40
SBI-IFUSP

305M810T0513

ESPALHAMENTO ALTAMENTE INELÁSTICO ELÉTRON PRÓTON EM
CROMODINÂMICA QUÂNTICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de
Física da Universidade de São Paulo

CARLOS EUGENIO IMBASSAHY CARNEIRO

Depto de Física Matemática

USP

São Paulo, fevereiro de 1980

AGRADECIMENTOS

Ao prof. Josif Frenkel pela orientação e estímulo à realização deste trabalho.

A FAPESP pelo apoio financeiro.

Abstract

We present a detailed analysis of the first order QCD corrections to the electron-proton deep inelastic scattering in the leading logarithm approximation. Calculations have been performed in the Feynman gauge and in a general axial gauge. We have shown explicitly that the result is gauge independent and free from infrared divergencies.

Resumo

Apresentamos uma análise detalhada das correções de primeira ordem em QCD para o espalhamento altamente inelástico elétron-próton na aproximação do logaritmo dominante. Os cálculos foram feitos no gauge de Feynman e em um gauge axial geral. Mostramos explicitamente que o resultado independe de gauge e não contem divergências infravermelhas.

Índice

1. Introdução.....	1
2. Espalhamento Altamente Inelástico.....	4
2.1 - Notação.....	4
2.2 - Cálculo da seção de choque.....	5
2.3 - Tensor hadrônico.....	9
2.4 - Seção de choque em termos de W_1 e W_2	12
3. Amplitude Compton frontal e sua relação com W_1 e W_2	14
4. Modelo a pártons.....	20
5. Teorias de gauge.....	25
6. Correções de ordem g^2 para W_2	30
7. Cálculo de F_2 em ordem g^2	43
8. Independência de gauge.....	45
9. Divergências Infravermelhas.....	49
10. Conclusões.....	60
Apêndice 1: Convenções.....	63
Apêndice 2: Regras de Feynman para QED e para QCD.....	66
Apêndice 3	68
Apêndice 4: Demonstração das propriedades do tensor ha- drônico.....	69
Apêndice 5: Integrais úteis em regularização dimensional	71
Apêndice 6: Cálculo de $T_{\mu\mu}^{(1A)}$	72
Apêndice 7: Cálculo de $T_{\mu\mu}^{(2A)}$	77
Apêndice 8: Cálculo de $T_{\mu\mu}^{(3A)}$	78
Apêndice 9: Cálculo de $T_{\mu\mu}^{(4A)}$	85

Apêndice 10: Cálculo de $T_{\mu\mu}^{(1c)}$	87
Apêndice 11: Auto Energia do Quark	90
Apêndice 12	94
Referências	95

1. INTRODUÇÃO

O motivo principal do grande interesse nas experiências de espalhamento lépton hádron é que conhecemos, pelo menos em ordem mais baixa, a forma das interações fraca e eletromagnética dos léptons. Os resultados experimentais podem então ser usados para obtermos informações sobre a estrutura dos hádrons.

Iremos estudar o espalhamento elétron próton. Neste processo a interação dominante é a eletromagnética. O elétron espalhado serve para produzir um fóton tipo espaço que consegue sondar a estrutura do próton de uma maneira bastante clara. No espalhamento elástico o fóton interage com o material do próton de uma maneira coerente e avalia sua forma média. No espalhamento altamente inelástico a interação é incoerente e o fóton, a grosso modo, avalia a configuração instantânea do próton.

Em ordem mais baixa na constante de estrutura fina a amplitude para este último processo é representada pelo diagrama da fig.1.

fig.1

Processos de ordem mais elevada onde há troca de mais de um fóton virtual não serão considerados. As amplitudes a eles associadas representam correções de ordem $\gg \alpha^2$ em relação à amplitude considerada na fig.1.

O módulo ao quadrado da amplitude, quando há troca de um único fóton virtual, pode ser expresso como a contração de um tensor puramente leptônico com um tensor puramente hadrônico. Explorando as propriedades de covariância do tensor hadrônico podemos escrevê-lo em termos de funções escalares por transformações de Lorentz: W_1 e W_2 (funções de estrutura). Estes resultados, assim como a expressão da seção de choque em função de W_1 e W_2 , são apresentados no item 2. No item 3 mostra-se a relação entre o tensor hadrônico e a parte imaginária da amplitude Compton frontal. Esta relação será usada juntamente com o modelo quark-párton do próton para o cálculo de W_2 . Completo a introdução teórica com uma breve exposição sobre o modelo a pârtons e teorias de gauge nos itens 4 e 5.

Neste trabalho calculei a forma assintótica de W_2 através da parte imaginária da amplitude Compton frontal usando Cromodinâmica Quântica (QCD). A QCD é a teoria de gauge não abeliana que descreve as interações fortes. Seus campos fundamentais são os quarks e os gluons vetoriais. A interação entre os quarks é mediada pelos gluons que são em muitos aspectos semelhantes aos fótons. Os cálculos foram feitos até ordem g^2 no gauge de Feynman e num gauge axial geral. A vantagem de se trabalhar em gauges axiais é que neles podemos nos esquecer dos "ghosts" (partículas não físicas que precisamos introduzir para quantizar a teoria) pois eles se desacoplam completamente dos outros setores da teoria. Os diagramas de ordem g^2 envolvem a emissão e absorção de um gluon

virtual e são apresentados no item 6 onde também discuto as aproximações usadas. As passagens intermediárias podem ser encontradas nos apêndices. No item 7 as contribuições dos vários diagramas são somadas e mostro explicitamente que o resultado independe de gauge. No modelo a pãrtons mais simples, onde os pãrtons são completamente livres, o "scaling" (veja o item 4) das funções de estrutura é exato. A interação entre os quarks e os gluons leva à quebra do "scaling". Esta quebra se manifesta pelo aparecimento de termos do tipo $\log(q^2/m^2)$ (veja o item 6) e é observada experimentalmente. O fato de aparecerem apenas logaritmos e não polinômios ou outras funções ainda mais divergentes de q^2/m^2 é a expressão da propriedade de liberdade assintótica da QCD. Uma das razões de confiança na QCD é que ela é a única teoria assintoticamente livre (a altas energias a constante de acoplamento vai a zero e os quarks tendem a se tornar livres).

Como os gluons têm massa zero as integrais de Feynman para pequenos momentos apresentam divergências (divergências infravermelhas). Para que possamos aplicar teoria de perturbação de uma maneira consistente é fundamental que estas divergências se cancelem. Completei o trabalho mostrando o cancelamento das divergências infravermelhas na amplitude Compton frontal.

2. ESPALHAMENTO ALTAMENTE INELÁSTICO

2.1 - NOTAÇÃO

Fig. 2

M massa do próton

m_e massa do elétron

$k(k')$ momento inicial (final) do elétron

$\lambda(\lambda')$ polarização inicial (final) do elétron

$p(p')$ momento inicial (final) do(s) próton (hádrons)

σ polarização inicial do próton

z' todas as variáveis, exceto o momento, que caracterizam o estado hadrônico final

$$q = k - k' = p' - p$$

$$\nu = p \cdot q = -M(k_0 - k'_0) \text{ no laboratório}$$

$$\theta = \text{ângulo de espalhamento do lépton no laboratório}$$

Estudaremos colisões onde as energias envolvidas são muitas ordens de grandeza maiores do que a massa do elétron. Daqui por diante colocaremos $m_e = 0$. O erro associado a esta aproximação é negligível. Neste limite $|k| = k_0$; $|k'| = k'_0$.

$$Q^2 \equiv -q^2 \quad ; \quad q^2 = (k - k')^2 \sim 2k \cdot k' \sim 4k_0 k'_0 \sin^2 \theta / 2$$

$$\omega = -q^2 / 2\nu = Q^2 / 2\nu \quad \text{variável de scaling}$$

Note que ν e Q^2 são negativos. Eles são escalares e são negativos no referencial do laboratório.

A métrica utilizada é a pseudo-Euclidiana:

$$p^2 = p^2 + p_4^2 = p^2 - p_0^2$$

Temos $p'^2 = -M'^2 = (p+q)^2 = -M^2 + 2\nu - Q^2$. Como $Q^2, 2\nu < 0$ e $M' \geq M$ concluímos que $\omega = Q^2/2\nu > 0$ e que $|Q^2| \leq |2\nu|$.

Assim

$$0 < \omega \leq 1$$

$$\omega = 1 \quad \text{espalhamento elástico}$$

$$0 < \omega < 1 \quad \text{espalhamento inelástico}$$

A região do espalhamento altamente inelástico é caracterizada por grandes q^2 e $|2\nu|$ e $\omega = -q^2/2\nu$ fixo.

2.2 - CÁLCULO DA SECÃO DE CHOQUE

Não conhecemos o vértice hadrônico que aparece no diagrama da fig.2. Esse problema porém pode ser contornado. Vamos primeiramente calcular a amplitude para o espalhamento elástico de um próton puntiforme. Usando as regras de Feynman do apêndice 2 podemos escrever:

$$A = (2\pi)^4 i \delta(p' + k' - p - k) i \bar{u}(k'\lambda') \gamma_\mu u(k\lambda) \frac{e^2}{q^2 - i\epsilon} i \bar{u}(p'\lambda') \gamma_\mu u(p\sigma)$$

$$\text{se } J_\mu(x) = i \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) \quad \text{então}$$

$$i \bar{u}(p'\lambda') \gamma_\mu u(p\sigma) = \langle p'\lambda' | J_\mu(x=0) | p\sigma \rangle \quad (\text{Apêndice 3})$$

Este resultado simplesmente expressa o fato de que a interação eletromagnética é uma interação entre correntes mediada por fótons. O fator i garante a hermiticidade da corrente.

A generalização natural de A para um próton com estrutura e um estado final com vários hádrons é dada por

$$A = (2\pi)^4 i \delta^4(p' + k' - p - k) i \bar{u}(1k'\lambda') \gamma_\mu u(1k\lambda) \frac{e^2}{q^2 - i\epsilon} \langle p' \alpha' | J_\mu(0) | p \sigma \rangle$$

Calculemos agora a probabilidade de transição Γ para o sistema passar do estado inicial com um elétron e um próton para o estado final com um elétron e vários hádrons. Ela é obtida calculando-se $|A|^2$ e somando-se sobre todos os valores do momento final do elétron e sobre todos os valores do momento total dos hádrons.

$$\Gamma = \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2k_0'} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2p_0'} (2\pi)^8 [\delta^4(p' + k' - p - k)]^2 |F|^2$$

$$F = i \bar{u}(1k'\lambda') \gamma_\mu u(1k\lambda) \frac{e^2}{q^2 - i\epsilon} \langle p' \alpha' | J_\mu(0) | p \sigma \rangle$$

Podemos dar uma interpretação heurística para o $[\delta^4]^2$

$$[\delta^4(p' + k' - p - k)]^2 = \delta^4(0) \delta^4(p' + k' - p - k)$$

$$[\delta^4(p' + k' - p - k)]^2 = \delta^4(p' + k' - p - k) \int \frac{d^4 x}{(2\pi)^4} e^{i(p' + k' - p - k)x} =$$

$$= \delta^4(p' + k' - p - k) \int \frac{d^4 x}{(2\pi)^4} = \delta^4(p' + k' - p - k) \lim_{\substack{L \rightarrow \infty \\ T \rightarrow \infty}} \frac{L^3}{(2\pi)^3} \frac{T}{2\pi}$$

O termo $2\pi \delta(0)$ está associado ao tempo T de duração do experimento e $(2\pi)^3 \delta^3(0)$ está associado ao volume L^3 onde ele está confinado.

A quantidade observável é a seção de choque e não a probabilidade de transição. Calcularemos a seção de choque despolariada e suporemos que apenas o elétron final é detectado. Desse modo devemos somar sobre todos os estados hadrônicos finais. Seções de choque desse tipo são chamadas inclusivas.

$$\sigma = \frac{1/2 \sum_{\lambda\lambda'} 1/2 \sum_{\sigma} \sum_{\tau'} (\text{probabilidade de transição por unidade de tempo})}{(\text{fluxo incidente}) (\text{número de partículas no alvo})}$$

Vamos calcular σ no referencial do laboratório. Neste caso fluxo incidente = ρv . Onde ρ é o número de elétrons por unidade de volume que incidem sobre o alvo e v sua velocidade. Com a normalização adotado para os estados (apêndice 1) o número de elétrons incidentes é $2k_0 (2\pi)^3 \delta^3(0) = \langle k\lambda | k\lambda \rangle \cdot (2\pi)^3 \delta^3(0)$ está associado ao volume L^3 , portanto a densidade procurada é $2k_0$. Temos ainda $v = |k|/k_0$

$$\text{fluxo incidente} = \rho v = 2|k|$$

O número de partículas no alvo é:

$$\langle p\sigma | p\sigma \rangle = 2p_0 (2\pi)^3 \delta^3(0) = 2M (2\pi)^3 \delta^3(0) \quad (\text{laboratório})$$

$$\sigma = \frac{1/2 \sum_{\lambda\lambda'} 1/2 \sum_{\sigma} \sum_{\tau'} \Gamma}{2\pi \delta(0) 2k_0 2M (2\pi)^3 \delta^3(0)}$$

$$\sigma = \frac{1}{2} \sum_{\lambda\lambda'} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2k_0'} \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \sum_{\tau'} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2p_0'} (2\pi)^4 \delta^4(p' + k' - p - k) \frac{|F|^2}{2M 2|k|}$$

$$|F|^2 = [\bar{u}(k'\lambda') \gamma_\mu u(k\lambda)]^* [\bar{u}(k'\lambda') \gamma_\nu u(k\lambda)] \left(e^4 / q^4 \right) X$$

$$X \langle p\sigma | J_\mu^\dagger(0) | p'\epsilon' \rangle \langle p'\epsilon' | J_\nu(0) | p\sigma \rangle$$

Na métrica pseudo-Euclidiana ao calcularmos o conjugado de uma componente de um tensor devemos multiplicá-lo por $(-1)^n$ onde n é o número de índices 4 que a componente possui. Lembrando este fato é fácil ver que $[\bar{u}(k'\lambda') \gamma_\mu u(k\lambda)]^* = -[\bar{u}(k\lambda) \gamma_\mu u(k'\lambda')]$. A corrente eletromagnética J_μ é hermitiana assim $J_\mu^\dagger = J_\mu$.

$$\sigma = \frac{1}{2M \cdot 2|k|} \frac{e^4}{q^4} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2k'_0} \frac{(-1)}{2} \sum_{\lambda\lambda'} [\bar{u}(k\lambda) \gamma_\mu u(k'\lambda') \bar{u}(k'\lambda') \gamma_\nu u(k\lambda)] X$$

$$X \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2p'_0} \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \sum_{\epsilon'} (2\pi)^4 \delta^4(p' + k' - p - k) \langle p\sigma | J_\mu(0) | p'\epsilon' \rangle \langle p'\epsilon' | J_\nu(0) | p\sigma \rangle$$

Defino

$$\omega_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sum_{\lambda\lambda'} [\bar{u}(k\lambda) \gamma_\mu u(k'\lambda') \bar{u}(k'\lambda') \gamma_\nu u(k\lambda)]$$

Usando a fórmula para soma sobre polarização e as propriedades das matrizes γ_μ (apêndice 1) obtemos

$$\omega_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \{ (-i\cancel{k}) \gamma_\mu (-i\cancel{k}') \gamma_\nu \} = 2 [k_\mu k'_\nu + k'_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu} k \cdot k']$$

Introduzimos também o tensor hadrônico

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \sum_{\epsilon'} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2p'_0} (2\pi)^4 \delta^4(p' + k' - p - k) \langle p\sigma | J_\mu(0) | p'\epsilon' \rangle \langle p'\epsilon' | J_\nu(0) | p\sigma \rangle$$

$$\sigma = \frac{1}{2M \cdot 2|k|} \frac{e^4}{q^4} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2k'_0} \omega_{\mu\nu} W_{\mu\nu}$$

$$\frac{d\sigma}{dk'_0 d\Omega'} = \frac{1}{2M \cdot 2|k|} \frac{e^4}{q^4} \frac{k'^2}{(2\pi)^3 2k'_0} \omega_{\mu\nu} W_{\mu\nu}$$

2.3 - TENSOR HADRÔNICO

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \sum_{\xi'} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2p_0'} (2\pi)^4 \delta^4(p' - p - q) \langle p\sigma | J_{\mu}(0) | p'\xi' \rangle \langle p'\xi' | J_{\nu}(0) | p\sigma \rangle$$

$$q = k - k'$$

A função $\delta^4(p' - p - q)$ pode ser escrita da seguinte forma

$$(2\pi)^4 \delta^4(p' - p - q) = \int d^4x e^{i(p' - p - q)x}$$

Além disso

$$\langle p | J_{\mu}(x) | p' \rangle = \langle p | e^{-iPx} J_{\mu}(0) e^{iPx} | p' \rangle = e^{i(p' - p)x} \langle p | J_{\mu}(0) | p' \rangle$$

$$\Rightarrow \langle p | J_{\mu}(0) | p' \rangle = e^{-i(p' - p)x} \langle p | J_{\mu}(x) | p' \rangle$$

Podemos então reescrever $W_{\mu\nu}$ como

$$W_{\mu\nu}(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \sum_{\xi'} \int d^4x \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2p_0'} \langle p\sigma | J_{\mu}(x) | p'\xi' \rangle \langle p'\xi' | J_{\nu}(0) | p\sigma \rangle e^{-iqx}$$

Usando a relação de completeza para os estados finais (apêndice 1) obtemos

$$W_{\mu\nu}(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \int d^4x \langle p\sigma | J_{\mu}(x) J_{\nu}(0) | p\sigma \rangle e^{-iqx}$$

Vamos agora exprimir $W_{\mu\nu}$ como o comutador entre duas correntes. Isto é possível porque

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \int d^4x \langle p\sigma | J_{\nu}(0) J_{\mu}(x) | p\sigma \rangle e^{-iqx} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \sum_{\xi'} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2p_0'} \int d^4x \langle p\sigma | J_{\nu}(0) | p'\xi' \rangle \langle p'\xi' | J_{\mu}(x) | p\sigma \rangle e^{-iqx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \sum_{\xi'} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2p_0'} \int d^4 x e^{i(p-p'-q)x} \langle p\sigma | J_\nu(0) | p'\xi' \rangle \langle p'\xi' | J_\mu(0) | p\sigma \rangle \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \sum_{\xi'} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2p_0'} (2\pi)^4 \delta^4(p-p'-q) \langle p\sigma | J_\nu(0) | p'\xi' \rangle \langle p'\xi' | J_\mu(0) | p\sigma \rangle = 0
\end{aligned}$$

O termo se anula pois $\delta(p_0 - q_0 - p_0')$ é sempre nulo. No referencial do laboratório $p_0 - q_0 - p_0' = 0 \Leftrightarrow p_0' = M - q_0$. $q_0 > 0$ (porque $q_0 = k_0 - k_0'$ e o elétron transfere energia para o próton) $\Rightarrow p_0' < M$. Por outro lado não podemos ter um estado bariônico final com energia menor do que a massa do nucleon. Existem mésons e léptons com massa menor do que a do nucleon mas por conservação do número bariônico deve haver pelo menos um bárion no estado final.

Propriedades do tensor hadrônico (Apêndice 4)

(a) Positividade: Se $J_\mu^\dagger = J_\mu$ então para um 4-vetor n_μ arbitrário

$$n_\mu^* W_{\mu\nu} n_\nu \geq 0$$

(b) Se J_μ é uma corrente conservada i.e. se $\partial_\mu J_\mu = 0$ então

$$q_\mu W_{\mu\nu} = W_{\mu\nu} q_\nu = 0$$

(c) Crossing

$$W_{\mu\nu}(p, q) = -W_{\nu\mu}(p, -q)$$

Usando essas propriedades e o fato de que $W_{\mu\nu}$ é um tensor sob transformações de Lorentz consegue-se exprimir $W_{\mu\nu}$ em termos de duas funções escalares.

$W_{\mu\nu}$ depende de p e q . A forma do tensor mais geral possível que se pode construir com esses 4-vetores é a seguinte:

$$W_{\mu\nu} = p_\mu p_\nu A + p_\mu q_\nu B + q_\mu p_\nu C + q_\mu q_\nu D + \delta_{\mu\nu} E$$

As funções $A, B, \dots, E$ são escalares e portanto devem depender apenas dos escalares que podemos formar com p e q : q^2 e $p \cdot q = \nu$ ($p^2 = -M^2$ é uma constante).

A propriedade (b) garante que

$$q_\mu W_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow A\nu + Cq^2 = 0 \quad (1)$$

$$B\nu + Dq^2 + E = 0 \quad (2)$$

$$W_{\mu\nu} q_\nu = 0 \Rightarrow A\nu + Bq^2 = 0 \quad (3)$$

$$C\nu + Dq^2 + E = 0 \quad (4)$$

Temos apenas três equações independentes ($[(1)-(3)]\nu/q^2 + (2) = (4)$)

Podemos exprimir B, C e D em termos de A e E

$$W_{\mu\nu}(p, q) = \left(p_\mu - \frac{\nu}{q^2} q_\mu\right) \left(p_\nu - \frac{\nu}{q^2} q_\nu\right) A(q^2, \nu) + \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) E(q^2, \nu)$$

Defino

$$W_2(q^2, \nu) = \frac{M^2}{4\pi M} A(q^2, \nu)$$

$$W_1(q^2, \nu) = \frac{-1}{4\pi M} E(q^2, \nu)$$

$$W_{\mu\nu}(q, p) = \frac{1}{M^2} \left(p_\mu - \frac{\nu}{q^2} q_\mu\right) \left(p_\nu - \frac{\nu}{q^2} q_\nu\right) 4\pi M W_2(q^2, \nu) - \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) 4\pi M W_1(q^2, \nu)$$

A simetria de crossing (propriedade (c)) garante que

$$W_i(q^2, \nu) = -W_i(q^2, -\nu) \quad i = 1, 2$$

2.4 - SEÇÃO DE CHOQUE EM FUNÇÃO DE W_1 e W_2

Calculemos $W_{\mu\nu} W_{\mu\nu}$ utilizando os resultados acima.

$$W_{\mu\nu} W_{\mu\nu} = 2 \left[k_\mu k'_\nu + k'_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu} k \cdot k' \right] \left\{ \frac{1}{M^2} \left(p_\mu - \frac{p_\mu}{q^2} q_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{p_\nu}{q^2} q_\nu \right) W_2 - \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) W_1 \right\} 4\pi M$$

Usando $q = k - k'$ e $k'^2 = k^2 = 0$ chegamos a

$$W_{\mu\nu} W_{\mu\nu} = 8\pi M \left\{ \left[2(p \cdot k)(p \cdot k') - \frac{2v^2}{q^2} (k \cdot k') - \frac{v^2}{q^4} (k \cdot k') + M^2 (k \cdot k') \right] \frac{W_2}{M^2} - \left[k \cdot k' + 2 \frac{(k \cdot k')^2}{q^2} \right] W_1 \right\}$$

Lembrando que estamos no referencial de repouso do próton e que colocamos $m_e = 0 \Rightarrow |k| = k_0$ e $|k'| = k'_0$ podemos escrever:

$$p \cdot k = -k_0 M \quad ; \quad p \cdot k' = k'_0 M \quad ; \quad k \cdot k' = -2k_0 k'_0 \sin^2 \theta/2 \quad ;$$

$$q^2 = 4k_0 k'_0 \sin^2 \theta/2$$

$$W_{\mu\nu} W_{\mu\nu} = 16\pi M k_0 k'_0 \cos^2 \theta/2 \left\{ W_2 + 2 \tan^2(\theta/2) W_1 \right\}$$

Substituímos esse resultado na expressão para $\frac{d\sigma}{dk'_0 d\Omega'}$ encontrada no item 3.

$$\frac{d\sigma}{dk'_0 d\Omega'} = \frac{\alpha^2 \cos^2 \theta/2}{4k_0^2 \sin^2 \theta/2} \left[W_2(v, q^2) + 2 \tan^2 \frac{\theta}{2} W_1(v, q^2) \right]$$

$$\alpha^2 = e^2/4\pi \quad \text{é a constante de estrutura fina}$$

A seção de choque despolarizada para o espalhamento de uma partícula de spin 1/2 num potencial Coulombiano $e/4\pi|x|$ é dada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4k_0^2 \beta^2 \sin^4 \theta/2} (1 - \beta^2 \sin^2 \theta/2) \quad (\text{Mott 1929})$$

$$\beta = |k|/k_0 = \text{velocidade}$$

No limite ultrarelativístico, que é o nosso caso, $\beta \sim 1$ e essa expressão se reduz ao fator que multiplica as funções de estrutura

$$\frac{d\sigma}{dk_0' d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \left[W_2(\nu, q^2) + 2 \tan^2 \frac{\theta}{2} W_1(q^2, \nu) \right]$$

Para determinar W_2 não trabalharemos com a seção de choque. Conforme mostraremos no item seguinte existe uma relação simples entre a amplitude frontal despolarizada para o espalhamento Compton e o tensor hadrônico.

3. AMPLITUDE COMPTON FRONTAL E SUA RELAÇÃO COM W_1 e W_2

No espalhamento frontal os estados inicial e final são iguais. Consideremos primeiramente um próton puntiforme. Em ordem mais baixa o espalhamento Compton é representado pelo diagrama abaixo

Fig.3

Da expansão perturbativa da matriz S :

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_n T^* [L_{int}(x_1) \dots L_{int}(x_n)]$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ie)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_n T^* [J_\mu(x_1) \dots J_\nu(x_n)] T^* [A_\mu(x_1) \dots A_\nu(x_n)]$$

$$J_\mu(x) = i \bar{\Psi}(x) \gamma_\mu \Psi(x)$$

o termo relevante para o processo descrito na fig. 3 é:

$$S_2 = \frac{-e^2}{2} \int d^4x \int d^4y T^* [J_\mu(x) J_\nu(y)] T^* [A_\mu(x) A_\nu(y)]$$

O elemento de matriz procurado é:

$$\langle p\sigma q|\xi | S_2 | p\sigma q|\xi \rangle = \frac{-e^2}{2} \int d^4x \int d^4y \langle p\sigma | T^* \{ J_\mu(x) J_\nu(y) \} | p\sigma \rangle \langle q|\xi | T^* A_\mu(x) A_\nu(y) | q|\xi \rangle$$

O operador T nem sempre é covariante. Dados dois operadores $A(x)$ e $B(0)$ se $[A(x), B(0)]$ contiver termos de Schwinger (1) (e.g. derivadas de funções δ) então $T\{A(x)B(0)\}$ não é covariante. A covariância é restabelecida adicionando-se a $T\{A(x)B(0)\}$ um termo $T(x)$ (seagull). $T^*\{A(x)B(0)\} = T\{A(x)B(0)\} + T(x)$. Se o comutador dos dois operadores não contiver termos de Schwinger $T(x) = 0$ e $T^* = T$. No caso do modelo quark-parton $T(x)$ é um número "c" e não contribui para a parte conexa de $\langle p\sigma | T^* J_\mu(x) J_\nu(y) | p\sigma \rangle$. Para a parte conexa, que é a que consideraremos daqui por diante, $T^* = T$. No que se segue colocaremos $T^* = T$ e fica subentendido que trabalharemos sempre com a parte conexa das amplitudes. Os resultados extraídos de gráficos como o da Fig.3 através das regras de Feynman são covariantes e não precisamos nos preocupar com eles. Esta discussão serve apenas como justificativa para as manipulações que faremos logo abaixo.

A generalização da fórmula anterior para um próton com estrutura tem a mesma forma:

$$\begin{aligned} \langle p\sigma | q_1 \xi | S_2 | p\sigma | q_1 \xi \rangle &= \frac{-e^2}{2} \int d^4x d^4y \langle p\sigma | T J_\mu(x) J_\nu(y) | p\sigma \rangle \langle q_1 \xi | T A_\mu(x) A_\nu(y) | q_1 \xi \rangle \\ &= \frac{-e^2}{2} \int d^4x d^4y \langle p\sigma | T J_\mu(x) J_\nu(y) | p\sigma \rangle \langle q_1 \xi | : A_\mu(x) A_\nu(y) : | q_1 \xi \rangle \end{aligned}$$

Usamos $T A_\mu(x) A_\nu(y) = : A_\mu(x) A_\nu(y) : + D_{\mu\nu}^F(x-y)$. O segundo termo é o propagador de Feynman para o fóton e não contribui para o diagrama da fig.3.

Usando a expansão de $A_\mu(x)$ em ondas planas (Apêndice 1) concluímos que

$$\langle q_1 \xi | : A_\mu(x) A_\nu(y) : | q_1 \xi \rangle = \epsilon_\mu(q_1 \xi) \epsilon_\nu(q_1 \xi) (e^{iq(x-y)} + e^{-iq(x-y)})$$

$$\langle p\sigma | T J_\mu(x) J_\nu(y) | p\sigma \rangle$$

possui invariância transla-

cional isso quer dizer que

$$\langle p\sigma | T J_\mu(x) J_\nu(y) | p\sigma \rangle = \langle p\sigma | T J_\mu(x+v) J_\nu(y+v) | p\sigma \rangle$$

onde v é um 4-vetor qualquer. Em particular para $v = -y$

$$\langle p\sigma | T J_\mu(x) J_\nu(y) | p\sigma \rangle = \langle p\sigma | T J_\mu(x-y) J_\nu(0) | p\sigma \rangle$$

Usando esses dois resultados a amplitude pode ser escrita como

$$\langle p\sigma q|\xi | S_2 | p\sigma q|\xi \rangle = -e^2/2 \int d^4x d^4y \langle p\sigma | T J_\mu(x-y) J_\nu(0) | p\sigma \rangle \epsilon_\mu(q|\xi) \epsilon_\nu(q|\xi) X$$

$$X (e^{iq(x-y)} + e^{-iq(x-y)})$$

$$= -e^2/2 \int d^4y d^4\eta \langle p\sigma | T J_\mu(\eta) J_\nu(0) | p\sigma \rangle \epsilon_\mu(q|\xi) \epsilon_\nu(q|\xi) (e^{iq\eta} + e^{-iq\eta})$$

O termo com $e^{iq\eta}$ dá uma contribuição idêntica ao termo com $e^{-iq\eta}$

$$(\langle p | T J_\mu(\eta) J_\nu(0) | p \rangle \epsilon_\mu \epsilon_\nu = \langle p | T J_\mu(0) J_\nu(-\eta) | p \rangle \epsilon_\mu \epsilon_\nu = \langle p | T J_\nu(0) J_\mu(-\eta) | p \rangle \epsilon_\mu \epsilon_\nu)$$

$$= \langle p | T J_\mu(-\eta) J_\nu(0) | p \rangle \epsilon_\mu \epsilon_\nu ; \quad \text{usamos na última}$$

$$\text{passagem } T \{ J_\nu(0) J_\mu(-\eta) \} = T \{ J_\mu(-\eta) J_\nu(0) \}$$

$$\langle p\sigma q|\xi | S_2 | p\sigma q|\xi \rangle = -e^2 \int d^4y d^4\eta \langle p\sigma | T J_\mu(\eta) J_\nu(0) | p\sigma \rangle \epsilon_\mu(q|\xi) \epsilon_\nu(q|\xi) e^{-iq\eta}$$

Como toda a dependência em y foi eliminada a integral nesta variável diverge. Mas como já discutimos associamos $\int d^4y$ a $(2\pi)^4 \delta^4(0)$. Não há nada especial neste $\delta^4(0)$. Como se sabe um elemento de matriz S

Fig. 4

pode ser colocado sob a forma

$$(2\pi)^4 i \delta^4(p_f + q_f - p_i - q_i) F$$

No caso do espalhamento frontal $p_i = p_f$, $q_i = q_f$ e portanto aparece o $\delta^4(0)$.

$$\langle p\sigma q|\xi | S_2 | p\sigma q|\xi \rangle = (2\pi)^4 i \delta^4(0) e^2 T'_{\mu\nu} \epsilon_\mu(q|\xi) \epsilon_\nu(q|\xi)$$

$$T'_{\mu\nu} = i \int d^4x e^{-iqx} \langle p\sigma | T J_\mu(x) J_\nu(0) | p\sigma \rangle$$

Estamos querendo relacionar a amplitude para espalhamento Compton frontal com o tensor hadrônico. Na definição do segundo havia uma média sobre spins. Para poder comparar as duas grandezas vamos trabalhar com a soma sobre spins da amplitude Compton

$$\langle p\sigma q|\xi | \bar{S}_2 | p\sigma q|\xi \rangle = (2\pi)^4 i \delta^4(0) e^2 T_{\mu\nu} \epsilon_\mu(q|\xi) \epsilon_\nu(q|\xi)$$

$$T_{\mu\nu}(q,p) = \sum_{\sigma} i \int d^4x e^{-iqx} \langle p\sigma | T J_\mu(x) J_\nu(0) | p\sigma \rangle$$

Mostremos agora que

$$\text{Im } T_{\mu\nu} = W_{\mu\nu}$$

$$T_{\mu\nu}(q,p) = i \sum_{\sigma} \int d^4x e^{-iqx} \langle p\sigma | \theta(x_0) J_\mu(x) J_\nu(0) + \theta(-x_0) J_\nu(0) J_\mu(x) | p\sigma \rangle$$

$\theta(x_0)$ tem a seguinte representação integral:

$$\theta(x_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{e^{i\tau x_0}}{\tau - i\epsilon}$$

O contorno de integração é um círculo no semi-plano complexo superior (inferior) para x_0 positivo (negativo)

$$T_{\mu\nu}(q,p) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\sigma} \int d^4x d\tau e^{-iqx} \frac{e^{i(q_0+\tau)x_0}}{\tau - i\epsilon} \langle p\sigma | J_\mu(x) J_\nu(0) | p\sigma \rangle$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sum_{\sigma} \int d^4x d\tau e^{-iqx} \frac{e^{i(q_0+\tau)x_0}}{\tau - i\epsilon} \langle p\sigma | J_\mu(x) J_\nu(0) | p\sigma \rangle$$

Na primeira integral fazemos a mudança de variável $q_0' = \tau + q_0$ e na segunda $q_0' = q_0 - \tau$.

$$T_{\mu\nu}(q,p) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\sigma} \int d^4x \, dq_0' \, e^{-iq_0'x} \frac{e^{iq_0'x_0}}{q_0' - q_0 - i\epsilon} \langle p\sigma | J_{\mu}(x) J_{\nu}(0) | p\sigma \rangle$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sum_{\sigma} \int d^4x \, dq_0' \, e^{-iq_0'x} \frac{e^{iq_0'x_0}}{q_0' - q_0 - i\epsilon} \langle p\sigma | J_{\mu}(x) J_{\nu}(0) | p\sigma \rangle$$

Para calcular a parte imaginária de $T_{\mu\nu}$ usamos o seguinte resultado

$$\frac{1}{q_0' - q_0 - i\epsilon} = \frac{\mathcal{P}}{q_0' - q_0} + i\pi \delta(q_0' - q_0) \quad (\mathcal{P} \text{ significa valor principal})$$

$$\text{Im } T_{\mu\nu}(q,p) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \int d^4x \, e^{-iqx} \langle p\sigma | J_{\mu}(x) J_{\nu}(0) | p\sigma \rangle$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \int d^4x \, e^{-iqx} \langle p\sigma | J_{\nu}(0) J_{\mu}(x) | p\sigma \rangle$$

Conforme já discutimos quando vimos o tensor hadrônico a segunda integral é nula e a primeira corresponde à definição de $W_{\mu\nu}$.

$$\text{Im } T_{\mu\nu}(q,p) = W_{\mu\nu}(q,p)$$

A amplitude para espalhamento Compton é invariante sob transformações de gauge. Ou seja ela fica inalterada sob a transformação $\epsilon_{\mu} \rightarrow \epsilon_{\mu} + q_{\mu}$ onde q_{μ} é o momento associado ao fóton. Para que isso ocorra é necessário que

$$q_{\mu} T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} q_{\nu} = 0$$

A propriedade acima garante que podemos decompor $T_{\mu\nu}$ de um modo exatamente análogo ao que fizemos para $W_{\mu\nu}$

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{M^2} \left(p_{\mu} - \frac{\nu}{q^2} q_{\mu} \right) \left(p_{\nu} - \frac{\nu}{q^2} q_{\nu} \right) 4\pi M T_2(q^2, \nu) - \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{q_{\mu} q_{\nu}}{q^2} \right) 4\pi M T_1(q^2, \nu)$$

A relação $\text{Im } T_{\mu\nu} = W_{\mu\nu}$ implica

$$\text{Im } T_i(q^2, \nu) = W_i(q^2, \nu)$$

$T_{\mu\nu}$ é determinado através dos diagramas de Feynman para o espalhamento Compton frontal. A partir dele podemos calcular T_2 e consequentemente W_2 usando o seguinte sistema de equações:

$$T_{\mu\mu} = \frac{1}{M^2} \left(-M^2 - \frac{\nu^2}{q^2} \right) 4\pi M T_2 - 12\pi M T_1$$

$$\frac{p_\mu p_\nu}{M^2} T_{\mu\nu} = \frac{1}{M^4} \left(-M^2 - \frac{\nu^2}{q^2} \right)^2 4\pi M T_2 - \frac{1}{M^2} \left(-M^2 - \frac{\nu^2}{q^2} \right) 4\pi M T_1$$

$$\Rightarrow 4\pi M T_2 = -\frac{M^2}{2} \left(-M^2 - \frac{\nu^2}{q^2} \right)^{-1} T_{\mu\mu} + \frac{3}{2} M^4 \left(-M^2 - \frac{\nu^2}{q^2} \right) \frac{p_\mu p_\nu}{M^2} T_{\mu\nu}$$

$$\frac{1}{\left(-M^2 - \frac{\nu^2}{q^2} \right)} = \frac{1}{\left(-M^2 - \frac{q^2}{4\omega^2} \right)} \sim \frac{4\omega^2}{Q^2}$$

Para fazer a expansão acima usamos o fato de que $\frac{M^2}{4\omega^2} \ll 1$ no espalhamento altamente inelástico bem como $0 < \omega \leq 1$.

$$T_2 \sim -\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\pi} \frac{M}{Q^2} T_{\mu\mu} = -\frac{1}{4\pi} \omega \frac{M}{\nu} T_{\mu\mu}$$

$$W_2 \sim \text{Im} \left[-\frac{1}{4\pi} \omega \frac{M}{\nu} T_{\mu\mu} \right]$$

4. MODELO A PÁRTONS

Para efetivamente calcularmos W_1 é necessário supor um modelo para o próton. O comportamento experimental das funções de estrutura W_i na região do espalhamento altamente inelástico nos dá uma pista sobre a estrutura do núcleon. Nessa região os W_i que são funções das variáveis q^2 e ν passam a depender apenas da razão $\omega = -q^2/2\nu$

$$W_1(q^2, \nu) \xrightarrow{q^2, |\nu| \rightarrow \infty, \omega \text{ fixo}} F_1(\omega)$$

$$-\frac{\nu}{M} W_2(q^2, \nu) \xrightarrow{\hspace{2cm}} F_2(\omega)$$

Essa propriedade é conhecida como "scaling" de Bjorken.

Qualquer modelo que considere o núcleon como um estado composto de constituintes puntiformes prediz o scaling. Esta é a base do modelo a pártons, nome dado por Feynman aos constituintes do núcleon.

Uma característica importante deste modelo é o uso do referencial no qual o próton tem momento infinito (RMI). Neste referencial o núcleon tem uma estrutura simples e podemos fazer algumas aproximações. O RMI é muito bem aproximado pelo referencial do centro de massa (RCM) no caso do espalhamento altamente inelástico.

Consideramos o próton como uma caixa de pártons que dividem entre si o momento do nucleon e são praticamente livres no RMI. Podemos também olhar os pártons do ponto de vista dinâmico no referencial de repouso do próton. Supomos uma energia finita de interação entre os pártons de modo que a medida que o tempo

passa eles mudam seus momentos, são criados ou destruídos, etc, em tempos finitos. Quando, porém, o momento p do próton começa a aumentar esses tempos são dilatados por efeitos relativísticos. Quanto mais aumenta p mais devagar as coisas mudam até que finalmente os pãrtons passam a se comportar como se não interagissem. Além disso a dimensão linear do próton na direção do movimento experimenta uma forte contração de Lorentz. Nessas condições o lépton é espalhado instantaneamente e incoerentemente por um dos pãrtons que constituem o núcleon.

Fig. 5

Para se poder aplicar teoria de perturbação de uma maneira consistente as partículas reagentes e os produtos da reação devem ser assintoticamente livres. A hipótese de que os pãrtons no RMI se comportam como partículas livres se encarrega disto. Como o lépton é espalhado por um único pãrton puntiforme o problema se reduz, numa primeira aproximação, ao cálculo de W_2 para o espalhamento entre duas partículas puntiformes. Tendo este resultado somamos sobre todas as possibilidades.

Usamos as seguintes hipóteses para determinarmos as funções de estrutura no modelo a pãrtons:

(a) Quando $p = \infty$ o próton está num estado de N pártons livres com probabilidade $P(N)$ ($\sum_N P(N) = 1$)

(b) O momento longitudinal do i -ésimo párton é $P_i = x_i p$ com distribuição de probabilidade $f_N^i(x_i)$. Além disso a distribuição de momento transversal é suposta limitada. Como $p \rightarrow \infty$ $p_i^\mu \sim x_i p^\mu$ (p_i^μ é todo o 4-vetor momento do i -ésimo párton $p_i = P_i + p_i^\perp$) é uma boa aproximação.

(c) A massa dos pártons antes e depois da colisão é pequena.

(d) O momento transversal do párton antes da colisão é muito menor do que $(q^2)^{1/2}$, o momento transversal transferido pela colisão.

Para calcular a seção de choque somamos incoerentemente as seções de choque correspondentes ao espalhamento entre o lépton e cada um dos N pártons para cada configuração possível. Temos então

$$W_2(q^2, \nu) = \sum_N P(N) \sum_{i=1}^N \int_0^1 dx_i W_2^i(q^2, \nu, x_i) f_N^i(x_i)$$

Vamos determinar W_2^i usando a técnica desenvolvida no item 6. Assumiremos que os pártons tem spin 1/2 e os identificaremos com os quarks. Como já discutimos devemos calcular $T_{\mu\nu}$ para o espalhamento Compton do quark puntiforme.

$$p_i = x_i p$$

Fig.6

Como estamos supondo a massa m_i do quark pequena podemos sempre desprezã-la face a q^2 e $|2v|$. Além disso podemos colocar $m_i = 0$ no propagador do quark. Chamando η_i a fração da carga elementar carregada pelo quark obtemos para a amplitude:

$$A = (2\pi)^4 i \delta^4(0) \eta_i^2 e^2 (-) \sum_{\sigma} \bar{u}(p, \sigma) \gamma_{\mu} \left[\frac{-i(\not{p} + \not{q})}{(p+q)^2 - i\epsilon} \right] \gamma_{\nu} u(p, \sigma) \epsilon_{\mu}(q, \xi) \epsilon_{\nu}(q, \xi)$$

$$= (2\pi)^4 i \delta^4(0) e^2 \left[\frac{(-) \eta_i^2 \text{Tr} \{ (-i \not{p}) \gamma_{\mu} (-i) (\not{p} + \not{q}) \gamma_{\nu} \}}{(p+q)^2 - i\epsilon} \right] \epsilon_{\mu}(q, \xi) \epsilon_{\nu}(q, \xi)$$

$$\Rightarrow T_{\mu\nu}^i = \frac{\eta_i^2 \text{Tr} \{ \not{p} \gamma_{\mu} (\not{p} + \not{q}) \gamma_{\nu} \}}{(p+q)^2 - i\epsilon}$$

$$T_2^i = -\frac{1}{8\pi} \frac{Q^2 M}{v^2} T_{\mu\mu} = -\frac{\eta_i^2}{8\pi} \frac{Q^2 M}{v^2} \frac{\text{Tr} \{ \not{p} \gamma_{\mu} (\not{p} + \not{q}) \gamma_{\mu} \}}{2v x_i - Q^2 - i\epsilon}$$

$$= \frac{\eta_i^2}{\pi} \frac{Q^2 M}{2v^2} \frac{x_i}{x_i - \omega + i\epsilon} \quad (\text{o } i\epsilon \text{ muda de sinal porque } 2v < 0)$$

$$W_2^i = \text{Im } T_2^i = -\eta_i^2 \frac{Q^2 M}{2v^2} x_i \delta(x_i - \omega) = \frac{-\eta_i^2 \omega x_i M}{v} \delta(x_i - \omega)$$

$$W_2^i = \frac{-\eta_i^2 x_i^2 M}{v} \delta(x_i - \omega)$$

Costuma-se normalizar os estados do quark de modo que $\langle x_i | p | x_i | p \rangle = x_i \langle p | p \rangle$. Isso garante que $\lim_{k_0 \rightarrow \omega} \frac{d\sigma^i}{dq^2} = \eta_i^2 \left(\frac{4\pi\alpha^2}{q^4} \right)$ de forma consistente com a fórmula de Rutherford. Se adotamos esta normalização a nova amplitude vai ser igual à antiga dividida por x_i .

Substituindo esse resultado na expressão para W_2 obtemos

$$W_2(q^2, \nu) = \sum_N P(N) \sum_{i=1}^N \int_0^1 dx_i \frac{M x_i \eta_i^2}{(-\nu)} \delta(x_i - w) f_N^i(x_i)$$

$$\frac{-\nu}{M} W_2(q^2, \nu) = w \sum_N P(N) \sum_{i=1}^N \eta_i^2 f_N^i(w) = F_2(w)$$

Como antecipamos $(-\nu/M) W_2(q^2, \nu)$ no limite $q^2, \nu \rightarrow \infty$ e w fixo é função apenas de w . Quando consideramos apenas a amplitude para espalhamento Compton frontal em ordem mais baixa o "scaling" é exato. Ao calcularmos correções de ordem mais alta, ligadas à emissão e absorção de um glúon virtual, observamos a quebra do "scaling" com o aparecimento de termos do tipo $\log \frac{q^2}{m^2}$

Antes de calcularmos as correções vamos falar rapidamente sobre teorias de gauge.

5. TEORIAS DE GAUGE

Historicamente a Lagrangeana de QED foi obtida a partir da Lagrangeana livre para partículas de spin 1/2 usando-se o princípio de correspondência. Como na teoria não relativística, para se obter o termo de interação substitui-se ∂_μ por $\partial_\mu - ieA_\mu$ na Lagrangiana livre (acoplamento minimal). Para garantir a dinâmica desse novo campo A_μ acrescenta-se o termo $-1/4 F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$. Sua forma é igual à do termo correspondente no eletromagnetismo clássico. A teoria resultante, como o análogo clássico, é invariante sob transformações de gauge.

Podemos também, partindo da lagrangeana livre de Dirac

$$\mathcal{L}_0 = -\bar{\Psi}(x) (\gamma_\mu \partial_\mu + m) \Psi(x),$$

obter a Lagrangeana de QCD explorando apenas as simetrias da teoria.

É fácil ver que $\mathcal{L}_0$ é invariante sob a transformação de gauge global

$$\Psi(x) \rightarrow e^{i\theta} \Psi(x) \quad (\Psi(x) \rightarrow \Psi(x) + i\theta \Psi(x) \quad \text{para transformações infinitesimais})$$

$$\theta = \text{constante}$$

Esta simetria mostra que a fase de Ψ não é mensurável e portanto arbitrária (deve ser igual, porém, em todos os pontos do espaço).

Suponha que quiséssemos ampliar a simetria tornando a teoria invariante sob transformações de gauge locais:

$$\Psi(x) \rightarrow e^{i\theta(x)} \Psi(x) \quad ; \quad \theta(x) = \text{função arbitrária de } x$$

Dessa forma poderíamos fixar a fase localmente, numa região com as dimensões do nosso experimento, sem nos referirmos a grandes

distâncias.

Para esse segundo tipo de transformação, porém,

$$\partial_\mu \psi(x) \longrightarrow e^{i\theta(x)} \partial_\mu \psi + i e^{i\theta(x)} \psi(x) \partial_\mu \theta(x)$$

Para restaurar a invariância devemos nos livrar do segundo termo. Isso é feito substituindo-se a derivada usual ∂_μ pela chamada derivada covariante D_μ definida como:

$$D_\mu = \partial_\mu - ie A_\mu$$

onde A_μ se transforma como

$$A_\mu(x) \longrightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \theta(x) \quad (\text{transformação infinitesimal})$$

Com isso

$$\mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}_1 = -\bar{\psi} (\gamma_\mu \partial_\mu + m) \psi + ie A_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$$

$\mathcal{L}_1$ é invariante sob transformações de gauge locais e contém o campo de gauge A_μ . Para que possamos interpretar A_μ como o campo do fóton precisamos introduzir o termo $-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$. Este último dá a dinâmica de A_μ . Note que não podemos acrescentar um termo de massa para o fóton $(-\frac{1}{2} m^2 A_\mu A_\mu)$ sem quebrar a invariância de gauge. Com isso obtemos finalmente a Lagrangeana de QED

$$\mathcal{L}_{EM} = -\bar{\psi} (\gamma_\mu \partial_\mu + m) \psi + ie A_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

Esta maneira de ver a eletrodinâmica quântica apesar de parecer muito artificiosa é bastante poderosa. No caso das interações fortes e fracas não temos um análogo clássico para servir de guia na determinação da Lagrangeana de interação. É interessante averiguar se um procedimento análogo ao que nos levou à Lagrangeana de QED não levaria a uma teoria para essas interações. Hoje, a evidência experimental apoia esta hipótese.

As teorias de gauge não determinam univocamente um mode

lo. Este vai depender da escolha dos campos elementares e do grupo de simetria que fizermos. Feita esta escolha recaímos no seguinte problema:

Tem-se um conjunto de campos $\phi^i(x)$, $i = 1, \dots, n$ e uma densidade de Lagrangeana livre $\mathcal{L}_0[\phi^i(x), \partial_\mu \phi^i(x)]$ que descreve a dinâmica do sistema. Uma simetria interna é uma invariância de $\mathcal{L}_0$ sob o grupo G de transformações que atua nos campos $\phi^i(x)$ da seguinte forma:

$$\phi^i(x) \rightarrow \phi^i(x) + i\theta^a (T_a)_j^i \phi^j(x) \quad (\text{forma infinitesimal})$$

$$i = 1, \dots, n \quad ; \quad a = 1, \dots, N$$

N é o número de geradores de G i.e. a dimensão da álgebra de Lie associada. $N = 1$ para $U(1)$ que é o grupo de QED, 3 para $SU(2)$, 8 para $SU(3)$, etc

T_a são as matrizes da representação de G no espaço n dimensional ao qual os ϕ^i pertencem. Por exemplo se $G = SU(2)$ e os ϕ^i formam um isodoubleto $T_a = \tau_a/2$ (matrizes de Pauli) se os campos formam um isovetor $(T_a)_j^i = -i\epsilon_{aij}$, etc

θ^a são N parâmetros infinitesimais e constantes.

Podemos escrever a transformação dos campos sob forma matricial

$$\Phi(x) \rightarrow (1 + i\theta^a T_a) \Phi(x) \quad ; \quad \Phi^i = \phi^i$$

Uma transformação de gauge finita pode ser vista como uma sucessão de transformações de gauge infinitesimais

$$\Phi(x) \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + i \frac{\theta^a T_a}{n} \right)^n \Phi(x) = e^{i\theta^a T_a} \Phi(x)$$

É clara a analogia com QED. O grupo de simetria de

de QED é $U(1)$ que tem como gerador a matriz unidade $\mathbb{1}$. ($\mathbb{1} = \mathbb{1}$ em uma dimensão). No caso mais geral o grupo de simetria possui mais de um gerador e estes não comutam (grupos não abelianos). Para grupos de Lie

$$[T_a, T_b] = f_{abc} T_c$$

$f^{abc} \equiv f_{abc}$ é a constante de estrutura do grupo e é completamente anti simétrica.

Assim como fizemos em QED conseguimos ampliar a simetria (i.e. tornar a Lagrangeana invariante sob transformações de gauge locais) substituindo a derivada usual ∂_μ por uma derivada covariante D_μ . Esta possui N campos de gauge A_μ^a , um para cada dimensão da álgebra de Lie. Para que possamos interpretar os A_μ^a como campos físicos devemos acrescentar o termo $-1/4 F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a$ invariante sob transformações de gauge locais.

$$D_\mu = \partial_\mu + ig T_a A_\mu^a(x)$$

$$A_\mu^a \rightarrow A_\mu^a - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^a + f^{abc} \theta^b A_\mu^c \quad (\text{sob transformações infinitesimais})$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

Acredita-se hoje que as interações fortes sejam descritas por uma teoria de gauge: a Cromodinâmica Quântica (QCD). A Lagrangeana de QCD num gauge axial geral ($n_\mu A_\mu^a = 0$) é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\bar{\Psi}(\not{\partial} + m)\Psi + ig A_\mu^a \bar{\Psi} T_a \not{\gamma}_\mu \Psi - \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c)^2 \\ & - \frac{1}{2} (n_\mu A_\mu^a)^2 + \mathcal{L}_{ghost} \end{aligned}$$

Nesta teoria os campos elementares são os quarks (Ψ) e os gluons vetoriais (A_μ^a). Os quarks interagem através da troca de gluons. O grupo de simetria da QCD é $SU(N) \times SU(3)_c$. (O índice c subscrito significa cor). Apenas a simetria de cor é tor

nada uma simetria local. Nesta teoria existem N quarks (u, d, s, c , etc), cada um deles podendo ter 3 cores. Os gluons como os fótons têm massa zero e têm carga zero, podem entretanto carregar cor. Um quark ao emitir um gluon pode mudar de cor. Existem 8 gluons que fazem todas as transições possíveis entre as três cores.

A quantização das teorias de gauge devido à simetria de gauge é complicada. É necessário acrescentar um termo para fixar o gauge $(-1/2 (\eta_\mu A_\mu^a)^2$ no nosso caso) e que torna possível calcular o propagador dos A_μ^a . Para que a Física não seja alterada adicionamos também $\int \mathcal{L}_{ghost}$. Este termo em gauges axiais se desacopla completamente e não precisamos nos preocupar com ele.

6. CORREÇÕES DE ORDEM g^2 PARA W_2

Usaremos:

(a) $m^2 \ll q^2, |v|$ (m é a massa do quark)

(b) Colocaremos $m = 0$ nos propagadores do quark. Como o propagador tem a forma

$$(-i\not{K} + m) / (K^2 + m^2)$$

aparentemente estamos desprezando termos de ordem m . Na realidade somaremos sobre os spins do quark e no numerador aparecerá um traço de matrizes γ_μ . Será fácil ver que os termos que contêm apenas um m têm um número ímpar de matrizes γ_μ e são portanto nulos.

(c) Para não sobrecarregar a notação colocaremos o momento do quark incidente $p_i = p$ ($p_i = x_i p$) e a carga do quark $\eta_i = 1$. A dependência em x_i e η_i pode ser recuperada fazendo-se a substituição $p \rightarrow p_i$ e multiplicando o resultado final por η_i^2 .

(d) Vamos considerar o espalhamento de um quark de tipo definido (e.g. u). Assim $[u(p\sigma)]_{ab} = \delta_{ab} u(p\sigma)$ $a, b = 1, 2, 3$ são índices de cor.

(e) Estaremos interessados em termos do tipo $\log(q^2/m^2)$, $q^2 \rightarrow \infty$, (aproximação do logaritmo dominante) e desprezaremos termos pequenos em relação a ele.

(f) Usaremos o método de regularização dimensional. As fórmulas relevantes podem ser encontradas no apêndice 5.

(g) QCD é renormalizável. Todos os infinitos da teoria podem ser

absorvidos em parâmetros da teoria como massa, carga, etc. No nosso trabalho nos limitaremos a subtrair os pólos $\frac{2C}{N-4}$ no ponto $C \log \mu$

$$m^2 \ll \mu^2 \ll q^2$$

As correções de gluons que devemos calcular são represen-
tadas pelos diagramas da Fig.7

Fig. 7

Usemos as regras de Feynman para QCD (Apêndice 2)

6.1 - DIAGRAMA A

$$(2\pi)^4 i \delta^4(0) e^2 g^2 \frac{1}{3} \sum_{\sigma, b, c, d} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} [\bar{u}(p\sigma)]_{bc} \gamma_\nu \left[\frac{-i(\not{p} + \not{q})}{(p+q)^2 - i\epsilon} \right] \gamma_\beta (T^A)_{cd} \times$$

$$\times \left[\frac{-i(\not{p} + \not{q} - \not{k})}{(p+q-k)^2 - i\epsilon} \right] \gamma_\mu \left[\frac{-i(\not{p} - \not{k})}{(p-k)^2 - i\epsilon} \right] \gamma_\alpha (T^A)_{de} [u(p\sigma)]_{eb} \frac{p_\alpha p_\beta}{k^2 - i\epsilon} \epsilon_\mu(q_5) \epsilon_\nu(q_6)$$

Note que tiramos a média sobre as cores iniciais e somamos sob as cores finais (veja o fator $\frac{1}{3} \sum_b$) do quark. Essa soma sob cores mais o fato de que $[u(p\sigma)]_{ab} = \delta_{ab} u(p\sigma)$ vai nos permitir fatorar completamente os termos de cor.

$$(2\pi)^4 i \delta^4(0) e^2 \left\{ \frac{\text{Tr}[T^A T^A]}{3} g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} \{ \not{p} \gamma_\nu (\not{p} + \not{q}) \gamma_\beta (\not{p} + \not{q} - \not{k}) \gamma_\mu (\not{p} - \not{k}) \}}{[(p+q)^2 - i\epsilon][p+q-k)^2 - i\epsilon][(p-k)^2 - i\epsilon]} \right. \\ \left. \times \frac{P_{\alpha\beta}}{k^2 - i\epsilon} \right\} \epsilon_\mu(q|\xi) \epsilon_\nu(q|\xi)$$

O fator de cor $\text{Tr}[T^A T^A]/3 \equiv C_2$ é o mesmo para todos os gráficos e será omitido nos cálculos intermediários daqui por diante.

Obtemos para $T_{\mu\nu}^{(A)}$

$$T_{\mu\nu}^{(A)} = g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} \{ \not{p} \gamma_\nu (\not{p} + \not{q}) \gamma_\beta (\not{p} + \not{q} - \not{k}) \gamma_\mu (\not{p} - \not{k}) \gamma_\alpha \}}{[(p+q)^2 - i\epsilon][(p+q-k)^2 - i\epsilon][(p-k)^2 - i\epsilon][k^2 - i\epsilon]} P_{\alpha\beta}$$

$$P_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \frac{n_\alpha k_\beta + n_\beta k_\alpha}{n \cdot k} + \frac{n^2 k_\mu k_\nu}{(n \cdot k)^2} \\ = \delta_{\alpha\beta} - \frac{n_\alpha k_\beta + n_\beta k_\alpha}{n \cdot k} - \frac{n^2}{2} \frac{\partial}{\partial n^\beta} \frac{k_\alpha}{k \cdot n} - \frac{n^2}{2} \frac{\partial}{\partial n^\alpha} \frac{k_\beta}{k \cdot n} \\ = \delta_{\alpha\beta} - \frac{N_\alpha k_\beta}{n \cdot k} - \frac{N_\beta k_\alpha}{n \cdot k} ; \quad N_\alpha = n_\alpha + \frac{n^2}{2} \frac{\partial}{\partial n_\alpha}$$

Trabalhamos como se N fosse um número e não um operador. Após calcularmos todas as integrais colocamos todos os termos que dependem de n à direita de N e aplicamos N a eles.

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{(A)} &= g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} [\not{p} \gamma_\nu (\not{p} + \not{q}) \gamma_\alpha (\not{p} + \not{q} - \not{k}) \gamma_\mu (\not{p} - \not{k}) \gamma_\alpha]}{[(p+q)^2 - i\epsilon][(\not{p} + \not{q} - \not{k})^2 - i\epsilon][(\not{p} - \not{k})^2 - i\epsilon][k^2 - i\epsilon]} \\
&- g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} [\not{p} \gamma_\nu (\not{p} + \not{q}) \not{k} (\not{p} + \not{q} - \not{k}) \gamma_\mu (\not{p} - \not{k}) \not{k}]}{[(p+q)^2 - i\epsilon][(\not{p} + \not{q} - \not{k})^2 - i\epsilon][(\not{p} - \not{k})^2 - i\epsilon][k^2 - i\epsilon]} n \cdot k \\
&- g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} [\gamma_\nu (\not{p} + \not{q}) \not{k} (\not{p} + \not{q} - \not{k}) \gamma_\mu (\not{p} - \not{k}) \not{k} \not{p}]}{[(p+q)^2 - i\epsilon][(\not{p} + \not{q} - \not{k})^2 - i\epsilon][(\not{p} - \not{k})^2 - i\epsilon][k^2 - i\epsilon]} n \cdot k
\end{aligned}$$

As duas últimas integrais podem ser simplificadas utilizando-se

$$\frac{\not{p}}{p^2} \not{k} \frac{(\not{p} - \not{k})}{(p-k)^2} = \frac{(\not{p} - \not{k}) \not{k} \not{p}}{(p-k)^2 p^2} = \frac{\not{p} - \not{k}}{(p-k)^2} - \frac{\not{p}}{p^2}$$

Para podermos aplicar esta propriedade na última integral precisamos antes multiplicá-la e dividi-la por $p^2 = -m^2$ (falta um p^2 no denominador)

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{(A)} &= g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} [\not{p} \gamma_\nu (\not{p} + \not{q}) \gamma_\alpha (\not{p} + \not{q} - \not{k}) \gamma_\mu (\not{p} - \not{k}) \gamma_\alpha]}{[(p+q)^2 - i\epsilon][(\not{p} + \not{q} - \not{k})^2 - i\epsilon][(\not{p} - \not{k})^2 - i\epsilon][k^2 - i\epsilon]} \\
&+ g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} [\not{p} \gamma_\nu (\not{p} + \not{q}) \gamma_\mu (\not{p} - \not{k}) \not{k}]}{[(p+q)^2 - i\epsilon][(\not{p} - \not{k})^2 - i\epsilon][k^2 - i\epsilon]} n \cdot k \\
&- g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} [\not{p} \gamma_\nu (\not{p} + \not{q} - \not{k}) \gamma_\mu (\not{p} - \not{k}) \not{k}]}{[(p+q-k)^2 - i\epsilon][(\not{p} - \not{k})^2 - i\epsilon][k^2 - i\epsilon]} n \cdot k \\
&+ g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} [\gamma_\nu (\not{p} + \not{q}) \not{k} (\not{p} + \not{q} - \not{k}) \gamma_\mu \not{p}]}{[(p+q)^2 - i\epsilon][(\not{p} + \not{q} - \not{k})^2 - i\epsilon][k^2 - i\epsilon]} n \cdot k \\
&\equiv T_{\mu\nu}^{(1A)} + T_{\mu\nu}^{(2A)} + T_{\mu\nu}^{(3A)} + T_{\mu\nu}^{(4A)} \quad \text{respectivamente}
\end{aligned}$$

A integral desprezada:

$$m^2 q^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} [\gamma_\nu (\not{p} + \not{q}) \not{k} (\not{p} + \not{q} - \not{k}) \gamma_\mu (\not{p} - \not{k})]}{[(p+q)^2 - i\epsilon][p+q-k)^2 - i\epsilon][(p-k)^2 - i\epsilon][k^2 - i\epsilon]} n \cdot k$$

é claramente de ordem m^2/q^2

Para determinar W_2 precisamos calcular $\text{Im} T_{\mu\mu}^{(A)}$. As integrais $\text{Im} T_{\mu\mu}^{(1A)}, \dots, \text{Im} T_{\mu\mu}^{(4A)}$ foram calculadas em detalhe nos apêndices 6, 7, 8 e 9 respectivamente

$$\text{Im} T_{\mu\mu}^{(1A)} = \frac{q^2}{2\pi} \left\{ -\delta(1-w) \left[\frac{1}{2} \log \frac{q^2}{\mu^2} + \int_0^1 d\alpha \frac{\alpha}{1-\alpha} \log \frac{q^2}{m^2} \right] + \frac{w}{1-w} \log \frac{q^2}{m^2} \right\}$$

$$\text{Im} T_{\mu\mu}^{(3A)} = \frac{-q^2}{2\pi} \frac{w}{1-w} \log \frac{q^2}{m^2} C_2$$

As integrais $\text{Im} T_{\mu\mu}^{(2A)}$ e $\text{Im} T_{\mu\mu}^{(4A)}$ não fornecem termos do tipo $\log q^2/m^2$.

A contribuição do diagrama A para W_2 é:

$$W_2^{(A)} = \frac{q^2}{8\pi^2} \frac{M}{\nu} w \delta(1-w) \log \frac{q^2}{m^2} \left[\frac{1}{2} + \int_0^1 d\alpha \frac{\alpha}{1-\alpha} \right] C_2$$

Desprezamos $\log \frac{m^2}{\mu^2}$ frente a $\log \frac{q^2}{m^2}$; $q^2 \rightarrow \infty$

6.2 - DIAGRAMA B

$$T_{\mu\nu}^{(B)} = g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} [\not{p} \gamma_\alpha (\not{p}-\not{k}) \gamma_\nu (\not{p}+q-\not{k}) \gamma_\beta (\not{p}+q) \gamma_\mu] p_{\alpha\beta}}{[(p-k)^2 - i\epsilon][(p+q-k)^2 - i\epsilon][(p+q)^2 - i\epsilon][k^2 - i\epsilon]}$$

Usando $\text{Tr} [\not{a}_1 \not{a}_2 \dots \not{a}_{2n}] = \text{Tr} [\not{a}_{2n} \dots \not{a}_2 \not{a}_1]$ e a propriedade cíclica do traço $\text{Tr} [\not{a}_1 \not{a}_2 \dots \not{a}_{2n}] = \text{Tr} [\not{a}_2 \dots \not{a}_{2n} \not{a}_1]$ é fácil ver que $T_{\mu\mu}^{(B)} = T_{\mu\mu}^{(A)} \Rightarrow W_2^{(B)} = W_2^{(A)}$ i.e. os dois diagramas contribuem igualmente para W_2 .

6.3 - DIAGRAMA C

$$T_{\mu\nu}^{(c)} = g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} [\not{p} \gamma_\beta (\not{p}-\not{k}) \gamma_\nu (\not{p}+\not{q}-\not{k}) \gamma_\mu (\not{p}-\not{k}) \gamma_\alpha] p_\alpha}{[(p-k)^2 - i\epsilon][(p+q-k)^2 - i\epsilon][(p-k)^2 - i\epsilon][k^2 - i\epsilon]}$$

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{(c)} &= g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} [\not{p} \gamma_\alpha (\not{p}-\not{k}) \gamma_\nu (\not{p}+\not{q}-\not{k}) \gamma_\mu (\not{p}-\not{k}) \gamma_\alpha]}{[(p-k)^2 - i\epsilon][(p+q-k)^2 - i\epsilon][(p-k)^2 - i\epsilon][k^2 - i\epsilon]} \\ &\quad - g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} [\not{p} \not{k} (\not{p}-\not{k}) \gamma_\nu (\not{p}+\not{q}-\not{k}) \gamma_\mu (\not{p}-\not{k}) \not{k}]}{[(p-k)^2 - i\epsilon][(p+q-k)^2 - i\epsilon][(p-k)^2 - i\epsilon][k^2 - i\epsilon]} n \cdot k \\ &\quad - g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} [\not{p} \not{k} (\not{p}-\not{k}) \gamma_\nu (\not{p}+\not{q}-\not{k}) \gamma_\mu (\not{p}-\not{k}) \not{k}]}{[(p-k)^2 - i\epsilon][(p+q-k)^2 - i\epsilon][(p-k)^2 - i\epsilon][k^2 - i\epsilon]} n \cdot k \end{aligned}$$

De modo análogo ao que fizemos para $T_{\mu\nu}^{(A)}$ podemos decompor as duas últimas integrais

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{(c)} &= g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} [\not{p} \gamma_\alpha (\not{p}-\not{k}) \gamma_\nu (\not{p}+\not{q}-\not{k}) \gamma_\mu (\not{p}-\not{k}) \gamma_\alpha]}{[(p-k)^2 - i\epsilon][(p+q-k)^2 - i\epsilon][(p-k)^2 - i\epsilon][k^2 - i\epsilon]} \\ &\quad + g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} [\not{p} \gamma_\nu (\not{p}+\not{q}-\not{k}) \gamma_\mu (\not{p}-\not{k}) \not{k}]}{[(p+q-k)^2 - i\epsilon][(p-k)^2 - i\epsilon][k^2 - i\epsilon]} n \cdot k \\ &\quad + g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} [\not{k} (\not{p}-\not{k}) \gamma_\nu (\not{p}+\not{q}-\not{k}) \gamma_\mu \not{p}]}{[(p+q-k)^2 - i\epsilon][(p-k)^2 - i\epsilon][k^2 - i\epsilon]} n \cdot k + O\left(\frac{m^2}{2\nu}\right) \end{aligned}$$

$$\equiv T_{\mu\nu}^{1c} - T_{\mu\nu}^{2c} - T_{\mu\nu}^{3c} + O\left(\frac{m^2}{2\nu}\right)$$

Usando $\text{Tr} [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n] = \text{Tr} [\alpha_n \dots \alpha_2 \alpha_1]$ e a propriedade de cíclica do traço é fácil ver que $T_{\mu\nu}^{(2c)} = T_{\mu\mu}^{(3c)} = T_{\mu\mu}^{3A}$. A contribuição para W_2 das duas últimas integrais já está calculada

portanto. $\text{Im } T_{\mu\mu}^{(1c)}$ está calculada no apêndice 10

$$\text{Im } T_{\mu\mu}^{(1c)} = \frac{g^2}{2\pi} (1-\omega) \log \frac{q^2}{m^2}$$

$$W_2^{(c)} = \frac{-1}{4\pi} \frac{M}{\nu} \omega \left[\text{Im } T_{\mu\mu}^{(1c)} - 2 \text{Im } T_{\mu\mu}^{(3A)} \right] = \frac{-g^2}{8\pi^2} \frac{M}{\nu} \omega \left(\frac{1+\omega^2}{1-\omega} \right) \log \frac{q^2}{m^2}$$

6.4 - DIAGRAMA D

$$T_{\mu\nu}^{(D)} = g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} [\not{p} \gamma_\nu (p+q) \gamma_\mu \not{p} \gamma_\alpha (p-k) \gamma_\alpha] P_{\alpha\beta}}{[(p+q)^2 - i\epsilon] [p^2 - i\epsilon] [(p-k)^2 - i\epsilon] [k^2 - i\epsilon]}$$

$$T_{\mu\nu}^{(D)} = g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} [\not{p} \gamma_\nu (p+q) \gamma_\mu \not{p} \gamma_\alpha (p-k) \gamma_\alpha]}{[(p+q)^2 - i\epsilon] [p^2 - i\epsilon] [(p-k)^2 - i\epsilon] [k^2 - i\epsilon]}$$

$$- g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} [\not{p} \gamma_\nu (p+q) \gamma_\mu (p-k) \not{k}]}{[(p+q)^2 - i\epsilon] [(p-k)^2 - i\epsilon] [k^2 - i\epsilon] n \cdot k}$$

$$+ g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} [\not{p} \gamma_\nu (p+q) \gamma_\mu \not{k}]}{[(p+q)^2 - i\epsilon] [p^2 - i\epsilon] [k^2 - i\epsilon] n \cdot k}$$

$$- g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} [\gamma_\nu (p+q) \gamma_\mu \not{p} \not{k} (p-k)]}{[(p+q)^2 - i\epsilon] [(p-k)^2 - i\epsilon] [k^2 - i\epsilon] n \cdot k}$$

$$+ g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} [\gamma_\nu (p+q) \gamma_\mu \not{p} \not{k} \not{p}]}{[(p+q)^2 - i\epsilon] [p^2 - i\epsilon] [k^2 - i\epsilon] n \cdot k}$$

A terceira e a quinta integrais são do tipo

$$\int \frac{d^4 k}{n \cdot k} \frac{1}{k^2} = \Lambda(n)$$

O resultado só pode depender de n . A análise dimensional mostra que $\Lambda(n)$ deve ter dimensão de (momento)⁰

$$\Lambda(n) = \text{cte} (n^2)^0 \quad (\text{o único invariante de Lorentz que podemos formar é } n^2)$$

Por outro lado é fácil ver que se α é um número qualquer

$$\Lambda(\alpha n) = \int \frac{d^4 k}{\alpha n \cdot k} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{\alpha} \Lambda(n)$$

Estes dois resultados são compatíveis apenas se $\Lambda(n) = 0$. Podemos também chegar a esta conclusão observando que o integrando é o produto de uma função par por uma função ímpar.

$$T_{\mu\nu}^{(D)} = g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} [\not{p} \gamma_\nu (\not{p} + \not{q}) \not{p} \gamma_\mu (\not{p} - \not{k}) \not{p} \gamma_\alpha (\not{p} - \not{k}) \gamma_\alpha]}{[(p+q)^2 - i\epsilon][p^2 - i\epsilon][(p-k)^2 - i\epsilon][k^2 - i\epsilon]}$$

$$= g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} [\not{p} \gamma_\nu (\not{p} + \not{q}) \not{p} (\not{p} - \not{k}) \not{k}]}{[(p+q)^2 - i\epsilon][(p-k)^2 - i\epsilon][k^2 - i\epsilon] n \cdot k}$$

$$= g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} [\gamma_\nu (\not{p} + \not{q}) \not{p} \not{k} (\not{p} - \not{k})]}{[(p+q)^2 - i\epsilon][(p-k)^2 - i\epsilon][k^2 - i\epsilon] n \cdot k}$$

$$\equiv T_{\mu\nu}^{(1D)} - T_{\mu\nu}^{(2D)} - T_{\mu\nu}^{(3D)}$$

Usando propriedades de traços (apêndice 1) é fácil ver que $T_{\mu\mu}^{(2D)} = T_{\mu\mu}^{(3D)} = T_{\mu\mu}^{(2A)}$.

A integral $T_{\mu\mu}^{(D)}$ não contribui com termos do tipo $\log(q^2/m^2)$ ou $\log(-2\nu/m^2)$. Estes só poderiam vir do subdiagrama

$$\Sigma(p) = \text{diagram showing a fermion line with momentum } p \text{ entering from the left, a loop with momentum } k \text{ (dashed line), and momentum } p-k \text{ on the internal fermion line, and momentum } p \text{ exiting to the right.}$$

Mas $\Sigma(p)$ independe de q e portanto não pode fornecer termos como q^2 ou 2ν

6.5 - DIAGRAMA E

Pelas mesmas razões mencionadas acima o diagrama (E) também não contribui. A decomposição de (E) é análoga à de (D)

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{(E)} &= g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} [\not{p} \gamma_\beta (\not{p}-\not{k}) \gamma_\alpha \not{p} \gamma_\nu (\not{p}+\not{q}) \gamma_\mu] P_{\alpha\beta}}{[(p-k)^2 - i\epsilon][p^2 - i\epsilon][(p+q)^2 - i\epsilon][k^2 - i\epsilon]} \\ &= g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} [\not{p} \gamma_\alpha (\not{p}-\not{k}) \gamma_\alpha \not{p} \gamma_\nu (\not{p}+\not{q}) \gamma_\mu]}{[(p-k)^2 - i\epsilon][p^2 - i\epsilon][(p+q)^2 - i\epsilon][k^2 - i\epsilon]} \\ &= g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} [(\not{p}-\not{k}) \not{x} \not{p} \gamma_\nu (\not{p}+\not{q}) \gamma_\mu]}{[(p-k)^2 - i\epsilon][(p+q)^2 - i\epsilon][k^2 - i\epsilon]} n \cdot k \\ &= g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} [\not{p} \not{x} (\not{p}-\not{k}) \gamma_\nu (\not{p}+\not{q}) \gamma_\mu]}{[(p-k)^2 - i\epsilon][(p+q)^2 - i\epsilon][k^2 - i\epsilon]} n \cdot k \end{aligned}$$

$$\equiv T_{\mu\nu}^{(1E)} - T_{\mu\nu}^{(2E)} - T_{\mu\nu}^{(3E)}$$

Temos $T_{\mu\mu}^{(2E)} = T_{\mu\mu}^{(3E)} = T_{\mu\mu}^{(2A)}$

6.6 - DIAGRAMA F

$$T_{\mu\nu}^{(F)} = g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} [\not{p} \gamma_\nu (\not{p}+q) \gamma_\alpha (\not{p}+q-k) \gamma_\beta (\not{p}+q) \gamma_\mu] p_{\alpha\beta}}{[(p+q)^2 - i\epsilon] [(p+q-k)^2 - i\epsilon] [(p+q)^2 - i\epsilon] [k^2 - i\epsilon]}$$

$$= g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} [\not{p} \gamma_\nu (\not{p}+q) \gamma_\alpha (\not{p}+q-k) \gamma_\alpha (\not{p}+q) \gamma_\mu]}{[(p+q)^2 - i\epsilon] [(p+q-k)^2 - i\epsilon] [(p+q)^2 - i\epsilon] [k^2 - i\epsilon]}$$

$$- g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} [\not{p} \gamma_\nu (\not{p}+q) \not{k} (\not{p}+q-k) \gamma_\mu]}{[(p+q)^2 - i\epsilon] [(p+q-k)^2 - i\epsilon] [k^2 - i\epsilon] n \cdot k}$$

$$- g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} [\not{p} \gamma_\nu (\not{p}+q-k) \not{k} (\not{p}+q) \gamma_\mu]}{[(p+q)^2 - i\epsilon] [(p+q-k)^2 - i\epsilon] [k^2 - i\epsilon] n \cdot k}$$

$$\equiv T_{\mu\nu}^{(1F)} - T_{\mu\nu}^{(2F)} - T_{\mu\nu}^{(3F)}$$

As integrais desprezadas são do tipo $\int \frac{d^4k}{n \cdot k} \frac{1}{k^2 - i\epsilon}$ e são nulas como já vimos.

Temos $T_{\mu\mu}^{(2F)} = T_{\mu\mu}^{(4A)} = T_{\mu\mu}^{(3F)} = T_{\mu\mu}^{(4B)}$

Rest a calcular $T_{\mu\mu}^{(IF)}$

$$T_{\mu\mu}^{(IF)} = -\frac{1}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr} [\not{p} \gamma_\mu (\not{p} + \not{q}) \sum (\not{p} + \not{q}) (\not{p} + \not{q}) \gamma_\mu]}{[(p+q)^2 - i\epsilon] [(p+q)^2 - i\epsilon]}$$

$$\Sigma(p) \equiv \text{Diagram: A horizontal line with momentum p entering from the left and p exiting to the right. In the middle, there is a loop. The left part of the loop has momentum p-k and the right part has momentum k. The loop is labeled with (x) at the bottom left and (x) at the bottom right. The loop itself is a semi-circle with a wavy line (gluon) on top and a straight line (fermion) on the bottom. The top wavy line is labeled k.$$

$$\Sigma(p) = -g^2 \int d^4k \frac{\gamma_\mu [-i(\not{p}-\not{k})+m] \gamma_\mu}{[(p-k)^2 + m^2 - i\epsilon] [k^2 + \lambda^2 - i\epsilon]}$$

Calculamos $\Sigma(p)$ no apêndice 11. A pequena massa λ que atribuímos ao gluon serve para localizar as divergências infravermelhas. Elas vão aparecer sob a forma $\log(\lambda^2/m^2)$. Podemos escrever

$$\Sigma(p) = A + (i\not{p} + m)B + \Sigma^f(p) \quad (\Sigma^f(p) = (i\not{p} + m)C(p))$$

As divergências ultravioletas estão contidas nas constantes A e B. O efeito de renormalização de massa se resume à substituição de $\Sigma(p)$ por $\Sigma(p) - A$. A renormalização dos outros parâmetros da teoria remove a parte ultravioleta de B. No limite $|2\nu|$, $g^2 \rightarrow \infty$ o termo dominante vem de

$$\Sigma^f(p+q) = ig^2 \pi^2 \int_0^1 dx [4m + 2i(\not{p} + \not{q})] \log \left[\frac{m^2(1-x) + \lambda^2 x + 2\nu(1-x)(1-x)x}{m^2(1-x) + \lambda^2 x} \right]$$

$$- 4ig^2 \pi^2 \int_0^1 dx [i(\not{p} + \not{q}) + m] \frac{x - x^3}{x^2 + \frac{\lambda^2}{m^2}(1-x)}$$

e é igual a

$$i g^2 \pi^2 [4m + i(\not{p} + \not{q})] \log \frac{-2v}{m^2} \sim i g^2 \pi^2 [4m + i(\not{p} + \not{q})] \log \frac{q^2}{m^2}$$

$$T_{\mu\mu}^{(1F)} = \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{\text{Tr} [\not{p} \gamma_\mu (\not{p} + \not{q})(\not{p} + \not{q})(\not{p} + \not{q}) \gamma_\mu]}{[(p+q)^2 - i\epsilon][(p+q)^2 - i\epsilon]} \log \frac{q^2}{m^2}$$

$$= \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{\text{Tr} [\not{p} \gamma_\mu (\not{p} + \not{q}) \gamma_\mu]}{[(p+q)^2 - i\epsilon]} \log \frac{q^2}{m^2}$$

$$= -\frac{g^2}{4\pi^2} \frac{1}{1-\omega+i\epsilon} \log \frac{q^2}{m^2}$$

$$\text{Im } T_{\mu\mu}^{(1F)} = \frac{g^2}{4\pi} \delta(1-\omega) \log \frac{q^2}{m^2}$$

$$W_2^{(F)} = -\frac{g^2}{8\pi^2} \frac{M}{\nu} \omega \frac{1}{2} \delta(1-\omega) \log \frac{q^2}{m^2} C_2$$

7. CÁLCULO DE $F_2(q^2, w)$ EM ORDEM g^2

Somando as contribuições dos gráficos (A), (B), (C) e (F) com a contribuição de ordem zero obtemos

$$\begin{aligned} W_2 &= -(M/v) \delta(1-w) + W_2^{(A)} + W_2^{(B)} + W_2^{(C)} + W_2^{(F)} \\ &= -(M/v) \delta(1-w) + (W_2^{(1A)} + W_2^{(3A)}) + (W_2^{(1A)} + W_2^{(3A)}) + (W_2^{(1C)} - 2W_2^{(3A)}) + W_2^{(1F)} \\ &= 2W_2^{(1A)} + W_2^{(1C)} + W_2^{(1F)} - (M/v) \delta(1-w) \end{aligned}$$

$$W_2 = -\frac{M}{v} \delta(1-w) - \frac{M}{v} \frac{g^2}{8\pi^2} C_2 \log \frac{q^2}{m^2} \left[w(1-w) + \frac{2w^2}{1-w} - w \delta(1-w) \left(\frac{1}{2} - 2 \int_0^1 d\alpha \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right]$$

$$F_2 = (-v/M) W_2 \quad (\text{no limite } q^2, |v| \rightarrow \infty, w \text{ fixo})$$

$$(A) \quad F_2(q^2, w) = \delta(1-w) + C_2 \frac{g^2}{8\pi^2} \log \frac{q^2}{m^2} \left[w(1-w) + \frac{2w^2}{1-w} - w \delta(1-w) \left(\frac{1}{2} - 2 \int_0^1 d\alpha \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right]$$

$$(B) \quad F_2(q^2, w) = \delta(1-w) + C_2 \frac{g^2}{8\pi^2} \log \frac{q^2}{m^2} \left[\frac{w+w^3}{1-w} - w \delta(1-w) \int_0^1 d\alpha \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha} \right]$$

$$\text{Usamos } -\frac{1}{2} = -\int_0^1 d\alpha (1-\alpha) = -\int_0^1 d\alpha \frac{(1-\alpha)^2}{1-\alpha}$$

Note que $F_2(q^2, w)$ não está definida para $w=1$, porém qualquer integral do tipo $\int_0^1 dw h(w) F_2(q^2, w)$ está bem determinada desde que $h(w)$ seja bem comportada no intervalo $[0, 1]$. Isto ocorre porque $w \delta(1-w) \int_0^1 d\alpha \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha}$ regulariza a distribuição

$\frac{w+w^3}{1-w}$. Vamos ilustrar este ponto calculando os momentos $\langle F_2 \rangle_r$

$$\langle F_2 \rangle_r = \int_0^1 dw F_2(w, q^2) w^{r-2} \quad r \geq 2$$

Usando a forma (A) de $F_2(q^2, \omega)$ e colocando $\alpha = \omega$ após as integrações

$$\langle F_2 \rangle_r = 1 + C_2 \frac{q^2}{8\pi^2} \log \frac{q^2}{m^2} \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r+1} + 2 \int_0^1 \frac{\omega(\omega^{r-1} - 1)}{\omega - 1} d\omega \right]$$

$$\frac{\omega^{r-1} - 1}{\omega - 1} = \sum_{j=0}^{r-2} \omega^j = \sum_{j=2}^r \omega^{j-2}$$

$$\langle F_2 \rangle_r = 1 + C_2 \frac{q^2}{8\pi^2} \log \frac{q^2}{m^2} \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{r(r+1)} - 2 \sum_{j=2}^r \frac{1}{j} \right]$$

Os momentos $\langle F_2 \rangle_r$ estão ligados à transformada de Fourier de certos coeficientes da expansão do produto de operadores $J_\mu(y/2) J_\nu(y/2)$ (válida para $y^2 \sim 0$) e são finitos como antecipamos.

A divergência associada a $\int_0^1 d\alpha \frac{\alpha}{1-\alpha}$ não é uma divergência infravermelha. Vamos mostrar no capítulo 9 que estas se cancelam.

8. INDEPENDÊNCIA DE GAUGE

O resultado é igual ao obtido no gauge de Feynman. Isto pode ser visto facilmente lembrando a forma de propagador no gauge axial:

$$\frac{1}{k^2 - i\epsilon} \left[\delta_{\mu\nu} - (k_\mu N_\nu + k_\nu N_\mu) \frac{1}{n \cdot k} \right]$$

O primeiro termo:

$$\frac{\delta_{\mu\nu}}{k^2 - i\epsilon}$$

é o propagador no gauge de Feynman. Assim os termos $W^{(A)}$, $W^{(B)}$, $W^{(C)}$, $W^{(F)}$ são aqueles que obteríamos se tivéssemos trabalhado no gauge de Feynman.

Podemos mostrar que $T_{\mu\nu}$ independe de gauge simplesmente analisando diagramas. Para isso introduzimos as seguintes regras de Feynman

$$\text{-----} \quad \frac{1}{(2\pi)^4 i} \quad \frac{\delta_{\mu\nu}}{k^2 - i\epsilon} \quad (\text{propagador do gluon no gauge de Feynman})$$

$$\bullet \dots \dots \quad \frac{-1}{(2\pi)^4 i} N_\mu \frac{1}{n \cdot k} \frac{1}{k^2 - i\epsilon} \quad (\text{o símbolo "}\bullet\text{" indica o vértice onde } N_\mu \text{ é contraído})$$

Em termos dessas regras podemos decompor os diagramas para $T_{\mu\nu}$:

gauge axial
gauge de Feynman

$$\begin{aligned}
 T_{\mu\nu}^{(A)} &= T_{\mu\nu}^{(1A)} + T_{\mu\nu}^{(3A)} - T_{\mu\nu}^{(2A)} - T_{\mu\nu}^{(4A)} \\
 T_{\mu\nu}^{(B)} &= T_{\mu\nu}^{(1B)} + T_{\mu\nu}^{(3B)} - T_{\mu\nu}^{(2B)} - T_{\mu\nu}^{(4B)} \\
 T_{\mu\nu}^{(C)} &= T_{\mu\nu}^{(1C)} - T_{\mu\nu}^{(2C)} - T_{\mu\nu}^{(3C)} \\
 \frac{1}{2} T_{\mu\nu}^{(D)} &= \frac{1}{2} T_{\mu\nu}^{(1D)} - \frac{1}{2} T_{\mu\nu}^{(3D)} - \frac{1}{2} T_{\mu\nu}^{(2D)} \\
 \frac{1}{2} T_{\mu\nu}^{(E)} &= \frac{1}{2} T_{\mu\nu}^{(1E)} - \frac{1}{2} T_{\mu\nu}^{(3E)} - \frac{1}{2} T_{\mu\nu}^{(2E)} \\
 T_{\mu\nu}^{(F)} &= T_{\mu\nu}^{(1F)} - T_{\mu\nu}^{(3F)} - T_{\mu\nu}^{(2F)}
 \end{aligned}$$

As contribuições da parte do propagador do glúon que não pertence ao gauge de Feynman se cancelam.

Sem o fator $1/2$ do quarto e quinto diagramas não há cancelamento. Vamos ver a origem deste fator.

$$\equiv T_{\mu\nu}^{(b)} =$$

$$-\frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{\sigma} \bar{u}(p\sigma) \gamma_{\nu} \left[\frac{-i(\not{p} + \not{q}) + m}{(p+q)^2 + m^2} \right] \gamma_{\mu} \left[\frac{-i\not{p} + m}{p^2 + m^2} \right] \Sigma(p) u(p\sigma)$$

O quark que vai ser espalhado está na camada de massa: $p^2 = -m^2$. A expressão acima é portanto divergente. Para evitar esse problema deixamos p^2 ligeiramente fora da camada de massa. Apenas no final dos cálculos fazemos $p^2 = -m^2$. Quando renormalizamos a massa, $\Sigma(p)$ é substituído por:

$$\Sigma(p) - A = B (i\not{p} + m) + \Sigma^f(p) \quad (\Sigma^f(p) = (i\not{p} + m)^2 C(p))$$

$$\frac{-i\not{p} + m}{p^2 + m^2} \Sigma^f(p) u(p\sigma) = \frac{p^2 + m^2}{p^2 + m^2} (i\not{p} + m) C(p) u(p\sigma) = 0$$

quando p vai para a camada de massa.

$$\frac{-i\not{p} + m}{p^2 + m^2} B (i\not{p} + m) u(p\sigma)$$

é ambíguo. Mantendo o p^2 do denominador fora da camada de massa e atuando com $i\not{p} + m$ em $u(p\sigma)$ obtemos zero. Se porém multiplicarmos $i\not{p} + m$ por $-i\not{p} + m$ antes, obtemos $B u(p\sigma)$. Há uma inde-

terminação. O valor para o qual o resultado é independente de gauge é $\frac{1}{2} B u(p\sigma)$.

$$T_{\mu\nu}^{(D)} = \frac{1}{2} \frac{(-i)}{(2\pi)^4} \sum_{\sigma} u(p\sigma) \gamma_{\nu} \left[\frac{-i(\not{p} + \not{q}) + m}{(p+q)^2 + m^2} \right] \gamma_{\mu} B u(p\sigma)$$

9. DIVERGÊNCIAS INFRAVERMELHAS

As divergências infravermelhas (d.i.) aparecem porque os gluons têm massa zero. O propagador do gluon é da forma $1/k^2$ apresentando, portanto, uma singularidade em $k^2=0$. Para podermos isolar as d.i. damos ao gluon uma pequena massa λ . O propagador passa, então, a ser proporcional a $1/(k^2+\lambda^2)$. As d.i. se manifestam em termos do tipo $\log(m^2/\lambda^2)$.

Vamos, agora, verificar o cancelamento das d.i. na amplitude para espalhamento Compton frontal. Para que possamos aplicar teoria de perturbação de maneira consistente é fundamental que elas se cancelem.

Estaremos interessados no comportamento das integrais para pequenos valores de K . Isso permite algumas aproximações.

(a) Apenas os termos de ordem zero em K são mantidos nos numeradores das integrais.

(b) Termos quadráticos em K podem ser desprezados em relação a termos lineares em K . Assim $\frac{1}{k^2-2p.k} \sim \frac{1}{-2p.k}$

Vamos separar as partes do propagador do gluon pertencente ao gauge de Feynman

$$\text{---} \text{ooooo} \text{---} \quad \frac{1}{(2\pi)^4 i} \quad \frac{\delta_{\mu\nu}}{k^2 + \lambda^2 - i\epsilon}$$

$$\text{---} \cdot \text{---} \cdot \text{---} \cdot \text{---} \quad \frac{1}{(2\pi)^4 i} \quad \frac{1}{k^2 + \lambda^2 - i\epsilon} \left[(N_\mu k_\nu + N_\nu k_\mu) \frac{1}{n.k} \right]$$

Graficamente

----- = eeeeeee - - - - -

Diagrama AF

$$T_{\mu\nu}^{(AF)} = g^2 \sum_{\sigma} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \bar{u}(p\sigma) \gamma_{\nu} \left[\frac{-i(p+q)+m}{(p+q)^2+m^2} \right] \gamma_{\alpha} \left[\frac{-i(p+q-k)+m}{(p+q-k)^2+m^2-i\epsilon} \right] \gamma_{\mu} \left[\frac{-i(p-k)+m}{(p-k)^2+m^2-i\epsilon} \right]$$

$$\times \gamma_{\alpha} u(p\sigma) \frac{1}{(k^2+\lambda^2-i\epsilon)}$$

$$\sim g^2 \sum_{\sigma} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \bar{u}(p\sigma) \gamma_{\nu} \left[\frac{-i(p+q)+m}{q^2+2v-i\epsilon} \right] \gamma_{\alpha} \left[\frac{-i(p+q)+m}{q^2+2v-i\epsilon} \right] \gamma_{\mu} \left[\frac{-i(p-k)+m}{-2p \cdot k-i\epsilon} \right] \gamma_{\alpha} u(p\sigma) \frac{1}{k^2+\lambda^2-i\epsilon}$$

Usamos $\frac{1}{(p-k)^2+m^2} = \frac{1}{k^2-2p \cdot k} \sim \frac{1}{-2p \cdot k}$ (p está na camada de massa)

$$\frac{1}{(p+q-k)^2+m^2} = \frac{1}{q^2+2v-2(p+q) \cdot k+k^2} \sim \frac{1}{q^2+2v}$$

A quantidade $q^2+2v = 2v(1-\omega)$. Estamos supondo que $1-\omega \neq 0$

A contagem de potências de k revela que o integrando de $T_{\mu\nu}^{AF}$ é de ordem zero em k e não contém portanto d.i.. Para fazer a contagem devemos colocar $\lambda^2 = 0$.

Pela mesma razão os diagramas

não possuem d.i. (Para contagem de potências de k oooooooo é equivalente a ----- pois o termo $N_\mu k_\nu / n.k$ é de ordem zero em k .)

Diagrama CF

$$T_{\mu\nu}^{(CF)} = g^2 \sum_{\sigma} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{\bar{u}(p\sigma) \gamma_{\alpha} (-i\not{p}+m) \gamma_{\nu} [-i(\not{p}+\not{q})+m] \gamma_{\mu} (-i\not{p}+m) \gamma_{\alpha} u(p\sigma)}{[q^2+2\nu-i\epsilon] [-2p.k-i\epsilon] [-2p.k-i\epsilon] [k^2+\lambda^2-i\epsilon]}$$

A integral é proporcional a $\log(k)$ e portanto tem d.i.

$$\bar{u}(p) \gamma_{\alpha} (-i\not{p}+m) = \bar{u}(p) [(i\not{p}+m) \gamma_{\alpha} - 2i p_{\alpha}] = -2i p_{\alpha} \bar{u}(p)$$

$$(-i\not{p}+m) \gamma_{\alpha} u(p) = [\gamma_{\alpha} (i\not{p}+m) - 2i p_{\alpha}] u(p) = -2i p_{\alpha} u(p)$$

$$T_{\mu\nu}^{(CF)} = 4m^2 g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} \{ \gamma_{\nu} [-i(\not{p}+\not{q})+m] \gamma_{\mu} (-i\not{p}+m) \}}{(q^2+2\nu-i\epsilon) (-2p.k-i\epsilon)^2 (k^2+\lambda^2-i\epsilon)}$$

Defino

$$\text{Tr} \{ \gamma_\nu [-i(\not{p} + \not{q}) + m] \gamma_\mu (-i\not{p} + m) \} = \mathbb{T}_{\mu\nu}$$

No apêndice 12 calculamos a integral em k .

$$\int \frac{d^4 k}{(-2p \cdot k - i\epsilon)^2} \frac{1}{(k^2 + \lambda^2 - i\epsilon)} = \frac{i\pi^2}{2m^2} \log \frac{m^2}{\lambda^2}$$

$$T_{\mu\nu}^{(CF)} = \frac{g^2}{8\pi^2} \mathbb{T}_{\mu\nu} \frac{1}{q^2 + 2\nu - i\epsilon} \log \frac{m^2}{\lambda^2}$$

Diagrama DF

$$T_{\mu\nu}^{(DF)} = - \sum_{\sigma} \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}(p\sigma) \gamma_\nu [-i(\not{p} + \not{q}) + m] \gamma_\mu (-i\not{p} + m) \Sigma(p) u(p\sigma)}{(q^2 + 2\nu - i\epsilon) (p^2 + m^2)}$$

Após a renormalização de massa $\Sigma(p) \rightarrow \Sigma(p) - A$ e obtemos

$$T_{\mu\nu}^{(DF)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} \{ (-i\not{p} + m) \gamma_\nu [-i(\not{p} + \not{q}) + m] \gamma_\mu \} B}{q^2 + 2\nu - i\epsilon}$$

Tomando apenas a parte de B que contem d.i. obtemos

$$T_{\mu\nu}^{(DF)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^4 i} \text{Tr}_{\mu\nu} \frac{1}{q^2 - 2\nu - i\epsilon} \left(2 i g^2 \pi^2 \log \frac{m^2}{\lambda^2} \right)$$

$$T_{\mu\nu}^{(DF)} = -\frac{1}{16\pi^2} \text{Tr}_{\mu\nu} \frac{1}{q^2 - 2\nu - i\epsilon} \log \frac{m^2}{\lambda^2}$$

Diagrama EF

Este diagrama é análogo ao anterior

$$T_{\mu\nu}^{(DF)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} \{ (-i\not{p} + m) \gamma_\nu [-i(\not{p} + \not{q}) + m] \gamma_\mu \}}{q^2 + 2\nu}$$

$$T_{\mu\nu}^{(DF)} = -\frac{1}{16\pi^2} \text{Tr}_{\mu\nu} \frac{1}{q^2 - 2\nu - i\epsilon} \log \frac{m^2}{\lambda^2}$$

Diagrama FF

$$T_{\mu\nu}^{(FF)} = \frac{-1}{(2\pi)^4 i} \sum_{\sigma} \frac{\bar{u}(p\sigma) \gamma_\nu [-i(\not{p} + \not{q}) + m] [\not{\Sigma}(p+q) - A] [-i(\not{p} + \not{q}) + m] \gamma_\mu u(p\sigma)}{[q^2 + 2\nu - i\epsilon]^2}$$

$\Sigma(p) - A$ não contém d.i. se p não está na camada de massa.

Consultando o apêndice 11 vemos que A não contém d.i., além disso se $p^2 \neq m^2$

$$\Sigma(p) \sim \int d^4k \frac{1}{[k^2 + \lambda^2][p^2 + m^2]}$$

Contagem de potências revela que a integral é proporcional a k^2 não apresentando d.i.

Pode-se, também, examinar diretamente a expressão $\Sigma(p) - A$ no apêndice 11 e verificar que ela não contém o único termo com d.i.:

$$-4ig^2\pi^2 \int_0^1 dx (i\not{p} + m) \frac{x}{x^2 + \frac{\lambda^2}{m^2}(1-x)}$$

Se tivéssemos trabalhado no gauge de Feynman teríamos obtido apenas os gráficos $T_{\mu\nu}^{(AF)}$, $T_{\mu\nu}^{(BF)}$, $T_{\mu\nu}^{(CF)}$, $T_{\mu\nu}^{(DF)}$, $T_{\mu\nu}^{(EF)}$, $T_{\mu\nu}^{(FF)}$. Como o cancelamento das d.i. deve ser independente de gauge a soma das d.i. desses gráficos deve ser nula. Como já vimos apenas $T_{\mu\nu}^{(CF)}$, $T_{\mu\nu}^{(DF)}$ e $T_{\mu\nu}^{(FF)}$ contribuem.

$$T_{\mu\nu}^{(CF)} + T_{\mu\nu}^{(DF)} + T_{\mu\nu}^{(FF)} = \frac{g^2}{8\pi^2} \not{p}_{\mu\nu} \log \frac{m^2}{\lambda^2} \left[1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right] = 0$$

Os outros gráficos divergentes são os seguintes:

As d.i. destes diagramas devem se cancelar entre si.

Diagrama DR

$$T_{\mu\nu}^{DR} = -\frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p\sigma) \gamma_\nu \frac{1}{i\not{p}'+m} \gamma_\mu \frac{1}{i\not{p}+m} i\cancel{K} \frac{1}{i(\not{p}-\not{k})+m} \cancel{A} \frac{1}{n.k} \frac{u(p\sigma)}{k^2}$$

$$-\frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p\sigma) \gamma_\nu \frac{1}{i\not{p}'+m} \gamma_\mu \frac{1}{i\not{p}+m} \cancel{A} \frac{1}{i(\not{p}-\not{k})+m} i\cancel{K} \frac{1}{n.k} \frac{u(p\sigma)}{k^2}$$

$$i\cancel{K} = -i(\not{p}-\not{k})-m + i\not{p}+m$$

$$T_{\mu\nu}^{DR} = \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p\sigma) \gamma_\nu \frac{1}{i\not{p}'+m} \gamma_\mu \frac{1}{i\not{p}+m} \cancel{A} \frac{1}{n.k} \frac{u(p\sigma)}{k^2}$$

$$-\frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p\sigma) \gamma_\nu \frac{1}{-i\not{p}'+m} \gamma_\mu \frac{1}{i(\not{p}-\not{k})+m} \cancel{A} \frac{1}{n.k} \frac{u(p\sigma)}{k^2}$$

$$+\frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p\sigma) \gamma_\nu \frac{1}{-i\not{p}'+m} \gamma_\mu \frac{1}{i\not{p}+m} \cancel{A} \frac{1}{n.k} \frac{u(p\sigma)}{k^2}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p\sigma) \gamma_\nu \frac{1}{i\not{p}'+m} \gamma_\mu \frac{1}{i\not{p}+m} \not{x} \frac{1}{n.k} \frac{1}{i(\not{p}-\not{k})} (i\not{p}+m) \frac{u(p\sigma')}{k^2}$$

A primeira e a terceira integrais são nulas:

$$\int \frac{d^4 k}{k^2} \frac{1}{n.k} = 0 \quad (\text{Por integração simétrica ou usando análise dimensional como já fizemos}).$$

Na última integral não podemos por diretamente $(i\not{p}+m)u(p)=0$ pois temos um denominador singular:

$$\frac{1}{i\not{p}+m} \equiv \frac{-i\not{p}+m}{p^2+m^2}$$

Somando e subtraindo a segunda integral obtemos

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{(DR)} &= - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p\sigma) \gamma_\nu \frac{1}{i\not{p}'+m} \gamma_\mu \frac{1}{i(\not{p}-\not{k})+m} \not{x} \frac{1}{n.k} \frac{u(p\sigma')}{k^2} \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p\sigma) \gamma_\nu \frac{1}{i\not{p}'+m} \gamma_\mu \frac{1}{i(\not{p}-\not{k})+m} \not{x} \frac{1}{n.k} \frac{u(p\sigma')}{k^2} \right. \\ &\quad \left. - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p\sigma) \gamma_\nu \frac{1}{i\not{p}'+m} \gamma_\mu \frac{1}{i\not{p}+m} \not{x} \frac{1}{n.k} \frac{1}{i(\not{p}-\not{k})+m} (i\not{p}+m) u(p\sigma') \right\} \end{aligned}$$

Para k pequeno

$$\int \frac{d^4 k}{k^2} \frac{1}{n.k} \frac{1}{i(\not{p}-\not{k})+m} = \int d^4 k \frac{1}{n.k} \frac{(-i\not{p}+m)}{-2p.k} = (-i\not{p}+m) I(p)$$

onde

$$I(p) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{k^2} \frac{1}{n.k} \frac{1}{p.k}$$

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{(DR)} = & - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p\sigma) \gamma_\nu \frac{1}{i\not{p}'+m} \gamma_\mu \frac{1}{i(\not{p}-\not{k})+m} \cancel{\frac{1}{n \cdot k}} \frac{u(p\sigma)}{k^2} \\
& + \frac{1}{2} \left\{ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} u(p\sigma) \gamma_\nu \frac{1}{i\not{p}'+m} \gamma_\mu \frac{(-i\not{p}+m)}{p^2+m^2} \cancel{\frac{1}{n \cdot k}} \frac{u(p\sigma)}{k^2} I(p) \right. \\
& \left. - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} u(p\sigma) \gamma_\nu \frac{1}{i\not{p}'+m} \gamma_\mu \frac{(-i\not{p}+m)}{p^2+m^2} \cancel{\frac{1}{n \cdot k}} \frac{(p^2+m^2)}{k^2} \frac{u(p\sigma)}{k^2} I(p) \right\}
\end{aligned}$$

$$T_{\mu\nu}^{(DR)} = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p\sigma) \gamma_\nu \frac{1}{i\not{p}'+m} \gamma_\mu \frac{1}{i(\not{p}-\not{k})+m} \cancel{\frac{1}{n \cdot k}} \frac{u(p\sigma)}{k^2}$$

Diagrama ER

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{(ER)} = & - \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p\sigma) \cancel{\frac{1}{i(\not{p}-\not{k})+m}} \frac{1}{n \cdot k} \frac{1}{i\not{p}+m} \gamma_\nu \frac{1}{i\not{p}'+m} \gamma_\mu u(p\sigma) \\
& - \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p\sigma) \cancel{\frac{1}{i(\not{p}-\not{k})+m}} \cancel{\frac{1}{n \cdot k}} \frac{1}{i\not{p}+m} \gamma_\nu \frac{1}{i\not{p}'+m} \gamma_\mu u(p\sigma)
\end{aligned}$$

Um procedimento análogo ao usado para DR leva a

$$T_{\mu\nu}^{(ER)} = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p\sigma) \cancel{\frac{1}{n \cdot k}} \frac{1}{i(\not{p}-\not{k})+m} \gamma_\nu \frac{1}{i\not{p}'+m} \gamma_\mu u(p\sigma)$$

Diagrama CR

$$p' = p + q$$

$$T_{\mu\nu}^{(CR)} = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p\sigma) \not{k} \frac{1}{n \cdot k} \frac{1}{i(\not{p}-\not{k})+m} \gamma_\nu \frac{1}{i(\not{p}'-\not{k})+m} \gamma_\mu \frac{1}{i(\not{p}-\not{k})+m} i \not{k} \frac{u(p\sigma)}{k^2}$$

$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p\sigma) \not{k} \frac{1}{n \cdot k} \frac{1}{i(\not{p}-\not{k})+m} \gamma_\nu \frac{1}{i(\not{p}'-\not{k})+m} \gamma'_\mu \frac{1}{i(\not{p}-\not{k})+m} \not{k} \frac{u(p\sigma)}{n \cdot k k^2}$$

$$i \not{k} = -i(\not{p}-\not{k}) - m + i \not{p} + m$$

Neste caso não temos singularidades nos denominadores e podemos colocar $\bar{u}(p)(i \not{p} + m) = (i \not{p} + m)u(p) = 0$

$$T_{\mu\nu}^{(CR)} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p\sigma) \not{k} \frac{1}{n \cdot k} \frac{1}{i(\not{p}-\not{k})+m} \gamma_\nu \frac{1}{i(\not{p}'-\not{k})+m} \gamma'_\mu \frac{u(p\sigma)}{k^2}$$

$$+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p\sigma) \gamma_\nu \frac{1}{i(\not{p}'-\not{k})+m} \gamma'_\mu \frac{1}{i(\not{p}-\not{k})+m} \not{k} \frac{1}{n \cdot k} \frac{u(p\sigma)}{k^2}$$

Para k pequeno

$$\frac{1}{i(\not{p}'-\not{k})+m} = \frac{-i(\not{p}'-\not{k})+m}{p'^2+m^2-2p' \cdot k + k^2} \sim \frac{-i \not{p}' + m}{p'^2+m^2} = \frac{1}{i \not{p}' + m}$$

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{(CR)} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p\sigma) \cancel{\not{n}} \frac{1}{n \cdot k} \frac{1}{i(\not{p}-\not{k})+m} \not{\gamma}_\nu \frac{1}{i\not{p}'+m} \not{\gamma}_\mu \frac{u(p\sigma)}{k^2} \\
&+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p\sigma) \not{\gamma}_\nu \frac{1}{i\not{p}'+m} \not{\gamma}_\mu \frac{1}{i(\not{p}-\not{k})+m} \cancel{\not{n}} \frac{1}{n \cdot k} \frac{u(p\sigma)}{k^2} \\
T_{\mu\nu}^{(DR)} + T_{\mu\nu}^{(ER)} + T_{\mu\nu}^{(CR)} &= 0 \quad \text{como esperávamos}
\end{aligned}$$

Assim $T_{\mu\nu}$ não contém d.i. . Uma consequência imediata deste fato é que W_1 e W_2 as funções de estrutura também não as contêm.

10. CONCLUSÃO

Existe um fato notável relacionado com a expressão

$$F_2(q^2, w) = \delta(1-w) + C_2 \frac{g^2}{8\pi^2} \log \frac{q^2}{m^2} \left[\frac{w(1+w^2)}{1-w} - w \delta(1-w) \right] \int_0^1 d\alpha \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha}$$

que obtivemos para a função de estrutura. O termo proporcional a $\frac{w(1+w^2)}{1-w}$ num gauge axial vem todo do diagrama C :

As propriedades físicas da correção em ordem g^2 para $F_2(w, q^2)$ provêm deste termo $(-w \delta(1-w) \int_0^1 d\alpha \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha})$ (serve apenas para regularizá-lo). Este resultado se generaliza para ordens mais elevadas. Vamos procurar entender porque isto ocorre.

Nos nossos cálculos estávamos sempre interessados na parte imaginária de $T_{\mu\mu}$. Lembrando que

$$\text{Im} \left(\frac{1}{p^2 + m^2 - i\epsilon} \right) = \text{Im} \left(\frac{\mathcal{P}}{p^2 + m^2} + i\pi \delta(p^2 + m^2) \right) = \pi \delta(p^2 + m^2)$$

vemos que tomar a parte imaginária do propagador de uma partícula equivale a colocá-la na camada de massa. Assim, na análise que faremos abaixo, o gluon é colocado efetivamente na camada de massa por meio deste mecanismo.

Os gluons na camada de massa, de forma análoga aos fótons, têm dois estados de polarização e são transversos (em gauges axiais e no gauge de Coulomb). Se $\epsilon_\mu(k\lambda)$ é o 4-vetor de polarização do gluon $\epsilon_\mu(k\lambda) k_\mu = 0$. De fato

$$\sum_{\lambda} \varepsilon_{\mu}(k\lambda) \varepsilon_{\nu}(k\lambda) = \delta_{\mu\nu} - \frac{n_{\mu}k_{\nu} + n_{\nu}k_{\mu}}{n \cdot k} + \frac{n^2 k_{\mu} k_{\nu}}{(n \cdot k)^2} \quad (\text{Apêndice 1})$$

$$\Rightarrow \sum_{\lambda} k_{\mu} \varepsilon_{\mu}(k\lambda) \varepsilon_{\nu}(k\lambda) = k_{\nu} + \frac{n_{\nu}k^2}{n \cdot k} - k_{\nu} + \frac{n^2 k^2 k_{\nu}}{(n \cdot k)^2} = 0$$

(na camada de massa $k^2 = 0$)

É fácil ver também que

$$\sum_{\lambda \mu} \varepsilon_{\mu}(k\lambda) \varepsilon_{\mu}(k\lambda) = 4 - \frac{2 n \cdot k}{n \cdot k} + \frac{n^2 k^2}{(n \cdot k)^2} = 2$$

ou seja existem apenas dois graus de liberdade como antecipamos.

Note que no gauge de Feynman

$$\sum_{\mu} \varepsilon_{\mu}(k\lambda) \varepsilon_{\nu}(k\lambda) = \delta_{\mu\nu}$$

e portanto não temos estas propriedades.

Vamos ver como surgem os $\log(q^2/m^2)$. Os propagadores de quarks relevantes no diagrama C são do tipo $(p \cdot k)^{-1}$. $p \cdot k = k_0(|p| \cos \theta - p_0)$, o denominador se anularia se $p \cos \theta = p_0$. Isto seria possível no limite $m \rightarrow 0$ (só assim $|p| = p_0$) para o ângulo $\theta = 0$. A singularidade ocorreria quando o glúon fosse emitido paralelamente ao quark incidente. O limite $q^2, |2\nu| \rightarrow \infty, \omega$ fixo, m constante que estamos estudando pode ser visto como $q^2, |2\nu|, \omega$ fixos, $m \rightarrow 0$.

Examinamos o comportamento da parte angular da integral associada ao diagrama C. Os propagadores $(p \cdot k)^{-1}$ para $m \rightarrow 0$ e $\theta \sim 0$ se comportam como $(1 - \cos \theta)^{-1} \sim \theta^{-2}$. Os vértices

vão para zero com θ . Isto ocorre porque há conservação da helicidade. Para $m \rightarrow 0$ o quark passa a ter uma única helicidade e.g.

$1/2$, além disto o gluon está na camada de massa e é transverso com helicidade ± 1 . Como o quark, ao emitir o gluon, não pode mudar a helicidade esta não pode ser conservada para $\theta=0$ e o vértice deve se anular. O fator de espaço de fase $\sin\theta d\theta \sim \theta d\theta$ para ângulos pequenos. Temos então dois vértices com gluons, dois propagadores e o fator $\theta d\theta$. A integral angular para $\theta \sim 0$ vale

$$\int_{\theta_{\min} \sim \frac{m^2}{q^2}} \theta d\theta \cdot \frac{\theta}{\theta^2} \frac{\theta}{\theta^2} = \int_{\theta_{\min}} \frac{d\theta}{\theta} \sim \log \frac{q^2}{m^2}$$

Esta análise se generaliza para gráficos com mais de um degrau: diagramas "ladder"

Devemos ter dois propagadores singulares tipo $(p \cdot k)^{-1}$ e dois vértices para cada "loop" para produzirmos as divergências. Esta é precisamente a estrutura dos diagramas "ladder". Um diagrama com n degraus todos eles formados por gluons na camada de massa é proporcional a $\left(\log \frac{q^2}{m^2} \right)^n$. Este é o termo dominante. Se existem p degraus com gluons fora da camada de massa o diagrama vai ser proporcional a $\left(\log \frac{q^2}{m^2} \right)^{n-p}$.

Nos gauges axiais, para estudar os termos $\log \frac{q^2}{m^2}$ basta analisar os diagramas "ladder". Em outros gauges os $\log \frac{q^2}{m^2}$ vêm de vários tipos de diagramas o que dificulta a compreensão física.

APENDICE 1: CONVENÇÕES

MÉTRICA - Pseudo-Euclidiana $p^2 = p_1^2 + p_4^2 = p^2 - p_0^2$

Nesta métrica ao calcularmos o complexo conjugado da componente de um tensor devemos multiplicá-lo por $(-1)^n$ onde n é o número de índices iguais a 4. Por exemplo

$$(W_{14})^* = -W_{14}^*$$

$$(W_{44})^* = W_{44}^*$$

NORMALIZAÇÃO DOS ESTADOS - $\langle k\lambda | k'\lambda' \rangle = (2\pi)^3 2k_0 \delta(k-k') \delta_{\lambda\lambda'}$

$$\langle 0 | 0 \rangle = 1$$

k, k' momentos, λ, λ' spins ou polarizações, $|0\rangle$ vácuo

NORMALIZAÇÃO DOS SPINORES - $\sum_{\alpha} u_{\alpha}^*(p'\sigma') u_{\alpha}(p\sigma) = 2p_0 \delta_{\sigma\sigma'}$

SOMA SOBRE ESTADOS

$$\sum_{\text{spins ou polarizações}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2q_0}$$

RELAÇÃO DE COMPLETEZA

$$\sum_{\sigma} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2q_0} |q\sigma\rangle \langle q\sigma| = 1$$

SOMAS SOBRE POLARIZAÇÕES

$$\sum_{\sigma} u_{\alpha}(p\sigma) \bar{u}_{\beta}(p\sigma) = (-i\not{p} + m)_{\alpha\beta}$$

$$\sum_{\sigma} E_{\mu}(k\lambda) E_{\nu}(k\lambda) = \delta_{\mu\nu} - \frac{n_{\mu} k_{\nu} + k_{\mu} n_{\nu}}{n \cdot k} + \frac{k_{\mu} k_{\nu} n^2}{(n \cdot k)^2} \quad (\text{gauge axial})$$

DECOMPOSIÇÃO DOS CAMPOS EM ONDAS PLANAS -

$$\text{spin } \frac{1}{2} \quad \Psi_{\alpha}(x) = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k_0} \left[u_{\alpha}(k\lambda) c(k\lambda) e^{ikx} + v_{\alpha}(k\lambda) d^{\dagger}(k\lambda) e^{-ikx} \right]$$

$$\bar{\Psi}_{\alpha}(x) = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k_0} \left[\bar{u}_{\alpha}(k\lambda) c^{\dagger}(k\lambda) e^{-ikx} + \bar{v}_{\alpha}(k\lambda) d(k\lambda) e^{ikx} \right]$$

$$\text{spin } 1 \quad A_{\mu}(x) = \sum_{\eta} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k_0} \left[a(k\eta) e^{ikx} + a^{\dagger}(k\eta) e^{-ikx} \right] \varepsilon_{\mu}(k\eta)$$

RELAÇÕES DE COMUTAÇÃO -

$$\text{spin } \frac{1}{2} \quad \{ c(k\lambda), c^{\dagger}(k'\lambda') \} = \{ d(k\lambda), d^{\dagger}(k'\lambda') \} = (2\pi)^3 2k_0 \delta(k-k') \delta_{\lambda\lambda'}$$

O anti comutador é zero nos outros casos

$$\text{spin } 1 \quad [a(k\eta), a^{\dagger}(k'\eta')] = (2\pi)^3 2k_0 \delta(k-k') \delta_{\eta\eta'}$$

O comutador é zero nos outros casos

PROPRIEDADES DAS MATRIZES γ_{μ}

$$\{ \gamma_{\mu}, \gamma_{\nu} \} = 2 \delta_{\mu\nu}$$

$$\gamma_{\mu}^{\dagger} = \gamma_{\mu}$$

$$\gamma_{\mu} \gamma_{\mu} = 4$$

$$\gamma_{\mu} \not{a} \gamma_{\mu} = -2 \not{a}$$

$$\not{a} \equiv a_{\mu} \gamma_{\mu} ; a_{\mu} \text{ 4-vetor}$$

$$\gamma_{\mu} \not{a} \not{b} \gamma_{\mu} = 4 a.b$$

$$\gamma_\mu \not{a} \not{b} \not{c} \gamma_\mu = -2 \not{c} \not{b} \not{a}$$

$$\text{Tr} \{ \not{a}_1 \not{a}_2 \dots \not{a}_{2n+1} \} = 0$$

$$\text{Tr} \{ \not{a} \not{b} \} = 4 a \cdot b$$

$$\text{Tr} \{ \not{a} \not{b} \not{c} \not{d} \} = 4 [(a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c)]$$

$$\begin{aligned} \text{Tr} \{ \not{a}_1 \not{a}_2 \dots \not{a}_{2n} \} = & a_1 \cdot a_2 \text{Tr} \{ \not{a}_3 \dots \not{a}_{2n} \} - a_1 \cdot a_3 \text{Tr} \{ \not{a}_2 \not{a}_4 \dots \not{a}_{2n} \} \\ & + \dots + a_1 \cdot a_n \text{Tr} \{ \not{a}_2 \dots \not{a}_{2n-1} \} \end{aligned}$$

APÊNDICE 2:REGRAS DE FEYNMAN PARA QED

$$\bar{u}(p^\sigma)$$

$$u(p^\sigma)$$

$$E_\mu(k^\lambda)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^4 i} \frac{-i \not{q} + m}{q^2 + m^2 - i\epsilon} \quad \left(\text{com } \int d^4 q \right)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^4 i} \frac{\delta_{\mu\nu}}{k^2 - i\epsilon} \quad \left(\text{com } \int d^4 k \right) \quad \text{gauge de Feynman}$$

$$-(2\pi)^4 e \gamma_\mu \delta^4(p' - p - k)$$

REGRAS DE FEYNMAN PARA QCD

$$-(2\pi)^4 g \gamma_\mu t^a$$

$$-(2\pi)^4 i g f^{abc} [\delta_{\beta\gamma} (q-p)_\alpha + \delta_{\gamma\alpha} (k-p)_\beta + \delta_{\alpha\beta} (p-k)_\gamma]$$

APÊNDICE 3:

Apenas o termo

$$\frac{i}{(2\pi)^6} \int \frac{d^3k d^3k'}{4k_0 k'_0} \sum_{\lambda\lambda'} \bar{u}(k'\lambda') \gamma_\mu u(k\lambda) e^{-i(k'-k)x} c^+(k'\lambda') c(k\lambda) \equiv \Lambda_\mu$$

do produto $i \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) = J_\mu(x)$ dá uma contribuição não nula para $\langle p'\epsilon' | J_\mu(x) | p\sigma \rangle$

Usando as relações de comutação do Apêndice 1 obtemos

$$\begin{aligned} \langle p'\epsilon' | c^+(k'\lambda') c(k\lambda) | p\sigma \rangle &= \langle 0 | c(p'\epsilon') c^+(k'\lambda') c(k\lambda) c^+(p\sigma) | 0 \rangle \\ &= (2\pi)^3 2p_0 \delta(k-p) \delta_{\lambda\sigma} \langle 0 | c(p'\epsilon') c^+(k'\lambda') | 0 \rangle \\ &= (2\pi)^6 4p_0 p'_0 \delta_{\lambda\sigma} \delta_{\lambda'\epsilon'} \delta(k-p) \delta(k'-p') \\ \Rightarrow \langle p'\epsilon' | J_\mu(x) | p\sigma \rangle &= \langle p'\epsilon' | \Lambda_\mu | p\sigma \rangle = i \bar{u}(p'\epsilon') \gamma_\mu u(p\sigma) e^{-i(p'-p)x} \\ \Rightarrow \langle p'\epsilon' | J_\mu(x=0) | p\sigma \rangle &= i \bar{u}(p'\epsilon') \gamma_\mu u(p\sigma) . \end{aligned}$$

APÊNDICE 4: DEMONSTRAÇÃO DAS PROPRIEDADES DO TENSOR HADRÔNICO

$$(4.1) \quad W_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \sum_{\sigma'} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2p_0'} (2\pi)^4 \delta^4(p' - p - q) \times \\ \times \langle p\sigma | J_{\mu}(0) | p'\sigma' \rangle \langle p'\sigma' | J_{\nu}(0) | p\sigma \rangle$$

No item 4 usamos: $(2\pi)^4 \delta^4(p' - p - q) = \int d^4x e^{+i(p'-p-q)x}$
e $\langle p | J_{\mu}(0) | p' \rangle = \exp[-i(p'-p)x] \langle p | J_{\mu}(x) | p' \rangle$ para mostrar
que

$$(4.2a) \quad W_{\mu\nu}(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \int d^4x \langle p\sigma | J_{\mu}(x) J_{\nu}(0) | p\sigma \rangle e^{-iqx}$$

$$(4.2b) \quad W_{\mu\nu}(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \int d^4x \langle p\sigma | [J_{\mu}(x), J_{\nu}(0)] | p\sigma \rangle e^{-iqx}$$

Usando: $(2\pi)^4 \delta^4(p' - p - q) = \int d^4x e^{-i(p'-p-q)x}$
e $\langle p' | J_{\nu}(0) | p \rangle = \exp[+i(p'-p)x] \langle p' | J_{\nu}(x) | p \rangle$ obtem-se com uma
demonstração análoga a do item 2.3

$$(4.2b) \quad W_{\mu\nu}(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \int d^4x \langle p\sigma | J_{\mu}(0) J_{\nu}(x) | p\sigma \rangle e^{iqx}$$

$$(4.3b) \quad W_{\mu\nu}(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \int d^4x \langle p\sigma | [J_{\mu}(0), J_{\nu}(x)] | p\sigma \rangle e^{iqx}$$

A propriedade (a): $n_{\mu}^* W_{\mu\nu} n_{\nu} \geq 0$ se $J_{\mu}^{\dagger} = J_{\mu}$ é
uma consequência imediata da forma (4.1) de $W_{\mu\nu}$

$$n_{\mu}^* W_{\mu\nu} n_{\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \sum_{\sigma'} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2p_0'} (2\pi)^4 \delta(p' - p - q) |\langle p'\sigma' | J_{\mu}(0) | p\sigma \rangle n_{\mu}|^2 \geq 0$$

$$p_0' = \sqrt{p^2 + m^2} > 0 \quad ; \text{ usamos } \langle p\sigma | J_\mu(0) | p'\sigma' \rangle n_\mu^* =$$

$$= \langle p'\sigma' | J_\mu^\dagger(0) | p\sigma \rangle^* n_\mu^* = \langle p'\sigma' | J_\mu(0) | p\sigma \rangle^* n_\mu^*$$

Para demonstrar (b): Se $\partial_\mu J_\mu(x) = 0$ então $q_\mu W_{\mu\nu} = W_{\mu\nu} q_\nu = 0$
usamos a forma (4.2a) de $W_{\mu\nu}$

$$q_\mu W_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_\sigma \int d^4x \left(\frac{-i}{-i} \right) q_\mu e^{-iqx} \langle p\sigma | J_\mu(x) J_\nu(0) | p\sigma \rangle$$

Integrando por partes e desprezando termos de superfície obtemos

$$- \frac{i}{2} \sum_\sigma \int d^4x e^{-iqx} \langle p\sigma | \partial_\mu J_\mu(x) J_\nu(0) | p\sigma \rangle = 0$$

Para $W_{\mu\nu} q_\nu = 0$ partimos da forma (4.2b) e usamos uma demonstração análoga.

$$\text{Propriedade (c)} \quad W_{\mu\nu}(p, q) = -W_{\nu\mu}(p, -q)$$

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_\sigma \int d^4x \langle p\sigma | [J_\mu(x), J_\nu(0)] | p\sigma \rangle e^{-iqx}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_\sigma \int d^4x \langle p\sigma | [J_\nu(0), J_\mu(x)] | p\sigma \rangle e^{-iqx} \stackrel{(4.3b)}{=} -W_{\nu\mu}(p, -q)$$

APÊNDICE 5: INTEGRAIS ÔTEIS EM REGULARIZAÇÃO DIMENSIONAL

$$\int d_n k \frac{1}{[k^2 - 2L \cdot k + M^2]^\alpha} = \frac{i \pi^{\frac{n}{2}}}{[M^2 - L^2]^{\alpha - \frac{n}{2}}} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{n}{2})}{\Gamma(\alpha)}$$

$$\int d_n k \frac{k_\mu}{[k^2 - 2L \cdot k + M^2]^\alpha} = \frac{i \pi^{\frac{n}{2}}}{[M^2 - L^2]^{\alpha - \frac{n}{2}}} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{n}{2})}{\Gamma(\alpha)} L_\mu$$

$$\begin{aligned} \int d_n k \frac{k^2}{[k^2 - 2L \cdot k + M^2]^\alpha} &= \frac{i \pi^{\frac{n}{2}}}{[M^2 - L^2]^{\alpha - \frac{n}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\Gamma(\alpha - \frac{n}{2}) L^2 + \Gamma(\alpha - 1 - \frac{n}{2}) \frac{n}{2} (M^2 - L^2) \right] \\ &= \frac{i \pi^{\frac{n}{2}}}{[M^2 - L^2]^{\alpha - \frac{n}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\Gamma(\alpha - \frac{n}{2}) M^2 + (n - 1 - \alpha) \Gamma(\alpha - 1 - \frac{n}{2}) (M^2 - L^2) \right] \end{aligned}$$

$$\int d_n k \frac{k_\mu k_\nu}{[k^2 - 2L \cdot k + M^2]^\alpha} = \frac{i \pi^{\frac{n}{2}}}{[M^2 - L^2]^{\alpha - \frac{n}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\Gamma(\alpha - \frac{n}{2}) L_\mu L_\nu + \Gamma(\alpha - 1 - \frac{n}{2}) \delta_{\mu\nu} (M^2 - L^2) \right]$$

$$\int d_n k \frac{k_\mu k_\nu k_\lambda}{[k^2 - 2L \cdot k + M^2]^\alpha} = \frac{i \pi^{\frac{n}{2}}}{[M^2 - L^2]^{\alpha - \frac{n}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} X$$

$$X \left[\Gamma(\alpha - \frac{n}{2}) L_\mu L_\nu L_\lambda - \Gamma(\alpha - 1 - \frac{n}{2}) \frac{1}{2} (\delta_{\mu\nu} k_\lambda + \delta_{\lambda\mu} k_\nu + \delta_{\nu\lambda} k_\mu) (M^2 - L^2) \right]$$

$$\begin{aligned} \int d_n k \frac{k^2 k_\mu}{[k^2 - 2L \cdot k + M^2]^\alpha} &= \frac{i \pi^{\frac{n}{2}}}{[M^2 - L^2]^{\alpha - \frac{n}{2}}} \frac{L_\mu}{\Gamma(\alpha)} \left[\Gamma(\alpha - \frac{n}{2}) k^2 + \Gamma(\alpha - \frac{n}{2} - 1) \frac{n+2}{2} (M^2 - L^2) \right] \\ &= \frac{i \pi^{\frac{n}{2}}}{[M^2 - L^2]^{\alpha - \frac{n}{2}}} \frac{L_\mu}{\Gamma(\alpha)} \left[\Gamma(\alpha - \frac{n}{2}) M^2 + (n+1-\alpha) \Gamma(\alpha - 1 - \frac{n}{2}) (M^2 - L^2) \right] \end{aligned}$$

APÊNDICE 6: CÁLCULO DE $T_{\mu\mu}^{(1A)}$

$$T_{\mu\mu}^{(1A)} = g^2 \int \frac{d^N k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} [\not{p} \not{\mu} (\not{p} + \not{q}) \not{\alpha} (\not{p} + \not{q} - \not{k}) \not{\mu} (\not{p} - \not{k}) \not{\alpha}]}{[(p+q)^2 - i\epsilon] [(p+q-k)^2 - i\epsilon] [(p-k)^2 - i\epsilon] [k^2 - i\epsilon]}$$

Usando

$$\not{p} \not{a} \not{b} \not{p} = -2 \not{a} \not{b} \not{p}$$

$$\not{p} \not{a} \not{b} \not{p} = 4 a \cdot b$$

e as fórmulas para traços de matrizes $\not{\mu}$ (Apêndice 1) obtemos

$$\text{Tr} [\not{p} \not{\mu} (\not{p} + \not{q}) \not{\alpha} (\not{p} + \not{q} - \not{k}) \not{\mu} (\not{p} - \not{k}) \not{\alpha}] = -32 \{ \nu^2 - \nu [(2p+q) \cdot k + (p \cdot k) [(p+q) \cdot k]] \}$$

Podemos ainda juntar os denominadores com o auxílio das integrais paramétricas de Feynman

$$\frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\gamma \frac{1}{[\gamma a + (1-\beta-\gamma)b + \beta c]^3}$$

$T_{\mu\mu}^{(1A)}$ pode então ser escrita como

$$T_{\mu\mu}^{(1A)} = \frac{-32 g^2}{(2\pi)^4 i} \frac{1}{(p+q)^2 - i\epsilon} \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\gamma \int d^N k \frac{\nu^2 - 2\nu (p+q) \cdot k + (p \cdot k) [(p+q) \cdot k]}{\{ k^2 - 2k \cdot [\beta p + (p+q)\gamma] + p^2 \beta + \gamma (p+q)^2 - i\epsilon \}}$$

As integrais em k são calculadas usando-se o método de regularização dimensional (referência 11).

Neste método a parte divergente das integrais aparecem

como pólos da forma $2C/N-4$. Essas quantidades divergentes serão subtraídas no ponto $C \log \mu^2$.

$$T_{\mu\mu}^{(1A)} = \frac{-32g^2}{(2\pi)^4 i} \frac{i\pi^2}{2\nu(1-w+i\epsilon)} \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\gamma \frac{\nu^2 \{ 1-\beta - [1-\beta + 2(1-w)]\gamma \}}{2\nu \left[-\gamma^2(1-w) + \gamma(1-w-\beta) - \frac{m^2}{2\nu} \beta(1-\beta) + i\epsilon \right]}$$

$$- \frac{32g^2}{(2\pi)^4 i} \frac{i\pi^2}{2\nu(1-w+i\epsilon)} \frac{\Gamma(2-\frac{N}{2})}{2} \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\gamma \frac{\nu}{\left\{ (-2\nu) \left[\gamma^2(1-w) + \gamma(1-w-\beta) - \frac{m^2}{(-2\nu)} \beta(1-\beta) - i\epsilon \right] \right\}}$$

Nas integrais acima desprezamos os termos de ordem $m^2/2\nu$ sempre que possível. $2\nu < 0$, quando o colocamos em evidência mudamos o sinal do $i\epsilon$.

Na segunda integral $N \sim 4$ e podemos fazer as expansões seguintes

$$\Gamma\left(2-\frac{N}{2}\right) \sim \frac{1}{2-\frac{N}{2}}$$

$$x^{-(2-\frac{N}{2})} \sim 1 - \left(2-\frac{N}{2}\right) \log x$$

$$T_{\mu\mu}^{(1A)} = \frac{-g^2}{2\pi^2(1-w+i\epsilon)} \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\gamma \frac{1-\beta - [1-\beta + 2(1-w)]\gamma}{-\gamma^2(1-w) + \gamma(1-w-\beta) - \frac{m^2}{2\nu} \beta(1-\beta) + i\epsilon}$$

$$= \frac{-g^2}{2\pi^2(1-w+i\epsilon)} \frac{1}{2-\frac{N}{2}} + \frac{g^2}{(2\pi)^2(1-w+i\epsilon)} \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\gamma \log \left\{ (-2\nu) \left[\gamma^2(1-w) + \gamma(1-w-\beta) - \frac{m^2}{(-2\nu)} \beta(1-\beta) - i\epsilon \right] \right\}$$

A última integral é igual a:

$$\frac{g^2}{2\pi^2(1-w+i\epsilon)} \frac{1}{2} \log(-2\nu) + \frac{g^2}{2\pi^2(1-w+i\epsilon)} \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\gamma \log \left[\gamma^2(1-w) - \gamma(1-w-\beta) - \frac{m^2}{(-2\nu)} \beta(1-\beta) - i\epsilon \right]$$

Para calcular a parte imaginária de $T_{\mu\mu}^{IA}$ usamos:

$$\frac{1}{1-w \pm i\epsilon} = \frac{P}{1-w} \mp i\pi \delta(1-w) \quad P \equiv \text{valor principal}$$

Colocando $1-w=0$ nas integrais que são multiplicadas pelo $\delta(1-w)$ obtemos

$$\begin{aligned} \text{Im } T_{\mu\mu}^{(IA)} &= \frac{g^2}{2\pi} \delta(1-w) \text{Re} \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\gamma \frac{(1-\beta)(1-\gamma)}{-\gamma\beta - \frac{m^2}{2\nu} \beta(1-\beta) + i\epsilon} \\ &\quad - \frac{g^2}{2\pi^2} \frac{1}{1-w} \text{Im} \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\gamma \frac{1-\beta - [1-\beta + 2(1-w)]\gamma + 2\gamma^2(1-w)}{-\gamma^2(1-w) + \gamma(1-w-\beta) - \frac{m^2}{2\nu} \beta(1-\beta) + i\epsilon} \\ &\quad - \frac{g^2}{2\pi} \delta(1-w) \left\{ \frac{1}{2} \log(-2\nu) - \frac{2}{N-4} + \text{Re} \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\gamma \log \left[\gamma\beta - \frac{m^2}{(-2\nu)} \beta(1-\beta) - i\epsilon \right] \right\} \\ &\quad + \frac{g^2}{2\pi^2} \frac{1}{1-w} \left\{ \text{Im} \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\gamma \log \left[\gamma^2(1-w) - \gamma(1-w-\beta) - \frac{m^2}{(-2\nu)} \beta(1-\beta) - i\epsilon \right] \right\} \end{aligned}$$

Estamos calculando W_2 no limite $q^2, |2\nu| \rightarrow \infty$, w fixo. Os termos dominantes são $\log(q^2/m^2)$ ou $\log(-2\nu/m^2)$. Podemos obter esses termos mais facilmente procurando as singularidades de massa: colocamos $m^2=0$ na integral e vemos para que valores de β, γ obtemos uma singularidade. Quando $m^2 \neq 0$ esta singulari

dade se manifesta como um $\log m^2$. Na segunda e quinta integrais a singularidade ocorre para $y=0$. Podemos nestas integrais desprezar y^2 face a y e tomar apenas o extremo $y=0$ da integral. Essa técnica será bastante empregada daqui por diante.

As duas últimas integrais são do tipo

$$\int_0^1 dy \log \left[\xi y - \frac{m^2}{(-2\nu)} \eta - i\epsilon \right] = \frac{m^2}{-2\nu} \frac{1}{\xi} \log \left[\frac{-m^2}{(-2\nu)} \eta - i\epsilon \right] = O\left(\frac{m^2}{-2\nu}\right)$$

$$(y=1-\beta \text{ não dá } \log(m^2/-2\nu))$$

$$\begin{aligned} \text{Im } T_{\mu\mu}^{(1A)} &= \frac{g^2}{2\pi} \delta(1-w) \text{Re} \int_0^1 d\beta \frac{1-\beta}{\beta} \int_0^1 dy \frac{1-y}{-y - \frac{m^2}{2\nu}(1-\beta) + i\epsilon} \\ &\quad - \frac{g^2}{2\pi} \frac{1}{1-w} \text{Im} \int_0^1 d\beta \int_0^1 dy \frac{1-\beta - [1-\beta + 2(1-w)]y}{y(1-w-\beta) - \frac{m^2}{2\nu}\beta(1-\beta) + i\epsilon} \\ &\quad - \frac{g^2}{2\pi} \delta(1-w) \frac{1}{2} \left[\log(-2\nu) - \frac{4}{N-4} \right] \end{aligned}$$

Retendo apenas os termos do tipo $\log \frac{m^2}{2\nu}$ obtem-se para as 3 primeira integrais:

$$\begin{aligned} \text{Im } T_{\mu\mu}^{(1A)} &= -\frac{g^2}{2\pi} \delta(1-w) \int_0^1 d\beta \frac{1-\beta}{\beta} \log \left(\frac{-2\nu}{m^2} \right) \\ &\quad - \frac{g^2}{2\pi^2} \frac{1}{1-w} \text{Im} \int_0^1 d\beta \frac{1-\beta}{1-w-\beta + i\epsilon} \log \left(\frac{-2\nu}{m^2} \right) \\ &\quad - \frac{g^2}{2\pi} \delta(1-w) \frac{1}{2} \log \left(\frac{-2\nu}{\mu^2} \right) \end{aligned}$$

A parte imaginária da segunda integral e das outras com

que trabalharemos vem do $\log(-1 \pm i\epsilon) = \pm i\pi$

Podemos ainda substituir $\log(-2v)$ por $\log q^2$

$$\log(-2v) = \log q^2 + \log\left(-\frac{2v}{q^2}\right) = \log q^2 - \log w$$

No limite $q^2, |2v| \rightarrow \infty$, w fixo o último termo é desprezível (nas integrais que contêm $\delta(1-w)$ essa aproximação é exata).

$$I_{\text{Im}} T_{H^+}^{(1A)} = -\frac{g^2}{2} \delta(1-w) \int_1^0 d\alpha \frac{\alpha^{1-\alpha}}{\alpha} \log \frac{q^2}{m^2}$$

$$+ \frac{g^2}{2} \frac{1-w}{w} \log \frac{q^2}{m^2}$$

$$- \frac{g^2}{2} \delta(1-w) \left[\log \frac{q^2}{m^2} + \log \frac{m^2}{q^2} \right]$$

$$I_{\text{Im}} T_{H^+}^{(1A)} = -\frac{g^2}{2} \delta(1-w) \left[\frac{1}{2} \log \frac{q^2}{m^2} + \int_1^0 d\alpha \frac{\alpha^{1-\alpha}}{\alpha} \log \frac{q^2}{m^2} \right] + \frac{g^2}{2} \frac{1-w}{w} \log \frac{q^2}{m^2}$$

APÊNDICE 7: CÁLCULO DE $T_{\mu\mu}^{(2A)}$

$$\begin{aligned}
 T_{\mu\mu}^{(2A)} &= g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} [\not{p} \gamma_\mu (\not{p} + \not{q}) \gamma_\mu (\not{p} - \not{k}) \not{n}] }{[(p+q)^2 - i\epsilon][(p-k)^2 - i\epsilon][k^2 - i\epsilon] n \cdot k} \\
 &= \frac{-8 g^2}{(p+q)^2 - i\epsilon} (2av - m^2 b) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{1}{[(p-k)^2 - i\epsilon][k^2 - i\epsilon] n \cdot k} \\
 &\quad + \frac{8 g^2}{(p+q)^2 - i\epsilon} [(N \cdot p)q - (N \cdot q)p + v n]_\mu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{k_\mu}{[(p-k)^2 - i\epsilon][k^2 - i\epsilon][n \cdot k]}
 \end{aligned}$$

As integrais acima dependem apenas de p e n , assim não vai aparecer nenhum $\log q^2$ ou $\log(-2v)$. $T_{\mu\mu}^{(2A)}$ não contribui, portanto.

APÊNDICE 8: CÁLCULO DE $T_{\mu\mu}^{(3A)}$

$$T_{\mu\mu}^{(3A)} = -g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} [\not{p} \gamma_\mu (\not{p} + \not{q} - \not{k}) \gamma_\mu (\not{p} - \not{k}) \not{k}]}{[(p+q-k)^2 - i\epsilon][p-k]^2 - i\epsilon][k^2 - i\epsilon]} n \cdot k$$

$$T_{\mu\mu}^{(3A)} = -g^2 \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\gamma \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{(-18) \{ 2\nu(p \cdot N) + (q \cdot N)m^2 - [(p \cdot N)(2p+q) - (q \cdot N)p + \nu N] \cdot k + (p \cdot N)k^2 \}}{[k^2 - 2L \cdot k + M^2 - i\epsilon]^3} n \cdot k$$

$$L = \beta p + \gamma(p+q) \quad ; \quad M^2 = \gamma(p+q)^2 - \beta m^2$$

Para não sobrecarregar a notação definimos:

$$E = 2\nu(p \cdot N) + (q \cdot N)m^2 \quad ; \quad V_\mu = (p \cdot N)(2p+q)_\mu - (q \cdot N)p_\mu + \nu N_\mu$$

$$p \cdot N = A \quad ; \quad p \cdot n = a \quad ; \quad q \cdot N = B \quad ; \quad q \cdot n = b$$

Combinamos os denominadores restantes usando

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{[Ax + B(1-x)]^{\alpha+\beta}} \quad (\alpha, \beta > 0)$$

$$T_{\mu\mu}^{3A} = 24 g^2 \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\gamma \int_0^1 dx \, x^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{E - V \cdot k + A k^2}{x^4 \{ k^2 - 2x \cdot [L - \frac{1-x}{2x} n] + M^2 \}^4}$$

As integrais em k são facilmente calculadas com as fó-

mulas do apêndice 5

$$T_{\mu\mu}^{(3A)} = \frac{24}{\pi^4} g^2 \int_0^1 dp \int_{-1}^0 d\lambda \int_0^1 dx \left[\frac{M^2 - L^2 + \left(\frac{x}{1-x}\right) n \cdot L - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 n^2}{\pi^2} \right] \frac{1}{3} X$$

$$X \left\{ A M^2 - V \cdot \left[L - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{1-x}\right) n \right] + E \right\}$$

$$+ \frac{24}{\pi^4} g^2 \int_0^1 dp \int_{-1}^0 d\lambda \int_0^1 dx \frac{x}{\pi^2} \left[\frac{M^2 - L^2 + \left(\frac{x}{1-x}\right) n \cdot L - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 n^2}{\pi^2} \right] \frac{1}{3}$$

Todas as quantidades sem um sinal bem definido possuem um $-ic$ e.g. $M^2 \equiv M^2 - ic$

A singularidade de massa só podem ocorrer para $x=1$. Se $x \neq 1$ o termo $\propto n^2$ impede que ocorram tais singularidades. Isso nos permite fazer a seguinte aproximação $\frac{x}{1-x} \sim 1-x \equiv y$.

$$T_{\mu\mu}^{(3A)} = \frac{\pi^2}{8} g^2 \int_0^1 dp \int_{-1}^0 d\lambda \int_0^1 dy \frac{E + A M^2 - V L}{\pi^2} \left[\frac{4(M^2 - L^2) + 4 n \cdot L}{y} \right] + \frac{\pi^2}{4} g^2 \int_0^1 dp \int_{-1}^0 d\lambda \int_0^1 dy \frac{V \cdot n}{y} \left[\frac{4(M^2 - L^2) + 4 n \cdot L}{y} \right] + \frac{\pi^2}{2} g^2 \int_0^1 dp \int_{-1}^0 d\lambda \int_0^1 dy \frac{4(M^2 - L^2) + 4 n \cdot L}{y}$$

$$E = 2\nu A$$

$$M^2 = -\beta m^2 + \nu(q^2 + 2\nu) - i\epsilon$$

$$V.L = \beta 2\nu A + \nu(4\nu + q^2)A$$

$$M^2 - L^2 = -\beta(1-\beta)m^2 + \nu(2\nu + q^2 - 2\nu\beta) - i\epsilon = 2\nu[\nu(1-\omega-\beta) + \beta(1-\beta)\frac{m^2}{2\nu} + i\epsilon]$$

$$n.L = \beta a + \nu(a+b)$$

$$V.n = A(2a+b) - \beta a + \nu(N.n)$$

$$p.N = A \quad ; \quad p.n = a \quad ; \quad q.N = \beta \quad ; \quad q.n = b$$

A aproximação que fizemos: desprezar $n^2 y^2$ em relação a $4y n.L = 4y[\beta a + \nu(a+b)]$ não é boa apenas no ponto $\beta = \nu = 0$.

$$\int_0^\infty \frac{dy}{y^2} \left[\frac{M^2 - L^2}{2\nu} + n.L y \right] = \frac{1}{1} \frac{[M^2 - L^2] n.L}{1}$$

$$\int_0^\infty \frac{dy}{y^2} \left[\frac{M^2 - L^2}{2\nu} + n.L y \right] = \frac{1}{y} \frac{(n.L)^2}{1} - \log \left[\frac{2\nu}{M^2 - L^2} \right]$$

$$\int_0^\infty \frac{dy}{y^2} \left[\frac{M^2 - L^2}{2\nu} + n.L y \right] = -\frac{1}{n.L} \log \left[\frac{2\nu}{M^2 - L^2} \right]$$

$$\{ \nu^2(a+b)(1-\omega-\beta) + \nu[(1-\omega-\beta)+\nu] \beta a + (a+b)\beta(1-\beta)\frac{m^2}{2\nu} + [\beta(1-\beta)\frac{m^2}{2\nu} + i\epsilon] \} \nu = \nu.L(2\nu - L^2)$$

A singularidade ocorre para $\gamma = 0$

$$(M^2 - L^2) n.l \sim 2\nu \left[\gamma (1-w-\beta+i\epsilon) \beta a + \beta^2 (1-\beta) \frac{m^2}{(-2\nu)} a \right] \quad p/\gamma \sim 0$$

Obtemos:

$$\text{Im} \int_0^1 d\beta \int_0^1 d\gamma \frac{E + AM^2 - V.L}{n.l (M^2 - L^2)}$$

$$= \text{Im} \int_0^1 d\beta \int_0^1 d\gamma \frac{2\nu (A - \beta A - \gamma A)}{2\nu \left[\gamma (1-w-\beta+i\epsilon) \beta a + \beta^2 (1-\beta) \frac{m^2}{(-2\nu)} a \right]}$$

$$= -A \text{Im} \int_0^1 d\beta \frac{1-\beta}{(1-w-\beta+i\epsilon) \beta a} \log \frac{m^2}{(-2\nu)}$$

$$= \pi A \frac{1}{a} \int_0^1 d\beta \frac{1-\beta}{\beta} \delta(1-w-\beta) \log \frac{m^2}{(-2\nu)}$$

$$= \pi A \frac{1}{a} \log \frac{m^2}{(-2\nu)} \frac{w}{1-w}$$

$$A \frac{1}{a} = \left(p.n + \frac{n^2}{2} p_r \frac{\partial}{\partial n_p} \right) \frac{1}{p.n} = 1 + O(m^2).$$

$$= \pi \frac{w}{1-w} \log \frac{(-2\nu)}{m^2} \sim -\pi \frac{w}{1-w} \log \frac{q^2}{m^2}$$

A massa m^2 não aparece no termo $(n.l)^{-2}$. Assim da segunda integral basta calcular

$$\begin{aligned} & \text{Im } V.n \int_0^1 d\beta \int_0^1 d\gamma \frac{1}{(n.L)^2} \log \frac{M^2 - L^2}{2\nu} \\ &= \text{Im } V.n \int_0^1 d\beta \int_0^1 d\gamma \frac{1}{[\gamma(a+b) + \beta b]^2} \log \left[\gamma(1-w-\beta) + \frac{m^2}{(-2\nu)} \beta(1-\beta) + i\epsilon \right] \end{aligned}$$

Defino

$$1-w-\beta \equiv \eta \quad \text{e} \quad \gamma(1-w-\beta) + \frac{m^2}{(-2\nu)} \beta(1-\beta) \equiv z$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{z}{\eta} - \frac{1}{\eta} \frac{m^2}{(-2\nu)} \beta(1-\beta)$$

$$\sim \text{Im } V.n \int_0^1 d\beta \int_{\frac{m^2}{-2\nu} \beta(1-\beta)}^1 dz \frac{1}{b^2 \eta} \frac{1}{\left[\frac{z(a+b)}{b \eta} + \beta \right]^2} \log z$$

Na integral acima colocamos $\frac{\beta \eta - (m^2/-2\nu) \beta(1-\beta)(a+b)/b}{\eta} \sim \beta$

Supusemos $\frac{|a+b|}{|b|} \sim 1$. Veja a discussão no final do apêndice

$$= \text{Im } V.n \int_0^1 \frac{d\beta}{b^2 \eta} \left\{ \frac{\log \left[\frac{m^2}{(-2\nu)} \beta(1-\beta) \right]}{\left[\beta + \frac{a+b}{b \eta} \frac{m^2}{(-2\nu)} \beta(1-\beta) \right] \frac{a+b}{b \eta}} - \frac{1}{\frac{(a+b) \beta}{b \eta}} \log \left[\frac{\frac{m^2}{(-2\nu)} \beta(1-\beta)}{\frac{a+b}{b \eta} + \frac{m^2}{(-2\nu)} \beta(1-\beta)} \right] \right\}$$

$$= V.n \log \frac{m^2}{(-2\nu)} \left[\frac{1}{(a+b)b} \text{Im} \int_0^1 d\beta \frac{1}{\beta} - \frac{1}{(a+b)b} \text{Im} \int_0^1 d\beta \frac{1}{\beta} \right]$$

$$= 0$$

Resta examinar a terceira integral

$$- \operatorname{Im} \int_0^1 d\beta \int_0^1 dx \frac{1}{n \cdot L} \log \left[\frac{M^2 - L^2}{2\nu} \right]$$

Usando as mesmas convenções da segunda integral podemos escrevê-la como

$$\begin{aligned} & - \operatorname{Im} \int_0^1 d\beta \int_{\frac{m^2}{-2\nu}}^1 dz \frac{1}{b\eta} \frac{1}{\left[\frac{z(a+b)}{b\eta} + \beta \right]} \log z \\ & = - \operatorname{Im} \int_0^1 \frac{d\beta}{b\eta} \frac{1}{\frac{a+b}{b\eta}} \left\{ \log \left(\frac{m^2}{-2\nu} \right) \log \left(\beta + \frac{m^2}{(-2\nu)} \beta(1-\beta) \frac{a+b}{b\eta} \right) \right. \\ & \quad \left. - \int_{\frac{m^2}{(-2\nu)}}^1 dz \frac{1}{z} \log \left(\frac{a+b}{b\eta} z + \beta \right) \right\} \end{aligned}$$

Não existe uma forma fechada para a integral $\int dx \frac{\log(ax+b)}{x}$

Sua expansão em série não converge para a função logaritmo. A última integral não fornece, portanto, $\log\left(\frac{-2\nu}{m^2}\right)$ ou $\log\left(\frac{q^2}{m^2}\right)$.

$$\operatorname{Im} \int_0^1 d\beta \log \left[\beta + \frac{m^2}{(-2\nu)} \beta(1-\beta) \frac{(a+b)}{b\eta} \right] = \operatorname{Im} \int_0^1 d\beta \log \left[1 + \frac{m^2}{(-2\nu)} (1-\beta) \frac{(a+b)}{b(1-\beta-w)} \right]$$

Fazendo $\beta \rightarrow 1-\beta$

$$= \operatorname{Im} \int_0^1 d\beta \log \left[\frac{\beta \left(1 + \frac{m^2}{(-2\nu)} \frac{(a+b)}{b} \right) - w}{\beta - w} \right]$$

$$= \operatorname{Im} \left\{ \frac{1 - \omega + \frac{m^2}{(-2\nu)} \frac{a+b}{b}}{1 + \frac{m^2}{(-2\nu)} \frac{a+b}{b}} \log \left[1 - \omega + \frac{m^2}{(-2\nu)} \left(\frac{a+b}{b} \right) \right] \right\}$$

(a) $1 - \omega \neq 0$

Para o argumento de logaritmo se tornar negativo é necessário que $(a+b)/b > 0$ e $(a+b)/b$ seja da ordem de $(-2\nu)/m^2 \gg 1$. Suporemos que $|a+b|/|b| \sim 1$. Essa condição é bastante geral e em particular quase todo n_μ que seja uma combinação linear de p e q a satisfaz.

(b) $1 - \omega = 0$

Para $|a+b|/|b| \sim 1$ obtemos

$$\operatorname{Im} \frac{m^2}{(-2\nu)} \left(\frac{a+b}{b} \right) \log \left[\frac{m^2}{(-2\nu)} \left(\frac{a+b}{b} \right) \right] = 0 \left(\frac{m^2}{(-2\nu)} \right)$$

A última integral não contribui portanto.

APÊNDICE 9: CÁLCULO DE $T_{\mu\mu}^{(4A)}$

$$T_{\mu\mu}^{(4A)} = g^2 \int \frac{d^N k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} [\gamma_\mu (\not{p} + \not{q}) \not{K} (\not{p} + \not{q} - \not{K}) \gamma_\mu \not{p}]}{[(p+q)^2 - i\epsilon] [(p+q-K)^2 - i\epsilon] [K^2 - i\epsilon]} n \cdot k$$

$$\text{Tr} [\gamma_\mu (\not{p} + \not{q}) \not{K} (\not{p} + \not{q} - \not{K}) \gamma_\mu \not{p}] = -8 [2\nu B - Aq^2 + (Aq - Bp - \nu N) \cdot K]$$

Como sempre $A = p \cdot N$ e $B = q \cdot N$

$$T_{\mu\mu}^{(4A)} = \frac{-8g^2}{2\nu + q^2 - i\epsilon} \int_0^1 d\beta \int \frac{d^N k}{(2\pi)^4 i} \frac{C + V \cdot k}{[k^2 - 2L' \cdot k + M'^2]^2} n \cdot k$$

$$L' = \beta(p+q) ; \quad M'^2 = (q^2 + 2\nu)\beta ; \quad C = 2\nu B - Aq^2 ; \quad V = Aq - Bp - \nu N$$

$$T_{\mu\mu}^{(4A)} = \frac{-16g^2}{(2\pi)^4 i (2\nu + q^2 - i\epsilon)} \int_0^1 d\beta \int_0^1 \frac{dx}{x^2} \int d^N k \frac{C + V \cdot k}{k^2 - 2 \left[L' - \left(\frac{1-x}{2x} \right) n \right] \cdot k + M'^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \frac{g^2}{2\nu + q^2 - i\epsilon} \int_0^1 d\beta \int_0^1 \frac{dx}{x^2} \frac{C + V \cdot L' - \left(\frac{1-x}{2x} \right) n \cdot V}{M'^2 - L'^2 + \frac{1-x}{x} n \cdot L' - \frac{1}{4} \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 n^2}$$

$$\sim \frac{1}{2\pi^2} \frac{g^2}{2\nu + q^2 - i\epsilon} \int_0^1 d\beta \int_0^1 dy \frac{C + V \cdot L' - \frac{y}{2} V \cdot n}{(M'^2 - L'^2) + y n \cdot L'}$$

$$M'^2 - L'^2 = \beta(1-\beta)(q^2 + 2\nu - m^2) \sim \beta(1-\beta)(q^2 + 2\nu) = 2\nu\beta(1-\beta)(1-w)$$

$$n \cdot L' = \beta(a+b)$$

$$V \cdot L' = Aq^2 - 2\nu B$$

$$V.n = Aa - Ba - \nu N.n$$

$$a = p.n, \quad b = q.n$$

$$\int_0^1 \frac{dy}{2\nu} \frac{1}{\left[\frac{M'^2 - L'^2}{2\nu} + y \frac{n.L'}{2\nu} \right]} = \frac{1}{n.L'} \log \left[\frac{M'^2 - L'^2}{2\nu} \right]$$

$$\int_0^1 \frac{dy}{2\nu} \frac{y}{\left[\frac{M'^2 - L'^2}{2\nu} + y \frac{n.L'}{2\nu} \right]} = \frac{M'^2 - L'^2}{(n.L')^2} \log \left[\frac{M'^2 - L'^2}{2\nu} \right]$$

$n.L'$, $\frac{M'^2 - L'^2}{2\nu}$ independem de m^2 e 2ν e portanto não podem fornecer termos do tipo $\log(-2\nu/m^2)$. O diagrama $T_{\mu\nu}^{(4A)}$ não contribui portanto.

APENDICE 10: CÁLCULO DE $T_{\mu\mu}^{(1c)}$

$$T_{\mu\mu}^{(1c)} = g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{\text{Tr} \{ \not{p} \gamma_\alpha (\not{p} - \not{k}) \gamma_\mu (\not{p} + \not{q} - \not{k}) \gamma_\mu (\not{p} - \not{k}) \gamma_\alpha \}}{[(p-k)^2 - i\epsilon][(p+q-k)^2 - i\epsilon][(p-k)^2 - i\epsilon][(k^2 - i\epsilon)]}$$

$$\text{Tr} [\not{p} \gamma_\alpha (\not{p} - \not{k}) \gamma_\mu (\not{p} + \not{q} - \not{k}) \gamma_\mu (\not{p} - \not{k}) \gamma_\alpha] = 16 \{ - (p.k) k^2 + 2(p.k) + 2(p.k)(q.k) - \nu k^2 \}$$

Temos ainda

$$\frac{1}{abcd} = \frac{\Gamma(4) \int_0^1 d\alpha \int_0^\alpha d\beta \int_0^\beta d\gamma}{[\gamma(a-b) + \beta(b-c) + \alpha(c-d) + d]^4}$$

$$T_{\mu\mu}^{(1c)} = \frac{g^2 \Gamma(4)}{\pi^4 i} \int_0^1 d\alpha \int_0^\alpha d\beta \int_0^\beta d\gamma \int d^4 k \frac{-k^2(p.k) + 2(p.k)^2 + 2(p.k)(q.k) - k^2 \nu}{[k^2 - 2(\alpha p + \gamma q).k + \gamma(2\nu + q^2)]^4}$$

Defino $\tilde{L} = \alpha p + \beta q$, $\tilde{M}^2 = \gamma(2\nu + q^2)$

$$T_{\mu\mu}^{(1c)} = \frac{g^2 \Gamma(4)}{\pi^4 i} \int_0^1 d\alpha \int_0^\alpha d\beta \int_0^\beta d\gamma \frac{i\pi^2}{\tilde{M}^2 - \tilde{L}^2} \frac{1}{\Gamma(4)} \times$$

$$\times \{ -(\rho.\tilde{L})\tilde{M}^2 + 2(\rho.\tilde{L})^2 + 2(\rho.\tilde{L})(q.\tilde{L}) - \nu \tilde{M}^2 \}$$

$$+ \frac{g^2 \Gamma(4)}{\pi^4 i} \int_0^1 d\alpha \int_0^\alpha d\beta \int_0^\beta d\gamma \frac{i\pi^2}{\tilde{M}^2 - \tilde{L}^2} \frac{1}{\Gamma(4)} \times$$

$$\times \{ -2(\rho.\tilde{L}) + p^2 + \nu - \nu. \}$$

$$\tilde{L}^2 = \gamma^2 q^2 + \gamma^2 \nu \alpha - \alpha^2 m^2$$

$$\tilde{M}^2 - \tilde{L}^2 = -\gamma^2 q^2 + \gamma(2\nu + q^2 - 2\nu\alpha) + \alpha^2 m^2$$

$$p \cdot \tilde{L} = \gamma \nu - \alpha m^2$$

$$q \cdot \tilde{L} = \alpha \nu + \gamma q^2$$

$$(p \cdot \tilde{L}) \tilde{M}^2 = \nu \gamma^2 (2\nu + q^2) + \gamma \alpha m^2 (2\nu + q^2)$$

A singularidade ocorre para $\gamma = 0$

$$T_{\mu\mu}^{(1c)} = \frac{g^2}{\pi^2} \int_0^1 d\alpha \int_0^\alpha d\beta \int_0^\alpha \frac{d\gamma}{(2\nu)^2} \frac{1}{\left[\gamma(1-\omega-\alpha) - \alpha^2 \frac{m^2}{(-2\nu)} \right]^2} X$$

$$X \left\{ -\nu(2\nu+q^2)\gamma^2 + 2\nu^2\gamma^2 + 2\gamma^2 q^2 \nu + \alpha\gamma 2\nu^2 - \nu\gamma(q^2+2\nu) \right\}$$

$$+ \frac{g^2}{\pi^2} \int_0^1 d\alpha \int_0^\alpha d\beta \int_0^\alpha \frac{d\gamma}{2\nu} \frac{1}{\left[\gamma(1-\omega-\alpha) - \alpha^2 \frac{m^2}{(-2\nu)} \right]} (-2\nu\gamma)$$

$$T_{\mu\mu}^{(1c)} = \frac{-g^2}{2\pi^2} \int_0^1 d\alpha \int_0^\alpha d\beta \int_0^\alpha d\gamma \frac{\gamma(1-\omega-\alpha)}{\left[\gamma(1-\omega-\alpha) - \alpha^2 \frac{m^2}{(-2\nu)} \right]^2}$$

$$- \frac{g^2}{2\pi^2} \int_0^1 d\alpha \int_0^\alpha d\beta \int_0^\alpha d\gamma \frac{\gamma}{\gamma(1-\omega-\alpha) - \alpha^2 \frac{m^2}{(-2\nu)}}$$

$$T_{\mu\mu}^{(1c)} = \frac{g^2}{2\pi^2} \int_0^1 d\alpha \int_0^\alpha d\beta \frac{1}{1-\omega-\alpha+i\epsilon} \log \frac{m^2}{(-2\nu)}$$

$$- \frac{g^2}{\pi^2} \int_0^1 d\alpha \int_0^\alpha d\beta \frac{m^2}{(-2\nu)} \frac{1}{(1-\omega-\alpha-i\epsilon)^2} \log \frac{m^2}{(-2\nu)}$$

A segunda integral é de ordem $\frac{m^2}{-2\nu}$

$$T_{\mu\mu}^{(1c)} = \frac{g^2}{2\pi^2} \int_0^1 d\alpha \frac{\alpha}{1-w-\alpha+i\epsilon} \log \frac{m^2}{(-2\nu)}$$

$$\text{Im } T_{\mu\mu}^{(1c)} = -\frac{g^2}{2\pi} \int_0^1 d\alpha \alpha \delta(1-w-\alpha) \log \frac{m^2}{(-2\nu)}$$

$$= -\frac{g^2}{2\pi} (1-w) \log \frac{m^2}{(-2\nu)}$$

$$\text{Im } T_{\mu\mu}^{(1c)} \sim \frac{g^2}{2\pi} (1-w) \log \frac{q^2}{m^2}$$

APÊNDICE 11: AUTO-ENERGIA DO QUARK

$$\Sigma(p) = -g^2 \int d^N k \frac{\gamma_\alpha [-i(\not{p}-k) + m] \gamma_\alpha}{[(p-k)^2 + m^2 - i\epsilon][k^2 + \lambda^2 - i\epsilon]}$$

$$\gamma_\alpha \gamma_\alpha = N \quad ; \quad \gamma_\alpha \not{x} \gamma_\alpha = (2-N) \not{x}$$

$$\Sigma(p) = -g^2 \int_0^1 dx \int d^N k \frac{-i(2-N)(\not{p}-k) + Nm}{[k^2 - 2x p \cdot k + (p^2 + m^2) + \lambda^2(1-x)]^2}$$

$$= -g^2 i \pi^2 \frac{\Gamma(2 - \frac{N}{2})}{\Gamma(2)} \int_0^1 dx \frac{Nm - i(2-N)(\not{p} - x \not{p})}{[(p^2 + m^2)x + \lambda^2(1-x) - x^2 p^2]^{2 - \frac{N}{2}}}$$

$$= -g^2 i \pi^2 \Gamma(2 - \frac{N}{2}) \int_0^1 dx \frac{Nm - i(2-N) \not{p}(1-x)}{[m^2(1-x) + \lambda^2 x + p^2 x(1-x)]^{2 - \frac{N}{2}}}$$

Para $\epsilon \sim 0$ $\Gamma(x) \sim 1/x$

$$y = a^{-\epsilon} = \exp[-\epsilon \log a] \sim 1 - \epsilon \log a \quad ; \quad \epsilon \sim 0$$

Colocando-se $N=4$ onde for possível obtem-se

$$\Sigma(p) = \frac{2ig^2\pi^2}{N-4} (4m + i\not{p}) + ig^2\pi^2 \int_0^1 dx [4m + i2\not{p}x] \log[m^2(1-x) + \lambda^2 x + p^2 x(1-x)]$$

$\Sigma(p)$ admite a seguinte decomposição:

$$\Sigma(p) = A + (i\not{p} + m)B + \Sigma^F(p) \quad (\Sigma^F(p) = (i\not{p} + m)^2 C(p))$$

Todas as divergências ultravioletas estão contidas em A e B. O efeito da renormalização consiste em substituir $\Sigma(p)$ por $(i\not{p}+m)B^{\text{finito}} + \Sigma^f(p)$.

Podemos determinar A colocando p na camada de massa e usando $\bar{u}(p)(i\not{p}+m) = (i\not{p}+m)u(p) = 0$

$$A = \bar{u}(p) \Sigma(p) u(p) \Big|_{p \text{ na camada de massa, } \lambda \rightarrow 0}$$

Na expressão acima colocar p na camada de massa implica nas igualdades $i\not{p} = -m$ e $p^2 = -m^2$

$$A = \frac{6ig^2\pi^2 m}{N-4} + ig^2\pi^2 \int_0^1 dx (4m - 2mx) \log [m^2(1-x)^2 + \lambda^2 x]$$

Esse termo não contém divergências infravermelhas e podemos portanto colocar $\lambda = 0$

$$A = \frac{6ig^2\pi^2 m}{N-4} + ig^2\pi^2 \int_0^1 dx 2m(2-x) [\log m^2 + 2 \log(1-x)]$$

$$A = \frac{6ig^2\pi^2 m}{N-4} + ig^2\pi^2 m [3 \log m^2 - 5]$$

$$B = \bar{u}(p) \frac{\partial \Sigma}{\partial i\not{p}} u(p) \Big|_{p \text{ na camada de massa, } \lambda \rightarrow 0}$$

Para calcular a derivada precisamos usar: $p^2 = -(i\not{p})^2$

$$B = \frac{2ig^2\pi^2}{N-4} + ig^2\pi^2 \int_0^1 dx \, 2x \log [m^2(1-x)^2 + \lambda^2 x] \\ + ig^2\pi^2 \int_0^1 dx \, (4m - 2mx) \frac{-2ip(1-x)x}{m^2(1-x) + \lambda^2 x + p^2(1-x)x} \Big|_{ip=-m}$$

A primeira integral não contém divergências infravermelhas. Podemos colocar $\lambda = 0$. Fazendo $x \rightarrow 1-x$ na segunda obtem-se

$$B = \frac{2ig^2\pi^2}{N-4} + ig^2\pi^2 [\log m^2 - 3]$$

$$+ 4ig^2\pi^2 \int_0^1 dx \, \frac{(1+x)(1-x)x}{x^2 + \frac{\lambda^2}{m^2}(1-x)}$$

$$\int_0^1 dx \, \frac{(1+x)(1-x)x}{x^2 + \frac{\lambda^2}{m^2}(1-x)} = \int_0^1 dx \, \frac{x}{x^2 + \frac{\lambda^2}{m^2}(1-x)} - \int_0^1 dx \, \frac{x^3}{x^2 + \frac{\lambda^2}{m^2}(1-x)}$$

$\lambda = 0$ na última integral não provoca divergências

$$= \frac{1}{2} \log \left(x^2 + \frac{\lambda^2}{m^2}(1-x) \right) \Big|_0^1 - \frac{\lambda^2}{m^2} (\text{função regular p/ } \lambda=0) - \int_0^1 dx \, x$$

$$= -\frac{1}{2} \log \frac{\lambda^2}{m^2} - \frac{1}{2}$$

$$B = \frac{2ig^2\pi^2}{N-4} + ig^2\pi^2 \left[\log m^2 + 2 \log \frac{m^2}{\lambda^2} - 1 \right]$$

$$\Sigma^F = \Sigma - A - i(\not{p} + m) B$$

$$\Sigma^F = \frac{2ig^2\pi^2}{N-4} (4m - i\not{p}) + ig^2\pi^2 \int_0^1 dx [4m + i2\not{p}x] \log [m^2(1-x) + \lambda^2 x + p^2 x(1-x)]$$

$$- \frac{2ig^2\pi^2}{N-4} 3m - ig^2\pi^2 \int_0^1 dx [4m - 2m x] \log [m^2(1-x)^2 + \lambda^2 x]$$

$$- \frac{2ig^2\pi^2}{N-4} (i\not{p} + m) - ig^2\pi^2 \int_0^1 dx [i\not{p} + m] 2x \log [m^2(1-x)^2 + \lambda^2 x]$$

$$- ig^2\pi^2 \int_0^1 dx 4[i\not{p} + m] \frac{x - x^3}{x^2 + \frac{\lambda^2}{m^2}(1-x)}$$

$$\Sigma^F(p) = ig^2\pi^2 \int_0^1 dx [4m + 2i\not{p}x] \log \left[\frac{m^2(1-x) + \lambda^2 x + p^2 x(1-x)}{m^2(1-x)^2 + \lambda^2 x} \right]$$

$$- 4ig^2\pi^2 \int_0^1 dx [i\not{p} + m] \frac{x - x^3}{x^2 + \frac{\lambda^2}{m^2}(1-x)}$$

APÊNDICE 12

Havíamos feito a aproximação: $k^2 - 2p \cdot k - i\epsilon \sim -2p \cdot k - i\epsilon$.
 Para utilizar o método de regularização dimensional é mais conveniente não desprezar o k^2 .

$$\begin{aligned}
 & \int d^N k \frac{1}{[k^2 - 2p \cdot k - i\epsilon]^2 [k^2 + \lambda^2 - i\epsilon]} \\
 &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2)\Gamma(1)} \int_0^1 dx \, x \int d^N k \frac{1}{[k^2 - 2(xp) \cdot k + \lambda^2(1-x)]^3} \\
 &= i\pi^2 \int_0^1 dx \frac{x}{\lambda^2(1-x) - x^2 p^2} \\
 &= i\frac{\pi^2}{m^2} \int_0^1 dx \frac{x}{x^2 - \frac{\lambda^2}{m^2}x + \frac{\lambda^2}{m^2}} \\
 &= i\frac{\pi^2}{m^2} \left\{ \frac{1}{2} \log \left(x^2 - \frac{\lambda^2}{m^2}x + \frac{\lambda^2}{m^2} \right) - \frac{\lambda^2}{2m^2} \frac{2}{2\frac{\lambda}{m}} \operatorname{arctg} \left[\frac{2x - \frac{\lambda^2}{m^2}}{2\frac{\lambda}{m}} \right] \right\}_0^1
 \end{aligned}$$

para $\lambda \rightarrow 0$

$$= i\frac{\pi^2}{m^2} \frac{1}{2} \log \frac{\lambda^2}{m^2} = i\frac{\pi^2}{2m^2} \log \frac{m^2}{\lambda^2}$$

REFERÊNCIAS

Espalhamento Altamente Inelástico e Tensor Hadrônico

1. Treiman, S.B.; Jackiw, R. e Gross, D.J. (1972), Lectures on Current Algebra and Its Applications; Princeton University Press.
2. Mahanthapa, K.T. e Brittin, W.E. (edit.) (1971); Lectures in Theoretical Physics Volume XII-B High Energy Collision of Elementary Particles; Gordon and Breach.

Espalhamento Compton

3. Nishijima, K. (1969); Fields and Particles, Field Theory and Dispersion Relations; W.A. Benjamin

Pártons

4. Feynman, R.P. (1972); Photon-Hadron Interactions; W.A. Benjamin.
5. Bjorken, J.D. e Paschos, E.A. (1969); Phys.Rev. 185, 1975
Veja também a referência 1.

Termos de Schwinger

Referência 1.

Teorias de Gauge

6. Abers, E.S. e Lee, B.W. (1973); Phys. Rep. 9C, Nº 1.
7. Coleman, S. (1973); Secret Symmetry, em Laws of subnuclear matter, Proc. 1973 Internat. School of Subnuclear Physics, Erice, Sicily (ed. A.Zichichi).
8. Iliopoulos, J. (1976); An Introduction to Gauge Theories, CERN Report 76-11.
9. Marciano, W. e Pagels, H. (1978); Quantum Chromodynamics; Phys. Rep. 36C, nº 3.
10. Pritchard, D.J. e Stirling, W.J. (Dezembro de 1978), QCD Calculations in the Light-Cone Gauge I, University of Cambridge preprint DAMPT 79/1.

Regularização Dimensional

11. t'Hooft, G. e Veltman, M. (1973); Diagrammar; CERN Report 73-9.