UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

EQUIVALÊNCIAS ENTRE MODELOS DA TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS EM DUAS E TRÊS DIMENSÕES

Paulo Valente

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Otávio Caminha Gomes

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Ciências

Banca examinadora:

Prof. Dr. Marcelo Otávio Caminha Gomes (orientador) - IF/USP
Prof. Dr. Rogério Rosenfeld - IFT/UNESP
Prof. Dr. Paulo Teotônio Sobrinho - IF/USP

SÃO PAULO
1998

Prof. Sylvio Roberto Accioly Canuto
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO - INSTITUTO DE FÍSICA
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
2849
ex. 1

SBI-IFUSP

530.12
V154e
M
ex. 1

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Valente, Paulo José Torres Homem

Equivalências entre Teorias Quânticas de Campos em Duas e Três Dimensões. São Paulo 1998.

Dissertação (Mestrado) Universidade de São Paulo. Instituto de Física - Departamento de Física Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Otávio Caminha Gomes
Área de Concentração: Física de Partículas Elementares

Unitermos: 1. Bosonização; 2. Campos; 3. Thirring; 4. Chern-Simons.

USP/IF/SBI-042/98

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Marcelo Gomes, pela paciência e dedicação na atitude de orientar.

À Capes, por haver me concedido uma bolsa que foi o sustentáculo financeiro para o desenvolvimento do trabalho.

Ao pessoal do Grupo de Teoria de Campos: Prof. Dr. Adilson da Silva, Sérgio, Van Sérgio, Malacarne, Alexandre e Akira, pela disponibilidade para ouvir os seminários, procurando compreender e ajudar sempre que possível.

Aos colegas do Dep. de Física Matemática, Zé Roberto, João Eduardo, Arnaldo...e todos aqueles com quem conversei nos 5 minutos de café e jornal, que foram de grande ajuda nos momentos em que o cérebro não podia mais funcionar.

Ao pessoal da UFBA, em especial aos professores Arthur Matos e Paulo Miranda, que me mostraram o prazer de conhecer a natureza, ajudando e incentivando nas piores e melhores horas.

A Jorge Mario (o Professor) e Raimundo, que me prestaram especial ajuda nos primeiros meses de USP e de Teoria de Campo.

A Leti, por el apoyo, amor e increible paciencia en estos dos años... y más los que vendrán.

A todos os amigos do IFUSP, Zé Carioca (o Bom), Vanicson (o Mau), Josué, Edilson, Luiz Cláudio, Gadelha, Bolinha, Varese, Renata, Márcio, Marcelo, Ettore, Khaled, Fernandinho, Ana Helena, Nara, Célia, Pica-pau, os esquecidos...pela ajuda fornecida na hora certa e pelo apoio a mais um nordestino tentando a vida em São Paulo.

À toda minha familia, que sempre me apoiou e me fez acreditar que eu poderia...

A Luciano Bahia, Luciano (o Porco), Renato, Rô, Octaviano, Astrogildo, Hermenengilda, Pepino e Macotoando que sempre estiveram presentes.

A João Gilberto, pela velocidade.

A Gandalf (o Mago); Bilbo, Frodo, Sam, Merry e Peppin (os hobbits); Legolas (o elfo); Gimli (o anão); Elrond, Aragorn e Boromir (os homens); e todos aqueles que se uniram para destruir O Anel e livrar-nos do poder maligno do Senhor do Escuro.

Às Marias e às Joanas.

Abstract

We made a study of certain QFT models in 2 and 3 space-time dimensions. In 2D we analyzed the Thrring, Thirring SU(2) and Schwinger models, keeping special focus on the equations of motion, through its bosonized solutions. It is shown that the existence of an explicit mass term in the renormalized equations depends on the coupling constant value. In 3D we used the Functional Integration to obtain equivalence relations between QFT models. In particular, for a Lagrangian of two vector gauge fields (one Self-dual and other of Maxwell-Chern-Simons type) coupled with fermions, it is shown that, in the weak coupling regime, the fermionic determinant lead us to a non local bosonic theory. We finish comparing the results obtained in 2 and 3 dimensions.

Resumo

É efetuado o estudo de alguns modelos em TQC em 2 e 3 dimensões espaço-temporais. Em 2 D são analisados os modelos de Thirring, Thirring SU(2) e Schwinger, dando enfoque especial à dedução das equações de movimento através de suas soluções bosonizadas. É mostrado que a existência de um termo de massa explícito nas equações de movimento renormalizadas, em geral depende do valor da constante de acoplamento. Em 3 D, é utilizado o procedimento de Integração Funcional para obter equivalências entre modelos da TQC. Para a Lagrangiana de dois campos vetoriais — um Auto-dual e um de Maxwell-Chern-Simons — acoplados com férmions, é mostrado que o cálculo do determinante fermiônico, em regime de acoplamento fraco, leva a uma teoria não local de campos bosônicos. Por fim, é feita uma comparação entre os resultados obtidos em 2 e 3 dimensões.

Índice

1 Introdução **2**

2 Estudos em Duas Dimensões **6**
2.1 O Campo Escalar 7
2.2 Modelo de Thirring 10
2.2.1 Caso não Massivo 12
2.2.2 Caso Massivo 17
2.3 Modelo de Schwinger 25
2.4 Modelo de Thirring com Simetria SU(2) 29
2.5 Estado Fundamental da Teoria de sine-Gordon 36

3 Estudos em Três Dimensões **42**
3.1 Modelo de Thirring 44
3.2 Modelos Auto-dual e Maxwell-Chern-Simons Acoplados com Férmions 54
3.2.1 Caso 1 57
3.2.2 Caso 2 58
3.2.3 Caso 3 58
3.2.4 Integração nos férmions para o Caso 1 60
3.2.5 Integração nos férmions para o Caso 2 63
3.2.6 Integração nos férmions para o Caso 3 66

4 Discussões **72**

A Convenções e Fórmulas Úteis **75**
A.1 Duas Dimensões 75
A.2 Três Dimensões 77
A.3 Álgebra de Operadores 78

Capítulo 1

Introdução

O estudo de Teorias de Campo em uma dimensão espacial e uma temporal teve papel importante no desenvolvimento de soluções de teorias mais realistas, além de algumas aplicações em problemas da matéria condensada[1].

Tal importância se deve ao fato de muitos modelos em Teoria Quântica de Campos (TQC) em duas dimensões (2D) serem exatamente solúveis, ao contrário do que acontece em dimensões maiores do que dois, onde, na grande maioria das situações, é necessário utilizar métodos aproximativos para extrair resultados satisfatórios[2]. Apesar de simplificada para o tratamento de problemas de espalhamento, a TQC em 2D foi bastante eficaz na descoberta de algumas características que se mostravam ocultas em teorias quadridimensionais, como por exemplo, a dimensão anômala do campo interagente. Este fato revela que a dimensão de escala do campo numa teoria com interação não é, necessariamente, a sua dimensão canônica. Este resultado foi primeiro descoberto para o modelo de Thirring e depois a idéia foi aplicada a outras teorias, mostrando que tal característica persiste em dimensões maiores.

Assim, atuando como uma espécie de laboratório teórico, pode-se dizer que a TQC em 2D tem construído *protótipos de teorias*. Como exemplo, pode-se citar o Modelo de Schwinger — que iremos tratar no segundo Capítulo — como uma teoria para a Eletrodinâmica Quântica de férmions sem massa em 2D. Tal modelo teria a intenção de descrever o confinamento dos *quarks*, uma vez que apresenta partículas carregadas que nunca aparecem no setor observável, que por sua vez, é descrito por bósons escalares. Porém, a extrapolação para uma teoria quadridimensional não preservou a mesma característica, mostrando que o confinamento era resultado da forma peculiar

do potencial Coulombiano em uma dimensão espacial

$$\frac{d^2}{d^2x}\varphi(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \varphi(x) = Kx \qquad ,$$

ou seja, para cargas opostas a atração aumenta com a distância.

Dessa forma, vemos que, em alguns casos, o estudo de teorias bidimensionais pode levar a resultados particulares que não podem ser extrapolados para outras dimensões, mas, em outros, pode fornecer poderosas idéias e métodos para o estudo de modelos mais realistas. O exemplo de um procedimento surgido em 2D e que pode ser de boa utilidade em dimensões maiores é a chamada expansão de Wilson, que consiste em considerar que o produto de dois campos no mesmo ponto pode ser expresso através da seguinte relação

$$\varphi(x)\varphi(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\varphi(x+\varepsilon)\varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(\varepsilon)\mathcal{O}_i(x) \qquad ,$$

sendo $f_i(\varepsilon)$ funções singulares e $\mathcal{O}_i(x)$ operadores locais. Tal ferramenta será largamente usada no Capítulo 2 para a determinação de singularidades provenientes do produto de operadores de campo.

Talvez, a principal peculiaridade da TQC em 2D apareça no estudo de teorias fermiônicas. Em uma única dimensão espacial fica inconcebível o conceito de rotação e, conseqüentemente, o de spin, tornando mais simples a solução de um modelo de interações entre tais campos. Apesar da não existência do spin, pode-se definir o *spin de Lorentz* por analogia com o grupo de rotações — que define o spin — e o grupo de Lorentz. Este fato (a não existência de um spin real em 2D) justifica os consistentes esquemas de bosonização largamente utilizados na solução de modelos fermiônicos, uma vez que a estatística torna-se uma questão de convenção [3].

Uma outra vantagem de se reduzir o número de dimensões de um determinado modelo está no que se refere à sua renormalizabilidade. Em um tratamento perturbativo é imediato ver, por contagem de potências, que uma menor dimensão melhora o comportamento ultravioleta (apesar de, em alguns casos, piorar o comportamento no infravermelho, como veremos mais adiante)[4]. Isto é visto analisando a forma geral de uma função de vértice, quando expressa no espaço dos momentos, isto é, simbolicamente

$$\Gamma(p) = \int \frac{dk k^{D-1}}{(2\pi)^D} F(k,p) \qquad ,$$

sendo p o momento externo. Assim, quanto menor a dimensão D menos divergente será o gráfico. Este fato nos inspira a estudar também teorias em duas dimensões espaciais e uma temporal que, não sendo tão simplificada, pode fornecer resultados mais próximos da realidade, além de poder ser aplicada a alguns problemas físicos que apresentem vínculos planares (ou simetrias), tal como acontece no espalhamento Aharonov-Bohm[5].

Como uma característica curiosa, estudos em 3D mostraram a existência de estatísticas exóticas[6], onde as funções de onda não são, necessariamente, simétricas ou antissimétricas e o spin pode assumir qualquer valor real. Mais explicitamente falando, o auto-valor do operador que permuta a posição de duas partículas pode ser qualquer número real, levando à existência de partículas que não são bósons nem férmions, recebendo o nome de *anyons*. Uma importante aplicação física de tais estatísticas pode estar na matéria condensada, onde fenômenos tipicamente bidimensionais podem ser observados, como o efeito Hall quântico por exemplo[7].

No âmbito da TQC, estados para tais partículas podem ser obtidos se adicionamos a uma teoria de calibre o chamado termo de Chern-Simons, ficando com a Lagrangiana invariante de calibre

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{\theta}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha}A_\mu\partial_\nu A_\alpha \quad .$$

Tal teoria, apesar de não possuir um termo de massa explícito, fornece um pólo não nulo para o propagador, permitindo que uma teoria de calibre contenha estados de partícula com massa de repouso diferente de zero[8]. Alguns trabalhos de revisão sobre o assunto podem ser encontrados na referência [9].

Nesta dissertação, fazemos uma revisão de alguns aspectos da bosonização em 2 e 3D, para, em seguida, estudar um novo modelo de campos vetoriais acoplados com férmions em 3D. Procuramos dividir o trabalho em duas partes distintas: no Capítulo 2 estudamos modelos em 2D; no Capítulo 3, modelos em 3D.

No Capítulo que trata de duas dimensões, começamos com uma discussão preliminar sobre campos escalares. Em seguida, estudamos os procedimentos de bosonização para os modelos de Thirring, Schwinger e Thirring com simetria SU(2). Ao tratar tais modelos, damos especial enfoque à definição rigorosa dos operadores de campo, tratando corretamente as singularidades que surgem do produto de campos no mesmo ponto, e da dedução direta das equações de movimento, levando em conta a não comutatividade dos operadores. Finalizamos o Capítulo efetuando uma análise do estado fundamental

da teoria de sine-Gordon, utilizada nos procedimentos de bosonização.

No Capítulo seguinte, revisamos alguns trabalhos que tratam de equivalências entre modelos fermiônicos e modelos de campos vetoriais, utilizando o formalismo de integrais de trajetórias. Em particular, analisamos relações do Modelo de Thirring Massivo (MTM) com os modelos Auto-dual (AD) e Maxwell-Chern-Simons (MCS), tal como como foi estudado nas referências [10] e [11]. Posteriormente, analisamos um modelo de dois campos vetoriais (um de MCS e um AD), ambos acoplados com férmions, tal como foi proposto em [12], efetuando integrações funcionais ora nos férmions, ora nos campos vetoriais. O estudo de tal modelo, por ainda não estar amplamente discutido, representa a principal contribuição deste trabalho.

Visando uma melhor organização a fim de permitir que o leitor possa reproduzir todos os resultados aqui expressos, uma lista de Apêndices foi acrescentada no final. Eles contêm algumas definições de notação, convenções de matrizes de Dirac, relações algébricas e outras fórmulas utilizadas, facilitando a leitura do texto.

Por fim, fazemos uma análise geral dos resultados obtidos, além de uma comparação crítica entre os métodos de bosonização utilizados em duas e três dimensões.

Capítulo 2

Estudos em Duas Dimensões

Neste Capítulo, vamos efetuar uma breve revisão dos modelos de Thirring, Schwinger e Thirring SU(2). Em todos os casos, vamos procurar expressar os operadores fermiônicos como funções dos operadores bosônicos, que representa a chamada técnica de *bosonização*.

Algumas foram as evidências de que um esquema de bosonização consistente poderia vir a surgir no âmbito da TQC em 2D. Em 1972, Dell 'Antonio *at al*[13], estudando o Modelo de Thirring, conseguiu expressar o produto de dois campos espinoriais em termos das variáveis do cone de luz e o resultado mostrou depender apenas das correntes e de uma função singular da posição relativa entre os campos. A corrente do modelo é conservada, podendo ser expressa em termos de um campo escalar, e assim o operador fermiônico — a menos de renormalizações — fica expresso em termos de bósons.

Pelo lado das teorias escalares, já se sabia que um campo escalar sem massa em duas dimensões "reside" em um espaço de Hilbert com métrica indefinida, isto é, suas funções de correlação não são distribuições positivas definidas. Entretanto, funções de correlação de exponenciais de campos escalares sem massa não sofrem do mesmo problema se uma regra de superseleção for imposta sobre as constantes de acoplamento, o que induz uma carga para o campo escalar, carga esta que aparece como função da estranha topologia do espaço de Hilbert.

Em 1975 surgiram os trabalhos de Coleman[4], Mandelstam[14] e Swieca[3], mostrando importantes relações entre campos fermiônicos e bosônicos. Mais tarde, foi mostrado em [15] a equivalência entre o Modelo de Thirring com um modelo que acopla derivadas de campos escalares com a corrente fermiônica; utilizando esta relação o termo de massa fermiônico foi tratado como uma

perturbação sobre o Modelo de Thirring, reforçando ainda mais as relações entre o Modelo de Thirring e modelos bosônicos. Outros trabalhos relacionando bósons e férmions em 2D podem ser encontrados na referência [16].

Também o Modelo de Schwinger mostrou soluções em termos de campos escalares. Foi mostrado por Lowenstein e Swieca[17] que a corrente poderia ser expressa como o gradiente de funções escalares e, sendo a teoria invariante de calibre, o operador fermiônico deveria conter um fator de fase, proporcional ao campo escalar escolhido como calibre. Este fato, somado aos resultados obtidos para o Modelo de Thirring, levou ao descobrimento de uma solução bosonizada para o Modelo de Schwinger, bem como para a sua versão massiva.

Resumindo, nos casos que vamos tratar neste capítulo, a bosonização será obtida expressando-se os operadores do modelo fermiônico, como função de campos escalares, cuja equação de movimento será determinada pelo modelo fermiônico que deseja-se descrever. Em vista disto, vamos nos ater a um estudo preliminar de tais campos que, em duas dimensões, apresenta certas peculiaridades.

2.1 O Campo Escalar

A teoria descrita pela Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \tag{2.1}$$

descreve um campo escalar de spin 0 que é solução da equação de Klein-Gordon

$$(\Box + m^2)\varphi = 0 \quad . \tag{2.2}$$

Tal campo permite a seguinte decomposição de Fourier

$$\varphi(x) = \int \frac{dk_1}{2\pi\sqrt{k_0}}\left[a(k)e^{-ikx} + a^\dagger(k)e^{ikx}\right] \quad , \tag{2.3}$$

onde $a(k)$ e $a^\dagger(k)$ são os operadores de destruição e criação de partícula a partir do estado de mais baixa energia (o vácuo), de forma que

$$a(k) \mid 0\rangle \; = 0 \quad , \tag{2.4}$$

e $k_0 = \sqrt{k_1^2 + m^2}$. Impondo a regra de comutação canônica

$$[\varphi(x), \dot{\varphi}(y)] = i\delta(x-y) \tag{2.5}$$

pode-se calcular a função de dois pontos

$$\Delta^{(+)}(x-y) \equiv \langle 0 \mid \varphi(x)\varphi(y) \mid 0 \rangle \quad , \tag{2.6}$$

que satisfaz as equações

$$\begin{aligned} \left(\Box + m^2\right) \Delta^{(+)}(x-y; m^2) &= 0 & (2.7) \\ \partial_x^0 \, \Delta^{(+)}(x-y; m^2)\big|_{x^0=y^0} &= -\frac{1}{2}\delta(x^1 - y^1) & (2.8) \end{aligned}$$

Chamando $\varphi^{(-)}(x)$ a parte de destruição e $\varphi^{(+)}(y)$ a parte de criação dos campos, ficamos com o seguinte

$$\begin{aligned} \Delta^{(+)}(x-y) &= \langle 0 \mid [\varphi^{(-)}(x), \varphi^{(+)}(y)] \mid 0 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int \frac{dk_1}{2k^0} e^{-ik(x-y)} \\ &= \frac{1}{2\pi} K_0 \left(m\sqrt{-(x-y)^2 + i(x_0 - y_0)\varepsilon} \right) \quad , \end{aligned} \tag{2.9}$$

onde a função $K_0(x)$ é a função de Bessel de segunda espécie, que é singular na origem, levando a divergências na região do infravermelho (IV) quando o limite de $m \to 0$ é tomado.

Portanto, a definição da função de dois pontos de um campo sem massa satisfazendo a equação

$$\Box\phi = 0 \tag{2.10}$$

deverá, necessariamente, conter uma regularização[18][19]. Dessa forma, definimos

$$D^{(+)}(x-y) \equiv \langle 0 \mid \phi(x)\phi(y) \mid 0 \rangle \tag{2.11}$$

através da integral regularizada

$$D^{(+)}(x-y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^1}{2|k^1|} [e^{-ik(x-y)} - \theta(\lambda - |k^1|)] \quad , \tag{2.12}$$

sendo $\theta(\lambda - |k^1|)$ a função degrau de Heavside e λ o corte IV. Pode-se tomar o limite de λ pequeno, obtendo

$$D^{(+)}(x-y) = -\frac{1}{4\pi} \ln[-\mu^2(x-y)^2 + i(x_0 - y_0)\varepsilon] \tag{2.13}$$

onde $\mu = e^{\gamma}\lambda$. A constante γ é a conhecida *constante de Euler*. Ao efetuar a subtração (2.12) a função $D^{(+)}$ perde sua propriedade de positividade

formal mostrando que ela está imersa em um espaço de Hilbert com métrica indefinida[18].

É possível, porém, definir exponenciais de campos livres sem massa através do operador renormalizado

$$\exp\{i\alpha\phi(x_1)\} = \left(\frac{m^2\mu^2}{\lambda^2}\right)^{\frac{\alpha^2}{8\pi}} : \exp\{i\alpha\phi(x_1)\} : \tag{2.14}$$

onde : : representa a ordenação de Wick, que mantém a parte de destruição à direita da de criação. A função de dois pontos de tal operador será calculada tomando-se o limite de massa zero de uma teoria com massa m.

$$\begin{aligned} &\langle 0 \mid \exp\{i\alpha_1\phi(x_1)\}\exp\{i\alpha_2\phi(x_2)\} \mid 0\rangle = \\ &= \lim_{m\to 0}\left(\frac{m^2\mu^2}{\lambda^2}\right)^{\frac{\alpha_1^2+\alpha_2{}^2}{8\pi}} \langle 0 \mid : \exp\{i\alpha_1\phi(x_1)\} :: \exp\{i\alpha_2\phi(x_2)\} : \mid 0\rangle_m \quad . \end{aligned} \tag{2.15}$$

O limite indicado nesta equação será diferente de zero somente se a seguinte regra de superseleção for introduzida[3]

$$\begin{aligned} &\langle 0 \mid \exp\{i\alpha_1\phi(x_1)\}\exp\{i\alpha_2\phi(x_2)\} \mid 0\rangle = \\ &= \begin{cases} 0 & , \text{ se } \alpha_1+\alpha_2 \neq 0 \\ [-(x_1-x_2)^2 + i\varepsilon(x_1^0 - x_2^0)]^{\frac{\alpha_1\alpha_2}{4\pi}} & , \text{ se } \alpha_1+\alpha_2 = 0 \end{cases} \quad . \end{aligned} \tag{2.16}$$

As funções de N pontos também podem ser obtidas seguindo o mesmo critério. De uma forma geral, ficamos com

$$\begin{aligned} &\langle 0 \mid \exp\{i\alpha_1\phi(x_1)\}\exp\{i\alpha_2\phi(x_2)\}...\exp\{i\alpha_n\phi(x_n)\} \mid 0\rangle = \\ &= \begin{cases} 0 & , \text{ se } \sum_i \alpha_i \neq 0 \\ \prod\limits_{i<j=1}^{n} [-(x_i-x_j)^2 + i\varepsilon(x_i^0 - x_j^0)]^{\frac{\alpha_i\alpha_j}{4\pi}} & , \text{ se } \sum_i \alpha_i = 0 \end{cases} \quad . \end{aligned} \tag{2.17}$$

Tais exponenciais serão nossas ferramentas básicas para a construção das soluções bosonizadas dos modelos fermiônicos. A regra de superseleção introduzida leva a um natural aparecimento de uma carga para o campo escalar neutro, carga esta que será descrita pela dinâmica do modelo fermiônico em questão[3]. Como já foi dito, tal regra de superseleção é uma conseqüência do fato das funções de correlação de campos sem massa não serem positivas definidas, levando a uma topologia peculiar para o espaço de Hilbert.

2.2 Modelo de Thirring

O modelo de interação quártica de campos fermiônicos em duas dimensões descrito pela Lagrangiana

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - g(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi)(\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi) \tag{2.18}$$

foi primeiro proposto por W. Thirring em 1958[20] por ser um modelo exatamente solúvel. Em seu trabalho, Thirring encontrou os auto-estados da Hamiltoniana e calculou elementos de matriz do campo fermiônico entre os estados de vácuo e uma partícula. Podemos arriscar dizer que a maior importância deste trabalho se deve à sua natureza pedagógica, uma vez que propiciou uma importante base para cálculos subseqüêntes, apesar de não haver solucionado um problema físico específico.

As funções de correlação

$$S_F(x-y) = \langle 0 \mid \psi(x_1)\psi(x_2)...\psi(x_n)\overline{\psi}(x_1)\overline{\psi}(x_2)...\overline{\psi}(x_n) \mid 0\rangle \tag{2.19}$$

foram calculadas por Wightman [18], que utilizou o fato das correntes vetorial e axial, definidas respectivamente como

$$j^{\mu}(x) = \bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi(x) \tag{2.20}$$

$$j_5^{\mu}(x) = \epsilon^{\mu\nu}j_{\nu}(x) = \bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma^5\psi(x) \quad , \tag{2.21}$$

serem conservadas

$$\partial_{\mu}j^{\mu}(x) = \partial_{\mu}j_5^{\mu}(x) = 0 \quad , \tag{2.22}$$

mostrando que $j^{\mu}(x)$ é um campo livre, o que implica na solubilidade do modelo. Sendo assim, foi natural expressar tal corrente conservada como o gradiente de um campo escalar

$$j^{\mu}(x) \propto \epsilon^{\mu\nu}\partial_{\nu}\phi \quad \Rightarrow \quad \Box\phi = 0 \quad , \tag{2.23}$$

tornando a bosonização uma solução bastante conveniente para o modelo de Thirring.

As funções de Green e as singularidades na definição da corrente causadas pelo produto de campos no mesmo ponto foram estudadas por Johnson[21]. Ele utilizou um procedimento de limite que elimina as divergências,

$$j^{\mu}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{4}[\bar{\psi}(x+\varepsilon)\gamma^{\mu}\psi(x) + \bar{\psi}(x+\tilde{\varepsilon})\gamma^{\mu}\psi(x) + \varepsilon \to -\varepsilon] \ , \tag{2.24}$$

sendo $\tilde{\varepsilon}^{\mu} = \epsilon^{\mu\nu}\varepsilon_{\nu}$, e que se mostrou válido para o Modelo de Thirring, mas não é suficiente para definir uma corrente conservada no tratamento do modelo massivo pois, neste caso, o campo escalar não é um campo livre.

Em dimensões maiores que dois tal modelo seria não renormalizável, dificultando o tratamento perturbativo. Porém, em duas dimensões o modelo é renormalizável, pois a dimensão canônica dos campos é 1/2 e a interação quártica tem dimensão 2, portanto a constante de acoplamento é adimensional.

Do ponto de vista da bosonização, os trabalhos de Coleman [4] e Mandelstam [14] tiveram papéis fundamentais. No primeiro, Coleman, estudando perturbativamente a teoria de sine-Gordon descrita por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^{\mu}\phi\partial_{\mu}\phi + \frac{\alpha_o}{\pi}\cos(\beta\phi) + \gamma_o \quad , \tag{2.25}$$

com γ_o, α_o e β constantes positivas, constatou que as funções de correlação do operador $:\cos(\beta\phi(x)):$ são idênticas àquelas obtidas para o operador de massa $\overline{\psi}\psi(x)$ no caso do Modelo de Thirring, ou seja, utilizando (2.16) ele pôde mostrar que

$$\langle 0 \mid \prod_{i,j} :\cos(\beta\phi(x_i)) :: \cos(\beta\phi(y_j)) :\mid 0\rangle_{SG} = \langle 0 \mid \prod_{i,j} \overline{\psi}\psi(x_i)\overline{\psi}\psi(y_j) \mid 0\rangle_{TH} \quad , \tag{2.26}$$

onde os índices SG e TH indicam os estados de vácuo das teorias de sine-Gordon e Thirring, respectivamente. Para que a relação tivesse consistência, as constantes de acoplamento deveriam ser ajustadas da seguinte forma

$$\frac{\beta^2}{4\pi} = \frac{1}{1+g/\pi} \quad , \tag{2.27}$$

mostrando que

$$\beta^2 = 4\pi \quad \Longrightarrow \quad g = 0 \quad , \tag{2.28}$$

representando férmions livres e massivos. Como será visto no final deste Capítulo, Coleman também mostrou que para $\beta^2 \geqslant 8\pi$ a teoria de sine-Gordon não possui estado fundamental, pois o valor médio da Hamiltoniana diverge para estes valores da constante de acoplamento. Por este motivo, em toda a nossa discussão, vamos nos ater apenas à faixa $0 < \beta^2 \leqslant 8\pi$.

Por outro lado, Mandelstam construiu o operador fermiônico como uma exponencial de campos escalares,

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi}}e^{-i\frac{\pi}{4}\gamma^5} :\exp\{i\chi(x)\}: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

sendo

$$\chi(x) = \frac{\beta}{2}\gamma^5\phi(x) + \frac{2\pi}{\beta}\tilde{\phi}(x) \tag{2.30}$$

onde o campo $\tilde{\phi}$ é definido como um operador não local

$$\tilde{\phi}(x^0, x^1) = \int_{x^1}^{\infty} \dot{\phi}(x^0, y^1)dy^1 \quad . \tag{2.31}$$

Mandelstam mostrou que a equação de movimento para o Modelo de Thirring Massivo (MTM) é obtida se o campo bosônico for uma solução da equação de sine-Gordon

$$\Box\phi + \frac{\beta\alpha_o}{\pi}\sin(\beta\phi) = 0 \quad . \tag{2.32}$$

A equação (2.29) ficou conhecida como *Fórmula de Mandelstam* e representa o ingrediente básico para os esquemas de bosonização em duas dimensões. A partir destes dois trabalhos, ficou estabelecida a equivalência entre a teoria de sine-Gordon e o MTM. Apesar de correta do ponto de vista formal, a referida identificação ainda necessitava de uma análise mais rigorosa, pois as singularidades do operador exponencial — e portando do cosseno — não haviam sido determinadas. Uma definição mais rigorosa de tal operador foi proposta por Swieca[22] e será usada mais adiante no cálculo das equações de movimento.

A fim de estudar o Modelo de Thirring com um pouco mais de detalhe, vamos separar a nossa discussão em duas partes: **(1)**Modelo de Thirring puro (sem massa) e **(2)**Modelo de Thirring Massivo.

2.2.1 Caso não Massivo

Pode-se calcular a corrente utilizando uma expansão de curta distância, também conhecida como expansão de Wilson para operadores exponenciais e, em seguida, efetuar a prescrição proposta por Johnson, equação (2.24). Dessa forma,

$$\overline{\psi}\gamma^\mu\psi(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\psi}(x+\varepsilon)\gamma^\mu\psi(x) \quad . \tag{2.33}$$

Utilizando (2.29) escrevemos

$$\begin{aligned}\overline{\psi}(x+\varepsilon)\gamma^\mu\psi(x) &= \frac{\mu}{2\pi}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{4}\gamma^5} : \exp\{i\overline{\chi}(x+\varepsilon)\} : \gamma^\mu \times \\ &: \exp\{i\chi(x)\} : e^{-i\frac{\pi}{4}\gamma^5}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ,\end{aligned} \tag{2.34}$$

onde

$$\overline{\chi}(x) = \frac{\beta}{2}\gamma^5\phi(x) - \frac{2\pi}{\beta}\tilde{\phi}(x) \quad . \tag{2.35}$$

As fases proporcionais a γ^5 se cancelam, devido à anticomutatividade das matrizes γ. Usando (A.28) ficamos com

$$\overline{\psi}(x+\varepsilon)\gamma^\mu\psi(x) = \frac{\mu}{2\pi}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} : \exp\{i[\overline{\chi}(x+\varepsilon) - \chi(x)]\} : Z(\varepsilon)\gamma^\mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.36}$$

onde

$$Z(\varepsilon) = \exp\{-[\overline{\chi}^{(-)}(x+\varepsilon), \chi^{(+)}(x)]\} \quad . \tag{2.37}$$

Expandimos a exponencial em torno de ε, utilizando as relações (A.14) e (A.15), obtendo

$$\overline{\psi}(x+\varepsilon)\gamma^\mu\psi(x) \simeq \frac{\mu}{2\pi}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 + i\frac{\beta}{2}\gamma^5\varepsilon^\nu\partial_\nu\phi(x) - i\frac{2\pi}{\beta}\varepsilon^\nu\widetilde{\partial}_\nu\phi(x) - \\ -i\frac{2\pi}{\beta}\varepsilon_0\int_{x_1}^{\infty}\Box\phi(x_0, x_1')dx_1' \end{bmatrix} Z(\varepsilon)\gamma^\mu\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.38}$$

Como já foi dito, $\Box\phi = 0$, portanto o termo proporcional a ε_0 não dá contribuições. Usando (2.30) e (2.35), teremos

$$\begin{aligned} Z(\varepsilon) &= \exp\{\frac{\beta^2}{4}[\phi^{(-)}(x+\varepsilon), \phi^{(+)}(x)] + \frac{4\pi^2}{\beta^2}[\widetilde{\phi}^{(-)}(x+\varepsilon), \widetilde{\phi}^{(+)}(x)] \\ &\quad -\pi\gamma^5[\widetilde{\phi}^{(-)}(x+\varepsilon), \phi^{(+)}(x)] - \pi\gamma^5[\phi^{(-)}(x+\varepsilon), \widetilde{\phi}^{(+)}(x)]\} \end{aligned} \tag{2.39}$$

O cálculo de $Z(\varepsilon)$ é feito utilizando as fórmulas (A.8)-(A.11). O resultado fica

$$Z(\varepsilon) = \exp\left\{\left(\frac{\beta^2}{4} + \frac{4\pi^2}{\beta^2}\right)D^{(+)}(\varepsilon) - 2\pi\gamma^5\widetilde{D}^{(+)}(\varepsilon)\right\} \quad . \tag{2.40}$$

Multiplicando ambos os lados da equação (2.38) por uma função $W(\varepsilon)$ dada por

$$W(\varepsilon) = \exp\left\{-\left(\frac{\beta^2}{4} + \frac{4\pi^2}{\beta^2} - 2\pi\right)D^{(+)}(\varepsilon)\right\} \quad , \tag{2.41}$$

define-se uma corrente renormalizada $j_r^\mu(x;\varepsilon)$ via

$$j_r^\mu(x;\varepsilon) = W(\varepsilon)\overline{\psi}(x+\varepsilon)\gamma^\mu\psi(x) \quad . \tag{2.42}$$

Como $\beta^2 = 4\pi$ representa o caso livre, esta normalização é escolhida de forma que o expoente se anule para este valor de β. Utilizando agora o procedimento de Johnson (2.24), a corrente renormalizada será definida por

$$j_r^\mu(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{4}[j_r^\mu(x;\varepsilon) + j_r^\mu(x;\widetilde{\varepsilon}) + \varepsilon \to -\varepsilon] \quad , \tag{2.43}$$

resultando que

$$j_r^\mu(x) = -\left(\frac{\beta}{4\pi} + \frac{1}{\beta}\right)\epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\phi(x) \quad . \tag{2.44}$$

Para conveniência futura, pode-se efetuar uma última normalização sobre a corrente

$$j_r^\mu(x) \to j^\mu(x) = \frac{\beta}{2\pi}\left(\frac{\beta}{4\pi} + \frac{1}{\beta}\right)^{-1} j_r^\mu(x) \quad ,$$

obtendo a forma final

$$j^\mu(x) = -\frac{\beta}{2\pi}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\phi(x) \quad , \tag{2.45}$$

sendo

$$j_l^\mu(x) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\phi(x) \tag{2.46}$$

à corrente livre. A partir de tal expressão obtém-se a carga topológica da teoria escalar

$$\begin{aligned} Q &= \int dx_1 j_r^0(x) = -\frac{\beta}{2\pi}\int dx_1 \epsilon^{0\nu}\partial_\nu\phi(x_0, x_1) = \\ &= \frac{\beta}{2\pi}[\phi(x_0, +\infty) - \phi(x_0, -\infty)] \quad . \end{aligned} \tag{2.47}$$

Uma vez definida a corrente, podemos dar início ao cálculo da equação de movimento. Como já foi mencionado, vamos utilizar uma definição mais rigorosa do operador exponencial tal como proposto em [22]. Isto é obtido através da redefinição dos operadores de campo

$$\phi(x^0, x^1) \to \phi(x, h) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta^1 h_{x^1}(\eta^1)\phi(x^0, \eta^1) \tag{2.48}$$

$$\tilde{\phi}(x^0, x^1) \to \tilde{\phi}(x, h) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta^1 h_{x^1}(\eta^1)\int_{\eta^1}^{+\infty} dy^1 \dot{\phi}(x^0, y^1) \tag{2.49}$$

onde a função $h_{x^1}(\eta^1)$ é uma função teste bem comportada dependente apenas da diferença $x^1 - \eta^1$, que poderá tender a uma $\delta(x^1 - \eta^1)$ no final dos cálculos. Com estas novas definições, a Fórmula de Mandelstam também se modifica e o operador fermiônico fica definido como

$$\psi(x,h) = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}\gamma^5} : \exp\{i\chi(x,h)\} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.50}$$

onde

$$\chi(x,h) = \frac{\beta}{2}\gamma^5\phi(x,h) + \frac{2\pi}{\beta}\tilde{\phi}(x,h) \quad . \tag{2.51}$$

No tratamento que se segue, vamos utilizar a equação (2.50) como nossa definição para o campo fermiônico e calcular a sua equação de movimento aplicando o operador de Dirac $i\gamma^\mu\partial_\mu$ sobre a exponencial. Deve ser notado que devido à regra de comutação canônica, a derivada da exponencial não comuta com ela própria. É conhecido[22][23] que a fórmula correta para a derivada da exponencial de um operador é dada por

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}[\exp A(x)] = \int_0^1 d\lambda \exp[\lambda A]\frac{\partial A}{\partial x^\mu}\exp[(1-\lambda)A] \quad , \tag{2.52}$$

sendo A um operador qualquer dependente do parâmetro x. Para o caso em que $\left[\partial_\mu A, e^{\lambda A}\right] = 0$ as exponenciais dependentes de λ se cancelam e ficamos com

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}[\exp A(x)] = \frac{\partial A}{\partial x^\mu}\exp A(x) \quad . \tag{2.53}$$

Utilizando as equações (2.50), (2.51) e (2.52), ficamos com

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x,h) = -\gamma^\mu\int_0^1 d\lambda e^{i\lambda\chi}\partial_\mu\chi e^{i(1-\lambda)\chi} \tag{2.54}$$

onde

$$\partial_\mu\chi(x,h) = \frac{\beta}{2}\gamma^5\partial_\mu\phi(x,h) + \frac{2\pi}{\beta}\partial_\mu\widetilde{\phi}(x,h) \quad . \tag{2.55}$$

Por outro lado, o segundo termo fornece

$$\partial_\mu\widetilde{\phi}(x,h) = \epsilon_{\mu\nu}\partial^\nu\phi(x,h) + g_{\mu 0}\int_{-\infty}^{+\infty} d\eta^1 h_{x^1}(\eta^1)\int_{\eta^1}^{\infty} dy^1 \Box\phi(x^0,y^1) \quad . \tag{2.56}$$

Como o campo ϕ é um campo livre — $\Box\phi = 0$ — teremos, finalmente,

$$\partial_\mu \chi(x,h) = \frac{\beta}{2}\gamma^5 \partial_\mu \phi(x,h) + \frac{2\pi}{\beta}\epsilon_{\mu\nu}\partial^\nu \phi(x,h) \quad . \tag{2.57}$$

Substituindo em (2.54), temos

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x,h) &= -\frac{\beta}{2}\gamma^\mu \int_0^1 d\lambda e^{i\lambda\chi}\gamma^5 \partial_\mu \phi(x,h) e^{i(1-\lambda)\chi} - \\ &\quad -\frac{2\pi}{\beta}\gamma^\mu \int_0^1 d\lambda e^{i\lambda\chi}\widetilde{\partial}_\mu \phi(x,h) e^{i(1-\lambda)\chi} \quad . \end{aligned} \tag{2.58}$$

Cada uma das integrais pode ser escrita em sua forma simétrica através da transformação $\lambda \to \lambda' = 1 - \lambda$, ficando com

$$\begin{aligned} \int_0^1 d\lambda e^{i\lambda\chi}\gamma^5 \partial_\mu \phi(x,h) e^{i(1-\lambda)\chi} &= \frac{1}{2}\int_0^1 d\lambda e^{i\lambda\chi}\gamma^5 \partial_\mu \phi(x,h) e^{i(1-\lambda)\chi} + \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^1 d\lambda e^{i(1-\lambda)\chi}\gamma^5 \partial_\mu \phi(x,h) e^{i\lambda\chi} \end{aligned} \tag{2.59}$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^1 d\lambda e^{i\lambda\chi}\widetilde{\partial}_\mu \phi(x,h) e^{i(1-\lambda)\chi} &= \frac{1}{2}\int_0^1 d\lambda e^{i\lambda\chi}\widetilde{\partial}_\mu \phi(x,h) e^{i(1-\lambda)\chi} + \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^1 d\lambda e^{i(1-\lambda)\chi}\, \widetilde{\partial}_\mu \phi(x,h) e^{i\lambda\chi} \end{aligned} \tag{2.60}$$

Pode-se expandir os integrandos utilizando a fórmula de Baker-Hausdorff, equação (A.24), lembrando que

$$\begin{aligned} \left[\chi(x,h), \widetilde{\partial}_\mu \phi(x,h)\right] &= \textit{c-number} \\ \left[\chi(x,h), \gamma^5 \partial_\mu \phi(x,h)\right] &= \textit{c-number} \quad , \end{aligned} \tag{2.61}$$

e em seguida efetuar as integrações em λ. O resultado fica

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x,h) = -\frac{\beta}{4}\gamma^\mu\gamma^5\{\partial_\mu \phi(x,h), e^{i\chi(x,h)}\} - \frac{\pi}{\beta}\gamma^\mu \epsilon_{\mu\nu}\{\partial^\nu \phi(x,h), e^{i\chi(x,h)}\} \quad . \tag{2.62}$$

Usando (A.4a), a definição (2.50) e definição da corrente (2.45), a equação de movimento para o campo fermiônico será dada por

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x,h) = -\frac{2\pi}{\beta}\left(\frac{\beta}{4} - \frac{\pi}{\beta}\right)\gamma^\mu\{j_\mu(x,h), \psi(x,h)\} \quad , \tag{2.63}$$

mostrando que para $\beta^2 = 4\pi$ obtém-se a equação de Dirac para um campo livre.

2.2.2 Caso Massivo

Seguindo a equivalência provada por Coleman e Mandelstam, tomamos como hipótese o campo bosônico satisfazendo a equação de sine-Gordon (2.32). Assim, uma vez que o campo escalar não é mais um campo livre, o procedimento de limite dado por (2.24) não é a forma mais adequada para a construção de uma corrente conservada, como pode ser visto observando-se o termo proporcional a ε_0 na equação (2.38). Neste caso, deve-se definir uma corrente conservada através do seguinte procedimento de limite[14]

$$j_r^\mu(x) = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \left[\delta_0^\mu + \frac{\beta^2}{4\pi}\delta_1^\mu\right] \left[W(\varepsilon_1)\overline{\psi}(x+\varepsilon_1)\gamma^\mu\psi(x) + \varepsilon \to -\varepsilon\right] \quad , \tag{2.64}$$

sendo $W(\varepsilon)$ dada por (2.41). O resultado final fica

$$j_r^\mu(x) = -\frac{\beta}{2\pi}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\phi(x) \quad . \tag{2.65}$$

A razão do primeiro fator colocado na nova definição da corrente deve-se ao fato de que as componentes j^0 e j^1 necessitam de normalizações diferentes para que sejam componentes de um vetor.

Como anteriormente, damos início ao cálculo da equação de Dirac utilizando a equação (2.52). Porém, como ϕ é uma solução da equação de sine-Gordon (2.32), teremos

$$\begin{aligned} \partial_\mu\chi(x,h) &= \frac{\beta}{2}\gamma^5\partial_\mu\phi(x,h) + \frac{2\pi}{\beta}\widetilde{\partial}_\mu\phi(x,h) - \\ -g_{\mu 0}2\alpha_o \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta^1 h_{x^1}(\eta^1) \int_{\eta^1}^{+\infty} dy^1 &: \sin\beta\phi(x^0,y^1): \quad , \end{aligned} \tag{2.66}$$

onde o termo do D 'Alambertiano em (2.56) foi substituído pelo seno. Inserindo isto na equação (2.54), ficamos com

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x,h) &= -\frac{\beta}{2}\gamma^\mu \int_0^1 d\lambda \exp[i\lambda\chi]\gamma^5\partial_\mu\phi(x,h)\exp[i(1-\lambda)\chi] - \\ &\quad -\frac{2\pi}{\beta}\gamma^\mu \int_0^1 d\lambda \exp[i\lambda\chi]\widetilde{\partial}_\mu\phi(x,h)\exp[i(1-\lambda)\chi] + \\ &\quad + \underbrace{\begin{array}{c}\gamma^0 2\alpha_o \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta^1 h_{x^1}(\eta^1) \int_{\eta^1}^{+\infty} dy^1 \times \\ \int_0^1 d\lambda \exp[i\lambda\chi] : \sin\beta\phi(x^0,y^1) : \exp[i(1-\lambda)\chi]\end{array}}_{III} \end{aligned} \tag{2.67}$$

Os dois primeiros termos são idênticos àqueles obtidos na seção anterior. No terceiro termo, contudo, não é conveniente aplicar a fórmula de Baker-Hausdorff diretamente, uma vez que o comutador do operador seno com o campo χ não é um *c-number*.

Para simplificar a notação, vamos definir um operador $\mathcal{S}_h$ como sendo

$$\mathcal{S}_h = \gamma^0 \alpha_o \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta^1 h_{x^1}(\eta^1) \int_{\eta^1}^{+\infty} dy^1 \quad . \tag{2.68}$$

Colocando a integral em λ em sua forma simétrica, o termo III ficará

$$\begin{aligned} III &= \mathcal{S}_h\{\int_0^1 d\lambda e^{[i\lambda\chi]} : \sin\beta\phi(x^0,y^1) : e^{[i(1-\lambda)\chi]} \\ &+ \int_0^1 d\lambda e^{[i(1-\lambda)\chi]} \; : \; \sin\beta\phi(x^0,y^1) : e^{[i\lambda\chi]}\} \quad . \end{aligned} \tag{2.69}$$

Fazendo uso da fórmula (A.27) — que é uma consequência de (A.24) — vamos ficar com

$$\begin{aligned} III &= \mathcal{S}_h\{\left[\int_0^1 d\lambda : \sin\left[\beta\phi(x^0,y^1) + i\lambda[\chi(x,h),\beta\phi(x^0,y^1)]_{T.I.}\right] :\right] e^{i\chi(x,h)} \\ &+ e^{i\chi(x,h)} \left[\int_0^1 d\lambda : \sin\left[\beta\phi(x^0,y^1) - i\lambda[\chi(x,h),\beta\phi(x^0,y^1)]_{T.I.}\right] :\right]\} \end{aligned} \tag{2.70}$$

A integração em λ é feita sem maiores problemas, fornecendo

$$\begin{aligned} III &= \mathcal{S}_h\left\{\frac{1}{i\beta[\chi(x,h),\phi(x^0,y^1)]_{T.I.}}\{[: \cos\beta\phi(x^0,y^1) :, e^{i\chi(x,h)}] + \right. \\ &+ e^{i\chi(x,h)} \; : \; \cos\left[\beta\phi(x^0,y^1) - i\beta[\chi(x,h),\phi(x^0,y^1)]_{T.I.}\right] : - \\ &- : \cos\left[\beta\phi(x^0,y^1) + i\beta[\chi(x,h),\phi(x^0,y^1)]_{T.I.}\right] : e^{i\chi(x,h)}\}\} \end{aligned} \tag{2.71}$$

Um pouco mais de álgebra levará a

$$III = 2\mathcal{S}_h\left\{\frac{1}{i\beta[\chi(x,h),\phi(x^0,y^1)]_{T.I.}}[: \cos\beta\phi(x^0,y^1) :, e^{i\chi(x,h)}]\right\} \quad . \tag{2.72}$$

Por outro lado, o cálculo do comutador no denominador fornece

$$[\chi(x,h),\phi(x^0,y^1)]_{T.I.} = \frac{2\pi}{i\beta}\int_{-\infty}^{y^1} d\eta^1 h_{x^1}(\eta^1) \quad . \tag{2.73}$$

Substituindo isto e o operador $\mathcal{S}_h$ ficaremos com o seguinte

$$III = \gamma^0 \frac{\alpha_o}{\pi} \frac{1}{\int_{-\infty}^{y^1} d\eta^1 h_{x^1}(\eta^1)} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta^1 h_{x^1}(\eta^1) \int_{\eta^1}^{+\infty} dy^1 [: \cos\beta\phi(x^0, y^1) :, e^{i\chi(x,h)}] \quad . \tag{2.74}$$

Utilizando (A.16) ficamos com

$$III = \gamma^0 2 \frac{\alpha_o}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy^1 [: \cos\beta\phi(x^0, y^1) :, e^{i\chi(x,h)}]_{T.I.} \quad , \tag{2.75}$$

que será inserido na equação (2.67) para obter

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x,h) &= \left(\frac{\beta}{4} - \frac{\pi}{\beta}\right) \gamma^\mu \epsilon_{\mu\nu} \{\partial^\nu \phi(x,h), \psi(x,h)\} + \\ +\gamma^0 \frac{\alpha_o}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy^1 [&: \cos\beta\phi(x^0, y^1) :, e^{i\chi(x,h)}]_{T.I.} \quad . \end{aligned} \tag{2.76}$$

Substituindo a corrente renormalizada dada por (2.65) vamos ficar, finalmente, com a seguinte equação de movimento para o Modelo de Thirring Massivo

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x,h) &= -\frac{2\pi}{\beta} \left(\frac{\beta}{4} - \frac{\pi}{\beta}\right) \gamma^\mu \{j_\mu(x,h), \psi(x,h)\} + \\ +\gamma^0 \frac{\alpha_o}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy^1 [&: \cos\beta\phi(x^0, y^1) :, e^{i\chi(x,h)}]_{T.I.} \quad . \end{aligned} \tag{2.77}$$

É novamente observado que o caso $\beta^2 = 4\pi$ corresponde a férmions livres e massivos, como já era de se esperar. Foi mostrado por Mandelstam, Coleman e Swieca [14][4][3] — e será visto aqui — que o operador $: \cos\beta\phi :$ realmente representa o termo de massa da teoria fermiônica, a menos de renormalizações. Para uma melhor compreensão da equação de movimento, vamos investigar agora as singularidades existentes nos operadores $\bar{\psi}\psi(x)$ e $: \cos\beta\phi(x) :$. Para isso, vamos fazer um parêntesis em nossa discussão da equação de movimento.

De forma não rigorosa, pode-se calcular o operador de massa $\bar{\psi}\psi(x)$. A partir da fórmula de Mandelstam dada por (2.29), usa-se (A.28) para obter

$$\bar{\psi}\psi(x) = \frac{1}{\pi} : \cos\beta\phi(x) : \quad . \tag{2.78}$$

Notando que a curtas distâncias o produto $\bar{\psi}(x+\varepsilon_1)\psi(x)$ tem o mesmo comportamento que na teoria sem massa, vamos efetuar uma expansão de Wilson, tal como foi feito anteriormente para a corrente. Assim,

$$\bar{\psi}(x+\varepsilon_1)\psi(x) = \psi_2^*(x+\varepsilon_1)\psi_1(x) + \psi_1^*(x+\varepsilon_1)\psi_2(x) \quad . \tag{2.79}$$

Usando a fórmula de Mandelstam na forma (2.29) vamos ficar com

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x+\varepsilon_1)\psi(x) &= \frac{-i}{2\pi}\{: \exp\{-iF(x+\varepsilon_1)\} :: \exp\{-iG(x)\} : + \\ &+ : \exp\{iG(x+\varepsilon_1)\} :: \exp\{iF(x)\} :\} \end{aligned} \tag{2.80}$$

onde

$$F(x) = \frac{\beta}{2}\phi(x) + \frac{2\pi}{\beta}\tilde{\phi}(x) \tag{2.81a}$$

$$G(x) = \frac{\beta}{2}\phi(x) - \frac{2\pi}{\beta}\tilde{\phi}(x) \quad . \tag{2.81b}$$

Como anteriormente, vamos usar (A.28) para juntar as exponenciais com ordenação de Wick e em seguida expandí-las em torno de ε_1 usando (A.14) e (A.15). Obteremos

$$\bar{\psi}(x+\varepsilon_1)\psi(x) \simeq \frac{1}{\pi} f_2(\varepsilon_1) : \cos\beta\phi(x) : \tag{2.82}$$

onde

$$f_2(\varepsilon_1) = \exp\left\{\left(\frac{4\pi^2}{\beta^2} - \frac{\beta^2}{4\pi}\right) D^{(+)}(\varepsilon_1)\right\} \quad , \tag{2.83}$$

onde foi usado (A.8) e (A.9). Usando (A.12) resulta imediatamente que

$$f_2(\varepsilon_1) = [\mu^2\varepsilon_1^2]^{-\frac{1}{16\pi}\left(\frac{16\pi^2}{\beta^2}-\beta^2\right)} \quad , \tag{2.84}$$

em acordo com o que foi obtido por Swieca[3]. Por outro lado, como foi argumentado também por Swieca, para $\beta^2 \geqslant 4\pi$ deve existir uma singularidade logarítmica a ser subtraída. De forma geral, ficamos com

$$\lim_{\varepsilon_1\to 0} \bar{\psi}(x+\varepsilon_1)\psi(x) \simeq f_2(\varepsilon_1) N[\bar{\psi}\psi(x)] + f_1(\varepsilon_1) \quad , \tag{2.85}$$

sendo

$$f_1(\varepsilon_1) = \langle 0 \mid \bar{\psi}(x+\varepsilon_1)\psi(x) \mid 0\rangle \quad , \tag{2.86}$$

que pode ser obtido de (2.82), resultando

$$f_1(\varepsilon_1) \simeq \frac{1}{\pi} f_2(\varepsilon_1) \langle 0 \mid : \cos\beta\phi(x) : \mid 0 \rangle \quad , \tag{2.87}$$

e o operador $N[\bar{\psi}\psi(x)]$ está definido de forma a ter valor esperado no vácuo igual a zero.

Nosso interesse agora é estudar o operador de massa $\mathcal{M}(x) =: \cos\beta\phi(x) :$, a fim de analisar que tipo de singularidades estão envolvidas na definição do operador cosseno. Vamos fazer isso calculando o valor esperado no vácuo de tal operador.

Através da equação de sine-Gordon (2.32) pode-se mostrar que

$$\langle 0 \mid : \cos\beta\phi(x) : \mid 0 \rangle \delta(x^1 - y^1) = -i \frac{\pi}{\alpha_o \beta^2} \langle 0 \mid [-\Box\phi(x), \dot{\phi}(y)]_{T.I.} \mid 0 \rangle \quad . \tag{2.88}$$

Por outro lado,

$$\langle 0 \mid [-\Box\phi(x), \dot{\phi}(y)] \mid 0 \rangle = \langle 0 \mid -\Box_x \partial_y^0 [\phi(x), \phi(y)] \mid 0 \rangle \quad , \tag{2.89}$$

que pode ser reescrita utilizando a representação de Lehmann-Källen para a função de dois pontos

$$\langle 0 \mid \phi(x)\phi(y) \mid 0 \rangle = \int_0^\infty \rho(\mu^2) \Delta^{(+)}(x - y; \mu^2) d\mu^2 \quad , \tag{2.90}$$

ficando com

$$\langle 0 \mid [-\Box\phi(x), \dot{\phi}(y)]_{T.I.} \mid 0 \rangle = \int_0^\infty \rho(\mu^2) \partial_y^0 \left(-\Box_x\right) \Delta^{(+)}(x - y; \mu^2) d\mu^2 \Big|_{T.I.} \quad . \tag{2.91}$$

Utilizando as equações (2.7) e (2.8), teremos

$$\langle 0 \mid [-\Box\phi(x), \dot{\phi}(y)]_{T.I.} \mid 0 \rangle = -\frac{i}{2} \int_0^\infty \mu^2 \rho(\mu^2) d\mu^2 \delta(x^1 - y^1) \quad . \tag{2.92}$$

Voltando à equação (2.88) obtemos

$$\langle 0 \mid : \cos\beta\phi(x) : \mid 0 \rangle = \frac{\pi}{2\alpha_o \beta^2} \int_0^\infty \mu^2 \rho(\mu^2) d\mu^2 \quad . \tag{2.93}$$

Para compreender melhor o operador cosseno, devemos procurar o comportamento assintótico da função $\rho(\mu^2)$. Para tanto, vamos calcular as singularidades existentes na equação de sine-Gordon. Consideremos, então

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\langle 0 \mid (-\Box_{x+\varepsilon}\phi(x+\varepsilon))\,(-\Box_x\phi(x)) \mid 0\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle 0 \mid :\sin\beta\phi(x+\varepsilon) :: \sin\beta\phi(x) :\mid 0\rangle \quad . \tag{2.94}$$

O LD de (2.94) é calculado expressando o seno na sua forma exponencial e em seguida usando (A.28). O resultado fica

$$\langle 0 \mid :\sin\beta\phi(x+\varepsilon_1) :: \sin\beta\phi(x) :\mid 0\rangle = -\frac{1}{2}\left[\varepsilon_1^2\right]^{\frac{-\beta^2}{4\pi}} \quad . \tag{2.95}$$

O LE é calculado usando a representação de Lehmann-Källen, equação (2.90), ficando com

$$\begin{aligned}\langle 0 \mid & (-\Box_{x+\varepsilon}\phi(x+\varepsilon))\,(-\Box_x\phi(x)) \mid 0\rangle = \\ &= (-\Box_{x+\varepsilon})\,(-\Box_x)\int_0^\infty \rho(\mu^2)\Delta^{(+)}(\varepsilon;\mu^2)d\mu^2 = \int_0^\infty \mu^4\rho(\mu^2)\ln(\mu\varepsilon)^2\,d\mu^2 \quad ,\end{aligned} \tag{2.96}$$

onde foi tomado o limite de argumento pequeno para a função $\Delta^{(+)}(x)$. Podemos supor que o comportamento assintótico da função $\rho(\mu^2)$ seja polinomial, ou seja

$$\rho(\mu^2) \sim (\mu^2)^\alpha \quad . \tag{2.97}$$

Ficamos com o seguinte

$$\langle 0 \mid (-\Box_{x+\varepsilon}\phi(x+\varepsilon))\,(-\Box_x\phi(x)) \mid 0\rangle \sim \int^\infty (\mu^2)^{\alpha+2}\ln(\mu\varepsilon)^2\,d\mu^2 \quad , \tag{2.98}$$

onde o limite inferior da integral não está sendo determinado, uma vez que estamos investigando apenas a região ultra-violeta do operador cosseno. Efetuando uma mudança de variável $(\mu\varepsilon)^2 = (\overline{\mu})^2$ vamos obter

$$\langle 0 \mid (-\Box_{x+\varepsilon}\phi(x+\varepsilon))\,(-\Box_x\phi(x)) \mid 0\rangle \sim \frac{1}{(\varepsilon^2)^{\alpha+3}}\int^\infty (\overline{\mu}^2)^{\alpha+2}\ln\overline{\mu}^2 d\overline{\mu}^2 \quad . \tag{2.99}$$

Comparando (2.95) com (2.99) ficamos com

$$\frac{1}{(\varepsilon^2)^{\alpha+3}}\int^\infty (\overline{\mu}^2)^{\alpha+2}\ln\overline{\mu}^2 d\overline{\mu}^2 \sim -\frac{1}{2}\left[\varepsilon^2\right]^{\frac{-\beta^2}{4\pi}} \tag{2.100}$$

e, sendo a integral independente de ε, conclui-se que

$$\alpha = \frac{\beta^2}{4\pi} - 3 \quad . \tag{2.101}$$

Finalmente, o comportamento assintótico do valor esperado do operador cosseno fica dado por

$$\langle 0 \mid : \cos\beta\phi(x) : \mid 0\rangle \sim \frac{\pi}{2\alpha_o\beta^2}\int^{\infty}(\mu^2)^{\frac{\beta^2}{4\pi}-2}d\mu^2 \quad . \tag{2.102}$$

Assim, podemos ter três possibilidades para o expoente de μ^2:

$$\begin{cases} \mathbf{A} \text{ - } 0 < \beta^2 < 4\pi \\ \mathbf{B} \text{ - } \beta^2 = 4\pi \\ \mathbf{C} \text{ - } 4\pi < \beta^2 < 8\pi \end{cases} \quad . \tag{2.103}$$

Para a primeira faixa da constante de acoplamento — item **A** — o valor esperado do cosseno é bem definido. No caso **B**, a integral (2.102) será logaritmicamente divergente. Em **C**, haverá um termo infinito a ser subtraído. Como pode ser visto, a ordenação de Wick, simbolizada por : :, não é suficiente para normalizar o valor esperado no vácuo do operador cosseno para toda a faixa $0 < \beta^2 < 8\pi$. Porém, pode-se redefinir o produto normal da exponencial subtraindo-se o seu valor esperado no vácuo mantendo a ordenação de Wick usual. Ou seja,

$$N\left[e^{i\beta\phi(x)}\right] = \lim_{h\to\delta}\left[: e^{i\beta\phi(x,h)} : -\langle 0 \mid : e^{i\beta\phi(x,h)} : \mid 0\rangle\right] \quad . \tag{2.104}$$

Assim, temos um operador ordenado que tem valor esperado no vácuo nulo para toda a faixa (2.103). Tudo isto nos leva a substituir a ordenação de Wick usual pela definição (2.104) no cálculo da equação de movimento.

Retornando à equação (2.85) ficamos com

$$\lim_{\varepsilon_1\to 0}\bar{\psi}(x+\varepsilon_1)\psi(x) \simeq f_2(\varepsilon_1)N[\cos\beta\phi(x)] + f_1(\varepsilon_1) \quad , \tag{2.105}$$

onde

$$f_1(\varepsilon_1) \sim \frac{1}{\alpha_o\beta^2}f_2(\varepsilon_1)\int^{\infty}(\mu^2)^{\frac{\beta^2}{4\pi}-2}d\mu^2 \tag{2.106}$$

e $f_2(\varepsilon_1)$ é dada por (2.84). Utilizando (2.105) vemos que

$$N\left[\cos\beta\phi(x)\right] \simeq \frac{\pi}{f_2(\varepsilon_1)}\bar{\psi}(x+\varepsilon_1)\psi(x) + \frac{\pi f_1(\varepsilon_1)}{f_2(\varepsilon_1)} \tag{2.107}$$

Substituindo $f_1(\varepsilon_1)$ ficamos com

$$N\left[\cos\beta\phi(x)\right] \simeq \lim_{\varepsilon_1\to 0}\frac{\pi}{f_2(\varepsilon_1)}\bar{\psi}(x+\varepsilon_1)\psi(x) + \frac{\pi}{\alpha_o\beta^2}\int^{\infty}(\mu^2)^{\frac{\beta^2}{4\pi}-2}d\mu^2 \quad . \tag{2.108}$$

Estamos agora em situação de prosseguir com a análise da equação de movimento para o campo de Dirac, onde aparece o comutador do cosseno com o campo fermiônico, equação (2.76). Como o segundo termo da última equação é uma função tipo *c-number,* ele não contribuirá para o comutador. Portanto, teremos

$$\gamma^0\frac{\alpha_o}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dy^1\left[N\left[\cos\beta\phi(x^0,y^1)\right],e^{i\chi(x,h)}\right]_{T.I.} = \frac{\gamma^0\alpha_o}{f_2(\varepsilon_1)}\times \int_{-\infty}^{+\infty}dy^1\left[\bar{\psi}(y^1+\varepsilon^1)\psi(y^1),e^{i\chi(x,h)}\right]_{T.I.} \tag{2.109}$$

onde a ordenação de Wick : : foi substituída pelo produto normal $N[\,]$. Usando (A.23b) escrevemos o comutador como uma combinação de anticomutadores, a fim de usar as regras de anticomutação canônicas válidas para o campo fermiônico em tempos iguais, ou seja

$$\begin{aligned}\{\psi^\dagger_\alpha(x),\psi_\beta(y)\}_{T.I.} &= -\delta_{\alpha\beta}\delta(x^1-y^1)\\ \{\psi_\alpha(x),\psi_\beta(y)\}_{T.I.} &= \{\psi^\dagger_\alpha(x),\psi^\dagger_\beta(y)\}_{T.I.}=0 \quad .\end{aligned} \tag{2.110}$$

Assim, pode-se aproveitar a função delta de Dirac para integrar em y^1, obtendo que

$$\gamma^0\frac{\alpha_o}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dy^1\left[N\left[\cos\beta\phi(x^0,y^1)\right],\psi(x,h)\right]_{T.I.} = \frac{\alpha_o}{f_2(\varepsilon_1)}\psi(x,h) \quad . \tag{2.111}$$

Portanto, podemos finalizar o cálculo da equação de movimento para o campo fermiônico com a seguinte expressão

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x,h) = -\frac{2\pi}{\beta}\left(\frac{\beta}{4}-\frac{\pi}{\beta}\right)\gamma^\mu\{j_\mu(x,h),\psi(x,h)\} + \frac{\alpha_o}{f_2(\varepsilon_1)}\psi(x,h) \quad . \tag{2.112}$$

Da análise de $f_2(\varepsilon_1)$ percebe-se que:

A - Para $0<\beta^2<4\pi$ tal termo desaparece quando $\varepsilon_1\to 0$ e nenhum termo de massa explícito aparece na equação de movimento.

B - Para $\beta^2 = 4\pi$ o expoente se anula, $f_2(\varepsilon_1) = 1$, e não há necessidade de nenhuma renormalização multiplicativa, além de anular o termo proporcional à corrente desacoplando os férmions.

C - Para $4\pi < \beta^2 < 8\pi$ se faz necessária a subtração de um termo infinito conforme definido em (2.104).

Porém, isto não significa que a teoria seja sem massa para $\beta^2 < 4\pi$. O termo proporcional à corrente deve ser visto como um produto normal, podendo gerar termos proporcionais ao campo ψ; como conseqüência, um termo de massa fará parte da equação de movimento renormalizada. Concluímos esta seção enfatizando que a forma das equações de movimento renormalizadas não deve ser única, mas depende do tipo de regularização que é utilizada na definição do produto de operadores de campo no mesmo ponto.

2.3 Modelo de Schwinger

A Eletrodinâmica Quântica de férmions sem massa em duas dimensões descrita pela Lagrangiana

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - e(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu \tag{2.113}$$

foi primeiro proposto por J. Schwinger em 1962[24] pois, tal como o Modelo de Thirring, trata-se de um modelo solúvel. Posteriormente, quando estudado por Swieca e Lowenstein[17], apresentou características bastante interessantes, como a ausência de estados portadores de carga no setor observável da teoria. Este fato é, na verdade, resultado da quebra espontânea da simetria de calibre apresentada pelo modelo; ou seja, tal simetria, apresentada na Lagrangiana não se manifesta nos estados físicos. Por este motivo, foi considerado como um modelo protótipo para o confinamento dos quarks[3]. Nosso objetivo é fazer uma pequena revisão de alguns aspectos do modelo, procurando mostrar como a bosonização pode ser implementada numa teoria com invariância de calibre. Para tanto, vamos procurar seguir os passos desenvolvidos nas referências [2], [3] e [22].

As equações de movimento para os campos de Dirac e Maxwell ficam, respectivamente

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi + eA_\mu\gamma^\mu\psi = 0 \tag{2.114}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -ej^\nu \tag{2.115}$$

onde

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad . \tag{2.116}$$

A partir da Lagrangiana (2.113) pode-se observar que esta é uma teoria simétrica por transformações de calibre locais

$$A^\mu(x) \to A^\mu(x) + \frac{1}{e}\partial^\mu \Lambda(x) \tag{2.117}$$

$$\psi(x) \to e^{i\Lambda(x)}\psi(x) \quad , \tag{2.118}$$

portanto, o operador fermiônico $\psi(x)$ não está univocamente definido e suas regras de comutação vão depender do calibre empregado. Tal fato amplia bastante as possibilidades de se encontrar uma fórmula como a de Mandelstam, equação (2.29), para a solução bosonizada do modelo.

Aqui, usaremos um calibre onde ψ possua a forma mais simples, ou seja

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{m}{4\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}\gamma^5} : \exp\{i\sqrt{\pi}\gamma^5\Sigma(x)\} : \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} \\ e^{i\theta_2} \end{pmatrix} \tag{2.119}$$

onde θ_1 e θ_2 são fases *c-number* arbitrárias, ligadas à quebra de simetria já mencionada e o parâmetro m deve ser definido como $m = (e/\sqrt{\pi})\, e^\gamma$, com γ a constante de Euler. Aplicando o operador de Dirac $i\gamma^\mu\partial_\mu$ à equação (2.119) teremos

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) = -\sqrt{\frac{m}{4\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}\gamma^5}\sqrt{\pi}\gamma^\mu\gamma^5 : \partial_\mu\Sigma(x)\exp\{i\sqrt{\pi}\gamma^5\Sigma(x)\} : \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} \\ e^{i\theta_2} \end{pmatrix} \quad . \tag{2.120}$$

Usando (A.4a) e (2.114) pode-se fazer a identificação

$$A^\mu(x) = -\frac{\sqrt{\pi}}{e}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\Sigma(x) \quad . \tag{2.121}$$

Uma corrente invariante por transformações de calibre pode ser definida como

$$j^\mu(x) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0 \\ \varepsilon^2<0}} [\bar{\psi}(x+\varepsilon)\gamma^\mu\psi(x)(\mathbf{1} - ie\varepsilon^\nu A_\nu(x)) - \langle 0 \mid \bar{\psi}(x+\varepsilon)\gamma^\mu\psi(x) \mid 0\rangle] \ . \tag{2.122}$$

e, usando a fórmula (2.119), obtém-se

$$j^\mu(x) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\Sigma(x) \quad . \tag{2.123}$$

Com a equação de Maxwell (2.115), pode-se concluir que

$$\left(\Box + \frac{e^2}{\pi}\right)\Sigma(x) = 0 \qquad . \tag{2.124}$$

Portanto, o campo $\Sigma(x)$ obedece à equação de Klein-Gordon, possuindo uma massa $e/\sqrt{\pi}$, não necessitando de nenhuma regra de superseleção imposta para as exponenciais de campos sem massa, equação (2.16). A corrente (2.123) é a geradora das transformações de calibre, levando a uma carga nula, pois o campo bosônico $\Sigma(x)$ não possui nenhuma carga, mostrando que o setor invariante de calibre apresenta estados sem carga, evidenciando o confinamento.

Acrescentando-se uma massa para o campo fermiônico fica-se com a seguinte Lagrangiana

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - e(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu + M\bar{\psi}\psi \qquad , \tag{2.125}$$

conhecida como o Modelo de Schwinger Massivo (MSM). Tal modelo não mais será exatamente solúvel, motivando um tratamento perturbativo. Porém, a equivalência do operador de massa com uma interação tipo cosseno, obtida no modelo de Thirring através da fórmula de Mandelstam, possibilita um caminho semelhante para um tratamento não perturbativo. Vamos, então, seguir [2] e tomar como hipótese a seguinte expressão

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi}}\exp\left[-i\frac{\pi}{4}\gamma^5\right] : \exp\{i\gamma^5\chi(x) + i\frac{\pi}{\beta}\tilde{\phi}(x^0, x^1)\} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.126}$$

onde

$$\tilde{\phi}(x^0, x^1) = \int_{x_1}^{\infty} \dot{\phi}(x_o, y_1)dy_1 \qquad , \tag{2.127}$$

e

$$\chi(x) = \beta\phi(x) + \alpha\Sigma(x) \qquad , \tag{2.128}$$

e os campos $\phi(x)$ e $\Sigma(x)$ devem satisfazer as equações

$$\Box\phi + 2M\frac{\beta\tilde{\mu}}{\pi} : \sin 2\chi := 0 \tag{2.129}$$

$$(\Box + \frac{e^2}{\pi})\Sigma + 2M\frac{\beta\tilde{\mu}}{\pi} : \sin 2\chi := 0 \tag{2.130}$$

onde M é a massa do férmion, μ é o corte IV para o campo ϕ e $\tilde{\mu} = \sqrt{\mu\frac{e}{\sqrt{\pi}}\frac{c}{2}}$ ($c = e^{\gamma}$, onde γ é a constante de Euler). Como foi mostrado por Swieca[22],

a dimensão de escala do operador de massa compatível com as equações de Maxwell é um. Isto faz com que o operador $\overline{\psi}\psi(x)$ obtido via fórmula (2.126) não necessite de renormalizações multiplicativas, ou seja[2]

$$\overline{\psi}\psi(x) = -\frac{\tilde{\mu}}{\pi} : \cos(2\chi(x)) : + f(\varepsilon) \quad . \tag{2.131}$$

Estamos então em condições de desenvolver o cálculo da equação de movimento, em total analogia ao que foi feito na seção anterior para o Modelo de Thirring Massivo. Assim, redefinimos os campos $\phi(x)$, $\tilde{\phi}(x)$ e $\Sigma(x)$ conforme as equações (2.49) e (2.48). O operador fermiônico fica definido analogamente à equação (2.50), ou seja[1]

$$\psi(x,h) = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}\gamma^5} : \exp i\Phi(x,h) : \tag{2.132}$$

onde

$$\Phi(x,h) = \gamma^5\chi(x,h) + \frac{\pi}{\beta}\tilde{\phi}(x,h) \tag{2.133}$$

$$\chi(x,h) = \beta\phi(x,h) + \alpha\Sigma(x,h) \quad . \tag{2.134}$$

Calcula-se a equação de movimento do campo fermiônico aplicando-se o operador de Dirac $i\gamma^\mu\partial_\mu$ à equação (2.132) utilizando a prescrição dada por (2.52). O cálculo é bastante semelhante ao que foi desenvolvido na seção anterior e portanto, não necessita ser explicitado. Depois de algum cálculo obtém-se

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x,h) &= -\frac{\gamma^\mu\gamma^5}{2}\{\partial_\mu\chi(x,h),\psi(x,h)\} - \frac{\gamma^\mu\pi}{2\beta}\epsilon_{\mu\nu}\{\partial^\nu\phi(x,h),\psi(x,h)\} + \\ & \gamma^0\frac{M}{\pi}\tilde{\mu}\int_{-\infty}^{+\infty} dy^1[: \cos 2\chi(x^0,y^1) :, \psi(x,h)]_{T.I.} \quad . \end{aligned} \tag{2.135}$$

Utilizando as definições (2.121) e (2.134) expressamos a equação de movimento em termos do campo $A_\mu(x,h)$, ficando com

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x,h) = -\frac{\gamma^\mu\alpha e}{2}\{A_\mu(x,h),\psi(x,h)\} +$$

[1] A rigor, para satisfazer as equações de Maxwell, é conveniente introduzir na expressão (2.134) um campo η com métrica indefinida. Entretanto, nossa discussão da equação de movimento fermiônica não é afetada por esse termo, que será omitido por simplicidade [2][26].

$$-\left(\frac{\pi}{2\beta}-\frac{\beta}{2}\right)\gamma^{\mu}\{\epsilon_{\mu\nu}\partial^{\nu}\phi(x,h),\psi(x,h)\}+ \qquad (2.136)$$
$$+\gamma^{0}\frac{M}{\pi}\tilde{\mu}\int_{-\infty}^{+\infty}dy^{1}[:\cos 2\chi(x^{0},y^{1}):,\psi(x,h)]_{T.I.} \quad .$$

Observando o segundo termo desta equação, nota-se o aparecimento de uma interação tipo Thirring (corrente-corrente) através do gradiente do campo ϕ. Tal termo não existe na Lagrangiana original e para que as nossas hipóteses (2.132) e (2.133) descrevam corretamente o modelo de Schwinger tal termo não deve existir e portanto, deve-se fixar o valor da constante de acoplamento

$$\left(\frac{\pi}{2\beta}-\frac{\beta}{2}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \beta=\sqrt{\pi} \quad . \qquad (2.137)$$

A equação de movimento para o MSM ficará

$$\begin{aligned} i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x,h) &= -\frac{\gamma^{\mu}\alpha e}{2}\{A_{\mu}(x,h),\psi(x,h)\}+ \\ +\gamma^{0}\frac{M}{\pi}\tilde{\mu}\int_{-\infty}^{+\infty}dy^{1}[&: \cos 2\chi(x^{0},y^{1}):,\psi(x,h)]_{T.I.} \quad , \end{aligned} \qquad (2.138)$$

onde o termo do comutador deve ser substituído usando (2.131) resultando,

$$\begin{aligned} i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x,h) &= -\frac{\gamma^{\mu}\alpha e}{2}\{A_{\mu}(x,h),\psi(x,h)\}- \\ &-\gamma^{0}M\int_{-\infty}^{+\infty}dy^{1}[\overline{\psi}\psi(x^{0},y^{1}),\psi(x,h)]_{T.I.} \quad . \end{aligned} \qquad (2.139)$$

Usando (A.23b) e as regras de anti-comutação canônicas (2.110) obtemos imediatamente

$$i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x,h)=-\frac{\gamma^{\mu}\alpha e}{2}\{A_{\mu}(x,h),\psi(x,h)\}-M\psi(x,h) \quad , \qquad (2.140)$$

descrevendo a dinâmica do Modelo de Schwinger Massivo.

2.4 Modelo de Thirring com Simetria SU(2)

O grupo SU(2) é o conjunto de matrizes 2 X 2 com determinante unitário, respeitando a condição unimodular[27]. Num modelo com simetria interna

SU(2) cada componente do espinor fermiônico ganha um novo índice e, uma vez que estamos em 2D, o operador de férmion fica escrito como

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1^1 \\ \psi_1^2 \\ \psi_2^1 \\ \psi_2^2 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.141}$$

Os índices superiores representam as componentes do grupo SU(2); os inferiores, do grupo de Lorentz. O grupo SU(2) é localmente equivalente (homomorfo) ao grupo O(3) que representa as rotações num espaço de três dimensões, portanto os geradores do grupo SU(2) respeitam a álgebra de um momento angular, ao qual é dado o nome de *isospin*. O espaço de Hilbert dos estados fermiônicos fica então, descrito por

$$\mathcal{E} = L \otimes SU(2)_{isospin} \quad , \tag{2.142}$$

onde L é o grupo de Lorentz em duas dimensões.

Os geradores do grupo SU(2), representados por λ, são as matrizes de Pauli

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \tag{2.143}$$

que obedecem às propriedades

$$\lambda^A \lambda^B = i\epsilon^{ABC}\lambda_C + \delta^{AB} \quad ; \quad Tr(\lambda^A) = 0 \quad , \tag{2.144}$$

onde ϵ^{ABC} é o tensor de Levi-Civita dado por (A.18).

Pra descrever o modelo de Thirring com tal simetria tomaremos uma Lagrangiana que também foi usada por Ha[28]

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}^a \gamma^\mu \partial_\mu \psi^a - g\left[\bar{\psi}\gamma^\mu \frac{\lambda^A}{2}\psi\right]\left[\bar{\psi}\gamma_\mu \frac{\lambda^A}{2}\psi\right] \quad , \tag{2.145}$$

onde $j^{\mu,A} = \bar{\psi}\gamma^\mu \lambda^A \psi$ é a corrente de isospin, $a = 1, 2$ e $A = 1, 2, 3$. Via equações de Euler-Lagrange obtém-se a seguinte equação de movimento (clássica)

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi^a - g\gamma^\mu j_{\mu,A}[\lambda^A \psi]^a = 0 \quad . \tag{2.146}$$

A partir desta equação, conclui-se facilmente que as correntes de isospin são classicamente conservadas, ou seja

$$\partial^\mu j_{\mu,A} = 0 \quad . \tag{2.147}$$

Por outro lado, as correntes vetorial e axial , definidas como

$$j^\mu = \bar{\psi}^a \gamma^\mu \psi^a \tag{2.148}$$

$$j_5^\mu = \epsilon^{\mu\nu} j_\nu = \bar{\psi}^a \gamma^\mu \gamma^5 \psi^a \quad , \tag{2.149}$$

sendo subentendida a soma sobre o índice a, também são conservadas.

Para implementar a bosonização em um modelo de N campos que não interagem entre si, pode-se imaginar uma fórmula análoga à (2.29), tal como

$$\psi^a(x) = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}\gamma^5} : \exp\{i\frac{\beta\gamma^5}{2}\phi^a(x) + i\frac{2\pi}{\beta}\tilde{\phi}^a(x)\} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.150}$$

Porém, no caso em que a interação SU(2) está presente, vemos que a pseudo-corrente de isospin, definida por

$$j_5^{\mu,A} = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\lambda^A\psi \quad ,$$

não é conservada. Isto indica que os campos bosônicos que vão descrever a teoria via fórmula (2.150), terão suas equações de movimento acopladas entre si. Contudo, podemos tomar (2.150), onde os campos ϕ^1 e ϕ^2 não são independentes na presença da interação SU(2), e definir novos campos ϕ_+ e ϕ_- como

$$\begin{aligned} \phi_+ &= (\phi^1 + \phi^2)/\sqrt{2} \\ \phi_- &= (\phi^1 - \phi^2)/\sqrt{2} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \phi^a = (\phi_+ + \xi_a\phi_-)/\sqrt{2} \tag{2.151}$$

sendo $\xi_a = \begin{cases} 1 & , \text{ se } a = 1 \\ -1 & , \text{ se } a = 2 \end{cases}$.

Se modificarmos também o acoplamento entre os campos efetuando a transformação

$$\begin{aligned} \beta\phi^a &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\beta_+\phi_+ + \xi_a\beta_-\phi_-\right] \\ \frac{1}{\beta}\tilde{\phi}^a &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\beta_+}\tilde{\phi}_+ + \frac{\xi_a}{\beta_-}\tilde{\phi}_-\right] \quad , \end{aligned} \tag{2.152}$$

ficaremos com

$$\psi^a(x) = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}\gamma^5} : \exp\{i\frac{\gamma^5}{2\sqrt{2}}[\beta_+\phi_+(x) + \xi_a\beta_-\phi_-(x)] + \\ +i\frac{2\pi}{\sqrt{2}}\left[\frac{\widetilde{\phi}_+}{\beta_+}(x) + \xi_a\frac{\widetilde{\phi}_-}{\beta_-}(x)\right]\} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \tag{2.153}$$

onde

$$\widetilde{\phi}_\pm(x) = \int_{x^1}^{\infty} \dot{\phi}_\pm(x^0, y^1)dy^1 \quad ,$$

que será uma forma mais conveniente de expressar a fórmula de bosonização. Para ver isso, vamos usar (2.153) e uma definição análoga a (2.64) para calcular as correntes de Lorentz através do seguinte procedimento de limite

$$j_r^\mu(x) = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\left[\frac{\beta_+}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\beta_+}{4} + \frac{\pi}{\beta_+}\right)^{-1}\right]\left[\overline{Z}(\varepsilon_1)\overline{\psi}^a(x+\varepsilon_1)\gamma^\mu\psi^a(x) + \varepsilon_1 \to -\varepsilon_1\right] \quad . \tag{2.154}$$

onde

$$\overline{Z}(\varepsilon_1) = [\mu^2\varepsilon_1^2]^{\left[\frac{\beta_+^2-\beta_-^2}{32\pi} + \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\beta_+^2} - \frac{1}{\beta_-^2}\right) - \frac{1}{2\pi}\right]} \quad , \tag{2.155}$$

resultando que

$$j^\mu(x) = -\frac{\beta_+}{2\pi}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\phi_+(x) \quad . \tag{2.156}$$

Devido à conservação da corrente axial j_μ^5, conclui-se que o campo ϕ_+ é um campo livre, evidenciando uma vantagem da transformação (2.151).

Para o cálculo das correntes SU(2), vamos efetuar uma transformação no espaço das matrizes λ da seguinte forma

$$\begin{aligned} \lambda_+ &= \frac{\lambda^1 + i\lambda^2}{2} \\ \lambda_- &= \frac{\lambda^1 - i\lambda^2}{2} \end{aligned} \quad . \tag{2.157}$$

Assim, ficamos com

$$\begin{aligned} j^{\mu,\lambda_+} &= \frac{j^{\mu,\lambda^1} + ij^{\mu,\lambda^2}}{2} \\ j^{\mu,\lambda_-} &= \frac{j^{\mu,\lambda^1} - ij^{\mu,\lambda^2}}{2} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} j^{\mu,1} &= j^{\mu,\lambda_+} + j^{\mu,\lambda_-} \\ j^{\mu,2} &= ij^{\mu,\lambda_-} - ij^{\mu,\lambda_+} \end{aligned} \tag{2.158}$$

enquanto que a corrente $j^{\mu,3}$ permanece inalterada. As correntes (2.158) podem ser calculadas sem problemas através das definições

$$\begin{aligned} j^{\mu,\lambda_+}(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\bar{\psi}^1(x+\varepsilon_1)\gamma^\mu\psi^2(x) \\ j^{\mu,\lambda_-}(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\bar{\psi}^2(x+\varepsilon_1)\gamma^\mu\psi^1(x) \end{aligned} \tag{2.159}$$

resultando

$$j^{\mu,\lambda_+}(x) = \frac{\mu}{2\pi}(1 \quad 1)Z(\varepsilon) : e^{i\frac{\beta_-\gamma^5}{\sqrt{2}}\phi_-(x)-i\frac{2\sqrt{2}\pi}{\beta_-}\tilde{\phi}_-(x)} : \gamma^\mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.160}$$

$$j^{\mu,\lambda_-}(x) = \frac{\mu}{2\pi}(1 \quad 1)Z(\varepsilon) : e^{-i\frac{\beta_-\gamma^5}{\sqrt{2}}\phi_-(x)+i\frac{2\sqrt{2}\pi}{\beta_-}\tilde{\phi}_-(x)} : \gamma^\mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.161}$$

Assim, aplicando (2.158) obteremos

$$j^{\mu,1}(x) = \frac{\mu}{\pi}(1 \quad 1)Z(\varepsilon) : \cos\chi_-(x) : \gamma^\mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.162}$$

$$j^{\mu,2}(x) = \frac{\mu}{\pi}(1 \quad 1)Z(\varepsilon) : \sin\chi_-(x) : \gamma^\mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \tag{2.163}$$

onde

$$\chi_-(x) = \frac{\beta_-\gamma^5}{\sqrt{2}}\phi_-(x) + \frac{2\sqrt{2}\pi}{\beta_-}\tilde{\phi}_-(x) \quad . \tag{2.164}$$

Por outro lado, a corrente $j^{\mu,3}(x)$ necessita de normalizações diferentes para as suas componentes e requer o seguinte procedimento de limite

$$j^{\mu,3}(x) = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\left[\delta_0^\mu + \frac{\beta^2}{4\pi}\delta_1^\mu\right]\left[\overline{Z}(\varepsilon_1)\bar{\psi}(x+\varepsilon_1)\gamma^\mu\lambda^3\psi(x) + \varepsilon_1 \to -\varepsilon_1\right] \quad , \tag{2.165}$$

sendo $\overline{Z}(\varepsilon_1)$ dado por (2.155). Tal fato é uma conseqüência de que o campo ϕ_- não é um campo livre, mas solução da equação de sine-Gordon, como será visto logo abaixo. Assim, o resultado é idêntico àquele obtido para o Modelo de Thirring Massivo

$$j^{\mu,3}(x) = -\frac{\beta_-}{2\pi}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\phi_-(x) \quad . \tag{2.166}$$

Para ter uma idéia da dinâmica obedecida pelo campo ϕ_-,vamos reescrever o termo de interação da Lagrangiana (2.145) expressando as correntes de Lorentz em suas componentes do cone de luz,

$$j^{\pm,A} = j^{0,A} \pm j^{1,A} \quad . \tag{2.167}$$

Utilizando a transformação (2.158) obteremos as seguintes correntes

$$j^{+,\lambda_+} = \frac{j^{0,\lambda^1} + ij^{0,\lambda^2}}{2} + \frac{j^{1,\lambda^1} + ij^{2,\lambda^2}}{2} \tag{2.168a}$$

$$j^{+,\lambda_-} = \frac{j^{0,\lambda^1} - ij^{0,\lambda^2}}{2} + \frac{j^{1,\lambda^1} - ij^{1,\lambda^2}}{2} \tag{2.168b}$$

$$j^{-,\lambda_+} = \frac{j^{0,\lambda^1} + ij^{0,\lambda^2}}{2} - \frac{j^{1,\lambda^1} + ij^{2,\lambda^2}}{2} \tag{2.168c}$$

$$j^{-,\lambda_-} = \frac{j^{0,\lambda^1} - ij^{0,\lambda^2}}{2} - \frac{j^{1,\lambda^1} - ij^{1,\lambda^2}}{2} \quad . \tag{2.168d}$$

A Lagrangiana de interação poderá ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I &= g\left[\bar{\psi}\gamma^\mu \frac{\lambda^A}{2}\psi\right]\left[\bar{\psi}\gamma_\mu \frac{\lambda^A}{2}\psi\right] = \\ &= \frac{g}{2}\left[j^{+,\lambda_+}j^{-,\lambda_-} + j^{+,\lambda_-}j^{-,\lambda_+} + j^{\mu,\lambda_3}j_\mu{}^{,\lambda_3}\right] \quad . \end{aligned} \tag{2.169}$$

Para conhecer explicitamente a forma da Lagrangiana de interação, pode-se calcular as correntes utilizando o procedimento de limite (2.159) diretamente. Ficaremos com

$$j^{+,\lambda_+}(x) = U(\varepsilon_1) : e^{-i\frac{\beta_-}{\sqrt{2}}\phi_-(x) - i\frac{2\sqrt{2}\pi}{\beta_-}\tilde{\phi}_-(x)} : \tag{2.170a}$$

$$j^{+,\lambda_-}(x) = U(\varepsilon_1) : e^{i\frac{\beta_-}{\sqrt{2}}\phi_-(x) + i\frac{2\sqrt{2}\pi}{\beta_-}\tilde{\phi}_-(x)} : \tag{2.170b}$$

$$j^{-,\lambda_+}(x) = U(\varepsilon_1) : e^{i\frac{\beta_-}{\sqrt{2}}\phi_-(x) - i\frac{2\sqrt{2}\pi}{\beta_-}\tilde{\phi}_-(x)} : \tag{2.170c}$$

$$j^{-,\lambda_-}(x) = U(\varepsilon_1) : e^{-i\frac{\beta_-}{\sqrt{2}}\phi_-(x) + i\frac{2\sqrt{2}\pi}{\beta_-}\tilde{\phi}_-(x)} : \quad , \tag{2.170d}$$

sendo $U(\varepsilon_1)$ dada por

$$U(\varepsilon_1) = [\mu^2\varepsilon_1^2]^{-\left[\frac{\beta_+^2-\beta_-^2}{32\pi} + \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\beta_+^2} - \frac{1}{\beta_-^2}\right)\right]} \quad . \tag{2.171}$$

Substituindo as exponenciais, vemos que, a menos de fatores de normalização, a forma bosonizada do termo de interação fica

$$\mathcal{L}_I = g\left[\frac{1}{2}\partial^\nu\phi_-\partial_\nu\phi_- + : \cos\sqrt{2}\beta_-\phi_- :\right] \quad , \tag{2.172}$$

mostrando que o campo ϕ_- é uma solução da equação de sine-Gordon. Com isso, vemos que através do *ansatz* (2.153) o modelo SU(2) pode ser descrito

por um campo livre e um campo de sine-Gordon inteiramente desacoplados, conforme obtido nas referências [29] e [30]. Portanto, os campos escalares serão definidos por

$$\Box\phi_+ = 0 \tag{2.173a}$$

$$\Box\phi_- + \frac{\beta_-}{\pi} : \sin\sqrt{2}\beta_-\phi_- := 0 \quad . \tag{2.173b}$$

Agora, vamos deduzir a equação de movimento aplicando o operador de Dirac sobre o nosso *ansatz* (2.153), lembrando que os campos ϕ_+ e ϕ_- comutam, logo o operador fermiônico poderá ser fatorado da seguinte forma

$$\begin{aligned}\psi^a(x,h) &= \sqrt{\frac{\mu}{2\pi}}e^{-i\frac{\pi}{4}\gamma^5} : \exp\{i\frac{\gamma^5}{2\sqrt{2}}\beta_+\phi_+(x,h) + i\frac{2\pi}{\sqrt{2}\beta_+}\widetilde{\phi}_+(x,h)\} : \times \\ &: \exp\{i\xi_a\frac{\gamma^5}{2\sqrt{2}}\beta_-\phi_-(x,h) + i\xi_a\frac{2\pi}{\sqrt{2}\beta_-}\widetilde{\phi}_-(x,h)\} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{2.174}$$

onde já redefinimos os campos através de (2.48) e (2.49). Tendo em vista que os campos bosônicos devem satisfazer (2.173a) e (2.173b), o cálculo da equação de movimento é uma união dos resultados obtidos para os modelos de Thirring sem massa e massivo. Explicitamente, ficamos com

$$\begin{aligned}i\gamma_\mu\partial^\mu\psi^a(x,h) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\beta_+}{4} - \frac{\pi}{\beta_+}\right)\gamma^\mu\{\epsilon_{\mu\nu}\partial^\nu\phi_+(x,h), \psi^a(x,h)\} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_a\left(\frac{\beta_-}{4} - \frac{\pi}{\beta_-}\right)\gamma^\mu\{\epsilon_{\mu\nu}\partial^\nu\phi_-(x,h), \psi^a(x,h)\} + \\ &+ \frac{\gamma^0}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} dy^1[\ : \cos\beta_-\phi_-(x^0,y^1) :, \psi^a(x,h)]_{T.I.} \quad .\end{aligned} \tag{2.175}$$

Através do termo proporcional ao campo ϕ_+, notamos o aparecimento da corrente j^μ, que é dada por (2.156). Tal termo não existe na Lagrangiana original, logo, tal como foi efetuado no caso do Modelo de Schwinger, iremos fixar uma das constantes de acoplamento de forma a anular tal parcela. Assim, fazendo

$$\frac{\beta_+}{4} - \frac{\pi}{\beta_+} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \beta_+ = 2\sqrt{\pi} \quad , \tag{2.176}$$

ficamos com a seguinte equação de movimento

$$
\begin{aligned}
i\gamma_\mu\partial^\mu\psi^a(x,h) &= \xi_a\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\beta_-}{4}-\frac{\pi}{\beta_-}\right)\gamma^\mu\{\epsilon_{\mu\nu}\partial^\nu\phi_-(x,h),\psi^a(x,h)\} \quad (2.177)\\
&+\frac{\gamma^0}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}dy^1[:\cos\beta_-\phi_-(x^0,y^1):,\psi^a(x,h)]_{T.I.} \quad ,
\end{aligned}
$$

onde podemos substituir a corrente $j^{\mu,3}$ pela sua definição (2.166)

$$
\begin{aligned}
i\gamma_\mu\partial^\mu\psi^a(x,h) &= -\xi_a\frac{\sqrt{2}\pi}{\beta_-}\left(\frac{\beta_-}{4}-\frac{\pi}{\beta_-}\right)\gamma_\mu\{j^{\mu,3}(x,h),\psi^a(x,h)\} +(2.178)\\
&+\frac{\gamma^0}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}dy^1[:\cos\beta_-\phi_-(x^0,y^1):,\psi^a(x,h)]_{T.I.} \quad .
\end{aligned}
$$

Assim, vemos que o modelo de Thirring com simetria SU(2) pode ser desacoplado em um modelo descrito por um campo escalar livre e um campo de sine-Gordon, ou se preferirmos, podemos interpretar a equação (2.175) como uma parte correspondendo a um "Modelo de Thirring puro" e outra à um "Modelo de Thirring Massivo", expressas naturalmente em suas formas bosonizadas.

Portanto, toda análise das singularidades envolvendo o operador cosseno, válidas para o Modelo de Thirring Massivo, também serão necessárias neste caso, e a ordenação de Wick simbolizada por : : deve ser substituída por $N[\ ]$, no sentido dado pela equação (2.104). Assim, vemos o aparecimento de um termo de massa para a faixa de $\beta^2 \geqslant 4\pi$, representando a geração dinâmica de massa do modelo de Thirring SU(2) em duas dimensões.

2.5 Estado Fundamental da Teoria de sine-Gordon

Nesta seção, a fim de obter um melhor entendimento da teoria de sine-Gordon vamos procurar analisar o comportamento ultravioleta de sua Hamiltoniana e efetuar um cálculo variacional para determinar o estado fundamental da teoria, tal como foi obtido por Coleman[4]. Será mostrado que para $\beta^2 \geq 8\pi$ a teoria não apresenta limite inferior para a energia, perdendo seu significado físico.

Para uma teoria escalar em duas dimensões sem acoplamento derivativo o grau de divergência superficial é dado por

$$d = 2(1 - V) \qquad ,$$

onde V é o número de vértices. Portanto, as únicas divergências ultravioletas que ocorrem se devem a gráficos com um único vértice. Se expressamos os operadores de campo através da sua decomposição em série de Fourier dada por

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2w(k_1, m)}} \left[a(k)e^{-ikx} + a^\dagger(k)e^{ikx}\right] \qquad , \tag{2.179}$$

seu momento canonicamente conjugado, será

$$\pi(x) = \partial_0\varphi(x) = -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_1}{2\pi} \sqrt{\frac{w(k_1, m)}{2}} \left[a(k)e^{-ikx} - a^\dagger(k)e^{ikx}\right] \qquad , \tag{2.180}$$

onde $w(k_1, m) = \sqrt{k_1^2 + m^2}$, e os gráficos divergentes serão proporcionais à seguinte integral

$$\int \frac{d^2k}{k^2 + m^2} \qquad ,$$

onde m, usualmente, é a constante que aparece no termo quadrático da Lagrangiana, representando a massa do campo. Contudo, a teoria de sine-Gordon não apresenta tal termo e não está definido *à priori* o que significa o parâmetro m contido na definição do operador de campo. Vamos escolhê-lo de sorte a anular o valor esperado no vácuo da Hamiltoniana livre. Assim, tomando

$$\mathcal{H}_o = \frac{1}{2}\pi^2(x) + \frac{1}{2}\left(\partial_1\varphi(x)\right)^2 \qquad , \tag{2.181}$$

definimos o produto normal N_m como sendo uma ordenação de Wick usual com o operador de campo e seu momento conjugado definidos por (2.179) e (2.180), de forma a satisfazer

$$\langle 0 \mid N_m \mathcal{H}_o \mid 0 \rangle_m = 0 \qquad . \tag{2.182}$$

Tomando a Hamiltoniana para a teoria de sine-Gordon

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi^2(x) + \frac{1}{2}\left(\partial_1\varphi(x)\right)^2 - \frac{\alpha_o}{\beta^2}\cos\beta\varphi - \gamma_o \tag{2.183}$$

vamos analisar como deve ser definido o produto normal sobre o termo de interação. Assim, a partir de (A.26) pode-se escrever

$$\exp\{i\int d^2xJ(x)\varphi(x)\} = N_m\left[\exp\{i\int d^2xJ(x)\varphi(x)\}\right]\times \qquad (2.184)$$
$$\exp\{-\frac{1}{2}\int d^2xd^2yJ(x)\Delta^{(+)}(x-y;m)J(y)\}$$

onde $\Delta^{(+)}(x-y;m)$ é definida por (2.9). O corte ultravioleta pode ser introduzido substituindo a função de Wightman por uma outra contendo um corte Λ, ou seja

$$\Delta^{(+)}(x-y;m) \longrightarrow \Delta^{(+)}(x-y;m) - \Delta^{(+)}(x-y;\Lambda) \quad , \qquad (2.185)$$

de forma que, para argumentos pequenos

$$\Delta^{(+)}(x-y;m;\Lambda) \simeq -\frac{1}{4\pi}\ln\frac{m^2}{\Lambda^2} \quad . \qquad (2.186)$$

Se fizermos $J(x) = \beta\delta(x)$ na equação (2.184) vamos obter facilmente que

$$e^{i\beta\varphi} = \left(\frac{m^2}{\Lambda^2}\right)^{\frac{\beta^2}{8\pi}} N_m e^{i\beta\varphi} \quad . \qquad (2.187)$$

Assim, podemos escrever o cosseno em sua forma exponencial e redefinir o parâmetro α_o através da renormalização multiplicativa

$$\alpha = \alpha_o\left(\frac{m^2}{\Lambda^2}\right)^{\frac{\beta^2}{8\pi}} \qquad (2.188)$$

e o termo de interação na Hamiltoniana fica

$$\alpha_o\cos\beta\varphi = \alpha N_m\cos\beta\varphi \quad . \qquad (2.189)$$

Podemos escrever esta última expressão de uma forma que não dependa do corte Λ. Se definimos o operador de campo (2.179) com uma massa μ, ao invés de m, encontraríamos uma normalização diferente para a constante α_o, ou seja

$$\alpha^* = \alpha_o\left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2}\right)^{\frac{\beta^2}{8\pi}} \Longrightarrow \alpha_o\cos\beta\varphi = \alpha^* N_\mu\cos\beta\varphi \quad , \qquad (2.190)$$

que nos leva a seguinte identidade

$$N_m \cos\beta\varphi = \left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{\frac{\beta^2}{8\pi}} N_\mu \cos\beta\varphi \quad . \tag{2.191}$$

Aplicando o teorema de Wick à Hamiltoniana livre $\mathcal{H}_o$ ficamos com

$$\mathcal{H}_o = N_m\mathcal{H}_o + \frac{1}{2}\langle 0 \mid \pi^2(x) \mid 0\rangle_m + \frac{1}{2}\langle 0 \mid (\partial_1\varphi(x))^2 \mid 0\rangle_m \tag{2.192}$$

ou

$$\mathcal{H}_o = N_\mu\mathcal{H}_o + \frac{1}{2}\langle 0 \mid \pi^2(x) \mid 0\rangle_\mu + \frac{1}{2}\langle 0 \mid (\partial_1\varphi(x))^2 \mid 0\rangle_\mu \quad , \tag{2.193}$$

onde os índices m e μ correspondem às respectivas definições dos operadores π e φ. O valores esperados podem ser facilmente calculados usando (2.179) e (2.180), fornecendo

$$\begin{aligned} E_o(m) &= \frac{1}{2}\langle 0 \mid \pi^2(x) \mid 0\rangle_m + \frac{1}{2}\langle 0 \mid (\partial_1\varphi(x))^2 \mid 0\rangle_m \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{8\pi}\frac{2k^2+m^2}{\sqrt{k^2+m^2}} \end{aligned} \tag{2.194}$$

ou

$$\begin{aligned} E_o(\mu) &= \frac{1}{2}\langle 0 \mid \pi^2(x) \mid 0\rangle_\mu + \frac{1}{2}\langle 0 \mid (\partial_1\varphi(x))^2 \mid 0\rangle_\mu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{8\pi}\frac{2k^2+\mu^2}{\sqrt{k^2+\mu^2}} \quad . \end{aligned} \tag{2.195}$$

Assim, a Hamiltoniana renormalizada poderá ser escrita como

$$\mathcal{H} = N_m\mathcal{H}_o - \frac{\alpha}{\beta^2}N_m \cos\beta\varphi \; - \gamma \quad , \tag{2.196}$$

onde

$$\gamma = \gamma_o - E_o(m) \quad , \tag{2.197}$$

mostrando que as divergências ultravioletas são sanadas através da redefinição das constantes de acoplamento via ordenação de Wick. Pode-se ainda, igualar (2.192) e (2.193) ficando com

$$N_m\mathcal{H}_o = N_\mu\mathcal{H}_o + E_o(\mu) - E_o(m) \quad . \tag{2.198}$$

Cada uma das integrais em E_o são divergentes, porém a diferença $E_o(\mu) - E_o(m)$ pode ser calculada se um corte ultravioleta for introduzido

$$E_o(\mu) - E_o(m) = \lim_{b\to\infty} 2\int_0^b \frac{dk}{8\pi}\left[\frac{2k^2+\mu^2}{\sqrt{k^2+\mu^2}} - \frac{2k^2+m^2}{\sqrt{k^2+m^2}}\right] \quad , \tag{2.199}$$

obtendo que

$$E_o(\mu) - E_o(m) = \frac{1}{8\pi}(\mu^2 - m^2) \tag{2.200}$$

e uma relação análoga à (2.191) poderá ser obtida

$$N_m\mathcal{H}_o = N_\mu\mathcal{H}_o + \frac{1}{8\pi}(\mu^2 - m^2) \quad . \tag{2.201}$$

Agora, vamos usar (2.191) e (2.201) para obter o estado fundamental da teoria. Mas antes, vamos analisar um problema simples, porém bastante interessante. Consideremos a Hamiltoniana de um campo escalar livre definida por

$$\mathcal{H}' = N_m\left[\mathcal{H}_o + \frac{\beta^2}{2}\varphi(x)^2\right] \quad , \tag{2.202}$$

com $\mathcal{H}_o$ dado por (2.181) e a massa do campo não é necessariamente igual a β. Para obter uma estimativa do estado fundamental da teoria iremos utilizar o método variacional. Para tanto vamos propor como "estados tentativas" aqueles apropriados para uma teoria livre de massa μ definidos por

$$a(k,\mu) \mid 0\rangle_\mu = 0 \quad . \tag{2.203}$$

Tomando o logaritmo de (2.191), ficaremos com

$$\ln\left[N_m\cos\beta\varphi\right] = \frac{\beta^2}{8\pi}\ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) + \ln\left[N_\mu\cos\beta\varphi\right] \quad , \tag{2.204}$$

que pode ser expandida em torno de $\beta = 0$, ficando com

$$N_m\left[\frac{\beta^2}{2}\varphi(x)^2\right] = \frac{\beta^2}{8\pi}\ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) - N_\mu\left[\frac{\beta^2}{2}\varphi(x)^2\right] \quad . \tag{2.205}$$

Substituindo em (2.202) fica-se com

$$\mathcal{H}' = N_m\left[\mathcal{H}_o\right] + \frac{\beta^2}{8\pi}\ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) - N_\mu\left[\frac{\beta^2}{2}\varphi(x)^2\right] \quad . \tag{2.206}$$

Utilizando (2.201) escrevemos $\mathcal{H}'$ como função apenas da ordenação com respeito à massa μ

$$\mathcal{H}' = -N_\mu \left[\frac{\beta^2}{2}\varphi(x)^2\right] + N_\mu \mathcal{H}_o + \frac{1}{8\pi}(\mu^2 - m^2) + \frac{\beta^2}{8\pi}\ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \tag{2.207}$$

e usando (2.203) obtemos

$$\langle 0 \mid \mathcal{H}' \mid 0\rangle_\mu = \frac{1}{8\pi}(\mu^2 - m^2) + \frac{\beta^2}{8\pi}\ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \quad . \tag{2.208}$$

Para saber qual o valor de μ que conduz a energia a um mínimo deve-se derivar $\langle 0 \mid \mathcal{H}' \mid 0\rangle_\mu$ com respeito a μ^2 e igualar a zero. Fazendo isso obteremos

$$\frac{d}{d\mu^2}\langle 0 \mid \mathcal{H}' \mid 0\rangle_\mu = \frac{1}{8\pi} - \frac{\beta^2}{8\pi\mu^2} \quad , \tag{2.209}$$

$$\frac{d}{d\mu^2}\langle 0 \mid \mathcal{H}' \mid 0\rangle_\mu = 0 \quad \Longrightarrow \quad \beta^2 = \mu^2 \quad . \tag{2.210}$$

que é o resultado esperado para a teoria descrita pela Hamiltoniana (2.202).

Uma vez exposta a metodologia, vamos aplicá-la à teoria de sine-Gordon. Assim, tomaremos o valor esperado no vácuo da Hamiltoniana $\mathcal{H}$, equação (2.196),

$$\langle 0 \mid \mathcal{H} \mid 0\rangle_\mu = \langle 0 \mid \left[N_m \mathcal{H}_o - \frac{\alpha}{\beta^2} N_m \cos\beta\varphi \; - \gamma\right] \mid 0\rangle_\mu \quad . \tag{2.211}$$

Substituindo (2.191) e (2.201) ficaremos com

$$\langle 0 \mid \mathcal{H} \mid 0\rangle_\mu = \frac{1}{8\pi}\mu^2 - \frac{\alpha}{\beta^2}\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{\frac{\beta^2}{8\pi}} - \frac{1}{8\pi}m^2 - \gamma \quad , \tag{2.212}$$

uma vez que

$$\begin{aligned} \langle 0 \;\; \mid \;\; N_\mu \cos\beta\varphi \;\; \mid 0\rangle_\mu &= 1 \\ \langle 0 \;\; \mid \;\; N_\mu \mathcal{H}_o \;\; \mid 0\rangle_\mu &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{2.213}$$

A expressão (2.212) mostra que para $\beta^2 \geq 8\pi$ o segundo termo cresce mais que o primeiro; o valor esperado no vácuo da Hamiltoniana não terá um limite inferior para valores grandes da massa μ e portanto, a teoria de sine-Gordon não possui um estado fundamental bem definido para esta região da constante de acoplamento e perde seu sentido físico.

Capítulo 3

Estudos em Três Dimensões

Algumas têm sido as tentativas de se obter um esquema de bosonização em (2+1)D que tenha um caráter geral, entendendo por isso uma fórmula do tipo Mandelstam, que expressa o operador fermiônico como uma função do operador bosônico. Um importante ganho neste sentido foi o trabalho de Lüscher[31]. Ele considerou uma teoria não relativística de um campo de calibre — Maxwell-Chern-Simons (MCS) — acoplado minimamente com os férmions, descrita pela Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4e^2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{\theta}{4\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\alpha}A^\mu\partial^\nu A^\alpha + \Psi^\dagger[iD_0 + \frac{1}{2M}D_kD_k]\Psi \tag{3.1}$$

onde $D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu$ é a derivada covariante. Os operadores de campo respeitam as regras de comutação canônicas

$$\begin{aligned} [\pi_k(x), A_j(y)] &= -i\delta_{kj}\delta(x-y), \\ \{\Psi(x), \Psi^\dagger(y)\} &= \delta(x-y) \quad , \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde π_k é o momento canonicamente conjugado ao campo A_k definido por

$$\pi_k = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_k)} = -\frac{1}{2e^2}F_{0k} - \frac{\theta}{4\pi^2}\epsilon_{\mu 0k}A^\mu \quad . \tag{3.3}$$

Sendo uma teoria tridimensional com setor fermiônico não relativístico, o campo espinorial possui apenas uma componente, o que simplificou bastante o trabalho. Partindo de objetos invariantes por transformações de calibre, Lüscher construiu operadores compostos que comutam para pontos diferentes do espaço e que descrevem o setor observável da teoria. Em particular,

ele obteve formas bosonizadas para a *Hamiltoniana* e para o *operador de transporte de carga* do sistema. Chamando $\Phi(x)$ o operador bosônico, ele encontrou que

$$\Phi(x) = L(x)\Psi(x)\exp\left[i\frac{\pi}{\theta}\int dz^2\rho(z)\varphi(z-x)\right] \tag{3.4}$$

$$L(x) = \exp\left[i\frac{\pi}{\theta}\int dz^2\left(\pi_k(z) - \frac{\theta}{4\pi^2}\epsilon_{kl}A_l(z)\right)\epsilon_{kj}\partial_j \ln|z-x|\right] \tag{3.5}$$

onde φ é uma variável angular. Usando (3.2), pode-se mostrar que os campos $\Phi(x)$ comutam para pontos diferentes do espaço

$$[\Phi(x), \Phi(y)] = [\Phi(x), \Phi^\dagger(y)] = 0 \quad . \tag{3.6}$$

Apesar de seu desenvolvimento ter sido formal — sem dar a devida atenção às singularidades que surgem a partir do produto de campos no mesmo ponto ou da definição da exponencial de um operador — ele pôde aplicar os resultados obtidos para o caso de uma rede finita, onde o corte na região ultravioleta é automaticamente efetuado e a bosonização mostrou-se válida para qualquer valor positivo do parâmetro de rede. Uma outra importante característica que se evidencia no procedimento é que a carga fermiônica, tal como foi mostrado para o caso de 2D, é explicitada como uma carga topológica da teoria de calibre

$$\begin{aligned} Q_A &= \int d^2x(\overline{\psi}\gamma^0\psi) = \frac{1}{2\pi}\int d^2x\,\overrightarrow{n}.\overrightarrow{B}(x) = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int d^2x\,\overrightarrow{n}.(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A}) = \frac{1}{2\pi}\oint_{C_\infty} d\overrightarrow{x}.\overrightarrow{A} \end{aligned} \tag{3.7}$$

onde $B(x)$ é o campo magnético e $A(x)$ seu potencial. Apesar do sucesso de seu trabalho, o método utilizado era bastante particular e não foi generalizado para outros modelos fermiônicos.

Uma outra abordagem para efetuar a bosonização em 3D foi sugerida por Marino[32] para o caso de férmions livres e não massivos. Ele conseguiu expressar os operadores fermiônicos como exponenciais de campos vetoriais invariantes de calibre, descobrindo que a Lagrangiana fermiônica

$$\mathcal{L} = i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \tag{3.8}$$

é equivalente — em ordem dominante numa expansão de Wilson — a uma teoria de um campo de calibre descrito por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} W_{\mu\nu} \left(-\Box\right)^{-1/2} W^{\mu\nu} + \frac{\theta}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha} W_\mu \partial_\nu W_\alpha \quad , \tag{3.9}$$

sendo $W^{\alpha\beta} = \partial^\alpha W^\beta - \partial^\beta W^\alpha$. Porém, como a teoria estudada foi bastante simplificada, a aplicação do método a outros modelos mais realistas — como por exemplo o modelo de Thirring massivo em (2+1)D — parece não ter tido sucesso.

Uma recente proposta sugerida por Marino e Banerjee[10] foi considerar o Modelo de Thirring Massivo (MTM) através do formalismo de Integrais de Trajetórias, utilizando métodos aproximativos para estudar o comportamento do modelo em ordem dominante. Um procedimento semelhante também foi usado por Schaposnik e Fradkin[11] para obter uma relação do MTM com os modelos Auto-dual e Maxwell-Chern-Simons. Nesta primeira seção, vamos desenvolver os procedimentos mencionados e reproduzir alguns dos resultados ali obtidos. Isto será feito como uma motivação para o estudo do modelo que iremos tratar na seção seguinte, férmions acoplados com campos vetoriais.

3.1 Modelo de Thirring

Para o MTM foi proposto um procedimento que consiste em restringir o modelo à uma aproximação Gaussiana, efetuando a integração funcional nos férmions e expandindo o determinante fermiônico até a segunda ordem na constante de acoplamento, como mostraremos em seguida.

Vamos tomar o funcional gerador das funções de correlação da corrente para o MTM

$$\mathcal{Z}_{MTM}[J] = \rho \int D\bar{\psi} D\psi \exp i \int d^3x \mathcal{L}_{MTM} \tag{3.10}$$

sendo ρ uma constante de normalização e $\mathcal{L}_{MTM}$ a Lagrangiana para o MTM na presença de fontes,

$$\mathcal{L}_{MTM} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu \partial^\mu - M)\psi - \frac{g^2}{2} j^\mu j_\mu + g j_\mu J^\mu \quad . \tag{3.11}$$

Aqui, $j^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ é a corrente fermiônica e J^μ é uma fonte externa. Para eliminar a interação quártica e efetuar a integral usa-se a seguinte identidade, válida a menos de uma constante multiplicativa[1]

$$\exp\left[-i\frac{b^2}{2}\int d^3x j^\mu j_\mu\right] = \int Df^\mu \exp i\int d^3x\left[\frac{1}{2}f^\mu f_\mu + bf^\mu j_\mu\right] \quad , \tag{3.12}$$

onde f^μ é um campo vetorial auxiliar. Substituindo tal identidade em $\mathcal{Z}_{MTM}[J]$, ficamos com

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{MTM}[J] &= \rho\int D\bar{\psi}D\psi Df^\mu \exp i\int d^3x\bar{\psi}[i\gamma^\mu\partial_\mu - M + g\gamma^\mu(f+J)_\mu]\psi + \\ &+\frac{1}{2}f^\mu f_\mu \quad .\end{aligned} \tag{3.13}$$

Este procedimento permite-nos calcular a integral fermiônica, uma vez que a interação quártica foi transformada em uma quadrática e a integral tornou-se Gaussiana. Este tipo de transformação é bastante utilizado quando o campo fermiônico tem N componentes e se deseja obter uma expansão em potências de $1/N$, como exposto em [33]. A integração nos férmions pode ser representada como o determinante do operador K

$$K = [i\gamma^\mu\partial_\mu - M + g\gamma^\mu(f+J)_\mu] \tag{3.14}$$

que depende explicitamente do campo f^μ. O funcional $\mathcal{Z}_{MTM}[J]$ fica

$$\mathcal{Z}_{MTM}[J] = \rho\int Df^\mu\left[\exp i\int d^3x\frac{1}{2}f^\mu f_\mu\right]\times detK \quad . \tag{3.15}$$

O determinante pode ser expresso como

$$detK = \exp[Tr\ln K] = \exp[Tr(\ln\bar{K}) + Tr\ln(1 + g\bar{K}^{-1}\gamma^\mu(f+J)_\mu)] \quad . \tag{3.16}$$

Sendo $\bar{K} = i\gamma^\mu\partial_\mu - M$ o operador de Dirac livre, o traço de $\ln\bar{K}$ é uma constante e sua exponencial pode ser absorvida no fator de normalização ρ. Expande-se o segundo termo usando

$$\ln(1+x) \simeq x - \frac{x^2}{2} \quad . \tag{3.17}$$

[1]Esta identidade será largamente utilizada neste Capítulo nas integrações Gaussianas dos campos vetoriais.

Então,

$$detK \simeq \exp\left[Tr(g\bar{K}^{-1}\gamma^{\mu}(f+J)_{\mu}) - \frac{g^2}{2}Tr(\bar{K}^{-1}\gamma^{\mu}(f+J)_{\mu})^2\right] \quad . \tag{3.18}$$

Para o cálculo do traço deve-se notar que os operadores f e J são diagonais no espaço de configurações, enquanto que $\bar{K}$ é diagonal no espaço dos momentos. No cálculo do traço no expoente de (3.18) o primeiro termo fica

$$\begin{aligned} Tr(g\bar{K}^{-1}\gamma^{\mu}(f+J)_{\mu}) &= g\int d^3x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} Tr_{\gamma}\langle x \mid \bar{K}^{-1} \mid k\rangle \times \\ \langle k \mid & \gamma^{\mu}(f+J)_{\mu}) \mid x\rangle \\ &= g\left(\tilde{f}^{\mu}(0)+\tilde{J}^{\mu}(0)\right)\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} Tr_{\gamma}\left[\frac{(\not{k}+M)}{k^2-M^2}\gamma_{\mu}\right] \quad , \end{aligned} \tag{3.19}$$

sendo Tr_{γ} o traço no espaço das matrizes de Dirac. Os dois termos da integração se anulam: no primeiro o integrando é ímpar e no segundo o traço de uma matriz γ é zero. O termo quadrático de (3.18) fornece

$$Tr\left(\frac{g^2}{2}[\bar{K}^{-1}\gamma^{\mu}(f+J)_{\mu}]^2\right) = -\frac{g^2}{2}\int d^3x d^3y (f_{\mu}+J_{\mu})(x)\Pi^{\mu\nu}(x-y)(f_{\nu}+J_{\nu})(y)$$

onde $\Pi^{\mu\nu}(x-y)$ é o tensor de polarização do vácuo, dado por

$$\Pi^{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} Tr_{\gamma}\left[\frac{i}{\not{k}-M}\gamma^{\mu}\frac{i}{\not{k}-\not{p}-M}\gamma^{\nu}\right] e^{-ip(x-y)} \quad . \tag{3.20}$$

O conhecido resultado de que o tensor de polarização $\Pi^{\mu\nu}$ em 3D leva ao termo de Chern-Simons e com isso quebra a simetria de paridade[34], pode ser compreendida se lembrarmos que o traço de três matrizes γ não se anula em 3D, mas é dado pela equação (A.21d).

Dessa forma, a expressão explícita para o determinante fermiônico fica

$$detK \simeq \exp i\frac{g^2}{2}\int d^3x d^3y (f_{\mu}+J_{\mu})(x)\Pi^{\mu\nu}(x-y)(f_{\nu}+J_{\nu})(y) \quad . \tag{3.21}$$

Substituímos este resultado no funcional (3.15), obtendo[2]

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{MTM}[J] \simeq \rho\int Df^{\mu}\exp i\int d^3x\frac{1}{2}\{f_{\mu}[g^{\mu\nu}+g^2\Pi^{\mu\nu}]f_{\nu}+ \\ +2g^2J_{\mu}\Pi^{\mu\nu}f_{\nu}+g^2J_{\mu}\Pi^{\mu\nu}J_{\nu}\} \quad . \end{aligned} \tag{3.22}$$

[2]Aqui, o objeto $\int d^3x J_{\mu}\Pi^{\mu\nu}f_{\nu}$ deve ser entendido no sentido de uma convolução: $\int d^3x d^3y J_{\mu}(x)\Pi^{\mu\nu}(x-y)f_{\nu}(y)$. Tal notação simplificada será bastante utilizada no decorrer deste Capítulo.

Devido à simplificação efetuada no cálculo do determinante, podemos calcular explicitamente a integral sobre o campo auxiliar. Efetuando tal integral quadrática em f^μ obtém-se

$$\mathcal{Z}_{MTM}[J] \simeq \rho \exp i \int d^3x \frac{g^2}{2} \{ J_\mu \Pi^{\mu\nu} J_\nu - g^2 J_\mu \Pi^{\mu\alpha} [g_{\alpha\beta} + g^2 \Pi_{\alpha\beta}]^{-1} \Pi^{\beta\nu} J_\nu \} \quad . \tag{3.23}$$

Pode-se inverter o operador $\mathcal{O}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + g^2 \Pi_{\alpha\beta}$ utilizando o fato de que estamos no regime de acoplamento fraco e portanto, podemos reter apenas termos de segunda ordem em g. Em notação matricial,

$$\mathcal{O} = (G + g^2 \Pi)^{-1} \simeq (1 - g^2 G^{-1} \Pi) G^{-1} \tag{3.24}$$

A parte de $\mathcal{O}$ proporcional a g^2 dará termos de ordem g^4 quando inserido na equação (3.23). Uma vez que estaremos efetuando expansões até ordem dominante, tais termos serão desprezados. Finalmente, o funcional gerador para as correntes do modelo de Thirring fica

$$\mathcal{Z}_{MTM}[J] \simeq \rho \exp i \int d^3x \frac{g^2}{2} [J_\mu \Pi^{\mu\nu} J_\nu - g^2 J_\mu \Pi^{\mu\alpha} \Pi_\alpha{}^\nu J_\nu] \quad . \tag{3.25}$$

A função de dois pontos para a corrente do MTM é obtida tomando-se as derivadas funcionais com respeito às fontes

$$\langle 0 \mid j_\mu(x) j_\nu(y) \mid 0 \rangle = \frac{(-i)^2}{g^2} \frac{\delta^2 \mathcal{Z}}{\delta J_\mu(x) \delta J_\nu(y)} \quad . \tag{3.26}$$

Imediatamente, obtém-se

$$H^{\mu\nu}(x-y) \equiv \langle 0 \mid j_\mu(x) j_\nu(y) \mid 0 \rangle = \Pi^{\mu\nu}(x-y) - g^2 \int d^3z \Pi^{\mu\alpha}(x-z) \Pi_\alpha{}^\nu(z-y) \quad . \tag{3.27}$$

Analisando o funcional (3.25) pode-se supor que ele é oriundo de uma teoria livre que seria definida pela Lagrangiana

$$\mathcal{L} = B_\mu(x) \left[\Pi^{\mu\nu}(x-y) - g^2 \int d^3z \Pi^{\mu\alpha}(x-z) \Pi_\alpha{}^\nu(z-y) \right] B_\nu(y) \quad . \tag{3.28}$$

Realmente, se a fórmula de bosonização para a corrente do MTM for dada por

$$j_\mu(x) = \int d^3z H_{\mu\nu}(x-z) B^\nu(z) \tag{3.29}$$

teremos

$$\langle 0 \mid j_\mu(x) j_\nu(y) \mid 0\rangle = \int d^3z d^3w H_\mu{}^\alpha(x-z) H_\nu{}^\lambda(y-w) \langle 0 \mid B_\alpha(z) B_\lambda(w) \mid 0\rangle \quad . \tag{3.30}$$

e (3.27) seguirá pois, formalmente, a função de correlação do campo B_μ é o inverso do propagador $H_{\mu\nu}(x-y)$. Deve-se tomar cuidado, porém, com este propagador. Ele é transversal — $\partial_\mu H^{\mu\nu} = 0$ — e o campo B_μ, portanto, deve ser invariante por transformações de calibre

$$B_\mu \to B_\mu + cte \partial_\mu \Lambda \quad . \tag{3.31}$$

Isto requer que seja adicionado um termo de fixação de calibre à Lagrangiana (3.28) a fim de obter a função de dois pontos para o campo B_μ; tal termo porém, não dá nenhuma contribuição para a funções de correlação da corrente. Assim, redefinimos (3.28) pela seguinte Lagrangiana

$$\mathcal{L}_G = B_\mu(x) \left[\Pi^{\mu\nu}(x-y) - g^2 \int d^3z \Pi^{\mu\alpha}(x-z) \Pi_\alpha{}^\nu(z-y) + \frac{\lambda}{2} \partial^\mu \partial^\nu \right] B_\nu(y) \quad , \tag{3.32}$$

portanto,

$$\langle 0 \mid B^\mu(x) B^\nu(y) \mid 0\rangle = \left[\Pi^{\mu\nu}(x-y) - g^2 \int d^3z \Pi^{\mu\alpha}(x-z) \Pi_\alpha{}^\nu(z-y) + \frac{\lambda}{2} \partial^\mu \partial^\nu \right]^{-1} \quad . \tag{3.33}$$

Substituindo isto em (3.30), recuperamos o resultado anterior, equação (3.27).

A equivalência entre o MTM e a teoria descrita por (3.28) foi obtida originariamente na referência [10]. Deve ser notado também que as identidades (3.28) e (3.29) só são válidas até segunda ordem em g, enquanto que a massa do férmion é arbitrária. A teoria descrita porém, é não local devido à estrutura do tensor de polarização

$$\widetilde{\Pi}^{\mu\nu}(k) = A(k^2) \epsilon^{\mu\nu\alpha} k_\alpha + B(k^2)[k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu] \tag{3.34}$$

onde $A(k^2)$ e $B(k^2)$ são dadas por

$$\begin{aligned} A(k^2) &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^1 dx \frac{M}{\sqrt{M^2 + x(1-x)k^2}} \\ B(k^2) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{dx x(1-x)}{\sqrt{M^2 + x(1-x)k^2}} \quad . \end{aligned} \tag{3.35}$$

No limite de massa grande comparada com os momentos, as funções $B(k^2)$ e $A(k^2)$ podem ser aproximadas tomando-se o limite $M \to \infty$, como será visto adiante. Estes, bem como alguns outros resultados que serão obtidos na sequência evidenciam o caráter aproximativo da técnica de bosonização em 3 dimensões espaço-temporais. Em resumo, o modelo de Thirring massivo em 3D é equivalente — em ordem dominante — a uma teoria de um campo vetorial de calibre livre, cuja dinâmica é dada por (3.28).

Vamos, então, efetuar uma expansão no inverso da massa do férmion sobre o tensor de polarização $\Pi^{\mu\nu}$, a fim de obter a equivalência do MTM com alguma teoria bosônica mais simplificada. Para tanto, retornemos à equação (3.13). Deve-se lembrar que o MTM em 3D não é renormalizável por contagem de potências, mas sim numa expansão $1/N$ em um modelo com simetria $U(N)$, como foi mostrado nas referências [35] e [36]. Assim, vamos supor que o campo fermiônico possui N componentes e seu funcional gerador fica dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{MTM}[J] &= \rho \int D\bar{\psi} D\psi D f^{\mu} \exp i \int d^3x \{ \bar{\psi}^i \left[i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - M + \frac{g}{\sqrt{N}} \gamma^{\mu} \left(f + J \right)_{\mu} \right] \psi^i + \\ & \frac{1}{2} f^{\mu} f_{\mu} \} \quad , \end{aligned} \tag{3.36}$$

onde a constante de acoplamento foi redefinida a fim de permitir a utilização dos resultados já obtidos, uma vez que o fator $1/N$ aparecendo no determinante (3.18) se cancela com o fator N vindo do traço no espaço $U(N)$. Portanto, vamos continuar a partir da equação (3.22)

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{MTM}[J] &= \rho \int D f^{\mu} \exp i \int d^3x \frac{1}{2} \{ f_{\mu} [g^{\mu\nu} + g^2 \Pi^{\mu\nu}] f_{\nu} + \\ & +2g^2 J_{\mu} \Pi^{\mu\nu} f_{\nu} + g^2 J_{\mu} \Pi^{\mu\nu} J_{\nu} \} \quad , \end{aligned} \tag{3.37}$$

e efetuar a seguinte mudança de variável

$$\begin{aligned} f^{\mu} &\to f^{\mu} - J^{\mu} \\ D f^{\mu} &\to D f^{\mu} \quad , \end{aligned} \tag{3.38}$$

permitindo escrever

$$\mathcal{Z}_{MTM}[J] = \rho \int D f^{\mu} \exp i \int d^3x \{ \frac{1}{2} f^{\mu} f_{\mu} + \frac{g^2}{2} f_{\mu} \Pi^{\mu\nu} f_{\nu} + \frac{1}{2} J^{\mu} J_{\mu} - f^{\mu} J_{\mu} \} \quad . \tag{3.39}$$

O tensor de polarização da eletrodinâmica em três dimensões é dado por (3.34) e (3.35). Até a ordem dominante de $1/M$ as funções $A(k^2)$ e $B(k^2)$ se reduzem a constantes

$$\begin{aligned} A(k^2) &= -\frac{1}{4\pi} + O[\frac{1}{M^2}] \\ B(k^2) &= \frac{1}{12M\pi} + O[\frac{1}{M^2}] \quad . \end{aligned} \tag{3.40}$$

Tomando $A(k^2)$ e $B(k^2)$ dadas por (3.40), substituímos em (3.39) ficando com

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{MTM}[J] &\simeq \rho \exp\left[i\int d^3x \frac{1}{2} J^\mu J_\mu\right] \times \\ & \int Df^\mu \exp i \int d^3x \left[\mathcal{L}_{AD}[J] - \frac{g^2}{48M\pi} G^{\mu\nu}G_{\mu\nu}\right] \end{aligned} \tag{3.41}$$

sendo $G^{\mu\nu} = \partial^\mu f^\nu - \partial^\nu f^\mu$ um tensor tipo Maxwell e $\mathcal{L}_{AD}[J]$ é a Lagrangiana do modelo Auto-dual na presença de fontes

$$\mathcal{L}_{AD}[J] = -\frac{ig^2}{8\pi}\epsilon^{\mu\nu\alpha} f_\mu \partial_\alpha f_\nu + \frac{1}{2} f^\mu f_\mu - f^\mu J_\mu \quad . \tag{3.42}$$

Na equação (3.41) o termo de Maxwell torna-se consideravelmente menor que o termo de Chern-Simons, o que nos leva à seguinte identificação

$$\mathcal{Z}_{MTM}[J] \simeq \rho \exp\left[i\int d^3x J^\mu J_\mu\right] \mathcal{Z}_{AD}[J] \quad , \tag{3.43}$$

onde

$$\mathcal{Z}_{AD}[J] = \exp i \int d^3x \mathcal{L}_{AD}[J] \quad .$$

Por outro lado, sabe-se [11][12][38] que o modelo Auto-dual sem fontes externas descrito pela Lagrangiana

$$\mathcal{L}_{AD} = -\frac{ig^2}{8\pi}\epsilon^{\mu\nu\alpha} f_\mu \partial_\alpha f_\nu + \frac{1}{2} f^\mu f_\mu \tag{3.44}$$

é totalmente equivalente ao modelo de Maxwell-Chern-Simons, cuja Lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L}_{MCS} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{2i\pi}{g^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha} A_\mu \partial_\alpha A_\nu \quad . \tag{3.45}$$

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
2849
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
ex. 1
INSTITUTO DE FÍSICA

Este fato nos leva a crer que existe uma relação entre o MTM e o modelo de MCS. A fim de verificar isto, vamos observar como fica a relação entre os modelos AD e MCS quando incluímos uma fonte externa para o campo Auto-dual. Para tanto, vamos considerar a seguinte Ação Interpolante

$$S_I = \int d^3x \left[\frac{1}{2} f^\mu f_\mu + i\epsilon^{\mu\alpha\nu} \partial_\alpha f_\mu A_\nu - i\frac{2\pi}{g^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha} A_\mu \partial_\alpha A_\nu + f^\mu J_\mu \right] \quad , \tag{3.46}$$

onde J_μ é a fonte do campo básico do modelo AD. Como será visto, definindo-se o funcional

$$\mathcal{Z}_I[J] = \rho \int DA^\mu Df^\mu \exp iS_I \tag{3.47}$$

pode-se efetuar a integração no campo A^μ obtendo o modelo AD

$$\mathcal{Z}_I[J] = \rho \int Df^\mu \exp i \int d^3x \mathcal{L}_{AD}[J] = \mathcal{Z}_{AD}[J] \quad , \tag{3.48}$$

ou integrar em f^μ para ficar com o modelo de MCS

$$\mathcal{Z}_I[J] = \exp\{-i \int d^3x J_\mu J^\mu\} \int DA^\mu \exp i \int d^3x \mathcal{L}_{MCS}[J] \quad , \tag{3.49}$$

sendo

$$\mathcal{L}_{MCS}[J] = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{2i\pi}{g^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha} A_\mu \partial_\alpha A_\nu + i\epsilon_{\mu\nu\lambda} \partial^\nu A^\lambda J^\mu \quad . \tag{3.50}$$

Assim, podemos concluir que

$$\mathcal{Z}_{AD}[J] = \exp\left[-i \int d^3x J_\mu J^\mu\right] \mathcal{Z}_{MCS}[J] \quad , \tag{3.51}$$

ou seja, as funções de correlação do campo básico f^μ do modelo AD são iguais às do campo dual $\epsilon_{\mu\nu\lambda}\partial^\nu A^\lambda$ do modelo de MCS. Juntando esta equação com (3.43) teremos

$$\mathcal{Z}_{MTM}[J] \simeq \mathcal{Z}_{MCS}[J] = \int DA^\mu \exp iS_{MCS}[J] \quad , \tag{3.52}$$

mostrando a equivalência entre o MTM e o modelo de MCS, na aproximação de momentos pequenos, comparados com a massa do férmion.

Para se obter a função de dois pontos para a corrente do MTM deve-se efetuar derivadas funcionais com respeito às fontes externas J^μ. Utilizando as relações (3.52) e (3.50) pode-se obter uma fórmula de bosonização para a corrente do MTM

$$j_\mu = -\epsilon_{\mu\nu\lambda}\partial^\nu A^\lambda \quad . \tag{3.53}$$

Esta equivalência — válida em ordem dominante de $\frac{1}{M}$ na massa do férmion — entre o modelo de Thirring massivo e o modelo de Maxwell-Chern-Simons, bem como a equivalência exata entre este último e o modelo Auto-dual foram obtidas nas referências [11] e [38].

Uma vez atingido nosso objetivo, podemos mostrar como é obtida a identificação entre os modelos AD e MCS descritos, respectivamente, por (3.44) e (3.45). Para tanto, vamos tomar uma ação que interpola os campos f^μ do modelo Auto-dual e A^μ do modelo Maxwell-Chern-Simons, semelhantemente à (3.46).

$$S_I = \int d^3x \left[\frac{1}{2}f^\mu f_\mu + i\sqrt{\frac{g^2}{4\pi}}\epsilon^{\mu\alpha\nu}\partial_\alpha f_\mu A_\nu - \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha}A_\mu\partial_\alpha A_\nu\right] \tag{3.54}$$

Para mostrar a equivalência, defini-se o funcional

$$\mathcal{Z}_I = \rho\int DA_\mu Df_\mu \exp iS_i \quad , \tag{3.55}$$

onde a integração no campo f^μ fornece o modelo de MCS

$$\mathcal{Z}_I = \rho\int DA_\mu \exp i\int d^3x\mathcal{L}_{MCS} \quad , \tag{3.56}$$

enquanto que se integrarmos em A_μ, teremos o modelo AD

$$\mathcal{Z}_I = \rho\int Df_\mu \exp i\int d^3x\mathcal{L}_{AD} \quad . \tag{3.57}$$

Vamos efetuar cada uma das integrais separadamente.

★ **Integrando em A^μ**

Na ação (3.54) vamos definir os operadores $S^{\mu\nu} = i\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\alpha$ e $R^\nu = i\sqrt{\frac{g^2}{4\pi}}\epsilon^{\mu\alpha\nu}\partial_\alpha f_\mu$. Com isto, o resultado da integração é

$$\mathcal{Z}_I = \rho\int Df_\mu \exp\frac{1}{2}\int\left[f^\mu f_\mu - R^\mu S^{-1}_{\mu\nu}R^\nu\right]d^3x \quad . \tag{3.58}$$

Contudo, o operador S não admite inversa devido à sua transversalidade, o que é um reflexo da invariância de calibre da Lagrangiana original. Para obter a sua inversa introduz-se um termo de fixação de calibre na Lagrangiana — $\frac{\theta}{2}(\partial^\mu A_\mu)^2$ — de forma que o operador S é transformado da seguinte forma

$$S^{\mu\nu} \longrightarrow S^{\mu\nu}(\theta) = i\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\alpha + \theta\partial^\mu\partial^\nu \tag{3.59}$$

e o seu inverso ficará

$$(S^{\mu\nu})^{-1}(\theta) = i\epsilon^{\mu\nu\alpha}\frac{\partial_\alpha}{\partial^2} + \frac{1}{\theta}\frac{\partial^\mu\partial^\nu}{\partial^4} \tag{3.60}$$

Como já era de se esperar, o termo proporcional a θ não dá contribuições pois $\partial_\mu R^\mu \equiv 0$. Ficamos, então com

$$\mathcal{Z}_I = \rho \int Df_\mu \exp i \int d^3x \left[\frac{f^\mu f_\mu}{2} - \frac{ig^2}{8\pi}\epsilon^{\mu\nu\alpha} f_\mu \partial_\nu f_\alpha\right] \tag{3.61}$$

onde reconhece-se a Lagrangiana para o modelo AD.

Pode-se concluir, sem necessidade de nenhuma aproximação, que

$$\mathcal{Z}_I = \mathcal{Z}_{AD} \quad , \tag{3.62}$$

fornecendo a primeira parte da prova. A segunda parte será obtida integrando-se no campo f^μ.

★ **Integrando em f^μ**

A integração da equação (3.54) sobre o campo AD é imediata, uma vez que já está em sua forma mais simples. Usando (3.12) ficamos com

$$\mathcal{Z}_I = \int DA^\mu \exp i \int d^3x \left[-\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha} A_\mu \partial_\alpha A_\nu + i\frac{g^2}{4\pi}\epsilon^{\mu\alpha\nu}\partial_\alpha A_\nu \epsilon_{\mu\lambda\beta}\partial^\lambda A^\beta\right] \quad . \tag{3.63}$$

Contraindo os índices apropriados, ficamos com a Lagrangiana de MCS

$$\mathcal{Z}_I = \int DA^\mu \exp i \int d^3x \mathcal{L}_{MCS} \quad , \tag{3.64}$$

onde foi efetuado um reescalonamento do campo A^μ através da transformação

$$A^\mu \longrightarrow \sqrt{\frac{4\pi}{g^2}} A^\mu \tag{3.65}$$

a fim de ajustar as constantes para que $\mathcal{L}_{MCS}$ seja dada por (3.45). Conclui-se que

$$\mathcal{Z}_I = \mathcal{Z}_{MCS} \quad , \tag{3.66}$$

estabelecendo a relação desejada

$$\mathcal{Z}_{AD} = \mathcal{Z}_{MCS} \quad . \tag{3.67}$$

Deve ser notado que a identificação acima é exata, mostrando que os modelos de MCS e AD estão relacionados por uma operação de dualidade.

3.2 Modelos Auto-dual e Maxwell-Chern-Simons Acoplados com Férmions

A equivalência entre os modelos AD e MCS também pode ser obtida classicamente [38][12], pelo cálculo direto das equações de movimento a partir das Lagrangianas (3.44) e (3.45), concluindo-se que o campo f^μ do modelo AD é simplesmente o dual do campo A^μ do modelo de MCS, $f^\mu \longrightarrow \frac{1}{m}\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\nu A_\alpha$. Motivados pelos resultados anteriores que relacionam o MTM a teorias de campos vetoriais, podemos estudar que tipo de relação os modelos AD e MCS irão apresentar no caso em que ambos estejam acoplados com férmions. Sem dúvida, existem muitas maneiras de estudar tais relações. Uma delas é considerar a seguinte Lagrangiana Master, que generaliza os dois modelos.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_M &= \frac{m^2}{2}f^\mu f_\mu - m^2 F^\mu f_\mu + \frac{m^2}{2}F^\mu A_\mu + \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - M)\psi - ej^\mu f_\mu + \\ &\quad + eA^\mu g_\mu + \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 \end{aligned} \tag{3.68}$$

onde $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ é a corrente fermiônica, A^μ é o campo eletromagnético, F^μ é o dual de A^μ, dado por

$$F^\mu = \frac{1}{m}\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\rho \quad , \tag{3.69}$$

e f_μ é o campo básico Auto-dual. No momento, a forma precisa da corrente de matéria g^μ será deixada em aberto; como veremos, conforme a escolha que fizermos, diferentes modelos serão relacionados. Exigimos apenas que

seja uma combinação bilinear dos férmions a fim de preservar a invariância de Lorentz e permitir as integrações nesses campos. Deve-se também, imaginar que um termo de fonte acoplado aos férmions esteja subentendido. Porém, como inicialmente as integrações nesses campos não serão efetuadas, tal termo será omitido por simplicidade.

Consideremos o funcional gerador na ausência de fontes

$$\mathcal{Z}_M = \int DA^\mu Df^\mu D\bar{\psi}D\psi \exp i \int d^3x \mathcal{L}_M \tag{3.70}$$

e notamos que ele é quadrático nos 3 campos em questão, o que permite a integração em qualquer um deles.

Apesar da técnica de integração nos férmions ser mais comumente utilizada, pode-se também efetuar integrações sobre os campos bosônicos e descobrir um modelo fermiônico que seja equivalente à teoria inicial, que acopla férmions e bósons.

★ **Integrando em f^μ**

Tomando a equação (3.70), o funcional a ser integrado fica[3]

$$\mathcal{Z}[\psi, A] = \left[\rho \int Df^\mu \exp i \int d^3x \{\frac{m^2}{2} f^\mu f_\mu - f_\mu(m^2 F^\mu + ej^\mu)\}\right] \Phi \tag{3.71}$$

onde

$$\Phi[\psi, A] = \exp i \int d^3x \{\frac{m^2}{2} F^\mu A_\mu + \bar{\psi}(i\gamma_\mu \partial^\mu - M)\psi + eA^\mu g_\mu + \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2\} \tag{3.72}$$

é um fator que independe de f^μ. O resultado da integração é imediato:

$$\mathcal{Z}[\psi, A] = \left[\exp -i \int d^3x \frac{(m^2 F^\mu + ej^\mu)(m^2 F_\mu + ej_\mu)}{2m^2}\right] \Phi \quad . \tag{3.73}$$

Substituindo (3.69) e Φ ficamos com a seguinte expressão

$$\mathcal{Z}[\psi, A] = \exp i \int d^3x \mathcal{L}_{ef}(\psi, A) \tag{3.74}$$

[3] A ordem das integrações não deve alterar o resultado; a escolha foi a que mais simplificou o trabalho algébrico.

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{ef}(\psi, A) &= \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - M)\psi - \frac{e^2}{2m^2}j^\mu j_\mu - eA_\mu(G^\mu - g^\mu) + \\ &+ \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{m}{4}\epsilon_{\alpha\mu\nu}A^\alpha F^{\mu\nu} \qquad (3.75)\end{aligned}$$

onde nota-se o aparecimento da interação quártica nos férmions (2° termo), além da corrente dual

$$G^\mu = \frac{1}{m}\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\nu j_\alpha \quad , \qquad (3.76)$$

que é obtida a partir de uma integração por partes do termo $eF^\mu j_\mu$ em (3.73).

★ **Integrando em A^μ**

Pode-se continuar o processo de integração considerando o funcional que resulta da integração dos campos bosônicos restantes.

$$\mathcal{Z}[\psi] = \int DA^\mu \exp i \int d^3x \mathcal{L}_{ef}(\psi, A) \quad . \qquad (3.77)$$

Para isso, vamos efetuar integrações por partes na $\mathcal{L}_{ef}(\psi, A)$ a fim de obter uma forma mais adequada para a integração. Após esses rearranjos, o funcional a ser integrado terá a seguinte forma

$$\mathcal{Z}[\psi] = \left[\int DA^\mu \exp i \int d^3x\{\frac{1}{2}A^\mu\Gamma_{\mu\nu}A^\nu - eA^\mu(g_\mu - G_\mu)\}\right]\Phi'(\psi) \qquad (3.78)$$

sendo

$$\Phi'(\psi) = \exp i \int d^3x\{\bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - M)\psi - \frac{e^2}{2m^2}j^\mu j_\mu\} \qquad (3.79)$$

$$\Gamma_{\mu\nu} = [g_{\mu\nu}\partial^2 - (1+\lambda)\partial_\mu\partial_\nu - m\epsilon_{\mu\nu\rho}\partial^\rho] \quad . \qquad (3.80)$$

O resultado da integração fornece

$$\mathcal{Z}[\psi] = \left[\exp -i \int d^3x d^3y \frac{e^2}{2}(g_\mu - G_\mu)(x)(\Gamma^{\mu\nu})^{-1}(x-y)(g_\nu - G_\nu)(y)\right]\Phi'(\psi) \qquad (3.81)$$

onde

$$(\Gamma^{\mu\nu})^{-1}(x-y) = \Delta^{\mu\nu}_{MCS}(x-y) = \int \frac{d^3k}{2\pi^3}\widetilde{\Delta}^{\mu\nu}_{MCS}(k)e^{-ik(x-y)} \qquad (3.82)$$

é exatamente o propagador para o modelo de MCS que, no espaço dos momentos é dado por

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta}^{\mu\nu}_{MCS}(k) &= \frac{-1}{k^2-m^2}\left[g^{\mu\nu}-\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}+\frac{im\epsilon^{\mu\nu\alpha}k_\alpha}{k^2}\right]- \\ &-\frac{1}{\lambda}k^\mu k^\nu\left[\frac{1}{k^2(k^2-m^2)}+\frac{m^2}{k^4(k^2-m^2)}\right] \quad .\end{aligned} \tag{3.83}$$

Recuperando $\Phi'(\psi)$ ficamos com

$$\mathcal{Z}_{FER}[\psi] = \exp i\int d^3x\mathcal{L}_{FER}(\psi) \tag{3.84}$$

onde a Lagrangiana fermiônica $\mathcal{L}_{FER}(\psi)$ é dada por

$$\mathcal{L}_{FER}(\psi) = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - M)\psi - \frac{e^2}{2m^2}j^\mu j_\mu - \frac{e^2}{2}(g_\mu - G_\mu)\Delta^{\mu\nu}_{MCS}(g_\nu - G_\nu) \tag{3.85}$$

O último termo é, em geral, não local, e corresponde a uma interação quártica entre partículas de spin 1/2 mediada por uma partícula vetorial de spin 1. Podemos dizer, então, que o setor de vácuo de tal teoria fermiônica é equivalente àquele descrito pela Lagrangiana Master $\mathcal{L}_M$, ou seja,

$$\mathcal{Z}_{FER} = \mathcal{Z}_M \quad . \tag{3.86}$$

Para um melhor entendimento da teoria é necessário definir a forma do operador g^μ. Consideremos então as três possibilidades mais simples e as analisemos com um pouco de detalhe.

Caso 1 $\rightarrow g^\mu = G^\mu = \frac{1}{m}\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu j_\rho$
Caso 2 $\rightarrow g^\mu = 0$
Caso 3 $\rightarrow g^\mu = j^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi$

3.2.1 Caso 1

Neste caso a parte não local se anula e a (3.68) é equivalente ao MTM.

$$\mathcal{L}^{(1)}_{FER}(\psi) = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - M)\psi - \frac{e^2}{2m^2}j^\mu j_\mu \tag{3.87}$$

O que acontece é que o acoplamento entre o campo de MCS e o campo fermiônico anula aquele vindo da integração do campo AD. Mais claramente falando, a Lagrangiana (3.75) não apresenta termo de interação entre o campo vetorial e o campo de Dirac. O campo vetorial fica descrito por uma teoria livre, restando apenas a Lagrangiana do MTM.

3.2.2 Caso 2

O termo não local fica

$$-\frac{e^2}{2}G_\mu\Delta^{\mu\nu}_{MCS}G_\nu = -\frac{e^2}{2m^2}\epsilon_{\mu\alpha\beta}\partial^\alpha j^\beta\Delta^{\mu\nu}_{MCS}\epsilon_{\nu\rho\lambda}\partial^\rho j^\lambda \quad . \tag{3.88}$$

A parte longitudinal do propagador (dependente de λ) não dará contribuições devido à conservação da corrente G^μ. Com um pouco de álgebra ficamos com

$$-\frac{e^2}{2m^2}\epsilon_{\mu\alpha\beta}\partial^\alpha j^\beta\Delta^{\mu\nu}_{MCS}\epsilon_{\nu\rho\lambda}\partial^\rho j^\lambda = -\frac{e^2}{2m^2}\partial^\nu j^\mu\Delta_F\partial_\nu j_\mu - \frac{e^2}{2m}j^\mu\Delta_F\epsilon_{\mu\alpha\beta}\partial^\alpha j^\beta \quad , \tag{3.89}$$

onde Δ_F é o propagador de um campo escalar cuja massa é a mesma do campo Auto-dual, ou seja

$$\Delta_F(x-y) = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{-1}{k^2-m^2}e^{-ik(x-y)} \quad , \tag{3.90}$$

que satisfaz a seguinte equação de movimento

$$(\partial^2+m^2)\Delta_F(x-y) = \delta(x-y) \quad . \tag{3.91}$$

Portanto deve-se efetuar integrações por partes no primeiro termo de (3.89) e usar (3.91) para obter uma teoria que ainda mantém uma parte local e uma não local dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(2)}_{FER}(\psi) &= \bar\psi(i\gamma_\mu\partial^\mu - M)\psi - \frac{e^2}{2}j^\mu\Delta_F j_\mu + \\ &\quad + \frac{e^2}{2m}j^\mu\Delta_F\epsilon_{\mu\alpha\beta}\partial^\alpha j^\beta\end{aligned} \tag{3.92}$$

3.2.3 Caso 3

Teremos

$$\begin{aligned}-\frac{e^2}{2}(g_\mu - G_\mu)\Delta^{\mu\nu}_{MCS}(g_\nu - G_\nu) &= -\underbrace{\frac{e^2}{2}j_\mu\Delta^{\mu\nu}_{MCS}j_\nu}_{I} - \underbrace{\frac{e^2}{2}G_\mu\Delta^{\mu\nu}_{MCS}G_\nu}_{II} + \\ &\quad + \underbrace{e^2 j_\mu\Delta^{\mu\nu}_{MCS}G_\nu}_{III} \quad .\end{aligned} \tag{3.93}$$

Calcula-se os três termos separadamente, sendo que o segundo é exatamente o que foi obtido no Caso 2. Desta vez, um pouco mais de álgebra levará a

$$\begin{aligned} I &= -\frac{e^2}{2}\int d^3x d^3y j_\mu(x)\Delta_F(x-y)j^\mu(y) + \\ &+\frac{e^2 m}{2}\int d^3x d^3y j_\mu(x)\overline{\Delta}_F(x-y)\epsilon_{\mu\nu\rho}\partial^\rho j^\nu(y) \end{aligned} \tag{3.94}$$

onde

$$\overline{\Delta}_F(x-y) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{-1}{(k^2-m^2)k^2}e^{-ik(x-y)} \quad . \tag{3.95}$$

O segundo termo fica

$$\begin{aligned} II &= -\frac{e^2}{2m^2}\int d^3x d^3y \partial^\nu j^\mu(x)\Delta_F(x-y)\partial_\nu j_\mu(y) - \\ &- \int d^3x d^3y \frac{e^2}{2m} j^\mu(x)\Delta_F(x-y)\epsilon_{\mu\alpha\beta}\partial^\alpha j^\beta(y) \quad . \end{aligned} \tag{3.96}$$

E o terceiro termo é

$$\begin{aligned} III &= \int d^3x d^3y \frac{e^2}{m} j^\mu(x)\Delta_F(x-y)\epsilon_{\mu\alpha\beta}\partial^\alpha j^\beta(y) + \\ &+e^2\int d^3x d^3y j_\mu(x)\Delta_F(x-y)j^\mu(y) \end{aligned} \tag{3.97}$$

Juntando os três termos não locais com a parte local, vamos ficar com a seguinte lagrangiana fermiônica

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(3)}_{FER}(\psi) &= \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - M)\psi - \frac{e^2}{2m^2}j^\mu j_\mu + \frac{e^2}{2}j_\mu\Delta_F j^\mu + \frac{e^2}{2m}j^\mu\Delta_F\epsilon_{\mu\alpha\beta}\partial^\alpha j^\beta + \\ &+\frac{e^2 m}{2}j_\mu\overline{\Delta}_F\epsilon_{\mu\nu\rho}\partial^\rho j^\nu - \frac{e^2}{2m^2}\partial^\nu j^\mu\Delta_F\partial_\nu j_\mu \quad . \end{aligned} \tag{3.98}$$

Tal equação ainda pode ser simplificada efetuando-se integrações por partes no último termo e utilizando a equação (3.91). Ficamos com

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(3)}_{FER}(\psi) &= \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - M)\psi + \frac{e^2 m}{2}j_\mu\overline{\Delta}_F\epsilon_{\mu\nu\rho}\partial^\rho j^\nu \\ &+\frac{e^2}{2m}\epsilon_{\mu\alpha\beta}j^\mu\Delta_F\partial^\alpha j^\beta \quad . \end{aligned} \tag{3.99}$$

Dentro da classe de teorias estudadas, tal modelo fermiônico, parece ser o mais geral possível quando se considera tanto acoplamentos locais como não locais.

É importante perceber que se efetuarmos integrações nos férmions a partir da Lagrangiana Master (3.68) estaremos obtendo versões bosonizadas das correspondentes Lagrangianas (3.87) ou (3.92) ou (3.99), dependendo do caso considerado. A fim de obter tais relações, vamos calcular os correspondentes determinantes fermiônicos. Assim, iremos ilustrar o procedimento usado para obter Lagrangianas bosônicas integrando sobre os férmions a partir da Lagrangiana Master. Para isso, consideraremos as três possibilidades para a corrente de matéria g^μ. No Caso 1, introduziremos um termo onde a corrente fermiônica está acoplada com uma fonte externa. Contudo, nos Casos 2 e 3, o termo de fonte será omitido. A introdução de tais termos não apresenta dificuldades computacionais e apenas torna as fórmulas finais mais complexas.

3.2.4 Integração nos férmions para o Caso 1

Retornando à Lagrangiana Master (3.68), escrevendo explicitamente o acoplamento com a fonte externa J_μ e substituindo $g^\mu = \frac{1}{m}\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\nu j_\alpha$, o funcional obtido tem a seguinte forma

$$\mathcal{Z}_M[f,A] = \left[\int D\bar{\psi}D\psi \exp i \int d^3x\bar{\psi}[i\gamma^\mu\partial_\mu - M - e(\gamma^\mu(f_\mu + J_\mu) + \frac{1}{m}\epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha A_\mu\gamma_\beta)]\psi\right]\widehat{\Phi} \tag{3.100}$$

onde fatoramos a parte que não depende dos campos fermiônicos

$$\widehat{\Phi} = \exp i \int d^3x\{\frac{m^2}{2}f^\mu f_\mu - m^2F^\mu f_\mu + \frac{m^2}{2}F^\mu A_\mu + \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2\} \quad . \tag{3.101}$$

Chamando

$$\begin{aligned} \Omega &= -\left(\gamma^\mu(f_\mu + J_\mu) + \tfrac{1}{m}\epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha A_\mu\gamma_\beta\right) \\ D &= i\gamma^\mu\partial_\mu - M \end{aligned} \tag{3.102}$$

ficamos com

$$\int D\bar{\psi}D\psi \exp i \int d^3x\bar{\psi}[D + e\Omega]\psi = \det[D + e\Omega] \quad . \tag{3.103}$$

Como fizemos na seção anterior, vamos efetuar a expansão do determinante até segunda ordem na constante de acoplamento. Para isso, escrevemos

o determinante como

$$\det\left[D+e\Omega\right]=\exp\left[Tr\ln D(1+eD^{-1}\Omega)\right] \tag{3.104}$$

e usando (3.17) ficamos com

$$\det\left[D+e\Omega\right]\simeq\exp Tr\left[eD^{-1}\Omega-\frac{e^2}{2}(D^{-1}\Omega)^2\right] \quad . \tag{3.105}$$

Calculamos agora os dois termos da exponencial separadamente. Lembremos que o operador D é diagonal no espaço dos momentos, enquanto que Ω no espaço de configurações. Calculando primeiro o termo linear

$$Tr(D^{-1}\Omega)=\int d^3x\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\langle x\mid Tr_\gamma\left[D^{-1}\mid k\rangle\langle k\mid\Omega\right]\mid x\rangle \quad . \tag{3.106}$$

Onde Tr_γ representa o traço sobre as matrizes γ. Como resultado da álgebra, ficamos com

$$Tr(D^{-1}\Omega)=\frac{-i}{m}2\widetilde{A}^\mu(0)\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\epsilon_{\mu\alpha\beta}k^\alpha k^\beta}{k^2-m^2}\equiv 0 \quad , \tag{3.107}$$

devido à antissimetria do tensor $\epsilon_{\mu\alpha\beta}$.

O termo quadrático, contudo, dará contribuições

$$\begin{aligned}Tr(D^{-1}\Omega)^2 &= \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}Tr_\gamma\frac{1}{\not k-M}\left[\gamma^\mu(\widetilde{f}_\mu(q)+\widetilde{J}_\mu(q))-\frac{i}{m}\gamma^\beta\epsilon_{\mu\alpha\beta}q^\alpha\widetilde{A}^\mu(q)\right]\times\\ &\quad\frac{1}{\not k-\not q-M}\left[\gamma^\nu(\widetilde{f}_\nu(-q)+\widetilde{J}_\nu(-q))+\frac{i}{m}\gamma^\nu\epsilon_{\lambda\sigma\nu}q^\sigma\widetilde{A}^\lambda(-q)\right] \quad .\end{aligned} \tag{3.108}$$

Um pouco de álgebra mostrará que

$$\begin{aligned}Tr(D^{-1}\Omega)^2 &= \int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\{-(\widetilde{f}_\mu(q)+\widetilde{J}_\mu(q))\widetilde{\Pi}^{\mu\nu}(q)(\widetilde{f}_\nu(-q)+\widetilde{J}_\nu(-q))-\\ &\quad-\frac{i}{m}(\widetilde{f}_\mu(q)+\widetilde{J}_\mu(q))\widetilde{\Pi}^{\mu\nu}(q)\epsilon_{\lambda\sigma\nu}q^\sigma\widetilde{A}^\lambda(-q)\\ &\quad+\frac{i}{m}(\widetilde{f}_\nu(-q)+\widetilde{J}_\nu(-q))\widetilde{\Pi}^{\beta\nu}(q)\epsilon_{\mu\alpha\beta}q^\alpha\widetilde{A}^\mu(q)-\\ &\quad-\frac{1}{m^2}\epsilon_{\mu\alpha\beta}q^\alpha\widetilde{A}^\mu(q)\widetilde{\Pi}^{\beta\nu}(q)\epsilon_{\lambda\sigma\nu}q^\sigma\widetilde{A}^\lambda(-q)\} \quad .\end{aligned} \tag{3.109}$$

Levando para o espaço de configurações, vemos que os termos proporcionais a i/m se cancelam identicamente. Logo, podemos escrever o determinante como

$$\begin{aligned}\det[D+e\Omega] &\simeq \exp i\int d^3xd^3y\frac{e^2}{2}\{(f_\mu(x)+J_\mu(x))\Pi^{\mu\nu}(x-y)(f_\nu(y)+J_\nu(y))-\\ &-\frac{1}{m^2}\epsilon_{\nu\lambda\sigma}A^\mu(x)\Pi^{\beta\nu}(x-y)\epsilon_{\beta\mu\alpha}\partial^\alpha\partial^\sigma A^\lambda(y)\} \quad . \end{aligned} \tag{3.110}$$

Substituindo este resultado no funcional (3.100) fica-se com

$$\mathcal{Z}_M[f,A]\simeq \exp i\int d^3x\frac{e^2}{2}\left\{(f_\mu+J_\mu)\Pi^{\mu\nu}(f_\nu+J_\nu)-\frac{1}{m^2}\epsilon_{\nu\lambda\sigma}A^\mu\Pi^{\beta\nu}\epsilon_{\beta\mu\alpha}\partial^\alpha\partial^\sigma A^\lambda\right\}\widehat{\Phi} \tag{3.111}$$

Substituindo o fator $\widehat{\Phi}$ ficamos com a seguinte teoria efetiva

$$\mathcal{Z}^{(1)}_{ef}[f,A]\simeq \exp i\int d^3x\mathcal{L}^{(1)}_{ef}(f,A) \tag{3.112}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(1)}_{ef}(f,A) &= -\frac{1}{2}A_\mu\left(m\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\alpha+\frac{e^2}{m^2}\Pi^{\mu\nu}\epsilon_{\mu\beta\alpha}\partial^\alpha\epsilon_{\nu\lambda\sigma}\partial^\sigma+\lambda\partial^\mu\partial^\nu\right)A_\nu\\ &+f_\mu\left(\frac{m^2}{2}g^{\mu\nu}+\frac{e^2}{2}\Pi^{\mu\nu}\right)f_\nu+e^2f_\mu\Pi^{\mu\nu}J_\nu+\frac{e^2}{2}J_\mu\Pi^{\mu\nu}J_\nu-\\ &-m\epsilon^{\mu\nu\beta}f_\mu\partial_\nu A_\beta \quad . \end{aligned} \tag{3.113}$$

Tal teoria é portanto equivalente ao modelo descrito pela (3.87), que é o modelo de Thirring massivo.

$$\mathcal{Z}^{(1)}_{ef}[f,A]\simeq \mathcal{Z}_M[f,A] \tag{3.114}$$

Da observação que a $\mathcal{L}^{(1)}_{ef}(f,A)$ é quadrática nos dois campos bosônicos, vemos que podemos obter uma versão do MTM em termos do campo AD ou em termos do campo de MCS.

★ **Integrando em A^μ**

Tomando o funcional (3.112), teremos

$$\mathcal{Z}^{(1)}_{ef}[f]=\int DA^\mu \exp i\int d^3x\mathcal{L}^{(1)}_{ef}(f,A) \tag{3.115}$$

$$\mathcal{Z}_{ef}^{(1)}[f] = \exp i \int d^3x \mathcal{L}_{ef}^{(1)}(f) \quad ,$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{ef}^{(1)}(f) &= f_\mu(\frac{m^2}{2}g^{\mu\nu} + \frac{e^2}{2}\Pi^{\mu\nu})f_\nu + \frac{m}{2}\epsilon_{\nu\mu\beta}f^\nu\partial^\beta f^\mu + e^2 f_\mu \Pi^{\mu\nu} J_\nu - \\ &+ \frac{e^2}{2m}\epsilon_{\mu\rho\alpha}\partial^\rho f^\mu \Pi^{\alpha\beta}\epsilon_{\nu\lambda\beta}\partial^\lambda f^\nu + \frac{e^2}{2}J_\mu \Pi^{\mu\nu} J_\nu \quad , \end{aligned} \tag{3.116}$$

Por outro lado, podemos integrar (3.112) em f^μ .

★ **Integrando em f^μ**

Vamos ficar com

$$\mathcal{Z}_{ef}^{(1)}[A] = \rho \int Df^\mu \exp i \int d^3x \mathcal{L}_{ef}^{(1)}(f, A) \tag{3.117}$$

$$\mathcal{Z}_{ef}^{(1)}[A] = \exp i \int d^3x \mathcal{L}_{ef}^{(1)}(A) \quad , \tag{3.118}$$

sendo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{ef}^{(1)}(A) &= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha}A_\mu\partial_\alpha A_\nu + \frac{e^2}{m^2}\epsilon^{\sigma\rho\beta}\partial_\rho A_\beta \Pi_{\mu\sigma}\epsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu A_\lambda + \\ &+ \frac{\lambda}{2}(\partial^\mu A_\mu)^2 - \frac{e^2}{m}\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\nu A_\alpha \Pi_{\mu\beta}J^\beta + \frac{e^2}{2}J_\mu \Pi^{\mu\nu} J_\nu \quad . \end{aligned} \tag{3.119}$$

Em resumo, ficamos com as seguintes identificações

$$\left(\mathcal{Z}_{ef}^{(1)}[A] = \mathcal{Z}_{ef}^{(1)}[f]\right) \simeq \left(\mathcal{Z}_{FER}^{(1)} = \mathcal{Z}_M^{(1)}\right) \quad . \tag{3.120}$$

3.2.5 Integração nos férmions para o Caso 2

Como foi mencionado no final da seção 3.2.3, o termo de fonte para a corrente fermiônica será omitido no que segue, por simplicidade algébrica. O funcional (3.70) fica escrito como

$$\mathcal{Z}_M[f, A] = \left[\int D\bar{\psi}D\psi \exp i \int d^3x \overline{\psi}[i\gamma^\mu\partial_\mu - M - e\gamma^\mu f_\mu]\psi\right]\widehat{\Phi} \quad , \tag{3.121}$$

onde já foi substituído $g^\mu = 0$. O determinante é dado pela equação (3.21) quando não há fontes externas

$$\mathcal{Z}_M[f, A] \simeq \left[\exp i \int d^3x \frac{e^2}{2} f_\mu \Pi^{\mu\nu} f_\nu\right]\widehat{\Phi} \quad . \tag{3.122}$$

Substituindo o fator $\widehat{\Phi}$ dado por (3.101) vamos ficar com

$$\mathcal{Z}_M[f,A] \simeq \mathcal{Z}_{ef}^{(2)} = \exp i \int d^3x \mathcal{L}_{ef}^{(2)}(f,A) \quad , \tag{3.123}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ef}^{(2)}(f,A) &= \frac{e^2}{2} f_\mu \Pi^{\mu\nu} f_\nu + \frac{m^2}{2} f^\mu f_\mu - m^2 F^\mu f_\mu + \frac{m^2}{2} F^\mu A_\mu + \\ &+ \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 \quad . \end{aligned} \tag{3.124}$$

Mais uma vez, vemos que o funcional $\mathcal{Z}_{ef}^{(2)}$ é quadrático nos campos bosônicos. Vamos efetuar as duas integrações possíveis.

★ **Integrando em f^μ**

Para integrar emf^μ tomemos o funcional

$$\mathcal{Z}_{ef}^{(2)} = \exp i \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} f_\mu \Gamma^{\mu\nu} f_\nu - \frac{1}{2} A_\mu \Lambda^{\mu\nu} A_\nu - m\epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho f_\mu \right\} \tag{3.125}$$

onde $\Gamma^{\mu\nu}$ é dado por

$$\Gamma_{\mu\nu} = m^2 g_{\mu\nu} + e^2 \Pi_{\mu\nu} \quad , \tag{3.126}$$

cujo inverso é obtido pela expansão binomial (3.24), resultando em

$$(\Gamma_{\mu\nu})^{-1} = \frac{1}{m^2} g_{\mu\nu} - \frac{e^2}{m^4} \Pi_{\mu\nu} \quad . \tag{3.127}$$

Aqui, $\Lambda^{\mu\nu}$ é dado por

$$\Lambda^{\mu\nu} = m\epsilon^{\mu\nu\alpha} \partial_\alpha + \lambda \partial^\mu \partial^\nu \quad . \tag{3.128}$$

O resultado da integral fica

$$\mathcal{Z}_{ef}^{(2)} = \exp i \int d^3x \left\{ -\frac{m^2}{2} \epsilon_{\mu\lambda\beta} \partial^\lambda A^\beta (\Gamma^{-1})^{\mu\nu} \epsilon_{\nu\alpha\rho} \partial^\alpha A^\rho - \frac{1}{2} A_\mu \Lambda^{\mu\nu} A_\nu \right\} \tag{3.129}$$

Um pouco mais de algebrismo leva à seguinte teoria efetiva

$$\mathcal{Z}_{ef}^{(2)}[A] = \exp i \int d^3x \mathcal{L}_{ef}^{(2)}(A) \tag{3.130}$$

$$\mathcal{L}_{ef}^{(2)}(A) = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{e^2}{2m^2}\epsilon^{\mu\alpha\lambda}\partial_\alpha A_\lambda \Pi_{\mu\nu}\epsilon^{\nu\beta\sigma}\partial_\beta A_\sigma + \tag{3.131}$$
$$+\frac{1}{2}A_\mu m\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\alpha A_\nu + \frac{\lambda}{2}(\partial^\mu A_\mu)^2 \quad .$$

Por outro lado, podemos retornar à (3.124) para integrar em A^μ.

★ **Integrando em A^μ**

O funcional a ser integrado será

$$\mathcal{Z}_{ef}^{(2)} = \exp i \int d^3x \{\frac{1}{2}f_\mu(m^2 g^{\mu\nu} + e^2\Pi^{\mu\nu})f_\nu - \frac{1}{2}A_\mu \Lambda^{\mu\nu}A_\nu + mA_\rho\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu f_\mu\} \tag{3.132}$$

sendo $\Lambda^{\mu\nu}$ definido pela equação (3.128) e seu inverso por

$$(\Lambda^{-1})^{\mu\nu} = -\frac{1}{m}\frac{\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\alpha}{\partial^2} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial^\mu\partial^\nu}{\partial^4} \quad . \tag{3.133}$$

O resultado da integral é

$$\mathcal{Z}_{ef}^{(2)} = \exp i \int d^3x \left\{\frac{1}{2}f_\mu(m^2 g^{\mu\nu} + e^2\Pi^{\mu\nu})f_\nu - \frac{m^2}{2}\epsilon_{\beta\lambda\mu}\partial^\beta f^\lambda (\Lambda^{-1})^{\mu\nu}\epsilon_{\alpha\rho\nu}\partial^\rho f^\alpha\right\} \tag{3.134}$$

Efetuando as contrações necessárias vemos que o termo proporcional a λ não dá contribuições — o que deveríamos esperar pois o campo f é massivo e portanto, não depende de nenhum parâmetro de fixação de calibre. O resultado fica

$$\mathcal{Z}_{ef}^{(2)}[f] = \exp i \int d^3x \mathcal{L}_{ef}^{(2)}(f) \tag{3.135}$$

$$\mathcal{L}_{ef}^{(2)}(f) = \frac{1}{2}f_\mu(m^2 g^{\mu\nu} + e^2\Pi^{\mu\nu})f_\nu + \frac{m}{2}\epsilon_{\nu\alpha\rho}f^\nu\partial^\rho f^\alpha \tag{3.136}$$

Podemos então, fazer identificações entre as teorias efetivas dadas por

$$\left(\mathcal{Z}_{ef}^{(2)}[A] = \mathcal{Z}_{ef}^{(2)}[f]\right) \simeq \left(\mathcal{Z}_{FER}^{(2)} = \mathcal{Z}_{M}^{(2)}\right) \tag{3.137}$$

3.2.6 Integração nos férmions para o Caso 3

Vamos retornar à equação (3.70) já substituindo o valor de g^μ

$$\mathcal{Z}_M[f,A] = \left[\int D\bar{\psi}D\psi \exp i \int d^3x \left\{\overline{\psi}[i\gamma^\mu\partial_\mu - M - e\gamma^\mu(f-A)_\mu]\psi\right\}\right]\widehat{\Phi} \tag{3.138}$$

onde

$$\widehat{\Phi} = \exp i \int d^3x\{\frac{m^2}{2}f^\mu f_\mu - m^2F^\mu f_\mu + \frac{m^2}{2}F^\mu A_\mu + \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2\} \tag{3.139}$$

Chamando

$$\begin{aligned} D &= i\gamma^\mu\partial_\mu - M \\ B_\mu &= -(f-A)_\mu \end{aligned} \tag{3.140}$$

vemos que o resultado da integração nos férmions é o determinante do operador $D + e\gamma^\mu B_\mu$, ou seja,

$$\mathcal{Z}_M = \rho \int Df^\mu DA^\mu \widehat{\Phi}(f,A) \times \det(D + e\gamma^\mu B_\mu) \tag{3.141}$$

onde

$$\det(D + e\gamma^\mu B_\mu) = \exp iTr\left[\ln(D + e\gamma^\mu B_\mu)\right] \quad . \tag{3.142}$$

Efetuando o mesmo procedimento de expandir o determinante até segunda ordem na constante de acoplamento, o resultado será dado por (3.21)

$$\det(D + e\gamma^\mu B_\mu) \simeq \rho \exp i\frac{e^2}{2}\int d^3x d^3y B_\mu(x)\Pi^{\mu\nu}(x-y)B_\nu(y) \quad . \tag{3.143}$$

Substituindo este resultado na equação (3.141) fica-se com

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_M \simeq\ & \rho \int Df^\mu DA^\mu \exp i \int d^3x\{\frac{m^2}{2}f^\mu f_\mu - m^2F^\mu f_\mu + \frac{m^2}{2}F^\mu f_\mu + \\ & + \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu f^\mu)^2 + \frac{e^2}{2}B_\mu\Pi^{\mu\nu}B_\nu\} \quad . \end{aligned} \tag{3.144}$$

Substituindo B_μ dado por (3.140) teremos a seguinte expressão

$$\mathcal{Z}_M \simeq \mathcal{Z}_{ef}^{(3)} = \rho \int Df^\mu DA^\mu \exp i \int d^3x \mathcal{L}_{ef}^{(3)}(f,A) \tag{3.145}$$

onde a Lagrangiana efetiva tem a seguinte forma

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{ef}^{(3)}(f,A) &= -\frac{1}{2}A_\mu(m\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\alpha - e^2\Pi^{\mu\nu}+\lambda\partial^\mu\partial^\nu)A_\nu + \\ &+A_\mu(m\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\alpha - e^2\Pi^{\mu\nu})f_\nu + f_\mu(\frac{m^2}{2}g^{\mu\nu} + \frac{e^2}{2}\Pi^{\mu\nu})f_\nu \quad .\end{aligned} \tag{3.146}$$

A partir desta expressão pode-se obter a forma bosonizada da teoria em termos do campo AD — integrando em A — ou em termos do campo de MCS — integrando em f.

★ **Integrando em A^μ**

A expressão a ser integrada será

$$\mathcal{Z}_{ef}^{(3)}[f] = \left[\int DA^\mu \exp i \int d^3x\{-\frac{1}{2}A_\mu\Sigma^{\mu\nu}A_\nu + A_\mu\Delta^\mu\}\right]\Psi \tag{3.147}$$

onde

$$\Psi = \rho\int Df^\mu \exp i\int d^3x\frac{1}{2}f_\mu\Gamma^{\mu\nu}f_\nu \quad , \tag{3.148}$$

com $\Gamma^{\mu\nu}$ dado por (3.126),

$$\Sigma^{\mu\nu} = m\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\alpha - e^2\Pi^{\mu\nu}+\lambda\partial^\mu\partial^\nu \tag{3.149}$$

e

$$\Delta^\mu = (m\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\alpha - e^2\Pi^{\mu\nu})f_\nu \quad . \tag{3.150}$$

O resultado da integração é

$$\mathcal{Z}_{ef}^{(3)}[f] = \left[\exp i\int d^3x\frac{1}{2}\Delta^\mu(\Sigma_{\mu\nu})^{-1}\Delta^\nu\right]\Psi \quad . \tag{3.151}$$

Para inverter o operador Σ vamos utilizar a aproximação binomial (3.24), uma vez que estamos retendo apenas termos de segunda ordem na constante de acoplamento. Reescrevemos tal operador da seguinte forma

$$\Sigma^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu\nu} - e^2\Pi^{\mu\nu} \tag{3.152}$$

sendo $\Lambda^{\mu\nu}$ dado por (3.128). Assim, ficamos com

$$\Sigma^{-1} = (\Lambda - e^2\Pi)^{-1} \simeq \Lambda^{-1} + e^2\Lambda^{-1}\Pi\Lambda^{-1} \quad . \tag{3.153}$$

O funcional $\mathcal{Z}$ fica

$$\mathcal{Z}_{ef}^{(3)}[f] = \left[\exp i \int d^3x \frac{1}{2}\Delta^\mu \left(\Lambda^{-1} + e^2\Lambda^{-1}\Pi\Lambda^{-1}\right)_{\mu\nu} \Delta^\nu\right] \Psi \quad . \tag{3.154}$$

O motivo de termos efetuado tal modificação fica mais evidente quando notamos que o operador Λ é simplesmente o operador de Chern-Simons no calibre de Lorentz, cujo inverso é dado por (3.133). Isto facilita bastante a álgebra, evitando o cálculo direto do operador dado por (3.149), cuja representação no espaço de configurações não é nada trivial, devido à não localidade do tensor de polarização quando a massa do férmion é mantida arbitrária. Levando em conta a transversalidade do tensor de polarização, efetuamos as contrações dos índices, obtendo para o primeiro termo no expoente de $\mathcal{Z}_{ef}^{(3)}$

$$\frac{1}{2}\Delta^\mu(\Lambda^{-1})_{\mu\nu}\Delta^\nu = \frac{1}{2}f_\mu\left(m\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\alpha - 2e^2\Pi^{\mu\nu}\right)f_\nu \tag{3.155}$$

enquanto que o segundo é dado por

$$\frac{1}{2}e^2\Delta^\mu(\Lambda^{-1})_{\mu\alpha}\Pi^{\alpha\beta}(\Lambda^{-1})_{\beta\nu}\Delta^\nu = \frac{1}{2}e^2 f_\mu \Pi^{\mu\nu} f_\nu \quad . \tag{3.156}$$

Substituindo estes dois resultados e recuperando o fator Ψ vamos obter

$$\mathcal{Z}_{ef}^{(3)}[f] = \exp i \int d^3x \mathcal{L}_{ef}^{(3)}(f) \tag{3.157}$$

$$\mathcal{L}_{ef}^{(3)}(f) = \frac{1}{2}f_\mu\left(m\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\alpha + m^2 g^{\mu\nu}\right)f_\nu \quad . \tag{3.158}$$

Portanto, o modelo descrito pela Lagrangiana Master (3.68) é equivalente — até segunda ordem na constante de acoplamento — ao modelo Auto-dual.

Para conhecer a relação de tal modelo com o campo de calibre A^μ efetuamos a integração nos campos f^μ.

★ **Integrando em f^μ**

Retornando à Lagrangiana efetiva (3.146) ficamos com o seguinte funcional a ser integrado

$$\mathcal{Z}_{ef}^{(3)} = \left[\rho \int Df^\mu \exp i \int d^3x \{\frac{1}{2}f_\mu \Gamma^{\mu\nu} f_\nu + f_\mu \Delta'^\mu\}\right] \Psi'$$

onde fatoramos a parte dependente de A^μ

$$\Psi' = \exp\{-i \int d^3x \frac{1}{2} A_\mu \Sigma^{\mu\nu} A_\nu\} \tag{3.159}$$

e, de forma similar, $\Sigma^{\mu\nu}$ é dado por (3.149), $\Gamma_{\mu\nu}$ pela equação (3.126) e Δ^μ sofreu uma integração por partes, tornando-se

$$\Delta'^\mu = (-m\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\alpha - e^2\Pi^{\mu\nu})A_\nu \quad . \tag{3.160}$$

O resultado da integração será

$$\mathcal{Z}_{ef}^{(3)} = \exp i \int d^3x \left\{ -\frac{1}{2}\Delta'^\mu (\Gamma_{\mu\nu})^{-1} \Delta'^\nu - \frac{1}{2} A_\mu \Sigma^{\mu\nu} A_\nu \right\} \quad . \tag{3.161}$$

O inverso do operador Γ é obtido seguindo o mesmo critério de expansão binomial (3.24), sendo dado por (3.127).

Efetuando a álgebra necessária, vemos que o primeiro termo é dado por

$$-\frac{1}{2}\Delta'^\mu (\Gamma_{\mu\nu})^{-1} \Delta'^\nu = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{e^2}{m} \epsilon_{\mu\beta\lambda} \partial^\lambda A^\mu \Pi^{\nu\beta} A_\nu \tag{3.162}$$

Voltando à expressão para $\mathcal{Z}_{ef}^{(3)}$ ficamos com a seguinte teoria bosônica

$$\mathcal{Z}_{ef}^{(3)}[A] = \exp i \int d^3x \mathcal{L}_{ef}^{(3)}(A) \tag{3.163}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ef}^{(3)}(A) \;=\; & -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{e^2}{m} \epsilon_{\mu\beta\lambda} \partial^\lambda A^\mu \Pi^{\nu\beta} A_\nu + \\ & + \frac{e^2}{2m^2} \epsilon^{\mu\alpha\lambda} \partial_\lambda A_\mu \Pi_{\alpha\beta} \epsilon^{\nu\beta\sigma} \partial_\sigma A_\nu \; - \frac{m}{2} A_\mu \epsilon^{\mu\nu\alpha} \partial_\alpha A_\nu + \\ & + \frac{e^2}{2} A_\mu \Pi^{\mu\nu} A_\nu - \frac{\lambda}{2} (\partial^\nu A_\nu)^2 \end{aligned} \tag{3.164}$$

que apresenta tanto termos locais (somente dependentes dos operadores de campo), como não locais (dependentes do tensor de polarização). Podemos sintetizar os últimos resultados da seguinte forma

$$\left(\mathcal{Z}_{ef}^{(3)}[A] = \mathcal{Z}_{ef}^{(3)}[f] \right) \simeq \left(\mathcal{Z}_{FER}^{(3)} = \mathcal{Z}_{M}^{(3)} \right) \quad . \tag{3.165}$$

★ Recapitulando

Procurando resumir os principais resultados desta última seção, faremos um breve resumo do raciocínio exposto.

A partir da Lagrangiana Master $\mathcal{L}_M$ fizemos as correspondentes integrações nos campos vetoriais; simbolicamente

$$\mathcal{L}_M \to \int Df^\mu DA^\mu \exp\left(\mathcal{L}_M\right) \to \exp\left(\mathcal{L}_{FER}(\psi)\right) \quad .$$

Em seguida, fizemos escolhas para a corrente g^μ, resultando três teorias fermiônicas, chamadas $\mathcal{L}_{FER}^{(k)}$, sendo $k = 1, 2, 3$. Assim, retornando à Lagrangiana Master e fazendo a escolha de g^μ previamente, ficamos com três Lagrangianas $\mathcal{L}_M^{(k)}$ correspondendo às três $\mathcal{L}_{FER}^{(k)}$ já obtidas, ou seja

$$\mathcal{L}_M^{(k)} \Longleftrightarrow \mathcal{L}_{FER}^{(k)} \quad .$$

Por outro lado, a partir das Lagrangianas $\mathcal{L}_M^{(k)}$ calculamos seus respectivos determinantes fermiônicos, sempre nos limitando ao termo dominante na série perturbativa. Assim,

$$\mathcal{L}_M^{(k)} \to \int D\psi D\overline{\psi} \exp\left(\mathcal{L}_M^{(k)}\right) \to \exp\left(\mathcal{L}_{ef}^{(k)}(f, A)\right) \quad .$$

A partir das teorias efetivas $\mathcal{L}_{ef}^{(k)}(f, A)$ fizemos integrações alternadas nos campos vetoriais, ou seja

$$\mathcal{L}_{ef}^{(k)}(f, A) \longrightarrow \begin{cases} \int Df \exp\left(\mathcal{L}_{ef}^{(k)}(f, A)\right) \to \exp\left(\mathcal{L}_{ef}^{(k)}(A)\right) \\ \int DA \exp\left(\mathcal{L}_{ef}^{(k)}(f, A)\right) \to \exp\left(\mathcal{L}_{ef}^{(k)}(f)\right) \end{cases} ,$$

obtendo diferentes versões bosonizadas para a Lagrangiana Master.

Juntando tudo isso pudemos obter a seguinte cadeia de equivalências

$$\mathcal{L}_M^{(k)} \Leftrightarrow \mathcal{L}_{FER}^{(k)} \Leftrightarrow \mathcal{L}_{ef}^{(k)}(f, A) \Leftrightarrow \mathcal{L}_{ef}^{(k)}(f) \Leftrightarrow \mathcal{L}_{ef}^{(k)}(A) \quad .$$

É bastante importante salientar que a palavra "equivalência", simbolizada por $\Leftrightarrow$, deve ser entendida quando uma fonte externa para a corrente fermiônica é introduzida na Lagrangiana Master, tal como foi feito para o Caso 1.

A seguir expomos de forma resumida as principais equações que foram obtidas

$$\mathcal{L}_{FER}(\psi) = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - M)\psi - \frac{e^2}{2m^2}j^\mu j_\mu - \frac{e^2}{2}(g_\mu - G_\mu)\Delta^{\mu\nu}_{MCS}(g_\nu - G_\nu)$$

$$\mathcal{L}^{(1)}_{FER}(\psi) = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - M)\psi - \frac{e^2}{2m^2}j^\mu j_\mu$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(2)}_{FER}(\psi) &= \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - M)\psi - \frac{e^2}{2}j^\mu\Delta_F j_\mu + \\ &+\frac{e^2}{2m}\epsilon_{\mu\alpha\beta}j^\mu\Delta_F\partial^\alpha j^\beta\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^{(3)}_{FER}(\psi) = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - M)\psi + \frac{e^2}{2m}\epsilon_{\mu\alpha\beta}j^\mu\Delta_F\partial^\alpha j^\beta + \frac{e^2 m}{2}j_\mu\overline{\Delta}_F\epsilon_{\mu\nu\rho}\partial^\rho j^\nu$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(1)}_{ef}(f,A) &= -\frac{1}{2}A_\mu\left(m\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\alpha + \frac{e^2}{m^2}\Pi^{\mu\nu}\epsilon_{\mu\beta\alpha}\partial^\alpha\epsilon_{\nu\lambda\sigma}\partial^\sigma + \lambda\partial^\mu\partial^\nu\right)A_\nu + \\ &+f_\mu\left(\frac{m^2}{2}g^{\mu\nu} + \frac{e^2}{2}\Pi^{\mu\nu}\right)f_\nu + e^2 f_\mu\Pi^{\mu\nu}J_\nu + \frac{e^2}{2}J_\mu\Pi^{\mu\nu}J_\nu - \\ &-f_\mu m\epsilon^{\mu\nu\beta}\partial_\nu A_\beta \quad ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(2)}_{ef}(f,A) &= \frac{e^2}{2}f_\mu\Pi^{\mu\nu}f_\nu + \frac{m^2}{2}f^\mu f_\mu - m^2F^\mu f_\mu + \frac{m^2}{2}F^\mu A_\mu + \\ &+\frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 \quad .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(3)}_{ef}(f,A) &= -\frac{1}{2}A_\mu(m\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\alpha - e^2\Pi^{\mu\nu} + \lambda\partial^\mu\partial^\nu)A_\nu + \\ &+A_\mu(m\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\alpha - e^2\Pi^{\mu\nu})f_\nu + f_\mu(\frac{m^2}{2}g^{\mu\nu} + \frac{e^2}{2}\Pi^{\mu\nu})f_\nu \quad .\end{aligned}$$

Capítulo 4

Discussões

Em duas dimensões expomos alguns esquemas de bosonização utilizados nos modelos de Thirring, Schwinger e Thirring SU(2). Em três dimensões, mostramos certas equivalências entre modelos fermiônicos e modelos de campos vetoriais. É importante salientar a diferença entre as técnicas utilizadas nos dois casos. No primeiro (2D), a fórmula de Mandelstam propicia uma forma direta de reescrever o operador fermiônico como função de um (ou mais) operador(es) bosônico(s). Tal fato permite expressar qualquer elemento de matriz de uma teoria fermiônica utilizando os campos bosônicos correspondentes, bem como determinar as equações de movimento e construir os bilineares, como o termo de massa e as correntes conservadas. Em suma, é possível obter uma equivalência exata entre uma teoria de férmions e uma teoria de bósons para todos os setores de carga da teoria fermiônica e não apenas para o setor de carga zero, como obtido em 3D.

Contudo, apesar do operador exponencial ter se mostrado bastante eficiente na solução de muitos modelos fermiônicos[1], algumas considerações devem ser feitas no momento. Foi visto que uma interação entre correntes surgiu no cálculo da equação de movimento para o Modelo de Schwinger Massivo. Tal interação, não existindo na Lagrangiana original do modelo, provém diretamente da derivação das exponenciais e parece estar embutida na Fórmula de Mandelstam. Apesar deste termo poder ter sido cancelado fixando-se o valor da constante de acoplamento, nota-se que, em geral, a forma da equação de movimento renormalizada da teoria quantizada não corresponde ao que se espera da teoria clássica. Este fato também ficou

[1] Além daqueles que foram tratados aqui, outros modelos fermiônicos em duas dimensões também apresentam soluções bosonizadas [28][2].

evidenciado quando analisamos a equação de movimento para o Modelo de Thirring Massivo, onde um termo de massa explícito só aparece para certa região da constante de acoplamento. Portanto, o ajuste da intensidade do acoplamento não pode estar excluído das *receitas* de bosonização.

No que se refere ao Modelo de Thirring SU(2), vimos que o *ansatz* proposto em analogia com a Fórmula de Mandelstam, pôde desacoplar o modelo em dois campos escalares — um campo livre sem massa e outro que é solução da equação de sine-Gordon — mostrando um caminho direto para obter a solução bosonizada para um modelo com simetria interna. Mais uma vez, foi visto que a forma da equação de movimento da teoria não corresponde necessariamente àquela esperada pela teoria clássica.

Podemos concluir então, que a bosonização propicia uma forma bastante eficiente de se obter soluções de modelos fermiônicos em duas dimensões. Por outro lado, em dimensões maiores, não foi possível — pelo menos até o presente — obter equivalências entre uma teoria de férmions e uma teoria de campos escalares num sentido mais amplo. Contudo, efetuando expansões na constante de acoplamento e parando na ordem dominante, as funções de correlação para a corrente do modelo de Thirring se mostraram idênticas às de uma teoria vetorial descrita por um acoplamento não local entre campos de calibre. Isto foi alcançado através da integração funcional dos campos de Dirac que, devido à forma bilinear das Lagrangianas, pôde ser representada pelo determinante de um operador.

Por fim, tentaremos compreender a *transmutação* entre bósons e férmions, a princípio surpreendente. Sendo o objetivo da teoria calcular valores médios, que serão determinados por funções distribuição, nada impede que, no nível de elementos de matriz, uma teoria fermiônica forneça as mesmas amplitudes de probabilidade que uma teoria bosônica, escalar ou vetorial. Do ponto de vista da Teoria Quântica de Campos, a dificuldade de relacionar uma Lagrangiana bosônica com uma fermiônica torna-se simplesmente técnica e não representa uma impossibilidade já determinada pela natureza. Não contrario, porém, a afirmação de que bósons e férmions sejam essencialmente diferentes, mas não vejo motivo para impedir que haja relações bastante estreitas entre os dois. O fato de não ter surgido uma fórmula como a de Mandelstam em 3D, é um reflexo do fato dos modelos fermiônicos, eles próprios, não serem exatamente solúveis, enquanto que em 2D eles o são. Podemos finalizar conjecturando que, no caso de haver algum modelo fermiônico solúvel na TQC em 3D, este poderá permitir uma representação bosônica, ao menos no nível dos elementos de matriz. Ou, numa teoria tratável perturbativamente,

possa existir uma relação entre bósons e férmions ordem a ordem na série perturbativa.

Apêndice A

Convenções e Fórmulas Úteis

Aqui, fornecemos alguns ingredientes básicos utilizados no desenvolvimento matemático e que serão importantes para aqueles que desejarem reobter os resultados expressos ao longo do texto. Para uma melhor organização, dividimos o Apêndice em três partes: **(1)** Duas Dimensões, **(2)** Três Dimensões e **(3)** Álgebra de Operadores, sendo este independente do número de dimensões.

A.1 Duas Dimensões

Para um vetor no espaço de Minkowisk usaremos x ou x^μ. As suas componentes serão denotadas por

$$\begin{array}{ccc} x^0 & \rightarrow & \text{Parte temporal} \\ x^1 & \rightarrow & \text{Parte espacial} \end{array}$$

Cinemática

A métrica utilizada é definida pelo tensor simétrico

$$g^{00} = -g^{11} = 1 \quad , \quad g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \quad . \tag{A.1}$$

O tensor de Levi-Civita é definido por

$$\epsilon^{10} = -\epsilon^{01} = 1 \quad , \quad \epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu} \quad , \tag{A.2}$$

enquanto que as matrizes de Dirac γ^μ são

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^5 = \gamma^0\gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.3}$$

satisfazendo as seguintes propriedades

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu\gamma^5 &= \epsilon^{\mu\nu}\gamma_\nu && \text{(A.4a)}\\
\{\gamma^\mu,\gamma^5\} &= 0 && \text{(A.4b)}\\
\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu} && \text{(A.4c)}\\
Tr(\gamma^\mu) &= 0 && \text{(A.4d)}\\
Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu) &= 2g^{\mu\nu} \quad . && \text{(A.4e)}
\end{aligned}$$

Para um dado vetor $x^\mu = (x^0, x^1)$ é possível definir o seu dual $\widetilde{x}^\mu = (\widetilde{x}^0, \widetilde{x}^1)$ através da relação

$$\widetilde{x}^\mu = \epsilon^{\mu\nu}x_\nu \quad , \quad x^\mu = \epsilon^{\mu\nu}\widetilde{x}_\nu \quad , \tag{A.5}$$

De forma que a seguinte relação é satisfeita

$$\widetilde{x}^\mu\widetilde{x}_\mu = -x^\mu x_\mu = x_1^2 - x_0^2 \quad . \tag{A.6}$$

Pode-se definir novas variáveis espaciais (x^+, x^-), conhecidas como variáveis do cone de luz,

$$\begin{aligned}
x^+ &= x^0 + x^1 \qquad & \widetilde{x}^+ = \widetilde{x}^0 + \widetilde{x}^1\\
x^- &= x^0 - x^1 \qquad & \widetilde{x}^- = \widetilde{x}^0 - \widetilde{x}^1 \quad .
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Comutadores

Para os campos escalares sem massa, pode-se calcular os seguintes comutadores utilizando a equação (2.3)

$$\left[\widetilde{\phi}^{(-)}(x), \widetilde{\phi}^{(+)}(y)\right] = D^{(+)}(x-y) \tag{A.8}$$

$$\left[\phi^{(-)}(x), \phi^{(+)}(y)\right] = D^{(+)}(x-y) \tag{A.9}$$

$$\left[\phi^{(-)}(x), \widetilde{\phi}^{(+)}(y)\right] = \widetilde{D}^{(+)}(x-y) + \frac{i}{4} \tag{A.10}$$

$$\left[\widetilde{\phi}^{(-)}(x), \phi^{(+)}(y)\right] = \widetilde{D}^{(+)}(x-y) - \frac{i}{4} \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned}
D^{(+)}(x-y) &= -\frac{1}{4\pi}\ln[-\mu^2(x-y)^2 + i(x_0-y_0)\varepsilon]\\
&= -\frac{1}{4\pi}\ln[(i\mu(x^+-y^+)+\varepsilon)(i\mu(x^--y^-)+\varepsilon)] \quad \text{(A.12)}
\end{aligned}$$

$$\widetilde{D}^{(+)}(x-y) = \frac{1}{4\pi}\ln\left[\frac{i\mu(x^+ - y^+)+\varepsilon}{i\mu(x^- - y^-)+\varepsilon}\right] \tag{A.13}$$

Fórmulas Úteis

Para o cálculo das expansões de curta distância são utilizadas as seguintes expressões

$$\phi(x+\varepsilon) \simeq \phi(x) + \varepsilon^\mu \partial_\mu \phi(x) \tag{A.14}$$

$$\widetilde{\phi}(x+\varepsilon) \simeq \widetilde{\phi}(x) + \varepsilon^\mu \widetilde{\partial}_\mu \phi(x) + \varepsilon_0 \int_{x_1}^{\infty} \Box\phi(x_0, x_1')dx_1' \tag{A.15}$$

No cálculo das equações de movimento para o campo fermiônico foi utilizada a fórmula

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\eta h_x(\eta) \int_{\eta}^{+\infty} dy F(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(y)dy \int_{-\infty}^{\eta} d\eta h_x(\eta) \tag{A.16}$$

válida quando F e h são funções definidas sobre o plano $y\eta$.

A.2 Três Dimensões

Para um vetor no espaço de Minkowisk usaremos x ou x^μ. As suas componentes serão denotadas por

$$\begin{array}{lcl} x^0 & \rightarrow & \text{Parte temporal} \\ x^1, x^2 & \rightarrow & \text{Parte espacial} \end{array} \quad .$$

Cinemática

A métrica utilizada é definida pelo tensor simétrico

$$g^{00} = \mathrm{diag}(1,-1,-1) \quad , \quad g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \quad . \tag{A.17}$$

O tensor de Levi-Civita, totalmente antissimétrico, é definido por

$$\begin{array}{rcl} \epsilon^{012} & = & \epsilon^{201} = \epsilon^{120} = 1 \\ \epsilon^{102} & = & \epsilon^{021} = \epsilon^{210} = -1 \\ \epsilon^{\mu\nu\alpha} & = & 0 \quad \text{para dois índices iguais} \quad . \end{array} \tag{A.18}$$

Tal tensor satisfaz a seguinte relação

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha}\epsilon_{\mu\sigma\rho} = \delta^\nu{}_\sigma \delta^\alpha{}_\rho - \delta^\nu{}_\rho \delta^\alpha{}_\sigma \quad . \tag{A.19}$$

As matrizes de Dirac são

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \tag{A.20}$$

satisfazendo as seguintes propriedades

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \tag{A.21a}$$
$$Tr(\gamma^\mu) = 0 \tag{A.21b}$$
$$Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 2g^{\mu\nu} \tag{A.21c}$$
$$Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha) = -2i\epsilon^{\mu\nu\alpha} \tag{A.21d}$$
$$Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta) = 2[g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} - g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha}] \quad . \tag{A.21e}$$

A.3 Álgebra de Operadores

Como convenção, usamos

$$[A, B] = AB - BA \tag{A.22a}$$
$$\{A, B\} = AB + BA \quad , \tag{A.22b}$$

satisfazendo as seguintes relações

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B = \tag{A.23a}$$
$$= A\{B, C\} - \{A, C\}B \tag{A.23b}$$

Uma propriedade bastante conhecida e utilizada é a fórmula de Baker-Hausdorff

$$e^{\lambda A}Be^{-\lambda A} = B + i\lambda\,[A, B]_1 + \frac{(i\lambda)^2}{2!}\,[A, [A, B]_1]_2 + \\ +... + \frac{(i\lambda)^n}{n!}\,\left[A, [A, ... [A, B]_1 ...]_{n-1}\right]_n \quad . \tag{A.24}$$

Se o comutador de A com B não é um operador a série é truncada no segundo termo.

Para os operadores exponenciais, as seguintes relações são válidas quando $[A, B] = c - number$

$$e^{\lambda A}e^{\lambda B} = e^{\lambda B}e^{\lambda A}e^{\lambda^2[A,B]} \tag{A.25}$$

$$e^{\lambda A}e^{\lambda B} = e^{\lambda A+\lambda B}e^{\frac{\lambda^2}{2}[A,B]} \tag{A.26}$$

$$e^{\pm\lambda A}F(B)e^{\mp\lambda A} = F(B \pm \lambda[A,B]) \quad , \tag{A.27}$$

sendo F uma função do operador B expansível em série de potências. Como consequência das duas primeiras, ficamos com

$$: e^{\lambda A} :: e^{\lambda B} :=: e^{\lambda A+\lambda B} : e^{\lambda^2[A^-,B^+]} \tag{A.28}$$

Onde os expoentes - e + significam os operadores de destruição e criação de partícula no espaço de Fock.

A relações de completeza ficam

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \mid k\rangle\langle k \mid = \mathbf{1} \tag{A.29a}$$

$$\int d^D x \mid x\rangle\langle x \mid = \mathbf{1} \quad , \tag{A.29b}$$

sendo que

$$\langle x \mid k\rangle = \langle k \mid x\rangle^* = e^{-ikx} \quad . \tag{A.30}$$

A Transformada de Fourier e sua inversa ficam

$$F(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}\widetilde{F}(k)e^{-ikx} \tag{A.31a}$$

$$\widetilde{F}(k) = \int d^D x F(x)e^{ikx} \quad . \tag{A.31b}$$

As funções delta de Dirac ficam normalizadas da seguinte forma

$$\delta(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}e^{-ikx} \tag{A.32a}$$

$$\delta(k) = \int d^D x e^{ikx} \tag{A.32b}$$

Referências

[1] J. Kondo, Prog Theor. Phys. 32, 37, 1964;

N. Andrei, K. Furuya e J. H. Lowenstein, Rev. of Mod. Phys. 55, 331, 1983.

[2] E. Abdalla, M. C. B. Abdalla e K. D. Rothe, "Non-perturbative Methods in 2 Dimensional Quantum Field Theory", World Scientific, 1991.

[3] J. A. Swieca, Fort. der Physik, 25, 303, 1977.

[4] S. Coleman, Phys. Rev. D11,2088,1975.

[5] Y. Aharanov e D. Bohm, Phys. Rev. 115, N3, 485, 1959.

[6] Y. Wu, Phys. Rev. Lett. 52, N24, 2103, 1984;

J. M. Leinaas e J. Myrheim, Il Nuovo Cim. 37B, N1, 1, 1977;

R. Mackenzie, F. Wilczek, Int. J. of Mod. Phys. A3, 2827, 1988;

A. Lerda, "Anyons ", Lectures Notes in Physics, m14, Springer-Verlag, 1992.

[7] B. I. Halperin, Phys. Rev. Lett. 52, N18, 1583, 1984;

D. Arovas, J. R. Schrieffer, e F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 53, 722, 1984.

[8] S. Desser, R. Jackiw e S. Templeton, Ann. of Phys. 140, 372, 1982;

S. Desser, R. Jackiw e S. Templeton, Phys. Rev. Lett. 48, 975, 1982;

J. F. Schonfeld, Nucl. Phys. B185, 157, 1981.

[9] M. Gomes, "X Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos", 91, SBF, 1989.

A. P. Balachandran, E. Ercolessi, G. Marandi, A. M. Srivastava, Int. J. of Mod. Phys. B4, 2057, 1990.

[10] R. Banerjee e E. C. Marino, Nucl. Phys. B507, 501, 1997.

[11] E. Fradkin e F. Schaposnik Phys. Lett. B 338, 253, 1984.

[12] M. Gomes, L. C. Malacarne e A. J. Silva, hep-th/9711184.

[13] G. F. Dell 'Antonio, Y. Frishman e D. Zwanzinger, Phys. Rev. D6, N4, 988, 1972.

[14] S. Mandelstam, Phys. Rev. D11, 3026, 1975.

[15] M. Gomes e A. J. Silva, Phys. Rev. D34, N12, 3916, 1986.

[16] M. Bander, Phys. Rev. D13, 1566, 1976;
S. T. Kim e C. H. Woo, Nucl. Phys. B155, 357, 1979.

[17] J. H. Lowenstein e J. A. Swieca, Ann. of Phys. 68, 172, 1971.

[18] A. S. Wightman, "Cargèse Lectures in Theoretical Physics, 1964", ed. M Levy, Gordon e Breach, N. Y., 1966.

[19] B. Klaiber, "Lectures in Theoretical Physics", 141, Boulder 1967.

[20] W. Thirring, Ann. of Phys. 3, 91, 1958.

[21] K. Johnson, Il Nuovo Cim. XX, N4, 2085, 1961.

[22] K. D. Rothe e J. A. Swieca, Phys. Rev. D15, 1675, 1977.

[23] R. M. Wilcox, J. of Math. Phys. 8, N4, 962, 1967.

[24] J. Schwinger, Phys. Rev. 128, 2425, 1962.

[25] S. Coleman, R. Jackiw e L. Susskind, Ann. of Phys. (N.Y.) 93,267, 1975.

[26] L. V. Belvedere, "Um Estudo sobre a Eletrodinâmica Quântica em Duas Dimensões", Tese de Mestrado, PUC-RJ, 1978.

[27] Ryder, "Quantum Field Theory", 2nd Ed., Cambridge Univ. Press, 1996.

[28] Y. K. Ha, Phys. Rev. D29, 1744, 1984.

[29] T. Banks, D. Horn e H. Neuberger, Nucl. Phys. B108, 119, 1976.

[30] M. B. Halpern, Phys. Rev. D12, 1684, 1975.

[31] M. Lüscher, Nucl. Phys. B326, 557,1989.

[32] E. C. Marino Phys. Rev. D38, 3194, 1988; Phys. Letters B263, 63, 1991.

[33] S. Coleman, "International School of Subnuclear Physics: Pointlike Structure Inside and Outside Hadrons", Erice, Italy (1979), Ed. A. Zichichi, Plenum-Press(1982).

[34] A. N. Redlich, Phys. Rev. D29, 2366, 1984.

[35] M. Gomes, R. S. Mendes, R. F. Ribeiro e A. J. Silva, Phys. Rev. D43, 3516, 1991.

[36] N. V. Krasnikov e A. B. Kyatkin, Mod. Phys. A6, N14, 1315, 1991.

[37] N. Bralić, E. Fradkin, V. Manias e F. A. Schaposnik, Nucl. Phys. B446, 144, 1995.

[38] S. Deser e R. Jackiw, Phys. Lett. B 139, 443, 1984.