Universidade de São Paulo

Instituto de Física

FINPE

Algumas Aplicações de Campos Escalares em Cosmologia

Jackson Max Furtunato Maia

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Gil C. Marques

Prof. Dr. Oscar J. P. Éboli

Prof. Dr. Adolfo Maia Jr.

Prof. Dr. Reuven Opher

Prof. Dr. Rudnei O. Ramos

glaxo 12/01

Tese de doutorado
submetida ao Instituto
de Física da Universidade
de São Paulo.

SBI-IFUSP

Orientadores:

Prof. Dr. Gil da Costa Marques

Prof. Dr. José Ademir Sales de Lima

São Paulo - 2000

Prof. Armando Corbani Ferraz
Presidente da Comissão de Pós Graduação

523.1
M217a
D
ex. 1

FICHA CATALOGRÁFICA

**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Maia, Jackson Max Furtunato

Algumas Aplicações de Campos Escalares em
Cosmologia. São Paulo, 2000.

Tese (Doutoramento) - Universidade de São Paulo.
Instituto de Física - Departamento de Física Experimental

Orientador: Prof. Dr. Gil da Costa Marques
Área de Concentração: Física de Partículas Elementares

Unitermos: 1. Cosmologia; 2. Campo Escalar;
3. Gravitação; 4. Teoria de Cordas.

USP/IF/SBI-001/2000

Aos meus filhos Ariel e
Amanda, que me dão o mo-
tivo.

Agradecimentos:

- aos meus co-orientadores Prof. Gil da Costa Marques, pela orientação, pela liberdade e confiança depositada e por me abrir novos caminhos; Prof. José Ademir Sales de Lima, pelo exemplo de trabalho, generosidade intelectual e paciência;
- Prof. Robert Brandenberger, pelo exemplo e oportunidade;
- a Carenina, Ariel e Amanda pela inspiração, pelo amor e pela imensa felicidade, novidade e sentimento de completude que trouxeram para a minha vida;
- aos meus pais, por toda a liberdade e apoio irrestrito;
- a Ettore Baldini Neto, pela amizade, hospedagem, revisão do texto e traquillidade transmitida nos estágios finais deste trabalho;
- a Oscar Bordon Alvares, pela ajuda no início do doutorado;
- a Richard Easther, pelas conversas e dicas durante a nossa colaboração;
- a Eduardo, Ceça, Katiane, Ana, Fátima e Denis, minha família estendida, que tantas vezes partilharam conosco o cuidado com as crianças, em particular a Catarina, sempre presente;
- a Jonatan e Amarildes e Adolfo, Goreti, Igor, Aron e Bia, pelas acolhidas;
- aos vários e preciosos amigos que fiz pelos caminhos, principalmente os que de alguma forma participaram deste doutorado: Alexandre Gadelha, os Arnaldos (Gammal e Maccarone), Francisco Durães, os Franks (Antonucci e Smith), Isabela Porto, Jaime Merino, Joel Pupin, Mara Varela (em particular, pela revisão do estilo), Pedrag Stojkov, Raquel de Carvalho, Raul Abramo, Shan-Wen Tsai, Varese Timóteo e Wendy Sigle;

- aos colegas do FINPE em São Paulo, do grupo de altas energias em Providence, e do grupo de astrofísica em Natal, pelas atmosferas estimulantes;
- aos funcionários e funcionárias que mantiveram as estruturas necessárias para um bom andamento do trabalho e, em particular, a Cláudia Barone, que várias vezes me salvou das ameaças da selva burocrática;
- à CAPES e ao CNPq pelas bolsas concedidas, a aos contribuintes que sustentam a academia contemplativa.

Resumo

Três aplicações de campos escalares a cosmologias homogêneas e isotrópicas são apresentadas, com motivações e resultados diversos.

No primeiro caso, uma técnica de multiplicadores de Lagrange é usada para estabelecer vínculos físicos sobre os invariantes de curvatura possivelmente presentes na ação efetiva de baixas energias da teoria de cordas. Um modelo não-singular é obtido em um caso particular, sugerindo uma possível correção na ação da gravitação compatível com as simetrias das cosmologias de cordas.

Numa outra abordagem, é proposto um modelo fenomenológico não-singular baseado no decaimento do termo cosmológico. O modelo tem como principal característica uma passagem suave entre uma fase inflacionária do tipo de Sitter e uma fase com dinâmica do tipo Friedmann-Robertson-Walker.

Como último exemplo, é considerado um campo escalar acoplado termicamente ao fluido cósmico. Adotando um termo dissipativo específico, mas usual, é definido um espaço de parâmetros contendo as cosmologias com campos escalares mais comuns e o modelo padrão como casos particulares. As condições de rolamento lento são obtidas e é apresentado um modelo cosmológico simples para exemplificar o potencial heurístico dos parâmetros propostos.

HA

Abstract

Three applications of scalar fields to homogeneous and isotropic cosmologies are presented, with distinct motivations and results.

In the first case, a Lagrange multiplier technique is used in order to set physical constraints on the curvature invariants possibly present in the low energy effective action of string theory. In a particular case, a nonsingular model is obtained, suggesting a possible correction in the gravity action which is compatible to the symmetries of string cosmology.

In another approach, a nonsingular model based on the decay of the cosmological term is proposed. The model has as a major feature a smooth transition between an inflationary de Sitter phase and a phase with FRW-type dynamics.

As a last example, a scalar field thermally coupled to the cosmic fluid is considered. By adopting a specific but usual dissipative term, it is defined a parameter space encompassing the most common scalar field cosmologies, as well as the standard model, as limiting cases. Slow roll conditions are obtained and it is presented a simple toy model to illustrate the heuristic potential of the proposed parameters.

Conteúdo

Resumo	vi
Abstract	viii
Lista de figuras	xii
Notações e convenções	xiv
 Apresentação	 1
 1 O Big Bang e seus problemas	 5
1.1 Um pouco de história	5
1.2 O modelo cosmológico padrão	10
1.3 Situação observacional	15
1.4 Problemas do modelo padrão	20
 2 Campos escalares e inflação	 23
2.1 Introdução	23
2.2 Transições de fase	25
2.3 Inflação	28
2.4 Soluções para os problemas do modelo padrão	30
2.5 Alguns tipos de inflação	31
2.6 Problemas da inflação	33
 3 Cosmologia dilatônica não-singular	 35

3.1	Introdução	35
3.2	Modelos não-singulares	37
3.3	Ação e equações de movimento	40
3.4	Diagramas de fase das soluções sem o dilaton	42
3.5	Efeitos do dilaton	47
3.6	Conclusão	50
4	Cosmologias com decaimento do vácuo	53
4.1	Termo cosmológico variável	53
4.2	Um caso geral	58
4.3	Modelo deflacionário não-singular	62
4.4	Consequências observacionais	65
4.5	Discussão	67
5	Campos escalares acoplados	71
5.1	Introdução	71
5.2	Equações básicas	73
5.3	Inflação morna: um exemplo	75
5.4	Inflação morna generalizada	77
5.5	Dissipação e condições de rolamento lento	79
5.6	Um modelo simples	81
5.7	Conclusão	85
	Considerações finais	87
	Apêndice A	89
	Apêndice B	91
	Referências	93

Lista de Figuras

3.1		44
3.2		48
5.1		79

Notações e convenções

- Assinatura da métrica: (+ - - -)
- Sinal do tensor de Riemann: $+R^\mu_{\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^\mu_{\nu\beta} - \partial_\beta \Gamma^\mu_{\nu\alpha} + \Gamma^\mu_{\sigma\alpha} \Gamma^\sigma_{\nu\beta} - \Gamma^\mu_{\sigma\beta} \Gamma^\sigma_{\nu\alpha}$
- Os índices gregos variam de 0 a 3. Índices repetidos obedecem a convenção de Einstein.
- Derivada parcial: $\frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} \equiv \phi_{,\alpha}$
- Derivada covariante: $A^\alpha_{;\beta} = A^\alpha_{,\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\lambda} A^\lambda$
- Usaremos aqui unidades naturais, ou seja, $\hbar = c = k_B = 1$, a menos que unidades de outro sistema sejam explicitamente escritas por conveniência ou tradição. Em unidades naturais, a dimensão fundamental é a energia, de modo que

$$[\text{energia}] = [\text{massa}] = [\text{temperatura}] = [\text{comprimento}]^{-1} = [\text{tempo}]^{-1}$$

Como unidade de energia usaremos os múltiplos do elétron-volt (eV), particularmente o GeV:

$$1\text{GeV} = 1,60 \times 10^{-3}\text{erg} = 1,26 \times 10^{33}\text{K} = 1,78 \times 10^{-24}\text{g},$$

de modo que a unidade da densidade de energia, extensamente utilizada no texto, é o GeV^4 : $1\text{GeV}^4 = 2,32 \times 10^{17}\text{g.cm}^{-3}$

- Quantidades de Planck: $r_{\text{pl}} \equiv (\hbar G/c^3)^{1/2} = 1,62 \times 10^{-33}\text{cm}$; $E_{\text{pl}} \equiv (\hbar c^5/G)^{1/2} = 1,22 \times 10^{19}\text{GeV}$; $m_{\text{pl}} \equiv (\hbar c/G)^{1/2} = 2,18 \times 10^{-5}\text{g}$; $\rho_{\text{pl}} \equiv c^5/\hbar G^2 = 2,22 \times 10^{76}\text{GeV}^4$; $t_{\text{pl}} \equiv (\hbar G/c^5)^{1/2} = 5,39 \times 10^{-44}\text{seg}$; $T_{\text{pl}} \equiv (\hbar c^5/k_B G)^{1/2} = 1,42 \times 10^{32}\text{K}$
- Ocasionalmente o megaparsec (Mpc) será usado como unidade de distância: $1\text{Mpc} = 3,26 \times 10^6\text{anos} - \text{luz} = 3,09 \times 10^{24}\text{cm}$

AX

Apresentação

A cosmologia atual passa por um intenso processo de reciclagem. Devido a novas observações, velhos e novos parâmetros cosmológicos estão sendo medidos com uma precisão sem precedentes e o espaço para especulação pura ou para a crença paradigmática vem ficando cada vez menor. A tendência histórica de seguir apenas o modelo mais simples e depois adicionar a este cadeias cada vez mais complexas de hipóteses esta dando lugar a outras práticas, nas quais novas hipóteses são consideradas à luz dos novos dados observacionais.

Tomando-se como exemplo o “paradigma” inflacionário: após mais de uma década de buscas, ainda não há qualquer teoria fundamental que justifique o inflaton (o campo escalar elementar supostamente responsável pela inflação). Já começa-se a pensar em mecanismos que possam, ou prover alguma outra forma de inflação que não seja fundamentada em campos escalares, ou resolver os problemas clássicos do modelo cosmológico padrão por vias não inflacionárias.

Um outro exemplo, talvez mais definitivo, é o relativo enfraquecimento de modelos baseados em defeitos topológicos como origem das sementes que geraram as estruturas em larga escala do universo. Após as observações das flutuações térmicas da radiação cósmica de fundo pelo satélite COBE (*Cosmic Background Explorer*) e outros experimentos em terra cada vez mais precisos, verificou-se que os espectros de perturbações previstos por modelos baseados em defeitos topológicos são de difícil compatibilidade com os últimos resultados observacionais.

Um último exemplo, desta vez não envolvendo o universo primitivo: há não muito

tempo, diversas observações eram interpretadas de modo a darem como certo que o termo cosmológico Λ era zero ou irrelevante. Tudo isso está tendo que ser revisto sob luz das novas observações de curvas de luminosidade das supernovas do tipo Ia (SNIa), que indicam que o universo está numa fase de expansão acelerada. Os dados observacionais revelaram-se compatíveis com a existência de um termo cosmológico que seria responsável por mais da metade da densidade de energia do universo atual. Como resultado, já há quem fale de um novo modelo padrão, desta vez incluindo a constante cosmológica.

Claro, não se quer dizer com isto que os modelos tradicionais devam ser descartados, mas é certo que este final de década tem testemunhado um crescimento de interesse em modelos novos, e a prática relativamente comum de desconsiderar prematuramente tudo o que não é pertinente à corrente dominante parece estar mudando. Se há espaço para explorar novas idéias, há também para pensar as antigas sob novos pontos de vista. É o que se tenta fazer nesta tese, na qual o campo escalar, já utilizado em inúmeras situações na cosmologia, é estudado em três modelos fenomenológicos, cada um com uma motivação diferente. O plano do trabalho é descrito a seguir.

No Capítulo 1, após um resumo histórico da cosmologia física, é introduzido o modelo padrão, seus sucessos e problemas. O Capítulo 2 trata do exemplo mais bem sucedido de aplicação de campos escalares em cosmologia: a inflação. Neste capítulo é dada mais ênfase às consequências dinâmicas gerais dos modelos inflacionários do que a motivações do ponto de vista da teoria de campos. Estes dois capítulos constituem a primeira parte, de contextualização, desta tese.

A segunda parte trata-se de aplicações de campos escalares a modelos fenomenológicos nos quais são tentadas soluções ou indicações de novos tratamentos para problemas em aberto do modelo cosmológico padrão. Como ocorre em qualquer abordagem fenomenológica, a expectativa é de se obter fundamentos para a construção de teorias mais completas, baseadas em primeiros princípios.

Dentre os velhos problemas ainda sem solução no contexto do modelo padrão, há o

problema da singularidade. A Relatividade Geral (RG) estabelece a seguinte relação:

$$(\text{geometria}) \ G^{\mu\nu} \propto T^{\mu\nu} \ (\text{conteúdo material}).$$

Os teoremas de Penrose e Hawking, demonstram a existência de singularidades para uma gama bastante ampla de condições na RG. A partir desses teoremas, considera-se que a teoria não pode ser válida nos instantes iniciais da formação do universo (para energias maiores do que a energia de Planck, E_{pl}).¹ Normalmente considera-se que ou algum mecanismo físico entra em ação para valores muito altos da curvatura do espaço-tempo, evitando assim as divergências na densidade de energia da matéria, ou se propõem correções na própria RG que previnam a ocorrência de singularidades. Nesta tese, apresentamos uma proposta de cada tipo, uma com termo cosmológico variável e outra inspirada pela ação efetiva de baixas energias das teorias de cordas fundamentais.

No Capítulo 3 a necessidade de prevenção da singularidade é usada como vínculo físico na construção de um modelo não-singular inspirado pelas simetrias presentes na teoria de cordas fundamentais, quando estudadas no domínio de baixas energias que caracterizam a cosmologia (no contexto das cordas fundamentais, isto significa abaixo da energia de Planck). O capítulo apresenta resultados originais publicados na Ref. [42].

No Capítulo 4 discutem-se modelos fenomenológicos com decaimento do vácuo, assunto que ultimamente vem levantando muito interesse, após a descoberta de que o universo está acelerando. A intenção desses modelos é fornecer indicações de solução para o problema da discrepância de dezenas de ordens de grandeza entre as estimativas teóricas da densidade de energia do vácuo e o seu valor observado hoje, um mistério usualmente conhecido como o problema da constante cosmológica. Os modelos apresentados no capítulo podem ter consequências tanto no universo primitivo, pois dependendo dos valores dos parâmetros fenomenológicos os modelos são não-singulares, quanto na dinâmica atual do universo, com o vácuo participando como componente da matéria escura. A base deste capítulo são as Refs. [63, 65, 66].

¹As definições das quantidades de Planck podem ser encontradas na p. ix acima.

Uma proposta alternativa e interessante de inflação é supor que o contato térmico do inflaton com os demais campos não se perde ao longo da expansão acelerada que caracteriza os cenários inflacionários. Modelos deste tipo, chamados de inflação morna (*warm inflation*) têm sido propostos como concorrentes dos modelos inflacionários mais consagrados. O Capítulo 5 traz uma análise de modelos com campos escalares acoplados baseada em um espaço de parâmetros convenientemente escolhido. Entendido como uma ferramenta no estudo das consequências dinâmicas de campos escalares com acoplamentos, o espaço de parâmetros foi usado para estabelecer um modelo simples, mas abrangente, que comporta dinâmicas compatíveis com a expansão acelerada descoberta com as observações das SNIa e sugere a possibilidade de conexão entre esses modelos acoplados e aqueles com decaimento do vácuo. A maior parte dos resultados deste capítulo foi publicada na Ref. [83].

Capítulo 1

O Big Bang e seus problemas

1.1 Um pouco de história

Em 1917, logo após completar a sua formulação da teoria da relatividade geral (TRG), Einstein inaugurou a era da cosmologia relativística ao publicar o artigo no qual as suas equações do campo gravitacional eram aplicadas pela primeira vez ao universo como um todo. Ele tinha três propósitos em mente ao formular o seu modelo cosmológico [1]: demonstrar que se poderia extrair da TRG uma descrição consistente do universo, algo em que a física newtoniana vinha falhando até então, descrever um universo estático, o que estava de acordo com as crenças da época, e mostrar que a TRG satisfazia o Princípio de Mach.

No modelo de Einstein o universo é entendido como um gás de galáxias, homogêneo e isotrópico em larga escala (Princípio Cosmológico). Além disso, é suposto que a energia cinética das partículas desse gás é desprezível com relação a sua energia inercial (massa de repouso), o que significa considerá-lo um fluido com pressão nula. No entanto, usando apenas estas hipóteses e partindo de um estado inicial estático, o fluido colapsaria em virtude da atração gravitacional. Este fato levou Einstein a introduzir um parâmetro livre nas equações de campo que, além de não violar a covariância da TRG, seria importante apenas em escalas cosmológicas. Tal parâmetro, denominado por ele de termo cosmológico

(Λ), proveria a força repulsiva necessária para equilibrar a atração gravitacional. Usando a condição de estaticidade como vínculo entre o termo cosmológico e a densidade de matéria, Einstein obteve uma relação de proporcionalidade entre a massa total do universo (característica global) e a sua geometria (que determina o movimento local de partículas de teste), sugerindo desta forma, a validade do Princípio de Mach.

Entretanto, poucos meses após a publicação do artigo de Einstein, de Sitter apresentou um modelo [2] com constante cosmológica no qual a densidade de matéria era zero. Neste modelo, partículas de teste se afastam entre si sob ação apenas da força repulsiva devida ao termo cosmológico. Se isto por um lado poderia ser considerado um primeiro exemplo de modelo cosmológico com expansão,¹ por outro, apresentava partículas de teste com propriedades inerciais em um espaço vazio, mostrando assim que a TRG admitia soluções que aparentemente violavam o Princípio de Mach.

Em 1922 e 1924 Friedmann [4] mostrou que as Equações de Einstein admitem soluções dinâmicas (algo que não era claro na época) e que a constante cosmológica não era imprescindível para a elaboração de um modelo do universo. Nesta mesma época Slipher [5] apresentou as primeiras evidências em favor de um desvio para o vermelho cosmológico. Tais resultados, juntamente com os de Hubble [6] em 1929, sugeriam um universo em expansão, descartando definitivamente o modelo estático. Isso fez com que o próprio Einstein propusesse a eliminação do termo cosmológico das equações de campo.

Na mesma época em que o criador renegava a criatura, Lemaître [7] a regenerava para apresentar um modelo também expansionista, com a densidade da matéria diferente de zero e que explicava o desvio para o vermelho, reunindo assim, as vantagens dos modelos de Einstein e de de Sitter. Neste modelo, o universo inicia a sua expansão a partir de uma singularidade até atingir uma fase quase estática (com propriedades semelhantes às do universo de Einstein), e então prossegue em expansão, se aproximando do modelo de de Sitter. No

¹De Sitter foi o primeiro a prever o desvio para o vermelho (*redshift*) do espectro da luz emitida por objetos astronômicos que se afastam devido à expansão do universo [3]

entanto, por causa da maior simplicidade do modelo de Friedmann, e pela ausência de fatos observacionais que a justificassem, foi-se perdendo o interesse pela constante cosmológica. De fato, a agitada história da constante cosmológica foi durante setenta anos a história das oscilações de preferência entre essas duas tendências, digamos, estéticas: a de manter, por completeza, o termo cosmológico nas equações da TRG, já que os dados observacionais não descartam essa possibilidade, e a de eliminá-lo, por simplicidade, se esses mesmos dados não o justificam.

Nas décadas de 30 e 40 houve um renascimento do interesse pelo termo cosmológico, quando ficou claro que as medidas disponíveis do parâmetro de Hubble ($H_0 \sim 550 \text{ km} \cdot \text{seg}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$) davam para o universo uma idade de apenas 2 bilhões de anos [8]. Isto é menos que a metade da estimativa de idade da Terra e, pior, as estimativas das idades das estrelas eram de 10-20 bilhões de anos. O modelo de Lemaître consegue acomodar este valor de H_0 com idades mais aceitáveis porque a duração da fase quase estática pode ser fixada tão longa quanto seja necessário, escolhendo-se convenientemente o valor de Λ .

Do lado teórico, essas incertezas nas observações deram espaço à grande controvérsia entre partidários dos modelos expansionistas tipo Friedmann, com origem singular e idade do universo finita (ou *Big Bang*, como foi chamado por G. Gamow) e defensores do modelo de estado estacionário. Esta linha propunha um universo em expansão, como requerido qualitativamente pelas observações de desvio para o vermelho, mas sem origem e com criação contínua de matéria, para compensar a diluição, mantendo assim a densidade de energia constante. Entretanto, mesmo esparsos e pouco confiáveis, os dados observacionais traziam problemas para ambos os modelos. Se por um lado as medidas de H_0 pareciam incompatíveis com modelos com origem singular, a cosmologia de estado estacionário tinha dificuldades para explicar as abundâncias de Hélio nas estrelas [9]. Na década de 50, com as observações do recém contruído telescópio do Monte Palomar, foi verificado que as estimativas de H_0 estavam superestimadas em quase uma ordem de grandeza, eliminando o embaraço da idade do universo para os defensores do modelo de Friedmann. É claro, isto

de modo algum resolveu a controvérsia.

Uma resolução para o impasse começou a ser delineada com os estudos das consequências da termodinâmica em cosmologia, iniciados por Gamow e colaboradores [10]. Ao tentarem explicar uma origem *cosmológica* para o Hélio observado nas estrelas, Gamow *et al.* supuseram um universo primordial extremamente quente e denso de modo que este pudesse ser considerado um corpo negro em equilíbrio, com temperatura suficiente para provocar a fusão dos elementos leves de acordo com a física nuclear conhecida na época. Esta nova abordagem termodinâmica levou ao estabelecimento de mais duas consequências observáveis (e efetivamente observadas) do *Big Bang* que sustentam a visão atual do universo: a radiação cósmica de fundo com temperatura de 3K e a nucleossíntese primordial com cálculo das abundâncias dos elementos leves observadas em estrelas (principalmente as mais antigas). O crédito, porém, não foi para Gamow, russo, vivendo nos Estados Unidos exatamente na época do macartismo mais exagerado [9]. Foi apenas na década de 60 que esta linha termodinâmica foi adotada por Dicke, Peebles e colaboradores, que chegaram a conclusões semelhantes às do grupo de Gamow e estavam até preparando um experimento para medir a radiação de fundo quando esta foi observada acidentalmente por A. A. Penzias e R. W. Wilson, em 1965 [11]. Restou a Dicke *et al.* dar a interpretação teórica destas medidas [12]. Diferentemente do que aconteceu com o grupo de Gamow, este resultado foi rapidamente aceito e, poucos anos depois, cálculos (numéricos) mais precisos das abundâncias dos elementos leves foram realizados [13], confirmando ainda mais o *Big Bang* como a única descrição aceitável do universo. Em menos de dez anos após a descoberta da radiação cósmica de fundo, este modelo já era chamado de “modelo padrão” da cosmologia, expressão importada da física de partículas e popularizada por S. Weinberg no seu livro-texto sobre gravitação e cosmologia [8].

Paralelamente às disputas sobre quais modelos descreveriam o universo, uma outra vertente foi-se consolidando: o estudo da evolução de perturbações de densidade submetidas à instabilidade gravitacional até a formação das galáxias e estruturas em larga escala no

universo atual. Este tema foi praticamente dominante em cosmologia ao longo da década de 70, juntamente com o estudo da era da recombinação (período durante o qual a radiação de fundo perdeu o acoplamento térmico com os núcleos de Hidrogênio, permitindo a formação de átomos). Esta é uma das áreas de pesquisa mais ativas e desenvolvidas (principalmente do ponto de vista observacional) da cosmologia atual, mas na época ainda não haviam propostas consistentes para a origem das perturbações de densidade, algo difícil de justificar num universo cuja homogeneidade é dada como condição inicial.

Durante os anos 80, a cosmologia foi praticamente dominada por aplicações da física de partículas e teorias de campo no domínio cosmológico. O maior resultado deste período foi a inflação, com suas muitas versões, que resolveu alguns dos problemas do modelo padrão. Dentre eles o mais importante, o da origem das flutuações de densidade a partir das quais teriam se formado as galáxias. A inflação gera naturalmente, através de flutuações quânticas do campo escalar que a dirige, o espectro de perturbações de densidade que servem de sementes para as estruturas observadas. Também nessa década o estudo da formação de estruturas em larga escala foi refinado, com a inclusão de defeitos topológicos (surgidos das transições de fase sofridas pelos campos quânticos ao longo da expansão e resfriamento do universo) e a introdução de modelos com matéria escura não bariônica. Outros resultados importantes do período são os modelos de bariogênese e o uso da cosmologia como "laboratório" de teorias de altas energias, limitando parâmetros livres da física de partículas tais como a massa e o número de tipos de neutrinos, por exemplo. Um bom resumo do que foi feito nessa interface entre cosmologia e teoria de campos e/ou física de partículas pode ser encontrado na Ref. [14].

Mesmo com todo o interesse levantado pelas aplicações cosmológicas das teorias de campos, os anos 90 revelaram-se muito mais excitantes. Esta tem sido uma década de experimentos e observações cruciais que têm ajudado a resolver várias das dúvidas e pendências que persistiam desde os primórdios da cosmologia. Entre a imensa quantidade de resultados observacionais destacam-se: as missões para determinação da distribuição tridimensional

das estruturas cosmológicas, as medidas das inhomogeneidades na radiação de fundo (previstas no contexto do modelo padrão) [19], as medidas da distribuição de velocidades peculiares (movimentos locais, superpostos à expansão de Hubble) e, nos últimos dois anos, as medidas de luminosidade de supernovas do tipo Ia [15] (as quais, a propósito, reabilitaram mais uma vez o termo cosmológico). Estes resultados, bem como uma pequena revisão dos modelos inflacionários serão melhor discutidos adiante.

Diz a lenda que um físico famoso se queixava que a astrofísica estava sempre em dúvida, mas nunca em erro. Ao longo desta última década este ponto de vista teria que ser revisado, pois os novos projetos observacionais trouxeram uma nova e excitante era para a cosmologia. Não é muito otimismo supor que no futuro próximo teorias e modelos poderão ser falseados aos blocos, para cada novo satélite de observação que seja posto em órbita. Provavelmente o espaço para a especulação pura ficará mais reduzido, mas poderá haver também a necessidade de refinamentos de velhos modelos e da proposição de novas alternativas.

1.2 O modelo cosmológico padrão

Os modelos apresentados e/ou propostos no âmbito desta tese estão baseados na hipótese do Princípio Cosmológico² e, na maioria dos casos, nas equações de Einstein para o campo gravitacional, ou TRG. No Capítulo 3, entretanto, serão aplicadas extensões da TRG e isto será explicitado no momento oportuno.

A consequência fundamental do Princípio Cosmológico é que a geometria do espaço-

²A afirmação de que o universo é homogêneo em larga escala não é trivial, do ponto de vista observacional. Até recentemente, a única evidência direta em favor do Princípio Cosmológico era a isotropia da radiação cósmica de fundo. As primeiras medidas de homogeneidade em termos da distribuição da matéria visível foram anunciadas apenas em 1992, quando foi indicada a ausência de estruturas em escalas maiores do que 100 Mpc, cerca de 2% do universo observável. Uma discussão detalhada de medidas deste tipo, bem como uma lista de referências relevantes podem ser encontradas, por exemplo, na Seção 3 da Ref. [16].

tempo tem seções espaciais homogêneas e isotrópicas e pode ser descrita pelo elemento de linha de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (1.1)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico, $a(t)$ é o fator de escala cósmico, uma função a ser determinada pelas equações do campo gravitacional, e a constante k é o parâmetro de curvatura da seção espacial. Com uma escolha apropriada de coordenadas, este parâmetro pode ser normalizado para os valores 0, ± 1 , denotando espaços planos, com curvatura positiva (fechados) ou negativa (abertos), respectivamente. A universos cuja geometria é descrita por (1.1) está associado um referencial privilegiado, no qual os observadores têm coordenadas (r, θ, ϕ) fixas, ou seja, a velocidade peculiar dos elementos de volume do fluido é nula (coordenadas comóveis). Além disso, todas as grandezas só podem depender da coordenada t , que mede o tempo próprio dos observadores comóveis.

A dinâmica dos modelos cosmológicos, descrita pela evolução temporal do fator de escala $a(t)$, é dependente das propriedades do fluido que preenche o universo e da teoria de gravitação empregada. No caso da TRG, o acoplamento entre a geometria do modelo e a distribuição de massa-energia do fluido cósmico é fixado pelas equações de campo de Einstein (escritas aqui com o termo cosmológico Λ)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

sendo $R_{\mu\nu}$ o tensor de Ricci, R o escalar de curvatura e $T_{\mu\nu}$ o tensor de energia-momento de todos os campos presentes, tais como matéria, radiação etc. As equações de Einstein podem também ser obtidas minimizando a ação [8]

$$\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = 0, \quad (1.3)$$

com S sendo a soma da ação de Einstein-Hilbert e a ação dos campos de matéria:

$$S = S_{EH} + S_m = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R + 2\Lambda) + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m, \quad (1.4)$$

e g sendo o determinante do tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Uma discussão mais detalhada do uso de métodos variacionais para obter equações no contexto de métricas do tipo FRW pode ser encontrada no Apêndice A.

Observe que a conservação *isolada* do tensor de energia-momento da matéria ($T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$) e o fato do tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}, \quad (1.5)$$

ter também divergência nula, devido às identidades de Bianchi [8], implicam que $\Lambda_{;\nu} = 0$, ou seja, que Λ é constante no espaço-tempo. Algumas vezes é mais conveniente passar $\Lambda g_{\mu\nu}$ para o lado direito e reescrever (1.2) sob a forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} = 8\pi G\tilde{T}_{\mu\nu}, \quad (1.6)$$

sendo $\tilde{T}_{\mu\nu}$ o tensor de energia-momento efetivo

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \frac{\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu}. \quad (1.7)$$

No caso de universos homogêneos e isotrópicos, a fonte de curvatura total ($\tilde{T}_{\mu\nu}$) é descrita por um tensor de energia-momento de fluido perfeito:

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = (\tilde{\rho} + \tilde{p})u_\mu u_\nu - \tilde{p}g_{\mu\nu}, \quad (1.8)$$

com

$$\tilde{\rho} = \rho + \frac{\Lambda}{8\pi G} \quad (e) \quad \tilde{p} = p - \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad (1.9)$$

sendo ρ e p , respectivamente, a densidade e a pressão da componente material e $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$, pois o fluido está em repouso com relação às coordenadas comóveis (1.1).

As equações que determinam a evolução do fator de escala e das demais grandezas físicas são obtidas das componentes independentes das equações de Einstein. Tais equações, para a métrica (1.1) e o tensor de energia-momento (1.8), podem ser escritas como [8]:

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{k}{a^2} = 8\pi G\tilde{\rho}, \quad (1.10)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -8\pi G\bar{p}. \quad (1.11)$$

Combinando-se as Eqs. (1.10) e (1.11) obtém-se

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\bar{\rho} + 3\bar{p})a. \quad (1.12)$$

Esta é a equação fundamental para se entender qualitativamente a existência de singularidades em modelos com a métrica de FRW. Se A for constante e $(\bar{\rho} + 3\bar{p})$ tiver sido não negativo num instante t_p qualquer, (1.12) implica que $\ddot{a} \leq 0$ para qualquer $t \leq t_p$. Como $\dot{a} > 0$ hoje, a curva $a(t < t_p) \times t$ tem que ser côncava para baixo, consequentemente, $a = 0$ em algum instante finito no passado. É claro, $\ddot{a}$ poderia ser positivo se A fosse tal que $\bar{p} < -\frac{1}{3}\bar{\rho}$. Neste caso, o universo teria colapsado de um tamanho infinito até atingir um raio finito em algum instante do passado. Contudo, a partir desse momento haveria uma evolução para uma fase de expansão que seria assintoticamente dominada pelo termo cosmológico antes da nucleossíntese, o que descarta esta possibilidade de modelo não-singular.

A Eq. (1.12) também permite uma discussão qualitativa da idade do universo. No caso de modelos singulares, será definida como idade o tempo decorrido desde a singularidade ($t = 0$) até hoje ($t = t_0$). Tomando o caso limite $\ddot{a} = 0$, então $a(t) = At$, onde A é uma constante. Denominando $a(t_0) \equiv a_0$, então $A = a_0/t_0 = \dot{a}_0$, de modo que $t_0 = a_0/\dot{a}_0 \equiv H_0^{-1}$ (tempo de Hubble). Se $\ddot{a} < 0$, a curva $a(t)$ tem concavidade para baixo, o que significa que $t_0 < H_0^{-1}$. Conclui-se portanto que modelos com singularidade fornecem idades cujo limite superior é H_0^{-1} .

Diferenciando a Eq. (1.10) com respeito ao tempo e substituindo o resultado na Eq. (1.12), obtém-se a seguinte expressão para a conservação da energia:

$$\frac{d}{da}(\rho a^3) = -3pa^2. \quad (1.13)$$

Esta equação pode ser reescrita na forma da segunda lei da Termodinâmica:

$$d(\rho V) + p dV = T dS = 0, \quad (1.14)$$

onde $V \propto a^3$ e S é a entropia por volume comóvel. Esta expressão mostra que a expansão (ou contração) do fluido ocorre adiabaticamente em modelos tipo FRW.

Considere-se, como é comum em cosmologia, que o fluido cósmico é descrito por uma equação de estado do tipo lei gama

$$p = (\gamma - 1)\rho, \quad (1.15)$$

com γ constante. Esta equação de estado caracteriza qual é a componente do fluido que determina a dinâmica do universo. Se o universo é dominado por matéria não relativística (poeira) $\gamma = 1$ e se a radiação for a componente dominante, $\gamma = 4/3$. Usando as Eqs. (1.13) e (1.15), pode-se determinar a lei de escala para a densidade de energia da componente dominante do fluido cósmico (lembrando que Λ é constante):

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3\gamma} \quad (1.16)$$

com ρ_0 sendo a densidade de energia do fluido hoje. Assim, para determinar o comportamento temporal de ρ , é suficiente determinar o fator de escala $a(t)$.

Usando a lei gama e combinando as Eqs. (1.10) e (1.11), encontra-se a equação que governa a dinâmica do fator de escala:

$$a\ddot{a} + \frac{3\gamma - 2}{2}\dot{a}^2 + \frac{3\gamma - 2}{2}k - \frac{\gamma\Lambda}{2}a^2 = 0, \quad (1.17)$$

cujas integral primeira é

$$\dot{a}^2 = Aa^{-(3\gamma-2)} - k + \frac{\Lambda}{3}a^2, \quad (1.18)$$

e A é uma constante de integração.

Uma solução particular das equações acima que é importante para contextualizar os temas desta tese é o modelo de de Sitter, obtido fazendo-se $\rho = p = k = 0$ nas equações acima. Neste caso, a Eq. (1.10) fornece a seguinte solução [2]:

$$a = a_* e^{H(t-t_*)}, \quad (1.19)$$

onde $H = \sqrt{\Lambda/3}$. Este é o modelo com expansão exponencial mais comumente associado ao cenário inflacionário. Os detalhes sobre como a evolução de campos escalares pode levar a este regime serão apresentados na Seção 2.3.

1.3 Situação observacional

Os resultados favoráveis ao modelo padrão Fazendo $\Lambda = p = 0$ nas equações de Einstein, obtém-se o chamado modelo padrão da cosmologia,³ cujas soluções para $k = \pm 1$ foram encontradas por Friedmann e para $k = 0$, por Einstein e de Sitter. A seu favor existem algumas evidências observacionais que se isoladamente não seriam suficientes para confirmá-lo, quando reunidas, são explicadas só por ele.

A primeira evidência corroborando o modelo foram as observações de Hubble, de acordo com as quais a velocidade de recessão v das galáxias é proporcional à distância r que nos separa delas (lei de Hubble):

$$v = H_0 r. \quad (1.20)$$

O modelo também admite que a matéria está imersa em um banho térmico (radiação de fundo) que vem esfriando ao longo da expansão a partir de um estado primordial com temperatura e densidade infinitas (*Hot Big Bang*). Esta expansão ocorre em equilíbrio térmico a partir de temperaturas da ordem de 10^{16} GeV [14] (equilíbrio aqui é definido como a situação na qual a escala de tempo dos processos físicos é muito menor do que o tempo de Hubble). A lei de temperatura para a radiação é dada por [8]

$$T(t) = T_0 \frac{a_0}{a(t)}, \quad (1.21)$$

e T_0 e a_0 são, respectivamente, a temperatura de corpo negro da radiação e o valor do fator de escala hoje. Para temperaturas suficientemente altas, os fótons da radiação de fundo tinham energia acima da necessária para ionizar a matéria. Contudo, a partir de $T \sim 1$ eV

³Embora esta definição esteja ficando um tanto ultrapassada. A tendência mais recente é considerar $\Lambda \neq 0$.

a ionização já não é eficiente e a matéria tornou-se subitamente transparente para esses fótons. Este período é chamado de *era da recombinação*. Desde então a radiação de fundo vem esfriando e mantendo um espectro térmico. A observação na década de sessenta [11] de uma radiação de fundo isotrópica com espectro de corpo negro e temperatura $T_0 \sim 3\text{K}$ (microondas) foi determinante para a aceitação do modelo padrão.

Em um universo primordialmente denso e quente, as abundâncias relativas dos elementos químicos mais leves são fixadas já nos primeiros minutos a partir da singularidade inicial. As medidas das abundâncias dos elementos ^4He , ^2H , ^3He e ^7Li concordam com as previsões baseadas no modelo padrão [14]. Além disso, a produção cosmológica do ^4He é quantitativamente relacionada com o número de tipos de neutrinos N_ν . O limite superior calculado com base nos dados observacionais sobre este elemento ($N_\nu \leq 3,3$) está de acordo com os valores obtidos posteriormente por aceleradores de partículas ($N_\nu = 2,98 \pm 0,06$) [17].

Alguns consideram que uma quarta evidência em favor do modelo padrão é a concordância entre os vários métodos de determinação da idade do universo. O conceito de idade do universo, inferida dos tempos de vida dos objetos nele contidos, só tem sentido em modelos com uma fase primordial densa e quente, mesmo que estes não apresentem singularidade. Em tais casos, a idade seria o tempo decorrido entre hoje e a época na qual o universo se tornou suficientemente frio para que se pudessem formar as estruturas das quais medimos o tempo de vida. Neste sentido, o fato das medidas do parâmetro de Hubble H_0 , o cálculo do tempo de resfriamento das anãs brancas, a datação das estrelas mais antigas dos aglomerados globulares e dos elementos radioativos fornecerem, todas, tempos da ordem de 10^{10} anos, pode ser considerado como um forte argumento em favor de uma origem mais ou menos simultânea para esses objetos.

Situação observacional recente

Supernovas À medida que novas tecnologias são incorporadas ao aparato observacional da astrofísica, objetos menos brilhantes são observados e as suas distâncias estimadas com maior precisão. Naturalmente, as observações mais relevantes para a cosmologia são as de objetos distantes, e os últimos anos têm sido reveladores nesta área. Por um lado, há a corroboração dos resultados clássicos que confirmam o modelo padrão e sugerem um universo que realmente expandiu a partir de um estágio inicial denso e quente, com um período de nucleossíntese nos seus primeiros minutos, com crescimento de estruturas por colapso gravitacional da matéria em torno de pequenas inhomogeneidades iniciais [18].

Por outro lado, a evolução futura do universo vem sendo revista. Usualmente, pensava-se que o conteúdo do universo era basicamente matéria e radiação, as formas de energia mais facilmente detectáveis e que tendem a desacelerar o universo. A grande dúvida era se havia ou não matéria suficiente a ponto de haver um recolapso futuro do universo. As evidências, contudo, são crescentes de que o universo está acelerando a sua taxa de expansão. Como para objetos próximos vale a lei de Hubble Eq. (1.20), que envolve apenas $\dot{a}(t)$ e $a(t)$, tais medidas de aceleração têm que ser feitas com objetos a grandes distâncias.

A maior dificuldade para medir distâncias muito grandes é saber qual a luminosidade absoluta dos objetos que se quer medir. Uma grande parte do esforço dos astrofísicos observacionais é despendido na identificação e estudo de objetos que possam ser usados como referências de luminosidade de modo a, quando um deles for observado, ter a sua distância deduzida da sua magnitude aparente. No caso das distâncias cosmológicas, este problema é ainda maior. Nesta escala de distâncias, praticamente não há objetos que possam ser individualmente observados (como estrelas, por exemplo, que têm suas luminosidades bem estudadas).

Uma exceção é o caso das supernovas, que, por um breve período, podem ter uma luminosidade comparável à de uma galáxia. Sabendo-se propriedades gerais da dinâmica da explosão, e sendo tais propriedades as mesmas para supernovas de uma mesma classe,

obtém-se uma vela-padrão confiável para medidas de longa distância. Esta homogeneidade de propriedades ocorre para as supernovas do tipo Ia, se for usada uma engenhosa técnica que correlaciona o pico de luminosidade da supernova com o tempo decorrido para ela atingir este pico. O que se mede então com precisão não é diretamente a luminosidade, mas este tempo. Usando esta técnica para determinar distâncias de galáxias onde ocorreram SNIa, dois grupos conseguiram inferir uma aceleração para o universo [15], o que é incompatível com o modelo padrão contendo apenas poeira ou matéria escura fria. Estes resultados indicam que deve haver uma forma de energia com efeito repulsivo na dinâmica das equações de movimento cosmológicas ($p < -\rho/3$) na Eq. (1.12). O candidato natural para preencher a vaga aberta no conteúdo do universo é a constante cosmológica, pois os dados observacionais são consistentes com um valor para Λ cuja densidade de energia é responsável por cerca de 70% da massa do universo.

Idade Os limites inferiores mais estridentes para a idade do universo t_0 vêm de estudos de populações de estrelas de aglomerados globulares. Consideradas como problemáticas para o modelo padrão por serem incompatíveis com um universo dominado apenas por matéria (o problema da idade), essas medidas foram reavaliadas depois que a análise de dados do satélite astrométrico Hipparcos indicaram que as distâncias para os aglomerados que eram usualmente consideradas até 1997 estavam sistematicamente subestimadas. Isto significa que as estrelas observadas eram mais brilhantes do que se acreditava e, portanto, mais jovens. As estimativas de t_0 ainda não têm um valor consensual, mas a reunião de várias delas fornece um número em torno de 13 bilhões de anos [20], abaixo dos resultados de há poucos anos atrás. Este valor de idade implica que $H_0 t_0 \sim 1$, o que ainda é incompatível com um universo dominado inteiramente por matéria (o problema está menor, mas persiste). Este é mais um argumento indireto em favor de uma componente com pressão negativa no universo.

Expansão do universo Após anos de disputa acirrada, aparentemente o parâmetro de Hubble está “convergindo” para algo em torno de $65 \text{ km} \cdot \text{seg}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$, com a precisão melhorando de aproximadamente 50% para 15% graças às medidas de Cefeidas feitas pelo telescópio espacial Hubble. A composição com os resultados da idade sugerem que, apesar de ter sido mitigado, o problema da idade persiste, pelo menos para o caso de um universo dominado por poeira.

Parâmetro de densidade Fazendo $\Lambda = k = 0$ na Eq. (1.10), podemos definir a densidade crítica (ρ_c), como sendo a densidade de um universo plano:

$$\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}.$$

Definindo Ω_x como sendo a fração do componente x com relação à densidade crítica, tem-se que no caso da matéria $\Omega_m \sim 0,3$. Como os resultados da nucleossíntese indicam um valor bem abaixo deste para a densidade de número de bárions no universo, conclui-se Ω_m é formado por praticamente apenas matéria escura não bariônica.

O valor acima foi obtido a partir de diversas técnicas independentes (curvas de luminosidade de supernovas, análise do espectro da radiação de fundo para grandes valores do número de onda, medidas de velocidades peculiares de galáxias, e outros) [20]. A conclusão que se chega é que, para modelos planos, $\Lambda \sim 0,7$. Apesar de serem ainda resultados muito recentes, é estimulante que técnicas diferentes estejam dando valores similares.

Vale ressaltar porém que estes resultados não são unânimes. Uma outra técnica, a estatística de lentes gravitacionais, muito sensível ao tamanho de um possível termo cosmológico, desfavorece valores muito altos de Λ [20]. Entretanto, pode-se dizer aqui que os dados observacionais mais recentes e confiáveis convergem para um universo plano com 70% do seu conteúdo energético sob uma forma de energia que tem pressão negativa, como, por exemplo, é o caso da uma constante cosmológica. É também possível que Λ varie com o tempo, como será considerado no Cap. 4.

1.4 Problemas do modelo padrão

Apesar dos sucessos citados acima, principalmente as previsões da nucleossíntese cosmológica e a descoberta da radiação cósmica de fundo, o modelo padrão apresenta algumas consequências incômodas. Em primeiro lugar, todas as variantes do modelo padrão apresentam singularidade quando $t \rightarrow 0$ (ver Eq. (1.12)), ou seja, grandezas tais como temperatura e densidade divergem próximo ao instante inicial. Acontece que, para tempos da ordem do tempo de Planck ($t_{pl} \sim 10^{-43}$ seg), não se pode mais garantir que uma teoria de gravitação não quântica, como a TRG, possa ser empregada. Conclui-se, então, que o modelo padrão não pode ser usado para estudar a física dos estados mais primitivos do universo.

O limite da velocidade de propagação das interações (velocidade da luz) nos define uma distância além da qual duas partículas não podem ter contato causal. Esta é a chamada distância de horizonte d_h . No modelo padrão, quando $t \rightarrow 0$, d_h tende a zero mais rapidamente do que o fator de escala [8]. Uma implicação disso é que um ponto dentro do nosso horizonte atualmente observável, eventualmente esteve fora dele, se tomarmos instantes suficientemente recuados no tempo. Em particular, se o fator de escala evoluiu segundo equações do tipo FRW, estima-se que a parte do universo presentemente observável era composta por aproximadamente 10^5 regiões causalmente desconexas na era da recombinação [14]. Não seria de se esperar, portanto, que estas regiões estivessem à mesma temperatura naquela época. No entanto, as medidas mostram que a radiação de fundo tem inhomogeneidades menores do que uma parte em 10^5 na temperatura [19]. Isto significa que apesar de não haver contato térmico entre essas regiões, elas parecem ter se expandido a partir de um estado de equilíbrio. No contexto do modelo padrão não é possível explicar esta uniformidade da radiação de fundo, ela é simplesmente tomada como uma condição inicial.

Um terceiro problema está relacionado ao quão próximo o universo está de ser geometricamente plano. Se $k \neq 0$, podemos reescrever a Eq. (1.10) na forma

$$\frac{|\rho - \rho_c|}{\rho_c} = \frac{1}{a^2}, \quad (1.22)$$

que é uma medida da proximidade entre ρ e ρ_c . Esta é uma grandeza que diverge rapidamente com o tempo. Por exemplo, na era da radiação ($\gamma = 4/3$ em (1.18)), $\dot{a}^{-2} = At$ ($A = \text{cte}$). Medidas do valor de ρ hoje ($\rho/\rho_c \sim 1$) nos dão que $A \sim t_0^{-1}$. Portanto, na era de Planck (t_{pl}),

$$\frac{|\rho - \rho_c|}{\rho_c} \sim \frac{t_{pl}}{t_0} \sim 10^{-60}. \quad (1.23)$$

Isto indica que a mínima flutuação de densidade nesta época teria inviabilizado a existência do nosso universo. Se a quantidade acima fosse da ordem de 1 (em unidades naturais), ou o universo teria recolapsado imediatamente após o t_{pl} (se $k=1$), ou a radiação de fundo teria alcançado os 3K em 10^{-11}seg [14]. Também aqui não existe uma explicação de porque as condições iniciais tiveram que ser tão restritivas [21].

De acordo com as teorias de grande unificação, transições de fase ocorridas nos estágios iniciais de desenvolvimento do universo produziram diversos tipos de partículas suficientemente estáveis para contribuírem formidavelmente na densidade de energia presentemente observada. Tomemos, por exemplo, os monopolos magnéticos (com aproximadamente 10^{16} vezes a massa do próton). Sem algum mecanismo complementar ao modelo padrão que "dilua" a densidade de monopolos ao longo da expansão, teríamos que $\rho_0 \sim 10^{16} \rho_c$. Com tal densidade, é possível mostrar que o universo teria recolapsado em, no máximo, 30.000 anos depois do *Big Bang* [14].

Para explicar a formação das estruturas que observamos hoje, (galáxias, aglomerados etc.) é necessário que sejam dadas as pequenas flutuações primordiais ($\delta\rho/\rho$) que as originaram. A amplitude dessas flutuações é fortemente limitada pelas medidas da anisotropia da radiação de fundo ($\delta\rho/\rho \lesssim 10^{-4}$) na era da recombinação [14]. Existe uma gama de espectros de flutuações, as sementes primordiais das perturbações de densidade, que são compatíveis com essas medidas e que resultam nas estruturas observadas, mas o modelo padrão não fornece um mecanismo que os justifique. Neste caso, todo o espectro de flutuações teria que ser dado como condição inicial.

Um último problema para o modelo padrão é o problema da constante cosmológica. A

cada transição de fase que tenha supostamente ocorrido durante a evolução do universo está associada uma bem definida variação da densidade de energia do vácuo $\Delta\rho_{\text{vac}}$. A densidade de energia ρ_{vac} é proporcional ao termo cosmológico Λ [22],

$$\rho_{\text{vac}} = \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad (1.24)$$

que pode ser incluído nas equações de Einstein e o seu valor estimado a partir de observações astronômicas. O problema da constante cosmológica consiste na discrepância de pelo menos 40 ordens de magnitude entre os limites superiores obtidos observacionalmente para ρ_{vac} ($\sim 10^{-47} \text{GeV}^4$) e as menores estimativas teóricas obtidas das teorias de campo ($\sim 10^{-4} \text{GeV}^4$ para a transição quark-hádron da cromodinâmica quântica). Esta diferença pode chegar a 120 ordens de grandeza, se a densidade de energia de Planck (um limite natural em gravitação) for usada como valor para ρ_{vac} [23].

Com exceção do problema da singularidade, todas as questões levantadas aqui poderiam em princípio ser “resolvidas” por um conjunto adequado de condições iniciais. Entretanto, esta solução pode ser considerada insatisfatória, pois espera-se que as leis físicas sejam capazes de explicar as características do mundo de um modo objetivo, e parece um tanto antropocêntrico supor que universo teve condições iniciais tão finamente ajustadas. Neste sentido, justifica-se uma busca por novas teorias que resolvam os problemas levantados. Em particular, alguns deles podem ser resolvidos se o universo primordial tiver passado por uma fase de expansão aproximadamente exponencial, a chamada fase inflacionária, que será discutida no próximo capítulo.

Capítulo 2

Campos escalares e inflação

2.1 Introdução

Desde o advento dos modelos inflacionários, campos escalares (aqui denotados genericamente pela letra grega ϕ) vêm sendo sugeridos para assumir importantes papéis em diferentes períodos da história cósmica. Alguns exemplos conhecidos são: i) o inflaton, associado à inflação [21, 24]; ii) o áxion, um dos candidatos a matéria escura [14]; iii) o dilaton, que está presente na ação de baixas energias das teorias de cordas e pode ser usado para resolver os mesmos problemas da inflação, incluindo o da singularidade (ver Cap. 3 e Refs. [25]) e iv) como condensados de Bose-Einstein, com possíveis consequências cosmológicas no universo primitivo [26, 27]. Mais recentemente, inspirados por dados observacionais e especulações teóricas anteriores, alguns autores têm também sugerido campos escalares (também chamados de “quintessência”) como sendo a tão buscada matéria escura não bariônica (ver Seção 1.4 e [28]). Esses campos podem ter consequências importantes para a formação de estruturas em larga escala, bem como ser responsáveis pela fase de expansão acelerada do universo [29], recentemente indicada pelas observações das curvas de luminosidade de supernovas do tipo Ia (ver Cap. 1 e [15]).

Neste capítulo serão apresentadas as equações de movimento do campo escalar em um espaço-tempo homogêneo e isotrópico e algumas das suas principais consequências serão

estudadas. Apesar das várias possibilidades de aplicação de campos escalares em cosmologia, o foco das atenções aqui será dirigido aos modelos inflacionários e as suas soluções para os problemas clássicos do modelo padrão que foram apresentados no capítulo anterior e podem ser resolvidos neste contexto. Contudo, é importante ressaltar que tanto no caso da inflação como no da quintessência (citada acima), não há justificativa fundamental para a existência do campo escalar que não a de resolver os problemas para os quais eles são propostos. Além disso, apesar de haverem modelos mais elaborados, que consideram acoplamentos não mínimos entre ϕ e a curvatura, ou usam campos complexos, só serão considerados aqui os casos com acoplamento mínimo do campo escalar real. Neste caso, a densidade lagrangeana é

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - V(\phi), \quad (2.1)$$

com $V(\phi)$ sendo um potencial genérico. Do teorema de Noether, o tensor de energia-momento de ϕ é dado por

$$T_\phi^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_\phi, \quad (2.2)$$

do qual pode-se extrair a densidade de energia e pressão

$$p_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) - \frac{1}{6} (\nabla \phi)^2, \quad (2.3)$$

e

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2. \quad (2.4)$$

Dada a ação:

$$S = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ R - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + V(\phi) + \mathcal{L}_m \right\}, \quad (2.5)$$

onde $\mathcal{L}_m$ representa a lagrangeana dos outros campos, obtém-se a equação de movimento para o campo escalar, seja com a variação de S com relação a ϕ , seja da conservação do tensor $T_\phi^{\mu\nu}$,

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (2.6)$$

Da conservação da energia para os outros campos, aqui tratados como um fluido perfeito com equação de estado do tipo $p = (\gamma - 1)\rho$ obtém-se

$$\dot{\rho} + 3\gamma H\rho = 0, \quad (2.7)$$

onde foi suposto que o fluido perfeito e o campo escalar têm leis de conservação de energia independentes, hipótese que será relaxada no Cap. 5. A equação de Friedmann para o sistema formado pelo campo escalar e o fluido perfeito é

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho + \rho_\phi) + \frac{k}{a^2}. \quad (2.8)$$

Note-se que mesmo dando um valor específico para γ ($4/3$ na era da radiação e 1 na era da matéria) o sistema de equações (2.6)-(2.8) não pode ser resolvido sem alguma hipótese extra sobre o campo escalar. Isto ocorre porque os termos cinético e de potencial de ϕ são em princípio independentes, admitindo infinitas combinações de valores. No âmbito dos cenários inflacionários, as hipóteses extras são as condições de rolamento lento do campo, como será mostrado. Antes de tratar do cenário inflacionário, porém, é conveniente falar das motivações que levaram a essas propostas. Para tanto é necessária uma breve exposição sobre transições de fase.

2.2 Transições de fase

Os mecanismos de quebra espontânea de simetria que motivaram os primeiros cenários inflacionários podem ser ilustrados pelos exemplos que seguem (ver discussão sobre o assunto no Cap. 7 da Ref. [14]). Antes, porém, uma advertência. Os modelos apresentados nesta seção não são de modo algum realistas e cumprem apenas a função didática de expor os principais conceitos envolvidos nas transições de fase cosmológicas. Modelos rigorosos, baseado na técnica do potencial efetivo para calcular correções térmicas e quânticas podem ser encontrados, por exemplo, na Ref. [31]. Seja um potencial

$$V(\phi) = -M^2\phi^2 + \lambda\phi^4. \quad (2.9)$$

Onde M representa o termo de massa do campo e tem dimensões de energia e λ é a constante de acoplamento que define a intensidade do termo de auto-interação do campo. Ao nível de árvore (campo clássico a temperatura zero) o potencial acima é suficiente para determinar a dinâmica do campo escalar, dadas as condições iniciais. Suponha-se que ϕ esteja em equilíbrio térmico com outros campos, que no caso do universo primitivo seriam coletivamente representados por um gás ultra-relativístico a temperatura T em equilíbrio térmico e químico. Neste caso, flutuações térmicas têm que ser consideradas e este efeito pode ser levado em conta adicionando-se um termo de interação $\mathcal{L}_{\text{int}}(\phi, \psi)$ à lagrangeana (2.1), onde ψ corresponde a um banho térmico que induz correções do tipo

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = aT^2\phi^2, \quad (2.10)$$

com a sendo uma constante da ordem da unidade que pode ser calculada em uma análise mais detalhada (ver a Ref. [31]) para incluir termos de ordem superior em *loops*. Este termo de interação entra na lagrangeana como uma correção ao termo de massa, o que permite definir uma massa efetiva $M_{\text{ef}}^2 = M^2 - aT^2$ e uma temperatura crítica $T_c = M/\sqrt{a}$. O potencial efetivo que inclui este novo termo de massa representa a energia livre de Helmholtz, em analogia com os sistemas considerados na física da matéria condensada. A temperaturas mais altas do que T_c o potencial assume uma forma parabólica e terá um mínimo em $\phi = 0$.¹ Abaixo da temperatura crítica o estado fundamental será localizado em $\phi = \pm M_{\text{ef}}/\sqrt{2\lambda}$. Neste caso, a simetria $\phi \rightarrow -\phi$ presente na lagrangeana não é mais mantida no estado de vácuo e é dita espontaneamente quebrada (ou fica “escondida”, como sugerido por Coleman). Além disso, o sistema só pode ocupar um dos estados de mínimo para o qual a passagem é contínua e a transição de fase ocorrida neste exemplo é o protótipo do que se chama de transição de segunda ordem.

No que seria o protótipo de uma transição de fase de primeira ordem, considera-se o potencial

$$V(\phi) = aT^2\phi^2 - b\phi^3 + \lambda\phi^4. \quad (2.11)$$

¹O sistema permanece no mínimo devido à interação com o banho térmico.

Este potencial exibe duas temperaturas críticas T_1 e T_2 . Para temperaturas muito altas o termo em ϕ^2 domina e o potencial tem um mínimo global em $\phi = 0$. Para $T_2 < T < T_1$ um ponto de mínimo local se desenvolve para $\phi \neq 0$ (considerando apenas valores positivos de ϕ). Quando $T = T_2$ há dois mínimos degenerados separados por uma barreira de potencial, um em $\phi = 0$ e outro em $\phi \neq 0$. Para $T < T_2$ o mínimo em $\phi \neq 0$ passa a ser global (o "vácuo verdadeiro") e o ponto $\phi = 0$ passa a ser um mínimo local (o "falso vácuo"), ainda com a barreira de potencial que o separa do mínimo global. No caso clássico, o sistema fica preso no falso vácuo, mas se a barreira for suficientemente pequena, eventualmente ocorre tunelamento e o sistema se estabiliza no vácuo verdadeiro. O nome da transição se justifica pela descontinuidade (devida ao tunelamento) da passagem do sistema de um vácuo para o outro. É claro, este não é um modelo realista, pois a intenção aqui é meramente didática. Modelos que levam em conta correções quânticas e térmicas de modo autoconsistente são discutidos em detalhes na Ref. [31].

O que é mais importante para a cosmologia na discussão acima é que a diferença de energia entre os estados de vácuo pode ser calculada. Tipicamente, na transição de segunda ordem tem-se que:

$$\Delta V = V_s - V_f = \frac{M^4}{2\lambda}, \quad (2.12)$$

com V_s sendo a densidade de energia do vácuo da fase simétrica e V_f a densidade de energia final do vácuo. Supondo a transição da teoria de grande unificação, $M \sim 10^{15} \text{ GeV}$ [14]. Neste caso, é razoável supor $V_f = 0$, pois o valor da constante cosmológica efetiva medido hoje é dezenas de ordens de magnitude menor do que V_i . Como no equilíbrio o campo escalar permanece no estado de vácuo, na fase simétrica a equação de estado do campo escalar é, de (2.4) e (2.3),

$$p_\phi = -\rho_\phi, \quad (2.13)$$

e V_i tem um valor constante. A radiação, por sua vez, vem sendo diluída, devido à expansão. Se por qualquer razão a transição não ocorrer imediatamente enquanto $\rho \sim V_i$, o vácuo passa a dominar a dinâmica, o universo entra em uma fase de Sitter e ocorre inflação.

2.3 Inflação

A solução da equação de movimento para ϕ proposta pela inflação não poderia ser mais simples. É suposto que ocorreu uma fase com o domínio do termo de potencial nas equações de movimento cosmológicas, de modo que a equação de Friedmann se reduz a

$$3H^2 \simeq 8\pi G V(\phi). \quad (2.14)$$

A solução da equação acima é um universo do tipo de Sitter, com $a(t) \propto \exp \sqrt{8\pi G V(\phi)/3}$. Mas só isso não é suficiente. É preciso assegurar que a dominação do potencial seja duradoura. Para garantir que a inflação persista pelo tempo Δt_I suficiente para resolver os problemas do modelo padrão, uma segunda condição é imposta, a de que o termo cinético de ϕ permaneça pequeno com relação ao potencial ao longo deste intervalo. Esta segunda condição é implementada supondo que o termo de derivada segunda de ϕ na equação (2.5) é desprezível com relação aos demais. Neste caso,

$$3H\dot{\phi} + V' \simeq 0 \quad (2.15)$$

Dividindo-se (2.15) por (2.14) e elevando o resultado ao quadrado encontra-se que

$$\frac{1}{48\pi G} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \simeq \frac{8\pi G \dot{\phi}^2/2}{3H^2} \simeq \frac{\dot{\phi}^2/2}{V(\phi)} \ll 1, \quad (2.16)$$

de acordo com a Eq. (2.14). Além disso, diferenciando-se a Eq. (2.15), dividindo-se a equação resultante por $9H^2$, e notando que

$$\dot{H} = -4\pi G \dot{\phi}^2, \quad (2.17)$$

encontra-se que

$$\frac{1}{24\pi G} \frac{|V''|}{V} \simeq \frac{\dot{H}}{3H^2} + \frac{\ddot{\phi}}{3H\dot{\phi}} \ll 1, \quad (2.18)$$

onde as Eqs. (2.14) e (2.15) foram usadas para que a desigualdade fosse encontrada. O significado geométrico das relações (2.16) e (2.18) é simples: para que haja inflação tanto a inclinação quanto a curvatura do potencial têm que ser muito pequenas durante este

período. Como a equação de movimento do campo escalar é a mesma equação de uma partícula descendo uma ladeira com atrito (com coeficiente $3H$), as condições acima foram chamadas de “condições de rolamento lento.” (CRL).

A duração do período inflacionário segue diretamente das CLR. Sejam a_i e a_f os valores do fator de escala no início e no final da inflação, respectivamente. A razão entre estes dois valores do fator de escala $a_f/a_i = \exp \Delta t_f$ fornece uma medida do número N de potências do número e (ou *e-folds*) decorridas entre a_i e a_f :

$$N \equiv \ln \frac{a_f}{a_i} = \int_{t_i}^{t_f} H dt \simeq -8\pi G \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{V}{V'} d\phi \quad (2.19)$$

onde foi usado que $dt = d\phi/\dot{\phi}$ e o sinal pressupõe que $\phi_f < \phi_i$. Note-se que, dado um potencial V e as CRL, a quantidade de inflação pode ser determinada sem haver a necessidade de se resolver as equações de movimento. Para resolver o problema de horizonte é necessário que $N \geq 60 - 70$, o que equivale uma expansão por um fator de cerca de 10^{30} [14].

O final da inflação Como após a inflação a densidade de energia da radiação é exponencialmente suprimida, é necessário que algum processo reestabeleça o universo FRW atualmente observado. Qualquer versão de inflação tem que conter, portanto, esta fase de *reaquecimento* após a do rolamento lento. Os primeiros modelos de reaquecimento, assumem que o inflaton oscila rapidamente (com relação a escala de tempo de Hubble H^{-1}) em torno do fundo do poço potencial e parte da sua energia é convertida em radiação, pois nesta fase é suposta a existência de acoplamentos entre ϕ e os demais campos de matéria. Os tratamentos tradicionais (como o exposto nas Ref. [14, 33], por exemplo) adicionavam à equação de movimento de ϕ um termo fenomenológico de decaimento do campo escalar do tipo $\Gamma\dot{\phi}$ para efetivar o reaquecimento. Este termo era justificado no contexto de teoria de perturbação, mas mostrou-se ineficiente para prover uma temperatura suficientemente alta no final do processo de reaquecimento. Por vários anos este ficou como um problema em aberto para a cosmologia inflacionária.

Esta perspectiva desanimadora mudou após a descoberta de que o processo de criação

de partículas poderia se dar por amplificação paramétrica, com uma transferência muito mais eficiente de energia das oscilações coerentes do campo escalar para os produtos do decaimento [34, 35]. Neste caso, a análise tradicional pode ter importância não mais na fase de criação de matéria, atualmente chamada de pré-aquecimento (ou *preheating*), mas sim na fase de termalização dos produtos do decaimento do inflaton.

2.4 Soluções para os problemas do modelo padrão

A expansão do universo ao longo da fase de rolamento lento resolve vários dos problemas do modelo padrão listados no capítulo anterior. No caso do problema de horizonte, por exemplo, tem-se que a homogeneidade observada hoje seria apenas uma consequência da expansão adiabática de uma região primordialmente em equilíbrio térmico que abrangeria o horizonte na época do início da inflação, ampliada a ponto de englobar toda a distância de horizonte atualmente observada [14].

Pelo mesmo motivo, os “fósseis” indesejáveis, previstos pelas teorias de grande unificação não deveriam ser detectados hoje, pois teriam sido diluídos exponencialmente durante a fase de Sitter. Claro, é necessário supor que a temperatura de reaquecimento seja mais baixa do que a temperatura crítica da transição de fase, de outro modo o universo ingressaria novamente numa fase simétrica e configurações estáveis do vácuo desta fase poderiam sobreviver após a nova transição.

A expansão exponencial também faz com que qualquer curvatura preexistente se torne desprezível ao final do processo inflacionário. Isso pode ser verificado através da Eq. (1.10), onde H^2 e $\tilde{p}$ são constantes, enquanto o termo de curvatura decresce exponencialmente. Assim, um resultado quantitativo essencial da inflação é simplesmente que $|\rho - \rho_c| / \rho_c \sim 10^{-4}$ [14]. De fato, o universo ser espacialmente plano pode ser considerada uma das principais consequências testáveis dos modelos inflacionários. Como foi visto no Cap. 1, os resultados observacionais favorecem um universo plano, corroborando tais modelos.

Na inflação, flutuações quânticas do campo escalar, naturalmente fornecidas durante a fase de rolamento lento são ampliadas, resultando em um espectro de perturbações de densidade. Tais perturbações seriam as sementes primordiais que posteriormente gerariam (por colapso gravitacional) as estruturas em larga escala observadas hoje. Além disso, o espectro (em número de onda) de flutuações de densidade provoca flutuações na radiação cósmica de fundo que puderam ser observadas. As análises dos dados colhidos pelo satélite COBE (*Cosmic Background Explorer*) [19] e de outros experimentos sugerem que as anisotropias observadas na radiação de fundo são compatíveis com o espectro de flutuações de densidade previsto pelos modelos inflacionários. Assim, a inflação provê tanto um mecanismo causal para a formação de estruturas quanto um espectro mensurável de flutuações de temperatura da radiação de fundo. Este é o resultado mais robusto da inflação, mas ainda não é definitivo. Novos satélites, com lançamentos programados para os próximos anos, deverão definir se a inflação persiste ou não como paradigma na cosmologia.

2.5 Alguns tipos de inflação

Um roteiro típico de modelo inflacionário com transição de fase deve conter esta época na qual: a transição ainda não se completou, V_f domina e a radiação é exponencialmente diluída. No caso do modelo inflacionário original, de Guth [21], ϕ está inicialmente preso em um estado metaestável na origem (falso vácuo) e sofre uma transição de fase de primeira ordem. Nas regiões onde ocorre este tunelamento há nucleação de bolhas de vácuo verdadeiro. Como nessas regiões o potencial é (quase) nulo, a expansão dessas bolhas não é exponencial, mas do tipo potência. Já as regiões que não sofreram transição ainda expandem inflacionariamente, de modo que as bolhas de vácuo verdadeiro não percolam e a inflação não tem fim.

Este problema motivou a proposição de variantes de inflação nas quais o potencial é mais plano na origem, a transição é de segunda ordem e pode proceder suavemente e as

regiões de vácuo verdadeiro são maiores comparadas com as bolhas da inflação de Guth.² Esta versão foi chamada de nova inflação [24]. Entretanto, também a nova inflação tem problemas sérios. Um deles é que o potencial deve ser plano *demaís* perto da origem para que possa haver inflação suficiente e para evitar flutuações excessivas do campo quântico. Tais flutuações tem efeitos observacionais e foram severamente limitadas pelas observações de flutuações de temperatura da radiação cósmica de fundo. Estas duas características são proporcionais aos termos de acoplamento da lagrangeana, e conduzem a constantes de acoplamento que são tão pequenas são consideradas pouco naturais no contexto de teoria de campos [31].

Um problema correlato da nova inflação é que, para estar em equilíbrio termodinâmico com os demais campos no início da inflação, ϕ tem que ter um acoplamento forte com os mesmos. Isto ocorre porque para haver equilíbrio, o tempo de colisão entre as partículas tem que ser menor do que o tempo de vida do universo ($t_i \sim H_i^{-1} \sim 10^{-37}$ seg no início da inflação) e as seções choque das reações entre os campos (funções das constantes de acoplamento) têm que ser altas. Exceto em casos muito particulares [31], tais acoplamentos violam as condições impostas pelas CRL, pois a expansão adiabática da radiação supõe acoplamentos fracos. Isto é decepcionante, pois o cenário inflacionário, concebido para resolver problemas de ajuste fino das condições iniciais trouxe outras complicações do mesmo tipo das que se propunha a resolver, pelo menos nas suas versões mais bem fundamentadas em física de partículas.

Para os inflacionistas mais resolutos, entretanto, as soluções apontadas eram boas demais para a idéia ser abandonada: a inflação tornou-se então um "paradigma em busca de um modelo" [14]. Como o mecanismo é dinamicamente consistente com a dominação do termo de potencial de qualquer campo escalar, buscaram-se modelos que apenas assumem a existência de um campo, o *inflaton*, que apresenta a dinâmica desejada, independentemente de motivação fundamental.

²Tais regiões são análogas aos domínios de um ferromagneto submetido a uma transição de fase.

Um exemplo deste tipo é a inflação caótica [30]. Neste modelo não há sequer transição de fase. O universo já parte de um estado dominado pela energia do vácuo com ϕ deslocado do mínimo do potencial, mas “descendo a ladeira” lentamente e obedecendo as CRL. Por ser tão simples, este é o cenário com menos restrições fenomenológicas dentre as variantes inflacionárias e é o que tem a simpatia de boa parte dos que trabalham atualmente com este assunto. Mas a sua grande vantagem tem também o grande inconveniente de não haver justificativa fundamental para que se considere um universo dominado por um inflaton como condição inicial.

Há muitos mais modelos inflacionários do que os citados aqui, com potenciais polinomiais, exponenciais, com mais de um campo escalar etc. Há também casos de modelos baseados em modificações na relatividade geral, tais como teorias escalares-tensoriais (principalmente a de Brans-Dicke), ou teorias com termos de ordem superior nas derivadas do tensor métrico (um de tais casos será discutido no Cap. 3). Entretanto, não é propósito desta tese exaurir a discussão sobre as variantes inflacionárias. Uma lista recente de modelos pode ser encontrada na Ref. [32].

2.6 Problemas da inflação

Dos problemas listados no Capítulo I, a inflação não tem nada a dizer sobre o problema da singularidade nem sobre o problema da constante cosmológica, mas talvez o maior problema da inflação seja o de justificar a existência do inflaton. Inicialmente este campo era bem motivado por ser associado a quebras espontâneas de simetria no contexto da velha e nova inflações, algo mais ou menos de acordo com as crenças atuais no modelo padrão da física de partículas. Com o descarte desses modelos por causa dos seus problemas com a fenomenologia das suas consequências cosmológicas [14, 31] esta motivação de “primeiros princípios” foi um tanto perdida. Mesmo o cenário mais livre de problemas, a inflação caótica, baseada em um campo escalar randomicamente distribuído no volume do universo, mas que não é parte de qualquer teoria unificada, parece ser mais uma construção fenomenológica com

o propósito único de implementar uma dinâmica para o universo do que um modelo bem motivado por alguma teoria fundamental.

Um campo escalar que preenche este requisito é o dilaton. Este campo surge inevitavelmente na ação de baixas energias da teoria de supercordas, talvez a mais promissora candidata a teoria consistente de gravitação quântica [40]. Uma cosmologia motivada pelo dilaton mais especificamente voltada para o problema da singularidade será discutida no próximo capítulo.

Capítulo 3

Cosmologia dilatônica não-singular

3.1 Introdução

A singularidade inicial é um dos maiores problemas dos modelos cosmológicos propostos atualmente. No modelo padrão, a existência da singularidade inicial é consequência inevitável dos teoremas de Penrose-Hawking [36, 37]. Apesar de modelos inflacionários dirigidos por campos escalares tais como a inflação caótica [30] resolverem muitos dos problemas da cosmologia convencional, as singularidades iniciais ainda são genéricas no contexto inflacionário. Geralmente espera-se que alguma teoria mais fundamental, válida para a escala de energia de Planck, como a teoria de cordas, possa sugerir alguma resolução para este problema.¹

Numa tentativa de abordar o potencial da teoria de cordas para resolver o problema da singularidade cosmológica, Gasperini e Veneziano iniciaram um programa de pesquisa conhecido como cosmologia do pré big bang [25], baseada na ação efetiva resultante da teoria de cordas. Em ordem mais baixa, esta é a ação da gravitação com o dilaton, o campo escalar

¹Formalmente, existe mais de uma teoria de cordas (cinco, na verdade), mas os últimos desenvolvimentos na área sugerem que todas as teorias de cordas são diferentes aspectos de uma mesma teoria (ver, por exemplo, [38]). Além disso, as várias teorias confluem para os mesmos resultados na faixa de energias considerada aqui [39], o que explica o uso do singular.

que surge inevitavelmente nas faixas de “baixas” energias da teoria de cordas

$$S = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ R - \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + \dots \right\}, \quad (3.1)$$

com ϕ sendo o dilaton, campo que é associado aos acoplamentos gravitacionais, como na teoria de Brans-Dicke. Ao nível de árvore, ou seja, em mais baixa ordem na constante de acoplamento das cordas fundamentais e nas derivadas do tensor métrico, esta ação é conformalmente invariante para os movimentos das cordas em espaços curvos. Note que ao impor vínculos sobre o próprio espaço-tempo esta simetria conforme estabelece uma das grandes diferenças entre as cordas fundamentais e as partículas pontuais, que não impõem vínculos sobre o espaço onde se movem. Além disso, note-se que a ação acima esta escrita no referencial de Einstein² (mais natural para discutir soluções do tipo FRW) e foi assumida a compactificação de todas as demais $d - 3$ dimensões espaciais normalmente presentes na ação efetiva de baixa energia da teoria de cordas. Uma discussão com uma dedução mais detalhada da Eq. (3.1) está fora dos propósitos desta tese, que estuda apenas as consequências dinâmicas dos campos escalares, mas pode ser encontrada nas Refs. [40, 41]. Neste capítulo, baseado na Ref. [42], será feita uma exposição baseada apenas nesta ação de mais baixa ordem, que é a que tem maior interesse cosmológico atualmente, em particular por causa do pré big bang (PBB).

As equações de campo do PBB exibem uma nova simetria dual para o fator de escala $a(t)$. No referencial de Einstein, esta simetria mapeia uma cosmologia FRW em expansão em um universo em *contração* com a dinâmica dominada pelo dilaton. Isto sugere que é possível encontrar uma cosmologia não-singular na qual o universo vem dessa fase em contração, passa por um mínimo no fator de escala e então emerge em um universo tipo FRW expansionista.³ A esperança deste programa (o PBB ainda não chega a ser um modelo

²Em comparação ao referencial das cordas, ou de Brans-Dicke, que é o referencial mais fundamental para a teoria de cordas. A passagem do referencial de Einstein, com métrica $g_{\mu\nu}$ para o das cordas, com métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$, se dá pela transformação conforme $g_{\mu\nu} = e^\phi \tilde{g}_{\mu\nu}$.

³Um bom artigo de revisão sobre o PBB é a Ref. [41], e uma lista exaustiva e atualizada de referências sobre o assunto pode ser encontrada no endereço <http://www.to.infn.it/gasperin/>.

completo) é que correções na ação efetiva em ordem mais alta das derivadas da métrica ou em *loops* da constante de acoplamento das cordas (relacionada à constante gravitacional G , no caso de três dimensões espaciais) garantam uma passagem contínua entre o ramo em contração e o ramo FRW. A motivação para esta esperança reside na simetria dual do fator de escala e no fato que a teoria de cordas tem um comprimento mínimo fundamental, a extensão da própria corda, que serve de limite inferior para todas as escalas de comprimento da física [45].

Infelizmente, foi mostrado que esses dois ramos da cosmologia do PBB não podem ser conectados suavemente usando-se apenas equações obtidas da ação ao nível de árvore [46, 47, 48]. A fase em contração dominada pelo dilaton apresenta uma singularidade futura e a fase em expansão tem uma singularidade passada. Efeitos de um *loop* em cosmologia de cordas podem, em princípio, regular a singularidade [49] e fazer uma conexão suave entre os dois ramos, pelo menos na presença de curvatura espacial ($k = 1$). Outras propostas para regular as singularidades do PBB podem ser encontradas na lista de referências de [42], mas convém notar que a maioria dessas abordagens são perturbativas, e as suas consequências só são relevantes em regimes para os quais o tratamento auto-consistente da teoria deveria usar métodos não perturbativos [43, 44].

3.2 Modelos não-singulares

Uma forma natural para resolver o problema da singularidade da TRG é considerar uma teoria efetiva que contenha termos em derivadas superiores do tensor métrico adicionados ao escalar de Ricci R na ação de Einstein-Hilbert. Esta abordagem é bem motivada, pois espera-se que qualquer ação efetiva para a gravitação clássica assim obtida, seja da teoria de cordas ou da gravitação quântica, conterà esses termos em derivadas mais altas. No caso da teoria de cordas, como já foi dito, as simetrias duais sugerem que as quantidades físicas permaneçam finitas ao longo de toda a história do universo [45]. Assim, é razoável considerar teorias gravitacionais baseadas em ações com termos de derivadas mais altas

quando se investiga as propriedades do espaço-tempo a grandes curvaturas. Um exemplo desta linha de pesquisa é o modelo não-singular de Starobinski [50] que foi precursor dos modelos inflacionários.

As várias extensões possíveis da relatividade geral clássica têm a intenção de ser uma teoria de gravitação totalmente não-singular e conseqüentemente fornecer uma cosmologia livre de grandezas divergentes. Entretanto, esta promessa ainda está para ser cumprida em uma teoria efetiva de gravitação que seja rigorosamente derivada de um modelo fisicamente bem motivado para a escala de Planck. Aqui será tentada uma abordagem diferente da usual. O que se quer é derivar uma gravitação de ordem mais alta que possa produzir uma cosmologia que retenha as características qualitativas de uma evolução não-singular, como a pretendida pelo cenário do PBB.

Uma forma de construir explicitamente uma ação gravitacional efetiva que garanta que os invariantes físicos serão sempre finitos é dada nas Refs. [43, 44]. A ação resultante inclui uma combinação particular de invariantes quadráticos do tensor de Riemann, além da ação usual de Einstein-Hilbert. Esse termo é tal que, em grandes curvaturas, força todas as soluções das equações de movimento a tenderem ao espaço-tempo de de Sitter, tornando-as assim não-singulares. O modelo obtido desta forma é portanto uma teoria de gravitação particular baseada em termos com derivadas de ordem superior, como pretendido.

Como já foi mencionado, uma dificuldade adicional da abordagem perturbativa para o problema da singularidade cosmológica é que espera-se que a expansão perturbativa deixe de ser válida em escalas de energia menores do que as necessárias para "suavizar" a singularidade. As Refs. [43, 44] também tratam este problema, garantindo que haja um valor máximo de curvatura permitido em um modelo cosmológico dado usando uma técnica similar a aplicada para eliminar as singularidades. Com isto, foi possível evitar a inclusão de correções quânticas e a teoria clássica de ordem superior obtida é auto-consistente. Neste capítulo, contudo, a atenção será voltada apenas para o problema da singularidade. Não foi imposto qualquer limite sobre a curvatura além daquele associado à remoção da sin-

gularidade e que garante que, para qualquer solução obtida, a curvatura terá um limite superior.

A abordagem mais simples para achar uma cosmologia não-singular é adicionar um invariante I_2 à ação com a propriedade de que $I_2 = 0$ é verdade se e somente se o espaço-tempo é de Sitter. Inserindo-se I_2 na ação gravitacional via um multiplicador de Lagrange ψ com um potencial escolhido para assegurar que este invariante se anule a grandes curvaturas, permite-se impor que todas as soluções tendam à de de Sitter nestes regimes de curvatura. Para espaços-tempos homogêneos e isotrópicos, uma escolha de I_2 que satisfaz esta condição é (ver também o Apêndice A)

$$I_2 = \sqrt{4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - R^2}. \quad (3.2)$$

Na sua forma mais simples, a ação resultante é

$$S(g_{\mu\nu}, \psi) = \int d^4x \sqrt{-g} (R + \psi I_2 + V(\psi)) \quad (3.3)$$

onde $V(\psi)$ é uma função a ser escolhida de modo à ação ter a TRG como o limite para pequenas curvaturas (quando $\psi \rightarrow 0$). Note-se que o campo multiplicador de Lagrange não tem significado físico independente. Em si mesmo, ele não representa nem uma simetria particular, nem algum campo de matéria. O seu papel na ação é representar o vínculo físico (neste caso o limite superior sobre o invariante I_2) que está sendo imposto sobre o sistema. Para $|\psi| \rightarrow \infty$ a equação de vínculo força $I_2 \rightarrow 0$.⁴

No caso tratado aqui, com resultados da Ref. [42], são investigadas as consequências da adição dos mesmos termos de ordem superior das derivadas à ação da cosmologia do PBB. É examinado se tais termos podem eliminar as singularidades e produzir uma passagem suave entre as fases de contração e expansão do universo do PBB. O principal resultado obtido é que é possível achar um potencial $V(\psi)$ para os multiplicadores de Lagrange que assegura que todas as soluções cosmológicas desta ação estendida para a gravitação dilatônica são não-singulares. É também mostrado que existe uma classe de soluções correspondentes a

⁴Uma descrição talvez mais didática deste método pode ser encontrada no Apêndice B

um universo em contração que são suavemente conectadas a uma fase FRW expansionista. Mais ainda, isto ocorre mesmo com a ausência de curvatura espacial. Este modelo, portanto, constitui uma implementação bem sucedida do programa do PBB.

3.3 Ação e equações de movimento

A dinâmica do modelo é determinada pela ação para a gravitação dilatônica no referencial de Einstein, Eq. (3.1), à qual é somado um termo de derivadas de ordem superior dado por I_2 analogamente ao que foi feito sem o dilaton nas Refs. [43, 44]:

$$S = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ R - \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + c \psi e^{\gamma \phi} I_2 + V(\psi) \right\}. \quad (3.4)$$

Por completeza, um acoplamento geral entre o invariante I_2 e o dilaton será considerado. O acoplamento mínimo corresponde a fazer a constante γ igual a zero. A constante c serve para redimensionar o campo multiplicador de Lagrange ψ e será escolhida de modo a simplificar as equações de movimento.

Restringindo o modelo a métricas homogêneas e isotrópicas (1.1) as equações de movimento de (3.4) serão

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \gamma c \psi e^{\gamma \phi} \sqrt{12} \left(\frac{k}{a^2} - \dot{H} \right) &= 0, \\ \dot{H} &= \frac{k}{a^2} - \frac{e^{-\gamma \phi}}{c\sqrt{12}} \frac{\partial V}{\partial \psi}, \\ 6\frac{k}{a^2} + 6H^2 - \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\psi) &= \\ c e^{\gamma \phi} \sqrt{12} \left[3H^2 \psi - \frac{k}{a^2} \psi + H(\dot{\psi} + \gamma \dot{\phi} \psi) \right], \end{aligned} \quad (3.5)$$

com os pontos denotando derivadas com respeito ao tempo t , como usual.

Busca-se aqui não necessariamente um modelo final (algo que este certamente não é), mas sim verificar a possibilidade de realização de uma cosmologia inspirada pelo dilaton com as características desejáveis no âmbito do PBB (um universo que “quica” em torno de um mínimo do fator de escala). Assim, como passo inicial será mais conveniente tratar de universos espacialmente planos, e será considerado que o parâmetro de curvatura é nulo

($k = 0$). Também com o propósito de simplificar as equações será considerado o acoplamento mínimo entre ϕ e I_2 , o que fixa $\gamma = 0$. E para simplificar a notação escolhe-se $c\sqrt{12} = 1$. As equações de movimento resultantes serão

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= -3H\psi + 6H - \frac{1}{H} \left[\frac{1}{2}\dot{\chi}^2 + V(\psi) \right], \\ \dot{H} &= -V'(\psi), \\ \dot{\chi} &= -3H\chi,\end{aligned}\tag{3.6}$$

com $\chi = \dot{\phi}$ e a linha ($\dot{}$) significando derivadas com respeito a ψ .

Agora é necessário estabelecer os vínculos físicos que devem ser impostos sobre o potencial $V(\psi)$ para que as condições desejadas sejam satisfeitas. Para pequenas curvaturas, os termos na ação (3.4) que dependem de ψ têm que ser desprezíveis quando comparados aos termos usuais da gravitação dilatônica. Isto é assegurado se

$$V(\psi) \sim \psi^2 \quad |\psi| \rightarrow 0\tag{3.7}$$

pois a região de pequenos valores de $|\psi|$ corresponderá ao domínio de baixas curvaturas [44]. Para implementar a hipótese limitadora de curvatura, o invariante I_2 deve tender a zero de modo à métrica $g_{\mu\nu}$ tender à de de Sitter no limite de grandes curvaturas. A variação da ação com respeito a ψ fornece a equação de vínculo (segunda equação de (3.6)). É desta equação que o limite sobre grandes curvaturas deve ser imposto. No espaço-tempo de de Sitter, $\dot{H} = 0$, de modo que a equação de vínculo impõe que

$$V(\psi) \rightarrow \text{const} \quad |\psi| \rightarrow \infty.\tag{3.8}$$

As condições (3.7) e (3.8) são as mesmas empregadas nas Refs. [43, 44], mas não são suficientes para limitar o potencial como pretendido aqui. Para obter uma solução que reexpanda após uma contração (com um valor mínimo para o fator de escala $a(t) = a_b$) é necessário impor um terceiro critério: as equações devem permitir uma configuração com $H(a_b) = 0$ e $\psi \neq 0$. Da equação de movimento para ψ em (3.6) segue que $V(\psi)$ tem que se tornar negativo para grandes curvaturas (e valores suficientemente altos de $|\psi|$, supondo

que ele seja positivo para $|\psi|$ pequeno. De outro modo, a primeira equação de (3.6) poderia exibir uma divergência em torno de a_+ . Seja ψ_b o zero não trivial de $V(\psi)$:

$$V(\psi_b) = 0. \quad (3.9)$$

Na ausência do dilaton, ψ_b corresponderá ao valor de ψ no mínimo de $a(t)$ (quando o universo inicia a expansão). Incluindo o campo ϕ na ação, o valor de $|\psi|$ neste mínimo dependerá de χ e será maior do que $|\psi_b|$.

Um potencial simples que satisfaz a condições (3.7), (3.8) e (3.9) é

$$V(\psi) = \frac{\psi^2 - a\psi^4}{1 + b\psi^4}, \quad (3.10)$$

onde os coeficientes a e b são números positivos, em princípio arbitrários, que serão definidos aqui como sendo

$$a = \frac{1}{16} \quad \text{e} \quad b = \frac{1}{32},$$

apenas para tornar a discussão abaixo mais clara. Note que o potencial usado nas Refs. [43, 44], um pouco mais simples, não satisfaz a condição (3.9).

3.4 Diagramas de fase das soluções sem o dilaton

As condições (3.7) - (3.9) sobre o potencial $V(\psi)$ da seção anterior são necessárias, mas não suficientes para obter uma cosmologia não-singular. Tais condições garantem que todas as soluções com valores grandes de $|\psi|$ são não-singulares, mas a incompletude geodésica das soluções que se mantenham sempre dentro de uma faixa de valores baixos de $|\psi|$ ainda é possível e tem que ser estudada. Nesta seção será determinado o espaço de fase, o plano (ψ, H) do modelo sem o dilaton. Serão usados métodos analíticos e numéricos para estudar as trajetórias das soluções de (3.6) no plano de fase e então será mostrado explicitamente a ausência de singularidades. Isto significa que a ação (3.4) representa mais um exemplo de gravitação de ordem superior completamente não-singular. Além disso, diferentemente

do modelo das Refs. [43, 44], pode-se mostrar que este caso, mesmo sem dilaton, admite soluções que passam suavemente de uma fase em contração para uma fase em expansão.

Há vários pontos especiais e curvas no plano de fase (ψ, H) . Primeiro, o ponto $(\psi, H) = (0, 0)$ corresponde ao espaço-tempo de Minkowski. O potencial $V(\psi)$ se anula neste ponto, mas também se anula nos pontos

$$\psi_b = \pm 4. \quad (3.11)$$

Como discutido anteriormente, os pontos $(\psi_b, 0)$ correspondem aos pontos de retorno das trajetórias cosmológicas.

A derivada de $V(\psi)$, e portanto $\dot{H}$, anula-se para os valores

$$\psi_d = \pm 2. \quad (3.12)$$

As linhas do plano de fase (ψ_d, H) são portanto linhas ao longo das quais $\dot{H} = 0$.

Para mostrar que o ponto $(\psi, H) = (4, 0)$ é mesmo um ponto de retorno, pode-se expandir a equação de movimento de ψ em torno de $H = 0$, o que implica (ver (3.6))

$$H\dot{\psi} = -V. \quad (3.13)$$

Assim, ao se cruzar o eixo $H = 0$, o sinal de $\dot{\psi}$ muda. Soluções com contração e com $2 < \psi < 4$ têm $\dot{\psi} > 0$ e aproximam-se do ponto $(4, 0)$ em um tempo finito (pois $\dot{H}$ é positivo e não tende a zero) e emergem com $H > 0$ como trajetórias expansionistas enquanto a curvatura diminui (pois $\dot{\psi} < 0$). As trajetórias no plano de fase são simétricas em torno do eixo $H = 0$

Agora, expandindo as equações em torno da origem do plano de fase, obtém-se que

$$\frac{d\psi}{dH} \simeq \frac{1}{2H} \left(\psi - \frac{6H^2}{\psi} \right), \quad (3.14)$$

da qual pode-se ver que existem linhas críticas localizadas em

$$\psi_c(H) = \pm \sqrt{6}H. \quad (3.15)$$

Tomando-se apenas as soluções em contração, a equação de movimento para $\dot{H}$ reduz-se a

$$\dot{H} \simeq -2\psi. \quad (3.16)$$

Figura 3.1: Diagrama de fase para as soluções das equações de movimento, com a energia cinético do dilaton (χ) nula. O parâmetro de Hubble H é representado no eixo vertical, enquanto ψ corresponde ao eixo horizontal.

Consequentemente, trajetórias que se localizam acima da linha crítica têm $\dot{H} < 0$ e (da Eq. (3.14)) $\dot{\psi} > 0$. Estas trajetórias então apontam na direção da linha $\psi = 2$ na qual $\dot{H}$ inverte o sinal. Desde que não cruzem a linha crítica, as soluções que se iniciam nesta região do plano de fase são portanto candidatas a universos espacialmente planos com a característica pretendida, com contração e expansão sucessivas (normalmente modelos com este comportamento têm $k = 1$ nas equações de movimento).

Soluções abaixo da linha crítica têm $\dot{\psi} < 0$, portanto não exibirão o retorno à expansão. Note-se que a linha crítica em si não é uma trajetória da dinâmica do modelo. De fato, sobre a linha crítica, as trajetórias apontam na direção vertical, pois $d\psi/dH = 0$. Há uma linha separatriz entre as trajetórias do plano de fase que se inicia próximo à origem tende a $\psi = 2$ (e são portanto candidatas a universos com retorno) e aquelas trajetórias que cruzam a linha crítica $\psi_c(H)$ se encurvam, ou seja, tornam-se soluções com $\dot{\psi} < 0$. Para determinar a localização da linha separatriz, é suficiente resolver as equações (3.6) em torno da origem

do plano de fase para $|H| \ll \psi$, que é o caso no qual a equação variational com respeito a ψ em (3.6) torna-se

$$H\dot{\psi} \simeq -\psi^2, \quad (3.17)$$

e que deve ser resolvida juntamente com (3.16). Após a diferenciação de (3.16) com respeito ao tempo e substituindo (3.17) para eliminar $\dot{\psi}$, obtém-se que a equação

$$H\ddot{H} - \frac{1}{2}\dot{H}^2 = 0, \quad (3.18)$$

a qual tem solução

$$H(t) = -mt^2, \quad (3.19)$$

sendo m uma constante que rotula as diferentes trajetórias. A segunda solução de (3.18) é $H(t) = \text{const}$ e é, portanto, sem interesse. Da Eq. (3.16) segue que para a solução acima

$$\psi(t) = mt. \quad (3.20)$$

As equações (3.19) e (3.20) fornecem as soluções para as equações dinâmicas em torno da origem do espaço de fase, desde que $|H| \ll \psi$. Para se ter uma idéia de onde se localiza a linha separatriz, pode-se impor que a trajetória fique acima da linha crítica em $\psi = 2$. Esta condição implica que

$$|H| = \frac{1}{m}\psi^2, \quad (3.21)$$

com $m \geq 4\sqrt{2}$. Fazendo-se $m = 4\sqrt{2}$ em (3.21) pode-se obter uma primeira estimativa de localização da linha separatriz. Uma vez que o conjunto de trajetórias próximas à origem é rotulado pelo parâmetro m , segue de (3.21) que o conjunto de universos com contração precedendo expansão e partindo das proximidades do espaço-tempo de Minkowski têm medida finita. Quando $\psi = \pm 2$, $\dot{H}$ inverte o sinal. Soluções em contração que começam de pontos próximos à origem no plano de fase chegam ao valor máximo de $|H|$ em $\psi = 2$. O que acontece posteriormente com tais trajetórias depende do valor de $|H|$ para $\psi = 2$. Se

$$|H(\psi = 2)| \ll 1, \quad (3.22)$$

então (3.13) fornece uma boa aproximação para a dinâmica na região $2 < \psi < 4$, e conclui-se então que as trajetórias "quicam". Usando $|H| = \psi^2/m$ (ver (3.21)), a condição (3.22) torna-se

$$m \gg 4, \quad (3.23)$$

a qual é consistente com a condição anterior (3.21) para as trajetória com contração seguida de expansão.

Trajetoórias com $|H(\psi = 2)| \gg 1$ também atingem o seu valor máximo de $|H|$ em $\psi = 2$, mas elas não "quicam" porque a equação de movimento para ψ pode agora ser aproximada por

$$\dot{\psi} \simeq -3H\psi, \quad (3.24)$$

o que implica que ψ mantém-se crescendo indefinidamente. Em combinação com a equação para H em (3.6), a qual resulta em

$$\dot{H} \simeq 0 \quad (3.25)$$

para $|\psi| \gg 4$, vê-se que as soluções tendem a ser do tipo de Sitter em contração. Soluções abaixo da linha crítica têm $\dot{\psi} < 0$ e não exibem a mudança de sinal em H . Para valores de ψ que tendam a $\psi = 2$, as duas linhas críticas divergem para $|H| \rightarrow \infty$. Isto pode ser visto a partir da equação para ψ em (3.6). Para valores grandes de $|H|$, o lado direito desta equação é dominado pelos primeiros dois termos. Na ausência do terceiro termo, a solução de $\dot{\psi} = 0$ que determina a linha crítica seria $\psi = 2$. O terceiro termo, entretanto, provoca uma correção pequena, mas de sinal positivo, para o primeiro termo (no quadrante inferior direito do plano de fase) desviando assim a linha crítica ligeiramente para a esquerda de $\psi = 2$, satisfazendo

$$-3H\psi + 6H - \frac{1}{H}V = 0. \quad (3.26)$$

Para provar que todas as soluções das equações (3.6) são não-singulares, é necessário mostrar que as soluções tendem assintoticamente ou para a origem (espaço-tempo de Minkowski), ou para o espaço-tempo de de Sitter (as regiões com $|\psi| \rightarrow \infty$). Soluções

para as quais $|H| \rightarrow \infty$ para $|\psi|$ finito têm que ser excluídas. As regiões ao longo das linhas críticas são as únicas que podem corresponder a trajetórias singulares. Contudo, diferenciando a equação de movimento para ψ com relação ao tempo, calculando o resultado ao longo da linha crítica e fazendo uso de (3.26), encontra-se

$$\ddot{\psi} = -V' \frac{2V}{H^2} < 0. \quad (3.27)$$

Portanto, a linha crítica não é um atrator, mas ao contrário, as trajetórias tendem a divergir da linha e vão assintoticamente para a região de Sitter.

As equações de movimento (3.6) também foram resolvidas numericamente. O diagrama de fase resultante é mostrado na Figura 3.1. A ausência de soluções singulares é manifesta. Nas regiões assintóticas $|\psi| \gg 4$, todas as soluções tendem ao espaço de de Sitter. As linhas críticas são vistas como soluções em contração sendo repelidas na direção das regiões de Sitter assintóticas. A classe mais interessante de soluções é a que exhibe o retorno do universo à expansão. Como foi dito, este tipo de soluções forma um conjunto de medida finita que partem das proximidades da origem do plano de fase. Há também soluções que “oscilam” em torno do espaço-tempo de Minkowski. Essas soluções serão melhor discutidas na próxima seção, uma vez que se espera que elas sejam fortemente perturbadas pela presença de matéria, em particular o dilaton.

3.5 Efeitos do dilaton

Na presença do dilaton, o espaço de fase torna-se tridimensional $(\psi(t), H(t), \chi(t))$, e é portanto mais dificilmente discutido com argumentos analíticos. Para começar, convém notar que no referencial de Einstein o dilaton corresponde a um campo escalar sem massa com equação de estado

$$p_\phi = \rho_\phi, \quad (3.28)$$

onde p_ϕ e ρ_ϕ denotam pressão e densidade de energia, respectivamente. Isto significa que

$$\rho_\phi(t) \propto a(t)^{-6} \quad (3.29)$$

Figura 3.2: Uma solução específica com contração seguida de expansão com uma contribuição não trivial do dilaton é representada graficamente. a) mostra a evolução de H como função do tempo, b) indica a de $a(t)$, c) a de $\chi(t)$ e d) a de $\psi(t)$.

Assim, como no caso estudado em [44], o dilaton não introduzirá singularidades no sistema. De fato, da equação de movimento para H (ver (3.6)) segue que, na região com grandes valores de $|H|$, a presença de χ não mudará as trajetórias do plano de fase projetado no plano (ψ, H) (uma propriedade chamada de “liberdade assintótica” em [44]). Porém, a presença de χ acelerará muito a evolução temporal de ψ na trajetória (ψ, H) que for dada. No caso das soluções do tipo de Sitter contraindo isto pode ser visto mais claramente, pois neste caso ocorre um crescimento exponencial de χ (ver a equação de movimento para χ em (3.6)). Neste caso, demonstra-se que o termo χ^2 domina a evolução de ψ se este assumir grandes valores em módulo.

O efeito de χ sobre as trajetórias projetadas no plano (ψ, H) também podem ser estudados. O papel das linhas $\psi = \pm 2$ permanece inalterado: elas correspondem aos máximos de $|H|$ para uma dada trajetória. Contudo, a condição para haver mudança de sinal de H muda. Em vez de $V(\psi_b) = 0$, agora segue de (3.6) que a condição torna-se

$$\frac{1}{2}\chi^2 + V(\psi_b) = 0. \quad (3.30)$$

Assim, $|\psi_b|$ é deslocado para um valor maior e dependente do dilaton. Note que para valores muito altos de $|\chi|$ para os quais a equação acima não tem solução, não haverá passagem de contração para expansão.

A presença de χ também muda as linhas críticas. Para um valor fixo de ψ , a condição $\dot{\psi} = 0$ que determina a linha crítica ocorre para um valor maior de $|H|$ do que no caso sem χ , como pode ser visto a partir da equação de movimento de ψ (3.6). Além disso, para um par (ψ, H) inicial fixo, o valor de $\dot{\psi}$ para soluções em contração é maior com $\chi \neq 0$ do que com $\chi = 0$. Assim, conclui-se que a adição de um pequeno valor para χ aumenta a faixa de condições iniciais no plano (ψ, H) que contraem e expandem. E mais, quanto maior o valor de χ , maior será o efeito (pelo menos enquanto (3.30) ainda tiver uma solução).

Um aspecto interessante do caso com o dilaton é que soluções com colapso na presença de um $|\chi|$ pequeno evoluem genericamente para uma fase expansionista do universo. Considere-se condições iniciais com um χ pequeno mas positivo, as quais localizem-se abaixo

da linha separatriz no plano (ψ, H) e que inicialmente “oscilam” em torno do espaço-tempo de Minkowski. Como, de (3.6),

$$\ddot{H} = -V'\dot{\psi}, \quad (3.31)$$

e uma vez que $\dot{\psi} > 0$ para estas trajetórias, elas não “quicam” em torno de $H = 0$ mas sim iniciam um novo ciclo com $H < 0$. Como $H \leq 0$ em todos os tempos, $\chi(t)$ cresce até atingir um valor suficientemente alto de modo que a trajetória cruza a “separatriz” no plano (ψ, H) e evolui até $\psi = 2$, para uma passagem bem sucedida para a fase FRW. Um exemplo de trajetória deste tipo é mostrado na Figura 3.2.

Agora está claro que é possível construir condições iniciais nas quais o universo está inicialmente contraindo dominado pelo dilaton e evolui para uma fase FRW. Por exemplo, pode-se assumir condições iniciais para (ψ, H, χ) como sendo aquelas da solução (na Figura 3.2) que corresponde ao final do ciclo precedente à entrada na fase FRW. Este modelo consiste então numa implementação bem sucedida do tipo de evolução postulada pela cosmologia do PBB. Note que após a entrada na fase FRW, o dilaton tende a uma constante e torna-se rapidamente irrelevante para a evolução desta fase. Este aspecto diferencia este modelo de outras abordagens que tentam prover uma passagem contínua entre as duas fases no contexto do PBB. Nos demais casos, o dilaton continua a crescer ao longo da expansão, e a teoria assintótica resultante não é a TRG, com G constante, como necessário.

3.6 Conclusão

Foi mostrado neste capítulo que a técnica de limitação de curvatura via multiplicadores de Lagrange das Refs. [43, 44] pode ser aplicada em uma cosmologia dilatônica para produzir soluções com continuidade entre uma fase de contração e outra em expansão. Em particular isto permitiu implementar um modelo que satisfaz com sucesso a evolução qualitativa pretendida pelo programa do PBB.

O estudo das trajetórias no espaço de fase mostrou analítica e numericamente que todas

as soluções das equações de movimento derivadas da ação (3.4) são não-singulares. Foi justificada uma classe de trajetórias que se iniciam de pontos próximos à origem do espaço de fase e que apresentam o comportamento desejável de mudança de sinal do parâmetro de Hubble com e sem o dilaton. É interessante que a inclusão do dilaton aumenta a fração do espaço de fase para as quais as soluções exibem este comportamento. Mas também é relevante que a exclusão do dilaton ainda permita a obtenção de tais soluções, mostrando que este modelo é uma outra proposta de cosmologia com termos de ordem superior nas derivadas da métrica que exibe comportamento não-singular. Este tipo de abordagem pode indicar caminhos na busca de novos termos na ação efetiva das cordas fundamentais que se justifiquem por sua viabilidade física.

Convém ressaltar que este trabalho não discute o problema de fixar o valor do dilaton para tempos muito grandes nem responde às recentes objeções levantadas contra o cenário do PBB [51]. Uma objeção natural mais dirigida a este trabalho é que os termos extras na ação são postos à mão em vez de serem derivados de uma teoria fundamental. Há, contudo, algumas justificativas para seguir esta abordagem. Primeiro, é geralmente esperado que os invariantes físicos tenham que ser limitados em teoria de cordas [45]. Isto significa que, para grandes curvaturas, tal comportamento deveria se refletir na ação efetiva para a gravidade, e a ação proposta aqui é uma maneira simples de se obter quantidades limitadas. Segundo, termos de derivadas de ordem superior surgem inevitavelmente em teorias efetivas de gravitação, tais como as resultantes de teoria de cordas, de outras abordagens de gravitação quântica ou da quantização de campos de matéria em espaços curvos. Apesar de não ser diretamente derivada da teoria de cordas, a ação considerada aqui demonstra que um conjunto específico de correções de curvatura mais alta pode tanto assegurar que todos os invariantes físicos permaneçam finitos quanto produzir um universo consistente com a simetria dual do fator de escala, pois apresenta uma fase de expansão após uma contração.

Por fim, vale notar que, apesar deste trabalho ter se limitado a estudar soluções no referencial de Einstein, a sua extensão para o referencial das cordas foi proposta recentemente

por Easson e Brandenberger [52] com resultados similares aos dados aqui e usando o mesmo potencial (3.9). O fato do mesmo vínculo fornecer resultados similares em referenciais diferentes pode ser uma indicação da robustez da técnica empregada aqui.

Capítulo 4

Cosmologias com decaimento do vácuo

4.1 Termo cosmológico variável

Modelos fenomenológicos com Λ variável se propõem a explicar senão o porquê da constante cosmológica ser tão pequena, pelo menos como ela chegou a este valor. Nessas propostas o termo cosmológico é suposto uma função definida do tempo, sendo então suas consequências investigadas. Como em qualquer abordagem deste tipo, não há preocupação em extrair uma teoria a partir de primeiros princípios, mas tão somente *reproduzir* a evolução do universo levando em conta a variação temporal do termo cosmológico. Note-se que a divergência nula do tensor de Einstein (ver Eq. (1.5)) e a variação temporal do termo cosmológico implicam uma troca de energia entre o vácuo e a matéria, ou seja, de (1.7):

$$u_\mu T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = -\frac{u^\mu \Lambda_{;\mu}}{8\pi G}. \quad (4.1)$$

Nos modelos que consideraremos nesta tese, esta troca de energia se dá através de criação de matéria. Entretanto, convém notar que existem hoje vários modelos com variação temporal da “constante cosmológica” que na verdade se tratam de campos escalares (às vezes chamados de “quintessência”) e que não envolvem esta transferência de energia entre

os campos.¹ Uma compilação impressionante das dezenas de modelos com decaimento de Λ propostos pode ser encontrada no artigo de revisão de Overduin e Cooperstock [53]. Abaixo serão descritos alguns modelos mais diretamente relacionados aos resultados apresentados neste capítulo.

Praticamente precursores da aborgem de modelos fenomenológicos com decaimento do vácuo, Özer e Taha [54] apresentaram um modelo no qual são propostas as seguintes hipóteses: i) em algum estágio primordial da sua evolução, o universo expandiu produzindo entropia (ao contrário do modelo padrão, adiabático) devido à variação de Λ e ii) a densidade de energia do fluido que preenche o universo (matéria e/ou radiação), é sempre igual à densidade crítica $\rho_c = 3H^2/8\pi G$. Com estas suposições, pode-se encontrar a lei específica de variação do termo cosmológico como função do fator de escala:

$$\Lambda(a) = \frac{3}{a^2}. \quad (4.2)$$

Este modelo descreve um universo com origem não-singular e sem os problemas de condições iniciais do modelo padrão. Neste caso, o problema da constante cosmológica se reduz a encontrar uma teoria que imponha que $\rho = \rho_c$, já que o valor de $\Lambda(a_0)$ obtido por Özer e Taha é bem menor do que os limites observacionais. A dificuldade de se justificar esta restrição sobre ρ foi considerada a principal objeção a este modelo [55].

Admitindo a hipótese de um termo cosmológico variável, mas em um desenvolvimento independente do de Özer e Taha, Freese *et al.* [56] fizeram uma análise detalhada de uma classe de modelos caracterizada pelo parâmetro

$$x = \frac{\rho_v}{\rho_r + \rho_v}, \quad (4.3)$$

onde ρ_v é a densidade de energia do vácuo e ρ_r é a densidade de energia da radiação. Como restrição sobre o modelo, Freese *et al.* assumiram a existência de um estágio inflacionário primordial, de modo que o universo apresenta seções espaciais planas ($k = 0$). Além disso,

¹Modelos com campos escalares acoplados serão considerados no próximo capítulo.

foram usadas as hipóteses de que o vácuo decai apenas em radiação² e que, para valores suficientemente altos do tempo cosmológico t , ρ_v e ρ_r são não nulos e decaem à mesma taxa, de modo que o parâmetro x tende a um valor constante. Pode-se mostrar que neste caso,

$$\Lambda = 3xH^2.$$

Buscando impor limites sobre x , foram avaliadas as consequências do decaimento do vácuo sobre as abundâncias dos elementos leves produzidos na nucleossíntese primordial, bem como possíveis distorções no espectro da radiação cósmica de fundo (no caso de se admitir que a radiação produzida pelo decaimento do vácuo não tenha espectro planckiano). A conclusão do trabalho é que o modelo só é consistente com os limites observacionais se o universo não for dominado por ρ_v para tempos $t > 1 \text{ seg}$. Isto porque, dada a compatibilidade entre as previsões do modelo padrão e os resultados observacionais das abundâncias dos elementos leves, $x \leq 0,1$. Considerando-se que o espectro da radiação produzida pelo decaimento do vácuo é não planckiano, obtém-se limites ainda mais restritivos ($x \lesssim 10^{-4}$). Mais recentemente, Birkel e Sarkar [57] reestudaram os limites sobre x extraídos de observações de abundâncias dos elementos leves e chegaram a um limite um pouco menos restritivo ($x \leq 0,13$). Quanto ao limite obtido das distorções da radiação de fundo, Lima [58] fez uma análise termodinâmica do decaimento do vácuo e mostrou que se a entropia específica da radiação for constante ao longo do decaimento, o espectro planckiano é mantido sem distorções. Esta condição equivale, na maioria dos casos, à condição de termalização entre o banho térmico e os produtos do decaimento.

Uma outra possibilidade de lei fenomenológica foi sugerida por Gasperini [59]. Esta proposta é baseada em um trabalho de Gibbons e Hawking [60] onde é dada uma ligação

²Freese *et al.* argumentam que, caso o vácuo decaia em bárions na era da matéria e vale a lei de conservação do número bariônico, tais partículas deveriam ser produzidos em pares bárions-antibárions, de modo que os limites observacionais sobre o fluxo isotrópico de raios- γ praticamente descartariam esta forma de decaimento. O que eles não levam em conta é a possibilidade do decaimento em matéria escura.

entre a constante cosmológica e a temperatura do vácuo no espaço-tempo de de Sitter:

$$T_v = \left(\frac{\Lambda}{12\pi^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.4)$$

sendo T_v a temperatura da radiação térmica isotrópica detectada por observadores geodésicos neste espaço-tempo. Gasperini estende este resultado, supondo que ele é válido para qualquer instante t em modelos do tipo FRW com termo cosmológico e propõe que T_v , ou equivalentemente Λ (via (4.4)), decaem como funções do fator de escala. Neste caso, supondo que o vácuo acopla apenas com a radiação, pode-se obter a seguinte lei fenomenológica (compatível com a condição $x = \text{const.}$ em (4.3)):

$$\Lambda = \frac{12\pi^2 b^2}{a^{2n}}, \quad (4.5)$$

onde b e n são parâmetros a serem determinados. Adotando os limites obtidos por Freese *et al.* sobre o parâmetro x e supondo que T_v é sempre positiva, Gasperini encontra que $9/5 < n < 2$ e que $\Lambda_0 \lesssim 10^{-127} m_{\text{pl}}^2$, bem dentro dos limites observacionais.

Abandonando a restrição $\rho = \rho_c$ usada por Özer e Taha, Chen e Wu [61] apresentaram um modelo no qual é também proposta uma dependência de Λ com a^{-2} , obtida a partir de argumentos dimensionais compatíveis com a cosmologia quântica. De acordo com Chen e Wu, esta teoria sugere escrever o termo cosmológico como proporcional à densidade de Planck ρ_{pl} . Além disso, é comum admitir em cosmologia quântica [61] que a evolução do termo cosmológico é mais convenientemente descrita pelo fator de escala a , no lugar da idade do universo. Supondo que não há mais parâmetros relevantes, Chen e Wu propõem que o *ansatz* mais natural é que o vácuo decai de acordo com uma lei de potência do fator de escala:

$$\Lambda(a) \propto \rho_{\text{pl}} \left(\frac{r_{\text{pl}}}{a} \right)^n, \quad (4.6)$$

onde r_{pl} é o comprimento de Planck. A escolha $n = 2$ é justificada pelo fato de qualquer outro valor de n na equação acima levar ao aparecimento de uma potência positiva ou negativa de $\hbar$ em e , portanto, nas equações (clássicas) da relatividade geral. Em outras palavras, este é justamente o valor de n necessário para reaver o limite semiclássico $\hbar \rightarrow 0$

nas equações de Einstein. Com $n = 2$, a Eq. (4.6) pode ser reescrita em uma forma similar à de Özer e Taha

$$\Lambda(a) = \frac{\gamma}{a^2}, \quad (4.7)$$

onde γ é um número da ordem da unidade que, em princípio, pode ser estimado a partir de dados observacionais. Este argumento é similar ao empregado em mecânica quântica elementar para estimar o estado fundamental de energia do átomo de Hidrogênio E_0 [61]. Por razões dimensionais, pode-se escrever E_0 como o produto entre a massa de repouso do elétron $m_e c^2$ e uma potência da constante adimensional de estrutura fina $\alpha_e = e^2/\hbar c$. Lembrando que este é um sistema não relativístico, a velocidade da luz não deveria aparecer explicitamente na expressão para E_0 . Isto requer que seja usada uma potência $n = 2$ de α_e , de modo que $E_0 \propto m_e e^4/\hbar^2$, como calculado usando a mecânica quântica.

Supondo que o vácuo decai na componente dominante do fluido que preenche o universo nas eras da radiação e da matéria, Chen e Wu apontam como resultado favorável ao seu modelo (além de reformular o problema da constante cosmológica) o fato dele aliviar os problemas da idade e do parâmetro de densidade, consequências do cenário inflacionário (ver Cap. 1). Além disso, a lei (4.7) prevê uma taxa de criação de matéria comparável à do modelo de estado estacionário [8], o que forneceria um teste experimental para o modelo.³ Como o modelo de Chen e Wu admite soluções singulares e não-singulares, Abdel-Rahman [55] apresentou um modelo no qual é empregada a mesma lei (4.7), mantendo a produção de entropia, mas com a restrição de que não haja singularidade inicial. Com isto, pôde-se obter um modelo que retém as vantagens do de Özer e Taha sem a necessidade de impor que $p = p_c$.

³Naturalmente, Chen e Wu assumem que o vácuo não decai em pares bárion-antibárion, evitando assim os limites impostos pelas medidas da radiação γ isotrópica.

4.2 Um caso geral

Uma extensão dos argumentos dimensionais de Chen e Wu foi sugerida por Carvalho *et al.* [62] e uma lei mais geral para o decaimento de Λ foi obtida. Por completeza, nesta seção esta proposta será apresentada como caso particular do modelo da Ref [63]. Assumindo que o termo cosmológico deva depender de uma escala de tempo cosmológica, pode-se escrever

$$\Lambda \propto \frac{1}{t_{\text{pl}}^2} \left(\frac{t_{\text{pl}}}{t_H} \right)^m, \quad (4.8)$$

onde $t_H \approx H^{-1}$ é o tempo de Hubble. Seguindo em parte Chen e Wu, e supondo Λ não dependa explicitamente de $\hbar$, encontra-se também neste caso que $m = 2$. Mas para reter o caso de Gasperini como limite, será usada uma potência genérica de $a(t)$. Com isto em mente, considera-se um termo cosmológico que varia da forma

$$\Lambda = 3\beta H^2 + \frac{3\alpha}{a^n}, \quad (4.9)$$

com α , β e n sendo números adimensionais da ordem da unidade (com apenas $c = 1$) e o fator 3 tendo sido incluído por conveniência matemática.

Considerando o elemento de linha de FRW (ver Eq. 1.1) e a lei gama (1.15) como equação de estado para o fluido cósmico, tem-se que a equação de movimento para o fator de escala é dada por

$$a\ddot{a} + \Delta_1 \dot{a}^2 + \Delta k - \frac{3\alpha\gamma a^{2-n}}{2} = 0, \quad (4.10)$$

A integral primeira de (4.10) é uma das seguintes expressões:

$$\dot{a}^2 = Aa^{-2\Delta_1} - \frac{3\alpha\gamma a^{2-n}}{n-2-2\Delta_1} - \frac{\Delta k}{\Delta_1}; \quad \left(\Delta_1 \neq 0, \frac{n-2}{2} \right) \quad (4.11)$$

$$\dot{a}^2 = A - \frac{3\alpha\gamma a^{2-n}}{n-2} - 2\Delta k \ln a; \quad \left(\Delta_1 = 0, \Delta_1 \neq \frac{n-2}{2} \right) \quad (4.12)$$

$$\dot{a}^2 = Aa^{-2\Delta_1} + \frac{3\alpha\gamma}{a^{2\Delta_1}} \ln a - \frac{\Delta k}{\Delta_1}; \quad \left(\Delta_1 = \frac{n-2}{2} \neq 0 \right) \quad (4.13)$$

$$\dot{a}^2 = A + (3\alpha\gamma - 2\Delta k) \ln a; \quad \left(\Delta_1 = \frac{n-2}{2} = 0 \right) \quad (4.14)$$

com $\Delta_1 = \frac{3\gamma(1-\beta)-2}{2}$, $\Delta = \frac{3\gamma-2}{2}$, e A sendo uma constante dependente de γ .

Por simplicidade, não serão considerados os casos particulares $\Delta_1 = 0, \frac{n-2}{2}$. Das equações acima pode-se obter ρ e ρ_v , as densidades de energia da matéria e vácuo, respectivamente

$$\frac{8\pi G\rho}{3} = (1 - \beta)Aa^{-2\Delta_1-2} + \frac{n}{2\Delta_1 + 2 - n} \frac{\alpha}{a^n} - \frac{\beta}{\Delta_1} \frac{k}{a^2}, \quad (4.15)$$

$$\frac{8\pi G\rho_v}{3} = \beta Aa^{-2\Delta_1-2} + \frac{3\gamma - n}{2\Delta_1 + 2 - n} \frac{\alpha}{a^n} - \frac{\beta\Delta k}{\Delta_1 a^2}. \quad (4.16)$$

Naturalmente, as equações acima reproduzem os modelos considerados anteriormente: o modelo padrão ($\alpha = \beta = 0$), modelos com constante cosmológica ($\beta = n = 0$), Özer e Taha ($\beta = 0, \alpha = k = 1$ e $n = 2$), Freese *et al.* ($\alpha = k = 0$) e $\beta = \rho_v/\rho + \rho_v$), Gasperini ($\beta = 0$ e $9/5 < n < 2$), Chen e Wu ($\beta = 0$ e $n = 2$), Carvalho *et al.* ($n = 2$). A utilidade de se usar este conjunto mais complexo de equações é que características genéricas dos modelos particulares ficam mais explícitas neste formato. Por exemplo, soluções singulares e não-singulares estão presentes no conjunto de equações, dependendo do sinal de A . Note-se também que modelos planos e abertos que recolapsam são sempre possíveis. O exemplo mais simples é obtido fazendo $k = 0$, $A > 0$ e $\alpha < 0$. Para $n = 2$, o parâmetro α atua como um parâmetro de curvatura com o sinal invertido [62]. Por esta razão, para valores positivos de α , encontram-se modelos fechados ($k = 1$) nos quais o universo segue em expansão eterna alterando o seu destino com relação aos modelos do tipo Friedmann. Soluções para o caso plano e outros casos particulares foram obtidas na Ref. [63] em termos de hipergeométricas e uma análise mais detalhada do modelos pode ser encontrada lá. No que segue, será discutido apenas o caso relativamente mais simples, com $n = 2$, da Ref. [62] que generaliza todos os outros modelos expostos anteriormente, exceto o de Gasperini.

Em geral, as características físicas do modelo com $n = 2$ são fortemente dependentes dos valores dos parâmetros e dos sinais das constantes de integração. Como no modelo de Chen e Wu, α assume o papel de um parâmetro de curvatura com sinal invertido. Contudo, devido à existência do termo β , surgem algumas modificações importantes com relação a aquele modelo: i) se β for suficientemente grande, a contribuição da densidade de energia da

radiação para a curvatura não pode ser desprezada no universo primordial, como feito por Chen e Wu; ii) β contribui para diminuir a taxa de produção de partículas em comparação ao resultado obtido na Ref. [61] e para aumentar a idade do universo t_0 com relação aos resultados do modelo padrão. Para considerar apenas um exemplo particular, se $k = 3\alpha$ e admitindo um modelo singular ($A > 0, \gamma = 1$), encontra-se que [62]

$$t_0 = \frac{2}{3(1-\beta)} H_0^{-1}, \quad (4.17)$$

que fornece idades compatíveis com os limites observacionais (caso β assumia valores suficientemente altos).

Com relação ao modelo de Freese *et al.*, a principal modificação introduzida pelo parâmetro α diz respeito às predições da nucleossíntese. No caso do modelo de Carvalho *et al.*, o parâmetro x pode ser escrito como (para $k = 0$)

$$x = \beta + \frac{\alpha}{a^2 H^2}, \quad (4.18)$$

que é explicitamente dependente do tempo. Note-se que apenas se $|\alpha|/a^2 H^2 \ll \beta$ na época da nucleossíntese é que o limite $\beta \leq 0,1$ obtido por Freese *et al.* é válido. Conclui-se, portanto, que o parâmetro α pode ter um papel importante na nucleossíntese cosmológica, podendo inclusive permitir valores de β maiores do que 0,1 (particularmente se $\alpha < 0$), o que poderia eventualmente resolver os problemas de idade e do parâmetro de densidade [62].

As relações cinemáticas de distância devem ser confrontadas com os dados observacionais de modo a serem impostos limites sobre os parâmetros livres do modelo. A informação sobre escalas de distâncias cosmológicas é obtida através da observação do desvio para o vermelho da luz emitida pelas fontes distantes. Para calcular tais desvios de frequência, considera-se um observador na origem $r = 0$ do sistema de coordenadas (apenas uma convenção, quando se trata de um universo homogêneo e isotrópico) e imagina-se uma onda eletromagnética propagando-se ao longo da direção $-\tau$, com θ e ϕ constantes. A equação de movimento de

uma dada frente de onda é, de acordo com o elemento de linha de FRW (ver Eq. (1.1))⁴,

$$0 = ds^2 = dt^2 - a^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2}. \quad (4.19)$$

Portanto, se a onda foi emitida por uma fonte localizada nas coordenadas $(t_1, r_1, \theta_1, \phi_1)$, ela alcançará o observador em um instante t_2 e a coordenada radial comóvel da fonte luminosa será dada por

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr}} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{a(t)} = \int_{a_1}^{a_2} \frac{da}{a\dot{a}}, \quad (4.20)$$

onde $a_i \equiv a(t_i)$. A relação distância-luminosidade $\times$ desvio para o vermelho (d_L) é definida como [8]

$$d_L = a_2 r_1 (1 + z). \quad (4.21)$$

Sabendo que o desvio para o vermelho z é definido por $(a_2/a_1) = 1 + z$, pode-se obter (para os modelos planos considerados aqui)

$$d_L = H_0^{-1} (1 + z) \int_{(1+z)^{-1}}^1 \frac{dx}{x [f(x)]^{\frac{1}{2}}}, \quad (4.22)$$

onde $f(x)$ é dada por

$$f(x) = 1 - \frac{2q_0}{1 - 3\beta} + \frac{2q_0}{(1 - 3\beta)x^{1-3\beta}} + \left(1 - \frac{2q_0}{1 - 3\beta}\right) \times \left[\frac{(n-2) \left(1 - \frac{1}{x^{1-3\beta}}\right) - (1 - 3\beta) \left(1 - \frac{1}{x^{n-2}}\right)}{3 - 3\beta - n} \right]. \quad (4.23)$$

Como a distância de diâmetro angular d_A satisfaz a relação $d_A = d_L(1 + z)^{-2}$, as expressões usuais são explicitamente modificadas pela presença dos parâmetros β e n e implicitamente pelo parâmetro α . O exemplo mais simples é estabelecido com $n = 2$. Neste caso, fazendo sucessivamente as substituições de variáveis

$$x^{1-3\beta} = u^2,$$

e

$$\frac{2q_0}{1 - 3\beta} u^2 = \left(\frac{2q_0}{1 - 3\beta} - 1 \right) w^2,$$

⁴Seguindo o procedimento usual de cálculo de distâncias, tal como pode ser encontrado na Ref. [8]

encontra-se

$$d_L = \frac{2H_0^{-1}(1+z)}{1-3\beta} \left(\frac{2q_0}{1-3\beta} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} (\sin^{-1} \alpha_1 - \sin^{-1} \alpha_2), \quad (4.24)$$

neste caso particular, válida para qualquer valor de k e onde

$$\alpha_1 = \left[\frac{1}{(1+z)^{1-3\beta}} \left(1 - \frac{1-3\beta}{2q_0} \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha_2 = \left(1 - \frac{1-3\beta}{2q_0} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Uma análise mais abrangente das consequências dinâmicas deste modelo pode ser encontrada nas Refs. [63, 64].

Um comentário final que poderia ser feito sobre os modelos fenomenológicos discutidos nesta seção é que todos eles carecem de uma descrição contínua unindo o período inflacionário e o atual estágio da evolução do universo. Uma possível solução para esta característica insatisfatória será proposta na próxima seção.

4.3 Modelo deflacionário não-singular

Nesta seção será apresentada uma proposta de dependência temporal de Λ que parece ser melhor motivada do que as anteriores, por tratar diretamente do problema da singularidade inicial e conectá-lo ao problema da constante cosmológica de uma forma explícita.

Em geral, a forma funcional de $\Lambda(t)$ é escolhida extrapolando os valores do termo cosmológico a partir do limite superior Λ_0 observado atualmente. Contudo, uma vez que este valor é remanescente de um desejável estágio inflacionário primordial, uma lei fenomenológica para o decaimento de Λ deveria descrever toda a história cósmica, incluindo aquele estágio (com Λ aproximadamente constante). Neste caso, para modelos não-singulares, um limite superior absoluto para $\Lambda(t)$ seria estabelecido em um instante finito no passado. Em princípio, sua magnitude poderia ser dada por uma teoria mais fundamental que descrevesse os fenômenos gravitacionais na era de Planck.

No que segue, a dependência natural no parâmetro de Hubble $\Lambda \propto H^2$ apresentada nas seções anteriores é estendida e mostra-se como tais leis levam a um modelo cosmológico con-

sistente dirigido pelo decaimento da densidade de energia do vácuo. O cenário inflacionário primordial será gerado pela seguinte lei fenomenológica [65]:

$$\Lambda(H) = 3\beta H^2 + \frac{3(1-\beta)H^{n+2}}{H_I^n}, \quad (4.25)$$

onde H_I^{-1} é uma escala arbitrária de tempo (quando teria ocorrido a fase inflacionária), β é um parâmetro adimensional da ordem da unidade, o fator 3 foi introduzido apenas por conveniência matemática e o n por generalidade. Observe que se $H = H_I$, (4.25) implica que $\Lambda = 3H_I^2$, como requerido para haver inflação, e para grandes tempos cosmológicos $\Lambda \sim 3\beta H^2$, como esperado. Em relação aos modelos fenomenológicos apresentados anteriormente, esta proposta tem a grande vantagem de fornecer naturalmente a dinâmica de todas as fases que supostamente ocorreram durante a evolução do universo, incluindo uma origem não-singular e explicitando a passagem da fase inflacionária para a era da radiação.

No caso de um espaço-tempo descrito pelo elemento de linha de FRW (ver Eq. (1.1)) e no caso plano ($k = 0$), as equações de campo de Einstein para a componente material mais o termo Λ podem ser escritas na forma (Eqs. (1.10) e (1.11)):

$$8\pi G\rho + \Lambda = 3H^2, \quad (4.26)$$

$$8\pi Gp - \Lambda = -2\frac{\ddot{a}}{a} - H^2, \quad (4.27)$$

sendo ρ e p a densidade de energia e pressão do meio material. Considerando a lei gama como equação de estado $p = (\gamma - 1)\rho$ e o termo Λ dado por (4.25), obtém-se de (4.26) e (4.27) a seguinte equação diferencial que governa a evolução do fator de escala:

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{3\gamma(1-\beta)-2}{2}H^2 - \frac{3\gamma(1-\beta)}{2}\frac{H^{n+2}}{H_I^n} = 0. \quad (4.28)$$

A equação acima pode ser reescrita na forma

$$\dot{H} + \frac{3\gamma(1-\beta)}{2}H^2 \left[1 - \left(\frac{H}{H_I} \right)^n \right] = 0, \quad (4.29)$$

cujas solução é dada por

$$H = \frac{H_I}{\left(1 + Ca^{n\frac{3\gamma(1-\beta)}{2}} \right)^{\frac{1}{n}}}, \quad (4.30)$$

onde C é uma constante de integração dependente de γ . Observe que $H = H_I$ é uma solução particular da Eq. (4.29), a qual descreve o espaço-tempo de de Sitter. Esta solução é instável com respeito ao valor crítico $C = 0$ e, como dito anteriormente, ela fornece o maior valor possível para o termo cosmológico variável, i.e., $\Lambda_I = 3H_I^2$.

De (4.25) e (4.26), obtém-se a seguinte densidade de matéria-energia

$$8\pi G\rho = 3(1 - \beta)H^2 \left[1 - \left(\frac{H}{H_I} \right)^n \right], \quad (4.31)$$

de modo que se $H \rightarrow H_I$, $\rho \rightarrow 0$ e o vácuo decai de uma instabilidade da configuração de Sitter inicial, gerando toda a matéria e energia do universo observável. Neste modelo não existe estágio pré-inflacionário, que aparece em algumas variantes de inflação apresentadas na literatura [14, 21]. A evolução do universo dada pela Eq. (4.30) se inicia sem singularidade a partir de uma fase de Sitter $a \sim e^{H_I t}$ para $C a^{3\gamma(1-\beta)/2} \ll 1$, evolui continuamente para uma fase quase-FRW, $a \sim t^{2/3\gamma(1-\beta)}$, para $C a^{3\gamma(1-\beta)/2} \gg 1$. Tal comportamento pode ser descrito exatamente se integrarmos (4.30) para o caso $n = 1$ [66]:

$$H_I t = \ln \left(\frac{a}{a_*} \right) + \frac{2C}{3\gamma(1-\beta)} a^{\frac{3\gamma(1-\beta)}{2}}, \quad (4.32)$$

onde a_* é um valor arbitrário do fator de escala, o qual pode ser fixado para definir o começo da fase quase FRW (ver a próxima seção).

Para $\beta = 0$, uma solução deste tipo foi obtida por Murphy [67] como um exemplo de cosmologia com viscosidade volumar. Barrow [68] reinterpretou o modelo de Murphy como uma descrição macroscópica para a produção de partículas ocorrendo no final do novo cenário inflacionário [69]. Posteriormente, esta solução foi obtida em um caso mais geral ($\beta = 0$, n qualquer) para descrever o espaço tempo dirigido pela produção quântica de cordas fundamentais [70]. Mais recentemente, Lima and Germano [71] mostraram que a solução com $n = 1$ também aparece no contexto de modelos cosmológicos com criação irreversível de matéria, como formulado por Prigogine *et al.* [72]. Porém, como será mostrado a seguir, a presença do parâmetro β nas Eqs. (4.30)-(4.32) muda as previsões usuais do modelo padrão de FRW para a presente fase dominada pela matéria. Este fato será útil

para conciliar os dados atualmente disponíveis com o estágio inflacionário inicial do modelo. Os resultados com $\beta \neq 0$ e $n = 1$ da Ref. [66] foram estendidos por Lima e Trodden [73] para incluir os casos aberto e fechado.

4.4 Consequências observacionais

De modo a limitar os parâmetros do modelo proposto na última seção, algumas das suas implicações para o estágio atual de evolução do universo serão analisadas. Primeiro serão definidas as quantidades observacionais usuais, ou seja: $\Omega_m = 8\pi G\rho_0/3H_0^2$ (parâmetro de densidade), $q_0 = -[a\ddot{a}/\dot{a}^2]_{t_0}$ (parâmetro de desaceleração) e $H_0 = [\dot{a}/a]_{t_0}$ (parâmetro de Hubble). Convém relembrar que o cenário inflacionário não acomoda $\Omega_m \neq 1$, $q_0 \neq \frac{1}{2}$ e idades maiores do que H_0^{-1} , porque para modelos FRW com curvatura nula, $\Omega_m = 2q_0 = 1$ e $t_0 = \frac{2}{3}H_0^{-1}$ (ver Cap. 1). Agora, inserindo as quantidades definidas acima nas equações (4.25), (4.26) e (4.28), encontram-se as seguintes expressões para a fase dominada por vácuo-matéria (FVM):

$$\frac{\Lambda_0}{3H_0^2} = \Omega_{\Lambda_0} = \beta + (1 - \beta) \left(\frac{H_0}{H_I} \right)^n, \quad (4.33)$$

$$\Omega_m = 1 - \beta - (1 - \beta) \left(\frac{H_0}{H_I} \right)^n, \quad (4.34)$$

$$q_0 = \frac{1 - 3\beta}{2} - \frac{3(1 - \beta)}{2} \left(\frac{H_0}{H_I} \right)^n. \quad (4.35)$$

Nas relações acima, os últimos termos do lado direito podem ser sempre desprezados. Por exemplo, na descrição inflacionária usual $H_I^{-1} \sim 10^{-35}\text{seg}$ e como $H_0^{-1} \sim 10^{17}\text{seg}$, tem-se que $H_0/H_I \sim 10^{-52}$. Esta quantidade pode ser ainda menor se a inflação tiver acontecido no tempo de Planck, para o qual obtém-se $H_0/H_I \sim 10^{-60}$. Assim, para todos os propósitos práticos: $\Lambda_0 = 3\beta H_0^2$, $\Omega_m = 1 - \beta$ e $q_0 = (1 - 3\beta)/2$. No limite $\beta \rightarrow 0$, as conhecidas expressões do modelo FRW plano são recuperadas.

Um teste adicional de consistência para o modelo é obtido dos limites observacionais do parâmetro de idade $H_0 t_0$. O parâmetro de idade computado do modelo FRW plano ($H_0 t_0 = 2/3$), tende a ser menor do que a faixa de valores obtidas das observações $0,6 \lesssim H_0 t_0 \lesssim 1,4$. Além disso, como indicado por Jordan e Olson [74], um termo Λ dependente do tempo é usualmente menos efetivo para acomodar o parâmetro de idade observado do que uma densidade de energia do vácuo constante. Contudo, é notável que limitando o β usando as medidas do parâmetro de idade citadas acima, o modelo prevê valores razoáveis para Ω_m , Λ_0 e q_0 . Para mostrar isto, calculam-se primeiro as constantes C e a_* que aparecem nas Eqs. (4.30) e (4.32), em termos de H_I , H_0 e a_0 . De (4.30) encontra-se

$$C = \frac{H_I - H_0}{H_0} a_0^{-\frac{3\gamma(1-\beta)}{2}}. \quad (4.36)$$

Se $H_I \gg H_0$, (4.30) pode ser reescrita como

$$H \cong \frac{H_I}{1 + \frac{H_I}{H_0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{\frac{3\gamma(1-\beta)}{2}}}. \quad (4.37)$$

Lembrando que o regime de Sitter ($a \sim a_* e^{H_I t}$) ocorre para $a \ll a_*$, é razoável definir o início do estágio quase-FRW para $a = a_*$ onde⁵ $a_* \sim a_0 (H_0/H_I)^{2/3\gamma(1-\beta)}$. Para $a > a_*$ o modelo entra em um regime quase-FRW. De fato, uma fase dominada por vácuo-radiação (FVR) com $\gamma = \frac{4}{3}$. Eventualmente o modelo evolui para a FVM ($\gamma = 1$), pelo mesmo tipo de transição que ocorre no universo FRW. Esta última transição não envolve a escala arbitrária de tempo H_I^{-1} , já que ela é efetivamente desprezível em (4.37).

Agora, considerando que para $a \gtrsim a_*$ o fator de escala satisfaz

$$a \sim a_0 \left(\frac{3\gamma(1-\beta)}{2} H_0 t \right)^{\frac{2}{3\gamma(1-\beta)}}, \quad (4.38)$$

então o intervalo de tempo decorrido durante a fase quase-FRW ($\Delta t = t_0$) é dado por $t_0 \sim 2H_0^{-1}/3\gamma(1-\beta)$. Consequentemente, o parâmetro de idade é fortemente dependente

⁵Um valor mais preciso de a_* pode ser derivado se considerando em (4.37) que $(H_I/H_0)(a/a_0)^{3\gamma(1-\beta)/2}$ é, digamos, da ordem de 10^2 . Contudo, devido à pequena magnitude de H_0/H_I , tal procedimento não altera apreciavelmente as estimativas de a_* .

de β . É claro que os valores de β devem ser fixados levando em conta não apenas os parâmetros observacionais disponíveis, mas também o valor de a_* , o qual depende da escala de tempo H_I^{-1} .

Um vínculo natural aparece aqui. Se H_I^{-1} é da ordem ou maior do que o tempo de Planck, a_* tem que ser maior do que o comprimento de Planck de modo a caracterizar o regime quase-FRW clássico. Uma escolha adequada de valores de β é $1/3 \leq \beta \leq 1/2$. Neste caso, tomando $\gamma = 1$, obtém-se $1 \leq H_0 t_0 \leq 1,33$, justamente dentro dos limites observacionais mencionados. Além disso, para valores de β dentro de tal intervalo, os valores de Λ_0 , q_0 e Ω_m são respectivamente restritos aos intervalos: $H_0^2 \leq \Lambda_0 \leq 1,5 H_0^2$, $-0,25 \leq q_0 \leq 0$ e $0,5 \leq \Omega_m \leq 0,67$. Pode-se notar que Λ_0 é da mesma ordem do limite superior presentemente aceito ($\sim 3H_0^2$), enquanto que os valores de q_0 são ligeiramente menores ou iguais a zero. Neste ponto convém ressaltar que valores negativos de q_0 são favorecidos pelas observações das explosões de supernovas (ver Cap. 1 e [15]). Na verdade eles não podem ser evitados quando se tenta resolver o problema do parâmetro de densidade usando apenas um termo Λ . Pode-se mostrar que, independentemente da lei específica de decaimento de Λ , modelos homogêneos e isotrópicos com curvatura nula implicam que

$$\Omega_m = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}q_0,$$

de modo que $\Omega_m \leq 2/3$ somente se $q_0 \leq 0$. Além disso, para todos os valores de β , se $H_I^{-1} \sim 10^{-43}$ seg, encontra-se que $a_* \sim a_0 10^{-30/1-\beta}$. Portanto, se β está no intervalo $[1/3, 2/3]$, o valor $a_0 \sim 10^{23}$ cm implica que 10^{-32} cm $\leq a_* \leq 10^{-17}$ cm. Note que o modelo entra no regime quase-FRW depois da era de Planck, como esperado.

4.5 Discussão

O principal propósito dos modelos cosmológicos com decaimento do vácuo é determinar como a densidade de energia que dirigiu a inflação está relacionada com o pequeno valor apresentado atualmente por Λ . A dependência de Λ em H proposta neste capítulo [66] foi

a primeira a preencher tal condição. Foi obtido um universo deflacionário, como Barrow [68] denominou o modelo de Murphy [67]. No entanto, ao invés do mecanismo clássico de viscosidade volumar, o modelo é caracterizado por uma densidade de energia do vácuo que decai com o tempo. Diferindo do modelo de Murphy, que tem uma densidade de energia finita ρ durante a fase de Sitter, este modelo começa com $\rho = 0$ e $\Lambda = 3H_I^2$, seu valor máximo (ver Eqs. (4.25) e (4.31)). Subsequentemente, uma componente material, obedecendo uma equação de estado do tipo lei gama, é gerada às expensas da densidade de energia do vácuo. Para $\gamma = 4/3$ o modelo evolui suavemente de uma era de Sitter, na qual os problemas do parâmetro de densidade, de horizonte e de monopolos podem ser resolvidos, para um estágio quase-FRW dominado por vácuo mais radiação (deflação). Com a passagem do tempo, enquanto o valor de Λ decresce, a densidade de energia ρ da componente material cresce, atingindo o seu valor máximo para $a \simeq a_*$, justamente no início do estágio quase-FRW. Além disso, ela decai como $\rho \sim a^{-3(1-\beta)}$ para valores suficientemente altos do tempo de expansão, ou seja, quando o fator de escala varia como $a \sim t^{2/3(1-\beta)}$. Deste ponto de vista, toda a matéria e entropia específica da radiação observada, teria sido gerada do “nada” inicial. Além do mais, as mudanças introduzidas pelo parâmetro β no modelo FRW padrão estão em razoável concordância com alguns dados cosmológicos, particularmente as atuais estimativas de Λ_0 e t_0 . O modelo também permite valores do parâmetro de densidade no intervalo $1/2 \leq \Omega_m \leq 2/3$ e do parâmetro de desaceleração no intervalo $-0,25 \leq q_0 \leq 0$.

A escala arbitrária H_I não é fixada pelo modelo, permitindo assim que a configuração inicial de de Sitter ocorra na escala de energia de Planck ou mesmo em escalas mais baixas (em escalas mais altas, é de se esperar que a TRG perca a validade). De fato, apesar do parâmetro de idade da fase quase-FRW ser finito, o período de inflação é infinito, já que o universo “começou” em $t = -\infty$. Desse modo, o universo seria infinitamente velho. Por outro lado, os efeitos quânticos no espaço-tempo de de Sitter levam a um estado de equilíbrio geometrotermodinâmico caracterizado pela temperatura de Gibbons-Hawking, $k_B T = \hbar(\Lambda/12\pi^2)^{1/2}$, onde k_B é a constante de Boltzmann [60]. Portanto, considerando

que o modelo inicia com $\rho = 0$ e $\Lambda = 3H_I^2$, os observadores fundamentais devem medir uma radiação térmica de fundo cuja temperatura inicial é

$$T_I = \frac{\hbar H_I}{2\pi k_B},$$

a qual é determinada apenas pela escala de tempo (desconhecida) da deflação. Em princípio, a arbitrariedade de H_I reflete justamente a presente falta de conhecimento da relação entre a inflação e o regime de gravitação quântica. Por exemplo, se $H_I = 2\pi t_{pl}^{-1}$, onde $t_{pl} = (\hbar G/c^5)^{1/2}$ é o tempo de Planck, a temperatura inicial T_I é justamente a temperatura de Planck $T_{pl} = k_B^{-1}(\hbar c^5/G)^{1/2}$. No presente contexto, tal resultado não parece ser apenas uma coincidência por causa da natureza quântica da radiação de Hawking. Observe-se que, para o valor considerado de H_I , o modelo também prevê que $\Lambda_I/\Lambda_0 = (H_I/H_0)^2 \sim 10^{120}$, como teoricamente sugerido (ver Cap. 1).

O modelo deflacionário apresentado neste capítulo foi examinado por Birkel e Sarkar [57], que usaram as abundâncias de elementos leves fornecidas pela nucleossíntese primordial para restringir o valor do parâmetro β . Os autores concluem que o limite encontrado ($\beta \leq 0,13$) é baixo demais para ajudar no problema da idade e, portanto, não teria efeito sobre o universo hoje. Entretanto, há vários pontos a considerar. Em primeiro lugar, uma análise atualizada das consequências deste parâmetro sobre a nucleossíntese primordial indicou que $\beta \leq 0,16$, valor que pode ser compatibilizado com os resultados mais recentes da idade dos aglomerados globulares [75]. Ambos os valores de β não são suficientes para provocar uma aceleração do universo, como vem sendo observado [29], e o decaimento exclusivamente em radiação estaria descartado. Mais ainda, se β fosse maior do que $1/4$ com o decaimento do vácuo em radiação, a densidade de energia desta decairia mais lentamente do que a da matéria não relativística e o universo jamais sairia da era da radiação. Assim, a suposição de decaimento contínuo em apenas radiação já teria problemas independentemente de nucleossíntese.

Por outro lado, se β decair na componente dominante em cada fase, uma restrição na era da radiação não se propaga até a era da matéria. Claro, o vácuo não deve decair em

bárions, mas nada impede que o decaimento seja em matéria escura, por exemplo [75]. Se um Λ variável deste tipo for o responsável pela aceleração do universo tal qual medida, então um $\beta \sim 0,7$ implica que a matéria escura não se diluiria com o volume, mas na forma $\rho \sim a^{-1}$. Uma possível linha de continuação deste trabalho é considerar que testes cosmológicos são sensíveis e esta relação funcional entre a densidade de energia da matéria escura e o fator de escala.

Capítulo 5

Campos escalares acoplados

5.1 Introdução

Apesar do uso generalizado de campos escalares em cosmologia (ver Cap. 2), as situações físicas nas quais eles são normalmente considerados tendem a ser particulares. Por exemplo, no caso da nova inflação [14], não há justificativa fundamental para “desligar” todos os acoplamentos possíveis durante a fase de rolamento lento (ver Seção 2.3) e fazer o contrário no início da fase de reaquecimento.¹ Isto só pode ser obtido considerando condições iniciais muito especiais, o que enfraqueceu a viabilidade deste cenário. Contudo, este não é um caso isolado. Desprezar possíveis acoplamentos térmicos entre os campos escalares e os outros constituintes do universo é regra usual em quase todos os modelos com campos escalares apresentados na literatura.

Uma exceção importante é o explosivo período de reaquecimento necessário no final de todas as versões de inflação isentrópica. Ao longo deste processo, o campo oscila coerentemente em torno do mínimo do potencial e sua energia é transferida, totalmente ou em parte, para os demais componentes do fluido cósmico. Seja em sua versão original [33], seja na mais moderna, baseada na ressonância paramétrica do campo oscilante e chamada

¹A própria ocorrência da transição de fase da nova inflação demanda contato térmico entre o campo escalar e o banho térmico pelo menos até o desencadeamento da transição.

de pré-aquecimento, ou *preheating* [34, 35], o mecanismo de reaquecimento é relativamente rápido, com virtualmente toda a entropia do universo atual tendo sido gerada desta forma.

Este não é, entretanto, o caso mais geral. Em princípio, acoplamentos permanentes ou temporários entre ϕ e os demais campos podem também levar a processos dissipativos que produzam entropia em eras diferentes daquela do reaquecimento. Espera-se que progressos na teoria de campos fora do equilíbrio forneçam justificativas fundamentais necessárias para discutir dissipação em casos gerais (ver, por exemplo, [76] e referências lá citadas). Uma outra possibilidade é o "pré-aquecimento instantâneo" [77]. Neste processo, o inflaton decai continuamente em outro campo escalar às custas da sua energia potencial. Partículas deste segundo campo têm vida muito curta e rapidamente decaem em férmions, gerando entropia, podendo assim justificar modelos tipo quintessência.

Apesar de uma justificativa para efeitos dissipativos bem fundamentada em primeiros princípios ainda não ter sido obtida, tais processos não deveriam ser descartados com base apenas na facilidade dos cálculos. Muito trabalho pode ser feito de modo fenomenológico aplicando-se ao problema, por exemplo, técnicas de termodinâmica de não-equilíbrio, ou mesmo estudando modelos particulares com dissipação. Um exemplo interessante desta última abordagem é o modelo de inflação morna (ou *warm inflation*), proposto por Berera [78]. Como na nova inflação, supõe-se uma transição de fase levando o universo para um período inflacionário dominado pela densidade de energia do potencial. Entretanto, um termo dissipativo fenomenológico $\Gamma\dot{\phi}^2$ é inserido na equação de movimento do campo escalar para representar a transferência contínua de energia de ϕ para o campo de radiação. Este contato térmico persistente durante a inflação é tão finamente ajustado que o campo escalar evolui todo o tempo em um regime amortecido, gerando uma expansão isotérmica. Como consequência, não há necessidade de um mecanismo de reaquecimento subsequente à fase inflacionária e flutuações térmicas produzem o espectro primordial de perturbações de densidade [79, 80, 81].

A inflação morna foi originalmente formulada em bases fenomenológicas, mas algumas

propostas com justificativas fundamentais foram apresentadas [82]. Além disso, uma análise de sistemas dinâmicos [85] mostrou que transições suaves de uma fase inflacionária para uma era da radiação podem ser obtidas para muitos valores do parâmetro de dissipação Γ , mostrando assim que a inflação morna pode ser uma variante viável de inflação. Aparentemente seu único aspecto negativo é este possível ajuste fino termodinâmico relacionado à expansão isotérmica, tomada como princípio em algumas versões de inflação morna mesmo levando em conta que, durante a inflação, a radiação tende a ser diluída exponencialmente (ver comentários nas Refs. [82]).

Neste capítulo, que é baseado na Ref. [83], procura-se relaxar esta hipótese. Entretanto, em vez de se propor mais um modelo de inflação morna, aqui buscam-se formas de explicitar as diferenças entre os cenários isotérmico, resumidamente apresentado abaixo, e isentrópico (ver Seção 2.3) em um espaço de parâmetros conveniente. Como veremos, estes modelos são apenas dois casos extremos de um conjunto infinito de pontos no espaço de parâmetros. Espera-se que este ponto de vista unificador possa indicar caminhos para tratamentos fenomenológicos consistentes destes modelos, em princípio baseando-os nos métodos da termodinâmica de não-equilíbrio. Também discute-se como as condições de rolamento lento são modificadas devido ao decaimento do campo escalar e apresenta-se um modelo simples, como aplicação do que é exposto no capítulo.

5.2 Equações básicas

Como tem sido feito ao longo desta tese, as análises serão limitadas a universos homogêneos e isotrópicos, com geometria descrita pelo elemento de linha de FRW. Além disso, apenas o caso plano ($k = 0$) será tratado, de modo que (ver Eq. (1.1)):

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (5.1)$$

A fonte desse espaço-tempo é uma mistura de um campo escalar real minimamente acoplado e um fluido perfeito representando todos os outros campos, sendo que o primeiro está

transferindo continuamente energia para o segundo. A densidade lagrangeana para o campo escalar é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - V(\phi) + \mathcal{L}_{\text{int}}, \quad (5.2)$$

com a interação sendo representada pelo termo $\mathcal{L}_{\text{int}}$ e $V(\phi)$ é a densidade de energia potencial do campo ϕ . Este campo tem o tensor de energia momento dado por (ver discussão no Cap. 2)

$$T_\phi^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \mathcal{L} g^{\mu\nu}. \quad (5.3)$$

O outro componente da mistura tem o tensor de energia momento usual do fluido perfeito (ver Eq. (1.7))

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}, \quad (5.4)$$

O tensor de energia-momento total do sistema $T_t^{\mu\nu} = T_\phi^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}$ obedece as equações de Einstein, das quais obtém-se as equações de movimento

$$3H^2 = 8\pi G \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) + \rho \right), \quad (5.5)$$

$$3H^2 + 2\dot{H} = -8\pi G \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) + p \right), \quad (5.6)$$

usando-se que a densidade de energia e pressão do campo escalar são, respectivamente,

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (5.7)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (5.8)$$

Considerando que o fluido perfeito satisfaz a lei gama como equação de estado $p = (\gamma - 1)\rho$, a lei de conservação da energia para esta mistura autogravitante pode ser escrita na forma

$$\dot{\phi}(\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi)) = -\dot{\rho} - 3\gamma H\rho, \quad (5.9)$$

onde a linha, como antes, denota derivação com respeito a ϕ . Para desacoplar os dois lados da equação acima e representar o decaimento do campo escalar em matéria usual, assume-se o termo dissipativo fenomenológico ($3\Gamma\dot{\phi}^2$), de modo que (5.9) se desmembra nas equações

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = -3\Gamma\dot{\phi} \quad (5.10)$$

e

$$\dot{\rho} + 3\gamma H\rho = 3\Gamma\dot{\phi}^2, \quad (5.11)$$

sendo o coeficiente Γ a largura de decaimento de ϕ e o fator 3 incluído por conveniência matemática. Para modelos que têm um estágio inflacionário isentrópico, sabe-se que $\rho \sim 0$ no início das oscilações coerentes do campo em torno do mínimo do potencial $V(\phi)$. Nesses casos, o termo $\Gamma\dot{\phi}^2$ não é, em geral, eficiente para descrever os primeiros estágios do processo de reaquecimento [34, 35] e é considerado inoperante durante a inflação exponencial. Contudo, na presença de uma componente térmica apreciável, um termo dissipativo pode ser justificado sob condições especiais durante o regime de Sitter [76]. Aplicações dessa teoria levam a complicados mas promissores modelos de inflação morna com uma quantidade anormalmente grande de campos leves acoplados ao inflaton [82], apesar de já haverem interpretações para tais modelos baseadas em teoria de cordas [84].

Neste capítulo, será aceito que este termo dissipativo representa o contato térmico entre o campo escalar e os demais em qualquer época. Também será considerado que o coeficiente de dissipação Γ é função genérica da temperatura ou, equivalentemente, do tempo cósmico. Um exemplo de uso particular das equações acima é a versão original de inflação morna, descrita a seguir em linhas gerais.

5.3 Inflação morna: um exemplo

A inflação morna foi proposta originalmente por Berera e Fang [79] como um cenário isotérmico, alternativo aos modelos inflacionários isentrópicos. O modelo é baseado no conjunto de equações apresentadas na seção anterior e tem como principais características, além do fato de conter uma expansão exponencial isotérmica, a geração de um espectro *térmico* de perturbações de densidade durante a fase inflacionária. De fato, esta é a principal motivação do trabalho: mostrar que a geração de tal espectro é possível numa versão matematicamente simples, na qual são admitidas algumas hipóteses simplificadoras. Isto

pode ser contraposto à geração do espectro de flutuações das inflações isentrópicas, neste caso, quânticas.

O modelo tem a mesma história pré-inflacionária da nova inflação, com um universo dominado por radiação e uma transição de fase que ocorre quando $T = T_c \simeq M \sim V(\phi)^{1/4}$, (onde M é a escala de energia da transição). Os dois modelos também têm em comum a existência de uma fase de rolamento lento que faz o campo ϕ permanecer no "topo" do potencial por um intervalo de tempo Δt_I suficiente para resolver os problemas do modelo padrão. A diferença reside no fato de que a temperatura da radiação não cai a zero como na inflação isentrópica, pois o termo de atrito Γ é tal que a temperatura da radiação cai até um valor constate. Para ter um cenário auto-consistente, Berera e Fang tiveram que fazer algumas hipóteses: i) o campo escalar decai apenas em matéria relativística (algo razoável quando se trata do universo primitivo), que atua como banho térmico para o campo ϕ ; ii) o termo de produção de radiação Γ compensa a diluição causada pela expansão de modo a manter o banho térmico a temperatura constante; iii) vale o equilíbrio termodinâmico local e iv) condições de rolamento lento ($\ddot{\phi}$ é desprezível com relação aos demais termos da Eq. (5.9)), obtém-se que esta equação e mais (5.11) simplificam-se em

$$\dot{\phi} \simeq -\frac{V'(\phi)}{3(H + \Gamma)} \quad (5.12)$$

e

$$\dot{\rho} \simeq 0. \quad (5.13)$$

De (5.11) com $\gamma = 4/3$ (equação de estado da matéria relativística) e a equação acima,

$$\rho \simeq \frac{3\Gamma}{4H} \dot{\phi}^2. \quad (5.14)$$

Para haver uma fase de Sitter, o termo de potencial do campo escalar deve ser amplamente dominante sobre o termo cinético e a densidade de energia da radiação, portanto, de (5.5),

$$H^2 \simeq \frac{8\pi G}{3} V(\phi). \quad (5.15)$$

Mais ainda, para caracterizar o banho térmico, Berera e Fang supõem que $\rho \gg \dot{\phi}^2$.

A temperatura final da componente térmica será obtida substituindo (5.15) em (5.14):

$$T \simeq \rho^{1/4} \simeq (m_{\text{pl}} W \Gamma)^{1/4} M^{1/2}, \quad (5.16)$$

onde $W = (\dot{\phi}^2/2V(\phi))$ é a razão entre os termos cinético e potencial do campo escalar e $M^4 = T_c^4 \sim V$.

Com o tipo de abordagem delineado acima, pode-se chegar a modelos que geram flutuações térmicas suficientemente intensas para servirem de sementes na geração do espectro de flutuações de densidade que depois deram origem às estruturas observadas no universo (para mais detalhes, ver [79] e, com cálculos mais detalhados, [80]). Isto é relevante, pois os modelos inflacionários com espectros gerados por flutuações quânticas têm sido considerados como os únicos viáveis, desde que as medidas das flutuações de temperatura da radiação cósmica de fundo aparentemente desfavoreceram os modelos baseados em defeitos topológicos.

5.4 Inflação morna generalizada

Algumas vezes é mais simples buscar novos modelos em uma teoria apenas com redefinições de equações, ou mesmo transformações de coordenadas. No caso das equações apresentadas na Seção 5.2 isto pode ser feito com a definição dos seguintes parâmetros:

$$x \equiv \frac{\dot{\phi}^2}{\dot{\phi}^2 + \gamma \rho}, \quad (5.17)$$

e

$$\alpha \equiv \frac{3H\dot{\phi}^2}{3H\dot{\phi}^2 + |\dot{\rho}|}. \quad (5.18)$$

A adoção destes parâmetros é razoável quando entendida como se segue. Para que haja expansão exponencial, $V(\phi)$ tem que ser fortemente dominante tanto na inflação morna quanto na isentrópica. O que as diferencia são os valores comparativos entre o termo cinético do campo escalar e a densidade de energia do fluido perfeito, com limites tais que uma dessas densidades de energia é muito maior do que a outra. Isto significa que é necessário

comparar apenas a energia do termo cinético $\dot{\phi}^2 = \rho_\phi + p_\phi$ com a quantidade envolvendo a energia da componente material em uma forma escrita convenientemente. Para a mistura, a quantidade equivalente (total) é $\rho_t + p_t = \dot{\phi}^2 + \gamma\rho$. Desta forma, lembrando a lei de conservação de energia, x é definido como a razão entre as duas “massas inerciais” que se “diluem” devido à expansão do universo. Entretanto, não é suficiente apenas comparar os valores de $\dot{\phi}^2$ e $\gamma\rho$. É também necessário quantificar como estas duas quantidades evoluem ao longo da expansão. Uma maneira de fazer isto mantendo as equações numa forma simples é introduzindo o parâmetro α , que envolve $3H\dot{\phi}^2$ e $\dot{\rho}$. A presença de $|\dot{\rho}|$ neste parâmetro justifica-se quando o cenário isotérmico da descrito acima é considerado apenas como caso limite, pois supor que a taxa de resfriamento da radiação devida à expansão exponencial é completamente compensada pela transferência de energia do campo escalar para o fluido perfeito parece ser uma situação teórica extrema. Na definição de α está implícito que $\dot{\rho} \leq 0$, uma vez que uma fase de aquecimento é desnecessária na inflação morna. Todavia, é importante notar que um $\dot{\rho}$ positivo é possível e já foi considerado na literatura [80].

Por serem adimensionais, estes parâmetros têm a característica conveniente de serem limitados aos intervalos $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq \alpha \leq 1$. Em particular, para a inflação isotérmica [78, 79] tem-se que $\alpha = 1$ e $x \rightarrow 0$, pois $\dot{\rho} = 0$ e $\gamma\rho \gg \dot{\phi}^2$. Para a inflação isentrópica tem-se $x = 1$ e $\alpha = 1$, uma vez que $\gamma\rho \ll \dot{\phi}^2$ e $\dot{\rho} \ll 3H\dot{\phi}^2$ (a radiação torna-se exponencialmente desprezível com o tempo). De modo semelhante, modelos tipo quintessência com acoplamento térmico entre as componentes estão situados em algum valor intermediário entre 0 e 1 com $\alpha = x$. Quando ambos os parâmetros são nulos tem-se o modelo padrão (mais uma possível constante cosmológica). Assim, todas as situações mais comuns, com ou sem acoplamentos térmicos, podem ser representadas em um espaço de parâmetros (ver Fig. 5.4). Além disso, como o potencial não aparece nas definições dos parâmetros, convém mencionar que o espaço de parâmetros abaixo comporta tanto soluções inflacionárias (com o domínio do potencial na equação de Friedmann) quanto cosmologias não inflacionárias com campo escalar.

Figura 5.1: Espaço de parâmetros representando acoplamentos térmicos para os modelos com campo escalar mais comuns ($V(\phi)$ arbitrário). A região sombreada é proibida para um universo em expansão com decaimento do campo escalar. A linha diagonal $\Gamma = 0$ inclui o modelo padrão com uma possível constante cosmológica (0,0) e a inflação isentrópica (1,1). O ponto (0,1) indica o cenário da Seção 5.3. A característica mais marcante da figura é a grande área disponível onde modelos diferentes podem ser representados.

5.5 Dissipação e condições de rolamento lento

Um ingrediente fundamental de muitas variantes inflacionárias é o período de “rolamento lento” do campo escalar, durante o qual o inflaton evolui tão lentamente que o seu termo cinético mantém-se sempre muito menor do que $V(\phi)$. Uma descrição desta dinâmica, para a mistura que estamos considerando, requer a introdução de um parâmetro que seja função da energia total da mistura. Neste caso, é conveniente usar o parâmetro γ_{ef} , derivado de manipulações nas Eqs. (5.5) e (5.6),

$$\gamma_{\text{ef}} = -\frac{2\dot{H}}{3H^2} = -\frac{\dot{\rho}_t}{3H\rho_t} = \frac{\dot{\phi}^2 + \gamma\rho}{\rho_t}. \quad (5.19)$$

As condições de rolamento lento são impostas para garantir soluções (aproximadamente) de Sitter por um período Δt_I que deve ser suficientemente longo para resolver os problemas do modelo padrão. Uma inspeção nas Eqs. (5.5), (5.6) e (5.19) permite a verificação das

seguintes condições para se ter um universo de Sitter:

$$3H^2 \gg 2|\dot{H}| \Leftrightarrow \gamma_{\text{ef}} \approx 0 \Leftrightarrow V(\phi) \gg \rho + \frac{\dot{\phi}^2}{2}. \quad (5.20)$$

Além disso, uma quantidade de inflação suficiente requer que as relações acima sejam válidas ao longo do intervalo Δt_I . Isto usualmente estabelece condições sobre a inclinação e a curvatura de $V(\phi)$. Porém, o acoplamento entre ϕ e o fluido γ durante a inflação pode relaxar estas condições para uma larga faixa de situações intermediárias entre as situações isentrópica e isotérmica. Com o termo dissipativo, tais condições são representadas pelas relações (5.12) e (5.15) que, juntas, implicam os seguintes vínculos sobre a forma de $V(\phi)$:

$$\left(\frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2 \frac{1}{16\pi G} \approx \left(1 + \frac{\Gamma}{H} \right)^2 \frac{\dot{\phi}^2}{2V(\phi)}, \quad (5.21)$$

e

$$\frac{V''(\phi)}{V(\phi)} \frac{1}{24\pi G} \approx - \left(1 + \frac{\Gamma}{H} \right) \frac{\dot{\phi}^2 + \gamma\rho}{2V(\phi)} - \frac{1}{3H} \frac{d}{dt} \left(\frac{\Gamma}{H} \right). \quad (5.22)$$

É interessante notar que os resultados acima foram obtidos independentemente do sinal de $\dot{\rho}$, de modo que eles não estão limitados à definição de α . As condições de rolamento lento usuais são reestabelecidas para $\Gamma = 0$ (mistura desacoplada). Neste caso, elas implicam que a inflação só é possível para potenciais extremamente planos (ver Cap. 2), devido à última desigualdade em (5.20). Entretanto, no limite ($\Gamma \gg H$) pode-se notar que a primeira e segunda derivadas do potencial não são necessariamente pequenas de modo a garantir uma expansão acelerada contínua. Assim, as condições de rolamento lento da inflação isentrópica podem ser substituídas por um termo dissipativo suficientemente grande, que garanta inflação sem condições extremas sobre as derivadas do potencial. Neste caso, o campo não “acelera” de tal forma que $\dot{\phi}^2$ torna-se comparável a $V(\phi)$ porque o “atrito” (com coeficiente Γ) é grande, e não porque o potencial é extremamente plano. Isto relaxa os vínculos sobre as constantes de acoplamento do termo de potencial, diminuindo assim os problemas de ajuste fino que afetaram a viabilidade de modelos como a nova inflação.

5.6 Um modelo simples

O procedimento heurístico padrão para a elaboração de modelos cosmológicos com campos escalares é supor desde o princípio um potencial específico $V(\phi)$, motivado ou não pela física de partículas. Este potencial é usado para resolver a equação de movimento para ϕ (5.10). Caso seja necessário considerar a densidade de energia dos demais campos (lembrando que normalmente considera-se que $\rho \rightarrow 0$ ao longo da inflação), o ϕ assim obtido é inserido em (5.11), a qual é resolvida para ρ . A solução $a(t)$ pode então ser encontrada a partir da equação de Friedmann, caso já não tenha sido imposta desde o princípio por meio das condições de rolamento lento. Isto é necessário porque mesmo que o acoplamento seja dado, o potencial ainda é parâmetro livre do sistema de equações e diferentes potenciais resultam em diferentes modelos de inflação. Esta metodologia será chamada aqui de abordagem dinâmica, para fixar a terminologia.

Numa abordagem alternativa, pode-se usar o espaço de parâmetros (α, x) como guia na busca por novos modelos. Para tanto divide-se (5.11) por $3H\dot{\phi}^2$ e reescreve-se a equação resultante em termos de x e α :

$$\frac{\Gamma}{H} = \frac{1}{x} - \frac{1}{\alpha}. \quad (5.23)$$

A Eq. (5.23), útil também para discutir o espaço de parâmetros da Fig. 5.4, não inclui o potencial, pois é representativa apenas dos possíveis acoplamentos e não da dinâmica. Em princípio uma análise mais quantitativa esclarecerá os aspectos mais interessantes contidos no espaço de parâmetros. Um modelo genérico (incluindo a possibilidade de decaimento de ϕ em qualquer era da história do universo) que se pode extrair partindo-se das Eqs. (5.17), (5.18) e (5.23) é apresentado a seguir.

Uma vez que x e α não dependem de $V(\phi)$, é conveniente escrever a Eq. (5.11) na forma

$$\dot{\rho} = -3\gamma H \rho (1 - \delta), \quad (5.24)$$

onde foi usado que $\dot{\phi}^2 = \frac{x\gamma\rho}{(1-x)}$ e, por economia de notação foi introduzida a quantidade

$$\delta \equiv \frac{3\Gamma\dot{\phi}^2}{3\gamma H\rho} = \frac{\alpha - x}{\alpha(1 - x)}, \quad (5.25)$$

a razão entre o termo de fonte e o de diluição de ρ pela expansão do universo. Uma solução simples, porém abrangente, para a equação acima é encontrada para α e x constantes e dada por

$$\rho(a) = \rho_I \left(\frac{a}{a_I} \right)^{-3\gamma(1-\delta)}, \quad (5.26)$$

com a constante de integração $\rho_I/a_I^{-3\gamma(1-\delta)}$ denotando as condições do início do estágio inflacionário. Se $\delta = 1$ ou, equivalentemente, $\alpha = 1$, a densidade de energia ρ permanece constante ($\rho = \rho_I$). Em particular, se $x \rightarrow 0$, ou seja, se $\rho \gg \dot{\phi}^2$, recupera-se a inflação morna isotérmica da seção anterior (ver também a Fig. 5.1). Isto mostra que modelos com valores no intervalo $0 < x < 1$ podem também evoluir isotermicamente durante a inflação, seja exponencial, seja tipo lei de potência. A outra situação extrema ocorre se $\delta = 0$, ou $\alpha = x$, com a densidade de energia variando como $\rho \sim a^{-3\gamma}$. Este comportamento é típico de uma expansão isentrópica e na Fig. 5.4 corresponde à linha adiabática. Note-se que mesmo nessas circunstâncias nas quais os parâmetros são constantes, é de se esperar que a situação intermediária ($0 < \delta < 1$), que corresponde aos modelos mais comuns de quintessência, seja fisicamente mais provável.

Dadas as condições acima, a densidade de energia do campo escalar pode ser calculada em termos do fator de escala. Primeiro, escreve-se a (5.10) como

$$\dot{\rho}_\phi = -3H\dot{\phi}^2 \left(1 + \frac{\Gamma}{H} \right) \quad (5.27)$$

ou ainda

$$\frac{d\rho_\phi}{da} = -\frac{3\dot{\phi}^2}{a} \left(\frac{\Gamma}{H} \right). \quad (5.28)$$

Agora, uma vez que $x = \text{const.}$ e usando (5.23) e (5.26), esta equação pode ser integrada:

$$\rho_\phi = \rho_{\phi_I} + \rho_I \left(\delta + \frac{x}{1-x} \right) \left[\frac{\left(\frac{a}{a_I} \right)^{-3\gamma(1-\delta)} - 1}{1-\delta} \right], \quad (5.29)$$

onde a constante ρ_{ϕ_I} é a densidade de energia inicial do campo escalar. Esta equação pode ser escrita numa forma talvez mais esclarecedora:

$$\rho_\phi = \rho_{\phi_I} + B(\rho - \rho_I), \quad (5.30)$$

com

$$B \equiv \frac{\dot{\rho}_\phi}{\dot{\rho}} = \frac{x}{(1-x)(1-\delta)} \left(1 + \frac{\Gamma}{H}\right). \quad (5.31)$$

No limite adiabático ($\delta = 0$) as expressões acima reduzem-se a

$$\rho_\phi = \rho_{\phi_I} + \rho_I \frac{x}{1-x} \left[\left(\frac{a}{a_I}\right)^{-3\gamma} - 1 \right]. \quad (5.32)$$

O caso isotérmico ($\delta = 1$) é obtido com o uso da relação

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{f^{1-q} - 1}{1-q} = \ln f.$$

Neste caso encontra-se que

$$\rho_\phi = \rho_{\phi_I} - \frac{3\gamma}{1-x} \rho_I \ln \left(\frac{a}{a_I}\right). \quad (5.33)$$

Se $\delta \neq 1$, e usando (5.26) e (5.29), a densidade de energia total pode ser escrita como

$$\rho_t = \rho_{\phi_I} - B\rho_I + (B+1)\rho. \quad (5.34)$$

Como ρ_t tende a um valor constante quando $a \rightarrow \infty$, $\rho \rightarrow 0$, os dois primeiros termos da equação acima podem ser interpretados como uma constante cosmológica residual $\Lambda_0 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_{\phi_I} - B\rho_I) \equiv \rho_{\Lambda_0}$, que em algum momento da evolução do universo torna-se dominante. A solução geral de (5.34) pode ser calculada analiticamente, mas não é realista. Mesmo fazendo a suposição mínima de que o campo escalar decai em radiação (fótons) ao longo da história do universo. Neste caso, $B = \rho_{\phi_I}/\rho_I$ vale durante toda a era da radiação, mas na era da matéria há que se modificar a equação de Friedmann, seja adicionando um termo de densidade de matéria ρ_m em (5.34), seja especificando em qual componente do fluido cósmico ϕ está decaindo e fazer as mudanças apropriadas em γ e Γ . Discutir os detalhes de um modelo realista foge do escopo desta seção, onde pretende-se apenas mostrar que os parâmetros introduzidos podem ser bons pontos de partida na busca de novas soluções.

Os casos assintóticos, entretanto, são válidos e têm soluções simples. Substituindo (5.34) em (5.19) e usando (5.24) encontra-se que

$$\gamma_{\text{ef}} = -\frac{(1+B)\dot{\rho}}{3H(\rho_{\Lambda_0} + (1+B)\rho)} = \frac{\gamma(1-\delta)}{1 + \frac{\rho_{\Lambda_0}}{(1+B)\rho}}, \quad (5.35)$$

O caso extremo $\rho_{\Lambda_0} \gg \rho$ resulta em $\gamma_{\text{ef}} \sim 0$ e no universo de Sitter ($H \simeq \text{const.}$, $a \propto e^{Ht} \rightarrow \infty$). Como as medidas de curvas de luminosidade das SNIa (ver Seção 1.3) indicam que, se existe constante cosmológica, a transição para uma nova fase inflacionária está ocorrendo agora, com $\rho_{\Lambda_0} \sim 10^{-47} \text{GeV}^4$, este caso descreve o destino final do universo.

Mais interessante é a aproximação $\rho \gg \rho_{\Lambda_0}$. Isto implica que antes da era atual o termo cosmológico pode ser desprezado em (5.34) e $B = \rho_{\phi_I}/\rho_I$ é uma aproximação razoável no mínimo durante a era da radiação. Neste caso tem-se que

$$\gamma_{\text{ef}} = \gamma(1 - \delta), \quad (5.36)$$

e a dependência temporal do fator de escala pode ser obtida usando-se, por exemplo, este último resultado em (5.19):

$$a(t) = a_I \left(\frac{t}{t_I} \right)^{\frac{2}{3\gamma(1-\delta)}}. \quad (5.37)$$

Uma das formas de se encontrar o potencial como função de ϕ para este caso é mostrada a seguir. Primeiro explicita-se o potencial na Eq. (5.30) e obtém-se a sua dependência com respeito ao fator de escala:

$$V(a) = \rho_{\phi} - \frac{\dot{\phi}^2}{2} = V_I \frac{\rho}{\rho_I} = V_I \left(\frac{a}{a_I} \right)^{-3\gamma_{\text{ef}}}. \quad (5.38)$$

Por outro lado, podemos obter $\phi(a)$ notando que, de (5.19), $\dot{\phi}^2 = x\gamma_{\text{ef}}\rho_I$:

$$\frac{d\phi}{da} = \pm \sqrt{\frac{3x\gamma_{\text{ef}}}{8\pi G} \frac{1}{a}}. \quad (5.39)$$

Os sinais indicam que ϕ pode ser uma função crescente ou decrescente com o fator de escala.

A solução de (5.39) pode ser escrita na forma

$$\left(\frac{a}{a_I} \right)^{-3\gamma_{\text{ef}}} = e^{-\lambda(\phi - \phi_I)}, \quad (5.40)$$

com $\lambda = \pm \sqrt{24\pi G \gamma_{\text{ef}}/x}$. Para um universo em expansão, temos que o lado esquerdo da equação acima é uma função decrescente, portanto $\lambda(\phi - \phi_I) > 0$ e o sinal de λ será positivo se ϕ for decrescente e negativo no caso contrário. Substituindo o resultado acima em (5.38), obtém-se

$$V(\phi) = V_I e^{-\lambda(\phi - \phi_I)}, \quad (5.41)$$

onde foi assumido apenas o valor positivo de λ . Note que se $V_I \gg \rho_I$ ocorre inflação exponencial, e se V_I domina apenas moderadamente, o fator de escala evoluirá como na inflação do tipo potência de Lucchin e Matarrese [86], mas com uma componente térmica. Concebida originalmente como uma alternativa para a inflação exponencial, a inflação de lei de potência tem sido reinterpretada como estando ocorrendo hoje. Se $\delta = 0$, ou $\gamma_{\text{ef}} = \gamma = 1$, tem-se o caso mais comum de quintessência [28] e se $\gamma_{\text{ef}} = 1 - \delta$ tem-se o caso de quintessência acoplada (ver também [87]).

Como vimos, o modelo simples apresentado acima é representativo de dois modos diferentes de se estender a inflação morna original. Em um deles, mantém-se a condição isotérmica ($\alpha = \delta = 1$) para valores genéricos de x . Na outra abordagem, considera-se que os parâmetros α e x ($\alpha \neq x$) são não nulos, o que resulta em uma inflação morna de lei de potência. É de se esperar que em um caso mais geral, com ambos os parâmetros funções do tempo, seja possível encontrar um modelo consistente e unificado que contenha tanto os casos extremos (inflação morna isotérmica e inflação isentrópica) quanto as situações intermediárias.

5.7 Conclusão

Esta análise baseada nos parâmetros (α, x) pode ser útil como uma ferramenta heurística na construção de modelos contendo campos escalares acoplados ao meio material. Em princípio, ela pode ser aplicada a modelos do tipo da inflação morna (envolvendo ou não transições de fase) e modelos do tipo quintessência. Esta abordagem poderia ser tentada com um primeiro passo, para esclarecer as possíveis dinâmicas e estudar condições termodinâmicas, antes de se tentar diferentes potenciais para os campos escalares. Isto torna-se mais importante quando se considera que as condições dinâmicas, incluindo regimes inflacionários, podem ser relativamente independentes da forma do potencial devido ao termo de acoplamento, como foi visto na Seção 5.5. O acoplamento pode relaxar os vínculos sobre o potencial de tal forma que mesmo modelos exóticos de inflação oscilante como o de

Damour e Mukhanov [88] podem apresentar inflação suficiente para resolver os problemas do modelo padrão.

Um resultado interessante da última seção é que a dinâmica do modelo de decaimento do vácuo de Freese *et al.* [56] é reproduzida por um campo escalar com potencial exponencial e acoplamento. Este pode ser um primeiro passo na busca de uma forma sistemática de se encontrar lagrangeanas que representem modelos com decaimento do vácuo e, subsequentemente fazer a conexão entre os diversos modelos fenomenológicos discutidos no Capítulo 4 e teorias de campos.

Numa outra direção, um tratamento fenomenológico mais abrangente desses modelos com acoplamento deveria incluir necessariamente os métodos da termodinâmica de não-equilíbrio. Como exemplo da utilidade desta abordagem, foi mostrado recentemente [89] que a imposição de termalização entre os produtos do decaimento e o banho térmico (adotada em praticamente todas as versões de inflação morna e mesmo em alguns casos do reaquecimento padrão dos modelos inflacionários usuais) implica que o termo fenomenológico de acoplamento depende explicitamente da densidade de energia do banho térmico. Na linguagem dos parâmetros introduzidos neste capítulo, isto significa que termalização impõe um valor constante para o parâmetro α . Este fato pode ter consequências importantes sobre os modelos de inflação morna, uma vez que os vínculos termodinâmicos são menos dependentes de modelo do que os de teoria de campos [90].

Considerações finais

Como foi visto, campos escalares podem ser empregados em contextos e com motivações diferentes para resolver diversos problemas do modelo cosmológico padrão. No caso dos modelos inflacionários, problemas clássicos da cosmologia de FRW tais como o da homogeneidade e isotropia, do horizonte e da origem das perturbações de densidade são satisfatoriamente resolvidos. Entretanto, os cenários inflacionários mais bem sucedidos do ponto de vista observacional não têm ligação com teorias fundamentais. Versões melhor motivadas, baseadas em transições de fase, como a velha e a nova inflação, mostraram-se inviáveis do ponto de vista fenomenológico. Mais que isso, como as escalas de energia associadas à inflação são próximas à energia de Planck, seria também desejável que os modelos inflacionários fossem resultantes de alguma teoria de gravitação quântica que evitasse a existência da singularidade inicial. Por fim, há ainda o problema da constante cosmológica, que não é considerado no âmbito da inflação. Esses assuntos deixados pendentes pelo cenário inflacionário, mais o avanço sem precedentes na cosmologia e astrofísica observacional sugerem uma busca por novas idéias. Claro, é desejável que tais idéias sejam aplicadas sem que se percam as vantagens do tratamento com campos escalares nem o contato com a corroboração experimental.

As três aplicações de campos escalares apresentadas nesta tese mostram que muito pode ser feito fora da inflação usual. As abordagens foram fenomenológicas, mas bem motivadas. No caso da cosmologia dilatônica apresentada no Cap. 3, buscou-se uma solução para o problema da singularidade que fosse compatível com as teorias de cordas fundamentais

e suas simetrias. Dos modelos com decaimento do vácuo do Cap. 4, o mais interessante parece ser o que apresenta o estágio deflacionário, por conectar o problema da singularidade com o da constante cosmológica e ainda apresentar uma passagem suave entre a dinâmica inflacionária e a fase do tipo FRW. Por fim, espaço de parâmetros proposto no Cap. 5 pode ser útil da busca de modelos com campos escalares com ou sem acoplamentos térmicos.

Em cada um dos casos tratados abrem-se boas perspectivas de trabalhos futuros. No caso das cosmologias dilatônicas um desenvolvimento possível é incluir matéria na ação efetiva considerada e estudar os resultados. Numa outra linha, seria interessante explorar as possibilidades da inclusão de um potencial para o dilaton e avaliar seus efeitos tanto no referencial de Einstein quanto no Brans-Dicke, pois as dinâmicas nesses referenciais são diferentes e podem sugerir diferentes propostas fenomenológicas, motivadas seja pela cosmologia, no caso do primeiro, seja pela teoria de cordas, no segundo caso.

Uma extensão natural dos modelos deflacionários com decaimento do vácuo é obter soluções para o caso geral ($n \neq 1$) e estudar os seus efeitos [65]. Cada um dos parâmetros fenomenológicos (H_I , β e n) tem consequências em regimes diferentes. H_I conecta o modelo com a física na escala de Planck, n é uma medida do quão rápido ocorre a passagem entre a fase de Sitter e a fase quase-FRW (época que equivale ao reaquecimento na inflação usual). Por sua vez, β tem consequências observáveis desde a nucleossíntese até o universo atual e todas elas podem ser estudadas para impor limites sobre este parâmetro [75].

O aparato heurístico do Cap. 5 abre perspectivas para muitas aplicações. A mais imediata é fazer a análise termodinâmica de modelos com campos escalares usando os métodos da termodinâmica de não-equilíbrio nos moldes da Ref. [58]. Uma outra possibilidade é buscar versões com campos escalares das dinâmicas obtidas com os diversos modelos com decaimento do termo cosmológico. Por fim, o modelo simples discutido neste capítulo pode ser aprofundado e apresentado como uma outra proposta no contexto das cosmologias com quintessência [90].

Apêndice A

Obter as equações de movimento do Capítulo 3 a partir da ação no caso de espaços curvos é normalmente uma tarefa cansativa devido às manipulações com o tensor métrico e suas derivadas. Como o caso estudado limita-se a universos homogêneos e isotrópicos, convém simplificar os cálculos das equações de movimento a partir da ação empregada. O procedimento mais direto é calcular os tensores da teoria de gravitação escritos na métrica de FRW modificada:

$$ds^2 = n^2(t)dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (\text{A.1})$$

onde $d\Omega^2$ é a métrica do espaço tridimensional em coordenadas esféricas e $n(t)$ é uma função de lapso arbitrária que será feita igual a um nas equações de movimento obtidas. A equação de Friedmman é obtida diretamente da variação da ação com relação à função $n(t)$. Nesta métrica, os invariantes usados na ação (3.4) adotam formas mais simples. O determinante do tensor métrico será escrito como

$$g = -\frac{n^2 a^6 r^4 \sin^2(\theta)}{1 - kr^2}, \quad (\text{A.2})$$

o escalar de Ricci será

$$R = 6 \left(\frac{\dot{n}H}{n^3} - \frac{\dot{H}}{n^2} - \frac{2H^2}{n^2} - \frac{k}{a^2} \right), \quad (\text{A.3})$$

e o invariante I_2 usado no Capítulo 3

$$I_2 = \sqrt{4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - R^2} = \frac{\dot{n}H}{n^3} - \frac{k}{a^2} - \frac{\dot{H}}{n^2}, \quad (\text{A.4})$$

onde foi usado o pacote GRTensorII escrito para o programa de computação algébrica MapleVr3. A ação (3.4)

$$S = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ R - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + c\psi e^{\gamma\phi} I_2 + V(\psi) \right\}, \quad (\text{A.5})$$

pode agora ser escrita em termos da métrica (A.1)

$$S = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \frac{r^2 \sin(\theta)}{\sqrt{1 - kr^2}} a^3 \left\{ \frac{\dot{n}H}{n^2} (6 - c\sqrt{12}\psi e^{\gamma\phi}) - \right. \\ \left. n \left[\frac{k}{a^2} (c\sqrt{12}\psi e^{\gamma\phi} + 6) + \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\psi) \right] - \right. \\ \left. \frac{1}{n} [\dot{H} (6 - c\sqrt{12}\psi e^{\gamma\phi}) + 12H^2] \right\}. \quad (\text{A.6})$$

Fazendo

$$\frac{\delta S}{\delta \eta(t)} = 0, \quad (\text{A.7})$$

com $\eta(t)$ podendo ser $n(t)$, $\phi(t)$ ou $\psi(t)$, obtêm-se as equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = 0, \quad (\text{A.8})$$

com a lagrangeana $\mathcal{L}$ sendo o integrando de S . Para $\eta(t)$ assumindo respectivamente os valores das funções $n(t)$, $\phi(t)$ e $\psi(t)$, obtêm-se as equações de movimento (3.5),

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \gamma c\psi e^{\gamma\phi} \sqrt{12} \left(\frac{k}{a^2} - \dot{H} \right) = 0, \\ \dot{H} = \frac{k}{a^2} - \frac{e^{-\gamma\phi}}{c\sqrt{12}} \frac{\partial V}{\partial \psi}, \\ 6\frac{k}{a^2} + 6H^2 - \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\psi) = \\ ce^{\gamma\phi} \sqrt{12} \left[3H^2\psi - \frac{k}{a^2}\psi + H(\dot{\psi} + \gamma\dot{\phi}\psi) \right].$$

Note que nas equações de movimento foi feito $n(t) = 1$.

Apêndice B

Neste apêndice será mostrada a técnica de multiplicadores de Lagrange aplicada no Capítulo 3 a um caso simples, com o objetivo de esclarecer como a técnica opera em linhas gerais. O caso estudado aqui trata da passagem da teoria newtoniana para a teoria relativística do movimento de uma partícula livre [44]. A diferença entre as duas teorias, do ponto de vista da ação, reside na existência ou não de um limite superior para as possíveis velocidades da partícula. Começando com a ação newtoniana de uma partícula livre

$$S_n = \int dt \frac{\dot{x}^2}{2}, \quad (\text{B.1})$$

À ação acima é somado um termo com um multiplicador de Lagrange ψ acoplado a $\dot{x}^2$, a quantidade que se quer limitar, e que tem um potencial $V(\psi)$ a ser determinado de acordo com o vínculo físico no limite na velocidade da partícula,

$$S_r = \int dt \left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \psi \dot{x}^2 - V(\psi) \right). \quad (\text{B.2})$$

A variação da equação acima com relação a ψ fornece a equação de vínculo do sistema:

$$\dot{x}^2 = \frac{\partial V}{\partial \psi}. \quad (\text{B.3})$$

$\dot{x}^2$ será limitado desde que $V(\psi)$ varie linearmente com ψ para grandes valores de $|\psi|$, pois de (B.3), $\dot{x}^2$ tenderá a uma constante neste caso. O comportamento assintótico para velocidades baixas é obtido demandando que o limite newtoniano seja válido neste caso. Para isso acontecer basta que os dois últimos termos de (B.2) se cancelem. Uma forma de

obter tais comportamentos assintóticos é impor as seguintes relações:

$$\begin{aligned} V(\psi) &\sim \psi^2 \text{ para } |\psi| \rightarrow 0, \\ V(\psi) &\sim \psi \text{ para } |\psi| \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{B.4}$$

Escolhendo um potencial que interpola esses dois limites

$$V(\psi) = \frac{2\psi^2}{1 + 2\psi}, \tag{B.5}$$

e substituindo-o de volta na Eq. (B.3) para achar ψ como função de $\dot{x}$ e eliminá-lo da ação, encontra-se que

$$S_r = \frac{1}{2} \int dt \sqrt{1 - \dot{x}^2}, \tag{B.6}$$

a ação que descreve a partícula livre na relatividade especial. É claro, a ação da relatividade especial só foi obtida mediante uma escolha extremamente particular dos coeficientes de ψ na Eq. (B.5), mas em princípio coeficientes mais gerais, que ainda descreveriam uma teoria com limite de velocidade, poderiam ser experimentalmente estimados.

Bibliografia

- [1] Einstein, A. - "Considerações Cosmológicas Sobre a Teoria da Relatividade Geral," em *O Princípio da Relatividade*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, p. 225 (1958).
- [2] de Sitter, W. - "On Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences," em *The cosmological constants*, editado por J. Bernstein e G. Feinberg, Columbia University Press, New York, p. 27 (1986).
- [3] Bernstein, J.; Feinberg, G.; Eds. - *The cosmological constants*, Columbia University Press, New York, p. 8 (1986).
- [4] Friedmann, A. A. - "On the curvature of space," *idem*, p. 49; "On the possibility of a world with constant negative curvature," *idem*, p. 59.
- [5] Slipher, V. M. - Tabela com resultados até 1922 em Eddington, A. S. - *The mathematical theory of relativity*, 2nd ed., Chelsea, New York, p. 162 (1924).
- [6] Hubble, E. P. - "A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae," *Proc. N. A. S. (U. S. A.)* 15, 168 (1929).
- [7] Lemaître, G. - "A homogeneous universe of constant mass and increasing radius accounting for the radial velocity of extra-galactic nebulae," *Mon. Not. R. astr. Soc.* 91, 483 (1931).
- [8] Weinberg, S. - *Gravitation and cosmology*, Wiley, New York (1972).

- [9] Jones, B. J. T. - "A brief history of Cosmology," em *From quantum fluctuations to cosmological structures*, editado por D. Valls-Gabaud, M. A. Hendry, P. Molaro e K. Chamcham, Vol. 126 das *ASP Conference Series*, Astronomy Society of Pacific, p. 1, 1997.
- [10] Gamow, G. - "The origin of elements and the separation of galaxies," *Phys. Rev.* **74**, 505 (1948); Alpher, R. A.; Herman, R. C. - "Remarks on the evolution of the expanding universe," *Phys. Rev.* **75**, 1089 (1949).
- [11] Penzias, A. A.; Wilson, R. W. - "A measurement of excess antenna temperature at 4080 Mc/s," *Astrophys. J.* **142**, 419 (1965).
- [12] Dicke, R. H.; Peebles, P. J. E.; Roll, P. G.; Wilkinson, D. T. - "Cosmic background radiation," *Astrophys. J.* **142**, 414 (1965).
- [13] Peebles, P. J. E. - "Primordial Helium abundance and the primordial fireball," *Astrophys. J.* **146**, 542 (1966); Wagoner, R. W.; Fowler, W. A.; Hoyle, F. - "On the synthesis of elements at very high temperatures," *Astrophys. J.* **148**, 3 (1967).
- [14] Kolb, E. W.; Turner, M. S. - *The early universe*, Addison-Wesley, Redwood City (1990).
- [15] Perlmutter, S. et al. - "Discovery of a supernova explosion at half the age of the universe and its cosmological implications," *Nature* **391**, 51 (1998); Riess, G. et al. - "Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant," *Astron. J.* **117**, 707 (1999).
- [16] Peebles, P. J. E. - *Principles of physical cosmology*, Princeton University Press, Princeton (1993).
- [17] Peebles, P. J. E.; Schramm, D. N.; Turner, E. L.; Kron, R. G. - "The Case for the Relativistic Hot Big Bang", *Nature* **352**, 769 (1991).

- [18] Peacock, J. A. - *Cosmological physics*, Cambridge University Press, Cambridge (1999).
- [19] Smoot, G., et al. - "Structure in the COBE DMR first year maps," *Astrophys. J.* **396**, L1 (1992).
- [20] Primack, J. R. - "Status of cosmology," astro-ph/9912089.
- [21] Guth, A. H. - "The inflationary universe: a possible solution to the horizon and flatness problems," *Phys. Rev.* **D23**, 347 (1981).
- [22] Zeldovich, Ya. B. - "Cosmological constant and elementary particles", *JETP Lett.* **6**, 316 (1967); "The cosmological constant and the theory of elementary particles", *Sov. Phys. Uspekhi* **11**, 381 (1968).
- [23] Weinberg, S. - "The cosmological constant problem," *Rev. Mod. Phys.* **61**, 1 (1989).
- [24] Linde, A. D. - "A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems," *Phys. Lett.* **108B**, 389 (1982); Albrecht, A.; Steinhardt, P.J. - "Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking," *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1220 (1982).
- [25] Gasperini, M.; Veneziano, G. - "Pre big bang in string cosmology," *Astropart. Phys.* **1**, 317 (1993); Gasperini, M. - "Inflation and initial conditions in the pre-big bang scenario," gr-qc/9902060.
- [26] Parker, L.; Zhang, Y. - "Relativistic condensate as a source for inflation," *Phys. Rev.* **D47**, 416 (1993); *idem* "Cosmological perturbations of a relativistic condensate," *Phys. Rev.* **D51**, 2703 (1995).
- [27] Brandenberger, R. H.; Zhitnitsky, A. R. - "Can asymptotic series resolve the problems of inflation?," *Phys. Rev.* **D55**, 4640 (1997)
- [28] Peebles, P. J. E.; Ratra, B. - "Cosmology with a time variable cosmological 'constant'," *Astrophys J.* **325**, L17 (1988); Ratra, B.; Peebles, P. J. E. - "Cosmological

- consequences of a rolling homogeneous scalar field," *Phys. Rev. D* **37**, 3406 (1988); Caldwell, R. R.; Dave, R.; Steinhardt, P. J. - "Cosmological imprint of an energy component with general equation-of-State," *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1582 (1988); Fujii, Y.; Nishioka, T. - "Model of a decaying cosmological constant," *Phys. Rev. D* **42**, 361 (1990); Frieman, J. A.; Waga, I. - "Constraints from high redshift supernovae upon scalar field cosmologies," *Phys. Rev. D* **57**, 4642 (1998).
- [29] Bahcall, N.; Ostriker, J. P.; Perlmutter, S.; Steinhardt, P. J. - "The cosmic triangle: revealing the state of the universe," *Science* **284**, 1481 (1999).
- [30] Linde, A. D. - "Chaotic inflation," *Phys. Lett. B* **129**, 177 (1983).
- [31] Brandenberger, R. H. - "Inflationary universe models," *Rev. Mod. Phys.* **57**, 1 (1985).
- [32] Lyth, D. H.; Riotto, A. - "Particle physics models of inflation and the cosmological density perturbation," *Phys. Rept.* **314**, 1 (1999)
- [33] Albrecht, A.; Steinhardt, P. J.; Turner, M. S.; Wilczek, F. - "Reheating and inflationary universe," *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1437 (1982); Dolgov, A. D.; Linde, A. D. - "Baryon asymmetry in inflationary universe," *Phys. Lett.* **116B**, 329 (1982); Abbott, L. F.; Farhi, E.; Wise, M. B. - "Particle production in the new inflationary cosmology," *Phys. Lett.* **117B**, 29 (1982).
- [34] Dolgov, A. D.; Kirilova, D. P. - "Production of particles by a variable scalar field," *Sov. J. Nucl. Phys.* **51**, 172 (1990); Traschen, J.; Brandenberger, R. H. - "Particle production during out of equilibrium phase transitions," *Phys. Rev. D* **42**, 2491 (1990).
- [35] Kofman, L. A.; Linde, A. D.; Starobinsky, A. A. - "Reheating after inflation," *Phys. Rev. Lett.* **73**, 3195 (1994); *idem* - "Towards the theory of reheating after inflation," *Phys. Rev. D* **56**, 3258 (1997).
- [36] Penrose, R. - "Gravitational collapse and space-time singularities" *Phys. Rev. Lett.* **14**, 57 (1965).

- [37] Hawking, S. W.; Penrose, R - "The singularities of gravitational collapse and cosmology," *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A314**, 529 (1969).
- [38] Duff, M. J. - "M-Theory, (The theory formerly known as strings)," hep-ph/9608117.
- [39] Lidsey, J. E.; Wands, D.; Copeland, E. J. - "Superstring cosmology", hep-th/9909061.
- [40] Green, M. B.; Schwarz, J. H.; Witten, E. - *Superstring Theory: I*, Cambridge, Cambridge (1987).
- [41] Gasperini, M. - "Elementary introduction to pre-big bang cosmology and to the relic graviton background," hep-th/9907/067.
- [42] Brandenberger, R. H.; Easther, R. e Maia, J. - "Nonsingular dilaton cosmology," *JHEP* **9808**, 007 (1998).
- [43] Mukhanov, V. F.; Brandenberger, R. H. - "A nonsingular universe," *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1969 (1992).
- [44] Brandenberger, R.; Mukhanov, V.; Sornborger, A. - "A cosmological theory without singularities," *Phys. Rev.* **D48**, 1629 (1993).
- [45] Brandenberger, R.; Vafa, C. - "Superstrings in the early universe," *Nucl. Phys.* **B316**, 391 (1989).
- [46] Brustein, R.; Veneziano, G - "The graceful exit problem in string cosmology," *Phys. Lett.* **B329**, 429 (1994).
- [47] Easther, R.; Maeda, K.; Wands, D. - "Tree level string cosmology," *Phys. Rev.* **D53**, 4247 (1996).
- [48] Kaloper, N; Madden, R.; Olive, K. A. - "Towards a singularity - free inflationary universe?" *Nucl. Phys.* **B452**, 677 (1995); Kaloper, N; Madden, R.; Olive, K. A. -

- "Axions and the graceful exit problem in string cosmology," *Phys. Lett.* **371B**, 34 (1996).
- [49] Easter, R; Maeda, K. - "One loop superstring cosmology and the nonsingular universe," *Phys. Rev.* **D54**, 7252 (1996).
- [50] Starobinsky, A. A. - "A new type of isotropic cosmological models without singularity," *Phys. Lett.* **B91**, 99 (1980).
- [51] Turner, M. S.; Weinberg, E. J. - "Pre - Big Bang inflation requires fine tuning," *Phys. Rev.* **D56**, 4604 (1997); Coule, D. H. - "Pre-big bang model has Planck problem," *Class. Quant. Grav.* **15**, 2803 (1998); Kaloper, N.; Linde, A.; Bousso, R. - "Pre-big-bang requires the universe to be exponentially large from the very beginning," *Phys. Rev.* **D59**, 043508 (1999);
- [52] Easson, D. A.; Brandenberger, R. H. "Nonsingular dilaton cosmology in the string frame," *JHEP* **09**, 003 (1999).
- [53] Overduin, F. M.; Cooperstock, F. I. - "Evolution of the scale factor with a variable cosmological term," *Phys. Rev.* **D58**, 043506 (1998).
- [54] Özer, M.; Taha, M. O. - "A possible solution to the main cosmological problems," *Phys. Lett.* **B171**, 363 (1986); "A model of the universe free of cosmological problems," *Nucl. Phys.* **B287**, 776 (1987).
- [55] Abdel-Rahman, A. M. M. - "Singularity-free decaying vacuum cosmologies," *Phys. Rev.* **D45**, 3497 (1992).
- [56] Freese, K.; Adams, F. C.; Frieman, J. A.; Mottola, M. - "Cosmology with decaying vacuum energy," *Nucl. Phys.* **B287**, 797 (1987).
- [57] Birkel, M.; Sarkar, S. - Nucleosynthesis bounds on a time-varying cosmological 'constant'," *Astropart. Phys.* **6**, 197 (1997).

- [58] Lima, J. A. S. - "Thermodynamics of decaying vacuum cosmologies," *Phys. Rev.* **D54**, 2571 (1996).
- [59] Gasperini, M. - "Decreasing vacuum temperature: a thermal approach to the cosmological constant problem," *Phys. Lett.* **194B**, 347 (1987); "A thermal interpretation of the cosmological constant," *Class. Quantum Grav.* **5**, 521 (1988).
- [60] Gibbons, G. W.; Hawking, S. W. - "Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creation," *Phys. Rev.* **D15**, 2738 (1977).
- [61] Chen, W.; Wu, Y-S. - "Implications of a cosmological constant varying as R^{-2} ," *Phys. Rev.* **D41**, 695 (1990).
- [62] Carvalho, J. C.; Lima, J. A. S.; Waga, I. - "Cosmological consequences of a time-dependent cosmological term," *Phys. Rev.* **D46**, 2404 (1992).
- [63] Lima, J. A. S.; Maia, J. M. F. - "Some cosmological consequences of a Λ -term varying as $\beta H^2 + \alpha R^{-n}$," *Mod. Phys. Lett.* **A8**, 591 (1993).
- [64] Waga, I. - "Decaying vacuum flat cosmological models: expressions for some observable quantities and their properties," *Astrophys. J.* **414**, 436 (1993).
- [65] Maia, J. M. F.; Lima, J. A. S. - "The deflationary universe with a time-varying cosmological term," em preparação.
- [66] Lima, J. A. S.; Maia, J. M. F. - "Deflationary cosmology with decaying vacuum energy density," *Phys. Rev.* **D49**, 5597 (1994).
- [67] Murphy, G. L. - "Big Bang model without singularity," *Phys. Rev.* **D8**, 4231 (1973).
- [68] Barrow, J. D. - "The deflationary universe: an instability of the de Sitter universe," *Phys. Lett.* **B180**, 335 (1986).
- [69] Turner, M. S. - "Coherent field oscillation phase," *Phys. Rev.* **D28**, 1243 (1983).

- [70] Barrow, J. D. - "String-Driven inflationary and deflationary cosmological models," *Nucl. Phys. B* **310**, 743 (1988).
- [71] Lima, J. A. S.; Germano, A. S. M. - "On the equivalence of bulk viscosity and matter creation," *Phys. Lett. A* **170**, 373 (1992).
- [72] Prigogine, I.; G, J.; Gunzig, E.; Nardone, P. - "Thermodynamics and cosmology," *Gen. Rel. Grav.* **21**, 767 (1989).
- [73] Lima, J. A. S; Trodden, M. - "Decaying vacuum energy and deflationary cosmology in open and closed universes," *Phys. Rev. D* **53**, 4280 (1996).
- [74] Olson, T. S.; Jordan, T. F. - "Ages of the universe for decreasing cosmological constants," *Phys. Rev. D* **35**, 3258 (1987).
- [75] Lima, J. A. S; Maia, J. M. F.; Pires, N. - "Constraints from big bang nucleosynthesis on a time-varying cosmological 'constant'," a ser publicado nos anais do 198^o Simpsio da *International Astronomical Union* (1999).
- [76] Hosoya, A.; Sakagami, M. - "Time development of Higgs field at finite temperature," *Phys. Rev. D* **29**, 2228 (1984); Morikawa, M. - "Classical fluctuations in dissipative quantum systems," *Phys. Rev. D* **33**, 3607 (1986); Gleiser, M.; Ramos, R. O. - "Microphysical approach to nonequilibrium dynamics of quantum fields," *Phys. Rev. D* **50**, 2441 (1994); Boyanovsky, D; de Vega, H. J.; Holman, R.; Lee, D. -S.; Singh, A. - "Dissipation via particle production in scalar field theories," *Phys. Rev. D* **51**, 4419 (1995).
- [77] Felder, G.; Kofman, L.; Linde, A. D. - "Instant preheating," *Phys. Rev. D* **59**, 123523 (1999); *idem* - "Inflation and preheating in NO models," *Phys. Rev. D* **60**, 103505 (1999).
- [78] Berera, A. *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3218 (1995); "Thermal properties of an inflationary universe," *Phys. Rev. D* **54**, 2519 (1996).

- [79] Berera, A.; Fang, L. Z. - "Thermally induced density perturbations in the inflation era." *Phys. Rev. Lett.* **74**, 1912 (1995); Berera, A. VAND-TH-99-04, hep-ph/9904409.
- [80] Lee, W.; Fang, L. Z. - "Mass density perturbations from inflation with thermal dissipation," *Phys. Rev.* **D59**, 083503 (1999).
- [81] Bellini, M. - "Warm inflation and classicality conditions," *Phys. Lett.* **428B**, 31 (1998); *idem* - "Towards a theory of warm inflation of the universe," *Class. Quant. Grav.* **16**, 2393 (1999).
- [82] Berera, A.; Gleiser, M.; Ramos, R. O. - "Strong dissipative behavior in quantum field theory," *Phys. Rev.* **D58**, 123508 (1998); *idem* "A first principles warm inflation model that solves the cosmological horizon/flatness problems," *Phys. Rev. Lett.* **83**, 264 (1999); Yokoyama, J.; Linde, A. D. - "Is warm inflation possible?," *Phys. Rev.* **D60**, 083509 (1999).
- [83] Maia, J. M. F.; Lima, J. A. S. - "Extended warm inflation" *Phys. Rev.* **D60**, 101301 (1999).
- [84] Berera, A.; Kephart, T. W. - "Ubiquitous inflaton in string-inspired models," *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1084 (1999).
- [85] Oliveira, H. P.; Ramos, R. O. - "Dynamical system analysis for inflation with dissipation," *Phys. Rev.* **D57**, 741 (1998).
- [86] Lucchin, F.; Matarrese, S. - "Power law inflation," *Phys. Rev.* **D32**, 1316 (1985).
- [87] Amendola, L. - "Coupled quintessence," astro-ph/9908023.
- [88] Damour, T.; Mukhanov, V. F. - "Inflation without slow roll," *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2441 (1998).
- [89] Lima, J. A. S. - "On the thermodynamic effects of an interacting cosmic scalar field," submetido para publicação.

[90] Lima, J. A. S.; Maia, J. M. F.; Marques, G. C. - "Coupled scalar fields and thermodynamics," em preparação.