# SOBRE A EQUIVALÊNCIA DOS MODELOS ANTIFERROMAGNÉTICO DILUÍDO E FERROMAGNÉTICO EM CAMPO ALEATÓRIO : VERSÃO HIERÁRQUICA

UNIVERSIDADE DE S.T.O PAULO
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
1692
ex. 1
INSTITUTO DE FÍSICA

Tese apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para obtenção do Título de Doutor em Ciências.

SBI-IFUSP
305M810T1692

LUIZ FRANCISCO PONTIN

São Paulo 1990

Defesa : 24/09/90

530.13
P816s
D
e.1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Pontin, Luiz Francisco
Sobre a equivalência dos modelos antiferromagnetico diluído e ferromagnetico em campo aleatório: versão hierárquica. São Paulo, 1990.

Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Departamento de Física e Matemática.
Área de Concentração: Física de Partículas Elementares
Orientador: Profº Dr. José Fernando Perez

Unitermos: 1.Mecânica estatística; 2.Sistemas aleatórios.

USP/IF/SBI - 29/90

*Agradecimentos*

*O meu mais sincero e especial agradecimento ao Prof. Dr. José Fernando Perez pela excelente orientação que recebi e pela compreensão e ajuda nos momentos difíceis durante este trabalho.*

*Meus agradecimentos à senhora Maria Regina Brandão Soares, e à senhorita Cristina Silva pelo dedicado e paciente trabalho de digitação.*

*Agradeço também ao Prof. José Augusto Baêta Segundo pelas discussões sobre o trabalho que tanto ajudaram a sua compreensão e a Escola Federal de Engenharia de Itajubá pela oportunidade .*

*Dedicação*

*À Ana Rosa pela paciência durante este trabalho.*

*E a todas as pessoas que lutaram nesta vida por uma causa nobre, e principalmente àquelas que não conseguiram atingir o seu objetivo final por uma ironia do destino.*

## RESUMO

Apresentamos uma versão hierárquica do modelo de Ising para mostrar a equivalência entre os modelos ferromagnético em campo aleatório e antiferromagnético diluído em campo uniforme. A equivalência está baseada no fato de que transformações do grupo de renormalização quando aplicadas ao modelo antiferromagnético diluído produzem, como efeito combinado do campo externo e da diluição, um campo externo aleatório na nova escala. Verificamos também que quando não se leva em conta contornos dentro de contornos os modelos analisados apresentam transição de fase para dimensão $\underline{d}$ maior ou igual a dois. O método usado foi a combinação dos argumentos de Peierls, Imry e Ma e as transformações da Teoria do Grupo de Renormalização que na versão hierárquica tornam-se um processo exato.

## ABSTRACT

We are presenting a hierarchical version of Ising model to show an equivalence between the ferromagnetic model in a random magnetic field and dilute antiferromagnetic model in a uniform magnetic field. The equivalence is based on the fact that a dilute antiferromagnet in a uniform magnetic field generates under a renormalization group transformation a random magnetic field. We also verify that when we do not take into account contours inside contours the models analized show phase transition for dimension $\underset{\sim}{d}$ greater than or equal to two. The method used consists of combination of Peierls, Imry and Ma arguments and the Renormalization Group Transformation, which in the hierarchical approach becomes an exact process.

# ÍNDICE


| | página |
|---|---|
| Introdução | 1 |
| Capítulo I | |
| O Papel da Mecânica Estatística | 7 |
| Instabilidade Macroscópica | 9 |
| Condições de Contorno | 11 |
| Contorno | 12 |
| Aplicação: Transição de Fase | 13 |
| Capítulo II | |
| Campo Médio | 18 |
| Sistemas Aleatórios | 19 |
| O Método de van Hemmen | 21 |
| Modelo Ferromagnético com Campo Aleatório | 22 |
| Modelo Antiferromagnético Diluído com Campo Uniforme | 22 |
| Capítulo III | |
| Argumento de Imry e Ma | 24 |
| Fenômenos Críticos | 28 |
| Teoria do Grupo de Renormalização | 29 |
| Capítulo IV | |
| A Aproximação Hierárquica | 32 |
| Ferromagnético em Campo Aleatório | 39 |
| Ferromagnético sem Campo Magnético | 45 |
| Antiferromagnético Diluído em Campo Uniforme | 48 |
| Capítulo V | |
| Estudo dos Modelos (I.F.A) e (I.A.D.). Sem Contorno Dentro de Contorno | 60 |

Modelo (I.F.A.) $T = 0$ 60

Modelo (I.F.A.) $T > 0$ 66

Modelo (I.A.D.) $T \geq 0$ 69

Capítulo VI

Estudo do Modelo (I.F.A.) Real. Sem Contorno Dentro de Contorno 72

Capítulo VII

Comentários 78

Referências 80

# SOBRE A EQUIVALENCIA DOS MODELOS ANTIFERROMAGNETICO DILUIDO E FERROMAGNETICO EM CAMPO ALEATÓRIO: VERSÃO HIERÁRQUICA.

## INTRODUÇÃO

Nos últimos vinte anos, os chamados sistemas aleatórios, tem sido motivo de estudo tanto do ponto de vista teórico como experimental. Os primeiros trabalhos experimentais de Matthias (1958) ref. [1] com substâncias ferromagnéticas aleatoriamente dispersas em substâncias não magnéticas forneceram novos resultados à investigação de materiais magnéticos. O trabalho teórico de Brout (1959) ref. [2] conseguiu dar explicações razoáveis às observações experimentais de Matthias. Por outro lado os trabalhos teóricos de Lacour-Gayet e Toulouse (1974) ref. [3], Imry e Ma (1975) ref. [4], Grinstein (1976) ref. [5], Aharony et al (1976) ref. [6], Young (1977) ref. [7] e Aharony (1978) ref. [8] mostraram que as propriedades críticas de sistemas onde o parâmetro de ordem está acoplado a um campo magnético aleatório são drasticamente diferentes de outros sistemas com campo magnético uniforme. Por exemplo na ref. [4] Imry e Ma mostraram que a ordem de longo alcance deve desaparecer para dimensionalidade $\equiv$ $d \leq 4$ para sistemas com simetria contínua e $d \leq 2$ para sistemas com simetria discreta tipo Ising. Também o comportamento tricrítico e bicrítico se desvia da teoria de campo médio de Curie-Weiss (1948) para $d < 5$ e $d < 6$ em vez de $d < 3$ e $d < 4$ respectivamente ref. [8]. Entretanto os expoentes críticos para $4 < d < 6$ são esperados serem os mesmos de sistemas puros em $d - 2$ dimensões ref. [5,6,7].

No trabalho da ref. [9] Perez, Wreszinski e van Hemmen (1984) mostraram efetivamente que o modelo esférico (simetria "contínua") em campo magnético aleatório não apresenta transição de fase para $d \leq 4$.

No trabalho da ref. [10] Fishman e Aharony (1979) mostraram que sistemas antiferromagnéticos diluídos e em campo magnético uniforme são capazes de gerar campos magnéticos aleatórios. Os trabalhos de Cardy (1984) ref. [11] e Galam (1985) ref. [12] também mostraram que campos magnéticos pequenos são capazes de gerar campos aleatórios em sistemas antiferromagnéticos diluídos.

Uma demonstração exata foi obtida por Perez, Pontin e Baêta (1986) ref. [13] mas a nível de campo médio, onde foi mostrado que o modelo de Ising antiferromagnético diluído em campo magnético uniforme é equivalente ao modelo de Ising ferromagnético em campo magnético aleatório.

Por outro lado os trabalhos experimentais de Yoshizawa et al (1982) ref. [14] já haviam confirmado a obtenção de campos aleatórios aplicando um campo magnético uniforme em substâncias com impurezas magnéticas.

Do que ficou exposto acima podemos concluir que as preocupações com sistemas aleatórios são basicamente duas. A primeira seria a determinação das dimensões críticas $d_{superior}$ (isto é a dimensão acima da qual o sistema é gaussiano na criticalidade) e $d_{inferior}$ (isto é a dimensão acima da qual o sistema apresenta transição de fase). A segunda preocupação seria a equivalência dos modelos como sugerido nas ref. [10,11,12,13].

Com respeito a dimensão crítica $d_{inf.}$ houve muita

controvérsia sobre o seu valor pois o argumento de Imry e Ma ref. [4] mostrava que $d_{inf.} = 2$ para sistemas de Ising e o argumento da redução dimensional obtinha $d_{inf.} = 3$ ref. [15,16], que era consistente com o truque das réplicas ref. [15]. Esta situação se esclareceu um pouco com dois resultados importantes. Primeiro, Fröhlich, Fisher e Spencer (1984) ref. [16] trataram rigorosamente o argumento de Imry e Ma e mostraram a existência de uma magnetização espontânea para o modelo de Ising tridimensional com um campo aleatório fraco para modelos sem contornos internos. A prova funciona para qualquer dimensão acima de 2, dando suporte para a conjectura que 2 é a dimensão crítica inferior. Num trabalho anterior a este da ref. [16] acima, Chalker (1983) ref. [17] também havia concluído que o modelo de Ising tridimensional com um campo aleatório fraco apresentava uma magnetização espontânea para baixas temperaturas. A técnica usada por Chalker foi a combinação do argumento do Peierls com uma transformação de reescala. Segundo, um resultado obtido por Imbrie (1985) ref. [18] mostrou que o mesmo modelo já citado acima está ordenado a temperatura zero. Toda esta controvérsia sobre a dimensão crítica está finalmente resolvida em dois trabalhos, primeiramente Bricmont e Kupiainen (1988) ref. [19] provaram que para $d = 3$ e pequena variância do campo aleatório o modelo de Ising ferromagnético está ordenado o que estabelece $d_{inf.} < 3$, porém recentemente o trabalho de Aizenman e Wehr (1989) ref. [20] estabeleceu definitivamente que $d_{inf.} = 2$.

Quanto a equivalência entre os modelos antiferromagnético diluído e ferromagnético em campo aleatório há certa controvérsia pois não foi obtido ainda uma equivalência exata. Por exemplo os resultados do trabalho da ref. [43] estão em

desacordo com as previsões de Fishman e Aharony ref. [10]. Em nosso trabalho apresentamos um modelo a favor das previsões de Fishman e Aharony, entretanto continuará aqui ainda um problema em aberto a equivalência exata.

Mostraremos na aproximação hierárquica que, tranformações do grupo de renormalização quando aplicadas ao modelo de Ising antiferromagnético diluído em campo uniforme (I.A.D.) descrito pela hamiltoniana,

$$- H(\sigma) = - J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j \varepsilon_i \varepsilon_j + h \sum_i \sigma_i \qquad (I.1)$$

(onde $\varepsilon_i = 0,1$, são variáveis aleatórias responsáveis pela diluição de sítios, $\sigma_i = \pm 1$, $J > 0$ e $h$ o campo externo) mapeiam no modelo de Ising ferromagnético em campo aleatório (I.F.A.) descrito pela hamiltoniana,

$$- H(\sigma) = J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j + \sum_i h_i \sigma_j \qquad (I.2)$$

(onde $h_i$ é o campo aleatório, $\sigma_i = \pm 1$ e $J > 0$).

A importância dessa equivalência reside também no fato que os modelos antiferromagnético diluído sem campo externo e antiferromagnético sem diluição em campo externo pequeno ref. [41] têm transição de fase para $d \geq 2$. Como o modelo ferromagnético em campo aleatório tem transição de fase para $d > 2$, a equivalência mostra então que a combinação, da diluição com campo externo no modelo antiferromagnético, não produz transição de fase para $d = 2$. Mostraremos também, primeiro na aproximação hierárquica e depois argumentos para o modelo real, que quando não se leva em

conta contornos dentro de contornos o modelo de Ising ferromagnético em campo aleatório apresenta transição de fase para $d \geq 2$, em vez de $d > 2$ como ficou provado na ref. [20] .

A relevância de tratarmos a equivalência dos modelos acima descritos na aproximação hierárquica reside no fato que acredita-se que tudo que é verdadeiro dentro desta aproximação também seja verdadeiro no modelo real, pois uma equivalência direta não foi possível ainda. Segundo Gallavotti et al ref. [21] o entendimento do modelo hierárquico é um passo preliminar essencial na solução de diversos problemas de Mecânica Estatística, pois a perda de detalhes para entender o modelo real não é tão importante. É preciso deixar claro que a nossa aproximação hierárquica caracteriza corretamente a dimensão física com relação às suas propriedades de escala, e não deve ser confundido com redes hierárquicas tipo Bethe ref. [44], que correspondem a modelos de campo médio e suas variantes.

O esquema da demonstração está baseado na aplicação da teoria do grupo de renormalização combinado com o argumento de Peierls e o argumento de Imry e Ma. Para isso organizamos o trabalho na seguinte forma; no capítulo I recordamos o modelo de Ising, o critério da instabilidade macroscópica e o conceito de contorno de Peierls. Em seguida fazemos uma aplicação desses conceitos para mostrar que o modelo de Ising determinístico apresenta transição de fase em duas dimensões. No capítulo II definimos os sistemas aleatórios e apresentamos a equivalência da ref. [13] para observarmos algumas mudanças que os sistemas aleatórios apresentam em relação aos sistemas determinísticos. No

capítulo III apresentamos o argumento de Imry e Ma e a técnica do grupo de renormalização para obtermos, no capítulo IV dentro da aproximação hierárquica, a equivalência dos modelos antiferromagnético diluído em campo uniforme e ferromagnético em campo aleatório. No capítulo V mostraremos, na aproximação hierárquica, que o modelo de Ising ferromagnético em campo aleatório apresenta transição de fase para $d \geq 2$ quando não se leva em conta contornos dentro de contornos. No capítulo VI propomos um esquema para mostrar que o resultado do capítulo V pode ser estendido para o modelo real quando não se leva também em conta, contornos dentro de contornos. O capítulo VII será dedicado a comemtários gerais.

# CAPÍTULO I

## O PAPEL DA MECÂNICA ESTATÍSTICA

O estudo de um sistema físico em Mecânica Estatística consiste em estabelecer um vínculo entre as leis microscópicas da matéria, geralmente descritas pela hamiltoniana $H$ do sistema, e as grandezas macroscópicas da Termodinâmica como por exemplo a energia livre $\underline{f}$ do sistema.

Neste trabalho trataremos apenas de sistemas magnéticos numa rede $\Lambda$ de dimensão $\underline{d}$ com um total de $N \equiv |\Lambda|$ sítios, isto é, $\Lambda \subset Z^d$ onde $Z$ é o conjunto dos inteiros.

Consideremos um sistema magnético de N partículas na rede $\Lambda$ descrito pela seguinte hamiltoniana (Modelo de Ising).

$$- H_\Lambda(\sigma) = \frac{1}{2} \sum_{i,j\in\Lambda} J_{ij}\sigma_i\sigma_j + \sum_{i\in\Lambda} h_i\sigma_i + B_\Lambda(\sigma) \qquad (1.1)$$

onde $\sigma_i$'s $= \pm 1$ são chamadas variáveis de spin de cada partícula, $\sigma \equiv (\sigma_1, \ldots \sigma_N)$.

$J_{ij} = J_{ji}$ descreve a interação entre as partículas em $i$ e $j$ (também chamada integral de exchange) e $h_i$ é um campo magnético local agindo sobre a partícula $i$ e $h \equiv (h_1, \ldots h_N)$.

O termo $B_\Lambda(\sigma)$ descreve a interação do sistema com o resto do universo que é um tanto arbitrária e depende do sistema em consideração.

Entretanto iremos impor sempre que,

$$\lim_{\Lambda\to\infty} \max_{\sigma} |\Lambda|^{-1} \cdot |B_\Lambda(\sigma)| = 0 \qquad (1.2)$$

isto é, a contribuição de $B_\Lambda(\sigma)$ é um termo de superfície e é chamado de condição de contorno.

Os sistemas descritos por (1.1) acima são chamados de ferromagnéticos quando $J_{ij} > 0$ e antiferromagnético quando $J_{ij} < 0$ para todo $i, j \in \Lambda$.

Se o sistema é mantido a uma temperatura T e $f_\Lambda(\beta)$ é a energia livre por volume a Mecânica Estatística estabelece que, na descrição de Gibbs,

$$f_\Lambda(\beta) = (\beta|\Lambda|)^{-1} \cdot \ln Z_{\Lambda B_\Lambda}(\beta,h) \tag{1.3}$$

onde

$$\beta^{-1} = kT \qquad \text{(k a constante de Boltzmann)} \tag{1.4}$$

$$Z_{\Lambda B_\Lambda}(\beta,h) = \sum_D \exp\left[-\beta H_\Lambda(\sigma)\right] \tag{1.5}$$

é chamada a função de partição do sistema.

A somatória é efetuada sobre o conjunto D de todas as configurações $\sigma$ possíveis isto é $D = (\pm 1)^N$.

Entretanto as propriedades usuais da energia livre só são obtidas no limite termodinâmico, isto é,

$$f(\beta) \equiv \lim_{\Lambda\to\infty} f_\Lambda(\beta) \tag{1.6}$$

Este limite em geral existe para certas hamiltonianas no sentido de van Hove ref. [22].

Agora se $g(\sigma)$ é uma grandeza física associada ao sistema, a sua média térmica ou valor esperado será:

$$\langle g\rangle_{\Lambda B_\Lambda} = Z^{-1}_{\Lambda B_\Lambda}(\beta,h) \sum_D g(\sigma) \exp\left[-\beta H_\Lambda(\sigma)\right] \tag{1.7}$$

Duas grandezas de interesse em sistemas magnéticos são a magnetização local,

$$m_i(\beta,h_i) = \frac{\partial f_\Lambda(\beta)}{\partial h_i} \tag{1.8}$$

e

a magnetização média dada por,

$$m_\Lambda(\beta) = |\Lambda|^{-1} \cdot \sum_{i\in\Lambda} m_i(\beta,h_i) \tag{1.9}$$

O que caracteriza de um modo geral em Mecânica Estatística, o que chamamos de transição de fase, é detectar alguma singularidade na energia livre $f(\beta)$ para alguma temperatura $T_c$ chamada temperatura crítica.

## INSTABILIDADE MACROSCÓPICA

Para nossos propósitos nos próximos capítulos vamos caracterizar uma transição de fase na seguinte forma:
Consideremos novamente a hamiltoniana (1.1) na sua versão mais simples, mas não a mais fácil de se resolver,

$$- H_\Lambda(\sigma) = \frac{1}{2} J \cdot \sum_{\langle i,j\rangle} \sigma_i\sigma_j + h \sum_i \sigma_i + B_\Lambda(\sigma) \tag{1.10}$$

onde $\langle i,j\rangle$ significa um par de vizinhos mais próximos isto é $|i - j| = 1$.

Uma maneira alternativa de estudarmos um sistema é considerar as funções de correlação definidas por:

$$\langle\sigma_{i_1}.\sigma_{i_2}\ldots\sigma_{i_n}\rangle_{\Lambda.B_\Lambda} = Z_{\Lambda B_\Lambda}(\beta.h) \cdot \sum_D \sigma_{i_1}.\sigma_{i_2}\ldots\sigma_{i_n}.. \exp[-\beta H_\Lambda(\sigma)] \tag{1.11}$$

Assim a magnetização local e a magnetização média são respectivamente,

$$m_i(\beta,h_i) = \langle\sigma_i\rangle_{\Lambda B_\Lambda} \tag{1.12}$$

e

$$m_\Lambda(\beta) = |\Lambda|^{-1} \cdot \sum_{i\in\Lambda} \langle\sigma_i\rangle_{\Lambda B_\Lambda} \tag{1.13}$$

Referimos à família de funções de correlação (1.11) como estados de equilíbrio do sistema no volume $\Lambda$. Chamamos de estado de equilíbrio do sistema infinito qualquer família $\langle\langle\sigma_{i_1} \cdot \sigma_{i_2} \ldots \sigma_{i_n}\rangle\rangle$ de funções tal que para uma possível escolha de $B_\Lambda(\sigma)$, tenhamos

$$\langle\sigma_{i_1} \cdot \sigma_{i_2} \ldots \sigma_{i_n}\rangle = \lim_{\Lambda\to\infty} \langle\sigma_{i_1} \cdot \sigma_{i_2} \ldots \sigma_{i_n}\rangle_{\Lambda B_\Lambda} \tag{1.14}$$

simultaneamente para todo $n \geq 1$ e todo $i_1, i_2, \ldots i_n \in \Lambda$.

A definição que adotaremos para transição de fase está baseada na detecção de instabilidade macroscópica ref.[23]. "Dizemos que ocorre uma transição de fase para um valor $(\beta,h)$ dos parâmetros termodinâmicos se o sistema é instável com respeito a perturbações nas condições de contorno".
Isto é, se existe ao menos duas seqüências $B_\Lambda(\sigma)$ e $B'_\Lambda(\sigma)$ de condições de contorno tal que,

$$\lim_{\Lambda\to\infty} \langle\sigma_{i_1} \ldots \sigma_{i_n}\rangle_{\Lambda B_\Lambda} \neq \lim_{\Lambda\to\infty} \langle\sigma_{i_1} \ldots \sigma_{i_n}\rangle_{\Lambda B'_\Lambda} \tag{1.15}$$

para uma escolha conveniente de $i_1 \ldots i_n$.

Vamos deixar claro porque se (1.15) se verifica, temos uma instabilidade macroscópica. Observamos que mudanças da condição de contorno não mudam as propriedades extensivas como

por exemplo a energia livre, pois de (1.1) e (1.5) temos

$$Z_{\Lambda B_\Lambda}(\beta,h)/ Z_{\Lambda B'_\Lambda}(\beta,h) \leq \exp [ \max_{\sigma\varepsilon D} | B_\Lambda(\sigma) | + | B'_\Lambda(\sigma)|] \qquad (1.16)$$

e de (1.2) implica que

$$\lim_{\Lambda\to\infty} |\Lambda|^{-1} \ln Z_{\Lambda B_\Lambda}(\beta,h) = \lim_{\Lambda\to\infty} |\Lambda|^{-1} \ln Z_{\Lambda B'_\Lambda}(\beta,h) \qquad (1.17)$$

Por outro lado se (1.5) se verifica, quantidades intensivas como as funções de correlação são sensíveis às condições de contorno. Por exemplo se

$$\lim_{\Lambda\to\infty} \langle\sigma_i\rangle_{\Lambda B_\Lambda} \neq \lim_{\Lambda\to\infty} \langle\sigma_i\rangle_{\Lambda B'_\Lambda} \qquad (1.18)$$

a magnetização local muda como uma conseqüência da condição de contorno, mesmo para uma fronteira muito distante.

## CONDIÇÕES DE CONTORNO

As condições de contorno mais importantes são as seguintes:

1) Condição de contorno livre (também chamada parede perfeita) é dada por $B_\Lambda(\sigma) = 0$ para todo $\sigma \varepsilon D$.

2) Condição de contorno periódica, consiste em acoplar os spins das faces opostas de $\Lambda$ com a mesma interação $J$.

3) Condição de contorno ($\varepsilon$). Sejam $(i_1, i_2 \ldots)$ os $2d|\Lambda|^{(d-1)/d}$ pontos da rede adjacente a fronteira $\partial\Lambda$ de $\Lambda$, seja $\varepsilon = (\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2} \ldots)$ com $\sigma_{i_k} = \pm$ fixo.

A condição de contorno ($\varepsilon$) é então definida por:

$$B_\Lambda(\sigma) = -J \sum_{\substack{ik \in \partial\Lambda \\ ij \in \Lambda}} \sigma_{ik} \cdot \sigma_{ij} \quad \text{com } ik \text{ e } ij \text{ vizinhos mais próximos.}$$

Os casos $\varepsilon = (+1, +1, \ldots)$ e $\varepsilon = (-1, -1, \ldots)$ são chamados respectivamente condições de contorno (+) e (−).

## CONTORNO

Para d=2 dada uma configuração $\sigma$ podemos representá-la atribuindo a cada sítio $i \in \Lambda$ apenas um sinal + resp. (−) de acordo com o valor de $\sigma_i = +1$ resp. ($\sigma_i = -1$). É fácil concluir agora que temos uma região desconexa $\Lambda^+$ resp ($\Lambda^-$) de sinais + resp(−) tal que $\Lambda^+ \cup \Lambda^- = \Lambda$. A região $\Lambda^+$ tem uma fronteira natural com a região $\Lambda^-$ que é construída da seguinte forma: Traçamos um segmento de comprimento 1, perpendicular ao centro da linha que une dois sinais contrários mais próximos. Fazemos agora uma seqüência fechada $\gamma$ desses segmentos chamada contorno, de modo a separar as regiões $\Lambda^+$ e $\Lambda^-$ sem ambigüidade. O comprimento $|\gamma|$ de cada contorno $\gamma$ será exatamente o número de segmentos que compõem $\gamma$. Cada contorno é uma linha poligonal fechada. Fixada agora uma condição de contorno (+) ou (−) temos uma família $\Gamma = \{\gamma\}$ de contornos associada univocamente a cada configuração $\sigma$.

Podemos calcular agora para cada configuração $\sigma$ a parte da hamiltomiana relativa à $J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j$ em função da família $\Gamma$ associada

a $\sigma$.

Do total de $\underline{n}$ pares $\sigma_i\sigma_j$ em $\Lambda$ temos $\underline{n}^+$ pares que contribuem positivamente sempre que $\sigma_i = \sigma_j$ e $\underline{n}^-$ pares que contribuem negativamente sempre que $\sigma_i = -\sigma_j$ tal que $n = n^+ + n^-$. Assim temos $J \sum_{\langle i,j\rangle} \sigma_i\sigma_j = J(n^+ - n^-) = J(n - 2n^-)$. Porém spins de um mesmo sinal ocorrem fora ou dentro de um contorno, assim de acordo com a definição de $|\gamma|$ temos que $n^- = \sum_{\gamma\in\Gamma} |\gamma|$ e finalmente temos

$$\frac{1}{2} J \sum_{\langle i,j\rangle} \sigma_i\sigma_j = J\left[\frac{n}{2} - \sum_{\gamma\in\Gamma} |\gamma|\right] \qquad (1.19)$$

O conceito de contorno pode ser estendido sem dificuldades para o caso tridimensional, onde cada segmento de comprimento 1 é substituído por uma superfície quadrada de área 1 e o contorno passa ser uma superfície poliédrica fechada $\gamma$ de área $|\gamma|$. Em ambos os casos a energia será dada por '(1.19)' acima.

## APLICAÇÃO: TRANSIÇÃO DE FASE

Vejamos agora como as condições de contorno (+) e (-) produzem diferentes estados de equilíbrio para temperaturas suficientemente baixas, ref.[24]. Ou mais precisamente que se h=0 e $\beta$ é suficientemente grande então,

$$\lim_{\Lambda\to\infty} \langle\sigma_i\rangle_{\Lambda\pm} = \pm\, m(\beta) \neq 0 \qquad (1.20)$$

o índice $\pm$ refere-se às condições de contorno ($\pm$).

Por definição

$$\langle\sigma_i\rangle_{\Lambda+} = Z_{\Lambda+}^{-1}(\beta) \sum_D \sigma_i \exp\left[-\beta H_\Lambda(\sigma)\right] = \tag{1.21}$$

$$= Z_{\Lambda+}^{-1}(\beta) \sum_{D\ni\sigma_i=1} \exp\left[-\beta H_\Lambda(\sigma)\right] - Z_{\Lambda+}^{-1}(\beta) \sum_{D\ni\sigma_i=-1} \exp\left[-\beta H_\Lambda(\sigma)\right] \tag{1.22}$$

Definindo agora $P_{\Lambda+}(+)$ resp. $(P_{\Lambda+}(-))$ como a probabilidade de $\underline{i}$ ser + resp. (−), temos exatamente que

$$P_{\Lambda+}(\pm) = Z_{\Lambda+}^{-1}(\beta) \sum_{D\ni\sigma_i=\pm 1} \exp\left[-\beta H_\Lambda(\sigma)\right] \tag{1.23}$$

e

$$P_{\Lambda+}(+) + P_{\Lambda+}(-) = 1 \tag{1.24}$$

portanto

$$\langle\sigma\rangle_{\Lambda+} = 1 - 2P_{\Lambda+}(-) \tag{1.25}$$

Agora se $\underline{i}$ está ocupado por um sinal − então necessariamente temos sempre um contorno $\gamma(i)$ rodeando $\underline{i}$, isto por causa da condição de contorno ser (+). Se $\rho(\gamma(i))$ é a probabilidade do contorno $\gamma(i)$ então

$$P_{\Lambda+}(-) \leq \sum_{\gamma(i)} \rho(\gamma(i)) \tag{1.26}$$

Vamos estimar agora $\rho(\gamma(i))$. Se $\Gamma = (\gamma_1 \ldots \gamma_n)$ é uma configuração e se o símbolo $\Gamma$ comp $\gamma(i)$ significa que o contorno $\gamma(i)$ é disjunto de $\gamma_1 \ldots \gamma_n$ isto é se $(\gamma(i) \cup \Gamma)$ é uma nova configuração então

$$\rho(\gamma(i)) = \frac{\sum_{\Gamma \ni \gamma(i)} \exp\left[-2\beta J \sum_{\gamma' \in \Gamma} |\gamma'|\right]}{\sum_{\Gamma} \exp\left[-2\beta J \cdot \sum_{\gamma' \in \Gamma} |\gamma'|\right]} \equiv$$

$$\equiv \exp\left[-2\beta J |\gamma(i)|\right] \frac{\sum_{\Gamma \text{ comp}\gamma(i)} \exp\left[-2\beta J \sum_{\gamma' \in \Gamma} |\gamma'|\right]}{\sum_{\Gamma} \exp\left[-2\beta J \cdot \sum_{\gamma' \in \Gamma} |\gamma'|\right]} \tag{1.27}$$

O que fizemos acima consistiu no seguinte se $\Gamma = (\gamma(i), \gamma_1, \ldots \gamma_n)$ então $\Gamma^1 = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n)$ é obtida de $\Gamma$ revertendo os sinais dentro de $\gamma(i)$. A última razão em (1.27) não excede de 1 assim

$$\rho(\gamma(i) \leq \exp\left[-2\beta J \; |\gamma(i)|\right] \tag{1.28}$$

Chamando $p = |\gamma(i)|$ e observando que há no máximo $3^p$ diferentes formas de $\gamma(i)$ com perímetro p e no máximo $p^2$ congruentes $\gamma(i)$ contendo $\underline{i}$ em seu interior, de (1.26) e (1.28) temos

$$P_\Lambda(-1) \leq \sum_{p=4}^{\infty} p^2 \cdot 3^p \exp\left[-2\beta J p\right] \tag{1.29}$$

Assim se $\beta \to \infty$ (isto é $T \to 0$) esta probabilidade pode ser tão pequena quanto se queira, portanto $\langle\sigma_i\rangle_{\Lambda+}$ tende a 1 para $\beta$ suficientemente grande. Devemos observar um fato importante que $\langle\sigma_i\rangle_{\Lambda+}$ tende a 1 uniformemente em $\underline{i}$ e $\Lambda$. Usando condição de

contorno (-) é fácil observar que $\langle\sigma_i\rangle_{\Lambda-} = -\langle\sigma_i\rangle_{\Lambda+}$ o que permite concluir que $\langle\sigma_i\rangle_{\Lambda-} \neq \langle\sigma_i\rangle_{\Lambda+}$ para $\beta$ grande. Assim este sistema apresenta uma instabilidade com respeito às condições de contorno.

Ao fato acima dizemos que houve quebra espontânea da simetria spin + e spin-. A hamiltoniana (1.10) é simétrica na ausência de campo com respeito a troca de spin + por spin - e quando se despreza o termo de fronteira. A transição de fase se manifesta no fato que existem estados de equilíbrio no qual a simetria é violada somente na fronteira e a qual não é simétrica mesmo no limite quando a fronteira se afasta infinitamente.

Uma interpretação heurística do efeito da fronteira sobre a transição de fase consiste em observar, que fixada por exemplo a condição de contorno (+), partindo então da fronteira em direção ao meio do sistema, se quizermos eliminar um primeiro contorno que aparece, devemos trocar os sinais (-) dentro do contorno por sinais (+) que são os da fronteira. Assim a eliminação dos contornos se dá por imposição da fronteira, agora precisamos saber qual o custo energético para se eliminar um contorno. Este custo energético tem que ser balanceado pelo termo entrópico que favorece exatamente a construção de contornos para $\Lambda \to \infty$.

O que foi mostrado acima foi que a baixas temperaturas o sistema prefere eliminar contornos do que construir porque é energeticamente mais "barato" ou em outras palavras o sistema de spins prefere se orientar segundo a fronteira mesmo que esta esteja infinitamente distante.

Portanto este sistema apresenta uma instabilidade macroscópica porque se mudarmos a fronteira ele irá seguir a nova orientação, conseqüentemente temos uma transição de fase. Este

argumento será usado novamente no capítulo IV.

Para $d = 1$, como é bem sabido, Ising (1920) ref.[25] mostrou que esse modelo não apresenta transição de fase.

# CAPÍTULO II

## CAMPO MÉDIO

Como vimos, um dos objetivos da Mecânica Estatística é calcular a energia livre $f_\Lambda(\beta)$ e a magnetização média $m_\Lambda(\beta)$ de um sistema. Este cálculo de um modo geral não é simples. Entretanto existem diversas aproximações que permitem calcular exatamente a energia livre como por exemplo o modelo gaussiano ref.[26], o modelo esférico ref.[27] e o modelo de campo médio ref.[28]. A relevância de cálculos exatos é para comparar a teoria com os valores experimentais. O modelo de campo médio também chamado modelo de Curie-Weiss consiste em aproximar a interação $J_{ij}$ da hamiltoniana (1.1) por uma interação de longo alcance do tipo $J/N$ onde $J = \Sigma J_{ij}$ e todos os spins interagem entre si igualmente.

Este modelo é não físico no sentido que $J_{ij}$ deve ir diminuindo a medida que aumenta a distância $|\underline{i} - \underline{j}|$ e também ao fato que $J/N$ depende do volume do sistema. Entretanto este modelo foi capaz de prever uma transição de fase para uma temperatura crítica Tc (ponto de Curie) e uma magnetização espontânea para sistemas ferromagnéticos que concordam razoavelmente bem com a experiência.

Na aproximação de campo médio a hamiltoniana (1.1) fica então, com condição de contorno livre e num campo uniforme,

$$- H_\Lambda(\sigma) = \frac{J}{2N} \sum_{i,j\in\Lambda} \sigma_i\sigma_j + h. \sum_{i\in\Lambda} \sigma_i \qquad (2.1)$$

Usando o método de Laplace pode-se mostrar que no limite termodinâmico a magnetização média $m(\beta,h)$ obedece a

seguinte relação.

$$m = tgh\beta(Jm + h) \qquad (2.2)$$

O objetivo desta seção rápida sobre campo médio foi escrever apenas a relação (2.2) acima para podermos comparar logo mais adiante com sistemas aleatórios e vermos algumas mudanças que ocorrem.

## SISTEMAS ALEATÓRIOS

Vejamos agora como proceder com a Mecânica Estatística em sistemas que tem algum parâmetro aleatório na sua hamiltoniana $H_\Lambda(\sigma)$ como por exemplo $J_{ij}$ e $h_i$ da relação (1.1). Quando apenas $J_{ij}$ é uma variável aleatória temos um sistema com interação aleatória em campo uniforme e quando apenas $h_i$ é uma variável aleatória temos um sistema com campo aleatório.

Com respeito a esses sistemas aleatórios segundo Brout ref.[2] temos dois pontos de vista a considerar. Nós temos os sistemas aleatórios chamados recozidos e temperados. Para facilitar a compreensão dessa diferença imaginemos um bloco de um material puro. Vamos supor agora que de alguma forma trocamos aleatoriamente alguns átomos desse material por átomos de outro material que consideramos por impurezas. O sistema recozido consiste em aquecer este bloco de modo a permitir que as impurezas adquiram um novo estado de equilíbrio segundo Gibbs e depois de resfriado o sistema, fazemos o seu estudo termodinâmico. O sistema temperado consiste em manter "congelado" em suas posições as impurezas e fazermos uma média sobre a aleatoriedade

após a média térmica do sistema segundo Gibbs.

Esta caracterização é de fundamental importância pois quando se estuda uma amostra num laboratório é mantido fixo as impurezas, assim devemos considerar os sistemas temperados, pois nas palavras de Anderson ref.[29]: "Nenhum átomo é uma média dos outros átomos".

Assim em sistemas recozidos a Termodinâmica, segundo o que ficou exposto acima, é obtida calculando primeiramente a média sobre os parâmetros aleatórios na função de partição $Z_{\Lambda B_\Lambda}(\beta,h)$ isto é $\overline{Z_{\Lambda B}(\beta,h)}$ e em seguida calculamos a energia livre por $f_\Lambda(\beta) = (\beta|\Lambda|)^{-1}.\ \ln\ \overline{Z_{\Lambda B_\Lambda}(\beta,h)}$ . Em sistemas temperados a energia livre $f_\Lambda(\beta)$ é obtida fazendo a média sobre os parâmetros aleatórios da energia livre $F_\Lambda(\beta) \equiv (\beta|\Lambda|)^{-1}.\ \ln\ Z_{\Lambda B_\Lambda}(\beta,h)$ isto é $f_\Lambda(\beta) = \overline{F_\Lambda(\beta)}$.

O argumento heurístico para tal procedimento é o seguinte: considere um sistema $\Lambda$ muito grande (com impurezas) dividido em um número $\underline{n}$ muito grande de subunidades $\Lambda_i$ semelhantes tais que $\Lambda = \bigcup_{i=1}^{n} \Lambda_i$, como é muito grande também o número de átomos em cada subunidade podemos desprezar a interação entre as subunidades. (Este procedimento é semelhante ao usado na obtenção do limite termodinâmico ref. [22]).

Agora no sistema recozido todas as configurações da aleatoridade são considerados em cada subunidade assim a energia livre é a mesma pois

$$\frac{1}{n}\ .\ \ln\ \overline{Z_\Lambda(\beta,h)} = \frac{1}{n}\ \ln \prod_{i=1}^{n} \overline{Z_{\Lambda_i}(\beta,h)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\ \overline{Z_{\Lambda_i}(\beta,h)} = \ln\ Z_{\Lambda_i}(\beta,h) \tag{2.3}$$

Para o sistema temperado temos

$$\frac{1}{n} \ln Z_\Lambda(\beta,h) = \frac{1}{n} \ln \prod_{i=1}^{n} Z_{\Lambda_i}(\beta,h) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln Z_i(\beta,h) \qquad (2.4)$$

como em cada subunidade é diferente a aleatoriedade, esta última soma em (2.4) é a média sobre a aleatoriedade.

Este argumento heurístico foi entretanto demonstrado por van Hemmen (1981) ref.[30] onde prova-se que a energia livre de um sistema aleatório temperado é $f_\Lambda(\beta) = (\beta|\Lambda|)^{-1} \overline{\ln Z_\Lambda(\beta,h)}$ (2.5) com probabilidade um. O elemento chave desta demonstração é a lei forte dos grandes números ref.[31]. Como consequência de (2.5) a magnetização local de um sistema temperado deverá ser dada por

$$m_i(\beta,h_i) = \overline{\langle \sigma_i \rangle_{\Lambda B_\Lambda}} \qquad (2.6)$$

## O MÉTODO DE VAN HEMMEN

Para sistemas aleatórios, mas com interações de campo médio, van Hemmen ref.[32] foi capaz de desenvolver uma técnica para calcular a energia livre para modelos de vidro de spin, generalizando o método de Laplace.

O método de van Hemmen elimina o trabalho extra que temos com sistemas aleatórios temperados que é tomar a média aleatória após a média térmica. os sistemas aleatórios que iremos tratar em todo este trabalho serão apenas os temperados.

## MODELO FERROMAGNÉTICO COM CAMPO ALEATÓRIO

O modelo ferromagnético com campo aleatório na aproximação de campo médio é descrito pela seguinte hamiltoniana com condições de contorno livre,

$$- H_\Lambda(\sigma) = \frac{J}{2N} \cdot \sum_{i,j\in\Lambda} \sigma_i\sigma_j + \sum_{i\in\Lambda} h_i\sigma_i \qquad (2.7)$$

onde $J > 0$, os campos magnéticos $h_i$ são variáveis aleatórias, independentes, identicamente distribuídos, com média zero e variância $\sigma^2$ finita.

Fazendo uso da técnica de van Hemmen, Salinas e Wreszinski ref.[33] obtiveram especialmente para o caso $h_i = \pm h$ $(h > 0)$ com probabilidade 1/2, a seguinte relação para magnetização $m(\beta,h)$

$$2m = \mathrm{tgh}\beta(Jm + h) + \mathrm{tgh}\beta(Jm - h) \qquad (2.8)$$

Comparando (2.2) com (2.8) podemos observar uma mudança no comportamento da magnetização, pois (2.2) apresenta um ponto crítico e (2.8) um ponto tricrítico.

## MODELO ANTIFERROMAGNÉTICO DILUÍDO COM CAMPO UNIFORME

O modelo antiferromagnético diluído com campo uniforme da ref.[13] é descrito pela hamiltoniana,

$$- H_\Lambda(\sigma) = + \frac{J}{2N} \cdot \sum_{i,j\in\Lambda^p} \epsilon_i\epsilon_j\sigma_i\sigma_j + \frac{J}{2N} \cdot \sum_{i,j\in\Lambda^i} \epsilon_i\epsilon_j\sigma_i\sigma_j \quad +$$

$$- \frac{J}{N} \cdot \sum_{\substack{i\in\Lambda^p \\ j\in\Lambda^i}} \cdot \epsilon_i\epsilon_j\sigma_i\sigma_j + h \sum_{i\in\Lambda} \epsilon_i\sigma_i \qquad (2.9)$$

onde $J > 0$, $\epsilon_i = 1$ com probabilidade $p$ e $\epsilon_i = 0$ com probabilidade $1-p$ descreve a diluição. $\Lambda^P$ e $\Lambda^I$ referem-se as duas subredes interpenetrantes respectivamente par e impar tais que $\Lambda^I \cup \Lambda^P = \Lambda$. O sistema interage antiferromagneticamente entre subredes e ferromagneticamente nas mesmas subredes. $h$ é o campo magnético uniforme.

Novamente fazendo uso da técnica de van Hemmen obtem-se para a magnetização $m(\beta,h)$ desse modelo a seguinte relação,

$$2m = p\,tgh(\beta(Jm + h)) + p\,tgh(\beta(Jm - h)) \qquad (2.10)$$

As relações (2.8) e (2.10) podem ser mapeadas e dizemos que estes dois modelos fornecem uma equivalência exata. Porém uma análise simples das relações (2.8) e (2.10) mostra que para $p = 1$ (ausência de diluição) estas relações se tornam idênticas, entretanto foi demonstrado na ref. [42] que somente para $p < 1$ "os expoentes críticos (ver Fenômenos Críticos cap.III) são idênticos nos dois modelos e para $p = 1$ são diferentes de $p < 1$.

# CAPÍTULO III

Neste capítulo vamos apresentar o argumento de Imry e Ma para modelos aleatórios e o procedimento da teoria do grupo de renormalização de Wilson para o estudo da criticalidade. Estes dois assuntos estarão combinados no capítulo IV para obter uma equivalência entre os modelos ferromagnético em campo aleatório e antiferromagnético diluído.

## ARGUMENTO DE IMRY E MA

Como vimos no final do capítulo II, quando introduzimos algum parâmetro aleatório $J_{ij}$ ou $h_i$ isto provoca mudanças no comportamento dos sistemas mesmo no modelo de campo médio que não é tão físico.

Vamos explorar agora outro detalhe dos sistemas com parâmetros aleatórios que é o papel da dimensão d da rede $\Lambda$ para a transição de fase. Para modelos de campo médio a dimensão não desempenha um papel significante uma vez que todos os spins interagem entre si igualmente. É fácil entender porque a dimensão deve desempenhar algum papel se a interação entre os spins é apenas de vizinhos mais próximos. Considere novamente a hamiltoniana (1.10) com interação apenas de vizinhos mais próximos. Começando com d = 1 é fácil observar que um spin $\underline{i}$ longe da fronteira tem dois vizinhos mais próximos, assim ele está sujeito a dois acoplamentos mas atua sobre ele apenas um campo magnético $h_i$. Para d = 2, 3 ... $\nu$ ... é fácil calcular que o

spin $\underline{i}$ e no entanto apenas um mesmo campo $h_i$ agindo que não depende da dimensão.

Especialmente para modelos com interações de vizinhos apenas e um campo aleatório Imry e Ma ref.[4] propuserem um argumento para prever a dimensão critica inferior = $d_{int.}$ abaixo da qual o sistema não apresenta transição de fase. O argumento de Imry e Ma consiste em estimar o custo energético para a formação de domínios de spins com uma mesma orientação. Para um modelo onde o spin apresenta uma simetria discreta + em - como o modelo de Ising, o argumento é o seguinte: Suponha primeiro um modelo sem campo, se temos dois domínios próximos de spins, com dimensão linear L, o custo energético para reverter todos os spins de um dos domínios depende apenas dos spins da fronteira uma vez que a troca $\sigma_i \to -\sigma_i$ só é afetada na fronteira para a hamiltoniana

$$- H_\Lambda(\sigma) = J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j \qquad (3.1a)$$

Assim o custo energético é da ordem de $L^{d-1}$, portanto para $d \leq 1$ poderemos ter um custo energético suficientemente pequeno para domínios grandes, isto é L grande. O favorecimento à existência de grandes domínios com spins diferentes é um reflexo da falta de ordem de longo alcance o que implica na ausência de magnetização ou ausência de transição de fase para $d = 1$, como vimos no capítulo II.

Se temos um campo aleatório hi (3.1a) assume a forma

$$- H_\Lambda(\sigma) = J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j + \sum_i h_i \sigma_i \qquad (3.1b)$$

Com um campo aleatório $h_i$ com média zero e variância

finita o custo energético para reverter os spins tem que ser balanceado pela energia do campo $h_i$ dentro do domínio. Ainda que a contribuição média de cada $h_i$ é zero, nós temos que levar em conta que este campo flutua e a contribuição da flutuação para um domínio com dimensão linear L é tipicamente $\overline{\Delta h^2} \simeq L^d$. Assim temos que para construir um domínio de lado L o sistema tem ganho ou perda energética da ordem de $L^{d/2}$ por domínio e uma perda da ordem de $L^{d-1}$ por superfície. Portanto sempre que $d/2 > d-1$ ou $d < 2$ existirá um L suficientemente grande que é energeticamente favorável à construção de domínios isto é, o sistema segue a orientação do campo aleatório o que impede por sua vez uma magnetização do sistema, o caso $d = 2$ é não conclusivo. Assim seríamos tentado a estabelecer que a dimensão crítica inferior seria $d_{inf} \leq 2$, porém uma série de outros resultados contraria este valor. Toda a controvérsia sobre a dimensão crítica inferior só foi resolvida nos trabalhos da ref.[19] e ref.[20] onde ficou definitivamente estabelecido respectivamente que $d_{inf} = 2$ e que para $d \geq 3$ o modelo de Ising apresenta transição de fase, como já dissemos.

Para sistemas onde os spins tem uma simetria contínua como no modelo esférico o argumento de Imry e Ma prevê $d_{inf} = 4$, o que é confirmado no trabalho da ref.[9].

O argumento de Imry e Ma foi rejeitado por algum tempo porque este não levava em conta a possibilidade de domínios dentro de domínios ou contornos dentro de contornos. Para o sistema ferromagnético com campo aleatório este fato não altera as conclusões a respeito de $d_{inf}$, como veremos no capítulo IV na seção "Ferromagnético em Campo Aleatório". Entretanto para certos sistemas antiferromagnéticos diluídos o argumento é inaplicável

como veremos agora.

Consideremos a seguinte hamiltoniana para modelos antiferromagnéticos diluídos,

$$-H_\Lambda(\sigma) = -\sum_{\langle i,j\rangle} J_{ij}\,\sigma_i\,\sigma_j + \sum_{i\varepsilon\Lambda} h_i\,\sigma_i \qquad (3.1c)$$

que pode ser mapeada num modelo ferromagnético diluído em campo alternado com a troca $\sigma_i \to -\sigma_i$ para todo $i \varepsilon \Lambda^p$ (sub rede par), assim temos

$$-H_\Lambda(\sigma) = \sum_{\langle i,j\rangle} J_{ij}\,\sigma_i\,\sigma_j + \sum_{i\varepsilon\Lambda^i} h_i\,\sigma_i - \sum_{i\varepsilon\Lambda^p} h_i\,\sigma_i \qquad (3.1d)$$

Para o modelo "diluição de sítios" onde $J_{ij} = J\varepsilon_i\varepsilon_j$ e $h_i = h\varepsilon_i$, com $\varepsilon_i$ definido como em (2.9), o argumento de Imry e Ma fornece o mesmo resultado que o campo aleatório. Para reverter os spins dentro de um domínio de dimensão linear L o custo energético médio do termo $J\,\Sigma\varepsilon_i\varepsilon_j\sigma_i\sigma_j$ é da ordem de $L^{d-1}$. O custo médio do termo $h\sum_{i\varepsilon\Lambda^i}\varepsilon_i\sigma_i - h\sum_{i\varepsilon\Lambda^p}\varepsilon_i\sigma_i$ é da ordem de zero, porém a flutuação ou a variância é da ordem de $L^{d/2}$ o que coincide com a análise de campo aleatório.

No modelo "diluição de elos", onde $J_{ij} = 0,1$, com probabilidade $1 - p$, $p$, respectivamente e $h_i = h$ (constante), para reverter os spins dentro de um domínio de dimensão linear L o custo energético médio do termo $\Sigma\, J_{ij}\,\sigma_i\,\sigma_j$ é da ordem de $L^{d-1}$. Por outro lado o termo $h\sum_{i\varepsilon\Lambda^i}\sigma_i - h\sum_{i\varepsilon\Lambda^p}\sigma_i$ tem contribuição da ordem de zero tanto na média como na flutuação pois é uma constante. Assim seríamos induzidos a concluir erradamente para o modelo diluição de elos que haveria transição

de fase para $d > 1$. Porém como veremos no capitulo IV na seção "Antiferromagnético Diluído Em Campo Uniforme", na versão hierárquica, este modelo é equivalente ao modelo ferromagnético em campo aleatório e só apresenta transição de fase para $d > 2$. O fato importante para essa equivalência é que seja levado em conta contornos dentro de contornos.

## FENÔMENOS CRÍTICOS

A teoria do grupo de renormalização de Wilson ref.[34, 35] teve sua origem nas explicações de Kadanoff ref.[36] para fenômenos críticos. A hipótese de Kadanoff está baseada na hipótese de escala que consiste em propor para T próximo da temperatura crítica Tc (ponto de Curie) que a parte singular da energia livre por unidade de volume $f_\Lambda(t,h)$ seja uma função homogênea generalizada ref.[37] de t e h isto é

$$f_\Lambda(t,h) = \lambda^{-d} f_\Lambda(\lambda^{a_t}.\ t,\ \lambda^{a_h}.\ h) \qquad (3.2)$$

para todo valor de $\lambda$, onde d é dimensão da rede $\Lambda$, h é o campo magnético e t a temperatura reduzida definida por

$$t = (T - Tc)/Tc \qquad (3.3)$$

A partir de (3.2) acima podemos mostrar que para $h = 0$ e $t \to 0$, o calor específico, a magnetização e a suscetibilidade isotérmica tem um comportamento assintótico dado respectivamente

por

$$C_h \simeq |t|^{-\alpha} \tag{3.4a}$$

$$m \simeq |t|^{\beta} \tag{3.4b}$$

$$\chi_t \simeq |t|^{-\gamma} \tag{3.4c}$$

onde os expoentes críticos $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ estão relacionados a $a_t$ e $a_h$ por

$$\alpha = (2a_t - d)/a_t \tag{3.5a}$$

$$\beta = (d - a_h)/a_t \tag{3.5b}$$

$$\gamma = (2a_h - d)/a_t \tag{3.5c}$$

Das relações (3.5) acima tiramos que $\alpha + 2\beta + \gamma = 2$.

Infortunadamente a teoria fenomenológica de Kadanoff não permite prever valores para os expoentes críticos $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ e tão pouco justificar essas idéias.

## TEORIA DO GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO

O papel da teoria do grupo de renormalização é dar um apoio matemático à proposta de Kadanoff. Os objetivos da teoria seriam, determinar os expoentes críticos em função dos parâmetros essenciais do sistema, justificar fatores de escala e determinar explicitamente a parte singular da energia livre.

As idéias gerais dessa teoria formulada por Wilson são as seguintes:

a) A hamiltoniana inicial $H_N(\sigma)$ é transformada ou renormalizada de modo a obter uma nova hamiltoniana $H_{N'}(\sigma')$ que escrevemos formalmente

$$H_N \rightarrow H'_{N'} = R\,[H_N] \tag{3.6}$$

b) A ação do operador de grupo de renormalização R é reduzir o número de spins de N para $N' = N/b^d$ (3.7) onde $\underline{d}$ é a dimensão e $\underline{b}$ um fator de reescalonamento espacial. Geralmente o operador R consiste em realizar uma soma parcial sobre as configurações dos (N - N') spins $\sigma_i$ que simbolicamente escrevemos

$$\exp(H'_{N'}) = Tr_{N-N'} [\exp(H_N)] \qquad (3.8)$$

c) A condição básica que R deve satisfazer é que a função de partição obedeça a relação

$$Z_{N'} [H'_{N'}] = Z_N [H_N] \qquad (3.9)$$

d) Para preservar a densidade espacial de spins reescalonamos as distâncias entre spins por

$$\underline{i} \rightarrow \underline{i}'_i = \underline{i}/b \qquad (3.10)$$

e) Finalmente os spins são reescalonados por

$$\sigma_i \rightarrow \sigma'_{i'} = \sigma_i/c \qquad (3.11)$$

onde c depende de $H_N$.

A exata construção de um grupo de renormalização é em geral difícil. Em seu trabalho original Wilson desenvolveu uma aproximação para fazer alguns cálculos. Entretanto Baker e Golner ref.[38] mostraram que a aproximação era exata para um modelo unidimensional com interação hierárquica introduzido por Dyson em 1969 ref.[39].

Após a construção do grupo de renormalização R o processo deve ser iterado sucessivamente H' = R [H], H'' = R [H'], ... até encontrarmos um ponto fixo $H^*$ para R isto é $H^* = R [H^*]$

(3.12), isto porque o fator de escala b não deve ser relevante para fenômenos críticos. Pois segundo Kadanoff perto da criticalidade os spins devem se comportar em estruturas de blocos e esses blocos devem se repetir em todas as escalas.

# CAPÍTULO IV

## A APROXIMAÇÃO HIERÁRQUICA

Neste capítulo nós iremos tratar do problema da equivalência entre o modelo de Ising ferromagnético em campo aleatório e o modelo de Ising antiferromagnético diluído em campo uniforme na aproximação hierárquica.

Antes de estabelecermos o significado exato da equivalência acima, vamos aplicar primeiramente a teoria do grupo de renormalização ao modelo de Ising ferromagnético em um campo aleatório e deixando a posteriori a justificativa porque o uso da estratégia do grupo de renormalização ref. [40].

Consideremos a hamiltoniana do modelo de Ising ferromagnético em campo aleatório na seguinte forma,

$$- H_{\Lambda+}(\sigma) = \frac{1}{2}\sum_{\langle i,j\rangle} \sigma_i\sigma_j + \sum_{i\varepsilon\Lambda} h_i\sigma_i \qquad (4.1)$$

onde os campos $\{h_i\}$ são variáveis aleatórias independentes, identicamente distribuídas com média zero ($\overline{h_i} = 0$) e variância $\varepsilon^2$ ($\overline{h_i^2} = \varepsilon^2$). O acoplamento J entre vizinhos mais próximos foi normalizado para um e a condição de contorno (+) está incluída na primeira somatória.

No capítulo I vimos que a energia do modelo de Ising ferromagnético sem campo externo poderia ser expressa em termos de contornos, relação (1.19). Quando temos um campo aleatório $h_i$ presente é fácil estender aquele resultado para a hamiltoniana (4.1) acima. Dada uma família $\Gamma$ de contornos $\gamma$ temos as regiões

$\Lambda^+(\Gamma)$ e $\Lambda^-(\Gamma)$, como descrito no capitulo I, tais que $\Lambda^+(\Gamma) \cup \Lambda^-(\Gamma) = \Lambda$ onde $\sigma_i = +1$ resp. $(-1)$ para $i \in \Lambda^+(\Gamma)$ resp. $(\Lambda^-(\Gamma))$, assim temos para (4.1).

$$- H_{\Lambda+}(\sigma) = \frac{n}{2} - \sum_{\gamma\in\Gamma}|\gamma| + \sum_{i\in\Lambda^+(\Gamma)} h_i - \sum_{i\in\Lambda^-(\Gamma)} h_i \qquad (4.2)$$

onde n é o número de pares i,j de vizinhos mais próximos.

A respectiva função de partição poderá então ser escrita na forma,

$$Z_{\Lambda+}(\beta,h) = \sum_{D} \exp[-\beta H_{\Lambda+}(\sigma)] = \sum_{\Gamma} \prod_{\gamma\in\Gamma} e^{-\beta|\gamma|} . e^{\beta[(h,\Lambda^+(\Gamma))-(h,\Lambda^-(\Gamma))]} \qquad (4.3)$$

onde

$$(h,A) \equiv \sum_{i\in A} h_i .$$

O termo $e^{\beta n/2}$ foi eliminado por ser irrelevante no limite termodinâmico.

No final do capitulo III esboçamos algumas idéias gerais do grupo de renormalização e vimos que o primeiro passo era tomar um traço parcial ou somar sobre alguns spins. A função de partição quando escrita em termos de contornos, a soma sobre alguns spins se traduz em uma soma sobre alguns contornos. Esta soma deve ser realizada sistematicamente de forma a manter a estrutura de soma sobre contornos, para podermos repetir o processo várias vezes até encontrar um ponto fixo para os parâmetros relevantes. A idéia básica do que queremos exatamente é a seguinte: gostaríamos de estudar o nosso sistema, na rede $\Lambda$ com os parâmetros $(\beta,(h_i))$, através de um sistema equivalente numa rede $\Lambda'$ com $|\Lambda'| < |\Lambda|$, mas isto tem um preço pois na nova rede certamente devemos ter um novo

conjunto de parâmetros $(\beta', (h_i'))$ de tal forma que

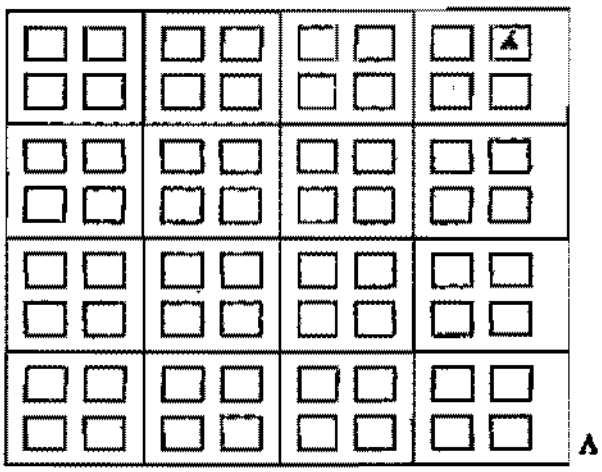
$$Z_{\Lambda+}(\beta,h) \equiv Z_{\Lambda',+}(\beta',h') \tag{4.4}$$

Seja então $|\Lambda| = L^{dN}$ onde L é um número inteiro, positivo e arbitrário mas fixo e estabelece uma escala de comprimento, d a dimensão de $\Lambda$ e N também um inteiro positivo e fixado.

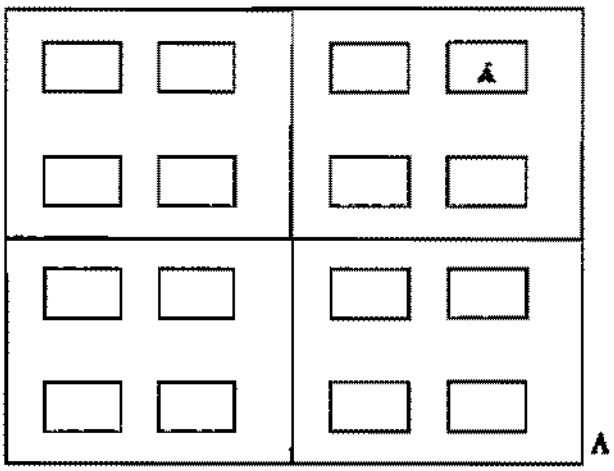
Seja agora $n = 0,1,2,...N$ um índice para escalas (hierarquias). Para $n = 0$ dividimos a região $\Lambda$ em blocos $B_0$ de lado $\ell_0 = L^0 = 1$ e volume $V_0 = (L^0)^d = 1$, cada bloco contém um sítio da rede de tal forma que tenhamos $n_0 = L^{dN}$ blocos. Para $n = 1$ dividimos a região $\Lambda$ em blocos $B_1$ de lado $\ell_1 = L^1 = L$ e volume $V_1 = (L^1)^d = L^d$ contendo cada bloco $L^d$ sítios da rede e um total de $n_1 = L^{d(N-1)}$ blocos. Fazemos isso sucessivamente para as várias escalas $n = 2,...N$. É fácil ver que para $n = N$ temos apenas um bloco ($n_N = 1$) de lado $\ell_N = L^N$ e volume $V_N = (L^N)^d = |\Lambda|$.

As figuras (1, 2, 3 e 4) abaixo exemplificam as escalas para o caso

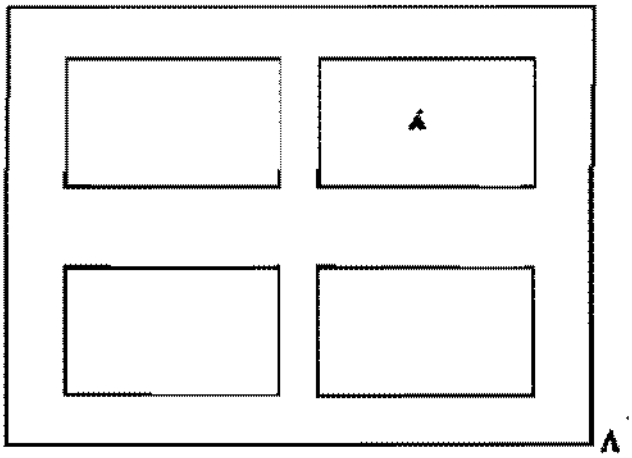
$L = 2$, $d = 2$ e $N = 3$.



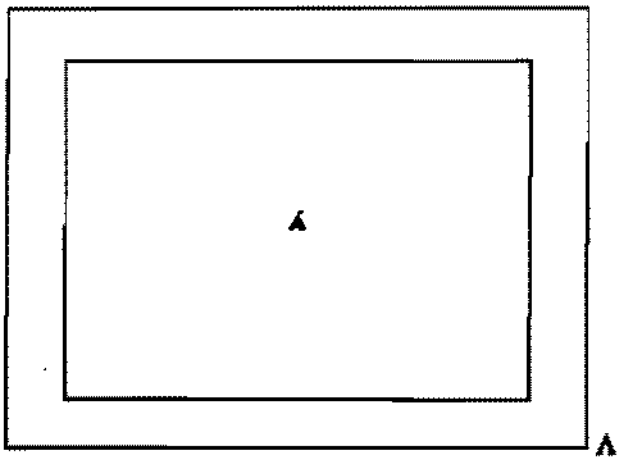

n = 0 fig.1




n = 1 fig.2




n = 2 fig.3




n = 3 fig.4

Agora para cada escala $\underline{n}$ dizemos que um contorno $\gamma$ é "pequeno" se o seu diâmetro é menor que $L^n$, caso contrário dizemos que $\gamma$ é grande. O primeiro passo do grupo de renormalização consiste em explicitar na função de partição (4.3) os contorno na escala n = 1 e transformá-los em novos campos. A cada ponto $\underline{x}$ que é centro de blocos $B_1$ definimos um novo sitio $i_1$; assim podemos indexar os blocos $B_1$'s por $B_{i_1}$'s.

Se a soma de pequenos contornos pudesse ser feita de uma forma independente em cada bloco $B_{i_1}$ então poderíamos associar a cada sitio $i_1$ um campo

$$h'_{i_1} = L^{1-d} \left[ \sum_{i \in B_{i_1}} h_i + h_{i_1} \right] \tag{4.5}$$

onde

$$\exp(\beta h_{i_1}) \equiv \sum_{\Gamma_{i_1}} \prod_{\gamma \in \Gamma_{i_1}} e^{-\beta|\gamma|}$$

ou

$$h_{i_1} = \frac{1}{\beta} \ln \sum_{\Gamma_{i_1}} \prod_{\gamma \in \Gamma_{i_1}} e^{-\beta|\gamma|} \equiv \text{energia livre de contornos pequenos} \tag{4.6}$$

O índice $i_1$ em $\Gamma_{i_1}$ significa somar sobre a família de contornos restrita ao bloco $B_{i_1}$, o fator $L^{1-d}$ em (4.5) será explicado adiante.

Assim teríamos para a função de partição,

$$Z_{\Lambda_+}(\beta,h) = \sum_{\Gamma} \prod_{\gamma\in\Gamma} e^{-\beta|\gamma|}\, e^{-\beta[(h,\Lambda^+) - (h,\Lambda^-)]} =$$

$$= \sum_{\Gamma}{}' \prod_{\gamma\in\Gamma} e^{-\beta|\gamma'|}\, e^{-\beta'[(h',\Lambda'^+) - (h',\Lambda'^-)]} \qquad (4.7)$$

onde o índice na segunda somatória significa somar apenas contornos grandes das escalas $n = 1, 2 \ldots N$, a rede $\Lambda'$ é formada pelos sítios $i_1$ depois de escalonada as distâncias em $\Lambda$ pelo fator $L^{-1}$ e

$$\beta' = L^{d-1}\beta \qquad (4.8)$$

Para que a segunda soma em (4.7) contenha novamente contornos pequenos é preciso escalonar os contornos $\gamma'$ por $|\gamma| = |\gamma'|\, L^{1-d}$, isto porque $|\gamma'|$ é um termo de superfície e $L^{d-1}$ é a área de um bloco $B_{i_1}$. Para manter inalterado o produto $\beta|\gamma'|$ em (4.7) devemos ter $\beta'|\gamma|$, assim podemos escrever,

$$Z_{\Lambda_+}(\beta,h) = \sum_{\Gamma} \prod_{\gamma\in\Gamma} e^{-\beta'|\gamma|}\, e^{-\beta'[(h',\Lambda'^+) - (h',\Lambda'^-)]} \equiv Z_{\Lambda'_+}(\beta',h') \qquad (4.9)$$

isto recupera a forma da função de partição (4.3) e explica o fator $L^{1-d}$ em (4.5).

Porém os contornos não são independentes nos diversos blocos em qualquer das escalas e assim a soma sobre contornos pequenos resulta na realidade um novo campo $h'_{i_1}$ da forma,

$$h'_{i_1} = L^{1-d}\left[\sum_{i\in B_{i_1}} h_i + \text{termos lineares e não locais}\right] \qquad (4.10)$$

Este campo além de conter termos não lineares não são independentes para sítios diferentes ($i \neq j$) quebrando assim a condição inicial de independência dos campos $h_i$.

São essas dificuldades que impedem geralmente de aplicar o grupo de renormalização, especialmente para d = 3 este problema está tratado na ref.[19].

A aproximação hierárquica consiste exatamente em definir o modelo onde os únicos contornos possíveis, são os que determinam as fronteiras dos blocos Bn das diversas escalas e eles são independentes dentro de uma mesma escala e de uma escala para outra. Esta aproximação pode ser vista como um gás de contornos, onde uma configuração de spins é novamente definida univocamente dando-se o conjunto $\Gamma$ de contornos, onde qualquer contorno de qualquer escala pode ocorrer de uma maneira independente.

Fixado por exemplo condições de contorno (+) determinamos facilmente o sinal de um spin i qualquer da seguinte forma: partindo da fronteira contamos quantas fronteiras de contornos ultrapassamos até atingir o spin i, se este número for par o sinal do spin será (+) caso contrário será (-). Se as condições de contorno fossem (-) teríamos respectivamente os sinais (-) e (+) para o spin i. Para se determinar o sinal de um outro spin j repetimos o procedimento a partir da fronteria ou a partir do conhecimento do sinal de um spin qualquer. As figuras 5 e 6 abaixo ilustram o modelo hierárquico ou gás de contorno respectivamente para as condições de contorno (+) e (-) com a seguinte escolha dos parâmetros L = N = d = 2.

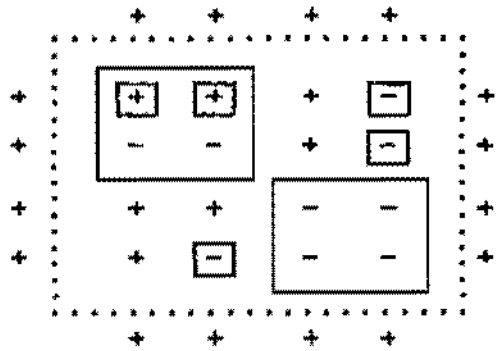


fig.5

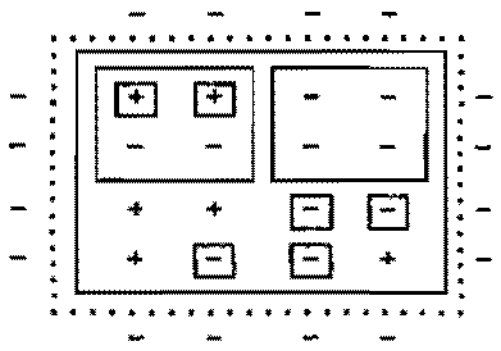


fig.6

Vamos estabelecer agora exatamente o significado da equivalência entre os modelos de Ising Ferromagnético em Campo Magnético Aleatório (I.F.A.) e Antiferromagnético Diluído em Campo Uniforme (I.A.D.). No trabalho da ref. [40] Bricmont e Kupiainen mostraram que na aproximação hierárquica o modelo (I.F.A.) apresenta uma magnetização espontânea para $d \geq 3$ e para $d = 2$ a magnetização é zero mas vai muito lentamente a zero no limite termodinâmico. Este último fato acredita-se que seja uma característica apenas da aproximação hierárquica. A equivalência que obtemos entre os modelos (I.F.A.) e (I.A.D.) é no sentido que este último é capaz de gerar campos magnéticos aleatórios semelhantes aos do modelo (I.F.A.) e apresenta também uma magnetização espontânea para $d \geq 3$ e uma magnetização nula para $d = 2$ com as mesmas características do modelo (I.F.A.).

O que faremos daqui para frente neste capítulo será o seguinte: na seção "Ferromagnético em Campo Aleatório" apresentaremos os resultadas da ref. [40], na seção "Antiferromagnético Diluído" definiremos o nosso modelo e mostraremos com a ajuda da estratégia do grupo de renormalização que este gera campos aleatórios.

## FERROMAGNÉTICO EM CAMPO ALEATÓRIO

Vamos nesta seção apresentar os resultados da ref. [40] para o modelo (I.F.A.) na aproximação hierárquica e ao mesmo tempo ver como se aplica a teoria do grupo de renormalização.

A hamiltoniana do modelo (I.F.A.) com condições de contorno (+) na aproximação hierárquica pode novamente ser dada por:

$$- H_{A+}(\Gamma) = \sum_{\gamma\in\Gamma} |\gamma| + \sum_{i\in A^{+}(\Gamma)} h_i - \sum_{i\in A^{-}(\Gamma)} h_i \qquad (4.11)$$

onde $h_i$ é o campo aleatório como em (4.1), $A^{+}(\Gamma)$ e $A^{-}(\Gamma)$ são determinados como descrito no capitulo I sendo que agora a família $\Gamma$ de contornos compativeis é dada por:

$\Gamma = \{\gamma \mid \gamma$ seja fronteira de algum bloco $B^{n}$ para $n = 0,1,...N\}$.

A função de partição será:

$$Z(N,h,\beta) = \sum_{\Gamma} \prod_{\gamma\in\Gamma} e^{-\beta|\gamma|} . e^{\beta(h,A^{+})-\beta(h,A^{-})} \qquad (4.12)$$

De acordo com a teoria do grupo de renormalização e do que ficou estabelecido no início deste capitulo, devemos iniciar o processo de renormalização somando sobre os pequenos contornos e basta iniciarmos o primeiro passo pois o processo se repete. Assim temos

$$Z(N,h,\beta) = \sum_{\Gamma}{}' \prod_{\gamma\in\Gamma} e^{-\beta|\gamma|} . e^{\beta(h+\delta h^{+},A^{+})-\beta(h+\delta h^{-},A^{-})} \qquad (4.13)$$

onde $\delta h^{\pm}$ é dado por

$$e^{\pm\beta(h+\delta h^{\pm},L_x)} = \prod_{y\in L_x} (e^{\pm\beta h_y} + e^{-\beta} . e^{\mp\beta h_y}) \qquad (4.14)$$

Em (4.14) acima estamos representando os blocos $B_x^1$ por $L_x$. Os contornos pequenos, isto é os contornos que são fronteiras dos blocos $B^0$, tiveram a sua "área" normalizada para 1. A linha na somatória (4.13) significa que devemos somar sobre os contornos grandes, isto é das escalas n = 1,2, ... N. Em cada sítio $y \in L_x$ podemos ter ou não um contorno que inverte o spin em y, estes fatos implicam respectivamente nos termos $e^{-\beta}.e^{\mp\beta h_y}$ e $e^{\pm\beta h_y}$.

Para termos novamente contornos pequenos em (4.13) é que definimos

$$\beta_1 = L^{d-1}.\beta \tag{4.15}$$

e

$$h_{1x}^{\pm} = L^{1-d}.(h+\delta h^{\pm}, L_x) = L^{1-d}.\sum_{y \in L_x}\left\{h_y \pm \frac{1}{\beta}.\ln(1+e^{-\beta}.e^{\pm\beta 2h_y})\right\} \tag{4.16}$$

O fator $L^{d-1}$ em (4.15) é porque $|\gamma|$ é um termo de superfície que na escala n = 1 tem área $L^{d-1}$, assim podemos escrever

$$Z(N,h,\beta) = Z(N-1,h_1^{\pm},\beta_1) = \sum_{\Gamma}{}' \prod_{\gamma \in \Gamma} e^{-\beta_1|\gamma|}.e^{\beta_1(h_1^{+},A_1^{+})} - \beta_1(h_1^{-},A_1^{-})} \tag{4.17}$$

Depois de iterar n vezes teremos:

$$Z(N,h,\beta) = Z(N-n,h_n^{\pm},\beta_n) \tag{4.18}$$

com

$$\beta_n = L^{n(d-1)}.\beta \tag{4.19}$$

e $h_n^{\pm}$ satisfaz a seguinte relação de recorrência

$$h_{n+1x}^{\pm} = L^{1-d} \cdot \sum_{y \in Lx} \left\{ h_{ny}^{\pm} \pm \frac{1}{\beta_n} \ln \left[ 1 + e^{-\beta_n} \cdot e^{\pm \beta_n (h_{ny}^{+} + h_{ny}^{-})} \right] \right\} \qquad (4.20)$$

para $n = 0, 1, \ldots N-1$ e $h_{0x} \equiv h_x$.

As figuras (7, 8, 9, 10) abaixo mostram os passos para $L = d = 2$, $N = 3$, os pontos x's de $\Lambda$ transformam-se em sítios de $\Lambda_1$ e assim sucessivamente.

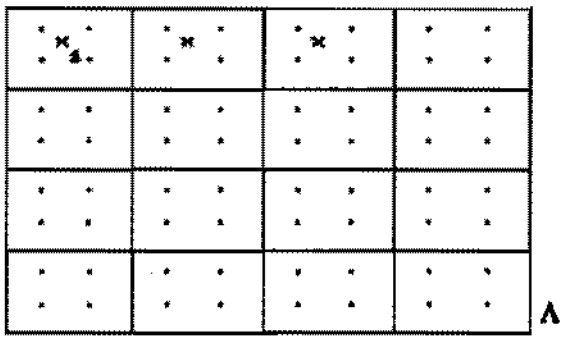



fig.7

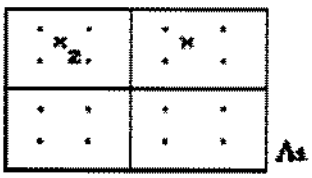



fig.8

fig.9

fig.10

Com ajuda das relações acima obtidas através do grupo de renormalização podemos agora investigar o problema da transição de fase com base no que foi visto no capítulo I sobre instabilidade macroscópica. Assim devemos estudar a função de correlação de um ponto ou simplesmente a magnetização local $\langle \sigma_i \rangle_{\Lambda B}$. Vamos usar a notação $\langle \sigma_i \rangle_{NB}$ por ser mais conveniente neste capítulo e no próximo.

Seja então $\langle \sigma_o \rangle_{N+}$ a magnetização local na origem de $\Lambda$ com condições de contorno (+), assim temos:

$$\langle \sigma_o \rangle_{N+} = Z^{-1}(N,h,\beta) \cdot \sum_{\Gamma} \prod_{\gamma \in \Gamma} e^{-\beta|\gamma|} \cdot e^{\beta[(h,\Lambda^+)-(h,\Lambda^-)]} \cdot \sigma_o(\Gamma) \qquad (4.21)$$

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO
INSTITUTO DE FÍSICA

onde:

$$\sigma_o(\Gamma) = \begin{cases} \sigma_o^+ = +1 & \text{se} \quad o \in \Lambda^+ \\ \sigma_o^- = -1 & \text{se} \quad o \in \Lambda^- \end{cases} \tag{4.22}$$

o índice zero em $\sigma_o(\Gamma)$ significa a origem de $\Lambda$ e em $\sigma_o^{\pm}$ o passo zero de um processo iterativo dado por

$$\sigma_n^{\pm} = (\sigma_{n-1}^{\pm} + \sigma_{n-1}^{\mp} \cdot e^{-\beta n} \cdot e^{\mp\beta n H n o})/(1 + e^{-\beta n} \cdot e^{\mp\beta n H n o}) \tag{4.23}$$

onde

$$Hn = hn^+ + hn^- \tag{4.24}$$

Com ajuda de (4.23) obtemos

$$\langle \sigma_o \rangle_{N+} = \sigma_N^+(o) \quad , \tag{4.25}$$

De acordo com (2.6) do capitulo II devemos tomar a média sobre os campos em (4.25) para obtermos a magnetização local de sistemas temperados, para isso precisamos dos seguintes resultados.

Com a ajuda da relação (4.24) e (4.20) obtemos,

$$Hm+1x = L^{1-d} \cdot \sum_{y \in Lx} gn(Hny) \tag{4.26}$$

onde

$$gn(x) = x + fn(x) \tag{4.27}$$

e

$$fn(x) = \frac{1}{\beta n} \ln(1 + e^{-\beta n(1+x)})/(1 + e^{-\beta n(1-x)}) \tag{4.28}$$

Não é difícil mostrar através de uma análise de (4.27) que

$$|x + f_n(x)| \leq [1 + O(\beta_n^{-1})].|x| \qquad (4.29)$$

Agora para d > 2 assuma que

$$\langle e^{tH_n} \rangle \leq e^{t^2.\varepsilon_n^2/2} \qquad (4.30)$$

Desde que $H_{my}$'s são independentes para diferentes y's e $f_n$ é uma função ímpar temos,

$$\langle e^{tH_{n+1}} \rangle = \langle e^{t'(H_n + f_n)} \rangle^{L^d} \qquad (t' = t.L^{1-d})$$

$$= \langle \cosh t'(H_n + f_n) \rangle^{L^d} \leq \langle \cosh t'[1 + O(\beta_n^{-1})]H_n \rangle^{L^d}$$

(usando (4.29))

$$= \langle \exp(t'[1 + O(\beta_n^{-1})]H_n) \rangle^{L^d} \leq e^{\varepsilon_{n+1}^2.t^2/2} \qquad (4.31)$$

com

$$\varepsilon_{n+1}^2 = L^{2-d}[1 + O(\beta_n^{-1})].\varepsilon_n^2 \qquad (4.32)$$

Neste momento com as relações (4.19) e (4.32) acima vemos novamente as conclusões do argumento de Imry e Ma visto no início do capítulo III. A temperatura (4.19) e a desordem (4.32) são irrelevantes para d > 2 e portanto o feromagnetismo deve persistir. Entretanto para d = 2 a desordem persiste em todas as escalas e a temperatura vai a zero, assim não devemos esperar ordem ferromagnética estável contra esta perturbação aleatória. Para confirmar estas conclusões temos que:

A relação (4.30) implica que

$$\mathrm{Prob}(|H_n| > x) \leq 2\exp(-x^2/2\varepsilon_n^2) \tag{4.33}$$

a qual combinada com (4.23) resulta

$$\overline{\sigma_N^+} > 1 - e^{-c\beta} - e^{c/\varepsilon^2} \tag{4.34}$$

onde a barra em $\sigma_N^+$ significa como em (2.6) a média sobre hy e $\underline{c}$ uma constante conveniente.

A relação (4.34) acima mostra que o sistema está ordenado para $d > 2$ ou equivalentemente que o sistema apresenta uma magnetização espontânea para $d > 2$. De acordo com o critério de instabilidade macroscópica do capítulo I o sistema apresenta uma transição de fase pois é fácil verificar que $\overline{\sigma_N^-} = -\overline{\sigma_N^+}$.

Para $d = 2$ desde que $\beta_n \longrightarrow \infty$ rapidamente, podemos tomar $\beta = \infty$ (o erro é $O(\beta_n^{-1})$), assim

$$x + f_\infty(x) = \begin{cases} 1 & x > 1 \\ x & x \in [-1, 1] \\ -1 & x < -1 \end{cases} \tag{4.35}$$

Com (4.35) mostra-se que

$$\overline{\sigma_N^+} \simeq \exp\left[-O(1).\sum_{n=1}^{N} (n \ln n)^{-1}\right] = (\ln N)^{-p} \tag{4.36}$$

para algum $p > 0$. De onde concluímos que a magnetização vai a zero muito lentamente com o volume, portanto não temos uma magnetização diferente de zero para $d = 2$.

Neste momento podemos justificar porque o uso da teoria do grupo de renormalização numa situação fora da criticalidade. A

razão é que um campo aleatório induz mesmo numa fase ordenada grandes regiões com uma magnetização inversa da fase ordenada. Porém estes eventos, ainda que raros, ocorrem em todas as escalas e como a teoria do grupo de renormalização é caracterizada pela invariância da hamiltoniana nas diversas escalas, a sua aplicação se torna natural ref.[19]. O uso da teoria do grupo de renormalização em sistemas com campo aleatório também poderá ser encontrado na ref. [45].

## FERROMAGNÉTICO SEM CAMPO MAGNÉTICO

Como uma segunda aplicação da relação (4.23) podemos mostrar que o modelo ferromagnético sem campo magnético externo, na aproximação hierárquica, está sempre magnetizado pela influência da condição de contorno para qualquer temperatura. Assim de acordo com o nosso critério de instabilidade macroscópica do capítulo I este modelo não apresenta transição de fase.

Da relação (4.20) podemos ver que se o campo aleatório inicial $h_i$ for zero então será zero em todas as hierarquias, assim da relação (4.23) temos

$$\sigma_n^{\pm} = (\sigma_{n-1}^{\pm} + \sigma_{n-1}^{\mp} e^{-\beta n})/(1 + e^{-\beta n}) \tag{4.37}$$

Com ajuda da relação (4.22) e (4.37) temos agora que

$$\sigma_n^{-} = - \sigma_n^{+} \tag{4.38}$$

assim

$$\sigma_n^{\pm} = \sigma_{n-1}^{\pm} (1 - e^{-\beta n})/(1 + e^{-\beta n}) \tag{4.39}$$

Iterando esta relação (4.39) temos

$$\sigma_n^{+}(o) = \prod_{n=1}^{N} (1 - e^{-\beta n})/(1 + e^{-\beta n}) \tag{4.40}$$

Podemos obter agora um limite inferior para (4.40), assim temos tomando o logarítmo de (4.40),

$$\ln \sigma_N^{+}(o) = - \sum_{n=1}^{N} \ln \left[\frac{e^{\beta n} + 1}{e^{\beta n} - 1}\right] \tag{4.41}$$

Da relação (4.19) para d > 1 podemos ver que $\beta n$ é um múltiplo inteiro de $\beta$ assim podemos escrever,

$$\beta_n = L^{n(d-1)} . \beta = \beta m_n \tag{4.42}$$

com

$$m_n = L^{n(d-1)} \in Z \tag{4.43}$$

temos

$$\sum_{n=1}^{N} \ln \left[\frac{e^{\beta m_n} + 1}{e^{\beta m_n} - 1}\right] < \sum_{m=1}^{L^{N(d-1)}} \ln \left[\frac{e^{\beta . m} + 1}{e^{\beta . m} - 1}\right] < \int_{o}^{L^{N(d-1)}} \ln \left[\frac{e^{\beta . x} + 1}{e^{\beta . x} - 1}\right] dx \tag{4.44}$$

A integral em (4.44) é uma função crescente do seu limite superior assim podemos estimá-la por uma integral infinita,

e lembrando que,

$$\int_0^\infty \ln \left[\frac{e^y + 1}{e^y - 1}\right] dy = \frac{\pi^2}{4} \tag{4.45}$$

temos

$$\int_0^\infty \ln \left[\frac{e^{\beta x} + 1}{e^{\beta x} - 1}\right] dx = \frac{\pi^2}{4\beta} \tag{4.46}$$

Levando (4.45) em (4.41) temos que

$$\ln \sigma_N^+(o) > -\frac{\pi^2}{4\beta}$$

ou

$$\sigma_N^+(o) > e^{-\pi^2/4\beta} \tag{4.47}$$

Da relação (4.25) temos que a magnetização do sistema é dada por $\langle\sigma_o\rangle_{N+} = \sigma_N^+(o)$ portanto,

$$\langle\sigma_o\rangle_{N+} > e^{-\pi^2/4\beta} \tag{4.48}$$

de onde vemos que $\langle\sigma_o\rangle_{N+}$ é positivo para qualquer temperatura e qualquer dimensão d > 1 e como $\langle\sigma_o\rangle_{N-} = -\langle\sigma_o\rangle_{N+}$ para qualquer temperatura não temos uma instabilidade macroscópica ocorrendo para um dado T.

Um argumento heurístico para este fato consiste em observar que no capítulo I, particularmente para d = 2 mostramos

que o modelo de Ising sem campo externo apresenta uma transição de fase e o argumento heurístico era que havia uma competição entre a entropia do sistema causada pelos contornos e a energia. Na aproximação hierárquica este mesmo modelo não contém o termo entrópico porque aparece só um tipo de contorno, assim a condição de contorno impõe uma magnetização para qualquer temperatura.

## ANTIFERROMAGNÉTICO DILUÍDO EM CAMPO UNIFORME

Nesta seção definiremos o modelo de Ising antiferromagnético diluído em campo magnético uniforme (I.A.D.) na versão hierárquica. Veremos que basta realizar o primeiro passo da teoria do grupo de renormalização para gerar um campo aleatório semelhante ao da relação (4.26). Em seguida veremos que esse modelo apresenta uma magnetização espontânea não zero para $d > 2$ e zero para $d = 2$.

Para o modelo usual de Ising antiferromagnético em campo uniforme sabemos que este é equivalente ao modelo ferromagnético em campo alternado. Por outro lado vimos na penúltima seção que a hamiltoniana do modelo (I.F.A.) na aproximação hierárquica poderia ser escrita usando contornos de Peierls como no modelo usual, sendo a única restrição quanto à família $\Gamma$ de contornos compatíveis.

Se agora cada contorno em qualquer hierarquia tiver uma probabilidade a priori de estar presente ou não, teremos um modelo diluído ou uma diluição de contornos. Assim o nosso modelo (I.A.D.) com condições de contorno (+) será definido pela seguinte hamiltoniana,

$$- H_{\Lambda_+}(\Gamma) = \sum_{\gamma\in\Gamma} |\gamma|\xi + \sum_{i\in\Lambda^+} h_i - \sum_{i\in\Lambda^-} h_i \qquad (4.49)$$

onde $h_i$ é o campo magnético alternado, $\xi$ é uma variável aleatória responsável pela diluição de cada contorno de cada escala. Se $\gamma_{nx}$ é um contorno da escala $\underline{n}$ com centro em $\underline{x}$ então definimos:

$$\xi_{nx} = \begin{cases} 1 & \text{com probabilidade} \quad p_n. \\ 0 & \text{com probabilidade} \quad 1 - p_n. \end{cases}$$

$\xi_{nx}$ é uma variável aleatória independente para diferentes x's da mesma escala e identicamente distribuída e independente de uma escala para outra.

A figura 11 abaixo ilustra a situação para $L = N = d = 2$, com condições de contorno (+).

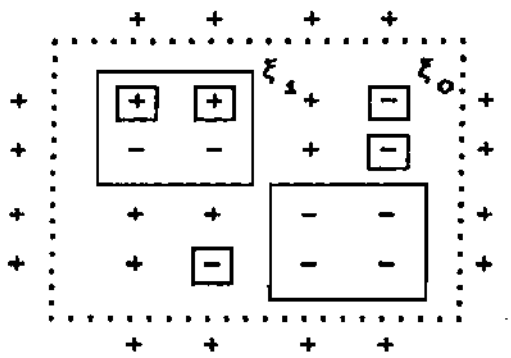



fig. 11.

A função de partição será,

$$Z(N,\xi,h,\beta) = \sum_{\Gamma} \prod_{\gamma\Gamma} e^{-\beta|\gamma|\xi_{\gamma}} e^{\beta(h,\Lambda^+) - \beta(h,\Lambda^-)} \qquad (4.50)$$

Realizando o primeiro passo da teoria do grupo de renormalização como em (4.13) temos,

$$Z(N,\xi,h,\beta) = \sum_{\Gamma}{}' \prod_{\gamma\varepsilon\Gamma} e^{-\beta|\gamma|\xi_{\gamma}} e^{\beta(h+\delta h^+,\Lambda^+) - \beta(h+\delta h^-,\Lambda^-)} \qquad (4.51)$$

onde $\delta h^{\pm}$ é dado por

$$e^{\pm\beta(h+\delta h^{\pm},L_x)} = \prod_{y\in L_x} \left( e^{\pm\beta h_y} + e^{-\beta\xi_{oy}} . e^{\mp\beta h_y} \right) \tag{4.52}$$

Sejam $L_x^+$ e $L_x^-$ os blocos interpenetrantes par e impar respectivamente tais que $L_x^+ \cup L_x^- = L_x$, com $h_y = \pm h$ se $y \in L_x^{\pm}$, assim temos

$$e^{\pm\beta(h+\delta h^{\pm},L_x)} = \prod_{y\in L_x^+} \left( e^{\pm\beta h} + e^{-\beta\xi_{oy}} . e^{\mp\beta h} \right) \prod_{y\in L_x^-} \left( e^{\mp\beta h} + e^{-\beta\xi_{oy}} . e^{\pm\beta h} \right)$$

Definindo $h_{ix}^{\pm} = L^{i-d} . (h + \delta h^{\pm}, L_x)$ temos

$$h_{ix}^{\pm} = L^{i-d} . \sum_{y\in L_x^+} \left[ h \pm \frac{1}{\beta} \ln \left(1 + e^{-\beta\xi_{oy}} . e^{\mp\beta 2h}\right) \right] +$$

$$+ L^{i-d} . \sum_{y\in L_x^-} \left[ -h \pm \frac{1}{\beta} \ln \left(1 + e^{-\beta\xi_{oy}} . e^{\pm\beta 2h}\right) \right] \tag{4.53}$$

Vamos analisar com detalhe este campo $h_{ix}^{\pm}$. Novamente definimos

$H_{ix} = h_{ix}^{+} + h_{ix}^{-}$ , $H = 2h$ , assim temos,

$$H_{ix} = L^{i-d} . \sum_{y\in L_x^+} \left[ H + \frac{1}{\beta} \ln \left[ \frac{1 + e^{-\beta(\xi_{oy} + H)}}{1 + e^{-\beta(\xi_{oy} - H)}} \right] \right] +$$

$$- L^{i-d} . \sum_{y\in L_x^-} \left[ H + \frac{1}{\beta} \ln \left[ \frac{1 + e^{-\beta(\xi_{oy} + H)}}{1 + e^{-\beta(\xi_{oy} - H)}} \right] \right] \tag{4.54}$$

Uma vez que a variável aleatória $\xi$ assume em qualquer hierarquia apenas os valores 0 ou 1 podemos escrever,

$$\ln\left[\frac{1+e^{-\beta(\xi_{oy}+H)}}{1+e^{-\beta(\xi_{oy}-H)}}\right] = \xi_{oy}\ \ln\left[\frac{1+e^{-\beta(1+H)}}{1+e^{-\beta(1-H)}}\right]$$

$$+ (1-\xi_{oy})\ \ln\left[\frac{1+e^{-\beta H}}{1+e^{\beta H}}\right] \qquad (4.55)$$

por sua vez

$$\ln\left[\frac{1+e^{-\beta H}}{1+e^{\beta H}}\right] = -\beta H \qquad (4.56)$$

Combinando as relações (4.55) e (4.56) temos,

$$H + \frac{1}{\beta}\ \ln\left[\frac{1+e^{-\beta(\xi_{oy}+H)}}{1+e^{-\beta(\xi_{oy}-H)}}\right] = \left[H + \frac{1}{\beta}\ \ln\left[\frac{1+e^{-\beta(1+H)}}{1+e^{-\beta(1-H)}}\right]\right]\xi_{oy} \qquad (4.57)$$

que combinada com 4.54) teremos

$$H_{ix} = L^{1-d}\ .\ \left[\sum_{y\in L_x^+}\xi_{oy} - \sum_{y\in L_x^-}\xi_{oy}\right]\ .\ g(H) \qquad (4.58)$$

onde

$$g(H) = H + f(H) \qquad (4.59)$$

$$f(H) = \frac{1}{\beta}\ \ln\left[\frac{1+e^{-\beta(1+H)}}{1+e^{-\beta(1-H)}}\right] \qquad (4.60)$$

Analisando o campo $H_{ix}$ em (4.58) obaservamos que este é um campo aleatório com distribuição par para uma escolha par do parâmetro L. A média e a variância de $H_{ix}$ são dados por:

$$\bar{H}_{1x} = L^{1-d} \left[ \sum_{y \in L_x^+} \bar{\xi}_{oy} - \sum_{y \in L_x^-} \bar{\xi}_{oy} \right] . \; g(H) =$$

$$= L^{1-d} \; . \; ( \; |L_x^+| - |L_x^-| \; ) \; p_o \; . \; g(H) \qquad (4.61)$$

onde

$$p_o = \bar{\xi}_{oy} \qquad (4.62)$$

e para uma escolha par de L teremos,

$$|L_x^+| = |L_x^-| = L^d/2 \qquad (4.63)$$

portanto

$$\bar{H}_{1x} = 0 \qquad (4.64)$$

Para a variância temos:

$$Var(H_{1x}) = L^{2-2d} \; . \; \left[ \sum_{y \in L_x^+} Var(\xi_{oy}) + \sum_{y \in L_x^-} Var(\xi_{oy}) \right] . \; g^2(H) =$$

$$= L^{2-2d} \; . \sum_{y \in L_x} Var(\xi_{oy}) \; . \; g^2 \; (H) = L^{2-d} \; . \; p_o \; q_o \; . \; g^2(H)$$

$$(4.65)$$

onde

$$p_o \; q_o = Var(\xi_{oy}) \qquad (4.66)$$

As relações (4.58) e (4.64) mostra-nos que este campo $H_{1x}$ tem as mesmas características do campo $H_{1x}$ do modelo (I.F.A.) e que bastou apenas o primeiro passo do grupo de renormalização para obter um campo aleatório. É importante notar que a eliminação do campo externo h ou a ausência da diluição anula automaticamente este campo aleatório.

A relação (4.53) pode ser iterada agora normalmente como no modelo (I.F.A.) assim no n-ésimo passo teremos,

$$h^{\pm}_{n+1x} = L^{1-d} \cdot \sum_{y \in L_x} \left[ h^{\pm}_{ny} \pm \frac{1}{\beta_n} \ln \left(1 + e^{-\beta_n \xi_{ny}} \cdot e^{\mp \beta_n (h^{+}_{ny} + h^{-}_{ny})}\right)\right] \tag{4.67}$$

com

$$\beta_n = (L^{1-d})^n \cdot \beta \tag{4.68}$$

Observe agora que para uma escolha par do parâmetro L não é mais preciso separar o bloco $L_x$ em $L^{+}_{x}$ e $L^{-}_{x}$ pois este campo $h^{\pm}_{nx}$ em qualquer hierarquia $n \geq 1$ não será mais alternado, será apenas aleatório.

Da relação (4.67) temos,

$$H_{n+1x} = L^{1-d} \cdot \sum_{y \in L_x} \left[ H_{ny} + \frac{1}{\beta_n} \ln \left( \frac{1 + e^{-\beta_n (\xi_{ny} + H_{ny})}}{1 + e^{-\beta_n (\xi_{ny} - H_{ny})}} \right)\right] \tag{4.69}$$

onde

$$H_n = h^{+}_{n} + h^{-}_{n}.$$

A expressão dentro do somatório em (4.69) novamente poderá ser escrita como em (4.57), assim temos,

$$H_{n+1x} = L^{1-d} \cdot \sum_{y \in L_x} g_n(H_{ny}) \cdot \xi_{ny} \tag{4.70}$$

onde

$$g_n(H_{ny}) = H_{ny} + f_n(H_{ny}) \tag{4.71}$$

$$f_n(H_{ny}) = \frac{1}{\beta_n} \ln \left[ \frac{1 + e^{-\beta_n(1 + H_{ny})}}{1 + e^{-\beta_n(1 - H_{ny})}} \right] \tag{4.72}$$

As relações (4.71) e (4.72) são semelhantes respectivamente às relações (4.27) e (4.28).

A magnetização local $\langle \sigma_o \rangle_{N+}$ é dada agora por

$$\langle \sigma_o \rangle_{N+} = Z^{-1}(N, \xi, h, \beta) \cdot \sum_{\Gamma} \prod_{\gamma \in \Gamma} e^{-\beta|\gamma|\xi} e^{\beta[(h, A^+) - (h, A^-)]} \sigma_o(\Gamma) \tag{4.73}$$

onde $\sigma_o(\Gamma)$ é definido por (4.22)

Com ajuda de (4.67) o análogo de (4.23) é dado por

$$\sigma_n^{\pm} = (\sigma_{n-1}^{\pm} + \sigma_{n-1}^{\mp} \cdot e^{-\beta_n(\xi_{no} \pm H_{no})}) / (1 + e^{-\beta_n(\xi_{no} \pm H_{no})}) \tag{4.74}$$

no que resulta para (4.73)

$$\langle \sigma_o \rangle_{N+} = \sigma_N^{+} \tag{4.75}$$

Usando (4.74) iterativamente temos que

$$\sigma_N^+ \geq 1 - 2 \cdot \sum_{n=0}^{N} e^{-\beta n(\xi_{no} + H_{no})} / (1 + e^{-\beta n(\xi_{no} + H_{no})}) \qquad (4.76)$$

Tomando a média em $\xi$ temos

$$\langle \sigma_N^+ \rangle_\xi \geq 1 - 2 \cdot \sum_{n=0}^{N} \left[ p_n \left( \frac{e^{-\beta n(1 + H_{no})}}{1 + e^{-\beta n(1 + H_{no})}} \right) + q_n \left( \frac{e^{-\beta n H_{no}}}{1 + e^{-\beta n H_{no}}} \right) \right] \qquad (4.77)$$

Para $d > 2$ seja agora

$$\langle e^{tH_n} \rangle \leq e^{t^2 \varepsilon_n^2 / 2} \qquad (4.78)$$

Como $\xi = 0$ ou $1$ temos que

$$\langle e^{tH_n \xi_n} \rangle \leq \langle e^{tH_n} \rangle \qquad (4.79)$$

assim novamente teremos que

$$\varepsilon_{n+1}^2 = \varepsilon_n^2 \, (1 + O^{-1}(\beta_n)) \, L^{2-d} \qquad (4.80)$$

e

$$\text{Prob}\,(|H_n| \geq x^2) \leq 2 \cdot \exp\,(-x^2 / 2\,\varepsilon_n^2) \qquad (4.81)$$

Agora temos

$$\frac{e^{-\beta n(1 + H_{no})}}{1 + e^{-\beta n(1 + H_{no})}} = \begin{cases} \leq 1 & \text{para} \quad |H_{no}| > 1/2 \\ < e^{-\beta n/2} & \text{para} \quad |H_{no}| \leq 1/2 \end{cases} \qquad (4.82)$$

e

$$\frac{e^{-\beta n H_{no}}}{1 + e^{-\beta n H_{no}}} \leq 1 \qquad \text{para todo } H_{no} \tag{4.83}$$

Vamos usar a notação $E(A) = \bar{A}$ para a média em $H_{no}$, assim temos respectivamente em (4.82) e (4.83),

$$E(e^{-\beta n(1 + H_{no})} / (1 + e^{-\beta n(1 + H_{no})})) \leq 2\, e^{-1/8\varepsilon n^2} + e^{-\beta n/2} \tag{4.84}$$

$$E(e^{-\beta n H_{no}} / (1 + e^{-\beta n H_{no}})) \leq 1 \tag{4.85}$$

Assim teremos para (4.77)

$$\langle \overline{\sigma_N^+} \rangle_\xi \geq 1 - 4 \cdot \sum_{n=0}^{N} p_n (e^{-1/8\varepsilon n^2} + e^{-\beta n/2}) - 2 \sum_{n=0}^{N} q_n \tag{4.86}$$

Para a última somatória em (4.86) convergir quando $n \to \infty$ devemos ter $q_n \to 0$ ou que $p_n \to 1$, assim podemos fazer

$$4 \cdot \sum_{n=0}^{N} p_n (e^{-1/8\varepsilon n^2} + e^{-\beta n/2}) \leq \sum_{n=0}^{N} (e^{-1/8\varepsilon n^2} + e^{-\beta n/2}) \tag{4.87}$$

$$q_\infty \equiv 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q_n < 1/8 \tag{4.88}$$

Agora exite constante $\underline{c}$ tal que

$$\sum_{n=0}^{N} (e^{-1/8\varepsilon n^2} + e^{-\beta n/2}) \leq e^{-c/\varepsilon^2} + e^{-c\beta} \tag{4.89}$$

onde

$$\varepsilon_o^2 = \mathrm{Var}\,(H_o^2) = p_o \,.\, q_o \tag{4.90}$$

e finalmente temos

$$\langle \overline{\sigma_H^+} \rangle_\xi \geq 1 - 1/B - e^{-c/\varepsilon_o^2} - e^{-c\beta} \tag{4.91}$$

que corresponde a (4.34).

Para $d = 2$ desde que $\beta n \to \infty$ rapidamente podemos por $\beta = \infty$ e teremos para (4.71)

$$H + f_\infty(H) = \begin{cases} 1 & \text{para} \quad H > 1 \\ H & \text{para} \quad H \in [-1,1] \\ -1 & \text{para} \quad H < -1 \end{cases} \tag{4.92}$$

Substituindo (4.92) em (4.70) temos

$$H_{n+1x} = L^{-1} \,.\, \sum_{y \in L_x} (H_{ny} + f_\infty(H_{ny}))\, \xi_{ny} \tag{4.93}$$

Esta relação permite analisar a variância $\varepsilon_n^2$ de $H_n$, assim temos

$$\varepsilon_{n+1}^2 = \langle H_{n+1}^2 \rangle = \langle (H_n + f_\infty(H_n))^2 \xi_n^2 \rangle$$

Uma vez que $\xi_n$ é independente de $H_n$ podemos escrever

$$\varepsilon_{n+1}^2 = p_n \langle (H_n + f_\infty(H_n))^2 \rangle \tag{4.94}$$

onde

$$p_n = E(\xi_n^2) = E(\xi_n) \tag{4.95}$$

Definindo

$$\overline{\varepsilon_{n+1}^2} \equiv \langle (H_n + f_\infty(H_n))^2 \rangle \tag{4.96}$$

temos que (4.96) é idêntico a relação (2.32) da ref. [40] e onde foi mostrado que $\overline{\varepsilon_n^2} \to 0$ da forma $(\ln n)^{-1}$.

Fazemos então

$$\varepsilon_{n+1}^2 = p_n \overline{\varepsilon_{n+1}^2} \tag{4.97}$$

A relação (4.74) pode ser escrita agora na forma

$$\sigma_n^{\pm} = \xi_{no}(\sigma_{n-1}^{\pm} + \sigma_{n-1}^{\mp} \cdot e^{-\beta n(1 \pm H_{no})})/(1 + e^{-\beta n(1 \pm H_{no})}) + \\ + (1 - \xi_{no})(\sigma_{n-1}^{\pm} + \sigma_{n-1}^{\mp} \cdot e^{\mp\beta n H_{no}})/(1 + e^{\mp\beta n H_{no}}) \tag{4.98}$$

Fazendo $\beta \to \infty$ em (4.98) teremos para a magnetização

$$\langle \sigma_o \rangle_{N+} = \sigma_N^{+} = \prod_{n=0}^{N} ((1 - \xi_{no})\, \alpha_o(H_{no}) + \xi_{no}\, \alpha_1(H_{no})) \tag{4.99}$$

onde

$$\alpha_o(H_{no}) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad H_{no} < 0 \\ +1 & \text{se} \quad H_{no} > 0 \end{cases} \tag{4.100 a}$$

$$\alpha_1(H_{no}) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad |H_{no}| > 1 \\ +1 & \text{se} \quad |H_{no}| < 1 \end{cases} \tag{4.100 b}$$

Tomando a média em $\xi$ e lembrando que $\xi_n$ é independente de uma hierarquia para outra, teremos

$$\langle \sigma_N^+ \rangle_\xi = \prod_{n=0}^{N} (q_n \, \alpha_0 (H_{n0}) + p_n \, \alpha_1 (H_{n0})) \tag{4.101}$$

e a média em H, temos primeiramente que

$$\overline{\alpha_0(H_{n0})} = 0 \tag{4.102}$$

assim

$$\overline{\langle \sigma_N^+ \rangle_\xi} = \prod_{n=0}^{N} p_n \, \overline{\alpha_1 (H_{n0})} \leq \prod_{n=0}^{N} \overline{\alpha_1 (H_{n0})} \tag{4.103}$$

O último termo em (4.103) é idêntico à relação (2.36) da ref. [40] e onde foi mostrado que

$$\prod_{n=0}^{N} \overline{\alpha_1 (H_{n0})} \propto \exp [ -O(1) \, . \sum_{n=1}^{N} (n \, \ln n)^{-1} ] = (\ln N)^{-p} \tag{4.104}$$

para algum p .

Assim vemos que $\overline{\langle \sigma_N^+ \rangle_\xi} \to 0$ quando $N \to \infty$ .

Vamos finalizar este capítulo enfatizando os resultados desta seção. A relação (4.58) e (4.69) mostram que bastaria uma diluição nos contornos da primeira hierarquia e apenas uma transformação do grupo de renormalização para termos um campo aleatório e a equivalência com o modelo (I.F.A.) seria exata. Se tivéssemos também uma diluição até uma hierarquia $n < N$ também teríamos uma equivalência exata. Entretanto tendo diluição em todas as hierarquias obtemos uma equivalência apenas no limite, com $p_N \to 1$ quando $N \to \infty$ .

# CAPÍTULO V

## ESTUDO DOS MODELOS (I.F.A.) E (I.A.D). SEM CONTORNO DENTRO DE CONTORNO

No capítulo III vimos que para a dimensão $d = 2$, o argumento heurístico de Imry e Ma não era conclusivo para o estudo da dimensão crítica inferior. O fato desfavorável ao argumento de Imry e Ma é que este não leva em conta contornos dentro de contornos.

Neste capítulo mostraremos que quando não se leva em conta explicitamente contornos dentro de contornos, os modelos (I.F.A.) e (I.A.D.) apresentam transição de fase para $d \geq 2$, contrariamente ao que vimos no capítulo anterior onde só ocorre transição de fase para $d > 2$ em ambos os modelos, uma vez que estes são equivalentes.

Primeiramente faremos o estudo para $T = 0$ (estado fundamental) e $T > 0$ do modelo (I.F.A.) e em seguida o estudo do modelo (I.A.D.) para $T \geq 0$.

### MODELO (I.F.A.) $T = 0$

O nosso argumento para mostrar que o modelo (I.F.A.) está magnetizado para $T = 0$, baseia-se no fato que ainda que as probabilidades de ocorrer contornos em qualquer hierarquia seja diferente de zero, o sistema prefere com grande probabilidade trocar contorno da hierarquia $\underline{n}$, para todo n, por contornos da hierarquia zero. No estado fundamental o sistema sempre escolhe a configuração de menor energia.

hierárquica e com a restrição que não poderá haver contorno dentro de contorno. Seja $\sigma_0$ o spin na origem de $\Lambda$, $\gamma_0^n$ o contorno do hierarquia n centrado na origem e $\bar{\gamma}_0^n$ o conjunto dos sítios dentro de $\gamma_0^n$ com n = 0, 1, ... N.

Na temperatura T = 0, fixada uma configuração $h = \{ h_x ; x \in \Lambda \}$ do campo aleatório, a magnetização local $\langle \sigma_0 \rangle_{N+}$ é dada pelo valor de $\sigma_0$ que minimiza a hamiltoniana $H_N(\sigma_0)$ do sistema. Porém como vimos no capítulo II devemos tomar a média em h isto é $\overline{\langle \sigma_0 \rangle}_{N+}$.

Por outro lado temos que $\sigma_0 = -1$ se ocorrer um contorno $\gamma_0^n$ com n = 0, 1, ...N e $\sigma_0 = +1$ caso contrário. Se $p_0^n$ é a probabilidade de ocorrer o contorno $\gamma_0^n$ temos que

$$\overline{\langle \sigma_0 \rangle}_{N+} = 1 - 2 \cdot \sum_{n=0}^{N} p_0^n \qquad (5.1)$$

Assim devemos mostrar que $\sum_{n=0}^{N} p_0^n$ converge quando $N \to \infty$ e tal que $\overline{\langle \sigma_0 \rangle}_{N+} > 1/2$.

Seja agora $V \subset \bar{\gamma}_0^n$, E (V) a energia que minimiza o sistema quando ocorre contornos $\gamma_x^0$ da hierarquia zero para todo $x \in V$ e $E(\gamma_0^n)$ a energia que minimiza o sistema quando ocorre o contorno $\gamma_0^n$.

Para uma configuração fixa de h, o contorno $\gamma_0^n$ ocorrerá se $E(\gamma_0^n) < E(V)$, assim a probabilidade $p_0^n$ de ocorrer o contorno $\gamma_0^n$ será dada por $p_0^n = \text{Prob}(E(\gamma_0^n) < E(V))$.

Para estimar esta probabilidade vamos introduzir primeiramente as seguintes variáveis aleatórias.

$$H_\gamma = H(\gamma^c) + 2\,|\gamma_0^n| + \sum_{x \in \bar{\gamma}_0^n} h_x \qquad (5.2)$$

$$Hv = H(\gamma^c) + 2 \cdot \sum_{x \in \bar{\gamma}_o^n} |\gamma_x^o| \, \xi x + \sum_{x \in \bar{\gamma}_o^n} hx \, \xi x - \sum_{x \in \bar{\gamma}_o^n} hx(1-\xi x) \qquad (5.3)$$

onde $H(\gamma^c)$ é a energia do sistema restrita à região $\Lambda \setminus \gamma_o^n$ e $H\gamma$ e $Hv$ são respectivamente as energias do sistema quando ocorre o contorno $\gamma_o^n$ e os contornos $\gamma_x^o$ em V.

$$\xi x = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad hx \leq -|\gamma_x^o| \\ 0 & \text{se} \quad hx > -|\gamma_x^o| \end{cases} \qquad \text{para todo } x \in \bar{\gamma}_o^{\,n} \qquad (5.4)$$

A definição (5.4) é a condição para existir um contorno da hierarquia zero em $\bar{\gamma}_o^n$, assim temos que

$$\xi x = \begin{cases} 1 & \text{com probabilidade} \quad p_x^o = \int_{-\infty}^{-|\gamma_x^o|} d\mu(hx) \\ 0 & \text{com probabilidade} \quad 1 - p_x^o \end{cases} \qquad (5.5)$$

Vamos usar a notação E(A) para a esperança ou a média de uma variável aleatória A, e calcular a função geratriz da variável $Hn - m$ onde

$$Hn \equiv Hv - H\gamma = 2 \cdot \sum_{x \in \bar{\gamma}_o^n} |\gamma_x^o| \, \xi x - 2\,|\gamma_o^n| - 2 \cdot \sum_{x \in \bar{\gamma}_o^n} hx\,(1-\xi x) \qquad (5.6)$$

$$m = E(Hn) = 2|\bar{\gamma}_o^n| \left( |\gamma_o^o| \, po - ao - |\gamma_o^n| / |\bar{\gamma}_o^n| \right) \qquad (5.7)$$

$$ao = -\int_{-\infty}^{-|\gamma_o^o|} ho \, d\mu(ho) \qquad (5.8)$$

É fácil verificar que de um modo geral

$$|\gamma_o^o| \, po \leq ao \qquad (5.9)$$

pois para $ho \leq -|\gamma_o^o|$,

$$a_o = -\int_{-\infty}^{-|\gamma_o^o|} h_o \, d\mu(h_o) \geq \int_{-\infty}^{-|\gamma_o^o|} |\gamma_o^o| \, d\mu(h_o) = |\gamma_o^o| \cdot p_o$$

Para $d > 2$ a condição (5.9) não será importante como veremos, porém para $d = 2$ é fundamental que tenhamos $|\gamma_o^o| \, p_o < a_o$ para a nossa prova funcionar.

Assim seja

$$E(e^{(H_n - m)t}) = E\left[e^{2 \cdot \sum_{x \in \bar{\gamma}_o^n} [\, |\gamma_x^o| \xi_x - h_x(1-\xi_x) - |\gamma_x^o| p_x + a_x] \cdot t}\right] =$$

$$= e^{2|\bar{\gamma}_o^n|(a_o - |\gamma_o^o| p_o)t} \left\{E\left[e^{[\, |\gamma_o^o| \xi_o - h_o(1-\xi_o)]t}\right]\right\}^{2|\bar{\gamma}_o^n|} \tag{5.10}$$

A última passagem se deve ao fato de $h_x$ e $h_y$ serem independentes para $x \neq y$.

Agora temos,

$$E\left[e^{[\, |\gamma_o^o| \xi_o - h_o(1-\xi_o)]t}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{[\, |\gamma_o^o| \xi_o - h_o(1-\xi_o)]t} \, d\mu(h_o) =$$

$$= \int_{-\infty}^{-|\gamma_o^o|} e^{|\gamma_o^o| t} \, d\mu(h_o) + \int_{-|\gamma_o^o|}^{+\infty} e^{-h_o t} \, d\mu(h_o)$$

por outro lado para $h_o \leq -|\gamma_o^o|$ temos que

$$\int_{-\infty}^{-|\gamma_o^o|} e^{|\gamma_o^o| t} \, d\mu(h_o) \leq \int_{-\infty}^{-|\gamma_o^o|} e^{-h_o t} d\mu(h_o)$$

portanto

$$E\left[e^{[\, |\gamma_o^o| \xi_o - h_o(1-\xi_o)]t}\right] \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h_o t} d\mu(h_o) = E(e^{h_o t}) \tag{5.11}$$

Agora vamos fazer a seguinte hipótese sobre o campo aleatório hx

$$E\,(e^{hxt}) \leq e^{\sigma^2 . t^2/2} \tag{5.12}$$

onde,

$E(hx) = 0$ e $\sigma^2 = E(hx^2)$ para todo $x \in \Lambda$.

Assim temos

$$E\left[e^{(Hn-m)t}\right] \leq e^{[-(|\gamma_o|p_o-a_o)t+1/2\sigma^2 t^2]2|\bar{\gamma}_o^n|} \tag{5.13}$$

A relação (5.13) implica na seguinte desigualdade para probabilidade

$$\text{Prob}\left[|Hn - m| \geq \delta m\right] \leq$$

$$2 \exp \left\{- \frac{[(\delta-1)(a_o-|\gamma_o^o|p_o) + \delta|\gamma_o^n|/|\bar{\gamma}_o^n|]^2}{\sigma^2} . |\bar{\gamma}_o^n|\right\} \tag{5.14}$$

onde $\delta > 1$.

Agora temos que

$$|\bar{\gamma}_o^n| = (L^n)^d \tag{5.15a}$$

$$|\gamma_o^n| = \text{const}\,(L^n)^{d-1} \tag{5.15b}$$

$$|\gamma_o^n|^2 / |\bar{\gamma}_o^n| = \text{const}^2 . (L^n)^{d-2} \tag{5.15c}$$

Analisando o expoente no lado direito de (5.14) e combinando com (5.15c) vemos que se $a_o = |\gamma_o^o| p_o$, para $d = 2$ Prob $[\,|H_n - m| \geq \delta m\,]$ será uma constante para qualquer $n = 0,1,\ldots N$. Portanto não haverá possibilidade de (5.1) convergir, assim para $d > 2$ (5.1) converge em qualquer hipótese e temos transição de fase como haveria de se esperar.

Para $d = 2$ entretanto precisamos que

$$|\gamma_o^o| . p_o < a_o \tag{5.16}$$

esta condição não é muito forte pois a desigualdade $|\gamma_o^o| p_o \leq a_o$ como vimos é verificada sempre. Para $h_x$ com distribuição $f(h_x) = \frac{1}{2\varepsilon^2} e^{-|h_x|/\varepsilon^2}$, onde $\varepsilon^2 = E(h_x^2)$, a condição (5.16) é verificada trivialmente para qualquer $\varepsilon$. Para uma distribuição gaussiana de $h_x$ (5.15) deve ser verificado para $\varepsilon$ não muito pequeno pois temos sempre a seguinte limitação,

$$p_o \equiv \text{Prob}\,(h_x < -|\gamma_o^o|) \leq \frac{\varepsilon}{|\gamma_o^o|\sqrt{2\pi}} \,.\, \exp\left[-\frac{|\gamma_o^o|^2}{2\varepsilon^2}\right] \tag{5.17}$$

Vamos terminar a nossa análise para $d = 2$ notando que

$$(\delta - 1)\,(a_o - |\gamma_o^o| p_o) + \delta |\gamma_o^n| \,/\, |\tilde{\gamma}_o^n| \geq (\delta - 1)\,(a_o - |\gamma_o^o| p_o)$$

portanto fazendo

$$P_o^n = \text{Prob}\,[\,|H_n - m| \geq \delta m\,] \leq \exp\left[-\frac{(\delta-1)^2 . b^2}{\varepsilon^2} . L^{2n}\right] \tag{5.18}$$

onde $b = (a_o - |\gamma_o^o| p_o)$

temos que $\sum_{n=0}^{N} p_o^n$ converge quando $N \to \infty$ e para uma escolha conveniente de $\varepsilon$ e $\delta$ teremos $\overline{\langle \sigma_o \rangle_{N+}} > \frac{1}{2}$.

**MODELO (I.F.A.) T > 0**

O estudo feito para $T = 0$ fornece um caminho para mostrar a transição de fase do modelo (I.F.A.) para $T > 0$ e $d \geq 2$. O primeiro passo é construir um argumento semelhante ao da relação (5.1) (argumento de Peierls) sendo que agora para $T > 0$ temos o fator de Gibbs (ver cap. I).

Fixada uma configuração $h$ do campo aleatório temos

$$\langle \sigma_0 \rangle_N^+ = 1 - 2 \cdot \sum_{n=0}^{N} p_0^n \tag{5.19}$$

onde agora

$$p_0^n = \left[ e^{-2\beta|\gamma_0^n| + \beta \sum_{x \in \bar{\gamma}_0^n} hx} \right] / Z_N \tag{5.20}$$

$Z_N$ é a função de partição dada por (4.7) com a condição que não poderá haver contorno dentro de contorno.

O argumento de Peierls usual consiste em estimar $p_0^n$ considerando em $Z_N$, para cada $n$, as configurações que trocam o sinal do spin dentro de cada contorno $\bar{\gamma}_0^n$. Esta estimativa sempre falha para $d = 2$ porque assim temos

$$p_0^n \leq \exp\left[ -2\beta \, |\gamma_0^n| + 2\beta \sum_{x \in \bar{\gamma}_0^n} hx \right]$$

e da hipótese (5.12) combinada com (5.15c) teríamos

$$\text{Prob}\left[ \left| \sum_{x \in \bar{\gamma}_0^n} hx \right| \geq \frac{1}{2} \, |\gamma_0^n| \right] \leq 2 \exp\left[ - \frac{|\gamma_0^n|^2}{\delta \, \epsilon^2 \, |\bar{\gamma}_0^n|} \right] =$$

$$= 2 \exp\left[ \frac{- \text{const}^2 \, (L^n)^{d-2}}{\delta \, \epsilon^2} \right] \tag{5.21}$$

de onde vemos que para $d = 2$ (5.21) é uma constante e portanto não converge para zero quando $n \to \infty$.

Assim a seção anterior sobre o estado fundamental sugere que devemos considerar, em $Z_N$ para cada $n$ de (5.20), alguns contornos da hierarquia $n - 1$ afim de obter uma convergência para (5.21).

Seja então para cada $n = 1,2,\ldots N$, a subrede $L^{n-1} \cdot \mathbb{Z}^d$, $\Lambda_n$ a região $\Lambda_n = L^{n-1}.\mathbb{Z}^d \cap \bar{\gamma}_o^n$, $V_n$ um subconjunto arbitrário não vazio de $\bar{\gamma}_o^n$, com volume a determinar, onde estão localizados alguns contornos $\gamma_x^{n-1}$ e $V_n^c$ o complemento de $V_n$ em $\Lambda_n$, com

$$|V_n| + |V_n^c| = L^d \tag{5.22}$$

Agora temos para cada $n = 1,2,\ldots N$

$$Z_N \geq e^{-2\beta \sum_{x\in V_n} |\gamma_x^{n-1}| + \beta \sum_{x\in V_n} \left( \sum_{y\in\bar{\gamma}_x^{n-1}} hy \right) - \beta \sum_{x\in V_n^c} \left( \sum_{y\in\bar{\gamma}_x^{n-1}} hy \right)} \tag{5.23}$$

Combinando (5.23) com (5.20) temos

$$P_o^n \leq \exp\left[ 2\beta \sum_{x\in V_n^c} \left( \sum_{y\in\bar{\gamma}_x^{n-1}} hy \right) - 2\beta\alpha \left( |\gamma_o^n| - |V_n| |\gamma_o^{n-1}| \right) \right] \tag{5.24}$$

Vamos impor agora que

$$|\gamma_o^n| - |V_n| |\gamma_o^{n-1}| > 0 \tag{5.25}$$

e combinando com (5.22) temos seguintes vínculos

$$0 < |V_n| < L^{d-1} \tag{5.26a}$$

$$L^d - L^{d-1} < |V_n^c| < L^d \tag{5.26b}$$

A hipótese (5.12) feita na seção anterior permite estabelecer agora a seguinte estimativa,

$$Q_{\infty}^{n} = \text{Prob}\left[\left|\sum_{x\in V_n^c}\left(\sum_{y\in\bar{\gamma}_x^{n-1}} hy\right)\right| \geq \frac{1}{2}\left(|\gamma_o^n| - |V_n||\gamma_o^{n-1}|\right)\right] \leq$$

$$\leq 2\exp\left[-\frac{\left(|\gamma_o^n| - |V_n||\gamma_o^{n-1}|\right)^2}{\delta\,\varepsilon^2\,|V_n^c||\gamma_o^{n-1}|}\right] \tag{5.27}$$

Da relação (5.22) e (5.15b) temos

$$\frac{\left(|\gamma_o^n| - |V_n||\gamma_o^{n-1}|\right)^2}{|V_n^c||\gamma_o^{n-1}|} = \frac{\text{const. } L^{n(d-1)}}{2(2L-1)} \tag{5.28}$$

onde fizemos a escolha

$$|V_n^c| = L^d - L^{d-1}/2 \tag{5.29a}$$

$$|V_n| = L^{d-1}/2 \tag{5.29b}$$

Assim temos

$$Q_{\infty o} \leq 2\exp\left[-\frac{\text{const. } L^{n(d-1)}}{16\,(2L-1)\,\varepsilon^2}\right] \tag{5.30}$$

A relação (5.30) implica que $Q_{\infty o} \to 0$ quando $n \to \infty$ para $d \geq 2$.

Da relação (5.29a) e (5.15b) temos que

$$P_{\infty o} \leq \exp\ 2\beta\left[-\frac{1}{2}\left(|\gamma_o^n| - |V_n||\gamma_o^{n-1}|\right)\right] =$$

$$= \exp\left[-\beta\,\frac{\text{const.}}{2}\,L^{n(d-1)}\right] \tag{5.31}$$

ocorre com probabilidade $\leq 1 - Q_{\infty o}$.

Seja agora $Q$ o seguinte evento

$$Q = \left\{ h! \; \left| \sum_{x \in V_n^o} \left( \sum_{y \in \bar{\gamma}_x^{n-1}} hy \right) \right| \leq \frac{1}{2} \left( |\gamma_o^n| - |V_n| \, |\gamma_o^{n-1}| \right) , \right.$$

$$\left. \text{para todo } n = 1, 2, \ldots N \right\}$$

De (5.30) temos que $Q$ ocorre com probabilidade

$$1 - \exp\left( - \frac{\text{const.}}{\varepsilon^2} \right) \tag{5.32}$$

e de (5.19) e (5.31) temos que

$$\langle \sigma_o \rangle_{N+} \geq 1 - \exp(-\beta) \tag{5.33}$$

ocorre com probabilidade $\leq 1 - \exp\left( - \frac{\text{const.}}{\varepsilon^2} \right)$

Combinando então (5.33) com (5.32) temos finalmente que para $\beta$ suficientemente grande e $\varepsilon^2$ pequeno $\overline{\langle \sigma_o \rangle}_{N+} > \frac{1}{2}$.

**MODELO (I.A.D.) $T \geq 0$**

Para o modelo (I.A.D.) mostraremos a transição de fase facilmente com um argumento de Peierls usual e não precisamos fazer um estudo do estado fundamental.

Fixada uma configuração $\xi$ da diluição de contornos temos

$$\langle \sigma_o \rangle_{N+} = 1 - \sum_{n=0}^{N} Q_{no} \tag{5.35}$$

onde

$$Q_{no} = e^{-2\beta|\gamma_o^n|}\ \xi_o^n \ / \ Z_N \tag{5.36}$$

$Z_N$ é a função de partição dada por (4.50) com a condição de não haver contorno dentro de contorno.

Foi feito uma escolha par para o parâmetro $L$ por isso não temos o campo externo $h$ presente no expoente de (5.36), lembrando que $h$ é alternado dentro de cada contorno $\gamma_o^n$.

Para este modelo podemos estimar $Z_N$ para todo $n = 0,1,...N$ por $Z_N \geq 1$, assim temos

$$\langle\sigma_o\rangle_{N+} \geq 1 - 2 \cdot \sum_{n=0}^{N} e^{-2\beta|\gamma_o^n|}\ \xi_o^n \tag{5.37}$$

Tomando a média em $\xi_o^n$ e lembrando que $\xi_o^n$ é independente de uma hierarquia para outra e que

$$\xi_o^n = \begin{cases} 1 & \text{com} \quad \text{probabilidade} \quad p^n \\ 0 & \text{com} \quad \text{probabilidade} \quad q^n = 1 - p^n \end{cases}$$

temos

$$\overline{\langle\sigma_o\rangle}_{N+} \geq 1 - 2 \sum_{n=0}^{N} \left[ q^n + p^n \cdot e^{-2\beta|\gamma_o^n|} \right] =$$

$$= 1 - 2 \sum_{n=0}^{N} q^n - 2 \sum_{n=0}^{N} p^n\ e^{-2\beta|\gamma_o^n|} \tag{5.38}$$

Agora devemos ter $q^n \to 0$, quando $n \to \infty$, convenientemente para que

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} q^n \leq \frac{1}{8} \tag{5.39}$$

Porém quando $q^n \to 0$ temos que $p^n \to 1$ e

$$\sum_{n=0}^{N} p^n e^{-2\beta|\gamma_0^n|} \leq \sum_{n=0}^{N} e^{-2\beta|\gamma_0^n|} \tag{5.40}$$

como $|\gamma_0^n| = \text{const.}\ L^{n(d-1)}$ temos que (5.40) converge quando $N \to \infty$ para $d \geq 2$.

Assim para $\beta$ suficientemente grande podemos ter $\overline{\langle \sigma_0 \rangle}_{N+} > \frac{1}{2}$.

# CAPÍTULO VI

## ESTUDO DO MODELO (I.F.A.) REAL SEM CONTORNO DENTRO DE CONTORNO

Neste capítulo esquematizaremos uma possível prova para mostrar a transição de fase para o modelo (I.F.A.) real, isto é, onde os contornos são de todos os tipos e não apenas como no modelo hierárquico. Baseado em nossos resultados do capítulo anterior, de que o modelo (I.F.A.) na aproximação hierárquica quando não se leva em conta contornos dentro de contornos apresenta transição de fase para $d \geq 2$, a nossa conjectura é que o modelo (I.F.A.) real também apresenta transição de fase para $d \geq 2$ quando não se leva em conta contornos dentro de contornos. Esta conjectura está baseada no fato, como já salientamos no final da Introdução deste trabalho, que tudo que é verdadeiro para a aproximação hierárquica será verdadeiro para o modelo real.

Para o modelo (I.F.A.) real temos novamente por um argumento de Peierls que

$$\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda+} = 1 - 2 \sum_{\gamma_0 \in \Gamma} e^{-2\beta|\gamma_0| + \beta \sum_{x \in \bar{\gamma}_0} hx} / Z_\Lambda \qquad (6.1)$$

onde $Z_\Lambda$ é a função de partição dado por (4.3), lembrando que tanto em $Z_\Lambda$ como na soma em (6.1) não poderá haver contornos dentro de contornos. Porém os contornos $\gamma_0$ são de todos os tipos possíveis como no argumento usual de Peierls (ver capítulo I) e o índice $\underline{0}$ significa que a origem está contida em $\gamma_0$.

Seja então

$$P(\gamma_o) = e^{-2\beta|\gamma_o| + \beta \sum_{x\in\bar{\gamma}_o} h_x} / Z_\Lambda \qquad (6.2)$$

Uma estimativa para (6.2) será obtida agora decompondo cada região $\bar{\gamma}_o$, numa união de regiões do tipo $\bar{\gamma}^n$ do modelo hierárquico com $n > 1$ e estimar o correspondente contorno $\gamma_o$ pelos respectivos contornos $\gamma^n$. Em seguida comparamos a energia de $\gamma^n$ com a energia de alguns contornos $\gamma^{n-1}$, como fizemos no modelo hierárquico.

Seja então um dado $\bar{\gamma}_o$ decomposto na forma

$$\bar{\gamma}_o = \bigcup_{x\in\Lambda_o} \bar{\gamma}_x^n \qquad (6.3)$$

sendo $\Lambda_o$ o conjunto dos sítios $x$ de $\bar{\gamma}_o$ onde devemos centrar as regiões $\bar{\gamma}_x^n$.

Vamos supor agora que exista uma constante $k$ para todo $\gamma_o$ tal que

$$|\gamma_o| \geq k \cdot \sum_{x\in\Lambda_o} |\gamma_x^n| \qquad (6.4)$$

Se os contornos $\gamma_x^n$ percorressem apenas os lados de $\gamma_o$, isto é, se não houvesse contornos $\gamma_x^n$ no interior de $\gamma_o$ então $k = 1/2d$, isto porque pelo menos um lado de $\gamma_x^n$ faz parte de $\gamma_o$.

Como é possível haver contornos no interior de $\gamma_o$, o procedimento deve ser outro tal como feito no trabalho da ref. [16] onde um mesmo contorno $\gamma_o$ é aproximado por todas as

hierarquias até uma hierarquia máxima que depende de $\gamma_o$ .

Porém não seguiremos este procedimento aqui pois isto envolve um complicado problema geométrico que não conseguimos resolver ainda. Agora para cada $\gamma_o$ estimamos $Z_\Lambda$ por

$$Z_\Lambda(\gamma_o) \geq \prod_{x\in\Lambda_o} \exp\left\{-2\beta \sum_{y\in V_{nx}} |\gamma_y^{n-1}| + \beta \sum_{y\in V_{nx}} \left( \sum_{s\in\bar{\gamma}_y^{n-1}} h_s\right) - \right.$$

$$\left. + \beta \sum_{y\in V_{nx}^c} \left( \sum_{s\in\bar{\gamma}_y^{n-1}} h_s\right)\right\} \qquad (6.5)$$

Os conjuntos $V_{nx}$ e $V_{nx}^c$ são como em (5.23) com apenas um detalhe, $V_{nx}$ deve ser um subconjunto de $\Lambda_{nx}$ considerando apenas os sítios que estão na subrede par ou ímpar de $\Lambda_{nx}$. Isto porque contrariamente ao modelo hierárquico, não podemos ter no modelo real um contorno adjacente a outro. Esta condição impõe naturalmente um vínculo ao volume de $V_{nx}$ que é

$$|V_{nx}| \leq L^d / 2 \qquad (6.6)$$

Porém (6.6) é automaticamente satisfeito devido ao vínculo (5.26a).

Combinando então (6.2) com (6.4) e (6.5) temos

$$P(\gamma_o) \leq \prod_{x\in\Lambda_o} P_{nx}(\gamma_o) \qquad (6.7)$$

onde

$$P_{nx}(\gamma_o) = \exp\left\{2\beta \sum_{y\in V_{nx}^c} \left(\sum_{s\in\bar{\gamma}_y^{n-1}} h_s\right) - 2\beta \left(k|\gamma_x^n| - |V_{nx}|\,|\gamma_x^{n-1}|\right)\right\} \qquad (6.8)$$

Vamos impor agora que

$$k|\gamma_x^n| - |V_{nx}|\,|\gamma_x^{n-1}| > 0 \qquad (6.9)$$

e combinando com (5.22) temos os seguintes vínculos

$$0 < |V_{nx}| < k \,.\, L^{d-1} \tag{6.10a}$$

$$L^d - k \,.\, L^{d-1} < |V^c_{nx}| < L^d \tag{6.10b}$$

Seja agora Q o evento

$$Q = \Big\{ h \,!\, \Big|\sum_{y \in V^c_{nx}} \Big(\sum_{\alpha \in \bar{\gamma}_y^{n-1}} h_\alpha\Big)\Big| \leq \frac{1}{2} \left(k|\gamma^n_x| - |V_{nx}||\gamma^{n-1}_x|\right),$$

$$\text{para todo } x \in \Lambda_0 \text{ e todo } n = 1, 2, \ldots \Big\} \tag{6.11}$$

Se Q ocorre com probabilidade $1 - \exp(-\text{const.}/\varepsilon^2)$ (ref. [16]) então teremos para (6.1) que

$$\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda+} \geq 1 - e^{-\beta} \tag{6.12}$$

ocorre com probabilidade

$$P = 1 - \exp(-\text{const.} / \varepsilon^2) \tag{6.13}$$

com $\beta$ suficientemente grande e $\varepsilon$ pequeno.

Combinando (6.12) com (6.13) teríamos finalmente

$$\overline{\langle \sigma_0 \rangle}_{\Lambda+} > 1/2 \tag{6.14}$$

Para obter (6.12) fazemos, com a escolha

$$|V^c_{nx}| = L^d - k \,.\, L^{d-1} / 2 \tag{6.15a}$$

$$|V_{nx}| = k \,.\, L^{d-1} / 2 \tag{6.15b}$$

se ocorre o evento Q então, combinando (6.8), (6.15a) e (6.15b) temos

$$P_{nx}(\gamma_o) \leq \exp\left[-\beta \text{ const.} k \,.\, L^{n(d-1)}/2\right] = \exp\left[-\beta\, L^{n(d-1)}/2\right] \tag{6.16}$$

uma vez que de (5.15b)

$$\text{const.} \equiv 2d \tag{6.17}$$

Por outro lado temos que

$$|\Lambda_o| \leq |\gamma_o| / L^{n(d-1)} \tag{6.18}$$

assim teremos para (6.7)

$$P(\gamma_o) \leq \prod_{x \in \Lambda_o} P_{nx}(\gamma_o) \leq \exp\left[-\beta\, |\gamma_o| / 2\right] \tag{6.19}$$

que combinando com (6.1) resulta em (6.12)

Para obter (6.13) definimos o evento $Q^c_{nx}(\gamma_o)$

$$Q^c_{nx}(\gamma_o) = \Big\{ h \,:\, \Big| \sum_{y \in V^c_{nx}} \Big( \sum_{s \in \bar{\gamma}_y^{n-1}} h_s \Big) \Big| \geq \frac{1}{2} \Big( k |\gamma^n_x| - |V_{nx}| |\gamma^{n-1}_x| \Big, \text{ para } x \text{ e } n \text{ fixados} \Big\} \tag{6.20}$$

novamente da hipótese (5.12) temos que

$$\text{Prob}\,(Q^c_{nx}(\gamma_o)) \leq 2 \exp\left[-\frac{(k|\gamma^n_x| - |V_{nx}||\gamma^{n-1}_x|)^2}{8\,\varepsilon^2\,|V^c_{nx}||\bar{\gamma}_y{}^{n-1}|}\right] \tag{6.21}$$

e com a escolha (6.15a), (6.15b) e (6.17) temos

$$\text{Prob}\,(Q^c_{nx}(\gamma_o)) \leq 2 \exp\left[-\frac{k\,.\,L^{n(d-1)}}{16(2L-k)\varepsilon^2}\right] \tag{6.22}$$

onde vemos que $Q^c_{nx}(\gamma_o) \to 0$ quando $n \to \infty$ para $d \geq 2$.

Com esta desigualdade (6.22) esperamos obter a relação (6.13), entretanto não conseguimos ainda.

# CAPÍTULO VII

## COMENTÁRIOS

Neste trabalho tivemos a oportunidade de fazer uma revisão sobre sistemas aleatórios desde a sua origem com os trabalhos de Brout, até o recente trabalho de Bricmont e Kupiainen sobre o modelo de Ising ferromagnético em campo aleatório.

Os sistemas aleatórios apresentam uma quantidade enorme de resultados novos e deixa novos caminhos para questões não resolvidas ainda, ou não estudadas. Vimos também como deve ser estendido o formalismo de Gibbs da Mecânica Estatística em sistemas aleatórios temperados. O objetivo final deste trabalho que era mostrar que o modelo antiferromagnético diluído em campo uniforme é capaz de gerar campos aleatórios na aproximação hierárquica, teve todo um encadeamento de conceitos preliminares até podermos aplicar a Teoria do Grupo de Renormalização. Neste encadeamento tivemos o conceito de contornos de Peierls seguido da teoria do grupo de renormalização. O argumento de Imry e Ma surgiu naturalmente dentro deste último passo.

Na nossa proposta para obtenção da equivalência entre os modelos ferromagnéticos em campo aleatório e antiferromagnético diluído em campo uniforme, observamos que bastou dar o primeiro passo para gerar um campo aleatório em função do campo uniforme, pois nas hierarquias seguintes o campo aleatório segue textualmente o que já havia sido obtido para o modelo ferromagnético com campo aleatório. Observamos também que a retirada do campo uniforme ou da diluição destroe totalmente o campo aleatório gerado.

A aproximação hierárquica permitiu a aplicação exata do grupo de renormalização, a relevância dessa aproximação é justificada pelo fato que acredita-se que tudo que é verdadeiro sobre modelos hierárquicos também seja verdadeiro sem essa aproximação. Porém é um problema ainda em aberto a equivalência completa dos modelos tratados aqui.

Tivemos a oportunidade também de estudar o efeito de contornos dentro de contornos. Onde vimos que esse fato é importante para a dimensão crítica inferior, pois ambos os modelos (I.F.A.) e (I.A.D.), na versão hierárquica, apresentam transição de fase para $d \geq 2$ em vez de $d > 2$.

Para o modelo (I.F.A.) real propomos um esquema, baseado na versão hierárquica, para mostrar que este apresenta transição de fase para $d \geq 2$ quando não se leva em conta contornos dentro de contornos. Entretanto complicados problemas geométricos, que estamos estudando, não permitiram ainda a conclusão final.

## REFERÊNCIAS


[1] Matthias, Suhl, Corenzwit, (1958) Phys. Rev. Lett. 1 92.

[2] Brout, R. (1959) Phys. Rev. Vol. 115 4 824.

[3] Lacour-Gayet, P.; Toulouse, G. (1974) J. Physique 35 425.

[4] Imry, Y.; Ma, S-K. (1975) Phys. Rev. Lett. Vol 35 21 1399.

[5] Grinstein, G. (1976) Phys. Rev. Lett. 37 944.

[6] Aharony, A.; Imry, Y; Ma, S-K (1976) Phys. Rev. Lett. 37 1364

[7] Young, A.P. (1977) J. Phys. C: Solid St. Phys. 10 L257.

[8] Aharony, A. (1978) Phys. Rev. B 18 3318.

[9] Perez, J.F.; Wreszinski, W.F.; Van Hemmen, J.L. (1984) J. Stat. Phys. 35 89.

[10] Aharony, A.; Fishman, S. (1979) J. Phys. C: Solid St. Phys. Vol 12 L729.

[11] Cardy, J.L. (1984) Phys. Rev B Vol. 29 1 505.

[12] Galam, S. (1985) Phys. Rev. B Vol. 31 11 7274.

[13] Perez, J.F.; Pontin, L.F.; Baêta Segundo, J.A. (1986) Phys. Rev. A Vol. 116 6 287.

[14] Yoshizawa, H.; Cowley, R.A.; Shirane, G. (1982) Phys. Rev. Lett. Vol. 48 6 438.

[15] Pytte, E.; Imry, Y.; Mukamel, O. (1981) Phys. Rev. Lett. 46 1173.

[16] Fisher, D.; Fröhlich, J.; Spencer, T. (1984) J. Stat. Phys Vol. 34 5/6 863.

[17] Chalker, J. (1983) J. Phys. C 16 6615.

[18] Imbrie, J. (1985) Commun Math. Phys. 98 145.

[19] Bricmont, J.; Kupiainen, A. (1988) Commun. Math. Phys. 116 539.

[20] Aizenman, M.; Wehr, J. (1989) Commun. Math. Phys.

[21] Benfatto, G.; Gallavotti, G. (1986) Commun. Math. Phys. 106 277.

[22] Ruelle, D. (1969) Statistical Mechanics: Rigorous Results. W.A. Benjamin.

[23] Gallavotti, G. (1972) Revista del Nuovo Cimento 2 133.

[24] Peierls, R. (1936) Proc. Cambridge Phil. Soc. 32 477.

[25] Brush, S.G. (1967) Rev. Mod. Phys. 39 883.

[26] Kac, M. (1964) Phys. Tod. Vol 10 17 40.

[27] Berlim, T.H.; Kac, M. (1952) Phys. Rev. 86 821.

[28] Weiss, P.R. (1948) Phys. Rev. Vol. 74 1493.

[29] Anderson, P.W. (1978) Rev. Mod. Phys. 50 199.

[30] van Hemmen, J.L.;Palmer, R.G. (1982)J. Phys. A: Math. Gen. 15 3881.

[31] Breiman, L.; Probability. (Addison-Wesley, Reading 1968).

[32] van Hemmen, J.L., van Enter, A.C.D.; Canisius, J. (1983) Z. Phys. B 50 311.

[33] Salinas, S.R.; Wreszinski, W.F. (1985) J. Stat. Phys.

[34] Wilson, K.G. (1971) Phys. Rev. B 4 3174.

[35] Wilson, K.G.; Kogut, J. (1974) Phys. Rept. 12 C 75.

[36] Kadanoff, L.P. et al (1967) Rev. Mod. Phys. 39 395.

[37] Stanley, H.E. (1971) Intro. to phase transition and critical phenomena (Oxford University Press, London).

[38] Baker Jr., G.A.; Golner, G.R. (1973) Phys. Rev. Lett. 31 22.

[39] Dyson, F.J. (1969) Commun. Math. Phys. 12 91.

[40] Bricmont, J.; Kupiainen, A. (1988) J. Stat. Phys. Vol. 51 5/6 1021.

[41] Fröhlich, J.; Mathematical Aspects of The Physics of Disordered Systems. Les Houches, 1984

[42] Baêta Segundo, J. A.. Tese de Doutoramento (I.F.U.S.P.) 1990.

[43] Moss de Oliveira, S. M.. Tese de Doutoramento (U.F.F.R.J.) 1989. Moss de Oliveira, S. M.; Oliveira, P. M.; Continentino, M. A. (1988) Physica A 152 477.

[44] Bruinsma, R., (1984). Phys. Rev. B Vol 30 1 289.

[45] Queiroz, S. L. A.; Santos, R. R. (1987) Pre print P.U.C.R.J..