4/11/94

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

Estudos na Eletrodinâmica Quântica em 2+1 dimensões

Renio dos Santos Mendes

Tese de Doutorado
submetida ao Instituto de Física da
Universidade de São Paulo

ORIENTADOR: Prof. Dr. Marcelo Otávio Caminha Gomes

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Abraham H. Zimerman (IFT - UNESP)
Prof. Dr. João Barcelos Neto (UFRJ)
Prof. Dr. Josif Frenkel (IFUSP)
Prof. Dr. Marcelo Otávio Caminha Gomes (IFUSP)
Prof. Dr. Roland Koberle (Inst. Física São Carlos - USP)

São Paulo
1994

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
2205
e.1
INSTITUTO DE FÍSICA

Prof. Iberê Luiz Caldas
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

SBI-IFUSP

530.1433
M538e
D
e.1

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Mendes, Renio dos Santos
Estudos na eletrodinâmica quântica em 2+1 dimensões.
São Paulo, 1994.

Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Departamento de Física Matemática
Área de Concentração:Física de Partículas Elementares
Orientador: Prof. Dr. Marcelo Otávio Caminha Gomes

Unitermos: 1.Estados ligados; 2.Eletrodinâmica quântica; 3. Chern-Simons; 4.Divergência infra-vermelha.

USP/IF/SBI - 32/94

ABSTRACT

In this thesis we study some properties of electrodynamics in 2+1 dimensions. Perturbatively, inconsistencies appear, due to strong infrared divergencies. It is shown that this problem can be overcome when vacuum polarization effects are nonperturbatively incorporated, leading to a better infrared behavior of the theory. This is a consequence of the generation of a Chern-Simons term. Also, we analyse the existence of fermion-fermion bound states, which may be relevant for high-T_c superconductivity. Furthermore, from the vertex corrections we determine the contribution for the fermion anomalous magnetic moment. A motivation for this work comes from earlier studies in the context of the 2+1 dimentional Thirring model. Those studies are presented in the initial part of this thesis.

RESUMO

Nesta tese estudamos algumas propriedades da eletrodinâmica em 2+1 dimensões. Perturbativamente, esta teoria é inconsistente, devido a ocorrência de fortes divergências infravermelhas. É mostrado que tal problema pode ser sanado quando efeitos não perturbativos de polarização do vácuo são incorporados, promovendo a melhoria do comportamento infravermelho da teoria. Isto é decorrente da geração de um termo de Chern-Simons. Analisamos, também, a existência de estados ligados férmion-férmion, a qual pode ser relevante no contexto da supercondutividade a altas temperaturas. Além disso, obtemos a contribuição para o momento magnético anômalo do férmion vinda da correção de vértice. Uma motivação para este trabalho advém de estudos feitos originalmente para o modelo de Thirring em 2+1 dimensões, os quais são apresentados na parte inicial desta tese.

A todos
meus familiares

Agradecimentos

Exitem várias pessoas que eu gostaria de agradecer:
a primeira delas, sem dúvida, é o Prof. Dr. Marcelo Otávio Caminha Gomes que, pacientemente, me orientou durante o mestrado e o doutorado;
aos professores Dr. Adilson José da Silva e Dr. Horário Oscar Girotti;
aos amigos de labuta José Roberto e Rubens;
a todos os colegas e amigos que estão ou passaram pelo Departamento de Física Matemática do IFUSP, em particular, ao Brunelli, Sílvia, Luís Malacarne, Sérgio, Van Sérgio, Aércio, Francisco, Franklin, Adriana, Lígia, Heyder, Maisa e Moacir;
aos meus pais e ao meu irmão;
e de uma forma toda especial a minha esposa e aos meus filhos.

Agradeço ao CNPq e CAPES pelo apoio financeiro e finalmente a Universidade Estadual de Maringá, em particular, aos membros do Departamento de Física.

Índice

Introdução **3**

1 Apresentações do modelo e da metodologia **9**
1.1 O modelo 10
1.2 A matriz S do modelo 12
1.3 A matriz de transição em mecânica quântica não relativística 16
1.4 A energia potencial de interação entre duas partículas 18
1.5 A equação de Dirac em três dimensões 20

2 Eletrodinâmica 3D **25**
2.1 O modelo de Thirring 26
2.2 A eletrodinâmica 3D e seu comportamento infravermelho 35
2.3 A energia potencial férmion-férmion 41
2.4 Estados ligados (análise qualitativa) 46
2.5 Análise WKB da equação radial 50

3 Correções de altas ordens **54**
3.1 Correção de vértice 55
3.1.1 O momento magnético do férmion . . . 58

3.1.2 A correção para a energia potencial . . 60
3.2 Troca de dois bósons de gauge 62

Conclusões **70**

A Correção de vértice **73**
A.1 A parcela Λ_L^μ 75
A.2 A parcela Λ_g^μ 76
A.3 A parcela Λ_ϵ^μ 82

Bibliografia **89**

Introdução

A estatística que as partículas obedecem ocupa um lugar fundamental na física. Um exemplo bastante ilustrativo é a diferença existente entre os líquidos quânticos He^4 e He^3, que advém basicamente do fato do átomo He^4 ser um bóson e o átomo He^3 um férmion.

Durante muito tempo houve a crença generalizada de que só poderia haver bósons e férmions na natureza. Atualmente, porém, suspeita-se da existência de objetos (chamados de anyons) que satisfazem outras estatísticas (estatísticas exóticas) além das de Bose-Einstein e Fermi-Dirac. Esta possibilidade foi estabelecida teoricamente por Leinaas e Myrheim em 1977[1]. Eles mostraram que, num espaço tridimensional as partículas são ou bósons ou férmions e no caso bidimensional as possibilidades são ilimitadas, ocorrendo os anyons. Deve ser mencionado ainda que o spin dos anyons pode variar continuamente entre inteiros e semi-inteiros.

Baseando-se no efeito Aharonov-Böhm[2], Wilczeck[3, 4] argumentou sobre a existência de um spin fracionário para os anyons, ressaltando uma conexão entre spin e estatística para essas partículas. Neste contexto ainda, foi relacionado um potencial vetor ao anyon, fazendo com que o spin e a estatística

sejam descritos pela interação deste vetor com a matéria e não pela simetria da função de onda[1].

A presença de um potencial vetor, $\vec{A}$, para descrever a estatística entre os anyons viabilizou a introdução de uma teoria de gauge para descrever essas partículas. Neste contexto, o campo $\vec{A}$ é introduzido via um acoplamento minimal e sua "dinâmica" é descrita por um termo de Chern-Simons.

Antes de falarmos sobre algumas construções formais que a introdução do termo de Chern-Simons possibita, vamos discutir um pouco sobre a existência ou não de anyons na natureza. Como já foi dito, os anyons podem ser realizados apenas em casos cuja dimensão espacial envolvida é igual a dois. Devemos, então, imaginar situações onde os fenômenos físicos tenham características predominantemente bidimensionais. Por exemplo, suponhamos que os anyons ocorram no contexto da física da matéria condensada. Sob este enfoque, eles seriam algum tipo de quasi-partículas, refletindo o movimento coletivo dos elétrons e núcleons atômicos. Favoravelmente a este enfoque existem as quasi-partículas que ocorrem no efeito Hall fracionário, que são os únicos objetos conhecidos no momento passíveis de serem descritos por anyons[5].

A toda teoria de gauge num espaço-tempo tridimensional pode ser adicionado um termo de Chern-Simons. Este termo apresenta características topológicas não triviais. Em particular, deve ser mencionado que a teoria de Maxwell-Chern-Simons propicia a existência de massa para um campo de gauge[6][7]. Além do mais, quando um campo de Dirac (com dois componentes) está acoplado a um campo de gauge pode

[1] O fato da estatística poder ser simulada por um termo de interação entre os anyons já tinha sido mostrado por Leinaas e Myrheim[1]

ser gerado um termo de Chern-Simons. As teorias empregadas nesta tese, o modelo de Thirring [8]e a eletrodinâmica[2] [9], são bons exemplos deste fato.

O modelo de Thirring tridimensional será a primeira teoria a ser analisada nesta tese, usando-se a expansão $1/N$. Algumas das características importantes desta teoria serão expostas e discutidas. Por exemplo, a renormalizabilidade do modelo será verificada, contrariamente ao que ocorre quando é usada a teoria de perturbações. Será apresentado, também, um estudo dos pólos da função de Green do campo auxiliar, ressaltando o papel estabilizador desempenhado pelo termo de Chern-Simons induzido. Alem disso, vários aspectos baseados neste modelo serão empregados na análise da eletrodinâmica 3D.

A partir de agora passamos a esclarecer a motivação em estudar a eletrodinâmica 3D, o modelo mais empregado neste trabalho. Como já deve estar claro, esta teoria não deve ser entendida num aspecto tão fundamental quanto a eletrodinâmica usual, mas sim como uma teoria efetiva. Por exemplo, suponha que um material supercondutor a alta temperatura tenha férmions que transportem consigo uma carga elétrica e bósons de gauge que promovam a interação entre esses férmions. Os férmions e os bósons de gauge devem, desta forma, ser entendidos como objetos efetivos, que surgem devido as características do material supercondutor.

Por que usar a eletrodinâmica 3D como uma teoria efetiva? O modelo mais famoso e melhor sucedido com as suas predições em teoria quântica de campos é a eletrodinâmica quântica usual, do qual surgiram várias generalizações bas-

[2]Nesta tese, a eletrodinâmica espinorial num espaço-tempo tridimensional será chamada de *eletrodinâmica 3D*.

tante frutíferas. Diga-se de passagem, as teorias de gauge não-abelianas são um bom exemplo dessas generalizações. Sob este enfoque, há uma motivação clara em estudar a eletrodinâmica fermiônica num espaço-tempo tridimensional.

O que deve ser procurado usando esta teoria? Como é sabido, a teoria BCS [10] para a supercondutividade apregoa a existência de pares de elétrons, os pares de Cooper [11]. Falando de outra maneira, os elétrons interagem com os demais constituintes do material supercondutor e isto culmina na existência de uma interação efetiva entre eles, formando a partir daí os pares. Surge, então, a pergunta: Se a eletrodinâmica 3D puder dar algum esclarecimento, pelo menos qualitativo, sobre a supercondutividade a altas temperaturas, qual deve ser a energia potencial efetiva entre dois de seus férmions? Procurar a resposta a esta pergunta é justamente o objetivo principal desta tese.

Como será visto no capítulo dois, a eletrodinâmica 3D não faz sentido quando é tratada perturbativamente, devido a presença incontrolável de divergências infra-vermelhas. Apresenta-se, então, uma maneira não perturbativa para calcular o propagador do campo de gauge. Este procedimento quando aplicado a situação dos campos fermiônicos com dois componentes, devido a indução de um termo de Chern-Simons, melhora substancialmente o comportamento infra-vermelho da teoria. No caso de quadiespinores não surge um termo de Chern-Simons, e a catástrofe infra-vermelha do modelo ainda perdura.

Usando-se o propagador corrigido para o campo de gauge é calculada a energia potencial efetiva férmion-férmion, quando é levado em conta o gráfico que contém apenas a troca de um bóson de gauge. A equação de Schrödinger com este po-

tencial é então analisada no contexto de estados ligados. É verificada, então, a presença de estados ligados, cuja energia de dissociação pode ser livremente ajustada, bastando escolher valores convenientes para os parâmetros da teoria. Em particular, esta energia de rompimento do par pode assumir valores que correspondem a temperaturas de transição de fase dos supercondutores a altas temperaturas. No restante do trabalho são analizados as correções que podem vir para a energia potencial devido aos gráficos de Feynman com troca de dois bósons de gauge. É apresentada, ainda, a correção para o momento magnético anômalo do férmion devido a primeira correção do vértice.

Este trabalho está, basicamente, divido em três partes:
1) No primeiro capítulo está exposta a eletrodinâmica 3D com as respectivas regras de Feynman. Além disso, é descrito detalhadamente o procedimento para encontrar a energia potencial em seu limite não relativístico entre duas partículas, partindo de uma teoria de campos.
2) O capítulo dois, o mais importante dessa tese, começa com uma análise do modelo de Thirring; passa pela construção não pertubativa da eletrodinâmica 3D; e culmina no cálculo e análise da energia potencial férmion-férmion, quando um bóson de gauge é trocado.
3) No terceiro capítulo é obtida a correção de ordem mais baixa para o véritice. São, também, obtidas correções para energia potencial férmion-férmion.

Antes de terminar esta introdução deve ser ressaltado que, além deste trabalho existem várias publicações sobre supercondutividade a altas temperaturas com vários enfoques. Neste

sentido citaremos apenas algumas referências sobre a vertente "anyonica" [12, 13, 14, 15, 16, 17], sendo que [17] é um texto de revisão. Ainda, é conveniente citar alguns artigos, além daqueles já referidos nos parágrafos anteriores, que forneçam ao leitor uma visão mais ampla sobre os assuntos relacionados aos anyons. Um bom exemplo disso são as obras de revisão [18, 19, 20, 21]. É interessante ressaltar ainda que, vários pequisadores vêm trabalhando em teoria quântica de campos num espaço-tempo tridimensional no Brasil, em particular no Instituto de Física da Universidade de São Paulo [8, 9, 22, 23, 24, 26, 27].

Capítulo 1

Apresentações do modelo e da metodologia

Um dos principais objetivos deste trabalho é o de pesquisar uma expressão para a energia potencial efetiva de interação entre duas partículas, no limite não relativístico, quando a interação é mediada por um campo de gauge abeliano em três dimensões. A forma da energia potencial referida é obtida via a expressão da matriz S em teoria quântica de campos, referente ao espalhamento de dois férmions no limite não relativístico. A fim de executar este programa será apresentada a metodologia empregada para obter a forma da referida energia potencial no limite não relativístico entre duas partículas.

Para o entendimento dos problemas abordados nesta tese, torna-se conveniente a apresentação de certos resultados básicos. A introdução desses resultados é justamente o objetivo deste capítulo, o qual serve para fixar a notação, assim como ressaltar o embasamento teórico subjacente ao desenvolvimento deste trabalho.

1.1 O modelo

Esta seção é dedicada à apresentação da eletrodinâmica fermiônica em três dimensões (eletrodinâmica 3D), o modelo empregado na maior parte desta tese [9].

Antes de fazer a apresentação da eletrodinâmica 3D é coveniente reforçar a motivação em estudar esta teoria. Desde a última década tem havido um interesse substancial pelas teorias com duas dimensões espaciais. As maiores motivações em estudar fenômenos, que ocorrem num espaço bidimensional, surgiram devido ao efeito Hall quântico e a supercondutividade a altas temperaturas. Fenômenos os quais apresentam uma estrutura que, a princípio, favorece bastante os aspectos ligados a um espaço com duas dimensões espaciais. É justamente neste contexto que entra a eletrodinâmica aqui apresentada, ela surge como uma candidata para descrever a supercondutividade a altas temperaturas. Mais precisamente, estaremos interessados em saber qual é a energia potencial férmion-férmion que esta teoria fornece e dai verificar se ela possibilita ou não a formação de estalos ligados.

A eletrodinâmica 3D é definida[1] pela densidade de Lagran-

[1]Neste trabalho, salvo menção contrária, será empregado o sistema natural de unidades, $c = \hbar = 1$.

Aproveitamos, também, para apresentar a notação relativística empregada no decorrer desta tese. O trivetor posição do espaço-tempo é representado por x^μ, isto é, x^0 é o componente temporal, t, x^1 e x^2 são os componentes espaciais. Por outro lado, o par x^1 e x^2 forma o vetor posição, $\vec{x}$. Todo objeto C^μ que perante as transformações do grupo de Lorentz tem a mesma lei de transformação que x^μ também será chamado de trivetor. De uma forma mais ampla, os objetos que têm uma lei de transformação idêntica ao produto de n (n é um inteiro não negativo) trivetores são chamados de tensores de ordem n. Quando dois índices de uma expressão tensorial estiverem repetidos (contraídos) ficará subentendida uma soma. São usados, também, CS e C^2 para representar $C^\mu S_\mu$ e $C^\mu C_\mu$,

giana

$$L = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\lambda}(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu) + \bar{\Psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\Psi + e\bar{\Psi}A\!\!\!/\Psi \quad (1.1)$$

Os dois primeiros termos dessa expressão referem-se ao campo eletromagnético livre, o primeiro é o responsável pela dinâmica do campo e o segundo possibilita a fixação do gauge. O $F_{\mu\nu}$, que é a combinação antissimétrica $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, é o tensor do campo eletromagnético. Já a terceira parcela refere-se ao campo de Dirac livre. O último termo dita a interação entre as partes eletromagnética e de matéria. As constantes m e e dizem respeito a massa e a intensidade da carga do férmion, respectivamente.

Existem certas facetas importantes da eletrodinâmica 3D que devem ser devidamente analisadas. Nesta tese, em particular, será dado um destaque especial àquelas propriedades que advém da ausência de simetrias por inversões espacial e temporal (seção 1.5, sobre a equação de Dirac). Neste contexto será mostrado no próximo capítulo que um termo extra é induzido para a Lagrangiana, assim como ressaltadas algumas de suas implicações. Duas conseqüências deste fato merecem destaque, a primeira é a melhora no comportamento infra-vermelho da teoria, a outra diz respeito ao favorecimento da presença de estados ligados. Essa nova contribuição é o termo de Chern-

respectivamente. O operador de derivação em relação a x^μ é representada por ∂_μ, por outro lado ∂^μ diz respeito a derivada em relação a x_μ. O tensor métrico (métrica), $g^{\mu\nu}$, é definido por $g^{\mu\nu} = 0$ se $\mu \neq \nu$ e $g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = 1$. Outro tensor que merece destaque é o tensor totalmente anti-simétrico nos três índices, $\epsilon^{\mu\nu\alpha}$, ($\epsilon^{\mu\nu\alpha} = -\epsilon^{\nu\mu\alpha} = -\epsilon^{\mu\alpha\nu}$) com $\epsilon^{012} = 1$. A contração de uma matriz de Dirac (definida na seção 1.5), γ^μ (γ_μ), contraída com um trivetor, C_μ (C^μ), é denotado por $C\!\!\!/$.

Simons,

$$L_{CS} = \frac{1}{4}\theta\epsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\mu\nu}A_{\alpha}, \tag{1.2}$$

onde θ representa a massa induzida para o campo de gauge.

1.2 A matriz S do modelo

Aqui serão apresentadas as regras de Feynman referentes a eletrodinâmica 3D. A dedução da expansão perturbativa desta eletrodinâmica não será apresentada[2], principalmente porque sua derivação não tem uma relevância fundamental para o esclarecimento dos problemas abordados neste trabalho.

As amplitudes de transição entre um estado inicial, $|a\rangle$, e um estado final, $|b\rangle$, assintóticos, formam a matriz de espalhamento (matriz S). A matriz S está relacionada com a matriz de transição (matriz T), a relação entre seus elementos de matriz é

$$S_{ba} = \langle b|a\rangle + i(2\pi)^3\delta^3(P_b - P_a)T_{ba}, \tag{1.3}$$

onde P_b e P_a devem ser entendidos como sendo os trimomentos totais das partículas que entram e saem num dado espalhamento, respectivamente. Outro objeto importante é a amplitude de Feynman, $\mathcal{M}$, definida pela relação

$$T_{ba} = -i\left[\prod\left(\frac{m}{E}\right)^{1/2}\right]\left[\prod\left(\frac{1}{2\omega}\right)^{1/2}\right]\mathcal{M}_{ba}. \tag{1.4}$$

[2] A expansão perturbativa para a eletrodinâmica 3D segue os mesmos passos que os da eletrodinâmica usual, veja por exemplo as referências [28, 29, 30].

O primeiro produtório traz um fator de $(m/E)^{1/2}$ para cada um dos férmions, ligados ao estado inicial ou final. No segundo produtório a mesma observação cabe aos bósons.

As contribuições à matriz S, mais especificamente à amplitude de Feynman $\mathcal{M}$, em cada ordem da série perturbativa podem ser representadas graficamente (gráficos de Feynman). Segue, portanto, as regras para a construção desses gráficos.
1) Cada férmion entrando com trimomento p^μ (linha reta externa entrando) corresponde a um $u(p)$. Caso o férmion esteja saindo deve-se usar $\bar{u}(p)$. No caso de anti-férmions basta usar $v(p)$ e $\bar{v}(p)$ para uma partícula final e inicial, respectivamente. As definições de $u(p)$, $\bar{u}(p)$, $v(p)$ e $\bar{v}(p)$ estão na última seção deste capítulo. Um bóson de gauge tem a ele ligado uma polarização $\epsilon^\mu(p)$, que não será usada nesta tese [31, 32, 33].
2) Uma linha de férmion interna (reta), que flui um trimomento p^μ, corresponde ao propagador

$$S(p) = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \,. \tag{1.5}$$

3) Toda linha interna de bósons de gauge (ondulada), que passa um trimomento p^μ, denota o propagador

$$D^{\mu\nu}(p) = \frac{-i}{p^2 - \theta^2}\left[\left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right) - i\theta\epsilon^{\mu\nu\rho}\frac{p_\rho}{p^2}\right] - i\lambda\frac{p^\mu p^\nu}{(p^2)^2}. \tag{1.6}$$

Aqui está sendo levada em conta a contribuição do termo de Chern-Simons para o propagador (θ igual a zero nesta expressão recupera a forma usual do propagador para o campo eletromagnético livre.)
4) Cada vértice traz consigo um fator de $ie\gamma^\mu$.

5) A soma dos trimomentos entrando em um vértice deve ser igual a soma dos trimomentos saindo.
6) Cada circuito fechado independente tem um trimomento k^μ que está confinado no mesmo, o qual deve ser integrado com a medida $d^3k/(2\pi)^3$.
7) Todo circuito fechado formado por linhas de férmions traz um fator de (-1).
8)Cada gráfico deve ter um fator combinatorial multiplicando-o. Este fator é igual ao número de maneiras de interligar as linhas do referido gráfico, partindo de uma configuração dada para as linhas externas, dividido pelo fatorial do número de vértices.

Estas regras valem, também, para as funções de Green do modelo, exceto por um detalhe: A exeção refere-se as linhas externas dessas funções . Linhas estas que passam a representar os propagadores dos campos aos quais elas se referem.

As regras acima ficam mais claras se forem apresentados alguns exemplos. A contribuição, em ordem mais baixa à amplitude de Feynman, para o espalhamento de dois férmions corresponde ao processo que envolve a troca de um bóson de gauge. Um gráfico que contribui para esse processo está apresentado na figura 1.1. Sua correspondente expressão analítica vem a ser

$$(ie)^2[\bar{u}(p_1^{'})\gamma^\mu u(p_1)]D_{\mu\nu}(q)[\bar{u}(p_2^{'})\gamma^\nu u(p_2)] \tag{1.7}$$

As contribuições com troca de dois fótons são correções que pertencem a próxima ordem. Dois gráficos merecem destaque. Um deles é o gráfico direto e o outro o cruzado, conforme as figuras 1.2 e 1.3, respectivamente. As expressões analíticas

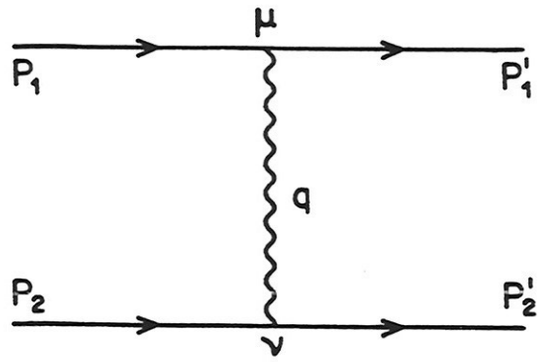


Figura 1.1: Gráfico com troca de um bóson de gauge.

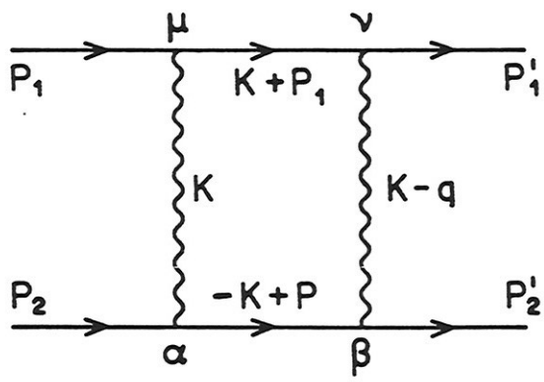


Figura 1.2: Gráfico direto tipo caixa.

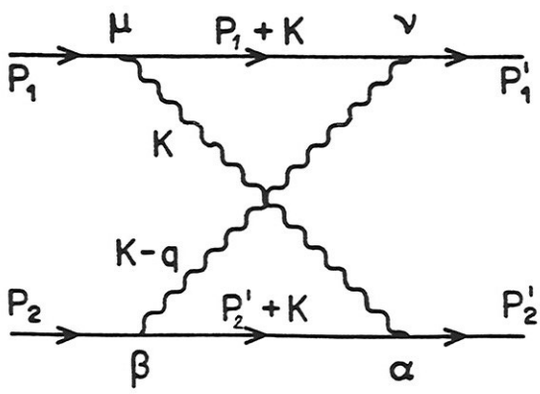


Figura 1.3: Gráfico cruzado tipo caixa.

para esses gráficos são, respectivamente,

$$(ie)^4 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}[\bar{u}(p_1')\gamma^\nu S(k+p_1)\gamma^\mu u(p_1)]$$
$$\times D_{\mu\alpha}(k)D_{\beta\nu}(k-q)[\bar{u}(p_2')\gamma^\beta S(-k+p_2)\gamma^\alpha u(p_2)] \quad \text{e} \quad (1.8)$$

$$(ie)^4 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}[\bar{u}(p_1')\gamma^\nu S(k+p_1)\gamma^\mu u(p_1)]$$
$$\times D_{\mu\alpha}(k)D_{\beta\nu}(k-q)[\bar{u}(p_2')\gamma^\alpha S(k+p_2')\gamma^\beta u(p_2)]. \quad (1.9)$$

O trimomento q^μ, como deve ter ficado claro das figuras anteriores, é o momento transferido, $q^\mu = p_1'^\mu - p_1^\mu = p_2^\mu - p_2'^\mu$. É importante observar, também, que os fatores combinatoriais desses três gráficos são iguais a um.

A amplitude de espalhamento até a aproximação que contém a troca de um bóson de gauge, está incompleta quando é baseada apenas na contribuição que advém da figura 1.1. Falta o gráfico que segue ao anteriormente apresentado (figura 1.1) pela troca dos números quânticos dos férmions no canal de saída. Este gráfico, deve estar presente para garantir a antisimetria da amplitude de transição pela permutação de dois férmions idênticos. A mesma observação, evidentemente, cabe para os demais gráficos apresentados.

1.3 A matriz de transição em mecânica quântica não relativística

O objetivo desta seção é o de apresentar uma expressão para a matriz de transição, num processo que estão envolvidas duas partículas. O ponto de partida para conseguir este

propósito está em supor que a Hamiltoniana do sistema de duas partículas, H, pode ser dada por $H = H_0 + V$. Na presente aplicação, $H_0 = \vec{p}_1^{\,2}/2m + \vec{p}_2^{\,2}/2m$ e V é a energia potencial de interação entre as duas partículas.

Um fato bastante usado na teoria formal de espalhamento é que um elemento da matriz S (matriz de espalhamento), S_{ab}, pode ser escrito em termos de um elemento da matriz $\mathcal{T}$, isto é,

$$S_{ba} = \langle b|a\rangle + i2\pi\delta(E_b - E_a)\mathcal{T}_{ba} \,. \tag{1.10}$$

Os estados assintóticos, $|a\rangle$ e $|b\rangle$, são autoestados de H_0. Mais do que isso, eles serão escolhidos como ondas planas com vetores de onda $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$. E_a é o autovalor de H_0 que corresponde ao autovetor $|a\rangle$, a mesma observação aplicando-se a E_b e $|b\rangle$. Esta matriz S é reduzida a forma apresentada na seção anterior se a energia potencial, V, for invariante por translação do referencial. Este fato gera uma possibilidade de redefinir a matriz $\mathcal{T}$,

$$\mathcal{T}_{ba} = (2\pi)^2\delta^2(\overline{P}_b - \overline{P}_a)T_{ba}. \tag{1.11}$$

Os vetores $\overline{P}_b$ e $\overline{P}_a$ correspondem aos momentos totais advindos dos estados inicial e final, respectivamente.

A matriz $\mathcal{T}$, por sua vez, satisfaz a equação de Lippmann-Schwinger [34],

$$\mathcal{T} = -V + VG\mathcal{T} \,, \quad G = 1/(E - H_0 + i\epsilon) \,. \tag{1.12}$$

A solução iterativa desta equação é

$$\mathcal{T} = -V - VGV - VGVGV - \ \ldots \,, \tag{1.13}$$

conhecida como a série de Born para a matriz de transição. Se apenas o primeiro termo da série acima é considerado a matriz de transição torna-se igual ao operador $-V$. Este caso é

conhecido como a aproximação de Born de primeira ordem. Aproximações seguintes podem ser consideradas, em particular, nesta tese será usada até a segunda ordem em V (aproximação de Born de segunda ordem).

1.4 A energia potencial de interação entre duas partículas

Baseando-se no exposto nas duas últimas seções , a função energia potencial efetiva de duas partículas advinda de uma teoria de campos pode ser intuída [35, 36, 37, 38]. De fato, basta impor que a matriz S obtida via teoria de campos (no setor de duas partículas) seja igual a matriz de espalhamento obtida para um sistema de duas partículas na mecânica quântica não relativística. Neste caso, a matriz S advinda da teoria quântica de campos deve ser olhada em seu limite não relativístico.

Existe uma primeira aproximação, bastante razoável, para a construção da energia potencial, V. Esta aproximação baseia-se em igualar a primeira contribuição não nula para um elemento arbitrário da matriz T (em teoria quântica de campos no seu limite não relativístico) com o correspondente elemento de matriz do operador V. No caso presente a primeira contribuição para a matriz T advém do gráfico exposto na figura 1.1. Este procedimento pode, a princípio, ser aplicado para qualquer tipo de partículas em interação, sendo bastante empregado[3] [26, 27, 36, 37, 38, 39, 40].

[3] É interessante ressaltar que, a energia potencial elétron-elétron, até a primeira ordem

Caso haja uma suspeita de que o procedimento anterior não forneça uma boa aproximação para a energia potencial de interação, correções podem ser feitas. Estas correções são encontradas recursivamente. Isto é conseguido via uma comparação entre a matriz de transição advinda da teoria de campos [35, 36], na sua aproximação não relativística,

$$T_{TC} = U_1 + U_2 + U_3 + \dots \ , \tag{1.14}$$

com a matriz T obtida através da mecânica quântica não relativística,

$$T_{MC} = -V - VGV - VGVGV - \dots \ . \tag{1.15}$$

No caso abordado nesta tese, o termo U_1 é proporcional a $(e^2)^1$, U_2 vem a ser da ordem de $(e^2)^2$, U_3 contém $(e^2)^3$, etc. Isto indica que a energia potencial deve ser expressa sob a forma de uma série,

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots \ , \tag{1.16}$$

onde V_1, V_2, V_3, ... são da ordem de $(e^1)^1$, $(e^2)^1$, $(e^3)^1$, ... A substituição de V em T_{MQ} e a imposição de que T_{TC} seja igual a T_{MQ} ordem a ordem em e^2 fornece

$$V_1 = -U_1 \ , \quad V_2 = -U_2 - U_1 G U_1, \quad \dots \ . \tag{1.17}$$

Algumas observações devem ser feitas, pois servem para situar melhor as condições de aplicabilidade do procedimento acima exposto. As expressões anteriores não se referem ao potencial em si, mas a sua transformada de Fourier, pois os estados $|a\rangle$ e $|b\rangle$ são ondas planas. Uma onda plana correspondente

depois da aproximação não reltivística dominante, foi obtida primeiramente por Breit [25], usando a equação de Dirac.

a cada partícula tem fixada a sua relação momento-energia; no limite não relativístico ela é $E = \vec{p}^2/2m$. A energia e o momento do sistema como um todo são conservados. A parte da matriz S que garante a sua anti-simetria pela troca de dois férmions não precisa ser usada no cálculo da energia potencial. Isto acontece porque esta parte da matriz de espalhamento só garante a anti-simetria dos estados, e não a forma da energia potencial.

A rigor, ao invés de impor a igualdade das matrizes de transição, T_{TC} e T_{MC}, deveria ser feita a comparação entre as respectivas seções de choque. De fato, os observáveis são as seções de choque e não as amplitudes de transição. Isto feito implicaria que as duas amplitudes de transição fossem iguais a menos de um fator de fase arbitrário. Por outro lado, o fator de fase pode ser fixado. Basta impor que a energia potencial, conseguida através deste procedimento, tenha o mesmo sinal de sua correspondente clássica. Por exemplo, a energia potencial estática, obtida classicamente para o caso da eletrodinâmica 3D, vem a ser $-e^2/(2\pi)ln(r)$, onde r é o módulo da distância relativa entre as duas partículas. Será visto (seção 2.3), entretanto, que a comparação direta entre as matrizes T conduz à escolha do sinal acima.

1.5 A equação de Dirac em três dimensões

A eletrodinâmica fermiônica aqui tratada está imersa num espaço-tempo tridimensional. É importante, portanto, analisar

a equação de Dirac em três dimensões,

$$(i\partial\!\!\!/ - m)\Psi = 0 \,. \tag{1.18}$$

As matrizes de Dirac (gama), γ^μ, que aparecem nesta equação satisfazem a relação de anti-comutação

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \,, \tag{1.19}$$

onde a matriz γ^0 é hermitiana e as matrizes γ^1 e γ^2 anti-hermitianas.

As relações anteriores impõem um vínculo sobre as dimensões das representações irredutíveis das matrizes de Dirac. Essas dimensões são $D \times D$, onde D é um número par. De fato, basta tomar γ^0 numa representação diagonal e concluir que

$$\gamma^0\gamma^0 = 1 \quad \text{e} \quad det(\gamma^0\gamma^1) = det(-\gamma^1\gamma^0) = (-1)^D det(\gamma^0\gamma^1) \tag{1.20}$$

implicam em autovalores iguais a ± 1 para a matriz γ^0 com D par.

A representação de ordem mais baixa, $D = 2$, para as matrizes gama aqui empregadas é

$$\gamma^0 = \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; \gamma^1 = i\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \gamma^2 = i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.21}$$

onde as matrizes sigma são as matrizes de Pauli. Caso seja definida outra representação das matrizes gama, que difira por uma troca de sinal em γ^2, chega-se a uma representação inequivalente à anterior. Este fato, entretanto, não muda a essência das conclusões obtidas nesta tese.

A representação acima das matrizes gama não deixa a equação de Dirac invariante por uma transformação geral de Lorentz.

Na realidade, a equação de Dirac não muda de forma por uma transformação contínua de Lorentz, porém as inversões espacial e temporal não são simetrias dessa equação . Não é difícil constatar esta última observação. Basta supor um novo espinor Ψ' igual a uma matriz $\mathcal{A}$ aplicada ao espinor antigo Ψ. A seguir o Ψ' deve ser substituído na equação 1.18 e ao mesmo tempo realizada a transformação discreta desejada. Verifica-se, finalmente, que é impossível achar a tal matriz $\mathcal{A}$ que restabeleça a forma original da equação de Dirac (por exemplo, use as matrizes 1.21), o termo de massa é impar por essa transformação.

É conveniente apresentar, também, uma representação explícita para a próxima representação irredutível[4] das matrizes de Dirac, $D = 4$. Essas matrizes gama são

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^3 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} i\sigma^1 & 0 \\ 0 & -i\sigma^1 \end{pmatrix} \text{ e } \gamma^2 = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix}, \tag{1.22}$$

onde os sigmas são as matrizes a pouco definidas e 0 é a matriz nula 2×2. As matrizes gama escolhidas dessa forma mostram que a equação de Dirac com quadriespinores é equivalente a duas equações de Dirac com biespinores agrupadas, cujos termos de massa tem sinais opostos. Esta representação irredutível das matrizes de Dirac permite que a equação de Dirac seja invariante por uma transformação de Lorentz que inclui as inversões espacial e temporal. A mesma observação vale para as representações irredutíveis com dimensões superiores.

[4]Neste caso, estamos considerando o grupo de Lorentz completo, isto é, ele inclui as simetrias discretas e contínuas. Isto faz com que sejam necessárias outras matrizes além das presentes em 1.22, tornando a representação para o conjunto de todas essas matrizes irredutível. Por outro lado, se estivéssemos considerando apenas as simetrias contínuas do grupo de Lorentz completo, as matrizes apresentadas em 1.22 seriam suficientes, fornecendo uma representação redutível.

Pode ser concluído, portanto, que a representação bidimensional para as matrizes de Dirac ocupa um lugar diferenciado, no tocante as simetrias discretas. É justamente este o caso mais empregado nesta tese. Este ponto é colocado em destaque nas discussões sobre o modelo de Thirring e a divergência na região do infra-vermelho para a eletrodinâmica 3D, que serão apresentados no próximo capítulo.

É fácil ver, por mera substituição, que as soluções tipo onda plana de energia positiva e negativa para a equação de Dirac com espinores de dois componentes são, respectivamente,

$$\Psi_{p_+}(x) = u(p)\, e^{-ip_\mu x^\mu} \equiv \frac{1}{\sqrt{2m(p^0+m)}} \begin{pmatrix} p^0+m \\ -ip^1+p^2 \end{pmatrix} e^{-ip_\mu x^\mu} \quad \text{e} \tag{1.23}$$

$$\Psi_{p_-}(x) = v(p)\, e^{ip_\mu x^\mu} \equiv \frac{1}{\sqrt{2m(p^0+m)}} \begin{pmatrix} ip^1+p^2 \\ p^0+m \end{pmatrix} e^{ip_\mu x^\mu}\,. \tag{1.24}$$

Estes espinores $u(p)$, $v(p)$ e seus conjugados satisfazem, como pode ser facilmente verificado, as relações

$$(\not{p} - m)u(p) = 0,\ \bar{u}(p)(\not{p} - m) = 0,$$

$$(\not{p} + m)v(p) = 0 \text{ e } \bar{v}(p)(\not{p} + m) = 0. \tag{1.25}$$

Nestas expressões foi usado o conjugado de um espinor. O conjugado de um espinor, por sua vez, é definido como sendo a conjugação complexa do transposto deste espinor (representada por um $\dagger$ após o espinor) vezes a matriz de Dirac γ^0. Por exemplo, o conjugado de $u(p)$, $\bar{u}(p)$, é igual a $u(p)^\dagger\gamma^0$.

Algumas relações entre as matrizes de Dirac podem ser facilmente obtidas. As matrizes gama 2×2, em particular, satis-

fazem

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\epsilon^{\mu\nu\alpha}\gamma_\alpha, \tag{1.26}$$

que é verificada usando 1.21. As demais relações surgem como consequência da relação fundamental 1.19 e das expressões 1.21, quando o traço (Tr) é tomado, são elas:

$$Tr(\gamma^\mu) = 0,\ Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu) = Dg^{\mu\nu},\ Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha) = i(D-4)\epsilon^{\mu\nu\alpha} \text{ e}$$

$$Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta) = D(g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} + g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta})\ , \tag{1.27}$$

com $D = 2$ ou $D = 4$.

Capítulo 2

Eletrodinâmica 3D

Este capítulo versa, principalmente, sobre a eletrodinâmica 3D. Preliminarmente é feito um estudo do modelo de Thirring num espaço-tempo tridimensional. Na análise desse modelo empregamos, alternativamente, espinores de dois e quatro componentes, objetivando ressaltar um aspecto estabilizador associado ao termo de Chern-Simons. De fato, como será visto, a região de estabilidade do modelo, definida como aquela livre de táquions, é ampliada quando espinores de dois componentes são empregados. A eletrodinâmica 3D é, a seguir, construída perturbativamente, apresentando problemas sérios de divergência infra-vermelha. Tendo, também, em consideração resultados da análise tipo Bloch-Nordsieck para a eletrodinâmica 3D, é apresentada uma maneira de solucionar esta questão para o caso de campos fermiônicos com dois componentes. Esta abordagem, entretanto, não é aplicável à situação quadriespinorial. Depois disso, a energia potencial entre duas partículas é construída, levando em conta um gráfico de Feynman que envolve a troca de um fóton virtual. É feita, em seguida, a análise

de estados ligados férmion-férmion, quando essa energia potencial é empregada.

2.1 O modelo de Thirring

Nesta seção é analisado, através da expansão 1/N, o modelo Thirring em três dimensões [8, 23], cuja Lagrangiana é definida por

$$L = \overline{\Psi}(i\partial\!\!\!/ - M)\Psi - \frac{g}{2N}(\overline{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi)(\overline{\Psi}\gamma_{\mu}\Psi) \ . \tag{2.1}$$

Nos bilineares do tipo $\overline{\Psi}_{\alpha}\Psi_{\beta}$ (onde α e β são índices de Lorentz) está subentendida uma soma nos N campos, $\sum_{a=1}^{N}\overline{\Psi}_{\alpha}^{a}\Psi_{\beta}^{a}$. As constantes M e g representam a massa do campo fermiônico e a constante de acoplamento do modelo, respectivamente. O estudo desse modelo vai ser feito empregando-se, alternativamente, espinores de dois e de quatro componentes.

A teoria descrita pela Lagrangiana acima é não renormalizável perturbativamente, pois o termo de interação tem dimensão maior que aquela do espaço-tempo em que estamos trabalhando. Devido a este fato, iremos estudar o modelo usando a expansão $1/N$, que em geral apresenta um melhor comportamento ultra-violeta.

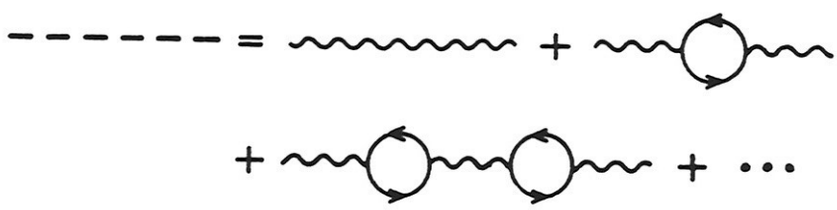
A expansão $1/N$, para o presente modelo, é mais facilmente implementada se for empregado um campo auxiliar, A^{μ}. A forma da Lagrangiana anterior é, então, mudada para

$$L = \overline{\Psi}(i\partial\!\!\!/ - M)\Psi - \frac{1}{\sqrt{N}}\overline{\Psi}A\!\!\!/\Psi + \frac{1}{2g}A^{\mu}A_{\mu} \tag{2.2}$$

Esta Lagrangiana é totalmente equivalente a anterior. Isto é

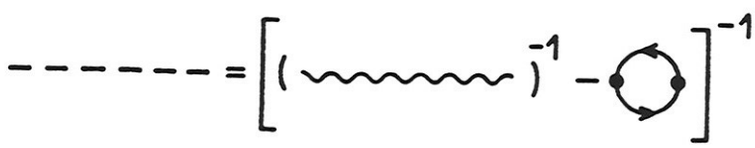
fácil de ser constatado classicamente, pois a equação de movimento para o campo auxiliar fornece $A^\mu = \frac{g}{\sqrt{N}}\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi$. Por outro lado, se for feita uma integração funcional no campo A^μ recai-se na Lagrangiana inicial. Fica, assim, verificada a equivalência entre as duas Lagrangianas, também sob o ponto de vista quântico.

A essência da expansão $1/N$ está em colecionar termos de mesma ordem em $1/N$ [41, 42]. Neste sentido, o propagador $\Delta^{\mu\nu}(p)$ em sua ordem mais baixa de $1/N$ é representado pela série



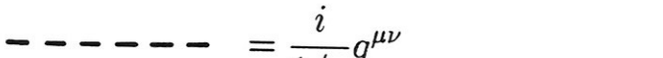
(2.3)

Esta série pode ser calculada formalmente, pois ela é do tipo de uma progressão geométrica, resultando em



(2.4)

Dois objetos aparecem nestas duas expressões gráficas: um é o propagador livre do campo A^μ e o outro o tensor de polarização do vácuo. O propagador livre para o campo auxiliar, $\Delta^{0\mu\nu}(p)$, é, essencialmente, o inverso da parte quadrática em A^μ da Lagrangiana anterior,



$$= \frac{i}{1/g} g^{\mu\nu} \tag{2.5}$$

O tensor de polarização do vácuo (veja as regras de Feynman

do capítulo anterior, seção 1.2) é dado por

$$= \Pi^{\mu\nu}(p) = -Tr \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\not{k} + M}{k^2 - M^2} \gamma^\mu \frac{\not{k} + \not{p} + M}{(k+p)^2 - M^2} \gamma^\nu \,. \tag{2.6}$$

O fator de $1/N$, que apareceria devido aos dois vértices, foi cancelado por um N que vem dos N propagadores fermiônicos.

Um ponto deve ser ressaltado: a expressão para $\Pi^{\mu\nu}(p)$ é divergente, necessitanto de uma regularização. Para escolher o esquema de regularização notemos o seguinte: A função de Green corrente-corrente, em sua ordem mais baixa, nada mais é do que o tensor de polarização do vácuo. Este fato, aliado a conservação da corrente, deveria implicar na transversalidade do referido tensor, $p_\mu \Pi^{\mu\nu}(p) = 0$ e $p_\nu \Pi^{\mu\nu}(p) = 0$. Esta implicação não pode ser inferida a partir da expressão 2.6, pois ela é divergente, não estando assim bem definida. Desta forma, é interessante que a regularização a ser escolhida garanta a transversalidade do $\Pi^{\mu\nu}(p)$. Uma regularização que tem esta propriedade é a dimensional, a qual vai ser empregada neste trabalho[1] (veja, em particular, a expressão final para o tensor de polarização do vácuo (2.14)). Na situação presente a imposição de transversalidade reduz efetivamente por dois o grau de divergência superficial, implicando que a integral permanece finita mesmo após a eliminação do regulador. As expressões a serem empregadas na regularização dimensional [43] são

$$\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{(-k^2 + C)^\alpha} = \frac{i}{(2\pi^{1/2})^d} C^{(d/2-\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha - d/2)}{\Gamma(\alpha)} \quad \text{e} \tag{2.7}$$

[1]Para uma discussão sobre outros tipos de regularizações que podem ser empregadas na análise do modelo de Thirring veja a referência [23].

$$\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{k^\mu k^\nu}{(-k^2+C)^\alpha} = \frac{-i}{2(2\pi^{1/2})^d}C^{(d/2-\alpha+1)}\frac{\Gamma(\alpha-1-d/2)}{\Gamma(\alpha)}g^{\mu\nu}. \tag{2.8}$$

Uma integral do tipo dessas duas, porém com um único k^μ no integrando é tomada como sendo zero. Na realidade, a regularização dimensional provoca a redefinição do valor das integrais, fazendo uma extensão do resultado encontrado para as integrais convergentes. Pode ser concluído, ainda, que num espaço-tempo de dimensão ímpar esta regularização ocupa uma posição singular, pois elimina algumas divergências advindas das integrais de Feynman. Isto fica patente quando as duas expressões acima são usadas em casos onde α é inteiro e d vem a ser ímpar.

A regularização dimensional é usada agora no cálculo do tensor de polarização do vácuo. O cálculo do traço sobre as matrizes de Dirac da expressão 2.6 é conseguido usando as fórmulas 1.27, resultando em

$$\begin{aligned}\Pi^{\mu\nu}(p) &= -D\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\\ &\times\left\{\frac{k^\mu(k+p)^\nu+k^\nu(k+p)^\mu-k^\sigma(k+p)_\sigma g^{\mu\nu}+M^2g^{\mu\nu}}{(k^2-M^2)[(k+p)^2-M^2]}\right\}\\ &+i(4-D)Mp_\alpha\epsilon^{\mu\alpha\nu}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{(k^2-M^2)[(k+p)^2-M^2]}\,. \end{aligned}\tag{2.9}$$

Relembrando, o número D é igual a quantidade de componentes do espinor Ψ^a (dois ou quatro). A introdução da reparametrização de Feynman facilita o cálculo das integrais que aparecem em $\Pi^{\mu\nu}(p)$. Neste caso, esta reparametrização con-

siste no uso da identidade

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{[bx + a(1-x)]^2} , \tag{2.10}$$

onde $a = k^2 - M^2$ e $b = (k+p)^2 - M^2$. Se for usada esta integral na expressão 2.9, a seguir feita a mudança de variável $k^\mu \to k^\mu - p^\mu x$ e finalmente empregadas as expressões para regularização dimensional 2.7 e 2.8 pode-se concluir que

$$\Pi^{\mu\nu}(p) = i\frac{D}{8\pi} G(p,M) \left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right) - \frac{(4-D)}{8\pi} M F(p,M) p_\alpha \epsilon^{\mu\alpha\nu}, \tag{2.11}$$

onde

$$G(p,M) = \int_0^1 dx \frac{2p^2 x(x-1)}{\sqrt{p^2x^2 - p^2x + M^2}} \quad \text{e}$$

$$F(p,M) = \int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{p^2x^2 - p^2x + M^2}} . \tag{2.12}$$

Das expressões acima pode ser verificado que $G(p,M)$ e $F(p,M)$ estão relacionadas,

$$G(p,M) = M - \frac{4M^2 + p^2}{4} F(p,M) . \tag{2.13}$$

Esta relação permite, por sua vez, escrever o tensor de polarização do vácuo como

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(p) &= i\frac{D}{8\pi} \left[M - \frac{(4M^2+p^2)}{4} F(p,M) \right] \left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right) \\ &+ \frac{(D-4)}{8\pi} M F(p,M) p_\alpha \epsilon^{\mu\alpha\nu} . \end{aligned} \tag{2.14}$$

O propagador para o campo de gauge na aproximação dominante em $1/N$ pode ser agora obtido, usando a expressão

gráfica 2.4. Obtemos

$$\begin{aligned}\Delta^{\mu\nu}(p) &= \frac{i8\pi\left(\frac{8\pi}{g}+DG(p,M)\right)}{S(p,M,g)}\left(g^{\mu\nu}-\frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right)\\ &+ \frac{8\pi(4-D)MF(p,M)}{S(p,M,g)}p_\alpha\epsilon^{\mu\alpha\nu}+ig\frac{p^\mu p^\nu}{p^2}, \quad (2.15)\end{aligned}$$

onde

$$S(p,M,g)=\left(\frac{8\pi}{g}+DG(p,M)\right)^2-(4-D)^2M^2p^2F(p,M)^2\,. \quad (2.16)$$

O comportamento para grandes momentos ($p^2 \gg M^2$), ultravioleta, do propagador corrigido pode ser encontrado. Basta desprezar M em $F(p,M)$ (fórmula 2.12) e concluir que $F(p,M) \propto (p^2)^{-\frac{1}{2}}$. Assim, a parte transversal do propagador, a grandes momentos, tem a forma

$$\Delta^{\mu\nu}(p)\propto\frac{1}{D\sqrt{p^2}}\left(g^{\mu\nu}-\frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right)+O(\frac{1}{p^2}), \quad (2.17)$$

evidenciando, como esperado, um melhor comportamento ultravioleta. É interessante observar que o termo contendo o tensor totalmente anti-simétrico é da ordem de $1/(p^2)$. Por outro lado, como vemos em 2.15, a parte longitudinal do propagador apresenta ainda um mal comportamento assintótico ($(p^2)^0$ para p^μ grande). Como o campo A^μ interage com uma corrente conservada, a solução deste problema é análoga a da eletrodinâmica massiva em quatro dimensões [44]. Ela consiste em adicionar a Lagrangiana inicial um termo de "fixação de gauge", proporcional a $(\partial_\mu A^\mu)^2$. A nova Lagrangiana fica, então,

$$L=\overline{\Psi}(i\partial\!\!\!/-M)\Psi-\frac{1}{\sqrt{N}}\overline{\Psi}A\!\!\!/\Psi+\frac{1}{2g}A^\mu A_\mu-\frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2\,, \quad (2.18)$$

fonecendo um novo progador

$$\Delta^{\mu\nu}(p) = \frac{i8\pi\left(\frac{8\pi}{g} + DG(p,M)\right)}{S(p,M,g)}\left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right) + \frac{8\pi(4-D)MF(p,M)}{S(p,M,g)}p_\alpha\epsilon^{\mu\alpha\nu} - \frac{i}{\lambda p^2 - 1/g}\frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \quad (2.19)$$

O uso da fórmula acima mostra que o modelo de Thirring, num espaço-tempo tridimensional, é renormalizável usando a expansão $1/N$. Realmente, contagem de potências mostra que o grau de divergência superficial de um gráfico genérico, γ, é

$$d(\gamma) = 3 - N_F - N_{A_\mu}\ , \quad (2.20)$$

onde N_F e N_{A_μ} são o número de linhas externas de férmions e A_μ, respectivamente. De sorte que as divergências podem ser absorvidas em redefinições dos parâmetros do modelo.

É interessante, também, estudar o comportamento do propagador 2.19 quando o trimomento p^μ é quase nulo. Neste caso, sua forma aproximada vem a ser

$$\Delta^{\mu\nu}(p) \propto g^{\mu\nu}\ , \quad (2.21)$$

onde foi usado que $G(p,M) \simeq 0$ e $F(p,M) \simeq 1/M$. Aqui volta a acontecer que o termo dominante não é aquele relacionado com a quebra de paridade.

Observamos que a Lagrangiana 2.18 fica invariante se for feita a substituição $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu\Lambda$, desde que Λ satisfaça $\lambda\partial^\mu\partial_\mu\Lambda + \frac{1}{g}\Lambda = 0$. Esta simetria nos permite definir observáveis da teoria de maneira semelhante ao caso da eletrodinâmica massiva quadridimensional [44]. Os observáveis são objetos formalmente invariantes de gauge e independentes de λ.

A próxima etapa consiste em encontrar os pólos do propagador (2.19). Neste caso é importante a expressão para $F(p, M)$ (veja expressão 2.12), cuja forma na região $0 < p^2 < 4M^2$ é

$$F(p, M) = \frac{2}{\sqrt{p^2}} \operatorname{arctgh}\left[\frac{\sqrt{p^2}}{2M}\right] \tag{2.22}$$

O uso de uma análise gráfica para a equação $2\pi/g + G(p, M) = 0$ (figura 2.1), que pode ser escrita em termos da variável admensional $x = |p|/(2M)$ como

$$\frac{2\pi}{Mg} + 1 = \frac{(1 + x^2)\operatorname{arctgh}(x)}{x}, \tag{2.23}$$

permite encontrar os pólos do propagador do campo A^μ no caso de quadriespinores. Os zeros ocorrem tanto para g positivo, quanto negativo. A região com g negativo exibe a presença de táquions (instabilidade na teoria). A teoria, portanto, só faz sentido para g positivo, apresentando um estado ligado.

No caso de biespinores os pólos do propagador ocorrem quando $S(p, M, g) = 0$, que equivale as equações

$$\frac{4\pi}{Mg} + 1 = \frac{(1 \pm 2x + x^2)\operatorname{arctgh}(x)}{x}, \tag{2.24}$$

cuja solução gráfica está apresentada na figura 2.2. Existem pólos com $p^2 > 0$ (estados ligados) desde que $1/g + 4\pi/M > 0$. Contrariamente ao caso com quatro componentes, táquions aqui não ocorrem. Isto sugere que o termo de Chern-Simons, que é gerado dinâmicamente no modelo com dois componentes, desempenhe um papel estabilizador. Alem disso, conjecturamos que a existência do termo de Chern-Simons possibilite a

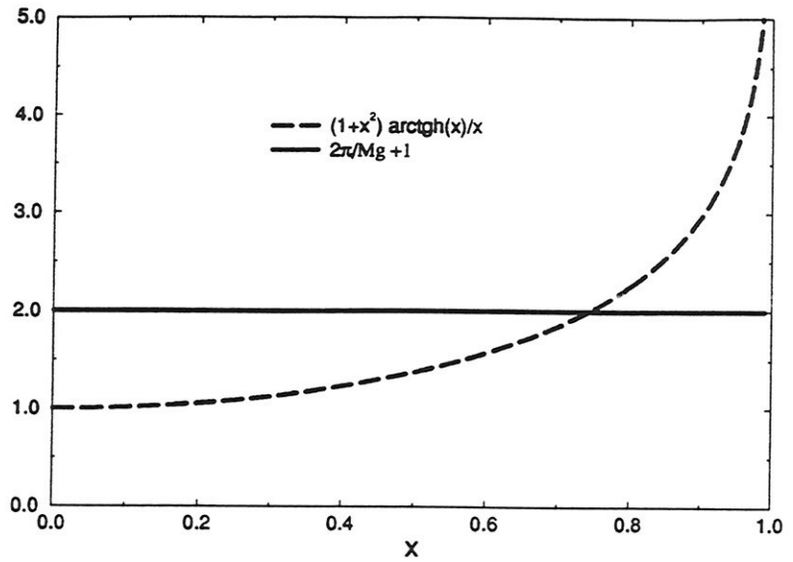


Figura 2.1: Solução gráfica para $2\pi/g + G(p, M) = 0$, onde $x = |p|/(2M)$. Para a reta horizontal foi escolhido um valor arbitrário de g.

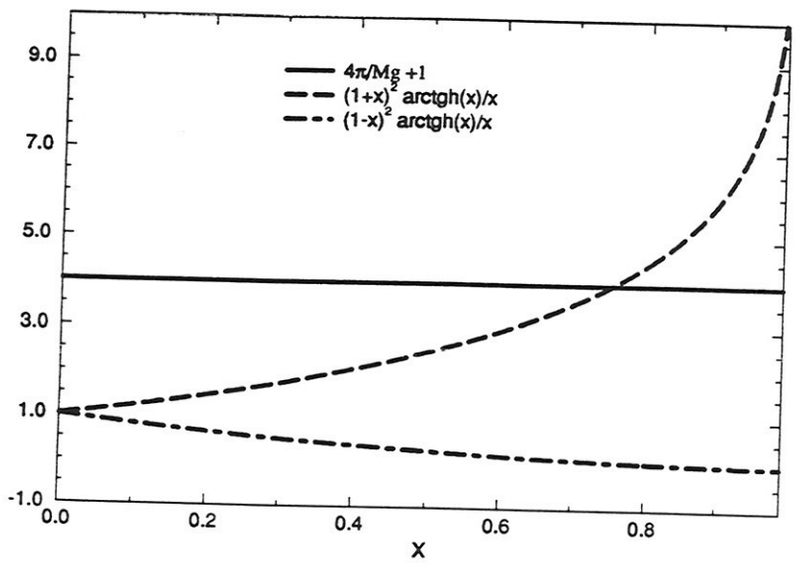


Figura 2.2: Solução gráfica para $S(p, M, g) = 0$, onde $x = |p|/(2M)$ e g escolhido arbitrariamente.

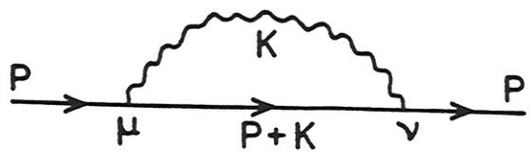


Figura 2.3: Gráfico de auto-energia para o férmion

formação de estados ligados igualmente carregados. Possiblidade esta que estudaremos, em seções posteriores, no contexto da eletrodinâmica 3D.

2.2 A eletrodinâmica 3D e seu comportamento infra-vermelho

Esta seção é dedicada à discussão da estrutura infra-vermelha da eletrodinâmica 3D. A princípio, verificada-se a presença de divergências infra-vermelhas na teoria, quando se emprega a expansão perturbativa. Depois disso, é apresentada uma maneira, não perturbativa, de ressomar o propagador do campo de gauge, que melhora o comportamento infra-vermelho do modelo.

Agora vai ser apresentado um exemplo típico de gráfico divergente. Considere, então, a contribuição para a matriz S, que vêm do gráfico apresentado na figura 2.3. A expressão analítica (seção 1.2) para esse gráfico é

$$(ie)^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\overline{u}(p)\gamma^\nu S(p+k)\gamma^\mu u(p)\right] D_{\mu\nu}(k) \ . \qquad (2.25)$$

Se for levado em conta que p^μ satisfaz a relação energia-momento, $p^2 = m^2$, conclui-se que $S(p+k) = i(\not{p}+\not{k}+m)/(k^2+2pk)$ (expressão 1.5). Esta observação aplicada à última expressão fornece

$$(ie)^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\overline{u}(p)\gamma^\nu \left(\frac{i(\not{p}+\not{k}+m)}{k^2+2pk}\right)\gamma^\mu u(p)\right]\left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2}\right). \tag{2.26}$$

Cabe ressaltar que, o propagador do campo de gauge foi escolhido no gauge de Feynman, $\lambda = 1$ (propagador 1.6, com $\theta = 0$). A última expressão permite constatar que o gráfico anterior corresponde a uma integral divergente. Divergência esta que advém do comportamento infra-vermelho do integrando, ou seja, da região de integração com trimomentos pequenos. Esta inta integral comporta-se como $(k^2)^0$ para pequenos k's, caracterizando uma divergência logarítmica.

Vários outros exemplos podem ser apresentados com divergências infra-vermelhas arbitrariamente altas. É justamente este comportamento da teoria que inviabilisa a construção perturbativa da matriz S da eletrodinâmica 3D. Torna-se premente, portanto, procurar uma maneira de rearranjar a série perturbativa desta matriz de espalhamento, tal que possibilite uma melhora em seu comportamento infra-vermelho. Como será visto no decorrer desta seção, a forma de somar da expansão $1/N$ resolve esta questão, quando os campos fermiônicos utilizados têm dois componentes. Isto acontece devido a indução de um termo de Chern-Simons, que garante uma massa para o campo de gauge. Por outro lado, na eletrodinâmica quadriespinorial não é gerado um termo de Chern-Simons, impossibilitando a melhoria do comportamento infra-vermelho da

teoria. Constatar a veracidade dessas afirmações é, justamente, o objetivo principal do restante desta seção.

Além das perspectivas lançadas quando foi estudado o modelo de Thirring, há outra questão importante que deve ser discutida. Esta questão está baseada na aproximação de Bloch-Nordsieck [45]. Não é o objetivo deste trabalho discorrer sobre a aproximação de Bloch-Nordsieck, usada aqui para analisar a estrutura infra-vermelha da eletrodinâmica 3D, de forma que, para este trabalho, serão apresentados apenas os resultados funtamentais. A essência da aproximação está em substituir as matrizes gama, γ^μ, por um trivetor, u^μ, que satisfaz $u^\mu u_\mu = 1$. Tal substituição favorece a solubilidade da teoria, sendo possível encontar o propagador para o campo fermiônico exatamente. A função de Green fermiônica de dois pontos, $G(p; m_R)$, na qual flui um trimomento p^μ, na referida aproximação, é dada por [9, 46]

$$G(p; m_R) = \frac{-i}{|Q|} \int_0^\infty dv \; exp\left\{\epsilon(Q)v - \frac{e^2 v}{4\pi|Q|}\left[C + \log\left(\frac{Mv}{|Q|}\right)\right]\right\}. \tag{2.27}$$

O escalar Q é definido por $Q = u^\mu p_\mu - m$; $\epsilon(Q)$ representa a função sinal com argumento Q; C é a constante de Euler e M está ligado ao processo de renormalização (M é o ponto de renormalização). O fato de $G(p; m_R)$ não apresentar pólo simples em $|Q| = 0$, sinaliza a presença de problemas na região do infra-vermelho da eletrodinâmica 3D. Todavia, é conhecido que a aproximação de Bloch-Nordsieck não leva em conta os gráficos de polarização do vácuo. Torna-se factível conjecturar, consequentemente, que a incorporação não perturbativa dos efeitos de polarização do vácuo pode melhorar o comporta-

mento infra-vermelho da teoria. Sob este aspecto, fica natural supor que o propagador do campo de gauge pode ser aproximado por uma série do tipo daquela apresentada na fórmula gráfica 2.3 [9].

A etapa seguinte está em encontrar a forma que o propagador para o campo de gauge descrito acima, $D^{\mu\nu}(p)$, adquire. Isto é conseguido através do cálculo da série apresentada na primeira figura deste capítulo (fórmula 2.3). Essa expressão difere daquela usada para o modelo de Thirring, essencialmente, pelo propagador do campo livre empregado. Na presente situação, deve ser empregado o propagador do campo de gauge livre para a eletrodinâmica 3D (expressão 1.6, com $\theta = 0$),

$$D^{0\mu\nu}(p) = \frac{-i}{p^2}\left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right) - i\lambda\frac{p^\mu p^\nu}{(p^2)^2}. \tag{2.28}$$

O tensor de polarização do vácuo a ser usado, $\Pi^{\mu\nu}(p)$, é proporcional aquele empregado no caso do modelo de Thirring, pois a forma do termo de interação é a mesma. A comparação entre os termos de interação das Lagrangianas da eletrodinâmica 3D (1.1) e do modelo de Thirring (2.2) permite concluir que a constante de proporcionalidade é e^2.

A análise do comportamento infra-vermelho envolve pequenos trimomentos. E é justamente este fato que torna importante direcionar, neste momento, as atenções para a contribuição mais baixa, em potências de p^μ, do tensor de polarização do vácuo. O uso das expressões 2.14, multiplicada por e^2, e 2.22 permitem encontrar a contribuição dominante, a pequenos trimomentos, para o tensor de polarização do vácuo

com $D = 2$ (biespinores),

$$\Pi^{\mu\nu}(p) = -\theta\epsilon^{\mu\nu\alpha}p_\alpha \ , \quad \theta = -e^2/4\pi \ . \tag{2.29}$$

Por outro lado, o tensor de polarização do vácuo com $D = 4$ (quadriespinores), na mesma aproximação, é o tensor nulo.

O progagador corrigido, a pequenos trimomentos, pode ser encontrado usando o mesmo procedimento de cálculo empregado na obtenção do progador 2.19. Neste caso, devem ser usadas as expressões do tensor de polarização do vácuo (2.29) e do propagador livre 2.28. O propagador corrigido, assim calculado, é

$$D^{\mu\nu}(p) = \frac{-i}{p^2 - \theta^2}\left[\left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right) - i\theta\epsilon^{\mu\nu\rho}\frac{p_\rho}{p^2}\right] - i\lambda\frac{p^\mu p^\nu}{(p^2)^2}. \tag{2.30}$$

Este é exatamente o propagador apresentado anteriormente no primeiro capítulo, expressão 1.6. Neste momento cabe uma observação importante: o propagador acima, apesar de estar numa notação relativística, só pode ser usado em situações onde flui um pequeno trimomento p^μ.

Observe a melhora no comportamento infra-vermelho da teoria, como fica evidenciado por 2.30[2]. Assim, no caso da auto energia do férmion obtem-se agora uma contribuição finita no infra-vermelho, com $\lambda = 0$,

$$\begin{aligned} - \ & (e)^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[\overline{u}(p)\gamma^\nu\left(\frac{\not{k} + \not{p} + m}{k^2 + 2pk}\right)\gamma^\mu u(p)\right] \\ \times \ & \left\{\frac{1}{k^2 - \theta^2}\left[\left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right) - i\theta\epsilon^{\mu\nu\rho}\frac{k_\rho}{k^2}\right]\right\} \end{aligned} \tag{2.31}$$

[2]Deve ser notado que ainda persiste uma singularidade em $p^\mu = 0$ associada ao termo de Chern-Simons gerado. A existência dessa singularidade é necessária devido as propriedades de longas distâncias que são atribuidas ao termo de Chern-Simons.

Antes de encerrar esta seção é interessante ressaltar certos fatos. Primeiro, a Lagrangiana efetiva para o campo de gauge, L_G, correspondente ao propagador 2.30, é

$$L_G = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{4}\theta\epsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\mu\nu}A_\alpha - \frac{1}{2\lambda}(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu) \ . \quad (2.32)$$

Esta fórmula deixa estampado que o efeito de corrigir o propagador do campo de gauge, a pequenos trimomentos, é equivalente a iniciar a teoria com um termo de Chern-Simons extra. Neste caso, é claro, não devem ser levadas em conta, em cálculos futuros, as correções que compuseram o termo de Chern-Simons. Caso contrário, incorreria-se no erro de usar em dobro a referida correção.

Por completeza, apresenta-se a seguir a expressão do propagador do campo de gauge válida para quaisquer valores de p^μ,

$$D^{\mu\nu}(p) = \frac{i\left(p^2 + \frac{e^2}{8\pi}G(p,m)\right)}{R(p,m,e)}\left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right) + \frac{\frac{e^2 m}{8\pi}(4-D)F(p,m)}{R(p,m,e)}\epsilon^{\mu\alpha\nu}p_\alpha - i\lambda\frac{p^\mu p^\nu}{(p^2)^2} \ , \quad (2.33)$$

onde

$$R(p,m,e) = -\left(p^2 + \frac{e^2 D}{8\pi}G(p,m)\right)^2 + \left(\frac{e^2(4-D)}{8\pi}\right)^2 F(p,m) \ . \quad (2.34)$$

As funções $F(p,m)$ e $G(p,m)$ são aquelas definidas em 2.12. Este propagador tem uma forma relativamente complicada, que dificulta a sua utilização em cálculos. Neste sentido, é conveniente usar, quando possível, a expressão aproximada 2.30,

favorecendo assim as situações que envolvem pequenos trimomentos.

Se na parte independente de λ em $D^{\mu\nu}(p)$ fosse mantida somente a contribuição dominante para pequenos trimomentos p^μ ter-se-ia

$$D^{\mu\nu}(p) = \frac{1}{\theta}\epsilon^{\mu\nu\rho}p_\rho/p^2 \,. \tag{2.35}$$

Por sua vez, esta expressão adicionada do termo de fixação de gauge corresponde ao progagador obtido da Lagrangiana 2.32 sem a parte de Maxwell, $-1/4F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$. Este é, justamente, o caso de uma teoria de Chern-Simons pura.

2.3 A energia potencial férmion-férmion

Foi apresentado na seção 1.4 um procedimento para obter a energia potencial efetiva entre duas partículas, partindo de uma teoria de campos. Este procedimento vai ser agora aplicado para encontrar a aproximação, em ordem mais baixa, para a energia potencial de interação entre dois férmions [9, 24].

A primeira etapa para obter a energia potencial está em encontrar a contribuição de ordem mais baixa à matriz T. O gráfico de Feynman responsável por essa contribuição é justamente aquele apresentado na figura 1.1. Sua expressão analítica está explicitada na fórmula 1.7. A correspondente contribuição à matriz de transição, usando 1.4, 1.6, e 1.7, é

$$T_{ba} = -i\left(\frac{m}{\sqrt{\overline{p}_1^2+m^2}}\frac{m}{\sqrt{\overline{p}_1'^2+m^2}}\frac{m}{\sqrt{\overline{p}_2^2+m^2}}\frac{m}{\sqrt{\overline{p}_2'^2+m^2}}\right)^{1/2}$$
$$\times(ie)^2\left[\overline{u}(p_1')\gamma^\mu u(p_1)\right]\left[\overline{u}(p_2')\gamma^\nu u(p_2)\right]$$

$$\times \left\{ \frac{-i}{q^2-\theta^2} \left[\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) - i\theta\epsilon_{\mu\nu\rho}\frac{q^\rho}{q^2} \right] - i\lambda \frac{q_\mu q_\nu}{(q^2)^2} \right\}, \qquad (2.36)$$

onde $q_\mu = p'_{1\mu} - p_{1\mu} = p_{2\mu} - p'_{2\mu}$. As partes de T_{ba} que contém $p_\mu p_\nu / p^2$ não contribuem para a matriz de transição. De fato, as expressões $q_\mu \overline{u}(p'_1)\gamma^\mu u(p_1)$ e $q_\nu \overline{u}(p'_2)\gamma^\nu u(p_2)$ são nulas, como podem ser verificadas através do uso das duas primeiras relações de 1.25. Na realidade, este fato expressa a conservação da corrente, $\partial_\mu \left[\overline{\Psi}(x)\gamma^\mu \Psi(x)\right] = 0$.

A aproximação não relativística de 2.36, até a primeira ordem nos momentos, pode ser obtida se for observado que

$$\sqrt{\overline{p}^2 + m^2} \simeq m \ , q^0 \simeq 0 \ , q^2 = q^\mu q_\mu \simeq -\overline{q}^2 \ \text{ e}$$

$$\overline{u}(p')\gamma^\mu u(p) \simeq$$

$$g^{\mu 0} + g^{\mu 1}\left[\frac{p^1 + p'^1 + i(p^2 - p'^2)}{2m}\right] + g^{\mu 2}\left[\frac{p^2 + p'^2 - i(p^1 - p'^1)}{2m}\right] . \qquad (2.37)$$

A verificação desta última aproximação está baseada no uso das matrizes gama 1.21 e do espinor 1.23. As relações acima fornecem

$$\begin{aligned}
&[\overline{u}(p'_1)\gamma^\mu u(p_1)]\,[\overline{u}(p'_2)\gamma_\mu u(p_2)] \simeq 1 \quad \text{e} \\
&[\overline{u}(p'_1)\gamma^\mu u(p_1)]\,[\overline{u}(p'_2)\gamma^\nu u(p_2)]\,\epsilon_{\mu\nu\rho}q^\rho \simeq \\
&\quad [\overline{u}(p'_1)\gamma^2 u(p_1)][\overline{u}(p'_2)\gamma^0 u(p_2)]q^1 \\
&-[\overline{u}(p'_1)\gamma^0 u(p_1)][\overline{u}(p'_2)\gamma^2 u(p_2)]q^1 \\
&+[\overline{u}(p'_1)\gamma^0 u(p_1)][\overline{u}(p'_2)\gamma^1 u(p_2)]q^2 \\
&-[\overline{u}(p'_1)\gamma^1 u(p_1)][\overline{u}(p'_2)\gamma^0 u(p_2)]q^2 \simeq \\
&i(\overline{q}^2 - 2i\overline{q} \times \overline{p})/m \ , \qquad (2.38)
\end{aligned}$$

onde $\overline{p}$ é o momento linear relativo entre os dois férmions, $\overline{p} = (\overline{p}_1 - \overline{p}_2)/2$. Torna-se imediato concluir agora que, a expressão resultante para o elemento matriz de transição T_{ba} é

$$T_{ba} = -\left(\frac{e^2}{\overline{q}^2+\theta^2} - \frac{\theta e^2}{m}\frac{1}{\overline{q}^2+\theta^2} + \frac{2i\theta e^2}{m}\frac{\overline{q}\times\overline{p}}{\overline{q}^2(\overline{q}^2+\theta^2)}\right) , \quad (2.39)$$

quando somente os termos até a primeira ordem nos momentos são considerados.

Deve ser notado na expressão de T_{ba} que, $\overline{q}^2$ pode inclusive assumir valores da ordem de θ^2. Se não acontecesse isso, por consistência teriamos que expandir 2.39 em série de Taylor na variável $\overline{q}$. O fato de $|\overline{q}|$ poder ser da ordem de $|\theta|$ implica em $|\theta| \ll m$, já que a expansão não relativística pressupõe $|\overline{q}| \ll m$. Resumindo, está implícito na construção da expressão 2.39 que a massa do bóson de gauge é bem menor do que a massa do férmion.

O elemento de matriz $\mathcal{T}_{ba}$, em sua primeira aproximação, conforme a expressão 1.13, é

$$\mathcal{T}_{ba} = -\int d^2\overline{x}_1 d^2\overline{x}_2 e^{-i(\overline{p}'_1.\overline{x}_1+\overline{p}'_2.\overline{x}_2)} V(\overline{x},\hat{\overline{p}}_1,\hat{\overline{p}}_2) e^{i(\overline{p}_1.\overline{x}_1+\overline{p}_2.\overline{x}_2)} , \quad (2.40)$$

onde $\overline{x} = \overline{x}_1 - \overline{x}_2$, $\hat{\overline{p}}_1 = -i\partial/\partial\overline{x}_1$ e $\hat{\overline{p}}_2 = -i\partial/\partial\overline{x}_2$. Esta sendo suposto que a energia potencial só depende da distância relativa e dos momentos em consonância com a invariância por translação da eletrodinâmica 3D. Além do mais, é conveniente tomar os operadores $\hat{\overline{p}}$'s arranjados a direita dos operadores $\overline{x}$, em cada parte da energia potencial. Devido a presença da simetria de translação da teoria, é natural empregar as variáveis $(\overline{x}_1 + \overline{x}_2)/2$ e $\overline{x}$ ao invés de $\overline{x}_1$ e $\overline{x}_2$ em 2.40. A integração em $(\overline{x}_1 + \overline{x}_2)/2$ fornece uma delta de Dirac, que expressa a

conservação do momento. Portanto, usando a relação 1.11, conclui-se que

$$T_{ab} = -\int d^2\overline{x} e^{-i(\overline{q}.\overline{x})} V(\overline{x}, \overline{p}_1, \overline{p}_2). \tag{2.41}$$

A energia potencial efetiva entre dois férmions, $V(\overline{x}, \hat{\overline{p}})$, na aproximação de ordem mais baixa, é obtida impondo a igualdade entre 2.39 e 2.41 (conforme a primeira relação de 1.17). Por sua vez, esta igualdade envolve a transformada de Fourier da energia potencial, fazendo com que seja necessário tomar uma transformada inversa de Fourier para obter

$$V(\overline{x}, \overline{p}) = \int \frac{d^2\overline{x}}{(2\pi)^2} e^{i\overline{q}.\overline{x}} \left[\left(1 - \frac{\theta}{m}\right) \frac{e^2}{\overline{q}^2 + \theta^2} + \frac{2i\theta e^2}{m} \frac{\overline{q} \times \overline{p}}{\overline{q}^2(\overline{q}^2 + \theta^2)} \right] . \tag{2.42}$$

Neste ponto deve ser feita uma observação importante, está sendo suposto que o momento $\overline{p}$ é independente do vetor de integração $\overline{q}$.

A expressão final da energia potencial é obtida por intermédio do cálculo de duas integrais[3]. A primeira delas fornece uma função de Bessel modificada de ordem zero,

$$\int \frac{d^2\overline{q}}{(2\pi)^2} \frac{e^{i\overline{q}.\overline{x}}}{\overline{q}^2 + \theta^2} = \frac{1}{2\pi} K_0(|\theta| r) , \tag{2.43}$$

onde r é o módulo de $\overline{x}$. Este resultado pode ser verificado, bastando para tal usar coordenadas polares, q e φ. A integral na variável angular está baseada numa representação integral para a função de Bessel de ordem zero,

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \, e^{iqr\, cos\varphi} = 2\pi J_0(qr) . \tag{2.44}$$

[3]As propriedades das funções especiais e integrais usadas neste capítulo estão todas tabeladas, podendo ser encontradas nas referências [47, 48].

Por sua vez, a parte radial advém da igualdade

$$\int_0^\infty dq\, \frac{qJ_0(qr)}{q^2+\theta^2} = K_0(|\theta|r)\,. \tag{2.45}$$

A segunda integral em 2.42 pode ser calculada a partir de 2.43, caso seja feita uma decomposição em frações parciais,

$$\int \frac{d^2\overline{q}}{(2\pi)^2}\frac{e^{i\overline{q}.\overline{x}}\overline{q}}{\overline{q}^2(\overline{q}^2+\theta^2)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int \frac{d^2\overline{q}}{(2\pi)^2}e^{i\overline{q}.\overline{x}}\left[\frac{\overline{q}/\theta^2}{\overline{q}^2+\varepsilon^2} - \frac{\overline{q}/\theta^2}{\overline{q}^2+\theta^2}\right]. \tag{2.46}$$

Por outro lado, a derivação dos dois lados da igualdade 2.43 conduz a

$$\int \frac{d^2\overline{q}}{(2\pi)^2}\frac{e^{i\overline{q}.\overline{x}}\overline{q}}{\overline{q}^2+\theta^2} = -i\frac{\partial}{\partial\overline{x}}\frac{K_0(|\theta|r)}{2\pi} = \frac{i}{2\pi}K_1(|\theta|r)|\theta|\frac{\overline{x}}{r}. \tag{2.47}$$

Nesta última passagem foi usada a identidade $dK_0(w)/dw = -K_1(w)$. No cáculo da integral com $\varepsilon \to 0$ é importante ter em mente que $K_0(w) \simeq -ln(w)$ ou $K_1(w) \simeq 1/w$, as quais valem para w bem pequeno. A partir destes fatos é possível concluir que

$$\int \frac{d^2\overline{q}}{(2\pi)^2}\frac{e^{i\overline{q}.\overline{x}}\overline{q}}{\overline{q}^2(\overline{q}^2+\theta^2)} = \frac{i}{2\pi\theta^2r^2}\left[1-|\theta|rK_1(|\theta|r)\right]\overline{x}. \tag{2.48}$$

A expressão final para a energia potencial é então [24]

$$V(\overline{x},\overline{p}) = \frac{e^2}{2\pi}\left(1-\frac{\theta}{m}\right)K_0(|\theta|r) - \frac{e^2\left[1-|\theta|rK_1(|\theta|r)\right]}{\pi m\theta r^2}\overline{x}\times\overline{p}\,. \tag{2.49}$$

É interessante notar que, se θ fosse muito pequeno o termo proporcional a $K_0(|\theta|r)$ forneceria numa energia potencial igual a $-e^2/(2\pi)ln(r)$. Este seria o caso de uma energia potencial

Coulombiana repulsiva entre dois férmions em duas dimensões espaciais. Por outro lado, uma energia potencial proporcional a $K_0(|\theta|r)$ viria ser o correspondente bidimensional da energia potencial de Yukawa.

Um ponto merece ser chamado atenção: se fosse calculada a energia potencial entre um férmion e um anti-férmion sua expressão seria igual a 2.49 multiplicado por (-1).

Por último, uma questão de notação, a energia potencial não será mais referida por $V(\overline{x}, \hat{\overline{p}})$ mas sim como $V(r, L)$, objetivando ressaltar que ela é uma função do módulo do vetor posição e do momento angular, $L = \overline{x} \times \overline{p}$.

2.4 Estados ligados (análise qualitativa)

O objetivo desta seção consiste em estudar a possibilidade da existência de estados ligados entre férmions idênticos, analisando apenas a forma da energia potencial efetiva que vem da equação de Schrodinger radial.

Num estudo de estados ligados o importante é a dinâmica do movimento relativo entre as partículas do sistema. Nesta situação, evidentemente, a correspondente Hamiltonia deve ser invariante pela escolha da origem do referencial. Este é caso da presente aplicação, cuja equação de Schrodinger vem a ser

$$\left\{\frac{-1}{m}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right]+V\left(r,-i\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\right\}\Psi(\overline{x})=E\Psi(\overline{x}), \tag{2.50}$$

onde a expressão da energia potencial está dada na fórmula 2.49.

A forma a ser usada para uma auto-função da equação anterior é $\Psi(\overline{x}) = R(r)\Phi(\varphi)$, sendo que função $\Phi(\varphi)$ deve ser auto-função do operador momento angular, ou seja, $\Phi(\varphi) = exp(il\varphi)$. Já, a unicidade da função $\Psi(\overline{x})$ implica que $\Phi(\varphi)$ tenha um período de 2π. Isto leva a concluir que o auto-valor do momento angular, l, só possa assumir valores inteiros. Na realidade, a restrição sobre os possíveis valores l é ainda maior. A função de onda entre dois férmions idênticos deve ser anti-simétrica pela permutação dos mesmos, obrigando que $exp(il\varphi)$ mude de sinal quando $\phi \to \phi \pm \pi$, pois $R(r)$ é par. Conclui-se, então, que o módulo de l deve ser ímpar.

O uso da função de onda $\Psi(\overline{x}) = R(r)\ exp(il\varphi)$ na equação 2.50 implica em

$$\left[-\frac{1}{m}\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right) + V_{ef}(r,l)\right] R(r) = E\ R(r)\ , \qquad (2.51)$$

onde

$$\begin{aligned} V_{ef}(r,l) &= \frac{e^2}{2\pi}\left(1 - \frac{\theta}{m}\right) K_0\left(|\theta| r\right) \\ &- \frac{e^2 l}{\pi m \theta r^2}\left[1 - |\theta| r K_1\left(|\theta| r\right)\right] + \frac{l^2}{m r^2}. \end{aligned} \qquad (2.52)$$

Para as análises que serão feitas no restante do capítulo é conveniente reescrever esta equação radial em termos de grandezas adimensionais. As variáveis e parâmetros adimensionais a serem empregados são definidos pelas expressões

$$w = |\theta| r\ ,\quad \alpha = e^2/(\pi|\theta|)\ ,\quad \beta = m/|\theta| \ \text{ e } \ E = (\theta^2/m)\mathcal{E}\ . \qquad (2.53)$$

A equação radial adquire, portanto, a forma

$$\left[-\left(\frac{d^2}{dw^2} + \frac{1}{w}\frac{d}{dw}\right) + \mathcal{V}(w,l)\right] R(w) = \mathcal{E}\ R(w)\ , \qquad (2.54)$$

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
2205
Ex. 1
INSTITUTO DE FÍSICA

onde

$$\mathcal{V}(w,l) = \frac{\alpha}{2}[-\epsilon(\theta)+\beta]K_0(w) - \frac{\alpha l}{w^2}\epsilon(\theta)[1-wK_1(w)] + \frac{l^2}{w^2}\,. \tag{2.55}$$

O $\epsilon(\theta)$ representa o sinal de θ. A energia potencial acima comporta-se como l^2/w^2, quando w é pequeno. Por outro lado, $\mathcal{V}(r,l)$ aproxima-se de $l(l+\alpha)/w^2$ quando w for grande. Estas propriedades de $\mathcal{V}(r,l)$ advém, é claro, das expressões limites que $K_0(w)$ e $K_1(w)$ adquirem. $K_0(w) \simeq -ln(w)$ e $K_1(w) \simeq 1/w$ para w muito pequeno; $K_0 \simeq K_1 \simeq \sqrt{\pi/(2w)}e^{-w}$, com w grande.

Até este ponto da análise não foi necessário explicitar o valor de θ ($\theta = -e^2/(4\pi)$), porém de agora em diante ele vai passar a ser empregado. O valor de alfa fica, desta forma, fixado, $\alpha = 4$, a expressão 2.55 passa a ser

$$\mathcal{V}(w,l) = 2[1+\beta]K_0(w) + \frac{4l}{w^2}[1-wK_1(w)] + \frac{l^2}{w^2}\,. \tag{2.56}$$

Além do mais, é bom relembrar que a constante beta desta energia potencial satisfaz a condição $\beta \gg 1$, pois $m \gg |\theta|$.

Vai ser mostrado que a existência de estados ligados implica em $l=-1$ ou $l=-3$. Realmente, a derivada da função $\mathcal{V}(w,l)$ é dada por

$$\frac{\partial\mathcal{V}(w,l)}{\partial w} = -\frac{2l(l+4)}{w^3} + \frac{4l}{w}K_0(w) - \left[2(1+\beta) - \frac{8l}{w^2}\right]K_1(w)\,. \tag{2.57}$$

Para l positivo ou negativo e fora do intervalo [-3,-1] esta derivada é negativa definida e portanto $\mathcal{V}(w,l)$ não apresenta mínimo local. Portanto, para esses valores de l não existem estados ligados. Por outro lado, para $l=-1$ ou -3 $\mathcal{V}(w,l)$

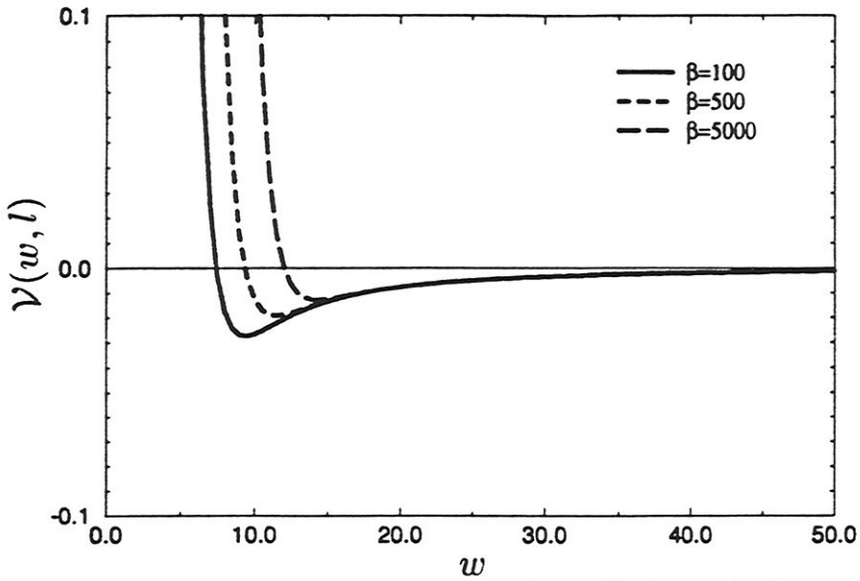


Figura 2.4: A energia potencial para três valores distintos de β com $l = -1$.

tende a zero com valores negativos, como $l(l+4)/w^2$, quando w é grande. Na seção seguinte, usando o método WKB, prova-se que isto é suficiente para garantir a existência de estados ligados.

Algumas das formas concretas para a energia potencial 2.56 estão expostas na figura 2.4. Deve ser ressaltado ainda que, o termo $-\alpha l K_1(w)/w$ contribui muito pouco para a energia potencial efetiva. Uma pequena análise numérica de $\mathcal{V}(r,l)$ mostra isso claramente. Sendo assim, os casos $l = -1$ e $l = -3$ formam um dupleto quase degenerado. A situação $l = -1$ corresponde a menor energia, já que $\alpha K_1(w)/w < 3\alpha K_1(w)/w$.

Esta análise sobre a forma da energia potencial efetiva fornece um indicativo para a existência de estados ligados do tipo férmion-férmion. Neste sentido, a próxima seção exibe um estudo bem mais completo sobre a presença de estados ligados.

2.5 Análise WKB da equação radial

A dificuldade de resolver a equação 2.54 motiva fazer um estudo aproximado da mesma. Além do mais, a energia potencial, $\mathcal{V}(w,l)$, tem um comportamento bastante suave. São justamente estes fatos que fazem da aproximação semi-clássica (WKB) [49, 50] uma ferramenta bastante razoável para o estudo de estados ligados férmion-férmion.

A análise WKB da equação 2.54 é facilmente conseguida se for eliminado o seu termo de primeira derivada. Objetivando tal tarefa, deve-se redefinir $R(w)$, isto é, $R(w) = w^{-1/2}\mathcal{R}(w)$. A referida equação pode ser, então, reduzida a uma equação de Schrodinger unidimensional típica,

$$\left[-\frac{d^2}{dw^2} + \mathcal{V}_{ef}(w,l)\right]\mathcal{R}(w) = \mathcal{E}\mathcal{R}(w) , \tag{2.58}$$

onde

$$\mathcal{V}_{ef}(w,l) = -\frac{1}{4w^2} + \mathcal{V}(w,l) . \tag{2.59}$$

A condição de quantização de Bohr-Sommerfeld para a equação 2.58,

$$\int_a^b p(w)dw = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi , \tag{2.60}$$

quando resolvida para $\mathcal{E}$, fornece os valores aproximados para as energias dos estados ligados. Nesta fórmula, n é um número inteiro positivo (número quântico radial) e $p(w) = \sqrt{\mathcal{E} - \mathcal{V}_{ef}(w,l)}$. Os limites de integração a e b ($b > a$), por sua vez, representam os pontos de retorno do correspondente movimento clássico, que são obtidos através das duas soluções da equação $\mathcal{E} - \mathcal{V}_{ef}(w,l) = 0$.

Agora vai ser verificado que um comportamento assintótico (w grande) do tipo $-g/w^2$ ($g > 0$), para uma energia potencial genérica $\mathcal{V}_g(w)$, é suficiente para garantir a presença de estados ligados, segundo a aproximação WKB. Este é exatamente o comportamento da energia potencial de interesse, $\mathcal{V}_{ef}(w, l)$. Mostrar que existem estados ligados para esse problema não é difícil, pois basta constatar um crescimento indefinido de $\int_a^b p(w)dw$ a medida que b vai aumentando.

A integral $\int_a^b p(w)dw$ pode ser decomposta em duas partes, por hipótese. A primeira leva em conta a faixa de valores da variável w em que a energia potencial não pode ser aproximada por $-g/w^2$. A outra parte diz respeito a região onde $-g/w^2$ é uma boa aproximação para $\mathcal{V}_g(w)$. Estas observações estão resumidas na expressão

$$\int_a^b p(w)dw = \int_a^c p(w)dw + g^{1/2}\int_c^b \sqrt{\frac{1}{b^2}+\frac{1}{w^2}}dw = \int_a^c p(w)dw$$
$$+ g^{1/2}\left\{\sqrt{2}-\sqrt{b^{-2}+c^{-2}}\,c+\log\left[\frac{b\left(1+\sqrt{b^{-2}+c^{-2}}\,c\right)}{\left(1+\sqrt{2}\right)c}\right]\right\}. \quad (2.61)$$

O número c refere-se, justamente, ao ponto a partir do qual $-g/w^2$ aproxima suficientemente bem a energia potencial $\mathcal{V}_g(w)$. Nesta passagem foi usado, ainda, que $\mathcal{E} = \mathcal{V}_g(b) = -g/b^2$.

Não é difícil verificar, agora, a presença de estados ligados. De fato, se $1/b^2$ for nulo, b será infinito e a segunda integral divergirá. Aliás, esta integral é monotonicamente crescente com o aumento de b. Por outro lado, a primeira integral é finita. Esta duas últimas observações garantem, portanto, a existência de estados ligados, pois b pode ser ajustado de maneira a satisfazer 2.60. Mais do que isso, fica claro que podem haver infinitos estados ligados, segundo a aproximação semi-clássica.

A integral que aparece na fórmula de quantização de Bohr-Sommerfeld (2.60) não é fácil de ser calculada exatamente, devido a forma da energia potencial 2.55. Há, entretanto, a possibilidade de encontrar numericamente o valor da referida integral, que envolve três etapas. A primeira etapa está em resolver a equação tanscendental que fornece os limites de integração a e b, quando uma energia é selecionada. A segunda é o cálculo da integral com o uso dessa energia. E por último vem a procura do valor da energia que que satisfaça a equação de Bohr-Sommerfeld 2.60. O feitio deste cálculo possibilitou encontrar vários possíveis valores aproximados para $\mathcal{E}$ do estado fundamental, quando β assume diferentes valores. Além do mais, é calculado o valor correspondente da energia do estado fundamental, quando m assume o valor da massa do elétron ($m = 0.511$ MeV) . O valor desta energia pode ser convertido para escala de temperatura, fornecendo uma estimativa da temperatura de transição entre a presença ou não de pares férmion-férmion, ou seja, a existência ou não de um estado supercondutor. Este dados estão expostos na tabela 2.1. É fácil ver da tabela 2.1 que uma escolha conveniente de β pode fornecer uma gama de valores muito grande, inclusive aqueles compatíveis com a temperatura de trasição de fase para os supercondutores a altas temperaturas.

β	$\mathcal{E}$	$E(10^{-3}\text{eV})$	T(K)
100	-0.0049	-25×10	29×10^2
250	-0.0038	-31	36×10^1
300	-0.0036	-20	24×10^1
350	-0.0035	-14	17×10^1
400	-0.0034	-11	12×10^1
500	-0.0032	-6.5	75
750	-0.0029	-2.6	30
1000	-0.0027	-1.4	16
2500	-0.0023	-0.19	2.1
5000	-0.0020	-0.041	0.47

Tabela 2.1

Capítulo 3

Correções de altas ordens

Neste capítulo vão ser descritos os cálculos referentes as contribuições para a amplitude de espalhamento com troca de dois bósons de gauge virtuais. Inicialmente, observa-se que contrariamente ao caso do capítulo anterior (troca de um bóson de gauge) a amplitude de espalhamento é uma função complicada da energia. A extração do potencial a partir de tal amplitude não é livre de ambigüidades, que torna duvidosa a aplicação deste método (essas ambigüidades têm sido discutidas em várias referências [54, 55, 56]). Apesar disso, as técnicas e resultados encontrados neste capítulo são de utilidade para a determinação da matriz S de dois corpos em modelos, onde a expansão perturbativa possa ser empregada sistematicamente (o modelo de Maxwell-Chern-Simons por exemplo). Em particular vai ser determinado o momento magnético anômalo do férmion.

Os gráficos a serem analisados no presente capítulo são aqueles que correspondem ao espalhamento férmion-férmion e contém quatro vértices. Desses os que contribuem para a auto-

energia do férmion não serão estudados, pois eles entram somente na renormalização de massa. Não será considerado, também, o gráfico que apresenta correção para o propagador do bóson de gauge. Enfim, as figuras 3.1, 3.2 e 3.3 mostram os gráficos que serão calculados.

3.1 Correção de vértice

Nesta seção é estudada a correção de vértice, que contém um bóson de gauge virtual. Esta correção traz contribuições adicionais para o momento magnético do férmion e para a energia potencial férmion-férmion.

Aqui, a correção de vértice, Λ^μ, que está representada na figura 3.4, é analisada na concha de massa. Sendo assim,

$$\begin{aligned}\Lambda^\mu &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[\overline{u}(p_1^{'})(ie\gamma^\alpha)S(p_1^{'}-k)\right.\\ &\times \left.(e\gamma^\mu)S(p_1-k)(ie\gamma^\beta)u(p_1)\right]D_{\alpha\beta}(k)\,, \qquad (3.1)\end{aligned}$$

ou seja[1],

$$\begin{aligned}\Lambda^\mu = -ie^3\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}&\left[\overline{u}(p_1^{'})\gamma^\alpha\left(\frac{\not{p}_1^{'}-\not{k}+m}{(p_1^{'}-k)^2-m^2}\right)\gamma^\mu\right.\\ &\times\left.\left(\frac{\not{p}_1-\not{k}+m}{(p_1-k)^2-m^2}\right)\gamma^\beta u(p_1)\right]\\ &\times\left[\frac{1}{k^2-\theta^2}\left(g_{\alpha\beta}-i\theta\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{k^\gamma}{k^2}\right)+\left(\frac{\lambda}{k^2}-\frac{1}{k^2-\theta^2}\right)\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right]. \qquad (3.2)\end{aligned}$$

[1]Neste capítulo empregaremos o propagador do campo de gauge simplificado 2.30 ao invés da expressão 2.33.

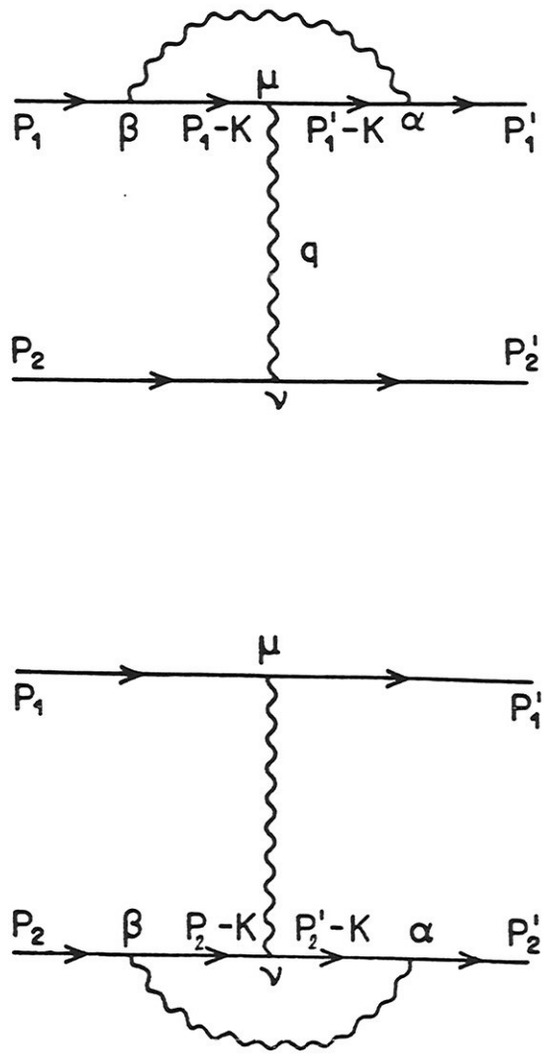


Figura 3.1: Gráficos que contém as primeiras correções de vértice para o espalhamento férmion-férmion.

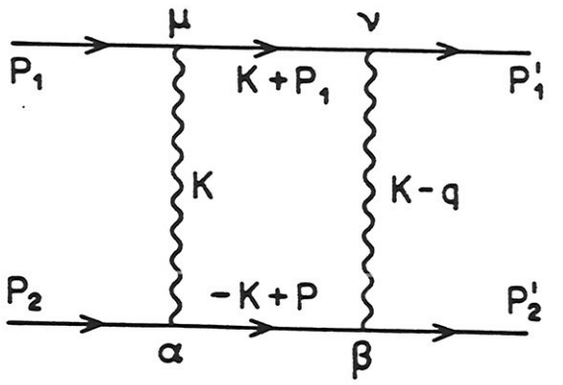


Figura 3.2: Gráfico tipo caixa direto.

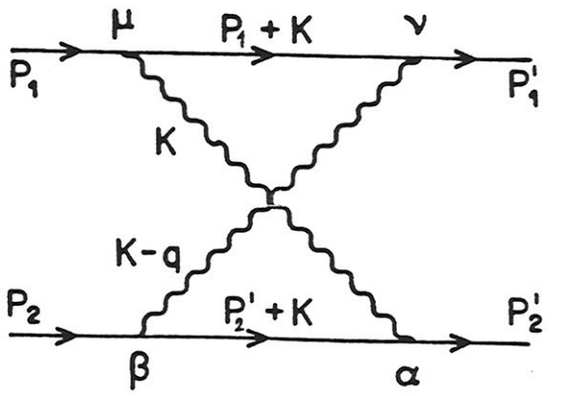


Figura 3.3: Gráfico tipo caixa cruzado.

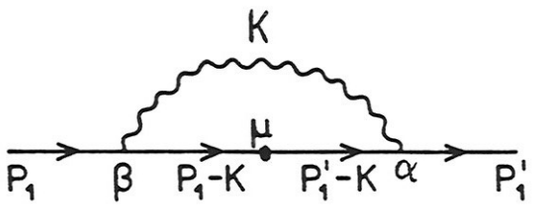


Figura 3.4: Correção de vértice com bóson de gauge virtual.

Como descrito no Apêndice A, o cálculo dessa expressão segue os passos usuais. O integrando é simplificado usando que $u(p_1)$ e $\overline{u}(p_1^{'})$ satisfazem a equação de Dirac. Para efetuar a integração em k^μ é usada a expressão paramétrica de Feynman. Simplificações adicionais provêm do fato de que o cálculo é restrito a termos de primeira ordem no momento transferido.

3.1.1 O momento magnético do férmion

É mostrado agora o quanto a correção de vértice contribui para o momento magnético do férmion.

No espaço dos momentos, o termo de interação dos campos fermiônico e de gauge é representado por

$$e\left[\overline{u}(p_1^{'})\,\gamma^\mu\,u(p_1)\right]A_\mu(q)\ , \tag{3.3}$$

onde $q^\mu = p_1^{'\mu} - p_1^\mu$. Desta expressão, é possível obter o momento magnético do férmion (na ordem dominante), que vem do fator que multiplica o campo magnético e a matriz de spin. Neste sentido, é importante separar a fórmula 3.3 em partes, de tal maneira que seja explicitada a dependência no campo magnético. Isto é conseguido usando a identidade de Gordon (A.26),

$$\overline{u}(p_1^{'})\gamma^\mu u(p_1) = \overline{u}(p_1^{'})\frac{P^\mu}{2m}u(p_1) + \overline{u}(p_1^{'})\frac{iq_\alpha\sigma^{\alpha\mu}}{2m}u(p_1)\ , \tag{3.4}$$

onde $P^\mu = p_1^{'\mu} + p_1^\mu$ e $\sigma^{\alpha\mu} = -i[\gamma^\alpha, \gamma^\mu]/2 = -\epsilon^{\alpha\mu\rho}\gamma_\rho$. O uso desta relação em 3.3 possibilita separar o termo que contém a parte de spin,

$$\frac{-e}{2m}\left[\overline{u}(p_1^{'})\,(iq_\alpha\epsilon^{\alpha\mu\rho}\gamma_\rho)\,u(p_1)\right]A_\mu\ . \tag{3.5}$$

Esta expressão, quando restrita à situação onde está presente somente um campo magnético constante, é

$$\frac{-e}{2m}\left[\overline{u}(p_1^{'})\gamma_0\, u(p_1)\right]\left[i(q_1A_2 - q_2A_1)\right]. \tag{3.6}$$

O primeiro fator desta fórmula é, então, definido como o momento magnético do férmion, μ,

$$\mu = \frac{-e}{2m} \tag{3.7}$$

A correção de vértice, calculada no apêndice A, produz uma contribuição extra, $\delta\mu$, para o momento magnético do férmion. De fato, das partes que compõem a correção de vértice, apresentada na fórmula A.60 do apêndice A, a única que entra no cômputo do momento magnético do férmion é aquela proporcional a $q_\lambda\, \epsilon^{\lambda\mu\rho}\, \gamma_\rho$. Separando desta expressão o termo proporcional ao $\overline{u}(p_1^{'})\,(iq_\alpha\epsilon^{\alpha\mu\rho}\gamma_\rho)\, u(p_1)$, obtem-se que

$$\delta\mu = F_2/e\,. \tag{3.8}$$

onde

$$F_2 = \frac{-e^3}{16\pi m^2}\left\{\left[-3 + 3\frac{|\theta|}{m} + \frac{4 - 3\left(\frac{|\theta|}{m}\right)^2}{2}\log\left(\frac{2+\frac{|\theta|}{m}}{\frac{|\theta|}{m}}\right)\right]\right. \tag{3.9}$$

$$\left. + \frac{\theta}{2m}\left[4 - \frac{\left(\frac{|\theta|}{m}\right)^2}{2} + \frac{\left(-12 + \left(\frac{|\theta|}{m}\right)^2\right)\frac{|\theta|}{m}}{2\left(2+\frac{|\theta|}{m}\right)} + \frac{8 + \left(\frac{|\theta|}{m}\right)^2}{\frac{|\theta|}{m}} + 8\log\left(\frac{\frac{|\theta|}{m}}{2+\frac{|\theta|}{m}}\right)\right]\right\},$$

conforme a fórmula A.62. Como está exposto no apêndice A, o primeiro e segundo termos entre chaves desta expressão vem das contribuições do propagador do bóson de gauge que são

proporcionais a $g_{\alpha\beta}$ e $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$, respectivamente. Neste sentido, é interessante ressaltar que se $|\theta|/m$ for pequeno as duas partes contribuem para $\delta\mu$ (a primeira parte tem uma parcela proporcional a $log(|\theta|/m)$), porém para $|\theta|/m$ grande somente a última parcela torna-se relevante.

3.1.2 A correção para a energia potencial

A contribuição para a energia potencial férmion-férmion devido a primeira correção de vértice vem dos gráficos da figura 3.1.

A forma analítica do primeiro gráfico da figura 3.1 pode ser escrita de maneira a ressaltar a correção de vértice, Λ^μ, isto é,

$$M_{ba} = i^2 e \Lambda^\mu \left[\overline{u}(p_2^{'})\, \gamma^\nu\, u(p_2)\right] D_{\mu\nu}(q)\ , \tag{3.10}$$

onde

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\overline{u}(p_1^{'})\, (ie\gamma^\alpha)\, S(p_1^{'} - k)\right. \\ &\times \left.(e\gamma^\mu)\, S(p_1 - k)\, (ie\gamma^\beta)\, u(p_1)\right] D_{\alpha\beta}(k)\ . \end{aligned} \tag{3.11}$$

Conforme está exposto no final do apêndice A, a única parte de Λ^μ que deve ser considerada num processo é

$$\left[\overline{u}(p_1^{'})\, (-iq_\alpha \epsilon^{\alpha\mu\rho}\gamma_\rho\, u(p_1)\right] F_2\, . \tag{3.12}$$

Desta forma, somente esta expressão vai ser usada para representar Λ^μ em 3.10, ou seja,

$$M_{ba} = ie^2 F_2 \left[\overline{u}(p_1^{'})(-iq_\alpha \epsilon^{\alpha\mu\rho}\gamma_\rho u(p_1)\right]\left[\overline{u}(p_2^{'})\gamma^\nu u(p_2)\right] D_{\mu\nu}. \tag{3.13}$$

O elemento de matriz de transição pode, então, ser escrito como

$$T_{ba} = -i\left(\frac{m}{\sqrt{\overline{p}_1^2+m^2}}\frac{m}{\sqrt{\overline{p}_1'^2+m^2}}\frac{m}{\sqrt{\overline{p}_2^2+m^2}}\frac{m}{\sqrt{\overline{p}_2'^2+m^2}}\right)^{1/2}$$
$$\times\, ie^2F_2\left[\overline{u}(p_1')(-iq_\alpha\epsilon^{\alpha\mu\rho}\gamma_\rho u(p_1)\right]\left[\overline{u}(p_2')\gamma^\nu u(p_2)\right]$$
$$\times\left\{\frac{-i}{q^2-\theta^2}\left[\left(g_{\mu\nu}-\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)-i\theta\epsilon_{\mu\nu\rho}\frac{q^\rho}{q^2}\right]-i\lambda\frac{q_\mu q_\nu}{(q^2)^2}\right\}. \quad (3.14)$$

Os termos desta expressão proporcionais a $q^\mu q^\nu$ são nulos, devido a conservação da corrente ou, alternativamente, por causa da anti-simetria do $\epsilon^{\alpha\mu\rho}$.

A contribuição que cada um dos gráficos da figura 3.1 dá, em separado, para a energia potencial é a mesma, pois um pode ir no outro pela renomeação de seus parâmetros. Portanto, o limite não relativístico de $2T_{ba}$ deve ser calculado para encontrar a correspondente energia potencial, $V_v(\overline{x}, L)$. Assim, o emprego das fórmulas 2.37 permite verificar que

$$V_v(\overline{x}, L) = \int\frac{d^2\overline{q}}{(2\pi)^2}e^{i\overline{q}.\overline{x}}\,(-2T_{ba}) \quad (3.15)$$
$$= \int\frac{d^2\overline{q}}{(2\pi)^2}(2F_2)\frac{e^2}{m}\,e^{i\overline{q}.\overline{x}}\left(-\frac{\theta/m}{\overline{q}^2+\theta^2}-\frac{1}{m^2}\frac{\overline{q}^2}{\overline{q}^2+\theta^2}+\frac{i}{m^2}\frac{\overline{q}\times\overline{p}}{\overline{q}^2+\theta^2}\right).$$

O cálculo desta integral segue a mesma metodologia que foi usada para a energia potencial apresentada na seção 2.3, desta forma apresentamos somente o resultado final,

$$V_v(\overline{x}, L) = \frac{e^2}{8\pi}\left(\frac{e^2}{m}\right)\frac{F_2}{e^3}\left\{\frac{1}{2\pi}K_0(|\theta|r)\right. \quad (3.16)$$
$$\left. -\frac{1}{m^2}\left[\delta^2(\overline{x})-\frac{\theta^2}{2\pi}K_0(|\theta|r)\right]+\frac{|\theta|}{m^2\pi\, r}K_1(|\theta|r)\,L\right\}.$$

Note a presença da função delta. Em duas dimensões ela é uma fonte problema, implicando que o operador H não é auto-adjunto. Aqui, o coeficiente que a multiplica é pequeno, possibilitando tratá-la perturbativamente, como no caso da correção hiperfina do positrônio. Outra característica importante da energia potencial é que ela decai exponencialmente com $|\theta|r$ grande, refletindo o fato de 3.11 não apresentar divergência motivada por $q^\mu \to 0$.

3.2 Troca de dois bósons de gauge

Passaremos, agora, ao cálculo das contribuições advindas da troca de dois bósons de gauge, que correspondem aos gráficos das figuras 3.2 e 3.3. Como a soma das amplitudes desses gráficos é invariante de gauge, no que segue iremos omitir os termos dependentes de gauge em 1.6. Contrariamente ao caso da amplitude de vértice, o cálculo desses diagramas é muito complexo. Dessa forma, calcularemos explicitamente apenas a contribuição assintótica[2] para $q^\mu \to 0$. Mais precisamente, iremos procurar contribuições proporcionais a $\log(\overline{q}^2/m^2)$ para $\overline{q}$ pequeno. Por simplicidade usaremos o sistema de centro de massa tal que $\overline{p}_2 = -\overline{p}_1$, $\overline{p}_2^{'} = -\overline{p}_1^{'}$ e $p_1^0 = p_2^0 = p_1^{'0} = p_2^{'0} \simeq m$.

Vamos nos concentrar inicialmente no gráfico direto (d). A

[2]Apesar de tratarmos esta situação mais simplificada, o trabalho algébrico ainda é muito grande, por causa disso optamos pelo uso do programa *Mathematica* [51].

correspondente amplitude de espalhamento é dada por

$$M_{ba}^{(d)} = (ie)^4 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, t^{\nu\mu}(p_1', p_1, k) D_{\mu\alpha}(k) D_{\beta\nu}(k-q)\, t^{\beta\alpha}(p_2', p_2, -k), \tag{3.17}$$

$$t^{\nu\mu}(p', p, k) = i\bar{u}(p')\gamma^\nu \frac{(\not{k} + \not{p} + m)}{k^2 + 2p\cdot k}\gamma^\mu u(p). \tag{3.18}$$

A análise desta expressão torna-se mais sistemática escrevendo,

$$M_{ba}^{(d)} = M_{gg}^{(d)} + M_{g\epsilon}^{(d)} + M_{\epsilon g}^{(d)} + M_{\epsilon\epsilon}^{(d)}, \tag{3.19}$$

onde os índices inferiores estão numa correspondência óbvia com os termos resultantes da multiplicação dos propagadores dos dois bósons de gauge em (3.17).

Por inspeção vemos que a parte contendo dois tensores métricos, $M_{gg}^{(d)}$, é uma função analítica de q^μ e portanto não contribui.

Agora, o integrando em $M_{g\epsilon}^{(d)} + M_{\epsilon g}^{(d)}$ é

$$ie^4\,\theta \left[\frac{g_{\mu\alpha}\epsilon_{\beta\nu\sigma}(k-q)^\sigma}{(k^2-\theta^2)[(k-q)^2-\theta^2](k-q)^2} + \frac{g_{\beta\nu}\epsilon_{\mu\alpha\rho}k^\rho}{[(k-q)^2-\theta^2](k^2-\theta^2)k^2} \right] \times t^{\nu\mu}(p_1', p_1, k) t^{\beta\alpha}(p_2', p_2, -k). \tag{3.20}$$

Para $\overline{q}$ pequeno a divergência dominante é logarítmica e vem dos termos no numerador de $t^{\nu\mu}\, t^{\beta\alpha}$ que são independentes de k, ou seja,

$$-4ie^4\theta p_1^\mu p_2^\alpha \frac{[\bar{u}(p_1')\gamma^\nu u(p_1)][\bar{u}(p_2')\gamma^\beta u(p_2)]}{(k^2 + 2p_1\cdot k)(k^2 - 2p_2\cdot k)} \tag{3.21}$$
$$\times \left[\frac{g_{\mu\alpha}\epsilon_{\beta\nu\sigma}(k-q)^\sigma}{(k^2-\theta^2)[(k-q)^2-\theta^2](k-q)^2} + \frac{g_{\beta\nu}\epsilon_{\mu\alpha\rho}k^\rho}{[(k-q)^2-\theta^2](k^2-\theta^2)k^2} \right].$$

A seguir fazemos as decomposições

$$\frac{1}{k^2(k^2-\theta^2)} = \frac{1}{\theta^2}\left[\frac{1}{k^2-\theta^2} - \frac{1}{k^2}\right] \quad \text{e} \tag{3.22}$$

$$\frac{1}{(k-q)^2[(k-q)^2-\theta^2]} = \frac{1}{\theta^2}\left[\frac{1}{(k-q)^2-\theta^2} - \frac{1}{(k-q)^2}\right]$$

de forma que obtemos uma soma com somente quatro denominadores em cada parcela. Introduzimos parâmetros de Feynman e o cálculo segue o procedimento usual. Encontra-se que o termo dominante é proporcional a $\overline{q} \times \overline{p}_1$ e portanto não é da forma procurada.

A parte $M_{\epsilon\epsilon}^{(d)}$ também é divergente quando $q^\mu \to 0$,

$$\begin{aligned} M_{\epsilon\epsilon}^{(d)} = & -\theta^2 e^4 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\overline{u}(p_1')\gamma^\nu \left(\frac{\not{k}+\not{p}_1+m}{k^2+2p_1k}\right)\gamma^\mu u(p_1)\right] \\ & \times \left[\overline{u}(p_2')\gamma^\beta \left(\frac{-\not{k}+\not{p}_2+m}{k^2-2p_2k}\right)\gamma^\alpha u(p_2)\right] \\ & \times \frac{\epsilon_{\mu\alpha\rho}k^\rho}{(k^2-\theta^2)k^2} \frac{\epsilon_{\beta\nu\sigma}(k-q)^\sigma}{[(k-q)^2-\theta^2](k-q)^2} \,. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Não são todas, entretanto, as partes desta expressão que podem divergir, com $q^\mu \to 0$; aquela que contém $\not{k}\not{k}$ não pode. Desta forma, vamos aproximar $M_{\epsilon\epsilon}^{(d)}$ por uma expressão que preserva somente as possíveis divergências com $q^\mu \to 0$,

$$M_{\epsilon\epsilon}^{(d)} \simeq M_{\epsilon\epsilon 1}^{(d)} + M_{\epsilon\epsilon 2}^{(d)} \,, \tag{3.24}$$

onde $M_{\epsilon\epsilon 1}^{(d)}$ contém as eventuais divergências lineares e $M_{\epsilon\epsilon 2}^{(d)}$ as logarítmicas.

A expressão para $M_{\epsilon\epsilon 1}^{(d)}$ é

$$M_{\epsilon\epsilon 1}^{(d)} = -\theta^2 e^4 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\overline{u}(p_1')\gamma^\nu \left(\frac{\not{p}_1+m}{k^2+2p_1k}\right)\gamma^\mu u(p_1)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&\times\left[\overline{u}(p_2^{'})\gamma^{\beta}\left(\frac{\not{p}_2+m}{k^2-2p_2k}\right)\gamma^{\alpha}u(p_2)\right]\\
&\times\frac{\epsilon_{\mu\alpha\rho}k^{\rho}}{(k^2-\theta^2)k^2}\frac{\epsilon_{\beta\nu\sigma}(k-q)^{\sigma}}{[(k-q)^2-\theta^2](k-q)^2}\\
&=-4\theta^2e^4p_1^{\mu}p_2^{\alpha}[\overline{u}(p_1^{'})\gamma^{\nu}u(p_1)][\overline{u}(p_2^{'})\gamma^{\beta}u(p_2)] \qquad (3.25)\\
&\times\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\epsilon_{\mu\alpha\rho}k^{\rho}\epsilon_{\beta\nu\sigma}(k-q)^{\sigma}}{(k^2+2p_1k)(k^2-2p_2k)(k^2-\theta^2)k^2[(k-q)^2-\theta^2](k-q)^2}.
\end{aligned}
$$

Após usarmos decomposições em frações parciais nesta última expressão ela desdobra-se em quatro partes, porém apenas uma delas revela um comportamento que pode ser divergente com $q^{\mu}\rightarrow 0$. Este fato possibilita dizer que

$$
\begin{aligned}
M_{\epsilon\epsilon 1}^{(d)} &\simeq -4(e^4/\theta^2)p_1^{\mu}p_2^{\alpha}[\overline{u}(p_1^{'})\gamma^{\nu}u(p_1)][\overline{u}(p_2^{'})\gamma^{\beta}u(p_2)]\\
&\times\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\epsilon_{\mu\alpha\rho}k^{\rho}\epsilon_{\beta\nu\sigma}(k-q)^{\sigma}}{(k^2+2p_1k)(k^2-2p_2k)k^2(k-q)^2}, \qquad (3.26)
\end{aligned}
$$

quando q^{μ} é bem pequeno. Quando essa expressão é calculada, com $q^{\mu}\rightarrow 0$, verifica-se que não existe uma contribuição do tipo $\log\left(\overline{q}^2/m^2\right)$.

A parcela $M_{\epsilon\epsilon 2}^{(d)}$, que contém duas partes, é tratada de maneira idêntica a $M_{\epsilon\epsilon 1}^{(d)}$,

$$
\begin{aligned}
M_{\epsilon\epsilon 2}^{(d)} = &-\theta^2e^4\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left\{\left[\overline{u}(p_1^{'})\gamma^{\nu}\left(\frac{\not{k}}{k^2+2p_1k}\right)\gamma^{\mu}u(p_1)\right]\right.\\
&\times\left[\overline{u}(p_2^{'})\gamma^{\beta}\left(\frac{\not{p}_2+m}{k^2-2p_2k}\right)\gamma^{\alpha}u(p_2)\right]\\
&-\left[\overline{u}(p_1^{'})\gamma^{\nu}\left(\frac{\not{p}_1+m}{k^2+2p_1k}\right)\gamma^{\mu}u(p_1)\right]\\
&\times\left.[\overline{u}(p_2^{'})\gamma^{\beta}\left(\frac{\not{k}}{k^2-2p_2k}\right)\gamma^{\alpha}u(p_2)]\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\times \frac{\epsilon_{\mu\alpha\rho}k^\rho\epsilon_{\beta\nu\sigma}(k-q)^\sigma}{(k^2-\theta^2)k^2[(k-q)^2-\theta^2](k-q)^2} \\
&\simeq -\frac{2e^4}{\theta^2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\{p_1^\mu[\overline{u}(p_1')\gamma^\nu u(p_1)][\overline{u}(p_2')\gamma^\beta \not{k}\gamma^\alpha u(p_2)] \\
&- p_2^\alpha[\overline{u}(p_1')\gamma^\nu \not{k}\gamma^\mu u(p_1)][\overline{u}(p_2')\gamma^\beta u(p_2)]\} \\
&\times \frac{\epsilon_{\mu\alpha\rho}k^\rho\epsilon_{\beta\nu\sigma}(k-q)^\sigma}{(k^2+2p_1k)(k^2-2p_2k)k^2(k-q)^2}\,. \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

Nesta integral, de novo, constata-se a ausência de $\log(\overline{q}^2/m^2)$.

Agora vamos nos dedicar as partes possivelmente divergentes, com $q^\mu \to 0$, do gráfico cruzado (c), o qual corresponde a amplitude

$$
M_{ba}^{(c)} = (ie)^4\int\frac{d^3}{(2\pi)^3}\, t^{\nu\mu}(p_1',p_1,k)\; D_{\mu\alpha}(k)\; D_{\beta\nu}(k-q)\; s^{\alpha\beta}(p_2',p_2,k), \qquad (3.28)
$$

$$
s^{\alpha\beta}(p',p,k) = i\overline{u}(p')\gamma^\alpha\frac{\not{k}+\not{p}'+m}{k^2+2p'k}\gamma^\beta u(p). \qquad (3.29)
$$

Como antes, nós decomporemos $M_{ba}^{(c)}$ em quatro parcelas,

$$
M_{ba}^{(c)} = M_{gg}^{(c)} + M_{g\epsilon}^{(c)} + M_{\epsilon g}^{(c)} + M_{\epsilon\epsilon}^{(c)}\,. \qquad (3.30)
$$

A parte $M_{gg}^{(c)}$ não contribui quando $q^\mu \to 0$, pois ela é analítica em q^μ.

Os termos $M_{g\epsilon}^{(c)}$ e $M_{\epsilon g}^{(c)}$ somados são iguais a

$$
\begin{aligned}
&i\;\theta e^4\int\frac{d^3}{(2\pi)^3}\left[\frac{g_{\mu\alpha}\epsilon_{\beta\nu\sigma}(k-q)^\sigma}{(k^2-\theta^2)(k-q)^2}+\frac{g_{\beta\nu}\epsilon_{\mu\alpha\rho}k^\rho}{[(k-q)^2-\theta^2]k^2}\right] \\
&\times t^{\nu\mu}(p_1',p_1,k)\; s^{\alpha\beta}(p_2',p_2,k)
\end{aligned}
$$

$$\simeq -4i\theta e^4 p_1^\mu p_2'^\alpha \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{[\overline{u}(p_1')\gamma^\nu u(p_1)][\overline{u}(p_2')\gamma^\beta u(p_2)]}{(k^2+2p_1k)(k^2+2p_2'k)} \tag{3.31}$$
$$\times \left[\frac{g_{\mu\nu}\epsilon_{\beta\nu\sigma}(k-q)^\sigma}{(k^2-\theta^2)[(k-q)^2-\theta^2](k-q)^2} + \frac{g_{\beta\nu}\epsilon_{\mu\nu\rho}k^\rho}{[(k-q)^2-\theta^2](k^2-\theta^2)k^2} \right].$$

Nesta última passagem foram despezados termos finitos por contagem de potências quando $q^\mu \to 0$. De novo, a decomposição desta fórmula em frações parciais possibilita isolar a parte mais divergente para q^μ pequeno. Assim como no caso $M_{g\epsilon}^{(d)} + M_{\epsilon g}^{(d)}$ a contribuição dominante em $M_{g\epsilon}^{(c)} + M_{\epsilon g}^{(c)}$ é proporcional a $\overline{q} \times \overline{p}_1$, que não é da forma procurada.

A última parcela, $M_{\epsilon\epsilon}^{(c)}$, também pode divergir para $q^\mu \to 0$,

$$\begin{aligned} M_{\epsilon\epsilon}^{(c)} &= -\theta^2 e^4 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\overline{u}(p_1')\gamma^\nu \left(\frac{\not{k} + \not{p}_1 + m}{k^2+2p_1k} \right) \gamma^\mu u(p_1) \right] \\ &\times \left[\overline{u}(p_2')\gamma^\alpha \left(\frac{\not{k} + \not{p}_2' + m}{k^2+2p_2'k} \right) \gamma^\beta u(p_2) \right] \\ &\times \frac{\epsilon_{\mu\alpha\rho}k^\rho}{(k^2-\theta^2)k^2} \frac{\epsilon_{\beta\nu\sigma}(k-q)^\sigma}{[(k-q)^2-\theta^2](k-q)^2} \end{aligned} \tag{3.32}$$

Semelhantemente ao caso do gráfico (d), reteremos nesta expressão somente as parcelas, que divergem por contagem de potências com $q^\mu \to 0$,

$$M_{\epsilon\epsilon}^{(c)} \simeq M_{\epsilon\epsilon 1}^{(c)} + M_{\epsilon\epsilon 2}^{(c)}\,, \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned} M_{\epsilon\epsilon 1}^{(c)} &= -\frac{4e^4}{\theta^2} p_1^\mu p_2'^\alpha \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\left[\overline{u}(p_1')\gamma^\nu \not{k}\gamma^\mu u(p_1)\right]\left[\overline{u}(p_2')\gamma^\beta u(p_2)\right]}{(k^2+2p_1k)(k^2+2p_2'k)} \\ &\times \frac{\epsilon_{\mu\alpha\rho}k^\rho \epsilon_{\beta\nu\sigma}(k-q)^\sigma}{(k^2-\theta^2)[(k-q)^2-\theta^2]k^2(k-q)^2} \end{aligned}$$

$$\simeq -\frac{4e^4}{\theta^2} p_1^\mu p_2'^\alpha \left[\overline{u}(p_1')\gamma^\nu u(p_1)\right]\left[\overline{u}(p_2')\gamma^\beta u(p_2)\right]$$
$$\times \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\epsilon_{\mu\alpha\rho}k^\rho \epsilon_{\beta\nu\sigma}(k-q)^\sigma}{(k^2+2p_1k)(k^2+2p_2'k)k^2(k-q)^2} \quad \text{e} \tag{3.34}$$

$$M_{\epsilon\epsilon 2}^{(c)} = 2e^4\theta^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{p_1^\mu \left[\overline{u}(p_1')\gamma^\nu u(p_1)\right]\left[\overline{u}(p_2')\gamma^\alpha \not{k}\gamma^\beta u(p_2)\right]}{(k^2+2p_1k)(k^2+2p_2'k)} \right.$$
$$\left. + \frac{p_2'^\alpha \left[\overline{u}(p_1')\gamma^\nu \not{k}\gamma^\mu u(p_1)\right]\left[\overline{u}(p_2')\gamma^\beta u(p_2)\right]}{(k^2+2p_1k)(k^2+2p_2'k)} \right\}$$
$$\times \frac{\epsilon_{\mu\alpha\rho}k^\rho}{(k^2-\theta^2)k^2} \frac{\epsilon_{\beta\nu\sigma}(k-q)^\sigma}{[(k-q)^2-\theta^2](k-q)^2}$$
$$\simeq \frac{2e^4}{\theta^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ p_2'^\alpha \left[\overline{u}(p_1')\gamma^\nu \not{k}\gamma^\mu u(p_1)\right]\left[\overline{u}(p_2')\gamma^\beta u(p_2)\right] \right.$$
$$\left. + p_1^\mu \left[\overline{u}(p_1')\gamma^\nu u(p_1)\right]\left[\overline{u}(p_2')\gamma^\alpha \not{k}\gamma^\beta u(p_2)\right] \right\}$$
$$\times \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\epsilon_{\mu\alpha\rho}k^\rho \epsilon_{\beta\nu\sigma}(k-q)^\sigma}{(k^2+2p_1k)(k^2+2p_2'k)k^2(k-q)^2} . \tag{3.35}$$

Quando $M_{\epsilon\epsilon 1}^{(c)}$ é calculado verifica-se a ausência de $\log(\overline{q}^2/m^2)$, por outro lado,

$$M_{\epsilon\epsilon 2}^{(c)} \simeq -i\frac{4\pi}{m}\log\left(\frac{|\overline{q}|}{m}\right) , \tag{3.36}$$

quando $\theta = -e^2/(4\pi)$.

Podemos concluir que a matriz de transição , somente no tocante aos gráficos (d) e (c), é[3]

$$T_{ba} = -i\left(M_{ba}^{(d)} + M_{ba}^{(c)}\right) \simeq -\frac{4\pi}{m}\log\left(\frac{|\overline{q}|}{m}\right) . \tag{3.37}$$

[3]Diferentemente dos cálculos precedentes, a normalização dos espinores nesta seção é $\overline{u}(p)u(p) = (m/E)^{1/2}$, fazendo com que os fatores $(m/E)^{1/2}$ da fórmula 1.4 não estejam mais presentes.

Portanto, a contribuição dos gráficos direto e cruzado para a energia potencial férmion-férmion é (equação 1.17)

$$V(\bar{x}) = \int \frac{d^2\bar{q}}{(2\pi)^2} e^{i\bar{q}.\bar{x}} \left[\frac{4\pi}{m} \log\left(\frac{|\bar{q}|}{m}\right) \right] . \tag{3.38}$$

A integral acima pode ser calculada a partir da transformada inversa de Fourier de 2.42,

$$\frac{1}{\bar{q}^2 + \theta^2} = \frac{1}{2\pi} \int d^2\bar{x} e^{i\bar{q}.\bar{x}} K_0(|\theta| r) . \tag{3.39}$$

Se for $|\theta|$ muito pequeno podemos usar $K_0(|\theta| r) \simeq -\log(|\theta| r)$ e $1/(\bar{q}^2 + \theta^2) \simeq 1/\bar{q}^2$, possibilitando obter de 3.39, após a mudança de variável $\bar{q} \leftrightarrow \bar{x}$, que

$$\frac{1}{r^2} \simeq \frac{-1}{2\pi} \int d^2\bar{q}\, e^{i\bar{q}.\bar{x}} \log|\bar{q}| + c , \tag{3.40}$$

onde c é uma constante. Desta forma, pode ser dito que, a contribuição dos gráficos direto e cruzado (d) e (c) para a energia potencial, no que diz respeito ao seu comportamento a grandes distâncias, é

$$V(\bar{x}) = \frac{2}{mr^2} . \tag{3.41}$$

Conclusões

Nesta tese foram abordados dois modelos num espaço-tempo tridimensional, o modelo de Thirring e a eletrodinâmica fermiônica.

No caso do modelo de Thirring, foi mostrado que ele é uma teoria renormalizável, quando a expansão $1/N$ é empregada, tanto para o caso biespinorial quanto o quadriespinorial. Além disso, foi feita uma análise dos pólos do propagador do campo auxiliar, introduzido para facilitar a implementação da expansão $1/N$. Neste estudo ficou patente a presença de um termo de Chern-Simons induzido para o caso com biespinores. Este fato fez com que aumentasse a região de parâmetros onde o modelo está livre de táquions, quando comparado com o caso de quadriespinores.

Verificou-se que o comportamento infra-vermelho desastroso da eletrodinâmica biespinorial é melhorado substancialmente quando o propagador do campo de gauge incorpora, não perturbativamente, as contribuições do tensor de polarização do vácuo. Na realidade, este tensor possui uma parte que corresponde a um termo de Chern-Simons, vindo daí a presença de massa para o propagador bosônico. Apesar de haver esta massa, sobra ainda uma parte do propagador que diverge li-

nearmente para trimomentos pequenos. Fisicamente, esta divergência reflete o comportamento de longo alcance promovido pelo termo de Chern-Simons, já que é creditado a ele um efeito de "interação" estatítica. Por outro lado, nos cálculos feitos neste trabalho, usando o propagador corrigido, as divergências infra-vermelhas não se manifestaram. Não podemos, entretando, afirmar categoricamente que a teoria está livre de divergências infra-vermelhas. Realmente, foram calculados somente alguns gráficos, sendo que os gráficos direto e cruzado não foram computados completamente. Resta, portanto, fazer uma análise mais detalhada da estrutura infra-vermelha da eletrodinâmica biespinorial. Quanto a eletrodinâmica com quadriespinores não foi encontrada uma maneira de melhorar seu comportamento infra-vermelho, indicando que é necessário adicionar de início um termo de Chern-Simons para contornar este problema.

A energia potencial férmion-férmion foi calculada no caso onde um há bóson de gauge virtual. Constatou-se que este procedimento possibilita a existência de estados ligados férmion-férmion. Quando os parâmetros da eletrodinâmica foram escolhidos convenientemente a energia de dissociação deste par pôde assumir um intervalo bem grande de valores, incluindo em particular aqueles que correspondem a temperatura de transição de fase para um supercondutor a alta temperatura. Este aspecto nos levou a supor que a eletrodinâmica biespinorial seja uma boa candidata para descrever a supercondutividade a altas temperaturas.

Foi conjecturado na literatura [52] que, para longas distâncias a energia potencial fornecida pela eletrodinâmica deveria ter um comportamento semelhante a de Aharonov-Bohm, ou

seja, da forma $(l+\alpha)^2/(mr^2)$. Esta conclusão está ligada ao fato que, em teorias não relativísticas a invariância de gauge sugere que os potenciais sejam introduzidos via acoplamento mínimo. Nessa situação, em uma transformação de gauge a função de onda adquire uma fase de modo que equação de Schroedinger permanece invariante. Deve ser observado [53], entretanto, que nosso cálculo está baseado na matriz S a qual é, certamente, um objeto invariante de gauge. Portanto, diferentemente do caso anterior todas as quantidades entrando na equação de Shroedinger por nós utilizada são invariantes de gauge. Consequentemente, nossa construção é explicitamente invariante de gauge. Alem disso, verificamos que as contribuições de gráficos com dois bósons de gauge não reproduzem a energia potencial mencionada. Deve, contudo, ser ressaltado que o procedimento usado para obter a energia potencial em ordem mais elevada é ambiguo [54, 55, 56] devido a dependência da matriz S com a energia e uma conclusão definitiva para essa questão ainda não é possível. Por outro lado, nosso cálculo pode ser usado, sem ambigüidades, para a determinação das contribuições ao momento magnético do férmion oriundas da correção de vértice, como fizemos.

Apêndice A

Correção de vértice

Este apêndice é dedicado ao cálculo da correção de vértice na concha de massa, quando apenas um bóson de gauge virtual está presente. A expressão para o vértice é

$$\begin{aligned}\Lambda^{\mu} &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[\overline{u}(p_1^{'})(ie\gamma^{\alpha})S(p_1^{'}-k)\right.\\ &\times \left.(e\gamma^{\mu})S(p_1-k)(ie\gamma^{\beta})u(p_1)\right]D_{\alpha\beta}(k)\ , \qquad \text{(A.1)}\end{aligned}$$

onde os propagadores são aqueles definidos na seção 1.2,

$$S(p) = \frac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2} \quad \text{e} \qquad \text{(A.2)}$$

$$D_{\alpha\beta}(p) = \frac{-i}{p^2-m^2}\left[\left(g_{\alpha\beta}-\frac{p_{\alpha}p_{\beta}}{p^2}\right)-i\theta\epsilon_{\alpha\beta\rho}\frac{p^{\rho}}{p^2}\right]-i\lambda\frac{p_{\alpha}p_{\beta}}{(p^2)^2}\ . \qquad \text{(A.3)}$$

A expressão de Λ^{μ} após a substituição destes propagadores passa a ser

$$\Lambda^{\mu} = -ie^3\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[\overline{u}(p_1^{'})\gamma^{\alpha}\left(\frac{\not{p}_1^{'}-\not{k}+m}{(p_1^{'}-k)^2-m^2}\right)\gamma^{\mu}\right.$$

$$\times \left(\frac{\not{p}_1 - \not{k} + m}{(p_1 - k)^2 - m^2} \right) \gamma^\beta u(p_1) \Bigg]$$

$$\times \left[\frac{1}{k^2 - \theta^2} \left(g_{\alpha\beta} - i\theta \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{k^\gamma}{k^2} \right) + \left(\frac{\lambda}{k^2} - \frac{1}{k^2 - \theta^2} \right) \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right] . \quad \text{(A.4)}$$

O próximo passo no cálculo está em separar o Λ^μ em três partes,

$$\Lambda^\mu = \Lambda^\mu_L + \Lambda^\mu_g + \Lambda^\mu_\epsilon \, , \quad \text{(A.5)}$$

onde os subíndices L, g e ϵ dizem respeito as contribuições proporcionais a $g_{\alpha\beta}$, $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ e $k_\alpha k_\beta$, respectivamente. São elas

$$\Lambda^\mu_L = -ie^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\overline{u}(p_1') \gamma^\alpha \left(\frac{\not{p}_1' - \not{k} + m}{k^2 - 2p_1' k} \right) \gamma^\mu \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{\not{p}_1 - \not{k} + m}{k^2 - 2p_1 k} \right) \gamma^\beta u(p_1) \right] \left(\frac{\lambda}{k^2} - \frac{1}{k^2 - \theta^2} \right) \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} , \quad \text{(A.6)}$$

$$\Lambda^\mu_g = -ie^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\overline{u}(p_1') \gamma^\alpha \left(\frac{\not{p}_1' - \not{k} + m}{k^2 - 2p_1' k} \right) \gamma^\mu \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{\not{p}_1 - \not{k} + m}{k^2 - 2p_1 k} \right) \gamma^\beta u(p_1) \right] \frac{g_{\alpha\beta}}{k^2 - \theta^2} \quad \text{e} \quad \text{(A.7)}$$

$$\Lambda^\mu_\epsilon = -\theta e^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\overline{u}(p_1') \gamma^\alpha \left(\frac{\not{p}_1' - \not{k} + m}{k^2 - 2p_1' k} \right) \gamma^\mu \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{\not{p}_1 - \not{k} + m}{k^2 - 2p_1 k} \right) \gamma^\beta u(p_1) \right] \frac{\epsilon_{\alpha\beta\gamma} k^\gamma}{k^2 (k^2 - \theta^2)} \, . \quad \text{(A.8)}$$

onde foi usado que $(p_1' - k)^2 - m^2 = k^2 - 2p_1' k$ e $(p_1 - k)^2 - m^2 = k^2 - 2p_1 k$.

A.1 A parcela Λ_L^μ

A parte Λ_L^μ é proporcional a corrente $\overline{u}(p_1')\gamma^\mu u(p_1)$. De fato, isto pode ser verificado usando as relações

$$\overline{u}(p_1')\not{k}\,(\not{p}_1' - \not{k} + m) = \overline{u}(p_1')(2p_1'k - k^2) \quad \text{e}$$

$$(\not{p}_1 - \not{k} + m)\not{k}\,u(p_1) = (2p_1k - k^2)u(p_1)\,. \tag{A.9}$$

Por outro lado, estas duas igualdades são consequências diretas das fórmulas 1.19 e 1.25. Se estas relações forem empregadas na expressão A.6 de imediato conclui-se que

$$\Lambda_L^\mu = \overline{u}(p_1')\gamma^\mu u(p_1)\left[-ie^3\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{k^2}\left(\frac{\lambda}{k^2} - \frac{1}{k^2-\theta^2}\right)\right]\,. \tag{A.10}$$

Para calcular esta integral é preciso colocar um regulador infra-vermelho, a $(a > 0)$, isto é,

$$\Lambda_L^\mu = \overline{u}(p_1')\gamma^\mu u(p_1)\left[-ie^3\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{k^2}\left(\frac{\lambda}{k^2-a^2} - \frac{1}{k^2-\theta^2}\right)\right]\,. \tag{A.11}$$

O cálculo dessa integral é facilitado caso seja usada uma decomposição em frações parciais,

$$\frac{1}{k^2(k^2-c^2)} = -\frac{1/c^2}{k^2} + \frac{1/c^2}{k^2-c^2}. \tag{A.12}$$

Esta identidade juntamente com a fórmula de integração 2.7 levam a

$$\Lambda_L^\mu = \overline{u}(p_1')\gamma^\mu u(p_1)\left[\frac{e^3}{4\pi}\left(\frac{\lambda}{a} - \frac{1}{|\theta|}\right)\right]\,. \tag{A.13}$$

Note que se o regulador a for tomado igual a zero a divergência infra-vermelha reaparece.

A.2 A parcela Λ_g^μ

A próxima parcela de Λ^μ a ser considerada é Λ_g^μ. O uso das identidades

$$\overline{u}(p_1')\gamma^\alpha(\not{p}_1' - \not{k} + m) = u(p_1')[\not{k}\,\gamma^\alpha + 2(p_1'^\alpha - k^\alpha)] \text{ e}$$

$$(\not{p}_1 - \not{k} + m)\gamma^\beta u(p_1) = [\gamma^\beta \not{k} + 2(p_1^\beta - k^\beta)]u(p_1) \ , \qquad \text{(A.14)}$$

que advém de 1.19 e 1.25, em A.7 conduz a

$$\begin{aligned} \Lambda_g^\mu &= -ie^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\{\overline{u}(p_1')[\not{k}\,\gamma_\alpha + 2(p_{1\alpha}' - k_\alpha)]\gamma^\mu \\ &\times [\gamma^\alpha \not{k} + 2(p_1^\alpha - k^\alpha)]u(p_1)\}/D \ , \end{aligned} \qquad \text{(A.15)}$$

onde

$$D = [(k^2 - 2p_1'k)(k^2 - 2p_1k)(k^2 - \theta^2)] \ . \qquad \text{(A.16)}$$

O numerador de A.15 pode ser ainda mais rearranjado, empregando-se algumas relações que diminuem a quantidade de matrizes gama,

$$\gamma_\alpha\gamma^\mu\gamma^\alpha = -\gamma^\mu \ , \quad \not{k}\not{k} = k^2 \ , \quad \not{k}\gamma^\mu + \gamma^\mu\not{k} = 2k^\mu \ ,$$

$$2\not{k}\,\not{p}_1\gamma^\mu u(p_1) = (-2m\not{k}\,\gamma^\mu + 4\not{k}\,p_1^\mu)u(p_1) \text{ e}$$

$$2\overline{u}(p_1')\gamma^\mu\not{p}_1'\not{k} = u(p_1')[-2m\gamma^\mu\not{k} + 4p_1'^\mu\not{k}\,] \ . \qquad \text{(A.17)}$$

A expressão resultante para Λ_g^μ, após expandir o numerador de A.15 e usar as identidades A.17, é

$$\begin{aligned} \Lambda_g^\mu = -ie^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\{\overline{u}(p_1')[-\not{k}\,\gamma^\mu\not{k} - 4mk^\mu \\ + 4(p_1^\mu + p_1'^\mu)\not{k} + 4\gamma^\mu(p_1p_1' - p_1k - p_1'k)]u(p_1)\}/D. \end{aligned} \qquad \text{(A.18)}$$

A etapa seguinte do cálculo de Λ_g^μ está em efetuar a integração no trimomento k^μ. Isto vai ser implementado através do uso de uma reparametrização de Feynman. No presente caso, a reparametrização de Feynman está baseada na identidade

$$\frac{1}{abc} = \int_0^1 dy \int_0^1 dx \frac{2y}{\{y[xa + (1-x)b] + (1-y)c\}^3} \,. \qquad \text{(A.19)}$$

Se forem usados $a = k^2 - 2p_1 k$, $b = k^2 - 2p_1^{'} k$ e $k^2 - \theta^2$, seguidos de uma mudança da variável de integração , $k^\mu \to k^\mu + yp_x^\mu$ (onde $p_x^\mu = p_1^\mu x + (1-x)p_1^{'\mu}$), pode ser verificado que

$$\begin{aligned}
\Lambda_g^\mu &= -ie^3 \int_0^1 dy(2y) \int_0^1 dx \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \overline{u}(p_1^{'})\{-(\not{k}+y\not{p}_x)\gamma^\mu(\not{k}+y\not{p}_x) \\
&- 4m(k^\mu + yp_x^\mu) + 4(p_1^\mu + p_1^{'\mu})(\not{k} + y\not{p}_x) \\
&+ 4\gamma^\mu[p_1 p_1^{'} - p_{1\nu}(k^\nu + yp_x^\nu) - p_{1\nu}^{'}(k^\nu + yp_x^\nu)]\}u(p_1) \\
&\times \frac{1}{\{k^2 - [p_x^2 y^2 + \theta^2(1-y)]\}^3} \,. \qquad \text{(A.20)}
\end{aligned}$$

O numerador do integrando da expressão acima pode ser mais simplificado quanto a sua dependência nas matrizes gama. Neste caso, basta usar as identidades

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\not{k}\,\gamma^\mu \not{k}}{(k^2 - M^2)^3} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{-\frac{1}{3}k^2\gamma^\mu}{(k^2 - M^2)^3} \,,$$

$$\not{p}_x \gamma^\mu \not{p}_x = 2p_x^\mu \not{p}_x - p_x^2 \gamma^\mu \quad \text{e}$$

$$\overline{u}(p_1^{'})\not{p}_x u(p_1) = m\overline{u}(p_1^{'})u(p_1) \qquad \text{(A.21)}$$

(que decorrem das relações 1.19 e 1.25, da definição de p_x^μ e do fato das integrais com um único k^ν no numerador serem nulas)

para perceber que

$$\Lambda_g^\mu = -ie^3 \int_0^1 dy(2y) \int_0^1 dx$$
$$\times \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\overline{u}(p_1')(f_1\gamma^\mu + f_2 p_1^\mu + f_3 p_1'^\mu)u(p_1)}{\{k^2 - [p_x^2 y^2 + \theta^2(1-y)]\}^3)} , \quad \text{(A.22)}$$

com

$$f_1 = \frac{1}{3}k^2 + m^2 y[-4 + y(1 - 2x + 2x^2)] + 2p_1 p_1'[x(1-x)y^2 + 2(1-y)] ,$$
$$f_2 = 2my[2(1-x) - yx] \text{ e}$$
$$f_3 = 2my[2x - y(1-x)] . \quad \text{(A.23)}$$

Deve ser observado, agora, que o denominador do integrando de A.22 é uma função par em relação ao ponto médio da variável de integração x, $x = 1/2$. De fato, quando são usadas as definições de p_x^μ e q^μ, o referido denominador pode ser escrito como $\{k^2 - [\theta^2(1-y) + y^2[m^2 - x(1-x)q^2]\}^3$, com $x(1-x) = 1/4 - (x - 1/2)^2$. Isto posto, fica claro que somente as partes simétricas de f_1 e f_2 pela reflexão $x \leftrightarrow (1-x)$ contribuem para a integral em x. Quando essas considerações são levadas a cabo é possível concluir que

$$\Lambda_g^\mu = -ie^3 \int_0^1 dy(2y) \int_0^1 dx$$
$$\times \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\overline{u}(p_1')[f_1\gamma^\mu + f(p_1^\mu + p_1'^\mu)]u(p_1)}{\{k^2 - [\theta^2(1-y) + y^2[m^2 - x(1-x)q^2]]\}^3} , \quad \text{(A.24)}$$

onde

$$f = my(2-y) \text{ e}$$
$$f_1 = \frac{k^2}{3} + m^2(4 - 8y + y^2) - q^2[x(1-x)y^2 + 2(1-y)] . \quad \text{(A.25)}$$

A partir deste ponto torna-se conveniente usar a identidade de Gordon no cálculo de Λ_g^μ, cuja forma é

$$\overline{u}(p_1^{'})\gamma^\mu u(p_1) = \frac{1}{2m}\overline{u}(p_1^{'})[P^\mu + iq_\alpha\sigma^{\alpha\mu}]u(p_1)\ , \qquad \text{(A.26)}$$

onde $P^\mu = p_1^{'\mu} + p_1^\mu$ e $\sigma^{\alpha\mu} = -i[\gamma^\alpha, \gamma^\mu]/2$. Uma maneira de verificar esta igualdade está em perceber que seu lado esquerdo é equivalente a

$$\frac{1}{2m}\overline{u}(p_1^{'})[\not{p}_1^{'}\gamma^\mu + \gamma^\mu\not{p}_1]\overline{u}(p_1) = \frac{1}{2m}\overline{u}(p_1)\left[\frac{p_{1\alpha}^{'}+p_{1\alpha}}{2}(\gamma^\alpha\gamma^\mu+\gamma^\mu\gamma^\alpha)\right.$$
$$\left. + \frac{p_{1\alpha}^{'}-p_{1\alpha}}{2}(\gamma^\alpha\gamma^\mu-\gamma^\mu\gamma^\alpha)\right]u(p_1)\ . \qquad \text{(A.27)}$$

As duas primeiras relações de 1.25 foram usadas para verificar que os lados esquerdos de A.27 e A.26 são iguais.

Quando a identidade de Gordon é usada em A.24, obtemos

$$\Lambda_g^\mu = \overline{u}(p_1^{'})\Gamma_g^\mu(q)u(p_1)\ , \quad \text{com}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_g^\mu(q) &= -ie^3\int_0^1 dy(2y)\int_0^1 dx\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3} \\ &\times \frac{\gamma^\mu(f_1+2mf) - if q_\alpha\sigma^{\alpha\mu}}{\{k^2-[\theta^2(1-y)+y^2[m^2-x(1-x)q^2]]\}^3}\ . \qquad \text{(A.28)}\end{aligned}$$

No presente trabalho existe o interesse de analisar situações onde os momentos transferidos são pequenos. Devido a isto, serão considerados apenas os dois primeiros termos da série de Taylor de $\Gamma_g^\mu(q)$ em relação q^μ/m, possibilitanto decompor Λ_g^μ em duas partes,

$$\Lambda_g^\mu \simeq \overline{u}(p_1^{'})\left[\Gamma_g^\mu(0) + \frac{q^\alpha}{m}\frac{\partial\Gamma_g^\mu(0)}{\partial(q^\alpha/m)}\right]u(p_1) = \Lambda_g^{0\mu} + \Lambda_g^{1\mu}\ . \qquad \text{(A.29)}$$

Sob estas circunstâncias, é conveniente usar uma variável de integração adimensional w^α, $w^\alpha = k^\alpha/m$, consequentemente $\Gamma_g^\mu(q)$ pode ser escrita como

$$\Gamma_g^\mu(q) = \frac{-ie^3}{m}\int_0^1 dy(2y)\int_0^1 dx\int\frac{d^3w}{(2\pi)^3}$$
$$\times\ \frac{\gamma^\mu(f_1' + 2f') - if'(q_\alpha/m)\sigma^{\alpha\mu}}{\left\{w^2 - \left[\frac{\theta^2}{m^2}(1-y) + y^2\left(1 - x(1-x)\frac{q^2}{m^2}\right)\right]\right\}^3}\ , \qquad \text{(A.30)}$$

onde

$$f_1' = \frac{f_1}{m} = \frac{w^2}{3} + (y^2 - 8y + 4) - \frac{q^2}{m^2}[x(1-x)y^2 + 2(1-y)] \text{ e}$$
$$f' = f/m = y(2-y)\ . \qquad \text{(A.31)}$$

O termo $\Lambda_g^{0\mu}$, que é $\overline{u}(p_1')\Gamma_g^\mu(0)u(p_1)$, vem a ser

$$\Lambda_g^{0\mu} = \overline{u}(p_1')\gamma^\mu u(p_1) \qquad \text{(A.32)}$$
$$\times\ \frac{-ie^3}{m}\int_0^1 dy(2y)\int_0^1 dx\int\frac{d^3w}{(2\pi)^3}\frac{\frac{1}{3}w^2 - (y^2 + 4y - 4)}{\left\{w^2 - \left[\frac{\theta^2}{m^2}(1-y) + y^2\right]\right\}^3}.$$

Caso sejam feitas as integrações em w^μ (fórmulas 2.7 e 2.8) e em x é possível verificar que

$$\Lambda_g^{0\mu} = \overline{u}(p_1')\gamma^\mu u(p_1)\frac{e^3}{16\pi m}$$
$$\times\ \int_0^1 dy\left\{\frac{y}{\left[\frac{\theta^2}{m^2}(1-y) + y^2\right]^{\frac{1}{2}}} + \frac{y^3 + 4y^2 - 4y}{\left[\frac{\theta^2}{m^2}(1-y) + y^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right\}\ . \qquad \text{(A.33)}$$

Quando as integrais em y são efetuadas pode ser concluído que

$$\Lambda_g^{0\mu} = \overline{u}(p_1')\gamma^\mu u(p_1)\frac{e^3}{8\pi m} \qquad \text{(A.34)}$$

$$\times \left\{ \frac{-2\left[2+\frac{|\theta|}{m}+(\frac{|\theta|}{m})^2+(\frac{|\theta|}{m})^3\right]}{(\frac{|\theta|}{m})(2+\frac{|\theta|}{m})} + \left[2+\left(\frac{|\theta|}{m}\right)^2\right] \log\left(\frac{2+\frac{|\theta|}{m}}{\frac{|\theta|}{m}}\right) \right\} .$$

O termo $\Lambda_g^{1\mu}$, que advem de $\frac{q^\alpha}{m}\frac{\partial \Gamma_g^\mu(0)}{\partial(q^\alpha/m)}$, é

$$\begin{aligned} \Lambda_g^{1\mu} &= \frac{-e^3}{m^2}\overline{u}(p_1')q_\alpha\sigma^{\alpha\mu}u(p_1)\int_0^1 dx\int_0^1 dy \\ &\times \int \frac{d^3w}{(2\pi)^3}\frac{2yf'}{\left\{w^2-\left[\frac{\theta^2}{m^2}(1-y)+y^2\right]\right\}^3} . \end{aligned} \tag{A.35}$$

Os resultados das integrais desta expressão são obtidos da mesma forma que as de $\Lambda_g^{0\mu}$, o resultado final é

$$\begin{aligned} \Lambda_g^{1\mu} &= \overline{u}(p_1')q_\alpha\sigma^{\alpha\mu}u(p_1)\left(\frac{ie^3}{16\pi m^2}\right) \\ &\times \left[-3+3\frac{|\theta|}{m}+\frac{4-3\frac{\theta^2}{m^2}}{2}\log\left(\frac{2+\frac{|\theta|}{m}}{\frac{|\theta|}{m}}\right)\right] . \end{aligned} \tag{A.36}$$

Por outro lado, decorre diretamente da definição de $\sigma^{\alpha\mu}$ e de 1.26 que $\sigma^{\alpha\mu} = -\epsilon^{\alpha\mu\lambda}\gamma_\lambda$. Desta forma, $\Lambda_g^{1\mu}$ pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \Lambda_g^{1\mu} &= \overline{u}(p_1')q_\alpha\epsilon^{\alpha\mu\lambda}\gamma_\lambda u(p_1)\left(\frac{-ie^3}{16\pi m^2}\right) \\ &\times \left[-3+3\frac{|\theta|}{m}+\frac{4-3\frac{\theta^2}{m^2}}{2}\log\left(\frac{2+\frac{|\theta|}{m}}{\frac{|\theta|}{m}}\right)\right] . \end{aligned} \tag{A.37}$$

A.3 A parcela Λ^{μ}_{ϵ}

Resta calcular a terceira e última parte de Λ^{μ}, A.8,

$$\begin{aligned}\Lambda^{\mu}_{\epsilon} &= -\theta e^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[\overline{u}(p_1^{'})\gamma^{\alpha}\left(\frac{\not{p}_1^{'} - \not{k} + m}{k^2 - 2p_1^{'}k}\right)\gamma^{\mu}\right. \\ &\times \left.\left(\frac{\not{p}_1 - \not{k} + m}{k^2 - 2p_1 k}\right)\gamma^{\beta}u(p_1)\right]\frac{\epsilon_{\alpha\beta\gamma}k^{\gamma}}{k^2(k^2-\theta^2)} . \qquad \text{(A.38)}\end{aligned}$$

A expressão A.38, através do uso das identidades A.14, torna-se igual a

$$\Lambda^{\mu}_{\epsilon} = -\theta e^3 \qquad \text{(A.39)}$$

$$\times \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\overline{u}(p_1^{'})[\not{k}\gamma^{\alpha}+2(p_1^{'\alpha}-k^{\alpha})]\gamma^{\mu}[\gamma^{\beta}\not{k}+2(p_1^{\beta}-k^{\beta})\epsilon_{\alpha\beta\gamma}k^{\gamma}u(p_1)}{(k^2-2p_1^{'}k)(k^2-2p_1k)k^2(k^2-\theta^2)} .$$

Outras identidades podem ser utilizadas objetivando simplificar o numerador de A.39, são elas

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} = g^{\mu\nu} - i\epsilon^{\mu\nu\alpha}\gamma_{\alpha} \text{ e}$$

$$\gamma^{\rho}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} = -i\epsilon^{\rho\mu\nu} + g^{\rho\mu}\gamma^{\nu} - g^{\rho\nu}\gamma^{\mu} + g^{\mu\nu}\gamma^{\rho} ; \qquad \text{(A.40)}$$

a primeira expressão é a relação 1.26, a outra decorre dela. Por sua vez, A.40 possibilita verificar que

$$\not{k}\gamma^{\alpha}\gamma^{\mu}\gamma^{\beta}\not{k}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}k^{\gamma} = 2ik^2k^{\mu} ,$$

$$\not{k}\gamma^{\alpha}\gamma^{\mu}p_1^{\beta}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}k^{\gamma} = p_1^{\beta}[i(k_{\beta}k^{\mu} - k^2\delta^{\mu}_{\beta}) - k^{\mu}k^{\gamma}\gamma^{\alpha}\epsilon_{\alpha\beta\gamma} + \not{k}k^{\gamma}\epsilon^{\mu}{}_{\beta\gamma}] \text{ e}$$

$$p_1^{'\alpha}\gamma^{\mu}\gamma^{\beta}\not{k}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}k^{\gamma} = p_1^{'\beta}[i(k_{\beta}k^{\mu} - k^2\delta^{\mu}_{\beta}) + \epsilon_{\alpha\beta\gamma}k^{\mu}\gamma^{\alpha}k^{\gamma} - \epsilon^{\mu}{}_{\beta\gamma}\not{k}k^{\gamma}] . \qquad \text{(A.41)}$$

Estas identidades, quando usadas em A.39, levam a conclusão que

$$\Lambda_\epsilon^\mu = -\theta e^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{N^\mu}{(k^2 - 2p_1'k)(k^2 - 2p_1k)k^2(k^2 - \theta^2)} , \quad \text{(A.42)}$$

onde

$$\begin{aligned} N^\mu &= \overline{u}(p_1')[2ik^2k^\mu + 2i(k^\mu k_\beta - k^2\delta_\beta^\mu)P^\beta - 2\epsilon^\mu{}_{\beta\gamma}\not{k}k^\gamma q^\beta \\ &+ 2\epsilon_{\alpha\beta\gamma}k^\mu k^\gamma \gamma^\alpha q^\beta + 4p_1'^\alpha p_1^\beta \epsilon_{\alpha\beta\gamma}k^\gamma\gamma^\mu]u(p_1) . \end{aligned} \quad \text{(A.43)}$$

Nestas expressões foram usadas as definições de P^μ e q^μ, $P^\mu = p_1'^\mu + p_1^\mu$ e $q^\mu = p_1'^\mu - p_1^\mu$.

O denominador em Λ_ϵ^μ contém o produto de quatro funções de k^2. Desta forma, vai ser usada uma reparametrização de Feynman para facilitar a integração em k^ν,

$$\frac{1}{a_1a_2a_3a_4} = \quad \text{(A.44)}$$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \frac{6yz^2}{\{[(xa_1+(1-x)a_2)y+(1-y)a_3]z+(1-z)a_4\}^4} .$$

Se for escolhido $a_1 = k^2 - 2p_1k$, $a_2 = k^2 - 2p_1'k$, $a_3 = k^2 - \theta^2$ e $a_4 = k^2$ a expressão de Λ_ϵ^μ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \Lambda_\epsilon^\mu &= -6\theta e^3 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz (yz^2) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \\ &\times \frac{N^\mu}{\{(k - yzp_x)^2 - [\theta^2(1-y)z + y^2z^2p_x^2]\}^4} . \end{aligned} \quad \text{(A.45)}$$

onde $p_x^\mu = xp_1^\mu + (1-x)p_1'^\mu$.

O passo seguinte está em fazer uma translação da variável de integração, $k^\mu \to k^\mu + yz\,p_x^\mu$, para simplificar a forma do denominador do integrando de A.45. O numerador N^μ, por

outro lado, fica modificado pela substituição $k^\mu \to k^\mu + yz\, p_x^\mu$, passando a ser denotado por

$$\mathcal{N}^\mu = \overline{u}(p_1^{'})[T_1^\mu + T_2^\mu + T_3^\mu + T_4^\mu + T_5^\mu + T_6^\mu]u(p_1) \ , \qquad \text{(A.46)}$$

sendo que

$$\begin{aligned}
T_1^\mu &= 2i[k^2 p_x^\mu\, yz + 2yz(p_x k)k^\mu + y^3 z^3 p_x^\mu] \ , \\
T_2^\mu &= 2i(k_\beta k^\mu + y^2 z^2 p_{x\beta}\, p_x^\mu)P^\beta \ , \\
T_3^\mu &= -2i(k^2 + y^2 z^2 p_x^2)P^\mu \ , \\
T_4^\mu &= -2\epsilon^\mu{}_{\beta\gamma}(\not{k} k^\gamma + y^2 z^2 \not{p}_x\, p_x^\gamma)q^\beta \ , \\
T_5^\mu &= 2\epsilon_{\alpha\beta\gamma}(k^\mu k^\gamma + y^2 z^2 p_x^\mu\, p_x^\gamma)\gamma^\alpha q^\beta \ \text{ e} \\
T_6^\mu &= 4p_1^{'\alpha}\, p_1^\beta\, \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\, yz\, p_x^\gamma\, \gamma^\mu \ . \qquad \text{(A.47)}
\end{aligned}$$

Estes termos não contém parcelas ímpares em k^ν, pois suas contribuições a Λ_ϵ^μ são nulas; o denominador do integrando de A.45 passa a não conter termos lineares em k^ν, após a substituição $k^\mu \to k^\mu + yz\, p_x^\mu$. Deve ser notado ainda que, T_6 é nulo, devido ao fato de p_x^γ depender somente de p_1^γ e $p_1^{'\gamma}$.

A partir deste momento, vai ser usada uma aproximação não relativística, desprezando-se os termos proporcionais a q^2. Torna-se conveniente, então , utilizar as relações

$$p_1^{'\beta} = \frac{P^\beta + q^\beta}{2} \ , \quad p_1^\beta = \frac{P^\beta - q^\beta}{2} \ , \quad p_x^\beta = \frac{P^\beta}{2} + \frac{(1-2x)}{2} q^\beta \ ,$$

$$p_x^2 = m^2 - x(1-x)q^2 \simeq m^2 \ \text{ e } \ P^2 = 4m^2 - q^2 \simeq 4m^2 \ . \qquad \text{(A.48)}$$

Já que p_x^2 está sendo tomado igual a m^2, o denominador do integrando em A.45 torna-se uma função par pela troca $x \leftrightarrow 1-x$. Este fato possibilita a eliminação dos termos ímpares

com $x \leftrightarrow 1-x$ em $\mathcal{N}^\mu$. Quando todas essas considerações são levadas a cabo, pode ser usado no cálculo de Λ^μ_ϵ que

$$\begin{aligned}
T_1^\mu &= i[k^2 yz P^\mu + 2yz(Pk)k^\mu + y^3 z^3 m^2 P^\mu] \,, \\
T_2^\mu &= 2i[(kP)k^\mu + y^2 z^2 m^2 P^\mu] \,, \\
T_3^\mu &= -2i[k^2 + y^2 z^2 m^2] P^\mu \,, \\
T_4^\mu &= -2\epsilon^\mu{}_{\beta\gamma} \not{k} k^\gamma q^\beta - \epsilon^\mu{}_{\beta\gamma} m y^2 z^2 q^\beta P^\gamma \quad \text{e} \\
T_5^\mu &= 2\epsilon_{\alpha\beta\gamma} k^\mu k^\gamma q^\beta + (1/2)\epsilon^{\alpha\beta\gamma} y^2 z^2 P^\mu P^\gamma \gamma^\alpha q^\beta \,. \qquad \text{(A.49)}
\end{aligned}$$

Como um T^μ qualquer sempre aparece em $\mathcal{N}^\mu$ sob a forma $\overline{u}(p_1^{'})T^\mu u(p_1)$, podemos usar a identidade de Gordon (A.26), para escrever escrever P^α em termos de γ^α e $q_\lambda \sigma^{\lambda\alpha}$ num T^μ qualquer. Mais especificamente, vale a identidade

$$P^\alpha = 2m\gamma^\alpha + i q_\lambda \epsilon^{\lambda\alpha\rho}\gamma_\rho \,, \qquad \text{(A.50)}$$

quando ela está entre um $\overline{u}(p_1^{'})$ e um $u(p_1)$. Todos estes fatos (A.46, A.49 e A.50) permitem que seja usado

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}^\mu &= \{\overline{u}(p_1^{'})\gamma^\lambda[2imyzk^2\delta^\mu_\lambda + 4imyzk_\lambda k^\mu + 2im^3y^3z^3\delta^\mu_\lambda \\
&+ 4imk_\lambda k^\mu - 4imk^2\delta^\mu_\lambda]u(p_1)\} \\
&+ \{\overline{u}(p_1^{'})q_\lambda[\epsilon^{\lambda\sigma\rho}\gamma_\rho(-\delta^\mu_\sigma k^2 yz - 2k_\sigma k^\mu yz + \delta^\mu_\sigma y^3 z^3 m^2 \\
&+ 2\delta^\mu_\sigma k^2 + 2\delta^\mu_\sigma m^2 y^2 z^2) + 2\epsilon^{\lambda\sigma\rho}\delta^\mu_\sigma \gamma_\rho k^\rho k_\nu] \\
&+ \{\overline{u}(p_1^{'})[-4im^2 y^2 z^2 q^\mu]u(p_1)\} \qquad \text{(A.51)}
\end{aligned}$$

no cálculo de Λ^μ_ϵ, quando o limite não relativístico é levado em conta para os T^μ's.

Se forem feitas em A.45 a translação da variável de integração ($k^\mu \to k^\mu + yz\, p_x$) no denominador e a substituição de N^μ por $\mathcal{N}^\mu$ é possível concluir, após a redefinição $k^\mu \to m w^\mu$,

que

$$
\begin{aligned}
\Lambda_\epsilon^\mu = & \frac{-6\theta e^3}{m^2}\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 dz(yz^2)\int\frac{d^3w}{(2\pi)^3}\,\{\,\overline{u}(p_1^{'})\gamma^\lambda[2iw^2yz\delta_\lambda^\mu \\
+ \; & 4iyzw_\lambda w^\mu + 2iy^3z^3\delta_\lambda^\mu + 4iw_\lambda w^\mu - 4iw^2\delta_\lambda^\mu]u(p_1) \\
+ \; & \overline{u}(p_1^{'})w_\lambda/m[\epsilon^{\lambda\sigma\rho}\gamma_\rho(-\delta_\sigma^\mu w^2yz - 2w_\sigma w^\mu yz - \delta_\sigma^\mu y^3z^3 \\
+ \; & 2\delta_\sigma^\mu w^2 + 6\delta_\lambda^\mu y^2z^2) + 2\epsilon^{\lambda\sigma\nu}\delta_\sigma^\mu\gamma_\rho w^\rho w_\nu]u(p_1) \qquad \text{(A.52)} \\
+ \; & \overline{u}(p_1^{'})q^\mu/m[-4iy^2z^2]u(p_1)\,\}\frac{1}{\{w^2 - [\frac{\theta^2}{m^2}(1-y)z + y^2z^2]\}^4}\,.
\end{aligned}
$$

Na expressão do denominador foi usado, também, que $p_x^2 \simeq m^2$.

A integração em w^2 de A.52 é obtida através das fórmulas 2.7 e 2.8. Isto possibilita afirmar que

$$\Lambda_\epsilon^\mu = \Lambda_\epsilon^{0\mu} = \Lambda_\epsilon^{1\mu} + \Lambda_\epsilon^{2\mu}\,, \qquad \text{(A.53)}$$

onde

$$
\begin{aligned}
\Lambda_\epsilon^{0\mu} = & -\frac{3\theta e^3}{32\pi m^2}\int_0^1 dy\int_0^1 dz\,\{\overline{u}(p_1^{'})\gamma^\mu u(p_1)\} \\
\times & \left\{\frac{-10y^2z^3 + 8yz^2}{3\left[\frac{\theta^2}{m^2}(1-y)z + y^2z^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{2y^4z^5}{\left[\frac{\theta^2}{m^2}(1-y)z + y^2z^2\right]^{\frac{5}{2}}}\right\}, \text{(A.54)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Lambda_\epsilon^{1\mu} = & -\frac{3\theta e^3}{32\pi m^2}\int_0^1 dy\int_0^1 dz\left\{\overline{u}(p_1^{'})\left[\frac{iq_\lambda}{m}\epsilon^{\lambda\mu\rho}\gamma_\mu\right]u(p_1)\right\} \\
\times & \left\{\frac{5y^2z^3 - 8yz^2}{3\left[\frac{\theta^2}{m^2}(1-y)z + y^2z^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{-y^4z^5 + 6y^3z^4}{\left[\frac{\theta^2}{m^2}(1-y)z + y^2z^2\right]^{\frac{5}{2}}}\right\} \text{ e } \text{(A.55)}
\end{aligned}
$$

$$
\Lambda_\epsilon^{2\mu} = \frac{3\theta e^3}{8\pi m^3}\int_0^1 dy\int_0^1 dz\left\{\frac{\overline{u}(p_1^{'})\,iq^\mu\,[y^3z^4]\,\gamma_\mu\,u(p_1)}{\left[\frac{\theta^2}{m^2}(1-y)z + y^2z^2\right]^{5/2}}\right\}. \text{(A.56)}
$$

Caso sejam feitas as integrações em y e z destas expressões, verificam-se as igualdades

$$\Lambda_{\epsilon}^{0\mu} = \left[\overline{u}(p_1^{'})\gamma^{\mu}u(p_1)\right]\left(-\frac{\theta e^3}{32\pi m^2}\right) \tag{A.57}$$

$$\times\left[3+\left(1-\frac{|\theta|}{m}\right)^2+\frac{16m}{|\theta|}-\frac{\left(\frac{|\theta|}{m}\right)^3}{\left(2+\frac{|\theta|}{m}\right)}+12\log\left(\frac{\frac{|\theta|}{m}}{2+\frac{|\theta|}{m}}\right)\right],$$

$$\Lambda_{\epsilon}^{1\mu} = \left\{\overline{u}(p_1^{'})\left[iq_{\lambda}\epsilon^{\lambda\mu\rho}\gamma_{\mu}\right]u(p_1)\right\}\left(-\frac{\theta e^3}{32\pi m^3}\right) \tag{A.58}$$

$$\times\left[4-\frac{\left(\frac{|\theta|}{m}\right)^2}{2}+\frac{\left(-12+\left(\frac{|\theta|}{m}\right)^2\right)\frac{|\theta|}{m}}{2\left(2+\frac{|\theta|}{m}\right)}+\frac{8+\left(\frac{|\theta|}{m}\right)^2}{\frac{|\theta|}{m}}+8\log\left(\frac{\frac{|\theta|}{m}}{2+\frac{|\theta|}{m}}\right)\right],$$

$$\Lambda_{\epsilon}^{2\mu} = \left[\overline{u}(p_1^{'})\,iq^{\mu}\,u(p_1)\right]\left(\frac{\theta e^3}{8\pi m^3}\right) \tag{A.59}$$

$$\times\left[1+\frac{4m}{|\theta|}-\frac{\frac{|\theta|}{m}}{\left(2+\frac{|\theta|}{m}\right)}+3\log\left(\frac{\frac{|\theta|}{m}}{2+\frac{|\theta|}{m}}\right)\right].$$

A expressão final para o Λ^{μ}, a pequenos momentos transferidos, vem da adição de A.13, A.34, A.37, A.57, A.58 e A.59, ou seja,

$$\begin{aligned}\Lambda^{\mu} &= \left[\overline{u}(p_1^{'})\gamma^{\mu}u(p_1)\right]F_1+\left\{\overline{u}(p_1^{'})\left[iq_{\lambda}\epsilon^{\lambda\mu\rho}\gamma_{\mu}\right]u(p_1)\right\}F_2\\ &+ \left[\overline{u}(p_1^{'})\,iq^{\mu}\,u(p_1)\right]F_3\,,\end{aligned} \tag{A.60}$$

onde

$$F_1 = \frac{e^3}{4\pi}\left\{\frac{\lambda}{a}-\frac{1}{|\theta|}\right. \tag{A.61}$$

$$+\frac{1}{2m}\left\{\frac{-2\left[2+\frac{|\theta|}{m}+(\frac{|\theta|}{m})^2+(\frac{|\theta|}{m})^3\right]}{(\frac{|\theta|}{m})(2+\frac{|\theta|}{m})}+\left[2+\left(\frac{|\theta|}{m}\right)^2\right]\log\left(\frac{2+\frac{|\theta|}{m}}{\frac{|\theta|}{m}}\right)\right\}$$

$$-\frac{\theta}{8m^2}\left[3+\left(1-\frac{|\theta|}{m}\right)^2+\frac{16m}{|\theta|}-\frac{\left(\frac{|\theta|}{m}\right)^3}{\left(2+\frac{|\theta|}{m}\right)}+12\log\left(\frac{\frac{|\theta|}{m}}{2+\frac{|\theta|}{m}}\right)\right]\Bigg\},$$

$$F_2=\frac{-e^3}{16\pi m^2}\left\{\left[-3+3\frac{|\theta|}{m}+\frac{4-3\left(\frac{|\theta|}{m}\right)^2}{2}ln\left(\frac{2+\frac{|\theta|}{m}}{\frac{|\theta|}{m}}\right)\right]\right. \tag{A.62}$$

$$\left.+\frac{\theta}{2m}\left[4-\frac{\left(\frac{|\theta|}{m}\right)^2}{2}+\frac{\left(-12+\left(\frac{|\theta|}{m}\right)^2\right)\frac{|\theta|}{m}}{2\left(2+\frac{|\theta|}{m}\right)}+\frac{8+\left(\frac{|\theta|}{m}\right)^2}{\frac{|\theta|}{m}}+8\log\left(\frac{\frac{|\theta|}{m}}{2+\frac{|\theta|}{m}}\right)\right]\right\}$$

$$F_3=\left(\frac{\theta e^3}{8\pi m^3}\right)\left[1+\frac{4m}{|\theta|}-\frac{\frac{|\theta|}{m}}{\left(2+\frac{|\theta|}{m}\right)}+3\log\left(\frac{\frac{|\theta|}{m}}{2+\frac{|\theta|}{m}}\right)\right] \tag{A.63}$$

Vamos fazer agora uma discussão sobre cada um dos três constituintes de Λ^μ. As contribuições proporcionais a corrente podem ser absorvidas na renormalização da carga, já que F_1 é uma constante. Quando o vértice é contraído com A_μ, a parte que contém $\overline{u}(p_1^{'})iq^\mu u(p_1)$ gera um $q^\mu A_\mu$. Este $q^\mu A_\mu$, por sua vez, assume diferentes valores, a depender da escolha do gauge. Finalmente, a contribuição devido a parcela $\left\{\overline{u}(p_1^{'})\left[iq_\lambda\epsilon^{\lambda\mu\rho}\gamma_\mu\right]u(p_1)\right\}$ F_2 pode ser medida (veja, por exemplo, o caso da correção do momento magnético do férmion).

Referências

[1] J. M. Leinaas e J. Myrheim, *On the Theory of Identical Particles* , Il Nuovo Cimento **37**, 1 (1977);

[2] Y. Aharonov e D. Böhm, *Significance of Eletromagnetic Potentials in the Quantum Theory*, Phys. Rev. **115**, 485 (1959);

[3] F. Wilczek, *Magnetic Flux, Angular Momentum, and Statistics* , Phys. Rev. Lett. **48**, 1144 (1982);

[4] F. Wilczek, *Quantum Mechanics of Fractional-Spin Particles* , Phys. Rev. Lett. **49**, 957 (1982);

[5] B. I. Halperin, *Statistics of Quasiparticles and the Hierarchy of Fractional Quantized Hall States*, Phys. Rev. Lett. **52**, 1583 (1984);

[6] J. F. Schonfeld, *A massa term for three-dimentional gauge fields*, Nuc. Phys. **B185**, 157 (1981);

[7] S. Deser, R. Jackiw e S. Templeton, *Topologically Massive Gauge Theories*, Ann. Phys. **140**, 372 (1982);

[8] M. Gomes, R. S. Mendes, R. F. Ribeiro e A. J. da Silva, *Gauge structure, anomalies, and mass generation in a*

tree-dimensional Thirring model , Phys. Rev. **D43**, 3516, (1991);

[9] H. O. Girotti, M. Gomes, J. L. de Lyra, R. S. Mendes, J. R. S. Nascimento e A. J. da Silva, *Attractive Forces between Electrons in (2+1)-Dimensional QED* , Phys. Rev. Lett. **69**, 2623, (1992);

[10] J. Bardeen, L. N. Cooper, e J. R. Schrieffer, *Theory of Superconductivity*, Phys. Rev. **108**, 1175 (1957);

[11] L. N. Cooper, *Bound Eletron Pairs in a Degenarate Fermi Gas* Phys. Rev. **104**, 1189 (1956);

[12] P. B. Wiegmann, *Superconductivity in Strongly Correlated Eletronic Systems and Confinament versus Deconfinament Phenomenon*, Phys. Rev. Lett. **60**, 821 (1988);

[13] I. Dzyaloshinskii, A. Polyakov e P. Wiegmann, *Neutral Fermions in Paramagnetic Insulators*, Phys. Lett. **A127**, 112 (1988);

[14] R. B. Laughlin, *Superconducting Ground State of Non-interacting Particles Obeying Fractional Statistics*, Phys. Rev. Lett. **60**, 2677 (1988);

[15] A. L. Fetter, C. B. Hanna e R. B. Laughlin, *Random-Phase Aproximation in the Fractional-Statistics Gas*, Phy. Rev. **B39**, 9679 (1989);

[16] Y. H. Chen, F. Wilczek, E. Witten e B. I. Halperin, *On Anyon Superconductivity*, Int. J. Mod. Phys. **B3**, 1942 (1989);

[17] A. P. Balachandran, E. Ercolessi, G. Morandi e A. M. Srivastava, *Hubbard model and anyon superconductivity*, World Scientific, Singapore, (1990);

[18] F. Wilczek, *Fractional Statistics and Anyon Superconductivity*, World Scientific, Singapore, (1990);

[19] A. Lerda, *Anyons-Quantum Mechanics of Particles with Fractional Statistics*, Springer-Verlag, Berlin (1990);

[20] R. E. Prange e S. M. Girvin (ed), *The Quantum Hall Effect*, Springer-Verlag, Berlin, 1990;

[21] S. Forte, *Quantum mechanics and field theory with fractional spin and statistics*, Rev. Mod. Phys. **64**, 193 (1992);

[22] M. Gomes, V. O. Rivelles e A. J. da Silva, *Dinamical parity violation and the Chern-Simons term*, Phys. Rev. **D41**, 1363 (1990);

[23] R. F. Ribeiro, *Tratamento 1/N de dois Modelos em Teoria Quântica de Campos: Modelo O(N)×O(N) e Modelo de Thirring*, Tese de Doutorado, IFUSP, (1990);

[24] H. O. Girotti, M. Gomes e A. J. da Silva, *The fermion-fermion effective potential in Maxwell-Chern-Simons Theory* , Phys. Lett. **B274**, 357, (1992);

[25] G. Breit, *The effect of retardation on the interation of two electrons*, Phys. Rev. **34**, 553 (1929);

[26] S. V. L. Pinheiro, *Estados Ligados dos Modelos Gross-Neveu e Thirring em (2+1) Dimensões*, Dissertação de Mestrado, IFUSP, (1993);

[27] L. C. Malacarne, *Estados Ligados na Eletrodinâmica Escalar em (2+1)D com Termo de Chern-Simons*, Dissertação de Mestrado, IFUSP, (1994);

[28] F. Mandl e G. Shaw, *Quantum Field Theory*, John Wiley & Sons, New York, (1984);

[29] C. Itzykson e J. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill Book Company, New York, (1986);

[30] M. Gomes, *Apostilas dos cursos I e II de Introdução à Teoria Quântica de Campos*, IFUSP, (1993);

[31] Y. I. Kogan e Y. Morozov, *Structure of (2+1) photodynamics*, Sov. Phys. JETP **61**, 1 (1985);

[32] T. Kimura, *Manifestly Covariant Canonical Quantization of 3-D QED with Chern-Simons Term*, Prog. Theor. Phys. **81**, 1109 (1989);

[33] N. Imai, K. Ishikawa e I. Tanaka, *Unitarity of Topologically Massive Abelian Gauge Theory*, Prog. Theor. Phys. **81**, 758 (1989);

[34] R. G. Newton, *Scatering theory of waves and particles*, McGraw-Hill, New York (1966);

[35] S. N. Gupta, *Particle-particle and particle-antiparticle interactions*, Nucl Phys. **57**, 19, (1964);

[36] S. N. Gupta, *Quantum Electrodymics*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, (1977);

[37] V. B Berestettskiĭ, E. M. Lifshitz e L. P. Pitaevskiĭ, *Relativistic Quantum Theory* (vol.1), Pergamon Press, New York, (1971);

[38] J. J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, New York (1967);

[39] C. Frajuca, *Estados Ligados do Modelo de Thirring em (1+1)D na Aproximação 1/N*, Dissertação de Mestrado, IFUSP, (1992);

[40] V. S. Alves, *Estados Ligados em Modelos Bi-Dimensionais: o caso da QED_2 e de um modelo com interações Quárticas Fermiônicas*, Dissertação de Mestrado, IFUSP (1993);

[41] S. Coleman, *Aspects of Simmetry*, Ed. Cambridge, Cambridge University Press, (1985);

[42] R. S. Mendes, *Alguns Aspectos da Expansão 1/N em Mecânica Quântica e Teoria de Campos*, Dissertação de Mestrado, IFUSP, (1988);

[43] J. Collins, *Renormalization*, Cambridge University Press, Cambridge (1985);

[44] J. H. Lowenstein B. Schroer, *Gauge Invariance and Ward Identities in a Massive-Vector-Meson Model*, Phys. Rev. **D6**, 1553 (1972);

[45] F. Bloch e A. Nordsieck, *Note on the Radiation Field of the Eletron*, Phys. Rev. **52**, 54 (1937);

[46] H. O. Girotti, M. Gomes e A. J. da Silva, *Infrared structure of 2+1 dimentional quantum Electrodynamics*, PREPRINT IFUSP/P-977 (1992);

[47] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, New York (1980);

[48] M. Abramowitz e I. A. Stegua, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York (1972);

[49] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics*, Pergamon Press, Oxford (1976);

[50] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, New York, New York (1968);

[51] S. Wolfram, *Mathematica - A System for Doing Mathematics by Computer*, Addison-Wesley Publishing Company, New York (1991);

[52] C. R. Hagen, Comment on *"Attractive Forces between Electrons in (2+1)-Dimensional QED"* , Phys. Rev. Lett. **71**, 202 (1993);

[53] H. O. Girotti, M. Gomes, J. L. de Lyra, R. S. Mendes, J. R. S. Nascimento e A. J. da Silva, *Reply on "Comment on "Attractive Forces between Electrons in (2+1)-Dimensional QED""*, Phys. Rev. Lett. **71**, 203, (1993);

[54] D. Gromes, *Effective Hamiltonian for Charmonium and Similar Two-Fermion Systems*, Nucl. Phys. **B131**, 80 (1977);

[55] M. G. Olsson, K. J. Miller, *Relativistic corrections in potential models*, Phys. Rev. **D28**, 674 (1983);

[56] J. Sucher, *Two-photon exchange force in scalar quantum electrodynamics: The asymptotic story*, Phys. Rev **D49**, 4284 (1994).