**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA**

A INFLAÇÃO E O ACOPLAMENTO CONFORME

Luís Raul Weber Abramo

Orientador: Prof. Dr. HENRIQUE FLEMING

**Dissertação de mestrado
apresentada ao Instituto
de Física da Universidade
de São Paulo.**

**SÃO PAULO
1993**

SBI-IFUSP

305M810T1987

530.14
A 161i
M
e.1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Abramo, Luis Raul Weber

A inflação e o acoplamento conforme. São Paulo,
1993.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Pau-
lo. Instituto de Física. Departamento de Física
Matemática.

Área de Concentração: Física de Partículas Elemen-
tares e Campos.

Orientador: Prof^o Dr. Henrique Fleming

Unitermos: 1. Cosmologia; 2. Inflação; 3. Acopla-
mento conforme.

USP/IF/SBI - 51/93

A meus avôs

Agradecimentos

Aos meus pais;

À Mônica;

Aos colegas, em especial ao Marcos;

Ao O. Éboli e ao J. de Lyra, pela
disposição para discutir;

Ao Fleming e ao computador, nesta
ordem meus melhores conselheiros;

Ao CNPq.

Resumo

Consideramos uma teoria escalar acoplada não-minimamente à gravitação no contexto de alguns modelos inflacionários. Mostramos como esse acoplamento inviabiliza a inflação caótica. Analisamos em seguida um modelo proposto por Linde para contornar esses problemas. Mostramos que sua realização é trivial.

Índice

1	O Modelo Padrão e a inflação	3
1.1	O Modelo Padrão	3
1.2	A inflação	11
2	O Acoplamento Conforme do Campo Escalar	24
2.1	Introdução	24
2.2	Equações de Movimento	25
2.3	Análise Numérica	29
3	O Modelo de Linde	33
3.1	Introdução	33
3.2	Equações de movimento	33
3.3	Análise numérica	34
4	Conclusão	38
A		41
B		43
C		46
D		47

Introdução

Na última década a investigação dos modelos inflacionários demonstrou que esses podem trazer nova luz a questões que o Modelo Padrão não alcança. Os problemas da homogeneidade em larga escala, da planura ("flatness"), da abundância dos monopolos previstos pelos modelos de grande unificação (GUT's) e da origem das flutuações de densidade se resolve de maneira trivial nesses modelos, sendo esse o motivo da atenção dispensada na investigação dos cenários inflacionários. Nesta dissertação nos propomos analisar em profundidade um desses modelos, a Inflação Caótica, e investigar a sua validade em uma versão modificada, aquela na qual o campo escalar que dá origem à inflação se acopla conformemente à gravidade.

No capítulo 1 revisamos o Modelo Padrão e seus sucessos na explicação dos mais diversos fenômenos observados no Universo, assim como as poucas modificações introduzidas pelos modelos inflacionários, e as muitas explicações fornecidas por eles. No capítulo 2 apresentamos o modelo em que estamos interessados, derivamos as equações correspondentes e obtemos tanto analítica e numericamente o comportamento de tal sistema. Em vista do fracasso do modelo com acoplamento conforme em promover inflação, no capítulo 3 analisamos a proposta de Linde [17] para contornar esse problema.

Capítulo 1

O Modelo Padrão e a inflação

1.1 O Modelo Padrão

O Modelo Padrão [1, 2, 3] (MP) descreve com acuidade eventos até $10^{-2}s$ após o presumível Big Bang. Ele se baseia na hipótese de um Universo (U) expansivo e com o 3-espaco altamente isotrópico e homogêneo numa escala de alguns Mpc (1 Megaparsec $\simeq 3.26$ milhões de anos-luz), a escala dos aglomerados de galáxias. Essa premissa se baseia no atual mapeamento do céu e, principalmente, na observação da radiação de fundo de microondas (CMBR), que é isotrópica em 1 parte em 10^4 . O espectro do CMBR, como veremos logo mais, é uma foto amarelada do instante em que a matéria se desacoplou da radiação, ficando o U portanto transparente para os fótons do background, que desde então passaram a se comportar como a radiação de um corpo negro. A pequena anisotropia já existente no CMBR se manteve, enquanto a matéria aumentou a sua devido à instabilidade gravitacional, dando início ao processo que levaria à formação das estruturas em larga escala que vemos hoje: galáxias, aglomerados, super aglomerados, *voids* etc.

O MP também provê, no bojo da teoria SU(3), a gênese dos elementos leves (H, D, ^3He , ^4He , ^7Li), que respondem por praticamente todos os bárions presentes no U. Satisfeitas certas premissas ¹, o MP passa magnificamente pelos teste experimentais.

Passamos agora a uma revisão sucinta da dinâmica do MP. A isotropia e homogeneidade do U implicam máxima simetria, o que significa que podemos estender sobre ele uma métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW):

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (1.1)$$

onde $k=1,0,-1$ e $a(t)$ é o chamado *fator de escala*, e dá basicamente o

¹Que a razão bárions/fótons esteja entre 4 e 7×10^{-70}

tamanho do U.

Para compreendermos a evolução no tempo de um tal U temos que resolver as *Equações de Einstein* :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, R é o escalar de Ricci, $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento da "matéria" e Λ é uma constante cosmológica. A métrica de FRW 1.1 dá, para as quantidades não nulas:

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad (1.3)$$

$$R_{ij} = -\left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}^2}{a}\right) + \frac{2k}{a^2}\right]g_{ij} \quad (1.4)$$

$$R = -6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}^2}{a}\right) + \frac{2k}{a^2}\right] \quad (1.5)$$

O tensor de energia-momento pode ser apenas parcialmente determinado, bastando que, coerentemente com a métrica e com o lado esquerdo das equações de Einstein, seja diagonal, e com componentes dadas por

$$T^\mu{}_\nu = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p) \quad (1.6)$$

ou seja, o tensor de energia-momento de um fluido perfeito.

As equações de Einstein sob uma métrica de FRW, ou equações de Friedmann ficam:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (1.7)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -8\pi p - \frac{k}{a^2} \quad (1.8)$$

A conservação do tensor de energia-momento 1.6 não é independente das equações 1.7 e 1.8, em virtude das identidades de Bianchi. Usualmente eliminamos 1.8, que é de 2ª ordem, por simplicidade. Ficamos então com 1.7 e a equação de conservação $T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$, cuja componente 0 é:

$$d(\rho a^3) = -p d(a^3) \quad (1.9)$$

Agora, basta especificar que tipos de campos temos para obter uma expressão final para o fator de escala. Para partículas no limite extremo relativístico a equação é a da *radiação* :

$$p = \frac{1}{3}\rho \implies \rho \propto a^{-4}. \quad (1.10)$$

Em particular, quando $k=0$ temos que

$$a(t) \propto t^{\frac{1}{2}}. \quad (1.11)$$

Para o caso de partículas não relativísticas rarefeitas (poeira), a equação é chamada do tipo *matéria* :

$$p = 0 \implies \rho \propto a^{-3}. \quad (1.12)$$

Em particular, quando $k=0$ temos que:

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3}}. \quad (1.13)$$

Finalmente, quando a constante cosmológica é muito mais importante que a matéria do U (como é o caso na inflação), temos:

$$p = -\rho \implies \rho = cte. \quad (1.14)$$

Quando $k=0$, encontramos a solução de *de-Sitter* :

$$a(t) \propto \exp Ht, \quad (1.15)$$

onde

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} = cte. \quad (1.16)$$

Podemos obter alguma informação sobre o sinal de k olhando para a equação 1.7 modificada:

$$\rho = \frac{3}{8\pi} H^2 + \frac{3}{8\pi} \frac{k}{a^2}.$$

Esta última equação nos diz que há uma *densidade crítica* ρ_c dada pelo primeiro termo do lado direito da equação. Se $k=+1$, $\rho > \rho_c$ e dizemos que o U é *fechado*; se $k=-1$, $\rho < \rho_c$ e o U será *aberto*; se $k=0$ dizemos que ele é *plano* (flat). Se solucionarmos as equações de Friedmann para a radiação e matéria, veremos que o U plano é um ponto instável, isto é: se o U começar fechado, cada vez mais fechado ficará; principiando aberto, mais aberto ficará com o tempo (Fig. 1.1).

Figura 1.1: Evolução de Ω no tempo.

Levando em conta a idade do U (que veremos a seguir), é possível estimar que o U, nos primeiros instantes, era fantasticamente plano; especificamente, a 1s do Big Bang, $\rho = [1 - O(10^{-16})]\rho_c$.

Usando as equações de Friedmann podemos também estimar a idade do U:

$$\dot{a} = \frac{da}{dt} \implies dt = \frac{da}{\dot{a}};$$

logo,

$$t_0 = \int_0^{R(t_0)} \frac{dR'}{\dot{R}'} \quad (1.17)$$

Em geral, teremos $t_0 = \alpha H_0^{-1}$ ($H_0^{-1} \simeq 10$ bilhões de anos), com $\alpha = O(1)$. Em particular, para $k=0$ teremos, para a radiação ,

$$t_0 = \frac{1}{2} H_0^{-1}, \quad (1.18)$$

e, para a matéria,

$$t_0 = \frac{2}{3} H_0^{-1}. \quad (1.19)$$

Além desses resultados “cinemáticos” , o MP também produz, uma vez introduzido o modelo $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, uma prodigiosa quantidade de resultados. Num U suficientemente jovem e em equilíbrio térmico, a pressão e a densidade de energia podem ser aproximadas pelo limite ultra-relativístico de um gás ideal,

$$\rho_r = 3p_r = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4, \quad (1.20)$$

onde

$$g_* = \sum_{\text{bosons}} g_b \left(\frac{T_b}{T}\right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{\text{fermions}} g_f \left(\frac{T_f}{T}\right)^4 \quad (1.21)$$

é o número de graus de liberdade das partículas efetivamente sem massa, isto é, aquelas para as quais $M_p \ll T$. O MP, acima de 300 GeV, dá $g_* \simeq 100$.

Usando que $\rho_r \simeq \frac{3}{8\pi} H^2$, obtemos

$$H = 1,66 g_*^{\frac{1}{2}} T^2 \quad (1.22)$$

e

$$t = 0,301 g_*^{-\frac{1}{2}} T^{-2} \simeq \left(\frac{T}{\text{MeV}}\right)^{-2} s \quad (1.23)$$

A equação 1.23 nos permite fazer a história térmica do U, e prever em que instante aproximadamente os eventos importantes tais como a

recombinação e a bariogênese ocorreram. Um resumo esquematizado é mostrado abaixo (tirado de Turner, P & Kolb, E. *The Early Universe*, Addison-Wesley 1990 p 73).

Para finalizar, vamos elencar algumas questões que o MP não responde satisfatoriamente, e que o modelo inflacionário tentará esclarecer.

Homogeneidade e isotropia em larga escala:

A métrica de FRW descreve um 3-espaço perfeitamente simétrico. Mas as soluções mais gerais das equações de Einstein não são isotrópicas nem homogêneas. O efeito mais intrigante disso é que regiões do U que nunca se “conheceram” são igualmente simétricas. Por exemplo, ao tempo da recombinação o U observável ocupava o correspondente a uma parte em 10^5 do U observado hoje. Ou seja, da recombinação para cá 10^5 regiões iguais ao nosso U de então entraram no horizonte sem nunca terem qualquer contato com ele; e suas temperaturas, energias, flutuações de densidade e taxas de expansão eram praticamente iguais.

Homogeneidade e isotropia em pequena escala:

O espaço de FRW não abarca as estruturas que observamos hoje (estrelas, galáxias etc). Essas estruturas, diz o MP, decorrem do crescimento de pequenas irregularidades já existentes à época da recombinação (as quais observamos na anisotropia do CMBR), “sementes” que cresceram até o que são hoje pela atrção gravitacional. O MP não dá razão alguma para o surgimento dessas sementes, nem seu espectro. Há alguma evidência [4] de que esse espectro deva ser do tipo Harrison-Zel'dovich (invariante de escala), com flutuações da magnitude $\frac{\delta\rho}{\rho} = cte \simeq 5 \times 10^{-5}$. Então restam as perguntas: por quê um espectro invariante por transformações de escala? E como pode ser produzido um tal espectro num U repleto de regiões que há pouco eram causalmente desconexas?

Figura 1.2: Breve história térmica do Universo.

Fermilab, 1986

Planura (flatness):

Nos modelos de FRW, a densidade crítica ρ_c é um regime instável. Isso vale dizer que a diferença entre a densidade do U e ρ_c em geral aumenta rapidamente com o tempo. Atualmente, Ω está entre 0.1 e 1, o que implica que no passado Ω era muito mais próximo de 1 do que é agora. Por exemplo, a 10^{-43} s após o Big Bang (o fim da era de Planck), o U teria $\Omega = 1 - O(10^{-60})$, ou seja, seria incrivelmente plano. Alguns autores colocam a mesma questão em termos bem diversos, afirmando que se trata de um problema de discrepância de escalas: o tempo de Planck seria a escala natural para a cosmologia, e o U teria sobrevivido a 10^{60} dessas unidades sem recolapsar ou se diluir totalmente.

Relíquias:

As teorias de gauge unificadas prevêm uma miríade de partículas estáveis superpesadas (das quais o monopolo magnético é um exemplo notório), e que acabariam por, se não dominar o U, pelo menos serem detectadas (astronomicamente ou microscopicamente) em profusão.

Constante cosmológica :

À teoria quântica de campos não importa o valor absoluto dos potenciais das partículas, mas apenas suas diferenças e inclinações. Mas, para a gravitação, um estado fundamental com energia potencial finita equivale a uma constante cosmológica. A menos que todas as constantes cosmológicas associadas às partículas sofressem um milagroso cancelamento (tal como ocorre na supersimetria), hoje observaríamos um U inteiramente diverso do que conhecemos. Um limite superior ingênuo (a densidade crítica do U) dá para a constante cosmológica $8 \times 10^{-47} \text{ GeV}$, muitas ordens de grandeza menor do que qualquer escala típica das partículas elementares. A inflação não responde a mais essa pergunta; antes, se aproveita dela, propondo que durante um certo intervalo de tempo o U era dominado por uma constante cosmológica.

1.2 A inflação

O modelo inflacionário [5] nasceu ligado à idéia de quebra espontânea de simetria num sistema com duas "fases". Um campo escalar no estado fundamental simétrico, durante a transição de fase, leva um certo tempo τ para decair (rolar lentamente) até um dos mínimos da fase assimétrica (Fig. 1.3). Como tipicamente $\tau \gg H^{-1}$ o campo permanece por algum tempo no antigo mínimo, cuja energia atua como uma constante cosmológica alimentando a inflação. Decorrido um tempo da ordem de τ o campo atinge o vácuo assimétrico (de energia zero, assim esperamos) e a inflação cessa.

Figura 1.3: Potencial com quebra de simetria.

Presentemente, a quebra espontânea de simetria deixou de ser imprescindível na proposição de alguns modelos [6], mas a idéia da dinâmica de um campo escalar fracamente acoplado fora do mínimo do potencial, rolando lentamente naquela direção, ficou. Todos os modelos, porém, têm em comum a necessidade de algum grau inicial de ho-

mogeneidade para o campo escalar. Condições iniciais excessivamente inhomogêneas podem impedir a deflagração da inflação, dependendo do modelo ².

Antes de expor os modelos mais realistas, vamos resolver um de brinquedo [8]. Suponha que, a temperatura zero, o nosso campo escalar tenha um potencial com a forma da fig. 1.3,

$$V(\varphi) = -\frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4}\varphi^4 + \frac{m^4}{4\lambda} \quad ; \quad \sigma^2 = \frac{m^2}{\lambda}, \quad (1.24)$$

onde o último termo do lado direito garante que o mínimo σ tenha energia zero.

A dinâmica é determinada pelas equações de movimento, ou seja, as equações de Einstein 1.7, e as equações de movimento do campo escalar ³:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \equiv \frac{8\pi}{3}(\rho_\varphi + \rho_m) \quad (1.25)$$

$$\square\varphi + V'(\varphi) = \ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} - \frac{1}{a^2}\nabla^2\varphi + V'(\varphi) = 0 \quad (1.26)$$

onde ρ_φ e ρ_m são, respectivamente, as densidades de energia do campo escalar e das outras partículas que houverem (matéria). Note que ignoramos em 1.25 o termo $\frac{k}{a^2}$. Isso porque, como veremos logo mais, a menos que o U seja dominado pela curvatura (possibilidade que já descartamos), esses efeitos desaparecerão rapidamente.

Supondo que as “outras partículas” formem, inicialmente, um background radiativo (o que é uma boa aproximação se $T \gg M_{part}$) e supondo que o campo φ não tenha uma distribuição excessivamente inhomogênea, a inflação começa do seguinte modo: a densidade de energia associada à radiação ρ_r se dilui rapidamente (pois $\rho_m = \rho_r \propto a^{-4}$), enquanto ρ_φ continua constante. Ao mesmo tempo, a expansão do U faz com que as componentes de Fourier do campo φ com momento

²O problema é mais grave na Nova Inflação, e menos severo para a Inflação Caótica. Além disso, se $\Omega \gg 1$ o U pode recolapsar antes que a inflação comece [7].

³Lembrando que 1.7 e 1.8 não são independentes por causa da equação da conservação do tensor de energia-momento do campo escalar (que aqui é idêntica à equação de movimento)

não nulo sejam rapidamente suprimidas; isto é, o campo se torna aproximadamente homogêneo (a situação é esquematizada na figura 1.4)

Figura 1.4: Solução numérica para o potencial (1.24), com $m^2 = \lambda = 10^4$. O campo $\varphi(x)$, só tem uma componente com $k \neq 0$, e sua média é zero (o valor da média não é importante, basta que $\langle \varphi \rangle \ll \sigma$): $\varphi(x, t=0) = 2\sigma \sin \frac{2\pi x}{100}$. O processo completo está mostrado na fig. 1.4a, onde cada senóide retrata um instante na simulação. Inicialmente (1.4b) o campo tem uma grande amplitude. Com a expansão φ tende à sua média (1.4c). Finalmente ele começa a rolar (no caso, cada domínio isoladamente) para $\pm\sigma$ (1.4d). A fig. 1.4e mostra a evolução da densidade de energia da radiação e das densidades de energia potencial e cinética do campo escalar. Note com $V(\varphi)$ rapidamente domina, o que só acaba quando φ alcança os mínimos.

⁴Para a apresentação dos métodos numéricos utilizados veja o Apêndice D. Para uma resolução mais elegante e completa remetemos o leitor às referências [8] e [19].

Vamos agora estimar analiticamente quanta inflação o modelo proporciona. Para $\varphi \ll \sigma$ temos:

$$V(\varphi) \simeq \frac{m^4}{4\lambda} - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \quad (1.27)$$

Ou seja, as formas aproximadas de 1.25 e 1.26 são (desprezando inhomogeneidades de φ):

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} \frac{m^4}{4\lambda} \quad (1.28)$$

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} - m^2\varphi = 0 \quad (1.29)$$

A solução para a equação 1.29 com $\varphi(t=0)=0$ é

$$\varphi = \varphi_0 [\exp \omega_1 - \exp \omega_2], \quad (1.30)$$

onde

$$\omega_1 = -\frac{3}{2}H + \sqrt{\left(\frac{3}{2}H\right)^2 + m^2}$$

$$\omega_2 = +\frac{3}{2}H + \sqrt{\left(\frac{3}{2}H\right)^2 + m^2}$$

A solução 1.30 mostra que o campo φ tem uma meia-vida dada por $\tau = \omega_1^{-1}$. Ou seja, durante este tempo o campo deve estar perto da origem, e sua energia provoca a inflação. No modelo da fig. 1.4, a meia-vida será de $\simeq 30H^{-1}$, o que significa que o fator de escala aumentou de $\exp 30$ nesse período.

Vamos analisar as implicações de uma expansão dessa ordem. Em primeiro lugar temos que, por causa da imensa expansão, o U ficou praticamente plano. Isso pode ser visto na equação 1.7, onde o termo $\frac{k}{a^2}$ diminui exponencialmente, enquanto os outros termos permanecem aproximadamente constantes. Ou seja, a inflação resolve o problema da planura, pois prevê que a densidade do U é assintoticamente idêntica à sua densidade crítica ⁵.

⁵Em geral, o mínimo de inflação que se admite é um fator de $\simeq \exp 70$. Essa restrição implica certos vínculos às constantes fundamentais do modelo, que no caso acima serão $t \simeq NH^{-1}$ (onde N é o número de e-foldings), implicando que $\lambda \sim N^{-1}m^2$.

Além disso, a inflação faz com que regiões vizinhas se tornem exponencialmente longínquas. Ou seja, regiões distantes hoje poderiam ter sido muito próximas antes da inflação. Isso poderá explicar o problema da homogeneidade em larga escala.

A expansão também tem o efeito de diluir qualquer matéria pré-inflacionária por um fator de $\exp -3N$. Isto é, arranjamos um meio de nos livrarmos dos monopolos e aparentados.

Por fim, a inflação nos provê de um elegante método de introdução das flutuações de densidade. Assim como os buracos negros emitem radiação à temperatura de Hawking, também no espaço de de-Sitter (que pode ser visto como um buraco negro invertido) um observador inercial sente um banho térmico à temperatura $T_H = \frac{H}{2\pi}$. Podemos ver isso se nos lembrarmos que a métrica de de-Sitter pode ser escrita como

$$ds^2 = dt^2 - H^{-2} \cosh Ht^2 \left[d\chi^2 + \sin^2 \chi \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \right]$$

Isso significa que, na formulação euclideana (onde a métrica fica a de uma 4-esfera), os campos bosônicos terão período $\frac{2\pi}{H}$, o que equivale a considerar uma estatística quântica à temperatura T_H . Essa temperatura dará origem às flutuações que observamos hoje, e o espectro do CMBR colocará vínculos sobre a classe dos modelos possíveis.

Só nos resta indagar como se dá a saída da inflação. Isso é feito introduzindo na equação de movimento 1.26 um termo referente ao decaimento das partículas φ nas outras espécies presentes. Trata-se, dinamicamente, de um termo de atrito constante do tipo $\Gamma_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, que só se tornará importante quando o campo φ estiver oscilando em torno do mínimo. A criação das partículas devolve o U a um estado dominado pela radiação e com as flutuações de densidade (sementes) que gerarão as estruturas que vemos hoje. Em suma, após a inflação o U volta a se comportar como no MP, porém sem as inconveniências da planura, das homogeneidades em larga e pequena escala, da abundância de monopolos e da origem das flutuações.

Agora, passamos a revisar alguns modelos específicos.

Em geral, um potencial mais plano tornará os vínculos mais fracos, o que com efeito ocorre na Nova Inflação. Este modelo tem como motivação um potencial efetivo do tipo Coleman-Weinberg [9], inicialmente aplicado à eletrodinâmica dos mésons escalares. Nos primeiros

trabalhos [10] o potencial efetivo (em 1 loop) à temperatura zero é da forma (Fig. 1.5):

$$V(\varphi) = \frac{B}{2}\sigma^4 + B\sigma^4 \left[\ln \frac{\varphi^2}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right], \quad (1.31)$$

Figura 1.5: Potencial do tipo Coleman-Weinberg (em unidades arbitrárias), muito plano perto da origem.

onde $B \sim 10^{-3}$ e $\sigma \sim 2 \times 10^{15} \text{ GeV} \sim 2 \times 10^{-4} M_{pl}$. Devido à forma achatada do potencial, o modelo da Nova Inflação proporciona mais inflação que o modelo de brinquedo acima, e portanto tem vínculos, mais fracos sobre as constantes de acoplamento. Porém, há outros vínculos além da quantidade de inflação. O espectro do CMBR impõe restrições às flutuações de densidade, o que acaba limitando severamente o valor da constante B do potencial 1.31. Esse vínculo invalidou os modelos iniciais por não terem ainda potenciais planos o suficiente, e

fez com que surgissem outros [11] quem justificavam melhor a geração de acoplamentos tão fracos. Entretanto, ao assumirmos constantes de acoplamento tão fracas estaremos introduzindo uma inconsistência no modelo, já que esse pressupõe condições iniciais em equilíbrio térmico, o que está em franca contradição com a premissa acima.

Um modelo diferente, a **Inflação Caótica**, foi proposto por Linde [6][12]. Ele afirma que, logo após a época de Planck, um campo escalar deveria ter uma distribuição aproximadamente caótica no espaço, devido ao princípio de incerteza de Heisenberg. Resumidamente, o modelo assume que o campo escalar em alguma região grande ($> H^{-1}$) do espaço, tinha um valor bem distante de zero. Se o potencial fosse do tipo quártico simples, com ou sem massa, é fácil ver que, devido ao termo de atrito de 1.26 (proporcional a H) o campo fica por um bom tempo rolando lentamente em direção ao mínimo (fig. 1.6).

Figura 1.6: Potencial $\lambda\phi^4$ (unidades arbitrárias) com um campo escalar inicialmente fora do mínimo.

A energia potencial novamente será a propulsora da inflação, que procederá de maneira análoga à exposta anteriormente.

É fácil verificar que, se o valor inicial do campo é φ_0 , o campo evolui inicialmente como

$$\varphi(t) \simeq \varphi_0 \exp \frac{\lambda}{2\pi} t \quad (1.32)$$

o que nos diz que o período característico para este sistema é $\tau \simeq \lambda^{-\frac{1}{2}} 6\pi^{\frac{1}{2}}$. Como $H^2 = \frac{2\pi}{3} \lambda \varphi_0^4$, a condição $\tau \gg H^{-1}$ fica sendo

$$\varphi_0^2 \gg 1(M_{pl}^2). \quad (1.33)$$

Mas esta condição estaria automaticamente garantida já que, segundo Linde, o princípio de incerteza implica que, após a era de Planck, $V(\varphi_0) \simeq M_{pl}^4$, o que implica $\varphi_0 \simeq \lambda^{-\frac{1}{4}} M_{pl}$, que é idêntica à 1.33.

Nas figuras abaixo vemos como se comporta exatamente um tal $U: R$ ($\sim -12H^2$) é aproximadamente constante (note que a escala de tempo está bastante comprimida), com $H^2 \gg H$; a inflação dura até que $R \rightarrow 0$, $H \rightarrow 0$, e até lá o U inflou proporcionalmente ao valor inicial φ_0 do campo escalar, já que $H\tau \sim \varphi_0^2$ (fig. 1.7a).

Figura 1.7a: R em função do tempo para vários valores iniciais de φ .

Podemos ver como a quantidade de inflação está pouco correlacionada tanto à constante de acoplamento (fig. 1.7b) quanto à massa (fig. 1.7c).

Figura 1.7b: $R(t)$ para vários valores de λ . Note que variando λ em até 4 ordens de magnitude não afeta substancialmente o período pelo qual o modelo infla. O número de e-foldings (N) num cálculo analítico aproximado é independente de λ , o que é confirmado na simulação acima.

Figura 1.7c: $R(t)$ para vários valores da massa. Aqui a independência de N é ainda mais manifesta. Mesmo quando o potencial quártico tem sua forma profundamente alterada por uma massa muito grande o período se mantém.

Agora também podemos analisar a criação das *flutuações de densidade* do modelo. Temos que

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \simeq \frac{\delta V}{V} \simeq \frac{V'\delta\varphi}{V}$$

Mas, $T_H = \frac{H}{2\pi} \Rightarrow |\delta\varphi| \simeq \frac{H}{2\pi}$; logo,

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \simeq \frac{V'}{V} \frac{H}{2\pi} \sim \frac{V'}{V^{\frac{1}{2}}} \sim \lambda^{\frac{1}{2}} \varphi.$$

É claro que as flutuações acima se referem a um determinado instante e, portanto, a uma certa escala (horizonte); ou seja, após serem produzidas as flutuações ainda sofreram a expansão do U, reentrando no nosso horizonte somente após a inflação.

O que encontramos, associando a φ as escalas correspondentes (os horizonte H^{-1} correspondentes) é

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \sim \lambda^{\frac{1}{2}} \ln L,$$

onde L é a escala ⁶. Em suma, encontramos flutuações quase invariantes de escala (ou do tipo Harrison-Zel'dovich). Para todas as escalas observáveis temos

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = O(100)\sqrt{\lambda}.$$

Os dados coletados pelo satélite COBE [4] indicam uma anisotropia de quadrupolo de $\simeq 5 \times 10^{-5}$. Portanto o vínculo correspondente a essa medida é $10^{-12} > \lambda > 10^{-14}$. A presença de constantes de acoplamento tão fracas (na teoria de Glashow-Weinberg-Salam, $\lambda_{Higgs} \sim 10^{-2}$) indica potenciais extremamente planos, com quantidades enormes de inflação, $N \sim 10^5$, e é inerente ao modelo em particular. No momento, um dos principais desafios dos modelos inflacionários é justificar constantes de acoplamento tão pequenas.

⁶Para uma derivação menos heurística, ver [12] e em especial [13].

Capítulo 2

O Acoplamento Conforme do Campo Escalar

2.1 Introdução

Suponhamos [14] que nos instantes iniciais o U fosse constituído basicamente de radiação, o que, como já vimos, parece razoável. Então, o traço do tensor de energia-momento dessa matéria radiativa seria zero já que

$$\text{Tr} T^\mu{}_\nu{}^{(r)} = \text{Tr}(\rho, -p, -p, -p) = \text{Tr}(\rho, -\frac{\rho}{3}, -\frac{\rho}{3}, -\frac{\rho}{3}) = 0. \quad (2.1)$$

Nesse caso não haveria uma escala m^{-1} , e a ação total (gravidade+matéria radiativa) seria invariante conforme, ou seja, o U teria a simetria da mudança de escala.

Ao introduzirmos um campo escalar com o intuito de provocar inflação, podemos acabar quebrando essa simetria. Para evitar isto é necessário, de antemão, anular quaisquer massas presentes (é claro então que consideraremos uma inflação do tipo caótica, onde o campo está inicialmente como na fig. 1.6). Mas só essa medida não basta: se efetuarmos uma transformação conforme na ação

$$S_\varphi = \int \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{\lambda}{4} \varphi^4 + \mathcal{L}_m \right\} \sqrt{-g} d\Omega, \quad (2.2)$$

veremos que ela não é invariante conforme. Só o será se adicionarmos a ela um termo $\frac{R\varphi^2}{12}$. Esse termo garantirá que o traço do tensor de energia-momento seja zero (desde que, é claro, $\text{Tr} T^\mu{}_\nu{}^{(m)} = 0$), e introduzirá algumas consequências interessantes ao cenário inflacionário¹.

¹Note que somos levados a preterir os modelos com quebra de simetria (tais como a Nova Inflação) ao modelo Caótico. Além disso, a introdução de uma quebra de simetria complicaria o sistema já que, se quiséssemos anular a constante cosmológica do vácuo verdadeiro a todo instante, teríamos que somar ao potencial efetivo de φ uma "constante" dependente de R. Caso contrário, se permitíssemos que o termo $R\varphi^2$ se somasse ao potencial efetivo sem mais, estaríamos agora introduzindo uma constante cosmológica dependente de R.

2.2 Equações de Movimento

A presença do termo $\frac{1}{2}\xi R\varphi^2$ indica o acoplamento conforme ($\xi = \frac{1}{6}$) do campo escalar, em contraste com o acoplamento mínimo ($\xi = 0$), que tratamos no exemplo do capítulo anterior. A principal vantagem do acoplamento mínimo é que as equações de movimento para a gravitação (equações de Einstein) e para a matéria se desacoplam parcialmente: a matéria só aparece nas equações de Einstein no tensor de energia-momento, e o encurvamento do espaço só se manifesta na transição das derivadas simples para derivadas covariantes na equação de Klein-Gordon do campo escalar.

A presença do termo de acoplamento conforme, no entanto, alterará essa situação. Ao contrário da configuração na qual o campo escalar está num *background*, no caso inflacionário ele se torna a principal fonte gravitacional; isso invalida a inclusão *a priori* do termo $\frac{R\varphi^2}{12}$ como uma correção ao potencial na equação de movimento do inflaton. Antes, devemos deduzir o conjunto de equações que descendem da ação 2.2. Se não o fizéssemos, terminaríamos com equações inconsistentes.

O princípio de mínima ação aplicado em relação a todas as variáveis canônicas da ação total

$$S_T = \int \left\{ -\frac{R}{16\pi} + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{\lambda}{4}\varphi^4 + \frac{1}{2}\xi R\varphi^2 + \mathcal{L}_m \right\} \sqrt{-g} d\Omega$$

fornece a variação

$$\begin{aligned} \delta S = & \int d\Omega \left\{ -\frac{1}{2}\sqrt{-g} \left[\frac{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R}{8\pi} - \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} + \right. \right. \\ & + g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2}\partial^\alpha\varphi\partial_\alpha\varphi - \frac{\lambda}{4}\varphi^4 + \mathcal{L}_m \right) \left. \right] \delta g^{\mu\nu} + \\ & + \sqrt{-g} \sum_{\psi_a} \left[\frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial\psi_a} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial\partial_\mu\psi_a} \right] \delta\psi_a - \\ & - \sqrt{-g} \left[\square\varphi + \lambda\varphi^3 - \xi R\varphi \right] \delta\varphi + \\ & + \frac{1}{2}\xi\varphi^2\delta(R\sqrt{-g}) \left. \right\} . \end{aligned} \quad (2.3)$$

Quando igualamos o primeiro termo entre colchetes do lado direito a zero, obtemos as equações de Einstein para $\xi = 0$. O segundo termo

dá a equação de movimento da matéria, geralmente expressa macroscopicamente por uma equação de estado (por exemplo, $p = \frac{1}{3}\rho$ para a radiação). O terceiro termo é a equação de movimento do campo escalar com um potencial corrigido pelo acoplamento conforme. O último termo é justamente aquele que introduzirá correções profundas às outras equações. Escrevendo-o por extenso temos:

$$\int d\Omega \sqrt{-g} \left\{ \frac{\xi}{2} \varphi^2 \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} + \frac{\xi}{2} \varphi^2 g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right\} .$$

Mas ²,

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = - \left[\frac{1}{2} (\nabla_\mu \nabla_\nu + \nabla_\nu \nabla_\mu) - g_{\mu\nu} \square \right] \delta g^{\mu\nu} .$$

Integrando por partes obtemos que

$$\int d\Omega \sqrt{-g} \frac{\xi}{2} \varphi^2 g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \int d\Omega \sqrt{-g} \left[(-\nabla_\mu \nabla_\nu + g_{\mu\nu} \square) \frac{\xi}{2} \varphi^2 \right] \delta g^{\mu\nu} .$$

Agora podemos fatorar $\delta g^{\mu\nu}$, e encontramos assim as equações de Einstein

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{8\pi} - \xi \varphi^2 \right) \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) &= \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \xi \nabla_\mu \nabla_\nu \varphi^2 + \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - \\ &- g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial^\alpha \varphi \partial_\alpha \varphi + \xi \square \varphi^2 - \frac{\lambda}{4} \varphi^4 + \mathcal{L}_m \right) , \end{aligned}$$

a equação de movimento do campo conformemente acoplado

$$\square \varphi + \lambda \varphi^3 - \xi R \varphi = 0 , \quad (2.4)$$

e as equações de movimento da matéria.

Podemos escrever as equações de Einstein acima numa forma mais simples:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu} , \quad (2.5)$$

²Ver apêndice A

onde

$$T_{\mu\nu} = \gamma(\varphi) [t_{\mu\nu}(\varphi) + t_{\mu\nu}^{(m)}], \quad (2.6)$$

com ³:

$$\gamma(\varphi) = (1 - 8\pi\xi\varphi^2)^{-1},$$

$$\begin{aligned} t_{\mu\nu}(\varphi) = & \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \xi(\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\square)\varphi^2 - \\ & - g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\partial^\alpha\varphi\partial_\alpha\varphi - \frac{\lambda}{4}\varphi^4\right) \quad e \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$t_{\mu\nu}^{(m)} = \frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m.$$

Pode-se verificar que o tensor de energia-momento definido em 2.6 se conserva, isto é, $\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = 0$, bastando para isso que usemos as equações de movimento. Podemos verificar do mesmo modo que, como desejávamos, $T = T^\mu{}_\mu = 0$ ⁴ (desde que, é claro, o *background* seja a radiação).

Porém, as 2.5 e 2.6 não nos são úteis naquela forma, mas sim quando as escrevemos na métrica de FRW 1.1 ⁵. Além disso, vamos simplificar ainda mais o problema anulando k já que, ao menos na situação em que estamos interessados, seu efeito é exponencialmente reduzido. Obtemos então as quantidades

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}$$

$$R_{ii} = -g_{ii} \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right]$$

³Constatamos aqui o aparecimento de um "valor crítico" do campo escalar, $\varphi_c^2 = \frac{1}{8\pi\xi}$, $\varphi < \varphi_c$. Esse vínculo está ligado ao fato de que, na ação, o termo $R\varphi^2$ aparece com o sinal trocado em relação ao R ; se $\varphi > \varphi_c$ o sinal de R muda!

⁴Ver apêndice B

⁵Poder-se-ia objetar a introduzir no caso conforme uma métrica que seria a solução do caso mínimo. Mas não é o caso. A métrica de FRW é obtida de princípios puramente simétricos, não estando envolvidas em instante algum as equações de Einstein [1].

$$\Rightarrow R = -6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right].$$

A componente (0-0) da 2.5 fica então:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} \gamma(\varphi) \left[\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + 6\xi \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \varphi \dot{\varphi} + \frac{\lambda}{4} \varphi^4 + \rho_m \right]; \quad (2.8)$$

a componente (i-i) é:

$$2 \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = 8\pi \gamma(\varphi) \left(\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - 2\xi \frac{\dot{a}}{a} \varphi \dot{\varphi} + \xi \square \varphi^2 + \frac{\lambda}{4} \varphi^4 - p_m \right). \quad (2.9)$$

Podemos simplificar ainda mais as equações acima se fizermos a mudança de variáveis:

$$a = \exp G \quad (2.10)$$

$$\frac{\dot{a}}{a} = \dot{G} = H \quad (2.11)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \ddot{G} + \dot{G}^2 = \dot{H} + H^2, \quad (2.12)$$

com a qual obtemos 2.8 e 2.9 (esta última reescrita usando a 2.8):

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} \gamma(\varphi) \left(\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + 6\xi H \varphi \dot{\varphi} + \frac{\lambda}{4} \varphi^4 + \rho_m \right) \quad (2.13)$$

$$\dot{H} = -4\pi \gamma(\varphi) \left[(1 - 2\xi) \dot{\varphi}^2 - 2\xi \varphi \ddot{\varphi} + 2\xi H \varphi \dot{\varphi} + \rho_m + p_m \right]. \quad (2.14)$$

É fácil verificar ⁶ que as duas equações são consistentes com as equações de movimento para o campo escalar e para a matéria, o que vale dizer que podemos eliminar a 2.14, por exemplo, do sistema. Ficamos com a 2.13, que ainda deve ser resolvida para H, já que este também aparece no 2º termo do lado direito. Ficamos então com

⁶Ver apêndice C

$$H = 8\pi\xi\gamma(\varphi)\varphi\dot{\varphi} + \sqrt{(8\pi\xi\gamma(\varphi)\varphi\dot{\varphi})^2 + \frac{8\pi}{3}\gamma(\varphi)\left[\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \lambda\varphi^4 + \rho_m\right]}. \quad (2.15)$$

Devemos portanto resolver o sistema composto pela 2.15 e pelas equações de movimento do campo escalar e da matéria.

2.3 Análise Numérica

Começamos pelo caso mais simples possível (caso *puro*), quando não há matéria ou outros campos escalares, apenas um inflaton conformemente acoplado. De fato, essa seria a situação se houvesse inflação : a matéria pré-inflacionária inteiramente diluída, e o campo escalar gerando toda a gravitação .

As equações do problema são a 2.15 com $\rho_m = 0$ e a 2.4. Todavia, não será necessário resolvê-las, já que a anulação do traço de T^μ_ν implica que $R = 0$. A solução de

$$R \propto \dot{H} + 2H^2 = 0$$

é

$$H = \frac{1}{2}t^{-1} \implies a \propto t^{\frac{1}{2}},$$

ou seja, uma evolução correspondente à radiação . Concluimos então que o U tem um comportamento independente das condições iniciais, e aparentemente independente das equações de movimento do próprio campo escalar. Mas o que ocorre é que a exigência de invariância conforme fixa o potencial escalar em $\lambda\varphi^4$. Assim como a simetria maximal do espaço (homogeneidade e isotropia do espaço) restringe as métricas àquelas do tipo FRW, a simetria conforme escolhe uma dessas métricas de FRW, qual seja, aquela da radiação .

É interessante notar que mesmo que a simetria conforme fosse aproximada (isto é, se φ tivesse uma massa residual) o comportamento se manteria, já que

$$R = -8\pi m^2\varphi^2.$$

Além disso, notamos que até para valores consideráveis da massa o comportamento é aquele, se considerarmos condições iniciais *à la* Inflação Caótica. Nas figuras abaixo ⁷ mostramos o comportamento de um tal sistema, no tempo $G = \int H dt$, que já havíamos chamado *e-foldings*. Um estágio inflacionário corresponderia a uma linha $H \sim cte$, que durasse $\Delta G \sim 70$ (semelhante à figura 1.7). Como vemos, esse não é absolutamente o caso: H (fig. 2.1) cai rapidamente, mesmo quando

Figura 2.1: $H(t)$ para massas pequenas e nula.

há alguma massa; R (fig. 2.2) é zero quando a massa é zero, e no outro caso reflete a posição do campo escalar rolando no seu potencial. Também podemos analisar o comportamento do sistema quando φ está inicialmente muito perto do ponto crítico (fig. 2.3).

⁷Para a apresentação da análise numérica veja o capítulo 3 e o apêndice D

Figura 2.2: $R(t)$ para massas pequenas e nula. Note como aqui se manifesta (para $m \neq 0$) o não anulamento do tensor de energia-momento.

Figura 2.3: $H(t)$ quando fazemos o campo φ tender ao seu valor crítico.

Apesar do coeficiente de expansão H divergir quando $\varphi \rightarrow \varphi_c$, ele não se sustenta pelo tempo necessário para causar uma expansão considerável.

Concluimos então que em hipótese alguma alcança-se um estágio inflacionário com esse modelo ⁸. Ela só pode ocorrer em modelos com massa ou outros parâmetros dimensionais, com condições iniciais (valor inicial da média do campo escalar) como na Nova Inflação ⁹. Para tentar resolver isso Linde [17] propôs um modelo alternativo, que examinaremos a seguir.

⁸Sobre a impossibilidade de inflação nesse caso, ver também [15]

⁹Na verdade o termo de acoplamento conforme destruirá a planura do potencial em $\varphi \sim 0$, o que é justamente o principal atrativo da Nova Inflação [16].

Capítulo 3

O Modelo de Linde

3.1 Introdução

No capítulo anterior mostramos que o modelo caótico não se realiza se o inflaton se acoplar conformemente à gravidade. Em particular, o U se comporta como se preenchido por radiação. Mas, segundo Linde [17], as teorias realistas contêm vários campos escalares, e apesar de todos eles contibuírem para o início da inflação, apenas os campos mais "leves" (com as menores constantes de acoplamento, e por isso mesmo com potenciais mais chatos) determinam os estágios finais da inflação, e portanto também as flutuações de densidade. Propôs ele então que talvez a inflação tenha se deflagrado via um inflaton conformemente acoplado, que tornaria um outro campo escalar homogêneo, este sim responsável pela maior parte (em particular do final) da inflação sofrida pelo U. Consideraremos, portanto, 2 campos escalares homogêneos, um minimamente (ϕ) e outro conformemente (φ) acoplados, com condições iniciais do tipo caóticas, isto é, com os campos assumindo valores não-nulos.

3.2 Equações de movimento

Podemo-nos utilizar da equação 1.15, lembrando que com a lagrangeana

$$\mathcal{L}_m \longrightarrow \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\lambda_\phi \phi^4}{4};$$

obtemos que

$$\rho_m \longrightarrow \rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V_0(\phi).$$

Portanto, o conjunto de equações será:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \lambda_\varphi \varphi^3 - \frac{R\varphi}{6} = 0 \quad (3.1)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'_0(\phi) = 0 \quad (3.2)$$

$$H = \frac{4\pi}{3}\gamma(\varphi)\varphi\dot{\varphi} + \sqrt{\left[\frac{4\pi}{3}\gamma(\varphi)\varphi\dot{\varphi}\right]^2 + \frac{8\pi}{3}\gamma(\varphi)\left[\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{\lambda_\varphi\varphi^4}{4} + V_0(\varphi)\right]}. \quad (3.3)$$

É fácil verificar que, nesse caso,

$$R = -8\pi T r(T^\mu{}_\nu) = -32\pi V_0(\varphi),$$

o que evidencia que o regime a longo prazo será determinado pelo campo que decair mais devagar, no caso, ϕ .

3.3 Análise numérica

O conjunto de equações 3.1, 3.2 e 3.3 não apresenta instabilidades ou outros comportamentos que demandariam rotinas numéricas mais elaboradas ¹. De fato, a discretização e a propagação simples a partir das condições iniciais continua válida até para valores de φ iguais 1 parte em 10^{10} ao valor crítico φ_c .

As equações discretizadas são transformadas num código tal que, dadas condições iniciais $\varphi_t, \dot{\varphi}_t, \phi_t, \dot{\phi}_t$ (e portanto H_t), calculamos $\ddot{\varphi}_t$ e $\ddot{\phi}_t$. Em seguida,

$$\dot{\varphi}_{t+\Delta t} = \dot{\varphi}_t + \ddot{\varphi}_t \Delta t, \quad (3.4)$$

$$\dot{\phi}_{t+\Delta t} = \dot{\phi}_t + \ddot{\phi}_t \Delta t, \quad (3.5)$$

$$\varphi_{t+\Delta t} = \varphi_t + \dot{\varphi}_t \Delta t, \quad (3.6)$$

$$\phi_{t+\Delta t} = \phi_t + \dot{\phi}_t \Delta t, \quad (3.7)$$

¹Ver Apêndice D

$$H_{t+\Delta t} = H(\varphi_{t+\Delta t}, \dot{\varphi}_{t+\Delta t}, \phi_{t+\Delta t}, \dot{\phi}_{t+\Delta t}), \quad (3.8)$$

$$\ddot{\varphi}_{t+\Delta t} = -3H\dot{\varphi}_{t+\Delta t} - \lambda_\varphi \varphi_{t+\Delta t}^3 + \frac{R_{t+\Delta t} \varphi_{t+\Delta t}}{6}, \quad (3.9)$$

$$\ddot{\phi}_{t+\Delta t} = -3H\dot{\phi}_{t+\Delta t} - V_0'(\phi_{t+\Delta t}), \quad (3.10)$$

e com isso podemos retornar à 3.4 e prosseguir com a iteração. Em nossas simulações iniciaremos sempre com $\varphi_i \sim \varphi_c$, $\phi_i \sim CM_{pl}$ ($C = O(5)$) e $\dot{\varphi} = \dot{\phi} = 0$ (o valor específico de $\dot{\varphi}$ e $\dot{\phi}$ não é importante). O potencial $V_0(\phi)$ será do tipo $-\frac{m_\phi^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda_\phi}{4}\phi^4$.

Na falta de qualquer critério que relacione φ_i e ϕ_i , usamos o teorema de Bekenstein [18], que mapeia soluções de campos escalares minimamente acoplados em soluções do caso conformemente acoplado. Esse mapeamento é do tipo $\varphi = \varphi_c \tanh \phi$, ou seja, dado um $\phi > 1$ teremos φ muito próximo de φ_c . Por exemplo, $\phi = 5 \implies \varphi = \varphi_c(1 - 3 \times 10^{-9})$. Este, de fato, foi o caso analisado abaixo. Nas figuras 3.1 e 3.2 vemos a evolução de H em função do tempo conforme (e-foldings). A figura 3.1 mostra, para $\lambda_\varphi = \lambda_\phi = 10^{-4}$ e para vários valores da massa $m_1 = m_\phi$, o parâmetro H . Vemos que para todos os valores de m_ϕ há dois regimes bem definidos: inicialmente há uma divergência pronunciada, independente da massa de ϕ , que dá lugar a uma segunda fase, mais estável. Esse último regime permanece por muito tempo, e se caracteriza por ter um período próprio muito maior que o tempo de hubble H^{-1} , ou seja, durante esse período $H^2 \gg \dot{H}$. Por fim, a evolução de H muda novamente, com H decaindo suavemente para zero. Na figura 3.2 buscamos a origem desses dois regimes. O caso "misto" (quando colocamos os dois campos, φ e ϕ) converge rapidamente para o caso de acoplamento mínimo puro (correspondente à inflação caótica usual). O tempo em que φ se faz notar é reduzidíssimo, em particular menos de 1 e-folding para qualquer valor de λ_φ . Além disso, podemos mostrar que também a fase divergente (e-foldings < 1) é fracamente correlacionada com os parâmetros do campo ϕ .

Figuras 3.1 e 3.2

Em suma, obtemos um sistema com 2 regimes pronunciados e independentes, cada um determinado por um dos campos escalares presentes. Esse desacoplamento trivializa o problema, e podemos então afirmar que a introdução de um campo escalar conformemente acoplado ao arcabouço da inflação caótica apenas faz surgir um estágio em tudo equivalente a um U dominado pela radiação. Além disso, se o campo conformemente acoplado tem algum papel na deflagração do processo inflacionário, ele não difere em nada daquele assumido pela radiação que se supõe anterior ao período inflacionário.

Capítulo 4

Conclusão

Fizemos uma discussão analítica e numérica do modelo inflacionário caótico quando o inflaton (campo que leva à inflação) está minimamente e conformemente acoplado. É fácil concluir que quando o acoplamento é conforme, não há realização possível para o modelo caótico por dois motivos:

1. O acoplamento conforme implica vínculos ao valor do campo escalar, que teria que assumir valores proibidos para satisfazer as condições do modelo caótico
2. Sendo $R=0$ quando há invariância conforme, a evolução do sistema fica determinada como aquela correspondente à radiação, isto é, o fator de escala varia como $a(t) \simeq t^{\frac{1}{2}}$.

Como única opção para viabilizar o modelo caótico quando há tal acoplamento, introduzimos outro campo escalar (este minimamente acoplado) seguindo uma proposta de Linde. Porém, verificamos que o sistema composto pelos dois campos se desacopla em dois regimes onde cada um dos campos domina inteiramente a evolução do U, e portanto torna o sistema trivial. O campo escalar conformemente acoplado se comporta efetivamente como um fluido perfeito composto de partículas relativísticas que se dilui rapidamente e não deixa traço no U após a inflação.

Bibliografia

- [1] Weinberg, S. *Gravitation and Cosmology*; Wiley & Sons, Inc. (1972)
- [2] Landau, L. *The Classical Theory of Fields*; Pergamon (1975)
- [3] Kolb, E. & Turner, M. *The Early Universe*; Addison-Wesley Pub. Co. (1988)
- [4] Smoot, G. et al.: *Ap.J.* **396**(1992):11, **401**(1992):1
- [5] Guth, A.: *Phys.Rev.* **D23**(1981): 347-356
- [6] Linde, A. D.: *Phys.Lett.* **129B**(1983): 177-181
- [7] Goldwirth, D. & Piran, T.: *Phys.Rep.* **214**(1992): 223-292
- [8] Bedaque, P.: *Sobrevivência do Modelo Inflacionário: Novas Estratégias*; Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo (1988)
Albrecht, A., Brandenberger, R. & Matzner, R.: *Phys.Rev.* **D32**(1985): 1280-1289
- [9] Coleman, S. & Weinberg, E. *Phys.Rev.* **D7**(1973): 1888-1910
- [10] Linde, A. D.: *Phys.Lett.* **108B**(1982): 389-393
Albrecht, A. & Steinhardt, P.: *Phys.Rev.Lett.* **48**(1982): 1220-1223
- [11] Pi, S. Y.: *Phys.Rev.Lett* **52**(1984): 1725
Shahfi, Q. & Vilenkin, A.: *Phys.Rev.Lett.* **52**(1984): 691
Holman, R., Ramond, P., & Ross, G.: *Phys.Lett.* **B137**(1984): 343

- [12] Linde, A. D. *Particle Physics and Inflationary Cosmology*; Harwood (1990)
- [13] Mukhanov, V., Feldman, H. & Brandenberger, R.: Phys.Rep. **215**(1992): 203-333
- [14] Chernikov, N. & Tagirov, E.: An.Inst.Henry Poincaré **IX**(1968): 109-141
Zumino, B. in *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory*, MIT Press, ed. S. Deser (1970)
- [15] Futamase, T. & Maeda, K.: Phys.Rev. **D39**(1989):399-404
- [16] Abbot, L.: Nucl.Phys. **B185**(1981): 233
- [17] Linde, A. D.: Phys.Lett **B202**(1988): 194-197
- [18] Bekenstein, D.: Ann.Phys. **82**(1974): 535-547
Accioly, A. & Wichosky, U.: Class.Q.Grav. **7**(1990):1139-1141
- [19] Richtemeyer, R. & Morton, K. W. *Difference Methods for Initial Value Problems*; Interscience Pub. (1967)

Apêndice A

Vamos provar que

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = - \left[\frac{1}{2} (\nabla_\mu \nabla_\nu + \nabla_\nu \nabla_\mu) - g_{\mu\nu} \square \right] \delta g^{\mu\nu},$$

partindo da equação

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \partial_\alpha \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - g^{\mu\alpha} \partial_\alpha \delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu.$$

Para esse fim devemos computar as variações de $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$:

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} (\partial_\mu \delta g_{\sigma\nu} + \partial_\nu \delta g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma \delta g_{\mu\nu}).$$

Agora, temos as derivadas de $\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha$:

$$\begin{aligned} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha &= \frac{1}{2} \partial_\alpha g^{\sigma\sigma} (\partial_\mu \delta g_{\sigma\nu} + \partial_\nu \delta g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma \delta g_{\mu\nu}) + \\ &+ \frac{1}{2} g^{\sigma\sigma} (\partial_\alpha \partial_\mu \delta g_{\sigma\nu} + \partial_\alpha \partial_\nu \delta g_{\sigma\mu} - \partial_\alpha \partial_\sigma \delta g_{\mu\nu}). \end{aligned}$$

Substituindo na expressão original obtemos:

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= \left(\frac{1}{2} \partial_\alpha g^{\sigma\sigma} g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\alpha g^{\sigma\nu} g^{\alpha\mu} \right) (\partial_\mu \delta g_{\sigma\nu} + \partial_\nu \delta g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma \delta g_{\mu\nu}) + \\ &+ \left(\frac{1}{2} g^{\sigma\sigma} g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\sigma\nu} g^{\alpha\mu} \right) (\nabla_\alpha \nabla_\mu \delta g_{\sigma\nu} + \nabla_\alpha \nabla_\nu \delta g_{\sigma\mu} - \nabla_\alpha \nabla_\sigma \delta g_{\mu\nu}). \end{aligned}$$

É fácil ver que a primeira expressão do lado direito se anula. A segunda expressão dará origem por um lado ao termo do d'alambertiano:

$$\frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} g^{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\sigma \delta g_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^{\sigma\nu} g^{\alpha\mu} \nabla_\alpha \nabla_\mu \delta g_{\sigma\nu} = -g^{\mu\nu} \square \delta g_{\mu\nu},$$

e por outro ao termo com as derivadas covariantes:

$$\int dV \sqrt{-g} \frac{2}{\xi} \phi^2 \delta R^{\mu\nu} = - \int dV \sqrt{-g} \left[\frac{2}{1} (\Delta^\mu \Delta^\nu + \Delta^\nu \Delta^\mu) - g^{\mu\nu} \square \right] \frac{2}{\xi} \phi^2.$$

Integrando por partes obtemos então o resultado esperado,

$$\frac{2}{1} g^{\alpha\mu} g^{\mu\nu} \Delta^\alpha \Delta^\mu \Delta^\nu g^{\sigma\mu} - \frac{2}{1} g^{\sigma\nu} g^{\alpha\mu} \Delta^\alpha \Delta^\mu \Delta^\nu g^{\sigma\mu} = - \frac{2}{1} (\Delta^\mu \Delta^\nu + \Delta^\nu \Delta^\mu) \delta g^{\mu\nu} - \frac{2}{1} g^{\alpha\mu} g^{\mu\nu} \Delta^\alpha \Delta^\mu \Delta^\nu g^{\sigma\mu} + \frac{2}{1} g^{\sigma\nu} g^{\alpha\mu} \Delta^\alpha \Delta^\mu \Delta^\nu g^{\sigma\mu} -$$

Apêndice B

Queremos demonstrar que o traço do tensor de energia-momento definido por

$$T_{\mu\nu} = \gamma(\varphi) [t_{\mu\nu}(\varphi) + t_{\mu\nu}^{(m)}] ,$$

com

$$\begin{aligned} t_{\mu\nu}(\varphi) = & \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{1}{6} (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) \varphi^2 - \\ & - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial^\alpha \varphi \partial_\alpha \varphi - \frac{\lambda}{4} \varphi^4 \right) \end{aligned}$$

e

$$t_{\mu\nu}^{(m)} = \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m$$

se conserva e tem traço nulo.

Traço Nulo

Vamos mostrar que $T = T^\mu{}_\mu = 0$, se o tensor de energia-momento da matéria se anular.

Temos então que

$$T = T^\mu{}_\mu = \gamma(\varphi) \left[-\partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi + \frac{1}{2} \square \varphi^2 + \lambda \varphi^4 \right] .$$

Mas, como

$$\frac{1}{2} \square \varphi^2 = \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi + 2\varphi \square \varphi ,$$

podemos simplificar a expressão acima e obter

$$T = \gamma(\varphi) [\varphi \square \varphi + \lambda \varphi^4]$$

Agora precisamos das equações de movimento de φ ,

$$\square \varphi + \lambda \varphi^3 - \frac{R\varphi}{6} = 0.$$

Substituindo-a na expressão para T , obtemos:

$$T = \gamma(\varphi) \frac{R\varphi^2}{6}.$$

Como

$$R = -8\pi T,$$

obtemos o resultado desejado,

$$R = T = 0.$$

Conservação de T^μ_ν

Vamos verificar se $\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T^\mu_\nu &= [\nabla_\mu 8\pi\gamma(\varphi)] [t^\mu_\nu(\varphi) + t^\mu_\nu{}^{(m)}] + \\ &+ 8\pi\gamma(\varphi) [\nabla_\mu t^\mu_\nu(\varphi) + \nabla_\mu t^\mu_\nu{}^{(m)}]. \end{aligned}$$

Usando que

$$\nabla_\mu \gamma(\varphi) = \partial_\mu \gamma(\varphi) = \frac{8\pi}{3} \varphi \partial_\mu \varphi \gamma(\varphi)^{-2} e$$

$$\nabla_\mu t^\mu_\nu{}^{(m)} = [eqs. de movimento da mat.] \partial_\nu \phi = 0$$

temos então que

$$\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = \frac{8\pi}{3} \varphi \partial_\mu \varphi \gamma(\varphi) T^\mu{}_\nu + 8\pi \gamma(\varphi) \nabla_\mu t^\mu{}_\nu(\varphi).$$

Vamos calcular agora o último termo:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu t^\mu{}_\nu(\varphi) &= \nabla_\mu \left[\partial^\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{1}{6} \nabla^\mu \nabla_\nu \varphi^2 + \frac{1}{6} \delta^\mu{}_\nu \square \varphi^2 - \right. \\ &\quad \left. - \delta^\mu{}_\nu \left(\frac{1}{2} \partial^\alpha \varphi \partial_\alpha \varphi - \frac{\lambda}{4} \varphi^4 \right) \right] \\ &= \partial^2 \varphi \partial_\nu \varphi + \partial^\mu \varphi \nabla_\mu \nabla_\nu \varphi - \frac{1}{6} \square \nabla_\nu \varphi^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} \nabla_\nu \square \varphi^2 - \nabla_\nu \nabla_\mu \varphi \nabla^\mu \varphi + \lambda \varphi^3 \nabla_\nu \varphi \\ &= \square \varphi \partial_\nu \varphi + \frac{1}{6} (\nabla^\mu \nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu \nabla^\mu) \varphi + \lambda \varphi^3 \partial_\nu \varphi. \end{aligned}$$

Usando que, para qualquer A^μ vale a identidade

$$(\nabla_\nu \nabla_\mu - \nabla_\mu \nabla_\nu) A^\nu = -R_{\mu\nu} A^\nu,$$

obtemos finalmente que

$$\nabla_\mu t^\mu{}_\nu(\varphi) = \square \varphi \partial_\nu \varphi + \lambda \varphi^3 \partial_\nu \varphi - \frac{1}{3} \varphi R_{\mu\nu} \partial^\mu \varphi.$$

Basta agora utilizar as equações de Einstein para mostrar o resultado desejado,

$$\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = 8\pi \gamma(\varphi) \left(\square \varphi + \lambda \varphi^3 - \frac{1}{6} R \varphi \right) \partial_\nu \varphi,$$

que é zero pois o termo entre parênteses é a equação de movimento para o campo escalar conformemente acoplado.

Apêndice C

Vamos por fim verificar se as equações , 2.15 e 2.14 são consistentes com a equação de movimento de φ (a presença da matéria aqui é irrelevante, portanto a omitiremos). Temos:

$$H = 8\pi\xi\gamma(\varphi)\varphi\dot{\varphi} + \sqrt{(8\pi\xi\gamma(\varphi)\varphi\dot{\varphi})^2 + \frac{8\pi}{3}\gamma(\varphi)\left[\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \lambda\varphi^4\right]},$$

$$\dot{H} = -4\pi\gamma(\varphi)\left[(1 - 2\xi)\dot{\varphi}^2 - 2\xi\varphi\ddot{\varphi} + 2\xi H\varphi\dot{\varphi}\right] e$$

$$\square\varphi + \lambda\varphi^3 - \xi R\varphi = 0.$$

Da 1ª equação vem que:

$$2H\dot{H} = \frac{8\pi}{3}\gamma(\varphi)\left[H^2\varphi\dot{\varphi} + \ddot{\varphi}\dot{\varphi} + \lambda\varphi^3\dot{\varphi} + \dot{H}\varphi\dot{\varphi} + H\dot{\varphi}^2 + H\varphi\ddot{\varphi}\right].$$

Usando a equação de movimento para φ homogêneo e a derivada de $\gamma(\varphi)$,

$$\dot{\gamma}(\varphi) = \frac{8\pi}{3}\varphi\dot{\varphi}\gamma(\varphi)^2$$

obtemos que

$$\dot{H} = -4\pi\gamma(\varphi)\left[(1 - 2\xi)\dot{\varphi}^2 - 2\xi\varphi\ddot{\varphi} + 2\xi H\varphi\dot{\varphi}\right],$$

como desejávamos.

Apêndice D

Neste apêndice vamos comentar os métodos utilizados nas análises numéricas apresentadas.

D.1 Caso minimamente acoplado; equação inhomogênea

A equação com que nos defrontamos é a equação de Klein-Gordon inhomogênea em espaço curvo,

$$\square\varphi + V'(\varphi) = \ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} - \frac{1}{a^2}\nabla^2\varphi + V'(\varphi) = 0.$$

O caminho natural é discretizar a equação acima e tratar eventuais instabilidades que apareçam ¹. Explícitamente, fizemos a seguinte escolha:

$$\ddot{\varphi} \longrightarrow \frac{1}{\Delta t^2} (\varphi_x^{t+\Delta t} - 2\varphi_x^t + \varphi_x^{t-\Delta t}) ;$$

$$3H\dot{\varphi} \longrightarrow \frac{3H(t)}{2\Delta t} (\varphi_x^{t+\Delta t} - \varphi_x^{t-\Delta t}) ;$$

$$\nabla^2\varphi \longrightarrow \varphi_{x+\Delta x}^t - 2\varphi_x^t + \varphi_{x-\Delta x}^t.$$

Agora basta isolar $\varphi_x^{t+\Delta t}$ e, uma vez selecionada uma certa condição inicial φ_x^t teremos um método que, a menos de problemas de instabilidade, determinará a evolução do sistema.

Problemas de instabilidade com efeito aparecem na propagação descrita acima, e a razão é muito simples: ao isolar $\varphi_x^{t+\Delta t}$ obtemos que o termo inhomogêneo (o laplaciano), que é apenas uma diferença de φ entre dois pontos, aparece multiplicado por

¹Para maiores detalhes, ver [8]

$$\Gamma = \frac{\Delta t^2}{a(t)^2 \Delta x^2}.$$

Portanto, se há alguma irregularidade na função (advinda de um arredondamento mal feito, ou então de condições iniciais muito irregulares) tal descontinuidade crescerá rapidamente a cada nova iteração.

Há duas maneiras de resolver o problema: desenvolver um algoritmo numérico estável, ou então simplesmente não analisar os casos onde aparecem as instabilidades. Para o primeiro método remetemos o leitor às referências [8] e [19]. Como o sistema acima foi usado com fins puramente ilustrativos, usamos o segundo método: escolhemos como condição inicial uma função bem arredondada, e cuidamos para que Γ fosse sempre muito menor que 1 (fazendo Δt muito pequeno apenas no início da simulação, já que a longo prazo a dependência em $a(t)^2$ suprime o termo). Desta maneira evitamos uma longa e complexa seção dedicada a encontrar um algoritmo estável para o sistema, e não obstante permanecemos com uma situação em que todas as características que desejávamos expor aparecem.

D.2 Caso conformemente acoplado: equação homogênea

Como já comentamos na seção anterior, a principal fonte de instabilidades no tipo de equação que tratamos aparece no caso inhomogêneo. Como na análise do caso conformemente acoplado e do modelo de Linde assumimos que as inhomogeneidades não se comportariam de modo fundamentalmente diferente, passamos a analisar somente o caso homogêneo e portanto evitamos aqueles problemas.

As equações discretizadas (ou o algoritmo ²) que usamos foram:

$$\dot{\varphi}_{t+\Delta t} = \dot{\varphi}_t + \ddot{\varphi}_t \Delta t,$$

$$\dot{\phi}_{t+\Delta t} = \dot{\phi}_t + \ddot{\phi}_t \Delta t,$$

²Conhecido na literatura como *Método de Euler* ou *Runge-Kutta de primeira ordem*

$$\varphi_{t+\Delta t} = \varphi_t + \dot{\varphi}_t \Delta t,$$

$$\phi_{t+\Delta t} = \phi_t + \dot{\phi}_t \Delta t,$$

$$H_{t+\Delta t} = H(\varphi_{t+\Delta t}, \dot{\varphi}_{t+\Delta t}, \phi_{t+\Delta t}, \dot{\phi}_{t+\Delta t}),$$

$$\ddot{\varphi}_{t+\Delta t} = -3H\dot{\varphi}_{t+\Delta t} - \lambda_\varphi \varphi_{t+\Delta t}^3 + \frac{R_{t+\Delta t} \varphi_{t+\Delta t}}{6},$$

$$\ddot{\phi}_{t+\Delta t} = -3H\dot{\phi}_{t+\Delta t} - V_0'(\phi_{t+\Delta t}).$$

Com tal esquema basta selecionar uma condição inicial e propagá-la no tempo, seguindo a ordem das equações acima e retornando à primeira uma vez terminado o ciclo. Note-se que fazemos todo o U evoluir, isto é, não assumimos nenhum *background*.

Como não encontramos instabilidade (ou hipersensibilidade às condições iniciais) manifesta em nenhum caso analisado, podemos tão somente expor argumentos em favor de nosso esquema.

O primeiro diz respeito ao conjunto de condições iniciais aos quais ele se aplica com sucesso. Nossa liberdade de escolha das condições iniciais nos permite apenas variar o valor de φ , ϕ , $\dot{\varphi}$ e $\dot{\phi}$, e estas portanto constituem nosso domínio (lembrando sempre que $\varphi < \varphi_c$). Para todos os pontos do domínio analisados não houve um só caso de interseção de soluções (isto é, nosso esquema de propagação é um mapeamento biunívoco do domínio no espaço das soluções). A única região na qual poderia surgir algum problema, aquela próxima ao valor crítico de φ , foi exaustivamente investigada, e para isso usamos o teorema de Be-kenstein [18]. Esse teorema diz que a cada solução de um campo escalar minimamente acoplado puro corresponde uma do caso conformemente acoplado. O mapeamento é, explicitamente,

$$\varphi_{conf} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \tanh \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \varphi_{min},$$

e uma transformação análoga para a métrica. Agora basta pegar uma das soluções do nosso esquema e verificar se estas conferem com as obtidas pelo teorema de Bekenstein. Com efeito, a identificação é plenamente satisfatória. Concluimos assim que nos limites: 1. de matéria rarefeita (quando desprezamos ϕ) e 2. quando $\varphi \rightarrow \varphi_c$, nosso esquema é suficientemente preciso. Ou seja, pelo menos no início de nossas simulações (quando o efeito dominante é o do campo escalar conformemente acoplado) podemos confiar nas soluções obtidas pelo esquema numérico acima.

O segundo argumento trata do comportamento assintótico ($t \rightarrow \infty$) de nossas soluções quando só consideramos o caso minimamente acoplado (Inflação Caótica). Esperamos que o período de de-Sitter decaia a longo prazo, dando lugar a algum outro regime determinado pela matéria pós-inflacionária. Ou seja, para tempos grandes a curvatura deve ir a zero, assim como H . Esse é o comportamento conhecido no modelo caótico, e confiamos que ele se repita quando retiramos o campo φ das equações. Verificamos o comportamento esperado, o que confere credibilidade ao algoritmo para tempos grandes.

O terceiro argumento depende dos anteriores. O sistema misto (onde φ e ϕ se fazem presentes) deve refletir cada uma de suas partes, em diversos limites. Podemos então, conferindo esses comportamentos, confirmar a validade de nossa propagação. Como nosso modelo é claramente composto por duas fases quase desconexas, cada uma das quais se comportando como esperado (veja, por exemplo, a figura 3.2), podemos confiar em que o comportamento global do sistema misto é bem aproximado pelo esquema acima.

O quarto argumento é puramente operacional: o passo Δt pode ser feito tão pequeno quanto se queira, até o limite em que o algoritmo reproduz exatamente o comportamento analítico do sistema. Na maioria dos esquemas que apresentam instabilidades, estas podem ser adiadas mediante uma diminuição do passo. Essa diminuição introduz portanto uma alteração fundamental no sistema, pois confere mais estabilidade às soluções. Num esquema sem instabilidades, uma diminuição do passo que não resulta em mudança essencial nas soluções significa que, dentro do intervalo de tempo observado, as soluções numéricas estão essencialmente corretas. No nosso esquema verificamos que, a partir de um certo passo mínimo, para o conjunto de condições iniciais não havia

mudança visível das soluções . A partir desse fato, decidimos utilizar um passo cem vezes menor que aquele mínimo.

Por fim, a quinta razão pela qual confiamos no método numérico é que podemos usar a equação de Einstein de 2ª ordem 2.14 (que havíamos eliminado do conjunto de equações) como uma condição de consistência para checar nossos resultados. Em todas as simulações que fizemos a diferença entre as quantidades H e $\dot{H}$ calculadas segundo as duas receitas (as equações de 1ª e 2ª ordens) foram apenas notadas no final dessas simulações , além de numericamente desprezíveis.

Concluimos portanto que o algoritmo acima, se não é o mais inteligente, pelo menos efetua uma aproximação muito boa do sistema com campos escalares minimamente e conformemente acoplados.