UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

Métodos e Aplicações da Dinâmica de Subsistemas Quânticos

Tese apresentada ao Instituto
de Física da Universidade de São Paulo
para a obtenção do título de
Doutor em Ciências.

Karen Milena Fonseca Romero

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ex. 1
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
2765
INSTITUTO DE FÍSICA

Comissão Examinadora:
Profa. Dra. Maria Carolina Nemes - UFMG (Orientadora) M. C. Nemes
Prof. Dr. Amir Caldeira - UNICAMP
Prof. Dr. Carlos Yokoi - IFUSP
Prof. Dr. Nicim Zagury - UFRJ
Prof. Dr. Walter Wreszinski - IFUSP

Sylvio Canuto
Prof. Sylvio Roberto Accioly Canuto
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

SÃO PAULO - BRASIL
MARÇO - 1998

SBI-IFUSP
305M810T2765

R763m
D
ex.1

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Fonseca Romero, Karen Milena
Métodos e Aplicações da Dinâmica de Subsistemas Quânticos.
São Paulo, 1997.

Tese (Doutoramento) Universidade de São Paulo.
Instituto de Física - Departamento de Física Matemática

Área de Concentração: Física das Partículas Elementares
Orientador: Profa. Dra. Maria Carolina Nemes

Unitermos: 1. Decoerência; 2. Dinâmica de Subsistemas
Quânticos; 3. Aproximações; 4. Dissipação Quântica.

USP/IF/SBI - 78/97

A Noé y a Sollange

Agradecimentos

- Ao meu pai e à minha irmã pelo incentivo constante e o amor incondicional.
- À Profa. Dra. Maria Carolina Nemes, por me dar a chance de cumprir um sonho, por incentivarme e apoiarme e por servir de ponte com outras pessoas maravilhosas, e sem a qual este trabalho não teria sido possível.
- A todas as pessoas com as que tive o prazer de colaborar, embora nem sempre tenhamos terminado o trabalho, em especial aos Profs. Teresa Thomaz, Kyoko Furuya, A. F. R. de Toledo Piza, Henrique Borges, Nicim Zagury e Luiz Davidovich, e aos colegas Andréa, Sonia, Ji e Zé Geraldo.
- Aos colegas do grupo de subsistemas quânticos, Andréa, Sonia, Ji, Wagner, Zé Geraldo, Alexandre e Marcelo.
- Aos amigos de ontem e/ou de hoje, Andréa, Sonia, Marcelo, Wagner, Ji, Aparecida, Tony, Amauri, Diego, Jorge, Juan Carlos, Sonia e Rosario.
- Aos amigos, colegas e funcionários do Departamento de Física da UFMG pelas facilidades físicas e espirituais que me brindaram.
- A todas as pessoas que me tem dado uma mão, especialmente àquelas que não conheço.
- Ao CNPq pelo auxílio financeiro.

Abstract

Several models describing the interaction between two quantum systems are examined. The exact solution of two of them is found and the relation between the bath's spectral properties and decoherence is shown. Using these results and several others, we analyze the use of both Lindbland–form and Born–Markov liouvillians. New approximation schemes, apropriate for short times and small subsystems, are proposed and tested (using the above mentioned exact models). Applications are made to the treatment of organic salts, to the analysis of a recently reported experiment of production of cat states and observation of its subsequent decoherence, and to the understanding of the Ramsey zones, peripherically used in this experience.

Resumen

Examinamos varios modelos que describen la interacción entre dos sistemas cuánticos. Encontramos la solución exata de dos de ellos y mostramos la relación entre las propiedades espectrales del baño y la decoerencia. Usando estos resultados y algunos otros, analizamos el uso de liouvillianos con la forma estructural de Lindbland y aquellos provenientes de la aproximación de Born–Markov. Proponemos nuevos esquemas de aproximación, apropiados para tiempos cortos y pequeños subsistemas, y los ponemos a prueba con los modelos exactos mencionados arriba. Las aplicaciones que desarrollamos incluyen el tratamiento de sales orgánicas de transferencia de carga, el análisis de un experimento recientemente reportado de producción de estados de gatos y observación de su decoerencia, y el entendimiento de las zonas de Ramsey, usadas de manera periférica en este experimento.

Resumo

Tratamos vários modelos que descrevem a interação entre dois subsistemas quânticos. Mostramos que dois deles são exatamente solúveis, achamos as soluções correspondentes e mostramos a relação das propriedades espectrais do banho com a decoerência. Fazemos uma análise crítica do uso de liouvillianos com forma de Lindblad e de liouvillianos obtidos através da aproximação de Born–Markov, empregando entre outras coisas os resultados dos modelos exatos. Propomos novos esquemas de aproximação que descrevem com exatidão o regime de tempos curtos e o acoplamento de dois sistemas "pequenos", e os testamos com os modelos exatamente solúveis antes discutidos. Fazemos aplicações aos sais orgânicos de transferência de carga, a um experimento de produção de gatos e da observação de sua decoerência subsequente e às zonas de Ramsey empregadas perifericamente nesta experiência.

Índice

Índice 1

Lista de Tabelas 3

Lista de Figuras 4

1 Introdução 5

2 Sobre o conteúdo físico das equações mestras na forma de Lindblad 9

3 Decoerência Quântica sem Dissipação 15

4 Descrição exata da Decoerência em Cavidades Ópticas 23
- 4.1 Introdução . . . 23
- 4.2 Descrição Exata da Dinâmica Reduzida: A Função de Wigner . . . 24
- 4.3 Exemplos Ilustrativos . . . 29
- 4.4 Discussão . . . 33

5 Decoerência e Dissipação: Aproximações Perturbativa e de Weisskopf–Wigner Dependente do Tempo 34
- 5.1 Introdução . . . 34
- 5.2 A "Regra Áurea" para Decoerência e Dissipação . . . 35
  - 5.2.1 Osciladores Harmônicos Acoplados . . . 36
- 5.3 O Ansatz de Weisskopf–Wigner Dependente do Tempo . . . 38
  - 5.3.1 Modelo Exatamente Solúvel . . . 41
  - 5.3.2 Osciladores Harmônicos Acoplados . . . 41

6 Transição Dinâmica Pré–Cinética nas Propriedades de Decoerência de um Sistema Acoplado a um Reservatório 48

7 Dinâmica Eletrônica Efetiva em Sais Orgânicos de Transferência de Carga 53

8 Decoerência de Estados Mesoscópicos de Campos em Cavidades 58

9 Decoerência Atômica em uma Zona de Ramsey Fria 66

10 Conclusões 72

Bibliografia 74

Lista de Tabelas

3.1 Coeficiente de Renormalização. 21
3.2 Coeficiente de Decoerência para $T = 0$. 21
3.3 Coeficiente de Decoerência para $T > 0$. 21
3.4 Coeficientes de Renormalização e Decoerência na BMA 22

6.1 Comportamento assintótico dos coeficientes de decoerência. 51

Lista de Figuras

5.1 Energia do Oscilador Principal. c=0.1 45
5.2 Energia do Oscilador Principal. c=0.1 45
5.3 Energia do Oscilador Principal. c=0.5 46
5.4 Energia do Oscilador Principal. c=0.5 46
5.5 Decoerência: Gato Ímpar. c=0.1 47
5.6 Decoerência: Gato Ímpar. c=0.5 47

6.1 Coeficiente de Decoerência: Ambiente Óhmico 52

Capítulo 1

Introdução

O século que viu nascer a Mecânica Quântica está terminando, mas não as discussões, divergências e dúvidas sobre algumas questões fundamentais (e outras, que não sendo fundamentais, estão ligadas com estas ou são de grande interesse), entre as quais o problema da interpretação da teoria(Copenhagen[6, 64, 44], Wigner [86], muitos mundos[26, 85, 23], histórias consistentes [35]), o processo de medição, os saltos quânticos (*quantum jumps*), a microcausalidade, o paradoxo EPR, a classicidade do mundo ao nosso redor, a transição do quântico para o clássico e a irreversibilidade. Algumas discussões estão sendo dirimidas e experimentos que antes só existiam na esfera do hipotético sob a forma de *Gedankenexperiments* estão sendo realizados.

Um dos fatos que vem ficando claro, é a necessidade de tratarmos tanto o sistema sob estudo como o seu ambiente (em particular os aparelhos de medida que estejam sendo usados) dentro da teoria quântica. Muitas vezes isto é impraticável, mas há ocasiões em que não só é possível (empregando esquemas de aproximação), mas também, desejável. Isto dá lugar ao que é o tema geral deste trabalho: o estudo da dinâmica de subsistemas quânticos.

Uma das situações que exigem alguma forma de incorporação do meio externo é aquela em que o sistema sob estudo troca energia com aquele, dando lugar a fenômenos de dissipação e de decoerência. A dita incorporação do meio externo se faz de diversas maneiras, dentre as quais a modificação *ad hoc* das regras de quantização (duplicação dos graus de liberdade, complexifição [21]), o emprego de Hamiltonianos dependentes do tempo [18, 51], de equações de Schrödinger não lineares [53] e a formulação de equações de Langevin quânticas [5].

Aqui sempre vamos supor que o nosso universo é composto por dois (ou até três) subsistemas. Com frequência um dos subsistemas é um reservatório. Enfatizamos dois aspectos: análise de modelos exatamente solúveis e tratamentos aproximados. Em particular nos interessamos pelo comportamento de tempos curtos, que às vezes é o relevante, por exemplo quando queremos discutir fenômenos como a decoerência. Examinamos criticamente a formulação em termos de semigrupos dinâmicos[3] e da aproximação markoviana.

O presente trabalho contém dois tipos de contribuição. A primera, de carácter formal, refere–se ao exame de modelos exatamente solúveis e à construção de aproximações alternativas às existentes para o estudo da dissipação e da decoerência de subsistemas quânticos.

Do ponto de vista estritamente matemático, a teoria dos semigrupos dinâmicos e o teorema estrutural de Lindblad são hoje as ferramentas mais poderosas de que dispomos para tratar a dinâmica quântica de sistemas abertos. Em particular a hermiticidade, a positividade e a conservação do traço da densidade reduzida são garantidas a priori. Entretanto, nem sempre as equações dinâmicas de tipo Lindblad conduzem a resultados fisicamente aceitáveis. Esta questão é abordada em detalhe no capítulo 2 deste trabalho, onde tratamos um liouvilliano com a forma de Lindblad, mas que produz crescimento ilimitado da energia. Ainda investigamos as origens microscópicas dessa dificuldade. Mostramos também, nesse mesmo contexto que sistemas que permitem uma solução exata para a dinâmica efetiva do subsistema de interesse *não* possuem a forma de Lindblad, através dos exemplos dos capítulos 3 e 4. Aqui também podemos incluir os resultados de Grabert [46] onde se mostra que em geral não existe um liouvilliano que descreva a dinâmica da densidade reduzida para estados iniciais sistema–reservatório arbitrários, e que as equações mestras *exatas*, no caso em que elas existem, não possuem a forma de Lindblad. Uma outra observação pertinente é que fenômenos de recoerência como os que podem acontecer com os modelos dos capítulos 3 e 4, explicitamente mostrados nos exemplos do capítulo 5, ou no modelo da ref. [67] são excluídos da formulação da teoria de semi–grupos dinâmicos.

Os modelos que admitem solução exata não somente servem de prova para os esquemas teóricos gerais existentes, mas são interessantes por si mesmos. O capítulo 3 discute a generalização de um modelo tratado pela primeira vez na Ref. [50]. Frisamos ali que ainda que os fenômenos de decoerência e dissipação estejam relacionados, eles são diferentes um do outro e podem existir separadamente. Nesse modelo vemos que as propriedades de decoerência para tempos longos dependem de maneira fundamental da função espectral, que contém a informação relevante sobre o banho térmico e a interação. Mostramos que a aproximação de Born–Markov é incapaz de reproduzir os diversos comportamentos de tempos longos. Mostramos ainda que a equação mestra *exata* possui uma forma que pode ser interpretada como sendo uma generalização da forma de Lindbland (o requerimento de coeficientes constantes positivos é excessivo). Notamos também a aparição de um termo unitário que não pudemos escrever na forma de um hamiltoniano (ainda que no caso que o operador densidade for o de um estado puro, dito termo possa ser escrito como um hamiltoniano não linear). Ainda vemos que o reservatório age como um aparelho de medida que recolhe informações acerca do estado inicial do sistema com tanta mais fiabilidade quanto menor a temperatura. O capítulo 4 mostra que o modelo de osciladores independentes [29, 17] na aproximação de onda girante (RWA) e a temperatura zero pode ser resolvido exatamente, mesmo que o "banho térmico" tenha um número finito de osciladores, ou até um único oscilador. Ainda mostramos que toda a dinâmica deste sistema se encontra condensada em duas funções reais dependentes do tempo. Calculamos a evolução temporal exata de varios operadores densidade iniciais, incluindo os estados coerentes generalizados, os estados comprimidos e estados tipo gato de Schrödinger. Mostramos que um estado coerente sempre permanece coerente.

Nos casos dos modelos exatamente solúveis, como é o modelo de Caldeira–Leggett [17], somente há uma década atrás os primeiros resultados exatos começaram a aparecer na literatura. Ainda no caso dos modelos que não são exatamente solúveis precisamos recorrer a

equações mestras aproximadas. Como em geral elas não possuem a forma canônica de Lindblad é necessário realizar um estudo caso a caso de suas propriedades, pois é possível que apresentem violação de algumas condições físicas, aquelas garantidas pela forma de Lindblad, ou outras como o princípio generalizado da incerteza. Com a necessidade de empregar equações mestras generalizadas coloca–se a questão de *como* são obtidas as equações mestras aproximadas. As hipóteses largamente utilizadas são as seguintes: a) tempos curtos (regime pré–cinético), referentes ao súbito estabelecimento de correlações quânticas não são corretamente descritos e a equação é válida no chamado regime cinético, b) o acoplamento deve ser fraco, c) o sistema que age como reservatório deve conter muitos graus de liberdade e d) a aproximação markoviana é válida, i.e., efeitos de memória não são importantes e a equação obtida é local no tempo e com coeficientes constantes.

Nossa contribuição, dentro deste contexto, foi propor esquemas de aproximação alternativos que deem uma descrição precisa da dinâmica de tempos curtos que, como veremos é o palco da dinâmica responsável pelo estabelecimento de correlações quânticas. As aproximações que propomos (ver capítulo 5) se assemelham em espírito à regra áurea e ao Ansatz de Weisskopf–Wigner para o cálculo de taxas de transição. Estas novas aproximações são boas no caso de acoplamento fraco e para sistemas pequenos e grandes. No caso das equações mestras markovianas uma hipótese importante é que um dos sistemas interagentes é "muito grande"; nas aproximações que propomos isto *não* é necessário. Mostramos também que as nossas aproximações são boas ainda no regime de acoplamentos fortes, embora somente para tempos curtos. A aproximação de Born–Markov foi ocasionalmente generalizada para a quarta ordem (a terceira ordem sendo nula), enquanto a dedução que apresentamos da regra áurea é facilmente generalizável para a ordem n e a aproximação de Weisskopf–Wigner é explicitamente deduzida para a n-ésima ordem.

O capítulo 6, que apresenta um outro esquema de aproximação válida para tempos cursos, a saber a expansão de Zassenhaus [79], além de ser uma aplicação da aproximação de Weisskopf–Wigner dependente do tempo do capítulo 5, mostra que, em sistemas acoplados com banhos térmicos com frequência de Debye muito maior do que as oscilações livres do sistema, no regime pre-cinético temos uma superposição do comportamento de decoerência característico de temperatura zero com aquele de temperatura finita. Para temperaturas suficientemente baixas é possível observar, pelo menos em princípio, uma mudança de comportamento, no tempo, da decoerência. Este capítulo mostra também que, pelo menos nas condições em que as aproximações empregadas são satisfeitas, a primeira coisa que um sistema acoplado a um reservatório faz é estabelecer correlações com o reservatório na base do operador do acoplamento.

O segundo tipo de contribuição do presente trabalho refere–se a aplicações à óptica quântica e ao estudo dos sais orgânicos de transferência de carga. O capítulo 7 discute a aplicação do modelo exatamente solúvel de cima no caso de sais orgânicos acoplados com fônons de comprimento de onda longo comparado com o tamanho do dímero. Obtemos o que se conhece como efeito de polaron pequeno. Discutimos um caso de uma condição inicial não fatorada: para tempos longos não podemos distinguir se o operador densidade total inicial era, ou não, fatorado. Contudo, é possível definir um operador conjugado àquele mediante

o qual o sistema de acopla com o banho térmico, e mostrar que a variança deste operador evolui no tempo de maneira diferente em um e outro caso.

Com respeito à óptica quântica fazemos um estudo e interpretação detalhados do experimento proposto em [19] e realizado recentemente [14] (ver capítulo 7), de produção de gatos de Schrödinger e observação de seu processo de decoerência. Mostramos que sob certas condições as medidas de probabilidade estão relacionadas com os autovalores, dando uma caracterização independente de base da decoerência. Mostramos também que mesmo no caso de gatos de fase, a evolução subsequente restringe–se a um subespaço bidimensional do espaço de Hilbert do modo da cavidade, sendo que o operador densidade evoluído pode ser encarado como uma mistura de dois gatos de fase diferentes. Talvez o resultado mais interessante desta análise seja a referente ao estudo de um aparelho periférico nesta medição: a zona de Ramsey. O formalismo por nós contruído no capítulo 5 nos permite compreender por que a zona de Ramsey se comporta classicamente embora os números quânticos envolvidos sejam pequenos.

O presente trabalho está organizado em capítulos essencialmente autocontidos. As técnicas por nós utilizadas que são parte integrante da literatura atual não foram revistas mais apenas citadas, em benefício da clareza e a objetividade. Entre as referências básicas com cujos conteúdos supomos que o leitor esteja familiarizado estão: sobre equações mestras [1, 31, 59, 83], sobre a aplicação dos semigrupos dinâmicos à dinâmica de subsistemas [3, 20], sobre grupos de Lie e seu uso na solução de equações para operadores densidade [7, 34, 65], sobre o uso de quase–probabilidades e equações de Fokker–Planck [16, 30, 74, 49] e sobre óptica quântica e estados coerentes [52, 83].

Capítulo 2

Sobre o conteúdo físico das equações mestras na forma de Lindblad

[1]

Até pouco tempo atrás a descrição quântica da perda de energia e da perda de coerência estava baseada nas aproximações markovianas à verdadeira dinâmica do subsistema de interesse. A solução exata a este problema é muito complicada, sendo, em geral não markoviana e não linear[63]. Neste contexto os resultados matemáticos rigorosos são escassos, de maneira que a formulação rigorosa para a introdução de dissipação de maneira aproximada, dentro da teoria dos semigrupos dinâmicos [20, 78, 56], constitui um grande avanço. Segundo a teoria axiomática de Lindblad [56, 57] a forma mais geral de um superoperador liouvilliano $\mathcal{L}$, limitado e completamente dissipativo, é a seguinte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{i\hbar}[H, \bullet] + \frac{1}{2\hbar}\sum_j([V_j\bullet, V_j^\dagger] + [V_j, \bullet V_j^\dagger]), \tag{2.1}$$

onde H é o hamiltoniano livre do sistema e os operadores $V_j, V_j^\dagger$ são operadores limitados no espaço de Hilbert do hamiltoniano. O aspecto mais interessante dos liouvillianos que podem ser escritos na forma de Lindblad é que tal forma estrutural preserva o traço, a positividade e a hermiticidade de qualquer operador densidade (hermitiano, positivo definido e de traço um) inicial. Se um dado liouvilliano não possuir a forma de Lindblad não existe nenhuma garantia de que estas propriedades sejam preservadas. Supondo que H é de segundo grau nos operadores momento p e posição x, $\mathcal{L}$ será solúvel se os operadores V_j são de primeiro grau nesses mesmos operadores [42], i.e.,

$$V_j = a_j p + b_j x. \tag{2.2}$$

Observe que os operadores p e x são não limitados: na ausência de resultados rigorosos para operadores não limitados, é geralmente suposto que o resultado obtido para operadores limitados pode ser extrapolado.

[1] Uma versão ligeiramente diferente deste capítulo foi aceita para publicação no Phys. Scripta.

Em seguida consideramos o seguinte caso especial

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}. \tag{2.3}$$

$$V_j = \sqrt{4\kappa(\bar{n}+j)m\omega}\, x \quad \text{se j} = 0, 1, \quad V_j = 0 \quad \text{se j} \geq 2. \tag{2.4}$$

Nas equações acima κ denota o coeficiente de dissipação, e $\bar{n}$ é o número médio de fótons do reservatório que produz a dissipação, m é a massa do oscilador e ω sua frequência. O funcional característico, definido por

$$C(\nu, \nu^*, t) = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{e}^{\nu a^\dagger}\mathrm{e}^{-\nu^* a}\mathrm{e}^{\mathcal{L}t}\rho(0)\right),$$

pode ser calculado analiticamente. O resultado é

$$C(\nu, \nu^*, t) = \mathrm{e}^{\phi(\nu,\nu^*,t)}\ \mathrm{Tr}\left(\exp(\nu a^\dagger \mathrm{e}^{i\omega t})\exp(-\nu^* a \mathrm{e}^{-i\omega t})\rho(0)\right), \tag{2.5}$$

$$\phi(\nu, \nu^*, t) = \kappa(2\bar{n}+1)\left(-2t\nu\nu^* + \frac{1}{2i\omega}\left[(1-\mathrm{e}^{2i\omega t})\nu^2 - (1-\mathrm{e}^{-2i\omega t})\nu^{*2}\right]\right). \tag{2.6}$$

Desta expressão é fácil calcular as médias de vários observáveis. Por exemplo, a energia média do oscilador e as variâncias de posição e momento são dadas por

$$\langle a^\dagger a\rangle(t) = -\left.\frac{\partial^2 C}{\partial\nu\partial\nu^*}\right|_{\nu=\nu^*=0} = \langle a^\dagger a\rangle(0) + kt, \tag{2.7}$$

$$\sigma_x^2(t) = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(1 + k\left[2t - \frac{\sin(2\omega t)}{\omega}\right] + \mathrm{e}^{-2i\omega t}\sigma_a^2(0) + \mathrm{e}^{2i\omega t}\sigma_{a^\dagger}^2(0) + 2\sigma_{a^\dagger a}^2(0)\right), \tag{2.8}$$

$$\sigma_p^2(t) = \frac{\hbar m\omega}{2}\left(1 + k\left[2t + \frac{\sin(2\omega t)}{\omega}\right] - \mathrm{e}^{-2i\omega t}\sigma_a^2(0) - \mathrm{e}^{2i\omega t}\sigma_{a^\dagger}^2(0) + 2\sigma_{a^\dagger a}^2(0)\right), \tag{2.9}$$

onde $k = 2\kappa(2\bar{n}+1)$, $\sigma_A^2 = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2$, $A = p, x, a, a^\dagger$; $\sigma_{a^\dagger a}^2 = \langle a^\dagger a\rangle - \langle a^\dagger\rangle\langle a\rangle$. Observemos que, ainda que todas as condições matemáticas necessárias para a validez da teoria de Lindblad são satisfeitas, estes resultados são fisicamente inaceitáveis, pois preveem que a energia cresce sem limite com o tempo (Eq. (2.7)). Contudo, se tivessemos considerado um liouvilliano do tipo onda girante (RWA),

$$V_0 = \sqrt{2\hbar\kappa(\bar{n})}\, a^\dagger \quad V_1 = \sqrt{2\hbar\kappa(\bar{n}+1)}\, a \quad V_j = 0 \quad \text{se j} \geq 2, \tag{2.10}$$

e o mesmo hamiltoniano livre teríamos obtido os seguintes resultados fisicamente razoáveis

$$\langle a^\dagger a\rangle(t) = \langle a^\dagger a\rangle(0)\mathrm{e}^{-2\kappa t} + \bar{n}(1-\mathrm{e}^{-2\kappa t}), \tag{2.11}$$

$$\sigma_x^2(t) = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(k/\kappa + \mathrm{e}^{-2\kappa t}\left[2\sigma_{a^\dagger a}^2(0) - 2\bar{n} + \mathrm{e}^{-2i\omega t}\sigma_a^2(0) + \mathrm{e}^{2i\omega t}\sigma_{a^\dagger}^2(0)\right]\right). \tag{2.12}$$

$$\sigma_p^2(t) = \frac{\hbar m\omega}{2}\left(k/\kappa + \mathrm{e}^{-2\kappa t}\left[2\sigma_{a^\dagger a}^2(0) - 2\bar{n} - \mathrm{e}^{-2i\omega t}\sigma_a^2(0) - \mathrm{e}^{2i\omega t}\sigma_{a^\dagger}^2(0)\right]\right). \tag{2.13}$$

A raiz do problema é de origem física: depende das aproximações feitas para deduzir um liouvilliano da forma (2.1). Como veremos, tal aproximação não é físicamente razoável se o operador no hamiltoniano de interação (último termo da equação (2.14)) for x ou p, mas é muito razoável se o operador for a ou $a^\dagger$. A mesma argumentação é válida para sistemas de spin trocando x por σ_x e a por σ_-.

Para mostramos que isto é assim efetivamente definimos nosso sistema como sendo composto de dois subsistemas, um, o de interesse, sendo um oscilador harmônico e o outro um conjunto de osciladores harmônicos à temperatura T. O hamiltoniano que descreve o sistema é

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega x^2}{2} + \sum_j \left(\frac{p_j^2}{2m_j} + \frac{m_j \omega_j x_j^2}{2} \right) + x \sum_j c_j x_j, \tag{2.14}$$

onde c_j são constantes de acoplamento. A equação que governa a dinâmica do oscilador de interesse na aproximação de Born e na imagem de interação (sinalizada pelo til) é bem conhecida [59][2]; ela é dada pela equação

$$\frac{d\tilde{\rho}}{dt} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t d\tau \, K(t,\tau), \tag{2.15}$$

com

$$K(t,\tau) = \mathrm{Tr_R}[\tilde{H}_I(t), [\tilde{H}_I(\tau), \tilde{\rho}(\tau)\rho_\mathrm{R}(0)]] \tag{2.16}$$

onde $\mathrm{Tr_R}$ indica o traço sobre as variáveis do reservatório e $\rho_R(0)$ é a distribuição canônica de equilíbrio a temperatura T para o banho de osciladores. Agora,

$$K(t,\tau) = \langle t\tau \rangle \tilde{x}(t)\tilde{x}(\tau)\tilde{\rho}(\tau) - \langle t\tau \rangle \tilde{x}(\tau)\tilde{\rho}(\tau)\tilde{x}(t) - \langle \tau t \rangle \tilde{x}(t)\tilde{\rho}(\tau)\tilde{x}(\tau) + \langle \tau t \rangle \tilde{\rho}(\tau)\tilde{x}(\tau)\tilde{x}(t), \tag{2.17}$$

onde

$$\langle t\tau \rangle = \sum_{jk} \mathrm{Tr_R} \tilde{x}_j(t)\tilde{x}_k(\tau) c_j c_k \rho_\mathrm{R}(0). \tag{2.18}$$

Podemos verificar que a Eq. (2.1) pode ser obtida se, neste ponto realizamos a aproximação markoviana

$$\tilde{x}(\tau) \approx x(0), \qquad \tilde{\rho}(\tau) \approx \tilde{\rho}(t). \tag{2.19}$$

Observemos porém que a equação

$$\tilde{x}(\tau) = x(0)\cos(\omega t) + \frac{p(0)}{m\omega}\sin(\omega t) \tag{2.20}$$

[2]Ver p.ex. a ref. [68] onde é apresentada a equação de Nakajima-Zwanzig. O uso do operador de projeção $\mathcal{P} = \rho_R(0)\mathrm{Tr}_R$. da condição inicial fatorada $\rho_T(0) = \rho_R(0) \otimes \rho(0)$ e de uma interação com média zero, leva a

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \mathcal{L}\rho(t) + \mathrm{Tr}_R \left(\mathcal{L}_I \int_0^t \exp((t-\tau)(1-\mathcal{P})\mathcal{L}_T(1-\mathcal{P}))\mathcal{L}_I \rho_R(0)\rho_S(\tau)d\tau \right)$$

onde $i\hbar\mathcal{L}_T = [H, \bullet]$. $i\hbar\mathcal{L}_I = [H_I, \bullet]$. Se $\mathcal{L}_T$ no integrando desta equação é trocado por $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_T - \mathcal{L}_I$ obtemos a denominada *aproximação de Born*.

mostra que a aproximação markoviana (2.19) acima é equivalente a descartarmos o termo em $p(0)$. Este termo, quando mantido, origina efeitos dissipativos, i. e.,

$$\frac{d\tilde{\rho}}{dt} = -\int_0^t d\tau \phi_S(\tau)[\tilde{x}(t),[\tilde{x}(t-\tau),\tilde{\rho}(t-\tau)]] + \int_0^t d\tau \phi_A(\tau)[\tilde{x}(t),\{\tilde{x}(t-\tau),\tilde{\rho}(t-\tau)\}], \quad (2.21)$$

onde as funções de correlação simétrica e antissimétrica ($\phi_S(t)$ e $\phi_A(t)$) são dadas por

$$\phi_S(t) = \sum_j \left(\frac{c_j^2}{\hbar^2 m_j \omega_j^2}\right) \frac{\hbar\omega_j}{2} \coth(\frac{\hbar\omega_j}{2k_BT}) \cos(\omega_j t), \quad (2.22)$$

$$\phi_A(t) = -i\sum_j \left(\frac{c_j^2}{\hbar^2 m_j \omega_j^2}\right) \frac{\hbar\omega_j}{2} \sin(\omega_j t). \quad (2.23)$$

O termo antissimétrico da Eq. (2.21) é responsável por uma correção unitária e o termo de dissipação na representação de Wigner e o termo simétrico é responsável pela difusão. Para substanciarmos essas afirmações apresentaremos como exemplo o termo que leva a dissipação. Se não realizamos uma aproximação markoviana tão forte como a da Eq. (2.19), mas levamos em consideração os termos de valor principal que aparecem quando o limite superior das integrais t é levado para infinito, então do termo antissimétrico vamos ter duas contribuições, uma das quais tem a forma

$$-ik_D[x,\{p,\rho\}]. \quad (2.24)$$

Projetando esta contribuição na representação de cordenadas temos

$$-ik_D\langle z|[x,\{p,\rho\}]|y\rangle = -k(z-y)(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y})\rho(z,x,t). \quad (2.25)$$

Multiplicando por $\exp(iup/\hbar)$, fazendo $z = q - (u/2)$ e $y = q + (u/2)$ e integrando em u sobre todo o eixo real obtemos

$$-k_D\int_{-\infty}^{\infty} du\, u\frac{\partial}{\partial u}\rho(q-u/2,q+u/2.t)e^{iup/\hbar} = i\hbar k_D\int_{-\infty}^{\infty} du\,\frac{\partial}{\partial p}\rho(q-u/2,q+u/2,t)e^{iup/\hbar}, \quad (2.26)$$

que depois de uma integração por partes, o emprego do fato de que o ρ decai rapidamente para grandes valores de u e o uso da definição da função de Wigner,

$$W(p,q,t) = \int_{-\infty}^{\infty} du\rho(q-u/2,q+u/2,t)e^{iup/\hbar}, \quad (2.27)$$

fica com a seguinte forma

$$k\frac{\partial}{\partial p}\left(pW(p,q,t)\right). \quad (2.28)$$

A equação dinâmica completa para a função de Wigner no caso em que são empregados os termos de parte principal é

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{d}{dq}\left(-\frac{p}{m}W\right) + \frac{\partial}{\partial p}\left((m\omega_R^2 q + k_D p)W\right) + D_{pp}\frac{\partial^2}{\partial p^2}W + D_{pq}\frac{\partial^2}{\partial p\partial q}W, \quad (2.29)$$

onde ω_R, D_{pp} e D_{pq} são constantes, sendo que $\omega_R = \omega + \delta\omega$ com $\delta\omega$ provindo da contribuição unitária acima aludida. Esta é uma equação do tipo Fokker–Planck extensivamente estudada, tanto do ponto de vista dos processos estocásticos clássicos quanto do ponto de vista dos processos quânticos que estamos estudando aqui [2, 30, 74]. Os termos das segundas derivadas parciais são termos difusivos e os termos com derivada em p e multiplicação em q (ou viceversa) provém da parte hamiltoniana e produzem um movimento oscilatório. Já o termo com multiplicação em p e derivação em p é um termo que produz dissipação. Assim, se pensarmos na função de Wigner como um pacote mais ou menos concentrado em x e p, veremos que os termos difusivos tendem a fazer com que ele se extenda, os termos hamiltonianos fazem ele oscilar e o termo dissipativo amortece dita oscilação e evita uma difusão descontrolada, produzindo um limite de difusão máxima.

Para efeitos de comparação mostramos as equações dinâmicas para a função de Wigner no primeiro caso analisado (interação posição com aproximação de Born–Markov dada por (2.19)),

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{d}{dq}\left(-\frac{p}{m}W\right) + \frac{\partial}{\partial p}\left(m\omega_R^2 qW\right) + 2\hbar m\omega\kappa(2\bar{n}+1)\frac{\partial^2}{\partial p^2}W, \tag{2.30}$$

evidentemente sem termo dissipativo, e no segundo caso analisado (interação tipo onda girante),

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial t} &= \frac{d}{dq}\left((-\frac{p}{m}+\kappa q)W\right) + \frac{\partial}{\partial p}\left((m\omega_R^2 q - \kappa p)W\right) \\ &\quad +2\hbar m\omega\kappa(2\bar{n}+1)\frac{\partial^2}{\partial p^2}W + \frac{2\hbar\kappa(2\bar{n}+1)}{m\omega}\frac{\partial^2}{\partial q^2}W,\end{aligned} \tag{2.31}$$

Observemos que no caso em que o hamiltoniano é do tipo onda girante,

$$H_I = \sum_j c_j(ab_j^\dagger + a^\dagger b_j), \tag{2.32}$$

o problema de realizar a mesma aproximação discutida anteriormente é menos perigosa, porque nem a nem $a^\dagger$ geram um operador diferente, mas

$$\tilde{a}(t) = a(0)\mathrm{e}^{-i\omega t}, \qquad \tilde{a^\dagger}(t) = a^\dagger(0)\mathrm{e}^{i\omega t}. \tag{2.33}$$

Neste caso, as aproximações necessárias para obter uma equação do tipo Lindblad também são fisicamente razoáveis, como também o é a equação dinâmica para a função de Wigner.

Concluímos que, ainda que a teoria dos semigrupos dinâmicos seja geral e sensata matematicamente, ela leva a resultados fisicamente razoáveis somente quando o hamiltoniano de interação é do tipo onda girante. Quando tratamos com outros tipos de interação, em geral, temos de abrir mão da teoria dos semigrupos dinâmicos. Em alguns casos, porém, uma pequena generalização da forma de Lindblad, permitindo coeficientes dependentes do tempo (e que podem ser localmente negativos!), pode ser suficiente. Exemplos concretos da validade desta afirmação encontram-se nos capítulos 3 e 7. Dado que foram achadas equações mestras *exatas* que não são da forma de Lindblad [39, 4, 37], podemos afirmar que a forma

de Lindbland *não* é uma forma estrutural nem necessária nem suficiente para a descrição de subsistemas quânticos. Ainda, nos casos em que a interação não é do tipo onda girante e temos que empregar equações mestras que não são do tipo Lindblad, deve ser realizada uma investigação sobre aspectos tais como a conservação da positividade do operador densidade. Em alguns casos foi mostrado que com o objetivo de evitar comportamentos patológicos do operador densidade, por exemplo a violação do princípio da incerteza generalizada ou a não positividade do operador densidade, é necessário limitar o conjunto de condições iniciais aceitáveis [22, 68].

Capítulo 3

Decoerência Quântica sem Dissipação

[1]

A descrição de um grupo seleto de observáveis de um sistema quântico dado tem se tornado um importante tópico de pesquisa em diferentes áreas da física, tais como a cosmologia [32, 33, 58], óptica quântica [81, 31], matéria condensada [17], física de partículas [25] e os fundamentos do processo quântico da medição [87]. O problema pode ser posto de maneira bastante geral considerando vários subsistemas interagentes e deduzindo a dinâmica efetiva do sistema de interesse. A dinâmica efetiva exata de um subsistema quântico, parte de um sistema isolado foi deduzida em [63]. Foi mostrado que a dita dinâmica é, em geral, não linear e não markoviana. Do ponto de vista estritamente formal vemos que os efeitos das correlações quânticas na dinâmica efetiva do sistema de interesse são de dois tipos: as de tipo unitário, que dão origem a correções dependentes do tempo à dinâmica efetiva de campo médio, e a correções de tipo não unitário que provocam efeitos dissipativos e de decoerência. Estes dois efeitos, decoerência e dissipação, ainda que tendo a mesma origem física, são fenômenos muito diferentes, como é discutido por exemplo nas referências [67, 88, 9, 82]. Dado o caráter altamente intrincado e complexo da evolução dinâmica exata dos subsistemas quânticos, e a falta de resultados matemáticos rigorosos acerca do comportamento dela, usualmente se postula uma dinâmica baseada na teoria dos semigrupos dinâmicos para investigar o problema. Recentemente a validade de tais hipóteses foi investigada na literatura [50].

O propósito desta contribuição tem o mesmo espírito da referência [50]. Montamos o modelo mais geral que descreve um sistema de interesse S caracterizado por um operador hermitiano genérico $\hat{A}$, interagindo com um reservatório de osciladores harmônicos. Supomos que a interação é uma função de $\hat{A}$ de maneira que a parte livre da dinâmica do sistema S comute com o hamiltoniano total. Uma consequência imediata desta suposição é que não haverá processo dissipativo na dinâmica, ainda que, como veremos, o processo de decoerência está presente. Neste capítulo não investigamos em detalhe a validade das suposições da teoria dos semigrupos dinâmicos, isto já foi feito em outros trabalhos [50] e no capítulo 2; aqui focalizamos a *física* do processo de decoerência neste modelo exatamente solúvel. Também investigamos quanto desta física estaria ausente caso façamos a aproximação markoviana. O

[1] Uma versão ligeiramente diferente deste capítulo foi aceita para publicação no Phys. Lett. A.

primeiro efeito interessante que encontramos é que as propriedades do processo de decoerência para tempos curtos e tempos longos estão intimamente relacionadas com a distribuição de frequências da função de densidade espectral, que definimos mais abaixo. Podemos ter decoerência parcial ou total, com comportamento assintótico diferente nos regimes superóhmico, óhmico ou subóhmico, sendo exponencial somente no caso óhmico a temperatura finita. Ainda, encontramos que o limite de temperatura zero é qualitativamente diferente do caso de temperatura finita. A aproximação de Born–Markov usual é incapaz de prever decoerência parcial. Para temperatura finita, no caso desta aproximação a decoerência é instantânea (no regime subóhmico), exponencial (no regime óhmico) ou zero (no regime superóhmico). À temperatura zero a aproximação de Born–Markov sempre prediz decoerência zero. O comportamento do defeito de idempotência [47, 89] é muito diferente. Os cálculos exatos concordam com a expansão para tempos curtos da ref. [47], i.e., é proporcional a t^2 (desvios deste comportamento geral são encontrados somente a temperatura zero para densidades espectrais do banho com decaimento lento (para zero) nas altas frequências. No caso markoviano, quando existe decoerência, i.e., o caso markoviano a temperatura finita, o comportamento de tempos curtos, é linear no tempo.
O hamiltoniano que consideramos, dado por

$$H = h(A) + \hbar f(A) \sum c_i(a_i^\dagger + a_i) + \hbar g(A) \sum i d_i(a_i^\dagger - a_i) + \hbar \sum \omega_i a_i^\dagger a_i, \qquad (3.1)$$

descreve a interação de um sistema S, com hamiltoniano livre $h(A)$, com um conjunto de osciladores harmônicos, através de uma interação que conserva o observável A do sistema S. Os operadores de criação e aniquilação $a_i^\dagger$ e a_i satisfazem as regras de comutação bosônicas usuais. Espera–se que hamiltonianos do tipo considerado sejam aproximadamente válidos quando o tempo característico de decoerência do sistema S seja muito menor que o tempo de relaxação térmica. É sabido que hamiltonianos do tipo aqui proposto são os modelos mais simples que satisfazem as condições de um aparelho de medida quântica não demolidora, com os osciladores no papel do aparelho de medida [8].
Suponhamos um operador densidade total inicial fatorado

$$\rho(t=0) = \rho_S(t=0)\rho_B(t=0) = \sum |m\rangle \rho_S^{mn} \prod \frac{e^{-\beta\hbar\omega_i a_i^\dagger a_i}}{Tr e^{-\beta\hbar\omega_i a_i^\dagger a_i}} \langle n|, \qquad (3.2)$$

onde o operador densidade do sistema ρ_S foi escrito em termos de um conjunto completo de autovetores $|m\rangle$ de A, com autovalores A_m, e o conjunto de osciladores, com operador densidade ρ_B, é considerado em equilíbrio térmico à temperatura inversa β. Empregando técnicas de álgebra de Lie [59] podemos calcular o operador densidade total em um tempo posterior t

$$\rho(t) = e^{Ht/i\hbar}\rho(0)e^{-Ht/i\hbar} = \mathcal{U}(t)\,(\mathcal{V}(t)(\mathcal{D}(t)\rho_C(t)) \qquad (3.3)$$

onde $\mathcal{U}(t), \mathcal{V}(t).\mathcal{D}(t)$ e $\rho_C(t)$ são dados mais abaixo. Tomando o traço sobre os graus de liberdade do banho obtemos (notemos que os superoperadores $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{D}$ não dependem dos graus de liberdade do banho)

$$\rho_S(t) = \mathcal{U}(t)\,(\mathcal{V}(t)(\mathcal{D}(t)\rho_S(O))\,. \qquad (3.4)$$

A Eq. (3.4) e análise das expressões para $\mathcal{U}(t), \mathcal{V}(t)$ e $\mathcal{D}(t)$, que dependem somente do observável do sistema A, mostram que, do ponto de vista do sistema S, $\mathcal{U}$ é uma contribuição explicitamente hamiltoniana, $\mathcal{V}$ é uma contribuição unitária não explicitamente hamiltoniana e $\mathcal{D}$ é uma contribuição não unitária. $\mathcal{U}$ é dado por

$$\mathcal{U}(t) = e^{\frac{1}{i\hbar}\int_0^t d\tau [k(A;\tau),\bullet]}, \tag{3.5}$$

onde empregamos a convenção ponto usual [3]. O "hamiltoniano renormalizado" $k(A,t)$ é

$$k(A;t) = h(A) - f^2(A)R_f(t) - g^2(A)R_g(t), \tag{3.6}$$

$$R_f(t) = \hbar \sum \frac{c_i^2}{\omega_i}(1-\cos(\omega_i t)) \rightarrow \hbar \int_0^\infty d\omega D_f(\omega)(1-\cos(\omega t)). \tag{3.7}$$

A seta mostra a expressão obtida depois de ter tomado o limite do contínuo. A densidade espectral $D_f(\omega)$ contém o efeito do acoplamento $(c(\omega))$, da frequência (ω) e da densidade de osciladores $(n(\omega))$, $D_f(\omega) = c^2(\omega)n(\omega)/\omega$[67]. Substituindo $c_i(D_f(\omega))$ por $d_i(D_g(\omega))$ na expressão para $R_f(t)$ obtemos a expressão correspondente para $R_g(t)$. A mesma observação se aplica a outras quantidades abaixo definidas. Considerando somente hamiltonianos renormalizados limitados por baixo em todo tempo, devemos impor algumas restrições, tanto na forma funcional de f e g, e de $R(t)$, que depende das constantes de acoplamento e da densidade espectral do banho. Em particular, exigimos que $R(t)$ seja uma função limitada. Isto é fácil de implementar notando que R satisfaz a desigualdade $0 < R(t) < 2R(\infty)$ para $t > 0$. O superoperador $\mathcal{V}$ é dado por

$$\mathcal{V}(t) = e^{-2i\int_0^t d\tau m(\tau)(f(A)\bullet g(A) - g(A)\bullet f(A))} \tag{3.8}$$

$$m(t) = \sum \frac{c_i d_i}{\omega_i}\sin(\omega_i t) \rightarrow \int d\omega \sqrt{D_f(\omega)D_g(\omega)}\,\mathrm{sign}(c(\omega)d(\omega))\sin(\omega t). \tag{3.9}$$

Note que m satisfaz a desigualdade $|m(t)|^2 < R_f(\infty)R_g(\infty)$ e o limite $\lim_{t\uparrow\infty} m(t) = 0$.
Vale a pena frisar que $\mathcal{V}$
i) conserva o traço $Tr(\mathcal{V}(t)\rho) = Tr(\rho)$,
ii) não muda a hermiticidade do ρ, $(\mathcal{V}(t)\rho_0)^\dagger = \mathcal{V}(t)\rho_0$ sempre que $\rho_0^\dagger = \rho_0$, e
iii) conserva o grau de mistura, $Tr(\mathcal{V}\rho_0)^2 = Tr\rho_0^2$.
Consequentemente, seria possível acharmos um hamiltoniano K tal que $i\hbar\dot{\mathcal{V}} = [K, \mathcal{V}]$[56]. Porém, não achamos tal K no caso geral. Contudo, se ρ for um estado puro para todo tempo t, $\rho = |\psi_t\rangle\langle\psi_t|$, então $K = 2\hbar m(t)\{f\langle\psi_t|g|\psi_t\rangle - g\langle\psi_t|f|\psi_t\rangle\}$, um hamiltoniano não linear.
Ainda, para o superoperador não unitário $\mathcal{D}$ achamos

$$\mathcal{D} = e^{-\lambda_f(t)(f^2\bullet - 2f\bullet f + \bullet f^2) - \lambda_g(t)(g^2\bullet - 2g\bullet g + \bullet g^2)} \tag{3.10}$$

$$\lambda_f = \sum \frac{c_i^2(1-\cos(\omega_i t))\coth(\frac{\beta\hbar\omega_i}{2})}{\omega_i^2} \rightarrow \int \frac{d\omega D_f(\omega)(1-\cos(\omega t))\coth(\frac{\beta\hbar\omega}{2})}{\omega}. \tag{3.11}$$

Calculando o defeito de idempotência (ou entropia linear) achamos

$$\delta(t) = 1 - Tr\rho_S^2 = 1 - \sum |\rho_S^{mn}|^2 e^{-2\lambda_f(t)(f(A_m)-f(A_n))^2 - 2\lambda_g(t)(g(A_m)-g(A_n))^2}. \tag{3.12}$$

A Eq. (3.12) substancia a afirmação de que $\mathcal{D}$ é o único efeito não unitário e que produz decoerência. O coeficiente de decoerência λ pode ser dividido em duas partes, $\lambda_f(t) = \lambda_f^0(t) + \lambda_g^\beta(t)$, com

$$\lambda_f^0(t) = \int_0^\infty \frac{D_f(\omega)}{\omega}(1-\cos(\omega t))d\omega, \tag{3.13}$$

$$\lambda_f^\beta(t) = 2\int_0^\infty \frac{D_f(\omega)}{\omega}\frac{(1-\cos(\omega t))}{e^{\beta\hbar\omega}-1}d\omega, \tag{3.14}$$

onde a contribuição de temperatura zero foi isolada da contribuição de temperatura finita. Esta separação é importante, devido aos comportamentos qualitativamente diferentes (em particular, o comportamento das expressões nos integrandos, na vizinhança da origem $\omega = 0$, que é muito diferente. Note que λ satisfaz á desigualdade $0 < \lambda(t) < 2\lambda(\infty)$. λ^0 and λ^β satisfazem relações semelhantes.

Da positividade de $\lambda(t)$ segue a desigualdade $\delta(t) \leq \delta(0)$. Se, além do mais $\dot{\lambda}(t) \geq 0$ segue $\delta(t') \geq \delta(t)$ para todo $t' \geq t \geq 0$ para qualquer ρ_S inicial. Outros modelos, que podem ser escritos na forma de Lindblad, exigem um estado puro $\rho(t)$ além da condição $\lambda(t) > 0$ para assegurar o crescimento do defeito de idempotência. Isto pode ter uma origem física num modelo que leve à termalização: esperamos que um sistema inicialmente a uma temperatura maior que a temperatura do banho perca temperatura, diminuindo seu defeito de idempotência.

Finalmente, o "operador densidade correlacionado" $\rho_C(t)$ dado por

$$\rho_C(t) = \sum |n> \rho_S^{mn} \prod \frac{e^{-\beta\hbar\omega a_{imn}^\dagger(t)a_{imn}(t)}}{Tre^{-\beta\hbar\omega_i a_i^\dagger a_i}} < m|, \tag{3.15}$$

$$a_{imn}(t) = a_i + s_{im}(1-e^{-i\omega_i t}) - \frac{(s_{im}-s_{in})(1-e^{-i\omega_i t})}{1-e^{\beta\hbar\omega_i}} \tag{3.16}$$

$$a_{imn}^\dagger(t) = a_i^\dagger + s_{im}^*(1-e^{i\omega_i t}) - \frac{(s_{im}^*-s_{in}^*)(1-e^{i\omega_i t})}{1-e^{-\beta\hbar\omega_i}}, \tag{3.17}$$

$$s_{im} = \frac{c_i}{\omega_i}f(A_m) + i\frac{d_i}{\omega_i}g(A_m), \tag{3.18}$$

mostra o estabelecimento de correlações entre o sistema e o banho.

Resumindo, $\mathcal{U}$ muda os elementos diagonais e não diagonais de ρ_S renormalizando a energia instantânea dos autoestados de A, enquanto $\mathcal{V}$ produz fases relativas entre os autoestados de A, e $\mathcal{D}$ altera os elementos não diagonais de ρ_S sem afetar os elementos diagonais, produzindo decoerência. Assim, identificamos dois efeitos: a renormalização do hamiltoniano, uma correção unitária como previsto na Ref. [63], e a supressão parcial ou total dos elementos de fora da diagonal na base A (correção não unitária). Frisamos que estes efeitos estão presentes ainda quando o sistema S interage com um único oscilador harmônico. Em tal caso os efeitos são periódicos, de maneira que temos, por exemplo, decoerência e recoerência. Para um sistema finito os efeitos são quase periódicos. Para um contínuo de osciladores o tempo de recorrência de Poincaré vai para infinito, produzindo irreversibilidade. Esta irreversibilidade

tem as suas nuanças: em [67] foram encontrado casos de recoerência local num caso de um contínuo de osciladores, e no modelo que tratamos presentemente tal recoerência local (no tempo) pode acontecer sempre nos intervalos de tempo em que $\dot{\lambda}(t) < 0$ (lembremos que o que sempre é maior ou igual a zero é λ).
Tomando o traço sobre os graus de liberdade do sistema obtemos o operador densidade do banho

$$\rho_B(t) = \sum \rho_S^{kk} e^{-\beta\hbar \sum \omega_i a_{ikk}^\dagger(t) a_{ikk}(t)}. \tag{3.19}$$

Esta equação reflete o fato de que a evolução total, sendo hamiltoniana, não perde informação sobre o estado inicial do sistema, só a distribui entre o sistema e o banho. Mais ainda, se ρ_B^k (ρ_B^l) é a matriz densidade para um $\rho_S(0) = |k><k|$ ($\rho_S(0) = |l><l|$) inicial, sua superposição ("overlap") com ρ_B^l é

$$Tr(\rho_B^k \rho_B^l) = e^{-2\mu_f(t)(f(A_k)-f(A_l))^2} e^{-2\mu_g(t)(g(A_k)-g(A_l))^2} \tag{3.20}$$

$$\mu_f(t) = \sum \frac{c_i^2}{\omega_i^2}(1-\cos(\omega_i t)) \tanh(\frac{\beta\hbar\omega_i}{2}). \tag{3.21}$$

A Eq. (3.20) mostra que sob algumas circunstâncias o banho efetivamente age como uma espécie de aparelho de medida.
Das expressões (3.7), (3.9), (3.13) e (3.14) é fácil vermos que o comportamento de tempos curtos (longos) depende da parte de altas (baixas) frequências da função densidade espectral. Em particular, para funções espectrais decaindo mais rápido que qualquer polinômio, tanto R quanto λ admitem expansões em série de potências

$$R(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-)^{n+1} a_n^2 t^{2n} \quad \lambda(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-)^{n+1} b_n^2 t^{2n}. \tag{3.22}$$

Consideramos dois tipos de densidades espectrais para os osciladores, $D_1(\omega) = (\omega/\omega_c)^2\theta(\omega - \omega_c)$, e a mais geral e amplamente usada [67, 55] $D_2(\omega) = (\omega/\omega_c)^{\nu-1}\exp(-\omega/\omega_c)$ com $\nu > 0$, onde ω_c é a frequência de Debye e ν descreve o tipo de ambiente, superóhmico se $\nu > 1$, óhmico se $\nu = 1$ e subóhmico se $0 < \nu_c < 1$. Enquanto a última é boa para testarmos diferenças no comportamento de tempos longos, a primeira é boa para mostrar comportamentos que não satisfazem (3.22).
Alguns resultados para R e λ se apresentam nas tabelas 3.1 a 3.3, onde as seguintes convenções foram adotadas: $E = \hbar\omega_c$, $\tau = \omega_c t$, $\beta' = \hbar\omega_c\beta$, $\mathbf{C}$ é a constante de Euler-Mascheroni, $\Im$ denota a parte imaginária, ζ é a função zeta generalizada, si o seno integral, ci o co–seno integral e ξ e θ são números reais tais que $\xi > 1$ e $0 < \theta < 1$. Resultados para $R(t)$ aparecem na Tabela 3.1, e as Tabelas 3.2 e 3.3 contém as propriedades de decoerência separadas para temperatura zero ($\lambda^0(\tau)$) e temperatura finita ($\lambda^\beta(\tau)$) em todos os regimes considerados. Não são feitos cálculos explícitos para $m(t)$. Os comportamentos de tempos curtos e tempos longos são mostrados em todos os casos. Enquanto no caso de $D_2(\omega)$ o comportamento de tempos curtos sempre é proporcional a τ^2, a densidade $D_1(\omega)$ de decaimento lento dá lugar a um termo linear na expansão do R e um termo não analítico $\tau^2 \ln\tau$ na expansão de λ^0. λ^β sempre vai como τ^2 para τ pequeno. De outro lado, enquanto as propriedades de decoerência

de $D_1(\omega)$ são as mesmas a temperatura zero e a temperatura finita, as propriedades de $D_2(\omega)$ dependem da temperatura (zero ou finita) e do valor de ν.
Em situações nas quais um sistema de interesse interage com um ambiente maior é comum fazermos uso de equações mestras. É fácil observarmos que de (3.4) segue uma equação mestra generalizada para ρ com coeficientes dependentes do tempo:

$$\begin{aligned}\dot{\rho_S}(t) &= \left\{\frac{1}{i\hbar}[k,\bullet] - 2im(f\bullet g - g\bullet f)\right. \\ &\left. -\dot{\lambda}_f(f^2\bullet - 2f\bullet f + \bullet f^2) - \dot{\lambda}_g(g^2\bullet - 2g\bullet g + \bullet g^2)\right\}\rho_S(t). \qquad (3.23)\end{aligned}$$

Dado que o segundo termo do lado direito da equação de cima deve corresponder a algum hamiltoniano K como frisamos anteriormente, (3.23) pode ser encarada como uma generalização óbvia da forma de Lindblad que permite geradores dependentes do tempo. (Aqui consideramos que a forma de Lindblad requer coeficientes constantes, como na formulações de [42, 75]. Recentemente tem se reconhecido que esta condição não é necessária). Se $\dot{\lambda}_f$ e $\dot{\lambda}_g$ são não negativos a Eq. (3.23) está na forma de Lindbland para todo tempo positivo t e esperamos que as condições de von Neumann sejam satisfeitas [3](Na verdade, dado que encontramos a solução exata, as condições de von Neumann são satisfeitas ainda usando λ com derivada não positiva: é suficiente que λ seja não negativo). Se ainda, $\dot{\lambda}_f$ ou $\dot{\lambda}_g$ for zero, ou forem iguais entre elas, um simples reescalamento da variável t leva (3.23) à forma de Linbland com coeficientes constantes, com hamiltoniano dependente do tempo, sobre intervalos em que $\dot{\lambda}$ seja estritamente positivo. No caso em que tenhamos intervalos de tempos com $\dot{\lambda}$ negativo poderemos observar o fenômeno da recoerência local, um fenômeno completamente extranho à formulação em termos de liouvillianos com a forma estrutural de Lindblad. (Notemos que a equação mestra generalizada de cima pode ser escrita de uma maneira mais semelhante à forma estrutural de Lindblad,

$$\begin{aligned}\dot{\rho_S}(t) &= \left\{\frac{1}{i\hbar}[k,\bullet] + \sum \sin(\omega_i t)(2p_i\bullet p_i^\dagger - p_i^\dagger p_i\bullet - \bullet p_i^\dagger p_i)\right. \\ &\left. -\dot{\lambda}_f^\beta([f,[f.\bullet]]) - \dot{\lambda}_g^\beta([g,[g,\bullet]])\right\}\rho_S(t),\end{aligned}$$

com $\sqrt{\omega_i}p_i = c_i f + id_i g$, onde o termo unitário não explicitamente hamiltoniano foi incorporado à decoerencia de temperatura zero. Isto ilustra a conhecida afirmação de que a separação das contribuições unitária e não unitária é um tanto arbitrária. Contudo, a opção feita no restante do texto reflete bem o fato de que as funções que aparecem no cálculo da decoerência são, precisamente, os coeficientes das partes que temos identificado como sendo não unitárias.)
Finalmente resolvemos o mesmo problema, desta vez usando a aproximação de Born–Markov (BMA). Os resultados se mostram na Tabela 3.4.
Observemos que a aproximação de Born–Markov não prediz a aparição de correções unitárias não explicitamente hamiltonianas. Também, como já foi discutido, a decoerência é zero ou total. É particularmente "perigoso" usar a aproximação de Born–Markov para temperatura zero, onde o resultado mostra decoerência, enquanto a aproximação não. Concluímos observando que ainda que neste caso simples é possível escrevermos uma equação para ρ em

uma forma de Lindbland generalizada, o conteúdo físico pode ser muito diferente porque os efeitos transientes (usualmente descartados) podem ser muito importantes no processo de decoerência.

Tabela 3.1: Coeficiente de Renormalização.

	$D_1(\omega)$	$D_2(\omega)$
$R(\tau)$	$E(1-\cos(\tau)-\tau si(\tau))$	$E\Gamma(\nu)(1-\frac{\cos(\nu \arctan(\tau))}{(1+\tau^2)^{\nu/2}})$
$R(\tau \downarrow 0)$	$\frac{1}{2}E(\pi\tau-\tau^2)$	$\frac{1}{2}E\Gamma(\nu+2)\tau^2$
$R(\tau \uparrow \infty)$	$E(1+\frac{\sin\tau}{\tau})$	$E\Gamma(\nu)(1-\frac{\cos(\nu\pi/2)}{\tau^\nu}-\frac{\nu\sin(\nu\pi/2)}{\tau^{\nu+1}})$

Tabela 3.2: Coeficiente de Decoerência para $T=0$.

	$D_1(\omega)$	$D_2(\omega)$	
$\lambda^0(\tau)$	$\frac{1}{2}(1-\cos\tau+\tau\sin\tau-\tau^2 ci\tau)$	$\Gamma(\nu-1)(1-\frac{\cos((\nu-1)\arctan\tau)}{(1+\tau^2)^{\frac{\nu-1}{2}}})$	
$\lambda^0(\tau \downarrow 0)$	$\frac{1}{4}(3-2\mathbf{C}-2\ln\tau)\tau^2$	$\frac{1}{2}\Gamma(\nu+1)\tau^2$	
$\lambda^0(\tau \uparrow \infty)$	$\frac{1}{2}(1+2\frac{\sin\tau}{\tau})$	$\Gamma(\nu)(1-\cos(\frac{(\nu-1)\pi}{2})\tau^{1-\nu}+O(\tau^{-\nu}))$	$\nu>1$
		$\ln\tau$	$\nu=1$
		$\frac{\Gamma(\nu)}{1-\nu}\cos(\frac{(1-\nu)\pi}{2})\tau^{1-\nu}$	$0<\nu<1$

Tabela 3.3: Coeficiente de Decoerência para $T>0$.

	$D_1(\omega)$	$D_2(\omega)$	
$\lambda^\beta(\tau)$	$2\int_1^\infty \frac{du}{u^3}\frac{1-\cos(\tau u)}{e^{\beta' u}-1}$	$\frac{2\Gamma(\nu)}{(\beta')^\nu}\int_0^\tau dt\,\Im\zeta(\nu,1+\frac{1}{\beta'}-\frac{it}{\beta'})$	
		$\ln(\frac{\beta'}{\pi\tau}\sinh(\frac{\pi\tau}{\beta'}))$	$\nu=1$
$\lambda^\beta(\tau \downarrow 0)$	$C(\beta')\tau^2$	$\frac{\Gamma(\nu+1)\zeta(\nu+1,1+(\beta')^{-1})}{(\beta')^{\nu+1}}$	
	$C(\beta')=\begin{cases} cte.(\beta')^{-1} & \beta'\downarrow 0 \\ cte.(e^{\beta'}-1)^{-1} & \beta'\uparrow\infty \end{cases}$	$\frac{1}{6}\left(\frac{\pi\tau}{\beta'}\right)^2$	$\nu=1$
$\lambda^\beta(\tau \uparrow \infty)$	$\frac{1+2\frac{\sin\tau}{\tau})}{\exp(\beta'\xi)-1}$	$\frac{2\theta}{\beta'}(\frac{\Gamma(\nu-1)}{\nu-1}-\frac{\Gamma(\nu-2)\cos(\frac{(\nu-2)\pi}{2})}{\tau^{\nu-2}}+O(\tau^{1-\nu}))$	$\nu>2$
		$\frac{\ln(1+\tau^2)}{\beta'}$	$\nu=2$
		$\frac{2\theta\Gamma(\nu-2)\sin(\frac{(1-\nu)\pi}{2})}{\beta'}\tau^{2-\nu}$	$0<\nu<2$ $\nu\neq 1$
		$\frac{\pi\tau}{\beta'}+\ln(\frac{\beta'}{\pi})$	$\nu=1$

Tabela 3.4: Coeficientes de Renormalização e Decoerência na BMA

$D(\omega)$	$R(\tau)$	$m(\tau)$	$\dot{\lambda}^0(\tau)$	$\dot{\lambda}^\beta(\tau)$	
D_1	E	0	0	0	
D_2	$\Gamma(\nu)E$	0	0	0	$\nu > 1$
				$\frac{\pi}{\beta'}$	$\nu = 1$
				∞	$0 < \nu < 1$

Capítulo 4

Descrição exata da Decoerência em Cavidades Ópticas

4.1 Introdução

A medição do processo de entrelaçamento de um sistema acoplado a um ambiente frio é tanto um logro importante quanto uma meta desafiadora. A razão para que isto assim seja é que o processo de entrelaçamento é uma característica quântica única e típica. Várias tentativas, tanto do lado teórico quanto do experimental tem sido recentemente feitas [10, 11, 15, 38, 24, 61, 45, 62]. No caso particular das cavidades de alto Q formulou-se uma medida direta do processo de decoerência e tem sido feitas sugestões de experiências, com basicamente o mesmo arranjo experimental, para a medição direta da função de Wigner de um estado inicialmente correlacionado produzido numa cavidade supercondutora [14, 60]. Nesta capítulo mostramos que toda a informação necessária para a construção de qualquer função de Wigner (ou qualquer operador densidade do sistema) pode ser obtida por uma medição precisa de duas quantidades como função do tempo: o número médio de fótons e o máximo da função de Wigner correspondente a um estado inicial coerente.

Recentemente foi deduzida a equação mestra exata para o movimento browniano quântico usando tanto técnicas de integrais de trajetória [39] quanto através de tomar o traço da equação de evolução para a função de Wigner total [4, 37]. Seguimos de perto a segunda técnica para o modelo de osciladores independentes na aproximação de onda girante a temperatura zero e com uma condição inicial fatorada. Encontramos expressões analíticas para a evolução de várias condições iniciais de possível relevância na óptica de cavidades como, p.e., estados de Fock, estados coerentes e estados coerentes generalizados, estados comprimidos ("squeezed states") e estados de gato de Schrödinger. É interessante notar que um estado de gato par (ímpar) evolui como uma mistura de estado de gato par e ímpar. Isto significa, em particular que, ainda que possuindo um espaço de Hilbert infinito, a evolução do operador densidade está confinada em um subespaço bidimensional (dependente do tempo), onde tem dois autovalores positivos. Esta característica tem sido usada para analisar experimentos em cavidades ópticas [28]. Mostramos que todos os estados iniciais considerados admitem

uma decomposição de Schmidt permitindo uma clara separação entre os efeitos unitários da evolução, responsáveis pela dependência temporal dos autovetores da densidade reduzida, e os não unitários provenientes da evolução temporal de seus autovalores. Este capítulo está organizado como segue: na seção 4.2 apresentamos a dedução da equação dinâmica para a função de Wigner, a seção 4.3 contém exemplos ilustrativos e a seção 4.4 apresenta uma discussão de maneira possíveis de medir decoerência em cavidades ópticas.

4.2 Descrição Exata da Dinâmica Reduzida: A Função de Wigner

O hamiltoniano do modelo é

$$H = \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2) + \hbar\sum_k \omega_k(a_k^\dagger a_k + 1/2) + \hbar\sum_k c_k(a^\dagger a_k + a_k^\dagger a), \tag{4.1}$$

onde $a_\mu, a_\mu^\dagger$, os operadores de aniquilação e criação do μ-ésimo modo, satisfazem as regras de comutação bosônicas usuais. Supomos que no tempo $t = 0$ a densidade total é dada por

$$\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \prod_k |0_k\rangle\langle 0_k|, \tag{4.2}$$

onde o subíndice S (de subsistema) refere–se ao oscilador principal. O banho, i.e. o conjunto de osciladores rotulado por k, encontra–se inicialmente no seu estado fundamental (sem interação). Claramente o produto tensorial do vácuo do oscilador principal com o vácuo do conjunto de osciladores é o estado base de (4.1). Um fato bem conhecido é que a função de Wigner W de hamiltonianos quadráticos satisfaz a equação de Liouville clássica. Para obtermos o hamiltoniano clássico correspondente ao hamiltoniano (4.1), empregamos $a_\mu^{(\dagger)} \to \alpha_\mu^{(*)}$, onde

$$\alpha_\mu^{(*)} = \sqrt{\frac{m_\mu\omega_\mu}{2\hbar}}q_\mu + (-)\frac{i}{\sqrt{2\hbar m_\mu\omega_\mu}}p_\mu, \tag{4.3}$$

e descartamos as contribuições de ponto zero. A notação empregada é a seguinte: o índice μ percorre os valores $\mu = 0, 1, 2, ..$, enquanto k varia sobre os inteiros positivos $k = 1, 2, ...$ Além do mais, $a_0 \equiv a$, $\omega_0 = \omega$. Usando estas convenções a equação de Liouville clássica

$$\frac{\partial W(\alpha_\mu, \alpha_\mu^*, t)}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}\sum_\mu \frac{\partial H}{\partial \alpha_\mu}\frac{\partial W}{\partial \alpha_\mu^*} - \frac{1}{i\hbar}\sum_\mu \frac{\partial H}{\partial \alpha_\mu^*}\frac{\partial W}{\partial \alpha_\mu}, \tag{4.4}$$

onde W é a função de Wigner no caso quântico e a distribuição de probabilidade no clássico, pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\frac{\partial W(\alpha_\mu, \alpha_\mu^*, t)}{\partial t} &= -i\omega\alpha^*\frac{\partial W}{\partial \alpha^*} + i\omega\alpha\frac{\partial W}{\partial \alpha} - i\sum_k \omega_k\alpha_k^*\frac{\partial W}{\partial \alpha_k^*} + i\sum_k \omega_k\alpha_k\frac{\partial W}{\partial \alpha_k} \\ &\quad -i\sum_k c_k\alpha_k^*\frac{\partial W}{\partial \alpha^*} + i\sum_k c_k\alpha_k\frac{\partial W}{\partial \alpha} - i\sum_k c_k\alpha^*\frac{\partial W}{\partial \alpha_k^*} + i\sum_k c_k\alpha\frac{\partial W}{\partial \alpha_k}.\end{aligned} \tag{4.5}$$

A condição inicial (4.2) na linguagem das funções de Wigner é

$$W^0(\alpha_\nu, \alpha_\mu^*) = W_S^0(\alpha, \alpha^*) W_B^0(\alpha_k, \alpha_k^*), \tag{4.6}$$

onde fizemos uso da definição da função de Wigner para várias variáveis,

$$W(\alpha_0, \cdots, \alpha_N, \alpha_0^*, \cdots, \alpha_N^*) = 2^{N+1} \mathrm{Tr} \left[\rho \prod_{\mu=0}^{N} D(\alpha_\mu) \mathrm{e}^{i\pi a_\mu a_\mu^\dagger} D^\dagger(\alpha_\mu) \right],$$

sendo que $D(\alpha_m u)$ denota o operador de deslocamento $\exp(\alpha_\mu a_\mu^\dagger - \alpha_\mu^* a_\mu)$. Integrando a Eq.(4.5) sobre as variáveis do banho obtemos

$$\frac{\partial \widetilde{W}(\alpha, \alpha^*, t)}{\partial t} = -i\omega\alpha^* \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \alpha^*} + i\omega\alpha \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \alpha} - i\frac{\partial G^*}{\partial \alpha^*} + i\frac{\partial G}{\partial \alpha}, \tag{4.7}$$

com

$$\widetilde{W}(\alpha, \alpha^*, t) = \int \left(\prod_k d\alpha_k d\alpha_k^* \right) W(\alpha_\mu, \alpha_\mu^*, t), \tag{4.8}$$

e

$$G(\alpha, \alpha^*, t) = \int \left(\prod_k d\alpha_k d\alpha_k^* \right) \sum_k c_k \alpha_k W(\alpha_\mu, \alpha_\mu^*). \tag{4.9}$$

Como na ref. [37] é fácil mostrarmos que $G(\alpha, \alpha^*, t)$ pode ser escrito em termos de $\widetilde{W}$. Lembremos que para hamiltonianos quadráticos $W(\alpha_\mu^{(*)}, t) = W^0(\alpha_\mu^{(*)}(-t))$, onde $\alpha_\mu(t)$ é a solução das equações clássicas de movimento. Definindo $\vec{\alpha}(t) = (\alpha_0(t), \alpha_1(t), \ldots)$ e designando a sua transposta por $\vec{\alpha}^T(t)$, temos

$$\vec{\alpha}^T(t) = U^\dagger \Delta(t) U \vec{\alpha}^T(0), \quad \vec{\alpha}^*(t) = (\vec{\alpha}(t))^*, \tag{4.10}$$

onde U e Δ são unitários e Δ é diagonal. Tomando a transformada de Fourier de G, e fazendo a mudança de variáveis $\alpha^{(*)}(-t) \to \alpha^{(*)}(0)$, com Jacobiano unidade, obtemos $G(\kappa, \kappa')$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} G(\kappa, \kappa') = \quad & \int \prod_\mu d\alpha_\mu(0) d\alpha_\mu^*(0) \mathrm{e}^{i\kappa \sum_\nu p_\nu(t)\alpha_\nu(0)} \mathrm{e}^{i\kappa' \sum_\nu p_\nu^*(t)\alpha_\nu^*(0)} \\ & \times \sum_\nu q_\nu(t) \alpha_\nu(0) W_S^0(\alpha^{(*)}(0)) W_B^0(\alpha_k^{(*)}(0)), \end{aligned} \tag{4.11}$$

com $\{p_\nu, p_\nu^*, q_\nu\}$ parâmetros dependentes do tempo, a determinar. Notemos que a condição inicial Eq. (4.6) foi usada na Eq. (4.11). Em particular, se o reservoir estiver a temperatura zero

$$W_B^0(\alpha_k^{(*)}(0)) = \prod_k N_k e^{-2\alpha_k \alpha_k^*}, \tag{4.12}$$

com N_k constantes de normalização. Da Eq. (4.11) podemos verificar que a multiplicação por $\alpha_0 = \alpha$ é equivalente a derivação com respeito a k, mais termos correspondentes a

multiplicação por α_k, até coeficientes dependentes do tempo. Estes últimos termos correspondem a derivações com respeito a α_k^*, como pode ser visto da Eq. (4.12), as quais, por sua vez, são equivalentes a multiplicação por k', como uma simples integração por partes mostra. Tomando a transformada de Fourier inversa obtemos uma multiplicação por α e uma derivação com respeito a α^*. Assim, temos

$$\begin{aligned} i\frac{\partial G}{\partial \alpha} - i\frac{\partial G^*}{\partial \alpha^*} &= iY\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\alpha \widetilde{W}\right) - iY^*\frac{\partial}{\partial \alpha^*}\left(\alpha^* \widetilde{W}\right) \\ &\quad +(iZ - iZ^*)\frac{\partial^2 \widetilde{W}}{\partial \alpha \partial \alpha^*}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

com funções dependentes do tempo Y, Z. Portanto a equação de Wigner pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{W}(\alpha, \alpha^*, t)}{\partial t} &= -i(\omega + \delta)\left(\alpha^*\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \alpha^*} - \alpha\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \alpha}\right) + 2\lambda \widetilde{W} \\ &\quad +\lambda\left(\alpha^*\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \alpha^*} + \alpha\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \alpha}\right) + \lambda'\frac{\partial^2 \widetilde{W}}{\partial \alpha \partial \alpha^*}, \end{aligned} \tag{4.14}$$

onde fixamos $iY = \lambda + i\delta$ e $iZ - iZ^* = \lambda'$. As funções λ, δ e λ' são todas reais. No caso presente, temperatura nula, temos um vínculo a mais: como o produto tensorial dos vacua é o estado base de (4.1), a função de Wigner reduzida correspondente $W_S(\alpha, \alpha*)$ deve ser solução da equação de Wigner. Quando esta condição é aplicada à Eq.(4.14), obtemos $\lambda = \lambda'$. Comparando o sistema de equações encontrado a partir de (4.5) e de (4.14) obtemos

$$(\lambda + i\delta)\langle \alpha \rangle = i\sum_k c_k \langle \alpha_k \rangle, \tag{4.15}$$

$$(\lambda + i\delta)\langle \alpha^2 \rangle = i\sum_k c_k \langle \alpha \alpha_k \rangle, \tag{4.16}$$

$$-2\lambda'\langle \alpha \alpha^* \rangle = i\sum_k c_k \langle \alpha \alpha_k^* \rangle - i\sum_k c_k \langle \alpha^* \alpha_k \rangle. \tag{4.17}$$

Sabemos que a solução das equações de Heisenberg pode escrever-se como segue

$$a(t) = \eta(t)a(0) + \sum_k \gamma_k(t)a_k(0). \tag{4.18}$$

$$a_k(t) = \eta_k(t)a(t) + \sum_l \gamma_{kl}a_l(0). \tag{4.19}$$

Usando a solução acima das equações de Heisenberg, e o fato de que todos os primeiros e segundos momentos simétricos são zero no instante inicial com a exceção de $\langle \{a_k^\dagger, a_k\} \rangle = 1$, obtemos

$$\lambda(t) + i\delta(t) = i\sum_k c_k \eta_k(t) \tag{4.20}$$

$$\lambda(t) = \frac{1}{2}\sum_{kl} c_k (i\gamma_l \gamma_{kl}^* - i\gamma_l^* \gamma_{kl}). \tag{4.21}$$

Sabemos que (4.20) e (4.21) devem fornecer o mesmo valor de $\lambda(t)$. Se eles não fornecerem a mesma resposta isto poderia implicar que não existe uma equação mestra exata. Este, contudo, não é o caso presente, como mostramos em seguida.

Voltemos à Eq.(4.10). Chamando w_μ as autofrequências de (4.1), podemos escrever

$$a_\nu(t) = \sum_{\mu\sigma} U^*_{\mu\nu} U_{\mu\sigma} e^{-iw_\mu t} a_\sigma(0) = \sum_\sigma Z_{\nu\sigma} a_\sigma(0). \tag{4.22}$$

Por conveniência fazemos

$$\eta = Z_{00}, \quad \gamma_k = Z_{0k}, \quad \Delta_k = Z_{k0}, \quad \Gamma_{kl} = Z_{kl}. \tag{4.23}$$

Empregando (4.22) em (4.18) e (4.19), obtemos as seguintes expressões para η_k e γ_{kl},

$$\eta_k = \frac{\Delta_k}{\eta} \qquad \gamma_{kl} = \Gamma_{kl} - \frac{\Delta_k \gamma_l}{\eta}. \tag{4.24}$$

De (4.20) e (4.21) segue que

$$\lambda = -\sum_k c_k \Im(\eta_k), \qquad \lambda' = -\sum_k c_k \Im(\beta_k) = -\sum_k c_k \Im(\sum_l \gamma_l \gamma^*_{kl}), \tag{4.25}$$

onde $\Im$ representa a parte imaginária de seu argumento. Como U é unitário temos

$$\begin{aligned} \sum_l \gamma_l \Gamma^*_{kl} &= \sum_{l\mu\nu} U^*_{\mu 0} U_{\mu l} U_{\nu k} U^*_{\nu l} e^{-i(w_\mu - w_\nu)t} = \sum_{\mu\nu} U^*_{\mu 0} U_{\nu k} e^{-i(w_\mu - w_\nu)t} \delta_{\mu\nu} \\ &= \sum_\mu U^*_{\mu 0} U_{\mu k} = \delta_{0k} = 0, \end{aligned} \tag{4.26}$$

e

$$\sum_l \gamma_l \gamma^*_l = \sum_{l\mu\nu} U^*_{\mu 0} U_{\mu l} U_{\nu 0} U^*_{\nu l} e^{-i(w_\mu - w_\nu)t} = \sum_{\mu\nu} U^*_{\mu 0} U_{\nu 0} e^{-i(w_\mu - w_\nu)t} \delta_{\mu\nu} = \sum_\mu U^*_{\mu 0} U_{\mu 0} = 1. \tag{4.27}$$

Usando (4.26) e (4.27) obtemos

$$\begin{aligned} \Im(\beta_k) &= \Im(\sum_l \gamma_l \gamma^*_{kl}) = \Im(\sum_l \gamma_l \Gamma^*_{kl}) - \Im(\frac{\Delta^*_k}{\eta^*} \sum_l \gamma_l \gamma^*_l) \\ &= -\Im(\frac{\Delta^*_k}{\eta^*}) = \Im(\frac{\Delta_k}{\eta}) = \Im(\eta_k). \end{aligned} \tag{4.28}$$

Desta maneira mostramos que a solução das equações de movimento de Heisenberg determinam univocamente as funções reais $\lambda(t)$ e $\delta(t)$, e que $\lambda(t) = \lambda[(t)$ como tinhamos antecipado.

Não é difícil mostrar que a equação operatorial para a densidade reduzida do sistema equivalente à equação de Wigner (4.14) é

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hbar(\omega + \delta) a^\dagger a, \rho\right] + \lambda(2a \bullet a^\dagger - a^\dagger a \bullet - \bullet a^\dagger a)\rho = \mathcal{L}(t)\rho(t), \tag{4.29}$$

onde foi empregada a convenção ponto superoperatorial usual. A equação mestra Born–Markov correspondente é precisamente desta forma funcional, mas com coeficientes constantes [59]. Observemos que ainda se permitirmos coeficientes dependentes do tempo esta equação não está completamente na forma de Lindblad: por razões físicas podemos exigir que $\int_0^t \lambda(\tau)d\tau > 0$ e não $\lambda(t) > 0$, que é a condição imposta pela forma de Lindblad. De novo, a froma de Lindblad impede o fenômeno da recoerência local. Alguns resultados podem ser obtidos rapidamente a partir da Eq. (4.29): premultiplicando por a e tomando o traço obtemos

$$\frac{d}{dt}\langle a\rangle = \frac{d\alpha}{dt} = (-i(\omega+\delta)-\lambda)\alpha, \tag{4.30}$$

que pode ser resolvida por inspeção,

$$\alpha(t) = \exp(-i\Omega(t)-\Lambda(t))\alpha(0), \tag{4.31}$$

com

$$\Omega(t) = \int_0^t d\tau(\omega+\delta)(\tau), \quad \Lambda(t) = \int_0^t d\tau\lambda(\tau). \tag{4.32}$$

Das Eqs. (4.31) e (4.32) fica claro que $\omega+\delta(t)$ é a frequência instantânea do oscilador interagente enquanto $\lambda(t)$ é a sua taxa instantânea de decaimento. Nas cavidades ópticas usuais elas são realmente constantes até um nível bastante alto de precisão. Premultiplicando (4.29) por $a^\dagger a$, tomando o traço e resolvendo a equação diferencial resultante temos

$$\langle a^\dagger a\rangle(t) = \exp(-2\Lambda(t))\langle a^\dagger a\rangle(0). \tag{4.33}$$

Observamos que uma medição do número de fótons, seja usando o método tradicional de contagem de fótons ou o método recentemente proposto de medição não demolidora [14], leva à determinação da função $\Lambda(t)$. O procedimento consistiria da preparação reiterada do mesmo estado inicial e a medição do número de fótons depois de um retardo t um número de vezes suficiente para obter uma boa estatística. Os mesmo passos devem ser repetidos para tempos de retardo t diferentes. A função $\Lambda(t)$ pode ser calculada agora através da relação $\Lambda(t) = -\log(n(t))/2$.

Podemos usar métodos de álgebras de Lie [7] para achar o superoperador de evolução $\mathcal{U}$. Realmente, podemos verificar que os operadores $\mathcal{M} = a^\dagger a.$, $\mathcal{P} = .a^\dagger a$, e $\mathcal{J} = a.a^\dagger$ formam uma álgebra,

$$[\mathcal{M},\mathcal{P}] = 0 \quad [\mathcal{M},\mathcal{J}] = -\mathcal{J} = [\mathcal{P},\mathcal{J}]. \tag{4.34}$$

Assim, podemos supor que

$$\mathcal{U}(t) = e^{x\mathcal{M}}e^{y\mathcal{P}}e^{z\mathcal{J}}. \tag{4.35}$$

Derivando o Ansatz (4.35) para o superoperador de evolução temporal, empregando a fórmula $\exp(xA)B\exp(-xA) = B + x[A,B] + x^2[B,[B.A]]/2! + ...$ e as relações de comutação (4.34), comparando coeficientes na equação $d\mathcal{U}/dt = \mathcal{L}(t)U(t)$, e resolvendo as equações diferenciais resultantes obtém-se

$$x(t) = -i\Omega(t) - \Lambda(t), \quad y(t) = x^*(t), \quad z(t) = 1 - \exp(-2\Lambda(t)). \tag{4.36}$$

Caso escolhamos um ordenamento com a exponencial em $\mathcal{J}$ à esquerda em (4.35) as funções x e y correspondentes são as mesmas, enquanto $z \to z' = \exp(2\Lambda)z$.

4.3 Exemplos Ilustrativos

Começamos mostrando como algumas soluções podem dar origem a outras. Suponhamos que ρ satisfaz a equação $d\rho/dt = \mathcal{L}(X_i., .X_i; t)\rho(t)$, onde os X_i são operadores, e suponhamos que ρ pode ser escrito como $U\rho' U^{-1}$. Teremos então que ρ' satisfaz a equação $d\rho'/dt = \mathcal{L}'\rho'(t)$. Se, além do mais, escolhermos $U = \exp(\sigma a^\dagger - \sigma^* a) = D(\sigma)$, o operador de deslocamento, e $\mathcal{L}$ o Liouvilliano acima encontrado, teremos

$$\mathcal{L}'(t) = \mathcal{L}(t) + \left((-i\dot{\Omega} + \lambda)\sigma^* + \frac{d\sigma^*}{dt}\right)(a. + .a^\dagger) \tag{4.37}$$

$$+ \left((-i\dot{\Omega} - \lambda)\sigma - \frac{d\sigma}{dt}\right)(a^\dagger. + .a). \tag{4.38}$$

É fácil vermos que se

$$\sigma(t) = \sigma(0)\exp(-i\Omega(t) - \Lambda(t)), \quad \sigma^*(t) = (\sigma(t))^*, \tag{4.39}$$

tanto ρ quanto ρ' satisfariam a mesma equação. Isto é, mostramos que $D(\sigma(t))\rho(t)D^\dagger(\sigma(t))$ satisfaz a Eq. (4.29) sempre que $\rho(t)$ também a satisfaça. Uma aplicação imediata deste resultado deriva da observação de que o vácuo é solução da equação mestra; portanto

$$D(\sigma(t))|0\rangle\langle 0|D^\dagger(\sigma(t)) = |\sigma(t)\rangle\langle\sigma(t)| = \mathcal{U}(t)|\sigma_0\rangle\langle\sigma_0| \tag{4.40}$$

também é solução. Isto significa que estados iniciais coerentes evoluem preservando sua coerência, sem importar os detalhes do ambiente, contanto que ele possa ser modelado como foi feito aqui. Uma medição da norma e da fase de um estado inicialmente coerente é suficiente para determinar as funções Ω e Λ, e daqui, em princípio, determinar a evolução de qualquer outro estado inicial.

Também é simples calcularmos a evolução de um estado inicial tipo estado de Fock. Para tanto é conveniente usarmos a expressão para o superoperador de evolução com $\mathcal{J}$ à esquerda,

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(t)|m\rangle\langle m| &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z')^k}{k!} a^k e^{xa^\dagger a}|m\rangle\langle m|e^{ya^\dagger a}a^{\dagger k} \\
&= e^{m(x+y)} \sum_{k=0}^{m} \frac{(z')^k}{k!}\frac{m!}{(m-k)!}|m-k\rangle\langle m-k| \\
&= \sum_{k=0}^{m} p_{k,m}(t)|k\rangle\langle k|
\end{aligned} \tag{4.41}$$

com

$$p_{k,m}(t) = \frac{m!}{k!(m-k)!}(\epsilon^{-2\Lambda(t)})^k(1-\epsilon^{-2\Lambda(t)})^{m-k}. \tag{4.42}$$

A partir desta solução podemos gerar outra: se o nosso estado inicial for um estado coerente generalizado, i.e., da forma $|m;\sigma_0\rangle = D(\sigma_0)|m\rangle$, este evolui como uma mistura de estados coerentes generalizados, segundo a equação

$$\mathcal{U}(t)|m;\sigma_0\rangle\langle m;\sigma_0| = \sum_{k=0}^{m} p_{k,m}(t)|k;\sigma(t)\rangle\langle k;\sigma(t)|. \tag{4.43}$$

Observemos que as Eqs. (4.41) e (4.43) são expansões em orbitais naturais [63], portanto, as quantidades $p_{k,m}(t)$ são interpretáveis como probabilidades.

Aplicando o superoperador de evolução (4.35) a um elemento de matriz $|\sigma_0\rangle\langle\sigma'_0|$, obtemos

$$\mathcal{U}(t)|\sigma_0\rangle\langle\sigma'_0| = \frac{\langle\sigma'_0|\sigma_0\rangle}{\langle\sigma'(t)|\sigma(t)\rangle}|\sigma(t)\rangle\langle\sigma'(t)|. \tag{4.44}$$

Notemos que uma argumentação heurística também leva à expressão (4.44). De fato, dado que um estado coerente permanece coerente, esperamos que

$$\mathcal{U}(t)|\sigma_0\rangle\langle\sigma'_0| = N(t)|\sigma(t)\rangle\langle\sigma'(t)|. \tag{4.45}$$

Já que (4.29) preserva o traço,

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Tr}\rho_S(t) = \mathrm{Tr}(\frac{d\rho_S(t)}{dt}) = \mathrm{Tr}(\mathcal{L}(t)\rho_S(t)) = 0, \tag{4.46}$$

o fator de normalização $N(t)$ não pode ser outro diferente daquele que aparece na equação (4.29). A evolução de um estado de gato par ($\rho_{\sigma_0 e}$) ou ímpar ($\rho_{\sigma_0 o}$) pode ser calculado a partir de (4.44) e (4.40). [1] De fato,

$$\rho_{\sigma_0 e(o)} = N_{e(o)}(\sigma_0)(|\sigma_0\rangle, |-\sigma_0\rangle)\begin{pmatrix} 1 & (-)1 \\ (-)1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \langle\sigma_0| \\ \langle-\sigma_0| \end{pmatrix}, \tag{4.47}$$

onde $N_{e(o)}(\sigma_0) = (1 + (-)\langle-\sigma_0|\sigma_0\rangle)^{-1}/2$ é um fator de normalização evolui como segue

$$\mathcal{U}\rho_{\sigma_0 e(o)} = N_{e(o)}(\sigma_0)(|\sigma_t\rangle, |-\sigma_t\rangle)\begin{pmatrix} 1 & \frac{(-)\langle-\sigma_0|\sigma_0\rangle}{\langle-\sigma(t)|\sigma(t)\rangle} \\ \frac{(-)\langle-\sigma_0|\sigma_0\rangle}{\langle-\sigma(t)|\sigma(t)\rangle} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} |\sigma_t\rangle \\ |-\sigma_t\rangle \end{pmatrix}. \tag{4.48}$$

Podemos exprimir a Eq. (4.48) de maneira mais conveniente, em termos de orbitais naturais, como

$$\mathcal{U}(t)\rho_{\sigma_0 e(o)} = p^{e(o)}_{e(o)}(t)\rho_{\sigma(t)e(o)} + p^{o(e)}_{e(o)}(t)\rho_{\sigma(t)o(e)}. \tag{4.49}$$

[1] Um estado de gato é uma superposição coerente (no nível das amplitudes e não no nível das probabilidades) de dois estados classicamente diferentes. Por outro lado os estados quânticos que mais parecem com estados clássicos são os estados coerentes, que além de ter incerteza mínima são pacotes de onda que oscilam da mesma maneira que vemos que o fazem os osciladores clássicos. Estes estados coerentes $|\sigma\rangle$ são caracterizados por um número complexo σ (como foi implicitamente utilizado em um exemplo anterior) que tem a ver com seus valores médios de posição e momento. A convenção usual é de chamarmos de gato par à superposição coerente $|\sigma\rangle + |-\sigma\rangle$ e de gato ímpar a $|\sigma\rangle - |-\sigma\rangle$. Vejamos que em ambos os casos trata-se de uma superposição entre pacotes de onda separados por uma distância (no espaço de fases) de $2|\sigma|$.

com

$$p_{e(o)}^{e(o)}(t) = \frac{1}{2}\frac{1+(-)\langle -\sigma(t)|\sigma(t)\rangle}{1+(-)\langle -\sigma_0|\sigma_0\rangle}\left(1+\frac{\langle -\sigma_0|\sigma_0\rangle}{\langle -\sigma(t)|\sigma(t)\rangle}\right) \tag{4.50}$$

$$p_{e(o)}^{o(e)}(t) = \frac{1}{2}\frac{1-(-)\langle -\sigma(t)|\sigma(t)\rangle}{1+(-)\langle -\sigma_0|\sigma_0\rangle}\left(1-\frac{\langle -\sigma_0|\sigma_0\rangle}{\langle -\sigma(t)|\sigma(t)\rangle}\right). \tag{4.51}$$

Observe que um estado inicial de gato evolui como uma mistura de gatos par e ímpar. A Eq. (4.50) fornece a probabilidade de termos um gato da mesma paridade que o inicial, e a Eq. (4.51) a probabilidade de termos um estado de gato de paridade oposta à paridade do gato inicial.

A evolução de um estado comprimido também pode ser calculada. O operador densidade do vácuo comprimido $\rho(\zeta)$, pode ser escrito segundo

$$\rho(\zeta) = S(\zeta) \mid 0\rangle\langle 0 \mid S^\dagger(\zeta), \tag{4.52}$$

onde $S(\zeta) = \exp((\zeta(a^\dagger)^2 - \zeta^\dagger a^2)/4)$. Os segundos momentos do estado exponencial comprimido $\rho(\zeta,\gamma) = (1-e^{-\gamma})S(\zeta)e^{-\gamma a^\dagger a}S^\dagger(\zeta)$, com $\zeta = \xi\exp i\phi$, são

$$\langle (a^\dagger)^2\rangle = \frac{e^{-i\phi}}{2}\sinh(\xi), \quad \langle a^2\rangle = \frac{e^{i\phi}}{2}\sinh(\xi), \quad \langle\{a,a^\dagger\}\rangle = \cosh(\xi). \tag{4.53}$$

O sistema de equações para os segundo momentos, que em termos de Λ e Ω é

$$\frac{d\langle a^2\rangle}{dt} = -2\frac{d}{dt}(i\Omega+\Lambda)\langle a^2\rangle, \tag{4.54}$$

$$\frac{d\langle (a^\dagger)^2\rangle}{dt} = 2\frac{d}{dt}(i\Omega-\Lambda)\langle (a^\dagger)^2\rangle, \tag{4.55}$$

$$\frac{d\langle\{a,a^\dagger\}\rangle}{dt} = -2\frac{d\Lambda}{dt}\langle\{a,a^\dagger\}\rangle + \frac{d\Lambda}{dt}, \tag{4.56}$$

pode integrar-se. Assim,

$$\langle (a^2)^{(\dagger)}\rangle(t) = \exp(-(-)2i\Omega - 2\Lambda)\langle (a^2)^{(\dagger)}\rangle(0), \tag{4.57}$$

$$\langle\{a,a^\dagger\}\rangle(t) = \exp(-2\Lambda)\langle\{a,a^\dagger\}\rangle(0) + (1-\exp(-2\Lambda))/2. \tag{4.58}$$

Destas equações achamos finalmente $\mathcal{U}(t)\rho(\zeta) = \rho(\zeta(t),\gamma(t))$, onde

$$\zeta(t) = \xi(t)\exp(i\phi(t)) \quad \phi(t) = \phi_0 - 2\Omega \tag{4.59}$$

$$\xi(t) = \mathrm{ArcTanh}\left(\frac{\sinh(\xi_0)}{\cosh(\xi_0)+\exp(2\Lambda)-1}\right) \tag{4.60}$$

$$\gamma(t) = \mathrm{ArcCoth}\left(\sqrt{e^{-4\Lambda}+2\cosh(\xi_0)e^{-2\Lambda}(1-e^{-2\Lambda})+(1-e^{-2\Lambda})^2}\right). \tag{4.61}$$

A evolução de um estado comprimido geral $\rho(\sigma,\zeta) = D(\sigma)\rho(\zeta)D^\dagger(\sigma)$ é dada por

$$\mathcal{U}(t)\rho(\sigma,\zeta) = \rho(\sigma(t),\zeta(t),\gamma(t)) = D(\sigma(t))\rho(\zeta(t),\gamma(t))D^\dagger(\sigma(t)), \tag{4.62}$$

ou

$$\mathcal{U}(t)\left(|\sigma_0,\zeta_0,n=0\rangle\langle\sigma_0,\zeta_0,n=0|\right)=D(\sigma(t))S(\zeta(t))(1-e^{-\gamma(t)})e^{-\gamma(t)a^\dagger a}S^\dagger(\zeta(t))D^\dagger(\sigma(t)), \tag{4.63}$$

onde $\sigma(t),\zeta(t)$ e $\gamma(t)$ vem dados pelas Eqs. (4.39) e (4.59–4.61), e

$$|\sigma_0,\zeta_0,n\rangle=D(\sigma(t))S(\zeta(t))|n\rangle. \tag{4.64}$$

Em termos de orbitais naturais temos

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(t)\left(|\sigma_0,\zeta_0,0\rangle\langle\sigma_0,\zeta_0,0|\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}p_n(t)|\sigma(t),\zeta(t).n\rangle\langle\sigma(t),\zeta(t),n| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}e^{-n\gamma(t)}(1-e^{-\gamma(t)})|\sigma(t),\zeta(t),n\rangle\langle\sigma(t),\zeta(t),n|. \end{aligned}\tag{4.65}$$

Observemos que

$$\rho(\zeta)=\lim_{\gamma\to\infty}\rho(\zeta,\gamma),$$

de maneira que o estado inicial é, precisamente, o estado comprimido.

Vimos que o conhecimento de Ω e Λ é tudo o que precisamos para caracterizarmos o efeito do banho no oscilador principal. Mais ainda, estas funções aparecem na Eq. (4.31). Desta forma, é suficiente resolvermos o sistema de equações para α_μ,

$$\dot{\alpha} = -i\omega_0\alpha - i\sum_k c_k\alpha_k, \tag{4.66}$$

$$\dot{\alpha_k} = -i\omega_k\alpha_k - ic_k\alpha. \tag{4.67}$$

com condição inicial $\alpha_0=1$, $\alpha_k=0$. Resolvendo (4.67) em termos de α, e empregando esta solução em (4.66) obtemos a equação integro–diferencial

$$\dot{\alpha}+i\omega_0\alpha+\int_0^t d\tau\sum_k c_k^2e^{i\omega_k(t-\tau)}\alpha(\tau)=0. \tag{4.68}$$

O logaritmo da solução desta equação, sujeita à condição inicial $\alpha(0)=1$, proporciona $-i\Omega-\Lambda$. Dado que (4.68) pode ser difícil de resolver, quaisquer métodos para obtermos soluções aproximadas são bem–vindos. Por exemplo, podemos fazer uma expansão em potências de c_k até segunda ordem, $\alpha(t)=\exp(k_0+ck_1+c^2k_2)$, para obtermos

$$-i\Omega(t)-\Lambda(t)=-i\omega_0t-\sum_k c_k^2\int_0^t dt_1\int_0^t dt_2e^{-i(\omega_k-\omega_0)t_2}. \tag{4.69}$$

Esperamos que (4.69) seja válida para c_k pequeno. Pode ser mostrado que fazermos isto é equivalente a empregarmos a aproximação de Weisskopf–Wigner dependente do tempo, uma espécie de "generalização" da aproximação de Born Markov, que também é válida para acoplamentos fortes e tempos curtos [90], ou para "reservatórios" finitos. A aproximação de Weisskopf–Wigner dependente do tempo é apresentada e discutida no capítulo 5.

4.4 Discussão

Observemos que para o cálculo de certas quantidades, p.ex., energia média e entropia no caso dos exemplos anteriormente tratados, somente precisamos conhecer $\Lambda(t)$. Contudo, se por exemplo, desejamos medir a função de Wigner de qualquer uma das densidades de campo (dos exemplos acima ou de qualquer outra densidade), também precisaríamos conhecer $\Omega(t)$. Para a determinação desta função podemos empregar o arranjo experimental para medir a função de Wigner [60], no qual um átomo de dois níveis é preparado no estado excitado $|e\rangle$ e enviado através de um conjunto de duas cavidades de baixo Q, $R1$ e $R2$, e uma cavidade C de alto Q entre elas, e é detectado eventualmente. O campo em C é deslocado pelo operador $D(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)$, correspondente ao efeito de uma fonte de micro–ondas conectada à cavidade. $R1$ e $R2$ se comportam como operadores de "rotação" no espaço de Hilbert dos estados atómicos, $|\, e\rangle \rightarrow (|\, e\rangle + e^{i\xi} \,|\, g\rangle)/\sqrt{2}$, e $|\, g\rangle \rightarrow (-e^{-i\xi} \,|\, e\rangle + |\, g\rangle)/\sqrt{2}$, com $\xi = 0$ em $R1$ e $\xi = \pi/2$ em $R2$. A interação dispersiva átomo–campo em C produz entrelaçamento: A componente de campo associada a $|\, e\rangle$ sofre a ação do operador $\exp(i\pi(a^\dagger a + 1)/2)$, enquanto a associada a $|\, e\rangle$ sofre a ação de $\exp(-i\pi a^\dagger a/2)$. Na Ref. [60] mostrou–se que para este arranjo experimental,

$$\Delta P = P_e - P_g = W(-\alpha, -\alpha^*, t)/2, \tag{4.70}$$

onde P_e (P_g) é a probabilidade de detectar o átomo de prova no estado superior (inferior) $|e\rangle$ ($|g\rangle$), e $W(-\alpha, -\alpha^*, t)$ é o valor de função de Wigner do campo na cavidade de alto Q, no instante t em que o átomo de prova sai desta cavidade. Observemos que, por conveniência, mudamos a normalização de W por um fator de π. A função de Wigner do estado coerente (4.40) é

$$W(\alpha, \alpha^*, t) = 2e^{-2(\sigma(t)-\alpha)(\sigma(t)-\alpha)^*}. \tag{4.71}$$

Observemos que $W(\alpha, \alpha^*, t)$ apresenta um máximo em $\alpha = \sigma(t) = \sigma_0 \exp(-\Lambda(t) - i\Omega(t))$. Como Λ pode ser obtido a partir de uma experiência de contagem de fótons, somente precisamos medir $\Omega(t)$. Escolhemos $\alpha = \alpha(t) = \sigma_0 \exp(-\Lambda(t)) \exp(-i\Phi(t))$, e ajustamos $\Phi(t)$ para maximizar ΔP. Se $\Phi(t) = \Omega(t) \mathrm{mod}(2\pi)$, então $\Delta P = 1$, de outra forma será menor que um, $\Delta P = \exp(-8\sigma_0^2 \exp(-2\Lambda) \sin^2((\Omega - \Phi)/2))$. Escolhendo tempos de saída t diferentes podemos mapear $\Omega(t)$. Observemos que, de fato, o que estamos fazendo é acharmos o valor certo de $\alpha(t)$ que desloca o campo em C até levá–lo no vácuo. Se conseguirmos fazer isto o átomo de prova será rodado em $R1$, ficando em um estado que é uma superposição dos estado superior e inferior, viajará livremente até $R2$ onde a rotação sera desfeita, e chegará nos detectores novamente no estado superior.

Em conclusão, mostramos que, sempre que as cavidades ópticas possam ser modeladas através do hamiltoniano (4.1), somente *duas funções experimentalmente mensuráveis* são necessárias para caracterizar seu comportamento. Os fatos de que um estado coerente permaneça coerente e que um estado tipo gato evolúa como uma superposição incoerente de estados de gato par e ímpar, permanecendo confinado num espaço bidimensional, podem ser relevantes do ponto de vista experimental. Este parece ser o caso da aparelhagem experimental [14] que seria, portanto, uma candidata imediata à aplicação dos presentes resultados.

Capítulo 5

Decoerência e Dissipação: Aproximações Perturbativa e de Weisskopf–Wigner Dependente do Tempo

5.1 Introdução

A teoria de pertubação dependente do tempo para sistemas quânticos fechados é uma das ferramentas fundamentais para a investigação de processos importantes tais como espalhamento, taxas de decaimento, e outros.O renovado interesse na área dos sistemas quânticos abertos, devido a sua conexão com várias situações experimentais de interesse atual e também com a conexão clássico–quântico justificam um esforço para a construção de esquemas sistemáticos de aproximação para tratar decoerência e dissipação. O processo de entrelaçamento de diferentes graus de liberdade devido à interação mútua frequentemente tem lugar em escalas curtas de tempo, enquanto a dinâmica markoviana associada com o regime cinético e usualmente suposta na derivação das equações mestras torna–se apropriada somente em estágios posteriores do processo de entrelaçamento. O propósito do presente capítulo é o de apresentar duas maneiras alternativas de estudar a evolução das matrizes densidade que sejam precisas para tempos curtos e tragam alguma luz acerca do processo dinâmico responsável pelo estabelecimento de correlações quânticas, enquanto retém níveis substanciais de precisão também para tempos longos.

Recentemente uma expansão perturbativa para tempos curtos foi desenvolvida para caracterizar as *escalas de tempo* deste processo [47]. Contudo. a validade desta expansão é limitada de maneira mais bem drástica a tempos curtos comparados com as escalas características dos subsistemas. Mostramos que este problema pode ser eludido pela construção de um esquema perturbativo para a matriz densidade na imagem de interação que é boa para tempos curtos na escala da interação. Esta expansão perturbativa revela claramente os elementos físicos essenciais do processo de entrelaçamento para interações fracas. É muito

similar em espírito com a regra áurea de Fermi para a taxas de transição. Uma aproximação mais imaginativa, que também deve ser válida em situações de acoplamento forte também é desenvolvida: é uma espécie de generalização dependente do tempo da aproximação de Weisskopf–Wigner. Mostramos que a bem conhecida aproximação de Born–Markov é uma forma limite de nosso Ansatz que, contudo, é inexata para tempos curtos.

Ilustramos nossos esquemas perturbativos com modelos solúveis relevantes e comparamos seus resultados com as soluções exatas e com os resultados da aproximação de Born–Markov. Frisamos que já que os nossos esquemas são aplicáveis a sistemas com poucos ou com muitos graus de liberdade, nossas aproximações são aplicáveis em casos em que a aproximação de Born–Markov não se aplica. Mostramos que a aproximação de Weisskopf–Wigner dependente do tempo descreve acuradamente o processo de entrelaçamento de tempo curto de sistemas quânticos finitos e também dá uma descrição boa da dinâmica da evolução temporal ulterior.

5.2 A "Regra Áurea" para Decoerência e Dissipação

Um esquema perturbativo similar em espírito à regra áurea de Fermi para as taxas de decaimento pode ser construída como segue. Suponhamos que os graus de liberdade do sistema de interesse estão acoplados a outro(s) grau(s) de liberdade de maneira que a dinâmica autônoma do sistema completo é descrita por um hamiltoniano que pode ser escrito como

$$H = H_S + H_{S'} + V = H_0 + V \tag{5.1}$$

onde H_S descreve os graus internos do sistema de interesse e V descreve a interação mútua. A evolução temporal do sistema completo é dada pela equação de Liouville-von Neuman ($\hbar = 1$)

$$i\dot{\rho}(t) = [H, \rho(t)], \tag{5.2}$$

que na imagem de interação fica

$$i\dot{\rho}_I(t) = [V_I(t), \rho_I(t)] \tag{5.3}$$

onde

$$V_I(t) = e^{iH_0t} V e^{-iH_0t} \quad \text{and} \quad \rho_I(t) = e^{iH_0t}\rho(t)e^{-iH_0t}. \tag{5.4}$$

Uma expansão perturbativa das soluções da Eq. (5.3), com contribuições até segunda ordem no hamiltoniano de acoplamento, pode escrever–se como segue

$$\rho_I(t) \approx \rho_I(0) - i\int_0^t dt_1[V_I(t_1), \rho_I(0)] - \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2[V_I(t_1), [V_I(t_2), \rho_I(0)]]. \tag{5.5}$$

Note que, a diferença do procedimento de expansão introduzido na ref. [47], as dependências temporais usuais relacionadas com a conservação de assintótica (tempos longos) de energia na dedução de ordem mais baixa de perturbação da regra áurea aparece imediatamente quando esta expressão é escrita fazendo uso explícito do espectro de $H_0 = H_S + H_{S'}$. A expansão (5.5) deve ser levada até a segunda ordem devido a que a matriz densidade é

definida no nível das probabilidades, e não no nível das amplitudes de probabilidade. Devido ao fato de estarmos interessados principalmente no comportamento de tempos curtos, não tomaremos o limite de tempos longos (na escala dos tempos característicos do subsistema). Como consequência, a conservação de energia está limitada pelas restrições do princípio da incerteza. A dinâmica reduzida do sistema S é obtida tomando o traço sobre S', $\rho_{IS}(t) = \mathrm{Tr}_{S'}\rho_I(t)$. Para qualquer condição inicial a densidade reduzida pode ser calculada até esta ordem, como também quantidades relacionadas tais como

$$E_S(t) = \mathrm{Tr}_S(H_0\rho_{IS}(t)) \quad \text{e} \quad \delta_S(t) = 1 - \mathrm{Tr}_S(\rho_{IS}^2(t)), \tag{5.6}$$

que mede a energia média do subsistema S e seu defeito de idempotência, ou entropia linear (uma medida quantitativa do entrelaçamento de S), respectivamente. Note que no último caso os termos que devem ser levados em consideração na evaluação de $\rho_{IS}^2(t)$ também devem limitar–se à segunda ordem, quando usamos a Eq. (5.5) no cálculo.

5.2.1 Osciladores Harmônicos Acoplados

Para ilustrar o uso deste esquema perturbativo tomemos o caso familiar no qual o sistema de interesse é um oscilador harmônico acoplado linearmente com um reservatório, modelado por um conjunto de N outros osciladores lineares, acoplados ao primeiro na aproximação de onda girante, de maneira que o hamiltoniano (5.1) assume a forma

$$H = \omega(a^\dagger a + 1/2) + \sum_k \omega_k(b_k^\dagger b_k + 1/2) + \sum_k c_k(a^\dagger b_k + b_k^\dagger a), \tag{5.7}$$

onde $a^\dagger$ ($b_k^\dagger$) é o operador de criação do oscilador de interesse (do modo k do banho) e a (b_k) é o operador de aniquilação respectivo. Estes operadores satisfazem as regras de comutação bosônicas usuais. As constantes ω, ω_k são as frequências naturais dos osciladores e c_k são as constantes de acoplamento. Supomos que em $t = 0$ a densidade total é dada por

$$\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \frac{e^{-\beta\hbar\sum_i \omega_i(a_i^\dagger a_i + 1/2)}}{\mathrm{Tr}e^{-\beta\hbar\sum_i \omega_i(a_i^\dagger a_i + 1/2)}}, \tag{5.8}$$

i.e., fatorada, sendo que o reservatório se encontra em equilíbrio térmico à temperatura inversa β. Vejamos que o hamiltoniano de acoplamento na imagem de interação é (com $\delta_k = \omega - \omega_k$)

$$V_I(t) = \sum_k c_k \left(a^\dagger b_k \mathrm{e}^{i\delta_k t} + a b_k^\dagger \mathrm{e}^{-i\delta_k t}\right), \tag{5.9}$$

e que sua média no sistema S', $\mathrm{Tr}_{S'}V_I(t)\rho_{S'}(0)$, que notamos $\langle V_I(t)\rangle$ por comodidade, é zero. Levando em consideração as igualdades

$$\langle b_k b_l\rangle = 0 = \langle b_k^\dagger b_l^\dagger\rangle. \quad \langle b_k^\dagger b_l\rangle = n_k\delta_{k,l} = \langle b_k b_l^\dagger\rangle - 1, \tag{5.10}$$

onde n_k, o número de médio de fótons no modo k, depende de β, e usando a expansão (5.5) obtemos

$$\begin{aligned}\rho_{IS}(t) \approx \quad & \rho_{IS}(0) - iA(t)[a^\dagger a, \rho_{IS}(0)] - (B(t)+C(t))(a^\dagger a \bullet - 2a \bullet a^\dagger + \bullet a^\dagger a)\rho_{IS}(0) \\ & -C(t)(aa^\dagger \bullet - 2a^\dagger \bullet a + \bullet aa^\dagger)\rho_{IS}(0). \end{aligned} \tag{5.11}$$

onde

$$A(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \sum_k c_k^2 \sin(\delta_k(t_1 - t_2)) = \sum_k \frac{c_k^2}{\delta_k^2}(\delta_k t - \sin(\delta_k t), \tag{5.12}$$

$$B(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \sum_k c_k^2 \cos(\delta_k(t_1 - t_2)) = \sum_k B_k(t) = 2\sum_k \frac{c_k^2}{\delta_k^2} \sin^2(\delta_k t/2), \tag{5.13}$$

$$C(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \sum_k c_k^2 n_k \cos(\delta_k(t_1 - t_2)) = 2\sum_k \frac{c_k^2}{\delta_k^2} n_k \sin^2(\delta_k t/2). \tag{5.14}$$

Para $E_S(t)$ e $\delta(t)$ (5.6), seguem então as igualdades

$$E_S(t) = E_S(0) + \omega \sum_k c_k^2 \frac{\sin^2((\omega_k - \omega)t/2)}{((\omega_k - \omega)/2)^2}(n_k - n_S(0)), \tag{5.15}$$

onde $n_S(0) = \mathrm{Tr}_S a^\dagger a \rho_{IS}(0)$, e, supondo que $\rho_{IS}(0)$ é um estado puro,

$$\delta_S(t) = \sum_k c_k^2 \frac{\sin^2((\omega_k - \omega)t/2)}{((\omega_k - \omega)/2)^2} \left(n_k + (2n_k + 1)\mathrm{Tr}_S(a^\dagger a \rho_{IS}(0) - a^\dagger \rho_{IS}(0) a \rho_{IS}(0))\right). \tag{5.16}$$

A variação no tempo da energia do oscilador principal, dada pela Eq. (5.15), tem uma interpretação física simples: se o reservatório estiver a temperatura zero o sistema S perderá energia para o reservatório, e sua energia portanto decrescerá. Se, pelo contrário, o reservatório está a temperatura finita, o sistema de interesse ganhará energia dos osciladores com excitação média suficientemente alta. Ainda, para tempos $t \gg 2/|\omega - \omega_k|$, as contribuições principais virão das transições que quase conservam a energia, sempre que o reservatório tenha um número de osciladores grande o suficiente. Note que para tempos curtos na escala das frequências naturais do sistema, $t \ll 2/|\omega - \omega_k|$, a dependência da frequência desaparece em concordância com o que foi achado na expansão de tempo curto da Ref. [47]. Isto significa que ao menos no início do processo de estabelecimento de correlações quânticas, todos os estados com acoplamento não nulo são populados. À medida que transcorre o tempo a função seno quadrado e seu denominador progressivamente obrigam o cumprimento das limitações impostas pela conservação de energia total.

Supondo que o oscilador de interesse começa num estado de gato ímpar com $\sigma_0 = 2$, isto é, o estado inicial é dado por

$$\rho_{\sigma_0 o} = N_o(\sigma_0)(|\sigma_0\rangle, |-\sigma_0\rangle) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle\sigma_0| \\ \langle -\sigma_0| \end{pmatrix}. \tag{5.17}$$

onde $N_o(\sigma_0) = (1 - \langle -\sigma_0|\sigma_0\rangle)^{-1}/2$ é um fator de normalização e $|\sigma_0\rangle$ um estado coerente usual, a expressão para o defeito de idempotência reduz–se a

$$\delta_S(t) = 2\sum_k c_k^2 \frac{\sin^2((\omega_k - \omega)t/2)}{((\omega_k - \omega)/2)^2} \left(n_k + (2n_k + 1)|\sigma_0|^2 \frac{1 + \mathrm{e}^{-2|\sigma|^2}}{1 - \mathrm{e}^{-2|\sigma|^2}} \right). \tag{5.18}$$

ou ainda à expressão

$$\delta_S(t) = 4B(t)|\sigma_0|^2 \frac{1 + \mathrm{e}^{-2|\sigma|^2}}{1 - \mathrm{e}^{-2|\sigma|^2}}, \tag{5.19}$$

se o reservatório está a temperatura nula.

5.3 O Ansatz de Weisskopf–Wigner Dependente do Tempo

Nesta seção desenvolvemos um esquema de expansão, alterno ao da seção prévia, que o aperfeiçoa no mesmo sentido em que a aproximação de Weisskopf-Wigner [84] usual aperfeiçoa a regra áurea das taxas de decaimento. Fazemos um Ansatz exponencial para o entrelaçamento temporal da densidade reduzida do subsistema S assim

$$\rho_S(t) = T \exp\left(L_S t + \sum_{n=1}^{N} \lambda^n \int_0^t d\tau\, L^{(n)}(\tau) \right) \rho_S(0),$$

onde $L_S = [H_S, \bullet]/(i\hbar)$ é independente do tempo e corresponde à evolução livre do sistema de interesse; T é o operador de evolução temporal, os $L^{(n)}(t)$ são superoperadores dependentes do tempo a serem determinados e λ é um parâmetro de contagem de potências que controla a ordem da interação e será eventualmente igualado a um. A ordem da aproximação é N, e usualmente $N = 2$. Para simpificar o Ansatz é conveniente termos ρ_S na imagem de interação,

$$\rho_{IS}(t) = T \exp\left(\sum_{n=1}^{N} \lambda^n \int_0^t d\tau\, L_I^{(n)}(\tau) \right) \rho_{IS}(0).$$

Derivando com respeito ao tempo a equação de cima segue

$$\frac{d\rho_{IS}(t)}{dt} = \left(\sum_{n=1}^{N} \lambda^n L_I^{(n)}(t) \right) \rho_{IS}(t). \tag{5.20}$$

Para identificar os vários ingredientes formais em este Ansatz, comparamos estas equações com as equações formais exatas que descrevem a evolução da densidade reduzida na imagem de interação. Um ponto de partida conveniente é a equação exata para a densidade completa (também na imagem de interação)

$$\frac{d\rho_I(t)}{dt} = \lambda L_{I\mathrm{int}}(t)\rho_I(t). \tag{5.21}$$

ou em forma integral

$$\rho_I(t) = \rho_{IS'}(0)\rho_{IS}(0) + \lambda \int_0^t dt_1 L_{I\text{int}}(t_1)\rho_I(t_1)dt_1. \tag{5.22}$$

onde supusemos um estado inicial fatorado

$$\rho(0) = \rho_S(0)\rho_{S'}(0) = \rho_{IS}(0)\rho_{IS'}(0) = \rho_I(0).$$

Tomando o traço sobre S' em (5.22) obtemos a seguinte equação exata para a densidade reduzida $\rho_{IS}(t)$

$$\rho_{IS}(t) = \rho_{IS}(0) + \lambda \text{Tr}_{S'} \int_0^t dt_1 L_{I\text{int}}(t_1)\rho_I(t_1). \tag{5.23}$$

O mesmo pode ser feito usando a N-ésima iteração da Eq. 5.22, com o resultado

$$\begin{aligned} \rho_{IS}(t) &= \rho_{IS}(0) + \text{Tr}_{S'} \sum_{n=1}^{N} \lambda^n \int_0^t dt_1 K_n(t_1)\rho_{IS'}(0)\rho_{IS}(0) \\ &+\lambda^{N+1}\text{Tr}_{S'} \int_0^t dt_1 L_{I\text{int}}(t_1) \ldots \int_0^{t_N} dt_{N+1} L_{I\text{int}}(t_{N+1})\rho_{IS}(t_{N+1}), \end{aligned} \tag{5.24}$$

onde

$$K_1(t_1) = L_{I\text{int}}(t_1), \quad K_{n\geq 2}(t_1) = L_{I\text{int}}(t_1) \int_0^{t_1} dt_2 L_{I\text{int}}(t_2) \ldots \int_0^{t_{n-1}} dt_n L_{I\text{int}}(t_n). \tag{5.25}$$

Para comparar a equação de cima com a Eq. (5.20) primeiro derivamo-la com respeito ao tempo para obter

$$\frac{\rho_{IS}(t)}{dt} = \text{Tr}_{S'} \sum_{n=1}^{N} \lambda^n K_n(t)\rho_{IS'}(0)\rho_{IS}(0) + O(\lambda^{N+1}). \tag{5.26}$$

Agora, se pudermos relacionar $\rho_{IS}(0)$ com $\rho_{IS}(t)$ através de uma expressão da forma

$$\rho_{IS}(0) = \sum_{n=1}^{N-1} \lambda^n M_n(t)\rho_{IS}(t) + O(\lambda^N), \tag{5.27}$$

poderemos substituir esta expressão na Eq. (5.26) e obter, por comparação com (5.20),

$$L_{In}(t) = \sum_{l=0}^{n-1} \text{Tr}_{S'} K_{n-l}(t)\rho_{IS'}(0)M_l(t) = -\sum_{l=0}^{n-1} \frac{dZ_{n-l}(t)}{dt} M_l(t) \tag{5.28}$$

com $Z_n(t)$ definido como

$$Z_n(t) = -\text{Tr}_{S'} \int_0^t dt_1 K_n(t_1)\rho_{IS'}(0). \tag{5.29}$$

Em seguida mostramos como identificar os $M_n(t)$ obtendo a Eq. (5.27) de maneira recursiva. De (5.23) segue que

$$\rho_{IS}(0) = \rho_{IS}(t) - \lambda \mathrm{Tr}_{S'} \int_0^t dt_1 L_{I\mathrm{int}}(t_1)\rho_I(t_1) \tag{5.30}$$

a qual, depois de usar a Eq. (5.22), fornece

$$\begin{aligned}\rho_{IS}(0) &= \rho_{IS}(t) - \lambda \mathrm{Tr}_{S'} \int_0^t dt_1 L_{I\mathrm{int}}(t_1)\rho_{IS'}(0)\rho_{IS}(t) \\ &\quad -\lambda^2 \mathrm{Tr}_{S'} \int_0^t dt_1 L_{I\mathrm{int}}(t_1) \int_0^{t_1} dt_2 L_{I\mathrm{int}}(t_2)\rho_I(t_2) \\ &\quad +\lambda^2 \mathrm{Tr}_{S'} \int_0^t dt_1 L_{I\mathrm{int}}(t_1)\rho_{IS'}(0)\mathrm{Tr}_{S'} \int_0^{t_1} dt_2 L_{I\mathrm{int}}(t_2)\rho_I(t_2). \end{aligned} \tag{5.31}$$

O uso repetido de (5.22) e de (5.30) nos permite exprimir $\rho_{IS}(0)$ em termos de $\rho_{IS}(t)$ na ordem desejada. Os primeiros quatro $M_n(t)$ estão dados por

$$\begin{aligned} &M_0(t) = 1, \quad M_1(t) = Z_1(t), \quad M_2(t) = Z_2(t) + Z_1^2(t), \\ &\text{e} \quad M_3(t) = Z_3(t) + Z_1(t)Z_2(t) + Z_2(t)Z_1(t) + Z_1^3(t), \end{aligned} \tag{5.32}$$

onde Z_n foi definido acima. Observemos a relação de recorrência

$$M_n(t) = \sum_{l=0}^{n-1} Z_{n-l}(t) M_l(t), \qquad M_0(t) = 1. \tag{5.33}$$

As Eqs.(5.28), (5.29), e (5.33) são tudo que é preciso para escrever a aproximação de Weisskopf–Wigner dependente do tempo de ordem N. Nos restringimos aqui à segunda ordem que precisa dos dois primeiros termos da Eq. (5.20). Eles são dados por

$$L_{I1}(t_1) = -\frac{dZ_1(t)}{dt} = \mathrm{Tr}_{S'} L_{I\mathrm{int}}(t)\tilde{\rho}_{S'}(0) \tag{5.34}$$

$$\begin{aligned} L_{I2}(t_1) &= -\frac{dZ_2(t)}{dt} - \frac{dZ_1(t)}{dt} Z_1(t) = \mathrm{Tr}_{S'} L_{I\mathrm{int}}(t) \int_0^t dt_1 L_{I\mathrm{int}}(t_1)\rho_{IS'}(0) \\ &\quad - \mathrm{Tr}_{S'} L_{I\mathrm{int}}(t)\rho_{IS'}(0) \int_0^t dt_1 \mathrm{Tr}_{S'} L_{I\mathrm{int}}(t_1)\rho_{IS'}(0). \end{aligned} \tag{5.35}$$

Isto leva finalmente ao aproximante de segunda ordem para a equação de movimento da densidade reduzida (λ=1)

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\rho}_S(t)}{dt} &= \Big(\frac{1}{i\hbar}[\langle V_I(t)\rangle_{S'}, \bullet] \\ &\quad - \frac{1}{\hbar^2} \mathrm{Tr}_{S'} \int_0^t dt_1 [V_I(t) - \langle V_I(t)\rangle_{S'}, [V_I(t_1) - \langle V_I(t_1)\rangle_{S'}, \rho_{S'}(0)\bullet]] \Big) \tilde{\rho}_S(t), \end{aligned} \tag{5.36}$$

onde $\langle V_I(t)\rangle_{S'} = \mathrm{Tr}_{S'} V_I(t)\rho_{IS'}(0)$.

Notemos que na anterior derivação *não* impusemos restrições à natureza dos sistemas S e S'. A Eq. (5.36) pode ser vista como uma generalização da aproximação de Born–Markov usual no sentido em que os superoperadores que agem em $\rho_{IS}(t)$ são dependentes do tempo. Também a equação de cima é acurada para tempos curtos, independentemente da magnitude dos acoplamentos.

5.3.1 Modelo Exatamente Solúvel

Como uma primeira ilustração do uso do Ansatz de Weisskopf–Wigner dependente do tempo consideramos o modelo solúvel introduzido em [50] e generalizado em [27], que tem a propriedade de apresentar decoerência sem dissipação no sentido que o hamiltoniano interno do subsistema de interesse é uma constante de movimento. O hamiltoniano que descreve este modelo é da forma

$$H = h(A) + \hbar f(A) \sum c_i (b_i^\dagger + b_i) + \hbar \sum \omega_i (b_i^\dagger b_i + 1/2), \tag{5.37}$$

onde A úm operador hermitiano do sistema de interesse e $h(A)$ sua dinâmica autônoma. Este sistema encontra–se acoplado a um conjunto de N osciladores harmônicos via um acoplamento separável (segundo termo do lado direito de (5.37)) que comuta com $h(A)$. O modelo é exatamente solúvel sem precisar recorrer às aproximações usuais envolvidas na aproximação de Born–Markov, tais como tomar o limite de um número infinito de osciladores, fazer suposições sobre a forma da densidade espectral, etc.

Usando a aproximação de Weisskopf–Wigner dependente do tempo de segunda ordem, e supondo uma densidade inicial fatorada, da forma da Eq. (5.8),

$$\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \frac{e^{-\beta\hbar \sum_i \omega_i (b_i^\dagger b_i + 1/2)}}{\mathrm{Tr} e^{-\beta\hbar \sum_i \omega_i (b_i^\dagger b_i + 1/2)}}, \tag{5.38}$$

segue com ajuda das equações (5.9), (5.10) e do fato de que o hamiltoniano do acoplamento tem média zero no subsistema S', a equação

$$\dot{\rho_S}(t) = \frac{1}{i\hbar}[k(t), \rho_S(t)] - \lambda(t) \left(f^2 \rho_S(t) - 2 f \rho_S(t) f + \rho_S(t) f^2 \right) \tag{5.39}$$

onde

$$k(t) = h(A) - f^2(A) R(t), \qquad \lambda(t) = \sum_i \frac{c_i^2}{\omega_i} \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega_i}{2}\right) \sin \omega_i t$$

e

$$R(t) = \hbar \sum_i \frac{c_i^2}{\omega_i} (1 - \cos \omega_i t),$$

onde, diferentemente da subseção 5.2.1, a expressão para n_k foi escrita por extenso. Neste caso a aproximação de Weisskopf–Wigner de segunda ordem dá a resposta *exata* para a evolução do sistema de interesse (ver [27]), ainda no caso em que é adicionado um outro acoplamento linear do tipo $\hbar g(A) \sum d_i (b_i^\dagger + b_i)$. Mesmo no caso de número infinito de osciladores existem diferenças essenciais com os resultados da aproximação de Born–Markov, que são discutidos extensivamente na ref. [27], e que foram reproduzidos no capítulo 3.

5.3.2 Osciladores Harmônicos Acoplados

Como um segundo exemplo do uso da Eq. (5.36) consideremos de novo o sistema de osciladores harmônicos acoplados na aproximação da onda girante, Eq. (5.7), para um número

finito de osciladores e temperatura zero. Este caso também permite uma solução exata. As equações de movimento de Heisenberg se escrevem como

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -i\omega_0 a - i\sum_k c_k b_k, \\ \dot{b_k} &= -i\omega_k b_k - i c_k a. \end{aligned} \tag{5.40}$$

Observemos que os coeficientes c_k não são completamente arbitrários: a condição de positividade do hamiltoniano impõe a desigualdade

$$\omega_0 > \sum_k \frac{c_k^2}{\omega_k}. \tag{5.41}$$

Esta condição substitui a Eq. (19) da Ref. [81] para o caso da interação posição–posição,

$$\omega^2 > \sum_k \frac{c_k^2}{\omega_k^2}. \tag{5.42}$$

A aplicação da aproximação de Weisskopf–Wigner dependente do tempo de segunda ordem, junto com a suposição de um estado inicial fatorado da forma (5.8), temperatura finita, produz, depois do reconhecimento de que o hamiltoniano do acoplamento na imagem de interação tem traço nulo e do uso dos segundos momentos dos osciladores do reservatório dados por (5.10), a seguinte equação para a densidade do sistema na imagem de interação,

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{IS}(t)}{dt} = \quad & -i\frac{dA(t)}{dt}[a^\dagger a, \rho_{IS}(t)] - \frac{d}{dt}(B(t)+C(t))(a^\dagger a \bullet - 2a \bullet a^\dagger + \bullet a^\dagger a)\rho_{IS}(t) \\ & -\frac{dC(t)}{dt}(aa^\dagger \bullet - 2a^\dagger \bullet a + \bullet aa^\dagger)\rho_{IS}(t), \end{aligned} \tag{5.43}$$

com A, B, C dados pelas Eqs. (5.12), (5.13) e (5.14). Daqui podemos obter uma equação diferencial para a energia média do sistema, $E_S(t) = \mathrm{Tr}_S H_S \rho_{IS}(t)$, multiplicando por $a^\dagger a$ e tomando o traço,

$$\frac{dE}{dt} = -2\frac{dB}{dt}E(t) + 2\frac{dC}{dt}. \tag{5.44}$$

Esta equação é resolvida imediatamente levando a

$$E_S(t) = \mathrm{e}^{-2B(t)}\left(E_S(0) + \hbar\omega\sum_k n_k(\mathrm{e}^{2B_k(t)} - 1)\right). \tag{5.45}$$

A Eq. (5.15) é obtida expandindo as exponenciais na equação de cima e conservando os termos lineares em B. Vemos que, quando menos no caso da energia, a aproximação perturbativa tipo regra áurea e a aproximação de Weisskopf–Wigner predizem resultados quase idênticos sempre que $B(t) \ll 1$. Assim que deixa de valer esta desigualdade esperamos que a aproximação de Weisskopf–Wigner seja melhor. Para efeitos de comparação com a solução exata consideramos o limite de temperatura zero ($n_k = 0, C(t) = 0$).

O caso do defeito de idempotência é um pouquinho mais complicado: a especificação do estado inicial torna-se indispensável. Vamos supor que o oscilador de interesse começa num estado de gato ímpar com $\sigma_0 = 2$, como na seção 5.2.1. Podemos calcular a evolução temporal deste estado inicial empregando a Eq. (5.43). O resultado é o seguinte

$$\rho(t) = p_o^o(t)\rho_{\sigma(t)o} + p_o^e(t)\rho_{\sigma(t)e}, \tag{5.46}$$

com

$$p_o^o(t) = \frac{1}{2}\frac{1 - \langle -\sigma(t)|\sigma(t)\rangle}{1 - \langle -\sigma_0|\sigma_0\rangle}\left(1 + \frac{\langle -\sigma_0|\sigma_0\rangle}{\langle -\sigma(t)|\sigma(t)\rangle}\right) \tag{5.47}$$

$$p_o^e(t) = \frac{1}{2}\frac{1 + \langle -\sigma(t)|\sigma(t)\rangle}{1 - \langle -\sigma_0|\sigma_0\rangle}\left(1 - \frac{\langle -\sigma_0|\sigma_0\rangle}{\langle -\sigma(t)|\sigma(t)\rangle}\right). \tag{5.48}$$

Levando em consideração que as duas probabilidades de cima somam um, vemos que o defeito de idempotência pode ser escrito como

$$\delta(t) = 1 - (p_o^o(t))^2 - (p_o^e(t))^2 = 2p_o^o(t)p_o^e(t), \tag{5.49}$$

que pode ser colocada na forma mais explícita

$$\delta(t) = \frac{1}{2}\frac{1 - \exp(-4|\sigma_0|^2 e^{-2B(t)})}{(1 - \exp(-4|\sigma_0|^2))^2}\left(1 - \exp(-4|\sigma_0|^2(1 - e^{-2B(t)}))\right). \tag{5.50}$$

Se $B(t) \ll 1$ e $B(t)|\sigma_0|^2 \ll 1$ esta expressão reduz-se àquela calculada na seção 5.2.1. Assim, a exatidão da regra áurea, quando menos no cálculo do defeito de idempotência depende não somente do valor absoluto de $B(t)$, mas também do estado inicial específico considerado.

Mostramos resultados numéricos para dois casos. Em ambos o oscilador principal tem frequência $\omega_0 = 5/2$. Ele interage com outros quatro osciladores com frequências igualmente espaçadas entre $\omega_{min} = 1$ e $\omega_{max} = 4$. No primeiro caso tomamos $c_k = .1$, e $c_k = 0.5$ no segundo. As frequências do "banho" e as constantes de acoplamento foram escolhidas de modo a simular, até certo ponto, as suposições usuais que levam a uma perda de energia exponencial do oscilador principal. O primeiro caso corresponde a uma interação mais bem fraca, enquanto o segundo é um caso de interação forte. A intensidade da interação pode ser medida em termos da escala de tempo de seus efeitos em relação à escala de tempo autônoma do sistema de interesse [36]. Por exemplo, para o primeiro caso temos $\tau \approx 12$ para $c_k = 0.1$, e no segundo $\tau \approx 1.5$ para $c_k = 0.5$, que devem ser comparados com o período de oscilações do oscilador livre $T \approx 2.5$. A energia exata E (numérica) do oscilador principal é desenhada nas Figs. 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4 junto com os resultados da aproximação de Weisskopf–Wigner dependente do tempo de segunda ordem TWW e da regra áurea GR. O resultado da aproximação de Born–Markov BM, baseados na seguinte estimativa para $B(t)$

$$B(t) = \pi c^2 \frac{\delta n}{\delta \omega} t. \tag{5.51}$$

onde $\delta n/\delta\omega$ é a densidade de osciladores do banho, é incluída com fins de ilustração. Frisamos que a aproximação de Born–Markov é inexata para tempos curtos. O estado inicial utilizado não é especificado, pois em todos os casos (E, TWW, BM, GR) o comportamento da energia depende unicamente da energia inicial do sistema e não do estado inicial específico. Na Figs. 5.1 e 5.2 vemos que a regra áurea é quase tão boa quanto a Weisskopf–Wigner para $t < 2$; depois a primeira superestima a perda de energia. Este efeito é ainda mais pronunciado nas Figs. 5.3 e 5.4 No caso de interação forte ainda temos ressurgimentos de energia ("revivals"). A aproximação de Weisskopf–Wigner perde alguns e a maior parte dos detalhes do comportamento da energia como poderíamos esperar.

No caso da decoerência a aproximação de Weisskopf–Wigner continua a dar bons resultados, enquanto a regra áurea apresenta maiores problemas que no caso da energia: como mencionamos acima isto é devido a que a aproximação da regra áurea é boa quando a interação é fraca e o σ_0 que aparece nas expressões do estado de gato inicial é pequeno. Curiosamente a aproximação de Born–Markov é melhor no caso do acoplamento forte: isto é devido a que na região desenhada o oscilador principal perde a sua energia para os outros modos, de maneira que, nessa janela de tempo os quatro osciladores operam como se o acoplamento fosse mais fraco e o número de osciladores muito maior.

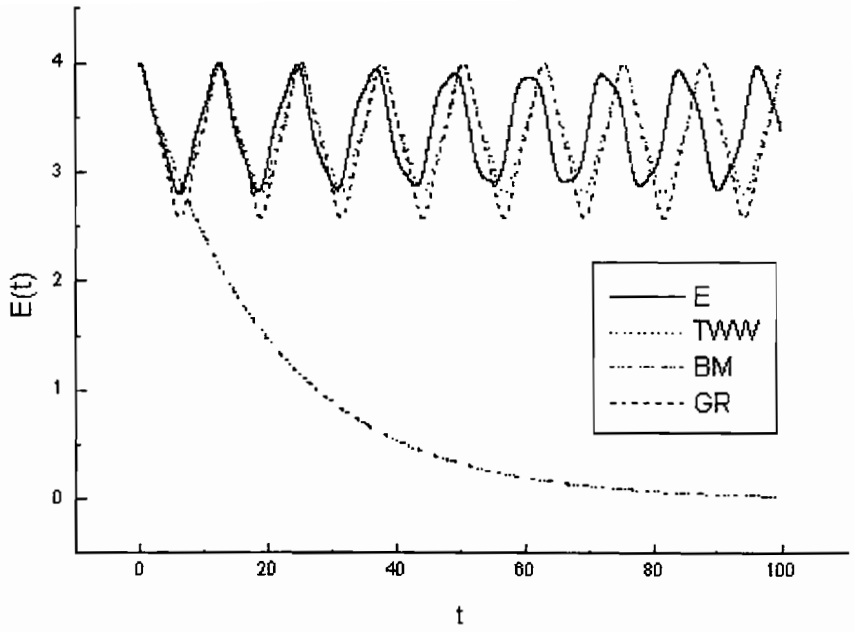

Figura 5.1: Energia do Oscilador Principal. c=0.1

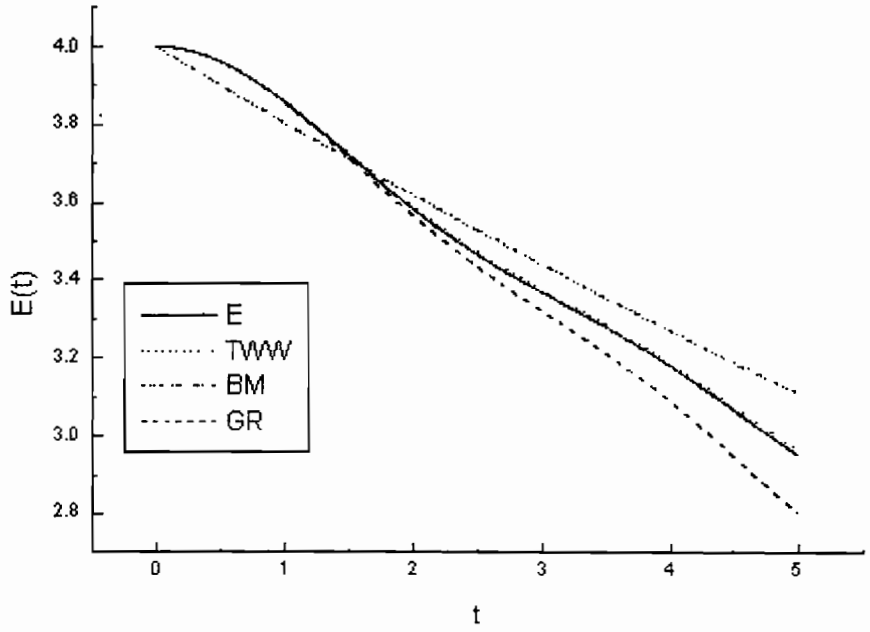

Figura 5.2: Energia do Oscilador Principal. c=0.1

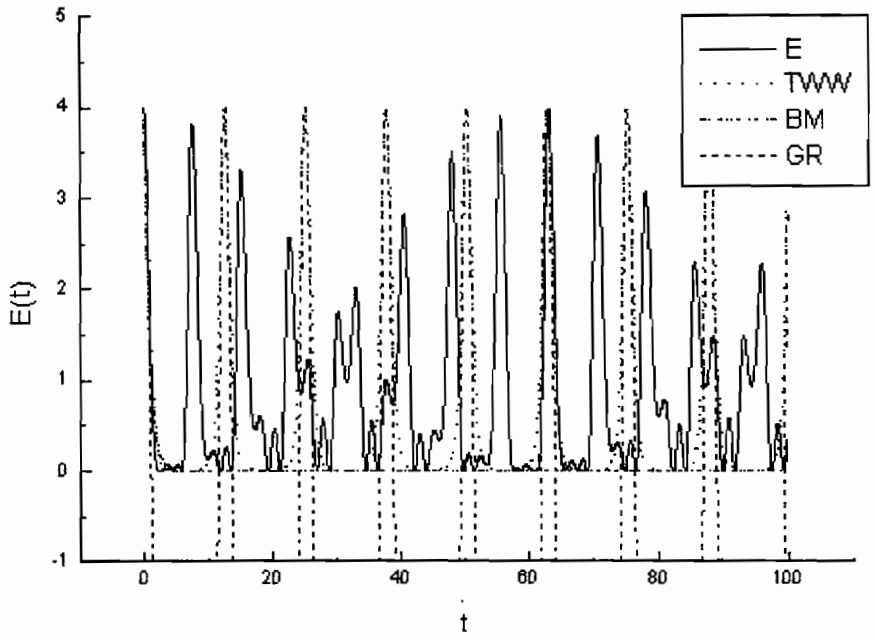

Figura 5.3: Energia do Oscilador Principal. c=0.5

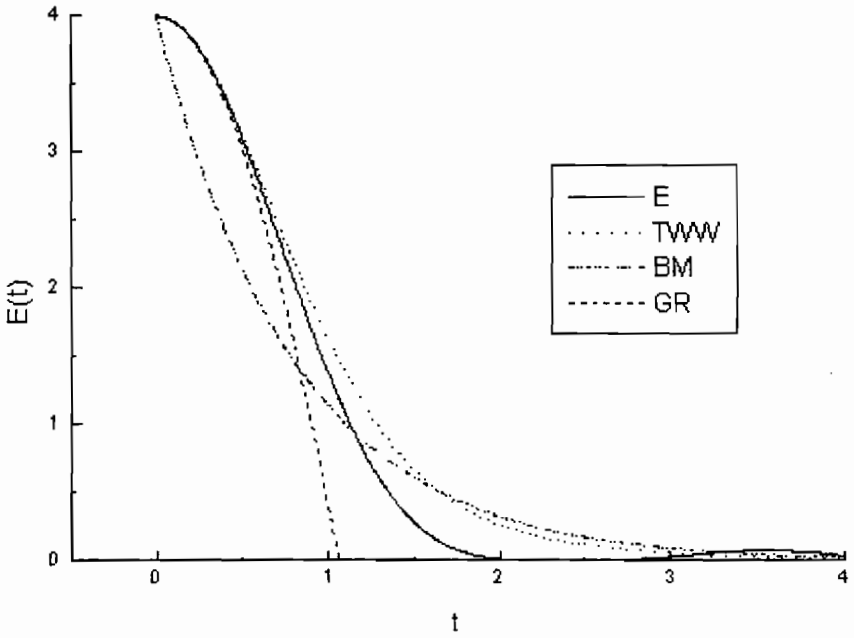

Figura 5.4: Energia do Oscilador Principal. c=0.5

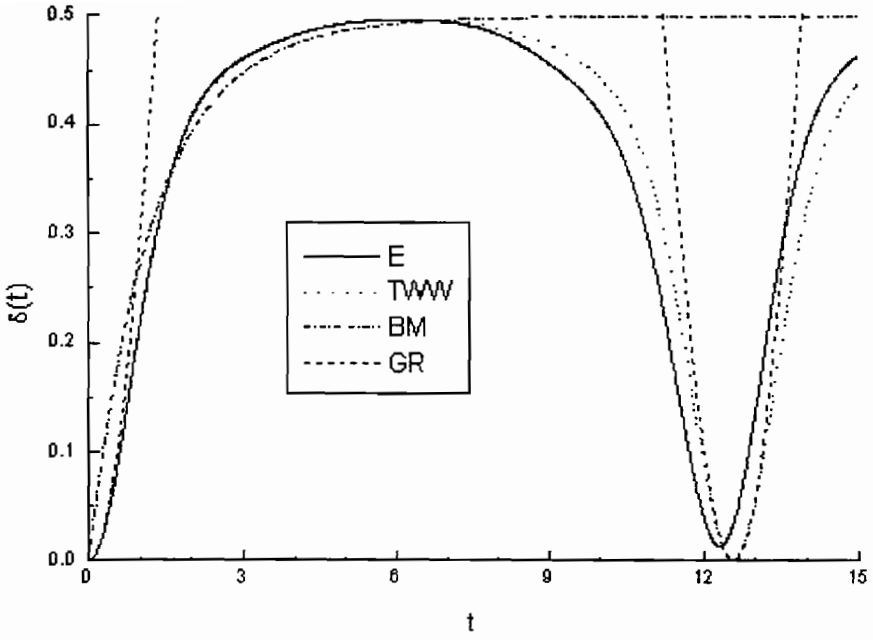

Figura 5.5: Decoerência: Gato Ímpar. c=0.1

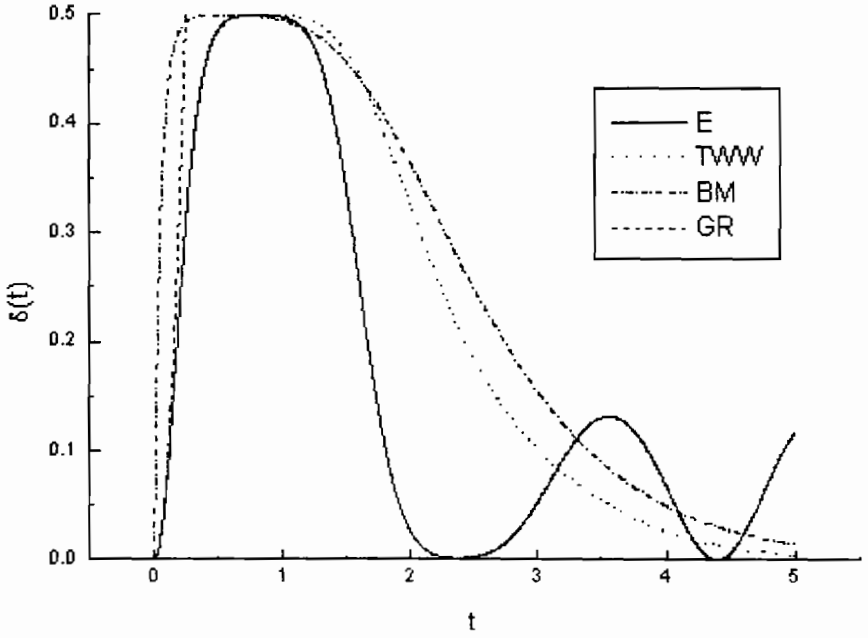

Figura 5.6: Decoerência: Gato Ímpar. c=0.5

Capítulo 6

Transição Dinâmica Pré–Cinética nas Propriedades de Decoerência de um Sistema Acoplado a um Reservatório

Recentemente muito esforço tem sido dedicado à descrição das propriedades de decoerência de um sistema de interesse acoplado com um reservatório. Sabemos que isto não é uma tarefa simples porque a dinâmica efetiva de um subsistema quântico é conhecidamente não linear e não markoviana [63]. Nas poucas situações em que é possível achar uma solução exata tal dinâmica tem provado ser bem mais rica do que a predição da aproximação de Born–Markov usual, um decaimento exponencial, como foi mostrado nos capítulos 3 e 4. Dependendo do ambiente específico ao qual o sistema está acoplado, vários limites assintóticos diferentes podem ser obtidos, mostrando tanto decoerência parcial quanto decoerência total. O comportamento exponencial é recuperado somente para ambientes ôhmicos e temperatura finita [27].

Como uma caracterização geral das propriedades de decoerencia, ainda para interações fracas parace difícil, nos restringimos ao tratamento do regime pré–cinético de sistemas acoplados a ambientes com tempo característico Ω^{-1} muito pequeno, tais que o hamiltoniano possa exprimir–se na forma

$$H = H_S + H_B + H' = H_S + \hbar \sum_k \omega_k (a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2}) + \hbar O_S \sum_k c_k (a_k + a_k^\dagger), \tag{6.1}$$

onde H_S governa a evolução livre do sistema de interesse S, H_B a evolução livre do reservatório, modelado como um conjunto de osciladores harmônicos independentes, e o termo de acoplamento é de forma separável com constantes de acoplamento c_k. O_S é um operador adimensional do sistema. Mostramos abaixo que para uma temperatura dada do reservatório, temos sempre uma superposição das propriedades de temperatura finita com as propriedades de temperatura zero. Usamos uma condição inicial do tipo

$$\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_R(0) = \rho_S(0) \otimes \frac{\exp(-\hbar\beta \sum_k (a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2}))}{\mathrm{Tr} \exp(-\hbar\beta \sum_k (a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2}))}. \tag{6.2}$$

onde β é a (o inverso da) temperatura.

Em seguida apresentamos dois procedimentos alternativos que permitem a análise das propriedades de decoerência no regime pré–cinético. Consideramos que as escalas relevantes do hamiltoniano (6.1) são: ω_S^{-1}, a (menor) escala típica de S, γ^{-1} a constante de relaxação de $\langle O_S(t)\rangle$, Ω^{-1} o tempo característico do reservatório e $\hbar\beta$, o "tempo térmico". Nos restringimos a tempos $t \ll \omega_S^{-1}$, e a interações não muito fortes (tais que $\omega_S^{-1} > \gamma^{-1}$).

A bem conhecida expansão de Zassenhaus [79] permite escrever

$$U(t) = e^{-iHt/\hbar} \approx \cdots e^{A_3 t^3} e^{A_2 t^2} e^{-iH_S t/\hbar} e^{-i(H_B+H')t/\hbar}, \tag{6.3}$$

onde

$$A_2 = [H', H_S]/(2\hbar^2) \quad A_3 = i[H_S, [H', H_S]]/(3\hbar^3) + [H_B + H', [H', H_S]]/(6\hbar^3). \tag{6.4}$$

Note que as contribuições provenientes do termo $A_2 t^2 \propto \omega_S t O'_S \sum_k c_k t(a_k^\dagger + a_k)$, onde O'_S é um operador adimensional, podem ser descartadas se comparadas com as de $H't/\hbar = O_S \sum_k c_k t(a_k^\dagger + a_k)$, se $\omega_S t \ll 1$. Contribuições de termos de mais alta ordem também podem ser descartadas. Nesta aproximação o modelo é solúvel [50, 27], como vimos no capítulo 3. Obtemos

$$\rho(t) = \mathcal{U}_S(t)\mathcal{U}_R(t)(e^{-\lambda(t)\mathcal{D}_\mathcal{O}}\rho_C(t)), \text{ e } \rho_S(t) = \mathcal{U}_S(t)\mathcal{U}_R(t)(e^{-\lambda(t)\mathcal{D}_\mathcal{O}}\rho_S(0)), \tag{6.5}$$

onde $\mathcal{U}_S(t)$ é o superoperador que realiza a evolução livre do sistema, $\mathcal{U}_R(t)$ é uma contribuição unitária à evolução do sistema proveniente da interação com o banho e correspondente ao hamiltoniano dependente do tempo $-\hbar R(t) O_S^2$, $\mathcal{D}_\mathcal{O}$ é o superoperador de decoerência $[O_S, [O_S, .]]$, $\rho_C(t)$ é um operador sistema–banho entrelaçado, e $\lambda(t) = \lambda_0(t) + \lambda_\beta(t)$ é um coeficiente dependente do tempo. No limite do contínuo $R(t)$, $\lambda_0(t)$ e $\lambda_\beta(t)$ são dados por

$$R(t) = \int_0^\infty d\omega D(\omega)(1 - \cos(\omega t)) \tag{6.6}$$

$$\lambda_0(t) = \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} D(\omega)(1 - \cos(\omega t)) \tag{6.7}$$

$$\lambda_\beta(t) = 2\int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} D(\omega) \frac{1 - \cos(\omega t)}{e^{\hbar\beta\omega} - 1}, \tag{6.8}$$

onde a densidade espectral $D(\omega)$ que incorpora os efeitos da constante de acoplamento e da densidade dos osciladores [67], é $D(\omega) = c^2(\omega) n(\omega) \omega^{-1}$. O papel de $\rho_C(t)$ é o de estabelecimento de correlações sistema–banho, e a manutenção de informações (no banho) do estado inicial do sistema. Claramente as propriedades de decoerência dependem de $\lambda(t)$.

Antes de realizar uma análise tanto da densidade espectral quanto da temperatura, fazemos uma derivação alternativa. Sabemos que (capítulo 3) a aproximação de Weisskopf–Wigner dada por

$$\frac{d\tilde{\rho}_S(t)}{dt} = -\frac{1}{\hbar^2}\int_0^t d\tau \,\mathrm{Tr}_R[\tilde{H}'(t).[\tilde{H}'(\tau).\rho_R(0)\bullet]]\tilde{\rho}_S(t). \tag{6.9}$$

onde o til indica a imagem de interação, é válida para todo tempo se a interação é fraca o suficiente, e é válida para tempos curtos ainda se a interação for forte [90]. A aproximação (6.9) tem sido deduzida sob a suposição de que $\mathrm{Tr}_R \tilde{H}'(t)\rho_R(0) = 0$. Em particular para o modelo das referências [50, 27], examinado no capítulo 3 dita aproximação é exata. Se o tempo t no limite superior da integral se deixa crescer para infinito recuperamos a aproximação de Born–Markov usual. Depois de alguma manipulação a eq. (6.9) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\rho}_S(t)}{dt} &= -\int_0^t d\tau \phi_S(t-\tau)[\tilde{O}_S(t).[\tilde{O}_S(\tau).\rho_S(t)]] \\ &+ i\int_0^t d\tau \phi_A(t-\tau)[\tilde{O}_S(t).\{\tilde{O}_S(\tau).\rho_S(t)\}], \end{aligned} \tag{6.10}$$

onde

$$\phi_S(t) = \sum_k c_k^2 \coth(\frac{\hbar\eta\omega_k}{2})\cos(\omega_k t) \tag{6.11}$$

$$\phi_A(t) = \sum_k c_k^2 \sin(\omega_k t). \tag{6.12}$$

Agora, suponhamos que $\tilde{O}_S(t) \approx \tilde{O}_S(\tau) \approx \tilde{O}_S(0)$, o que é verdade para tempos $\omega_S t \ll 1$. Sob esta condições a Eq. (6.10) torna–se

$$\frac{d\tilde{\rho}_S(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[-\hbar R(t)\tilde{O}_S{}^2(0), \rho_S(t)] - \frac{d\lambda(t)}{dt}[\tilde{O}_S(0).[\tilde{O}_S(0).\rho_S(t)]], \tag{6.13}$$

com $R(t)$ e $\lambda(t)$ dados pelas Eqs. (6.6) a (6.8). A solução da Eq. (6.13) é dada *exatamente* pela eq. (6.5). Assim, vemos que tanto o primeiro método, usando a fórmula de Zassenhaus, quanto o segundo, usando a aproximação de Weisskopf–Wigner dependente do tempo, são equivalentes para tempos curtos.

A separação de $\lambda(t)$ em contribuições de temperatura zero e temperatura finita é importante porque o comportamento dessas parcelas é qualitativamente diferente (em particular, o comportamento das expressões subintegrais, na vizinhança de $\omega = 0$, é diferente). Note que λ satisfaz a desigualdade $0 < \lambda(t) < 2\lambda(\infty)$. λ^0 e λ^β satisfazem relações semelhantes. Consideramos as densidades espectrais amplamente usadas [67, 55] $D(\omega) = (\omega/\omega_c)^{\nu-1}\exp(-\omega/\omega_c)$ para $\nu > 0$, onde ω_c designa a frequência de Debye e ν descreve o tipo de ambiente: superohmico se $\nu > 1$, óhmico se $\nu = 1$ e subóhmico se $0 < \nu_c < 1$. O comportamento de tempos longos de λ depende fortemente do valor de ν. Encontramos as seguintes expressões para $\lambda_0(t)$ e $\lambda_\beta(t)$,

$$\lambda_0(t) = \begin{cases} \Gamma(\nu-1)\left(1-\cos((\nu-1)\arctan\omega_C t)(1+(\omega_C t)^2)^{-(\nu-1)/2}\right) & \nu \neq 1 \\ \frac{1}{2}\ln(1+(\omega_C t)^2) & \nu = 1 \end{cases} \tag{6.14}$$

$$\lambda_\beta(t) = \begin{cases} 2\Gamma(\nu)(\hbar\beta\omega_C)^{-\nu-1}\int_0^{t/(\hbar\beta)} du\Im\{\zeta(\nu, \delta - iu)\} & \\ \ln\left(\Gamma^2(\delta)\Gamma^{-1}(\delta+it/(\hbar\beta))\Gamma^{-1}(\delta-it/(\hbar\beta))\right) & \nu = 1 \end{cases} \tag{6.15}$$

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ex. 1
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
2765
INSTITUTO DE FÍSICA

Tabela 6.1: Comportamento assintótico dos coeficientes de decoerência.

$\lambda^0(t)$	$\lambda_\beta(t)$	
$\Gamma(\nu)(1-\cos(\frac{(\nu-1)\pi}{2})(\omega_C t)^{1-\nu}$ $+O((\omega_C t)^{-\nu}))$	$2(\hbar\omega_C\beta)^{-1}(\frac{\Gamma(\nu-1)}{\nu-1}-$ $\Gamma(\nu-2)\cos((\nu-2)\pi/2)(\omega_C t)^{-(\nu-2)})$ $+O((\omega_C t)^{1-\nu})$	$\nu>2$
	$(\hbar\beta\omega_C)^{-1}\ln(1+(\omega_C t)^2)$	$\nu=2$
	$2(\hbar\beta\omega_C)^{-1}\Gamma(\nu-2)\sin((1-\nu)\pi/2)(\omega_C t)^{2-\nu}$	$\nu>1$
$\ln(\omega_C t)$	$-(1/2+(\hbar\omega_C\beta)^{-1})\ln(1+(t/(\omega_C^{-1}+\hbar\beta))^2)$ $2t/(\hbar\beta)\arctan(t/(\omega_C^{-1}+\hbar\beta))$	$\nu=1$
$\frac{\Gamma(\nu)}{1-\nu}\cos(\frac{(1-\nu)\pi}{2})(\omega_C t)^{1-\nu}$	$2(\hbar\beta\omega_C)^{-1}\Gamma(\nu-2)\sin(\frac{(1-\nu)\pi}{2})(\omega_C t)^{2-\nu}$	$0<\nu<1$

onde $\Im$ nota a parte imaginária, $\zeta(z,q)$ é a função zeta de Riemann generalizada e $\delta = 1+1/(\hbar\omega_C\beta)$. O comportamento assintótico dos coeficientes de decoerência é dado na tabela 6.1. Vemos que para um valor de ν fixo, λ_β é assintoticamente mais divergente que λ_0.

Lembrando que

$$\zeta(z,q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+q)^z}\quad(\Re(z)>1,\ \ q\neq 0,-1,-2,\ldots), \tag{6.16}$$

vemos que a escala de tempo de $\lambda_\beta(t)$ é $T_\beta = 1/\omega_C + (1+x)\hbar\beta$, para algum $x>0$, enquanto a escala de $\lambda_0(t)$ é $1/\omega_C$. Mais ainda, observamos que à medida que β aumenta (baixas temperaturas) T_β aumenta, mais $\lambda_\beta(t)$ diminui (para tempos curtos). Se $\hbar\beta\omega_C$ for suficientemente grande e $1/\omega_S \gg \hbar\beta$ esperamos observar uma transição dinâmica no comportamento da decoerência, já que $\lambda_0(t)$ e $\lambda_\beta(t)$ devem atingir seus regimes asintóticos para tempos maiores que $4/\omega_C$ e $4T_\beta$ respectivamente.

O cálculo numérico explícito no caso $\nu=1$ (Fig. 1), para $\hbar\beta\omega_C = 40$ mostra que realmente podemos observar a transição: para tempos curtos $\lambda(t)$ é praticamente dado pela contribuição de temperatura zero, crescimento posterior é característico da contribuição de temperatura finita.

Em conclusão, os esquemas teóricos apresentados aqui permitem uma investigação do processo dinâmico responsável pelo estabelecimento de correlações quânticas. Como é bem conhecido a aproximação de Born–Markov não é aplicável neste intervalo de tempo (curto). Contudo, como foi frisado por muitos autores, o processo de entrelaçamento acontece precisamente nestas escalas de tempo. Enquanto o regime cinético é governado pela dinâmica do sistema de interesse, o processo de entrelaçamento é um processo geralmente rápido, caracterizado por escalas de tempo muito menores. Mostramos que a fórmula de Zassenhaus ou da aproximação de Weisskopf–Wigner dependente do tempo podem ser empregados para explorar o regime pré–cinético. Características especialmente interessantes aparecem no domínio de baixas temperaturas, como é esperado.

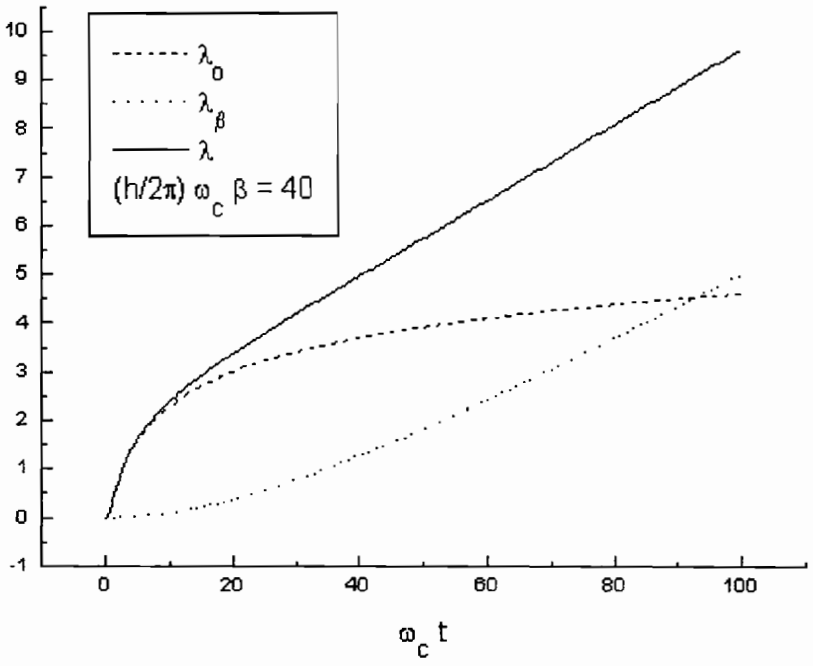

Figura 6.1: Coeficiente de Decoerência: Ambiente Óhmico

Capítulo 7

Dinâmica Eletrônica Efetiva em Sais Orgânicos de Transferência de Carga

[1]

O modelo de Hubbard de dois sítios tem provado ser uma ferramenta adequada para investigar propriedades ópticas dos sais orgânicos para os quais as moléculas íon–radical são dímeros quase–isolados [73, 54, 80]. No caso em que os graus de liberdade fermiônicos estão acoplados a suas vibrações internas, Kozlov et al. [54] propuseram um hamiltoniano efetivo no contexto de uma aproximação de campo médio usando o modelo de Hubbard de dois sítios [40].

O objetivo do presente capítulo é investigar como a dinâmica eletrônica é afetada pelo acoplamento com os graus de liberdade bosônicos, supostos em equilíbrio térmico. Recentemente van Kampen[50] propós um modelo exatamente solúvel que permite uma solução analítica da dinâmica reduzida do sistema de interesse quando acoplado a um conjunto de modos bosônicos em equilíbrio térmico. Isto é sempre possível se o termo de acoplamento comuta com o hamiltoniano livre do sistema a ser descrito. Uma realização física relevante de tal situação para os sais orgânicos de transferência de carga é a seguinte.

O modelo microscópico para descrever os estados de um elétron de um dímero íon–radical dos sais de transferência de carga interagindo com os modos coletivos de vibração interna é dada pelo seguinte hamiltoniano:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_e + \hbar g \mathbf{N} \sum_{i=1}^{M} (\mathbf{b}_i^\dagger + \mathbf{b}_i) + \sum_{i=1}^{M} \hbar\omega_i \mathbf{b}_i^\dagger \mathbf{b}_i. \tag{7.1}$$

onde $\mathbf{H}_e$ é o hamiltoniano fermiônico na presença de um campo externo magnético escolhido na direção $\hat{z}$.

[1] Uma versão ligeiramente diferente deste capítulo pode ser encontrada em Phys. Lett. **A233** (1997) 261.

$$\mathbf{H}_e = \sum_{i=1}^{2} \sum_{\sigma=\pm 1} (E + \sigma\lambda B_z)\mathbf{n}_{i\sigma} + \sum_{\sigma=\pm 1} T(\mathbf{a}_{1\sigma}^{\dagger}\mathbf{a}_{2\sigma} + \mathbf{a}_{2\sigma}^{\dagger}\mathbf{a}_{1\sigma}) + \\ + U \sum_{i=1}^{2} \mathbf{n}_{i\uparrow}\mathbf{n}_{i\downarrow}, \tag{7.2}$$

E é a parte diagonal da energia cinética, T é a chamada integral de pulo ("hopping"), U é a interação de Coulomb intra–atômica, $\lambda = -\frac{g\mu_B}{2}$, onde g é o fator de Landé, e μ_B é o magneton de Bohr. O operador fermiônico $\mathbf{a}^{\dagger}$ ($\mathbf{a}$) cria (destrói) um elétron no sítio i e spin σ e satisfaz as relações de anticomutação:

$$\{\mathbf{a}_{i\sigma}, \mathbf{a}_{j\sigma'}^{\dagger}\} = \delta_{ij}\delta_{\sigma\sigma'}\mathbb{I}, \qquad \text{e} \qquad \{\mathbf{a}_{i\sigma}, \mathbf{a}_{j\sigma'}\} = 0. \tag{7.3}$$

O operador bosônico $\mathbf{b}_i^{\dagger}$ ($\mathbf{b}_i$) cria (destrói) um modo vibrônico com frequência ω_i. Estamos supondo que existem M modos vibrônicos diferentes. Os operadores bosônicos satisfazem as relações de comutação:

$$[\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_{i'}^{\dagger}] = \delta_{ii'}\mathbb{I} \qquad \text{e} \qquad [\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_{i'}] = 0. \tag{7.4}$$

Na eq. (7.1), $\mathbf{N}$ é o operador de número total de férmions,

$$\mathbf{N} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{\sigma=\pm 1} \mathbf{n}_{i\sigma}. \tag{7.5}$$

Obtemos o termo de acoplamento no hamiltoniano (7.1) a partir do hamiltoniano da referência [73] quando a longitude de onda associada aos modos vibrônicos é muito maior que a distância entre os monômeros.

O hamiltoniano $\mathbf{H}_e$ comuta com o hamiltoniano total $\mathbf{H}$, como é requerido para obter uma expressão analítica exata para a densidade reduzida do subsistema.

Consideremos primeiramente uma condição inicial não correlacionada, i.e.,

$$\rho(0) = \Big[\sum_{n,n'} f_{n,n'} |\mathbf{n}\rangle\langle\mathbf{n}'| \Big] \otimes \prod_{i=1}^{M} \frac{e^{-\beta\hbar\mathbf{b}_i^{\dagger}\mathbf{b}_i}}{Z}, \tag{7.6}$$

onde,

$$Z = Tr[e^{-\beta\hbar\mathbf{b}_i^{\dagger}\mathbf{b}_i}].$$

A base para o sistema eletrônico tem quatro índices correspondentes ao sítio i do elétron, $i = 1.2$, e ao spin σ, $\sigma = \uparrow, \downarrow$: $\mathbf{n} \equiv (n_{1\uparrow}, n_{1\downarrow}, n_{2\uparrow}, n_{2\downarrow})$.

A evolução temporal do operador densidad inicial dado pela eq.(7.6). sob a dinâmica da eq.(7.1), é

$$\rho(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}t}\ \rho(0)\ e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}t}. \tag{7.7}$$

onde $\mathbf{H}$ é o hamiltoniano (7.1) do sistema completo.

Usando técnicas de álgebras de Lie [59] calculamos a densidade eletrônica efetiva em um tempo posterior tomando o traço sobre os graus de liberdade dos osciladores,

$$\rho_S(t) = \mathcal{U}(t)(\mathcal{D}(t)\rho_S(0)), \tag{7.8}$$

onde $\mathcal{U}(t)$ representa a evolução unitária e $\mathcal{D}(t)$ é essencialmente não unitário. $\mathcal{U}(t)$ representa uma contribuição hamiltoniana dependente do tempo

$$\mathcal{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau[\mathbf{H}_S - \hbar\mathbf{N}^2 R(\tau), \bullet\ ]}, \tag{7.9}$$

onde empregamos a mesma convenção de notação do capítulo anterior (e da referência [3]) para os superoperadores. Assim, a parte unitária da evolução temporal do subsistema fermiônico, ganha uma nova contribuição devido à dinâmica dos modos bosônicos, dada por

$$\mathbf{H}_{eff}(t) = \mathbf{H}_e - R(t)\mathbf{N}^2, \tag{7.10}$$

com $R(t) = \sum_{i=1}^{M} \frac{c_i^2}{\omega_i}(1 - \cos\omega_i t)$.

Note que $R(t)$ depende das constantes de acoplamento c_i e das frequências ω_i dos modos vibrônicos. Dado que temos um número finito de modos vibrônicos, a função oscila no tempo dentro do intervalo: $[0, 2\sum_{i=1}^{M} \frac{c_i^2}{\omega_i}]$. O termo dependente do tempo que aparece no hamiltoniano efetivo (7.10) produz um deslocamento do espectro de energia do hamiltoniano $\mathbf{H}_e$ proporcional ao número total de férmions. Isto justifica a suposição de campo médio da referência [54]. Mostra ainda que o deslocamento no espectro de energia é diferente para cada subespaço de Fock, e é caracterizado pelo número total N de elétrons no subsistema eletrônico. Também, ainda que o efeito desta evolução unitária seja a adição de uma constante, haverá um novo processo no operador hamiltoniano, porque $\mathbf{N}^2 = \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 + 2\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2$. Estamos usando a definição: $\mathbf{n}_i = \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \mathbf{n}_{i\sigma}$. O último termo da uma contribuição a um processo envolvendo sítios diferentes e o mesmo spin. O segundo termo do lado direito do hamiltoniano (7.10) dá uma contribuição não trivial à dinâmica quando o estado quântico do subsistema eletrônico não está restrito a um único subespaço de Fock.

A contribuição não unitária $\mathcal{D}(t)$ é responsável pela decoerência e recoerência do sistema de interesse. É dada por

$$\mathcal{D}(t) = e^{-\lambda(t)(\mathbf{N}^2\bullet - 2\mathbf{N}\bullet\mathbf{N} + \bullet\mathbf{N}^2)}. \tag{7.11}$$

onde $\lambda(t) = \sum_{i=1}^{M} \frac{c_i^2}{\omega_i^2}(1 - \cos\omega_i t)\coth(\frac{\beta\hbar\omega_i}{2})$. Para um número finito de modos vibrônicos, a função $\lambda(t)$ tem um comportamento oscilatório e varia no intervalo: $[0, 2\sum_{i=1}^{M} \frac{c_i^2}{\omega_i^2}\coth(\frac{\beta\hbar\omega_i}{2})]$.

A discussão do acoplamento dos modos eletrônicos aos fônons da rede é inteiramente análoga ao caso dos modos vibrônicos. A principal diferença entre os dois casos é que o último apresenta uma distribuição contínua de frequências.

O hamiltoniano que descreve este sistema é similar ao hamiltoniano (7.1). Neste caso, o operador b_i ($\mathrm{b}_i^\dagger$) destrói (cria) um fônon da rede e a soma sobre i é substituída por uma integral. Os resultados anteriores continuam valendo, mas agora é útil dividir $\lambda(t)$ como $\lambda(t) = \lambda^0(t) + \lambda^\beta(t)$, como na referência [27], com

$$\lambda^0(t) = \int_0^\infty d\omega \, \frac{\mathcal{D}(\omega)}{\omega}(1 - \cos\omega t) \tag{7.12}$$

e

$$\lambda^\beta(t) = \int_0^\infty d\omega \, \frac{\mathcal{D}(\omega)}{\omega} \, \frac{(1 - \cos\omega t)}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}, \tag{7.13}$$

onde $\mathcal{D}(\omega)$ corresponde à densidade espectral da rede [67]. O primeiro destes termos, eq.(7.12), corresponde à temperatura zero e o segundo, eq.(7.13), à temperatura finita β. O comportamento destas duas contribuições é qualitativamente diferente como pode ser verificado na referência [27]. Estes parâmetros controlam a taxa com a qual os elementos de fora da diagonal (correlações) vão para zero. O fato de que os elementos fora da diagonal na representação N justifica a suposição usual de evolução unitária dentro de cada um destes subespaços. As funções $R(t)$, $\lambda^0(t)$ e $\lambda^\beta(t)$ apresentan comportamentos assintóticos ($t \to \infty$) bem definidos, que não são oscilatórios e dependem das baixas frequências da densidade espectral $\mathcal{D}(\omega)$.

Agora tratamos o caso de uma classe de condições iniciais correlacionadas para as quais ainda é possível achar resultados analíticos para a dinâmica efetiva do subsistema. Supomos que o sistema completo está em equilíbrio térmico a uma dada temperatura e que, depois que este estado a atingiu, a densidade eletrônica é levada a um estado de não equilíbrio por algum processo externo. Esta situação pode ser implementada matematicamente pela seguinte classe de condições iniciais:

$$\rho(0) = e^{\frac{\beta}{2}\mathbf{H}} \rho'_S(0) e^{\frac{\beta}{2}\mathbf{H}}. \tag{7.14}$$

Tomando o traço sobre os graus de liberdade bosônicos ficamos com o seguinte estado de mistura para os férmions:

$$\rho_S(0) = A e^{-\frac{\beta}{2}\mathbf{H}_{eff}(\infty)} [e^{-\lambda'(\infty)(\mathbf{N}^2 \bullet - 2\mathbf{N}\bullet\mathbf{N} + \bullet\mathbf{N}^2)} \rho'_S(0)] e^{-\frac{\beta}{2}\mathbf{H}_{eff}(\infty)}. \tag{7.15}$$

ondre A é uma constante de normalização e $\lambda'(\infty) = \sum_i \frac{c_i^2}{\omega_i^2} \tanh(\frac{\beta\hbar\omega_i}{4})$. $\mathbf{H}_{eff}(0)$ é o hamiltoniano efetivo (7.10) em $t = \infty$, quando os modos do reservatório são infinitos, e é, no caso geral,

$$\mathbf{H}_{eff}(t) = \mathbf{H}_e - \sum_{i=1}^{M} \frac{c_i^2}{\omega_i} \mathbf{N}^2. \tag{7.16}$$

Procedendo como antes, podemos obter a dinâmica efetiva para esta classe de condições iniciais e mostrar que o processo de decoerência é agora mais lento em comparação ao primeiro. dado que o estado inicial já é um estado misturado. A evolução de $\rho_S(0)$ é dada por.

$$\rho_S(t) = Ae^{-it\frac{\mathbf{H}_{eff}(\infty)}{\hbar}}[e^{-(\lambda(t)-\lambda'(t))(\mathbf{N}^2\bullet-2\mathbf{N}\bullet\mathbf{N}+\bullet\mathbf{N}^2)}\rho_S(0)]e^{it\frac{\mathbf{H}_{eff}(\infty)}{\hbar}}, \tag{7.17}$$

$\lambda(t)$ é dado pelas eqs. (7.12) e (7.13) e

$$\lambda'(t) = \sum_i \frac{c_i^2}{\omega_i^2}\,(1-\cos\omega_i t)\ \tanh(\frac{\beta\hbar\omega_i}{4}).$$

Note que $\lambda(t) > \lambda'(t)$, de maneira que a diferença delas é positiva para todo t. A comparação entre as eqs. (7.8) e (7.11) e a eq.(7.17) mostra que a taxa à qual o equilíbrio é atingido é mais lenta para as condições inicialmente correlacionadas. O processo de decoerência é sensível à densidade espectral da rede e portanto experimentos que medem as escalas de tempo dos processos de relaxação podem ser úteis para o entendimento de vários aspectos da intrincada dinâmica dos sais orgânicos de transferência de carga.

Devemos dizer que quando temos poucos graus de liberdade bosônicos (modos vibrônicos) acoplados ao subsistema eletrônico, temos um comportamento oscilatório quase–periódico de decoerência–recoerência cuja amplitude é menor que no caso do estado inicial fatorado correspondente.

Capítulo 8

Decoerência de Estados Mesoscópicos de Campos em Cavidades

A concepção de um arranjo experimental para a produção de estados quânticos mesoscópicos e para observar a decoerência subsequente [66] em cavidades de microondas foi precedida por uma série de meticulosos estudos experimentais e teóricos [41, 10, 11, 12, 38, 13, 19]. Vários esquemas têm sido propostos, baseados na medição de correlação de dois átomos usando átomos de Rydberg circulares, e a implementação concreta de um de tais esquemas foi recentemente reportada [14]. *Grosso modo* a experiência envolve dois estágios, que consistem na preparação do estado superposto desejado e o subsequente monitoramento de sua evolução no tempo sob a influência dos inevitáveis processos de perdas presentes na cavidade. Como último passo, o que conhecemos atualmente como "postulado de redução" [64] é usado instrumentalmente e de maneira essencial para selecionar o estado de campo desejado (ver abaixo). O estágio seguinte, contudo, envolve somente leis quânticas estritamente causais, e é portanto, a princípio, passível de uma descrição teórica completa, incluindo a perda de coerência do estado preparado [38, 19]. Em particular, como é apropriado para propriedades e processos físicos *bona fide*, a decoerência deve ser caracterizada e descrita de maneira independente de base. Mostramos em seguida que isto pode ser feito de uma maneira particularmente simples no presente caso, dadas as propriedades específicas do estado de superposição preparado, e mais nada é necessário além das suposições usuais a respeito dos acoplamentos externos que estão por trás do mecanismo de perda de coerência. De maneira mais específica, mostramos que, sob as condições experimentais reportadas em [14], correlações de dois átomos do tipo envolvido nas medições ali referidas, podem ser usadas para determinar completamente os autovalores dos operadores densidade reduzida que descrevem os possíveis estados quânticos do campo da cavidade depois do estágio de preparação. A dependência temporal das correlações de dois átomos observadas constituem, portanto, uma medida das características intrínsecas da evolução do campo. as quais dependem diretamente do processo de perda de coerência. Mais ainda, dado que esta evolução depende tanto da natureza do estado inicial quanto das hipóteses dinâmicas relativas ao processo dissipativo, através de uma análise do tipo que é proposta aqui tais medidas podem proporcionar verifi-

cações *experimentais* do resultado real do estágio de preparação e da adequação da dinâmica dissipativa proposta, por um preço não maior que uma análise menos inclusiva dos dados de correlação de dois átomos.

O experimento reportado em [14] envolve uma cavidade C de alto Q localizada entre duas cavidades de baixo Q (zonas de Ramsey R_1 e R_2) alimentadas com campos clássicos que "dirigem" o estado interno dos átomos circulares de Rydberg que atravesam o arranjo experimental. A transição entre dois níveis atômicos, usualmente designados como $\mid e\rangle$ e $\mid g\rangle$, é ressonante com os campos nas cavidades R_1 e R_2. Cada átomo é preparado inicialmente no estado $\mid e\rangle$. Depois de abandonar $R1$ se encontra numa superposição dos estados $\mid e\rangle$ e $\mid g\rangle$. Os campos em R_1 e em R_2 (e suas fases relativas) são escolhidos de maneira que sua ação sobre os átomos esteja dada pela transformação unitária

$$U_R: \quad \mid e\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\mid e\rangle + \mid g\rangle); \quad \mid g\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mid e\rangle + \mid g\rangle).$$

A cavidade C de alto Q contém um campo coerente $\mid \alpha\rangle$. O acoplamento entre o átomo e o campo nesta cavidadade se mede pela frequência de Rabi Ω. Consideramos duas situações: a) a frequência ω do modo relevante de C é quase–ressonante com a frequência de transição ω_{ie} que conecta $\mid e\rangle$ a um terceiro estado $\mid i\rangle$ (que para fixar idéias é suposto com energia maior que $\mid e\rangle$) e está longe da ressonância com quaisquer transições envolvendo o nível $\mid g\rangle$ [19]; e b) ω é quase–ressonante com a frequência de transição ω_{eg} que conecta $\mid e\rangle$ com $\mid g\rangle$ [38, 14]. Em ambos os casos a dessintonia δ é suposta suficientemente grande de modo a evitar as transições reais e a interação átomo–campo leva essencialmente a deslocamentos dispersivos de frequência $1/\delta$. Desta maneira, o acoplamento átomo–campo durante um tempo t produz uma desfasagem do campo que depende do nível atômico gerando estados entrelaçados átomo–campo. Isto pode ser representado pelos operadores unitários

$$\begin{aligned} \text{caso} \quad \text{a}: \quad & U_C^{(a)} = e^{-i\phi a^\dagger a} \mid e\rangle\langle e \mid + \mid g\rangle\langle g \mid \\ \text{caso} \quad \text{b}: \quad & U_C^{(b)} = e^{i\phi(a^\dagger a+1)} \mid e\rangle\langle e \mid + e^{-i\phi a^\dagger a} \mid g\rangle\langle g \mid \end{aligned} \tag{8.1}$$

com $\phi(t) = \Omega^2 t/\delta$. Nestas expressões os operadores $a^\dagger$, a criam e aniquilam fótons no modo relevante de C. O efeito desses operadores em um estado coerente da cavidade equivale simplesmente a uma mudança de *fase* que depende do estado do átomo de dois níveis, de maneira que o estado de campo resultante pode ser expresso em termos de dois estados coerentes. Devemos frisar que esta característica depende de de maneira crucial da validade do limite puramente dispersivo mencionado acima, que requer valores de Ω/δ suficientemente pequenos para assegurar a validade do tratamento perturbativo de primeira ordem implícito [71].

Esta idealização da dinâmica envolvida permite descrever o experimento numa forma simbólica compacta. Quando um átomo é enviado através do aparato, a mudança no estado do sistema combinado átomo mais campo é descrito por $U_R U_C U_R$, de maneira que, para um estado inicial fatorado $\rho^F \otimes \mid e\rangle\langle e \mid$ (com $\rho^F = \mid \alpha\rangle\langle\alpha \mid$), temos

$$U_R U_C U_R(\rho^F \otimes \mid e\rangle\langle e \mid) U_R^\dagger U_C^\dagger U_R^\dagger$$

para o sistema combinado. O estado de campo resultante da observação final do átomo no estado $\mid e\rangle$ ou $\mid g\rangle$ é obtido substituindo o produto de operadores unitários respectivamente pelos operadores reduzidos

$$\mathcal{U}_g^e \equiv \langle {}_g^e \mid U_R U_C U_R \mid e\rangle \tag{8.2}$$

(ou seus adjuntos) com um fator de normalização do traço apropriado. É isto que designamos como o estágio de preparação do experimento. O papel instrumental atribuido ao "postulado de redução" neste estágio aparece explicitamente no último passo. Obtemos, para os dois casos considerados

$$\mathcal{U}_g^{e\,(a)} = \frac{1}{2}\left[e^{-i\phi a^\dagger a} \mp 1\right] \qquad \text{e} \qquad \mathcal{U}_g^{e\,(b)} = \frac{1}{2}\left[e^{i\phi(a^\dagger a+1)} \mp e^{-i\phi a^\dagger a}\right]. \tag{8.3}$$

Os índices e, g e os sinais duplos referem–se respectivamente à observação final do átomo nos estados $\mid e\rangle$ e $\mid g\rangle$.

Agora vamos ao segundo estágio da medida de correlação de dois átomos. O segundo átomo é enviado através do sistema depois da deteção do primeiro. A passagem deste segundo átomo através do aparelho e sua detecção pode ser descrita usando as mesmas ferramentas formais adotadas para o primeiro átomo. Sejam $\rho_{\,g}^{e\,F}$ as densidades reduzidas de traço um que descrevem o estado do campo na cavidade C depois da detecção do primeiro átomo em e ou g. As probabilidades condicionais para os possíveis resultados obtidos na medição final do estado do segundo átomo, para um dado estado final (medido) do primeiro átomo, são dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} P_{ee} &= Tr\left[\mathcal{U}_e^\dagger \mathcal{U}_e \rho_e^F\right]; \qquad P_{ge} = Tr\left[\mathcal{U}_e^\dagger \mathcal{U}_e \rho_g^F\right] \\ P_{eg} &= Tr\left[\mathcal{U}_g^\dagger \mathcal{U}_g \rho_e^F\right]; \qquad P_{gg} = Tr\left[\mathcal{U}_g^\dagger \mathcal{U}_g \rho_g^F\right]. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Note que em, digamos P_{ge}, o primeiro átomo é detectado no estado g e o segundo no estado e. Devido à normalização suposta temos $P_{ee} + P_{eg} = 1 = P_{ge} + P_{gg}$, e o sinal de correlação medido na referência [14] pode ser escrita simplesmente como

$$\eta = P_{ee} - P_{ge} = Tr\left[\mathcal{U}_e^\dagger \mathcal{U}_e \left(\rho_e^F - \rho_g^F\right)\right]. \tag{8.5}$$

As densidades reduzidas que aqui aparecem referem–se ao estado do campo em C no momento da passagem do segundo átomo através do aparelho. Por outro lado, estas expressões conectam dados de correlação de dois átomos diretamente com modelos teóricos para a evolução temporal, absolutamente causal, de $\rho_{\,g}^{e\,F}$ durante o intervalo de tempo que transcorre

entre a passagem dos dois átomos. Isto envolve de fato o único aspecto realmente "complexo" da dinâmica, responsável pela evolução dissipativa do estado do campo em C. Dado que sempre é possível expressar as densidades reduzidas em termos de seus autovalores e autovetores (dependentes do tempo), as Eqs. (8.4) e (8.5) mostram diretamente que os valores medidos das várias probabilidades condicionais e de η podem ser exprimidos em termos dos memos ingredientes. Como mostramos abaixo, os autovalores são de fato *determinados* por P_{ee} e P_{ge}, *se* fizermos suposições específicas, mas usuais, acerca do mecanismo de dissipação. Neste sentido, eles permitem uma caracterização do processo de decoerência independente de base tão boa quanto quantidades baseadas em objetos mais gerais não lineares em ρ tais como o "defeito de idempotência" $1 - Tr\rho^2$ [47] ou funcionais entrópicos da densidade [64]. As suposições sobre o mecanismo de dissipação permitem um tratamento *exato*, não precisando recorrer as aproximações envolvidas na dedução das equações mestras.

Para modelarmos os efeitos dissipativos em C durante o tempo de passagem dos dois átomos, introduzimos, como é usual, um conjunto de osciladores harmônicos com frequências ω_k e operadores de criação/aniquilação escritos as $b_k^\dagger$, b_k (o "banho térmico") acoplado ao modo relevante da cavidade através da expressão bilinear

$$H_{int} = \sum_k \hbar\gamma_k(a^\dagger b_k + b_k^\dagger a). \tag{8.6}$$

Esta expressão difere do acoplamento posição–posição, também de uso comum, pela omissão dos termos "anti-- resonantes" envolvendo o produto de dois operadores de criação ou dois de aniquilação. Realmente espera–se que estes termos contribuam muito pouco ao processo de amortecimento devido à pequena razão γ_k/ω no presente contexto. O sistema resultante de osciladores acoplados tem as seguintes propriedades bem conhecidas: i) seu estado base é o produto dos estados base dos diferentes osciladores (não existem correlações de estado base) e ii) um estado inicial escrito como um produto de estados coerentes, i.e.

$$\mid t = 0\rangle = \mid \alpha\rangle \prod_k \mid \beta_k\rangle \tag{8.7}$$

conserva esta forma para todo tempo, as amplitudes $\alpha(t)$ e $\beta_k(t)$ sendo as soluções das equações lineares acopladas

$$\begin{aligned} i\dot{\alpha} &= \sum_k \gamma_k\beta_k \\ i\dot{\beta_k} &= (\omega_k - \omega)\beta_k + \gamma_k\alpha \end{aligned} \tag{8.8}$$

com as condições iniciais dadas, numa imagem de interação onde a dependência temporal associada à constante de movimento $\hbar\omega\left(a^\dagger a + \sum_k b_k^\dagger b_k\right)$ foi eliminada. Esta solução é de fato a relevante quando tomamos como estados iniciais aqueles gerados pela ação dos operadores obtidos na Eq. (8.3) sobre um estado coerente $\mid \alpha\rangle$ e um banho térmico a temperatura zero. Dado que o estado do modo relevante de C é a soma de dois estados coerentes linearmente

independentes (ainda que, estritamente, nunca ortogonais), vemos que teremos para qualquer tempo a soma de dois termos, cada um do tipo mostrado na Eq. (8.7). Consequentemente, a densidade reduzida que descreve o estado do campo em C terá o seu traço esgotado em um sobespaço bidimensional (dependente do tempo) do correspondente espaço do oscilador [63]. Esta característica particular é retida na descrição de equação mestra usada atualmente (ver e.g. [19]), a qual, contudo, proporciona resultados muito diferentes tanto a tempos muito curtos (onde prediz uma dependência linear e não quadrática no tempo para medidas de decoerência tais como o defeito de idempotência [47]) e para tempos longos na região asintoticamente amortecida.

O caso computacionalmente mais simples que consideramos corresponde ao caso a) como foi definido acima. Selecionamos, além do mais, o valor $\phi = \pi$ da fase que caracteriza o estado de superposição, não somente por conveniência, mas também devido às propriedades singulares de tal escolha, como discutimos embaixo. O estado "inicial" (depois da detecção do primeiro átomo) é, portanto,

$$\mid t = 0\rangle = N_\alpha \left[\mid \alpha\rangle \mp \mid -\alpha\rangle\right] \otimes \mid 0_b\rangle$$

onde $\mid 0_b\rangle$ designa o estado base do "banho" (temperatura zero), o duplo sinal corresponde à detecção do primeiro átomo em e ou g e N_α é o fator de normalização apropriado. A solução das Eqs. (8.8) dá

$$\mid t\rangle = N_\alpha \left[\mid \alpha(t)\rangle \prod_k \mid \beta_k(t)\rangle \mp \mid -\alpha(t)\rangle \prod_k \mid -\beta_k(t)\rangle\right].$$

É simples então obter a densidade reduzida para o campo em C no tempo t,

$$\rho_{e\atop g}^{F}(t) = N_\alpha^2 \left[\mid \alpha(t)\rangle\langle\alpha(t) \mid + \mid -\alpha(t)\rangle\langle -\alpha(t) \mid \mp \Gamma_b(t) \left(\mid \alpha(t)\rangle\langle -\alpha(t) \mid + \mid -\alpha(t)\rangle\langle\alpha(t) \mid\right)\right] \tag{8.9}$$

onde a função real $\Gamma_b(t)$, que contém os efeitos de decoerência dos osciladores do banho, é dada por

$$\Gamma_b(t) = \prod_k \langle -\beta_k(t) \mid \beta_k(t)\rangle.$$

Os autovalores finitos $\lambda_\pm(t)$ de cada uma de tais matrizes são

$$\lambda_+^{(e\atop g)}(t) = \frac{(1 + \Gamma_a(t))\,(1 \mp \Gamma_b(t))}{2\,(1 \pm \Gamma_a(0))}; \quad \lambda_-^{(e\atop g)}(t) = \frac{(1 - \Gamma_a(t))\,(1 \pm \Gamma_b(t))}{2\,(1 \pm \Gamma_a(0))} \tag{8.10}$$

onde $\Gamma_a(t) = \langle -\alpha(t) \mid \alpha(t)\rangle$, com autovalores associados

$$\mid \lambda_\pm(t)\rangle \;\propto\; \mid \alpha(t)\rangle \pm \mid -\alpha(t)\rangle.$$

O caráter singular deste caso especial reside no fato de que operador $\exp(i\phi a^\dagger a) = \exp(i\pi a^\dagger a)$ que aparece em $\mathcal{U}_e^\dagger \mathcal{U}_e$ é diagonal simultaneamente com as densidades reduzidas (com autovalores ± 1 para $\mid \lambda_\pm(t)\rangle$). O sinal de correlação $\eta(t)$ medido em [14] toma então a forma seguinte

$$\eta(t) = \lambda_-^{(e)}(t) - \lambda_-^{(g)}(t).$$

Sempre que a superposição ("overlap") $\Gamma_a(0)$ seja pequena e $\Gamma_a(t)$ assim permaneça, das Eqs. (8.10) é claro que $\lambda_-^{(g)} \approx \lambda_+^{(e)}$, de modo que o resultado de cima se reduz a

$$\eta(t) \approx \lambda_+^{(g)}(t) - \lambda_-^{(g)}(t) = 1 - 2\lambda_-^{(g)}(t) \approx \lambda_-^{(e)}(t) - \lambda_+^{(e)}(t) = 1 - 2\lambda_+^{(e)}(t) \tag{8.11}$$

que, junto com o normalização do traço, é suficiente para determinar os autovalores neste limite de superposição pequena. Mais ainda, vemos que, independentemente da condição de superposição pequena, os autovalores das densidades reduzidas ficam determinados pelas quantidades P_{ee} e P_{ge}, medidas separadamente como $\lambda_-^{(e)} = P_{ee}$ e $\lambda_-^{(g)} = P_{ge}$.

Exatamente a mesma análise se aplica neste caso quando é usada uma aproximação tipo equação mestra para descrever os efeitos de amortecimento associado com as Eqs. (8.8), como é feito p.e. na ref. [19]. De fato, a equação mestra pode ser resolvida em forma fechada proporcionando uma expressão para a densidade reduzida idêntica em forma à Eq. (8.9) com

$$\alpha(t) \to \alpha(0)e^{-\gamma t/2} \qquad \text{e} \qquad \Gamma_b(t) \to e^{-2|\alpha(0)|^2(1-e^{-\gamma t})}$$

onde $\gamma = 1/t_c$, o inverso do tempo de amortecimento da intensidade de campo em C.

O caso b), que corresponde às condições do experimento reportado em [14], pode ser tratado exatamente do mesmo modo que o caso a), pois o estado do campo preparado em C (i.e. imediatamente depois da detecção do primeiro átomo), é ainda uma superposição de *dois* estados coerentes, a saber

$$\mid t = 0\rangle = N_{\alpha\phi}\left[e^{i\phi} \mid \alpha e^{i\phi}\rangle + \mid \alpha e^{-i\phi}\rangle\right] \otimes \mid 0_b\rangle.$$

Ainda é possível acharmos expressões para os autovalores positivos e para os correspondentes autovetores das densidades reduzidas, em termos das soluções apropriadas das Eqs. (8.8), levando em consideração o fato da não ortogonalidade da representação de estados coerentes através da matriz de superposição apropriada. Como elas são consideravelmente mais complexas que no caso anterior e não são necessárias explicitamente no desenvolvimento seguinte, não as escrevemos em toda a sua exatidão.

Antes de nos dedicarmos à discussão do caso geral, consideremos as expressões mais simples que aparecem no caso de superposição pequena (i.e. $\mid \langle \alpha(t)e^{i\phi} \mid \alpha(t)e^{-i\phi}\rangle \mid \ll 1$ de maneira qu e a matriz de superposição reduz–se, essencialmente, à matriz unidade). Ainda que os operadores envlvidos em $\mathcal{U}_e^\dagger \mathcal{U}_e$ já não são simultaneamente diagonais com as densidades reduzidas, ainda obtemos um resultado similar à Eq. (8.11) para o sinal de correlação, que pode ser escrito como

$$\eta(t) \approx \cos\left(\sum_k |\beta_k(t)|^2 \sin 2\phi\right)(\lambda_+ - \lambda_-)$$

onde $\lambda_\pm \approx \lambda_\pm^{(g)} \approx \lambda_\mp^{(e)}$ designa as aproximações de superposição pequena dos autovalores das densidades reduzidas,

$$\lambda_\pm = \frac{1 \pm \mid \Gamma_b(t,\phi) \mid}{2}$$

com

$$\Gamma_b(t,\phi) = e^{-2\sum_k |\beta_k(t)|^2 \sin^2\phi} e^{i\theta(t)} \qquad \text{e} \qquad \theta(t) = \sum_k |\beta_k(t)|^2 \sin 2\phi.$$

Nas últimas equações $\alpha(t)$ e $\beta_k(t)$ indicam as soluções das Eqs. (8.8) com condições iniciais $\alpha(0)$, $\beta_k(0) = 0$. Isto faz explícita toda a dependência em ϕ. A possibilidades de exprimir a aproximação de superposição pequena de $\eta(t)$ em termos dos autovalores da densidade reduzida deve-se ao fato que, neste limite, as duas densidades ρ_e^F e ρ_g^F essencialmente comutam, e essencialmente tem os mesmos autovalores, i.e.

$$\rho_e^F \approx \mid \lambda_+\rangle\lambda_+\langle\lambda_+ \mid + \mid \lambda_-\rangle\lambda_-\langle\lambda_- \mid ; \qquad \rho_g^F \approx \mid \lambda_+\rangle\lambda_-\langle\lambda_+ \mid + \mid \lambda_-\rangle\lambda_+\langle\lambda_- \mid$$

com autoestados aproximados

$$\mid \lambda_\pm\rangle \propto \pm e^{i(\theta(t)+\phi)} \mid \alpha(t)e^{i\phi}\rangle + \mid \alpha(t)e^{-i\phi}\rangle.$$

Assim, o sinal de correlação medido em [14], Eq. (8.5), essencialmente determina os autovalores das densidades reduzidas ρ_e^F e ρ_g^F *no limite de superposição pequena.* Para obtermos tal resultado é fundamental a igualdade dois–a–dois dos autovalores das duas matrizes neste limite. Finalmente consideramos o caso geral e mostramos que, independentemente da suposição de superposição pequena, medidas separadas de P_{ee} e P_{ge} novamente determinam os autovalores das matrizes de traço unidade ρ_e^F e ρ_g^F. De fato, é fácil mostrarmos que essas quantidades proporcionam em geral combinações lineares independentes dos dois autovalores positivos em cada caso, com coeficientes que dependem da dinâmica da interação átomo–campo segundo fica expressa nos elementos de matriz dos operadores reduzidos $\mathcal{U}_g$, Eq.(8.2), nos autovetores da densidade reduzida. Para vermos isto explicitamente, é suficiente escrever as densidades reduzidas em forma diagonal como

$$\rho_g^F = \mid \lambda_+^{(g)}(t)\rangle\lambda_+^{(g)}(t)\langle\lambda_+^{(g)}(t) \mid + \mid \lambda_-^{(g)}(t)\rangle\lambda_-^{(g)}(t)\langle\lambda_-^{(g)}(t) \mid \tag{8.12}$$

que dá para as funções de correlação

$$P_{ge} = \langle\lambda_+^{(g)}(t) \mid \mathcal{U}_e^\dagger\mathcal{U}_e \mid \lambda_+^{(g)}(t)\rangle\lambda_+^{(g)}(t) + \langle\lambda_-^{(g)}(t) \mid \mathcal{U}_e^\dagger\mathcal{U}_e \mid \lambda_-^{(g)}(t)\rangle\lambda_-^{(g)}(t).$$

Obviamente, estas expressões gerais permanecem válidas também no caso a) discutido anteriormente, onde para $\phi = \pi$ temos

$$\langle \lambda_+^{(e_g)} \mid \mathcal{U}_e^\dagger \mathcal{U}_e \mid \lambda_+^{(e_g)} \rangle = 0 \qquad \text{e} \qquad \langle \lambda_-^{(e_g)} \mid \mathcal{U}_e^\dagger \mathcal{U}_e \mid \lambda_-^{(e_g)} \rangle = 1.$$

Como resultado do fato de que as densidades reduzidas são simultaneamente diagonais com os operadores reduzidos $\mathcal{U}_{e_g}$, a determinação dos autovalores vira independente da estrutura dos autovetores (comuns, neste caso).

Concluímos a partir destes resultados que a validade da suposição de acoplamento puramente dispersivo entre o átomo de dois níveis e o campo na cavidade C, que leva a validade das Eqs. (8.1), e a pertinência de um acoplamento da forma da Eq. (8.6) para a implementação da dinâmica dissipativa permite um monitoramento experimental direto dos processos de decoerência intrínsecos sofridos pelo campo como resultado de seu acoplamento com o "banho térmico". Isto pode ser feito simplesmente medindo separadamente as probabilidades condicionais P_{ee} e P_{ge}, porque elas determinam completamente os *autovalores* positivos (neste caso somente dois, para qualquer tempo posterior à preparação do estado de superposição) de cada uma das densidades reduzidas ρ_e^F e ρ_g^F. Sob condições menos estritas, permitindo efeitos mensuráveis de correções de ordem maior (em Ω/δ) às Eqs. (8.1), serão produzidos estados, depois da passagem do primeiro átomo. que não podem ser reduzidos à superposições de somente dois estados linearmente independentes (ver e.g. ref. [15]), e portanto terão densidades reduzidas com um número consideravelmente maior de autovalores positivos. A representação correspondente à Eq. (8.12) terá mais de dois termos, de maneira que a determinação *completa* das propriedades de decoerência do campo precisará de medições mais imaginativas.

Capítulo 9

Decoerência Atômica em uma Zona de Ramsey Fria

No arranjo experimental discutido no capítulo 7, chamou-nos atenção um aparelho periférico naquele experimento, a zona de Ramsey. Como discutimos, seu papel no experimento é "rodar" o átomo, i.e., ao penetrá-la o átomo se comporta como se encontra-se um campo elétrico clássico dependente do tempo. Em particular isto quer dizer que não haverá entrelaçamento do átomo (com o campo da zona de Ramsey) dessa etapa do experimento. No contexto atual dos limites clássicos, a primeira e *mais importante* hipótese é a de que o campo ali dentro deve ser intenso para cumprir esse papel. Não é. Resulta que o número médio de fótons na dita cavidade é aproximadamente *um*. Isto nos levou a pesquisar qual o efeito (que *não é* grandes números) poderia gerar este comportamento clássico experimentalmente verificado.

Após pesquisas na literatura e discussões com físicos experimentais verificamos que as características da zona de Ramsey são

1. Ela é continuamente bombeada por uma fonte externa.
2. Possui um número médio de fótons da ordem de um.
3. Está a uma temperatura muito baixa, a mesma da cavidade supercondutora.

Com base nessas informações construímos o seguinte modelo para a zona de Ramsey. O arranjo experimental de um átomo de dois níveis que atravessa uma Zona de Ramsey pode ser descrito mediante o hamiltoniano seguinte

$$\begin{aligned} H &= \hbar\epsilon\sigma_z/2 + \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2) + \hbar\sum_k \omega_k(b_k^\dagger b_k + 1/2) + \hbar\sum_k c_k(a^\dagger b_k + a b_k^\dagger) \\ &\quad + \hbar d(ae^{i\omega_\epsilon t} + a^\dagger e^{-i\omega_\epsilon t}) + \hbar g(a^\dagger\sigma_- + a\sigma_+)\Theta(t - t_0) \qquad (9.1) \\ &= H_0 + H_I = H_0 + \hbar g(a^\dagger\sigma_- + a\sigma_+)\Theta(t - t_0) \qquad (9.2) \end{aligned}$$

onde $\Theta(t)$ é a função passo unitário de Heaviside e t_0 é o instante no qual o átomo entra na zona de Ramsey. Supomos que t_0 é muito maior que o tempo característico de comportamento transiente ($t_0 \gg \lambda^{-1}, \lambda^{-1}$ a constante de relaxação do sistema) de maneira que o

modo da cavidade é suposto estar no seu regime estacionário. Supomos, além do mais que a densidade total em $t = 0$ é

$$\rho(t) = \rho_S(0) \otimes \rho_a(0) \otimes \prod_k |0_k\rangle\langle 0_k|, \tag{9.3}$$

isto é, o estado do átomo ρ_S e do modo da cavidade ρ_a são arbitrários, e o banho de osciladores está no seu estado fundamental (temperatura zero).

A aproximação de Weisskopf–Wigner dependente do tempo de segunda ordem é dada por

$$\frac{d\tilde{\rho}_S(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\langle \tilde{H}'(t)\rangle, \bullet]\tilde{\rho}_S(t) - \frac{1}{\hbar^2}\int_0^t d\tau \mathrm{Tr}_B[\tilde{H}'(t) - \langle \tilde{H}'(t)\rangle, [\tilde{H}'(\tau) - \langle \tilde{H}'(\tau)\rangle, \rho_R(0)\bullet]]\tilde{\rho}_S(t), \tag{9.4}$$

onde o til indica a imagem de interação, $\langle \tilde{H}'(t)\rangle = Tr_B \tilde{H}'(t)\rho_B(0)$, S é o sistema de interesse e B designa todos os outros gráus de liberdade. Pode ser mostrado que a aproximação de Weisskopf–Wigner dependente do tempo é válida para todo tempo e acoplamento suficientemente fraco, e para tempos curtos independentemente da intensidade da interação [47]. Em particular, ela é exata para o modelos das Refs. [50, 27]. Tomando o tempo t no limite superior da integral no limite $t \to \infty$, e com a condição $\langle \tilde{H}'(t)\rangle = 0$, obtemos a aproximação de Born–Markov usual.

No caso do hamiltoniano (9.1), $\tilde{H}_I(t)$ é dado por

$$\tilde{H}_I(t) = e^{iH_0 t/\hbar} H_I e^{-iH_0 t/\hbar} = \hbar g \Theta(t - t_0)\left(\sigma_+ e^{i\epsilon t} a(t) + \text{h.c.}\right) \tag{9.5}$$

Devido à aparição da função de Heaviside, vemos que um dos ingredientes necessários é o comportamento estacionário do modo da cavidade, interagindo com o banho e com a fonte clássica. Frisamos que o presente esquema descreve bem o comportamento da densidade reduzida atômica para tempos posteriores a t_0. As equações para o setor bosônico do modelo são

$$\dot{a} = -i\omega a - i\sum_k c_k b_k + d e^{-i\omega_e t}, \tag{9.6}$$

$$\dot{b_k} = -i\omega_k b_k - i c_k a. \tag{9.7}$$

Resolvendo (9.7) em termos de a, e empregando esta solução em (9.6) obtemos a equação integrodiferencial

$$\dot{a} + i\omega a + \int_0^t d\tau \sum_k c_k^2 e^{-i\omega_k(t-\tau)} a(\tau) = -i\sum_k c_k b_k(0) e^{-i\omega_k t} + d e^{-i\omega_e t}. \tag{9.8}$$

A partir dos dados experimentais sabemos que, pelo menos para tempos não muito curtos, o terceiro termo do lado esquerdo da Eq. (9.8) pode ser aproximado por $(-i\delta\omega + \lambda)a(t)$, onde $\delta\omega$, o deslocamento de frequência e λ. a constante de acoplamento, são constantes reais.

Como o deslocamento de frequência é usualmente pequeno o descartamos. Assim, temos feito efetivamente a aproximação

$$\sum_k c_k^2 e^{-i\omega_k(t-\tau)} \approx \lambda\delta(t-\tau), \tag{9.9}$$

que pode ser usada para resolver a Eq. (9.8) fornecendo

$$a(t) = a(0)e^{-i\omega t-\lambda t} - i\int_0^t d\tau \sum_k c_k e^{(-i\omega-\lambda)(t-\tau)} e^{-i\omega_k\tau} b_k(0) + d\int_0^t d\tau e^{(-i\omega-\lambda)(t-\tau)} e^{-i\omega_e\tau}. \tag{9.10}$$

O comportamento de tempo curto de (9.10) não deve ser tomado muito em sério. Contudo, é o comportamento de tempos longos de $a(t)$ o que é de interesse (os tempos curtos interessantes são aqueles posteriores a t_0). Ainda

$$\begin{aligned}
\langle a(t)\rangle &= \langle a(0)\rangle e^{-i\omega t-\lambda t} + d\int_0^t d\tau e^{(-i\omega-\lambda)(t-\tau)} e^{-i\omega_e\tau} && (9.11)\\
&= \left(\langle a(0)\rangle - \frac{d}{\lambda+i(\omega-\omega_e)}\right) e^{-i\omega t-\lambda t} + \frac{d e^{-i\omega_e t}}{\lambda+i(\omega-\omega_e)} && (9.12)\\
&= \langle a(t)\rangle_T + \langle a(t)\rangle_S, && (9.13)
\end{aligned}$$

onde os subíndices T e S referem–se respectivamente aos comportamentos transiente e estacionário. Definimos $\delta a(t)$ segundo

$$\delta a(t) = a(t) - \langle a(t)\rangle = (a(0) - \langle a(0)\rangle) e^{-i\omega t-\lambda t} - i\int_0^t d\tau e^{(-i\omega-\lambda)(t-\tau)} e^{-i\omega_k\tau} b_k(0), \tag{9.14}$$

e $k(t)$ e $A_\pm(t)$ segundo ·

$$k(t) = \langle a(t)\rangle \exp(i\epsilon t), \quad \text{and} \quad A_{-(+)}(t) = e^{(-)i\epsilon t}\delta a^{(\dagger)}(t). \tag{9.15}$$

Estas definições nos ajudam a escrever a equação (9.4) como

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde\rho_S(t)}{dt} &= -ig\Theta(t-t_0)[k(t)\sigma_+ + \text{h.c.}, \bullet]\tilde\rho_S(t) && (9.16)\\
&\quad -g^2\Theta(t-t_0)\int_{t_0}^t d\tau \text{Tr}_B[\sigma_+ A_-(t) + \text{h.c.}, [\sigma_+ A_-(\tau) + \text{h.c.}, \rho_R(0)\bullet]]\tilde\rho_S(t).
\end{aligned}$$

Agora, como os termos que dependem de a somem e

$$\langle b_k b_l\rangle = \langle b_k^\dagger b_l^\dagger\rangle = \langle b_k^\dagger b\rangle = 0, \quad \langle b_k b_l\rangle = \delta_{k,l}. \tag{9.17}$$

vemos que a Eq. (9.16) simplifica–se para

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde\rho_S(t)}{dt} &= -ig\Theta(t-t_0)[k(t)\sigma_+ + \text{h.c.}, \bullet]\tilde\rho_S(t)\\
&\quad -g^2\Theta(t-t_0)\int_{t_0}^t d\tau \text{Tr}_B\left(\langle A'_-(t)A'_+(\tau)\rangle(\sigma_+\sigma_-\bullet - \sigma_-\bullet\sigma_+)\right.\\
&\quad \left.\langle A'_-(\tau)A'_+(t)\rangle(\bullet\sigma_+\sigma_- - \sigma_-\bullet\sigma_+)\right)\tilde\rho_S(t). && (9.18)
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}\nu(t,\tau) &= \langle A'_-(t)A'_+(\tau)\rangle = e^{i\epsilon t}(-i)\int_0^t dt' \sum_k c_k e^{(-i\omega-\lambda)(t-t')}e^{-i\omega_k t'} \times \\ &\quad \times e^{-i\epsilon\tau}(i)\int_0^\tau d\tau' \sum_l c_l e^{(i\omega-\lambda)(\tau-\tau')}e^{i\omega_k\tau'}\delta_{k,l} \\ &= \int_0^t dt' \int_0^\tau d\tau' e^{i\epsilon(t-\tau)}e^{(-i\omega-\lambda)(t-t')}e^{(i\omega-\lambda)(\tau-\tau')}\sum_k c_k^2 e^{-i\omega_k(t'-\tau')}. \qquad (9.19)\end{aligned}$$

Empregando novamente a aproximação dada pela Eq. (9.9), realizando as integrações e descartando os termos transientes obtemos

$$\nu(t,\tau) = \frac{1}{2}e^{-(\lambda+i(\omega_0-\epsilon))(t-\tau)}, \qquad (9.20)$$

que pode ser escrita como a soma de uma função simétrica $S(t-\tau)$ mais uma função antissimétrica $A(t-\tau)$,

$$S(u) = \frac{1}{2}e^{-\lambda(t-\tau)}\cos(\omega_0-\epsilon)(t-\tau), \quad A(u) = \frac{-i}{2}e^{-\lambda(t-\tau)}\sin(\omega_0-\epsilon)(t-\tau). \qquad (9.21)$$

Observando que $\tau t = \nu(\tau,t) = S(t-\tau) - A(t-\tau)$, escrevemos a equação para a densidade atômica como

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{\rho}_S(t)}{dt} &= -ig\Theta(t-t_0)[k(t)\sigma_+ + \text{h.c.}, \bullet]\tilde{\rho}_S(t) \\ &\quad -g^2\Theta(t-t_0)\int_{t_0}^t d\tau S(t-\tau)\left(\sigma_+\sigma_- \bullet - \sigma_- \bullet \sigma_+ + \bullet\sigma_+\sigma_-\right)\tilde{\rho}_S(t) \\ &\quad -g^2\Theta(t-t_0)\int_{t_0}^t d\tau A(t-\tau)[\sigma_+\sigma_-, \bullet]\tilde{\rho}_S(t). \qquad (9.22)\end{aligned}$$

Realizando as integrações e exprimindo $\sigma_+\sigma_-$ em termos de σ_z e a matriz unidade temos

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{\rho}_S(t)}{dt} &= -ig\Theta(t-t_0)[k(t)\sigma_+ + (k(t))^*\sigma_- + g\eta(t-t_0), \bullet]\tilde{\rho}_S(t) \\ &\quad - g^2\Theta(t-t_0)\mu(t-t_0)\left(\sigma_+\sigma_- \bullet - \sigma_- \bullet \sigma_+ + \bullet\sigma_+\sigma_-\right)\tilde{\rho}_S(t), \qquad (9.23)\end{aligned}$$

onde

$$k(t) = \frac{d\epsilon^{-i(\omega_e-\epsilon)t}}{\lambda + i(\omega_0-\omega_e)} \to \frac{d}{\lambda} \qquad (9.24)$$

$$\eta(t) = \frac{\lambda\epsilon^{-\lambda t}\sin(\omega_0-\epsilon)t - (\omega_0-\epsilon)(1-\epsilon^{-\lambda t}\cos(\omega_0-\omega_e)t)}{2(\lambda^2+(\omega_0-\epsilon)^2)} \to 0 \qquad (9.25)$$

$$\mu(t) = \frac{\lambda(1-\epsilon^{-\lambda t}\cos(\omega_0-\omega_e)t)}{2(\lambda^2+(\omega_0-\epsilon)^2)} \to \frac{1-\epsilon^{-\lambda t}}{2\lambda}. \qquad (9.26)$$

As setas indicam o limite no caso ressonante $\omega_0 = \omega_e = \epsilon$. As contribuições unitária e não unitária estão separadas claramente: a primeira vem dada pelo termo em η e corresponde a uma renormalização de frequência instantânea, dependente do tempo, e a última corresponde ao termo em μ, que tem forma de Lindblad [56], ligeiramente generalizada de modo a permitir coeficientes dependentes do tempo. A partir de agora trataremos somente o caso ressonante.

Observemos que o termo unitário é precisamente o que necessitamos para rodar o átomo, e que este termo não precisa ser postulado, aparece de maneira natural. Descartando o termo unitário, voltando à imagem de Schrödinger, e descrevendo o estado (puro) do átomo por

$$\psi(t) = p(t) \mid +\rangle + q(t) \mid -\rangle, \tag{9.27}$$

onde $\mid +\rangle$ e $\mid -\rangle$ são os estados superior e inferior do hamiltoniano livre, segue

$$\begin{pmatrix} p(t)e^{i\epsilon t} \\ q(t)e^{-i\epsilon t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix} \Theta(t-t_0)\cos(gd(t-t_0)/\lambda) - i \begin{pmatrix} q(0) \\ p(0) \end{pmatrix} \Theta(t-t_0)\sin(gd(t-t_0)/\lambda). \tag{9.28}$$

Assim o tempo de trânsito necessário para rodar o átomo por $\pi/2$ é $T = \pi\lambda/(2gd)$. Podemos estimar o tempo de decoerência t_D usando μ, $t_D \approx 2\lambda/g^2$. Se $g \ll d$, é possível rodar o átomo essencialmente sem perda de coerência. Esta condição pode ser colocada em uma forma ligeiramente diferente usando o fato de que em cavidades de Ramsey reais o número médio de fótons $n(t)$ é 1,

$$n(t) = \langle a^\dagger(t)a(t)\rangle = \langle a^\dagger(t)\rangle\langle a(t)\rangle = (d/\lambda)^2, \tag{9.29}$$

onde usamos (9.10) e (9.17), e $t \gg \lambda^{-1}$. Em cavidades reais $\lambda \approx d$, e se $g \ll \lambda$ o átomo pode rodar por $\pi/2$ com perda de coerência descartável.

Escrevendo a densidade atómica na base $\mid +\rangle, \mid -\rangle$,

$$\tilde{\rho}(t) = \sum_{i,j=+,-} \tilde{p}_{ij} \mid i\rangle\langle j \mid, \tag{9.30}$$

podemos transformar a Eq.(9.23), $\lambda = d$ num sistema de quatro equações diferenciais acopladas,

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} \tilde{a}_{++} \\ \tilde{a}_{+-} \\ \tilde{a}_{-+} \\ \tilde{a}_{--} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\eta(\tau) & ig & -ig & 0 \\ ig & -\eta(\tau) & 0 & -ig \\ -ig & 0 & -\eta(\tau) & ig \\ \eta(\tau) & -ig & ig & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{++} \\ \tilde{a}_{+-} \\ \tilde{a}_{-+} \\ \tilde{a}_{--} \end{pmatrix}, \tag{9.31}$$

onde $\tau = t - t_0 > 0$.

Agora, o grau de pureza na imagem de interação $\delta = \mathrm{Tr}\tilde{\rho}_S^2 = \tilde{a}_{++}^2 + \tilde{a}_{--}^2 + 2\tilde{a}_{-+}\tilde{a}_{+-}$ é igual ao grau de pureza na imagem de Schrödinger, porque as duas imágens estão relacionadas por uma transformação unitária. Da Eq. (9.31) e a definição de cima podemos escrever uma equação para δ,

$$\frac{d\delta}{d\tau} = \frac{-2g^2}{\lambda}(1 - e^{-\lambda\tau})(\delta(\tau) - (a_{--} + a_{+-}a_{-+})(\tau)). \tag{9.32}$$

que foi obtida levando em consideração o fato de que ρ_S tem traço unidade. Dado que $(a_{--} + a_{+-}a_{-+})(\tau) \geq 0$ (ρ é positivo semi–definido e hermitiano), resolvemos a Eq. (9.32) e temos o limite ("bound")

$$\delta(\tau) \geq \delta(0) \exp(-2\frac{g^2}{\lambda^2}(e^{-\lambda\tau} - 1 + \lambda\tau)). \tag{9.33}$$

Nas condições experimentais

$$\delta(T) > \delta(0) \exp(-\pi g/\lambda) \approx \delta(0)(1 - \pi g/\lambda) \approx \delta(0). \tag{9.34}$$

Com estes resultados conseguimos explicar porque a zona de Ramsey se comporta classicamente, i.e., como um acoplamento forte com o ambiente pode gerar comportamentos clássicos. Este resultado parece ser geral e esta sendo presentemente estudado neste contexto [48]. Não deixa de ser intrigante o fato de que um acoplamento forte possa levar ao limite clássico num sistema com números quânticos característicos pequenos!

Capítulo 10

Conclusões

No presente trabalho fizemos contribuições de carácter formal, através do exame de um par de modelos exatamente solúveis e a construção de aproximações alternativas às existentes para o estudo da dissipação e decoerência de subsistemas quânticos, e contribuições do ponto de vista das aplicações.

Com relação aos semigrupos dinâmicos e o teorema estrutural de Lindblad mostramos que i) liouvillianos com forma de Lindblad podem levar a resultados físicos inaceitáveis, ii) modelos exatamente solúveis podem ter liouvillianos *exatos* que não possuem a forma de Lindblad, e ii) a forma estrutural de Linblad exclui a possibilidade do fenômeno de recoerência local, presente em modelos exatos.

Um dos modelos exatamente solúveis mostra que, ainda que os fenômenos de decoerência e dissipação estão relacionados, eles são diferentes um do outro e podem existir separadamente. Neste modelo também aprendemos que as propriedades de decoerência para tempos longos dependem de maneira fundamental da função espectral, que contém a informação relevante sobre o banho térmico e a interação e mostramos que a aproximação de Born–Markov é incapaz de reproduzir os diversos comportamentos de tempos longos. Mostramos ainda que a equação mestra *exata* possui uma forma que pode ser interpretada como sendo uma generalização da forma de Lindbland (o requerimento de coeficientes constantes positivos é excessivo). Notamos também a aparição de um termo unitário que não pudemos escrever na forma de um hamiltoniano (ainda que no caso que o operador densidade for o de um estado puro, dito termo pode ser escrito como um hamiltoniano não linear). Ainda vimos que o reservatório age como um aparelho de medida que recolhe informações acerca do estado inicial do sistema com tanta mais fiabilidade quanto menor a temperatura.

O outro modelo que resolvemos exatamente é o modelo de osciladores independentes na aproximação de onda girante e a temperatura zero, mesmo no caso de um "banho térmico" com número finito de osciladores, ou até com um único oscilador. Ainda mostramos que toda a dinâmica deste sistema se encontra condensada em duas funções reais dependentes do tempo. Calculamos a evolução temporal exata de varios operadores densidade iniciais, incluindo os estados coerentes generalizados, os estados comprimidos e estados tipo gato de Schrödinger. Mostramos que um estado coerente sempre permanece coerente.

Propusemos esquemas de aproximação alternativos que dão uma descrição precisa da dinâmica de tempos curtos. As aproximações que propussemos se assemelham em espírito à regra áurea e ao Ansatz de Weisskopf–Wigner para o cálculo de taxas de transição. Estas novas aproximações são boas no caso de acoplamento fraco e para sistemas pequenos e grandes. No caso das equações mestras markovianas uma hipótese importante é que um dos sistemas interagentes é "muito grande"; nas aproximações que propomos isto *não* é necessário. Mostramos também que as nossas aproximações são boas ainda no regime de acoplamentos fortes, embora somente para tempos curtos. A aproximação de Born–Markov foi ocasionalmente generalizada para a quarta ordem (a terceira ordem sendo nula), enquanto a dedução que apresentamos da regra áurea é facilmente generalizável para a ordem n e a aproximação de Weisskopf–Wigner foi explicitamente deduzida para a n-ésima ordem.

Empregamos a expansão de Zassenhaus [79] e a aproximação de Weisskopf–Wigner dependente do tempo para mostrar que, em sistemas acoplados com banhos térmicos com frequência de Debye muito maior do que as oscilações livres do sistema, no regime pré-cinético temos uma superposição do comportamento de decoerência característico de temperatura zero com aquele de temperatura finita. Para temperaturas suficientemente baixas é possível observar, quando menos em princípio, uma mudança de comportamento, no tempo, da decoerência. Este capítulo mostra também que, pelo menos nas condições em que as aproximações empregadas são satisfeitas, a primeira coisa que um sistema acoplado a um reservatório faz é estabelecer correlações com o reservatório na base do operador do acoplamento.

Um dos modelos exatamente solúveis de cima foi empregado no caso de sais orgânicos acoplados com fônons de comprimento de onda longo comparado com o tamanho do dímero. Obtemos o que se conhece como efeito de polaron pequeno. Discutimos um caso de uma condição inicial não fatorada: para tempos longos não podemos distinguir se o operador densidade total inicial era, ou não, fatorado.

Fizemos um estudo e interpretação detalhados de um experimento de produção de gatos de Schrödinger e observação de seu processo de decoerência em cavidade quânticas de alto Q. Mostramos que sob certas condições as medidas de probabilidade estão relacionadas com os autovalores, dando uma caracterização independente de base da decoerência. Mostramos também que mesmo no caso de gatos de fase, a evolução subsequente restringe-se a um subespaço bidimensional do espaço de Hilbert do modo da cavidade, sendo que o operador densidade evoluído pode ser encarado como uma mistura de dois gatos de fase diferentes. Talvez ao resultado mais interessante desta análise seja a referente ao estudo de um aparelho periférico nesta medição: a zona de Ramsey. O formalismo por nós contruído nos permite compreender porque a zona de Ramsey se comporta classicamente embora os números quânticos envolvidos sejam pequenos.

Bibliografia

[1] G. S. Agarwal. *Quantum Statistical Theories of Spontaneous Emission and their Relation to Other Approaches.* Springer Tracts in Modern Physics, Vol. 70 (Springer, Berlin, 1974).

[2] G. S. Agarwal, Phys. Rev. **178** (1969) 2025.

[3] R. Alicki e K. Lendi, *Quantum Dynamical Semigroups and Applications*, (Springer–Verlag, Berlin, 1987).

[4] J. Anglin e S. Habib. Mod. Phys. Lett. A **11**, 2655 (1996).

[5] R. Benguria e M. Kac, Phys. Rev. Lett. **46** (1981) 1.

[6] N. Bohr, Atti del Congresso Internazionale dei Fisici Como, 11-20 Settembre 1927 (Zachelli, Bologna, 1928) Vol. 2, p.565; Nature **136** (1935) 65; Phys. Rev. **48** (1935) 696.

[7] H. E. Borges. Ph. D. Thesis. Universidade Federal de Minas Gerais, 1996.

[8] V. B. Braginsky, F. Ya. Khalili. Rev. Mod. Phys. **68**,1 (1995).

[9] V. B. Braginsky, Yu. I. Vorontsov, and F. Ya. Khalili, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **27**, 296(1978) [JETP Lett. **27**,276 (1978)].

[10] M. Brune, S. Haroche, V. Lefevre, J. M. Raimond e N. Zagury, Phys. Rev. Lett. **65**, 976 (1990)

[11] M. Brune, S. Haroche, J. M. Raimond, L. Davidovich e N. Zagury, Phys. Rev. **A45**, 5193 (1992)

[12] M. Brune, P. Nussenzveig, F. Schmidt–Kaler, F. Bernardot, A. Maali, J. M. Raimond e S. Haroche. Phys. Rev. Lett. **72** (1994) 3339.

[13] M. Brune, F. Schmidt–Kaler, A. Maali, J. Dreyer, J. M. Raimond e S. Haroche. Phys. Rev. Lett. **76** (1996) 1800.

[14] M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maître, A. Maali, C. Wunderlich, J. M. Raimond e S. Haroche, Phys. Rev. Lett. **77**, 4887 (1996).

[15] V. Buzek, H. Moya-Cessa, P. L. Knight and S. J. D. Phoenix, Phys. Rev **A45**, 8190 (1992)

[16] K. E. Kahill, R. J. Glauber. Phys. Rev **177** (1969) 1857; *ibid.* 1882.

[17] A. O. Caldeira e A. J. Leggett, Ann. Phys. (N.Y.) **149** (1983) 374.

[18] P. Caldirola. Nuovo Cim. **18** (1941) 393.

[19] L. Davidovich, M. Brune, J. M. Raymond e S. Haroche, Phys. Rev. **A53**, 1295 (1996).

[20] E. B. Davies, *Quantum Theory of Open Systems*, Academic Press, New York, 1976.

[21] H. Dekker, Phys. Rep. **80** (1981) 1.

[22] H. Dekker, M. C. Valsakumar. Phys. Lett. **104A** (1984) 67.

[23] B. S. DeWitt e N. Graham, eds. *The Many Worlds Interpretation of Quantum Mechanics* (Princeton Univ. Press., Princeton, 1973).

[24] V. V. Dodonov, I. A. Malkin and V. I. Man'ko, Physica **72**, 597 (1974).

[25] H. T. Elze, Nucl. Phys. **B436** (1995) 213.

[26] H. Everett III, Rev. Mod. Phys. **29** (1957) 454.

[27] K.M. Fonseca Romero e M.C. Nemes, Phys. Lett. A, no prelo.

[28] K. M. Fonseca Romero, M. C. Nemes, J. G. Peixoto de Faria, A. N. Salgueiro and A. F. R. de Toledo Piza. Decoherence of mesoscopic states of cavity fields. Submetido ao Physical Review Letters.

[29] G. W. Ford, M. Kac e P. Mazur. J. Math. Phys. **6** (1965) 504.

[30] C. M. Gardiner *Handbook of Stochastic Methods.* Berlin, Springer–Verlag, 1983.

[31] C. W. Gardiner, *Quantum Noise*, Springer–Verlag, Berlin, 1991.

[32] M. Gell–Mann and J. B. Hartle, in *Complexity, Entropy and the Physics of Information*, W. H. Zurek (ed), Addison–Wesley, 1990.

[33] M. Gell–Mann and J. B. Hartle, Phys. Rev. D **47** (1993) 3345.

[34] R. Gilmore. *Lie Groups, Lie Algebras and some of their Applications.* John Wiley, 1974.

[35] R. B. Griffiths, J. Stat. Phys. **36** (1984) 219.

[36] F. Haake, R. Reibold, Phys. Rev. A **32**, 2462 (1985).

[37] J. J. Halliwell and T. Yu. Phys. Rev. D **53**, 2012 (1996).

[38] Ver p.ex. S. Haroche and J. P. Raimond, *Coherence and Quantum Optics VII*, J. H. Eberly, L.Mandel and E. Wolf, Eds., Plenum Press 1996, p. 83, e referências ali contidas.

[39] B. L. Hu, J. P. Paz e T. Yu, Phys. Rev. D **45**, 2843 (1992).

[40] J. Hubbard, *Proc. Roy. Soc.* **A277** (1963) 237; **A281** (1964) 401.

[41] R. G. Hulet e D. Kleppner. Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 1430.

[42] A. Isar, Helv. Physica Acta **67** (1974) 436.

[43] E. T. Jaynes e F. W. Cummings, Proc. IEEE **51**, 89 (1963)

[44] M. Jammer. *The Conceptual Development of Quantum Mechanics* (McGraw–Hill, NY, 1966)

[45] S. R. Jefferts, C. Monroe, E. W. Bell and D. J. Wineland, Phys. Rev. A **51**, 3112 (1995).

[46] R. Karrlein e H. Grabert. Phys. Rev. **E55** (1997) 153.

[47] Ji Il Kim, M. C. Nemes, A. F. R. de Toledo Piza e H. E. Borges, Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 207.

[48] Ji Il Kim, Primeiro Encontro de Óptica Quântica, UFMG, Belo Horizonte, Brazil, August 12-14, 1997.

[49] N. G. van Kampen. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry.* North–Holland, amsterdam, 1981.

[50] N. G. van Kampen, em *25 Years of Non Equilibrium Statistical Mechanics*, J. J. Brey *et al* (eds), Springer–Verlag, 1995; J. Stat. Phys. **78** (1995) 299.

[51] E. Kanai, Prog. Theor. Phys. **3** (1948) 440.

[52] R. J. Klauder e E. C. G. Sudarshan. *Fundamentals of Quantum Optics.* Benjamin, N.Y., 1968.

[53] M. D. Kostin, J. Chem. Phys. **57** (1972) 3589.

[54] M.E. Kozlov, V.A. Ivanov e K. Yakushi, *J. Phys.: Condens. Matter* **8** (1996) 1011.

[55] A. J. Leggett *et al.*, Rev. Mod. Phys. **59** (1987) 1.

[56] G. Lindblad, *Comm. Math. Phys.* **48** (1976) 119.

[57] G. Lindblad, *Non–Equilibrium Entropy and Irreversibility*, Reidel. Dortrech, 1983.

[58] B. L. Littre and A. Matacz, in *Proc. Int. Workshop on Fluctuations and Order: a New Synthesis*, Los Alamos, 1993.

[59] W. H. Louisell. *Quantum Statistical Properties of Radiation* (Wiley, New York, 1973).

[60] L. G. Lutterbach e L. Davidovich. Phys. Rev. Lett. **78**, 2547 (1997).

[61] R. L. de Matos Filho and W. Vogel, Phys. Rev. Lett. **76**, 608 (1996).

[62] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King and D. J. Wineland, Science **272**, 1131 (1996).

[63] M. C. Nemes e A. F. R. de Toledo Piza, Physica (Amsterdam) **137A**, 367 (1986).

[64] J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, 1955, Chapters V and VI. Ver também ref. [66].

[65] J.-M. Norman. *A Lie Group: Rotations in Quantum Mechanics.* North–Holland, Amsterdam, 1980.

[66] R. Omnès, *The Interpretation of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, 1994, e referências ali contidas.

[67] J. P. Paz, S. Habib, W. H. Zurek, Phys. Rev. D **26**, 488 (1993). Este trabalho examina a relevância da densidade espectral do banho de osciladores sobre o processo de decoerência em um modelo que apresenta tanto decoerência como dissipação.

[68] J. G. Peixoto de Faria. Dissertação de Mestrado. Departamento de Física, Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 1997.

[69] C. Presilla e U. Tambini. Continuous Measurements in Quantum Systems, aceito para publicação em Hyperfine Interactions.

[70] A. F. R. de Toledo Piza. Comunicação privada.

[71] J. M. Raimond, Comunicação privada a MCN.

[72] N. F. Ramsey. *Molecular Beams* (Oxford Press, New York, 1956.)

[73] M. J. Rice, *Solid State Comm.* **31** (1979) 93.

[74] H. Risken. *The Fokker–Planck Equation – Methods of Solution and Applications*, Berlin, Springer–Verlag, 1989.

[75] A. Šandalescu, H. Scutaru. Ann. Phys. (NY) **173** (1987) 277.

[76] E. Schmidt, Math. Annalen **63** (1906), 433; A. Ekert e P. L. Knight, Am. J. Phys. **63** (1995) 415.

[77] E. Schrödinger, Naturwissenschaften **23**, 807, 823, 844 (1935).

[78] H. Spohn, *Rev. Mod. Phys.* **52** (1980) 569.

[79] M. Suzuki. Comm. Math. Phys. **57** (1977) 193.

[80] J.B. Torrence, B.A. Scott, B. Welber, F.B. Kaufman e E. Seiden, *Phys. Rev.* **B19** (1979) 730.

[81] P. Ullersma, Physica **32** (1966) 27.

[82] W. G. Unruh, Phys. Rev. D **18**, 1764 (1978); **19**, 2888, (1979).

[83] D. F. Walls, G. J. Millburn. *Quantum Optics.* Springer–Verlag, 1994.

[84] V. Weisskopf e E. Wigner, Z. Phys. **63** (1930) 54.

[85] J. A. Wheeler, Rev. Mod. Phys. **29** (1957) 463

[86] E. P. Wigner, em *The Scientist Speculates*, ed. I. J. Good (Heineman, London, 1962).

[87] W. H. Zurek, Phys. Rev. D **26** (1982) 1862; Physics Today **44** (1991) 10; Progr. Theor. Phys. **89** (1993) 28.

[88] W. H. Zurek. Phys. Rev. D **24**, 1516 (1981).

[89] W. H. Zurek, S. Habib and J. P. Paz, Phys. Rev. Lett. **70**, 1187 (1993).

[90] Em preparação