expressão (4.17). Contraindo os índices internos temos

$$C = \frac{3}{4!} g^4 (\text{Tr } \lambda^{a_1} \lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_3}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_1} \lambda^{a_3}). \quad (4.19)$$

Subtraindo e somando $\text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_3})$ entre os parênteses da equação (4.19), podemos escrever

$$C = \frac{3}{4!} g^4 (2\text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_3}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} [\lambda^{a_3}, \lambda^{a_1}] \lambda^{a_3})). \quad (4.20)$$

Com as relações,

$$\text{Tr}(\lambda^a \lambda^b) = 2\delta^{ab},$$

$$t^{abc} \text{Tr}(\lambda^a \lambda^b \lambda^c) = 2\text{in}C_2,$$

$$[\lambda^a, \lambda^b] = i t^{abc} \lambda^c, \quad (4.21)$$

$$\{\lambda^a, \lambda^b\} = i d^{abc} \lambda^c,$$

$$t^{abc} t^{abd} = C_2 \delta^{cd},$$

obtemos

$$C = \frac{3}{4!} g^4 (2 \times 4n - 4nC_2), \quad (4.22)$$

onde C_2 é a constante de Casimir quadrática. Substituindo C em (4.17), obtemos

$$\begin{aligned} G_{4f} + G_{4g} &= n \left[-g^2 \left\langle \left\langle dx_1^\mu \ dx_2^\nu D_{\mu\nu}(x_1 - x_2) \right\rangle \right\rangle^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{ng^4 C_2}{2} \left\langle \left\langle dx_1^{\mu_1} dx_2^{\mu_2} D_{\mu_1\mu_2}(x_1 - x_2) \times \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \int_{x_1}^{x_2} dx_3^{\mu_3} \int_{x_2}^{x_1} dx_4^{\mu_4} D_{\mu_3\mu_4}(x_3 - x_4) \right. \right. . \quad (4.23a) \end{aligned}$$

Neste ponto devemos observar que o primeiro termo do lado direito da expressão (4.23a) é a parte abeliana da teoria. Somando todos esses termos abelianos que aparecem em todas as ordens temos

$$n e^{-g^2} \left\langle \left\langle dx_1^{\mu_1} dx_2^{\mu_2} D_{\mu_1\mu_2}(x_1 - x_2) \right\rangle \right\rangle , \quad (4.23b)$$

que é a expressão exata para a média do loop de Wilson nas teorias abelianas.

A expressão (4.23b) apresenta apenas divergências lineares, no caso de curvas lisas, que são eliminadas pela regularização dimensional, portanto esse termo não é levado em conta na renormalização da carga que tem origem nas divergências logarítmicas.

Em ordens superiores também aparecem termos que são produtos das expressões dos diagramas irreduutíveis e conexos de ordem inferior, (a conexão é ao longo da curva). De um modo geral [4.1], temos

$$\langle \text{Tr } W(C) \rangle = e^{\Sigma(C)}. \quad (4.24)$$

onde $\Sigma(C)$ é a soma sobre todos os diagramas conexos. Por tanto para a renormalização só nos interessa os diagramas conexos.

Para renormalizarmos a carga em quarta ordem, que é a finalidade deste capítulo, temos que escrever os diagramas dessa ordem em termos do de segunda. Devemos, então, integrar o segundo termo do lado direito da equação (4.23a) em x_3 e x_4 . De um modo geral não podemos integrar em x_3 e x_4 por causa da dependência dessa integral com a curva. Como será provado no capítulo 6, a parte divergente dessa integral não depende nem do arco nem da curva em quatro dimensões, sendo isso o suficiente para a renormalização. Em seguida calculamos a integral

$$G_{4g} = -\frac{nC^2 g^4}{2} \left\{ dx_1^{\mu_1} \left\{ dx_2^{\mu_2} D_{\mu_1 \mu_2}(x_1 - x_2) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \int_{x_1}^{x_2} dx_3^{\mu_3} \int_{x_2}^{x_2} dx_4^{\mu_4} D_{\mu_3 \mu_4}(x_3 - x_4) \right\} \right\}. \quad (4.25)$$

Para tanto necessitaremos do propagador no espaço de coordenadas que é dado por

$$D_{\mu\nu}(x-y) = \frac{\Gamma(\frac{v-2}{2})}{4\pi^{v/2}} \left\{ \delta_{\mu\nu} |x-y|^{2-v} - \frac{A \partial_x^\mu \partial_y^\nu |x-y|^{4-v}}{2(v-4)} \right\}. \quad (4.26)$$

Substituindo essa expressão na integral

$$I = \int_{x_1}^{x_2} dx_3^{\mu_3} \int_{x_2}^{x_1} dx_4^{\mu_4} D_{\mu_3\mu_4}(x_3 - x_4) \quad (4.27)$$

temos

$$\begin{aligned} I &= \int_{x_1}^{x_2} dx_3^{\mu_3} \int_{x_2}^{x_1} dx_4^{\mu_4} \frac{\Gamma(\frac{v-2}{2})}{4\pi^{v/2}} \left\{ \delta_{\mu_3\mu_4} |x_3 - x_4|^{2-v} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{A \partial_{\mu_3} x_3 \partial_{\mu_4} x_4 |x_3 - x_4|^{4-v}}{2(v-4)} \right\}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

O termo que contém A é uma diferencial exata pois é do tipo

$$\oint dx^\alpha \partial_\alpha f(x). \quad (4.29)$$

Fazendo a parametrização

$$x^\alpha = x^\alpha(\sigma), \quad 0 \leq \sigma \leq 2\pi \quad (4.30)$$

$$dx^\alpha = \frac{dx^\alpha(\sigma)}{d\sigma} d\sigma, \quad (4.31)$$

obtemos

$$\oint dx^\alpha \partial_\alpha f(x) = \int_0^{2\pi} d\sigma \frac{df(x)}{dx^\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} = \int_0^{2\pi} d\sigma \frac{df(x)}{d\sigma} = \\ = f(x(2\pi)) - f(x(0)). \quad (4.32)$$

Portanto podemos escrever

$$\frac{\Gamma(v-\frac{2}{2})}{4\pi^{v/2}} \int_{x_1}^{x_2} dx_3^{\mu_3} \int_{x_2}^{x_1} dx_4^{\mu_4} \frac{A}{2(v-4)} \partial_{\mu_3}^{x_3} \partial_{\mu_4}^{x_4} |x_3 - x_4|^{4-v} = \\ = - \frac{A \Gamma(\frac{v-2}{2}) |x_2 - x_1|^{4-v}}{4\pi^{v/2} (v-4)}. \quad (4.33)$$

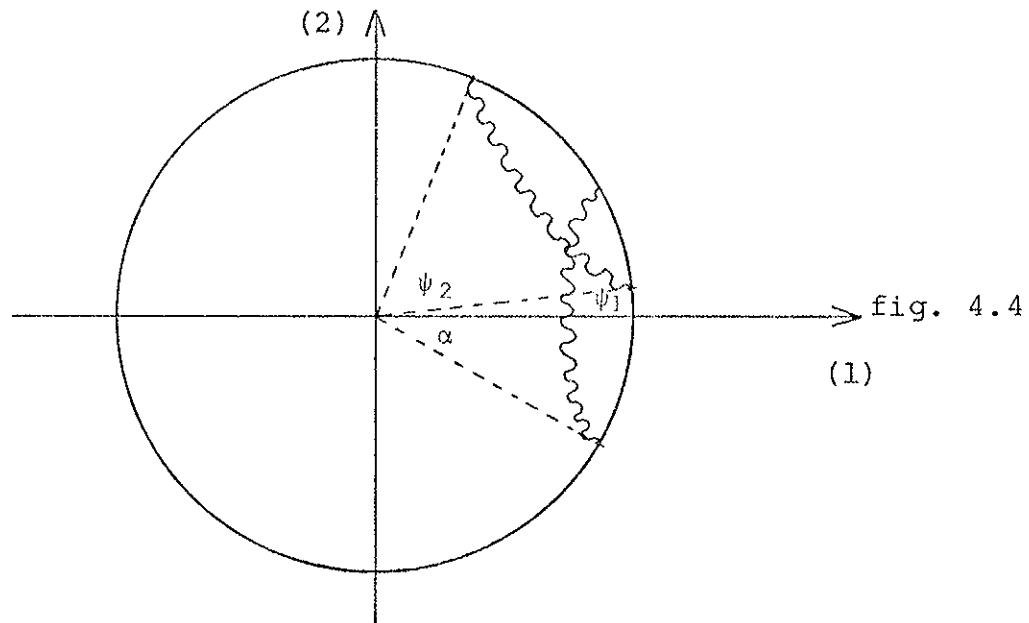
O outro termo da integral I é

$$I' = \frac{\Gamma(\frac{v-2}{2})}{4\pi^{v/2}} \delta_{\mu_3 \mu_4} \int_{x_1}^{x_2} dx_3^{\mu_3} \int_{x_2}^{x_1} dx_4^{\mu_4} |x_3 - x_4|^{2-v}. \quad (4.34)$$

Como será mostrado no capítulo 5 a parte divergente dessa integral não depende nem do arco nem da curva, por esse motivo, portanto, podemos integrar sobre uma circunferência sem perda de generalidade. Fazendo a mudança de variáveis

$$x_3^1 = R \cos(\psi_1), \\ x_3^2 = R \sin(\psi_1), \\ x_4^1 = R \cos(\psi_2), \\ x_4^2 = R \sin(\psi_2), \quad (4.35)$$

onde R é o raio da circunferência. Os ângulos ψ_1 e ψ_2 são medidos a partir do eixo (1), vide fig. 4.4, para os pontos x_3 e x_4 respectivamente.



Substituindo as relações (4.35) na equação (4.34), temos

$$I' = - \frac{\Gamma(\frac{v-2}{2}) 2^{2-v} R^{4-v}}{8\pi^{v/2}} \left\{ \int_{-\alpha}^{2\pi-\alpha} d\psi_2 \times \right. \\ \left. \times \left[\int_{-\alpha}^{\alpha} d\psi_1 \left[\sin^2 \left(\frac{\psi_1 - \psi_2}{2} \right) \right]^{\frac{2-v}{2}} - 2 \int_{-\alpha}^{\alpha} d\psi_1 \left[\sin^2 \left(\frac{\psi_1 - \psi_2}{2} \right) \right]^{\frac{4-v}{2}} \right] \right\}. \quad (4.36)$$

onde α é a metade do ângulo subentendido pelo arco entre x_1 e x_2 . O eixo (1) pode sempre ser colocado simetricamente com relação a x_1 e x_2 , com a finalidade de facilitar os cálculos. No capítulo seguinte mostramos que o termo da equação (4.36) que gera um polo em $v=4$ é aquele cujo expoente é $\frac{v-2}{2}$. Seja I'' a integral (4.36) sem o segundo termo do

lado direito. Este termo nos dá um resultado finito, sendo portanto desnecessário considerá-lo. Então, temos

$$I'' = - \frac{\Gamma(\frac{v-2}{2}) 2^{2-v} R^{4-v}}{8\pi^{v/2}} \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} d\psi_1 \left[\sin^2 \left(\frac{\psi_1 - \psi_2}{2} \right) \right]^{\frac{2-v}{2}}. \quad (4.37)$$

Efetuando a mudança de variável

$$x = \sin^2 \left(\frac{\psi_1 - \psi_2}{2} \right) \cdot dx = \{\pm\} \sqrt{x} \sqrt{1-x} d\psi_1 \begin{cases} \psi_1 > \psi_2 \\ \psi_1 < \psi_2 \end{cases}. \quad (4.38a)$$

Integrando em ψ_1 temos

$$I'' = - \frac{\Gamma(\frac{v-2}{2}) 2^{2-v} R^{4-v}}{8\pi^{v/2}} \int_{\alpha}^{2\pi-v} d\psi_2 \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\sin^2 \left(\frac{\alpha - \psi_2}{2} \right)} dx \frac{x^{\frac{1-v}{2}}}{\sqrt{1-x}} + \\ + \int_0^{\sin^2 \left(\frac{\alpha - \psi_2}{2} \right)} dx \frac{x^{\frac{1-v}{2}}}{\sqrt{1-x}} \end{array} \right\}. \quad (4.38b)$$

Integrando em x e em seguida mudando a variável

$$y = \sin^2 \left(\frac{\psi_2 - \alpha}{2} \right), \quad (4.38c)$$

$$dy = \{\pm\} \sqrt{y} \sqrt{1-y} d\psi_2 \begin{cases} \psi_2 - \alpha < \pi \\ \psi_2 - \alpha > \pi \end{cases}$$

em uma delas e

$$y = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\psi_2 + \alpha}{2}\right) \quad (4.38d)$$

$$dy = \{\pm\} \sqrt{y} \sqrt{1-y} \left\{ 2\pi > \frac{\psi_2 + \alpha}{2} > \pi \right\}$$

na outra. Temos

$$\begin{aligned} I'' &= -\frac{\Gamma(\frac{v-2}{2}) 2^{2-v} R^{4-v}}{8\pi^{v/2}} \left[\frac{2}{3-v} \int_0^1 dy \frac{y^{\frac{2-v}{2}}}{(1-y)^{1/2}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3-v}{2}; \frac{5-v}{2}; y\right) \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{1}{3-v} \int_0^{\operatorname{sen}^2(\alpha)} dy \frac{y^{\frac{2-v}{2}}}{(1-y)^{1/2}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3-v}{2}; \frac{5-v}{2}; y\right) \right] \end{aligned} \quad (4.39)$$

Substituindo a expressão

$${}_2F_1(a, b; c; y) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{y^n}{n!}, \quad (4.40)$$

em (4.39) e integrando em y , obtemos

$$\begin{aligned} I'' &= -\frac{\Gamma(\frac{v-2}{2}) 2^{2-v} R^{4-v}}{8\pi^{v/2} (3-v)} \sum_{n=0}^{\infty} \times \\ &\quad \times \left[\frac{2 \Gamma(\frac{5-v}{2}) \Gamma(\frac{1}{2}+n) \Gamma(\frac{3-v}{2}+n) \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{4-v}{2}+n)}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{3-v}{2}) \Gamma(\frac{5-v}{2}+n)n! \Gamma(\frac{5-v}{2}+n)} \right. \\ &\quad \times \frac{\Gamma(\frac{5-v}{2}) \Gamma(\frac{1}{2}+n) \Gamma(\frac{3-v}{2}+n)}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{3-v}{2}) \Gamma(\frac{5-v}{2}+n)n!} \frac{\frac{4-v}{2}+n}{(\operatorname{sen}^2(\alpha))^{\frac{4-v}{2}+n}} \times \\ &\quad \times \left. {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{4-v}{2}+n; \frac{6-v}{2}+n; \operatorname{sen}^2(\alpha)\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Observando a expressão anterior, notamos que para $n \neq 0$ e $v < 4$, não há singularidades. Então o que nos interessa é o termo da série com $n=0$, ou seja

$$I''' = - \frac{\Gamma(\frac{v-2}{2}) 2^{4-v} R^{4-v}}{8\pi^{v/2} (3-v)} \left[\frac{2\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{4-v}{2})}{\Gamma(\frac{5-v}{2})} - \frac{(\sin^2(\alpha))^{\frac{4-v}{2}}}{\frac{4-v}{2}} \right]. \quad (4.42)$$

Quando $v \rightarrow 4$ o resíduo independe de α , como pode ser visto em (4.42), portanto podemos escolher $\alpha = \pi/2$ e obter

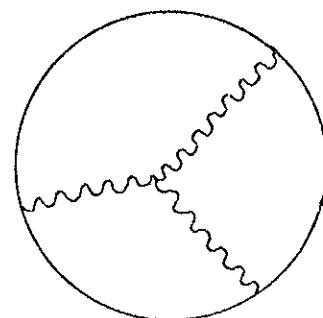
$$I''' = \frac{\Gamma(\frac{v-4}{2}) 2}{8\pi^2 (3-v)}. \quad (4.43)$$

Finalmente, temos para a parte divergente do diagrama $G'_4 g$

$$G'_4 g = \frac{nC_2 g^4}{16\pi^2} \Gamma(\frac{v-4}{2}) \left\{ A - \frac{2}{3-v} \right\} \left(\int dx_1^{\mu_1} dx_2^{\mu_2} \times \right. \\ \left. \times D_{\mu_1 \mu_2}(x_1 - x_2) |x_1 - x_2|^{4-v} \right), \quad (4.44)$$

onde usamos o fato de que para $\alpha = \pi/2$ o raio da circunferência é dado por $R = \frac{1}{2} |x_1 - x_2|$.

4.2.6 - CÁLCULO DO DIAGRAMA COM UM VÉRTICE DE TRÊS GLÚONS



A expressão para esse diagrama é a (3.40), que está repetida abaixo.

$$\begin{aligned}
 G_{4a} = & -ip \frac{g^3}{3!} \text{Tr}(\lambda^a \lambda^b \lambda^c) \left\{ \left\{ \left\{ dx_1^\mu dx_2^\nu dx_3^\rho \times \right. \right. \right. \\
 & \times \int d^\nu p d^\nu q d^\nu r e^{-i(px_1 + qx_2 + rx_3)} v_{\mu' \nu' \rho'}^{a'b'c'}(p, q, r) \times \\
 & \times D_{\mu\mu'}^{aa'}(p) D_{\nu\nu'}^{bb'}(q) D_{\rho\rho'}^{cc'}(r). \tag{4.45}
 \end{aligned}$$

Usando as relações (3.20) e (3.28), que são as expressões para o vértice, propagadores e o traço das constantes de estrutura, obtemos

$$\begin{aligned}
 G_{4a} = & - \frac{g^4}{3!} p t^{abc} \text{Tr}(\lambda^a \lambda^b \lambda^c) \left\{ \left\{ \left\{ dx_1^\mu dx_2^\nu dx_3^\rho \times \right. \right. \right. \\
 & \times \int d^\nu p d^\nu q d^\nu r e^{-i(px_1 + qx_2 + rx_3)} \frac{1}{(2\pi)^\nu} \left\{ \frac{\delta_{\mu\mu'}}{p^2} - \right. \\
 & \left. \left. \left. - \frac{A p_\mu p_{\mu'}}{p^4} \right\} \frac{1}{(2\pi)^\nu} \left\{ \frac{\delta_{\nu\nu'}}{q^2} - \frac{A q_\nu q_{\nu'}}{q^4} \right\} \frac{1}{(2\pi)^\nu} \left\{ \frac{\delta_{\rho\rho'}}{r^2} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{A r_\rho r_{\rho'}}{r^4} \right\} \left\{ (p-r)_{\nu'} \delta_{\mu'\rho'} + (q-p)_{\rho'} \delta_{\mu'\nu'} + \right. \\
 & \left. \left. + (r-q)_{\mu'} \delta_{\nu'\rho'} \right\} \delta(p+q+r). \tag{4.46}
 \end{aligned}$$

O cálculo da expressão anterior é muito trabalhoso e extenso, devido a isso nós o efetuamos com o auxílio do programa SCHOONSCHIP, que foi escrito por Veltman com a finalidade de calcular diagramas de Feynman. Este programa está implantado no CDC do IEAv/CTA.

Por comodidade de programação, fizemos as seguintes alterações na expressão (4.29): trocamos os momenta pelos seus simétricos e os índices μ , ν , ρ , respectivamente por μ' , ν' , ρ' e vice-versa, ficando

$$\begin{aligned}
 G_{\mu a} = & \frac{g}{3!} p^a t^{abc} \text{Tr}(\lambda^a \lambda^b \lambda^c) \left\{ \left\{ \left\{ dx_1^{\mu'} dx_2^{\nu'} dx_3^{\rho'} \times \right. \right. \right. \right. \\
 & \times \left. \left. \left. \left. d^\nu p d^\rho q d^\mu r e^{i(px_1 + qx_2 + rx_3)} \left\{ \frac{\delta_{\mu\mu'}}{p^2} - \frac{A p_\mu p_{\mu'}}{p^4} \right\} \times \right. \right. \right. \\
 & \times \left. \left. \left. \left. \left\{ \frac{\delta_{\mu\mu'}}{q^2} - \frac{A q_\nu q_{\nu'}}{q^4} \right\} \left\{ \frac{\delta_{\rho\rho'}}{r^2} - \frac{A r_\rho r_{\rho'}}{r^4} \right\} \left\{ (p-q)_\rho \delta_{\mu\nu} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \left. \left. + (q-r)_\mu \delta_{\rho\nu} + (r-p)_\nu \delta_{\rho\mu} \right\} \right. \right. \right. \right. \quad (4.47)
 \end{aligned}$$

Como é de conhecimento geral não é comum, pelo menos atualmente, existir símbolos gregos em computador, portanto fizemos as mudanças μ' , ν' , ρ' , μ , ν , ρ por respectivamente UL, VL, RL, U, V, RO; o ν da dimensão foi substituído por T. No programa, a componente μ do vetor p é escrita na forma P(U), o produto escalar entre p e q é PDQ e a delta de Kronecker tem a forma D(U,V) = $\delta_{\mu\nu}$.

O programa que calcula (4.30) está na íntegra no apêndice B e contém comentários elucidativos. O símbolo CTM do programa vale

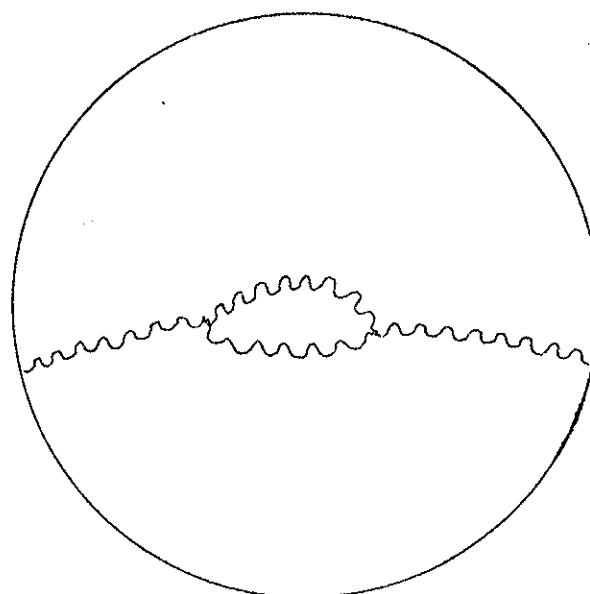
$$CTM = \frac{g^4}{3!} \delta(p+q+r)p^a t^{abc} \text{Tr}(\lambda^a \lambda^b \lambda^c). \quad (4.48)$$

A constante de estrutura t^{abc} e o gerador λ^a são representados por $T(A,B,C)$ e LA , respectivamente. Com esse programa obtivemos

$$\begin{aligned} G_{4a} &= \frac{g^4 n C_2 \Gamma(v-3) \Gamma(2-\frac{v}{2}) \Gamma(\frac{v}{2}-1) \Gamma(\frac{v}{2}-1)_A}{2^6 \pi^v \Gamma(\frac{6-v}{2}) \Gamma(v-2)} \times \\ &\times \left\{ 2 - \frac{13}{2} - \frac{1}{4} A v + A \right\} \times \\ &\times \oint \oint dx_1^\mu dx_2^\nu \delta_{\mu\nu} |x_2 - x_1|^{6-2v}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

4.2.7 - CÁLCULO DO DIAGRAMA DE DOIS VÉRTICES COM TRÊS GLÚONS

A expressão para esse diagrama é



ou

$$\begin{aligned}
 G_{4b} = & \frac{-g^2}{2!} \frac{\text{Tr}(\lambda^d \lambda^{d'})}{2} \left\langle \left\langle dx_1^\lambda dx_2^\gamma \right\rangle \right\rangle d^v p d^v q d^v r d^v s \times \\
 & \times e^{i(sx_1 - rx_2)} V_{\mu_1 \rho_1 v_1}^{a_1 c_1 b_1}(q, -s, -p) V_{\mu_2 v_2 \rho_2}^{a_2 b_2 c_2}(-q, p, r) \times \\
 & \times D_{\lambda \rho_1}^{dc_1}(s) D_{v_1 v_2}^{b_1 b_2}(p) D_{\mu_1 \mu_2}^{a_1 a_2}(q) D_{\rho_2 \gamma}^{c_2 d'}(r). \quad (4.51)
 \end{aligned}$$

Substituindo as expressões (3.20), (3.28) e (4.21) na expressão anterior temos

$$\begin{aligned}
 G_{4b} = & - \frac{g^4 n C_2}{2} \left\langle \left\langle dx_1^\lambda dx_2^\gamma \right\rangle \right\rangle d^v p d^v q d^v r d^v s e^{i(sx_1 - rx_2)} \times \\
 & \times (2\pi)^{2v} \delta(q-s-p) \delta(p+r-q) \left\{ (q+p)_{\rho_1} \delta_{\mu_1 v_1} + \right. \\
 & + (-s-q)_{v_1} \delta_{\rho_1 \mu_1} + (-p+s)_{\mu_1} \delta_{\rho_1 v_1} \left. \right\} \left\{ (-q-r)_{v_2} \delta_{\mu_2 \rho_2} + \right. \\
 & + (p+q)_{\rho_2} \delta_{\mu_2 v_2} + (r-p)_{\mu_2} \delta_{v_2 \rho_2} \left. \right\} \frac{1}{(2\pi)^{4v}} \times \\
 & \times \left\{ \frac{\delta_{\lambda \rho_1}}{s^2} - A \frac{s_\lambda s_\rho}{s^4} \right\} \left\{ \frac{\delta_{v_1 v_2}}{p^2} - A \frac{p_{v_1} p_{v_2}}{p^4} \right\} \\
 & \times \left\{ \frac{\delta_{\mu_1 \mu_2}}{q^2} - A \frac{q_{\mu_1} q_{\mu_2}}{q^4} \right\} \left\{ \frac{\delta_{\rho_2 \gamma}}{r^2} - A \frac{r_{\rho_2} r_\gamma}{r^4} \right\}. \quad (4.52)
 \end{aligned}$$

É conveniente, neste ponto, continuar o cálculo com a ajuda do SCHOONSCHIP, como foi feito na seção anterior. O cálculo se encontra no apêndice C. No programa fizemos as seguintes trocas: $\lambda_1, \mu_1, \mu_2, v_1, v_2, \rho_1, \rho_2, \gamma, v$, respectivamente por, L, U1, U2, V1, V2, R1, R2, GA, T. Representamos por CTM todas as constantes globais e algumas variáveis não usadas em uma determinada etapa. Inicialmente temos

$$CTM = - \frac{g^4 n C_2}{2(2\pi)^2 T} \delta(q-s-p) \delta(p+r-q). \quad (4.53)$$

Feito os cálculos temos

$$\begin{aligned} G_{4b} &= - \frac{g^4 n C_2 \Gamma(v-3) \Gamma(2-\frac{v}{2}) \Gamma(\frac{v}{2}-1) \Gamma(\frac{v}{2}-1)}{128\pi^v \Gamma(3-\frac{v}{2}) \Gamma(v-2)} \times \\ &\times \frac{6v-5}{2(v-1)} + A(2v-7) - A(1-\frac{v}{4}) \times \\ &\times \oint \oint dx_1^\mu dx_2^\nu |x_2 - x_1|^{6-2v} \delta_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

4.2.8 - RENORMALIZAÇÃO DA CARGA

Vamos reescrever os resultados dos diagramas não abelianos calculados nas seções anteriores.

$$\begin{aligned} G_{4g} &= \text{Diagrama circular com borda wiggly} = \frac{n C_2 g^4}{16\pi^{v/2}} \Gamma(\frac{v-4}{2}) \left\{ A - \frac{2}{3-v} \right\} \times \\ &\times \oint \oint dx^\sigma dy^\rho D_{\sigma\rho}(x-y) |x-y|^{4-v}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{4c} &= \text{Diagrama circular com uma curva wavy no interior} \\
 &= - \frac{n C_2 g^4 \Gamma(2 - \frac{v}{2}) \Gamma(\frac{v}{2} - 1) \Gamma(\frac{v}{2} - 1) \Gamma(v - 3)}{2^8 \pi^v \Gamma(3 - \frac{v}{2}) \Gamma(v - 2) (v - 1)} \times \\
 &\quad \times \oint \oint dx^\sigma dy^\rho \delta_{\sigma\rho} |x-y|^{6-2v}, \\
 G_{4a} &= \text{Diagrama circular com duas curvas wavy no interior} \\
 &= \frac{n C_2 g^4 \Gamma(2 - \frac{v}{2}) \Gamma(\frac{v}{2} - 1) \Gamma(\frac{v}{2} - 1) \Gamma(v - 3)}{2^6 \pi^v \Gamma(3 - \frac{v}{2}) \Gamma(v - 2)} \times \\
 &\quad \times \left\{ \left(2v - \frac{13}{2} \right) A + A^2 \left(\frac{v}{4} - 1 \right) \right\} \times \\
 &\quad \times \oint \oint dx^\sigma dy^\rho \delta_{\sigma\rho} |x-y|^{6-2v}, \\
 G_{4b} &= \text{Diagrama circular com três curvas wavy no interior} \\
 &= - \frac{n C_2 g^4 \Gamma(2 - \frac{v}{2}) \Gamma(\frac{v}{2} - 1) \Gamma(\frac{v}{2} - 1) \Gamma(v - 3)}{2^7 \pi^v \Gamma(3 - \frac{v}{2}) \Gamma(v - 2)} \times \\
 &\quad \times \left\{ \frac{6v-5}{2(v-1)} + (2v-7) A - \left(1 - \frac{v}{4} \right) A^2 \right\} \times \\
 &\quad \times \oint \oint dx^\sigma dx^\rho \delta_{\sigma\rho} |x-y|^{6-2v}. \quad (4.55)
 \end{aligned}$$

Onde x e y estão no lugar de x_1 e x_2 e ρ e σ são índices de Lorentz. Para dimensões diferentes de quatro não podemos exprimir os resultados dos diagramas G_{4a} , G_{4b} , G_{4c} em termos do propagador, desta forma concluimos que merece maior atenção tratar a renormalização em di

mensões espaço-temporais diferentes de 4. Fazendo o limite $v \rightarrow 4$ em (4.55), obtemos

$$G_{4a} + G_{4b} + G_{4c} + G_{4g} = \frac{nC_2 g^4}{\pi^2 (4-v)} \left\{ -\frac{19}{2^5 \times 3} - \frac{A}{2^4} + \frac{3A}{2^4} - \frac{1}{3 \times 2^5} - \right. \\ \left. - \frac{A}{8} - \frac{1}{4} \right\} \oint \oint dx^\sigma dy^\rho D_{\sigma\rho}(x-y) = -\frac{11}{24} \frac{nC_2 g^4}{\pi^2 (4-v)} \times \\ \times \oint \oint dx^\sigma dy^\rho D_{\sigma\rho}(x-y). \quad (4.56)$$

Somando esse resultado com o de segunda ordem (4.3), temos

$$G_2 + G_{4a} + G_{4b} + G_{4c} + G_{4g} = -ng^2 \left(1 + \frac{11C_2 g^2}{24\pi^2 (4-v)} \right) \times \\ \times \oint \oint dx^\sigma dy^\rho D_{\sigma\rho}(x-y) \quad (4.57)$$

Até o momento omitimos nas expressões uma constante dimensional μ . Isto é necessário pois devemos fazer cálculos perturbativos em parâmetros adimensionais. Portanto, nesses cálculos g deve ser entendido como sendo $g\mu^{\frac{v-4}{2}}$. Na expressão a seguir g_0 é a carga nua da teoria e g é a carga renormalizada. Finalmente temos

$$g^2 = \mu^{v-4} g_0^2 \left\{ 1 + \frac{11C_2 g_0^2 \mu^{v-4}}{24\pi^2 (4-v)} \right\}, \quad (4.58)$$

que é a expressão que dá a carga renormalizada da cromodinâmica quântica em quarta ordem.

CAPÍTULO 5

PROVA DA INDEPENDÊNCIA DO RESÍDUO EM RELAÇÃO AO ARCO E A CURVA E CÁLCULO DA HIPÉRBOLE EM SEGUNDA ORDEM

Neste capítulo mostramos que em quatro dimensões o resíduo que se obtém da integração do fator de fase quântico sobre uma curva aberta e lisa, não depende do arco nem da curva.

Em seguida calculamos este fator de fase para a hipérbole no gauge de Feynman.

5.1 - INDEPENDÊNCIA DO RESÍDUO EM RELAÇÃO À CURVA E AO ARCO

A divergência resultante da integração do fator de fase quântico, sobre a curva, se origina quando os pontos x e y estão próximos. Este fato pode ser observado no primeiro termo do propagador (eq. 5.1), que no limite $v \rightarrow 4$, tem a forma $1/|x-y|^2$. Por esse motivo só precisamos nos preocupar com pequenos arcos da curva. Neste caso podemos tratá-los como se fossem arcos de circunferência. A seguir calculamos em segunda ordem a integração mencionada anteriormente. O propagador no espaço de coordenadas tem a forma,

$$D_{\mu\nu}(x-y) = \frac{\Gamma(\frac{v-2}{2})}{4\pi^{v/2}} \left\{ \delta_{\mu\nu} |x-y|^{2-v} - \frac{A \partial_\mu^x \partial_\nu^y}{2(v-4)} |x-y|^{4-v} \right\}. \quad (5.1)$$

Para obter esse propagador no gauge de Feynman fazemos $A=0$. O nosso objetivo, a seguir, é calcular a integral

$$V(C) = \frac{\Gamma(\frac{v-2}{2})}{4\pi^{v/2}} \int_C dx^\mu dy^\nu \delta_{\mu\nu} |x-y|^{2-v}, \quad (5.2)$$

onde C é o arco de circunferência. Para esclarecer melhor, mostramos na fig. 5.1 o arco C simétrico com relação ao eixo (1)

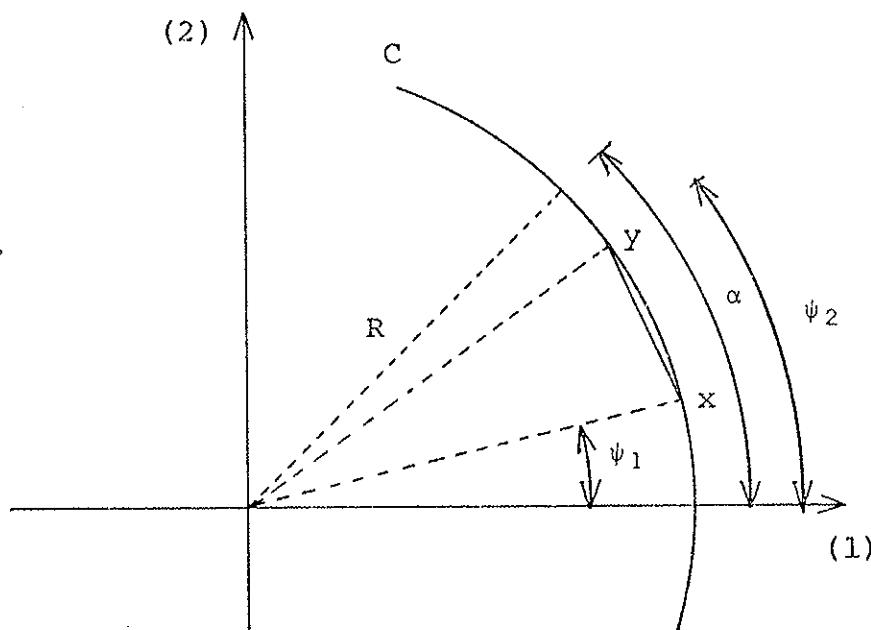


fig. 5.1

Os angulos α e $-\alpha$ nos dão às extremidades do arco C . Os pontos x e y ficam completamente determinados por R (raio do arco) e respectivamente pelos ângulos ψ_1 e ψ_2 , que são as novas variáveis. Então as componentes de x e y nas direções (1) e (2) que são x_1, x_2, y_1, y_2 são dadas por

$$\begin{aligned} x_1 &= R \cos(\psi_1), \\ x_2 &= R \sin(\psi_1), \\ y_1 &= R \cos(\psi_2), \\ y_2 &= R \sin(\psi_2), \end{aligned} \quad (5.3)$$

e suas diferenciais são

$$\begin{aligned}
 dx_1 &= -R \sin(\psi_1) d\psi_1, \\
 dx_2 &= R \cos(\psi_1) d\psi_1, \\
 dy_1 &= -R \sin(\psi_2) d\psi_2, \\
 dy_2 &= R \cos(\psi_2) d\psi_2,
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

substituindo as equações (5.3) e (5.4) na equação (5.2) e sabendo que $|x-y|^2 = 4R^2 \sin^2((\psi_1 - \psi_2)/2)$, temos

$$\begin{aligned}
 V(C) &= \frac{\Gamma(\frac{v-2}{2})}{4\pi^{v/2}} 2^{2-v} R^{4-v} \int_{-\alpha}^{\alpha} d\psi_1 \int_{-\alpha}^{\alpha} d\psi_2 \times \\
 &\times (\sin^2(\frac{\psi_1 - \psi_2}{2})^{\frac{2-v}{2}} \cos(\psi_1 - \psi_2)). \tag{5.5}
 \end{aligned}$$

Substituindo

$$a = \frac{\Gamma(\frac{v-2}{2}) 2^{2-v} R^{4-v}}{4\pi^{v/2}}, \tag{5.6}$$

e

$$\cos(\psi_1 - \psi_2) = 1 - 2 \sin^2(\frac{\psi_1 - \psi_2}{2}), \tag{5.7}$$

em (5.5) segue que

$$\begin{aligned}
 V(C) &= a \int_{-\alpha}^{\alpha} d\psi_1 \int_{-\alpha}^{\alpha} d\psi_2 (\sin^2(\frac{\psi_1 - \psi_2}{2}))^{\frac{2-v}{2}} - \\
 &- 2a \int_{-\alpha}^{\alpha} d\psi_1 \int_{-\alpha}^{\alpha} d\psi_2 (\sin^2(\frac{\psi_1 - \psi_2}{2}))^{\frac{4-v}{2}}. \tag{5.8}
 \end{aligned}$$

Fazendo as substituições

$$\frac{\sin(\frac{\psi_1 - \psi_2}{2})}{2} = \frac{2 \tan(\frac{\psi_1 - \psi_2}{4})}{1 + \tan^2(\frac{\psi_1 - \psi_2}{4})}, \quad (5.9)$$

$$t = \tan(\frac{\psi_1 - \psi_2}{2}) \quad e \quad (5.10)$$

$$dt = (1+t^2) \frac{d\psi_1}{4}, \quad (5.11)$$

resulta em

$$V(C) = a \int_{-\alpha}^{\alpha} d\psi_2 \left\{ \int_{-\tan(\frac{\alpha + \psi_2}{4})}^{\tan(\frac{\alpha - \psi_2}{4})} dt \frac{4}{1+t^2} \left[\frac{(-2t)}{1+t^2} \right]^{\frac{2-v}{2}} - \right.$$

$$\left. - 2 \int_{-\tan(\frac{\alpha + \psi_2}{4})}^{\tan(\frac{\alpha - \psi_2}{4})} dt \frac{4}{1+t^2} \left[\frac{(-2t)}{1+t^2} \right]^{\frac{4-v}{2}} \right\}. \quad (5.12)$$

Fazendo a mudança de variável $y = t^2$ na expressão anterior e reescrevendo as integrais em uma forma mais conveniente, obtemos

$$V(C) = \frac{2^{4-v} a}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} d\psi_2 \left\{ \int_0^{\tan^2(\frac{\alpha - \psi_2}{4})} dy \frac{\frac{1-v}{2}}{(1+y)^{\frac{3-v}{2}}} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^{\tan^2(\frac{\alpha-\psi_2}{4})} dy \frac{\frac{1-v}{2}}{(1+y)^{3-v}} - \\
 & - 8 \int_0^{\tan^2(\frac{\alpha-\psi_2}{4})} dy \frac{\frac{3-v}{2}}{(1+y)^{5-v}} - \\
 & - 8 \left. \int_0^{\tan^2(\frac{\alpha-\psi_2}{4})} dy \frac{\frac{3-v}{2}}{(1+y)^{3-v}} \right\}. \tag{5.13}
 \end{aligned}$$

A expressão anterior é par em ψ_2 . Usando este fato e integrando em y temos

$$\begin{aligned}
 V(C) &= 2^{4-v} a \int_0^\alpha d\psi_2 \left\{ \frac{(\tan^2(\frac{\alpha-\psi_2}{4}))^{\frac{3-v}{2}}}{\frac{3-v}{2}} {}_2F_1(3-v, \frac{3-v}{2}; \frac{5-v}{2}; -\tan^2(\frac{\alpha-\psi_2}{4})) + \right. \\
 &+ \frac{(\tan^2(\frac{\alpha+\psi_2}{4}))^{\frac{3-v}{2}}}{\frac{3-v}{2}} {}_2F_1(3-v, \frac{3-v}{2}; \frac{5-v}{2}; -\tan^2(\frac{\alpha+\psi_2}{4})) - \\
 &- 8 \frac{(\tan^2(\frac{\alpha-\psi_2}{4}))^{\frac{5-v}{2}}}{\frac{5-v}{2}} {}_2F_1(5-v, \frac{5-v}{2}; \frac{7-v}{2}; -\tan^2(\frac{\alpha-\psi_2}{4})) - \\
 &\left. - 8 \frac{(\tan^2(\frac{\alpha+\psi_2}{4}))^{\frac{5-v}{2}}}{\frac{5-v}{2}} {}_2F_1(5-v, \frac{5-v}{2}; \frac{7-v}{2}; -\tan^2(\frac{\alpha+\psi_2}{4})) \right\}. \tag{5.14}
 \end{aligned}$$

Fazendo as mudanças de variáveis

$$x = \tan\left(\frac{\alpha-\psi_2}{4}\right), \quad dx = -(1 + \tan^2\left(\frac{\alpha-\psi_2}{4}\right)) \frac{d\psi_2}{4}, \quad (5.15)$$

no primeiro e no terceiro termos da expressão (5.14) e

$$x = \tan\left(\frac{\alpha+\psi_2}{4}\right), \quad dx = (1 + \tan^2\left(\frac{\alpha+\psi_2}{4}\right)) \frac{d\psi_2}{4},$$

no segundo e no quarto termos, temos

$$\begin{aligned} V(C) &= 2^{7-v} a \left\{ \int_0^{\tan(\frac{\alpha}{2})} dx \frac{x^{3-v}}{(3-v)(1+x^2)} {}_2F_1(3-v, \frac{3-v}{2}; \frac{5-v}{2}; -x^2) - \right. \\ &\quad \left. - 8 \int_0^{\tan(\frac{\alpha}{2})} dx \frac{x^{5-v}}{(5-v)(1+x^2)} {}_2F_1(5-v, \frac{5-v}{2}; \frac{7-v}{2}; -x^2) \right\}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Como α é um ângulo pequeno, temos $x < 1$, e portanto podemos substituir a hipergeométrica pela sua expansão em série:

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}. \quad (5.17)$$

Resultando em

$$V(C) = 2^{7-v} a \left\{ \int_0^{\tan(\frac{\alpha}{2})} dx \frac{(x^2)^{\frac{3-v}{2}}}{(3-v)(1+x^2)} \left[1 + \frac{(3-v)(\frac{3-v}{2})}{\frac{5-v}{2}} (-x^2) + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{(3-v)(4-v)\left(\frac{3-v}{2}\right)\left(\frac{5-v}{2}\right)(-x^2)^2}{2!\left(\frac{5-v}{2}\right)\left(\frac{7-v}{2}\right)} \Bigg] - \\
 & - 8 \int_0^{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)} dx \frac{\frac{5-v}{2}}{(5-v)(1+x^2)} \left[1 + \frac{(5-v)\left(\frac{5-v}{2}\right)}{\left(\frac{7-v}{2}\right)} (-x^2) + \right. \\
 & \left. + \frac{(5-v)(6-v)\left(\frac{5-v}{2}\right)\left(\frac{7-v}{2}\right)(-x^2)^2}{2!\left(\frac{7-v}{2}\right)\left(\frac{9-v}{2}\right)} + \dots \right] \Bigg]. \tag{5.18}
 \end{aligned}$$

Integrando em x e levando em conta que a é dado por (5.6) temos

$$\begin{aligned}
 V(C) &= \frac{2^{8-v} \Gamma\left(\frac{v-2}{2}\right) R^{4-v}}{8\pi^{v/2}} \left\{ \frac{(\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right))^{\frac{4-v}{2}}}{(3-v)\left(\frac{4-v}{2}\right)} \times \right. \\
 &\quad \times {}_2F_1\left(1, \frac{4-v}{2}; \frac{6-v}{2}; -\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) + \\
 &+ \frac{-\frac{3-v}{2} (\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right))^{\frac{6-v}{2}}}{\left(\frac{5-v}{2}\right)\left(\frac{6-v}{2}\right)} {}_2F_1\left(1, \frac{6-v}{2}; \frac{8-v}{2}; -\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) + \dots \\
 &- \left. \frac{8(\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right))^{\frac{6-v}{2}}}{(5-v)\left(\frac{6-v}{2}\right)} {}_2F_1\left(1, \frac{6-v}{2}; \frac{8-v}{2}; -\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) + \dots \right\}. \tag{5.19}
 \end{aligned}$$

Nessa expressão somente o primeiro termo é divergente quando a dimensão (v) tende para quatro. Portanto é o termo que nos interessa. Nesse limite a hipergeométrica tem o valor

$$\lim_{v \rightarrow 4} {}_2F_1\left(1, \frac{4-v}{2}; \frac{6-v}{2}; -\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 1. \quad (5.20)$$

O resíduo de $V(C)$ no polo $v=4$ é dado por

$$\text{Res } V(C) = \lim_{v \rightarrow 4} \frac{(v-4) 2^{8-2v} \Gamma\left(\frac{v-2}{2}\right) R^{4-v} (\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right))^{\frac{4-v}{2}}}{4\pi^{v/2} (3-v) \frac{4-v}{2}} = \frac{1}{2\pi^2}, \quad (5.21)$$

Portanto $V(C)$ não depende de α para $v=4$. Ficando deste modo mostrado o que queríamos.

5.2 - CÁLCULO DE $V(C)$ PARA A HIPÉRBOLE

Nesta seção calculamos a parte finita e o resíduo para a hipérbole da figura abaixo.

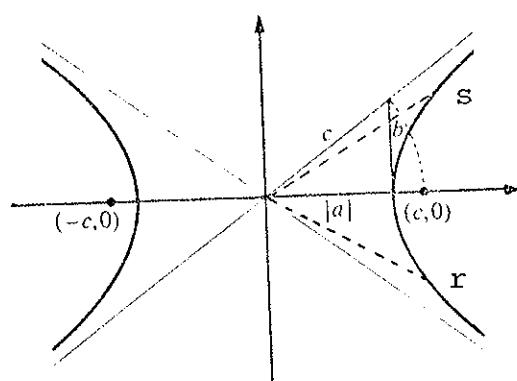


fig. 5.2

onde r e s são pontos da hipérbole cuja equação é dada por

$$\frac{r_x^2}{a^2} - \frac{r_y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{s_x^2}{a^2} - \frac{s_y^2}{b^2} = 1, \quad (5.22)$$

sendo r_x e r_y , s_x e s_y são as componentes de r e s nas direções x e y . A equação da hipérbole pode ser parametrizada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} r_x &= a \cosh(\alpha) & s_x &= a \cosh(\beta) \\ r_y &= b \sinh(\alpha) & s_y &= b \sinh(\beta) \end{aligned} \quad (5.23)$$

O nosso intuito é calcular $V(C)$ ou seja

$$V(C) = \iint dr^\mu ds^\nu D_{\mu\nu}(s-r). \quad (5.24)$$

A expressão para o propagador é dada pela eq. (5.1). No gauge de Feynman, temos

$$V(C) = \frac{\Gamma(\frac{v-2}{2})}{4\pi^{v/2}} \iint dr^\mu ds^\nu \delta_{\mu\nu} |r-s|^{2-v}. \quad (5.25)$$

Substituindo as equações (5.23) em (5.25), temos

$$\begin{aligned} V(C) &= \frac{\Gamma(\frac{v-2}{2})}{4\pi^{v/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha d\beta (a^2 \sinh(\alpha) \sinh(\beta) + \\ &\quad + b^2 \cosh(\alpha) \cosh(\beta)) [a^2 (\cosh(\beta) - \cosh(\alpha))^2 + \\ &\quad + b^2 (\sinh(\beta) - \sinh(\alpha))^2]^{\frac{2-v}{2}}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Mantendo constante a relação b/a , temos uma família de hiperbolas com as mesmas assíntotas. Substituindo as relações

$$\cosh(\beta) - \cosh(\alpha) = -2 \operatorname{senh}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

e (5.27)

$$\operatorname{senh}(\beta) - \operatorname{senh}(\alpha) = -2 \operatorname{senh}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

no fator entre colchetes da equação (5.26) e substituindo

$$\cos(\alpha) \cosh(\beta) = \frac{1}{2} [\cosh(\alpha+\beta) + \cosh(\alpha-\beta)]$$

e (5.28)

$$\operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{senh}(\beta) = \frac{1}{2} [\cosh(\alpha+\beta) - \cosh(\alpha-\beta)]$$

no primeiro fator temos

$$V(C) = \frac{\Gamma(\frac{v-2}{2})}{4\pi^{v/2}} (a^2)^{\frac{4-v}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha d\beta}{2} (\cos(\alpha+\beta) - \cosh(\alpha-\beta) +$$

$$+ \tan^2(\chi) (\cosh(\alpha+\beta) + \cosh(\alpha-\beta)) (4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right))^{\frac{2-v}{2}} \times$$

$$\times \left[\operatorname{senh}^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \tan^2(\chi) \cosh^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \right]^{\frac{2-v}{2}}, \quad (5.29)$$

onde

$$\tan(x) = \frac{b}{a} . \quad (5.30)$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$u = \frac{\alpha+\beta}{2} \quad e \quad v = \frac{\alpha-\beta}{2} , \quad (5.31)$$

obtemos

$$V(C) = \frac{\frac{2-v}{4}^2 \Gamma(\frac{v-2}{2}) (a^2)^{\frac{4-v}{2}} (\sec^2(x))^{\frac{2-v}{2}}}{4\pi^{v/2}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} du dv \times \right. \\ \times \frac{2-v}{\sec^2(x) \cosh(2u) (\sinh^2(2v))^{\frac{2-v}{2}} (\cosh^2(u) - \cosh^2(x))^{\frac{2-v}{2}}} + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} du dv (\tan^2(x) - 1) \cosh(2v) (\sinh^2(v))^{\frac{2-v}{2}} \times \\ \times \left. \frac{2-v}{(\cosh^2(u) - \cos^2(x))^{\frac{2-v}{2}}} \right\} \quad (5.32)$$

ou

$$V(C) = \frac{\frac{4-v}{4}^2 \Gamma(\frac{v-2}{2}) (a^2)^{\frac{4-v}{2}} (\sec^2(x))^{\frac{2-v}{2}}}{4\pi^{v/2}} \left\{ 2\tan^2(x) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} du dv \times \right. \\ \times \frac{2-v}{(\sinh^2(v))^{\frac{2-v}{2}} (\cos^2(u) - \cos^2(x))^{\frac{2-v}{2}}} +$$

$$\begin{aligned}
 & + 2 \sec^2(x) \left\{ \int_0^\infty \int_0^\infty du dv \frac{\frac{2-v}{2}}{\sinh^2(u) (\cosh^2(v))^2} \times \right. \\
 & \times \frac{\frac{2-v}{2}}{(\cosh^2(u) - \cos^2(x))^2} + 2(\tan^2(x)-1) \int_0^\infty \int_0^\infty du dv \times \\
 & \left. \times \frac{\frac{2-v}{2}}{\sinh^2(v)^2} \frac{\frac{2-v}{2}}{(\cosh^2(u) - \cos^2(x))^2} \right\}. \quad (5.33)
 \end{aligned}$$

Denominando o primeiro, o segundo e o terceiro termos respectivamente por A, B e C e chamando de a o fator multiplicativo podemos escrever

$$V(C) = a(A + B + C). \quad (5.34)$$

Para calcularmos cada uma das integrais, usamos a expressão [5.1]:

$$\int_0^\infty dx \frac{\sinh^{\mu-1}(x) \cosh^{\nu-1}(x)}{(\cosh^2(x)-\beta)^\rho} = \frac{{}_2F_1(\rho, \frac{1+\rho-\mu+\nu}{2}; \frac{1+\rho-\nu}{2}; \beta)}{2B(\frac{\mu}{2}, \frac{1+\rho-\mu+\nu}{2})}$$

$$2 \operatorname{Re}(\rho+1) > \operatorname{Re} \nu$$

$$2 \operatorname{Re}(\rho+1) > \operatorname{Re}(\mu+\nu). \quad (5.35)$$

Com isso obtemos

$$A = \frac{\tan^2(x) B(\frac{3-\nu}{2}, \frac{\nu-2}{2}) {}_2F_1(\frac{\nu-2}{2}, \frac{\nu-2}{2}; \frac{\nu-1}{2}; \cos^2(x))}{2B(\frac{1}{2}, \frac{\nu-2}{2})},$$

$$B = \frac{\sec^2(x) B(\frac{3-v}{2}, \frac{v-2}{2})}{2B(\frac{3}{2}, \frac{v-4}{2})} {}_2F_1(\frac{v-2}{2}, \frac{v-4}{2}; \frac{v-1}{2}; \cos^2(x))$$

e

$$C = \frac{(\tan^2(x)-1) B(\frac{5-v}{2}, \frac{v-4}{2})}{2B(\frac{1}{2}, \frac{v-2}{2})} {}_2F_1(\frac{v-2}{2}, \frac{v-4}{2}; \frac{v-1}{2}; \cos^2(x)) \quad (5.36)$$

O resíduo de $V(C)$ no polo $v=4$ vem da expressão C , isto é

$$\text{Res}_{v=4}(V(C)) = \frac{1}{4\pi^2} \left[\frac{(\tan^2(x)-1)}{(2\sec^2(x))} {}_2F_1(1, 1; \frac{3}{2}; \cos^2(x)) \right] \quad (5.37)$$

como

$${}_2F_1(1, 1, \frac{3}{2}; \cos^2(x)) = \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\sin(x) \cos(x)}, \quad (5.38)$$

temos

$$\begin{aligned} \text{Res}_{v=4}(V(C)) &= \frac{1}{8\pi^2} \cot(x) (\tan^2(x)-1) (\frac{\pi}{2} - x) = \\ &= \frac{(\pi-\alpha)}{16\pi^2} (\tan(\frac{\alpha}{2}) \cot(\frac{\alpha}{2})) = \frac{(\alpha-\pi)\cot(\alpha)}{8\pi^2}, \end{aligned} \quad (5.39)$$

onde $\alpha = 2x$.

No limite de a tendendo para 0, a hipérbole tende para as suas assíntotas. Como o resultado acima independente de a , concluímos que ele é válido também para a interseção de suas semiretas, no gauge de Feynman. O mesmo acontecendo com a parte finita.

A expressão a seguir é para se obter a parte finita de $V(C)$. Nos termos que não têm polo a parte finita é obtida fazendo v tender para 4. No termo que tem o polo que é o caso de C devemos multiplicá-lo por $v-4$, derivar com relação a v e finalmente fazer v tender a 4, como segue

$$\begin{aligned} \text{PF} [V(C)] &= \frac{1}{4\pi^2 \sec^2(x)} \left[\frac{\sin(x)}{2\cos^3(x)} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right] + \\ &+ \frac{d}{dv} \left(\frac{(v-4)^{\frac{4-v}{2}} \Gamma(\frac{v-2}{2}) (a^2)^{\frac{4-v}{2}} (\sec^2(x))^{\frac{2-v}{2}} (\tan^2(x)-1) B(\frac{5-v}{2}, \frac{v-4}{2})}{8\pi^{v/2} B(\frac{1}{2}, \frac{v-2}{2})} \right) \times \\ &\times {}_2F_1(\frac{v-2}{2}, \frac{v-2}{2}; \frac{v-1}{2}; \cos^2(x)) . \end{aligned} \quad (5.40)$$

CAPÍTULO 6

CÁLCULO DAS PARTES FINITAS PARA A CIRCUNFERÊNCIA

A finalidade deste capítulo é apresentar as partes finitas do loop de Wilson quântico, em quarta ordem, para a circunferência em quatro dimensões.

6.1 - INTEGRAL NECESSÁRIA PARA O CÁLCULO DOS DIAGRAMAS G_{4a} , G_{4b} , G_{4c} DO CAPÍTULO QUATRO

No capítulo quatro obtivemos os resultados dos cálculos do loop de Wilson, em quarta ordem, em função de integrações em um certo contorno. Se escolhermos um contorno simples como a circunferência podemos resolve-las.

Os resultados dos diagramas G_{4a} , G_{4b} , G_{4c} mostrado nas expressões (4.55), são dependentes da integral

$$\oint \oint dx^\sigma dy^\rho \delta_{\sigma\rho} |x-y|^{6-2v}. \quad (6.1)$$

Para integrarmos na circunferência de raio R , é conveniente escrever a posição dos pontos x e y da curva em coordenadas polares, como segue

$$\begin{aligned} x^1 &= R\cos(u), & dx^1 &= -R\sin(u)du, \\ x^2 &= R\sin(u), & dx^2 &= R\cos(u)du, \\ y^1 &= R\cos(v), & dy^1 &= -R\sin(v)dv, \\ y^2 &= R\sin(v), & dy^2 &= R\cos(v)dv, \end{aligned} \quad (6.2)$$

onde u e v são ângulos que estão mostrados na figura 6.1.

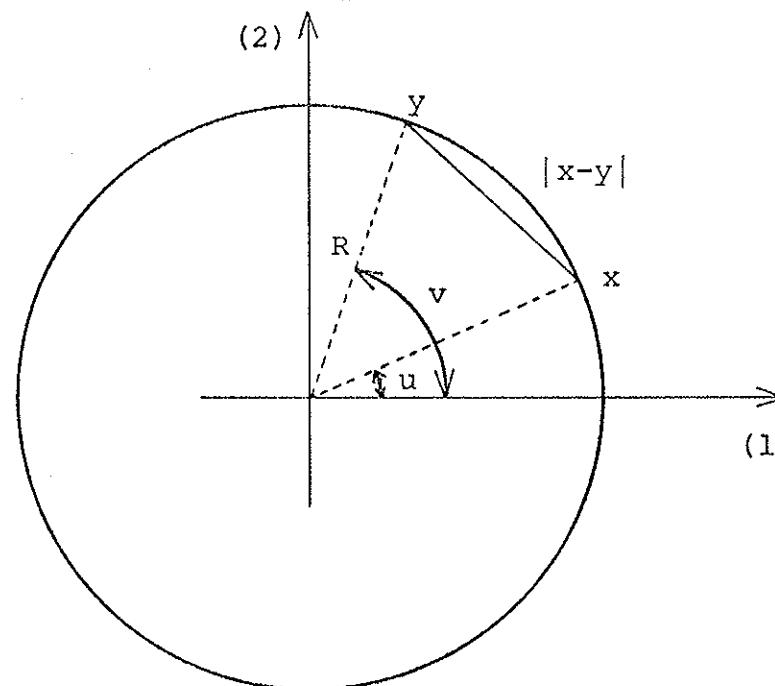


fig. 6.1

Fazendo a contração dos índices, substituindo a igualdade

$$|x-y|^2 = 4R^2 \sin^2 \left(\frac{v-u}{2} \right) \quad (6.3)$$

e as relações (6.2), na expressão (6.1) temos

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} dx^\sigma dy^\rho \delta_{\sigma\rho} |x-y|^{6-2v} = 4^{3-v} (R^2)^{4-v} \times \\ &\times \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} du dv \left[1 - 2\sin^2 \left(\frac{u-v}{2} \right) \right] \left[\sin^2 \left(\frac{u-v}{2} \right) \right]^{3-v}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$\alpha = \frac{u-v}{2},$$

e

(6.5)

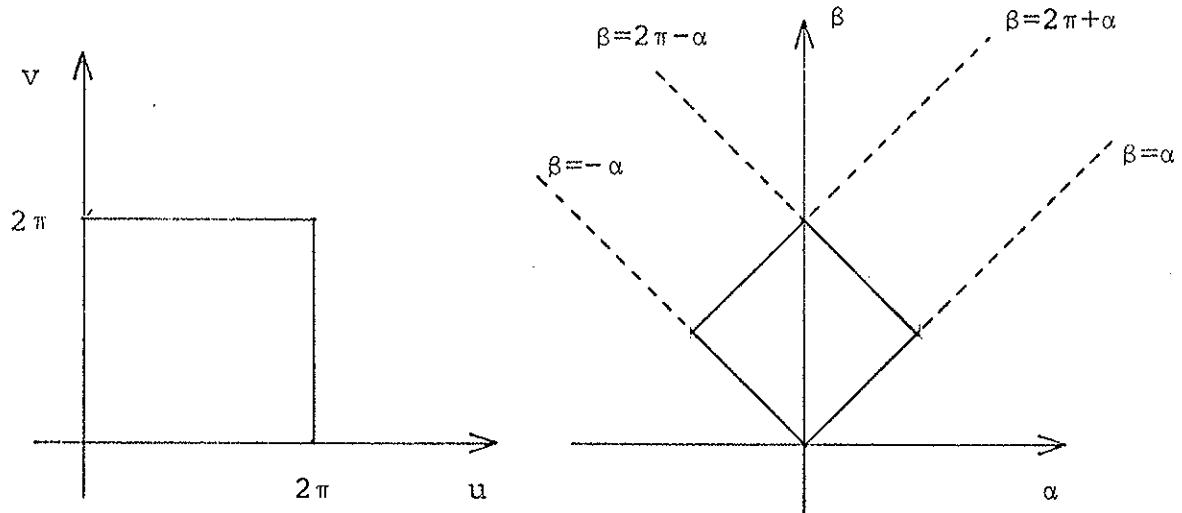
$$\beta = \frac{u+v}{2},$$

obtemos para o elemento de área

$$d\alpha d\beta = \frac{1}{2} du dv. \quad (6.6)$$

Com essa mudança de variáveis a nova região de integração passa a ser a que está indicada na fig. 6.2

fig. 6.2



Desta forma a integral fica

$$I = 2 \cdot 4^{3-v} (R^2)^{4-v} \left\{ \int_{-\pi}^0 d\alpha \int_{-\alpha}^{2\pi+\alpha} d\beta \left[(\sin^2(\alpha))^{3-v} - 2(\sin^2(\alpha))^{4-v} \right] + \right.$$

$$+ \int_0^{\pi} d\alpha \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} d\beta \left[(\sin^2(\alpha))^{3-v} - 2(\sin^2(\alpha))^{4-v} \right] \quad (6.7)$$

ou

$$I = 4^{4-v} (R^2)^{4-v} \int_0^{\pi} d\alpha (2\pi - 2\alpha) ((\sin^2(\alpha))^{3-v} - 2(\sin^2(\alpha))^{4-v}). \quad (6.8)$$

Integrando em α utilizando as igualdades [6.1]

$$\int_0^{\pi} dx \sin^{\mu}(x) = \pi^{1/2} \frac{\Gamma(\frac{\mu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\mu+2}{2})}$$

e

$$\int_0^{\pi} dx x \sin^{\mu}(x) = \frac{\pi^2}{2^{\mu+1}} \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma^2(\frac{\mu}{2} + 1)},$$

temos

$$I = 4^{4-v} (R^2)^{4-v} 2\pi \pi^{1/2} \left[\frac{\Gamma(\frac{7-2v}{2})}{\Gamma(4-v)} - 2 \frac{\Gamma(\frac{9-2v}{2})}{\Gamma(5-v)} \right]$$

$$= 4^{4-v} (R^2)^{4-v} 2\pi^2 \left[\frac{\Gamma(7-2v)}{2^{7-2v} \Gamma^2(4-v)} - \frac{2\Gamma(9-2v)}{2^{9-2v} \Gamma^2(5-v)} \right].$$

(6.10)

Utilizando a expressão [6.2]

$$\Gamma(2z) = (2\pi)^{-(1/2)} 2^{2z-(1/2)} \Gamma(z) \Gamma(z + \frac{1}{2}), \quad (6.11)$$

temos finalmente

$$I = \frac{4^{4-v} (R^2)^{4-v} \pi^{3/2} \Gamma(\frac{7-2v}{2}) (v-3)}{\Gamma(5-v)}. \quad (6.12)$$

6.2 - RESOLUÇÃO DA INTEGRAL DO DIAGRAMA $G_4 g$ SOBRE A CIRCUNFERÊNCIA

Na expressão apresentada nas equações (4.55) para o diagrama $G_4 g$ só contém a parte divergente; sendo a nossa intenção apresentar uma expressão para a parte finita, não podemos partir dessa. O nosso ponto de partida é a expressão (4.25), repetida abaixo,

$$G_4' g = - \frac{nC_2 g^4}{2} \left\{ dx_1^{\mu_1} \left\{ dx_2^{\mu_2} D_{\mu_1 \mu_2} (x_1 - x_2) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \int_{x_1}^{x_2} dx_3^{\mu_3} \int_{x_2}^{x_1} dx_4^{\mu_4} D_{\mu_3 \mu_4} (x_3 - x_4) \right. \right. . \quad (6.13a)$$

Esta expressão é a contribuição não-abeliana do diagrama $G_4 g$. Substituindo o propagador, no espaço de coordenadas dado por (5.1), na expressão acima resulta

$$G_4' g = - \frac{nC_2 g^4}{2} \left\{ dx_1^{\mu_1} \left\{ dx_2^{\mu_2} D_{\mu_1 \mu_2} (x_1 - x_2) \times \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \times \int_{x_1}^{x_2} dx_3^{\mu_3} \int_{x_2}^{x_1} dx_4^{\mu_4} \frac{\Gamma(\frac{v-2}{2})}{4\pi^{v/2}} \delta_{\mu_3 \mu_4} |x_3 - x_4|^{2-v} + \\
 & + \frac{nC_2 g^4 A \Gamma(\frac{v-4}{2})}{32\pi^{v/2}} \left\{ dx_1^{\mu_1} \left\{ dx_2^{\mu_2} D_{\mu_1 \mu_2}(x_1 - x_2) \right. \right. \\
 & \times \left. \int_{x_1}^{x_2} dx_3^{\mu_3} \int_{x_2}^{x_1} dx_4^{\mu_4} \partial_{\mu_3}^{x_3} \partial_{\mu_4}^{x_4} |x_3 - x_4|^{4-v} \right. . \quad (6.13b)
 \end{aligned}$$

Vamos chamar o primeiro termo da expressão (6.13b) de J . O segundo termo pode ser integrado em x_3 e x_4 . Com isso obtemos para a expressão (6.13b)

$$G'_4 g = J + \frac{nC_2 g^4 A \Gamma(\frac{v-4}{2})}{16\pi^{v/2}} \left\{ \int dx^\mu dy^\nu D_{\mu\nu}(x-y) |x-y|^{4-v} \right\}. \quad (6.14)$$

ou

$$G'_4 g \equiv J + K. \quad (6.15)$$

6.3 - CÁLCULO DAS INTEGRAIS DA EXPRESSÃO K

Substituindo em K a expressão do propagador obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
 K = & \frac{nC_2 g^4 A \Gamma(\frac{v-4}{2}) \Gamma(\frac{v-2}{2})}{64\pi^v} \left\{ \int dx^\mu dy^\nu \left\{ \delta_{\mu\nu} |x-y|^{2-v} - \right. \right. \\
 & - \frac{A [\partial_\mu^x \partial_\nu^y |x-y|^{4-v}] |x-y|^{4-v}}{2(v-4)} \left. \right. . \quad (6.16)
 \end{aligned}$$



Para calcular a integral da expressão K, sobre a circunferência, é conveniente parametrizar os vetores posição x e y. Como podemos escolher o sistema de coordenadas de tal forma que a circunferência esteja centrada na origem do plano cartesiano (1) x (2), os vetores posição dos pontos na curva podem ser parametrizados como segue:

$$x(u) = R \cos(u) \hat{i} + R \sin(u) \hat{j}$$

$$\text{e} \quad (6.17)$$

$$y(v) = R \cos(v) \hat{i} + R \sin(v) \hat{j}.$$

onde R é o raio da circunferência, u e v são os parâmetros e \hat{i} , \hat{j} são os vetores unitários respectivamente nas direções (1) e (2). A figura 6.1 esclareceria melhor o significado dos símbolos. O primeiro termo da equação (6.16) foi integrado na seção 6.1. Substituindo o resultado (6.12) na expressão (6.16) obtemos

$$K = \frac{n C_2 g^4 \Gamma(\frac{v-2}{2}) \Gamma(\frac{v-4}{2}) (4R^2)^{4-v} \pi^{3/2} \Gamma(\frac{7-2v}{2}) (v-3) A}{64 \pi^v \Gamma(5-v)} -$$

$$- \frac{n C_2 g^4 \Gamma(\frac{v-2}{2}) \Gamma(\frac{v-4}{2}) A}{128 \pi^v (v-4)} \left\{ \int \int dx^\mu dy^\nu \left[\partial_\mu^X \partial_\nu^Y |x-y|^{4-v} \right] \times \right. \\ \left. \times |x-y|^{4-v} \right. . \quad (6.18)$$

Vamos denominar a integral em (6.18) por K' . Substituindo as relações (6.17) em K' , temos

$$K' = \int \int dx^\mu dy^\nu |x-y|^{4-v} \partial_\mu^X \partial_\nu^Y |x-y|^{4-v} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} du dv \left[4R^2 \sin^2 \left(\frac{u-v}{2} \right) \right]^{\frac{4-v}{2}} \frac{d^2}{du dv} \times \\
 &\times \left[4R^2 \sin^2 \left(\frac{u-v}{2} \right) \right]^{\frac{4-v}{2}} . \quad (6.19)
 \end{aligned}$$

Derivando a expressão acima e reduzindo os termos semelhantes, obtemos

$$\begin{aligned}
 K' = & - (4R^2)^{4-v} \frac{(v-4)}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} du dv \left[\sin^{6-2v} \left(\frac{u-v}{2} \right) (v-3) - \right. \\
 & \left. - \sin^{8-2v} \left(\frac{u-v}{2} \right) (v-4) \right] . \quad (6.20)
 \end{aligned}$$

Fazendo a transformação de variáveis (6.5) e tomando o cuidado de mudar a região de integração como mostra a figura 6.2 temos

$$\begin{aligned}
 K' = & - (v-4) (4R^2)^{4-v} \int_0^\pi d\alpha \int_0^{2\pi-\alpha} d\beta \left[(v-3) \sin^{6-2v}(\alpha) - \right. \\
 & \left. - (v-4) \sin^{8-2v}(\alpha) \right] . \quad (6.21)
 \end{aligned}$$

Para integrar a expressão anterior, usamos as integrais (6.9) e a fórmula de duplicação das funções gama, com isso obtemos

$$K' = - \frac{(v-4) \pi^{3/2} \Gamma(\frac{7-2v}{2}) (4R^2)^{4-v}}{\Gamma(4-v)} . \quad (6.22)$$

Substituindo esse resultado na expressão (6.18), obtemos finalmente a expressão

$$K = \frac{nC_2 g^4 \Gamma(\frac{v-2}{2}) \Gamma(\frac{v-4}{2}) \Gamma(\frac{7-2v}{2}) (4R^2)^{4-v} A}{64\pi^{v-\frac{3}{2}} \Gamma(5-v)} \left(v-3 - \frac{A(v-4)}{2}\right). \quad (6.23)$$

6.4 - CÁLCULO DA EXPRESSÃO J

A expressão J tem a forma

$$J = - \frac{nC_2 g^4 \Gamma(\frac{v-2}{2})}{8\pi^{\frac{v}{2}}} \left\{ \int dx_1^{\mu_1} dx_2^{\mu_2} D_{\mu_1 \mu_2}(x_1 - x_2) \times \right. \\ \left. \times \int_{x_1}^{x_2} dx_3^{\mu_3} \int_{x_2}^{x_1} dx_4^{\mu_4} \delta_{\mu_3 \mu_4} |x_3 - x_4|^{2-v} \right\}. \quad (6.24)$$

Analogamente ao que fizemos na seção anterior, vamos resolver essa integral sobre a circunferência de raio R centralizada na origem do plano cartesiano (1) x (2). Podemos escolher a orientação do eixo (1) de tal forma que os pontos x_1 e x_2 lhe sejam simétricos. Como está mostrado na fig. 6.3.

É conveniente fazer uma parametrização análoga à (6.17),

$$x_3 = R\cos(u)\hat{i} + R\sin(u)\hat{j} \quad (6.25)$$

e

$$x_4 = R\cos(v)\hat{i} + R\sin(v)\hat{j}.$$

Para melhor visualização das variáveis mencionadas veja a figura 6.3.

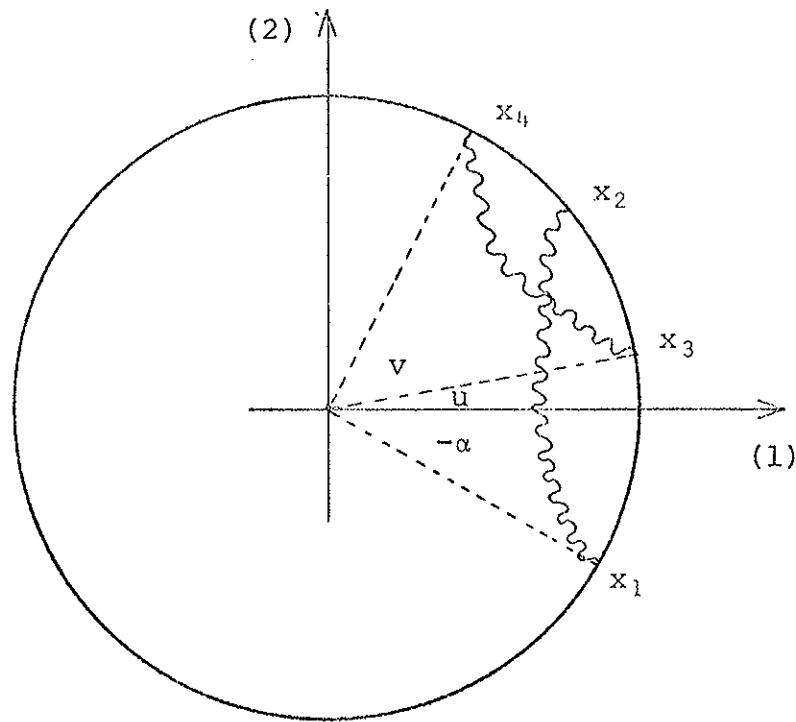


fig. 6.3

Vamos resolver as integrais em x_3 e x_4 . Seja por definição

$$J' \equiv \int_{x_1}^{x_2} dx_3^\mu \int_{x_2}^{x_1} dx_4^\nu \delta_{\mu\nu} |x_3 - x_4|^{2-\nu}, \quad (6.26)$$

onde o módulo indicado pode ser escrito em função de u e v como segue

$$|x_3 - x_4|^2 = 4R^2 \sin^2 \left(\frac{v-u}{2} \right). \quad (6.27)$$

A integral J' em termos das novas variáveis fica sendo

$$J' = 4^{\frac{2-v}{2}} (R^2)^{\frac{2-v}{2}} \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} dv \int_{-\alpha}^{\alpha} du \left[\sin^2 \left(\frac{v-u}{2} \right) \right]^{\frac{2-v}{2}} \times \\ \times \left[1 - 2 \sin \left(\frac{v-u}{2} \right) \right]. \quad (6.28)$$

Escrevendo os senos da integral (6.28) em função da tangente do arco metade, como segue

$$\sin \left(\frac{u-v}{2} \right) = \frac{2 \tan \left(\frac{u-v}{2} \right)}{1 + \tan^2 \left(\frac{u-v}{2} \right)} \quad (6.29)$$

e em seguida fazendo

$$t = \tan \left(\frac{u-v}{2} \right) \quad (6.30)$$

e

$$du = \frac{4dt}{1+t^2}, \quad (6.31)$$

temos

$$J' = 2^{2-v} R^{4-v} \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} dv \left\{ \int_{-\tan \left(\frac{\alpha+v}{4} \right)}^{\tan \left(\frac{\alpha-v}{4} \right)} du \frac{4dt}{1+t^2} \left[\frac{4t^2}{(1+t^2)^2} \right]^{\frac{2-v}{2}} - \right. \\ \left. - \int_{-\tan \left(\frac{\alpha+v}{4} \right)}^{\tan \left(\frac{\alpha-v}{4} \right)} du \frac{8dt}{(1+t^2)^2} \left[\frac{4t^2}{(1+t^2)^2} \right]^{\frac{4-v}{2}} \right\}. \quad (6.32)$$

ou

$$\begin{aligned}
 J' &= 6^{6-2v} R^{4-v} \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} dv \left\{ \int_0^{\tan(\frac{\alpha-v}{4})} dt \frac{(t^2)^{\frac{2-v}{2}}}{(1+t^2)^{3-v}} + \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^{\tan(\frac{\alpha+v}{4})} dt \frac{(t^2)^{\frac{2-v}{2}}}{(1+t^2)^{3-v}} - 8 \int_0^{\tan(\frac{\alpha-v}{4})} dt \frac{(t^2)^{\frac{4-v}{2}}}{(1+t^2)^{5-v}} - \right. \\
 &\quad \left. - 8 \int_0^{\tan(\frac{\alpha+v}{4})} dt \frac{(t^2)^{\frac{4-v}{2}}}{(1+t^2)^{5-v}} \right\}. \tag{6.33}
 \end{aligned}$$

Resolvendo as integrais acima, temos

$$\begin{aligned}
 J' &= 2^{5-2v} R^{4-v} \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} dv \left\{ \frac{2}{3-v} \left[\tan^2 \left(\frac{\alpha-v}{4} \right) \right]^{\frac{3-v}{2}} \times \right. \\
 &\quad \times {}_2F_1(3-v, \frac{3-v}{2}; \frac{5-v}{2}; -\tan^2(\frac{\alpha-v}{4})) + \frac{2}{3-v} \left[\tan^2 \left(\frac{\alpha+v}{4} \right) \right]^{\frac{3-v}{2}} \times \\
 &\quad \times {}_2F_1(3-v, \frac{3-v}{2}; \frac{5-v}{2}; -\tan^2(\frac{\alpha+v}{4})) - \frac{16}{5-v} \left[\tan^2 \left(\frac{\alpha-v}{4} \right) \right]^{\frac{5-v}{2}} \times \\
 &\quad \times {}_2F_1(5-v, \frac{5-v}{2}; \frac{7-v}{2}; -\tan^2(\frac{\alpha-v}{4})) - \frac{16}{5-v} \left[\tan^2 \left(\frac{\alpha+v}{4} \right) \right]^{\frac{5-v}{2}} \times \\
 &\quad \left. \times {}_2F_1(5-v, \frac{5-v}{2}; \frac{7-v}{2}; -\tan^2(\frac{\alpha+v}{4})) \right\}, \tag{6.34}
 \end{aligned}$$

fazendo a mudança de variáveis:

$$t = \tan^2 \left(\frac{\alpha-v}{4} \right) \text{ em duas delas e}$$

(6.35)

$$t = \tan^2 \left(\frac{\alpha+v}{4} \right) \text{ nas restantes,}$$

obtemos

$$\begin{aligned} J' &= 2^{7-2v} R^{4-v} \left\{ -\frac{1}{3-v} \int_0^{\cot^2(\alpha/2)} dt \frac{t^{\frac{2-v}{2}}}{1+t} \times \right. \\ &\quad \times {}_2F_1(3-v, \frac{3-v}{2}; \frac{5-v}{2}; -t) + \frac{8}{5-v} \int_0^{\cot^2(\alpha/2)} dt \frac{t^{\frac{4-v}{2}}}{1+t} \times \\ &\quad \times {}_2F_1(5-v, \frac{5-v}{2}; \frac{7-v}{2}; -t) + \frac{1}{3-v} \int_{\tan^2(\alpha/2)}^{\infty} dt \frac{t^{\frac{2-v}{2}}}{1+t} \times \\ &\quad \times {}_2F_1(3-v, \frac{3-v}{2}; \frac{5-v}{2}; -t) - \frac{8}{5-v} \int_{\tan^2(\alpha/2)}^{\infty} dt \frac{t^{\frac{4-v}{2}}}{1+t} \times \\ &\quad \left. \times {}_2F_1(5-v, \frac{5-v}{2}; \frac{7-v}{2}; -t) \right\}. \end{aligned} \quad (6.36)$$

O círculo de convergência da série hipergeométrica

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} \times \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n) \Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!} \end{aligned} \quad (6.37)$$

é o círculo unitário $|z| = 1$. As suas propriedades são:

- divergência quando $R(c-a-b) < -1$;
- convergência absoluta quando $R(c-a-b) > 0$;
- convergência condicional quando $-1 < R(c-a-b) \leq 0$, o ponto $z = 1$ é excluído.

No caso das integrais (6.36), cujos limites de integração dependem de $\cot^2(\alpha/2)$ e $\tan^2(\alpha/2)$, existem valores de α tal que a integração se estende a regiões nas quais não estão definidas as funções hipergeométricas. Para resolver esse problema devemos fazer a continuação analítica da hipergeométrica para todo o plano complexo. Essa continuação analítica é dada por [6.2]

$$_2F_1(a, b; c; z) = \frac{1}{(1-z)^a} {}_2F_1(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}) \quad (6.38)$$

ou

$$_2F_1(a, b; c; z) = \frac{1}{(1-z)^b} {}_2F_1(b, c-a; c; \frac{z}{z-1}) . \quad (6.39)$$

Utilizando ora uma ora outra dessas continuações analíticas, de tal forma que as hipergeométricas resultantes satisfaçam a condição de convergência absoluta no limite quando a dimensão tende para quatro, obtemos

$$J' = 2^{7-2v} R^{4-v} \left\{ -\frac{1}{3-v} \int_0^{\cot^2(\alpha/2)} dt \frac{(t)^{\frac{2-v}{2}}}{(1+t)^{4-v}} \times \right.$$

$$\left. \times {}_2F_1(3-v, 1; \frac{5-v}{2}; \frac{t}{1+t}) + \frac{8}{5-v} \int_0^{\cot^2(\alpha/2)} dt \frac{(t)^{\frac{4-v}{2}}}{(1+t)^{\frac{7-v}{2}}} \times \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \times {}_2F_1\left(\frac{5-v}{2}, \frac{v-3}{2}; \frac{7-v}{2}; \frac{t}{1+t}\right) + \frac{1}{3-v} \int_{\tan^2(\alpha/2)}^{\infty} dt \frac{(t)^{\frac{2-v}{2}}}{(1+t)^{4-v}} \times \\
 & \times {}_2F_1\left(3-v, 1; \frac{5-v}{2}; \frac{t}{1+t}\right) - \frac{8}{5-v} \int_{\tan^2(\alpha/2)}^{\infty} dt \frac{(t)^{\frac{4-v}{2}}}{(1+t)^{\frac{7-v}{2}}} \times \\
 & \times {}_2F_1\left(\frac{5-v}{2}, \frac{v-3}{2}; \frac{7-v}{2}; \frac{t}{1+t}\right) \Bigg\}. \tag{6.40}
 \end{aligned}$$

Neste ponto podemos substituir as hipergeométricas pelos seus desenvolvimentos em série, utilizando a expressão (6.37), temos

$$\begin{aligned}
 J' &= 2^{7-2v} R^{4-v} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ -\frac{\Gamma(\frac{5-v}{2}) \Gamma(3-v+n)}{\Gamma(4-v) \Gamma(\frac{5-v}{2}+n)} \int_0^{\cot^2(\alpha/2)} dt \times \right. \\
 &\times \frac{t^{\frac{2+v}{2}+n}}{(1+t)^{4-v+n}} + \frac{8}{(5-v)} \frac{\Gamma(\frac{7-v}{2}) \Gamma(\frac{5-v}{2}+n) \Gamma(\frac{v-3}{2}+n)}{\Gamma(\frac{5-v}{2}) \Gamma(\frac{v-3}{2}) \Gamma(\frac{7-v}{2}+n) \Gamma(n+1)} \times \\
 &\times \int_0^{\cot^2(\alpha/2)} dt \frac{t^{\frac{4-v}{2}+n}}{(1+t)^{\frac{7-v}{2}+n}} + \frac{\Gamma(\frac{5-v}{2}) \Gamma(3-v+n)}{\Gamma(4-v) \Gamma(\frac{5-v}{2}+n)} \times \\
 &\times \int_{\tan^2(\alpha/2)}^{\infty} dt \frac{t^{\frac{2-v}{2}+n}}{(1+t)^{4-v+n}} - \\
 &- \frac{8 \Gamma(\frac{7-v}{2}) \Gamma(\frac{5-v}{2}+n) \Gamma(\frac{v-3}{2}+n)}{(5-v) \Gamma(\frac{5-v}{2}) \Gamma(\frac{v-3}{2}) \Gamma(\frac{7-v}{2}+n) \Gamma(n+1)} \times
 \end{aligned}$$

$$\times \left\{ \frac{\int_0^\infty dt}{\tan^2(\alpha/2)} \frac{\frac{t^{\frac{4-v}{2}+n}}{(1+t)^{\frac{7-v}{2}+n}}}{(1+t)^{\frac{7-v}{2}+n}} \right\}. \quad (6.41)$$

Resolvemos as integrais usando as fórmulas [6.1]

$$\int_0^u dx \frac{x^{\mu-1}}{(1+\beta x)^v} = \frac{u^\mu}{\mu} {}_2F_1(v, \mu; 1+\mu; -\beta u), \quad (6.42)$$

$$\int_u^\infty dx \frac{x^{\mu-1}}{(1+\beta x)^v} = \frac{u^{\mu-v}}{\beta^v (v-\mu)} {}_2F_1(v, v-\mu; v-\mu+1; -\frac{1}{\beta u}),$$

e obtemos

$$J' = 2^{7-2v} R^{4-v} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ - \frac{\Gamma(\frac{5-v}{2})}{\Gamma(4-v)} \frac{\Gamma(3-v+n)}{\Gamma(\frac{5-v}{2}+n)} \frac{(\cot^2(\alpha/2))^{\frac{4-v}{2}+n}}{(\frac{4-v}{2}+n)} \times \right.$$

$$\times {}_2F_1(4-v+n, \frac{4-v}{2}+n; \frac{5-v}{2}+n; -\cot^2(\alpha/2)) +$$

$$+ \frac{16 \Gamma(\frac{5-v}{2}+n) \Gamma(\frac{v-3}{2}+n) (\cot^2(\alpha/2))^{\frac{6-v}{2}+n}}{\Gamma(\frac{v-3}{2}) \Gamma(\frac{7-v}{2}+n) \Gamma(n+1) (\frac{6-v}{2}+n)} \times$$

$$\times {}_2F_1(\frac{7-v}{2}+n; \frac{6-v}{2}+n; \frac{8-v}{2}+n; -\cot^2(\alpha/2)) +$$

$$+ \frac{\Gamma(\frac{5-v}{2}) \Gamma(3-v+n)}{\Gamma(4-v) \Gamma(\frac{5-v}{2}+n)} \frac{(\cot^2(\alpha/2))^{\frac{4-v}{2}}}{(\frac{4-v}{2})} \times$$

$$\times {}_2F_1(4-v+n, \frac{4-v}{2}; \frac{6-v}{2}; -\cot^2(\alpha/2)) -$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{16 \Gamma(\frac{5-v}{2} + n) \Gamma(\frac{v-3}{2} + n) (\cot^2(\alpha/2))^{1/2}}{\Gamma(\frac{v-3}{2}) (\frac{7-v}{2} + n) \Gamma(n+1)} \left(\frac{1}{2} \right) \\
 & \times {}_2F_1\left(\frac{7-v}{2} + n, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\cot^2(\alpha/2)\right) \quad . \quad (6.43)
 \end{aligned}$$

Tendo integrado J' o próximo passo é integrar em x_1 e x_2 para determinarmos J . A expressão de J (6.24) está repetida aqui por comodidade

$$J = - \frac{nC_2 g^4 \Gamma(\frac{v-2}{2})}{8\pi^{v/2}} \left\{ \int dx_1^\mu \int dx_2^\nu D_{\mu\nu}(x_1 - x_2) J' \right\}. \quad (6.44)$$

Convém salientar que J' depende de x_1 e x_2 através do ângulo α , pois $\alpha = \frac{v-u}{2}$, onde u e v são respectivamente os parâmetros dos vetores posição x_1 e x_2 , ou seja

$$\begin{aligned}
 x_1 &= R \cos(u) \hat{i} + R \sin(u) \hat{j}, \\
 x_2 &= R \cos(v) \hat{i} + R \sin(v) \hat{j}. \quad (6.45)
 \end{aligned}$$

Desnecessário se faz explicar o significado dos símbolos acima, por já terem sido feitos em outras seções.

Entretanto J em termos desses parâmetros resulta

$$J = - \frac{nC_2 g^4 \Gamma(\frac{v-2}{2}) \Gamma(\frac{v-2}{2})}{32\pi^v} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} du dv \left\{ \frac{2-v}{4} \frac{4-v}{2} (R^2)^{\frac{v-2}{2}} \times \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[1 - 2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{u-v}{2} \right) \right] \left[\operatorname{sen}^2 \left(\frac{u-v}{2} \right) \right]^{\frac{2-v}{2}} - \frac{A}{2(v-4)} \times \\
 & \times \frac{d^2}{du dv} \left[4R^2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{u-v}{2} \right) \right]^{\frac{4-v}{2}} \Big\} J' \quad (6.46)
 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
 J = & \frac{nC_2 g^4 \Gamma(\frac{v-2}{2}) \Gamma(\frac{v-2}{2}) (R)^{4-v} 2^{2-v}}{32\pi^v} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} du dv \times \\
 & \times \left[1 - 2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{u-v}{2} \right) \right] \left[\operatorname{sen}^2 \left(\frac{u-v}{2} \right) \right]^{\frac{2-v}{2}} + \frac{A}{2} \left\{ (v-3) \times \right. \\
 & \times \left[\operatorname{sen}^2 \left(\frac{u-v}{2} \right) \right]^{\frac{2-v}{2}} - (v-4) \left[\operatorname{sen}^2 \left(\frac{u-v}{2} \right) \right]^{\frac{2-v}{2}} \Big\} J'. \quad (6.47)
 \end{aligned}$$

Reduzindo os termos semelhantes e escrevendo de uma forma compacta, temos

$$\begin{aligned}
 J = & - \frac{nC_2 g^4 \Gamma(\frac{v-2}{2}) \Gamma(\frac{v-2}{2}) (R)^{4-v} 2^{2-v}}{32\pi^v} \left[\frac{2+A(v-3)}{2} \right] \times \\
 & \times \sum_{a=0}^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} du dv f(A)^a \left[\operatorname{sen}^2 \left(\frac{u-v}{2} \right) \right]^{\frac{2-v}{2}+a} J', \quad (6.48)
 \end{aligned}$$

onde

$$f(A) = \frac{4 + A(v-4)}{2 + A(v-3)} . \quad (6.49)$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$\alpha = \frac{v-u}{2}$$

e

$$\beta = \frac{u+v}{2} ,$$

na expressão (6.48), omitindo as passagens por serem análogas as feitas anteriormente e integrando em β temos

$$J = B' \sum_{a=0}^1 \int_0^{\pi} d\alpha (\pi-\alpha) f(A)^a (\sin^2(\alpha))^{\frac{2-v}{2}+a} J' , \quad (6.51)$$

onde

$$B' = - \frac{n C_2 g^4 \Gamma(\frac{v-2}{2}) \Gamma(\frac{v-2}{2}) (4R^2)^{\frac{4-v}{2}}}{32 \pi^v} [2+A(v-3)] , \quad (6.52)$$

Substituindo J' pela sua expressão resulta

$$J = B \sum_{a=0}^1 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} d\alpha (\pi-\alpha) f(A)^a [\sin^2(\alpha)]^{\frac{2-v}{2}+a} \times \\ \times \left\{ - \frac{\Gamma(\frac{5-v}{2}) \Gamma(3-v+n) [\cot^2(\alpha/2)]^{\frac{4-v}{2}+n}}{\Gamma(4-v) \Gamma(\frac{5-v}{2}+n) (\frac{4-v}{2}+n) [\cot^2(\alpha/2) + 1]^{\frac{4-v}{2}+n}} \right\} \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times {}_2F_1(4-v+n, 1; \frac{6-v}{2} + n; \frac{\cot^2(\alpha/2)}{1 + \cot^2(\alpha/2)}) + \\
 & + \frac{16 \Gamma(\frac{5-v}{2} + n) \Gamma(\frac{v-3}{2} + n) [\cot^2(\alpha/2)]^{\frac{6-v}{2} + n}}{\Gamma(\frac{v-3}{2}) \Gamma(\frac{7-v}{2} + n) \Gamma(n+1) (\frac{6-v}{2} + n) [1 + \cot^2(\alpha/2)]^{\frac{6-v}{2} + n}} \times \\
 & \times {}_2F_1(\frac{6-v}{2} + n, \frac{1}{2}; \frac{8-v}{2} + n; \frac{\cot^2(\alpha/2)}{1 + \cot^2(\alpha/2)}) + \\
 & + \frac{\Gamma(\frac{5-v}{2}) \Gamma(3-v+n) \cot^2(\alpha/2)^{\frac{4-v}{2}}}{\Gamma(4-v) \Gamma(\frac{5-v}{2} + n) (\frac{4-v}{2}) [1 + \cot^2(\alpha/2)]^{4-v+n}} \times \\
 & \times {}_2F_1(4-v+n, 1; \frac{6-v}{2}; \frac{\cot^2(\alpha/2)}{1 + \cot^2(\alpha/2)}) - \\
 & - \frac{16 \Gamma(\frac{5-v}{2} + n) \Gamma(\frac{v-3}{2} + n) [\cot^2(\alpha/2)]^{1/2}}{\Gamma(\frac{v-3}{2}) \Gamma(\frac{7-v}{2} + n) \Gamma(n+1) (\frac{1}{2}) [1 + \cot^2(\alpha/2)]^{\frac{7-v}{2} + n}} \times \\
 & \times {}_2F_1(\frac{7-v}{2} + n, 1; \frac{3}{2}; \frac{\cot^2(\alpha/2)}{1 + \cot^2(\alpha/2)}) \quad . \quad (6.53)
 \end{aligned}$$

Na expressão acima já foi feito o prolongamento analítico (6.38) ou (6.39) das hipergeométricas da igualdade (6.43). O motivo disso é que a integração em α se estende a regiões onde

$$|\cot^2(\alpha/2)| > 1, \quad (6.54)$$

nas quais as séries não estão definidas. A escolha da continuação (6.38) ou (6.39) não é arbitrária, pois devemos tomar cuidado para que os parâmetros das hipergeométricas continuadas sejam aqueles que dão convergência à série.

Fazendo a mudança de variáveis,

$$x = \cot^2(\alpha/2) \quad (6.55)$$

na expressão (6.53) temos

$$\begin{aligned}
 J = & B \sum_{a=0}^1 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dx (\pi - 2 \arctan(1/\sqrt{x})) f(A) a 2^{2-v+2a} \times \\
 & \times \left\{ - \frac{\Gamma(\frac{5-v}{2}) \Gamma(3-v+n)}{\Gamma(4-v) \Gamma(\frac{5-v}{2}+n) (\frac{4-v}{2}+n)} \frac{\frac{5-2v}{2}+n+a}{x^2} \times \right. \\
 & \times {}_2F_1(4-v+n, 1; \frac{6-v}{2}+n; \frac{x}{1+x}) + \\
 & + \frac{16 \Gamma(\frac{5-v}{2}+n) \Gamma(\frac{v-3}{2}+n)}{\Gamma(\frac{v-3}{2}) \Gamma(\frac{7-v}{2}+n) \Gamma(n+1) (\frac{6-v}{2}+n)} \frac{\frac{7-2v}{2}+n+a}{(1+x)^{\frac{12-3v}{2}+n+2a}} \times \\
 & \times {}_2F_1(\frac{6-v}{2}+n, \frac{1}{2}; \frac{8-v}{2}+n; \frac{x}{1+x}) + \\
 & + \frac{\Gamma(\frac{5-v}{2}) (3-v+n)}{\Gamma(4-v) \Gamma(\frac{5-v}{2}+n) (\frac{4-v}{2})} \frac{\frac{5-2v}{2}+a}{(1+x)^{7-2v+n+2a}} \times \\
 & \times {}_2F_1(4-v+n, 1; \frac{6-v}{2}; \frac{x}{1+x}) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{16 \Gamma(\frac{5-v}{2} + n) \Gamma(\frac{v-3}{2} + n)}{\Gamma(\frac{v-3}{2}) \Gamma(\frac{7-v}{2} + n) \Gamma(n+1) (\frac{1}{2})} \frac{x^{\frac{2-v}{2} + a}}{x^{\frac{13-3v}{2} + n + 2a}} \times \\
 & \left. \times {}_2F_1\left(\frac{7-v}{2} + n, 1; \frac{3}{2}; \frac{x}{1+x}\right) \right\}. \quad (6.56)
 \end{aligned}$$

Em seguida daremos o resultado final omitindo os seguintes passos:

- substituição das hipergeométricas por suas expansões em série;
- utilizando a identidade para o arco cuja tangente é $1/\sqrt{x}$

$$\begin{aligned}
 \arctan(x) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{x^2}{1+x^2}\right) = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n)}{2 \sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{2} + n) \Gamma(n+1)} \left[\frac{x^2}{1+x^2}\right]^{n+\frac{1}{2}}; \\
 & \quad (6.57)
 \end{aligned}$$

- em seguida integramos termo a termo utilizando a fórmula [6.1]

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{\mu-1}}{(1+x)^\sigma} = \frac{\Gamma(\mu) \Gamma(\sigma-\mu)}{\Gamma(\sigma)}, \quad (6.58)$$

obtendo

$$\begin{aligned}
 J = & B \sum_{a=0}^1 f(a)^a 2^{2-v+2a} \left\{ \pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \times \right. \\
 & \times \left[- \frac{\Gamma(\frac{5-v}{2}) \Gamma(3-v+n) \Gamma(\frac{6-v}{2}+n) \Gamma(4-v+n+m) \Gamma(\frac{7-2v}{2}+n+m+a) \Gamma(\frac{7-2v}{2}+a)}{\Gamma(4-v) \Gamma(\frac{5-v}{2}+n) (\frac{4-v}{2}+n) \Gamma(4-v+n) \Gamma(\frac{6-v}{2}+n+m) \Gamma(7-2v+n+m+2a)} + \right. \\
 & + \frac{16}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{5-v}{2}+n) \Gamma(\frac{v-3}{2}+n) \Gamma(\frac{1}{2}+m) \Gamma(\frac{9-2v}{2}+n+m+a) \Gamma(\frac{3-v}{2}+a)}{\Gamma(\frac{v-3}{2}) \Gamma(\frac{7-v}{2}+n) \Gamma(n+1) (\frac{6-v}{2}+n+m) \Gamma(m+1) \Gamma(\frac{12-3v}{2}+n+m+2a)} + \\
 & + \frac{\Gamma(\frac{5-v}{2}) \Gamma(3-v+n) \Gamma(\frac{6-v}{2}+n) \Gamma(4-v+n+m) \Gamma(\frac{7-2v}{2}+m+a) \Gamma(\frac{7-2v}{2}+m+a)}{\Gamma(4-v) \Gamma(\frac{5-v}{2}+n) (\frac{4-v}{2}) \Gamma(4-v+n) \Gamma(\frac{6-v}{2}+n+m) \Gamma(7-2v+n+m+2a)} - \\
 & - 16 \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{5-v}{2}+n) \Gamma(\frac{v-3}{2}+n) \Gamma(\frac{4-v}{2}+m+a) \Gamma(\frac{9-2v}{2}+n+a) \Gamma(\frac{7-v}{2}+n+m) \Gamma(\frac{9-2v}{2}+r)}{\Gamma(\frac{v-3}{2}) \Gamma(\frac{7-v}{2}+n) \Gamma(n+1) \Gamma(\frac{7-v}{2}+n) \Gamma(\frac{13-3v}{2}+n+m+2a) \Gamma(\frac{3}{2}+m)} \\
 & - \sum_{k,n,m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} (k+\frac{1}{2}) \Gamma(k+1)} \times \\
 & \times \left[- \frac{\Gamma(\frac{5-v}{2}) \Gamma(3-v+n) \Gamma(\frac{6-v}{2}+n) \Gamma(4-v+n+m) \Gamma(\frac{7-2v}{2}+n+m+a) \Gamma(4-v+a+k)}{\Gamma(4-v) \Gamma(\frac{5-v}{2}+n) (\frac{4-v}{2}+n) (4-v+n) \Gamma(\frac{6-v}{2}+n+m) \Gamma(7-2v+n+m+k+\frac{1}{2}+2a)} + \right. \\
 & + \frac{16 \Gamma(\frac{5-v}{2}+n) \Gamma(\frac{v-3}{2}+n) \Gamma(\frac{1}{2}+m) \Gamma(\frac{9-2v}{2}+n+m+a) \Gamma(\frac{4-v}{2}+a+k)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{v-3}{2}) \Gamma(\frac{7-v}{2}+n) \Gamma(n+1) (\frac{6-v}{2}+n+m) \Gamma(m+1) \Gamma(\frac{13-3v}{2}+n+m+k+2a)} + \\
 & + \frac{\Gamma(\frac{5-v}{2}) \Gamma(3-v+n) \Gamma(\frac{6-v}{2}+n) \Gamma(4-v+n+m) \Gamma(\frac{7-2v}{2}+m+a) \Gamma(4-v+n+k+a)}{\Gamma(4-v) \Gamma(\frac{5-v}{2}+n) (\frac{4-v}{2}) \Gamma(4-v+n) \Gamma(\frac{6-v}{2}+n+m) \Gamma(7-2v+n+m+k+\frac{1}{2}+2a)} -
 \end{aligned}$$

$$\frac{16 \Gamma\left(\frac{5-v}{2}+n\right) \Gamma\left(\frac{v-3}{2}+n\right) \Gamma\left(\frac{7-v}{2}+n+m\right) \Gamma\left(\frac{4-v}{2}+m+a\right) \Gamma(5-v+n+k+a)}{\Gamma\left(\frac{v-3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{7-v}{2}+n\right) \Gamma(n+1) \Gamma\left(\frac{7-v}{2}+n\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}+m\right) \Gamma\left(\frac{14-3v}{2}+n+m+k+2a\right)} \Bigg\} . \quad (6.59)$$

Na expressão acima, observando os limites as sintóticos da razão das funções gama, concluimos que a série diverge. O motivo da divergência pode estar no fato de ter sido feito vários prolongamentos analíticos, ou que o desenvolvimento em série para o cálculo das integrais não seja adequado. Portanto, a intenção original, que era calcular as partes finitas da circunferência para qualquer gauge não foi possível devido ao diagrama de dois glúons não interagentes.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES

Nos propusemos a renormalizar a carga da cromo dinâmica quântica até a quarta ordem utilizando o loop de Wilson quântico com a regularização dimensional. Grandes simplificações ocorrem para renormalizar a carga com esta técnica. Os diagramas necessários para esse cálculo são só mente os seguintes

$$\begin{aligned}
 G_{4g} &= \frac{nC_2 g^4}{16\pi^{v/2}} \Gamma\left(\frac{v-4}{2}\right) \left\{ A - \frac{2}{3-v} \right\} \\
 &\quad \times \oint \oint dx^\sigma dy^\rho D_{\sigma\rho}(x-y) |x-y|^{4-v}, \\
 G_{4c} &= -\frac{nC_2 g^4 \Gamma(2-\frac{v}{2}) \Gamma(\frac{v}{2}-1) \Gamma(\frac{v}{2}-1) \Gamma(v-3)}{2^8 \pi^v \Gamma(3-\frac{v}{2}) \Gamma(v-2) (v-1)} \times \\
 &\quad \times \oint \oint dx^\sigma dy^\rho \delta_{\sigma\rho} |x-y|^{6-2v}, \\
 G_{4a} &= \frac{nC_2 g^4 \Gamma(2-\frac{v}{2}) \Gamma(\frac{v}{2}-1) \Gamma(\frac{v}{2}-1) \Gamma(v-3)}{2^6 \pi^v \Gamma(3-\frac{v}{2}) \Gamma(v-2)} \times \\
 &\quad \times \left\{ \left(2v - \frac{13}{2}\right) A + A^2 \left(\frac{v}{4} - 1\right) \right\} \times \\
 &\quad \times \oint \oint dx^\sigma dy^\rho \delta_{\sigma\rho} |x-y|^{6-2v},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{4b} &= \text{Diagrama circular com uma faixa wavy no interior} \\
 &= \frac{n C_2 g^4 \Gamma(2-\frac{v}{2}) \Gamma(\frac{v}{2}-1) \Gamma(\frac{v}{2}-1) \Gamma(v-3)}{2^7 \pi^v \Gamma(3-\frac{v}{2}) \Gamma(v-2)} \times \\
 &\quad \times \left\{ \frac{6v-5}{2(v-1)} + (2v+7) A - \left(1 - \frac{v}{4}\right) A^2 \right\} \times \\
 &\quad \times \oint \oint dx^\sigma dy^\rho \delta_{\sigma\rho} |x-y|^{6-2v}. \tag{4.55}
 \end{aligned}$$

onde n é a dimensão do grupo, C_2 é a constante de Casimir quadrática, g é a constante de acoplamento, A o fixador do gauge e $D_{\sigma\rho}(x-y)$ o propagador dos glúons no espaço de coordenadas.

Outra vantagem do método é o de não precisarmos recorrer ao mecanismo de Block e Nordsieck para tratar as divergências infravermelhas pois elas não aparecem nesta ordem. Vale ressaltar que o mecanismo de Block e Nordsieck envolve cálculos não triviais. O resultado obtido para a normalização mencionada em quatro dimensões é o seguinte

$$g^2 = \mu^{v-4} g_0^2 \left\{ 1 + \frac{11C_2 g_0^2 \mu^{v-4}}{24\pi^2 (4-v)} \right\}. \tag{4.58}$$

Este resultado foi obtido por Dotsenko e Vergelles [4.1] utilizando os cálculos de Politzer [7.1] para a cromodinâmica quântica, cujas integrais foram regularizadas utilizando-se os parâmetros de corte (cutoff). Dotsenko e Vergelles usaram a prescrição $\frac{1}{4-v} = L \frac{\Lambda}{\rho}$, onde Λ é o parâmetro de corte e ρ o ponto de normalização no espaço de momenta, para passar de uma regularização para a outra. Entretanto no trabalho

lho deles não ficou claro se o resultado vale em $v \neq 4$. Pude mos mostrar através do nosso trabalho que os resultados dos diagramas ficam dependentes da integral

$$\left\{ \int dx^\sigma dy^\rho \delta_{\sigma\rho} |x-y|^{6-2v} . \quad (7.1)$$

Somente em quatro dimensões é que podemos escrever

$$\left\{ \int dx^\sigma dy^\rho \delta_{\sigma\rho} |x-y|^{6-2v} = \int dx^\sigma dy^\rho D_{\sigma\rho}(x-y) . \quad (7.2)$$

Em dimensões diferente de quatro, portanto, a técnica do loop de Wilson para a renormalização, merece maior atenção. Em duas dimensões divergências adicionais ocorrem pois o próprio propagador tem uma divergência em $v=2$, como se pode observar abaixo

$$D_{\sigma\rho}(x-y) = \frac{\Gamma(\frac{v-2}{2})}{4\pi^{v/2}} \left\{ \delta_{\sigma\rho} |x-y|^{2-v} - \frac{A \partial_\sigma^x \partial_\rho^y |x-y|^{4-v}}{2(v-4)} \right\} . \quad (5.1)$$

Portanto em duas dimensões devemos fazer todos os cálculos usando a parte finita do propagador.

Na obtenção dos resultados anteriores, em virtude da complexidade dos cálculos, houve necessidade de nos familiarizarmos com as linguagens simbólicas SCHOONSCHIP e REDUCE2, que nos foram recomendadas em hora oportuna pelo professor J.A. Mignaco.

Outra contribuição nossa foi mostrar que o resíduo obtido do cálculo do fator de fase quântico em quatro dimensões para uma curva aberta, não depende nem dessa nem do arco como se pode observar na expressão

$$\text{Res}(V(C)) = \lim_{v \rightarrow 4} \frac{(v-4) 2^{8-2v} \Gamma(\frac{v-2}{2}) R^{4-v} [\tan^2(\alpha/2)]^{\frac{4-v}{2}}}{4\pi^{v/2} (3-v) \frac{4-v}{2}} = \\ = \frac{1}{2\pi^2} . \quad (5.21)$$

O loop de Wilson é uma técnica nova com a qual pretendemos entender melhor o fenômeno do confinamento. Qualquer cálculo que se faça com o loop de Wilson na tentativa de nos familiarizarmos com ele, é justificável. Foi com essa intensão que nos propusemos também a dar continuidade aos trabalhos de Giambiagi, Bollini e Abud [4.3], nos problemas mencionados a seguir.

Mostramos que dado o ângulo de intersecção de duas semiretas é possível calcular o resíduo e a parte finita do fator de fase quântico para esse caso particular, utilizando uma família de hipérboles, que têm por assíntotas essas semiretas. A equação da hipérbole é dada por

$$\frac{r_x^2}{a^2} - \frac{r_y^2}{b^2} = 1 , \quad (5.22)$$

se variarmos convenientemente os parâmetros a e b de tal forma e mantermos constante a vazão b/a , que é a metade do ângulo formado pelas semiretas, iremos obtendo a citada família de hipérboles que vai se transformando no encontro das duas semiretas a medida que fazemos $a \rightarrow 0$. O resultado obtido para o resíduo é

$$\text{Res} [\bar{V}(C)]_{v=4} = \frac{(a-\pi) \cot(\alpha)}{8\pi^2}, \quad (5.39)$$

onde α é o ângulo formado pelas semiretas. Este resultado está consistente com o obtido no trabalho de Giambiagi, Bollini e Abud a menos de diferenças por causa da escolha do gauge, que no nosso caso foi feito no gauge de Feynman e no daqueles no gauge dimensional. A parte finita pode ser obtida utilizando-se a expressão

$$\begin{aligned} \text{PF} [\bar{V}(C)] &= \frac{1}{4\pi^2 \sec^2(x)} \left[\frac{\sin(x)}{2\cos^3(x)} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right] + \\ &+ \frac{d}{dv} \left[\frac{(v-4) \frac{4-v}{2} \Gamma(\frac{v-2}{2}) (a^2)^{\frac{4-v}{2}} (\sec^2(x))^{\frac{2-v}{2}} (\tan^2(x)-1) B(\frac{5-v}{2}, \frac{v-4}{2})}{8\pi^{v/2} B(\frac{1}{2}, \frac{v-2}{2})} \right. \\ &\times \left. {}_2F_1(\frac{v-2}{2}, \frac{v-2}{2}; \frac{v-1}{2}; \cos^2(x)) \right]_{v=4}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

No último capítulo tivemos a idéia de calcular a parte finita do loop de Wilson para a circunferência, em quarta ordem em quatro dimensões. Podemos observar nas equações (4.55), repetidas nesse capítulo, que as integrais G_{4a} , G_{4b} , G_{4c} , (soluções exatas para os diagramas) dependem da integral

$$I = \oint \oint dx^\sigma dy^\rho \delta_{\sigma\rho} |x-y|^{6-2v} = \frac{4^{4-v} (R^2)^{4-v} \pi^{3/2} \Gamma(\frac{7-2v}{2}) (v-3)}{\Gamma(5-v)},$$

(6.12)

cujo lado direito foi obtido no capítulo seis. Desta forma é possível calcular as partes finitas desses diagramas. Para obtermos a parte finita do diagrama dos glúons não interagentes precisamos recorrer a expressão (6.13a), repetida a seguir

$$G'_{4g} = -\frac{nC_2 g^4}{2} \left\{ dx_1^{\mu_1} \left\{ dx_2^{\mu_2} D_{\mu_1 \mu_2}(x_1 - x_2) \int_{x_1}^{x_2} dx_3^{\mu_3} \int_{x_2}^{x_1} dx_4^{\mu_4} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times D_{\mu_3 \mu_4}(x_3 - x_4) \right. \right. \quad (6.13a)$$

A expressão G'_{4g} das equações (4.55) não pode ser usada pois ela só contém a parte divergente da integral acima. G'_{4g} foi calculada no capítulo seis. Observando a razão das funções gama da expressão (6.59), que no limite de grandes argumentos ela se comporta como abaixo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(b+a)} \sim \frac{1}{n^{b-a}}, \quad (7.3)$$

onde n é uma variável e b e a constantes, concluimos que a série diverge. Desta forma não conseguimos isolar a divergência como polos no plano complexo da dimensão. Ficando assim impossibilitados para calcular a parte finita para o diagrama de dois glúons não interagentes e portanto a circunferência em quarta ordem. A série deveria ser somada para se obter uma função analítica da dimensão coisa que não se segue devido a complexidade do termo geral, vide expressão (6.59).

REFERÉNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [0.1] STRUBBE, H. - Manual for SCHOONSCHIP. Comput. Phys. Commun. V.8:1, 1974.
- [1.1] WEIL, H., Ann d. Physik. V.59:101, 1919.
- [1.2] WEYL, H., H., z.f. Phys. V.56:330, 1929.
- [1.3] BOLLINI, C.G.; GIAMBIAGI, J.J. - Teorias de campos de gauge. Escala de Verão, Universidade de São Carlos, 1978.
- [1.4] ABERS, S.; LEE, W. - Gauge Theories. Phys. Rep. 9C(1), 1973.
- [1.5] FADDEEV, L.D.; SLAVNOV, A.A. - *Gauge fields: Int. to quantum theory*. Trad. D.B. Pontecorvo. London, Benjamin/Cummings Publishing, 1980. p. 227.
- [1.6] HUANG, Kerson - *Quarks leptons & gauge fields*. Singapore, World Scientific Publishing, 1982.
- [1.7] YANG, C.N.; MILLS, R.L., Phys. Rev. V.96:191, 1954.
- [1.8] AHARONOV, V., BOHM, D., Phys. Rev. V.115:485, 1959.
- [1.9] CHAMBERS, R.G., Phys. Rev. Lett. V.5:3, 1960.
- [1.10] WILSON, K., Phys. Rev. V.D10:2445, 1974.
- [1.11] MAKEENKO, Y.M.; MIGDAL, A.A., Nucl. Phys. B. V.188: 269, 1981.
- [1.12] MIGDAL, A.A., Ann Phys., V.126:279; 290, 1980.
- [1.13] KOGUT, John B., Rev. Mod. 55(3):775-836, 1983.
- [2.1] BOLLINI, C.G.; GIAMBIAGI, J.J., Nuova Cimento B 12(1):20-26, 1972.
- [2.2] 't HOOFT, G.; VELTMAN, M., Nucl. Phys. B V.44:189, 1972.
- [2.3] BOLLINI, C.G.; GIAMBIAGI, J.J.; GONZALES, A.D., Nuovo Cimento V.31:550, 1964.
- [2.4] CAPPER, D.M.; LEIBBRANDT, G., J. Math. Phys. V.15: 82, 1974.
CAPPER, D.M.; LEIBBRANDT, G., J. Math. Phys. V.15: 86, 1974.
- [2.5] PELBOURGO, R.; AKYCAMPONG, D.A., Nuovo Cimento V.19A: 219, 1974.

- [3.1] 't HOOGT, G.; VELTMAN. - *Diagrammar*. CERN 73-9, 1973.
- [3.2] ROMAN, P. - *Introduction to quantum field theory*.
New York, John Wiley and Sons, 1969.
- [3.3] LURIE, D. - *Particles and fields*. New York,
Interscience Publishers, 1968.
- [4.1] DOTSENKO, V.S.; VERGELES, S.N., Nucl. Phys. B, V.169:
527, 1980.
- [4.2] BRANDT, R.A.; NERI, F.; SATO, M., Phys. Rev. D 24(4):
879, 1981.
- [4.3] ABUD, M.; BOLLINI, C.G.; GIAMBIAGI, J.J., Nucl. Phys.
B V.204:109-117, 1982.
- [6.1] GRADSHTEYN, I.S.; RYZHIK, I.M. - *Table of integrals,
series and products*. ed. Alan Jeffrey. 4. ed. aum.
New York, Academic Press, 1981. p. 1160.
- [6.2] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, Irene A. ed. - *Handbook of
mathematical functions*. 9. ed. New York, Dover
Publications, 1972.

APÊNDICE A

ALGUMAS INTEGRAIS ÚTEIS

Apresentamos aqui algumas integrais que foram usadas no trabalho.

A integral abaixo pode ser calculada usando-se os parâmetros de Feynman

$$\int d^v p \frac{1}{[(p+s)^2]^\alpha [p^2]^\beta} = \frac{\pi^{v/2} (s^2)^{\frac{v}{2}-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(v-\alpha-\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+\beta-\frac{v}{2}) \Gamma(\frac{v}{2}-\beta) \Gamma(\frac{v}{2}-\alpha)}{= J(\alpha, \beta, v, s) \quad (A.1)}$$

As integrais seguintes podem ser calculadas a partir de A.1 por derivação com relação a s , ou se utilizando dos parâmetros de Feynman

$$\int d^v p \frac{p_\lambda}{[(p+s)^2]^\alpha [p^2]^\beta} = -\left(\frac{v}{2} - \beta\right) \frac{s_\lambda}{v-\alpha-\beta} J(\alpha, \beta, v, s) \quad (A.2)$$

$$\begin{aligned} \int d^v p \frac{p_\lambda p_\rho}{[(p+s)^2]^\alpha [p^2]^\beta} &= \left(\frac{v}{2} - \right) \frac{J(\alpha, \beta, v, s)}{(v-\alpha-\beta)(v-\alpha-\beta+1)} \times \\ &\times \left\{ \frac{\delta_{\lambda\rho} s^2 (\frac{v}{2} - \alpha)}{2(\alpha+\beta-1 - \frac{v}{2})} + s_\lambda s_\rho \left(\frac{v}{2} - \beta + 1 \right) \right\} \quad (A.3) \end{aligned}$$

$$\int d^v p \frac{p_\lambda p_\rho p_\sigma}{[(p+s)^2]^\alpha [p^2]^\beta} = - \frac{\left(\frac{v}{2} - \beta + 1\right) \left(\frac{v}{2} - \beta\right) J(\alpha, \beta, v, s)}{(v-\alpha-\beta+2)(v-\alpha-\beta+1)(v-\alpha-\beta)} \times \\ \times \left\{ \frac{s^2 (s_\lambda \delta_{\rho\sigma} + s_\rho \delta_{\lambda\sigma} + s_\sigma \delta_{\lambda\rho}) \left(\frac{v}{2} - \alpha\right)}{2(\alpha+\beta-1 - \frac{v}{2})} + s_\lambda s_\rho s_\sigma \left(\frac{v}{2} - \beta + 2\right) \right\} \quad (A.4)$$

Para o cálculo das integrais anteriores foram usadas as integrais

$$\int d\Omega(v) = \frac{2\pi^{v/2}}{\Gamma(\frac{v}{2})} \quad (A.5)$$

onde $\Omega(v)$ é a área da superfície de uma hiperesfera de v dimensões

$$\int_0^\infty dp \frac{p^{v-1}}{(p^2 + m^2)^\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha - \frac{v}{2}) \Gamma(\frac{v}{2})}{2[m^2]^{\alpha - \frac{v}{2}} \Gamma(\alpha)} \quad (A.6)$$

G.R. pag. 292

$$\int d^v p \frac{1}{[p^2 + m^2]^\alpha} = \frac{\pi^{v/2} \Gamma(\alpha - \frac{v}{2})}{[m^2]^{\alpha - \frac{v}{2}} \Gamma(\alpha)} \quad (A.7)$$

$$\int d^v s (s^2)^\lambda e^{is(x_2 - x_1)} = \frac{2^{2\lambda+v} \pi^{v/2} \Gamma(\lambda + \frac{v}{2})}{\Gamma(-\lambda) |x_2 - x_1|^{2\lambda+v}} \quad (A.8)$$

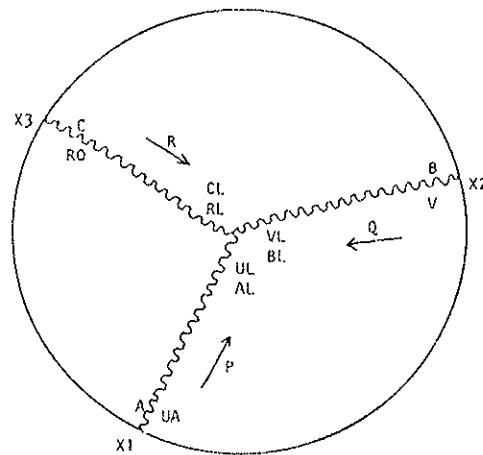
APÊNDICE B

CÁLCULO DO DIAGRAMA DE UM VÉRTICE COM TRÊS GLÚONS

SCHOONSHIP , VERSION OF APRIL 1, 1977

TIME 3.26 SECONDS

C ESTE PROGRAMA CALCULA O DIAGRAMA DE UM VERTICE COM TRES GLUONS,
 C CUJA EXPRESSAO E A G4A (4.45).
 C NESTE PROGRAMA O SIMBOLO CTM TEM O VALOR QUE E DADO PELA
 C EXPRESSAO (4.48), QUE IRA VARIANDO NO DECORRER DO PROGRAMA,
 C O SEU VALOR INICIAL E:
 C $CTH = G^4 * 4 * PI * (A, B, C) * TR((LA, LB, LC) * DELTA(P+Q+R)) / (6 * (2 * PI)^{**2} * T)$
 C COMO FOI DITO NO CAPITULO 4, G E A CONSTANTE DE ACCPLAMENTO DA
 C TEORIA DE YANG-MILLS, P E O OPERADOR DE ORDENACAO DE QSCN AO
 C LONGO DA CURVA, T(A,B,C) SAO AS CONSTANTES DE ESTRUTURA DO SU(3)
 C DELTA E A DISTRIBUICAO DELTA DE DIRAC, T E A DIMENSAO DO ESPACO TEMPO
 C TR((LA, LB, LC)) E O TRACC DO PRODUTO DOS GERADORES DO GRUPO LA, LB, LC.
 C HAIS ADIANTE VAI APARECER N COMO SENO A DIMENSAC DO GRUPO E C2 A
 C CONSTANTE DE CASIMIR QUADRATICA.



```

I UL=T, VL=T, RL=Y, U=T, V=T, RO=T
V X1,X2,X3,P,Q,R
F EXP,G2,DG2,EXPS
Z G4A*X1(UL)*X2(VL)*X3(RL)*(D(U,UL)-A*P(U)*P(UL)/PP)*
  (D(V,VL)-A*Q(V)*Q(VL)/QQ)*(D(P0,RL)-A*R(R0)*R(RL)/RR)*
  ((P(P0)-Q(R0))*D(U,V)+(O(U)-R(U))*D(R0,V)+(R(V)-P(V))*
  O(R0,U))*EXP(P,X1)*EXP(Q,X2)*EXP(R,X3)*CTM/PP/QQ/RR
L 3 IO,PP=PP
L 4 IO,QQ=QQ
L 5 IO,RR=RR
B CTH
PRINT NLIST
PRINT NSTATISTICS
PRINT OUTPUT
#EOF

G4A =
  + EXP(P,X1)*EXP(Q,X2)*EXP(R,X3)*CTM

```

```
* ( PP**(-2)*QQ**(-2)*RR**(-1)*A**2*x1DP*x20Q*x3DP*QDR ~ PP**(-2)*QQ**(-1)*A**2*x10P*x2C0*x3D0*PDR
~ PP**(-2)*QQ**(-1)*RR**(-2)*A**2*x1DP*x2DP*x3DR*QDR + PP**(-2)*QQ**(-1)*RR**(-2)*A**2*x10P*x2DR*x3DR*PDR
~ PP**(-2)*QQ**(-1)*RR**(-1)*A*x1DP*x2DX3*PDR + PP**(-2)*QQ**(-1)*RR**(-1)*A*x1DP*x2DX3*PDR + PP**(-2)*QQ**(-1)*RR**(-1)*A*x1DP*x2DP*x3DQ ~ PP**(-2)*QQ**(-1)*RR**(-1)*A*x1DP*x2DR*x3DP + PP**(-1)*CC**(-2)*RR**(-2)*A**2
*QQ**(-1)*A*x1DP*x2DP*x3DQ ~ PP**(-2)*QQ**(-1)*RR**(-1)*A*x1DP*x2DR*x3DP + PP**(-1)*CC**(-2)*RR**(-2)*A**2
*QQ**(-1)*A*x1DP*x2DR*x3DR ~ PP**(-1)*QQ**(-2)*A**2*x1DR*x2C0*x3DR*PDR + PP**(-1)*QQ**(-2)*RR**(-1)*A*x1C0
*QQ**(-1)*RR**(-2)*A*x1DX3*x2DQ ~ PP**(-1)*QQ**(-2)*RR**(-1)*A*x1DX2*x3DR*PDR + PP**(-1)*QQ**(-1)*RR**(-2)*A*x1C0
+ PP**(-1)*QQ**(-2)*RR**(-1)*A*x1DR*x2DQ*x3CQ ~ PP**(-1)*QQ**(-1)*RR**(-2)*A*x10X2*x3DR*PDR + PP**(-1)*QQ**(-1)*RR**(-2)*A*x1DR*x2DQ*x3CQ ~ PP**(-1)*QQ**(-1)*RR**(-2)*A*x10Q*x2DR*x3DR + PP**(-1)*QQ**(-1)*RR**(-2)*A*x10R
*QQ**(-1)*A*x1DX2*x3DR*QDR ~ PP**(-1)*QQ**(-1)*RR**(-2)*A*x10Q*x2DR*x3DR + PP**(-1)*QQ**(-1)*RR**(-2)*A*x10R
*QQ**(-1)*RR**(-1)*X10X2*x3DP ~ PP**(-1)*QQ**(-1)*RR**(-1)*X10X2*x3DQ ~ PP**(-1)*QQ**(-1)*RR**(-1)*X10X2*x3DP
+ PP**(-1)*QQ**(-1)*RR**(-1)*X10X2*x3DQ ~ PP**(-1)*QQ**(-1)*RR**(-1)*X10X2*x3DR + PP**(-1)*QQ**(-1)*RR**(-1)*X10X2*x3DR
+ PP**(-1)*QQ**(-1)*RR**(-1)*X10X3*x2DP ~ PP**(-1)*QQ**(-1)*RR**(-1)*X10X3*x2DR + PP**(-1)*QQ**(-1)*RR**(-1)*X10C*x20X3
~ PP**(-1)*QQ**(-1)*RR**(-1)*X10R*x20X3 ) + 0.
```

C OBSERVANDO OS TERMOS QUE NAO CONTEM A, CONCLUImos QUE POR UMA TROCA DE
C VARIAVEIS ↑PT POR ↑QT NO PRIMEIRO, ↑PT POR ↑RT NO TERCEIRO
C E ↑QT POR ↑RT NO PENULTIMO, A EXPRESSAO SE ANULA.

C PORTANTO

L 1 ID,x10X2*x3DP=0
L 2 ID,x10X2*x3DQ=0
L 3 ID,x10X3*x2DP=0
L 4 ID,x10X3*x2DR=0
L 5 ID,x10C*x2DX3=0
L 6 ID,x10R*x2DX3=0
C CERTOS TERMOS PODEM SER INTEGRADOS NO CONTORNO.
C EXEMPLO PT(A,B,C)TR(LA,LB,LC)x10PEXP(P,X1)*4INC2(EXP(P,X2)-EXP(P,X3))
C ASSIM CTR=G+4*N*C2*DELTA(P+0+R)/3/(2PI)*%{2T}
L 7 ID,x10P*EXP(P,X1)*EXP(Q,X2)*EXP(R,X3)=[EXP(P,X2)-EXP(P,X3)]*
EXP(Q,X2)*EXP(R,X3)
L 9 ID,x200*EXP(P,X1)*EXP(Q,X2)*EXP(R,X3)=[EXP(Q,X3)-EXP(Q,X1)]
*EXP(P,X1)*EXP(R,X3)
L11 ID,x3DR*EXP(P,X1)*EXP(Q,X2)*EXP(R,X3)=[EXP(R,X1)-EXP(R,X2)]
*EXP(P,X1)*E(P,Q,X2)
C ZERANDO ALGUMAS INTEGRais NO CONTORNO
L13 ID,A0150,EXP(P,X2+)*EXP(Q,X2+)*EXP(R,X3)*PDX3=0
L14 ID,A0150,EXP(R,X1+)*EXP(P,X1+)*EXP(Q,X2)*QDX2=0
L15 ID,A0150,EXP(Q,X3+)*EXP(R,X3+)*EXP(P,X1)*PDX1=0
PRINT OUTPUT
*YEP

G4A *

```
+ EXP(P,X2)*EXP(Q,X2)*EXP(R,X3)*CTR  
* ( PP**(-2)*QQ**(-2)*RR**(-1)*A**2*x2DQ*x3DP*QDR ~ PP**(-2)*QQ**(-2)*RR**(-1)*A**2*x2DQ*x3DQ*PDR ~ PP**(-2)
*QQ**(-1)*RR**(-1)*A*x2DX3*PDR + PP**(-2)*QQ**(-1)*RR**(-1)*A*x2DX3*PDR + PP**(-2)*QQ**(-1)*RR**(-1)*A*x2DQ
*X3DQ ~ PP**(-2)*QQ**(-1)*RR**(-1)*A*x2DR*x3DP )
```

```
+ EXP(P,X3)*EXP(Q,X2)*EXP(R,X3)*CTR
```

```
* ( PP**(-2)*QQ**(-1)*RR**(-2)*A**2*X2DP*X3DR*QDR - PP**(-2)*CC**(-1)*RR**(-2)*A**2*X2DR*X30R*PDC + PP**(-2)
*QQ**(-1)*RR**(-1)*A*X2DX3*PDD - PP**(-2)*QQ**(-1)*RR**(-1)*A*X2DX3*PDR - PP**(-2)*QQ**(-1)*RR**(-1)*A*X2D
*X3DQ + PP**(-2)*QQ**(-1)*RR**(-1)*A*X2DR*X3DP )

+ EXP(Q,X1)*EXP(P,X1)*EXP(R,X3)*CTM
* (- PP**(-1)*QQ**(-2)*RR**(-1)*A*X1DX3*PDD + PP**(-1)*QQ**(-2)*RR**(-1)*A*X1DX3*QDR + PP**(-1)*QQ**(-2)*RR**(-1)
*A*X1DX3*3DP - PP**(-1)*QQ**(-2)*RR**(-1)*A*X1DR*X3DQ )

+ EXP(Q,X2)*EXP(P,X1)*EXP(R,X3)*CTM
* ( PP**(-1)*QQ**(-2)*RR**(-2)*A**2*X10Q*X30R*PDR - PP**(-1)*QQ**(-2)*RR**(-2)*A**2*X1DR*X3DR*PDD + PP**(-1)
*QQ**(-2)*RR**(-1)*A*X1DX3*PDD - PP**(-1)*QQ**(-2)*RR**(-1)*A*X1DX3*QDR - PP**(-1)*QQ**(-2)*RR**(-1)*A*X1DQ
*X3DP + PP**(-1)*CC**(-2)*RR**(-1)*A*X1DR*X3DQ )

+ EXP(R,X1)*EXP(P,X1)*EXP(Q,X2)*CTM
* ( - PP**(-1)*QQ**(-1)*RR**(-2)*A*X1DX2*PDR + PP**(-1)*QQ**(-1)*RR**(-2)*A*X1DX2*QDR - PP**(-1)*QQ**(-1)*RR**(-2)
*A*X1DQ*X2DR + PP**(-1)*QQ**(-1)*RR**(-2)*A*X1DR*X2DP ) + 0.

+ EXP(R,X2)*EXP(P,X1)*EXP(Q,X2)*CTM
* ( PP**(-1)*QQ**(-1)*RR**(-2)*A*X1DX2*PDR - PP**(-1)*QQ**(-1)*RR**(-2)*A*X1DX2*QDR + PP**(-1)*QQ**(-1)*RR**(-2)
*A*X1DQ*X2DR - PP**(-1)*QQ**(-1)*RR**(-2)*A*X1DR*X2DP ) + 0.
```

C FAZENDO UMA TROCA DE VARIAVEIS, OS TERMOS QUADRATICOS EM A SE REDUZEM
C A UN DELES; O MESMO ACONTECENDO COM OS LINEARES EM A.
C NESTA REDUCAO APARECE UM FATOR 3 QUE JA SIMPLIFICAMOS COM O QUE ESTA
C DENTRO DO CTM
C PORTANTO CTM=G**4*N*C2*DELTAP+Q+R1/(2PI)**(2T)
C ZERANDO OS OUTROS TERMOS

L 1 ID,EXP(P,X3)=0
L 2 ID,EXP(Q,X3)=0
L 3 ID,EXP(R,X1)=0
L 4 ID,EXP(P,X2)=0
C INTEGRANDO NA DELTA DE OIRAC
C CTM FICA CTM=G**4*N*C2/(2PI)**(2T)
L 5 ID,DOTPP,C(U+)-P(U)-R(U)
L 6 ID,EXP(P,X2)*EXP(Q,X2)=EXP(-R,X2)
L 7 ID,EXP(Q,X1)*EXP(P,X1)*EXP(-R,X1)
L 8 ID,POR=PP
L 9 ID,POR=RR
C ZERANDO INTEGRAIS DE R NO CONTORNO
L10 ID,RDX3=0
L11 ID,RDX2=0
PRINT OUTPUT
*YEP

G4A *

+ EXP(-R,X1)*EXP(R,X3)*CTM

* (- PP**(-1)*QQ**(-2)*RR**(-1)*A*X10P*X30P - PP**(-1)*QQ**(-2)*A*X10X3 + QQ**(-2)*RR**(-1)*A*X10X3)

+ EXP(-R,X2)*EXP(R,X3)*CTM

* (PP**(-2)*QQ**(-2)*A*X20P*X30P + 2.*PP**(-2)*QQ**(-1)*RR**(-1)*A*X20X3*PDR - PP**(-2)*QQ**(-1)*RR**(-1)

*A*X20P*X30P + PP**(-1)*QQ**(-1)*RR**(-1)*A*X20X3) + 0.

C VAMOS DEIXAR EMBUTIDO EM CTM AS EXPONENCIAIS,
C MUDAR O NOME DAS VARIAVEIS X2 PARA X1 E X3 PARA X2
C E R PARA S. ASSIM CTM=EXP(I*S(X2-X1))G**4*C2/(2PI)**(2T)

L 1 ID,EXP(-R,X1)*EXP(R,X3)*1

L 2 ID,EXP(-R,X2)*EXP(R,X3)*1

L 3 ID,D0TPR,X2(U+)*X1(U)

L 4 ID,D0TPR,X3(U+)*X2(U)

OLDNEW R=S,RR=SS

C QQ=(P+S)**2

C INTEGRAMOS EM P NA DIMENSÃO T USANDO A TABELA ABAIXO,

C OBTEIDA NO APENDICE A.

C NESTA, FOI LEVADO EM CONTA QUE TERMOS QUE CONTEM S(L) OU

C S(GA) SE ANULAM.

C G2(X,Y)=GAMA(X+Y), DG2(X,Y)=1/GAMA(X+Y), TS2=T/2, TM2=T-2

L 5 ID,PDX1*PDX2*PDS*QQ*ALFA+*PP**BETA+=DT(-BETA)*
EXPS(ALFA+BETA+2)*X10X2/2*G2(TS2,BETA+2)*G2(TS2,ALFA+1)
*G2(-ALFA-BETA-1,-TS2)*DG2(T,ALFA+BETA+3)

L 7 ID,PDX1*PDX2*QQ*ALFA+*PP**BETA+=DT(-BETA)*X10X2/2
*G2(-ALFA-BETA-1,-TS2)*G2(TS2,BETA+1)*
G2(TS2,ALFA+1)*DG2(T,ALFA+BETA+2)*EXPS(ALFA+BETA+1)

L 9 ID,PDS**2*QQ*ALFA+*PP**BETA+=DT(-BETA)*EXPS(ALFA+
BETA+2)*DG2(T,ALFA+BETA+2)*(G2(-ALFA-BETA-1,-TS2)*
G2(TS2,BETA+1)*G2(TS2,ALFA+1)/2+G2(-ALFA-BETA,-TS2)*
G2(TS2,ALFA))*G2(TS2,BETA+2))

L12 ID,QQ**ALFA+*PP**BETA+*PDS=-DT(-BETA)*EXPS(ALFA+BETA+1)*
G2(-ALFA-BETA,-TS2)*G2(TS2,BETA+1)*G2(TS2,ALFA)*DG2(T
,ALFA+BETA+1)

L14 ID,QQ**ALFA+*PP**BETA+=DT(-BETA)*EXPS(ALFA+BETA)*G2(-ALFA-
BETA,-TS2)*G2(TS2,BETA)*G2(TS2,ALFA)*DG2(T,ALFA+BETA)

L16 ID,QQ**ALFA+*PDX1*PDX2*0

L17 ID,QQ**ALFA+*X10X2*0

L18 ID,PP**BETA+*X10X2*0

C AO RESOLVERMOS AS INTEGRAIS DEIXAMOS EMBUTIDO EM CTM

C O VALOR COMUM (PI*SS)**(T/2), ENTAO

C CTM=+(PI*SS)**(T/2)*EXP(I*S(X2-X1))*G**4*C2/(2PI)**(2T)

N R

PRINT OUTPUT

*YEP

G4A *

+ G2(2,-TS2)*G2(TS2,0)*G2(TS2,-1)*DG2(T,-1)*EXPS(-2)*CTM

* (- 1./2.*SS**(-1)*A*X10X2)

+ G2(2,-TS2)*G2(TS2,-1)*G2(TS2,0)*DG2(T,-1)*EXPS(-2)*CTM

```
* ( ~ 1./2.*SS**(-1)**A*X1DX2 )

+ G2(3,-TS2)*G2(TS2,-1)*G2(TS2,-1)*DG2(1,-2)*EXPS(-3)*CTH
* ( 1./2.*A**2*X1DX2 )

+ EXPS(-3)*G2(3,-TS2)*G2(TS2,-1)*G2(TS2,-2)*DG2(T,-3)*CTH
* ( - A*X1DX2 )

+ EXPS(-2)*G2(2,-TS2)*G2(TS2,-1)*G2(TS2,-1)*DG2(T,-2)*CTH
* ( SS**(-1)*A*X1DX2 )

+ EXPS(-2)*G2(3,-TS2)*G2(TS2,-1)*G2(TS2,-1)*DG2(T,-2)*CTH
* ( - 2.*SS**(-1)*A*X1DX2 ) +0.

C CONTAMOS AS POTENCIAS EM TODOS OS TERMOS, OBTEMOS
C SS**(-3), QUE FICARA ENBUTIDO EM CTH.
C POR ISTO FAPEMOS
L 1 ID,EXPS(ALFA+)=1
L 2 ID,SS**ALFA+=1
C COM ISTO E O DITO ACIMA
C CTH=EXP(I*S(X2-X1))*SS**((T/2-3)*G**4N*C2*PI**((T/2)/(2PI))**((2T)
L 3 ID,G2(TS2,0)+TM2*G2(TS2,-1)/2
L 4 ID,G2(1,-TS2)+-2*G2(2,-TS2)/TM2
L 5 ID,DG2(T,0)+DG2(T,-2)/TM1/TM2
L 6 ID,DG2(T,-1)+DG2(T,-2)/TM2
L 7 ID,A1NBE,G2(3,-TS2)*G2(TS2,-2)+-G2(2,-TS2)*G2(TS2,-1)
L 8 ID,DG2(T,-3)+DG2(T,-2)*(T-3)
L10 ID,G2(TS2,1)+T*(T-2)*G2(TS2,-1)/4
L12 ID,G2(3,-TS2)*(4-T)*G2(2,-TS2)/2
L14 ID,TM2-T-2
L15 ID,ADISO,G2(2,-TS2)*G2(TS2,-1)*G2(TS2,-1)*DG2(T,-2)-
G2(2,-TS2)*G2(TS2,-1)*G2(TS2,-1)*DG2(T,-2)
NR
C INTEGRANDO EM S USANDO O APENDICE A TEMOS
C CTH=G**4N*C2*GAMA(T-3)*(MODULO(X2-X1))**((6-2T)/(2**6*I*T*GAMA(3-T/2)))
*BEGIN

G4A *
+ G2(2,-TS2)*G2(TS2,-1)*G2(TS2,-1)*DG2(T,-2)*CTH
* ( 2.*A*T*X1DX2 - 13./2.*A*X1DX2 - 1./4.*A**2*T*X1DX2 + A**2*X1DX2 ) +0.
```

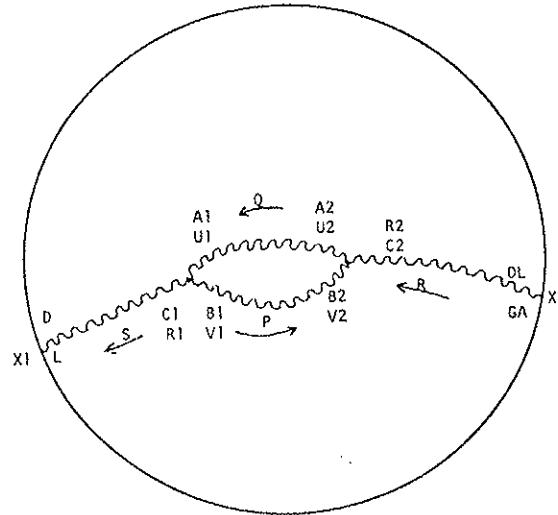
APÊNDICE C

CÁLCULO DO DIAGRAMA DE DOIS VÉRTICES COM TRÊS GLÚONS

SCHOONSCHIP, VERSION OF APRIL 1, 1977

TIME .19 SEGUNDOS

C ESTE PROGRAMA CALCULA O DIAGRAMA DE DOIS VERTICES COM
 C TRÊS GLÚONS, CUJA EXPRESSÃO É A (4.51).
 C NESTE PROGRAMA O SÍMBOLO CTM TEM O VALOR DADOS PELA
 C EXPRESSÃO (4.53), QUE IRÁ VARIAR NO DECORRER DO PROGRAMA
 C O SEU VALOR INICIAL E:
 C $CTM = G^{1/2} \pi^2 N^2 C_2 \delta(\vec{Q} - \vec{S} - \vec{P}) \delta(\vec{Q} - \vec{R} - \vec{Q}) / (2^2 (2\pi)^2 (2\pi T))$
 C ONDE G É A CONSTANTE DE ACOPLAMENTO DAS INTERAÇÕES FORTES,
 C C_2 É A CONSTANTE DE CASIMIR QUADRATICA E T A DIMENSÃO DO
 C ESPAÇO TEMPO.



```

I L=T,GA=T,R1=T,R2=T,M1=T,M2=T,H1=T,H2=T,ALFA,BETA
S T,SS,TS2
V P,Q,R,S,X1,X2
F VER,PRO,G2,DG2,EXPS
Z G48=X1(L)*X2(GA)*PRO(R2,GA,R,RR)*PRO(H1,M2,O,QQ)*
  VER(O,-S,-P,M1,R1,N1)
  *VER(-O,+P,R,M2,N2,R2)*PRO(L,R1,S,SS)*PRO(H1,N2,P,PP)*CTM
  *PRO(R2+,GA+,R+,RR+)*D(R2,GA)-A*R(R2)*R(GA)/RR
L 1 ID,PRO(R2+,GA+,R+,RR+)*D(R2,GA)-A*R(R2)*R(GA)/RR
L 2 ID,VER(O+,S+,P+,M1+,R1+,N1+)-(Q(R1)-P(R1))*D(M1,N1)-
  (S(N1)-O(M1))*D(R1,M1)+(P(M1)-S(M1))*D(N1,R1)
L 4 ID,QQQ=QQ
L 4 AL,RDR=RR
L 4 AL,PDP=PP
L 4 AL,SDS=SS
L 4 AL,DDTPR,O(GA+)=S(GA)+P(GA)
L 4 AL,DDTPR,O(GA+)=S(GA)+P(GA)
L 5 ID,DDTPR,R(GA+)=S(GA)
L 5 AL,PDP=PP
N R
B CTM
PRINT NLIST

```

```
PRINT NSTA
PRINT OUTPUT
*YEP

G48 *
+ CTH
* { 4.*T*SS**(-1)*RR**(-1)*A**2*POS*SDS*SDX1*SDX2 + 4.*T*SS**(-1)*RR**(-1)*A**2*PDS**2*SDX1*SDX2 + T*SS**(
*RR**(-1)*A**2*SDS**2*SDX1*SDX2 - 4.*T*SS**(-1)*A*PDS*PDX2*SDX1 - 2.*T*SS**(-1)*A*PDS*SDX1*SDX2 - 2.*T*SS*
*A*PDX2*SDS*SDX1 - T*SS**(-1)*A*SDS*SDX1*SDX2 - 4.*T*RR**(-1)*A*PDS*PDX1*SDX2 - 2.*T*RR**(-1)*A*PDS*SDX1*S
- 2.*T*RR**(-1)*A*PDX1*SDS*SDX2 - T*RR**(-1)*A*SDS*SDX1*SDX2 + 4.*T*PDX1*PDX2 + 2.*T*PDX1*SDX2 + 2.*T*PDX
*SDX1 + T*SDX1*SDX2 + SS**(-1)*RR**(-1)*QQ*A**2*SDS*SDX1*SDX2 + 2.*SS**(-1)*RR**(-1)*QQ*(-1)*PP*A**3*PDS*
*SDX1*SDX2 - SS**(-1)*RR**(-1)*QQ*(-1)*PP**2*A**3*SDS*SDX1*SDX2 + SS**(-1)*RR**(-1)*QQ*(-1)*A**3*PDS**2*
*SDX1*SDX2 + 2.*SS**(-1)*RR**(-1)*QQ*(-1)*A**3*POS**3*SDX1*SDX2 + SS**(-1)*RR**(-1)*PP*A**2*SDS*SDX1*SDX2
- SS**(-1)*RR**(-1)*PP*A**3*SDS*SDX1*SDX2 + SS**(-1)*RR**(-1)*PP**(-1)*A**3*PDS**2*SDS*SDX1*SDX2 + 2.*SS*
*RR**(-1)*PP**(-1)*A**3*PDS**3*SDX1*SDX2 - 6.*SS**(-1)*RR**(-1)*A**2*PDS*SDS*SDX1*SDX2 - 6.*SS**(-1)*RR**(-
*A**2*PDS**2*SDX1*SDX2 - 2.*SS**(-1)*RR**(-1)*A**2*SDS**2*SDX1*SDX2 - 2.*SS**(-1)*RR**(-1)*A**3*PDS*SDS*SD
*SDX2 - SS**(-1)*RR**(-1)*A**3*SDS**2*SDX1*SDX2 - SS**(-1)*QQ*A*SDX1*SDX2 - 2.*SS**(-1)*QQ*(-1)*PP*A*Q2*P
*PDX2*SDX1 + SS**(-1)*QQ*(-1)*PP**2*A**2*SDX1*SDX2 - 2.*SS**(-1)*QQ*(-1)*A**2*PDS**2*SDX1 - SS**(-1)*
*A**2*PDS**2*SDX1*SDX2 - SS**(-1)*PP*A*SDX1*SDX2 + SS**(-1)*PP*A**2*SDX1*SDX2 - 2.*SS**(-1)*PP**(-
*A**2*PDS*PDX2*SDS*SDX1 - 2.*SS**(-1)*PP**(-1)*A**2*PDS**2*PDX2*SDX1 + SS**(-1)*PP**(-1)*A**2*PDS**2*SDX1*
+ 6.*SS**(-1)*A*POS*PDX2*SDX1 + 3.*SS**(-1)*A*PDS*SDX1*SDX2 + 3.*SS**(-1)*A*PDX2*SDS*SDX1 + 2.*SS**(-1)*A
*SDS*SDX1*SDX2 + 3.*SS**(-1)*A**2*PDS*SDX1*SDX2 - SS**(-1)*A**2*PDX2*SDS*SDX1 + SS**(-1)*A**2*SDS*SDX1*SDX2
- RR**(-1)*QQ*A*SDX1*SDX2 - 2.*RR**(-1)*QQ*(-1)*PP*A**2*PDS*PDX1*SDX2 + RR**(-1)*QQ*(-1)*PP**2*A**2*SDX
*SDX2 - 2.*RR**(-1)*QQ*(-1)*A**2*PDS**2*PDX1*SDX2 - RR**(-1)*QQ*(-1)*A**2*PDS**2*SDX1*SDX2 - RR**(-1)*PP
*A*SDX1*SDX2 + RR**(-1)*PP*A**2*SDX1*SDX2 - 2.*RR**(-1)*PP**(-1)*A**2*PDS*PDX1*SDX2 - 2.*RR**(-1)*PP**
*A**2*PDS**2*PDX1*SDX2 + RR**(-1)*PP**(-1)*A**2*PDS**2*SDX1*SDX2 + 6.*RR**(-1)*A*PDS*PDX1*SDX2 + 3.*RR**(-
*A**PDS*SDX1*SDX2 + 3.*RR**(-1)*A*PDX1*SOS*SDX2 + 2.*RR**(-1)*A*SDS*SDX1*SDX2 + 3.*RR**(-1)*A**2*PDS*SDX1*SD
- RR**(-1)*A**2*PDX1*SDS*SDX2 + RR**(-1)*A**2*SDS*SDX1*SDX2 + QQ*X10X2 + 2.*QQ*(-1)*PP*A*PDX1*PDX2
+ 2.*QQ*(-1)*PP*A*SDS*X10X2 - 2.*QQ*(-1)*PP*A*SDX1*SDX2 - QQ*(-1)*PP**2*A*X10X2 - QQ*(-1)*PP**(-1)*A**2*P
*PDS*PDX1*SDS*SDX2 - QQ*(-1)*PP**(-1)*A**2*PDS*PDX2*SDS*SDX1 + QQ*(-1)*PP**(-1)*A**2*PDS**2*SDX1*SDX2
+ QQ*(-1)*PP**(-1)*A**2*PDX1*PDX2*SDS**2 + 2.*QQ*(-1)*A*PDS*PDX1*PDX2 + QQ*(-1)*A*POS*PDX1*SDX2 + QQ*(-
*A*PDS*PDX2*SDX1 - QQ*(-1)*A*PDX1*PDX2*SDS + QQ*(-1)*A*SDS*SDX1*SDX2 - QQ*(-1)*A*SDS**2*X10X2 - PP*A*X10
+ PP*X10X2 + 2.*PP*(-1)*A*PDS*PDX1*PDX2 + 3.*PP*(-1)*A*PDS*PDX1*SDX2 + 3.*PP*(-1)*A*PDS*PDX2*SDX1
- 4.*PP*(-1)*A*POS**2*X10X2 - PP*(-1)*A*PDX1*PDX2*SOS - 4.*A*POS*X10X2 + A*PDX1*SDX2 + A*PDX2*SDX1
```

= A*SDX1*SDX2 - 6.*PDX1*PDX2 - 3.*PDX1*SDX2 - 3.*PDX2*SDX1 + 4.*SDS*X1DX2 - 6.*SDX1*SDX2) + 0.

N R

C INTEGRANDO EM X1(L) E X2(GA) NO CONTORNO, OS TERMOS QUE CONTEM S(L) E
C S(GA) SE ANULAM.

L 1 ID,SDX1=0
L 1 AL,SDX2=0
L 1 AL,RR#*L+=SS**L
L 1 AL,SDS=SS
PRINT OUTPUT
*YEP

G4B *

+ CTH

+ (4.*T*PDX1*PDX2 + 2.*SS*QQ**(-1)*PP*A*X1DX2 - SS*QQ**(-1)*A*PDX1*PDX2 - SS*PP**(-1)*A*PDX1*PDX2 + 4.*SS
*X1DX2 + SS**2*QQ**(-1)*PP**(-1)*A**2*PDX1*PDX2 - SS**2*QQ**(-1)*A*X1DX2 + QQ*X1DX2 + 2.*QQ**(-1)*PP*A*PDX1
*PDX2 - QQ**(-1)*PP**2*A*X1DX2 + 2.*QQ**(-1)*A*PDS*PDX1*PDX2 - PP*A*X1DX2 + PP*X1DX2 + 2.*PP**(-1)*A*PDS*PDX1
*PDX2 - 4.*PP**(-1)*A*PDS**2*X1DX2 - 4.*A*PDS*X1DX2 - 6.*PDX1*PDX2) + 0.

C NO MOMENTO A CONSTANTE CTH VALE CTH=-EXP{IS(X1-X2)}/{PP*QQ*SS**2}
C G**4*N*C2/(2*(2*PI)**(2*T))
C QQ=(P+S)**2

B CTH,X1DX2
L 1 ID,CTH=CTH/PP/QQ
C DEPOIS DA SUBSTITUICAO ACIMA O NOVO VALOR DE CTH SERA
C CTH=-EXP{IS(X1-X2)}/SS**2*G**4*N*C2/(2*(2*PI)**(2*T))
C INTEGRAMOS EM P NA DIMENSAO T USANDO A TABELA ABAIXO.
C NESTA, FOI LEVADO EM CONTA QUE TERMOS QUE CONTEM S(L) OU
C S(GA) SE ANULAM.
C G2(X,Y)=GAHA(X+Y), DG2(X,Y)=1/GAHA(X+Y)
L 2 ID,PDX1*PDX2*PDS*QQ**ALFA+*PP**BETA+=-DT(-BETA)*
EXP(ALFA+BETA+1)*X1DX2/2*G2(TS2,BETA+2)*G2(TS2,ALFA+1)
*G2(-ALFA-BETA-1,-TS2)*G2(T,ALFA+BETA+3)
L 4 ID,PDX1*PDX2*QQ**ALFA+*PP**BETA+=DT(-BETA)*X1DX2/2
*G2(-ALFA-BETA-1,-TS2)*G2(TS2,BETA+1)
L 6 ID,PDS**2*QQ**ALFA+*PP**BETA+=DT(-BETA)*EXP(ALFA+BETA+1)
*G2(T,ALFA+1)*G2(T,ALFA+BETA+2)*EXP(ALFA+BETA+1)
*G2(TS2,BETA+2)*G2(TS2,ALFA+1)*G2(TS2,BETA+1)/2+G2(-ALFA-BETA,-TS2)*
G2(TS2,BETA+1)*G2(TS2,ALFA+1)/2+G2(-ALFA-BETA,-TS2)
*G2(TS2,ALFA)*G2(TS2,BETA+2)
L 9 ID,QQ**ALFA+*PP**BETA+=PDS=-DT(-BETA)*EXP(ALFA+BETA+1)*
G2(-ALFA-BETA,-TS2)*G2(TS2,BETA+1)*G2(TS2,ALFA)*DG2(T
,ALFA+BETA+1)
L11 ID,QQ**ALFA+*PP**BETA+=DT(-BETA)*EXP(ALFA+BETA)*G2(-ALFA-
BETA,-TS2)*G2(TS2,BETA)*G2(TS2,ALFA)*DG2(T,ALFA+BETA)
L13 ID,QQ**ALFA+*PDX1*PDX2=0
L14 ID,QQ**ALFA+*X1DX2=0
L15 ID,PP**BETA+*X1DX2=0
C AO RESOLVERMOS AS INTEGRAIS DEIXAMOS EMBUTIDO EM CTH
C O VALOR COMUM (PI*SS)**(T/2), ENTAO
C CTH=-{PI*SS)**(T/2)}*EXP{IS(X1-X2)}/SS**2*G**4*N*C2
C /(2*(2*PI)**(2*T))
N R

```
PRINT OUTPUT
*YEP

G4B =
+ G2(1,-TS2)*G2(TS2,0)*G2(TS2,0)*DG2(T,0)*EXP(-1)*CTH*X1DX2
* (- 3. + 2.*T )

+ G2(2,-TS2)*G2(TS2,0)*G2(TS2,-1)*DG2(T,-1)*EXP(-2)*CTH*X1DX2
* (- 1./2.*SS*A )

+
+ G2(2,-TS2)*G2(TS2,-1)*G2(TS2,0)*DG2(T,-1)*EXP(-2)*CTH*X1DX2
* (- 1./2.*SS*A )

+ G2(3,-TS2)*G2(TS2,-1)*G2(TS2,-1)*DG2(T,-2)*EXP(-3)*CTH*X1DX2
* ( 1./2.*SS**2*A**2 )

+ EXP(-3)*G2(3,-TS2)*G2(TS2,-1)*G2(TS2,-2)*DG2(T,-3)*CTH*X1DX2
* (- SS**2*A )

+ EXP(-2)*G2(2,-TS2)*G2(TS2,-1)*G2(TS2,-1)*DG2(T,-2)*CTH*X1DX2
* ( 4.*SS )

+ EXP(-1)*G2(TS2,0)*G2(TS2,0)*G2(2,-TS2)*DG2(T,0)*CTH*X1DX2
* (- A )

+ EXP(-1)*G2(TS2,1)*G2(TS2,-1)*G2(2,-TS2)*DG2(T,0)*CTH*X1DX2
* (- A )

+ EXP(-1)*G2(2,-TS2)*G2(TS2,0)*G2(TS2,-1)*DG2(T,-1)*CTH*X1DX2
* ( 4.*A )

+ EXP(-1)*DG2(T,-1)*G2(2,-TS2)*G2(TS2,-1)*G2(TS2,0)*CTH*X1DX2
* (- 2.*A )
```

```
+ EXP(-1)*DG2(T,-1)*G2(3,-TS2)*G2(TS2,-1)*G2(TS2,0)*CTM*X10X2  
* (- 4.*A) + 0.
```

```
C DEPOIS DESTAS INTEGRACOES APARECE UM FATOR SS**((T/2)*PI**((T/2))  
C CONTANDO AS POTENCIAS EM TODOS OS TERMOS, OBTEMOS  
C SS**((T/2-3)), QUE FICARA EMBUTIDO EM CTM.  
C POR ISTO FAREMOS  
L 1 ID,EXPS(ALFA+)=1  
L 2 ID,SS**ALFA+=1  
C COM ISTO E O DITO ACIMA  
C CTM=-EXP((S(X1-X2)SS**((T/2-3)*G2*(TS2,-1)/2)/(2*(2PI)**(2T)))*PI**((T/2))  
L 3 ID,G2(TS2,0)=TM2*G2(TS2,-1)/2  
L 4 ID,G2(1,-TS2)=-2*G2(2,-TS2)/TM2  
L 5 ID,DG2(T,0)=DG2(T,-2)/TM1/TM2  
L 6 ID,DG2(T,-1)=DG2(T,-2)/TM2  
L 7 ID,A1N8E,G2(3,-TS2)*G2(TS2,-2)=-G2(2,-TS2)*G2(TS2,-1)  
L 8 ID,DG2(T,-3)=DG2(T,-2)*(T-3)  
L10 ID,G2(TS2,1)=T*(T-2)*G2(TS2,-1)/4  
L12 ID,G2(3,-TS2)=(4-T)*G2(2,-TS2)/2  
L14 ID,A1S0,G2(2,-TS2)*G2(TS2,-1)*G2(TS2,-1)*DG2(T,-2)=  
    G2(2,-TS2)*G2(TS2,-1)*G2(T,-2)  
NR  
C INTEGRANDO EM S USANDO O APENDICE A TEMOS QUE  
C CTM FICA  
C CTM=-G4NC2G2(T,-3)*DG2(3,-TS2)/(PI**T*128MUD(X2-X1)**(2T-6))  
C E G4B FICA  
*BEGIN
```

G4B =

```
+ G2(2,-TS2)*G2(TS2,-1)*G2(TS2,-1)*DG2(T,-2)*CTM*X10X2  
* (- 4. + 2.*T*A + 1./2.*T*A*TM2**(-1)*TM1**(-1) - 1./4.*T*A**2 - T*TM1**(-1) - 1./4.*T**2*A*TM2**(-1)*TM1**(-1)  
- 13./2.*A - 1./4.*A*TM2*TM1**(-1) + A**2 + 3./2.*TM1**(-1) ) + 0.
```