**Álgebra de Cargas não locais
em modelos bidimensionais de
Teoria Clássica de Campos**

Luís Eduardo Saltini

SBI-IFUSP

305M810T2892

Tese de Doutorado submetida ao
Instituto de Física da Universidade de
São Paulo.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Elcio Abdalla (IFUSP) - Presidente

Prof. Dr. Adilson José da Silva (IFUSP)

Prof. Dr. Paulo Teotônio Sobrinho (IFUSP)

Prof. Dr. Franck Michael Forger (IME - USP)

Prof. Dr. Antônio Lima-Santos (UF - São Carlos)

Orientador: Prof. Dr. Ayrton Zadra Moraes Filho
(São Paulo - 1998)

Prof. Dr. Roberto Augusto Canuto
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

530.142
5177a
D
ex. 1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Saltini, Luís Eduardo

Álgebra de Cargas não Locais em Modelos
Bidimensionais da Teoria Clássica de Campos.
São Paulo 1998.

Doutoramento - Universidade de São Paulo.
Instituto de Física - Departamento de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Ayrton Zadra Moraes Filho
Área de Concentração: Física de Partículas Elementares
e Campos

Unitermos: 1. Supersimetria; 2. Campos;
3. Integrabilidade; 4. Cargas; 5. Não-local.

USP/IF/SBI-050/98

*Dedicada a
Albert Schweitzer*

“Há muito tempo, um monge, de um mosteiro ortodoxo, o seu nome era Pamve, plantou uma árvore seca, numa montanha. Ele disse para o seu aluno Ioann Kelov regar a árvore todo dia até voltar a vida. E toda manhã, Ioann enchia um balde com água e subia a montanha, regava a árvore e retornava ao mosteiro só ao anoitecer. Assim ele continuou por três anos. Mas um dia, quando ele chegou, a árvore estava coberta de flores”.

“O Sacrifício”
Andrei Tarkovski, 1984.

Resumo

Nesta tese, apresentamos os resultados do estudo realizado para os modelos σ -não lineares com simetria $O(N)$ bosônico ou supersimétrico assim como a adição do termo topológico de Wess-Zumino (teoria WZNW). Obtivemos as suas cargas conservadas não locais e a estrutura das álgebras clássicas de parênteses de Dirac correspondentes, utilizando um método gráfico que criamos para realizar estes cálculos nos modelos estudados.

Abstract

In this thesis, we exhibit the results of the study made for the non linear σ models with $O(N)$ symmetry, bosonic or supersymmetric as well as with the addition the topological Wess-Zumino term (WZNW theory). We found their non-local conserved charges and the structure of the corresponding classical algebras of Dirac brackets, using a graphical method that we created to make these calculations.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer algumas pessoas cujo apoio e compreensão foram de grande importância para a realização deste trabalho:

- Ao Ayrton, pela orientação segura e pela paciência nos momentos de maiores dificuldades.
- Ao Élcio, pelo auxílio nas fases inicial e sobretudo pela fase final de escrita da Tese.
- À FAPESP, pelo apoio financeiro.
- À minha família, pelo apoio incondicional em todos os momentos, sobretudo os de maiores dificuldades.
- À Anete, pelo seu amor, carinho e compreensão.
- Aos meus amigos da USP.
- Aos meus companheiros de música.
- A todos aqueles que tiveram colaboração para a finalização deste trabalho e que por falta de memória do autor, não foram citados.

A todos, o meu muito obrigado.

Conteúdo

Introdução	1
1 O Modelo Sigma não linear quiral	8
1.1 Introdução ao modelo sigma não linear bosônico	9
1.2 Uma revisão do modelo bosônico	16
1.3 Regras gráficas para o modelo bosônico	21
1.4 O modelo Supersimétrico	27
1.5 Cargas melhoradas no modelo Gross-Neveu $O(N)$	30
2 Álgebra das cargas não locais no modelo WZNW	32
2.1 Álgebra de correntes no modelo WZNW	32
2.2 Cargas Não Locais	34
2.3 Cargas e álgebra no ponto crítico	34
2.4 Cargas Não Locais fora do ponto crítico	35
2.5 Sobre a Identidade de Jacobi	37
3 Conclusões	39
A Exemplos de Regras diagramáticas	42
A.1 Cargas não locais “melhoradas” $Q^{(n)}$ no modelo sigma não linear	42
A.2 Derivação gráfica de $\{Q^{(1)}, Q^{(1)}\}$ no modelo sigma não linear	43
B Derivação da forma dos parâmetros $A(\xi, \mu)$ e $B(\xi, \mu)$ que obedecem a identidade de Jacobi	46
Bibliografia	50

Introdução

O desenvolvimento da Teoria Quântica de Campos (*TQC*) relativística teve início em 1932 como extensão natural da mecânica quântica para o domínio relativístico [1]. A quantização dos campos levou, assim, a novas dificuldades, tanto conceituais como técnicas. Uma delas é o aparecimento de divergências ultravioletas, quando realizamos o produto à curtas distâncias de campos quânticos, devido a estes serem definidos como distribuições a valores de operadores. Esse problema foi parcialmente solucionado através das técnicas de renormalização [2][3] e mais tarde completamente resolvido[4][5].

No início dos anos cinqüenta, surgiram técnicas de extração de propriedades não-perturbativas gerais da *TQC* a partir de um referencial perturbativo. De particular importância foi o então chamado formalismo LSZ (Lehmann, Symanzik, Zimmermann)[6], que estabelecia a relação entre campos e partículas, em termos de condições assintóticas para os campos interpolantes (que são os próprios campos em interação a tempos finitos). A fórmula de redução dava a conexão entre os valores esperados dos campos e os elementos da matriz-*S* do espalhamento de partículas. Do estudo de propriedades analíticas de diagramas de Feynman, pode-se derivar relações de dispersão, que podem ser usadas para obter a informação não-perturbativa[7].

Esses desenvolvimentos foram seguidos por um novo método axiomático para a *TQC*, que se tornou conhecido como *TQC* construtiva. Alguns dos resultados não-perturbativos do formalismo LSZ, que se baseavam em estudos perturbativos, puderam ser derivados de princípios gerais[8]. Uma importante consequência desse método foi um teorema conectando spin e estatística[9].

Nessa época, todos os cálculos dinâmicos da *TQC* estavam restritos à teoria de perturbação. Em particular, isso tornou os cálculos envolvendo interações fortes impossíveis, e a informação sobre o espectro do estado fundamental acessível apenas dentro de um esquema aproximadamente não-perturbativo e freqüentemente não-unitário. Como resultado, a *TQC* caiu em estagnação e descrédito no final dos anos cinqüenta.

Essas dificuldades deram a motivação para um novo método de estudos das interações fortes, a teoria da matriz-*S*[10], que teve um papel dominante nos anos sessenta. O poder preditivo dessa teoria era muito limitado, pois era inteiramente baseada em princípios cinemáticos e na analiticidade, suplementada pela idéia do “bootstrap”. Faltava um referencial dinâmico por trás. Por outro lado, a analiticidade no plano do momento angular complexo levou ao importante conceito de “dualidade”, expressando a possibilidade de representar uma dada amplitude de espalhamento como uma soma sobre pólos nos canais cruzados.

Uma realização explícita desse conceito surgiu de uma importante fórmula proposta por Veneziano[11] e levou a um novo desenvolvimento paralelo nos anos sessenta, os “modelos

duais". Porém, tanto para a teoria da matriz- S como para os modelos duais, o comportamento à altas energias não estava de acordo com a experiência. Além disso, uma análise da estrutura de pólo de correções de ordens superiores exigia a introdução de um conceito algo misterioso, o "pomeron"[12]. O número cada vez maior de parâmetros que eram necessários para descrever os experimentos dentro desses esquemas, e a resultante perda de poder preditivo levou os físicos a abandoná-los e a retornar à TQC .

Enquanto isso, a TQC conseguiu alguns sucessos importantes no setor de interações fracas[13]. Além disso, princípios de simetria[14] provaram ser poderosos instrumentos na predição das massas de partículas em interações fortes, assim como a existência de algumas novas partículas, sem o recurso de cálculos dinâmicos.

Essa situação levou ao renascimento da TQC no final dos anos sessenta, quando muita atenção foi dada aos aspectos não-perturbativos. A Cromodinâmica Quântica (QCD) foi proposta como a teoria fundamental para interações fortes[15], mas faltava cálculos que confrontassem a QCD com testes experimentais. O comportamento à altas energias da TQC era investigado por meio do grupo de renormalização e a equação de Callan-Symanzik[16], que descreve o comportamento de teorias sob renormalizações finitas dos parâmetros. Como resultado, foi possível relacionar o limite de massa nula, com o comportamento de altas energias. Uma constante de acoplamento dependente do momento caracteriza o domínio da interação: dependendo das propriedades da chamada função β , que aparece na equação do grupo de renormalização, a constante de acoplamento pode ser suficientemente pequena para momentos grandes ou pequenos, para legitimar a teoria de perturbação em uma dessas regiões. No caso de teorias de gauge não-abelianas, a teoria de perturbação passa a ser uma boa aproximação à altas energias (liberdade assintótica). Soluções clássicas da teoria de campos têm também um papel central (não-perturbativo) na análise semi-clássica da TQC . Soluções monopolo (espaço de Minkowski), e soluções instanton (espaço Euclidiano) foram obtidas, mostrando a importância da topologia da variedade sobre a qual os campos são definidos[17]. Dessa maneira, setores mais abstratos da matemática, como topologia algébrica, passaram a ter um papel importante na descoberta de propriedades estruturais de teorias de gauge.

Apesar dos estudos anteriores terem sido importantes para revelar uma estrutura não trivial e extremamente importante, resultados não-perturbativos exatos estavam disponíveis apenas para modelos específicos, todos em espaço-tempo bidimensionais. Uma solução completa (não-perturbativa) de um modelo em TQC significa o conhecimento exato de todas as suas funções de correlação. Teorias quânticas de campos com tais propriedades foram restritas à $1 + 1$ -dimensões. O primeiro desses modelos, que descreve interações do tipo corrente-corrente de férmions sem massa, foi discutido por Thirring[18] em 1958, como exemplo de um modelo de teoria quântica de campos completamente solúvel e que obedece os princípios gerais de uma TQC [9]. A solução quântica completa aparece em um artigo clássico de Klaiber[19], e mostrou que satisfaz a todos os axiomas de Wightman[9]. Até essa época, os únicos modelos conhecidos que satisfaziam esses axiomas eram os que descreviam campos livres generalizados[20].

Seguindo um trabalho anterior, Schwinger[21] obteve uma solução exata da eletrodinâmica quântica em $1 + 1$ -dimensões (QED_2). Um número de propriedades interessantes, como a estrutura não-trivial do vácuo deste modelo, foram somente mais tarde reveladas no trabalho de Lowenstein e Swieca[22], que exploraram as consequências da força de Coulomb de longa

distância para os setores de carga da teoria. Essa força de longa distância foi interpretada como sendo responsável pelo confinamento dos quarks[23], isto é, sua ocorrência na forma de estados permanentemente fundamentais de pares $q\bar{q}$ (estados fundamentais bariônicos estão ausentes na QED_2). O problema do confinamento e o problema associado de blindagem dos números quânticos de cargas em $d = 2$ foram extensamente estudados[24], e serviram como base para dar forma a conceitos envolvidos também em dimensões superiores.

A surpreendentemente rica estrutura da eletrodinâmica quântica bidimensional descreve várias características importantes de teorias de gauge não-abelianas, sob investigação nos anos setenta. No final dos anos sessenta aprendemos que as singularidades a curtas distâncias da TQC tem um papel chave na estrutura dinâmica da teoria[25]. Os resultados experimentais sobre o espalhamento lépton-próton em transferência de grandes momentos, exigiram que uma teoria realística das interações fortes fosse assintoticamente livre[15][16]. Isso tornou a QCD a única candidata para uma teoria que descreve interações fortes, pois mostrou-se que nenhuma teoria renormalizável sem campos de gauge não abelianos pode ser assintoticamente livre[26]. As propriedades da estrutura do vácuo e o confinamento atribuídos à QCD_4 foram explicitamente realizadas na QED bidimensional, o que tornou a teoria um “laboratório” muito interessante.

Vários outros desenvolvimentos em TQC em duas dimensões [27][28], de crescente importância, vieram depois. Modelos classicamente exatamente integráveis e a quantização de sólitons foram extensamente estudados em duas dimensões[29]. Tais modelos integráveis foram classificados de maneira geral pela existência de um número infinito de leis de conservação[30]. Nos casos onde essas leis de conservação sobrevivem à quantização, as matrizes- S e suas matrizes de monodromia associadas podem ser calculadas exatamente [31][32][33][34][35]. Apesar de serem os primeiros exemplos de matrizes- S exatas que realizam a idéia de “analiticidade minimal” dos anos sessenta, esses resultados exatos também têm um importante papel na checagem de esquemas de aproximação, como a aproximação semi-clássica e a expansão $\frac{1}{N}$, e têm importantes aplicações na mecânica estatística[37]. Alguns dos resultados relacionados à integrabilidade clássica foram também generalizados para dimensões superiores[38].

No caso particular da teoria de sine-Gordon, resultados exatos também foram obtidos além do nível da matriz- S [33][39]. Além disso, a matriz- S de campos fundamentais foi generalizada para a matriz- S completa descrevendo o espalhamento de estados fundamentais, assim como os sólitons[40]. Obtem-se uma inesperada simetria $O(2) \approx U(1)$, refletindo o fato de que os sólitons na teoria sine-Gordon correspondem aos férmions no modelo de Thirring massivo. Essa equivalência, parcialmente conjecturada a muito tempo atrás por Skyrme[41], foi provada por Coleman[42] no nível das funções de Green, e mais tarde obtidas pelo uso dos métodos operacionais[43]. Em ambas as versões (bosônica ou fermiônica) as matrizes- S puderam ser calculadas exatamente e mostraram ser idênticas[32][39][44].

Do ponto de vista dos modelos bidimensionais, a possibilidade de escrever férmions em termos de bósons (bosonização) tem sido um poderoso método para se obter informações não-perturbativas. Uma das características que poderia ser colocada neste contexto é que os setores de carga da teoria fermiônica correspondem aos setores de sólito carregados, ocultos na teoria puramente neutra: aspectos dinâmicos da formulação fermiônica se tornam propriedades topológicas da contraparte bosônica. Na bosonização abeliana os blocos elementares do esquema de bosonização são as exponenciais dos campos bosônicos livres.

O número fermiônico desse operador composto está diretamente ligado ao comportamento infravermelho dos campos escalares de massa nula. Isso leva à uma regra de superseleção[45], que faz com que os setores carregados apareçam de uma maneira bastante natural.

As técnicas de bosonização $U(1)$ se tornam importantes quando aplicadas à teorias não-abelianas. Por duas razões: as transformações de simetria da teoria fermiônica são não-locais com relação aos campos fundamentais de Bose e esses campos estão em uma representação não-linear do grupo de simetria global dos férmions. Progresso significativo na direção da bosonização não-abeliana foi dado pelo trabalho de Polyakov e Wiegman[46] por um lado, e Witten[47] por outro lado. Apesar desses autores terem discutido o problema em diferentes contextos - QCD_2 quiral e teoria de férmions de Majorana $O(N)$ livres - ambos chegaram à uma ação bosônica equivalente envolvendo a ação do modelo sigma quiral principal mais um termo de Wess-Zumino [48][49]. Portanto, em duas dimensões, teorias fermiônicas exibem uma importante “universalidade” na formulação bosônica, onde o modelo sigma não-linear e termos “topológicos” parecem ter um papel fundamental.

Entre os modelos bidimensionais em TQC mais importantes e estudados estão os modelos sigma não-lineares. Um papel particularmente importante têm a classe de modelos sigma não-lineares bidimensionais e integráveis, que possuem uma origem geométrica[50][51][52]. Eles possuem várias propriedades parecidas com teorias de Yang-Mills em quatro dimensões [53][54]: no nível clássico, ambos são conformalmente invariantes e apresentam identidades geométricas similares bem como soluções clássicas não-triviais[55][56] (por exemplo, instantons [57] na formulação Euclideana). Os modelos sigma não-lineares para espaços simétricos[50][51], e as teorias de Yang-Mills para tanto o setor auto-dual como para a supersimetria estendida [38], possuem propriedades de integrabilidade parecidas. Quando quantizados, os modelos sigma não-lineares também exibem características que se acredita serem propriedades de teorias realísticas, como a força de confinamento a longas distâncias[52], quando o grupo de gauge é não simples[58], e geração dinâmica de massa; a quebra espontânea de simetria apresenta características particulares[59][60]. Essas propriedades os tornam excelentes “modelos testes” para as interações fortes[54][61][62]. Entretanto, suas origens geométricas os tornam também objetos matemáticos bastante interessantes para ser estudados por si próprios.

Os modelos sigma também possuem um papel importante em teoria de cordas, onde a variedade alvo D -dimensional é compactificada em um espaço-tempo quadridimensional[63]. A ação associada com as dimensões compactificadas é descrita por um modelo sigma. A exigência de invariância conforme no nível quântico leva diretamente à equação de Einstein da relatividade geral, e prevê suas correções quânticas[64][65][66].

O espaço-tempo bidimensional mostrou ser um excelente laboratório também para o estudo de anomalias de gauge e a consistência de teorias de gauge quirais anômalas. A solubilidade exata da QED quiral bidimensional[67][69] tem aqui um papel importante ao abrir toda uma nova linha de desenvolvimentos na área de teorias de gauge quirais. Um inesperado e profundo significado geométrico-diferencial subjacente em tais anomalias foi revelado [68][70][71]. Além disso, um dos usos de maior sucesso dos modelos sigma em duas dimensões é sua relação com as teorias de gauge não-abelianas em quatro dimensões [62]. Em termos de mecânica quântica, os modelos sigma exibem também características desejáveis, como uma força de longa distância “secreta”[52] gerada pelas flutuações quânticas do campo de gauge induzido, quando o grupo de gauge é não simples[58], a menos que haja uma interação

adequada com férmions (supersimétrica ou minimal), liberando os pártons[72][73][74][75].

Mais recentemente mostrou-se que em teorias quânticas de campos bidimensionais, a invariância de Poincaré e de escala, sozinhas, implicam na invariância sob um grupo de simetria infinito-dimensional[76]. Como resultado, funções de correlação não triviais podem ser exatamente calculadas. Elas estão de maneira geral relacionadas à soluções de equações diferenciais hipergeométricas. Os parâmetros que rotulam essas equações, que são considerados os índices críticos, foram classificados e caracterizam as funções de correlação univocamente[76][77]. As álgebras conformes são realizadas em termos dos então chamados campos primários e seus descendentes. No espaço de Minkowski, essa construção leva naturalmente ao uso dos "Artin Braids", que relacionam esse problema com a construção algébrica das matrizes- S exatas, pois as relações "star-triangle", obtidas das infinitas leis de conservação locais, têm a mesma estrutura que as relações de perturbação da teoria dos nós[78].

As idéias anteriores podem ser generalizadas para incluir as interações com gravitação conformalmente invariante[79]. No gauge de cone-de-luz, a teoria simplifica-se drasticamente, devido à uma nova simetria $SL(2, R)$ [79][80]. Os índices críticos da teoria devem ser calculados a partir de uma equação bastante simples relacionando-os aos índices críticos da teoria no espaço plano. Os resultados foram também generalizados para o caso supersimétrico[81].

Resumindo, modelos bidimensionais têm sido um extraordinário laboratório para testar idéias em teoria quântica de campos. Assim, o modelo de Thirring nos deu uma realização de uma teoria de campos exatamente solúvel, enquanto o modelo de Schwinger e os modelos sigma não-lineares exibem propriedades de teorias de gauge quadridimensionais não abelianas. Entretanto, a TQC bidimensional também tem um papel direto na descrição da realidade física, tendo aplicações em teoria de cordas, assim como em mecânica estatística. Em particular, os métodos desenvolvidos em TQC bidimensional têm sido usados para extrair resultados associados ao comportamento crítico de modelos em mecânica estatística, usando somente a invariância conforme. Uma quantidade extraordinária de conceitos fisicamente interessantes[82] bem como matematicamente elegantes[83][84] surgiram do estudo dessas teorias.

Além de seu "status" como laboratório teórico, e suas aplicações em teoria de cordas e mecânica estatística, o estudo desses modelos levou também a recentes desenvolvimentos, abrindo novas possibilidades para aplicações de alguns dos métodos anteriores no estudo de teorias quânticas de campos em dimensões superiores. Há uma profunda relação entre invariância conforme racional em espaço-tempo bidimensional e a ação de Chern-Simons em três dimensões [85] (que é também equivalente à gravitação conforme em três dimensões[86]). A ação de Chern-Simons mostrou ser um elemento chave na generalização da equivalência férmion-bóson no espaço-tempo tridimensional[87], e também tem um papel importante na discussão de anomalias não abelianas de teorias de gauge quirais em qualquer dimensão [70][71].

Em teorias conformalmente invariantes bidimensionais[76][88], que contém um número infinito de leis de conservação, os geradores de Virasoro são uma generalização das cargas conservadas de energia e momento. Definindo-se uma realização da simetria em termos de vetores nulos, temos um certo número de equações diferenciais que devem ser obedecidas pelas funções de correlação e que podem ser integradas. Em outras palavras, um conhecimento maior da álgebra subjacente obedecida pelas quantidades conservadas, a álgebra de

Virasoro, junto com uma representação diferencial das cargas conservadas, nos permite o cálculo completo das funções de correlação.

Álgebras infinitas conectadas com quantidades conservadas não triviais podem dessa maneira ser o ingrediente chave para a completa solubilidade de modelos integráveis, e o conhecimento de suas funções de correlação.

Simetrias Yangianas são um importante ingrediente para a nossa compreensão da estrutura integrável de teorias de campos conformes e suas deformações [89]. Algumas teorias de campos conformes exibem uma estrutura Yangiana para qualquer álgebra de Lie afim no ponto crítico, com uma estrutura independente de nível [90]. Os geradores Yangianos dessa simetria são entendidos como extensões quânticas de cargas clássicas não-locais, assim como aqueles encontrados no modelo sigma não-linear e a álgebra de correntes desse modelo [31][35][36][58][92][93] [94]. Portanto, o estudo de álgebras clássicas de cargas não-locais pode ser considerado um estudo pré-quântico no sentido da compreensão das propriedades de simetria e integrabilidade dessa classe de teorias de campos.

Nesta tese, exponho o estudo realizado e os resultados obtidos sobre o modelo sigma não linear [31][35][95] em duas dimensões. Estudamos os modelos sigma não linear quiral e supersimétrico, cujos resultados constam no artigo [96] e o modelo sigma não-linear com o termo topológico de Wess-Zumino (WZNW), cujos resultados estão no artigo [97]. Estes modelos são protótipos de uma importante classe de modelos integráveis bidimensionais, que contém um número infinito de cargas locais e não-locais [27][30][92][94].

As cargas conservadas não-locais são objetos muito poderosos. As primeiras delas não triviais, sozinhas, fixam quase que completamente a dinâmica on-shell da teoria [27][31]. As relações algébricas obedecidas por essas cargas são um importante ingrediente para a solução completa desses modelos [32][58][98][99]. As cargas locais formam uma álgebra abeliana, enquanto as cargas não-locais formam uma álgebra não-abeliana e de fato não-linear [35][36][89][90][100][101].

Em um trabalho anterior [103] onde estudou-se o modelo sigma não-linear $O(N)$ e um conjunto particular de cargas não-locais, chamadas cargas “melhoradas”, mostrou-se que elas satisfazem uma álgebra que é uma deformação cúbica da álgebra de Kac-Moody. Essa álgebra obtida está relacionada à estrutura Yangiana. Nesta tese, estendemos esses resultados para o caso supersimétrico [107][108] e do modelo somado ao termo de Wess-Zumino (modelo WZNW).

Quanto ao modelo supersimétrico, a introdução da supersimetria, em princípio, poderia resultar em uma álgebra mais complicada [109]. Porém, foi conjecturado [103][108] que, no modelo sigma, a álgebra das cargas não-locais supersimétricas permaneceria a mesma que a da teoria bosônica, e nós apresentamos os resultados que confirmam esta conjectura. Para isso, seguimos a estratégia algébrica descrita na referência [103] e o método gráfico que criamos [96], para construir as cargas e os correspondentes parênteses de Dirac.

Quanto ao modelo WZNW, analisamos a dependência da álgebra das suas cargas não-locais com a constante de acoplamento do termo de Wess-Zumino, o que nos permite conhecer a álgebra simultaneamente no ponto crítico e fora dele. Portanto, uma das aplicações possíveis desse projeto algébrico é o estudo de perturbações integráveis de teorias conformes [98][99][101][102]. De novo, utilizamos a estratégia algébrica e o método gráfico citados. Como resultado, observamos que, assim como nos casos anteriormente estudados, as cargas não-locais do modelo WZNW formam uma deformação cúbica da álgebra afim $O(N)$.

Porém, essas álgebras cúbicas surpreendentemente não satisfazem à identidade de Jacobi, ao contrário das álgebras dos modelos quiral e supersimétrico.

Capítulo 1

O Modelo Sigma não linear quiral

A noção de integrabilidade completa em teoria de campos envolve a existência de um número infinito de quantidades conservadas comutando entre si. Uma teoria de campos completamente integrável se caracteriza também por sua matriz S se fatorizar explicitamente em amplitudes de duas partículas, o que implica na ausência de produção de partículas no processo de espalhamento. A existência dessas quantidades conservadas é a principal razão dessa característica de fatoração da matriz S .

Em adição a essas quantidades, geralmente locais, alguns modelos possuem um número infinito de cargas conservadas não locais que não comutam entre si. Estas cargas não locais surgem da estrutura do espaço simétrico da variedade na qual os campos assumem seus valores. Isto levanta a importante questão de se a integrabilidade dessas teorias de campos pode ser relacionada à existência de uma álgebra de simetria dinâmica não abeliana infinito dimensional. Na teoria de campos, o modelo sigma não linear é um bom candidato a possuir essa estrutura.

Para se construir essa dinâmica, devemos primeiro obter os parênteses de Poisson das cargas não locais na teoria clássica de campos e os correspondentes comutadores na teoria quântica de campos. A matriz de monodromia do sistema linear associado (par de Lax) funciona como a funcional geratriz das cargas não locais. Este é um sistema de equações diferenciais lineares que tem as equações de movimento como condições de compatibilidade. A matriz de monodromia conecta as soluções do sistema linear nos infinitos espaciais positivos e negativos.

Para uma grande classe de modelos integráveis, os parênteses de Poisson das matrizes de monodromia podem ser expressos de uma forma elegante utilizando-se a chamada matriz r . A matriz r deve resolver as equações clássicas de Yang-Baxter de maneira que a identidade de Jacobi valha para os parênteses de Poisson. Em todos esses casos, a matriz de monodromia diretamente fornece as variáveis de ação - ângulo para a teoria clássica. Em contraste a este fato, a variável de ângulo do modelo σ é ainda desconhecida: devido à invariância conforme, esses modelos possuem uma perda da escala de frequências. Então, o problema linear associado não apresenta as soluções de Jost que oscilam no infinito. A matriz de monodromia completa $T(\lambda)$ é independente do tempo e seus elementos matriciais são cargas conservadas.

Para se obter a álgebra canônica dessas cargas não locais de uma maneira fechada, pode-se investigar os parênteses de Poisson $\{T(\lambda) \otimes T(\mu)\}$ de suas funcionais geratrizes. Para o

modelo σ essa tarefa é mais simples, pois o formalismo canônico é particularmente mais simples.

Uma análise cuidadosa de $\{T(\lambda) \otimes T(\mu)\}$ leva à conclusão que este objeto não é univocamente definido. Além disso, não há definição consistente com as propriedades básicas de parênteses de Poisson, a antissimetria e a identidade de Jacobi. Este problema está relacionado com singularidades à curtas distâncias da álgebra de correntes (não ultralocalidade) e à ausência de escala de massa. No nível da álgebra de transformações canônicas induzidas por $T(\lambda)$, um problema relacionado surge: os comutadores de duas dessas transformações não é gerado por qualquer função no espaço de fase, em particular por nenhuma função das matrizes de monodromia.

Uma maneira natural de regularizar singularidades à curtas distâncias é introduzir uma rede espacial tal que a integrabilidade seja preservada. Porém, para o modelo σ não linear quiral nenhuma discretização integrável do espaço consistente com o tempo contínuo está presentemente à disposição.

Sabe-se que existe uma álgebra de Lie infinito dimensional de transformações de simetria agindo sobre o espaço de soluções do modelo σ quiral. Esta é a álgebra de loop, e ela representa a álgebra de cargas do espaço de Hilbert de estados para o modelo σ não linear em duas dimensões. A não localidade dessas simetrias levanta a questão se elas são relacionadas às cargas não locais e em particular, se elas podem ser canonicamente geradas por elas. Como essas transformações não preservam o parêntese de Poisson básico, essa afirmação não pode ser verdadeira. Dessa maneira, esta álgebra de loop das transformações de simetria está restrita às soluções espaciais e não podem ser estendidas para o espaço de fase. Além disso, as cargas não locais clássicas não formam uma álgebra de loop pois elas nem mesmo formam uma álgebra de Lie.

Devido a esses fatos, conjecturou-se [35] que a álgebra de cargas do modelo σ clássico não obedeceria a identidade de Jacobi. Nesse capítulo, mostramos que há uma recombinação natural das cargas padrão cuja álgebra possui uma estrutura mais lidável, sendo composta de uma parte linear na forma de Kac-Moody, e um termo cúbico. Com o conjunto de cargas obtido dessa recombinação, provamos que de fato a teoria obedece a identidade de Jacobi.

Sabemos que a álgebra de cargas das teorias de campos conformes supersimétricas em duas dimensões é a álgebra de Virasoro. No caso do modelo supersimétrico, as cargas formam uma álgebra de parênteses antissimétricos, ao contrário do caso bosônico, e consequentemente, obedece à identidade de Jacobi.

Mostramos nesse capítulo que a álgebra de cargas do modelo supersimétrico corresponde a exatamente a mesma que no modelo quiral, como conjecturado anteriormente, em [35].

1.1 Introdução ao modelo sigma não linear bosônico

De maneira geral, um modelo sigma não linear é uma teoria de campos de mapas entre variedades. Mais precisamente, as configurações clássicas de campos deste modelo são mapas suaves ϕ de um dado espaço de base $\mathcal{X}$ para um dado espaço alvo M , ambos sendo variedades pseudo Riemannianas conexas. Em termos de coordenadas locais x^μ sobre $\mathcal{X}$ e ϕ^i sobre M , a Lagrangeana assume a forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{ij} \partial_\mu \phi^i \partial_\nu \phi^j \quad , \quad (1.1)$$

levando, após a variação da ação correspondente

$$S = \frac{1}{2} \int d^3x \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} g_{ij} \partial_\mu \phi^i \partial_\nu \phi^j \quad , \quad (1.2)$$

às equações de movimento

$$g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \partial_\nu \phi^i + \Gamma_{jk}^i \partial_\mu \phi^j \partial_\nu \phi^k) = 0 \quad , \quad (1.3)$$

onde a derivada covariante é dada por

$$\nabla_\mu \partial_\nu \phi^i = \partial_\mu \partial_\nu \phi^i - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda \phi^i \quad . \quad (1.4)$$

Aqui, as métricas $g_{\mu\nu}$ e g_{ij} são as componentes de um dado tensor métrico sobre $\mathcal{X}$ com relação ao x^μ e sobre M com relação ao ϕ^i , respectivamente, enquanto $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ e Γ_{jk}^i são os símbolos de Chrystoffel correspondentes,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda &= \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} (\partial_\mu g_{\kappa\nu} + \partial_\nu g_{\kappa\mu} - \partial_\kappa g_{\mu\nu}) \quad , \\ \Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2} g^{il} (\partial_j g_{lk} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{jk}) \quad , \end{aligned} \quad (1.5)$$

e $|g| = |\det(g_{\mu\nu})|$. Além disso, g_{ij} , Γ_{jk}^i , etc. são considerados funções de $\mathcal{X}$ (ou algum domínio apropriado) se olharmos para eles como funções de M (ou algum domínio apropriado) e então compondo-os com o mapa ϕ ; esta dependência explícita de ϕ (que de qualquer maneira é responsável pelo aparecimento do termo não linear em (1.3) foi por questões de clareza suprimida da notação. Note também que as equações (1.1)-(1.3) são estritamente similares à respectiva ação Lagrangeana e às respectivas equações de movimento para uma partícula em queda livre se movendo em M ; neste sentido, o modelo sigma não linear sobre M é simplesmente a versão de teoria de campos do movimento geodésico sobre M (ao qual se reduz quando $\mathcal{X}$ for uni-dimensional).

No que segue, vamos considerar somente o caso em que $\mathcal{X}$ é bi-dimensional. Além disso, vamos restringir $\mathcal{X}$ como sendo ou o espaço de Minkowski bi-dimensional ou o espaço Euclideano bi-dimensional, apesar de mesmo em duas dimensões, escolhas mais gerais são certamente possíveis e devem de fato ser permitidas. As generalizações necessárias podem entretanto ser realizadas facilmente e vamos por isso descartar essa possibilidade.

O ingrediente básico que caracteriza um modelo sigma não linear é a escolha que se faz do espaço alvo M . Uma restrição importante que vamos sempre impor é que M seja uma variedade Riemmaniana e não apenas pseuso-Riemmaniana: esta condição é tanto necessária como suficiente para garantir a positividade da energia no correspondente modelo sigma não linear. Agora, aplicando um teorema que assegura que qualquer variedade Riemmaniana M pode ser isometricamente mergulhada em um espaço vetorial E - dado que a dimensão de E seja suficiente (comparada à dimensão de M). Então denotando o produto escalar sobre E por $(,)$, podemos reescrever a Lagrangeana (1.1) na forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi, \partial_\nu \phi) \quad , \quad (1.6)$$

suplementada pelos vínculos que expressam o fato que o campo ϕ que assume valores em E que aparece aqui deve se restringir a estar em uma sub variedade mergulhada M : esta é exatamente a situação que encontramos no modelo sigma $O(N)$ e nos modelos CP^{N-1} se empregarmos a formulação em termos de campos projetores. Além disso, podemos facilmente relacionar as duas formas (1.1) e (1.6) da Lagrangeana se reexpressarmos o campo ϕ vinculado que assume valores em E em (1.6) em termos dos campos não vinculados ϕ^i em (1.1): esses são simplesmente as componentes do anterior com relação às coordenadas curvilíneas locais da subvariedade M de E . Assim,

$$\partial_\mu \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \phi^i} \partial_\mu \phi^i \quad , \quad (1.7)$$

tal que as equações (1.1) e (1.6) são idênticas, com

$$g_{ij} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \phi^i}, \frac{\partial \phi}{\partial \phi^j} \right) \quad . \quad (1.8)$$

Descrição Matemática Geral

Até aqui, nós meramente chegamos à conclusão que o espaço alvo M deve ser alguma variedade Riemmaniana conexa. É claro que isso nos deixa com uma liberdade enorme de escolha e necessitamos algum princípio de organização. Tal princípio, – e um deles surge naturalmente se lembrarmos que uma das importantes aplicações do modelo sigma não linear em Física está relacionado com simetrias e quebra de simetrias – vem da teoria de grupos; a idéia de classificar o espaço alvo M de acordo com o “tamanho” do seu grupo de simetria G , que é essencialmente um grupo de isometrias. As duas possibilidades extremas aqui são que ou M não possui qualquer simetria ou possui tantas simetrias quanto suficientes para conectar quaisquer dois pontos. No primeiro caso, o grupo de isometria de M é trivial (consiste somente da identidade) ou é no máximo discreto. Esta é uma situação em certo sentido genérica, um exemplo típico sendo dado pelos espaços de Calabi-Yau que têm um papel importante na compactificação de dimensões de espaço-tempo extras na teoria de cordas. No segundo caso, o grupo de isometria de M age transitivamente sobre M , o que significa que para quaisquer dois pontos de M , há uma isometria de M levando um no outro. Em outras palavras, M deve ser um espaço Riemmaniano homogêneo. Todos os demais casos são intermediários entre esses dois, porque qualquer variedade Riemmaniana pode ser univocamente decomposta em uma união disjunta de órbitas sob o grupo de isometria. Em qualquer caso, entretanto, o grupo de simetria G não é completamente fixado pelo espaço alvo M sozinho; de fato, há vantagens técnicas em manter alguma flexibilidade na escolha de G . Dessa forma, nós assumimos simplesmente que temos algum grupo de Lie G conexo, com alguma álgebra de Lie $\mathcal{G}$, que age transitivamente sobre M por isometrias; esta ação de G sobre M será escrita na forma:

$$G \times M \rightarrow M$$

$$(g, m) \rightarrow g \cdot m \quad (1.9)$$

e induz a ação

$$\begin{aligned} G \times TM &\rightarrow TM \\ (g, u) &\rightarrow g \cdot u \end{aligned} \quad (1.10)$$

de G sobre o fibrado tangente TM de M , assim como uma representação

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{X}_\kappa(M) \\ X &\rightarrow X_M \end{aligned} \quad (1.11)$$

de $\mathcal{G}$ na álgebra de Lie $\mathcal{X}_\kappa(M)$ dos campos vetoriais de Killing sobre M . Explicitamente, a ação de um elemento g em G sobre um vetor tangente u em TM é definida por deixando-se g agir sobre uma curva em M tendo u como sua derivada, isto é, se $u = \frac{d}{dt}m(t)|_{t=0}$,

$$g \cdot u = g \cdot \left(\frac{d}{dt}m(t)|_{t=0} \right) = \frac{d}{dt}(g \cdot m(t))|_{t=0} \quad , \quad (1.12)$$

enquanto o valor do campo vetorial fundamental X_M sobre M associado com o gerador X em $\mathcal{G}$ no ponto m em M é definido deixando-se o grupo de um parâmetro gerado de X agir sobre m ,

$$X_M(m) = \frac{d}{dt}(\exp(tX) \cdot m)|_{t=0} \quad . \quad (1.13)$$

A partir de agora, vamos considerar apenas modelos sigma não lineares com simetrias suficientes para excluir a presença de degenerescências acidentais. Na linguagem matemática, isto significa que nós estamos supondo que a ação (1.9) de G sobre M é transitiva. Nós também fixamos, de uma vez por todas, um ponto de referência arbitrário m_0 em M e definimos H como sendo seu grupo de estabilidade: então H é um subgrupo fechado de G e M se identifica com o espaço homogêneo, o espaço de classes laterais G/H :

$$M = G/H \quad . \quad (1.14)$$

É claro que este espaço não pode ser completamente arbitrário devido à levar muito em conta que M deve ser uma variedade Riemmaniana sobre a qual G é suposto agir como uma isometria. Como resultado, vem que o grupo de estabilidade H será compacto, o espaço de classes laterais G/H será redutivo e a métrica Riemmaniana G -invariante sobre M será induzida de uma métrica biinvariante pseudo Riemmaniana sobre G . Em particular, a afirmação que o espaço de classes laterais G/H é redutivo significa que se $\mathcal{G}$ é a álgebra de Lie de G como anteriormente e $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ denota a álgebra de Lie de $H \subset G$, existe um subespaço H -invariante $\mathcal{M}$ de $\mathcal{G}$ que é complementar à sub álgebra $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$, tal que nós temos uma decomposição direta invariante por H

$$\mathcal{G} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{M} \quad . \quad (1.15)$$

Em particular, a invariância por H desta decomposição implica nas seguintes relações de comutação:

$$[\mathcal{H}, \mathcal{H}] \subset \mathcal{H} \ , \ [\mathcal{H}, \mathcal{M}] \subset \mathcal{M} \ . \quad (1.16)$$

Mencionamos neste ponto que o espaço de classes laterais G/H é chamado simétrico (localmente) se além disso tivermos a relação de comutação

$$[\mathcal{M}, \mathcal{M}] \subset \mathcal{H} \ . \quad (1.17)$$

Temos também a possibilidade de $\mathcal{M}$ ser ele mesmo um grupo, ou seja,

$$[\mathcal{M}, \mathcal{M}] \subset \mathcal{M} \ . \quad (1.18)$$

Isto de fato significa que $\mathcal{M}$ é um ideal em $\mathcal{G}$, tal que se tomarmos a exponencial, vemos que M aparece como um subgrupo de Lie normal de G . Em todo caso, $\mathcal{M}$ pode ser identificado com o espaço tangente $T_{m_0}M$ ao M no ponto de referência m_0 – exatamente como $\mathcal{G}$ (ou $\mathcal{H}$) pode ser identificado com o espaço tangente T_1G de G (ou T_1H de H) na unidade 1 do grupo. Assim, as métricas G invariantes $(\cdot, \cdot)_M$ sobre M estão em correspondência um a um com os produtos escalares positivos definidos invariantes por H $(\cdot, \cdot)_\mathcal{M}$ sobre $\mathcal{M}$ – exatamente como as métricas biinvariantes pseudo Riemmanianas $(\cdot, \cdot)_G$ sobre G estão em correspondência um a um com os produtos escalares não degenerados $(\cdot, \cdot)_\mathcal{G}$ sobre $\mathcal{G}$ invariantes por G (mais precisamente, invariantes por $Ad(G)$); então a afirmação que o anterior é induzido do último significa simplesmente que a decomposição direta (1.15) é ortogonal com relação ao $(\cdot, \cdot)_\mathcal{G}$ e que $(\cdot, \cdot)_\mathcal{G}$ restrito ao $\mathcal{M}$ coincide com o $(\cdot, \cdot)_\mathcal{M}$. Podemos dessa maneira evitar os índices nas várias métricas ou produtos escalares e denotá-los pelo mesmo símbolo $(\cdot, \cdot)$, sem correremos riscos de confusões.

Modelos sigma não lineares em espaços simétricos $M = G/H$

Omitindo esses detalhes técnicos, podemos proceder para a formulação do modelo sigma não linear sobre $M = G/H$ no qual G surge como o grupo de simetria global enquanto H surge como o grupo de gauge. A idéia é simplesmente representar as configurações de campos do modelo não por mapas ϕ de $\mathcal{X}$ a M mas por mapas g de $\mathcal{X}$ a G , com

$$\phi(x) = g(x)H \ . \quad (1.19)$$

Localmente, isto é, em domínios suficientemente pequenos $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ isto pode sempre ser feito, mas o preço a ser pago é que o mapa g de $\mathcal{U}$ a G claramente não é único: de fato, qualquer outro mapa $g \cdot h$ de $\mathcal{U}$ ao G com

$$(g \cdot h)(x) = g(x)h(x) \ , \quad (1.20)$$

onde h é qualquer mapa de $\mathcal{U}$ ao H , representando exatamente a mesma configuração de campo. Ao contrário, quaisquer dois mapas de $\mathcal{U}$ ao G representando a mesma configuração de campos devem ser relacionados de acordo com a equação (1.20). Em outras palavras, descrever o modelo sigma sobre M em termos de campos g assumindo valores em G , ao

invés de campos ϕ assumindo valores em M implica em introduzir o subgrupo H como um grupo de gauge, com transformações de gauge agindo por multiplicação à direita,

$$g \rightarrow g \cdot h = gh, \quad \phi \rightarrow \phi, \quad (1.21)$$

enquanto em ambas as formulações, o grupo G é um grupo de simetria global, com transformações de simetria globais agindo por multiplicação à esquerda,

$$g \rightarrow g_0 \cdot g = g_0 g, \quad \phi \rightarrow g_0 \cdot \phi = g_0 \phi. \quad (1.22)$$

(O índice "0" significa que g_0 não depende de x). Como todas as quantidades físicas devem como sempre ser invariantes de gauge, é importante ter um potencial de gauge associado que pode ser usado para definir derivadas covariantes. Este potencial de gauge A_μ , assim como a derivada covariante $D_\mu g$ do próprio g , podem ser construídos diretamente da forma de Maurer Cartan invariante à esquerda sobre G ,

$$g^{-1} dg = (g^{-1} \partial_\mu g) dx^\mu, \quad (1.23)$$

tomando a projeção ortogonal $(\cdot)_\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$ sobre $\mathcal{H}$ (que aniquila $\mathcal{M}$) ou respectivamente a projeção ortogonal $(\cdot)_\mathcal{M}$ de $\mathcal{G}$ sobre $\mathcal{M}$ (que aniquila $\mathcal{H}$) (1.15). Note que em contraste com a situação em teorias de gauge, este potencial de gauge A_μ não é um campo independente, mas o correspondente campo de gauge $F_{\mu\nu}$ é definido como usual. Explicitamente:

$$\begin{aligned} A_\mu &= (g^{-1} \partial_\mu g)_\mathcal{H}, \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu], \\ k_\mu &= (g^{-1} \partial_\mu g)_\mathcal{M}, \\ D_\mu g &= g k_\mu = \partial_\mu g - g A_\mu. \end{aligned} \quad (1.24)$$

A notação pode ser justificada observando-se que sob transformações de gauge (1.1), A_μ se comporta como o potencial de gauge enquanto $F_{\mu\nu}$, k_μ e $D_\mu g$ são covariantes de gauge:

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow A_\mu \cdot h = h^{-1} A_\mu h + h^{-1} \partial_\mu h, \\ F_{\mu\nu} &\rightarrow F_{\mu\nu} \cdot h = h^{-1} F_{\mu\nu} h, \\ k_\mu &\rightarrow k_\mu \cdot h = h^{-1} k_\mu h, \\ D_\mu g &\rightarrow D_\mu g \cdot h = (D_\mu g) h. \end{aligned} \quad (1.25)$$

As leis de transformação (1.25) ditam como se deve definir as leis de transformação de ordens maiores; por exemplo,

$$\begin{aligned} D_\mu D_\nu g &= \partial_\mu D_\nu g - D_\nu g A_\mu, \\ D_\mu k_\nu &= \partial_\mu k_\nu + [A_\mu, k_\nu]. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Em particular, temos as seguintes identidades, de importância central:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= -[k_\mu, k_\nu]_{\mathcal{H}} , \\ D_\mu k_\nu - D_\nu k_\mu &= -[k_\mu, k_\nu]_{\mathcal{M}} . \end{aligned} \quad (1.27)$$

Elas podem ser provadas de maneira bastante simples da equação de estrutura de Maurer Cartan,

$$\partial_\mu(g^{-1}\partial_\nu g) - \partial_\nu(g^{-1}\partial_\mu g) + [(g^{-1}\partial_\mu g), (g^{-1}\partial_\nu g)] = 0 . \quad (1.28)$$

Além disso, esta equação vale identicamente para os campos g assumindo valores em G , e como uma consequência para $g^{-1}\partial g$ assumindo valores em $\mathcal{G}$; devido às relações de comutação (1.16), a equação (1.28) implica em $F_{\mu\nu} = -[k_\mu, k_\nu]_{\mathcal{H}}$ quando projetado sobre $\mathcal{H}$ e fornece a equação $D_\mu k_\nu - D_\nu k_\mu = -[k_\mu, k_\nu]_{\mathcal{M}}$ quando projetado sobre $\mathcal{M}$.

Nesta formulação, a Lagrangeana do modelo sigma não linear sobre $M = G/H$ pode ser escrita em termos do campo ϕ (veja equações (1.1) e (1.6))

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi, \partial_\nu \phi) , \quad (1.29)$$

ou em termos do campo g :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(D^\mu g^{-1}, D^\mu g) = -\frac{1}{2}(g^{-1}D^\mu g, g^{-1}D_\mu g) = -\frac{1}{2}(D^\mu g g^{-1}, D_\mu g g^{-1}) . \quad (1.30)$$

A equação de movimento correspondente é:

$$D^\mu D_\mu g - D_\mu g g^{-1} D^\mu g = 0 , \quad (1.31)$$

ou equivalentemente,

$$D^\mu k_\mu = 0 . \quad (1.32)$$

Obviamente, a Lagrangeana (1.29) ou (1.30) é invariante por transformações de gauge (veja (1.21)) assim como globalmente invariante (veja (1.22)), porque a métrica $(\cdot, \cdot)$ sobre G é considerada biinvariante. A invariância global de G leva à uma corrente de Noether com valores em $\mathcal{G}$ que é dada explicitamente por

$$j_\mu = -D_\mu g g^{-1} = -g k_\mu g^{-1} . \quad (1.33)$$

Obviamente, esta corrente é invariante de gauge e é conservada:

$$\partial^\mu j_\mu = 0 . \quad (1.34)$$

De fato, a lei de conservação (1.34) não é apenas uma consequência das equações de movimento (1.31) e (1.32) mas é completamente equivalente à elas - uma característica marcante de modelos sigma. Além disso, conjugando a identidade $D_\mu k_\nu - D_\nu k_\mu = -[k_\mu, k_\nu]_{\mathcal{M}}$ por g obtemos a seguinte identidade para a corrente:

$$\partial_\mu j_\nu - \partial_\nu j_\mu + 2[j_\mu, j_\nu] = g[k_\mu, k_\nu]_{\mathcal{M}} g^{-1} . \quad (1.35)$$

1.2 Uma revisão do modelo bosônico

A álgebra de correntes de modelos sigma não lineares clássicos sobre variedades Riemannianas (M) já é conhecida [100]. Além disso, considere um modelo sigma não linear sobre M com métrica $g_{ij}(\phi)$, e os mapas $\phi^i(x)$ do espaço de Minkowski bi-dimensional Σ de M . A ação do modelo sigma é dada por

$$S = \frac{1}{2\lambda^2} \int_{\Sigma} d^2x \eta^{\mu\nu} g_{ij}(\phi) \partial_{\mu} \phi^i \partial_{\nu} \phi^j . \quad (1.36)$$

O espaço de fases consiste dos pares $(\phi^i(x), \pi_i(x))$, onde π é uma seção do "pull-back" $\phi^*(T^*M)$ do fibrado cotangente de M para o espaço de Minkowski via ϕ , e os parênteses de Poisson canônicos a tempos iguais são:

$$\begin{aligned} \{\phi^i(x), \phi^j(y)\} &= \{\pi_i(x), \pi_j(y)\} = 0 \\ \{\phi^i(x), \pi_j(y)\} &= \delta_j^i \delta(x-y) . \end{aligned} \quad (1.37)$$

A partir da ação (1.36) obtemos os momentos canonicamente conjugados, dados pela expressão

$$\pi_i = \frac{1}{\lambda^2} g_{ij} \tilde{\phi}^j . \quad (1.38)$$

Supondo que haja um grupo de Lie conexo G agindo sobre M por isometrias, tal que um gerador da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G seja representado por um campo vetorial fundamental

$$X_M(m) = \frac{d}{dt} e^{tX} \cdot m|_{t=0} \quad (1.39)$$

sobre M ; a corrente de Noether pode ser definida como

$$(j_{\mu}, X) = - \left(\frac{1}{\lambda^2} g_{ij}(\phi) \partial_{\mu} \phi^i X_M^j(\phi) \right) . \quad (1.40)$$

Definimos também o campo escalar simétrico como

$$(j, X \otimes Y) = \frac{1}{\lambda^2} g_{ij}(\phi) X_M^i Y_M^j . \quad (1.41)$$

Em termos de uma base t^a de $\mathfrak{g}$, tal que $[t^a, t^b] = f^{abc} t^c$, temos

$$\begin{aligned} j_{\mu} &= j_{\mu}^a t^a \\ j &= j^{ab} t^a \otimes t^b , \end{aligned} \quad (1.42)$$

e obtemos a álgebra de correntes

$$\begin{aligned} \{j_0^a(x), j_0^b(y)\} &= -f^{abc} j_0^c(x) \delta(x-y) \\ \{j_0^a(x), j_1^b(y)\} &= -f^{abc} j_1^c(x) \delta(x-y) + j^{ab}(y) \delta'(x-y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{j_1^a(x), j_1^b(y)\} &= 0 \\
\{j_0^a(x), j^{bc}(y)\} &= -(f^{abc}j^{cd}(x) + f^{acd}j^{bd}(x))\delta(x-y) \\
\{j_1^a(x), j^{bc}(y)\} &= 0 \\
\{j^{ab}(x), j^{cd}(y)\} &= 0 \quad .
\end{aligned}$$

O modelo sigma não linear $O(N)$ e bi-dimensional pode ser descrito pela Lagrangeana vinculada:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i \quad , \quad \sum_{i=1}^N \phi_i^2 = 1 \quad . \quad (1.43)$$

E densidade Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\pi_i^2 + \phi_i'^2) \quad , \quad (1.44)$$

onde $\pi_i = \dot{\phi}^i$. Impondo os vínculos

$$\phi_i^2 - 1 = 0 \quad e \quad \phi_i \pi_i = 0 \quad . \quad (1.45)$$

Esta é obviamente uma Lagrangeana para campos livres, mas a presença do vínculo quadrático implica que o modelo não é uma teoria de campos livres. De fato, a variação da Lagrangeana acima com relação ao ϕ sujeito a este vínculo leva à equação de movimento:

$$\partial^2 \phi + (\partial \phi)^2 \phi = 0 \quad , \quad (1.46)$$

ou mais explicitamente

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi_i + (\partial^\mu \phi_j \partial_\mu \phi_j) \phi_i = 0 \quad , \quad (1.47)$$

que é obviamente uma equação diferencial parcial não linear.

Uma outra maneira de derivar essas últimas equações é forçar o vínculo com a ajuda de um termo multiplicador de Lagrange que é adicionado à Lagrangeana, dando

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial \phi)^2 + \lambda (\phi^2 - 1) = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi_i \partial_\mu \phi_i + \lambda (\phi_i \phi_i - 1) \quad . \quad (1.48)$$

Então variando essa Lagrangeana com relação ao multiplicador de Lagrange λ , obtemos o vínculo quadrático, enquanto variando com relação ao ϕ e usando o vínculo de novo, obtemos as equações de movimento.

Os parênteses de Dirac são obtidos através da técnica de quantização de sistemas vinculados desenvolvida por Dirac [110] e são dados pelas expressões

$$\begin{aligned}
\{\phi_i(x), \phi_j(y)\} &= 0 \quad , \\
\{\phi_i(x), \pi_j(y)\} &= (\delta_{ij} - \phi_i \phi_j)(x) \delta(x-y) \quad , \\
\{\pi_i(x), \pi_j(y)\} &= -(\phi_i \pi_j - \phi_j \pi_i)(x) \delta(x-y) \quad .
\end{aligned} \quad (1.49)$$

Em termos das variáveis de espaço de fase, as componentes das correntes podem ser escritas como

$$\begin{aligned}(j_0)_{ij} &= \phi_i \pi_j - \phi_j \pi_i \quad , \\ (j_1)_{ij} &= \phi_i \phi'_j - \phi_j \phi'_i \quad .\end{aligned}\tag{1.50}$$

Note que o j_μ é um campo matricial antissimétrico. Por outro lado, o campo intertwiner dado em (1.42) é simétrico,

$$(j)_{ij} = \phi_i \phi_j \quad .\tag{1.51}$$

Observamos que o Hamiltoniano (1.44) pode ser escrito na forma de Sugawara

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{4} \text{tr}(j_0^2 + j_1^2) \quad .\tag{1.52}$$

Essas correntes matriciais associadas à simetria $O(N)$ são conservadas e de curvatura nula

$$\begin{aligned}(j_\mu)_{ij} &= \phi_i \partial_\mu \phi_j - \phi_j \partial_\mu \phi_i \quad , \quad \partial_\mu j^\mu = 0 \quad , \\ f_{\mu\nu} &= \partial_\mu j_\nu - \partial_\nu j_\mu + 2[j_\mu, j_\nu] = 0 \quad .\end{aligned}\tag{1.53}$$

Utilizando a forma das componentes temporal j_0 e espacial j_1 em termos das variáveis de espaço de fase (1.50) e da álgebra de parêntese de Dirac dessas componentes 1.49 satisfazem à álgebra [103] obtida em Forger et. al. [100], [101]

$$\begin{aligned}\{(j_0)_{ij}(x), (j_0)_{kl}(y)\} &= (I \circ j_0)_{ij,kl}(x) \delta(x-y) \\ \{(j_1)_{ij}(x), (j_0)_{kl}(y)\} &= (I \circ j_1)_{ij,kl}(x) \delta(x-y) + (I \circ j)_{ij,kl}(x) \delta'(x-y)\end{aligned}\tag{1.54}$$

$$\begin{aligned}\{(j_1)_{ij}(x), (j_1)_{kl}(y)\} &= 0 \\ \{(j)_{ij}(x), (j)_{kl}(y)\} &= 0 \\ \{(j)_{ij}(x), (j_1)_{kl}(y)\} &= 0 \\ \{(j)_{ij}(x), (j_0)_{kl}(y)\} &= -(I \star j)_{ij,kl}(x) \delta(x-y)\end{aligned}$$

onde I é a matriz identidade $N \times N$.

Introduzimos o campo “intertwiner”

$$(j)_{ij} = \phi_i \phi_j\tag{1.55}$$

e os produtos $O(N)$ “ $\circ$ ” e “ $\star$ ” definidos na ref. [103] como

$$\begin{aligned}(A \circ B)_{ij,kl} &\equiv A_{ik} B_{jl} - A_{il} B_{jk} + A_{jl} B_{ik} - A_{jk} B_{il} \\ (A \star B)_{ij,kl} &\equiv A_{ik} B_{jl} - A_{il} B_{jk} - A_{jl} B_{ik} + A_{jk} B_{il}\end{aligned}\tag{1.56}$$

Sabemos que este modelo possui infinitas cargas conservadas não locais. O conjunto padrão de cargas pode ser iterativamente construído por meio do método potencial de Brézin et. al. [92]. Começamos com uma corrente que obedece a:

$$\begin{aligned}\partial^\mu j_\mu &= 0 \\ \partial_\mu j_\nu - \partial_\nu j_\mu + 2[j_\mu, j_\nu] &= 0\end{aligned}\quad (1.57)$$

Dada uma corrente conservada $J_\mu^{(n)}$, definimos o potencial não local associado $\chi^{(n)}$ através da equação:

$$J_\mu^{(n)} = \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \chi^{(n)} \quad , \quad (1.58)$$

e contruirmos a corrente não local de ordem $(n+1)$ -ésima

$$\begin{aligned}J_\mu^{(n+1)} &\equiv D_\mu \chi^{(n)} = \partial_\mu \chi^{(n)} + 2[j_\mu, \chi^{(n)}] \quad , \\ \hat{Q}^{(n)} &\equiv \int dx J_0^{(n)} \quad .\end{aligned}\quad (1.59)$$

Essa corrente é conservada como consequência da equação (1.57). Aqui mencionamos que para a primeira corrente não local, $J_\mu^{(1)}$ o coeficiente na frente da comutação em (1.59) deve ser 1 ao invés de 2.

A equação (1.58) pode ser invertida para $\chi^{(n)} = \partial^{-1} J_0^{(n)}$, onde escolhemos o operador antiderivada como sendo

$$\partial^{-1} A(x) = \frac{1}{2} \int dy \epsilon(x-y) A(y), \quad \epsilon(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ +1, & x > 0 \end{cases} \quad (1.60)$$

Com estas definições, antissimetrizamos as condições de contorno para $\chi^{(n)}$,

$$\chi^{(n)}(\pm\infty) = \pm \frac{1}{2} \int dx J_0^{(n)}(x) = \pm \frac{1}{2} \hat{Q}^{(n)} \quad . \quad (1.61)$$

Outras condições de contorno podem ser usadas mas a escolha anterior garante que a álgebra de cargas produz uma combinação antissimétrica de cargas, as quais pertencem à álgebra do gerador de $O(N)$. Podemos chamar as cargas definidas em (1.59) de “cargas-padrão”. Após algumas integrações parciais, mostramos a forma das duas primeiras:

$$\hat{Q}^{(0)} = \int dx j_0 \quad (1.62)$$

$$\hat{Q}^{(1)} = \int dx (j_1 + 2j_0 \partial^{-1} j_0) \quad (1.63)$$

Entretanto, na ref. [103] um conjunto alternativo de cargas “melhoradas” $\{Q^{(n)}, n = 0, 1, 2, \dots\}$ foi definido e mostrou-se que elas obedecem à álgebra não linear

$$\{Q_{ij}^{(m)}, Q_{kl}^{(n)}\} = (I \circ Q^{(n+m)})_{ij,kl} - \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{q=0}^{n-1} (Q^{(p)} Q^{(q)} \circ Q^{(m+n-p-q-2)})_{ij,kl} \quad . \quad (1.64)$$

Estas cargas foram chamadas “melhoradas” porque possibilitam uma melhoria algébrica: a parte não linear da álgebra é simplesmente cúbica, ao contrário do que acontece com a

álgebra das cargas padrão anteriormente utilizadas na literatura [35]. A identidade de Jacobi e outras propriedades da álgebra cúbica “melhorada” foram extensivamente discutidas na ref. [103]. Mas há uma maneira de abreviar aquela álgebra, que é o primeiro dos novos resultados dessa tese e o qual será apresentado agora.

Vamos definir um gerador Hermitiano das cargas “melhoradas”

$$Q(\lambda) \equiv I + i \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} Q^{(n)} \quad , \quad (1.65)$$

onde λ será chamado de parâmetro espectral. Assim, pode-se resumir a álgebra (1.64) como:

$$i\{Q_{ij}(\lambda), Q_{kl}(\mu)\} = (f(\lambda, \mu) \circ Q(\lambda) - Q(\mu))_{ij,kl} \quad , \quad (1.66)$$

Onde

$$f(\lambda, \mu) \equiv \Re e \left(\frac{Q(\lambda)Q(\mu)}{\lambda^{-1} - \mu^{-1}} \right) = \frac{I - \sum_{m,n=0}^{\infty} \lambda^{m+1} \mu^{n+1} Q^{(m)} Q^{(n)}}{\lambda^{-1} - \mu^{-1}} \quad . \quad (1.67)$$

A não linearidade quadrática codificada em $f(\lambda, \mu)$ pode ser relacionada com a conhecida estrutura Yangiana que está subjacente a este modelo [89],[90],[91],[93],[100],[103]. Esta estrutura Yangiana corresponde à álgebra de Hopf sobre C obtida a partir de uma quantização Q colocando-se $\hbar = 1$, onde $\hbar$ é a constante de Planck. Para maiores detalhes da definição da estrutura Yangiana, veja o artigo [104]. A estrutura Yangiana está relacionada com soluções racionais da equação de Yang-Baxter quântica, cuja mais simples delas foi obtida por C.N. Yang [105].

A vantagem em se escrever a álgebra como em (1.66) não é apenas estética. Lembrando-se da matriz de monodromia das cargas padrão, e sua álgebra expressa em termos da matriz clássica r ,

$$\begin{aligned} T(\lambda) &= \exp \sum_{n \geq 0} \lambda^{n+1} \hat{Q}^{(n)} \quad , \\ \{T(\lambda) \otimes T(\mu)\} &= [r(\lambda, \mu), T(\lambda) \otimes T(\mu)] \quad , \\ r(\lambda, \mu) &= \frac{I_a \otimes I_a}{\lambda^{-1} - \mu^{-1}} \quad , \quad [I_a, I_b] = f_{abc} I_c \quad , \end{aligned} \quad (1.68)$$

destacamos que o gerador $Q(\lambda)$ e a matriz f seguem regras similares àsquelas da matriz de monodromia e a matriz r clássica no método padrão [89],[91],[90],[93], [100],[103]. Nós não entendemos completamente a relação entre (1.66) e (1.68) mas esperamos ser capazes de utilizar essa analogia para estabelecer uma tradução precisa entre os diferentes conjuntos de cargas. Esperamos também que um conhecimento completo das cargas conservadas e sua álgebra será um ingrediente decisivo nos cálculos de espalhamento “off-shell”.

Agora, vamos introduzir os métodos gráficos que criamos para efetuar os cálculos de dedução das cargas não lineares e sua álgebra. Lembramos que na ref. [103] as cargas “melhoradas” foram construídas por meio de um algoritmo iterativo que utiliza $Q^{(1)}$ como um “step-generator”, conforme indicado pela relação

$$(I \circ Q^{(n+1)}) = \text{parte linear de } \{Q^{(1)}, Q^{(n)}\} \quad . \quad (1.69)$$

Após vários cálculos, os autores da ref. [103] construíram as cargas $Q^{(n)}$ e sua álgebra até $n = 5$. Na próxima seção vamos apresentar um método gráfico que torna o cálculo mais simples, menos tedioso e conveniente para uma extensão supersimétrica.

1.3 Regras gráficas para o modelo bosônico

Vamos associar semi-círculos brancos e pretos às componentes da corrente $O(N)$,

$$j_0 \iff \frown \qquad j_1 \iff \blacksquare \quad (1.70)$$

uma linha contínua e uma linha orientada à identidade e o operador anti-derivada respectivamente,

$$I \iff \text{---} \qquad 2\partial^{-1} \iff \longleftarrow \quad (1.71)$$

O operador ∂^{-1} anterior segue a mesma convenção adotada na ref. [103],

$$\partial^{-1}A(x) = \frac{1}{2} \int dy \epsilon(x-y)A(y) \quad , \quad \epsilon(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ +1, & x > 0 \end{cases} \quad (1.72)$$

A seguir, obtemos alguns diagramas e as expressões correspondentes:

$$\begin{aligned} 2j_0\partial^{-1}j_0 &\iff \frown \longleftarrow \frown \\ 2\partial^{-1}j_1j_0 &\iff \blacksquare \longleftarrow \frown \\ 4\partial^{-1}j_0\partial^{-1}j_0 &\iff \frown \longleftarrow \frown \longleftarrow \frown \\ 4j_1\partial^{-1}(j_0\partial^{-1}j_0) &\iff \blacksquare \longleftarrow \frown \longleftarrow \frown \end{aligned} \quad (1.73)$$

Notamos [103] que toda carga “melhorada” pode ser escrita como uma integral sobre cadeias simetrizadas de j_0 ’s e j_1 ’s ligados pelo operador $2\partial^{-1}$. Dessa maneira, podemos associar um diagrama à cada uma das cargas “melhoradas”, conforme exemplificado pela segunda carga não local $Q^{(2)}$:

$$Q^{(2)} = \int dx \left[2j_0 + j_0(2\partial^{-1}j_1) + j_1(2\partial^{-1}j_0) + j_0(2\partial^{-1}j_0 2\partial^{-1}j_0) \right] \quad (1.74)$$

$$2 \frown + \frown \longleftarrow \blacksquare + \blacksquare \longleftarrow \frown + \frown \longleftarrow \frown \longleftarrow \frown$$

Se estivermos interessados em construir as cargas, há um procedimento gráfico alternativo, inspirado pelas lições da ref. [103] e o qual será descrito agora. Considere as seguintes propriedades:

(a) As cargas não locais “melhoradas” têm a forma geral $Q^{(n)} = \int dx J^{(n)}$ onde $J^{(n)}$ é uma combinação de termos os quais podemos sempre escrever como

$$j_\mu \quad \text{ou} \quad 2(j_\mu \partial S + \partial S^t j_\mu) \quad , \quad (1.75)$$

onde S é uma cadeia genérica do tipo $j_{0(1)}\partial^{-1}(j_{0(1)}\partial^{-1}(j_{0(1)}\partial^{-1}(j_{0(1)}\dots)))$ e S^t sua transposta.

(b) A definição algébrica de cargas “melhoradas” é

$$(I \circ Q^{(n+1)})_{ij,kl} = \text{parte linear de } \{Q_{ij}^{(1)}, Q_{kl}^{(n)}\} \quad (1.76)$$

e notamos que a parte linear de $\{Q_{ij}^{(1)}, Q_{kl}^{(n)}\}$ vem exclusivamente de termos do tipo

$$\int dx \left(\{Q_{ij}^{(1)}, (j_\mu)_{ka}\} 2\partial^\dagger S_{al} - (k \leftrightarrow l) \right) \quad (1.77)$$

(c) Usando a definição de $Q^{(1)}$, a álgebra elementar de correntes e excluindo termos não lineares, verificamos que sua ação sobre j_0 é dada por

$$\int dx \{Q_{ij}^{(1)}, (j_0)_{ka}\} 2\bar{\partial} S_{al} - (k \leftrightarrow l) = \left(I \circ \int dx [j_1 2\bar{\partial} S + j_0 2\bar{\partial} (j_0 2\bar{\partial} S) + 2jS] \right)_{ij,kl}. \quad (1.78)$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 1: A circle with a semi-circle on the left and a semi-circle on the right labeled 'S'. An arrow points from the left semi-circle to the right semi-circle.} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \text{Diagram 2: A circle with a semi-circle on the left and a semi-circle on the right labeled 'S'. An arrow points from the left semi-circle to the right semi-circle.} + \begin{array}{c} \text{Diagram 3: A circle with a semi-circle on the left and a semi-circle on the right labeled 'S'. An arrow points from the left semi-circle to the right semi-circle.} + 2 \times \begin{array}{c} \text{Diagram 4: A circle with a semi-circle on the left and a semi-circle on the right labeled 'S'. An arrow points from the left semi-circle to the right semi-circle.} \end{array} \end{array}$$

enquanto a ação sobre j_1 é descrita pela equação

$$\int dx \{Q_{ij}^{(1)}, (j_1)_{ka}\} 2\bar{\delta}_{al-(k \leftrightarrow l)}^1 = \left(I \circ \int dx [2j_0 j 2\bar{\delta}^1 + j_0 2\bar{\delta}^1(j_1 \bar{\delta}^1)] \right)_{ij,kl}. \quad (1.79)$$

$$\text{Diagram 1} \Rightarrow \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3}$$

Alguns novos símbolos foram introduzidos acima, ou seja, para j , derivada e identidade temos

$$j \longleftrightarrow \otimes$$

$$\frac{1}{2}\partial \longleftrightarrow \text{---} \longleftrightarrow \frac{1}{2}\partial^2 \bar{\partial} = I \quad . \quad (1.80)$$

As expressões anteriores justificam a seguinte prescrição :

i) Começamos com o diagrama de $Q^{(n)}$.

ii) Trocamos o pedaço da esquerda de cada uma das cadeias de acordo com as seguintes regras:

$$\begin{aligned}
 \text{by } & \text{[Diagram: circle with arrow pointing left]} + \text{[Diagram: circle with arrow pointing right]} + 2 \text{[Diagram: circle with cross]} \\
 \text{by } & 2 \text{[Diagram: circle with cross]} + \text{[Diagram: circle with arrow pointing right]} \quad (1.81)
 \end{aligned}$$

iii) Os diagramas resultantes correspondem à $Q^{(n+1)}$.

Reforçamos o fato que as regras de substituição acima podem ser diretamente obtidas dos seguintes parêntese básicos:

$$\{Q_{ij}^{(1)}, (j_0)_{kl}\} = (I \circ j_i - 2\bar{\partial} j_0 j_0 - \partial j)_{ij,kl} + \dots \quad (1.82)$$

$$\{Q_{ij}^{(1)}, (j_1)_{kl}\} = (I \circ j_0 j_1 - 2\bar{\partial} j_0 j_1)_{ij,kl} + \dots \quad (1.83)$$

Além disso, não se deve esquecer dos vínculos satisfeitos pela corrente $O(N)$ j_μ , escritos como,

$$[j_\mu, j]_+ = j_\mu \quad \text{Diagram: } \text{white semi-circle} \otimes \text{black semi-circle} = \text{white semi-circle} \quad (1.84)$$

$$\int 2j_1 j S = \int (j_1 S + j \partial S) \quad \text{Diagram: } 2 \text{ (white semi-circle} \otimes \text{black semi-circle)} = \text{white semi-circle} + 2 \text{ (black semi-circle} \otimes \text{white semi-circle)} \quad (1.85)$$

onde o semicírculo metade branco e metade preto significa que a identidade vale para o semicírculo branco ou o preto. Testamos a eficiência deste método: comparando com o algoritmo algébrico explícito na ref. [103] levamos muito menos tempo e espaço para construir as cargas “melhoradas”. Por questões de clareza, disponibilizamos alguns exemplos no apêndice A.

Desenvolvemos também uma técnica diagramática para calcular a álgebra propriamente dita. Ela pode ser vista como um conjunto de regras de contração entre as cadeias que correspondem às cargas. Além disso, ao se calcular a álgebra das cargas não locais, temos que considerar todas as possíveis “contrações” (isto é, parênteses de Dirac) entre cadeias simetrizadas. Após algumas integrações parciais, obtemos contrações elementares do seguinte tipo geral:

$$\int dx dy \bar{\partial} S_{ia}(x) \bar{\partial} T_{bj}(x) \{ (j_\mu)_{ab}(x), (j_\nu)_{cd}(y) \} \bar{\partial} U_{kc}(y) \bar{\partial} V_{dl}(y) - (i \leftrightarrow j) - (k \leftrightarrow l) \quad (1.86)$$

Onde S , T , U e V são cadeias genéricas. A álgebra de correntes (1.54) nos diz que uma contração $\{j_\mu(x), j_\nu(y)\}$ pode produzir um termo do tipo corrente $(I \circ j_\alpha) \delta(x - y)$ ou um termo de Schwinger. Vamos discutir o primeiro tipo, em cujo caso (1.86) produz quatro termos:

$$\begin{aligned} & \int dx [(\bar{\partial} S \bar{\partial} U^t \circ \bar{\partial} T^t j_\alpha \bar{\partial} V) + (\bar{\partial} T^t \bar{\partial} U^t \circ \bar{\partial} S j_\alpha \bar{\partial} V) + \\ & + (\bar{\partial} S j_\alpha \bar{\partial} U^t \circ \bar{\partial} T^t \bar{\partial} V) + (\bar{\partial} T^t j_\alpha \bar{\partial} U^t \circ \bar{\partial} S \bar{\partial} V)]_{ij,kl} \quad (1.87) \end{aligned}$$

Podemos associar cada um dos quatro termos anteriores com uma das quatro possíveis contrações entre os dois pares de cadeias simetrizadas. Na presença de um termo de Schwinger, devemos levar em conta contribuições extras envolvendo o intertwiner e integrações parciais. De qualquer maneira, as contrações entre cadeias podem ser resumidas pelas seguintes regras:

Passo 1: Escolha

Ao calcularmos $\{Q^{(m)}, Q^{(n)}\}$ tomamos uma cadeia de $Q^{(m)}$ e outra de $Q^{(n)}$. Então, nós separamos os componentes “internos” de correntes que queremos contrair. Isto é simbolizado pelo diagrama genérico abaixo:

(1.88)

O semi-círculo semi preenchido representa j_0 or j_1 genericamente.

Passo 2: Isolamento

Em cada cadeia, devemos “localizar” os componentes de correntes escolhidos no passo 1. Isto foi explicitamente feito em (1.86) por meio de integrações parciais. Em termos de diagramas, são obtidos invertendo-se algumas flechas até que todas elas estejam apontando para o semi-círculo escolhido (isto é, o componente de corrente que estamos isolando). Eventualmente, um sinal negativo vai aparecer, dependendo do número de inversões. Finalmente, temos este tipo de diagramas:

(1.89)

Passo 3: Dobramento

O próximo passo é apenas um dobramento gráfico de cadeias, como uma preparação para a contração final. As cadeias de (1.89) devem ser dobradas da seguinte maneira:

(1.90)

Note que as sub-cadeias T e U foram transpostas conforme a equação (1.89). De fato, o dobramento gráfico implica na transposição, como exemplificado a seguir

(1.91)

onde os componentes da corrente transposta são naturalmente representados por

$$\begin{aligned} j_0^t &= \text{D} = - \text{D} = -j_0 \\ j_1^t &= \text{D} = - \text{D} = -j_1 \end{aligned} \quad (1.92)$$

Passo 4: Contração

Finalmente, fazemos a contração em (1.90) de acordo com as regras a seguir, que são a tradução diagramática dos parênteses de Dirac (1.54):

$$(1.93)$$

Onde introduzimos um símbolo correspondente ao produto $\circ$,

$$(1.94)$$

Por exemplo, uma contração típica entre os componentes j_0 poderia ser

$$(1.95)$$

É claro que se deve repetir todos os passos para todas as possíveis contrações.

A corrente j_μ obedece a outro vínculo [100] que envolve o produto $\circ$,

$$(j_\mu \circ j) = 0 = \text{diagram}$$

$$(1.96)$$

o qual deve também ser levado em conta.

Mencionamos que as contrações elementares em (1.93) são nada mais que a representação gráfica da álgebra de correntes (1.54), onde os diagramas que contém o campo intertwiner vêm de termos de Schwinger seguidos de integrações parciais. Estas regras foram aplicadas para calcular vários parênteses e em todos os casos a álgebra (1.64) foi confirmada. Pode-se ver alguns exemplos no apêndice A.

O mais importante resultado desse procedimento gráfico é que ele introduz uma maneira fácil e direta para a extensão supersimétrica – e possivelmente outras generalizações.

1.4 O modelo Supersimétrico

O modelo sigma não linear supersimétrico $O(N)$ é definido [107] [108] pela Lagrangeana

$$\mathcal{L}_s = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i + \frac{i}{2} \bar{\psi}_i \not{\partial} \psi_i + \frac{1}{8} (\bar{\psi}_i \psi_i)^2 , \quad (1.97)$$

onde ϕ_i são escalares e ψ_i são férmions de Majorana que satisfazem os vínculos

$$\sum_{i=1}^N \phi_i^2 - 1 = 0 , \quad \sum_{i=1}^N \phi_i \psi_i = 0 . \quad (1.98)$$

Também temos uma corrente conservada $O(N)$ J_μ que pode ser separada em partes bosônica e fermiônica

$$\begin{aligned} J_\mu &= j_\mu + b_\mu , \quad \partial_\mu J^\mu = 0 , \\ (j_\mu)_{ij} &= \phi_i \partial_\mu \phi_j - \phi_j \partial_\mu \phi_i , \\ (b_\mu)_{ij} &= -i \bar{\psi}_i \gamma_\mu \psi_j . \end{aligned} \quad (1.99)$$

cuja curvatura obedece à seguinte equação

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu J_\nu - \partial_\nu J_\mu + 2[J_\mu, J_\nu] = -(\partial_\mu b_\nu - \partial_\nu b_\mu) . \quad (1.100)$$

Mesmo que essa curvatura não seja nula, pode-se construir cargas conservadas não locais a partir de J_μ [107]. Aqui, vamos usar o procedimento algébrico para derivar estas cargas. É necessário iniciarmos a partir da álgebra elementar de correntes $O(N)$ algebra, listada a seguir,

$$\begin{aligned} \{(j_0)_{ij}(x), (j_0)_{kl}(y)\} &= [(I \circ j_0) - (j \circ b_0)]_{ij,kl}(x) \delta(x-y) , \\ \{(j_0)_{ij}(x), (j_1)_{kl}(y)\} &= (I \circ j_1)_{ij,kl}(x) \delta(x-y) + (I \circ j)_{ij,kl}(y) \delta'(x-y) , \\ \{(j_1)_{ij}(x), (j_1)_{kl}(y)\} &= 0 , \\ \{(b_0)_{ij}(x), (b_0)_{kl}(y)\} &= [(I \circ b_0) - (j \circ b_0)]_{ij,kl}(x) \delta(x-y) , \\ \{(b_0)_{ij}(x), (b_1)_{kl}(y)\} &= [(I \circ b_1) - (j \circ b_1)]_{ij,kl}(x) \delta(x-y) , \\ \{(b_1)_{ij}(x), (b_1)_{kl}(y)\} &= [(I \circ b_0) - (j \circ b_0)]_{ij,kl}(x) \delta(x-y) , \\ \{(j_0)_{ij}(x), (b_0)_{kl}(y)\} &= (j \circ b_0)_{ij,kl}(x) \delta(x-y) , \\ \{(j_0)_{ij}(x), (b_1)_{kl}(y)\} &= (j \circ b_1)_{ij,kl}(x) \delta(x-y) , \\ \{(j_1)_{ij}(x), (b_0)_{kl}(y)\} &= 0 , \\ \{(j_1)_{ij}(x), (b_1)_{kl}(y)\} &= 0 , \end{aligned} \quad (1.101)$$

onde o intertwiner e o produto $\circ$ foram definidos em (1.55) e (1.56). A carga local $O(N)$ e a primeira carga não local são dadas [107] pelas integrais

$$\begin{aligned} Q^{(0)} &= \int dx (j_0 + b_0) \\ Q^{(1)} &= \int dx (j_1 + 2b_1 + 2(j_0 + b_0) \not{\partial} (j_0 + b_0)) . \end{aligned} \quad (1.102)$$

Algumas outras cargas não locais supersimétricas padrão podem ser obtidas na literatura [107] [108]. Entretanto, como no caso bosônico, estamos procurando por cargas “melhoradas” que satisfazem à uma álgebra mais simples. Usando o método algébrico proposto na ref. [103] calculamos as cargas “melhoradas” e seus parênteses até $n = 3$, encontrando a *mesma álgebra cúbica* dada por (1.64). O calculo é muito maior do que para a teoria bosônica, mas conseguimos desenvolver algumas regras gráficas que simplificam o nosso trabalho. Este método diagramático é uma extensão direta daquele proposto para a teoria bosônica. Por exemplo, pode-se mostrar que o “step-generator” supersimétrico $Q^{(1)}$ satisfaz as seguintes relações algébricas:

$$\{Q_{ij}^{(1)}, (j_0)_{kl}\} = (I \circ j_1 - 2\bar{\partial} j_0 j_0 - 2\bar{\partial} b_0 j_0 - \partial j) + \dots \quad (1.103)$$

$$\{Q_{ij}^{(1)}, (j_1)_{kl}\} = (I \circ 2j_0 j - 2\bar{\partial} j_0 j_1 - 2\bar{\partial} b_0 j_1) + \dots \quad (1.104)$$

$$\{Q_{ij}^{(1)}, (b_0)_{kl}\} = (I \circ 2b_1 - 2\bar{\partial} j_0 b_0) - 2\bar{\partial} b_0 b_0 + \dots \quad (1.105)$$

$$\{Q_{ij}^{(1)}, (b_1)_{kl}\} = (I \circ 2b_0 - 2\bar{\partial} j_0 b_1) - 2\bar{\partial} b_0 b_1 + \dots \quad (1.106)$$

Assim como no modelo bosônico (veja as eqs.(1.81), (1.83)) estas relações nos levam às regras de transformações apropriadas para a construção de cargas. Pode-se usar o seguinte procedimento iterativo:

i) Propomos a notação simbólica

$$\begin{aligned} j_0 &\Longleftrightarrow \text{⌋} \quad , \quad j_1 \Longleftrightarrow \text{⬤} \\ b_0 &\Longleftrightarrow \text{⌈} \quad , \quad b_1 \Longleftrightarrow \text{⬤} \\ 2\bar{\partial} &\Longleftrightarrow \text{⤵} \quad , \quad \frac{1}{2}\partial \Longleftrightarrow \text{⤴} \\ j &\Longleftrightarrow \otimes \end{aligned} \quad (1.107)$$

ii) Tomamos o diagrama associado à $Q^{(n)}$ e substituímos o “pedaço” da esquerda de cada cadeia como segue:

$$\begin{aligned} \text{⌋} &\text{ by } \text{⬤} + \text{⌋} \text{⤵} \text{⌋} + \text{⌈} \text{⤵} \text{⌋} + 2 \otimes \text{⤵} \\ \text{⬤} &\text{ by } 2 \otimes \text{⤵} + \text{⌋} \text{⬤} + \text{⌈} \text{⬤} \\ \text{⌈} &\text{ by } 2 \text{⬤} + \text{⌈} \text{⤵} \text{⌈} + \text{⌋} \text{⤵} \text{⌈} \\ \text{⬤} &\text{ by } 2 \text{⌈} + \text{⌈} \text{⬤} + \text{⌋} \text{⬤} \end{aligned} \quad (1.108)$$

Estas transformações são uma tradução direta das eqs. (1.106).

iii) Depois de usar os vínculos sobre j_μ e b_μ teremos o diagrama de $Q^{(n+1)}$.

Para se calcular a álgebra entre as cargas não locais, deve-se seguir o mesmo algoritmo (escolha, isolamento, dobramento e contração), usando as regras de contração a seguir, que a exemplo do modelo quiral, são a tradução diagramática dos parênteses de Dirac do modelo, (1.102)

(1.109)

que é a versão gráfica da álgebra (1.102). Temos também um novo vínculo,

$$b_\mu j = j b_\mu = 0 = \text{diagram with cross and arrow} = \text{diagram with cross and arrow} \quad (1.110)$$

para ser adicionado à lista em (1.84), (1.85) e (1.96).

Usamos este procedimento para construir várias cargas e obtermos a sua álgebra. Obtemos a álgebra (1.64). Este é um dos principais resultados da tese, confirmando conjecturas anteriores [103] [108].

Para completar a análise algébrica, consideramos a corrente e a carga supersimétricas conservadas, dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\mu &= \bar{\psi} \phi_i \gamma_\mu \psi_i \quad , \\ \mathcal{Q} &= \int dx \mathcal{J}_0 \quad . \end{aligned} \quad (1.111)$$

Usando as equações de movimento, checamos que

$$\{\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^{(n)}\} = 0 \quad , \quad n \geq 0 \quad (1.112)$$

que significa que toda carga não local é invariante sob supersimetria on-shell – como já destacado na ref. [108]. Assim, as cargas não locais do modelo sigma supersimétrico são todas bosônicas. Entretanto, devemos reforçar que esta não é uma propriedade geral: por exemplo, na ref. [106] uma teoria supersimétrica integrável é obtida – a hierarquia supersimétrica de dois bósons – contendo cargas não locais fermiônicas cuja álgebra gradada exhibe termos cúbicos similares àqueles da eq. (1.64). Pode ser muito interessante desenvolver regras gráficas para este tipo de modelo.

1.5 Cargas melhoradas no modelo Gross-Neveu $O(N)$

Este modelo consiste de férmions de Majorana N -uplos, que se transformam de acordo com a representação fundamental do grupo $O(N)$, com uma interação quadrática. Sua Lagrangeana tem a forma [27]

$$\mathcal{L}_{GN} = \frac{i}{2} \bar{\psi}_i \not{\partial} \psi_i + \frac{1}{8} (\bar{\psi}_i \psi_i)^2 \quad , \quad (1.113)$$

e pode ser considerada como o limite do campo bosônico nulo ($\phi_i \rightarrow 0$) no modelo supersimétrico (1.97) – note que os vínculos (1.98) desaparecem. A corrente de Noether associada à rotações $O(N)$ é

$$(b_\mu)_{ij} = -i \bar{\psi}_i \gamma_\mu \psi_j \quad , \quad \partial_\mu b^\mu = 0 \quad (1.114)$$

e satisfaz a condição de curvatura nula

$$\partial_\mu b_\nu - \partial_\nu b_\mu + [b_\mu, b_\nu] = 0 \quad (1.115)$$

e as relações algébricas

$$\begin{aligned} \{(b_0)_{ij}(x), (b_0)_{kl}(y)\} &= (I \circ b_0)_{ij,kl}(x) \delta(x-y) \\ \{(b_0)_{ij}(x), (b_1)_{kl}(y)\} &= (I \circ b_1)_{ij,kl}(x) \delta(x-y) \\ \{(b_1)_{ij}(x), (b_1)_{kl}(y)\} &= (I \circ b_0)_{ij,kl}(x) \delta(x-y) \end{aligned} \quad (1.116)$$

Como anteriormente, podemos contruir um número infinito de correntes conservadas não locais usando o algoritmo de potencial: consideramos uma corrente conservada $B_\mu^{(n)}$ e o correspondente potencial $\xi^{(n)}$,

$$B_\mu^{(n)} = \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \xi^{(n)} \quad . \quad (1.117)$$

Então definimos a corrente $B_\mu^{(n+1)}$ como

$$B_\mu^{(n+1)} = 2(\partial_\mu + b_\mu)\xi^{(n)} \quad (1.118)$$

As propriedades (1.114) e (1.115) implicam que $B_\mu^{(n+1)}$ é também conservada. Iniciando com $B_\mu^{(0)} = b_\mu$ obtemos um número infinito de cargas conservadas $Q^{(n)} = \int dx B_0^{(n)}$. Após aplicar este algoritmo para construir algumas delas, é imediato checar que este método é equivalente ao seguinte procedimento gráfico: escolhemos alguns símbolos para representar b_0 and b_1 , por exemplo,

$$b_0 \Longleftrightarrow \triangleleft \quad b_1 \Longleftrightarrow \blacktriangleleft \quad (1.119)$$

então tomamos a sequência de cadeias associadas à $Q^{(n)}$ e usamos as regras de substituição para pedaços à esquerda

$$\begin{array}{lll} \triangleleft & \text{is replaced by} & 2 \blacktriangleleft + \triangleleft\triangleleft \\ \blacktriangleleft & \text{is replaced by} & 2 \triangleleft + \triangleleft\blacktriangleleft \end{array} \quad (1.120)$$

Por outro lado, este é precisamente o limite $\phi_i \rightarrow 0$ das regras de transformação (1.108) na teoria supersimétrica.

Isto fornece uma derivação alternativa das regras gráficas para construir cargas no modelo Gross-Neveu. Além disso, implica que aquelas cargas definidas pelo algoritmo (1.118) são de fato as cargas “melhoradas” e dessa forma elas devem obedecer à uma álgebra cúbica (1.64).

Essa álgebra, a exemplo do modelo bosônico, obedece a uma estrutura conhecida como Yangiana. Como citamos anteriormente, essa é uma estrutura do tipo Lie-Poisson e obedece à identidade de Jacobi, garantindo assim que essa identidade também seja obedecida para o modelo Gross-Neveu.

Capítulo 2

Álgebra das cargas não locais no modelo WZNW

2.1 Álgebra de correntes no modelo WZNW

Nosso ponto de partida é a bem conhecida ação de WZNW a qual contém duas parcelas,

$$S = S_{ch} + nS_{WZ} \quad ; \quad (2.1)$$

S_{ch} é a ação do modelo quirral comum,

$$S_{ch} = -\frac{1}{2\lambda^2} \int d^2x \eta^{\mu\nu} \text{tr}(g^{-1} \partial_\mu g g^{-1} \partial_\nu g) \quad , \quad (2.2)$$

onde o campo básico $g(x)$ assume valores em um grupo de Lie simples G (podemos assumir $G = O(N)$), n é um inteiro e S_{WZ} é o termo de Wess-Zumino

$$S_{WZ} = \frac{1}{4\pi} \int_0^1 dr \int d^2x \epsilon^{\mu\nu} \text{tr}(\tilde{g}^{-1} \partial_r \tilde{g} \tilde{g}^{-1} \partial_\mu \tilde{g} \tilde{g}^{-1} \partial_\nu \tilde{g}) \quad . \quad (2.3)$$

(Aqui, B é um contorno tri-dimensional apropriado de G e o campo estendido $\tilde{g}$ é considerado constante fora de uma vizinhança tubular $\Sigma \times [0, 1]$ do contorno Σ de B ; r é a coordenada normal ao contorno.) Este modelo contém uma constante de acoplamento livre λ tal que, para $\lambda^2 \rightarrow 0$, recuperamos o modelo quirral comum e, para $\lambda^2 = 4\pi/n$, o modelo WZNW conformalmente invariante.

A ação (2.1) tem uma invariância global sob o grupo produto $G_L \times G_R$, o qual age sobre G de acordo com

$$g \rightarrow g_L g g_R^{-1} \quad . \quad (2.4)$$

Esta invariância leva às correntes de Noether conservadas, assumindo valores na álgebra de Lie $\mathcal{G}_L \oplus \mathcal{G}_R$, as quais podem ser decompostas como correntes à esquerda e à direita. Para a proposta de escrever uma álgebra de correntes, é conveniente trabalhar com correntes covariantes. Para fazê-lo, devemos começar com as seguintes correntes não conservadas à esquerda e à direita,

$$j_\mu^L = -\frac{1}{\lambda^2} \partial_\mu g g^{-1} \quad , \quad j_\mu^R = +\frac{1}{\lambda^2} g^{-1} \partial_\mu g \quad , \quad (2.5)$$

cuja álgebra, para um grupo de Lie simples geral foi derivada na ref.[101]. Aqui, podemos nos limitar à álgebra $O(N)$. Vamos também introduzir o parâmetro

$$\alpha = \frac{n\lambda^2}{4\pi} \quad (2.6)$$

que aparece na definição das correntes covariantes conservadas

$$\begin{aligned} J_\mu^L &= (\eta_{\mu\nu} + \alpha\epsilon_{\mu\nu})j^{L\nu} = -\frac{1}{\lambda^2}(\eta_{\mu\nu} + \alpha\epsilon_{\mu\nu})\partial^\nu g g^{-1} , \\ J_\mu^R &= (\eta_{\mu\nu} - \alpha\epsilon_{\mu\nu})j^{R\nu} = +\frac{1}{\lambda^2}(\eta_{\mu\nu} - \alpha\epsilon_{\mu\nu})g^{-1}\partial^\nu g . \end{aligned} \quad (2.7)$$

É bastante conveniente usar a notação do produto $\circ$ introduzida em [103], o qual é uma estrutura característica da álgebra $O(N)$,

$$(A \circ B)_{ij,kl} \equiv A_{ik}B_{jl} - A_{il}B_{jk} + A_{jl}B_{ik} - A_{jk}B_{il} , \quad (2.8)$$

e escrever a álgebra clássica de correntes [101] da seguinte maneira. Para as correntes do tipo L , obtemos

$$\begin{aligned} \{(J_0^L)_{ij}(x), (J_0^L)_{kl}(y)\} &= (I \circ J_0^L)_{ij,kl}(x)\delta(x-y) - \alpha(I \circ I)_{ij,kl}\delta'(x-y) , \\ \{(J_0^L)_{ij}(x), (J_1^L)_{kl}(y)\} &= (I \circ J_1^L)_{ij,kl}(x)\delta(x-y) - \frac{(1+\alpha^2)}{2}(I \circ I)_{ij,kl}\delta'(x-y) , \\ \{(J_1^L)_{ij}(x), (J_1^L)_{kl}(y)\} &= 2\alpha(I \circ J_1^L)_{ij,kl}(x)\delta(x-y) - \alpha^2(I \circ J_0^L)_{ij,kl}(x)\delta(x-y) \\ &\quad - \alpha(I \circ I)_{ij,kl}\delta'(x-y) , \end{aligned}$$

enquanto para as R há apenas uma troca de sinal e α

$$\begin{aligned} \{(J_0^R)_{ij}(x), (J_0^R)_{kl}(y)\} &= (I \circ J_0^R)_{ij,kl}(x)\delta(x-y) + \alpha(I \circ I)_{ij,kl}\delta'(x-y) , \\ \{(J_0^R)_{ij}(x), (J_1^R)_{kl}(y)\} &= (I \circ J_1^R)_{ij,kl}(x)\delta(x-y) - \frac{(1+\alpha^2)}{2}(I \circ I)_{ij,kl}\delta'(x-y) , \\ \{(J_1^R)_{ij}(x), (J_1^R)_{kl}(y)\} &= -2\alpha(I \circ J_1^R)_{ij,kl}(x)\delta(x-y) - \alpha^2(I \circ J_0^R)_{ij,kl}(x)\delta(x-y) \\ &\quad + \alpha(I \circ I)_{ij,kl}\delta'(x-y) . \end{aligned}$$

A álgebra mista tem a seguinte forma

$$\begin{aligned} \{(J_0^L)_{ij}(x), (J_0^R)_{kl}(y)\} &= 0 , \\ \{(J_0^L)_{ij}(x), (J_1^R)_{kl}(y)\} &= -(1-\alpha^2)(g \circ g)_{ij,kl}(y)\delta'(x-y) , \\ \{(J_1^L)_{ij}(x), (J_0^R)_{kl}(y)\} &= -(1-\alpha^2)(g \circ g)_{ij,kl}(x)\delta'(x-y) , \\ \{(J_1^L)_{ij}(x), (J_1^R)_{kl}(y)\} &= -\alpha(1-\alpha^2)(g \circ g)_{ij,kl}(y)\delta'(x-y) \\ &\quad + \alpha(1-\alpha^2)(g \circ g)_{ij,kl}(x)\delta'(x-y) . \end{aligned}$$

Esta álgebra é invariante sob a mudança combinada $L \leftrightarrow R$ and $\alpha \leftrightarrow -\alpha$. Assim, podemos nos concentrar em um único setor e facilmente estender os resultados para o outro. Notamos a presença dos termos de Schwinger, tanto para os parênteses das componentes espacial como temporal, cuja forma atual acreditamos ser dominada pelas propriedades não esperadas das álgebras que serão apresentadas mais tarde neste capítulo.

2.2 Cargas Não Locais

Pode-se facilmente checar que as correntes conservadas covariantes $(J_\mu^{R,L})$ satisfazem uma condição de curvatura nula,

$$\partial_\mu J_\nu^{R,L} - \partial_\nu J_\mu^{R,L} + \lambda^2 [J_\mu^{R,L}, J_\nu^{R,L}] = 0 , \quad (2.9)$$

a qual implica na existência de um conjunto infinito de cargas conservadas não locais, tanto no setor “left” como no setor “right”. Pode-se então usar o algoritmo integro-diferencial de Brézin *et.al.* [92] para construir um conjunto infinito de cargas conservadas não locais $Q^{(n)}$, $n = 0, 1, \dots$. Além do gerador local $O(N)$

$$(Q^{(0)})_{ij} = \int dx (J_0)_{ij} , \quad (2.10)$$

lembramos também a expressão padrão da primeira carga não local [27]

$$(Q^{(1)})_{ij} = \int dx (J_1 - \alpha J_0 + 2J_0 \partial^{-1} J_0)_{ij} . \quad (2.11)$$

Entretanto, do ponto de vista algébrico, o conjunto de cargas gerado dessa maneira não é necessariamente o mais adequado. Na ref. [103], após se estudar o modelo sigma não linear, mostrou-se que as cargas padrão obtidas do algoritmo de Brézin *et.al.* podem ser recombinadas em um novo conjunto de cargas “melhoradas”, cuja álgebra é mais simples – ainda é uma álgebra não linear, mas os termos não lineares são simplesmente cúbicos. Assumindo essa “simplicidade algébrica” como um critério guia, as cargas “melhoradas” restantes são construídas a partir da própria álgebra, usando $Q^{(1)}$ como um gerador do tipo “step”. Este procedimento tornou-se possível devido à propriedade

$$Q^{(n+1)} \propto \text{parte linear de } \{Q^{(n)}, Q^{(1)}\} . \quad (2.12)$$

Dessa maneira, nossa tarefa é aplicar um procedimento algébrico similar para o modelo WZNW e obter o conjunto correspondente de cargas não locais “melhoradas”, cuja álgebra é supostamente tão simples quanto possível. Os cálculos envolvidos neste programa podem ser encurtados se usarmos o método diagramático desenvolvido na ref. [96]. Ele consiste de uma representação gráfica de cargas e parênteses, a qual incorpora correntes, não localidades e regras de contração em uma maneira mais manipulável. As regras gráficas da ref. [96] podem ser adaptadas ao modelo WZNW sem maiores dificuldades. Os resultados são discutidos nas próximas seções.

2.3 Cargas e álgebra no ponto crítico

Os valores críticos da constante de acoplamento, para os quais o modelo é conformalmente invariante, corresponde à $\alpha = \pm 1$. Neste caso, os componentes da corrente covariante são quiralmente vinculados

$$J_0^L = J_1^L , \quad J_0^R = -J_1^R \quad (2.13)$$

e as cargas não locais covariantes podem ser escritas somente em termos da componente temporal J_0 ,

$$\begin{aligned} Q^{(0)} &= \int dx (J_0) \quad , \\ Q^{(1)} &= \int dx J_0 2\partial^{-1}(J_0) \quad , \\ &\vdots \\ Q^{(n)} &= \int dx J_0 2\partial^{-1}(J_0 2\partial^{-1}(J_0 2\partial^{-1}(J_0 2\partial^{-1} \dots))) \quad . \end{aligned} \quad (2.14)$$

De acordo com a terminologia proposta na ref. [103], devemos dizer que as cargas críticas são “saturadas”, o que significa apenas que cada carga não local é composta de uma única cadeia das componentes temporais J_0 's ligadas pelo operador não local ∂^{-1} . A álgebra assim depende somente de $\{J_0, J_0\}$ e é derivada usando o método gráfico. A álgebra cúbica resultante é brevemente apresentada em termos de geradores, da seguinte maneira:

$$\{Q(\xi), Q(\mu)\} = (f(\xi, \mu) \circ Q(\xi) - Q(\mu)) \quad , \quad (2.15)$$

onde ξ e μ são parâmetros de expansão no gerador de cargas definido por

$$Q(\xi) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \xi^{n+1} Q^{(n)} \quad (2.16)$$

e f é uma matriz dependente de dois parâmetros,

$$f(\xi, \mu) = \frac{1 - 2\alpha(\xi + \mu)}{\xi^{-1} - \mu^{-1}} (I - Q(\xi)Q(\mu)) \quad . \quad (2.17)$$

Nesta fórmula, I é a matriz identidade $N \times N$ que leva à parte linear da álgebra. Por outro lado, o termo quadrático $Q(\xi)Q(\mu)$ em f implica na parte cúbica na mesma álgebra. A parte linear foi derivada de maneira geral, utilizando o método gráfico, enquanto os termos cúbicos foram verificados até a ordem $n = 4$ (assim, a parte quadrática em (2.17) deve ser considerada como um Ansatz).

Lembramos que $\alpha = \pm 1$ na criticalidade, e que os resultados acima são entendidos como válidos apenas nesses valores. Já notamos que, se simplesmente atribuirmos $\alpha = 0$, a álgebra resultante deveria ser isomórfica à álgebra cúbica do modelo sigma não linear [103, 96]. Entretanto, como mostramos na seção 5, os casos $\alpha \neq \pm 1$ exibem uma álgebra autenticamente nova.

2.4 Cargas Não Locais fora do ponto crítico

No modelo sigma não linear, as seguintes coincidências foram observadas: as álgebras das cargas “melhoradas” e das cargas saturadas (não conservadas) são idênticas [103]. Conjecturou-se na ref. [103] que a mesma propriedade deveria valer para o modelo WZNW, isto é que a álgebra (2.15) deveria ser obedecida para qualquer valor da constante α de acoplamento. Entretanto, os seguintes resultados, obtidos para o setor “left” mostram que a conjectura é

falsa: nós de fato obtivemos uma álgebra cúbica, e alguns de seus parênteses são listados abaixo,

$$\begin{aligned}
\{Q^{(0)}, Q^{(0)}\} &= (I \circ Q^{(0)}) , \\
\{Q^{(0)}, Q^{(1)}\} &= (I \circ Q^{(1)}) - 2\alpha(I \circ Q^{(0)}) , \\
\{Q^{(1)}, Q^{(1)}\} &= (I \circ Q^{(2)}) - 4\alpha(I \circ Q^{(1)}) - (Q^{(0)}Q^{(0)} \circ Q^{(0)}) , \\
\{Q^{(0)}, Q^{(2)}\} &= (I \circ Q^{(2)}) - 2\alpha(I \circ Q^{(1)}) - (1 - \alpha^2)(I \circ Q^{(0)}) , \\
\{Q^{(1)}, Q^{(2)}\} &= (I \circ Q^{(3)}) - 4\alpha(I \circ Q^{(2)}) - (Q^{(1)}Q^{(0)} \circ Q^{(0)}) - \\
&\quad - (Q^{(0)}Q^{(0)} \circ Q^{(1)}) + 2\alpha(Q^{(0)}Q^{(0)} \circ Q^{(0)}) , \\
\{Q^{(0)}, Q^{(3)}\} &= (I \circ Q^{(3)}) - 2\alpha(I \circ Q^{(2)}) - (1 - \alpha^2)(I \circ Q^{(1)}) - \\
&\quad - \alpha(1 - \alpha^2)(I \circ Q^{(0)}) , \\
\{Q^{(1)}, Q^{(3)}\} &= (I \circ Q^{(4)}) - 4\alpha(I \circ Q^{(3)}) - (Q^{(2)}Q^{(0)} \circ Q^{(0)}) - \\
&\quad - (Q^{(1)}Q^{(0)} \circ Q^{(1)}) - (Q^{(0)}Q^{(0)} \circ Q^{(2)}) + \\
&\quad + 2\alpha(Q^{(1)}Q^{(0)} \circ Q^{(0)}) + 2\alpha(Q^{(0)}Q^{(0)} \circ Q^{(1)}) + \\
&\quad + 2(1 - \alpha^2)(Q^{(0)}Q^{(0)} \circ Q^{(0)}) , \\
\{Q^{(2)}, Q^{(2)}\} &= (I \circ Q^{(4)}) - 4\alpha(I \circ Q^{(3)}) - 3\alpha(1 - \alpha^2)(I \circ Q^{(1)}) - \\
&\quad - 3\alpha^2(1 - \alpha^2)(I \circ Q^{(0)}) - (Q^{(0)}Q^{(0)} \circ Q^{(2)}) + \\
&\quad + 2\alpha(Q^{(0)}Q^{(1)} \circ Q^{(0)}) + 2\alpha(Q^{(1)}Q^{(0)} \circ Q^{(0)}) - \\
&\quad - (Q^{(0)}Q^{(1)} \circ Q^{(1)}) - (Q^{(1)}Q^{(0)} \circ Q^{(1)}) - \\
&\quad - (Q^{(1)}Q^{(1)} \circ Q^{(0)}) + 4\alpha(Q^{(0)}Q^{(0)} \circ Q^{(1)}) , \tag{2.18}
\end{aligned}$$

mas nós não encontramos uma mudança linear da base tal que possamos retornar à álgebra (2.15) para qualquer valor de α . Além disso, se esta álgebra pudesse realmente ser escrita de uma forma similar à (2.15), então $f(\xi, \mu)$ não seria dada por uma expressão tão simples como (2.17). Além do mais, não temos um Ansatz para a álgebra completa. Apesar disso, se necessário, outras cargas e parênteses podem ser gerados de (2.18), usando o algoritmo gráfico.

O caso do acoplamento nulo ($\alpha \rightarrow 0$) foi estudado separadamente porque, neste limite, esperamos obter uma álgebra isomórfica àquela obtida no modelo sigma não linear. Construimos algumas cargas não locais e calculamos vários parênteses, até $\{Q^{(4)}, Q^{(2)}\}$, e todos os parênteses obtidos são representados pelo seguinte Ansatz:

$$\{Q(\xi), Q(\mu)\} = (f(\xi, \mu) \circ c(\xi, \mu)Q(\xi) - c(\mu, \xi)Q(\mu)) , \tag{2.19}$$

$$Q(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^{n+1} Q^{(n)} , \quad f(\xi, \mu) = \frac{1}{\xi^{-1} - \mu^{-1}} (I - Q(\xi)Q(\mu)) , \tag{2.20}$$

$$c(\xi, \mu) = 1 - \xi^2 + 2\xi^4 - \xi^2\mu^2 + \dots \tag{2.21}$$

Maior número de termos na expansão da função $c(\xi, \mu)$ exigiriam parênteses de ordens maiores. Como podemos notar, a álgebra anterior é diferente daquela do modelo sigma não linear [96, 103]. Esta divergência está diretamente relacionada às diferenças entre os termos de Schwinger nas respectivas álgebras de correntes.

Na busca por um Ansatz geral, nos perguntamos se poderíamos usar a identidade de Jacobi para derivar uma forma fechada para a álgebra cúbica dependente de α . Isto de fato acontece no modelo sigma não linear: a partir da identidade de Jacobi com cargas de ordens baixas, pode-se calcular parênteses de ordens mais altas. Este procedimento é discutido na próxima seção.

2.5 Sobre a Identidade de Jacobi

Baseados nas álgebras disponíveis, nós nos colocamos a seguinte questão: assumindo uma álgebra cúbica com a estrutura

$$\{Q(\xi), Q(\mu)\} = (f(\xi, \mu) \circ Q(\xi) - Q(\mu)) \quad , \quad (2.22)$$

$$f(\xi, \mu) = A(\xi, \mu)I + B(\xi, \mu)Q(\xi)Q(\mu) \quad , \quad (2.23)$$

quais vínculos poderia a identidade de Jacobi impor sobre as funções a ser determinadas $A(\xi, \mu)$ and $B(\xi, \mu)$? Para começar, consideramos A e B como sendo funções comuns de dois parâmetros, cuja resposta é

$$A(\xi, \mu) = \frac{1}{g(\xi) - g(\mu)} \quad , \quad (2.24)$$

$$B(\xi, \mu) = C \times A(\xi, \mu) \quad , \quad (2.25)$$

onde $g(\xi)$ é alguma função arbitrária e C uma constante também arbitrária. No modelo sigma não linear obtido fazendo-se $\alpha = 0$ na Lagrangeana do modelo WZNW, obtivemos $A = -B = 1/(\xi^{-1} - \mu^{-1})$. De fato, esta solução é única: (i) Primeiramente, por um reescalonamento geral do gerador $Q(\xi)$, podemos atribuir o valor $C = -1$ na solução anterior, tal que $A = -B$ poderia ser assumida como uma relação geral; (ii) Por $g(\xi)$ ser inversível e se a inversa g^{-1} admite uma expansão em série, poderíamos assumir $\xi = g^{-1}(\xi')$ e definir outro gerador $Q'(\xi') = Q(g^{-1}(\xi')) = \sum \xi' Q'^{(n)}$, onde $Q'^{(n)}$ seriam recombinações lineares das cargas não locais originais. Na base reparametrizada, poderíamos reproduzir a álgebra cúbica do modelo sigma não linear, onde foi obtida a identidade de Jacobi. Os cálculos constam no Apêndice B.

Entretanto, o modelo crítico WZNW onde ($\alpha = 1$) temos

$$A = -B = \frac{1 - 2(\xi + \mu)}{\xi^{-1} - \mu^{-1}} \quad , \quad (2.26)$$

o qual não pode ser escrito na forma (2.24) e dessa forma a álgebra cúbica (2.15) não satisfaz à identidade de Jacobi. É importante notar que a quebra da identidade de Jacobi não é causada pelos termos cúbicos; de fato, a parte linear da álgebra é suficiente para quebrá-la. O seguinte teste, tomado do modelo $\alpha = 1$, exemplifica esta propriedade:

$$\begin{aligned} & \{ \{ Q_{ij}^{(0)}, Q_{kl}^{(1)} \}, Q_{mn}^{(1)} \} + \{ \{ Q_{kl}^{(1)}, Q_{mn}^{(1)} \}, Q_{ij}^{(0)} \} + \{ \{ Q_{mn}^{(1)}, Q_{ij}^{(0)} \}, Q_{kl}^{(1)} \} = \\ & = 4 \left[(\delta_{ik}\delta_{lm} - \delta_{il}\delta_{km})Q_{jn}^{(0)} + (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jk}\delta_{lm})Q_{in}^{(0)} + \right. \\ & \quad + (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{km}\delta_{jn})Q_{il}^{(0)} + (\delta_{in}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kn})Q_{jl}^{(0)} + \\ & \quad + (\delta_{il}\delta_{kn} - \delta_{ik}\delta_{ln})Q_{jm}^{(0)} + (\delta_{jk}\delta_{ln} - \delta_{jl}\delta_{kn})Q_{im}^{(0)} + \\ & \quad \left. + (\delta_{jn}\delta_{lm} - \delta_{jm}\delta_{ln})Q_{ik}^{(0)} + (\delta_{ln}\delta_{im} - \delta_{in}\delta_{lm})Q_{jk}^{(0)} \right] \quad . \quad (2.27) \end{aligned}$$

Apesar de um Ansatz geral para a álgebra fora do ponto crítico não ter sido obtido, fizemos testes também com os parênteses disponíveis para a parte “left”, ou seja,

$$\begin{aligned}
& \text{parte linear de } \{\{Q_{ij}^{(1)}, Q_{kl}^{(1)}\}, Q_{mn}^{(2)}\} + \{\{Q_{kl}^{(1)}, Q_{mn}^{(2)}\}, Q_{ij}^{(1)}\} + \{\{Q_{mn}^{(2)}, Q_{ij}^{(1)}\}, Q_{kl}^{(1)}\} = \\
& = (\delta_{ik}\delta_{aj}\delta_{bl} - \delta_{il}\delta_{aj}\delta_{bk} + \delta_{jl}\delta_{ai}\delta_{bk} - \delta_{jk}\delta_{ai}\delta_{bl}) \times \\
& \times [(I \circ Q^{(4)}) - 8\alpha(I \circ Q^{(3)}) + 16\alpha^2(I \circ Q^{(2)}) - 3\alpha(1 - \alpha^2)(I \circ Q^{(1)}) + \\
& - 3\alpha^2(1 - \alpha^2)(I \circ Q^{(0)})]_{ab,mn} + \\
& + (\delta_{km}\delta_{al}\delta_{bn} - \delta_{kn}\delta_{al}\delta_{bm} + \delta_{ln}\delta_{ak}\delta_{bm} - \delta_{lm}\delta_{ak}\delta_{bn}) \times \\
& \times [(I \circ Q^{(4)}) - 8\alpha(I \circ Q^{(3)}) + 16\alpha^2(I \circ Q^{(2)})]_{ab,ij} + \\
& + (\delta_{mi}\delta_{an}\delta_{bj} - \delta_{mj}\delta_{an}\delta_{bi} + \delta_{nj}\delta_{am}\delta_{bi} - \delta_{ni}\delta_{am}\delta_{bj}) \times \\
& \times [(I \circ Q^{(4)}) - 8\alpha(I \circ Q^{(3)}) + 16\alpha^2(I \circ Q^{(2)})]_{ab,kl} \\
& = -3\alpha(1 - \alpha^2)(\delta_{ik}\delta_{aj}\delta_{bl} - \delta_{il}\delta_{aj}\delta_{bk} + \delta_{jl}\delta_{ai}\delta_{bk} - \delta_{jk}\delta_{ai}\delta_{bl}) \times \\
& \times [(I \circ Q^{(1)}) + \alpha(I \circ Q^{(0)})]_{ab,mn} \quad . \tag{2.28}
\end{aligned}$$

A conclusão é que a identidade de Jacobi também se quebra fora do ponto crítico, e dessa forma, para qualquer valor de $\alpha \neq 0$. Este é um dos mais importantes resultados da Tese.

Essa quebra de identidade de Jacobi foi observada em [35], para o modelo sigma não linear bosônico. Como observamos no capítulo anterior, obtivemos uma recombinação natural dessas cargas, tal que a não linearidade fica explícita na parte cúbica da álgebra e provamos que essa álgebra de fato observa a identidade de Jacobi. Para o modelo Wess Zumino, tentamos também obter uma recombinação desse tipo; nesse caso, não pudemos obter tal recombinação nem ao menos para o setor “left”, que estamos estudando.

Capítulo 3

Conclusões

Simetrias são as responsáveis por traduzir equações físicas em termos de grandezas inteligíveis. De fato, simetrias no espaço-tempo levam a leis de conservação de energia-momento, e simetrias de rotação implicam nas leis de conservação de momento angular. Em conjunto, essas leis são responsáveis pela compreensão da maioria das relações de física clássica, assim como de vários fenômenos de física em geral.

Em teorias de campos, equações de conservação de energia-momento são primordiais, todavia a complexidade da própria teoria nos leva a procurar estruturas mais complexas para a descrição dos fenômenos. Temos então simetrias de espaço-tempo, como as leis de conservação clássicas, sumarizadas pela simetria de Poincaré e sua generalização supersimétrica, mas também simetrias internas que caracterizam propriedades mais intrínsecas das particulares teorias de partículas elementares.

Estruturas algébricas são com grande frequência utilizadas para descrever simetrias internas, e com razoável sucesso, como as leis de conservação da carga e o uso de leis de conservação anômala, até mesmo para previsões importantes, como por exemplo no uso da leis de conservação parcial da simetria axial (PCAC).

Outras simetrias têm sido também abordadas e utilizadas com sucesso. É o caso de teorias com um número infinito de leis de conservação, característica comum à uma certa classe de teorias bidimensionais, ditas integráveis, e que se tem tentado (sem grande sucesso) generalizar-se para dimensões maiores. Neste caso, torna-se de vital importância a compreensão da estrutura algébrica de tais simetrias. Este é o intuito do presente trabalho.

Métodos diagramáticos são frequentemente utilizados em Física para simplificar cálculos muito longos e por esse motivo propusemos um procedimento gráfico para construir e calcular a álgebra de cargas não locais nos modelos sigma não lineares. Aplicando esse procedimento, fomos capazes de verificar que as cargas não locais “melhoradas” no modelo sigma $O(N)$ supersimétrico obedecem à uma álgebra cúbica do tipo Yangiana a qual pode ser expressa como na eq. (1.66).

$$i\{Q_{ij}(\lambda), Q_{kl}(\mu)\} = (f(\lambda, \mu) \circ Q(\lambda) - Q(\mu))_{ij,kl} \quad , \quad (3.1)$$

Pode-se facilmente recuperar o modelo bosônico da teoria supersimétrica tomando o limite não fermiônico $\psi_i \rightarrow 0$. Além disso, o modelo Gross-Neveu invariante por $O(N)$ pode ser obtido após retirarmos os campos bosônicos ($\phi_i \rightarrow 0$). As cargas “melhoradas” nesses

modelos podem ser diferentes, mas sua álgebra é exatamente a mesma. No modelo Gross-Neveu, as cargas “melhoradas” poderiam ser calculadas por meio de dois diferentes métodos e assim as correspondentes regras gráficas poderiam ser confirmadas e melhor compreendidas. Esperamos obter uma confirmação similar nos modelos sigma mas a presença do campo “intertwiner” nos diagrams nos impediram de fazê-lo.

É também interessante considerar a inclusão dos termos de Wess-Zumino, que modificam a álgebra de correntes (veja por exemplo a ref. [101][103]) e derivar as correspondentes regras gráficas.

A inclusão do termo de Wess Zumino não destrua a integrabilidade clássica de modelos bosônicos (para a extensão supersimétrica tal conclusão é duvidosa). O modelo de WZNW, apesar de integrável, é bem mais difícil de ser compreendido, e em particular não se pode escrever uma matriz S exata, posto que os estados assintóticos incluem partículas de massa zero (infrapartículas), o que impede, em duas dimensões, de se escrever mesmo uma candidata a uma matriz S fatorizada para o modelo em questão. Todavia, o Ansatz de Bethe pode ser escrito, e foi mesmo resolvido em termos da teoria fermiônica equivalente. Assim, o estudo da estrutura algébrica subjacente a esta teoria torna-se ainda mais importante que no caso bosônico usual.

Apesar das várias similaridades entre as álgebras das cargas não locais no modelo sigma não linear $O(N)$ e o modelo WZNW, obtivemos uma importante diferença: o primeiro obedece à identidade de Jacobi enquanto o último não. Este resultado vem como uma surpresa porque esperávamos obter uma álgebra Yangiana clássica. Além disso, a presença de Yangianos nos modelos WZNW é bem estabelecida [111][112][113][114] e Yangianos satisfazem à identidade de Jacobi. Então observamos outras indicações de características não Yangianas: voltando a esses parênteses, em (2.18), notamos que o gerador $Q^{(1)}$ não se transforma da maneira usual sob a simetria $O(N)$:

$$\{Q^{(0)}, Q^{(1)}\} = (I \circ Q^{(1)}) - 2\alpha(I \circ Q^{(0)}) \quad , \quad (3.2)$$

exceto quando $\alpha = 0$. Isto implica que uma das relações que definem um Yangiano – a propriedade às vezes chamada $Y(2)$ – não é em geral obedecida aqui. Dessa forma, a álgebra cúbica (2.18) não pode ser uma álgebra Yangiana clássica. O mesmo vale para a álgebra (2.15) de cargas críticas, para as quais obtivemos um ansatz cúbico mais simples.

$$\{Q(\xi), Q(\mu)\} = (f(\xi, \mu) \circ Q(\xi) - Q(\mu)) \quad , \quad (3.3)$$

Como tal álgebra não obedece à identidade de Jacobi, temos procurado por razões mais fundamentais desta violação. Uma importante diferença entre as álgebras de correntes do modelo sigma e as mesmas do modelo WZNW é a presença (ou ausência) do campo intertwiner nos termos de Schwinger: no modelo sigma, o comportamento “de desaparecer” do intertwiner, conforme $x \rightarrow \pm\infty$, elimina muitas contribuições de contorno. Na álgebra, tais contribuições surgem como integrais do tipo

$$\int dx dy (j \circ \partial^{-1} j_0)(x) \delta'(x - y) \rightarrow 0 \quad \text{devido à } j(\pm\infty) \rightarrow 0 \quad , \quad (3.4)$$

onde j é o campo intertwiner. Usamos a prescrição $\int dx dy F(x) \delta'(x - y) \propto [F(+\infty) - F(-\infty)]$, de acordo com a referência [115]. No modelo WZNW, se considerarmos o setor

“left” ou “right” separadamente, não haverá intertwiner, e as correspondentes integrais não desaparecerão , devido à contribuições das cargas de contorno:

$$\int dx dy (I \circ \partial^{-1} J_0)(x) \delta'(x - y) \propto \left(I \circ (\partial^{-1} J_0)(+\infty) - (\partial^{-1} J_0)(-\infty) \right) = (I \circ Q^{(0)}) \quad (3.5)$$

Por exemplo, o segundo termo do lado direito da equação (3.2) é originado desta forma. Assim, a álgebra tem que ser mais complicada no modelo WZNW. Sugerimos a referência [116] para uma discussão da quebra potencial da identidade de Jacobi por termos de Schwinger do tipo “c-number” em álgebras de correntes, apesar de uma interpretação específica baseada na dinâmica do campo WZNW ser mais valiosa para a análise.

No que se refere à integrabilidade do modelo WZNW fora do ponto crítico, nós não exploramos completamente as consequências desta intrigante violação da identidade de Jacobi. Além disso, o estudo algébrico desta tese não foi além do nível clássico. Extrapolando os exemplos do modelo sigma não linear, acreditamos que a álgebra de comutadores das transformações infinitesimais de simetria – em outras palavras, a ação da simetria Yangiana – gerada pelas cargas não locais através de alguma ação de Lie-Poisson, poderia obedecer à identidade de Jacobi (veja a ref. [103] para uma discussão da ação de Lie-Poisson para geradores no modelo sigma não linear). Neste caso, a simetria Yangiana deve permanecer associativa, como esperado. Maiores investigações nesta direção estão em progresso.

Apêndice A

Exemplos de Regras diagramáticas

A.1 Cargas não locais “melhoradas” $Q^{(n)}$ no modelo sigma não linear

Vamos aplicar o método gráfico para construir algumas das cargas no modelo bosônico:

i) $n = 0$

De acordo com as nossas convenções, a carga local $O(N)$ é representada por

$$Q^{(0)} = \int dx j_0 \iff \text{⓪} \quad (\text{A.1})$$

ii) $n = 1$

Usando as regras de transformação (1.81) obtemos

$$\text{⓪} \Rightarrow \text{⓪} + \text{⓪} \leftrightarrow \text{⓪} + 2 \text{⓪} \otimes \text{⓪} \quad (\text{A.2})$$

O último termo é zero, pois poderia ser entendido como $\int dx j \partial I = 0$. Dessa maneira, temos o seguinte diagrama para $Q^{(1)}$:

$$\text{⓪} + \text{⓪} \leftrightarrow \text{⓪} \quad (\text{A.3})$$

que significa que a primeira carga não local é escrita como

$$Q^{(1)} = \int dx (j_1 + 2j_0 \partial j_0) \quad (\text{A.4})$$

iii) $n = 2$

Agora tomamos a primeira cadeia de $Q^{(1)}$ e aplicamos a regra de troca (1.81) de novo,

$$\text{⓪} \Rightarrow 2 \text{⓪} \otimes \text{⓪} + \text{⓪} \leftrightarrow \text{⓪} \quad (\text{A.5})$$

A seguir, transformamos a segunda cadeia, trocando seu lado esquerdo de acordo com (1.81)

$$\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \Rightarrow \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + 2 \otimes \text{---} \end{array} \quad (\text{A.6})$$

Lembrando a propriedade (1.80),

$$2 \otimes \text{---} = 2 \otimes \quad (\text{A.7})$$

adicionando todas as contribuições e lembrando os vínculos

$$2 (\otimes + \otimes) = 2 \quad (\text{A.8})$$

o diagrama resultante é

$$2 \text{---} + \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \quad (\text{A.9})$$

e dessa forma a segunda carga não local tem a forma

$$Q^{(2)} = \int dx \left[2j_0 + 2j_0 \partial j_1 + 2j_1 \partial j_0 + 4j_0 \partial (j_0 \partial j_0) \right] \quad (\text{A.10})$$

Note que o uso apropriado dos vínculos gerou uma carga livre de intertwiners. Esta propriedade foi checada até a ordem $n = 7$ e conjecturamos que ela valha para todo n .

A.2 Derivação gráfica de $\{Q^{(1)}, Q^{(1)}\}$ no modelo sigma não linear

Neste caso, devemos considerar todas as possíveis contrações entre as sequências de cadeias de $Q^{(1)}$,

$$\text{---} + \text{---} \text{---} \quad (\text{A.11})$$

que possui 9 contrações no total. Aqui estão elas:

i)

$$\boxed{\text{---} \text{---}} = 0 \quad (\text{A.12})$$

ii)

$$\boxed{\text{---} \text{---}} = \boxed{\text{---} \text{---}} = \text{---} + 2 \otimes \text{---} + 2 \otimes \text{---} \quad (\text{A.13})$$

O primeiro termo corresponde à

$$\text{---} = \int (I \circ 2j_1 \partial j_0) \quad (\text{A.14})$$

e o segundo termo tem a forma

$$2 \text{ (spring)} \rightarrow \text{ (loop)} = 2 \text{ (spring)} = \int (I \circ 2j j_0) \quad (\text{A.15})$$

O último termo desaparece porque contém uma derivada da matriz identidade,

$$2 \text{ (diagram)} = 2 \int (\partial I \circ j \partial j_0^1) = 0 \quad (\text{A.16})$$

iii)

$$\begin{aligned}
 \boxed{\text{Diagram 1}} &= - \boxed{\text{Diagram 2}} = - \boxed{\text{Diagram 3}} = \boxed{\text{Diagram 4}} = \text{Diagram 5} + 2 \text{Diagram 6} + 2 \text{Diagram 7} \\
 &\quad (A.17)
 \end{aligned}$$

Note que calculamos dois sinais de menos: um da inversão de uma flecha (durante o passo de isolamento) e outro da transposição de j_0 (durante o passo de dobramento). A primeira contribuição é

$$\mathcal{D} = \int (2\delta j_0 \circ j_1) \quad (\text{A.18})$$

A segunda desaparece devido ao vínculo (1.96)

$$2 \text{ (diagram)} = 2 \text{ (diagram)} = 0 \quad (\text{A.19})$$

e o terceiro termo é nulo também

$$2 \text{ (diagram)} = \int dx (2\delta j_0^1 \circ j \partial I) = 0 \quad (\text{A.20})$$

Vamos prosseguir com as contrações restantes:

iv)

$$\text{Diagram 1} = - \text{Diagram 2} = - \text{Diagram 3} = - \text{Diagram 4} + 2 \text{Diagram 5} = - \text{Diagram 6} \quad (\text{A.21})$$

v)

$$\text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} = - \text{Diagram 3} = - \text{Diagram 4} + 2 \text{Diagram 5} = \text{Diagram 6} + 2 \text{Diagram 7} \quad (\text{A.22})$$

vi)

$$\text{Diagram 1} = - \text{Diagram 2} = - \text{Diagram 3} \quad (\text{A.23})$$

vii)

$$\text{Diagram 1} = - \text{Diagram 2} = - \text{Diagram 3} \quad (\text{A.24})$$

viii)

$$\text{Diagram 4} = - \text{Diagram 5} = - \text{Diagram 6} = \text{Diagram 7} \quad (\text{A.25})$$

ix)

$$\text{Diagram 8} = - \text{Diagram 9} = - \text{Diagram 10} \quad (\text{A.26})$$

Somando todas as contribuições não nulas, obtemos os seguintes termos:

$$2 \text{Diagram 11} + \text{Diagram 12} + \text{Diagram 13} + \text{Diagram 14} - \text{Diagram 15} - \text{Diagram 16} - \text{Diagram 17} \quad (\text{A.27})$$

A parte linear da álgebra é claramente reconhecida

$$\begin{aligned} & 2 \text{Diagram 11} + \text{Diagram 12} + \text{Diagram 13} + \text{Diagram 14} \\ &= \int dx (I \circ 2j_0 + 2j_0 \partial j_1 + 2j_1 \partial j_0 + 4j_0 \partial(j_0 \partial j_0)) \\ &= (I \circ Q^{(2)}) \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Os três diagramas restantes geram o termo de superfície que corresponde à parte cúbica da álgebra:

$$\begin{aligned} & - \text{Diagram 15} - \text{Diagram 16} - \text{Diagram 17} = - \rightarrow \left[\text{Diagram 18} \right] \\ &= - \int dx \frac{1}{2} \partial^3 (\partial j_0 \partial j_0 \circ \partial j_0) = - (Q^{(0)} Q^{(0)} \circ Q^{(0)}) \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Finalmente obtemos a resposta,

$$\{Q^{(1)}, Q^{(1)}\} = (I \circ Q^{(2)}) - (Q^{(0)} Q^{(0)} \circ Q^{(0)}) \quad (\text{A.30})$$

Este exemplo comentado pode parecer muito longo, não revelando o poder efetivo do método gráfico. Mas podemos assegurar que, após praticar as regras de convecção – e excluindo os comentários intermediários – somos capazes de calcular muitos parênteses de Dirac de maneira bastante eficiente.

Apêndice B

Derivação da forma dos parâmetros $A(\xi, \mu)$ e $B(\xi, \mu)$ que obedecem a identidade de Jacobi

No Capítulo 2, quando tratamos o modelo WZNW, procuramos saber se a álgebra deste modelo obedece à identidade de Jacobi, a exemplo da álgebra do modelo sigma não linear, obtida fazendo-se $\alpha = 0$ na Lagrangeana do modelo WZNW. Apesar de não termos a forma geral para a álgebra, sabemos que é formada por uma parte linear e uma cúbica, a exemplo do modelo bosônico. Propomos então a seguinte forma geral para a álgebra, em termos dos parâmetros $A(\xi, \mu)$ e $B(\xi, \mu)$ (2.23)

$$\begin{aligned} \{Q(\xi), Q(\mu)\} &= (f(\xi, \mu) \circ Q(\xi) - Q(\mu)) \quad , \\ f(\xi, \mu) &= A(\xi, \mu)I + B(\xi, \mu)Q(\xi)Q(\mu) \quad . \end{aligned} \quad (B.1)$$

Procuramos então conhecer a forma geral desses parâmetros e os vínculos entre eles, de maneira que a álgebra (B.1) obedeça à identidade de Jacobi. Para isso, impomos a identidade de Jacobi para essa álgebra, dada por,

$$\begin{aligned} \{\{Q_{ij}(\lambda), Q_{kl}(\mu)\}, Q_{mn}(\xi)\} + \{\{Q_{kl}(\mu), Q_{mn}(\xi)\}, Q_{ij}(\lambda)\} + \\ \{\{Q_{mn}(\xi), Q_{ij}(\lambda)\}, Q_{kl}(\mu)\} = 0 \quad . \end{aligned} \quad (B.2)$$

Devido a forma geral que escolhemos para a perturbação cúbica da álgebra (B.1) a equação final vai conter apenas termos lineares, cúbicos e quádruplos, cujos coeficiente deverão ser separadamente anulados.

Introduzindo a álgebra das cargas e a forma do parâmetro $f(\xi, \mu)$ (B.1) na identidade de Jacobi (B.2), obtemos a equação

$$\begin{aligned} \{([B(\lambda, \mu)]\{[(A(\lambda, \xi)\delta_{im}Q_{pn}(\lambda) - A(\lambda, \xi)\delta_{im}Q_{pn}(\xi) + B(\lambda, \xi)Q_{ir}(\lambda)Q_{rm}(\xi)Q_{pn}(\lambda) - \\ - B(\lambda, \xi)Q_{ir}(\lambda)Q_{rm}(\xi)Q_{pn}(\xi)) - (m \leftrightarrow n)] - (i \leftrightarrow p)\}Q_{pk}(\mu) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + Q_{ip}(\lambda) \{ [(A(\mu, \xi) \delta_{pm} Q_{kn}(\mu) - A(\mu, \xi) \delta_{pm} Q_{kn}(\xi) + B(\mu, \xi) Q_{pr}(\mu) Q_{rm}(\xi) Q_{kn}(\mu) - \\
& - B(\mu, \xi) Q_{pr}(\mu) Q_{rm}(\xi) Q_{kn}(\xi) - (m \leftrightarrow n)) - (p \leftrightarrow k)] \} Q_{jl}(\lambda) + \\
& + (A(\lambda, \mu) \delta_{ik} + B(\lambda, \mu) Q_{iu}(\lambda) Q_{uk}(\mu)) [(A(\lambda, \xi) \delta_{jm} Q_{ln}(\lambda) - A(\lambda, \xi) \delta_{jm} Q_{ln}(\xi) + \\
& + B(\lambda, \xi) Q_{js}(\lambda) Q_{sm}(\xi) Q_{ln}(\lambda) - B(\lambda, \xi) Q_{js}(\lambda) Q_{sm}(\xi) Q_{ln}(\xi)) - (m \leftrightarrow n)) - \\
& - (j \leftrightarrow l)] - (k \leftrightarrow l)) - (i \leftrightarrow j) \} - \\
& - \{ [B(\lambda, \mu) [(A(\lambda, \xi) \delta_{im} Q_{pn}(\lambda) - A(\lambda, \xi) \delta_{im} Q_{pn}(\xi) + B(\lambda, \xi) Q_{ir}(\lambda) Q_{rm}(\xi) Q_{pn}(\lambda) - \\
& - B(\lambda, \xi) Q_{ir}(\lambda) Q_{rm}(\xi) Q_{pn}(\xi)) - (m \leftrightarrow n)) - (i \leftrightarrow p)] \} Q_{pk}(\mu) + \\
& + Q_{ip}(\lambda) \{ [(A(\mu, \xi) \delta_{pm} Q_{kn}(\mu) - A(\mu, \xi) \delta_{pm} Q_{kn}(\xi) + B(\mu, \xi) Q_{pr}(\mu) Q_{rm}(\xi) Q_{kn}(\mu) - \\
& - B(\mu, \xi) Q_{pr}(\mu) Q_{rm}(\xi) Q_{kn}(\xi) - (m \leftrightarrow n)) - (p \leftrightarrow k)] \} Q_{jl}(\mu) + \\
& + (A(\lambda, \mu) \delta_{ik} + B(\lambda, \mu) Q_{iu}(\lambda) Q_{uk}(\mu)) [(A(\lambda, \xi) \delta_{jm} Q_{ln}(\mu) - A(\lambda, \xi) \delta_{jm} Q_{ln}(\xi) + \\
& + B(\mu, \xi) Q_{js}(\mu) Q_{sm}(\xi) Q_{ln}(\mu) - B(\mu, \xi) Q_{js}(\mu) Q_{sm}(\xi) Q_{ln}(\xi)) - (m \leftrightarrow n)) - \\
& - (j \leftrightarrow l)] - (k \leftrightarrow l)) - (i \leftrightarrow j) \} + \\
& + \{ i \leftarrow k, j \leftarrow l, k \leftarrow m, l \leftarrow n, m \leftarrow i, n \leftarrow j; \lambda \leftarrow \mu, \mu \leftarrow \xi, \xi \leftarrow \lambda \} + \\
& + \{ i \leftarrow m, j \leftarrow n, k \leftarrow i, l \leftarrow j, m \leftarrow k, n \leftarrow l; \lambda \leftarrow \xi, \mu \leftarrow \lambda, \xi \leftarrow \mu \} = 0 \quad (B.3)
\end{aligned}$$

Contraindo os índices de grupo podemos identificar os coeficientes dos termos linear, cúbico e quádruplo citados acima. Após isso, igualamos a zero e dessa forma encontramos as equações e vínculos para A e B , tal que obedecem a identidade de Jacobi.

Encontramos para o coeficiente do termo linear as seguintes equações,

$$\begin{aligned}
A(\lambda, \mu) A(\mu, \xi) + A(\mu, \xi) A(\xi, \lambda) + A(\xi, \lambda) A(\lambda, \mu) &= 0 \\
A(\lambda, \mu) &= -A(\mu, \lambda) \quad . \quad (B.4)
\end{aligned}$$

Para o coeficiente do termo cúbico, obtivemos os seguintes vínculos entre A e B ,

$$\begin{aligned}
A(\lambda, \mu) B(\mu, \xi) &= B(\lambda, \mu) A(\mu, \xi) \\
A(\lambda, \mu) B(\mu, \xi) + A(\mu, \xi) B(\xi, \lambda) + A(\xi, \lambda) B(\lambda, \mu) &= 0 \quad (B.5)
\end{aligned}$$

e a seguinte equação para B

$$B(\lambda, \mu) = -B(\mu, \lambda) \quad . \quad (B.6)$$

Finalmente, igualando os coeficientes dos termos quádruplos a zero, obtemos,

$$B(\lambda, \mu) B(\mu, \xi) + B(\mu, \xi) B(\xi, \lambda) + B(\xi, \lambda) B(\lambda, \mu) = 0 \quad . \quad (B.7)$$

Dessas últimas equações para os parâmetros A e B , concluímos que para que a perturbação cúbica (B.1) satisfaça à identidade de Jacobi, temos que ter,

$$A(\lambda, \mu) = B(\lambda, \mu) \quad . \quad (B.8)$$

Concluimos então que para satisfazer a identidade de Jacobi, uma perturbação cúbica da álgebra de Virasoro deve ter a forma,

$$\{Q(\lambda), Q(\mu)\} = (f(\lambda, \mu) \circ Q(\lambda) - Q(\mu)) \quad , \quad (\text{B.9})$$

$$f(\lambda, \mu) = A(\lambda, \mu)[I + Q(\lambda)Q(\mu)] \quad , \quad (\text{B.10})$$

com o parâmetro $A(\lambda, \mu)$ obedecendo a

$$A(\lambda, \mu)A(\mu, \xi) + A(\mu, \xi)A(\xi, \lambda) + A(\xi, \lambda)A(\lambda, \mu) = 0 \quad , \quad (\text{B.11})$$

e obedecendo à propriedade de antissimetria nos parâmetros espectrais,

$$A(\lambda, \mu) = -A(\mu, \lambda) \quad . \quad (\text{B.12})$$

O próximo passo é encontrarmos o parâmetro $A(\lambda, \mu)$ que satisfaça a equação (B.11) e seja compatível com a propriedade (B.12).

Dividindo ambos os lados da equação (B.11) pelo produto $A(\lambda, \mu)A(\mu, \xi)A(\xi, \lambda)$, obtemos

$$\frac{1}{A(\lambda, \mu)} + \frac{1}{A(\mu, \xi)} + \frac{1}{A(\xi, \lambda)} = 0 \quad . \quad (\text{B.13})$$

Isolando um desses termos, temos,

$$\frac{1}{A(\lambda, \mu)} = -\frac{1}{A(\mu, \xi)} - \frac{1}{A(\xi, \lambda)} \quad . \quad (\text{B.14})$$

Os termos do lado direito dessa equação devem anular a dependência em ξ , pois são iguais ao lado esquerdo, que não depende de ξ . Então propomos a seguinte forma para a solução de $A(\lambda, \mu)$,

$$\frac{1}{A(\lambda, \mu)} = g(\lambda) - g(\mu) \quad , \quad (\text{B.15})$$

onde $g(\lambda)$ é uma função arbitrária do parâmetro espectral. Observe que por substituição, essa solução satisfaz à equação (B.11) e à condição (B.12). Além disso, é compatível com a forma (B.14). Invertendo a equação (B.15), obtemos para o parâmetro $A(\lambda, \mu)$, a forma geral

$$A(\lambda, \mu) = \frac{1}{g(\lambda) - g(\mu)} \quad , \quad (\text{B.16})$$

onde $g(\lambda)$ é uma função analítica e arbitrária em λ .

Finalmente, introduzindo esse resultado em (B.10), obtemos que a perturbação cúbica mais geral da álgebra de Virasoro $O(N)$ que obedece à identidade de Jacobi, possui a forma,

$$\{Q(\lambda), Q(\mu)\} = (f(\lambda, \mu) \circ Q(\lambda) - Q(\mu)) \quad , \quad (\text{B.17})$$

$$f(\lambda, \mu) = \frac{1}{g(\lambda) - g(\mu)} [I + Q(\lambda)Q(\mu)] \quad . \quad (\text{B.18})$$

Podemos ainda escrever esse resultado da forma

$$g(\lambda) = \lambda' \rightarrow \lambda = g^{-1}(\lambda') = h(\lambda') \quad , \quad (\text{B.19})$$

levando a,

$$f(h(\lambda'), h(\mu')) = \frac{1}{\lambda' - \mu'} \{I + Q(h(\lambda'))Q(h(\mu'))\} \quad , \quad (\text{B.20})$$

e finalmente

$$\{Q(h(\lambda')), Q(h(\mu'))\} = \frac{1}{\lambda' - \mu'} [I + Q(h(\lambda'))Q(h(\mu')) \circ Q(h(\lambda')) - Q(h(\mu'))] \quad , \quad (\text{B.21})$$

onde λ' e μ' são funções analíticas arbitrárias e $h(\lambda')$ e $h(\mu')$ são as suas inversas.

Bibliografia

- [1] Dirac, P.A.M.; Proc. Roy. Soc. **117**(1928)610; **118**(1928)351.
- [2] Dyson, F.J.; Phys. Rev. **75**(1949)1736; **85**(1952)631.
Salam, A.; Phys. Rev. **82**(1951)217.
Ward, J.C.; Phys. Rev. **78**(1950)182; Proc. Phys. Soc. **A64**(1951)54.
- [3] Bogoliubov, N.N., Parasiuk, O.S.; Acta Math. **97**(1957)227.
Hepp, K.; Commun. Math. Phys. **2**(1966)301.
- [4] Zimmermann, W.; em "Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory", vol 1, 1970, Brandeis Univ. Summer Institut.
- [5] 't Hooft, G., Veltman, M.; Nucl. Phys. **B44**(1972) 189.
Cicuta, G., Montaldi, E.; Nuovo Cimento Letters **4**(1972) 329.
Speer, E.; J. Math. Phys. **9**(1968)1404.
Bollini, C.G., Giambiaggi, J.J., Dominguez, A.G.; Nuovo Cimento **31**(1964)550.
- [6] Lehman, H., Symanzik, K., Zimmermann, W.; Nuovo Cimento **1**(1955)205.
- [7] Bogoliubov, N.N., Shirkov, D.V.; "Introduction to the theory of quantized fields", Interscience, New York, 1959.
- [8] Haag, R.; Phys. Rev. **112**(1958)69.
Ruelle, D.; Helv. Phys. Acta **35**(1962)147.
Hepp, K.; Commun. Math. Phys. **1**(1965)95.
- [9] Streater, R.F., Wightman, A.S.; "PCT, Spin Statistics and all that", W.A. Benjamin, N.Y.(1964).
- [10] Jacob, M. (ed.); "Dual Theory", Physics Reports Reprint, Volume I, North Holland, Amsterdam, 1974.
- [11] Veneziano, G.; Nuovo Cimento **57A**(1968)190.
- [12] Scherk, J.; Rev. Mod. Phys. **47**(1975)123.

- [13] Weinberg, S.; Phys. Rev. Lett. **19**(1967)1264.
Salam, A.; em "Elementary Particle Theory", ed. N. Svartholm, Almqvist e Wiksells, Stockholm 1968.
- [14] Gell Mann, M., Ne'eman, Y.; em "The eightfold way", Benjamin, New York, 1964.
- [15] Marciano, W., Pagels, H.; Phys. Rep., **C36**(1978)137.
- [16] Callan, C.G.; Phys. Rev. **D2**(1970)1541.
Symanzik, K.; Commun. Math. Phys. **18**(1970)227; Springer Tracts in Mod. Phys. **57**(1971)222.
Gross, D.J., Wilczek, F.A.; Phys. Rev. Lett. **30**(1973)1346.
Politzer, H.D.; Phys. Rev. Lett. **30**(1973)1346.
Politzer, H.D.; Phys. Rep. **14**(1974)129.
- [17] Coleman, S.; "Aspects of symmetry", Cambridge University Press, 1985.
Coleman, S.; "The magnetic monopole fifty years later", Erice, Italy, 1981.
- [18] Thirring, W.; Ann. of Phys. **3**(1958)91.
- [19] Klaiber, B.; em "Lectures in Theoretical Physics", Boulder 1967, Gordon and Breach, New York, 1968.
- [20] Wightman, A.S.; em "Cargese Lectures of Theoretical Physics", ed. Gordon and Breach, New York, 1964.
- [21] Schwinger, J.; Phys. Rev. Lett. **3**(1959)296; Phys. Rev. **128**(1962)2425.
- [22] Lowenstein, J., Swieca, J.A.; Annals of Phys. **68**(1971)172.
- [23] Casher, A., Kogut, J., Susskind, L.; Phys. Rev. Lett. **31**(1973)31; Phys. Rev. **D10**(1974)732.
- [24] Rothe, H.J., Rothe, K.D., Swieca, J.A.; Phys. Rev. **D15**(1977)1675.
- [25] Wilson, K.; Phys. Rev. **179**(1969)1499.
- [26] Coleman, S., Gross, D.J.; Phys. Rev. Lett. **31**(1973)851.
- [27] Abdalla, E., Abdalla, M.C.B., Rothe, K.D.; "Non-perturbative methods in two dimensional quantum field theory", Singapore, World Scientific, 1991.
- [28] Abdalla, E.; "Two-dimensional Quantum Field Theory, examples and applications", trabalho apresentado no CIMA-97, Havana, Cuba, março/97.
- [29] Rajaraman, R.; Phys. Rep. **5**(1975)227.
- [30] Pohlmeyer, K.; Commun. Math. Phys. **46**(1976)207.

- [31] Lüscher, M.; Nucl. Phys. **B135**(1978)1.
- [32] Zamolodchikov, A.B., Zamolodchikov, Al.B.; Annals of Phys. **120**(1979)253.
- [33] Karowski, M.; Phys. Rep. **49**(1979)229.
- [34] Abdalla, E.; "Lecture. Notes in Phys." **226** (1984)140 ed. N. Sanchez e H.J. de Vega.
- [35] de Vega, H.J.; Phys. Lett. **87B**(1979)233.
 de Vega, H.J., Eichenherr, H., Maillet, J.M.; Proc. Meudon and Paris VI, 83/84, 171.
 de Vega, H.J., Eichenherr, H., Maillet, J.M.; Commun. Math. Phys. **92**(1984)507.
 de Vega, H.J., Eichenherr, H., Maillet, J.M.; Nucl. Phys. **B240**(1984)377.
 de Vega, H.J., Eichenherr, H., Maillet, J.M.; Phys. Lett. **132B**(1983)337.
- [36] Maillet, J.-M.; Phys. Lett. **167B**(1986)401; Nucl. Phys. **B269**(1986)54.
- [37] Karowski, M.; "Proceedings - String theory, Quantum cosmology and quantum gravity: integral and conformal invariant theories", Paris 1986; Nucl. Phys. **B300**(1988)473.
- [38] Prasad, M.K., Sinha, A., Chau Wang, L.L.; Phys. Rev. Lett. **43**(1979)750; Phys. Lett. **B87**(1979)237.
 Chau, L.L.; "Proceedings" - Swansea 1988 em "Mathematical Physics", p. 346.
 Aref'eva, I.Ya, Volovich, I.V.; Phys. Lett. **149B**(1984)131.
 Chau, L.L., Prasad, M.K., Sinha, A.; Phys. Rev. **D23**(1981)2321; **D24**(1981)1574.
 Chau, L.L., Ge, M.L., Popowicz, Z.; Phys. Rev. Lett. **52**(1984)1940.
 Witten, E.; Phys. Lett. **77B**(1978)394; Nucl. Phys. **B266**(1986)245.
 Abdalla, E., Forger, M., Jacques, M.; Nucl. Phys. **B307**(1988)198.
 Harnad, J., Hurtubise, J., Légaré, M., Shnider, S.; Nucl. Phys. **B256**(1985)609.
 Avan, J., de Vega, H.J., Maillet, J.M.; Phys. Lett. **171B**(1986)255.
- [39] Karowski, M., Weisz, P.; Nucl Phys. **B139**(1978)455.
- [40] Karowski, M.; "Int. Colloq. on complex analysis, Microlocal calculus and relativistic quantum theory", Les Houches, 1979; Nucl. Phys. **B153**(1979)244.
- [41] Skyrme, T.H.R.; Proc. Roy. Soc. **A260**(1961)127.
- [42] Coleman, S.; Phys. Rev. **D11**(1975)2088.
- [43] Mandelstan, S.; Phys. Rev. **D11**(1975)3026.
- [44] Weisz, P.; Nucl. Phys. **B122**(1977)1.
- [45] Swieca, J.A.; "Fortschritte der Physik" **25**(1977)303.
- [46] Polyakov, A.M., Wiegman, P.B.; Phys. Lett. **131B**(1983)121; **141B**(1984)223.

- [47] Witten, E.; Commun. Math. Phys. **92**(1984)455.
- [48] Wess, J., Zumino, B.; Phys. Lett. **37B**(1971)95.
- [49] Abdalla, E., Abdalla, M.C.B.; Nucl. Phys. **B255**(1985)392.
- [50] Eichenherr, H.; Nucl. Phys. **B146**(1978)215; **B155**(1979)544.
- [51] Eichenherr, H., Forger, M.; Nucl. Phys. **B155**(1979)381.
- [52] D'Adda, A., di Vecchia, P., Lüscher, M.; Nucl. Phys. **B146**(1978)63.
- [53] Migdal, A.A.; Soviet Phys. JETP **42**(1976)413, 742.
- [54] Polyakov, A.M.; Phys. Lett. **59B**(1975)79.
- [55] Chakrabarti, A.; "Introduction to classical solution of Yang-Mills equations", Rencontre de Rabat, 1978.
 Actor, A.; Rev. Mod. Phys. **51**(1979)461.
- [56] Din, A.M., Zakrzewski, W.J.; Nucl. Phys. **B174**(1980)397; Phys. Lett. **95B**(1980)419.
 Din, A.M., Horvath, Z., Zakrzewski, W.J.; Nucl. Phys. **B233**(1984)269.
- [57] Callan, C.G., Dashen, R., Gross, D.J.; Phys. Rev. Lett. **44**(1980)435.
- [58] Abdalla, E., Forger, M., Gomes, M.; Nucl. Phys. **B210**(1982)181.
- [59] D'Adda, A., Davis, A.C.; Phys. Lett. **101B**(1981)85.
- [60] D'Adda, A., Davis, A.C., di Vecchia, P.; Nucl. Phys. **B218**(1983)191.
- [61] D'Adda, A., di Vecchia, P., Lüscher, M.; Phys. Rep. **49**(1979)239.
- [62] Forger, M.; "Proceedings" - Clausthal, Germany 1981, ed. S.I. Andersson, H.D. Doebner; Lect. Notes in Math. 1037, 1983.
- [63] Tseytlin, A.A.; Int. J. Mod. Phys. **A5**(1990)589.
- [64] Callan, C.G., Martinec, E.J., Perry, M.J., Friedan, D.; Nucl. Phys. **B262**(1985)593.
- [65] Callan, C.G., Klebanov, I.R., Perry, M.J.; Nucl. Phys. **B278**(1986)78.
- [66] Gross, D.J., Witten, E.; Nucl. Phys. **B277**(1986)1.
- [67] Jackiw, R., Rajaraman, R.; Phys. Rev. Lett. **54**(1985)1219.
- [68] Faddeev, L.D.; Phys. Lett. **145B**(1984)81.
 Faddeev, L.D., Shatashvili, S.L.; Phys. Lett. **167B**(1986)225.
 Shatashvili, S.L.; Teor. Mat. Fiz. **71**(1987)40.
- [69] Giroli, H.O., Rothe, H.J., Rothe, K.D.; Phys. Rev. **D33**(1986)514.

- [70] Zumino, B.; Les Houches, Agosto de 1983, Notas de K. Sibold.
 Zumino, B.; Nucl. Phys. **B253**(1985)477.
 Zumino, B., Young Shi, Wu, Zee, A.; Nucl. Phys. **B239**(1984)477.
- [71] Baulieu, L.; Nucl. Phys. **B241**(1984)577.
 Stora, R.; em "New Developments in Quantum Field Theory and Statistical Mechanics",
 eds. M. Levy e P. Mitter, Plenum, New York, 1977.
- [72] Abdalla, E., Abdalla, M.C.B., Gomes, M.; Phys. Rev. **D23**(1981)1800.
- [73] Witten, E., Goldschmidt, Y.Y.; Phys. Lett. **91B**(1980)392.
- [74] Abdalla, E., Abdalla, M.C.B., Gomes, M.; Phys. Rev. **D25**(1982)452.
- [75] Kurak, V., Köberle, R.; Phys. Rev. **D36**(1987)627.
- [76] Belavin, A.A., Polyakov, A.M., Zamolodchikov, A.B.; Nucl. Phys. **B241**(1984)333.
- [77] Capelli, A., Itzykson, C., Zuber, J.B.; Commun. Math. Phys. **113**(1987)1.
- [78] Rehren, K.H., Schroer, B.; Phys. Lett. **198B**(1987)480.
 Fröhlich, J.; "Proceedings of the Cargese School", 1987.
- [79] Polyakov, A.M.; Mod. Phys. Lett. **A2**(1987)893.
- [80] Polyakov, A.M.; Les Houches, 1988.
 Abdalla, E., Abdalla, M.C.B., Zadra, A.; Trieste-Preprint IC/89/56 (não publicado).
- [81] Polyakov, A.M., Zamolodchikov, A.B.; Mod. Phys. Lett. **A3**(1988)1213.
 Abdalla, E., Abdalla, M.C.B., Zadra, A.; Mod. Phys. Lett. **A4**(1989)849.
- [82] Cardy, J.L.; em "Phase transitions and critical phenomena", vol 11, ed. por C. Domb,
 J.L. Lebowitz, Acad. Press, 1987.
- [83] Rocha Caridi, A.; em "Vertex Operator in Mathematics and Physics", Berkeley, 1983,
 Springer Verlag, p. 451.
- [84] Kac, V.G.; "Lecture Notes in Physics" **94**(1979)441.
- [85] Witten, E.; Commun. Math. Phys. **121**(1989)351.
- [86] Witten, E.; Commun. Math. Phys. **117**(1988)353.
 Witten, E., Horne, J.H.; Phys. Rev. Lett. **62**(1989)501.
 Deser, S., Jackiw, R., Templeton, S.; Phys. Rev. Lett. **48**(1982)975.
- [87] Polyakov, A.M.; Mod. Phys. Lett. **A3**(1988)325.
 Coste, A., Lüscher, M.; Nucl. Phys. **B323**(1989)631.
 Lüscher, M.; Nucl. Phys. **B326**(1989)557.

- [88] Knizhnik, V., Zamolodchikov, A.B.; Nucl. Phys. **B247**(1984)83.
- [89] Bernard, D.; Commun. Math. Phys. **137**(1991)191; Int. J. Mod. Phys. **B7**(1993)3517.
- [90] Drinfel'd, V.G.; Sov. Math. Dokl. **32**(1985)254; Sov. Math. Dokl. **36**(1988)212.
Leclair, A., Smirnov, F.A.; Int. J. Mod. Phys. **A7**(1992)2997.
- [91] Haldane, F.D., Ha, Z.N.C., Talstra, J.C., Bernard, D., Pasquier, V.; Phys. Rev. Lett. **69**(1992)2021.
- [92] Brézin, E., Itzykson, C., Zinn-Justin, J., Zuber, J.B.; Phys. Lett. **82B**(1979)442.
- [93] Mackay, N.J.; Phys. Lett. **B281**(1992)90; erratum, *ibid.* **B308**(1993)444.
- [94] Buchholtz, D., Lopuzanski, J.T.; Lett. Math. Phys. **3**(1979)175.
- [95] Lüscher, M., Pohlmeyer, K.; Nucl. Phys. **B137**(1978)46.
- [96] Saltini, L.E., Zadra, A.; Int. J. Mod. Phys. **A12**(1997)419.
- [97] Saltini, L.E., Zadra, A.; CRM-preprint/97 (ainda não publicado).
- [98] Mussardo, G.; Phys. Rep. **218**(1992)215.
- [99] Abdalla, E., Abdalla, M.C.B., Sotkov, G., Stanishkov, M.; Int. J. Mod. Phys. **A10**(1995)1717.
- [100] Dolan, L., Phys. Rev. Lett. **47**(1981)1371.
Gomes, M., Ha, Y.K.; Phys. Rev. **D28**(1983)2683.
Mackay, N.J.; "On the bootstrap structure of Yangian-invariant factorized S -matrices", em "Proc. Differential Geometric Methods in Theoretical Physics" (Tianjin, 1992), p.360.
Schoutens, K.; Phys. Lett. **B331**(1994)335.
Basu-Mallick, B., Radamevi, P.; "Construction of Yangian algebra through a multi-deformation parameter dependent R matrix", IMSC-94-38 preprint.
Forger, M., Laartz, J., Schäper, U.; Commun. Math. Phys. **146**(1992)397.
- [101] Abdalla, E., Forger, M.; Mod. Phys. Lett. **A7**(1992)2437.
- [102] Saltini, L.E.; "The algebras of higher order currents of the Fermionic Gross-Neveu model", "Proceedings" da VIII Escola de Verão J.A. Swieca, Rio de Janeiro, 1995.
- [103] Abdalla, E., Abdalla, M.C.B., Brunelli, J.C., Zadra, A.; Commun. Math. Phys. **166**(1994)379.
- [104] Drinfel'd, V.G.; "Proceedings of the International Congress of Mathematicians", Berkeley, California, USA, 1986.

- [105] Yang, C.N.; Phys. Rev. Letters, **19** (1967), 1312-1314.
- [106] Brunelli, J.C., Das, A.; Phys. Lett. **B354**(1995) 307.
- [107] Curtright, T.L., Zachos, C.K.; Phys. Rev. **D21**(1980)411.
 Barcelos-Neto, J., Das, A., Maharana, J., Z. Phys. **C30**(1986)401.
- [108] Curtright, T.L., Zachos, C.K.; Nucl. Phys. **B402**(1993)604.
- [109] Abdalla, E., Abdalla, M.C.B., Branco, O.H.G., Saltini, L.E.; J. Phys. **A27** (1994) 4709.
- [110] Dirac, P.A.M.; "Lectures on Quantum Mechanics", Belfer Graduate School of Science, Yeshiva Univ., 1964.
 Dirac, P.A.M.; Can. J. Math, **2** (1950) 120; Proc. Roy. Soc. **1246** (1958) 326.
 Hanson, A., Regge, T., Teitelboim; C. Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, 1976.
 Sudarshan, E., Mukunda, N.; "Classical Dynamics: A Modern Perspective", Wiley N.Y., 1974.
 Sundermeyer, K; "Constrained Systems", Lecture Notes in Physics **169**, Springer, 1982.
- [111] Bouwknegt, P., Ludwig, A.W.W., Schoutens, K.; hep-th/9412199.
- [112] Ahn, C., Nam, S.; Phys. Lett. **B378** (1996) 107.
- [113] Bouwknegt, P., Schoutens, K.; Nucl. Phys. **B482** (1996) 345.
- [114] Bernard, D., Maassarani, Z., Mathieu, P.; Mod. Phys. Lett. **A12** (1997) 535.
- [115] Gelfand, I.M., Chilov, G.E.; "Les Distributions", Ed. Dunod, Paris, 1962.
- [116] Treiman, S.B., Jackiw, R., Gross, D.J.; "Field Theoretic Investigations in Current Algebra", in "Lectures on Current Algebra and Its Applications". Princeton U.P., NJ, 1972.