UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

UM FORMALISMO GEOMÉTRICO
PARA OS FUNDAMENTOS
DA MECÂNICA ANALÍTICA

Sérgio Ferreira Cortizo

Dissertação de Mestrado apresentada
ao Instituto de Física
da Universidade de São Paulo

SÃO PAULO 1988

Aos Meus Pais

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram na elaboração deste trabalho. Gostaria de agradecer em particular ao meu orientador, Prof. Dr. Alexandre Augusto Martins Rodrigues, e ao Prof. Dr. Henrique Fleming, sem os quais esta dissertação não teria sido escrita.

	Agradecimentos	<i>iv</i>
	Resumo	<i>vi</i>
	Abstract	<i>vii</i>
	Introdução	<i>viii</i>
	Convenções	<i>xiii</i>
Parte 1	Vínculos holônomos	1
	1.1 Mecânica newtoniana	1
	1.2 Vínculos sobre sistemas de partículas	4
	1.3 Mecânica lagrangeana	15
Parte 2	Vínculos não holônomos	17
	2.1 Sistemas holônomos	17
	2.2 Corpo rígido	19
	2.3 Vínculos sobre sistemas holônomos	31
	Apêndice	42
	Bibliografia	45

A mecânica analítica clássica tem passado, nas últimas décadas, por um processo de reformulação de suas bases matemáticas.

Nosso objetivo principal nesta dissertação é estender essa reformulação à dedução das *equações de Lagrange* contida no tratado “*Mécanique Analytique*”, do próprio J.-L. Lagrange.

A dissertação está dividida em duas partes. Na primeira apresentamos a dedução das equações de Lagrange segundo o formalismo matemático da geometria diferencial. Na segunda parte estendemos os resultados obtidos anteriormente a uma classe mais geral de sistemas mecânicos e vínculos.

ABSTRACT

The mathematical basis of classical analytical mechanics has been going through a process of reformulation in the last decades.

Our main objective in this dissertation is to extend this reformulation to the deduction of *Lagrange's equations* that is found in Lagrange's treatise, "Mécanique Analytique".

The dissertation is divided into two parts. In the first part, we present the deduction of Lagrange's equations according to the mathematical formalism of differential geometry. In the second part, we extend the previously obtained results to a more general class of mechanical systems and constraints.

A mecânica analítica nasceu com o tratado “*Mécanique Analytique*”^[21] de J.-L. Lagrange, publicado em 1788. Nessa obra Lagrange (1736-1813) deduziu as equações que hoje levam seu nome a partir das leis de Newton e do princípio de d’Alembert. No século XVIII a análise matemática estava pouco desenvolvida, o que não impediu Lagrange de chegar às suas equações e com o auxílio delas resolver problemas até então abertos, como o da determinação dos movimentos de um peão simétrico em um campo gravitacional uniforme com um ponto do eixo fixo em um referencial inercial, que foi então reduzido a quadraturas elípticas.

A dedução de Lagrange é rigorosa, mesmo para os padrões atuais, e ainda hoje é apresentada, com pouquíssimas alterações, nos livros de mecânica analítica (veja, por exemplo, Gantmacher^[13] ou Goldstein^[15]). Com ela foi introduzido na mecânica o conceito de *sistema de coordenadas generalizadas* $(q^1, \dots, q^n)$, como parametrização das possíveis posições de

um sistema sujeito a um vínculo holônomo (n é o número de graus de liberdade do sistema vinculado).

No começo do século XIX Hamilton (1805-1865) introduz o *espaço de fase* na mecânica analítica substituindo as *velocidades generalizadas* $(\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$, com as quais Lagrange escreveu suas equações de movimento, pelos *momentos generalizados* $(p_1, \dots, p_n)$, chegando assim às *equações de Hamilton*. A estrutura desse espaço e dessas equações foi estudada por outros pesquisadores como Jacobi, Poisson e Liouville (veja, por exemplo, Whittaker^[34]).

Paralelamente ao desenvolvimento da mecânica analítica, e de forma independente, estavam sendo escritos, também no século XIX, os trabalhos clássicos da geometria diferencial por Gauss e Riemann, que foram posteriormente desenvolvidos pelas contribuições de Christoffel, Ricci, Levi-Civita, E. Cartan, Ehresmann, e muitos outros. No início do século XX outras linhas de pesquisa, representadas por nomes como Poincaré e S. Lie, juntaram-se a essa, resultando dessa fusão uma série de conceitos correlacionados — variedades diferenciáveis, grupos de Lie, formas diferenciais, espaços fibrados, conexões infinitesimais, entre outros — que hoje são comuns a vários campos da matemática. À medida que essa situação foi se definindo, no decorrer desse século, alguns matemáticos como Birkhoff, Siegel, Kolmogorov e Lichnerowicz perceberam que muitas noções clássicas da mecânica analítica, desenvolvidas no século XIX, poderiam ser descritas de forma mais adequada em termos desses novos conceitos. Assim nasceu, por exemplo, a idéia de *espaço de configurações* de um sistema mecânico, quando se percebeu que o conjunto de todas as possíveis posições de um sistema mecânico (do tipo estudado na mecânica analítica clássica) possui uma estrutura natural de *variedade diferenciável*, e que essa descrição é preferível a uma parametrização desse conjunto por um sistema de coordenadas

generalizadas $(q^1, \dots, q^n)$ particular, como se fazia anteriormente.

Da mesma forma, o *espaço de estados* do sistema, anteriormente parametrizado pelas coordenadas e velocidades generalizadas $(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$, foi identificado com o *fibrado tangente* à variedade de configurações; e o *espaço de fase*, anteriormente parametrizado pelas coordenadas e momentos generalizados $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$, com o *fibrado cotangente* à variedade de configurações. As equações de Lagrange e Hamilton, bem como outros objetos a elas relacionados como os colchetes de Poisson e o volume de Liouville, foram então descritas através das estruturas naturais desses espaços; por exemplo, todo fibrado cotangente possui uma estrutura natural de variedade simplética, através da qual podemos definir as equações de Hamilton, os colchetes de Poisson e o volume de Liouville. O resultado desse processo de reformulação está apresentado, com detalhes, nos livros de Abraham e Marsden^[1] e Arnold^[3].

Nosso objetivo principal nesta dissertação é estender essa reformulação à dedução original das equações de Lagrange. Isto é, vamos procurar refazer o trabalho clássico de Lagrange com o auxílio de um formalismo matemático do qual ele não dispunha, e que foi desenvolvido desde então pelo estudo da geometria diferencial. Esta revisão seria necessária mesmo que apenas para completar a reformulação geral da mecânica analítica que descrevemos acima. Além disso, esperamos que o uso dessas novas “ferramentas matemáticas” ajude nos pontos delicados da antiga dedução, e que nos forneça uma visão mais clara de todo o quadro.

A dissertação está dividida em duas partes, que resumimos a seguir.

Na primeira parte, intitulada *vínculos holônomos*, apresentamos a dedução das equações de Lagrange a partir das leis de Newton para um sistema mecânico constituído por um vínculo holônomo sobre um sistema de partículas. Na secção 1.1 introduzimos a noção de *sistema de partículas* em uma

forma “geometrizada” (definição 1.1.1); isto é, como um espaço euclidiano (de dimensão arbitrária) munido de estruturas adicionais. Cada ponto deste espaço representa uma “configuração” de um sistema de partículas não vinculado (no sentido usual desses termos na mecânica analítica), isto é, fixar um ponto deste espaço significa fixar um conjunto de posições, uma para cada partícula do sistema. As estruturas adicionais descrevem as massas dessas partículas e as forças através das quais elas interagem entre si e com o exterior. Representamos também nesta secção alguns conceitos e resultados elementares da mecânica newtoniana nesta forma “geometrizada”.

Na secção 1.2 introduzimos a definição de *vínculo (holônomo)* sobre um sistema de partículas como uma *subvariedade* do espaço de configurações não vinculadas munida de uma *força de reação vincular* capaz de manter o sistema na restrição vincular se a condição inicial do movimento respeitar essa restrição (definição 1.2.2). Em seguida enunciamos e provamos um teorema que “classifica” todas as possíveis forças de reação vincular (teorema 1.2.5). Este teorema nos fornece três corolários importantes: o primeiro (1.2.6) nos permite definir a *reação vincular d’Alembertiana* (aquela especificada pelo *princípio de d’Alembert* no formalismo clássico); o segundo (1.2.14) estabelece as equações de Lagrange em uma de suas várias versões; e o terceiro (1.2.15) é uma expressão sem similar no formalismo clássico, que nos fornece a reação vincular sem precisarmos usar os *multiplicadores de Lagrange* ou resolver as equações de movimento. Finalizamos a primeira parte com o estudo, na secção 1.3, do caso das forças conservativas, que completa a dedução das equações de Lagrange a partir da mecânica newtoniana.

Na segunda parte da dissertação, intitulada *vínculos não holônomos*, procuramos generalizar os resultados obtidos anteriormente, nos afastando do contexto da dedução original das equações de Lagrange. Introduzimos na secção 2.1 a definição de *sistema holônomo* (definição 2.1.1); tais sistemas

podem ser construídos tomando-se um vínculo holônomo sobre um sistema de partículas, como foi feito na primeira parte da dissertação. O corpo rígido é um exemplo de sistema holônomo que não pode ser construído dessa maneira pois, em geral, tais objetos possuem uma distribuição contínua de massa. A secção 2.2 é dedicada à demonstração de que um corpo rígido pode ser descrito como um sistema holônomo (no sentido da definição 2.1.1).

Na última secção (2.3) apresentamos uma definição de vínculo sobre sistemas holônomos bastante mais geral que a introduzida na secção 1.2. Esta definição inclui os vínculos não holônomos regulares, isto é, aqueles cuja restrição vincular pode ser representada matematicamente por uma *distribuição* (no sentido de Frobenius) sobre a variedade das configurações não vinculadas. Mostramos então que o teorema de “classificação” das reações vinculares ainda vale nesse contexto mais geral (teorema 2.3.5), bem como os resultados obtidos anteriormente como corolários desse teorema; em particular, demonstramos que vale a expressão que nos fornece diretamente a reação vincular, mesmo que o vínculo considerado seja não holônomo.

CONVENÇÕES

Todos os objetos e aplicações aqui considerados serão supostos de classe C^∞ , isto é, infinitamente diferenciáveis.

Vamos omitir as inclusões na composição de aplicações, para não sobrecarregar a notação.

Sempre que estivermos trabalhando em coordenadas locais vamos utilizar a *convenção da soma*, isto é, subentender a soma em todos os índices que comparecem duas vezes —uma em posição superior e outra inferior— em uma mesma expressão.

Usaremos o símbolo ‘■’ para indicar “final de prova” nas demonstrações.

1.1 MECÂNICA NEWTONIANA

Nesta secção vamos reunir algumas noções básicas da mecânica newtoniana em algumas definições e proposições. Começaremos pela definição de *sistema de partículas*.

1.1.1 Definição. Chamaremos de **sistema de partículas** uma quadra (N, g, M, F) tal que:

- (i) (N, g) é um **espaço euclidiano**—isto é, uma variedade afim N , de dimensão finita, munida de uma métrica riemanniana g invariante por translações afins;
- (ii) $M:TN \rightarrow TN$ é um tensor sobre N , simétrico, definido positivo — segundo g — e invariante por translações afins; e

(iii) $F:TN \rightarrow TN$ é uma aplicação não necessariamente tensorial mas que preserva o ponto base ($\tau_N \circ F = \tau_N$, onde $\tau_N:TN \rightarrow N$ é o fibrado tangente à N).

Se (N, g, M, F) é um sistema de partículas, chamaremos N de espaço de configurações (do sistema), M de tensor de massa (pois leva uma velocidade $v \in TN$ à quantidade de movimento $M(v) \in TN$) e F de campo de forças (dependentes da posição e da velocidade do sistema).

1.1.2 Exemplo. Consideremos um conjunto de n partículas que se movem no espaço euclidiano tridimensional da mecânica newtoniana. Fixando um sistema de coordenadas cartesiano nesse espaço podemos descrever a posição da i -ésima partícula por $\vec{x}_i \in \mathbb{R}^3$ ($i = 1, \dots, n$). O espaço de configurações N da definição de sistema de partículas acima será, neste exemplo, $\mathbb{R}^{3n}$ munido de sua métrica euclidiana usual. Se $m_1, \dots, m_n$ são as massas das partículas então o tensor de massa M leva

$$(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \in \mathbb{R}^{6n} \cong T\mathbb{R}^{3n}$$

ao vetor

$$(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, m_1\vec{v}_1, \dots, m_n\vec{v}_n) \in \mathbb{R}^{6n} \cong T\mathbb{R}^{3n}.$$

O campo de forças F é simplesmente a aplicação $F: \mathbb{R}^{6n} \rightarrow \mathbb{R}^{6n}$ que associa a cada estado

$$(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$$

o vetor

$$(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n),$$

onde $\vec{f}_i \in \mathbb{R}^{3n}$ ($i = 1, \dots, n$) é a força que age sobre a i -ésima partícula e que depende, em geral, da posição e da velocidade de todas as partículas que compõem o sistema.

1.1.3 Proposição. Se (N, g, M, F) é um sistema de partículas então o tensor m definido por $m(X, Y) = g[X, M(Y)]$ é uma métrica euclideana sobre N .

Prova. Basta lembrar que M é g -simétrico, definido positivo, e invariante por translações afins. ■

1.1.4 Definição. Dado um sistema de partículas (N, g, M, F) , definimos sua **energia cinética** $K: TN \rightarrow \mathbb{R}$ por $K(v) = \frac{1}{2}m(v, v)$.

A proposição 1.1.5(ii) abaixo afirma simplesmente que se um movimento c do sistema satisfaz a *Lei de Newton* ($F \circ v = M \circ a$) então a variação temporal da *energia cinética* é igual ao *trabalho* $g(v, F \circ v)$ da força F sobre o sistema.

1.1.5 Proposição. Consideremos um sistema de partículas (N, g, M, F) e seja $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$ uma curva sobre N . Se representarmos a velocidade e aceleração de c por $v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow TN$ e $a: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow TN$ (respec.), então:

- (i) $\frac{d}{dt}(M \circ v) = M \circ a$; e ainda
- (ii) se $F \circ v = M \circ a$ então $\frac{d}{dt}(K \circ v) = g(v, F \circ v)$.

Prova. O item (i) decorre da invariância de M pelas translações afins e o (ii) da definição de K :

$$\frac{d}{dt}(K \circ v) = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}m(v, v) \right] = m(v, a) = g(v, M \circ a) = g(v, F \circ v). \quad \blacksquare$$

1.1.6 Exemplo. No exemplo 1.1.2 acima a energia cinética se escreve

$$K(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}m_i \|\vec{v}_i\|^2,$$

e além disso, uma curva $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$ satisfaz $F \circ v = M \circ a$ se e somente se $\vec{f}_i = m_i \vec{a}_i$, $i = 1, \dots, n$.

A proposição 1.1.3 mostra que estamos considerando duas métricas simultaneamente sobre N (que são diferentes, a menos que M seja a identidade), isto é *inevitável* e as duas métricas (g e m , segundo a nossa notação) não devem ser confundidas: a primeira — g , que chamaremos de *métrica espacial*— nos fornece o *trabalho* $g(v, f)$ de uma *força* $f \in T_x N$ sobre um *estado* $v \in T_x N$ ($x \in N$); e a segunda — m , que chamaremos de *métrica das massas*— nos fornece a *energia cinética* $K(v)$ do sistema quando ele se encontra em um *estado* $v \in TN$ ($K(v) = \frac{1}{2}m(v, v)$).

1.2 VÍNCULOS SOBRE SISTEMAS DE PARTÍCULAS

Vamos introduzir agora a definição de *vínculo* (*holônomo*) sobre um sistema de partículas, mas necessitamos antes de alguma notação.

1.2.1 Notação. *Seja (N, g) um espaço euclidiano, $Q \subset N$ uma subvariedade (sem bordo) de N , e $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Q$ uma curva sobre Q . Designaremos por $TN|Q$ a união dos $T_q N$, com $q \in Q$; e por $\pi: TN|Q \rightarrow Q$ o fibrado vetorial definido de maneira óbvia. Além disso, vamos indicar por $v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow TQ$ e $a: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow TN|Q$ a velocidade e a aceleração (respec.) de uma curva $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Q \subset N$.*

1.2.2 Definição. *Um par (Q, F_{vin}) é um **vínculo** sobre um sistema de partículas (N, g, M, F_{ext}) se:*

- (i) $Q \subset N$ for uma subvariedade sem bordo de N (não necessariamente de codimensão 1); e
- (ii) $F_{vin}: TQ \rightarrow TN|Q$ uma aplicação que preserva o ponto base (isto é: $\pi \circ F_{vin} = \tau_Q$), e tal que para qualquer $v_0 \in TQ$ exista uma curva $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Q$ com $v(0) = v_0$ e $(F_{vin} + F_{ext}) \circ v = M \circ a$.

Se (Q, F_{vin}) for um vínculo então diremos que F_{vin} é uma **reação vincular** sobre Q .

Nosso objetivo corrente é o teorema 1.2.5.

1.2.3 Definição. Se (N, h) é um espaço euclidiano ($h \in \{g, m\}$) e $Q \subset N$ uma subvariedade (sem bordo) de N , definimos $\|^\hbar: TN|Q \rightarrow TQ$ pela projeção ortogonal —segundo h — de $T_q N$ sobre $T_q Q$ ($q \in Q$) e $\perp^\hbar: TN|Q \rightarrow TN|Q$ pela projeção (segundo h) de $T_q N$ sobre $(T_q Q)^\perp \subset T_q N$ ($q \in Q$). Em outras palavras, os vetores $\|^\hbar(X)$ e $\perp^\hbar(X)$ são as componentes paralela e normal a $T_q Q$ (respec.), do vetor $X \in T_q N$, segundo a métrica h .

1.2.4 Notação. Se Q é uma variedade, representaremos por $\mathcal{X}(Q)$ o conjunto dos **campos vetoriais** sobre Q (secções de $\tau_Q: TQ \rightarrow Q$), e por $\tilde{\mathcal{X}}(Q)$ o conjunto dos **campos vetoriais dependentes da velocidade** sobre Q ; isto é:

$$\tilde{\mathcal{X}}(Q) = \{X: TQ \rightarrow TQ \mid \tau_Q \circ X = \tau_Q\}.$$

Enunciamos a seguir o teorema central desta secção.

1.2.5 Teorema. Seja (N, g, M, F_{ext}) um sistema de partículas e $Q \subset N$ uma subvariedade de N (não necessariamente de codimensão 1). Para cada campo $X \in \tilde{\mathcal{X}}(Q)$ existe uma, e uma única, reação vincular $F_{vin}: TQ \rightarrow TN|Q$ tal que $\|^\hbar \circ F_{vin} = X$.

Observemos que o teorema 1.2.5 acima “parametriza” pelo conjunto $\tilde{\mathcal{X}}(Q)$ o espaço de *todas* as reações vinculares sobre Q (inclusive aquelas associadas às várias formas de *atrito* e *forças viscosas*, dependentes ou não da velocidade), que ficam determinadas por sua componente tangencial —segundo a métrica g — à subvariedade Q ; isto é, por sua componente apta a realizar trabalho sobre o sistema (prop. 1.1.5).

1.2.6 Corolário. Se (N, g, M, F_{ext}) é um sistema de partículas e $Q \subset N$ uma subvariedade de N então existe uma, e uma única, reação vincular F_{vin} sobre Q tal que $\|g \circ F_{vin} = 0$.

1.2.7 Definição. Chamaremos de **reação vincular d'Alembertiana** sobre Q aquela determinada pelo corolário 1.2.6 acima. Diremos também que (Q, F_{vin}) é um **vínculo d'Alembertiano** se F_{vin} for a reação d'Alembertiana sobre Q ; isto é, se $\|g \circ F_{vin} = 0$.

Os vínculos d'Alembertianos são os únicos estudados no formalismo clássico, onde o princípio de d'Alembert e o princípio das velocidades virtuais são utilizados para determinar a reação vincular d'Alembertiana sobre uma restrição vincular dada (veja o comentário 1.2.16 adiante).

O restante dessa secção será dedicado à prova do teorema 1.2.5 (que depende de uma seqüência de lemas) e de alguns outros resultados correlacionados.

1.2.8 Notação. Se (N, h) é um espaço euclidiano ($h \in \{g, m\}$) e $Q \subset N$ uma subvariedade de N então designaremos por $\bar{h}$ a métrica riemanniana definida por inclusão sobre Q ; e por $i^*: T^*N|_Q \rightarrow T^*Q$ o “pull-back” de covetores pela inclusão $i: Q \rightarrow N$. Além disso, em uma variedade M ($M \in \{N, Q\}$) munida de uma métrica riemanniana h ($h \in \{g, m, \bar{g}, \bar{m}\}$), representaremos por $h^\flat: TM \rightarrow T^*M$ e $h^\sharp: T^*M \rightarrow TM$ as aplicações definidas por $[h^\flat(X)](Y) = h(X, Y)$ e $h^\sharp = (h^\flat)^{-1}$ (abaixamento e levantamento (respec.) de índices segundo a métrica h).

A proposição seguinte é bem conhecida da geometria diferencial e será enunciada (sem prova) apenas para fixar notação.

1.2.9 Proposição. *Se $Q \subset N$ é uma subvariedade de um espaço euclidiano (N, h) e $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Q$ uma curva sobre Q , então —com v e a definidos como em 1.2.1— temos que:*

$$(i) \quad \| \circ a = \nabla_v^{\bar{h}} v, \text{ e}$$

$$(ii) \quad \perp^h \circ a = \Delta^h \circ v,$$

onde $\nabla^{\bar{h}}$ é a conexão de Levi-Civita (sobre Q) associada à métrica $\bar{h}$, e $\Delta^h: TQ \rightarrow TN|_Q$ uma aplicação definida apenas pela métrica h e pela inclusão $Q \subset N$ (não depende da curva c).

1.2.10 Definição. *Seja (N, g, M, F_{ext}) um sistema de partículas e $Q \subset N$ uma subvariedade de N . Além das métricas $\bar{g}$ e $\bar{m}$ induzidas em Q segundo 1.2.8, definimos o tensor $\bar{M}: TQ \rightarrow TQ$ por $\bar{M} = \| \circ (M|_{TQ})$.*

1.2.11 Lema. *Nas condições da definição 1.2.10 acima, e com a notação introduzida em 1.2.8, temos que:*

$$(i) \quad \bar{M} = \bar{g}^\sharp \circ \bar{m}^\flat, \text{ e}$$

$$(ii) \quad \| \circ (M|_{TN|_Q}) = \bar{M} \circ \|^\flat.$$

Prova. Lembrando que $\| \circ g^\flat = \bar{g}^\sharp \circ i^* \circ (g^\flat|_{TN|_Q})$ temos, para o item (i):

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \| \circ (M|_{TQ}) \\ &= \bar{g}^\sharp \circ i^* \circ (g^\flat|_{TN|_Q}) \circ (M|_{TQ}) \\ &= \bar{g}^\sharp \circ i^* \circ (m^\flat|_{TQ}) \\ &= \bar{g}^\sharp \circ \bar{m}^\flat, \end{aligned}$$

e para o item (ii):

$$\begin{aligned}
\|g \circ (M|_{TN|Q}) &= \bar{g}^\sharp \circ i^* \circ (g^\flat|_{TN|Q}) \circ (M|_{TN|Q}) \\
&= \bar{g}^\sharp \circ i^* \circ (m^\flat|_{TN|Q}) \\
&= \bar{g}^\sharp \circ (\bar{m}^\flat \circ \bar{m}^\sharp) \circ i^* \circ (m^\flat|_{TN|Q}) \\
&= (\bar{g}^\sharp \circ \bar{m}^\flat) \circ \|m \\
&= \bar{M} \circ \|m. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

1.2.12 Lema. *Se (N, g, M, F_{ext}) é um sistema de partículas, $Q \subset N$ uma subvariedade, e $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Q$ uma curva sobre Q , então, mantendo a notação anterior, temos que:*

$$(i) \quad \|g \circ M \circ a = \bar{M} \circ \nabla_v^{\bar{m}} v, \text{ e}$$

$$(ii) \quad \perp^g \circ M \circ a = M \circ \Delta^m \circ v + \Xi \circ \bar{M} \circ \nabla_v^{\bar{m}} v,$$

onde $\Xi: TQ \rightarrow TN$ é o tensor definido por $\Xi = (M \circ \bar{M}^{-1} - id_{TQ})$.

Prova. Para provarmos (i) basta utilizarmos o lema anterior (1.2.11(ii)):

$$(\|g \circ M) \circ a = (\bar{M} \circ \|m) \circ a = \bar{M} \circ (\|m \circ a) = \bar{M} \circ \nabla_v^{\bar{m}} v.$$

Para provar o item (ii) lembramos que $\|h + \perp^h = id_{TN|Q}$ ($h \in \{g, m\}$); logo

$$\begin{aligned}
\perp^g \circ M \circ a &= (id_{TN|Q} - \|g) \circ M \circ a \\
&= (M - \|g \circ M) \circ (\perp^m \circ a + \|m \circ a) \\
&= (M - \bar{M} \circ \|m) \circ (\Delta^m \circ v + \nabla_v^{\bar{m}} v) \\
&= M \circ \Delta^m \circ v + (M - \bar{M}) \circ \nabla_v^{\bar{m}} v \\
&= M \circ \Delta^m \circ v + (M \circ \bar{M}^{-1} - id_{TQ}) \circ \bar{M} \circ \nabla_v^{\bar{m}} v,
\end{aligned}$$

onde usamos que $\|m \circ \Delta^m = 0$, $\|g|_{TQ} = id_{TQ}$, e que existe $\bar{M}^{-1}$ (o lema 1.2.11(i) nos garante que $\bar{M}$ é inversível pois $\bar{g}^\sharp$ e $\bar{m}^\flat$ o são). $\blacksquare$

Estamos prontos para a demonstração do teorema 1.2.5, mas antes gostaríamos que o leitor comparasse o enunciado da proposição 1.2.9 com o do lema 1.2.12, observando que em 1.2.12(i) projetamos ortogonalmente o vetor $M \circ a$ sobre TQ segundo a métrica g , mas obtemos como resultado $\bar{M}$ aplicado na derivada covariante $\nabla_v^{\bar{m}} v$ definida a partir da métrica $\bar{m}$ (induzida em Q por m). Além disso, em 1.2.9(ii) a componente normal $\perp^h \circ a$ da aceleração estava determinada apenas pelo vetor velocidade v da curva nesse ponto, enquanto que em 1.2.12(ii) a componente normal (segundo g) de $M \circ a$ depende também da aceleração tangencial $\nabla_v^{\bar{m}} v$ (a menos que Ξ se anule no ponto considerado, o que em geral não ocorre, conforme a proposição 1.2.19 adiante).

1.2.13 Prova (do teorema 1.2.5). Vamos demonstrar inicialmente a unicidade de uma reação vincular F_{vin} tal que $\|g \circ F_{vin} = X$, onde $X \in \tilde{\mathcal{X}}(Q)$ é um campo dado. Se $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Q$ é uma curva que obedece $(F_{vin} + F_{ext}) \circ v = M \circ a$ então

$$\|g \circ M \circ a = \|g \circ F_{vin} \circ v + \|g \circ F_{ext} \circ v \text{ e} \quad (1)$$

$$\perp^g \circ M \circ a = \perp^g \circ F_{vin} \circ v + \perp^g \circ F_{ext} \circ v, \quad (2)$$

levando o lema 1.2.12(ii) na equação (2):

$$\perp^g \circ F_{vin} \circ v = M \circ \Delta^m \circ v + \Xi \circ \bar{M} \circ \nabla_v^{\bar{m}} v - \perp^g \circ F_{ext} \circ v,$$

pelo lema 1.2.12(i) vem que:

$$\perp^g \circ F_{vin} \circ v = M \circ \Delta^m \circ v + \Xi \circ (\|g \circ M \circ a) - \perp^g \circ F_{ext} \circ v,$$

a equação (1) nos garante então que:

$$\perp^g \circ F_{vin} \circ v = M \circ \Delta^m \circ v + \Xi \circ (\|g \circ F_{vin} \circ v + \|g \circ F_{ext} \circ v) - \perp^g \circ F_{ext} \circ v,$$

lembrando agora que $\|g \circ F_{vin} = X$, e que para qualquer $v_0 \in TQ$ existe uma curva $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Q$ com $v(0) = v_0$ e $(F_{vin} + F_{ext}) \circ v = M \circ a$, concluimos que

$$\perp^g \circ F_{vin} = M \circ \Delta^m + \Xi \circ (X + \|g \circ F_{ext}) - \perp^g \circ F_{ext}. \quad (3)$$

Essa expressão para a componente normal de F_{vin} demonstra sua unicidade.

Para provarmos a existência, suponhamos dado $X \in \tilde{\mathcal{X}}(Q)$ e defina-se

$$F_{vin} = X + \perp^g \circ F_{vin},$$

com $\perp^g \circ F_{vin}$ dado por (3). Esta F_{vin} é uma reação vincular pois, para qualquer $v_0 \in TQ$, existe uma curva $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Q$ que satisfaz $v(0) = v_0$ e

$$\overline{M} \circ \nabla_v^{\overline{m}} v = (X + \|g \circ F_{ext}) \circ v$$

(que além disto é única, se fixarmos um dos ε 's suficientemente pequenos).

Essa curva c também satisfaz a equação (2) acima (basta inverter a dedução de (3) a partir de (2)); e finalmente, as equações (1) e (2) garantem juntas que

$$(F_{vin} + F_{ext}) \circ v = M \circ a. \quad \blacksquare$$

1.2.14 Corolário. *Se (Q, F_{vin}) é um vínculo sobre (N, g, M, F_{ext}) então $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Q$ satisfaz $(F_{vin} + F_{ext}) \circ v = M \circ a$ se e somente se*

$$\overline{m}^b \circ \nabla_v^{\overline{m}} v = i^* \circ g^b \circ (F_{vin} + F_{ext}) \circ v.$$

Prova. Na demonstração anterior (prova 1.2.13) foi estabelecida a equivalência entre a equação $(F_{vin} + F_{ext}) \circ v = M \circ a$ e

$$\overline{M} \circ \nabla_v^{\overline{m}} v = \|g \circ (F_{vin} + F_{ext}) \circ v,$$

basta então lembrarmos que $\overline{M} = \overline{g}^\# \circ \overline{m}^b$ e $\|g = \overline{g}^\# \circ i^* \circ (g^b|_{TN|Q})$. $\blacksquare$

1.2.15 Corolário. *Dado um sistema de partículas (N, g, M, F_{ext}) e uma subvariedade $Q \subset N$, uma condição necessária e suficiente para que uma aplicação $F_{vin}: TQ \rightarrow TN|_Q$ (que preserva o ponto base) seja uma reação vincular é*

$$\perp^g \circ F_{vin} = M \circ \Delta^m + \Xi \circ \parallel^g \circ (F_{vin} + F_{ext}) - \perp^g \circ F_{ext}.$$

Em particular, para qualquer reação vincular d'Alembertiana temos que

$$F_{vin} = M \circ \Delta^m + \Xi \circ \parallel^g \circ F_{ext} - \perp^g \circ F_{ext}.$$

Prova. A primeira expressão é exatamente a equação (3) deduzida na demonstração 1.2.13, e a segunda decorre trivialmente da definição de reação d'Alembertiana (1.2.7). ■

O primeiro corolário (1.2.14) estabelece a *equação de Lagrange* na sua forma anterior à introdução do potencial de força, e será discutido na próxima secção.

Sobre o corolário 1.2.15 temos três comentários a fazer:

1.2.16 Comentário. Comparando as duas expressões enunciadas no corolário 1.2.15 vemos que a componente normal de uma reação vincular *qualquer* F_{vin} em um sistema de partículas (N, g, M, F_{ext}) é *idêntica* à reação vincular *d'Alembertiana* (sobre a mesma subvariedade) em um outro sistema de partículas (N, g, M, F'_{ext}) onde $F'_{ext} = F_{ext} + f$, com $f|_{TQ} = \parallel^g \circ F_{vin}$. Em outras palavras, podemos sempre considerar a componente $\parallel^g \circ F_{vin}$ de uma reação vincular não d'Alembertiana F_{vin} como “força externa”, e então *identificar* $\perp^g \circ F_{vin}$ com a reação d'Alembertiana do “novo” sistema de partículas.

1.2.17 Comentário. A reação vincular d'Alembertiana é usualmente descrita em termos dos *multiplicadores de Lagrange*, que são variáveis determinadas com o auxílio da equação de movimento. O corolário 1.2.15 nos fornece explicitamente a reação como função do estado $v \in TQ$ do sistema vinculado.

1.2.18 Comentário. O corolário 1.2.15 descreve a componente normal de uma reação vincular qualquer F_{vin} como a soma de três termos:

$$F_1 = M \circ \Delta^m$$

$$F_2 = \Xi \circ \parallel^g \circ (F_{vin} + F_{ext})$$

$$F_3 = -\perp^g \circ F_{ext}$$

A “interpretação” dos termos F_1 e F_3 é clara: F_1 é a *força centrípeta* —dependente da velocidade, da massa, e da curvatura de Q na direção do movimento— e F_3 é a parte da reação normal que compensa a componente da força externa que tende a retirar o sistema da restrição vincular $Q \subset N$.

A “origem” do termo F_2 já não é tão clara (veja o exemplo 1.2.20 adiante), uma vez que geralmente ele se anula em sistemas “simples” (no exemplo 1.1.2, se todas as massas m_i forem iguais então, para qualquer reação vincular sobre qualquer subvariedade de N , $F_2 = 0$; isto decorre trivialmente da proposição 1.2.19 abaixo). As várias reações vinculares sobre uma variedade diferem, em sua componente normal, exatamente pelo termo F_2 (que é o único que depende de $\parallel^g \circ F_{vin}$). A proposição seguinte estabelece as condições em que as várias reações vinculares sobre uma variedade têm o termo F_2 nulo em um ponto dado.

1.2.19 Proposição. *Seja (N, g, M, F_{ext}) um sistema de partículas, $Q \subset N$ uma subvariedade de N e $q \in Q$ um ponto qualquer de Q . As componentes normais $\perp^g \circ F_{vin}$ das diversas reações vinculares sobre Q coincidem*

todas no ponto q se e somente se $T_q Q$ for invariante por $M|_{T_q N}$; isto é, se e somente se $M(T_q Q) \subset T_q Q$.

Prova. Pelo corolário 1.2.15 as componentes normais das várias reações vinculares coincidem todas no ponto $q \in Q$ se e somente se $\Xi|_{T_q Q} = 0$; como $\Xi = (M \circ \bar{M}^{-1} - id_{T_q Q})$ (lema 1.2.12(ii)), esta condição é equivalente à $M|_{T_q Q} = \bar{M}|_{T_q Q}$, que é o mesmo que $M(T_q Q) \subset T_q Q$ (pela definição de $\bar{M} = \|\bar{g} \circ (M|_{T_q Q})$). ■

Vamos mostrar agora, em um exemplo muito simples, como podemos utilizar o corolário 1.2.15 para calcularmos diretamente uma reação vincular. Tomamos um exemplo onde os termos F_1 e F_3 da reação vincular se anulam para ilustrar a natureza do termo F_2 (comentário 1.2.18).

1.2.20 Exemplo. Consideremos o sistema de partículas definido por um par de pontos materiais de massas diferentes ($m_1 \neq m_2$), que se movem sobre uma reta, com uma mesma força constante (ao longo da reta) agindo sobre ambos:

- (i) $(N, g) = \mathbb{R}^2$ munido de sua métrica euclideana usual— $(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$ é a configuração em que as partículas estão dispostas a x^1 e x^2 (respec.) unidades de comprimento de uma origem fixada;
- (ii) $M(x^1, x^2, v^1, v^2) = (x^1, x^2, m_1 v^1, m_2 v^2)$, onde m_1 e m_2 são constantes reais positivas e diferentes entre si; e
- (iii) $F_{ext}(x^1, x^2, v^1, v^2) = (x^1, x^2, f, f)$, onde f é uma constante real não nula.

Consideremos agora a subvariedade Q de $N = \mathbb{R}^2$ definida pela condição de vínculo $x^1 - x^2 = \ell$ ($\ell \in \mathbb{R}_+$); que descreve, por exemplo, uma “haste ideal” (inextensível e sem massa) de comprimento ℓ ligada às

partículas. Está claro que para qualquer reação vincular sobre esta subvariedade Q temos $F_1 = F_3 = 0$.

Vamos determinar agora a reação vincular d'Alembertiana sobre Q , para a qual $F_{vin} = F_2$.

Temos que as matrizes de g , M e m na base canônica de $\mathbb{R}^2 = N$ são

$$[g] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [M] = [m] = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix},$$

e a da força externa (constante) é

$$[F_{ext}] = \begin{pmatrix} f \\ f \end{pmatrix}.$$

Introduzindo o vetor $X = (1, 1)$ tangente à variedade Q em todos os seus pontos vem

$$[X] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$[\bar{g}] = [X]^t [g] [X] = (1 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2,$$

$$[\|g\|] = [\bar{g}]^{-1} [X]^t [g] = \frac{1}{2} (1 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (1 \quad 1),$$

$$[\bar{M}] = [\|g\|] [M] [X] = \frac{1}{2} (1 \quad 1) \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{m_1 + m_2}{2},$$

$$\begin{aligned} [\Xi] &= [M] [X] [\bar{M}]^{-1} - [X] \\ &= \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{2}{m_1 + m_2} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \\ \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e, finalmente,

$$\begin{aligned} [F_{vin}] &= [\Xi][\|g][F_{ext}] \\ &= \begin{pmatrix} \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} \\ \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right) f \\ \left(\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right) f \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A primeira (respec. segunda) componente deste vetor-coluna $[F_{vin}]$ é a força de reação vincular que a haste aplica na primeira (respec. segunda) partícula do sistema (estas reações são escalares pois as partículas se movem sobre uma reta).

Este exemplo trivial mostra claramente como a diferença entre as massas das partículas que compõem um sistema mecânico vinculado provoca o aparecimento do termo F_2 da reação vincular.

1.3 MECÂNICA LAGRANGEANA

Vamos considerar agora sistemas de partículas sujeitos a forças *conservativas*.

1.3.1 Definição. *Um sistema de partículas (N, g, M, F_{ext}) é **conservativo** se existe $V: N \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F_{ext} = -g^\sharp \circ dV \circ \tau_N$. Fixada uma das funções V , que chamaremos de **energia potencial**, definimos a **energia total** $E: TN \rightarrow \mathbb{R}$ do sistema por $E = K + V \circ \tau_N$.*

1.3.2 Proposição (conservação da energia). *Seja (N, g, M, F_{ext}) um sistema de partículas conservativo com energia potencial V e energia total E . Se $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Q$ é uma curva sobre N que satisfaz $F_{ext} \circ v = M \circ a$ então $\frac{d}{dt}(E \circ v) = 0$.*

Prova. Basta levarmos $F_{ext} = -g^\sharp \circ dV \circ \tau_N$ à proposição 1.1.5(ii):

$$\frac{d}{dt}(K \circ v) = g(v, F_{ext} \circ v) = g(v, -g^\sharp \circ dV \circ \tau_N \circ v) = -\frac{d}{dt}(V \circ c),$$

e portanto $\frac{d}{dt}(E \circ v) = \frac{d}{dt}(K \circ v) + \frac{d}{dt}(V \circ c) = 0$. ■

1.3.3 Proposição. *Seja (Q, F_{vin}) um vínculo d'Alembertiano sobre um sistema de partículas conservativo (N, g, M, F_{ext}) com energia potencial $V: N \rightarrow \mathbb{R}$. Uma curva $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Q$ satisfaz $(F_{vin} + F_{ext}) \circ v = M \circ a$ se e somente se*

$$\overline{m}^b \circ \nabla_v^{\overline{m}} v = -d\overline{V} \circ c, \quad \text{onde} \quad \overline{V} = V|_Q.$$

Prova. Pelo corolário 1.2.14, basta demonstrarmos a equivalência entre a equação acima e

$$\overline{m}^b \circ \nabla_v^{\overline{m}} v = i^* \circ g^b \circ (F_{vin} + F_{ext}) \circ v,$$

o que é fácil, pois $\|g \circ F_{vin} = 0$ e $F_{ext} = -g^\sharp \circ dV \circ \tau_N$ implicam em

$$\begin{aligned} i^* \circ g^b \circ (F_{vin} + F_{ext}) \circ v &= -i^* \circ g^b \circ g^\sharp \circ dV \circ \tau_N \circ v \\ &= -i^* \circ dV \circ c \\ &= -d\overline{V} \circ c. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

A condição obtida na proposição acima, *na qual não comparece a métrica g* , é equivalente à equação de Lagrange $X_E \in \mathcal{X}(TQ)$ para o sistema lagrangeano $(Q, L = K|_{TQ} - \overline{V} \circ \tau_Q)$. A prova desta afirmação pode ser encontrada em Abraham e Marsden (ref. [1], proposição 3.7.4, p. 226), assim como as definições e resultados necessários para sua formulação precisa.

A observação acima sobre a proposição 1.3.3 completa a dedução das equações de Lagrange a partir da mecânica newtoniana, concluindo esta primeira parte da dissertação.

2.1 SISTEMAS HOLÔNOMOS

A definição de *sistema de partículas* (def. 1.1.1) não inclui alguns sistemas mecânicos importantes, como é o caso dos *corpos rígidos*. Estes sistemas também não podem ser considerados como vínculos holônomos sobre um número finito de partículas pontuais (exemplo 2.1.4 adiante), devido à sua distribuição contínua de massa. O conceito de *sistema holônomo* (def. 2.1.1 abaixo) nos permite contornar essa dificuldade sem introduzirmos espaços de dimensão infinita, como demonstraremos na próxima secção (veja também o comentário 2.1.6).

2.1.1 Definição. *Um sistema holônomo é uma quadra (Q, m, g, F) onde:*

- (i) Q é uma variedade sem bordo, de dimensão finita;*

- (ii) m e g são duas métricas riemannianas sobre Q ; e
- (iii) $F: TQ \rightarrow TQ$ é uma aplicação que preserva o ponto base, isto é:
 $\tau_Q \circ F = \tau_Q$ (onde $\tau_Q: TQ \rightarrow Q$ é o fibrado tangente à Q).

2.1.2 Definição. Se (Q, m, g, F) é um sistema holônomo então definimos sua **energia cinética** $K: TQ \rightarrow \mathbb{R}$ por $K(v) = \frac{1}{2}m(v, v)$.

2.1.3 Definição. Dado um sistema holônomo (Q, m, g, F) , definimos o seu **tensor de inércia** $I: TQ \rightarrow TQ$ por $g[X, I(Y)] = m(X, Y)$.

2.1.4 Exemplo. O conceito de *vínculo (holônomo)* (def. 1.2.2) sobre um sistema de partículas (def. 1.1.1) nos fornece vários exemplos de sistemas holônomos. Mais precisamente, se (Q, F_{vin}) é um vínculo (holônomo) sobre um sistema de partículas (N, g, M, F_{ext}) então a quadra $(Q, \bar{m}, \bar{g}, F = \|g \circ (F_{vin} + F_{ext}))$ (com a notação da parte 1) é um sistema holônomo. Este exemplo ilustra o significado dos diversos elementos — Q , m , g e F — em um sistema holônomo qualquer: Q é o *espaço de configurações*; m é a *métrica das massas*, que nos fornece a *energia cinética* do sistema (def. 2.1.2 acima); g é a *métrica espacial*, que nos fornece o *trabalho* $g(v, f)$ de uma força $f \in T_q Q$ sobre um estado $v \in T_q Q$ ($q \in Q$); e F a *força* que atua sobre o sistema (veja o comentário 2.1.6 adiante).

Neste exemplo o *tensor de inércia* I definido acima (def. 2.1.3) coincide com o tensor $\bar{M}$ definido em 1.2.10.

2.1.5 Proposição. Seja (Q, m, g, F) um sistema holônomo e $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Q$ uma curva sobre Q . Se c satisfizer a equação

$$I \circ \nabla_v^m v = F \circ v,$$

onde $v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow TQ$ é a velocidade da curva c e ∇^m a conexão riemanniana associada à métrica m , então

$$\frac{d}{dt}(K \circ v) = g(v, F \circ v).$$

Prova.

$$\frac{d}{dt}(K \circ v) = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m(v, v) \right] = m(v, \nabla_v^m v) = g(v, I \circ \nabla_v^m v) = g(v, F \circ v). \quad \blacksquare$$

2.1.6 Comentário. A equação de Lagrange $I \circ \nabla_v^m v = F \circ v$ presente no enunciado da prop. 2.1.5 acima foi deduzida na primeira parte da dissertação (corolário 1.2.14) para os sistemas holônomos construídos segundo o exemplo 2.1.4. Vamos demonstrar na próxima secção que ela também é equivalente à equação de movimento de um corpo rígido obtida da mecânica newtoniana (teorema 2.2.8). Usaremos portanto essa forma da equação de Lagrange como *lei de movimento* de um sistema holônomo qualquer.

A proposição 2.1.5 afirma então que se uma curva sobre Q satisfizer a *lei de movimento* $I \circ \nabla_v^m v = F \circ v$ então a variação temporal da *energia cinética* é igual ao *trabalho* $g(v, F \circ v)$ da força F sobre o sistema; o que demonstra que a interpretação dada no exemplo 2.1.4 para as métricas m e g vale para qualquer sistema holônomo.

2.2 CORPO RÍGIDO

Nosso objetivo nesta secção é mostrar que um corpo rígido pode ser considerado como um sistema holônomo (def. 2.1.1). Se o corpo rígido é constituído por um número finito de partículas pontuais então ele se enquadra automaticamente no exemplo 2.1.4 da secção anterior (basta tomar como restrição vincular que as partículas mantenham constantes as distâncias entre elas). Por outro lado, se o corpo apresenta uma distribuição espacial

contínua de massa então não podemos associar a ele um sistema holônomo tomando um vínculo sobre um sistema de partículas, pois a dimensão do espaço N das configurações não vinculadas deveria ser infinita, o que não é compatível com a definição 1.1.1. Apresentamos agora uma construção alternativa para o sistema holônomo associado a um corpo rígido que contorna essa dificuldade.

Vamos admitir que o leitor esteja familiarizado com a descrição newtoniana para sistemas de partículas e corpos rígidos, que envolve conceitos como *momento angular* e *torque*. Nesse formalismo é deduzida, para um sistema de partículas que interagem segundo a “lei forte da ação e reação”, a “equação de movimento” seguinte:

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{N},$$

onde $\vec{L}$ é o momento angular (total) do sistema em relação a um ponto fixo em um referencial inercial, e $\vec{N}$ o torque (total) das forças externas que atuam sobre o sistema em relação ao mesmo ponto. Esta equação descreve o movimento de um corpo rígido que se move mantendo um ponto fixo em um referencial inercial; o caso mais geral do movimento “livre” do corpo rígido (sem ponto fixo) pode ser reduzido a esse tomando-se $\vec{L}$ e $\vec{N}$ em relação ao centro de massa do corpo. Todos esses resultados são bem conhecidos e podem ser encontrados em qualquer livro introdutório de mecânica.

Vamos demonstrar que é possível associar a um corpo rígido qualquer um sistema holônomo (Q, m, g, F) tal que a equação acima seja equivalente a

$$I \circ \nabla_v^m v = F \circ v,$$

que foi considerada na secção anterior como “equação de movimento” de um sistema holônomo genérico.

Consideremos inicialmente um espaço vetorial tridimensional B munido de um produto interno g_B que imaginaremos “solidário” ao corpo rígido. Vamos convencionar que o vetor nulo $0 \in B$ representa o ponto (do corpo rígido) em relação ao qual serão calculados momentos angulares e torques e que g_B descreve o produto interno usual do espaço.

Consideremos agora um outro espaço vetorial tridimensional S munido de um produto interno g_S que imaginaremos “fixo em um referencial inercial”; novamente convencionamos que o vetor nulo $0 \in S$ representa o ponto (do espaço) em relação ao qual serão calculados momentos angulares e torques e que g_S descreve o produto interno usual do espaço.

O *espaço de configurações* Q do sistema holônomo que associaremos ao corpo rígido é, em termos de (B, g_B) e (S, g_S) introduzidos acima, o conjunto das isometrias $q: B \rightarrow S$ de B em S ; mais precisamente, Q é o espaço das isometrias que “preservam a orientação”. Para descrevermos Q com exatidão devemos fixar uma orientação em B e outra em S , o que faremos supondo dados *produtos vetoriais* $\wedge_B: B \times B \rightarrow B$ e $\wedge_S: S \times S \rightarrow S$ em (B, g_B) e (S, g_S) respectivamente. Feito isso obtemos

$$Q = \{q: B \rightarrow S \mid \forall X, Y \in B, \quad g_S[q(X), q(Y)] = g_B(X, Y) \quad \text{e} \\ [q(X)] \wedge_S [q(Y)] = q(X \wedge_B Y)\}.$$

Está claro que Q possui uma estrutura natural de *variedade diferenciável* difeomorfa ao *grupo de Lie* $SO(3)$, apesar de não possuir uma estrutura natural de *grupo de Lie* ($SO(3)$ age naturalmente sobre Q).

Vamos introduzir agora o conceito de *velocidade angular* do corpo rígido. Para tanto considere uma curva $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Q$ sobre Q que leva $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ a $q_t = c(t) \in Q$; é um resultado bem conhecido que existe um e um único vetor $\omega \in S$ tal que, para todo $p \in B$,

$$\left. \frac{d}{dt} q_t(p) \right|_{t=0} = \omega \wedge_S [q_0(p)].$$

A aplicação $\Omega_S: TQ \rightarrow S$ que associa a cada vetor tangente $\dot{q}_{t=0} \in TQ$ o vetor $\omega \in S$ determinado pela expressão acima será chamada *aplicação velocidade angular*. Definimos também $\Omega_B: TQ \rightarrow B$ impondo que, para qualquer $v \in T_q Q$, $q \in Q$,

$$\Omega_S(v) = q[\Omega_B(v)].$$

Por abuso de linguagem chamaremos também Ω_B de aplicação velocidade angular.

Com o auxílio da aplicação velocidade angular podemos induzir uma métrica riemanniana g sobre a variedade Q pelo “pull-back” de g_S por $\Omega_S: TQ \rightarrow S$. Lembrando que os pontos $q \in Q$ são isometrias $q: B \rightarrow S$ de (B, g_B) em (S, g_S) é fácil verificar que essa métrica coincide com a que obtemos pelo “pull-back” de g_B por $\Omega_B: TQ \rightarrow B$. Em outras palavras, definimos a métrica riemanniana g sobre Q por

$$g(X, Y) = g_S[\Omega_S(X), \Omega_S(Y)] = g_B[\Omega_B(X), \Omega_B(Y)],$$

para quaisquer $X, Y \in T_q Q$, $q \in Q$. Utilizando a aplicação $\Omega_S: TQ \rightarrow S$ podemos definir também um produto vetorial sobre cada espaço tangente à variedade Q pelo “pull-back” de $\wedge_S$, obtendo como resultado o tensor $\wedge: TQ \oplus TQ \rightarrow TQ$ ($\oplus$ representa a soma de Whitney de fibrados vetoriais).

Vamos introduzir agora o *tensor de inércia* de um corpo rígido, que se relaciona diretamente com sua velocidade angular. Na descrição newtoniana é demonstrado que existe um tensor $I_B: B \rightarrow B$ simétrico e definido positivo (segundo g) tal que o *momento angular* $\vec{L}$ do corpo rígido é dado por $\vec{L} = I_B(\vec{\omega})$, e sua *energia cinética* K por

$$K(\vec{\omega}) = \frac{1}{2} m_B(\vec{\omega}, \vec{\omega}),$$

onde $\vec{\omega}$ é a velocidade angular do corpo e m_B o produto interno sobre B definido por

$$m_B(X, Y) = g_B[X, I_B(Y)],$$

para quaisquer $X, Y \in B$ (é fácil ver que m_B é um produto interno pois I_B é g -simétrico e definido positivo).

Podemos utilizar novamente a aplicação velocidade angular $\Omega_B: TQ \rightarrow B$ para induzir em Q outra métrica riemanniana m pelo “pull-back” de m_B por Ω_B ; isto é, para quaisquer $X, Y \in T_q Q$, $q \in Q$,

$$m(X, Y) = m_B[\Omega_B(X), \Omega_B(Y)].$$

Essa métrica m é tal que a função $K: TQ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$K(v) = \frac{1}{2}m(v, v)$$

coincide com a energia cinética do corpo rígido; com ela podemos construir o tensor $I: TQ \rightarrow TQ$ como na definição 2.1.3, que será chamado *tensor de inércia* do corpo rígido.

Definimos a *aplicação momento angular* $L: TQ \rightarrow S$ por $L = \Omega_S \circ I$. A equação de movimento citada no início dessa secção se escreve então

$$\frac{d}{dt}(L \circ v) = N \circ v,$$

onde $v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow TQ$ é a velocidade associada a uma curva $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Q$ e $N: TQ \rightarrow S$ uma aplicação que fornece o torque total $N(X) \in S$ aplicado sobre o corpo quando este se encontra em um estado $X \in TQ$ (torque esse calculado em relação a $0 \in S$).

Completamos o sistema holônomo (Q, m, g, F) associado ao corpo rígido definindo a força $F: TQ \rightarrow TQ$ por $\Omega_S \circ F = N$. Com esta definição

a equação de movimento acima será equivalente a $I \circ \nabla_v^m v = F \circ v$ se e somente se

$$\Omega_S \circ I \circ \nabla_v^m v = \frac{d}{dt}(L \circ v),$$

(veja o comentário 2.1.6).

Essa é exatamente a igualdade que pretendemos demonstrar (teorema 2.2.8), mas vamos antes introduzir alguma notação (em coordenadas) e provar resultados preliminares.

2.2.1 Notação (em coordenadas). *Fixemos inicialmente uma base vetorial (e_α) ($\alpha = 1, 2, 3$) em S e outra (u_a) ($a = 1, 2, 3$) em B (vamos utilizar $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ para indexar objetos e coordenadas relativos a S e $a, b, c, \dots$ para os índices relativos a B). Feito isto, definimos*

$$g_{\alpha\beta} = g_S(e_\alpha, e_\beta), \quad g_{ab} = g_B(u_a, u_b),$$

$$m_{ab} = m_B(u_a, u_b), \quad I_b^a \text{ por } I_B(u_b) = I_b^a u_a,$$

$$m^{ab} \text{ por } m^{ab} m_{bc} = \delta_c^a \quad e \quad g^{cb} \text{ por } g^{cb} g_{ba} = \delta_a^c.$$

É claro que

$$m_{ab} = I_a^c g_{cb}.$$

Definindo $\wedge_{\beta\gamma}^\alpha$ e $\wedge_{bc}^a$ respectivamente por

$$e_\beta \wedge_S e_\gamma = \wedge_{\beta\gamma}^\alpha e_\alpha \quad e \quad u_b \wedge_B u_c = \wedge_{bc}^a u_a,$$

e também $V_{\alpha\beta\gamma}$ e V_{abc} respectivamente por

$$V_{\alpha\beta\gamma} = g_S(e_\alpha, e_\beta \wedge_S e_\gamma) \quad e \quad V_{abc} = g_B(u_a, u_b \wedge_B u_c)$$

obtemos

$$\wedge_{\beta\gamma}^\alpha = -\wedge_{\gamma\beta}^\alpha, \quad \wedge_{bc}^a = -\wedge_{cb}^a, \quad V_{\alpha\beta\gamma} = g_{\alpha\delta} \wedge_{\beta\gamma}^\delta,$$

$$V_{abc} = g_{ad} \wedge_{bc}^d, \quad V_{\alpha\beta\gamma} = V_{\beta\gamma\alpha} = V_{\gamma\alpha\beta} \quad e \quad V_{abc} = V_{bca} = V_{cab}.$$

Se fixarmos também um sistema de coordenadas locais (q^i) sobre Q ($i = 1, 2, 3$; durante essa secção usaremos $i, j, k, l \dots$ para indexar objetos e coordenadas relativos à variedade Q), definimos para cada $(q^1, q^2, q^3) \cong q \in Q$ uma matriz $Q_a^\alpha(q^1, q^2, q^3) = Q_a^\alpha(q)$ por

$$q(u_a) = Q_a^\alpha e_\alpha,$$

lembrando que $q \in Q$ é uma aplicação de B em S .

2.2.2 Exemplo (coordenadas eulerianas). Se fixarmos (e_α) como sendo uma base ortonormal positivamente orientada de S e (u_a) uma base de autovetores de I_B também ortonormal e positivamente orientada (que sempre existe pois I_B é simétrico e positivo definido) então

$$g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = \delta_\beta^\alpha, \quad g_{ab} = g^{ab} = \delta_b^a, \quad e$$

$$I_b^a = m_{ab} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix},$$

onde I_1 , I_2 e I_3 são os momentos de inércia do corpo rígido; teremos também

$$\wedge_{\beta\gamma}^\alpha = V_{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \quad e \quad \wedge_{bc}^a = V_{abc} = \varepsilon_{abc}.$$

Nesse caso o sistema de coordenadas locais sobre Q mais usual é formado pelos **ângulos de Euler** (θ, ϕ, ψ) , no qual as matrizes $Q_a^\alpha(\theta, \phi, \psi)$ se escrevem

$$Q_a^\alpha = \begin{pmatrix} \begin{matrix} a=1 & a=2 & a=3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \cos \phi \cos \psi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & -\cos \theta \sin \phi \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \theta \sin \phi \\ \sin \phi \cos \psi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & \cos \theta \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi & -\sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{matrix} \end{pmatrix}$$

2.2.3 Notação. Continuando a notação 2.2.1, introduzimos agora o referencial local (∂_i) dos versores do sistema de coordenadas (q^i) e, para cada $(q^1, q^2, q^3) \cong q \in Q$, as matrizes $\Omega_i^\alpha(q^1, q^2, q^3)$ e $\Omega_i^a(q^1, q^2, q^3)$ respectivamente por

$$\Omega_S(\partial_i) = \Omega_i^\alpha e_\alpha \quad e \quad \Omega_B(\partial_i) = \Omega_i^a u_a.$$

Em relação a (∂_i) definimos também g_{ij} , m_{ij} , I_i^j e $\wedge_{jk}^i$ respectivamente por

$$g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j), \quad m_{ij} = m(\partial_i, \partial_j),$$

$$I(\partial_i) = I_i^j \partial_j, \quad e \quad \wedge(\partial_j, \partial_k) = \wedge_{jk}^i \partial_i.$$

Está claro que as matrizes Q_a^α , Ω_i^α , Ω_i^a , g_{ij} e m_{ij} são inversíveis em todos os pontos $q \in Q$ em que estão definidas e portanto podemos introduzir suas inversas Q_α^a , Ω_α^i , Ω_a^i , g^{ij} e m^{ij} (respectivamente). É fácil verificar que

$$\Omega_i^\alpha = Q_a^\alpha \Omega_i^a, \quad g_{ij} = g_{\alpha\beta} \Omega_i^\alpha \Omega_j^\beta = g_{ab} \Omega_i^a \Omega_j^b, \quad m_{ij} = m_{ab} \Omega_i^a \Omega_j^b,$$

$$I_j^i = g^{ik} m_{kj}, \quad \wedge_{jk}^i = -\wedge_{kj}^i \quad e \quad V_{ijk} = V_{jki} = V_{kij},$$

onde $V_{ijk} = g_{il} \wedge_{jk}^l$.

2.2.4 Exemplo. Continuando o exemplo 2.2.2 (coordenadas eulerianas), temos que

$$\Omega_i^\alpha(\theta, \phi, \psi) = \begin{pmatrix} \overset{i=1}{\cos \phi} & \overset{i=2}{0} & \overset{i=3}{\text{sen } \theta \text{ sen } \phi} \\ \text{sen } \phi & 0 & -\text{sen } \theta \cos \phi \\ 0 & 1 & \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$\Omega_i^a(\theta, \phi, \psi) = \begin{pmatrix} \overset{i=1}{\cos \psi} & \overset{i=2}{\text{sen } \theta \text{ sen } \psi} & \overset{i=3}{0} \\ -\text{sen } \psi & \text{sen } \theta \cos \psi & 0 \\ 0 & \cos \theta & 1 \end{pmatrix},$$

e ainda

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cos \theta \\ 0 & \cos \theta & 1 \end{pmatrix},$$

As matrizes m_{ij} e I_j^i , ao contrário das dispostas acima, dependem dos momentos de inércia do corpo rígido e são consideravelmente mais complicadas se $I_1 \neq I_2 \neq I_3 \neq I_1$.

2.2.5 Lema. *Com a notação introduzida em 2.2.1 e 2.2.3 temos que*

$$(\partial_i Q_a^\alpha) = \wedge_{\delta\varepsilon}^\alpha \Omega_i^\delta Q_a^\varepsilon = \wedge_{ca}^b \Omega_i^c Q_b^\alpha = \wedge_{ij}^k \Omega_k^\alpha \Omega_a^j.$$

Prova. A primeira igualdade segue da definição da aplicação velocidade angular Ω_S : tomando uma curva q_t sobre Q tal que $\dot{q}_{t=0} = \partial_i$ obtemos

$$\left. \frac{d}{dt} q_t(u_a) \right|_{t=0} = \frac{d}{dt} (Q_a^\alpha e_\alpha) = (\partial_i Q_a^\alpha) e_\alpha,$$

e ainda

$$\left. \frac{d}{dt} q_t(u_a) \right|_{t=0} = (\Omega_i^\delta e_\delta) \wedge_S (Q_a^\varepsilon e_\varepsilon) = (e_\delta \wedge_S e_\varepsilon) \Omega_i^\delta Q_a^\varepsilon = (\wedge_{\delta\varepsilon}^\alpha \Omega_i^\delta Q_a^\varepsilon) e_\alpha,$$

logo $\partial_i Q_a^\alpha = \wedge_{\delta\varepsilon}^\alpha \Omega_i^\delta Q_a^\varepsilon$.

Para demonstrarmos a segunda igualdade basta lembrarmos que $\wedge_{\delta\varepsilon}^\alpha = \wedge_{cd}^b Q_b^\alpha Q_\delta^c Q_\varepsilon^d$:

$$\wedge_{\delta\varepsilon}^\alpha \Omega_i^\delta Q_a^\varepsilon = (\wedge_{cd}^b Q_b^\alpha Q_\delta^c Q_\varepsilon^d) \Omega_i^\delta Q_a^\varepsilon = \wedge_{cd}^b \Omega_i^c Q_b^\alpha \delta_a^d = \wedge_{ca}^b \Omega_i^c Q_b^\alpha,$$

e para a terceira $\wedge_{\delta\varepsilon}^\alpha = \wedge_{lj}^k \Omega_k^\alpha \Omega_\delta^l \Omega_\varepsilon^j$:

$$\wedge_{\delta\varepsilon}^\alpha \Omega_i^\delta Q_a^\varepsilon = (\wedge_{lj}^k \Omega_k^\alpha \Omega_\delta^l \Omega_\varepsilon^j) \Omega_i^\delta Q_a^\varepsilon = \wedge_{lj}^k \Omega_k^\alpha \Omega_a^j \delta_i^l = \wedge_{ij}^k \Omega_k^\alpha \Omega_a^j. \quad \blacksquare$$

2.2.6 Lema. *Com a mesma notação do lema anterior temos que*

$$\Omega_a^i [(\partial_k \Omega_j^a) - (\partial_j \Omega_k^a)] = \wedge_{jk}^i.$$

Prova. Partindo de $(\partial_i Q_a^\alpha) = \wedge_{ca}^b \Omega_i^c Q_b^\alpha$ e calculando $\partial_j(\partial_i Q_a^\alpha)$ obtemos

$$\partial_{ji} Q_a^\alpha = \wedge_{ca}^b [(\partial_j \Omega_i^c) Q_b^\alpha + \Omega_i^c (\partial_j Q_b^\alpha)].$$

Como $\partial_{ji} Q_a^\alpha - \partial_{ij} Q_a^\alpha = 0$ temos que

$$\begin{aligned} \wedge_{ca}^f [(\partial_j \Omega_i^c) - (\partial_i \Omega_j^c)] &= Q_\alpha^f \wedge_{ca}^b [\Omega_j^c (\partial_i Q_b^\alpha) - \Omega_i^c (\partial_j Q_b^\alpha)] \\ &= Q_\alpha^f \wedge_{ca}^b [\Omega_j^c \wedge_{eb}^d \Omega_i^e Q_d^\alpha - \Omega_i^c \wedge_{eb}^d \Omega_j^e Q_d^\alpha] \\ &= Q_\alpha^f \wedge_{ca}^b \wedge_{eb}^d Q_d^\alpha (\Omega_i^e \Omega_j^c - \Omega_j^e \Omega_i^c) \\ &= \delta_d^f \wedge_{ca}^b \wedge_{eb}^d (\Omega_i^e \Omega_j^c - \Omega_j^e \Omega_i^c), \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} \wedge_{ca}^d [(\partial_j \Omega_i^c) - (\partial_i \Omega_j^c)] &= \wedge_{ca}^b \wedge_{eb}^d (\Omega_i^e \Omega_j^c - \Omega_j^e \Omega_i^c) \\ &= \Omega_i^e \Omega_j^c (\wedge_{ca}^b \wedge_{eb}^d - \wedge_{ea}^b \wedge_{cb}^d); \end{aligned}$$

como o produto vetorial satisfaz a igualdade de Jacobi:

$$\wedge_{ca}^b \wedge_{eb}^d + \wedge_{ae}^b \wedge_{cb}^d + \wedge_{ec}^b \wedge_{ab}^d = 0,$$

obtemos

$$\begin{aligned} \wedge_{ca}^d [(\partial_j \Omega_i^c) - (\partial_i \Omega_j^c)] &= \Omega_i^e \Omega_j^c \wedge_{ec}^b \wedge_{ba}^d \\ &= \wedge_{ca}^d [\wedge_{eb}^c \Omega_i^e \Omega_j^b], \end{aligned}$$

donde concluimos finalmente a igualdade

$$[(\partial_j \Omega_i^c) - (\partial_i \Omega_j^c)] = \wedge_{eb}^c \Omega_i^e \Omega_j^b,$$

basta agora lembrarmos que $\wedge_{jk}^i = \wedge_{eb}^c \Omega_c^i \Omega_j^e \Omega_k^b$. ■

2.2.7 Lema. Os símbolos de Christoffel Γ_{jk}^i da conexão ∇^m sobre Q são tais que

$$\Gamma_{jk}^i \dot{q}^j \dot{q}^k = [\Omega_a^i (\partial_k \Omega_j^a) + m^{il} m_{jn} \wedge_{lk}^n] \dot{q}^j \dot{q}^k.$$

Prova. Temos que $m_{jk} = m_{ab} \Omega_j^a \Omega_k^b$ e $\partial_i m_{ab} = 0$, logo

$$\begin{aligned} \Gamma_{jk}^i \dot{q}^j \dot{q}^k &= m^{il} \left(\partial_k m_{lj} - \frac{1}{2} \partial_l m_{jk} \right) \dot{q}^j \dot{q}^k \\ &= m^{il} m_{cd} \left[(\partial_k \Omega_l^c) \Omega_j^d + \Omega_l^c (\partial_k \Omega_j^d) - \frac{1}{2} (\partial_l \Omega_j^c) \Omega_k^d - \frac{1}{2} \Omega_j^c (\partial_l \Omega_k^d) \right] \dot{q}^j \dot{q}^k \\ &= m^{il} m_{cd} [\Omega_l^c (\partial_k \Omega_j^d) + (\partial_k \Omega_l^c) \Omega_j^d - \Omega_j^c (\partial_l \Omega_k^d)] \dot{q}^j \dot{q}^k \\ &= \{ m^{ab} \Omega_a^i \Omega_b^l m_{cd} \Omega_l^c (\partial_k \Omega_j^d) + m^{il} m_{cd} \Omega_j^d [(\partial_k \Omega_l^c) - (\partial_l \Omega_k^c)] \} \dot{q}^j \dot{q}^k \\ &= \{ m^{ab} \delta_b^c m_{cd} \Omega_a^i (\partial_k \Omega_j^d) + m^{il} m_{cd} \Omega_j^d \Omega_n^c \wedge_{lk}^n \} \dot{q}^j \dot{q}^k \\ &= [\Omega_a^i (\partial_k \Omega_j^a) + m^{il} m_{jn} \wedge_{lk}^n] \dot{q}^j \dot{q}^k. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.2.8 Teorema. Para qualquer curva $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Q$ temos que

$$\Omega_S \circ I \circ \nabla_v^m v = \frac{d}{dt} (L \circ v),$$

onde $v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow TQ$ é a velocidade da curva c .

Prova. Na notação em coordenadas locais introduzida em 2.2.1 e 2.2.3 a equação acima se escreve

$$\Omega_l^\alpha I_i^l (\ddot{q}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{q}^j \dot{q}^k) = \frac{d}{dt} (\Omega_i^\alpha I_j^i \dot{q}^j).$$

levando $\Omega_l^\alpha I_i^l = I_b^a Q_a^\alpha \Omega_i^b$ e o lema 2.2.7 ao primeiro membro da igualdade acima vem que

$$\begin{aligned} \Omega_l^\alpha I_i^l (\ddot{q}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{q}^j \dot{q}^k) &= I_b^a Q_a^\alpha \Omega_i^b \{ \ddot{q}^i + [\Omega_c^i (\partial_k \Omega_j^c) + m^{il} m_{jn} \wedge_{lk}^n] \dot{q}^j \dot{q}^k \} \\ &= I_b^a Q_a^\alpha [\Omega_i^b \ddot{q}^i + (\partial_k \Omega_j^b) \dot{q}^j \dot{q}^k] + I_b^a Q_a^\alpha \Omega_i^b m^{il} m_{jn} \wedge_{lk}^n \dot{q}^j \dot{q}^k \\ &= I_b^a Q_a^\alpha [\Omega_i^b \ddot{q}^i + (\partial_k \Omega_j^b) \dot{q}^j \dot{q}^k] + g^{il} \Omega_i^\alpha m_{jn} \wedge_{lk}^n \dot{q}^j \dot{q}^k \quad (1) \end{aligned}$$

usando novamente $\Omega_l^\alpha I_i^l = I_b^a Q_a^\alpha \Omega_i^b$ temos para o segundo membro que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Omega_l^\alpha I_i^l \dot{q}^i) &= \frac{d}{dt}(I_b^a Q_a^\alpha \Omega_i^b \dot{q}^i) \\ &= I_b^a \frac{d}{dt}(Q_a^\alpha \Omega_i^b \dot{q}^i) \\ &= I_b^a Q_a^\alpha [\Omega_i^b \ddot{q}^i + (\partial_k \Omega_j^b) \dot{q}^j \dot{q}^k] + I_b^a (\partial_k Q_a^\alpha) \Omega_j^b \dot{q}^j \dot{q}^k \quad (2) \end{aligned}$$

Comparando agora as equações (1) e (2) verificamos que resta demonstrar

$$g^{il} \Omega_i^\alpha m_{jn} \wedge_{lk}^n \dot{q}^j \dot{q}^k = I_b^a (\partial_k Q_a^\alpha) \Omega_j^b \dot{q}^j \dot{q}^k,$$

o que é fácil pois de $(\partial_k Q_a^\alpha) = \wedge_{kl}^n \Omega_n^\alpha \Omega_a^l$ segue

$$\begin{aligned} (g^{il} \Omega_i^\alpha m_{jn} \wedge_{lk}^n - I_b^a \wedge_{kl}^n \Omega_n^\alpha \Omega_a^l \Omega_j^b) \dot{q}^j \dot{q}^k &= \\ &= (g^{il} \Omega_i^\alpha m_{jn} \wedge_{lk}^n - g^{li} m_{ij} \Omega_n^\alpha \wedge_{kl}^n) \dot{q}^j \dot{q}^k \\ &= (g^{nl} \wedge_{lk}^i - g^{li} \wedge_{kl}^n) \Omega_n^\alpha m_{ij} \dot{q}^j \dot{q}^k, \end{aligned}$$

e o termo entre parênteses se anula pois $g^{nj} \wedge_{jk}^i = g^{li} \wedge_{kl}^n$ é equivalente a $g_{li} \wedge_{jk}^i = g_{nj} \wedge_{kl}^n$, isto é, $V_{ljk} = V_{jkl}$. ■

O teorema 2.2.8 acima demonstra que a equação $I \circ \nabla_v^m v = F \circ v$ é equivalente, no sistema holônomo (Q, m, g, F) associado ao corpo rígido no início desta secção, à equação de movimento deduzida para o corpo rígido na mecânica newtoniana:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{N},$$

mostrando assim como estes sistemas se enquadram no nosso formalismo analítico.

2.3 VÍNCULOS SOBRE SISTEMAS HOLÔNOMOS

Nesta última secção da dissertação vamos generalizar os resultados obtidos na primeira parte para o contexto estabelecido na secção 2.1. Optamos por refazer todas as demonstrações, apesar de muitas delas serem praticamente idênticas às anteriores, para evitar dificuldades técnicas e facilitar a comparação entre as duas linhas de argumentação.

2.3.1 Notação. *Se Q é uma variedade, vamos considerar uma **distribuição** M sobre Q (no sentido de Frobenius) simultaneamente como uma subvariedade de TQ ($M \subset TQ$), e como um **fibrado vetorial** $\tau_Q|_M: M \rightarrow Q$ sobre Q (que representaremos simplesmente por $M \rightarrow Q$). Diremos que uma curva $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Q$ é **tangente à M** se a imagem de sua velocidade $v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow TQ$ estiver contida em M , e nesse caso consideraremos v com função a valores em $M \subset TQ$.*

2.3.2 Definição. *Um **vínculo** sobre um sistema holônomo (Q, m, g, F_{ext}) é um par (M, F_{vin}) onde:*

- (i) $M \subset TQ$ é uma distribuição sobre Q (não necessariamente de codimensão 1); e
- (ii) $F_{vin}: M \rightarrow TQ$ uma aplicação que preserva o ponto base ($\tau_Q \circ F_{vin} = \tau_Q|_M$), e tal que para qualquer $v_0 \in M$ exista uma curva $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Q$ tangente à M com $v(0) = v_0$ e

$$I \circ \nabla_v^m v = (F_{vin} + F_{ext}) \circ v.$$

*Se (M, F_{vin}) for um vínculo então diremos que F_{vin} é uma **reação vincular** sobre M .*

2.3.3 Definição. Se $M \subset TQ$ é uma distribuição e h uma métrica riemanniana sobre Q ($h \in \{g, m\}$), definimos $\|^\hbar: TQ \rightarrow M$ pela projeção ortogonal —segundo h — de T_qQ sobre M_q ($q \in Q$) e $\perp^\hbar: TQ \rightarrow TQ$ pela projeção (segundo h) de T_qQ sobre $M_q^\perp \subset T_qQ$ ($q \in Q$). Em outras palavras, os vetores $\|^\hbar(X)$ e $\perp^\hbar(X)$ são as componentes paralela e normal a M_q (respec.) do vetor $X \in T_qQ$, segundo a métrica h .

2.3.4 Notação. Se M é uma distribuição sobre uma variedade Q , representaremos por $\Gamma(M)$ o conjunto dos **campos vetoriais sobre Q tangentes à M** (secções do fibrado vetorial $M \rightarrow Q$), e por $\tilde{\Gamma}(M)$ o conjunto dos endomorfismos fibrados de $M \rightarrow Q$; isto é:

$$\tilde{\Gamma}(M) = \{X: M \rightarrow M \mid \tau_Q \circ X = \tau_Q|_M\}.$$

2.3.5 Teorema. Seja (Q, m, g, F_{ext}) um sistema holônomo e $M \subset TQ$ uma distribuição sobre Q . Para cada campo $X \in \tilde{\Gamma}(M)$ existe uma e uma única reação vincular $F_{vin}: M \rightarrow TQ$ tal que $\|^\hbar \circ F_{vin} = X$.

2.3.6 Corolário. Se (Q, m, g, F_{ext}) é um sistema holônomo e $M \subset TQ$ uma distribuição sobre Q então existe uma e uma única reação vincular F_{vin} sobre M tal que $\|^\hbar \circ F_{vin} = 0$.

2.3.7 Definição. Chamaremos de **reação vincular d'Alembertiana** sobre $M \subset TQ$ aquela determinada pelo corolário 2.3.6 acima. Diremos também que (M, F_{vin}) é um **vínculo d'Alembertiano** se F_{vin} for a reação d'Alembertiana sobre M ; isto é, se $\|^\hbar \circ F_{vin} = 0$.

2.3.8 Notação. Se (Q, h) é uma variedade riemanniana ($h \in \{g, m\}$) e $M \subset TQ$ uma distribuição sobre Q então designaremos por $\bar{h}$ a métrica riemanniana definida sobre o fibrado vetorial $M \rightarrow Q$ pela inclusão $i: M \rightarrow$

TQ ; e por $i^*: T^*Q \rightarrow M^*$ o “pull-back” de covetores pela inclusão $i: M \rightarrow TQ$, onde $M^* \rightarrow Q$ é o fibrado vetorial dual à $M \rightarrow Q$ ($M^* = \bigcup_{q \in Q} M_q^*$). Além disso, vamos indicar por $h^\flat: TQ \rightarrow T^*Q$ e $h^\sharp: T^*Q \rightarrow TQ$ (respec. $\bar{h}^\flat: M \rightarrow M^*$ e $\bar{h}^\sharp: M^* \rightarrow M$) as aplicações definidas por $[h^\flat(X)](Y) = h(X, Y)$ e $h^\sharp = (h^\flat)^{-1}$ (respec. $[\bar{h}^\flat(X)](Y) = \bar{h}(X, Y)$ e $\bar{h}^\sharp = (\bar{h}^\flat)^{-1}$).

A notação seguinte será utilizada na prova do lema 2.3.10 e no comentário 2.3.20.

2.3.9 Notação (em coordenadas locais). Dada uma variedade Q , vamos denotar por (q^i) ($i = 1, \dots, \dim Q$) um sistema genérico de **coordenadas locais** sobre Q , e por $(q^i, \dot{q}^j)$ o sistema de coordenadas locais induzido em TQ . Dada uma distribuição $M \subset TQ$ sobre Q , representaremos por $\Gamma|_U(M)$ o conjunto das secções de $M \rightarrow Q$ restritas a um aberto $U \subset Q$:

$$\Gamma|_U(M) = \{X: U \rightarrow M \mid \tau_Q \circ X = id_U\},$$

e por (X_α) ($\alpha = 1, 2, \dots, \text{rank } M$) um **referencial local tangente** à M (isto é, $X_\alpha \in \Gamma|_U(M)$ são campos vetoriais linearmente independentes que geram $M_q \subset T_qQ$ em todos os pontos q de um aberto $U \subset Q$).

Se (q^i) e (X_α) estão definidos sobre um mesmo aberto $U \subset Q$ então definimos $X_\alpha^i: U \rightarrow \mathbb{R}$ (daqui por diante índices latinos $i, j, k, \dots$ percorrerão os valores $1, 2, \dots, \dim Q$ e índices gregos $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ os valores $1, 2, \dots, \text{rank } M$) por $X_\alpha = X_\alpha^i \partial_i$ (soma em i), onde $\partial_i = (\partial/\partial q^i) \in \mathcal{X}(U)$.

Se h é uma métrica riemanniana sobre Q , definimos

$$h_{ij} = h(\partial_i, \partial_j), \quad h_{\alpha\beta} = \bar{h}(X_\alpha, X_\beta) = h_{ij} X_\alpha^i X_\beta^j,$$

$$h^{ij} \text{ por } h^{ij} h_{jk} = \delta_k^i, \quad h^{\alpha\beta} \text{ por } h^{\alpha\beta} h_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha,$$

$$\|_i^\alpha \text{ por } \|(\partial_i) = \|_i^\alpha X_\alpha, \quad e \quad \Gamma_{ij}^k \text{ por } \nabla_{\partial_i}^h \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

É claro que

$$\|_i^\alpha = h^{\alpha\beta} X_\beta^j h_{ji} \quad e \quad \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} h^{kl} (\partial_i h_{lj} + \partial_j h_{il} - \partial_l h_{ij}),$$

onde $\partial_i = \partial/\partial q^i$ (vamos utilizar também $\partial_\alpha = X_\alpha^i \partial/\partial q^i$).

2.3.10 Lema. Se (Q, h) é uma variedade riemanniana ($h \in \{g, m\}$) e $M \subset TQ$ uma distribuição sobre Q então:

(i) Para todo campo $Z \in \tilde{\Gamma}(M)$ e todo vetor $v_0 \in M$, existe uma curva $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Q$ tangente à M com $v(0) = v_0$ e

$$\| \circ \nabla_v^h v = Z \circ v.$$

(ii) Existe uma aplicação $\Delta^h: M \rightarrow TQ$ (que preserva o ponto base: $\tau_Q \circ \Delta^h = \tau_Q|_M$) tal que, para toda curva $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Q$ tangente à M ,

$$\perp^h \circ \nabla_v^h v = \Delta^h \circ v.$$

Prova. (i) Na notação em coordenadas locais introduzida em 2.9 uma curva $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \subset Q$ é tangente à M se e somente se existem $v^\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ com $\dot{q}^i(t) = X_\alpha^i v^\alpha(t)$, e neste caso

$$\ddot{q}^i(t) = \frac{d}{dt}(X_\alpha^i v^\alpha) = X_\alpha^i \dot{v}^\alpha + (\partial_j X_\alpha^i) \dot{q}^j v^\alpha = X_\alpha^i \dot{v}^\alpha + (\partial_\delta X_\varepsilon^i) v^\delta v^\varepsilon.$$

Uma tal curva satisfaz $\| \circ \nabla_v^h v = Z \circ v$ se e somente se

$$\|_i^\alpha (\ddot{q}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{q}^j \dot{q}^k) = Z^\alpha(q, v),$$

onde $Z^\alpha(q, v)$ são as componentes do vetor $Z(q, v) \in M_q$ no referencial local (X_α) .

Substituindo $\dot{q}$ e $\ddot{q}$ por v e $\dot{v}$ na expressão acima obtemos

$$\begin{aligned} \|\alpha_i(\ddot{q}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{q}^j \dot{q}^k) &= \|\alpha_i \left[X_\beta^i \dot{v}^\beta + (\partial_\delta X_\varepsilon^i) v^\delta v^\varepsilon + \Gamma_{jk}^i X_\delta^j X_\varepsilon^k v^\delta v^\varepsilon \right] \\ &= \dot{v}^\alpha + \|\alpha_i (\partial_\delta X_\varepsilon^i + \Gamma_{jk}^i X_\delta^j X_\varepsilon^k) v^\delta v^\varepsilon, \end{aligned}$$

a existência de uma curva $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Q$ tangente à M com $v(0) = v_0$ e $\|\alpha^h \circ \nabla_v^h v = Z \circ v$ decorre então da integrabilidade (local) do seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias em (q, v) :

$$\begin{cases} \dot{q}^i = X_\alpha^i v^\alpha \\ \dot{v}^\alpha = Z^\alpha(q, v) - \|\alpha_i (\partial_\delta X_\varepsilon^i + \Gamma_{jk}^i X_\delta^j X_\varepsilon^k) v^\delta v^\varepsilon. \end{cases}$$

(ii) A aplicação que associa a cada par $X, Y \in \Gamma|_U(M)$ o campo

$$\perp^h \circ \nabla_X^h Y \in \mathcal{X}(U)$$

é tensorial pois, para quaisquer $X, Y \in \Gamma|_U(M)$ e qualquer $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\perp^h \circ \nabla_X^h (fY) = \perp^h [f(\nabla_X^h Y) + (Xf)Y] = f(\perp^h \circ \nabla_X^h Y).$$

Basta então definirmos $\Delta^h(X) = \perp^h \circ \nabla_X^h X$, para todo $X \in M$. ■

2.3.11 Definição. *Seja (Q, m, g, F_{ext}) um sistema holônomo e $M \subset TQ$ uma distribuição. Além das métricas $\bar{g}$ e $\bar{m}$ induzidas em $M \rightarrow Q$ segundo 2.3.8, definimos o tensor $\bar{I}: M \rightarrow M$ por $\bar{I} = \|\alpha^g \circ (I|_M)$.*

2.3.12 Lema. *Nas condições da definição 2.3.11 acima, e com a notação introduzida em 2.3.8, temos que*

- (i) $\bar{I} = \bar{g}^\sharp \circ \bar{m}^\flat$ (portanto $\bar{I}$ é inversível); e
- (ii) $\|\alpha^g \circ I = \bar{I} \circ \|\alpha^m$.

Prova. Lembrando que $\|g = \bar{g}^\sharp \circ i^* \circ g^\flat$ temos, para o item (i),

$$\begin{aligned}\bar{I} &= \|g \circ (I|_M) \\ &= \bar{g}^\sharp \circ i^* \circ g^\flat \circ (I|_M) \\ &= \bar{g}^\sharp \circ i^* \circ (m^\flat|_M) \\ &= \bar{g}^\sharp \circ \bar{m}^\flat,\end{aligned}$$

e para o item (ii):

$$\begin{aligned}\|g \circ I &= \bar{g}^\sharp \circ i^* \circ g^\flat \circ I \\ &= \bar{g}^\sharp \circ i^* \circ m^\flat \\ &= \bar{g}^\sharp \circ (\bar{m}^\flat \circ \bar{m}^\sharp) \circ i^* \circ m^\flat \\ &= (\bar{g}^\sharp \circ \bar{m}^\flat) \circ \|m \\ &= \bar{I} \circ \|m. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

2.3.13 Lema. *Se (Q, m, g, F) é um sistema holônomo e $M \subset TQ$ uma distribuição sobre Q então:*

(i) *Para todo campo $Y \in \tilde{\Gamma}(M)$ e todo vetor $v_0 \in M$, existe uma curva $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Q$ tangente à M com $v(0) = v_0$ e*

$$\|g \circ I \circ \nabla_v^m v = Y \circ v.$$

(ii) *Para toda curva $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Q$ tangente à M , temos que*

$$\perp^g \circ I \circ \nabla_v^m v = I \circ \Delta^m \circ v + \Xi \circ (\|g \circ I \circ \nabla_v^m v),$$

onde $\Xi: M \rightarrow TQ$ é o tensor definido por $\Xi = (I \circ \bar{I}^{-1} - id_M)$.

Prova. Para provar (i) utilizamos o lema anterior (2.3.12(ii)):

$$\|g \circ I \circ \nabla_v^m v = \bar{I} \circ \|m \circ \nabla_v^m v,$$

portanto $\|g \circ I \circ \nabla_v^m v = Y \circ v$ é equivalente a

$$\|m \circ \nabla_v^m v = (\bar{I}^{-1} \circ Y) \circ v,$$

e então aplicamos o lema 2.3.10(i) com $h = m$ e $Z = (\bar{I}^{-1} \circ Y)$.

Para provarmos o item (ii) basta lembrarmos que $\|h + \perp^h = id_{TQ}$ ($h \in \{g, m\}$); logo

$$\begin{aligned} \perp^g \circ I \circ \nabla_v^m v &= (id_{TQ} - \|g) \circ I \circ (\perp^m + \|m) \circ \nabla_v^m v \\ &= (I - \|g \circ I) \circ (\perp^m \circ \nabla_v^m v + \|m \circ \nabla_v^m v) \\ &= (I - \bar{I} \circ \|m) \circ (\Delta^m \circ v + \|m \circ \nabla_v^m v) \\ &= I \circ \Delta^m \circ v + (I - \bar{I}) \circ \|m \circ \nabla_v^m v \\ &= I \circ \Delta^m \circ v + (I \circ \bar{I}^{-1} - id_M) \circ (\bar{I} \circ \|m \circ \nabla_v^m v) \\ &= I \circ \Delta^m \circ v + \Xi \circ (\|g \circ I \circ \nabla_v^m v). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.3.14 Prova (do teorema 2.3.5). Vamos demonstrar inicialmente a unicidade de uma reação vincular F_{vin} tal que $\|g \circ F_{vin} = X$, onde $X \in \tilde{\Gamma}(M)$ é um campo dado. Se $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Q$ é uma curva tangente à M que obedece $I \circ \nabla_v^m v = (F_{ext} + F_{vin}) \circ v$ então

$$\|g \circ I \circ \nabla_v^m v = \|g \circ F_{vin} \circ v + \|g \circ F_{ext} \circ v, \quad e \quad (1)$$

$$\perp^g \circ I \circ \nabla_v^m v = \perp^g \circ F_{vin} \circ v + \perp^g \circ F_{ext} \circ v, \quad (2)$$

levando o lema 2.3.13(ii) na equação (2):

$$\perp^g \circ F_{vin} \circ v = I \circ \Delta^m \circ v + \Xi \circ (\|g \circ I \circ \nabla_v^m v) - \perp^g \circ F_{ext} \circ v,$$

pela equação (1):

$$\perp^g \circ F_{vin} \circ v = I \circ \Delta^m \circ v + \Xi \circ (\|g \circ F_{vin} \circ v + \|g \circ F_{ext} \circ v) - \perp^g \circ F_{ext} \circ v,$$

lembrando agora que $\|g \circ F_{vin} = X$, e que para qualquer $v_0 \in M$ existe uma curva $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Q$ com $v(0) = v_0$ e $I \circ \nabla_v^m v = (F_{ext} + F_{vin}) \circ v$, concluimos que

$$\perp^g \circ F_{vin} = I \circ \Delta^m + \Xi \circ (X + \|g \circ F_{ext}) - \perp^g \circ F_{ext}. \quad (3)$$

Essa expressão para a componente normal de F_{vin} demonstra sua unicidade.

Para provarmos a existência, suponhamos dado $X \in \tilde{\Gamma}(M)$ e defina-se

$$F_{vin} = X + \perp^g \circ F_{vin},$$

com $\perp^g \circ F_{vin}$ dado por (3). Esta F_{vin} é uma reação vincular pois, para qualquer $v_0 \in M$, existe uma curva $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Q$ tangente à M que satisfaz $v(0) = v_0$ e

$$\|g \circ I \circ \nabla_v^m v = (X + \|g \circ F_{ext}) \circ v$$

(lema 2.3.13(i) com $Y = X + \|g \circ F_{ext}$).

Essa curva c também satisfaz a equação (2) acima (basta inverter a dedução de (3) a partir de (2)), e as equações (1) e (2) garantem juntas que

$$I \circ \nabla_v^m v = (F_{vin} + F_{ext}) \circ v. \quad \blacksquare$$

2.3.15 Corolário. *Se (M, F_{vin}) é um vínculo sobre um sistema holônomo (Q, m, g, F_{ext}) então uma curva $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Q$ tangente à M satisfaz a equação $I \circ \nabla_v^m v = (F_{vin} + F_{ext}) \circ v$ se e somente se*

$$i^* \circ \left[m^b \circ \nabla_v^m v - g^b \circ (F_{vin} + F_{ext}) \circ v \right] = 0.$$

Prova. Na demonstração anterior (prova 2.3.14) foi estabelecida a equivalência entre as equações $I \circ \nabla_v^m v = (F_{vin} + F_{ext}) \circ v$ e

$$\|g \circ I \circ \nabla_v^m v = \|g \circ (F_{vin} + F_{ext}) \circ v,$$

basta então lembrarmos que $\|g = \bar{g}^\# \circ i^* \circ g^b$ e $I = g^\# \circ m^b$. $\blacksquare$

2.3.16 Corolário. *Dado um sistema holônomo (N, g, M, F_{ext}) e uma subvariedade $Q \subset N$, uma condição necessária e suficiente para que uma aplicação $F_{vin}: TQ \rightarrow TN|_Q$ (que preserva o ponto base) seja uma reação vincular é*

$$\perp^g \circ F_{vin} = M \circ \Delta^m + \Xi \circ \parallel^g \circ (F_{vin} + F_{ext}) - \perp^g \circ F_{ext}.$$

Em particular, para qualquer reação vincular d'Alembertiana temos que

$$F_{vin} = M \circ \Delta^m + \Xi \circ \parallel^g \circ F_{ext} - \perp^g \circ F_{ext}.$$

Prova. A primeira expressão é exatamente a equação (3) deduzida na demonstração 2.3.14, e a segunda decorre trivialmente da definição de reação d'Alembertiana (2.3.7). ■

Sobre o corolário 2.3.15 veja o comentário 2.3.20 adiante.

Não vamos explorar aqui as conseqüências do corolário 2.3.16, mas é fácil ver que os comentários feitos na parte 1 sobre o resultado correspondente (cor. 1.2.15) se aplicam a esta situação mais geral (bem como a prop. 1.2.19). Em particular, as expressões dadas no corolário 2.3.16 acima dispensam o uso dos *multiplicadores de Lagrange* na determinação da reação vincular, mesmo que o vínculo considerado seja não holônomo.

Para finalizar, vamos considerar rapidamente o caso das forças externas *conservativas* (proposições 2.3.18 e 2.3.19), e apresentar, em coordenadas locais (comentário 2.3.20), as várias formas da *equação de movimento* obtida em 2.3.15.

2.3.17 Definição. *Um sistema holônomo (Q, m, g, F_{ext}) é **conservativo** se existe $V: Q \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F_{ext} = -g^\sharp \circ dV \circ \tau_Q$. Fixada uma das funções V , que chamaremos de **energia potencial**, definimos a **energia total** $E: TQ \rightarrow \mathbb{R}$ do sistema por $E = K + V \circ \tau_Q$.*

2.3.18 Proposição (conservação da energia). *Seja (Q, m, g, F_{ext}) um sistema holônomo conservativo com energia potencial V e energia total E . Se $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Q$ satisfaz $I \circ \nabla_v^m v = F_{ext} \circ v$ então $\frac{d}{dt}(E \circ v) = 0$.*

Prova. Basta levarmos $F_{ext} = -g^\sharp \circ dV \circ \tau_Q$ à proposição 1.3.6:

$$\frac{d}{dt}(K \circ v) = g(v, F_{ext} \circ v) = g(v, -g^\sharp \circ dV \circ \tau_Q \circ v) = -\frac{d}{dt}(V \circ c),$$

portanto

$$\frac{d}{dt}(E \circ v) = \frac{d}{dt}(K \circ v) + \frac{d}{dt}(V \circ c) = 0. \quad \blacksquare$$

2.3.19 Proposição. *Seja (M, F_{vin}) um vínculo d'Alembertiano sobre um sistema holônomo conservativo (Q, m, g, F_{ext}) com energia potencial V . Uma curva $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Q$ satisfaz $I \circ \nabla_v^m v = (F_{vin} + F_{ext}) \circ v$ se e somente se*

$$i^* \circ [m^\flat \circ \nabla_v^m v + dV \circ c] = 0.$$

Prova. Pelo corolário 2.3.15, basta demonstrarmos a equivalência entre a equação acima e

$$i^* \circ [m^\flat \circ \nabla_v^m v - g^\flat \circ (F_{vin} + F_{ext}) \circ v] = 0,$$

o que é fácil pois $\|g \circ F_{vin} = 0$ e $F_{ext} = -g^\sharp \circ dV \circ \tau_Q$ implicam em

$$\begin{aligned} g^\flat \circ (F_{vin} + F_{ext}) \circ v &= -g^\flat \circ g^\sharp \circ dV \circ \tau_Q \circ v \\ &= -dV \circ c. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.3.20 Comentário. Em um referencial local (X_α) (notação 2.3.9), a equação

$$i^* \circ [m^\flat \circ \nabla_v^m v - g^\flat \circ (F_{vin} + F_{ext}) \circ v] = 0$$

se escreve

$$X_{\alpha}^i \left[m_{ij} (\ddot{q}^j + \Gamma_{kl}^j \dot{q}^k \dot{q}^l) - g_{ij} (F_{vin}^j + F_{ext}^j) \right] = 0,$$

onde Γ_{kl}^j são os símbolos de Christoffel da conexão riemanniana associada à métrica m . Esta equação é equivalente a

$$X_{\alpha}^i \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q^i} - g_{ij} (F_{vin}^j + F_{ext}^j) \right] = 0,$$

onde $K = \frac{1}{2} m_{jk} \dot{q}^j \dot{q}^k$.

Nas condições da prop. 2.3.19 (força externa conservativa e reação vincular d'Alembertiana) a equação acima pode ser escrita como

$$X_{\alpha}^i \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q^i} + \frac{\partial V}{\partial q^i} \right] = 0,$$

ou, definindo $L: TQ \rightarrow \mathbb{R}$ por $L = K - V \circ \tau_Q$,

$$X_{\alpha}^i \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} \right] = 0.$$

EQUAÇÕES DE SEGUNDA ORDEM

Na secção 1.1 escrevemos a *equação de movimento* de um sistema de partículas (N, g, M, F) da seguinte forma:

$$F \circ v = M \circ a,$$

onde $v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow TN$ e $a: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow TN$ são a velocidade e a aceleração (respec.) de uma curva $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$, que é a função incógnita. Como qualquer equação diferencial ordinária de segunda ordem sobre a variedade afim N , a equação acima pode ser considerada como um campo vetorial $X_N \in \mathcal{X}(TN)$ sobre a variedade TN . Fazemos isto impondo que uma curva $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$ seja solução da equação se e somente se sua

velocidade $v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow TN$ for uma curva integral do campo X_N . O campo $X_N \in \mathcal{X}(TN)$ associado à equação $M \circ a = F \circ v$ desta forma é

$$X_N = S_N + M^{-1} \circ F,$$

onde $S_N \in \mathcal{X}(TN)$ é o *spray geodésico* da conexão afim de N e $(M^{-1} \circ F) \in \mathcal{X}(TN)$ é o *campo vertical* sobre TN associado à aplicação $(M^{-1} \circ F): TN \rightarrow TN$.

Da mesma forma, à *equação de Lagrange*

$$\bar{M} \circ \nabla_v^{\bar{m}} v = \|g \circ (F_{vin} + F_{ext}) \circ v$$

deduzida no corolário 1.2.14 corresponde o campo $X_Q \in \mathcal{X}(TQ)$ sobre a variedade TQ dado por

$$X_Q = S_Q^{\bar{m}} + \bar{M}^{-1} \circ \|g \circ (F_{vin} + F_{ext}),$$

onde $S_Q^{\bar{m}} \in \mathcal{X}(TQ)$ é o *spray geodésico* da conexão de Levi-Civita sobre Q associada à métrica $\bar{m}$ e $[\bar{M}^{-1} \circ \|g \circ (F_{vin} + F_{ext})] \in \mathcal{X}(TQ)$ o *campo vertical* sobre TQ associado à aplicação $[\bar{M}^{-1} \circ \|g \circ (F_{vin} + F_{ext})]: TQ \rightarrow TQ$.

Se (Q, F_{vin}) é um *vínculo* (def. 1.2.2) sobre um sistema de partículas (N, g, M, F_{ext}) então a *lei de Newton* $X_N \in \mathcal{X}(TN)$ com $F = F_{vin} + F_{ext}$ e a *equação de Lagrange* $X_Q \in \mathcal{X}(TQ)$ acima coincidem sobre TQ , isto é, $X_N|_{TQ} = X_Q$. Dessa igualdade tiramos que

$$S_N + M^{-1} \circ (F_{vin} + F_{ext}) = S_Q^{\bar{m}} + \bar{M}^{-1} \circ \|g \circ (F_{vin} + F_{ext}),$$

ou

$$(F_{vin} + F_{ext}) = M \circ (S_Q^{\bar{m}} - S_N) + M \circ \bar{M}^{-1} \circ \|g \circ (F_{vin} + F_{ext}),$$

ou ainda

$$\perp^g \circ F_{vin} = M \circ (S_Q^{\bar{m}} - S_N) + (M \circ \bar{M}^{-1} - id_{TQ}) \circ \parallel^g \circ (F_{vin} + F_{ext}) - \perp^g \circ F_{ext},$$

onde todos os termos devem ser considerados como campos verticais sobre TN restritos a $TQ \subset TN$.

Essa expressão é equivalente àquela estabelecida no corolário 1.2.15, pois a diferença $(S_Q^{\bar{m}} - S_N)$ é o campo vertical em TN (restrito a $TQ \subset TN$) associado à aplicação $\Delta^m: TQ \rightarrow TN|_Q$ definida em 1.2.9.

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. Abraham and J. E. Marsden: *Foundations of mechanics*, second edition, Benjamin-Cummings, Reading, Massachusetts, 1982.
- [2] P. Appell: *Traité de mécanique rationnelle*, Gauthier-Villars, Paris, 1953.
- [3] V. I. Arnold: *Métodos matemáticos da mecânica clássica*, Editora Mir, Moscou, 1987.
- [4] R. Bishop e R. Crittenden: *Geometry of manifolds*, Academic Press, New York, 1964.
- [5] R. Bishop e S. Goldberg: *Tensor analysis on manifolds*, Macmillan, New York, 1968.
- [6] W. Boothby: *An introduction to differentiable manifolds and riemannian geometry*, Academic Press, New York, 1975.
- [7] M. P. do Carmo: *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1976.
- [8] J. A. Dieudonné: *Éléments d'analyse*, Gauthier-Villars, Paris, 1971.

- [9] C. T. J. Dodson e T. Poston: *Tensor geometry*, Pitman, London, 1977.
- [10] R. Dugas: *Histoire de la mécanique*, Griffon, Neuchatel, 1950.
- [11] L. P. Eisenhart: *Riemannian geometry*, Princeton University Press, Princeton, 1964.
- [12] L. P. Eisenhart: *A treatise on differential geometry of curves and surfaces*, Dover, New York, 1960.
- [13] F. Gantmacher: *Lectures in analytical mechanics*, Mir Publishers, Moscow, 1970.
- [14] C. Godbillon: *Géométrie différentielle et mécanique analytique*, Hermann, Paris, 1969.
- [15] H. Goldstein: *Classical mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1980.
- [16] V. Guillemin e A. Pollack: *Differential topology*, Prentice Hall, New Jersey, 1974.
- [17] R. Hermann: *Differential geometry and the calculus of variations*, Academic Press, New York, 1968.
- [18] R. Hermann: *Geometry, physics and systems*, Dekker, New York, 1973.
- [19] N. J. Hicks: *Notes on differential geometry*, Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1965.
- [20] S. Kobayashi e K. Nomizu: *Foundations of differential geometry*, Wiley, New York, 1963.
- [21] J.-L. Lagrange: *Mécanique analytique*, Paris, 1788.
- [22] L. Landau e E. M. Lifshitz: *Mécanique*, Éditions Mir, Moscou, 1966.
- [23] S. Lang: *Differential manifolds*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1972.
- [24] T. Levi-Civita: *The absolute differential calculus: calculus of tensors*, Dover, New York, 1977.
- [25] J. Milnor: *Topology from the differentiable viewpoint*, University of Virginia Press, Charlottesville, 1965.

- [26] H. Poicaré: *Les méthodes nouvelle de la mécanique céleste*, Gauthier-Villars, Paris, 1892-1899.
- [27] G. de Rham: *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1955.
- [28] J. M. Souriau: *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod, Paris, 1970.
- [29] M. Spivak: *A comprehensive treatise on differential geometry*, Publish or Perish, Boston, 1974.
- [30] M. Spivak: *Calculus on manifolds*, Benjamin-Cummings, Reading, Massachusetts, 1965.
- [31] S. Sternberg: *Celestial mechanics*, Benjamin, New York, 1969.
- [32] S. Sternberg: *Lectures on differential geometry*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1963.
- [33] W. Thirring: *A course in mathematical physics I: Classical dynamical systems*, Springer-Verlag, New York, 1978.
- [34] E. T. Whittaker: *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*, fourth edition, Dover, New York, 1944.