UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

Luiz Agostinho Ferreira
WPK
Luiz Agostinho Ferreira

ELÉTRONS DE DIRAC EM ESPAÇOS COM TORÇÃO

Eduardo Oliveira Resek

Dissertação de Mestrado
apresentada no Instituto de
Física da Universidade de
São Paulo.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Henrique Fleming

bifese 29/6/89

SÃO PAULO

1989

SBI-IFUSP

305M810T1548

530.1
R432e
M
e.1

17

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Resek, Eduardo Oliveira

Eletrons de Dirac em espaços com torção. São
Paulo, 1989.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Pau-
lo. Instituto de Física. Departamento de Física Ma-
temática.

Área de Concentração: Física de Partículas Elemen-
tares.

Orientador: Prof. Dr. Henrique Fleming

Unitermos: 1. Espaços de Riemann-Cartan; 2. Equ-
ção de Dirac em espaços de Riemann-Cartan; 3. Spin
em espaços com torção; 4. Teorema de Noether para
férmions em espaços de Riemann-Cartan.

USP/IF/SBI - 24/89

*À Joana, à Thaisa
e a meus pais.*

*Do little things well;
then shall come the great things asking to be done.*

Agradecimentos

Ao Fleming, antes de tudo pela amizade; inestimáveis foram também sua paciente orientação e seu constante interesse;

À Escola Federal de Engenharia de Itajubá, por ter me liberado das atividades didáticas durante a elaboração deste trabalho;

À CAPES, aos meus pais e aos da Joana, pelo apoio financeiro;

A todos meus colegas da USP e da EFEI, especialmente à Graziela, ao Clodoaldo, ao Farnézio e ao Brunelli;

À Thaissa e, principalmente, à Joana, sem cujo amor e constante apoio nada teria sido possível;

Resumo

Nesta dissertação trataremos partículas de Dirac em espaços de Riemann-Cartan, que são espaços métricos riemannianos onde não se impõe a restrição de que a conexão seja simétrica. Inicialmente mostramos, a título de revisão, como a equação de Dirac pode ser generalizada para tais espaços, passando a seguir ao estudo do acoplamento dessas partículas à geometria de fundo. Enquanto que na Relatividade Geral o acoplamento à curvatura do espaço leva simplesmente a uma alteração da massa efetiva de repouso do férmion, a introdução da torção dá origem a mudanças mais profundas. Isso é também comprovado analisando o limite não relativístico da equação de Dirac. A seguir, estudamos o comportamento do *spin* da partícula, determinando sua equação de movimento na presença adicional de um campo eletromagnético de fundo.

Finalmente, obtemos as leis de conservação associadas aos grupos de movimento nesses espaços, isto é, construímos o Teorema de Noether para férmions em espaços de Riemann-Cartan. O enfoque é o de Jackiw e Fleming, e é particularmente confortante observar que, apesar das complicações introduzidas pelo caso não trivial aqui tratado, a simplicidade e a clareza da formulação original não são perdidas.

Abstract

In this dissertation we shall be concerned mainly with Dirac particles in Riemann-Cartan spaces, which are riemannian manifolds where the connection is not required to be symmetric. After reviewing how the Dirac equation can be consistently generalized to such case, we study the coupling of these particles to the background geometry. While in General Relativity it is known that the coupling to the curvature amounts solely to a contribution to the fermion rest mass, we notice that torsion gives rise to more profound modifications. This is also verified by going to the non-relativistic limit of the Dirac equation. At next, we study the behaviour of the particle *spin*, determining its equation of motion in the presence of a further background electromagnetic field.

Finally, we turn our attention to the problem of obtaining conservation laws associated with groups of motion in these spaces, that is, to a formulation of Noether's Theorem for fermions in Riemann-Cartan spaces. The approach is the one devised by Jackiw and followed by Fleming, and it is pleasing to see that, in spite of the complications brought in by the non trivial case treated here, the original simplicity and neatness of the formulation are not lost.

Errata

Na página 6 a numeração correta a ser atribuída à nota de rodapé é 1 (um).

Na página 46: onde se lê *grvitacional*, entenda-se *gravitacional*.

No Apêndice A, página 58, onde se lê: *No sistema local de coordenadas (Minkowskiano) a métrica é denotada por...*, entenda-se: *No sistema local de coordenadas (Minkowskiano) a métrica é denotada por...*

Ao longo do texto, as seguintes expressões devem substituir aquelas indicadas:

Página 17, equação (1.19):

$$\gamma_{\mu ab} = e^c_{\mu} (\Omega_{cab} - \Omega_{abc} + \Omega_{bca}) = -\gamma_{\mu ba} \quad (1.19)$$

Página 26, imediatamente antes da §1.4.4:

$$t_{\mu\nu} = \frac{i}{2} \left[\bar{\psi} \gamma_{(\nu} \nabla_{\mu)} \psi - \nabla_{(\mu} \bar{\psi} \gamma_{\nu)} \psi \right] - g_{\mu\nu} \mathcal{L}$$

Página 40, equação (2.16):

$$\delta \nabla_\mu \bar{\psi} = -\nabla_\lambda \bar{\psi} \nabla_\mu \xi^\lambda - \xi^\lambda \nabla_\lambda \nabla_\mu \bar{\psi} - 2\xi^\lambda S_{\lambda\mu}{}^\nu \nabla_\nu \bar{\psi}$$

Página 50, primeira equação:

$$\begin{aligned} \delta(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) &= -\xi^\lambda \partial_\lambda (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) + \partial_\lambda \xi^\mu (\bar{\psi} \gamma^\lambda \psi) \\ &= -\xi^\lambda \nabla_\lambda (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) + \nabla_\lambda \xi^\mu (\bar{\psi} \gamma^\lambda \psi) + 2\xi^\lambda S_{\lambda\mu}{}^\nu (\bar{\psi} \gamma^\nu \psi) \end{aligned}$$

Página 53, equação anterior a (3.8):

$$\begin{aligned} \delta S = \int d^4x e \left\{ \left\{ -\frac{1}{2\kappa} [G_{\mu\nu} - \overset{\star}{\nabla}_\lambda (T_{\mu\nu}{}^\lambda - T_\nu{}^\lambda{}_\mu + T^\lambda{}_{\mu\nu})] + \frac{1}{2} t_{\mu\nu} \right\} \delta g^{\mu\nu} \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{\kappa} T_\lambda{}^{\nu\mu} + \tau_\lambda{}^{\nu\mu} \right) \delta K_{\mu\nu}{}^\lambda - \xi^\lambda \partial_\lambda \mathcal{L} \right\} \end{aligned}$$

Página 54, primeira equação:

$$\begin{aligned} \delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \left(\tau_\lambda{}^{\nu\mu} + \frac{1}{\kappa} T_\lambda{}^{\nu\mu} \right) \delta K_{\mu\nu}{}^\lambda \right. \\ \left. + \left\{ -\frac{1}{2\kappa} [G_{\mu\nu} - \overset{\star}{\nabla}_\lambda (T_{\mu\nu}{}^\lambda - T_\nu{}^\lambda{}_\mu + T^\lambda{}_{\mu\nu})] + \frac{1}{2} t_{\mu\nu} \right\} \delta g^{\mu\nu} \right. \\ \left. + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \delta \psi + \delta \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi} \delta \partial_\mu \psi + \delta \partial_\mu \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \bar{\psi}} \right\} \end{aligned}$$

Mesma página, equação (3.9):

$$\begin{aligned} \delta S = \int d^4x \left[\partial_\mu \left(e \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi} \right) \delta \psi + e \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi} \partial_\mu \delta \psi \right. \\ \left. + \delta \bar{\psi} \partial_\mu \left(e \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \bar{\psi}} \right) + e \partial_\mu \delta \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \bar{\psi}} \right] \end{aligned}$$

Sumário

Introdução	1
1 A Equação de Dirac na Presença de Torção	6
1.1 Tetradas	7
1.2 Derivação Covariante de Spinors	9
1.3 A Lagrangeana e a Equação de Dirac na Relatividade Geral .	18
1.4 A Equação de Dirac em Espaços de Einstein-Cartan	19
1.4.1 A Lagrangeana	19
1.4.2 Algumas Expressões Úteis	20
1.4.3 Equações de Campo	21
1.4.4 Equação de Movimento para os Spinors	26
2 O Comportamento do Spin	29
2.1 Acoplamento spin-geometria de fundo	29
2.1.1 Acoplamento spin- campo eletromagnético em R_4 . . .	29
2.1.2 Acoplamento spin-campo de fundo na Relatividade Geral	31
2.1.3 Acoplamento spin-campo de fundo em espaços com torção	32
2.2 Aproximação não relativística	34
2.3 Propagação do spin	37

Sumário

3 O Teorema de Noether para Spinors	47
3.1 Variações de Forma	47
3.1.1 Spinors	48
3.1.2 Tetradas	50
3.1.3 Lagrangeana	51
3.2 Teorema de Noether	52
Conclusão	56
A Notações e Convenções	58
B Espaços de Riemann-Cartan	61
Referências	63

gauge com grupos unitários compactos são renormalizáveis e a gravitação em U_4 pode ser formulada como uma teoria de gauge (do grupo de Poincaré, como vimos), a teoria U_4 passou a ser encarada como uma possível alternativa com base na qual se poderia elaborar um programa de renormalização com chances de sucesso.

Ainda hoje, a construção de uma teoria quântica da gravitação continua sendo um dos mais importantes problemas em aberto da física teórica. Entretanto, embora não conheçamos uma versão quântica livre de problemas para a gravitação, é usual tratarmos a influência desta sobre sistemas quânticos adotando um enfoque do tipo “*campo de fundo*”, tal como se faz com relação ao campo eletromagnético em espaços de Minkowski. Acredita-se que esse enfoque funcione bem, isto é, que a influência da gravitação como campo externo é representada corretamente imergindo-se os sistemas quânticos no espaço-tempo curvo apropriado, nas seguintes condições:²

- a) os efeitos da gravidade não devem ser de natureza quântica, o que exigiria uma teoria quântica renormalizável da gravitação;
- b) as previsões feitas devem ser de natureza macroscópica.

Nesta dissertação é nosso objetivo estudar partículas de Dirac (referidas genericamente como *elétrons*) imersas em uma variedade de fundo caracterizada por uma geometria de Riemann-Cartan (U_4). Nesse sentido, apresentamos no Capítulo 1 a equação de Dirac em espaços com torção [21], introduzindo também todo o formalismo necessário para tal. As tetradas são definidas *à la* Weyl e, a fim de garantir a invariância da derivada de objetos portadores de índices não holonômicos³ sob transformações locais de

²Para uma recente (e excelente!) discussão, bem como referências aos trabalhos originais, veja o livro de Birrel e Davies [28].

³Nossas convenções matemáticas seguem as de Schouten [27].

Lorentz, somos levados a introduzir uma nova derivada covariante, associada a uma nova conexão definida no espaço tangente local — a conexão de spin. Com isso, podemos então obter uma derivação de spinores que é covariante tanto sob o grupo de transformações gerais de coordenadas como sob o de Lorentz local. Ainda nesse capítulo, usando a Lagrangeana da teoria de Einstein-Cartan, obtemos também as equações do campo gravitacional e as expressões das suas “fontes” — os tensores de spin e momento-energia.

No capítulo 2 analisamos a interação do spin de elétrons de Dirac com o campo gravitacional de fundo enriquecido com um campo eletromagnético. Com respeito a um campo eletromagnético em um espaço-tempo de Minkowski, Bargmann, Michel e Telegdi [29] obtiveram, no contexto da eletrodinâmica e mecânica clássicas, a equação de movimento para partículas com spin carregadas, bem como a equação para a precessão do quadrivetor de polarização. Mais tarde, Rafanelli e Schiller [32] deduziram essas equações clássicas diretamente da mecânica quântica, trabalhando com soluções WKB da equação de Dirac no limite clássico ($\hbar \rightarrow 0$). O problema análogo de partículas com spin interagindo com o campo gravitacional de fundo no âmbito da Relatividade Geral foi finalmente resolvido em 1981 por Audretsch [30]. Partindo da equação de Dirac covariante em V_4 e usando uma aproximação tipo WKB, Audretsch deduziu as equações que retratam a influência do spin sobre as trajetórias de elétrons em um campo gravitacional, bem como a equação de movimento do spin: embora o spin seja ele próprio transportado paralelamente ao longo da trajetória, ele induz sobre esta um comportamento não geodésico, via uma força do tipo Mathisson-Papapetrou.

Por outro lado, Hayashi e Shirafuji [19], considerando um caso especial de espaços de Riemann-Cartan — o espaço-tempo de Weitzenböck com teleparalelismo (A_4), e partindo de uma equação de onda de segunda ordem

para spinores a duas componentes, encontraram para o spin um movimento de precessão causado pelo acoplamento com a torção da variedade de fundo. Audretsch [31], estendendo então seu trabalho a variedades de Riemann-Cartan, generalizou o resultado de Hayashi e Shirafuji para tais espaços, partindo entretanto da equação de Dirac de primeira ordem, e sugeriu ainda experiências que poderiam servir de base para medição da torção.

Nessa dissertação, usamos o método de Hayashi e Shirafuji para obter a equação de movimento do spin em espaços de Riemann-Cartan genéricos, na presença ainda de um campo eletromagnético externo. Analisamos também como o acoplamento spin-campo de fundo se reflete na equação de segunda ordem (tipo Klein-Gordon) para o elétron (quanto a esse aspecto, lembramos que no âmbito da Relatividade Geral ocorre apenas uma alteração da massa efetiva do elétron [20]). Finalmente, consideramos também a aproximação não relativística da equação de Dirac, obtendo ainda mais detalhes acerca da interação com a variedade de fundo.

Na terceira e última parte, voltamos nossa atenção para a formulação do teorema de Noether em tais espaços, isto é, obtemos as leis de conservação associadas aos grupos de movimento em variedades de Riemann-Cartan. Seguimos o tratamento dado por Fleming [12,13], que por sua vez é baseado na formulação de Jackiw [14] do respectivo teorema para o espaço-tempo de Minkowski. Em [13] uma primeira tentativa foi feita no sentido de estender o formalismo para spinores no contexto da Relatividade Geral. Havia entretanto algumas dificuldades relacionadas com a determinação da variação de forma de spinores e tetradas e, por outro lado, fez-se uso de um sistema localmente geodésico para eliminar localmente as conexões de Christoffel, o que simplifica notavelmente os cálculos. Em espaços de Riemann-Cartan esta simplificação não é possível, pois a conexão contém uma parcela de

caráter tensorial, que obviamente não pode ser eliminada por uma escolha adequada de um sistema de referência. Nosso tratamento resolve esses problemas na medida que obtem uma expressão consistente tanto para a variação de forma de spinors quanto de tetradas e, através de uma escolha adequada da dependência funcional da Lagrangeana, consegue manter uma razoável simplicidade ao longo de todo o desenvolvimento. É claro que tudo pode ser imediatamente particularizado para a Relatividade Geral (V_4), bastando para isso desprezar a torção em todos os termos.

Capítulo 1

A Equação de Dirac na Presença de Torção

No espaço de Minkowski, a equação de Dirac²

$$(i \gamma^k \partial_k - m) \psi(x) = 0 \quad (1.1)$$

pode ser obtida, no formalismo Lagrangeano, a partir da seguinte ação:

$$S = \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \left\{ \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^k \partial_k \psi - \partial_k \bar{\psi} \gamma^k \psi) - m \bar{\psi} \psi \right\} \quad (1.2)$$

A ação (1.2) é construída de modo a ser invariante por transformações globais de Lorentz. O campo ψ é um spinor em relação ao grupo de transformações de Lorentz do espaço quadridimensional de Minkowski.

No contexto da Relatividade Geral ou de outras teorias sobre variedades com estruturas mais ricas onde ainda se aceite a validade do princípio da equivalência, como a de Riemann-Cartan, a invariância de Lorentz passa a

²Todas as convenções utilizadas nessa dissertação estão descritas no Apêndice A.

ser válida apenas localmente. De fato, invariância sob transformações globais de Lorentz é, fisicamente, uma condição suficiente para que a geometria da variedade sob consideração seja considerada plana, isto é, a métrica da variedade de fundo pode ser reduzida, em qualquer ponto, à de Minkowski. As Lagrangeanas devem possuir agora invariância com respeito ao grupo de transformações gerais de coordenadas, e os campos físicos passam a ser agora tensores com relação a esse grupo. Mas e quanto aos spinores, que são essencialmente representações do grupo de Lorentz [8,10]? A generalização do conceito de spinor para espaços-tempos curvos não parece ser tão óbvia. Como construir então uma equação de Dirac covariante sob transformações gerais de coordenadas?

1.1 Tetradas

Devemos a Weyl [1] a solução mais simples para esses problemas. Ela consiste basicamente no seguinte: um spinor de Dirac $\psi(x)$ deve transformar-se como um escalar sob transformações gerais de coordenadas:

$$\psi'(x') = \psi(x),$$

e como um ‘spinor de Minkowski’ sob transformações locais de Lorentz. Para descrever essas transformações locais, introduzimos bases locais, constituídas de quádruplas de quadrivetores, denominadas *tetradas* (*vierbein*):

$$e_a{}^\mu(x), \quad a = 0, \dots, 3$$

O índice latino (não holonômico) denota o vetor da base em particular, enquanto o índice grego especifica a componente daquele vetor. Exigimos que os vetores $e_a{}^\mu$ formem uma base ortogonal

$$e_a{}^\mu e_{b\mu} = \eta_{ab},$$

onde η_{ab} é o tensor métrico de Minkowski (ver Apêndice A). Definimos os vetores $e^{a\mu}$ da base recíproca como

$$e^{a\mu} = \eta^{ab} e_b{}^\mu,$$

isto é, os índices não holonômicos são abaixados e levantados com a métrica de Minkowski do espaço tangente local, enquanto os índices gregos (holonômicos) o são pela métrica $g_{\mu\nu}$ da variedade:

$$e^a{}_\mu = g_{\mu\nu} e^{a\nu}.$$

As seguintes relações são imediatas (e úteis):

$$\begin{aligned} e_a{}^\mu e_b{}_\mu &= \delta_a^b \\ e_a{}^\mu e_a{}^\nu &= \delta_\mu^\nu \\ e_a{}^\mu e_{b\mu} &= \eta_{ab} \\ e^a{}_\mu e^{a\nu} &= g_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Em geral, dado um tensor $Q^{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_r}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_p}$, as suas ‘componentes tetrádicas’ $Q^{b_1b_2\dots b_r}_{a_1a_2\dots a_p}$ no espaço tangente local de Minkowski são obtidas diretamente por contração dos índices com as tetradas:

$$Q^{b_1b_2\dots b_r}_{a_1a_2\dots a_p} = e_{a_1}{}^{\mu_1} e_{a_2}{}^{\mu_2} \dots e_{a_p}{}^{\mu_p} e^{b_1}{}_{\lambda_1} e^{b_2}{}_{\lambda_2} \dots e^{b_r}{}_{\lambda_r} Q^{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_r}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_p}, \quad (1.4)$$

e reciprocamente:

$$Q^{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_r}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_p} = e^{a_1}{}_{\mu_1} e^{a_2}{}_{\mu_2} \dots e^{a_p}{}_{\mu_p} e_{b_1}{}^{\lambda_1} e_{b_2}{}^{\lambda_2} \dots e_{b_r}{}^{\lambda_r} Q^{b_1b_2\dots b_r}_{a_1a_2\dots a_p}$$

A equação (1.3) pode ser escrita como

$$g_{\mu\nu} = e^a{}_\mu \eta_{ab} e^b{}_\nu.$$

Considerando-a como uma equação matricial e tomando o determinante, temos

$$\det(g_{\mu\nu}) = \det(e^a_\mu) \det(\eta_{ab}) \det(e^b_\nu)$$

ou, denotando $\det(e^a_\mu)$ por $e(x)$,

$$g = -e^2,$$

ou ainda

$$\sqrt{-g} = e,$$

uma grandeza que é útil na construção de elementos invariantes.

1.2 Derivação Covariante de Spinors

As matrizes de Dirac presentes na equação (1.2) satisfazem a

$$\gamma^i \gamma^k + \gamma^k \gamma^i = 2\eta^{ik}$$

A generalização para espaços curvos é um tanto óbvia: as matrizes de Dirac de V_4 ou U_4 devem satisfazer

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (1.5)$$

Em vista de (1.3) e (1.4), é aparente que uma possível definição de γ^μ que satisfaça (1.5) é

$$\gamma^\mu = e_a^\mu \gamma^a$$

Duas modificações adicionais são necessárias para a generalização da ação (1.2) para espaços curvos:

- i) trocar, na ação, d^4x pelo elemento de volume invariante em espaços curvos, $\sqrt{-g} d^4x$.

- ii) trocar as derivadas parciais ∂_μ por 'derivadas covariantes' ∇_μ que garantam a invariância da ação tanto sob transformações gerais de coordenadas como sob transformações locais de Lorentz (*princípio do acoplamento mínimo*).

Verifica-se facilmente que apenas (i) e a troca dos γ^a pelos γ^μ já são suficientes para tornar a ação (1.2) invariante sob transformações gerais de coordenadas. Concentremos pois nossa atenção sobre as transformações de Lorentz, isto é, consideremos uma transformação de Lorentz no espaço tangente de Minkowski

$$x'^a = \Lambda^a_b x^b$$

As tetradas transformam-se correspondentemente como

$$e'^a_\mu(x') = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} e^b_\mu$$

e

$$e'_{a\mu}(x') = \frac{\partial x^a}{\partial x^b} e_{b\mu},$$

ou seja

$$e'^a_\mu(x') = \Lambda^a_b e^b_\mu \quad (1.6)$$

$$e'_{a\mu}(x') = \Lambda_a^b e_{b\mu}, \quad (1.7)$$

A transformação é local e no espaço tangente, não podendo alterar a métrica da variedade. Devemos ter portanto:

$$e'^{a\mu} \eta_{ab} e'^{b\nu} = e^{a\mu} \eta_{ab} e^{b\nu},$$

que conduz a

$$\Lambda^a_c e^{c\mu} \eta_{ab} \Lambda^b_d e^{d\nu} = e^{c\mu} \eta_{cd} e^{d\nu},$$

isto é:

$$\Lambda^a_c \eta_{ab} \Lambda^b_d = \eta_{cd}$$

ou, equivalentemente

$$\Lambda^a_c \Lambda^d_a = \delta^d_c$$

Podemos obter ainda, facilmente, a seguinte relação:

$$\Lambda^d_a \Lambda^c_d = \delta^c_a$$

Em Minkowski, admitimos que os spinores de Dirac se transformam como [2,3]

$$\psi'(x') = U(\Lambda)\psi(x),$$

onde $U(\Lambda)$ é uma matriz (constante) que representa a transformação de Lorentz. Impondo invariância de forma da equação de Dirac sob transformações de Lorentz obtemos então [2,3]

$$U^{-1}\gamma^a U = \gamma^b \Lambda^a_b \quad (1.8)$$

No espaço curvo temos uma complicação adicional introduzida pelo fato de que as transformações de Lorentz são *locais*, isto é, $U = U(x)$ e $\Lambda^a_b = \Lambda^a_b(x)$. Conseqüentemente, $\partial_\mu \psi(x)$ não se transforma como um spinor, mas como

$$\partial_\mu \psi'(x') = U(x) \partial_\mu \psi(x) + \partial_\mu U(x) \psi(x)$$

Para obtermos a lei de transformação desejada, substituímos ∂_μ por uma 'derivada covariante' ∇_μ , definida de modo a termos

$$\nabla_\mu \psi'(x') = U(x) \nabla_\mu \psi(x),$$

com o que (1.8) continua a ter validade também no caso curvo.

A fim de descobrirmos o que é a derivada covariante do spinor $\psi(x)$, consideremos uma transformação de Lorentz infinitesimal

$$\Lambda_{ab} = \eta_{ab} + \omega_{ab}, \quad (1.9)$$

onde $|\omega_{ab}| \ll 1$, $\omega_{(ab)} = 0$, e escrevamos U na forma

$$U = 1 + \frac{1}{2} S_{ab} \omega^{ab}$$

Os ω_{ab} são seis parâmetros infinitesimais e os S^{ab} são os geradores da transformação infinitesimal. A condição (1.8) é satisfeita, pode-se verificar [3], pelo seguinte conjunto de matrizes:

$$S^{ab} = \frac{1}{2} \gamma^{[a} \gamma^{b]} = -\frac{i}{2} \sigma^{ab} = \frac{1}{4} (\gamma^a \gamma^b - \gamma^b \gamma^a)$$

A variação infinitesimal de um spinor sob uma transformação de Lorentz é portanto

$$\delta\psi = \psi'(x) - \psi(x) = \frac{1}{2} \omega_{ab} S^{ab} \psi$$

ou

$$\delta\psi = \frac{1}{4} \omega_{ab} \gamma^{[a} \gamma^{b]} \psi \quad (1.10)$$

Por outro lado, obtemos de (1.6), (1.7) e (1.9) a variação de forma da tetrada e^a_μ , que se transforma como um vetor de Lorentz com respeito ao índice latino:

$$\delta e^a_\mu = \omega^a_b e^b_\mu \quad (1.11)$$

Sejam P e Q dois pontos infinitamente próximos, e $\psi(P)$ e $\psi(Q)$ os campos spinoriais referidos às respectivas tetradas locais $e^a_\mu(P)$ e $e^a_\mu(Q)$. Desloquemos agora a tetrada $e^a_\mu(P)$ paralelamente ao longo de dx^μ (o vetor que une P a Q), obtendo assim uma nova tetrada que denotamos por $e'^a_\mu(Q)$; $\psi'(Q)$

será o spinor em Q , referido a $e'^a{}_\mu(Q)$. $\psi'(Q)$ depende de $e^a{}_\mu(P)$, mas não de $e^a{}_\mu(Q)$. Assim, temos para a diferencial covariante [4,5] do spinor ψ

$$D\psi = dx^\mu \nabla_\mu \psi = \psi'(Q) - \psi(P) = [\psi(Q) - \psi(P)] - [\psi(Q) - \psi'(Q)]$$

O termo $\psi(Q) - \psi(P)$ representa uma translação, enquanto $\psi(Q) - \psi'(Q)$ refere-se a uma rotação local das tetradas.² Temos portanto:

$$\psi(Q) - \psi(P) = dx^\mu \partial_\mu \psi = dx^a \partial_a \psi$$

e, de (1.10) :

$$\psi(Q) - \psi'(Q) = \frac{1}{4} \omega_{ab} \gamma^{[a} \gamma^{b]} \psi$$

Resta agora apenas obter uma expressão explícita para ω_{ab} , que relaciona $e'^a{}_\mu(Q)$ e $e^a{}_\mu(Q)$, de acordo com (1.11).

A fim de obtermos esta relação, observemos que a derivada de um objeto geométrico portador de índices de Lorentz não holonômicos não se transforma como um tensor com respeito aos índices de Lorentz. Consideremos por exemplo um vetor de Lorentz contravariante V^a , que se transforma como $V'^a = \Lambda^a{}_b V^b$ sob transformações locais de Lorentz, onde $\Lambda = \Lambda(x)$. Então

$$(\partial_\mu V^a)' = \partial_\mu (\Lambda^a{}_b V^b) = \Lambda^a{}_b \partial_\mu V^b + V^b \partial_\mu \Lambda^a{}_b,$$

pois o índice μ é um escalar sob transformações locais de Lorentz.

Entretanto, esta derivada pode ser feita covariante também com respeito às rotações locais de tetradas, desde que introduzamos uma nova conexão $\omega_{\mu ab}$ no espaço tangente local (às vezes chamada de 'conexão de spin'). Definimos então a derivada covariante de Lorentz como

$$\mathcal{D}_\mu V^a = \partial_\mu V^a + \omega_{\mu}{}^a{}_b V^b, \quad (1.12)$$

²Lembre-se que $\psi(Q)$ é obtido de $\psi'(Q)$ através da rotação de tetradas.

que possui a propriedade de transformação correta,

$$(\mathcal{D}_\mu V^a)' = \Lambda^a_b(x) \mathcal{D}_\mu V^b,$$

desde que a conexão se transforme como

$$\omega'^a_{\mu b} = \Lambda^a_c \omega_\mu^c{}_d (\Lambda^{-1})^d_b - (\partial_\mu \Lambda)^a_c (\Lambda^{-1})^c_b$$

A derivada covariante de objetos com índices de Lorentz covariantes é facilmente obtida de (1.12) impondo que

$$\mathcal{D}_\mu (V_a W^a) = \partial_\mu (V_a W^a),$$

já que $V_a W^a = V_\mu W^\mu$ é um escalar tanto sob transformações locais de Lorentz como sob transformações gerais de coordenadas. Temos

$$\begin{aligned} W^a \mathcal{D}_\mu V_a + V_a \mathcal{D}_\mu W^a &= W^a \partial_\mu V_a + V_a \partial_\mu W^a \\ W^a \mathcal{D}_\mu V_a + V_a \partial_\mu W^a + V_a \omega_\mu^a{}_b W^b &= W^a \partial_\mu V_a + V_a \partial_\mu W^a \\ W^a \mathcal{D}_\mu V_a &= W^a \partial_\mu V_a - V_a \omega_\mu^a{}_b W^b \end{aligned}$$

ou

$$\mathcal{D}_\mu V_a = \partial_\mu V_a - \omega_\mu^b{}_a V_b \quad (1.13)$$

Para objetos geométricos portadores de índices holonômicos e não holonômicos, escrevemos a derivada covariante usando ambas as conexões: a holonômica $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ e a de spin $\omega_\mu^a{}_b$, de forma que o objeto resultante será um tensor tanto sob transformações gerais de coordenadas como sob transformações locais de Lorentz.

Para a tetrada e_a^μ , por exemplo, temos:

$$\nabla_\mu e_a^\nu = \mathcal{D}_\mu e_a^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu e_a^\lambda = \partial_\mu e_a^\nu - \omega_\mu^b{}_a e_b^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu e_a^\lambda$$

Esta expressão se transforma como um tensor misto do tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ nos índices μ e ν sob transformações gerais de coordenadas $x^\mu \rightarrow x'^\mu$

$$(\nabla_\mu e_a{}^\nu)' = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \nabla_\alpha e_a{}^\beta,$$

e como um vetor contravariante (com índice a) sob uma transformação local de Lorentz $x^a \rightarrow x'^a = \Lambda^a{}_b x^b$:

$$(\nabla_\mu e_a{}^\nu)' = \Lambda_a{}^b \nabla_\mu e_b{}^\nu.$$

Nas teorias que obedecem ao postulado métrico,

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0,$$

geralmente se exige que [6]

$$\nabla_\mu e_a{}^\nu = 0 \quad (1.14)$$

O postulado métrico impõe ainda sobre $\omega_{\mu ab}$ a restrição de que ela seja antissimétrica com respeito aos dois últimos índices. De fato

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda g_{\mu\nu} &= \nabla_\lambda (e^a{}_\mu e^b{}_\nu \eta_{ab}) = e^a{}_\mu e^b{}_\nu \nabla_\lambda \eta_{ab} \\ &= e^a{}_\mu e^b{}_\nu (\partial_\lambda \eta_{ab} - \omega_\lambda{}^a{}_c \eta_{cb} - \omega_\lambda{}^c{}_b \eta_{ac}) \\ &= -e^a{}_\mu e^b{}_\nu (\omega_{\lambda ba} + \omega_{\lambda ab}) = 0, \end{aligned}$$

ou seja

$$\omega_{\lambda(ab)} = 0. \quad (1.15)$$

Notemos que, com isso, (1.13) pode ser reescrita como

$$\mathcal{D}_\mu V_a = \partial_\mu V_a + \omega_{\mu a}{}^b V_b$$

Vamos agora obter uma expressão para $\omega_{\lambda ab}$. Partimos de

$$\nabla_\mu e^c{}_\nu = \partial_\mu e^c{}_\nu + \omega_\mu{}^c{}_b e^b{}_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e^c{}_\lambda = 0 \quad (1.16)$$

e antissimetrizamos com respeito aos índices μ e ν :

$$\partial_{[\mu} e^c_{\nu]} + \omega_{[\mu}{}^c{}_{\nu]} - \Gamma_{[\mu\nu]}^\lambda e^c_\lambda = 0 \quad (1.17)$$

O último termo de (1.17) contém a torção $S_{\mu\nu}{}^\lambda$. Multiplicando por $e_a{}^\mu e_b{}^\nu$, temos:

$$\Omega_{ab}{}^c + \frac{1}{2}(\omega_a{}^c{}_b - \omega_b{}^c{}_a) - S_{ab}{}^c = 0, \quad (1.18)$$

onde

$$\Omega_{ab}{}^c = e_a{}^\mu e_b{}^\nu \partial_{[\mu} e^c_{\nu]} = \Omega_{[ab]}{}^c$$

são denominados coeficientes de rotação de Ricci (não são tensores). Baixando todos os índices de (1.18) e permutando-os ciclicamente, resulta

$$\begin{aligned} \Omega_{abc} + \frac{1}{2}(\omega_{acb} - \omega_{bca}) - S_{abc} &= 0 \\ - \Omega_{bca} - \frac{1}{2}(\omega_{bac} - \omega_{cab}) + S_{bca} &= 0 \\ \Omega_{cab} + \frac{1}{2}(\omega_{cba} - \omega_{abc}) - S_{cab} &= 0 \end{aligned}$$

Somando estas três equações, levando em conta (1.15), obtemos

$$\omega_{acb} + \Omega_{abc} - \Omega_{bca} + \Omega_{cab} - S_{abc} + S_{bca} - S_{cab} = 0$$

ou:

$$\omega_{abc} = \Omega_{abc} - \Omega_{bca} + \Omega_{cab} - S_{abc} + S_{bca} - S_{cab},$$

onde usamos novamente (1.15). Reconhecemos nos três últimos termos da expressão acima o tensor de contorção:

$$\omega_{abc} = \Omega_{abc} - \Omega_{bca} + \Omega_{cab} + K_{abc}$$

Assim, a expressão completa para $\omega_\mu{}^{ab}$ em espaços de Riemann-Cartan fica

$$\omega_\mu{}^{ab} = \gamma_\mu{}^{ab} + K_\mu{}^{ab} = -\omega_\mu{}^{ba},$$

onde

$$\gamma_\mu^{ab} = e_\mu^c (+\Omega_{cab} - \Omega_{abc} + \Omega_{bca}) = -\gamma_\mu^{ba} \quad (1.19)$$

é a parte riemanniana da conexão de spin.

A relação entre ω e Γ é obtida diretamente de (1.16):

$$\omega_\mu^a{}_b e_\nu^b = e_a^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\mu e_\nu^a$$

ou

$$\omega_\mu^{ab} = e_a^\lambda e^{b\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - e^{b\nu} \partial_\mu e_\nu^a = e_a^\lambda e^{b\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + e_\nu^a \partial_\mu e^{b\nu}$$

e, inversamente,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = e_a^\lambda e_{b\nu} \omega_\mu^{ab} + e_a^\lambda \partial_\mu e_\nu^a = e_a^\lambda e_{b\nu} \omega_\mu^{ab} - e_\nu^a \partial_\mu e_a^\lambda$$

Expressões análogas ligam as partes riemannianas destas conexões:

$$\gamma_\mu^{ab} = e_a^\lambda e^{b\nu} \left\{ \mu^\lambda{}_\nu \right\} - e^{b\nu} \partial_\mu e_\nu^a = e_a^\lambda e^{b\nu} \left\{ \mu^\lambda{}_\nu \right\} + e_\nu^a \partial_\mu e^{b\nu}$$

e

$$\left\{ \mu^\lambda{}_\nu \right\} = e_a^\lambda e_{b\nu} \gamma_\mu^{ab} + e_a^\lambda \partial_\mu e_\nu^a = e_a^\lambda e_{b\nu} \gamma_\mu^{ab} - e_\nu^a \partial_\mu e_a^\lambda$$

Podemos agora escrever a variação de forma (1.11) das tetradas sob transformações locais de Lorentz com o uso da conexão não holonômica:³

$$\delta e_\nu^a(x) = e_\nu^a(x) - e'^a{}_\nu(x) = dx^\mu \omega_{\mu b}^a e_\nu^b$$

Comparando com (1.11) concluímos que

$$\omega^{ab} = -dx^\mu \omega_\mu^{ab},$$

de modo que a diferencial covariante do spinor pode ser escrita

$$D\psi = dx^\mu (\partial_\mu \psi + \frac{1}{4} \omega_{\mu ab} \gamma^{[a} \gamma^{b]} \psi).$$

³Ver nota de rodapé da página 13

A derivada covariante de ψ é então

$$\nabla_\mu \psi = \left(\partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_{\mu ab} \gamma^{[a} \gamma^{b]} \right) \psi. \quad (1.20)$$

A derivada covariante do spinor adjunto $\bar{\psi}$, definido como

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^{(0)},$$

pode ser obtida tomando-se diretamente o conjugado hermitiano de (1.20) e multiplicando-o pela direita por $\gamma^{(0)}$, ou, de outra forma, lembrando que $\bar{\psi} \psi$ é um escalar, de modo que devemos ter

$$\nabla_\mu (\bar{\psi} \psi) = \partial_\mu (\bar{\psi} \psi).$$

Resulta

$$\nabla_\mu \bar{\psi} = \partial_\mu \bar{\psi} - \frac{1}{4} \omega_{\mu ab} \bar{\psi} \gamma^{[a} \gamma^{b]}.$$

No contexto de variedades riemannianas (na Relatividade Geral, por exemplo), basta colocar $K_{\mu\nu}{}^\lambda = S_{\mu\nu}{}^\lambda = 0$ nas expressões acima; obtemos

$$\overset{\{\}}{\nabla}_\mu \psi = \left(\partial_\mu + \frac{1}{4} \gamma_{\mu ab} \gamma^{[a} \gamma^{b]} \right) \psi \quad (1.21)$$

e

$$\overset{\{\}}{\nabla}_\mu \bar{\psi} = \partial_\mu \bar{\psi} - \frac{1}{4} \gamma_{\mu ab} \bar{\psi} \gamma^{[a} \gamma^{b]}$$

1.3 A Lagrangeana e a Equação de Dirac na Relatividade Geral

De acordo com o discutido na seção anterior, a ação de Dirac em espaços riemannianos deve ser

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{i}{2} e_a{}^\mu \left(\bar{\psi} \gamma^a \overset{\{\}}{\nabla}_\mu \psi - \overset{\{\}}{\nabla}_\mu \bar{\psi} \gamma^a \psi \right) - m \bar{\psi} \psi \right\} \quad (1.22)$$

Obter as equações de movimento para os spinores ψ e $\bar{\psi}$ é agora tarefa trivial. As equações de Euler-Lagrange fornecem

$$ie_a^\mu \gamma^a \nabla_\mu \psi - m\psi = 0$$

para o spinor ψ , e

$$ie_a^\mu \nabla_\mu \bar{\psi} \gamma^a + m\bar{\psi} = 0$$

para o spinor adjunto $\bar{\psi}$.

1.4 A Equação de Dirac em Espaços de Einstein-Cartan

1.4.1 A Lagrangeana

A ação de Dirac em espaços de Riemann-Cartan é praticamente idêntica à (1.22), bastando apenas trocar ∇_μ , a derivada covariante de V_4 , pela derivada covariante específica da variedade em questão. Assim:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{i}{2} e_a^\mu (\bar{\psi} \gamma^a \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \bar{\psi} \gamma^a \psi) - m \bar{\psi} \psi \right\} \quad (1.23)$$

Muitas vezes, é útil separar explicitamente as equações em suas partes riemanniana e não riemanniana. Na Lagrangeana de Dirac aparece a combinação $\bar{\psi} \gamma^a e_a^\mu \nabla_\mu \psi = \bar{\psi} \gamma^a \nabla_a \psi$ e sua conjugada de Dirac; vejamos como ela pode ser decomposta. Temos:

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \gamma^a \nabla_a \psi - \nabla_a \bar{\psi} \gamma^a \psi &= \bar{\psi} \gamma^a \nabla_a \psi - \nabla_a \bar{\psi} \gamma^a \psi \\ &\quad + \frac{1}{4} K_{abc} \bar{\psi} (\gamma^a \gamma^{[b} \gamma^{c]} + \gamma^{[b} \gamma^{c]} \gamma^a) \psi \end{aligned} \quad (1.24)$$

Usando agora a seguinte identidade satisfeita pelas matrizes de Dirac

$$\gamma^a \gamma^b \gamma^c = \gamma^{[a} \gamma^b \gamma^{c]} + \eta^{ab} \gamma^c + \eta^{bc} \gamma^a - \eta^{ca} \gamma^b, \quad (1.25)$$

podemos simplificar (1.24) um pouco mais. Antissimetrizando (1.25) com respeito aos índices b e c , resulta

$$\gamma^a \gamma^{[b} \gamma^{c]} = \gamma^{[a} \gamma^b \gamma^{c]} + 2\eta^{ab} \gamma^c \quad (1.26)$$

Permutando os índices de (1.25) obtemos também

$$\gamma^b \gamma^c \gamma^a = \gamma^{[b} \gamma^c \gamma^{a]} + \eta^{bc} \gamma^a + \eta^{ca} \gamma^b - \eta^{ab} \gamma^c$$

Antissimetrizando novamente nos índices b e c , fica

$$\gamma^{[b} \gamma^{c]} \gamma^a = \gamma^{[b} \gamma^c \gamma^{a]} - 2\eta^{ab} \gamma^c,$$

que somada a (1.26) fornece

$$\gamma^a \gamma^{[b} \gamma^{c]} + \gamma^{[b} \gamma^{c]} \gamma^a = 2\gamma^{[a} \gamma^b \gamma^{c]},$$

pois $\gamma^{[b} \gamma^c \gamma^{a]} = \gamma^{[a} \gamma^b \gamma^{c]}$. Desse modo, (1.24) se torna

$$\bar{\psi} \gamma^a \nabla_a \psi - \nabla_a \bar{\psi} \gamma^a \psi = \bar{\psi} \gamma^a \overset{(\cdot)}{\nabla}_a \psi - \overset{(\cdot)}{\nabla}_a \bar{\psi} \gamma^a \psi + \frac{1}{2} K_{abc} \bar{\psi} \gamma^{[a} \gamma^b \gamma^{c]} \psi$$

A Lagrangeana de Dirac pode assim ser escrita

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \left(\bar{\psi} e_a^\mu \gamma^a \overset{(\cdot)}{\nabla}_\mu \psi - \overset{(\cdot)}{\nabla}_\mu \bar{\psi} e_a^\mu \gamma^a \psi \right) + \frac{i}{4} K_{abc} \bar{\psi} \gamma^{[a} \gamma^b \gamma^{c]} \psi - m \bar{\psi} \psi \quad (1.27)$$

De maneira completamente análoga obtemos também:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \left(\bar{\psi} e_a^\mu \gamma^a \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} e_a^\mu \gamma^a \psi \right) + \frac{i}{4} \omega_{abc} \bar{\psi} \gamma^{[a} \gamma^b \gamma^{c]} \psi - m \bar{\psi} \psi \quad (1.28)$$

1.4.2 Algumas Expressões Úteis

Antes de passarmos à obtenção das equações de movimento para spinores faremos uma pausa para deduzir algumas relações que nos serão úteis. Consideremos primeiramente a densidade escalar $\sqrt{-g} = e$. Usando (1.3), temos

que

$$\begin{aligned}
 \partial_a e &= e_a^\mu \partial_\mu \sqrt{-g} = e_a^\mu \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\lambda\nu} \partial_\mu g_{\lambda\nu} \\
 &= \frac{1}{2} e e_a^\mu e_b^\lambda e^{b\nu} \partial_\mu (e_c^\lambda e_{c\nu}) = e e_a^\mu e_b^\lambda \underbrace{e^{b\nu} e_{c\nu}}_{\delta_c^b} \partial_\mu e_c^\lambda \\
 &= e e_a^\mu e_b^\lambda \partial_\mu e_\lambda^b = e e_b^\lambda \partial_a e_\lambda^b
 \end{aligned} \tag{1.29}$$

Por outro lado, contraindo os índices b e c da equação (1.18) resulta

$$\Omega_{ab}^b = \frac{1}{2} (e_a^\mu e_b^\nu \partial_\mu e_\nu^b - e_a^\mu e_b^\nu \partial_\nu e_\mu^b) = \frac{1}{2} (e_b^\nu \partial_a e_\nu^b - e_a^\mu \partial_b e_\mu^b)$$

Usando (1.29) e o fato de que $\partial_b \delta_a^b = \partial_b (e_a^\mu e_\mu^b) = 0$, isto fica

$$\Omega_{ab}^b = \frac{1}{2e} (\partial_a e + e e_\mu^b \partial_b e_a^\mu) = \frac{1}{2e} (e_a^\mu \partial_\mu e + e \partial_\mu e_a^\mu),$$

ou seja,

$$\partial_\mu (e e_a^\mu) = 2e \Omega_{ab}^b. \tag{1.30}$$

Ainda, de (1.19), concluímos que

$$\gamma_a^{ab} = \Omega_a^{ab} - \Omega^{ab}_a + \Omega^b_a{}^a = 2\Omega^b_a{}^a,$$

donde decorre que (1.30) é equivalente a

$$\partial_\mu (e e_a^\mu) = -e \gamma_{ba}^b \tag{1.31}$$

1.4.3 Equações de Campo

Consideremos a ação completa do sistema formado por um campo de Dirac interagindo com o campo gravitacional de fundo

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (\mathcal{L}_m + \mathcal{L}_g),$$

onde $\mathcal{L}_m$ é a Lagrangeana do campo de matéria e $\mathcal{L}_g$ a do campo gravitacional. Como já foi dito, trataremos especificamente o caso do campo de Dirac acoplado a uma variedade de Einstein-Cartan, de modo que $\mathcal{L}_m$ será a Lagrangeana(1.23). Seguindo Hehl [4], adotamos para a Lagrangeana do campo gravitacional

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{2\kappa}R$$

onde $\kappa = 8\pi G$, sendo G a constante da gravitação de Newton. Esta Lagrangeana, muito embora seja formalmente idêntica à adotada na Relatividade Geral, difere desta por conter termos envolvendo a torção ($R = R(\Gamma)$). Os argumentos em favor dessa escolha podem ser encontrados na Ref. [4]. É bom frisar entretanto que outras escolhas são possíveis, levando a teorias fisicamente distintas da de Einstein-Cartan (ver Ref. [15] e as demais referências ali citadas).

A ação completa tem a seguinte aparência

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2\kappa}R + \mathcal{L} \right) \\ &= \int d^4x e \left\{ -\frac{1}{2\kappa}R + \frac{i}{2}e_a{}^\mu (\bar{\psi} \gamma^a \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \bar{\psi} \gamma^a \psi) - m \bar{\psi} \psi \right\} \quad (1.32) \end{aligned}$$

As equações de campo são obtidas, como sempre, igualando a zero as variações da ação com respeito aos campos físicos dos quais ela depende. Como $\mathcal{L}_g = -\frac{1}{2\kappa}R$ não depende explicitamente dos campos de matéria, as equações que resultam de $\delta S/\delta\psi = 0$ e $\delta S/\delta\bar{\psi} = 0$ são independentes das demais e serão obtidas na próxima seção.

Variando (1.32) com respeito à métrica $g^{\mu\nu}$ da variedade, resulta

$$\frac{1}{2\kappa} \frac{\delta(eR)}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\delta(e\mathcal{L})}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (1.33)$$

ou, tendo em vista a definição do tensor de momento-energia dinâmico,

$$\frac{1}{e} \frac{\delta(eR)}{\delta g^{\mu\nu}} = \kappa t_{\mu\nu} \quad (1.34)$$

Da mesma forma, variação com respeito à contorção implica

$$\frac{1}{2\kappa} \frac{\delta(eR)}{\delta K_{\mu\nu}^\lambda} = \frac{\delta(e\mathcal{L})}{\delta K_{\mu\nu}^\lambda} = e\tau_\lambda^{\nu\mu}$$

O cálculo das variações indicadas conduz a ⁴

$$G_{\mu\nu} - \overset{\star}{\nabla}_\lambda (T_{\mu\nu}^\lambda - T_\nu^\lambda{}_\mu + T^\lambda_{\mu\nu}) = \kappa t_{\mu\nu} \quad (1.35)$$

e

$$T^{\mu\nu\lambda} = -\kappa \tau^{\mu\nu\lambda} \quad (1.36)$$

Definindo

$$\Sigma_{\mu\nu} = t_{\mu\nu} - \overset{\star}{\nabla}_\lambda (\tau_{\mu\nu}^\lambda - \tau_\nu^\lambda{}_\mu + \tau^\lambda_{\mu\nu}), \quad (1.37)$$

a equação (1.35) pode ser reescrita como

$$G_{\mu\nu} = \kappa \Sigma_{\mu\nu}$$

Veremos mais tarde o significado físico a ser atribuído ao tensor $\Sigma_{\mu\nu}$, que geralmente é assimétrico:

$$\Sigma_{[\mu\nu]} = \kappa^{-1} G_{[\mu\nu]} = - \overset{\star}{\nabla}_\lambda \tau_{\mu\nu}^\lambda$$

A relação (1.36) indica que, na teoria de Einstein-Cartan, torção e spin são, a menos de uma constante, sinônimos. Esta situação pode mudar, entretanto, quando outros tipos de acoplamento entre o campo material e o campo gravitacional de fundo são permitidos—*é possível então ter torção sem spin*. A referência [16] ilustra um caso onde, devido a um acoplamento do tipo $R\phi^2$ entre o campo gravitacional de fundo e o campo escalar massivo ϕ , resulta uma torção não nula, embora o campo ϕ seja ele próprio destituído de spin.

⁴Ver Apêndice B.

A relação (1.33), mais adequada para o caso de campos de matéria tensoriais, pode ser facilmente adaptada para o caso de matéria spinorial. Nesse caso geralmente escrevemos a Lagrangeana como função das tetradas ao invés da métrica $g^{\mu\nu}$. Entretanto, da relação (1.3), decorre que

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial e^a_\alpha} = 2e_{a[\mu} \delta_{\nu]}^\alpha,$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\delta(e\mathcal{L})}{\delta e^a_\alpha} &= \frac{\delta(e\mathcal{L})}{\delta g_{\mu\nu}} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial e^a_\alpha} = 2 \frac{\delta(e\mathcal{L})}{\delta g_{\mu\nu}} e_{a[\mu} \delta_{\nu]}^\alpha \\ &= -e t^{\mu\nu} e_{a[\mu} \delta_{\nu]}^\alpha, \end{aligned}$$

de modo que

$$e^a_\beta \frac{\delta(e\mathcal{L})}{\delta e^a_\alpha} = -e e^a_\beta e_{a[\mu} \delta_{\nu]}^\alpha t^{\mu\nu} = -e t_\beta^\alpha$$

A definição do tensor de momento-energia pode ser então generalizada para campos spinoriais como

$$t^{\mu\nu} = -\frac{1}{e} e^{a\mu} \frac{\delta(e\mathcal{L})}{\delta e^a_\nu} \quad (1.38)$$

Analogamente

$$t_{\mu\nu} = \frac{1}{e} e_{a\mu} \frac{\delta(e\mathcal{L})}{\delta e^a_\nu} \quad (1.39)$$

Com estas definições a equação de campo (1.34) fica inalterada. Ainda, embora as expressões (1.38) e (1.39) não sejam explicitamente simétricas nos índices μ e ν , esta simetria é garantida pela invariância da ação sob rotação de tetradas (transformações locais de Lorentz) [4,6].

Tensores de Spin e Energia-Momento para o Campo de Dirac podem ser obtidos diretamente e sem dificuldades das respectivas definições. De (1.27), calculamos

$$\tau^{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{e} \frac{\delta(e\mathcal{L})}{\delta K_{\lambda\nu\mu}} = \frac{1}{e} \frac{\delta}{K_{\lambda\nu\mu}} \left\{ \frac{i}{4} e K_{\alpha\beta\gamma} \bar{\psi} \gamma^{[\alpha} \gamma^\beta \gamma^{\gamma]} \psi \right\}$$

$$= \frac{i}{4} \bar{\psi} \gamma^{[\lambda} \gamma^\nu \gamma^{\mu]} \psi,$$

de modo que

$$\tau^{\mu\nu\lambda} = -\frac{i}{4} \bar{\psi} \gamma^{[\mu} \gamma^\nu \gamma^{\lambda]} \psi \quad (1.40)$$

Em vista de (1.40) a equação de campo (1.36) fornece

$$K^{\mu\nu\lambda} = i \frac{\kappa}{4} \bar{\psi} \gamma^{[\mu} \gamma^\nu \gamma^{\lambda]} \psi = K^{[\mu\nu\lambda]} \quad (1.41)$$

Vemos que, tal como na Relatividade Restrita, o spin associado ao campo de Dirac é totalmente antissimétrico. Devido a este fato, uma partícula de Dirac não se acopla completamente à parte não riemanniana da conexão, mas apenas à sua parte totalmente antissimétrica.⁵ Esta é a razão de obtermos um resultado incorreto para a equação de Dirac em espaços de Riemann-Cartan se tomarmos simplesmente a equação (1.1) e substituirmos as derivadas comuns por derivadas covariantes—isto levaria, entretanto, a um resultado correto na Relatividade Geral, onde a partícula se acopla totalmente à geometria de fundo.

Para o tensor de energia-momento, podemos usar a forma (1.23) da ação, obtendo

$$\frac{\delta(e\mathcal{L})}{\delta e_a{}^\mu} = \frac{i}{2} e (\bar{\psi} \gamma^a \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \bar{\psi} \gamma^a \psi) + \mathcal{L} \frac{\delta e}{\delta e_a{}^\mu}$$

Por outro lado, sabemos que [9]

$$\delta e = -\frac{1}{2} e g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu},$$

donde, de (1.3)

$$\begin{aligned} \delta e &= -\frac{1}{2} e g_{\mu\nu} (e_a{}^\mu \delta e^{a\nu} + e^{a\nu} \delta e_a{}^\mu) \\ &= -\frac{1}{2} e (e_{a\nu} \delta e^{a\nu} + e^a{}_\mu \delta e_a{}^\mu) = -e e^a{}_\mu \delta e_a{}^\mu, \end{aligned}$$

⁵A torção pode ser decomposta de forma irredutível na sua parte totalmente antissimétrica, na torção modificada e no vetor de torção—ver Ref. [4].

de modo que

$$\frac{\delta e}{\delta e_a^\mu} = -e e_a^\mu$$

Portanto, resulta para $t_{\mu\nu}$:

$$t_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\bar{\psi} \gamma_{(\nu} \nabla_{\mu)} \psi - \nabla_{(\mu} \bar{\psi} \gamma_{\nu)}] - g_{\mu\nu} \mathcal{L}$$

1.4.4 Equação de Movimento para os Spinors

Estamos agora, finalmente, aptos a deduzir as equações de campo para os spinors de Dirac num espaço-tempo curvo e dotado de torção. Impondo $\delta(e\mathcal{L})/\delta\bar{\psi} = 0$, obtemos a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial(e\mathcal{L})}{\partial\bar{\psi}} - \partial_\mu \frac{\partial(e\mathcal{L})}{\partial\partial_\mu\bar{\psi}} = 0$$

De (1.28) é imediato que

$$\begin{aligned} \frac{\partial(e\mathcal{L})}{\partial\bar{\psi}} &= e \left\{ \frac{i}{2} \gamma^a \partial_a \psi + \frac{i}{4} \omega_{abc} \gamma^{[a} \gamma^b \gamma^{c]} \psi - m \psi \right\} \\ \partial_\mu \left(\frac{\partial(e\mathcal{L})}{\partial\partial_\mu\bar{\psi}} \right) &= -\partial_\mu \left(\frac{i}{2} e \gamma^a e_a^\mu \psi \right) = -\frac{i}{2} \gamma^a \partial_\mu (e e_a^\mu) \psi - \frac{i}{2} e \gamma^a \partial_a \psi \end{aligned}$$

Usando (1.31), as equações acima fornecem

$$i\gamma^a \partial_a \psi + \frac{i}{4} \omega_{abc} \gamma^{[a} \gamma^b \gamma^{c]} \psi - \frac{i}{2} \gamma^a \gamma_{ba}^b \psi - m\psi = 0$$

Com (1.20) isso fica

$$i\gamma^a \nabla_a \psi + \frac{i}{4} \omega_{abc} \underbrace{(\gamma^{[a} \gamma^b \gamma^{c]} - \gamma^a \gamma^{[b} \gamma^{c]})}_{-2\eta^{a[b} \gamma^{c]}, \text{ eq.(1.26)}} \psi - \frac{i}{2} \gamma^a \gamma_{ba}^b \psi - m\psi = 0,$$

isto é,

$$\begin{aligned} i\gamma^a \nabla_a \psi - \frac{i}{2} \omega_a^a{}^c \gamma^c \psi - \frac{i}{2} \gamma^a \gamma_{ba}^b \psi - m\psi &= 0 \\ i\gamma^a \nabla_a \psi + \frac{i}{2} (\omega_{ba}^b - \gamma_{ba}^b) \gamma^a \psi - m\psi &= 0 \end{aligned}$$

ou, finalmente,

$$i\gamma^a \left(\nabla_a \psi + \frac{1}{2} K_{ba}{}^b \psi \right) - m\psi = 0 \quad (1.42)$$

que é a equação satisfeita por um spinor de Dirac num espaço-tempo de Riemann-Cartan. Um cálculo análogo para o spinor adjunto conduz a

$$i \left(\nabla_a \bar{\psi} + \frac{1}{2} K_{ba}{}^b \bar{\psi} \right) \gamma^a + m\bar{\psi} = 0$$

Podemos ainda escrever estas equações em termos da parte riemanniana da derivada covariante. Basta usar (1.21) e (1.26):

$$\begin{aligned} i \left(\gamma^a \overset{\{ \}}{\nabla}_a \psi + \frac{1}{4} K_{abc} \gamma^a \gamma^{[b} \gamma^{c]} + \frac{1}{2} K_{ac}{}^a \gamma^c \psi \right) - m\psi &= 0 \\ i \left(\gamma^a \overset{\{ \}}{\nabla}_a \psi - \frac{1}{4} K_{acb} \gamma^a \gamma^{[b} \gamma^{c]} + \frac{1}{2} K_{acb} \eta^{a[b} \gamma^{c]} \psi \right) - m\psi &= 0 \\ i \left\{ \gamma^a \overset{\{ \}}{\nabla}_a \psi - \frac{1}{4} K_{acb} \left(\gamma^a \gamma^{[b} \gamma^{c]} - 2\eta^{a[b} \gamma^{c]} \right) \psi \right\} - m\psi &= 0 \end{aligned}$$

ou seja

$$i \left(\gamma^a \overset{\{ \}}{\nabla}_a \psi + \frac{1}{4} K_{abc} \gamma^{[a} \gamma^b \gamma^{c]} \psi \right) - m\psi = 0 \quad (1.43)$$

Estas equações se simplificam ainda mais com o uso de (1.40) e (1.41). Primeiramente, como a contorção é totalmente antissimétrica, temos

$$K_{\lambda\mu}{}^\lambda = K_{ba}{}^b = 0,$$

o que possibilita reescrever (1.42) como

$$i\gamma^a e_a{}^\mu \nabla_\mu \psi - m\psi = 0$$

Por outro lado, (1.43) fica

$$i\gamma^a \overset{\{ \}}{\nabla}_a \psi - \frac{\kappa}{16} \bar{\psi} \gamma_{[a} \gamma_b \gamma_{c]} \psi \gamma^{[a} \gamma^b \gamma^{c]} \psi - m\psi = 0 \quad (1.44)$$

Usando a identidade⁶

$$\frac{1}{3!}\varepsilon^{abcd}\gamma_b\gamma_c\gamma_d = i\gamma_5\gamma^a \quad (1.45)$$

é fácil obter que

$$\gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma^{[a}\gamma^b\gamma^{c]} = 6(\gamma_5\gamma_a)(\gamma_5\gamma^a),$$

de modo que (1.44) se torna

$$i\gamma^a\nabla_a\psi - \frac{3}{8}\kappa\bar{\psi}\gamma_5\gamma_a\psi\gamma_5\gamma^a\psi - m\psi = 0$$

Formas análogas destas equações podem ser obtidas para o spinor adjunto.

⁶Ver Apêndice A

Capítulo 2

O Comportamento do Spin

Neste capítulo analisaremos o acoplamento do spin de partículas de Dirac com o campo gravitacional externo, bem como o movimento do spin e sua influência sobre a trajetória da partícula. Em alguns casos consideraremos também a presença de um campo eletromagnético externo além do gravitacional. A título de completeza e também com fins de comparação de resultados, iniciaremos revendo a interação dos férmions com o campo eletromagnético em um espaço-tempo de Minkowski.

2.1 Acoplamento spin-geometria de fundo

2.1.1 Acoplamento spin- campo eletromagnético em R_4

A geometria de fundo é caracterizada pela ausência de torção e métrica dada por

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag} (+1, -1, -1, -1) \quad (2.1)$$

A escolha óbvia das tetradas é

$$e_a^\mu = \delta_a^\mu, \quad (2.2)$$

e temos ainda que

$$\partial_\mu \gamma^\nu = 0.$$

A equação de Dirac na presença de campo eletromagnético, obtida de acordo com o procedimento padrão de substituição minimal ¹

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + i(e/\hbar)A_\mu, \quad (2.3)$$

é simplesmente

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - eA_\mu \gamma^\mu \psi - m\psi = 0$$

Aplicando à esquerda desta equação o operador $(i\partial - eA + m)$, temos

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - eA_\mu \gamma^\mu + m)(i\gamma^\nu \partial_\nu \psi - eA_\nu \gamma^\nu \psi - m\psi) = 0,$$

donde obtemos a equação de segunda ordem satisfeita pelos férmions:

$$(\partial_\mu + ieA_\mu)(\partial^\mu + ieA^\mu)\psi + m^2\psi + \frac{e}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\psi = 0$$

Notamos que o termo de Pauli

$$\frac{e}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\psi = (i\vec{\alpha} \cdot \vec{E} + \vec{\sigma} \cdot \vec{B})\psi$$

(na representação usual), aparece naturalmente e é o único termo dependente do spin.

¹Aqui e representa a carga do férmion; para o elétron, por exemplo, $e < 0$.

2.1.2 Acoplamento spin-campo de fundo na Relatividade Geral

Na Relatividade Geral a equação de Dirac na presença de campo eletromagnético fica

$$i\gamma^\mu \nabla_\mu \psi - eA_\mu \gamma^\mu \psi - m\psi = 0$$

Aplicando à esquerda desta equação o operador $(i\gamma^\mu \nabla_\mu - eA_\mu \gamma^\mu + m)$, temos

$$(i\gamma^\mu \nabla_\mu - eA_\mu \gamma^\mu + m)(i\gamma^\nu \nabla_\nu \psi - eA_\nu \gamma^\nu \psi - m\psi) = 0,$$

ou

$$\begin{aligned} & -\gamma^\mu \gamma^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu \psi - ie\gamma^\mu \nabla_\mu (A_\nu \gamma^\nu \psi) - ieA_\mu \gamma^\mu \gamma^\nu \nabla_\nu \psi + e^2 A_\mu A_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu \psi \\ & -im\gamma^\mu \nabla_\mu \psi + em\gamma^\mu A_\mu \psi + im\gamma^\mu \nabla_\mu \psi - em\gamma^\mu A_\mu \psi - m^2 \psi = 0 \end{aligned}$$

Levando em conta que

$$\gamma^{(\mu} \gamma^{\nu)} = g^{\mu\nu}$$

e a definição de $\sigma^{\mu\nu}$, o termo $\gamma^\mu \gamma^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu \psi$ se desenvolve da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu \psi &= (\gamma^{(\mu} \gamma^{\nu)} + \gamma^{[\mu} \gamma^{\nu]}) \nabla_\mu \nabla_\nu \psi = \square \psi - i\sigma^{\mu\nu} \nabla_{[\mu} \nabla_{\nu]} \psi \\ &= \square \psi - i\sigma^{\mu\nu} \frac{1}{8i} R_{\mu\nu\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta} \psi, \end{aligned}$$

onde

$$\square \psi = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \psi.$$

Notando ainda que

$$\nabla_{[\mu} A_{\nu]} = \partial_{[\mu} A_{\nu]} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu},$$

chegamos finalmente a

$$(\nabla_\mu + ieA_\mu)(\nabla^\mu + ieA^\mu)\psi + m^2\psi + \frac{e}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\psi - \frac{1}{8}R_{\mu\nu\alpha\beta}\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\alpha\beta}\psi = 0$$

Observamos, além do termo de Pauli, que representa o acoplamento do spin com o campo eletromagnético, o surgimento de um novo termo dependente do spin, $\frac{1}{8}R_{\mu\nu\alpha\beta}\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\alpha\beta}$, que representa um acoplamento do spin com o campo gravitacional de fundo (note que este termo *não desaparece* no referencial localmente geodésico). Usando as propriedades algébricas do tensor de Riemann, podemos simplificá-lo como se segue:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\alpha\beta}\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\alpha\beta} &= -R_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^{[\mu}\gamma^{\nu]}\gamma^{[\alpha}\gamma^{\beta]} = -R_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta \\ &= R_{\mu\nu\alpha\beta}\left(\gamma^{(\mu}\gamma^\nu\gamma^\alpha) + \gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^{\alpha]}\right)\gamma^\beta \\ &= \underbrace{R_{(\mu\nu\alpha)\beta}}_{=0}\gamma^{(\mu}\gamma^\nu\gamma^\alpha)\gamma^\beta + R_{\mu\nu\alpha\beta}(g^{\mu\nu}\gamma^\alpha + g^{\nu\alpha}\gamma^\mu - g^{\alpha\mu}\gamma^\nu)\gamma^\beta \\ &= 0 + R_{\mu\beta}\gamma^\mu\gamma^\beta + R_{\nu\beta}\gamma^\nu\gamma^\beta = 2R_{\mu\nu}\gamma^{(\mu}\gamma^{\nu)} = 2R \end{aligned}$$

Com isso, resulta que o efeito do acoplamento do spin com o campo gravitacional de fundo se resume na alteração da massa efetiva do férmion [20]:

$$(\nabla_\mu + ieA_\mu)(\nabla^\mu + ieA^\mu)\psi + \frac{e}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\psi + (m^2 - R/4)\psi = 0$$

2.1.3 Acoplamento spin-campo de fundo em espaços com torção

Vejamos agora como se altera esse quadro quando permitimos à variedade de fundo a estrutura mais rica de um espaço de Riemann-Cartan. Ao invés de partirmos da equação de Dirac (1.23), vamos escrevê-la numa forma alternativa, fazendo uso do vetor de torção a^μ , definido como o vetor axial associado

à parte totalmente antissimétrica da contorção:

$$a^\mu = \frac{1}{3!} \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} K_{\nu\rho\lambda}$$

Multiplicando ambos os membros por $\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}$ obtemos

$$a^\mu \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{3!} \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} K_{\nu\rho\lambda}$$

donde

$$K_{[\alpha\beta\gamma]} = -\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} a^\mu \quad (2.4)$$

Assim,

$$\frac{i}{4} K_{[\mu\nu\lambda]} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda = -\frac{i}{4} a^\mu \epsilon_{\alpha\beta\gamma\mu} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma$$

Como (ver equação (1.45))

$$\frac{1}{3!} \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\lambda = i \gamma_5 \gamma^\mu,$$

resulta finalmente que

$$\frac{i}{4} K_{\mu\nu\lambda} \gamma^{[\mu} \gamma^\nu \gamma^{\lambda]} = \frac{3}{2} a_\mu \gamma_5 \gamma^\mu$$

Com isso, a equação de Dirac (1.23) pode ser escrita na forma

$$i\gamma^\mu \psi_{;\mu} - e A_\mu \gamma^\mu \psi + \frac{3}{2} a_\mu \gamma_5 \gamma^\mu \psi - m\psi = 0 \quad (2.5)$$

Multiplicando essa equação pela esquerda pelo operador $i\gamma^\mu \nabla_\mu - e A_\mu \gamma^\mu - \frac{3}{2} a_\mu \gamma_5 \gamma^\mu + m$, obtemos desta feita

$$\begin{aligned} & -\gamma^\mu \gamma^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu \psi - ie \gamma^\mu \gamma^\nu \nabla_\mu A_\nu \psi - ie \gamma^\mu \gamma^\nu A_\nu \nabla_\mu \psi + \frac{3}{2} i \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5 \nabla_\mu (a_\nu \psi) \\ & - ie \gamma^\mu \gamma^\nu A_\mu \nabla_\nu \psi + e^2 A_\mu A^\mu \psi - \frac{3}{2} e \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5 a_\nu A_\mu \psi - \frac{3}{2} i \gamma^\mu \gamma_5 \gamma^\nu a_\mu \nabla_\nu \psi \\ & + \frac{3}{2} e \gamma^\mu \gamma_5 \gamma^\nu a_\mu A_\nu \psi - \frac{9}{4} a_\mu a_\nu \gamma^\mu \gamma_5 \gamma^\nu \gamma_5 \psi + \frac{3}{2} m a_\mu \gamma^\mu \gamma_5 \psi \\ & + \frac{3}{2} m a_\nu \gamma^\nu \gamma_5 \psi - m^2 \psi = 0, \end{aligned}$$

onde alguns termos já foram simplificados. Separando os termos que envolvem o vetor axial de torção, esta expressão fica

$$\begin{aligned} & (\nabla_\mu + ieA_\mu)(\nabla^\mu + ieA^\mu)\psi + \frac{e}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\psi + (m^2 - R(\{\})/4)\psi \\ & - \frac{3}{2}i\gamma^\mu\gamma^\nu\nabla_\mu a_\nu\psi - \frac{3}{2}i\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_5 2a_{(\nu}\nabla_{\mu)}\psi + \frac{3}{2}e\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_5 2a_{(\nu}A_{\mu)}\psi \\ & - \frac{9}{4}a^2\psi - 3ma_\mu\gamma^\mu\gamma_5\psi = 0 \end{aligned}$$

Usando novamente a relação $\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu}$, temos finalmente:

$$\begin{aligned} & (\nabla_\mu + ieA_\mu + \frac{3}{2}i\gamma_5 a_\mu)(\nabla^\mu + ieA^\mu + \frac{3}{2}i\gamma_5 a^\mu)\psi \\ & + \frac{e}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\psi + (m^2 - R(\{\})/4)\psi - 3i\nabla_\mu a^\mu\psi - 6i\gamma_5 a^\mu\nabla_\mu\psi \\ & - \frac{3}{2}\sigma^{\mu\nu}\nabla_\mu a_\nu\psi - 3ma_\mu\gamma^\mu\gamma_5\psi = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

É interessante notar nesta expressão, além dos novos termos de interação entre o spin e a torção de fundo, que torção e campo eletromagnético não se misturam, isto é, não há termo de interação envolvendo o spin, a torção e o campo eletromagnético.

2.2 Aproximação não relativística

A fim de entendermos melhor o que é e como é a interação do spin com a torção de fundo, vamos examinar equação de Dirac na aproximação não relativística em espaços de Riemann-Cartan onde a métrica é aproximada pela de Minkowski. Esta aproximação adicional, além de simplificar os cálculos, põe em evidência os efeitos introduzidos pela torção. Com isso são válidas, pelo menos aproximadamente, as equações (2.1) e (2.2); a distinção entre as matrizes gama do espaço tangente e as do espaço curvo já não existe mais—

denotaremos em geral uma matriz gama por γ^a , $a = 0, \dots, 3$, mas deixaremos de escrever os parêntesis envolvendo os índices quando nos referirmos a uma matriz em particular. A derivada covariante de V_4 , ∇_μ , se torna a derivada comum ∂_μ , tanto para tensores como para spinores. Assim, a equação de Dirac na forma (2.5) fica

$$i\gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\gamma^{\hat{a}} \partial_{\hat{a}} \psi - e\gamma^0 A_0 \psi - e\gamma^{\hat{a}} A_{\hat{a}} \psi + \frac{3}{2}a_0 \gamma_5 \gamma^0 \psi + \frac{3}{2}a_{\hat{a}} \gamma_5 \gamma^{\hat{a}} \psi - m\psi = 0$$

Multiplicando por $\gamma^0 \equiv \beta$ à esquerda, temos

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\alpha^{\hat{a}} \partial_{\hat{a}} \psi + eA_0 \psi + m\beta \psi + e\alpha^{\hat{a}} A_{\hat{a}} \psi + \frac{3}{2}\gamma_5(a_0 + a_{\hat{a}}\alpha^{\hat{a}})\psi, \quad (2.7)$$

onde

$$\alpha^{\hat{a}} = \beta \gamma^{\hat{a}}$$

Escrevamos agora o spinor ψ na forma

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-imt}.$$

Daí decorre que

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \begin{pmatrix} \partial \phi / \partial t \\ \partial \chi / \partial t \end{pmatrix} e^{-imt} - im \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-imt}$$

e

$$\partial_{\hat{a}} \psi = \begin{pmatrix} \partial \phi / \partial x^{\hat{a}} \\ \partial \chi / \partial x^{\hat{a}} \end{pmatrix} e^{-imt}$$

Na representação de Pauli-Dirac, a matriz γ_5 tal como definida no Apêndice A tem suas componentes dadas por

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

onde I representa a matriz identidade 2×2 . Denotando por $\sigma^{\hat{a}}$ as matrizes de Pauli 2×2 , as operações matriciais indicadas na equação (2.7) produzem, explicitamente:

$$\gamma_5 \psi = \begin{pmatrix} -\chi \\ -\phi \end{pmatrix}$$

$$\alpha^{\hat{a}} \partial_{\hat{a}} \psi = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\hat{a}} \\ \sigma^{\hat{a}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{\hat{a}} \phi \\ \partial_{\hat{a}} \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^{\hat{a}} \partial_{\hat{a}} \chi \\ \sigma^{\hat{a}} \partial_{\hat{a}} \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \chi \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \phi \end{pmatrix}$$

$$\gamma_5 \alpha^{\hat{a}} \psi = \begin{pmatrix} -\sigma^{\hat{a}} & 0 \\ 0 & -\sigma^{\hat{a}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma^{\hat{a}} \phi \\ -\sigma^{\hat{a}} \chi \end{pmatrix}$$

Com tudo isso, (2.7) fornece as seguintes equações:

$$i \frac{\partial \phi}{\partial t} = -i \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \chi - e \vec{\sigma} \cdot \vec{A} \chi + \frac{3}{2} \vec{a} \cdot \vec{\sigma} \phi + e A_0 \phi - \frac{3}{2} a_0 \chi \quad (2.8)$$

$$i \frac{\partial \chi}{\partial t} = i \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \phi - e \vec{\sigma} \cdot \vec{A} \phi + \frac{3}{2} \vec{a} \cdot \vec{\sigma} \chi + e A_0 \chi - \frac{3}{2} a_0 \phi - 2m \chi \quad (2.9)$$

Na aproximação não relativística o termo cinético e o potencial eletromagnético podem ser desprezados em face a mc^2 . Logo, (2.9) pode ser escrita como

$$2m \chi \simeq -i \vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} - ie \vec{A}) \phi - \frac{3}{2} a_0 \phi,$$

ou seja

$$\chi = \frac{1}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \phi - \frac{3}{4m} a_0 \phi,$$

onde

$$\vec{\pi} \equiv \vec{p} - e \vec{A} = -i(\vec{\nabla} - ie \vec{A})$$

Desse modo, podemos reescrever (2.8) como

$$i \frac{\partial \phi}{\partial t} = H \phi,$$

com

$$H = \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{2m} + eA_0 - \frac{3}{2m}a_0(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) + \frac{3}{2}\vec{a} \cdot \vec{\sigma} + \frac{9}{8m}a_0^2$$

O termo $(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2$ pode ser desenvolvido como de costume, fornecendo o valor clássico correto para o fator giromagnético do elétron:

$$\frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{2m} = \frac{\pi^2}{2m} - \frac{e}{2m}\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$$

2.3 Propagação do spin

Vamos agora obter uma equação de propagação para o vetor de spin de partículas de Dirac num espaço-tempo genérico com torção. Para isso, faremos uso de uma expansão tipo WKB na equação de segunda ordem (tipo Klein-Gordon) para o elétron descrito por spinores a duas componentes [17]. Para obtermos esta formulação, introduzimos o spinor Φ através da seguinte expressão:²

$$\psi = \frac{1}{m} \left[i\hbar\gamma^\mu \left(\nabla_\mu + Q_\mu + i\frac{e}{\hbar}A_\mu \right) + m \right] \Phi, \quad (2.10)$$

onde Q_μ denota a parte vetorial do tensor de torção $S_{\mu\nu}{}^\lambda$:

$$Q_\mu = S_{\mu\lambda}{}^\lambda = \frac{1}{2}K_{\lambda\mu}{}^\lambda$$

A equação de Dirac para Φ fica

$$[i\hbar\gamma^a(\nabla_a + Q_a) - e\gamma^a A_a - m] [i\hbar\gamma^b(\nabla_b + Q_b) - e\gamma^b A_b + m] \Phi = 0 \quad (2.11)$$

Nesta equação podemos eliminar todos os produtos de matrizes gama em favor de $g_{\mu\nu}$ e $\sigma_{\mu\nu}$; como γ_5 comuta com $\sigma_{\mu\nu}$, sempre existirão soluções de (2.11) que são também soluções de

$$\gamma_5 \Phi = \pm \Phi$$

²Nesta seção escreveremos explicitamente todos os $\hbar$.

É portanto sempre possível escolhermos soluções de (2.11) que satisfaçam

$$(1 - \gamma_5)\Phi = 0$$

Com isto, para cada ψ há um único Φ satisfazendo (2.10) e (2.11). De fato, multiplicando (2.10) por $(1 + \gamma_5)$, vem³

$$(1 + \gamma_5)\psi = \frac{1}{m} \left\{ i\hbar\gamma^\mu \left(\nabla_\mu + Q_\mu + i\frac{e}{\hbar}A_\mu \right) (1 - \gamma_5)\Phi + m(1 + \gamma_5)\Phi \right\} = 2\Phi,$$

donde

$$\Phi = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi$$

Escrevendo

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix},$$

temos então

$$\Phi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta \\ -\zeta \end{pmatrix},$$

com $\zeta = \frac{1}{2}(\phi - \chi)$. Isso demonstra que Φ possui apenas duas componentes independentes; portanto, as equações (1.23) para ψ e (2.11) para Φ são equivalentes em termos de informações.

Procuramos então uma solução semiclássica para Φ da seguinte forma:

$$\Phi = e^{iS/\hbar}\Phi_0, \quad (2.12)$$

admitindo que $|S| \gg \hbar$, $S \in \mathbb{R}$.

Substituindo (2.12) em (2.11), temos

$$\begin{aligned} & [i\hbar\gamma^\mu(\nabla_\mu + Q_\mu) - e\gamma^\mu A_\mu - m] \\ & \times \left[i\hbar\gamma^\nu \left(e^{iS/\hbar}\nabla_\nu\Phi_0 + \frac{i}{\hbar}\partial_\nu S e^{iS/\hbar}\Phi_0 + Q_\nu e^{iS/\hbar}\Phi_0 \right) \right. \\ & \left. - e e^{iS/\hbar}\gamma^\nu A_\nu\Phi_0 + m e^{iS/\hbar}\Phi_0 \right] = 0 \end{aligned}$$

³Lembre-se que $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$, $\forall \mu$.

ou

$$[i\hbar\gamma^\mu(\nabla_\mu + Q_\mu) - e\gamma^\mu A_\mu - m] \\ \times \left\{ e^{iS/\hbar} [i\hbar\gamma^\nu(\nabla_\nu + Q_\nu)\Phi_0 + m\Phi_0 - \gamma^\nu(\partial_\nu S + eA_\nu)\Phi_0] \right\} = 0$$

Desenvolvendo e simplificando, obtemos

$$-\gamma^\mu\partial_\mu S [i\hbar\gamma^\nu(\nabla_\nu + Q_\nu) + m - \gamma^\nu(\partial_\nu S + eA_\nu)] \Phi_0 \\ + i\hbar\gamma^\mu \{ \gamma^\nu [\hbar\nabla_\mu(\nabla_\nu + Q_\nu) - \nabla_\mu(\partial_\nu S + eA_\nu) - (\partial_\nu S + eA_\nu)\nabla_\mu] + m\nabla_\mu \} \Phi_0 \\ + (i\hbar\gamma^\mu Q_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m) \\ \times \{ i\hbar\gamma^\nu(\nabla_\nu + Q_\nu) + [m - \gamma^\nu(\partial_\nu S + eA_\nu)] \} \Phi_0 = 0$$

Igualando a zero cada ordem de $\hbar$, resulta:

- Ordem zero ($\hbar^0$):

$$[g^{\mu\nu}(\partial_\mu S + eA_\mu)(\partial_\nu S + eA_\nu) - m^2]\Phi_0 = 0$$

Devemos ter então:

$$g^{\mu\nu}(\partial_\mu S + eA_\mu)(\partial_\nu S + eA_\nu) - m^2 = 0, \quad (2.13)$$

que é a equação de Hamilton-Jacobi para uma partícula relativística sem spin. Notamos, como era de se esperar, a correspondência

$$\pi_\mu = mu_\mu = p_\mu - eA_\mu = -\partial_\mu S - eA_\mu \quad (2.14)$$

- Primeira ordem ($\hbar^1$):

$$-i\gamma^\mu\gamma^\nu \left\{ (\partial_\mu S + eA_\mu)(\nabla_\nu + Q_\nu) + \nabla_\mu(\partial_\nu S + eA_\nu) \right. \\ \left. + (\partial_\nu S + eA_\nu)\nabla_\mu + Q_\mu(\partial_\nu S + eA_\nu) \right\} \Phi_0 = 0$$

ou, com (2.14),

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \{u_\mu (\nabla_\nu + Q_\nu) + \nabla_\mu u_\nu + u_\nu \nabla_\mu + Q_\mu u_\nu\} \Phi_0 = 0$$

Usando agora $\gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu}$, obtemos

$$[2u^\mu \nabla_\mu + 2u^\mu Q_\mu - i\sigma^{\mu\nu} \nabla_{[\mu} u_{\nu]} + u^\mu {}_{||\mu}] \Phi_0 = 0 \quad (2.15)$$

É interessante escrever (2.15) em termos de derivadas covariantes de V_4 . Isto pode ser feito usando as relações conhecidas do Capítulo 1: para spinores, temos

$$\nabla_\nu \Phi_0 = \partial_\nu \Phi_0 + \frac{1}{4} \omega_{\nu ab} \gamma^{[a} \gamma^{b]} \Phi_0 = \Phi_{0;\nu} + \frac{1}{4} K_{\nu ab} \gamma^{[a} \gamma^{b]} \Phi_0;$$

para vetores covariantes,

$$\nabla_\mu u_\nu = \partial_\mu u_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda u_\lambda = \nabla_\mu u_\nu + K_{\mu\nu}^\lambda u_\lambda,$$

e finalmente para a divergência:

$$\nabla_\mu u^\mu = \partial_\mu u^\mu + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu u^\lambda = \nabla_\mu u^\mu - K_{\mu\lambda}^\mu u^\lambda = u^\mu{}_{;\mu} - 2Q_\mu u^\mu$$

Substituindo em (2.15) e simplificando, obtemos

$$2u^\mu \Phi_{0;\mu} + u^\mu{}_{;\mu} \Phi_0 + \frac{1}{2} u^\mu K_{\mu ab} \gamma^a \gamma^b \Phi_0 - i\sigma^{\mu\nu} \nabla_{[\mu} u_{\nu]} - i\sigma^{\mu\nu} K_{\mu\nu}^\lambda u_\lambda \Phi_0 = 0 \quad (2.16)$$

Mas, de (2.14),

$$\begin{aligned} \nabla_{[\mu} u_{\nu]} &= -\frac{1}{2m} [(\partial_\nu S)_{;\mu} - (\partial_\mu S)_{;\nu} + e(A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu})] \\ &= -\frac{e}{2m} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = -\frac{e}{2m} F_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

pois $\nabla_\mu (\partial_\nu S) = \nabla_\nu (\partial_\mu S)$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} K_{\mu\alpha\beta} \gamma^{[\alpha} \gamma^{\beta]} - K_{\alpha\beta\mu} \gamma^\alpha \gamma^\beta \\
&= -\frac{i}{2} K_{\mu\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta} - i K_{[\alpha\beta]\mu} \sigma^{\alpha\beta} = -\frac{i}{2} (K_{\mu\alpha\beta} + K_{\alpha\beta\mu} \underbrace{-K_{\beta\alpha\mu}}_{+K_{\beta\mu\alpha}}) \sigma^{\alpha\beta} \\
&= -\frac{3}{2} i K_{[\mu\alpha\beta]} \sigma^{\alpha\beta} = \frac{3}{2} i \epsilon_{\nu\mu\alpha\beta} a^\nu \sigma^{\alpha\beta},
\end{aligned}$$

onde se fez uso de (2.4). Com isso, (2.16) fica

$$\left(2u^\mu \nabla_\mu + u^\mu{}_{;\mu} - \frac{3}{2} i \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} u^\mu a^\nu \sigma^{\alpha\beta} + i \frac{e}{2m} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \Phi_0 = 0 \quad (2.17)$$

Conhecida a solução para Φ_0 , podemos determinar a expressão semiclássica para a função de onda do spinor de Dirac através de (2.10). Definindo

$$\psi = e^{iS/\hbar} \psi_0,$$

temos

$$\begin{aligned}
e^{iS/\hbar} \psi_0 &= \frac{1}{m} [m + i\hbar \gamma^\mu (\nabla_\mu + Q_\mu) - e\gamma^\mu A_\mu] (e^{iS/\hbar} \Phi_0) \\
&= \frac{e^{iS/\hbar}}{m} [m - \gamma^\mu \partial_\mu S - e\gamma^\mu A_\mu + i\hbar \gamma^\mu (\nabla_\mu + Q_\mu)] \Phi_0,
\end{aligned}$$

donde, até primeira ordem de $\hbar$:

$$\psi_0 = (1 + \gamma^\mu u_\mu) \Phi_0 \quad (2.18)$$

A corrente $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ toma a forma

$$j^\mu = \Phi_0^\dagger (1 + \gamma^\alpha{}^\dagger u_\alpha) \gamma^{(0)} \gamma^\mu (1 + \gamma^\beta u_\beta) \Phi_0 = \rho u^\mu,$$

onde

$$\rho = 2\bar{\Phi}_0 (1 + \gamma^\alpha u_\alpha) \Phi_0$$

Verifica-se facilmente, como não podia deixar de ser, que esta corrente é conservada:

$$\nabla_\mu j^\mu = 0$$

Introduzimos o spinor normalizado

$$\psi'_0 = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \psi_0 \quad (2.19)$$

A normalização é tal que

$$\bar{\psi}'_0 \gamma^\mu \psi'_0 = u^\mu.$$

ψ'_0 é o spinor normalizado que descreve a polarização de spin. De (2.17)

$$2u^\mu \nabla_\mu \Phi_0 + \nabla_\mu u^\mu \Phi_0 - \frac{3}{2} i \epsilon_{ijkm} u^k a^m \sigma^{ij} \Phi_0 + i \frac{e}{2m} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \Phi_0 = 0$$

Como $\psi_0 = \rho^{1/2} \psi'_0 = (1 + \gamma_5 u_\mu) \Phi_0$ e $\Phi_0 = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \psi_0$, temos

$$\Phi_0 = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \rho^{1/2} \psi'_0,$$

donde

$$2u^\mu \nabla_\mu \left[\frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \rho^{1/2} \psi'_0 \right] + u^\mu{}_{;\mu} \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \rho^{1/2} \psi'_0 - \frac{3}{2} i \epsilon_{ijkm} u^k a^m \sigma^{ij} \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \rho^{1/2} \psi'_0 + i \frac{e}{2m} \sigma^{ij} F_{ij} \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \rho^{1/2} \psi'_0 = 0$$

Como

$$[\gamma_5, \sigma^{ij}] = 0, \quad (2.20)$$

vem, sucessivamente

$$\begin{aligned} u^\mu \rho^{-1/2} \rho_{;\mu} \psi'_0 + 2u^\mu \rho^{1/2} \nabla_\mu \psi'_0 + u^\mu{}_{;\mu} \rho^{1/2} \psi'_0 \\ - \frac{3}{2} i \epsilon_{ijkm} u^k a^m \sigma^{ij} \rho^{1/2} \psi'_0 + i \frac{e}{2m} \sigma^{ij} F_{ij} \rho^{1/2} \psi'_0 = 0 \\ u^\mu \rho_{;\mu} \psi'_0 + 2u^\mu \rho \psi'_0{}_{;\mu} + u^\mu{}_{;\mu} \rho \psi'_0 - \frac{3}{2} i \epsilon_{ijkm} u^k a^m \sigma^{ij} \psi'_0 + i \frac{e}{2m} \rho \sigma^{ij} F_{ij} \psi'_0 = 0 \end{aligned}$$

$$\left(2\rho u^\mu \nabla_\mu + \underbrace{\nabla_\mu (\rho u^\mu)}_{=0} - \frac{3}{2}i\rho\epsilon_{ijk m} u^k a^m \sigma^{ij} + i\frac{e}{2m}\sigma^{ij} F_{ij}\right)\psi_0' = 0$$

ou, finalmente

$$\left(\frac{\nabla}{d\tau} - \frac{3}{4}i\epsilon_{ijk m} u^k a^m \sigma^{ij} + i\frac{e}{4m}\sigma^{ij} F_{ij}\right)\psi_0' = 0, \quad (2.21)$$

pois $u^\mu \nabla_\mu \equiv \frac{\nabla}{d\tau}$ é a derivada covariante ao longo da congruência u^μ , parametrizada pelo tempo próprio τ . [$x^\mu(\tau)$ é a trajetória semiclássica].

A equação (2.21) representa uma precessão do spin introduzida em parte pelo acoplamento do spin com a torção da variedade de fundo e em parte pela presença do campo eletromagnético. Para visualizarmos melhor esse fato, vamos introduzir o vetor de spin:

$$S^\alpha = \frac{1}{2}\hbar\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}u_\beta \frac{\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi}{\bar{\psi}\psi},$$

que, a menos de um fator de normalização, pode ser escrito em termos de ψ_0' como

$$S^\alpha = \frac{1}{2}\hbar\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}u_\beta \bar{\psi}_0' \sigma_{\mu\nu} \psi_0' \quad (2.22)$$

Este vetor possui apenas três componentes independentes devido ao vínculo

$$S^\mu u_\mu = 0, \quad (2.23)$$

que é uma decorrência imediata de (2.22). Podemos ainda reescrevê-lo em uma forma mais conveniente observando que, de (2.18) e (2.19),

$$\not{x}\psi_0' = \rho^{1/2}\not{x}(1 + \not{x})\Phi_0 = \rho^{1/2}(\not{x} + 1)\Phi_0 = \psi_0',$$

pois $\not{x}^2 = \gamma^\mu \gamma^\nu u_\mu u_\nu = g^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = 1$. Também

$$\bar{\psi}_0' \not{x} = \bar{\psi}_0'.$$

Observando ainda a identidade

$$\frac{i}{2}\epsilon_{ijkm}\sigma^{ij} = \gamma_5\sigma_{km}, \quad (2.24)$$

(2.22) fica

$$\begin{aligned} S^\alpha &= -i\hbar u_\beta \bar{\psi}'_0 \gamma_5 \sigma^{\alpha\beta} \psi'_0 = \frac{1}{2}\hbar u_\beta \bar{\psi}'_0 \gamma_5 (\gamma^\alpha \gamma^\beta - \gamma^\beta \gamma^\alpha) \psi'_0 \\ &= \frac{1}{2}\hbar \bar{\psi}'_0 \gamma_5 \gamma^\alpha \not{u} \psi'_0 - \frac{1}{2}\hbar \bar{\psi}'_0 \gamma_5 \not{u} \gamma^\alpha \psi'_0 = \frac{1}{2}\hbar \bar{\psi}'_0 \gamma_5 \gamma^\alpha \psi'_0 + \frac{1}{2}\hbar \bar{\psi}'_0 \not{u} \gamma_5 \gamma^\alpha \psi'_0 \\ &= \hbar \bar{\psi}'_0 \gamma_5 \gamma^\alpha \psi'_0 \end{aligned}$$

Temos então, usando (2.20) e (2.21)

$$\begin{aligned} \frac{\overset{()}{\nabla}}{d\tau} S^\mu &= u^\nu \overset{()}{\nabla}_\nu S^\mu = \hbar \left(u^\nu \bar{\psi}'_0{}_{;\nu} \gamma_5 \gamma^\mu \psi'_0 + \bar{\psi}'_0 \gamma_5 \gamma^\mu u^\nu \psi'_{0;\nu} \right) \\ &= -\frac{3}{4}i\hbar \epsilon_{ijkm} u^k a^m \bar{\psi}'_0 (\sigma^{ij} \gamma_5 \gamma^\mu - \gamma_5 \gamma^\mu \sigma^{ij}) \psi'_0 \\ &\quad + i\frac{e\hbar}{4m} F_{ij} \bar{\psi}'_0 (\sigma^{ij} \gamma_5 \gamma^\mu - \gamma_5 \gamma^\mu \sigma^{ij}) \psi'_0 \\ &= -\frac{3}{4}i\hbar \epsilon_{ijkm} u^k a^m \bar{\psi}'_0 \gamma_5 (\sigma^{ij} \gamma^\mu - \gamma^\mu \sigma^{ij}) \psi'_0 \\ &\quad + i\frac{e\hbar}{4m} F_{ij} \bar{\psi}'_0 \gamma_5 (\sigma^{ij} \gamma^\mu - \gamma^\mu \sigma^{ij}) \psi'_0 \end{aligned}$$

Usando novamente (2.24) e lembrando que $(\gamma_5)^2 = 1$, esta equação fica

$$\frac{\overset{()}{\nabla}}{d\tau} S^\mu = \frac{3}{2}\hbar u_k a_m e_j{}^\mu \bar{\psi}'_0 (\sigma^{km} \gamma^j + \gamma^j \sigma^{km}) + i\frac{e\hbar}{4m} F_{ij} \bar{\psi}'_0 (\sigma^{ij} \gamma^\mu - \gamma^\mu \sigma^{ij}) \psi'_0$$

O anticomutador das matrizes σ^{km} e γ^j é calculado facilmente como se segue:

$$\{\sigma^{km}, \gamma^j\} = \frac{i}{2}(\gamma^k \gamma^m \gamma^j - \gamma^m \gamma^k \gamma^j + \gamma^j \gamma^k \gamma^m - \gamma^j \gamma^m \gamma^k)$$

Somando e subtraindo $\gamma^m \gamma^j \gamma^k - \gamma^k \gamma^j \gamma^m$ aos termos entre parêntesis, isso fica

$$\{\sigma^{km}, \gamma^j\} = \frac{i}{2}(6\gamma^{[k} \gamma^m \gamma^{j]} + \gamma^k \gamma^j \gamma^m - \gamma^m \gamma^j \gamma^k) = 2i\gamma^{[k} \gamma^m \gamma^{j]},$$

pois, de (1.25), $\gamma^{[k} \gamma^j \gamma^{m]} = \gamma^{[k} \gamma^j \gamma^{m]} = -\gamma^{[k} \gamma^m \gamma^j]$. Por outro lado, o comutador dessas matrizes pode ser obtido com base também em (1.25), primeiramente simetrizando-a com relação ao primeiro e terceiro índices do primeiro membro:

$$\gamma^{(\mu} \gamma^\alpha \gamma^{\beta)} = \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta + \gamma^\beta \gamma^\alpha \gamma^\mu) = g^{\mu\alpha} \gamma^\beta - g^{\mu\beta} \gamma^\alpha$$

Basta agora antissimetrizar com respeito a α e β , multiplicar por i e lembrar que $\sigma^{\alpha\beta} = i\gamma^{[\alpha} \gamma^{\beta]}$; resulta

$$\gamma^\mu \sigma^{\alpha\beta} + \sigma^{\beta\alpha} \gamma^\mu = [\gamma^\mu, \sigma^{\alpha\beta}] = 2ig^{\mu[\alpha} \gamma^{\beta]} - 2ig^{\mu\beta} \gamma^\alpha,$$

ou seja

$$[\gamma^\mu, \sigma^{\alpha\beta}] = 2i(g^{\mu\alpha} \gamma^\beta - g^{\mu\beta} \gamma^\alpha) = 4ig^{\mu[\alpha} \gamma^{\beta]}$$

Desse modo, $\frac{\nabla}{d\tau} S^\mu$ se torna

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{d\tau} S^\mu &= -\frac{3}{2} \hbar u_k a_m e_j^\mu \bar{\psi}_0' (2i\gamma^{[k} \gamma^m \gamma^{j]}) \psi_0' + i \frac{e\hbar}{4m} \bar{\psi}_0' e_k^\mu F_{ij} 4i\gamma_5 \eta^{k[i} \gamma^{j]} \psi_0' \\ &= -3i\hbar u_k a_m e_j^\mu \bar{\psi}_0' (-i\epsilon^{kmji} \gamma_5 \gamma_i) \psi_0' - \frac{e\hbar}{m} e_k^\mu F_{ij} \eta^{ki} \bar{\psi}_0' \gamma_5 \gamma^j \psi_0' \\ &= \left(-3\epsilon^{kmji} u_k a_m e_j^\mu - \frac{e}{m} e_j^\mu F^{ji} \right) \hbar \bar{\psi}_0' \gamma_5 \gamma_i \psi_0' \end{aligned}$$

Reconhecendo neste último termo o vetor de spin, temos finalmente

$$\frac{\nabla}{d\tau} S^\mu = 3\epsilon^{\alpha\beta\gamma\mu} u_\alpha a_\beta S_\gamma - \frac{e}{m} F^\mu{}_\alpha S^\alpha \quad (2.25)$$

Notamos aqui, novamente, que os efeitos de torção e campo eletromagnético não se misturam; o primeiro termo representa a contribuição isolada da torção e o segundo do campo eletromagnético. Este último, aliás, conserva a mesma forma que possui em R_4 [29], e já é conhecido desde há muito.

Consideraremos agora a particularização de (2.25) para o caso de uma partícula não relativística, isto é, para a qual vale

$$u^\mu \simeq (1, \vec{0})$$

em uma região de campo eletromagnético nulo e campo gravitacional fraco, para o qual podemos tomar $e_a^\mu = \delta_a^\mu$. De (2.23), resulta então que $S_0 = 0$, donde

$$S^\mu \simeq (0, \vec{S})$$

Nestas condições, (2.25) fornece

$$\frac{\nabla}{d\tau} S^{\hat{\mu}} = 3\epsilon^{0\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\mu}} a_{\hat{\beta}} S_{\hat{\gamma}} = 3\epsilon^{\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\mu}} a_{\hat{\beta}} S_{\hat{\gamma}},$$

ou

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial t} = 3\vec{a} \times \vec{S}$$

mostrando que a precessão do spin se dá com uma velocidade angular de $\vec{\omega} = 3\vec{a}$ [4,18,19].

Capítulo 3

O Teorema de Noether para Spinors

Neste capítulo tentaremos obter o teorema de Noether[11] adaptado para o caso de spinors numa variedade de Einstein-Cartan. O tratamento aqui segue a formulação de Fleming [12,13] segundo o enfoque de Jackiw [14]. O teorema de Noether é uma forma sistemática de obtermos grandezas conservadas associadas a simetrias¹ apresentadas por um determinado sistema. A prova do teorema é construtiva, no sentido de que fornece também a expressão da corrente conservada, e pode ser encontrada na literatura [12,7].

3.1 Variações de Forma

Vamos considerar agora a variação de forma sofrida pelos diversos objetos envolvidos na ação (1.32), quando de uma transformação geral de coordena-

¹Dizemos que uma transformação de coordenadas $x \rightarrow x' = x + \xi$ é uma simetria de um sistema descrito por uma Lagrangeana $\mathcal{L}$ se $\delta(e\mathcal{L}) = \partial_\mu \Lambda^\mu$ para alguma densidade quadrivetorial Λ .

das

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$$

3.1.1 Spinors

Vimos na seção 1.1 que os spinors supostamente se transformam como escalares sob transformações gerais de coordenadas. A variação de forma de tais objetos sob transformações gerais de coordenadas é facilmente obtida da lei de transformação

$$\phi'(x') = \phi(x),$$

expandindo o primeiro membro em série de Taylor em torno de x . Resulta:

$$\delta\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) = -\xi^\lambda \partial_\lambda \phi.$$

Poderíamos pensar em escrever $\delta\psi$, em analogia com esta expressão, como

$$\delta\psi = -\xi^\lambda \partial_\lambda \psi \tag{3.1}$$

Entretanto, embora (3.1) seja um escalar sob transformações gerais de coordenadas, $\delta\psi$ não se transforma como um spinor sob transformações locais de Lorentz. Adotamos, ao invés, a seguinte expressão:

$$\delta\psi = -\xi^\lambda \nabla_\lambda \psi, \tag{3.2}$$

que satisfaz a ambos os quesitos. Analogamente, para o spinor adjunto escrevemos

$$\delta\bar{\psi} = -\xi^\lambda \nabla_\lambda \bar{\psi}$$

No desenvolvimento do teorema de Noether para o campo de Dirac, precisaremos também da variação de forma da derivada covariante de um spinor,

$\delta \nabla_\mu \psi$. Para determiná-la, tomemos como base a variação de forma de um vetor contravariante A_μ . Da lei de transformação

$$A'(x') = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} A_\lambda(x)$$

obtemos, expandindo em série de Taylor

$$\delta A_\mu = -A_\lambda \partial_\mu \xi^\lambda - \xi^\lambda \partial_\lambda A_\mu \quad (3.3)$$

Esta expressão não é muito conveniente por não estar numa forma explicitamente covariante sob transformações gerais de coordenadas. Usando

$$\nabla_\mu \xi^\lambda = \partial_\mu \xi^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \xi^\nu$$

e

$$\nabla_\lambda A_\mu = \partial_\lambda A_\mu - \Gamma_{\lambda\mu}^\nu A_\nu$$

podemos reescrever (3.3) sucessivamente como

$$\begin{aligned} \delta A_\mu &= -A_\lambda \nabla_\mu \xi^\lambda - \xi^\lambda \nabla_\lambda A_\mu + \xi^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_\lambda - \xi^\lambda \Gamma_{\lambda\mu}^\nu A_\nu \\ &= -A_\lambda \nabla_\mu \xi^\lambda - \xi^\lambda \nabla_\lambda A_\mu + \xi^\lambda (\Gamma_{\mu\lambda}^\nu - \Gamma_{\lambda\mu}^\nu) A_\nu \end{aligned}$$

ou

$$\delta A_\mu = -A_\lambda \nabla_\mu \xi^\lambda - \xi^\lambda \nabla_\lambda A_\mu - 2\xi^\lambda S_{\lambda\mu}{}^\nu A_\nu,$$

que é explicitamente covariante. Desse modo, a expressão para $\delta \nabla_\mu \psi$, consistente com (3.2) e que se transforma covariantemente tanto sob transformações gerais de coordenadas como sob transformações locais de Lorentz é

$$\delta \nabla_\mu \psi = -\nabla_\lambda \nabla_\mu \psi \xi^\lambda - \xi^\lambda \nabla_\lambda \nabla_\mu \psi - 2\xi^\lambda S_{\lambda\mu}{}^\nu \nabla_\nu \psi$$

Da mesma forma, para o spinor $\bar{\psi}$

$$\delta \nabla_\mu \bar{\psi} = -\nabla_\lambda \nabla_\mu \bar{\psi} \xi^\lambda - \xi^\lambda \nabla_\lambda \nabla_\mu \bar{\psi} - 2\xi^\lambda S_{\lambda\mu}{}^\nu \nabla_\nu \bar{\psi}$$

Como consequência de tudo isso, a quantidade $\bar{\psi} \psi$ se transforma como um escalar, como não poderia deixar de ser.

3.1.2 Tetradas

A variação de forma das tetradas, consistente com as apresentadas para os spinors, pode ser obtida exigindo que $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ se comporte como um vetor contravariante sob transformações gerais de coordenadas:

$$\begin{aligned} \delta(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) &= -\xi^\lambda \partial_\lambda (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) + \partial_\lambda \xi^\mu (\bar{\psi} \gamma^\lambda \psi) \\ &= -\xi^\lambda \nabla_\lambda (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) + \nabla_\lambda \xi^\mu (\bar{\psi} \gamma^\lambda \psi) + 2S_{\lambda\nu}{}^\mu (\bar{\psi} \gamma^\nu \psi) \end{aligned}$$

Desenvolvendo e simplificando, temos sucessivamente:

$$\begin{aligned} \delta\bar{\psi} \gamma^\mu \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu \delta\psi + \bar{\psi} \gamma^a \psi \delta e_a{}^\mu &= (-\xi^\lambda \nabla_\lambda \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu (-\xi^\lambda \nabla_\lambda \psi) \\ &\quad - \bar{\psi} \gamma^a \psi \xi^\lambda \nabla_\lambda e_a{}^\mu + \bar{\psi} \gamma^a \psi e_a{}^\lambda \nabla_\lambda \xi^\mu + 2\bar{\psi} \gamma^a \psi S_{\lambda\nu}{}^\mu \xi^\lambda e_a{}^\nu \implies \\ \implies \bar{\psi} \gamma^a \psi \delta e_a{}^\mu &= \bar{\psi} \gamma^a \psi (-\xi^\lambda \nabla_\lambda e_a{}^\mu + 2S_{\lambda\nu}{}^\mu \xi^\lambda e_a{}^\nu + \nabla_\lambda \xi^\mu e_a{}^\lambda) \end{aligned}$$

donde

$$\delta e_a{}^\mu = -\xi^\lambda \nabla_\lambda e_a{}^\mu + 2S_{\lambda\nu}{}^\mu \xi^\lambda e_a{}^\nu + \nabla_\lambda \xi^\mu e_a{}^\lambda$$

ou, como $\nabla_\lambda e_a{}^\mu = 0$,

$$\delta e_a{}^\mu = \nabla_\lambda \xi^\mu e_a{}^\lambda + 2S_{\lambda\nu}{}^\mu \xi^\lambda e_a{}^\nu \quad (3.4)$$

Uma outra forma de (3.4) também nos será útil. Para obtê-la, expandimos a derivada covariante presente naquela equação:

$$\begin{aligned} \delta e_a{}^\mu &= \partial_\lambda \xi^\mu e_a{}^\lambda + \Gamma_{\lambda\nu}{}^\mu \xi^\nu e_a{}^\lambda + 2S_{\lambda\nu}{}^\mu \xi^\lambda e_a{}^\nu \\ &= \partial_\lambda \xi^\mu e_a{}^\lambda + \Gamma_{\nu\lambda}{}^\mu \xi^\lambda e_a{}^\nu + 2S_{\lambda\nu}{}^\mu \xi^\lambda e_a{}^\nu, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\delta e_a{}^\mu = \partial_\lambda \xi^\mu e_a{}^\lambda + \Gamma_{\lambda\nu}{}^\mu \xi^\lambda e_a{}^\nu$$

3.1.3 Lagrangeana

Consideremos agora a variação de forma da Lagrangeana de Dirac num espaço de Riemann-Cartan. A ação do campo material é

$$S_m = \int d^4x e(x) \mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}, \nabla_\mu \psi, \nabla_\mu \bar{\psi}, e_a^\mu) \quad (3.5)$$

Tendo em vista a dependência funcional de $\mathcal{L}$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \delta \psi + \delta \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\mu \psi} \delta \nabla_\mu \psi + \delta \nabla_\mu \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\mu \bar{\psi}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_a^\mu} \delta e_a^\mu \\ &= -\xi^\lambda \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \nabla_\lambda \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\mu \psi} \nabla_\lambda \nabla_\mu \psi + 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\mu \psi} S_{\lambda\mu}{}^\nu \nabla_\nu \psi \right\} \\ &\quad -\xi^\lambda \left\{ \nabla_\lambda \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} + \nabla_\lambda \nabla_\mu \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\mu \bar{\psi}} + 2 \nabla_\nu \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\mu \bar{\psi}} S_{\lambda\mu}{}^\nu \right\} \\ &\quad - \underbrace{\nabla_\mu \xi^\lambda e_a^\mu \left(\frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^a \nabla_\lambda \psi - \frac{i}{2} \nabla_\lambda \bar{\psi} \gamma^a \psi \right)}_{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_a^\lambda}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_a^\mu} (\nabla_\lambda \xi^\mu e_a^\lambda + S_{\lambda\nu}{}^\mu \xi^\lambda e_a^\nu) \end{aligned}$$

Reorganizando os termos, desenvolvendo e simplificando, temos sucessivamente:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= -\xi^\lambda \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \nabla_\lambda \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\mu \psi} \nabla_\lambda \nabla_\mu \psi + \nabla_\lambda \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} + \nabla_\lambda \nabla_\mu \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\mu \bar{\psi}} \right) \\ &\quad - 2\xi^\lambda S_{\lambda\mu}{}^\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\mu \psi} \nabla_\nu \psi + \nabla_\nu \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\mu \bar{\psi}} \right) - \nabla_\mu \xi^\lambda e_a^\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta e_a^\lambda} \\ &\quad + 2\xi^\lambda S_{\lambda\nu}{}^\mu e_a^\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_a^\mu} + \nabla_\mu \xi^\lambda e_a^\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta e_a^\lambda} \\ &= -\xi^\lambda \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \nabla_\lambda \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\mu \psi} \nabla_\lambda \nabla_\mu \psi + \nabla_\lambda \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} + \nabla_\lambda \nabla_\mu \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\mu \bar{\psi}} \right) \\ &\quad - 2\xi^\lambda S_{\lambda\mu}{}^\nu e_a^\mu \left(\frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^a \nabla_\nu \psi - \frac{i}{2} \nabla_\nu \bar{\psi} \gamma^a \psi \right) + 2\xi^\lambda S_{\lambda\nu}{}^\mu e_a^\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_a^\mu} \\ &= -\xi^\lambda \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \nabla_\lambda \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\mu \psi} \nabla_\lambda \nabla_\mu \psi + \nabla_\lambda \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} + \nabla_\lambda \nabla_\mu \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\mu \bar{\psi}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2\xi^\lambda \underbrace{\left(e_a^\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta e_a^\nu} S_{\lambda\mu}{}^\nu - e_a^\nu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta e_a^\mu} S_{\lambda\nu}{}^\mu \right)}_{=0} \\
& = -\xi^\lambda \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \nabla_\lambda \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\mu \psi} \nabla_\lambda \nabla_\mu \psi \right. \\
& \quad \left. + \nabla_\lambda \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} + \nabla_\lambda \nabla_\mu \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\mu \bar{\psi}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_a^\mu} \nabla_\lambda e_a^\mu \right).
\end{aligned}$$

A adição do último termo é lícita devido a (1.14). Assim, reconhecemos nesta última equação, devido a (3.5),

$$\delta \mathcal{L} = -\xi^\lambda \nabla_\lambda \mathcal{L},$$

isto é,

$$\delta \mathcal{L} = -\xi^\lambda \partial_\lambda \mathcal{L}. \quad (3.6)$$

Isso mostra que a Lagrangeana é realmente um escalar sob transformações gerais de coordenadas. Para transformações que sejam também isometrias, a variação de forma da ação se reduz à integral de uma quadridivergência:

$$\delta(e\mathcal{L}) = e\delta\mathcal{L} = -e\xi^\lambda \partial_\lambda \mathcal{L} = -\partial_\lambda (e\xi^\lambda \mathcal{L}),$$

pois, para isometrias, valem $\delta e = 0$ e $\partial_\lambda (e\xi^\lambda) = 0$. Isso mostra também que todas as isometrias são, a nível infinitesimal, simetrias da ação.

3.2 Teorema de Noether

Consideremos a ação completa de um sistema composto por um campo de Dirac interagindo com o campo gravitacional de fundo:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2\kappa} R + \mathcal{L} \right),$$

com $\mathcal{L}$ dada por (1.23). Como sabemos, as dependências funcionais de R e $\mathcal{L}$ são, respectivamente,

$$\begin{aligned} R &= R(g^{\mu\nu}, \partial_\lambda g^{\mu\nu}, K_{\mu\nu}{}^\lambda, \partial_\rho K_{\mu\nu}{}^\lambda) \\ \mathcal{L} &= \mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}, \nabla_\mu \psi, \nabla_\mu \bar{\psi}, e_a{}^\mu) \\ &= \mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}, \partial_\mu \psi, \partial_\mu \bar{\psi}, K_{\mu\nu}{}^\lambda, e_a{}^\mu, \partial_\lambda e_a{}^\mu) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Variando todos os campos, a ação responde, lembrando (3.6) com

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left[\delta(e\mathcal{L}) - \frac{1}{2\kappa} \delta(eR) \right] \\ \delta S &= \int d^4x e \left\{ \left\{ -\frac{1}{2\kappa} [G_{\mu\nu} - \overset{\star}{\nabla}_\lambda (T_{\mu\nu}{}^\lambda - T_{\nu\mu}{}^\lambda + T^\lambda{}_{\mu\nu})] + \frac{1}{2} t_{\mu\nu} \right\} \delta g^{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{\kappa} T^\lambda{}_{\nu\mu} + \tau_\lambda{}^{\nu\mu} \right) \delta K_{\mu\nu}{}^\lambda - e \xi^\lambda \partial_\lambda \mathcal{L} \right\} \end{aligned}$$

Para isometrias temos $\delta g^{\mu\nu} = 0$ e $\delta K_{\mu\nu}{}^\lambda = 0$, de modo que isto se reduz simplesmente a

$$\delta S = - \int d^4x \partial_\lambda (e \xi^\lambda \mathcal{L}). \quad (3.8)$$

Por outro lado, de (3.7), podemos escrever também

$$\begin{aligned} \delta S_m &= \int d^4x e \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi} \delta \psi + \delta \bar{\psi} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \bar{\psi}} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \psi} \delta \partial_\mu \psi + \delta \partial_\mu \bar{\psi} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \bar{\psi}} \right) \\ &\quad + \int d^4x \left[\frac{\delta(e\mathcal{L})}{\delta K_{\mu\nu}{}^\lambda} \delta K_{\mu\nu}{}^\lambda + \frac{\delta(e\mathcal{L})}{\delta e_a{}^\mu} \delta e_a{}^\mu \right] \\ &= \int d^4x e \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi} \delta \psi + \delta \bar{\psi} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \bar{\psi}} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \psi} \delta \partial_\mu \psi + \delta \partial_\mu \bar{\psi} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \bar{\psi}} \right) \\ &\quad + \int d^4x e (\tau_\lambda{}^{\nu\mu} \delta K_{\mu\nu}{}^\lambda + t^a{}_\mu \delta e_a{}^\mu) \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} t^a{}_\mu \delta e_a{}^\mu &= t_{\nu\mu} e^{a\nu} \delta e_a{}^\mu = t_{(\nu\mu)} e^{a\nu} \delta e_a{}^\mu \\ &= \frac{1}{2} t_{\mu\nu} \delta (e^{a\nu} e_a{}^\mu) = \frac{1}{2} t_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

Desse modo, resulta para $\delta S = \delta S_g + \delta S_m$,

$$\begin{aligned} \delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \left(\tau_{\lambda}^{\nu\mu} + \frac{1}{\kappa} T_{\lambda}^{\nu\mu} \right) \delta K_{\mu\nu}^{\lambda} \right. \\ \left. + \left\{ -\frac{1}{2\kappa} [G_{\mu\nu} - \overset{\star}{\nabla}_{\lambda} (T_{\mu\nu}^{\lambda} - T_{\nu}^{\lambda}{}_{\mu} + T_{\mu\nu}^{\lambda})] + \frac{1}{2} t_{\mu\nu} \right\} \delta g^{\mu\nu} \right. \\ \left. + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \delta \psi + \delta \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \psi} \delta \partial_{\mu} \psi + \delta \partial_{\mu} \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \bar{\psi}} \right\} \end{aligned}$$

As equações de campo que resultam de $\delta \mathcal{L} / \delta \psi = 0$ e $\delta \mathcal{L} / \delta \bar{\psi} = 0$ são, como já vimos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \frac{1}{e} \partial_{\mu} \left(e \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \psi} \right) &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \frac{1}{e} \partial_{\mu} \left(e \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \bar{\psi}} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Com o uso dessas e das demais equações de campo, δS se simplifica para

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left[\partial_{\mu} \left(e \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \psi} \right) \delta \psi + e \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \psi} \partial_{\mu} \delta \psi \right. \\ &\quad \left. + \delta \bar{\psi} \partial_{\mu} \left(e \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \bar{\psi}} \right) + e \partial_{\mu} \delta \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \bar{\psi}} \right] \\ &= \int d^4x \partial_{\mu} \left(e \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \psi} \delta \psi + e \delta \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \bar{\psi}} \right) \\ &= - \int d^4x \partial_{\mu} \left\{ e \xi^{\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_{\mu} \psi} \nabla_{\lambda} \psi + \nabla_{\lambda} \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_{\mu} \bar{\psi}} \right) \right\} \quad (3.9) \end{aligned}$$

Subtraindo (3.9) de (3.8), resulta

$$\int d^4x \partial_{\mu} \left\{ e \xi^{\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_{\mu} \psi} \nabla_{\lambda} \psi + \nabla_{\lambda} \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_{\mu} \bar{\psi}} - \delta_{\lambda}^{\mu} \mathcal{L} \right) \right\} = 0,$$

donde concluimos que

$$\partial_{\mu} \{ e \xi^{\lambda} \theta_{\lambda}^{\mu} \} = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} \theta_{\lambda}^{\mu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_{\mu} \psi} \nabla_{\lambda} \psi + \nabla_{\lambda} \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_{\mu} \bar{\psi}} - \delta_{\lambda}^{\mu} \mathcal{L} \\ &= \frac{i}{2} e_a^{\mu} (\bar{\psi} \gamma^a \nabla_{\lambda} \psi - \nabla_{\lambda} \bar{\psi} \gamma^a \psi) - \delta_{\lambda}^{\mu} \mathcal{L} \end{aligned}$$

Este tensor coincide, pode-se mostrar,² com aquele definido pela relação (1.37). Ele é portanto o candidato natural para a generalização do tensor de energia-momento para espaços de Einstein-Cartan.

²Veja por exemplo a Ref. [4]

Conclusão

Ao longo deste trabalho, consideramos basicamente dois problemas distintos: o da interação e propagação do spin de elétrons de Dirac com e no campo gravitacional de fundo e o da formulação do teorema de Noether para spinores, ambos no contexto de uma variedade de Riemann-Cartan.

Com respeito às partículas de spin $1/2$ propagando-se num campo gravitacional, observamos que uma torção de fundo não nula introduz efeitos adicionais aos já conhecidos em V_4 : além da alteração da massa efetiva do férmion, temos também um acoplamento direto entre spin e torção, tal como um termo do tipo $\frac{3}{2}\sigma^{\mu\nu}a_{[\mu;\nu]}$, que tem certa semelhança com o termo de Pauli para o caso da interação spin-campo eletromagnético em Minkowski, $\frac{e}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$. Este termo, aliás, continua presente em U_4 quando se introduz um campo eletromagnético de fundo adicional. Além disso, a forma da equação (2.6) sugere que, tal como o campo eletromagnético, a torção de fundo contribua para o momento canônico do elétron com um termo do tipo $-\frac{3}{2}\gamma_5 a_\mu \psi$. Essa interpretação, cujas conseqüências podem revelar-se surpreendentes, é no mínimo interessante, e mereceria um estudo mais detalhado. O limite não relativístico da equação de Dirac nos traz informações sobre como a Hamiltoneana do elétron poderia ser modificada sob a influência da torção: notamos novamente um acoplamento direto spin-torção da forma $\frac{3}{2}\vec{a} \cdot \vec{\sigma}$, onde $\vec{a}$ é a parte espacial do vetor axial associado à parte totalmente antissimétrica

da contorção.³ Já a parte tipo tempo desse vetor parece estar ligada, *nesta aproximação*, às contribuições ao momento canônico do elétron. Finalmente consideramos o aspecto da propagação do spin do elétron na presença também de um campo eletromagnético. Como já era de se esperar em vista dos resultados anteriores, concluímos que os efeitos de torção e campo eletromagnético se fazem sentir separadamente. O campo eletromagnético contribui com uma parcela que é formalmente idêntica à já exhaustivamente estudada para o caso de um espaço-tempo chato [29]; a torção introduz por sua vez uma precessão adicional do spin caracterizada por uma velocidade angular de $\vec{\omega} = 3\vec{a}$.

Quanto ao teorema de Noether, é sabido que o grande mérito da formulação aqui seguida é conseguir, através de uma caracterização adequada do que seja uma *simetria*, uma unificação do primeiro e segundo teoremas de Emmy Noether (respectivamente para grupos de simetria com número finito de parâmetros — simetrias globais, e arbitrariamente grande de parâmetros — simetrias locais). Alguns problemas técnicos presentes numa tentativa anterior de formulação do teorema para spinors na Relatividade Geral foram superados, possibilitando-nos obter de maneira relativamente simples a quantidade conservada associada aos grupos de movimento do espaço-tempo, o que aliás é uma característica desse enfoque devido a Jackiw.

³Como uma possível aplicação desse resultado, seria interessante estudar um modelo de espaço-tempo que, ao contrário do de Einstein-Cartan, admitisse uma torção dinâmica; nesse contexto, tal acoplamento spin-torção traria, por exemplo, uma contribuição para o desdobramento dos níveis de energia de átomos tipo Hidrogênio.

Apêndice A

Notações e Convenções

Exceto quando observado explicitamente em contrário, adotamos um sistema de unidades no qual

$$\hbar = c = 1$$

Índices gregos referem-se a coordenadas holonômicas e variam de 0 a 3.

Índices latinos referem-se a coordenadas não holonômicas e variam de (0) a (3).¹

Índices com circunflexo denotam apenas as componentes espaciais de uma dada grandeza tensorial; tais índices gregos variam portanto de 1 a 3, e os latinos de (1) a (3).

No sistema local de coordenadas (Minkowskiano) a métrica é denotada por η_{ab} e tem, assim como $g_{\mu\nu}$, característica (+ - - -).

A derivada ordinária é denotada por uma vírgula antes do índice:

$$\frac{\partial Q}{\partial x^\mu} = \partial_\mu Q = Q_{,\mu}$$

¹Componentes não holonômicas explícitas são denotadas com parêntesis envolvendo o índice.

A derivada covariante com relação a V_4 pode ser denotada por um dos seguintes símbolos:

$$\nabla_\mu Q, \quad Q_{;\mu},$$

enquanto que a derivação covariante com respeito a U_4 , mais freqüentemente utilizada neste trabalho, se faz representar por

$$\nabla_\mu Q \quad \text{ou} \quad Q_{||\mu}$$

Muitas vezes é útil introduzir ainda um símbolo adicional de derivação:

$$\star \nabla_\mu Q \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_\mu Q + 2S_{\mu\lambda}{}^\lambda Q.$$

Colchetes envolvendo um grupo de índices denotam antissimetrização, enquanto parêntesis indicam simetrização com respeito aos índices em questão; barras verticais denotam exclusão desta operação:

$$\begin{aligned} A_{[\mu\nu]} &= \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}) \\ B_{(\mu|\nu|\lambda)} &= \frac{1}{2}(A_{\mu\nu\lambda} + A_{\lambda\nu\mu}) \end{aligned}$$

A ação é escrita como

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L},$$

sendo $\mathcal{L}$ a densidade de Lagrangeana (ao longo do texto quase sempre referida —por um abuso de linguagem— como a Lagrangeana) do sistema considerado. Denotando $\sqrt{-g}$ por e , e sendo $\mathcal{L}$ a Lagrangeana de um campo material, definimos os tensores de momento-energia (ou energia-momento) e de spin associados a este campo respectivamente por:

$$t_{\mu\nu} = \frac{2}{e} \frac{\delta(e\mathcal{L})}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad t^{\mu\nu} = -\frac{2}{e} \frac{\delta(e\mathcal{L})}{\delta g_{\mu\nu}}$$

e

$$\tau_\lambda{}^{\nu\mu} = \frac{1}{e} \frac{\delta(e\mathcal{L})}{\delta K_{\mu\nu}{}^\lambda}$$

Matrizes de Dirac e Spinors: Adotamos as convenções e notações da Ref. [2]. Quando se fizer necessário o uso de uma representação em particular, usar-se-á a de Pauli-Dirac.

Convencionamos ainda que os símbolos $\gamma^0, \dots, \gamma^3$ referem-se a matrizes de Dirac no espaço curvo. Matrizes de Dirac no espaço tangente local são representadas com os índices envolvidos por parêntesis: $\gamma^{(0)}, \dots, \gamma^{(3)}$.

Algumas vezes usamos também a convenção de Feynman do 'slash':

$$\not{a} \equiv \gamma^\mu a_\mu.$$

Tensor de Levi-Civita: o (pseudo)tensor de Levi-Civita no espaço tangente local tem por definição:

$$\varepsilon^{abcd} = \begin{cases} +1 & \text{se } (abcd) \text{ for uma permutação par de } (0123) \\ -1 & \text{se for uma permutação ímpar} \\ 0 & \text{em qualquer outro caso} \end{cases}$$

Em V_4 ou U_4 esta quantidade não se comporta como um tensor, mas como uma densidade tensorial de peso -1 . O tensor completamente antissimétrico é definido como

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}.$$

Suas componentes covariantes são então

$$\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} = \sqrt{-g} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}.$$

A matriz γ_5 é definida como

$$\gamma_5 = \gamma^5 = \frac{i}{4!} \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma = -i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$$

sendo a sua correspondente no espaço tangente definida de forma análoga, mas com índices latinos e com ε ao invés de ϵ .

Apêndice B

Espaços de Riemann-Cartan

Neste apêndice faremos, a título de completeza, uma breve revisão acerca de espaços com torção,¹ tratando em particular o caso de espaços de Einstein-Cartan quando se fizer necessária uma escolha explícita da Lagrangeana do campo gravitacional.

Um espaço tempo de Riemann-Cartan (U_4) possui uma conexão em geral assimétrica,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \mu \ \nu \end{smallmatrix} \right\} - K_{\mu\nu}^{\lambda},$$

onde $K_{\mu\nu\lambda} = K_{\mu[\nu\lambda]}$ é o tensor de contorção.

A torção de Cartan é definida usualmente como a parte antissimétrica da conexão:

$$S_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{[\mu\nu]}^{\lambda}$$

As relações entre torção e contorção são:

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu}^{\lambda} &= -K_{[\mu\nu]}^{\lambda} \\ K_{\mu\nu}^{\lambda} &= -S_{\mu\nu}^{\lambda} + S_{\nu}^{\lambda}{}_{\mu} - S^{\lambda}{}_{\mu\nu} \end{aligned}$$

¹Para uma revisão mais detalhada veja, por exemplo, [7] ou [4].

Define-se ainda o tensor de torção modificado

$$T_{\mu\nu}{}^\lambda = S_{\mu\nu}{}^\lambda + 2\delta_{[\mu}^\lambda S_{\nu]\alpha}{}^\alpha$$

A conexão é compatível com a métrica, isto é, o produto escalar é preservado sob o transporte paralelo realizado com esta conexão:

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$$

A variedade assim definida é o mais geral espaço métrico dotado de uma conexão afim linear.

O tensor de curvatura é definido como em [4], satisfazendo a

$$\nabla_\mu \nabla_\nu A^\alpha - \nabla_\nu \nabla_\mu A^\alpha = R_{\mu\nu\lambda}{}^\alpha A^\lambda - 2S_{\mu\nu}{}^\lambda \nabla_\lambda A^\alpha$$

Explicitamente, os tensores de curvatura e de Ricci são dados respectivamente por

$$R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta = 2\partial_{[\mu}\Gamma_{\nu]\alpha}{}^\beta + 2\Gamma_{[\mu|\rho}^\beta \Gamma_{|\nu]\alpha}{}^\rho$$

e

$$R_{\mu\nu} = R_{\lambda\mu\nu}{}^\lambda = 2\partial_{[\lambda}\Gamma_{\mu]\nu}{}^\lambda + 2\Gamma_{[\lambda|\rho}^\lambda \Gamma_{|\mu]\nu}{}^\rho,$$

e a curvatura escalar é definida por

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}.$$

O tensor de Riemann satisfaz às seguintes identidades:

$$\begin{aligned} R_{(\mu\nu)\alpha}{}^\beta &= 0 \\ R_{[\mu\nu\alpha]}{}^\beta &= 2\nabla_{[\mu} S_{\nu\alpha]}{}^\beta - 4S_{[\mu\nu}{}^\lambda S_{\alpha]\lambda}{}^\beta \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu(\alpha\beta)} &= 0 \\ \nabla_{[\mu} R_{\nu\lambda]\alpha}{}^\beta &= 2S_{[\mu\nu}{}^\sigma R_{\lambda]\sigma\alpha}{}^\beta, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

sendo esta última a correspondente à identidade de Bianchi em V_4 . $G_{\mu\nu}$ representa, como de costume, o tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

Ao contrário do que ocorre em V_4 , a parte antissimétrica de $G_{\mu\nu}$ não se anula; de (B.1), resulta por contração de índices:

$$\frac{3}{2}R_{[l\alpha\mu\nu]}{}^\lambda = \overset{\star}{\nabla}_\lambda T_{\mu\nu}{}^\lambda = G_{[\mu\nu]}$$

Dentre as teorias sobre variedades de Riemann-Cartan, a mais simples é a de Einstein-Cartan(-Sciama-Kibble). Esta denominação se refere a um U_4 com uma escolha específica para a Lagrangeana do campo gravitacional, no caso

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{2\kappa}R,$$

onde $R = R(\Gamma)$.

A relação entre $R(\Gamma)$ e o seu correspondente em V_4 é dada por:

$$R(\Gamma) = R(\{ \}) - T_\lambda{}^{\nu\mu} K_{\mu\nu}{}^\lambda + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (2\sqrt{-g} K_\lambda{}^{\mu\lambda})$$

A partir dessa relação é fácil deduzir as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \frac{1}{e} \frac{\delta(eR)}{\delta g^{\mu\nu}} &= G_{\mu\nu} - \overset{\star}{\nabla}_\lambda (T_{\mu\nu}{}^\lambda - T_\nu{}^\lambda{}_\mu + T^\lambda{}_{\mu\nu}) \\ \frac{1}{e} \frac{\delta(eR)}{\delta K_{\mu\nu}{}^\lambda} &= -2T_\lambda{}^{\nu\mu}, \end{aligned}$$

que são úteis na obtenção das equações de campo.

Referências

- [1] H. Weyl, *Z. Physik*, **56**, 330 (1929).
- [2] C. Itzykson, J. B. Zuber, "*Quantum Field Theory*", McGraw Hill, New York, 1985.
- [3] M. O. C. Gomes, "*Teoria Quântica de Campos—Notas de Aula*", IFUSP, não publicadas.
- [4] F. W. Hehl, *Gen. Rel. Grav.* **4** (1973) 333; **5** (1974) 491.
- [5] V. De Sabbata, M. Gasperini, "*Introduction to Gravitation*", World Scientific, Singapore, 1985.
- [6] J. Schwinger, "*Particles, Sources and Fields*", Addison-Wesley, 1970, section 3-17
- [7] G. A. Vicente, *Dissertação de Mestrado*, IFUSP, 1988.
- [8] L. Landau, E. M. Lifshitz, "*Quantum Mechanics—Non-relativistic Theory*", 3rd Ed., Pergamon Press, 1974.
- [9] L. Landau, E. M. Lifshitz, "*The Classical Theory of Fields*", 4th Ed., Pergamon Press, 1975.

- [10] H. Fleming, "*Gravitação e Cosmologia—Notas de Aula*", IFUSP, não publicadas.
- [11] E. Noether, *Nach. d. Ges. Wissensch. zu Göttingen*, p.235 (1918).
- [12] H. Fleming, *Revista Brasileira de Física* **17** (1987) 236.
- [13] H. Fleming, *preprint IFUSP/p-633* (1987).
- [14] R. Jackiw, in D. Gross (ed.), *Lectures on Current Algebra and its Applications*, Princeton University Press, 1972
- [15] F. W. Hehl, P. von der Heyde, G. D. Kerlick, J. M. Nester, *Rev. Mod. Phys.* **48** (1976) 393.
- [16] R. De Ritis, P. Scudellaro, C. Stornaiolo, *Phys. Lett.* **A126** (1988) 389.
- [17] R. P. Feynman, M. Gell-Mann, *Phys. Rev.* **109** (1958) 193 .
- [18] H. Rumpf, in P. G. Bergmann and V. De Sabbata (eds.), *Cosmology and Gravitation*, Plenum, 1980.
- [19] K. Hayashi, T. Shirafuji, *Phys. Rev.* **D19** (1979) 3524.
- [20] H. Pagels, *Ann. Phys. (N.Y.)* **31** (1965) 64.
- [21] F. W. Hehl, B. K. Datta, *J. Math. Phys.* **12** (1971) 1334.
- [22] W. Szczyrba, *Ann. Phys.(N.Y.)* **158** (1984) 320.
- [23] D. Rapoport, S. Sternberg, *Ann. Phys. (N.Y.)* **158** (1984) 447.
- [24] W. Drechsler, *Fortschr. Phys.* **32** (1984) 449.
- [25] P. Baekler, E. M. Mielke, *Phys. Lett.* **A113** (1986) 471.

- [26] W. M. Baker, *Class. Quant. Grav.* **3** (1986) L19.
- [27] J. A. Schouten, "*Ricci Calculus*", Springer, Berlin, 1954.
- [28] N. D. Birrel, P. C. W. Davies, "*Quantum Fields in Curved Space*", 2nd. Ed., Cambridge University Press, 1984.
- [29] V. Bargmann, L. Michel, V. L. Telegdi, *Phys. Rev. Lett.* **2** (1959) 435.
- [30] J. Audretsch, *J. Phys. A: Math. Gen.* **14** (1981) 411.
- [31] J. Audretsch, *Phys. Rev.* **D24** (1981) 1470.
- [32] K. Rafanelli, R. Schiller, *Phys. Rev.* **135B** (1964) 279.