*João Carlos
Josif Frenkel
Climacoz
João Luiz Frenkel
Klaus & Rother*

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

1103

UM CONTRA-EXEMPLO AO TEOREMA DE BLOCH-NORDSIECK
NA CROMODINÂMICA QUÂNTICA

SBI-IFUSP

305M810T1105

MARIA TERESA CLIMACO DOS SANTOS THOMAZ

Tese de doutoramento apresentada no
Instituto de Física da Universidade
de São Paulo, sob a orientação do Dr.
Josif Frenkel.

SÃO PAULO

1981

Ao companheirismo
do Carlos Eugênio e do Josif.

Agradecimentos:

Enfim, chegamos ao final do trabalho. Existe a alegria do dever cumprido, mas também a tristeza da partida. Como eram gostosas as nossas discussões sobre cada ponto do trabalho. O Josif nos orientando com segurança, o Carlos Eugênio e eu sempre brigando para chegar ao fundo do poço de cada dúvida.

O ambiente de trabalho que se criou entre nós de camaradagem, paciência e crítica. Paciência que o Josif e o Eugênio tiveram para me ensinar tudo que sei sobre teoria de campos. Paciência em todas as vezes que me tornei intransigente nos pontos de discordância. Crítica em cada passo a ser dado no desenvolvimento do trabalho.

Jamais esquecerei as nossas brigas amigáveis e a igualdade de direito de dar palpites.

Depois veio o exame de qualificação. Esse objeto de opressão e neurose que me permitiu novas camaradagens. Como esquecer o sentimento de solidariedade que se estabeleceu entre a Cria, o Eugênio e eu? A vontade de cada um de mostrar ao outro "... mais um probleminha interessante", ou, "... uma outra maneira de resolver aquele problema...".

Como agradecer ao Nelson o seu curso completíssimo de Termodinâmica e Mecânica Estatística em apenas 6 horas de aula? É claro que não posso esquecer de agradecer a todos aqueles que durante esse período deram motivos para focos. Devo confessar que esses focos serviram para relaxar o tensão do ambiente, proporcionando momentos de gostosas gargalhadas.

E finalmente chegou a hora de colocar o trabalho na forma de uma tese. Aí preciso agradecer ao Elias (meu velho pescador), que deixou os peixes sossegados no Rio, só para

vi datilografar a tese, a Cecília e a Con pelas conexões dos anos que passaram pela revisão de papai. Agradeço também a Neusa pela datilografia da capa, a Carminha a datilografia do Resumo e Abstract, e, finalmente a Luiza por ter feito o desenho da curva $F(\beta)$ do capítulo 5 (o único desenho bonito da tese).

Mas na verdade, preciso agradecer a tantos outros que me apoiaram nestes momentos finais. A todos aqueles que demonstraram interesse para saber do andamento da forma final da tese, e principalmente a aqueles que souberam entender o meu estado de nervos e me auxiliaram.

Mas é claro que não posso esquecer de agradecer a mamãe FAPESP pelo meu salário durante todo o doutoramento.

Para concluir, preciso agradecer ao Josif todas as tangerinas que ele trouxe para que o Eugênio e eu trabalhássemos melhor e com mais eficiência (Josif, as tangerinas de 81 não chegaram, será que foram desviadas?).

Como saldo muito positivo ficam os elos de amizades que começaram através de contatos profissionais, mas que permitiram que a nossa união sobrevivesse as brigas entre cabeças duras, e as quase assassinatos durante os estudos para o exame de qualificação.

Peco desculpas pelas tantas vezes que tirei algumas pessoas do sério, e de minha parte perdão a todos por todas as noitadas de samba de que não participei nos últimos três anos.

RESUMO

Usando teoria de perturbação, fizemos uma análise detalhada das divergências infravermelhas em 4.^a ordem do processo de aniquilação do par elétron-pósitron. Mostramos que o teorema de Bloch-Nordsieck garante o cancelamento destas divergências em QED. Em seguida, consideramos um processo em QCD com duas partículas coloridas no estado inicial, somando sobre as cores destas duas partículas. O processo escolhido foi o de aniquilação do par quark-anti-quark. Calculamos o processo em 4.^a ordem de perturbação e mostramos neste caso que o Teorema de Bloch - Nordsieck não se verifica. Este resultado é consequência do fato desta teoria ter um caráter não-abeliano. O não-cancelamento das divergências infravermelhas significa que a natureza do estado ligado é fundamental para o uso consistente da teoria de perturbação na QCD.

ABSTRACT

Using perturbation theory, we made a detailed analysis of the infrared divergencies to the 4th order for the process of annihilation of the pair electron-positron. We showed that the Bloch-Nordsieck theorem guarantees the cancellation of these divergencies in QED. Then we considered a process in QED involving two coloured particles in the initial state, summing over the colours of these particles. The process chosen was the annihilation of the pair quark-anti-quark. We calculated the process to the 4th order in perturbation theory, and showed that in this case the Bloch-Nordsieck theorem is not verified. This result is a consequence of the fact that this theory has a non-abelian character. The non-cancellation of the infrared divergencies signifies that the nature of the bound-state is fundamental for the consistent use of perturbation theory in QCD.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1	INTRODUÇÃO	1
1.1.	Teorias de Gauge	6
1.2.	Teorema de Bloch-Nordsieck	10
CAPÍTULO 2	DIVERGÊNCIAS INFRAVERMELHAS EM SEGUNDA ORDEM DE CORREÇÃO A σ_B .	11
2.1.	Cálculo das Divergências Infravermelhas em Ordem e^2 a σ_B na QED	12
2.2.	Cálculo das Divergências Infravermelhas em Ordem g^2 a σ_B na QCD	15
CAPÍTULO 3	CANCELAMENTO DAS DIVERGÊNCIAS SUBDOMINANTES EM QED	17
3.1.	Gráficos da Classe I	19
3.2.	Gráficos da Classe II	26
CAPÍTULO 4	CÁLCULO DAS DIVERGÊNCIAS SUBDOMINANTES DO PROCESSO DE ANIQUILAÇÃO $q q \rightarrow \gamma^*$	33
4.1.	Método de Cálculo das Divergências Infravermelhas	33
4.2.	Cálculo das Divergências Infravermelhas nos Gráficos Abelianos em QCD	39
	i) Gráficos da Classe I e da Classe II	40
	ii) Outros Gráficos Abelianos	50
4.3.	Cálculo das Divergências I.R. dos Gráficos não-Abelianos	52
CAPÍTULO 5	CONCLUSÕES	59
APÊNDICE A		64
APÊNDICE B		66
APÊNDICE C		68
APÊNDICE D		69
APÊNDICE E		70

APÊNDICE F	72
APÊNDICE G	74
APÊNDICE H	79
REFERÊNCIAS	82

Capítulo 1.

INTRODUÇÃO.

As divergências infravermelhas (I.R.) existem mesmo em teorias clássicas que possuem partículas de massa zero. A origem clássica dessas divergências é a seguinte: no espalhamento de uma partícula carregada, a intensidade de radiação por unidade de frequência ω , I_ω , tende a uma constante para $\omega \rightarrow 0$ (Jackson 75, cap. 15). Se o número médio de fótons por unidade de frequência, $\bar{n}_\omega$, é dado por

$$\bar{n}_\omega = \frac{I_\omega}{\hbar\omega},$$

temos que $\bar{n}_\omega \rightarrow \infty$ para $\omega \rightarrow 0$. É a chamada catástrofe no infravermelho.

Supõe-se atualmente que as teorias de gauge descrevem as interações fracas, eletromagnéticas e fortes. Nessas teorias as interações são mediadas por bósons vetoriais, sendo que alguns têm massa zero. A existência desses bósons sem massa faz com que apareçam as divergências I.R. nas teorias de gauge.

As divergências I. R. foram tratadas primeiramente na teoria de gauge das interações eletromagnéticas que se chama Eletrodinâmica Quântica (QED).

Ao tratar processos, por exemplo, o espalhamento de dois elétrons em teoria de perturbação, aparecem gráficos que possuem loops, por ex.:

onde obtemos amplitudes infinitas. As divergências vêm da região de grandes valores de $|\vec{k}|$ (divergências ultravioletas), e da região $|\vec{k}| \sim 0$, que é a região infravermelha (região associada a grandes comprimentos de onda). O tratamento das divergências nas duas regiões é diferente, e só estamos interessados nas divergências da região infravermelha.

Yennie et al. (Yennie 61) mostraram que nas seções de choque dos processos em QED as divergências I.R. se exponenciam/ e se fatorizam na forma

$$\sigma_{\text{QED}} \sim e^{-\alpha \ln \frac{1}{\lambda}} \cdot \sigma_{\text{finito}},$$

onde $\lambda^{\dagger} \rightarrow 0$. Com isso mostraram que apesar de cada termo da expansão não ter significado físico, o resultado final se soma numa exponencial que vai a zero quando tomamos o limite de $\lambda \rightarrow 0$. Este resultado implica que esse processo é fisicamente proibido.

Em 1937, Bloch e Nordsieck (Bloch 37) ressaltaram que para obtermos uma seção de choque física ordem a ordem, precisamos somar as seções de choque dos processos considerados seções de choque de processos que diferem dos processo estudado por um número indefinido de fótons soft no estado final (veja seção 1.2).

Através desse mecanismo de Bloch-Nordsieck as divergências I.R. em QED se cancelam na seção de choque total ordem a ordem.

A Cromodinâmica Quântica (QCD) é a teoria de gauge que atualmente se supõe que descreve as interações fortes.

A QCD é obtida generalizando as idéias da QED. Aumenta

[†] λ é o parâmetro usado para regularizar a teoria na região infravermelha.

mos a dimensão do grupo em relação ao qual a nova teoria (QCD) vai ser invariante por transformações locais.

Dois fatos muito importantes diferenciam a QCD da QED:

i) a QED é uma teoria linear nos campos vetoriais, mas a QCD não é;

ii) o grupo de simetria das duas teorias. A QCD é invariante por SU(3) cujos gerados não comutam entre si, e nos capítulos 3 e 4 veremos que essa diferença é fundamental.

Como a QCD ainda não foi resolvida, muitas vezes usamos a nossa compreensão da QED para por analogias tentar entender a QCD. Pelas duas diferenças mencionadas acima deve ficar claro que nem todos os fenômenos da QCD possuem análogo em QED. Os fenômenos que vierem da não linearidade das equações dos campos de bósons em QCD não devem ter análogo na QED.

Frenkel e Taylor (Frenkel 76) mostraram que as divergências I.R. chamadas de leading[†] se exponenciavam como em QED. Através do mecanismo de Bloch-Nordsieck as divergências leading se cancelam ordem a ordem em teoria de perturbação.

Entretanto, nada se falava sobre as outras divergências porque os cálculos para obtê-las são extremamente difíceis. Mas como se acredita que a QCD é uma teoria física, então era consenso que todas as divergências I.R. se cancelavam na QCD ordem a ordem.

Essa era a situação até que Taylor, Frenkel et al. (Doria 80, Andrasi 81) mostraram que para o processo

$$q + \bar{q} \rightarrow \mu^+ \mu^- + q + \bar{q} + \text{soft gluons},$$

[†] As divergências leading são as maiores potências dos logaritmos em cada ordem de perturbação.

onde q são quarks, as divergências I. R. subdominantes não se cancelam quando consideramos o mecanismo de Bloch-Nordsieck.

Devido ao acoplamento dos gluons na QCD (veja seção 1.1), a constante de acoplamento efetiva $g(k)$ aumenta à medida que k diminui (região infravermelha). Apesar da constante efetiva na região infravermelha não ser um bom parâmetro de expansão, nos processos de alta energia temos sub-processos que envolvem a constante de acoplamento efetiva para pequenos k , ou seja,

onde $Q \gg M$, sendo M a maior massa da teoria, e $k \ll m$, sendo m a menor massa da teoria, e precisamos que as seções de choque desses processos sejam físicas.

Para estudarmos as divergências I.R. na QCD escolhemos o processo de aniquilação de um quark com um anti-quark num fóton virtual. Esse é o processo mais simples onde existem duas partículas coloridas no estado inicial (a discussão dessa condição é feita no capítulo 5). Tomamos médias sobre as cores dos quarks incidentes, pois os hadrons são partículas sem cor. A expansão perturbativa é feita na constante de acoplamento g fixa convenientemente escolhida.[†] Os cálculos serão feitos no gauge de Feynman.

Desejamos ver se o mecanismo de Bloch-Nordsieck cancela as divergências I.R. desse processo.

[†] Esta escolha arbitrária conveniente é possível devido ao grupo de renormalização.

No próximo item apresentamos as lagrangeanas de QED e de QCD. Comparamos as duas teorias, mostrando o que há de diferente e de semelhante entre elas.

No capítulo 2 estudamos o processo

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma^* + \text{soft photons},$$

em QED e mostramos que não há divergências I.R. em ordem e^2 a σ_B (seção de choque de Born), mesmo quando os $i\epsilon$'s nos propagadores de férmions não são desprezados.

Em seguida mostramos que o processo

$$\bar{q} + q \rightarrow \gamma^* + \text{soft gluons},$$

também não apresenta divergências I. R. em ordem g^2 a σ_B .

No capítulo 3 obtemos que em ordem e^4 a σ_B o processo de aniquilamento $e^-e^+ \rightarrow \gamma^*$ não apresenta I.R. mesmo quando os $i\epsilon$'s dos propagadores de férmions não são desprezados. Essa é a primeira vez que, num processo de QED, é mostrado o cancelamento das divergências subdominantes.

No capítulo 4 calculamos o processo de aniquilação $q\bar{q} \rightarrow \gamma^*$ em ordem g^4 a σ_B . Mostramos que os $i\epsilon$'s nos propagadores de férmions dão origem a divergências subdominantes que não se cancelam. O método de cálculo desenvolvido permitiu obter o resultado a partir de um número menor de gráficos do que é usualmente calculado.

No capítulo 5 discutimos o não cancelamento das divergências subdominantes e como podemos tentar entender de maneira heurística esse resultado. E finalmente, discutimos as consequências desse não cancelamento.

Nos apêndices de A a H estão as regras de Feynman e

cálculos mais longos que não foram colocados no texto.

Usaremos as unidades em que $\hbar = c = 1$.

1.1 - Teorias de Gauge.

Existem várias indicações experimentais (Feynman 76) de que as interações fortes são descritas pela teoria de gauge denominada de Cromodinâmica Quântica (QCD). As partículas fundamentais da QCD são os quarks (fêrmions), cujas interações são mediadas por bósons vetoriais denominados de gluons.

Há uma completa analogia entre a QED e a QCD. Em parte, as esperanças depositadas na QCD vêm do sucesso das previsões da QED.

Na QED os fêrmions interagem através da carga elétrica, porém o bóson vetorial (fóton), que medeia as interações, não possui carga elétrica. A QED é uma teoria de gauge invariante por transformações do grupo $U(1)$.

Na QCD cada partícula fundamental de spin $1/2$ (quarks) vem em tripletos de cor, e essas partículas interagem através da carga de cor. São os gluons (bósons vetoriais) que medeiam as interações entre os fêrmions. Os gluons formam um vetor de oito componentes no espaço das cores, ou seja, A_μ^a , $a = 1, 2, \dots, 8$, e μ os índices de Lorentz. Os gluons possuem carga de cor e por isso podem interagir entre si, o que não ocorre com os fótons. Os gluons não carregam flavour, não possuem carga elétrica, e são desprovidos de massa.

A QCD é invariante por transformações do grupo $SU(3)$ nas cores dos fêrmions, e essa simetria nas cores é exata.

Um spinor da QCD no espaço das cores é dado por

$$\psi: \begin{pmatrix} u_{\text{verm}} \\ u_{\text{azul}} \\ u_{\text{az}} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} d_{\text{verm}} \\ d_{\text{azul}} \\ d_{\text{az}} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} s_{\text{verm}} \\ s_{\text{azul}} \\ s_{\text{az}} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} c_{\text{verm}} \\ c_{\text{azul}} \\ c_{\text{az}} \end{pmatrix}; \dots \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{interação} \\ \text{forte (cor)} \\ \downarrow \end{matrix},$$

onde u, d, s, c são os flavours up, down, strange e charm. As interações fortes ocorrem através da cor, e os vértices que envolvem férmions e gluons são,

A lagrangeana da QED é obtida impondo que $U(1)$ seja uma simetria local. A lagrangeana que satisfaz a essa condição, incluindo os campos dos fótons, é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\Psi}(i\not{\partial} - m)\Psi + ie\bar{\Psi}\gamma_{\mu}A_{\mu}\Psi,$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}.$$

Os A_{μ} são os campos vetoriais, e a carga elétrica, m a massa do férmion, γ_{μ} as matrizes de Dirac, Ψ o spinor de Dirac e $\not{\partial} = \gamma_{\mu}\partial_{\mu}$.

Notemos que $F_{\mu\nu}$ é linear nos campos, e lembremos que o grupo $U(1)$ é um grupo abeliano.

A QED possui um único vértice, que é

A QCD em analogia a QED impõe uma simetria local, só que agora é em relação ao grupo $SU(3)$ das cores dos férmions.

A lagrangeana da QCD, que é invariante por transformações locais em relação ao grupo $SU(3)$ das cores, incluindo os campos de gluons, é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} E_{\mu\nu}^a E_{\mu\nu}^a + \bar{\Psi} (i \not{\partial} - m) \Psi + i g \bar{\Psi} \gamma_\mu t^a \Psi A_\mu^a,$$

$$\mu = 1, 2, 3, 4 \quad \text{e} \quad a = 1, 2, \dots, 8,$$

onde estamos somando sobre os índices de cor e os índices de Lorentz.[†]

Agora Ψ são os tripletos no espaço das cores, g a constante de acoplamento, A_μ^a é uma componente do potencial vetor no espaço das cores. As matrizes t^a são os geradores do grupo SU(3) e satisfazem a seguinte relação:

$$[t^a, t^b] = i f_{abc} t^c,$$

sendo f_{abc} a constante de estrutura do grupo SU(3). As matrizes t^a são iguais à metade das matrizes de Gell-Mann (Faddev 80, pág 15). Devido a não comutatividade dos geradores t^a , o grupo SU(3) é não-abeliano.

O tensor $E_{\mu\nu}^a$ é igual à

$$E_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c; \quad a, b, c = 1, 2, \dots, 8.$$

Note que $E_{\mu\nu}^a$ é quadrático nos campos A_μ^a . Essa parte quadrática faz com que apareça na lagrangeana vértices de interação só entre gluons. É importante que a interação entre os gluons se dá através da mesma constante de acoplamento que aparece na interação entre férmions e gluons.

Os vértices da QCD são:

[†] Nessa discussão introdutória não mencionaremos os ghosts que aparecem no gauge de Feynman. Os ghosts serão introduzidos no capítulo 4.

i.)

$$= ie \gamma_\mu t^a, \quad (1.1)$$

mas, como neste vértice aparece a matriz t^a , não podemos permutar simplesmente dois vértices que envolvam acoplamento de férmions e gluons. Como em QED o vértice só depende de γ_μ , os vértices podem ser permutados.

Esse vértice possui análogo em QED, e os gráficos em QCD, que só envolvem esse tipo de vértice, serão chamados de gráficos abelianos.

ii) os vértices que não possuem análogo em QCD são os que envolvem apenas gluons, ou seja,

cujas expressões são dadas no Apêndice A.

Esses vértices aparecem devido a não-linearidade do tensor $E_{\mu\nu}^a$ e não possuem análogo em QED. Os gráficos em que esses vértices aparecem serão chamados de gráficos não-abelianos.

Devido a existência desses vértices, os gluons interagem mesmo na ausência de matéria. Com isso, devemos esperar encontrar fenômenos que não ocorrem na QED.

Façamos então um resumo comparativo da QED com a QCD.

Ambas são teorias de gauge cujas interações entre os férmions são mediadas por bósons vetoriais sem massa. Ambas são invariantes por transformações de gauge local em relação aos grupos $U(1)$ (QED) e $SU(3)$ (QCD).

No entanto, na QCD os gluons interagem entre si através da cor, o que não ocorre com os fótons em QED.

Finalmente, o fato da QCD ser uma teoria não-abeliana, não nos permite permutar dos vértices do tipo (1.1). A consequência dessa não comutatividade vai ficar claro no capítulo 4, onde calcularemos o processo de aniquilação de um quark com um anti-quark dando um fóton virtual.

1.2. Teorema de Bloch-Nordsieck.

Para obtermos seções de choque físicas (sem divergências I.R.) em teorias que possuem partículas de massa zero, adicionamos à seção de choque do processo estudado a seção de choque de um processo que difere do anterior pela presença de um número indefinido de partículas de massa zero no estado final.

Esta receita para obter seções de choque físicas, decorre do fato de que nas seções de choque medidas experimentalmente não podemos distinguir entre processos cujas diferenças de energia seja menor que ΔE , onde ΔE é a resolução do aparelho de medida.

Além disso, sabemos da Eletrodinâmica Clássica que partículas aceleradas irradiam.

Capítulo 2.

DIVERGÊNCIAS INFRAVERMELHAS EM SEGUNDA ORDEM DE CORREÇÃO A σ_s .

Já foi mostrado (Ganapathi 81) que o espalhamento de um quark massivo por um potencial sem cor não apresenta divergência I.R. quando tomamos média sobre a cor da partícula incidente. Entretanto, Taylor, Frenkel e Dória (Dória 80) mostraram que no processo

$$q + q \rightarrow \mu\mu^+ + q + q + \text{gluons soft},$$

não há cancelamento das divergências I.R. pelo mecanismo de Bloch Nordsieck, mesmo quando tomamos médias sobre as cores das partículas iniciais e finais.

O que distingue os dois processos acima, é que no processo estudado por Taylor et al. existem duas partículas coloridas no estado inicial, permitindo que ocorra um fenômeno a mais, que é a troca de cor entre as partículas num mesmo estado, enquanto que no espalhamento do quark por um potencial externo singleto, essa possibilidade a mais não ocorre. Por isso, para estudar as divergências I.R. em QCD escolhemos o processo

$$\bar{q} + q \rightarrow \gamma^* + \text{soft gluons}, \quad (2.1)$$

onde q e $\bar{q}$ são quarks e anti-quarks massivos respectivamente, e γ^* um fóton virtual (fora da camada de massa); que é o processo mais simples em que temos duas partículas coloridas no estado inicial.

Apresentaremos os cálculos dos gráficos em QED do processo de aniquilação de um par elétron-pósitron e em seguida a contribuição dos gráficos abelianos em QCD do processo (2.1). Isso será feito para realçar, do ponto de vista dos gráficos, as di

ferenças entre as duas teorias.

Neste capítulo estudaremos as correções de ordem g^2 a σ_B , sendo

$$\sigma_B \equiv \text{diagrama}, \quad (2.2)$$

onde,

$$\text{diagrama} \equiv \left[\text{diagrama} \right]^*$$

e $*$ representa tomar o complexo conjugado da expressão associada ao gráfico.

Trabalharemos no gauge de Feynman e como as divergências I.R. estão associadas às correções de gluons soft ($k \sim 0$) usaremos a aproximação eikonal.[†]

As regras de Feynman na aproximação eikonal estão contidas no Apêndice A.

2.1. Cálculo das Divergências Infravermelhas em Ordem e^2 a σ_B na QED.

Olhemos em QED o processo

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma^* + \text{fótons soft},$$

onde e^- e e^+ são elétron e pósitron respectivamente, e γ^* um fóton virtual e as correções a σ_B (cf. (2.2)) são fótons soft.

Pelo teorema de Bloch-Nordsieck, os gráficos que contribuem para a seção de choque em ordem g^2 a σ_B são,

[†] Na aproximação eikonal, o momento k dos gluons soft é tal que $k \ll p, q$, onde p e q são os momentos das partículas incidentes. Nessa aproximação os termos quadráticos em k^2 são desprezados em comparação aos termos lineares em k nos propagadores (veja Apêndice A).

$$\sigma_{\text{QED}}^{(2)} = \left\{ \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} + \text{C.C.} \right\} + \text{diagram 5} + \text{diagram 6}, \quad (2.3)$$

onde C.C. significa que devemos somar a cada gráfico entre parêntese o seu complexo conjugado.

Inicialmente vamos calcular a contribuição dos gráficos que envolvem correções em pernas diferentes.

Na aproximação eikonal, temos que

$$\text{diagram 1} + \text{C.C.} = 2 e^2 \frac{p \cdot q}{(2\pi)^4} \text{Im} \left\{ \int d^4 k \frac{1}{q \cdot k - i\epsilon} \frac{1}{p \cdot k + i\epsilon} \frac{1}{k^2 - i\epsilon} \right\} \sigma_B, \quad (2.4)$$

onde q é o 4-momento associado ao fêrmion incidente e p é o 4-momento associado ao anti-fêrmion, e é a constante de acoplamento.

Usando que

$$\frac{1}{a - i\epsilon} = P \left(\frac{1}{a} \right) + i\pi \delta(a), \quad (2.5)$$

nos três propagadores que aparecem na (2.4), obtemos que

$$\text{diagram 1} + \text{C.C.} = e^2 \frac{p \cdot q}{(2\pi)^3} \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}}{|\vec{k}|} \frac{1}{p \cdot k} \frac{1}{q \cdot k} \cdot \sigma_B, \quad (2.6)$$

onde λ e Δ são os "cut-off" inferior e superior, sendo que Δ separa a região de fóton soft da região de fótons hard. Agora o 4-momento $\underline{k}$ está na camada de massa*. Devemos notar que a (2.6) é a contribuição leading**, logo em ordem e^2 em nada modifica levar em conta os $i\epsilon$'s que aparecem nos propagadores de fêrmions.

* $\underline{k}$ em camada de massa, significa que $k^2 = 0$.

** Na contribuição leading os $i\epsilon$'s dos propagadores de fêrmions são desprezados.

A contribuição do gráfico com um fóton real emitido, mas com os fótons soft ligando pernas diferentes é

$$\text{Diagram} + \text{C.C.} = -e^2 \frac{p \cdot q}{(2\pi)^3} \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}}{|\vec{k}|} \frac{1}{p \cdot k} \frac{1}{q \cdot k} \cdot \sigma_B. \quad (2.7)$$

Comparando (2.6) e (2.7), vemos que as suas contribuições se cancelam.

Uma outra classe de gráficos que aparece na (2.3) são os gráficos que possuem correção numa mesma perna.

Calculando a bolha de auto-energia de fêrmions na aproximação eikonal (ver Apêndice B), obtemos que

$$\text{Diagram} + \text{C.C.} = -e^2 \frac{q^2}{(2\pi)^4} \text{Im} \left\{ \int d^4 k \frac{1}{(q \cdot k + i\varepsilon)^2} \frac{1}{k^2 - i\varepsilon} \right\} \sigma_B. \quad (2.8)$$

Fazendo a integral em k_0 usando o teorema de Cauchy, a (2.8) fica igual a

$$\text{Diagram} + \text{C.C.} = -\frac{e^2 q^2}{2(2\pi)^3} \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}}{|\vec{k}|} \frac{1}{(q \cdot k)^2} \sigma_B. \quad (2.9)$$

A contribuição do gráfico com um fóton soft emitido é

$$\text{Diagram} = \frac{e^2 q^2}{2(2\pi)^3} \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}}{|\vec{k}|} \frac{1}{(q \cdot k)^2} \sigma_B. \quad (2.10)$$

Fazendo $q \rightarrow p$ na (2.9) e na (2.10), obtemos as expressões de

$$^{\dagger} \quad k = (\vec{k}, i k_0).$$

$$+ \text{C.C.}, \text{ e },$$

respectivamente. Pelo que foi dito acima, a contribuição dessas expressões para a seção de choque total se cancela.

Então, por (2.6), (2.7), (2.9), (2.10) e pela observação acima, temos que a parte infravermelha de (2.3) é

$$\sigma_{\text{QED}}^{(2)} = 0. \quad (2.11)$$

Este resultado já era esperado, porque em ordem e^2 só há contribuição das divergências leading, e já se mostrou que essas divergências se cancelam (Gupta 77).

2.2. Cálculo das Divergências Infravermelhas em Ordem g^2 a σ_B na QCD.

Voltemos ao processo (2.1), ou seja,

$$q + \bar{q} \rightarrow \gamma^* + \text{soft gluons}, \quad (2.1)$$

onde q e $\bar{q}$ são quark e anti-quark massivos respectivamente, e γ^* um fóton virtual. Estamos fazendo uma média sobre as cores e os spins das duas partículas do estado inicial.

Em ordem g^2 a σ_B não há contribuição dos gráficos não-abelianos, pois eles são de ordem superior na constante de acoplamento g . Assim, os gráficos que contribuem para a seção de choque em ordem g^2 em QCD são os mesmos que aparecem na (2.3).

O que difere os gráficos em QCD dos seus análogos em QED, são as matrizes de cor t^a nos vértices de gluons com quarks. Um fato muito importante, é que as matrizes de cor não comutam entre si.[†]

[†] $[t^a, t^b] = i f_{abc} t^c$, onde f_{abc} é a constante de estrutura, sendo totalmente antissimétrica nos índices a, b, c .

Como estamos usando a aproximação eikonal, e somando sobre as cores das partículas incidentes, a estrutura de cor se factoriza, e a expressão associada ao gráfico de QCD é igual à expressão de QED multiplicada pela sua estrutura de cor. Em ordem g^2 consideremos o seguinte exemplo:

$$\gamma^* = \text{Tr}[t^a t^a] * \left[\text{QED diagram} \right], \quad (2.12)$$

Note que toda informação de cor está contida no traço, e o gráfico entre colchetes é o mesmo que calculamos em QED.

Assim, as contribuições para seção de choque em ordem g^2 a σ_B em QCD é (cf. (2.3) e 2.12)),

$$\sigma_{QCD}^{(2)} = \text{Tr}[t^a t^a] \left\{ \left[\text{diagrams} \right] + \dots \right\}. \quad (2.13)$$

Os gráficos entre colchetes são os mesmos que calculamos em QED.

Comparando a (2.13) com (2.3) e (2.11), concluimos que a parte infravermelha da seção de choque total é igual a

$$\sigma_{QCD}^{(2)} = 0. \quad (2.14)$$

É importante notar que em ordem g^2 , na aproximação eikonal, o que difere a QCD da QED é um fator multiplicativo comum a todos os gráficos. Entretanto, em ordem g^4 a σ_B , a estrutura de cor não será a mesma para todos os gráficos, e os gráficos não abelianos irão contribuir.

Capítulo 3.

CANCELAMENTO DAS DIVERGÊNCIAS SUBDOMINANTES EM QED.

Neste capítulo calcularemos as correções de ordem g^4 a σ_B das classes de gráficos de QED cujos análogos em QCD contribuem para a parte I.R. da seção de choque total. Para estudarmos esses gráficos, iremos subdividi-los em 3 classes de maneira que o cancelamento das divergências I.R. em QED fique claro.

Como já mencionamos no capítulo anterior, em ordem g^2 a σ_B as divergências I.R. vêm da parte soft da região de integração do fóton de correção. Entretanto, em gráficos de ordem g^4 a σ_B , temos dois fótons de correção a σ_B e precisamos discutir de que região do espectro de momento dos dois fótons provêm as divergências I.R..

Consideremos um cut-off superior Δ que divide a região de integração do momento de maneira que para $|\vec{k}| < \Delta$ o fóton é soft e então podemos usar a aproximação eikonal; para $|\vec{k}| > \Delta$ o fóton é hard, e então não podemos desprezar os termos quadráticos do momento quando comparados com os termos lineares do momento.

Só temos divergências I.R. quando temos propagadores divergentes no limite de $k \rightarrow 0$, e para que isso aconteça é necessário que pelo menos o fóton mais externo seja soft. Isso fica fácil de se entender, quando consideramos um exemplo em ordem e^4 , ou seja,[†]

[†] (Ver a observação respectiva na folha seguinte)

Pelo exemplo acima, vemos que se k_1 está na região hard, nós não temos divergência I.R. pois, todos os propagadores são finitos, mesmo na região em que k_2 é soft. Entretanto, se k_2 estiver na região hard, e k_1 na região soft, e para as divergências só interessa realmente a região em torno de $|\vec{k}_1| \sim 0$, o gráfico acima se fatoriza da seguinte forma:

A parte hard (k_2) fica multiplicando amplitudes que possuem divergência I.R. de ordem g^2 a σ_B . Como já mostramos o cancelamento dessas divergências em ordem g^2 a σ_B , não precisamos nos preocupar com essa parte do espectro, cuja contribuição para as divergências I.R. é nula.

Finalmente concluímos que em ordem e^4 só precisamos estudar a região de integração com os dois fótons de correção soft. Assim, podemos usar a aproximação eikonal para os dois fótons de correção.

Para facilitar a parte gráfica, convencionamos que

Assim, deve-se entender que o vértice do gráfico do l.e. está ligado a um fóton virtual. Passaremos a utilizar essa convenção desse ponto em diante.

3.1. Gráficos da Classe I.

São os gráficos em que as duas correções de fóton soft ligam pernas incidentes diferentes, por exemplo:

Em ordem e^4 os gráficos que contribuem para a seção de choque pelo teorema de Bloch-Nordsieck, são

$$\begin{aligned}
 \sigma_{QED}^{(4)} = & \text{diagram} + \left\{ \text{diagram} + \text{diagram} + \text{C.C.} \right\} + \\
 & + \left\{ \text{diagram} + \text{diagram} + \text{diagram} + \text{diagram} + \text{C.C.} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \text{diagram} + \right. \\
 & + \text{diagram} + \text{diagram} + \text{diagram} + \text{C.C.} \left. \right\}, \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

onde C.C. significa que devemos somar aos gráficos desenhados entre colchetes os seus respectivos complexos conjugados. Na frente dos gráficos com dois fótons emitidos aparece o fator $1/2$ porque estamos somando sobre estados finais de duas partículas idênticas (os fótons emitidos).

A contribuição de cada gráfico de fóton puramente virtual é dada por

$$\text{diagram} = \frac{e^4 (p \cdot q)^2}{(2\pi)^8} \left[\int d^4 k_1 \frac{1}{q \cdot k_1 - i\epsilon} \frac{1}{p \cdot k_1 + i\epsilon} \frac{1}{k_1^2 - i\epsilon} \right] \left[\int d^4 k_2 \frac{1}{q \cdot k_2 - i\epsilon} \frac{1}{p \cdot k_2 + i\epsilon} \frac{1}{k_2^2 - i\epsilon} \right]^* \sigma_B, \quad (3.2)$$

$$\text{diagram} + \text{C.C.} = -\frac{2e^4 (p \cdot q)^2}{(2\pi)^8} \text{Re} \left\{ \int \frac{d^4 k_1 d^4 k_2}{q \cdot k_1 + q \cdot k_2 - i\epsilon} \frac{1}{p \cdot k_1 + p \cdot k_2 + i\epsilon} \frac{1}{q \cdot k_1 - i\epsilon} \frac{1}{p \cdot k_1 + i\epsilon} \frac{1}{k_1^2 - i\epsilon} \frac{1}{k_2^2 - i\epsilon} \right\} \sigma_B, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}
 \langle \text{triangle} \rangle + \text{C.C.} &= -\frac{2e^4 (p \cdot q)^2}{(2\pi)^8} \operatorname{Re} \left\{ \int d^4 k_1 d^4 k_2 \frac{1}{q \cdot k_1 + q \cdot k_2 - i\epsilon} \frac{1}{p \cdot k_1 + p \cdot k_2 + i\epsilon} \right. \\
 &\quad \left. \cdot \frac{1}{q \cdot k_1 - i\epsilon} \frac{1}{p \cdot k_2 + i\epsilon} \frac{1}{k_1^2 - i\epsilon} \frac{1}{k_2^2 - i\epsilon} \right\} \sigma_B. \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

Somando (3.3) com (3.4), obtemos que

$$\begin{aligned}
 \langle \text{triangle} \rangle + \langle \text{triangle} \rangle + \text{C.C.} &= -\frac{2e^4 (p \cdot q)^2}{(2\pi)^8} \operatorname{Re} \left\{ \int d^4 k_1 d^4 k_2 \frac{1}{q \cdot k_1 + q \cdot k_2 - i\epsilon} \right. \\
 &\quad \left. \cdot \frac{1}{q \cdot k_1 - i\epsilon} \frac{1}{p \cdot k_1 + i\epsilon} \frac{1}{p \cdot k_2 + i\epsilon} \frac{1}{k_1^2 - i\epsilon} \frac{1}{k_2^2 - i\epsilon} \right\} \sigma_B. \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

Fazendo $k_1 \rightleftharpoons k_2$ na (3.5) e tomando a média dessa nova expressão com a própria (3.5), obtemos que

$$\begin{aligned}
 \langle \text{triangle} \rangle + \langle \text{triangle} \rangle + \text{C.C.} &= -\frac{e^4 (p \cdot q)^2}{(2\pi)^8} \operatorname{Re} \left\{ \int d^4 k_1 \frac{1}{p \cdot k_1 + i\epsilon} \frac{1}{q \cdot k_1 - i\epsilon} \frac{1}{k_1^2 - i\epsilon} \right. \\
 &\quad \left. \cdot \int d^4 k_2 \frac{1}{p \cdot k_2 + i\epsilon} \frac{1}{q \cdot k_2 - i\epsilon} \frac{1}{k_2^2 - i\epsilon} \right\} \sigma_B. \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

Definindo Z como

$$Z = \int d^4 k \frac{1}{q \cdot k - i\epsilon} \frac{1}{p \cdot k + i\epsilon} \frac{1}{k^2 - i\epsilon}, \quad (3.7)$$

reescrevemos a (3.2) e a (3.6) como

$$\langle \text{triangle} \rangle = \frac{e^4 (p \cdot q)^2}{(2\pi)^8} \left[(\operatorname{Re} Z)^2 + (\operatorname{Im} Z)^2 \right] \sigma_B, \quad (3.8)$$

e

$$\langle \text{triangle} \rangle + \langle \text{triangle} \rangle + \text{C.C.} = -\frac{e^4 (p \cdot q)^2}{(2\pi)^8} \left[(Re Z)^2 - (Im Z)^2 \right] \sigma_B. \quad (3.9)$$

Com isso, a contribuição dos gráficos com correções de fótons puramente virtuais para a seção de choque total é

$$\langle \text{triangle} \rangle + \left[\langle \text{triangle} \rangle + \langle \text{triangle} \rangle + \text{C.C.} \right] = \frac{2 e^4 (p \cdot q)^2}{(2\pi)^8} (Im Z)^2 \sigma_B. \quad (3.10)$$

Usando a expressão (2.5) na (3.7), obtemos que

$$Im Z = \pi \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}}{|\vec{k}|} \frac{1}{q \cdot k} \frac{1}{p \cdot k}, \quad (3.11)$$

onde k está na camada de massa.

Substituindo a (3.11) na (3.10), ficamos com

$$\begin{aligned} \langle \text{triangle} \rangle + \left[\langle \text{triangle} \rangle + \langle \text{triangle} \rangle + \text{C.C.} \right] = \\ = \frac{e^4 (p \cdot q)^2}{2(2\pi)^6} \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|} \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \frac{1}{q \cdot k_1} \frac{1}{q \cdot k_2} \frac{1}{p \cdot k_1} \frac{1}{p \cdot k_2} \sigma_B. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Devemos ressaltar que para obtermos a (3.12) não desprezamos os $i\epsilon$ nos propagadores de fêrmions.

Vamos agora calcular a contribuição para a seção de choque total dos gráficos com um fóton real emitido. A contribuição de cada um desses gráficos, é dada por

$$\begin{aligned} \langle \text{triangle} \rangle + \text{C.C.} = -\frac{e^4 (p \cdot q)^2}{(2\pi)^8} Im \left\{ \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \int d^4 k_1 \frac{1}{p \cdot k_1 - p \cdot k_2 - i\epsilon} \frac{1}{p \cdot k_2} \right. \\ \left. \cdot \frac{1}{q \cdot k_1 + i\epsilon} \frac{1}{q \cdot k_2} \frac{1}{k_1^2 - i\epsilon} \right\} \sigma_B, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}
 \langle \text{diagram} \rangle + \text{c.c.} &= \frac{e^4}{(2\pi)^7} (p \cdot q)^2 \operatorname{Im} \left\{ \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \int d^4 k_1 \frac{1}{p \cdot k_1 - p \cdot k_2 - i\epsilon} \frac{1}{p \cdot k_1 - i\epsilon} \right. \\
 &\quad \left. \cdot \frac{1}{q \cdot k_1 + i\epsilon} \frac{1}{q \cdot k_2} \frac{1}{k_1^2 - i\epsilon} \right\} \sigma_B, \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \text{diagram} \rangle + \text{c.c.} &= \frac{e^4}{(2\pi)^7} (p \cdot q)^2 \operatorname{Im} \left\{ \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \int d^4 k_1 \frac{1}{q \cdot k_1 - q \cdot k_2 - i\epsilon} \frac{1}{q \cdot k_1 - i\epsilon} \right. \\
 &\quad \left. \cdot \frac{1}{p \cdot k_1 + i\epsilon} \frac{1}{p \cdot k_2} \frac{1}{k_1^2 - i\epsilon} \right\} \sigma_B, \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \langle \text{diagram} \rangle + \text{c.c.} &= -\frac{e^4}{(2\pi)^7} (p \cdot q)^2 \operatorname{Im} \left\{ \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \int d^4 k_1 \frac{1}{q \cdot k_1 - q \cdot k_2 - i\epsilon} \frac{1}{q \cdot k_2} \right. \\
 &\quad \left. \cdot \frac{1}{p \cdot k_1 + i\epsilon} \frac{1}{p \cdot k_2} \frac{1}{k_1^2 - i\epsilon} \right\} \sigma_B. \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

Os $i\epsilon'\lambda$ que apareceriam nos propagadores de fêrmions que sô dependem de k_2 não foram colocados porque não contribuem, pois k_2 está na camada de massa e, assim, os produtos escalares $p \cdot k_2$ e $q \cdot k_2$ são sempre diferentes de zero devido ao cut-off inferior λ .

Somando (3.13) com (3.14), obtemos que

$$\begin{aligned}
 \langle \text{diagram} \rangle + \langle \text{diagram} \rangle + \text{c.c.} &= -\frac{e^4}{(2\pi)^7} (p \cdot q)^2 \operatorname{Im} \left\{ \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \int d^4 k_1 \frac{1}{p \cdot k_1 - i\epsilon} \frac{1}{p \cdot k_2} \right. \\
 &\quad \left. \cdot \frac{1}{q \cdot k_1 + i\epsilon} \frac{1}{q \cdot k_2} \frac{1}{k_1^2 - i\epsilon} \right\} \sigma_B. \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

Somando (3.15) com (3.16), ficamos com

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{C.C.} = -\frac{e^4 (p \cdot q)^2}{(2\pi)^7} \text{Im} \left\{ \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \int d^4 k_1 \frac{1}{q \cdot k_1 - i\epsilon} \frac{1}{q \cdot k_2} \right. \\
 & \left. \cdot \frac{1}{p \cdot k_1 + i\epsilon} \frac{1}{p \cdot k_2} \frac{1}{k_1^2 - i\epsilon} \right\} \sigma_B. \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

Adicionando (3.17) a (3.18) e usando a (2.5), obtemos que a contribuição dos gráficos com um fóton soft emitido para a seção de choque total é dada por

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \text{C.C.} = \\
 & = -\frac{e^4 (p \cdot q)^2}{(2\pi)^6} \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|} \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \frac{1}{p \cdot k_1} \frac{1}{p \cdot k_2} \frac{1}{q \cdot k_1} \frac{1}{q \cdot k_2} \sigma_B. \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

Finalmente, vamos calcular a contribuição dos gráficos com dois fótons soft emitidos.

Os gráficos dão a seguinte contribuição:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \left[\text{Diagram 5} + \text{C.C.} \right] = \frac{e^4 (p \cdot q)^2}{4 \cdot (2\pi)^6} \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|} \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \frac{1}{q \cdot k_1 + q \cdot k_2} \frac{1}{q \cdot k_2} \\
 & \cdot \frac{1}{p \cdot k_1 + p \cdot k_2} \frac{1}{p \cdot k_1} \sigma_B, \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \left[\text{diagram} + \text{c.c.} \right] = \frac{e^4 (p \cdot q)^2}{4 \cdot (2\pi)^6} \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|} \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \frac{1}{q \cdot k_1 + q \cdot k_2} \frac{1}{p \cdot k_1 + p \cdot k_2} \cdot \frac{1}{q \cdot k_2} \frac{1}{p \cdot k_2} \sigma_B, \quad (3.21)$$

$$\frac{1}{2} \left[\text{diagram} + \text{c.c.} \right] = \frac{e^4 (p \cdot q)^2}{4 \cdot (2\pi)^6} \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|} \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \frac{1}{q \cdot k_1 + q \cdot k_2} \frac{1}{p \cdot k_1 + p \cdot k_2} \cdot \frac{1}{q \cdot k_1} \frac{1}{p \cdot k_1} \sigma_B, \quad (3.22)$$

$$\frac{1}{2} \left[\text{diagram} + \text{c.c.} \right] = \frac{e^4 (p \cdot q)^2}{4 \cdot (2\pi)^6} \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|} \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \frac{1}{q \cdot k_1 + q \cdot k_2} \cdot \frac{1}{p \cdot k_1 + p \cdot k_2} \frac{1}{q \cdot k_1} \frac{1}{p \cdot k_2} \sigma_B, \quad (3.23)$$

e

$$\frac{1}{2} \left[\text{diagram} + \text{c.c.} \right] = \frac{e^4 (p \cdot q)^2}{4 \cdot (2\pi)^6} \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|} \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \frac{1}{q \cdot k_1} \frac{1}{q \cdot k_2} \cdot \frac{1}{p \cdot k_1} \frac{1}{p \cdot k_2} \sigma_B. \quad (3.24)$$

Os $i\varepsilon$'s dos propagadores de fêrmions não foram colocados porque eles não contribuem, pois k_1 e k_2 estão na camada de massa.

Somando (3.20) com (3.21), obtemos que

$$\frac{1}{2} \left[\text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{C.C.} \right] = \quad (3.25)$$

$$= \frac{e^4 (p \cdot q)^2}{4 \cdot (2\pi)^6} \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|} \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \frac{1}{q \cdot k_1 + q \cdot k_2} \frac{1}{q \cdot k_2} \frac{1}{p \cdot k_1} \frac{1}{p \cdot k_2} \sigma_B.$$

Somando (3.22) com (3.23), fica

$$\frac{1}{2} \left[\text{diagram 3} + \text{diagram 4} + \text{C.C.} \right] = \quad (3.26)$$

$$= \frac{e^4 (p \cdot q)^2}{4 \cdot (2\pi)^6} \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|} \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \frac{1}{q \cdot k_1 + q \cdot k_2} \frac{1}{q \cdot k_1} \frac{1}{p \cdot k_1} \frac{1}{p \cdot k_2} \sigma_B.$$

Somando agora a (3.25) com a (3.26), temos, então, que

$$\frac{1}{2} \left[\text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} + \text{C.C.} \right] = \quad (3.27)$$

$$= \frac{e^4 (p \cdot q)^2}{4 \cdot (2\pi)^6} \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|} \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \frac{1}{q \cdot k_1} \frac{1}{q \cdot k_2} \frac{1}{p \cdot k_1} \frac{1}{p \cdot k_2} \sigma_B.$$

Finalmente, obtemos a contribuição dos gráficos com dois fôtons soft emitidos para a seção de choque total somando a (3.24) com a (3.27). Assim, temos que

$$\frac{1}{2} \left[\text{diagram 5} + \text{diagram 6} + \text{diagram 7} + \text{diagram 8} + \text{diagram 9} + \text{C.C.} \right] =$$

$$= \frac{e^4 (p \cdot q)^2}{2(2\pi)^6} \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|} \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \frac{1}{q \cdot k_1} \frac{1}{q \cdot k_2} \frac{1}{p \cdot k_1} \frac{1}{p \cdot k_2} \sigma_B. \quad (3.28)$$

Substituindo as (3.12), (3.19) e (3.28) na (3.1), obtemos que a parte I.R. da seção de choque total em ordem g^4 a σ_B dos gráficos de classe I é

$$\sigma_{\text{QED}}^{I(4)} = 0. \quad (3.29)$$

É importante ressaltar que para chegarmos ao cancelamento das divergências I.R. nos gráficos da classe I não foram desprezados os $i\epsilon$ nos propagadores de férmions.

3.2. Gráficos da Classe II.

São os gráficos que possuem uma das correções de fóton soft sobre uma mesma perna incidente e a outra ligando pernas diferentes, como, por exemplo:

Os gráficos dessa classe em ordem e^4 que contribuem para a seção de choque total, pelo teorema de Bloch-Nordsieck, são

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{QED}}^{II(4)} = & \left\{ \langle \text{triangle} \rangle + \langle \text{triangle} \rangle + \langle \text{triangle} \rangle + \langle \text{triangle} \rangle + \langle \text{triangle} \rangle + \langle \text{triangle} \rangle + \right. \\ & + \langle \text{triangle} \rangle + \langle \text{triangle} \rangle + \langle \text{triangle} \rangle + \langle \text{triangle} \rangle + \\ & \left. + \frac{1}{2} \left[\langle \text{triangle} \rangle + \langle \text{triangle} \rangle + \langle \text{triangle} \rangle + \langle \text{triangle} \rangle \right] + \text{C.C.} \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \langle \rangle + \langle \rangle + \langle \rangle + \langle \rangle + \right. \\
& + \langle \rangle + \langle \rangle + \langle \rangle + \langle \rangle + \langle \rangle + \langle \rangle + \\
& + \frac{1}{2} \left[\langle \rangle + \langle \rangle + \langle \rangle + \langle \rangle \right] + \\
& \left. + \text{C.C.} \right\} ,
\end{aligned}$$

(3.30)

onde C.C. representa dizer que temos que somar a todos os gráficos desenhados os seus respectivos complexos conjugados.

A bolha de auto-energia de fêrmion é tratada na aproximação eikonal no Apêndice B.

As contribuições dos gráficos puramente virtuais do primeiro parêntese do l.d. da (3.30) são

$$\begin{aligned}
\langle \rangle + \text{C.C.} &= -\frac{e^4 q^2 (p \cdot q)}{(2\pi)^8} \text{Re} \left\{ \int d^4 k_1 d^4 k_2 \frac{1}{q \cdot k_1 + i\epsilon} \frac{1}{q \cdot k_1 + i\epsilon} \right. \\
&\cdot \left. \frac{1}{q \cdot k_2 - i\epsilon} \frac{1}{p \cdot k_2 + i\epsilon} \frac{1}{k_1^2 - i\epsilon} \frac{1}{k_2^2 + i\epsilon} \right\} \sigma_B ,
\end{aligned}$$

(3.31)

$$\begin{aligned}
 \langle \text{diagram} \rangle + \text{C.C.} &= \frac{e^4 q^2}{(2\pi)^8} (p \cdot q) \operatorname{Re} \left\{ \int d^4 k_1 d^4 k_2 \frac{1}{q \cdot k_1 + i\epsilon} \frac{1}{q \cdot k_1 + i\epsilon} \right. \\
 &\quad \left. \cdot \frac{1}{q \cdot k_2 + i\epsilon} \frac{1}{p \cdot k_2 - i\epsilon} \frac{1}{k_1^2 - i\epsilon} \frac{1}{k_2^2 - i\epsilon} \right\} \sigma_B,
 \end{aligned} \quad (3.32)$$

e,

$$\left[\langle \text{diagram} \rangle + \langle \text{diagram} \rangle \right] = 0. \quad (3.33)$$

Assim, a contribuição desses gráficos é dada por

$$\begin{aligned}
 &\frac{e^4 q^2}{(2\pi)^8} (p \cdot q) \operatorname{Re} \left\{ 2i \left(\int d^4 k_1 \frac{1}{q \cdot k_1 + i\epsilon} \frac{1}{q \cdot k_1 + i\epsilon} \frac{1}{k_1^2 - i\epsilon} \right) \right. \\
 &\quad \left. \cdot \operatorname{Im} \left[\int d^4 k_2 \frac{1}{q \cdot k_2 + i\epsilon} \frac{1}{p \cdot k_2 - i\epsilon} \frac{1}{k_2^2 - i\epsilon} \right] \right\} \sigma_B.
 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Mas, usando a (2.5), obtemos que

$$\operatorname{Im} \left[\int d^4 k_2 \frac{1}{q \cdot k_2 + i\epsilon} \frac{1}{p \cdot k_2 - i\epsilon} \frac{1}{k_2^2 - i\epsilon} \right] = \pi \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \frac{1}{q \cdot k_2} \frac{1}{p \cdot k_2}, \quad (3.35)$$

onde no l.d. da (3.35) k_2 está na camada de massa.

Como a (3.34) é só a parte real do que está entre colchetes, precisamos então calcular

$$i \operatorname{Im} \left(\int d^4 k_1 \frac{1}{q \cdot k_1 + i\epsilon} \frac{1}{q \cdot k_1 + i\epsilon} \frac{1}{k_1^2 - i\epsilon} \right) = \pi i \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|} \frac{1}{(q \cdot k_1)^2}. \quad (3.36)$$

É fácil ver que a contribuição dos gráficos puramente virtuais do segundo parêntese do l.d. da (3.30) se obtém das (3.31), (3.32) e (3.33) fazendo $p \rightleftharpoons q$ nessas expressões. Assim, substituindo (3.35) e (3.36) na (3.34), obtemos que

$$\begin{aligned}
 & \langle \text{diagram 1} \rangle + \langle \text{diagram 2} \rangle + \langle \text{diagram 3} \rangle + \langle \text{diagram 4} \rangle + \langle \text{diagram 5} \rangle + \langle \text{diagram 6} \rangle + \\
 & + \langle \text{diagram 7} \rangle + \langle \text{diagram 8} \rangle + \text{C.C.} = \\
 & = - \frac{e^4 q^2 (p \cdot q)}{2 \cdot (2\pi)^6} \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|} \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \frac{1}{(q \cdot k_1)^2} \frac{1}{q \cdot k_2} \frac{1}{p \cdot k_2} \sigma_8 + p \rightleftharpoons q,
 \end{aligned}
 \tag{3.37}$$

onde $p \rightleftharpoons q$ representa que devemos fazer as substituições $p \rightleftharpoons q$ no primeiro termo do l.d. da (3.37).

As contribuições dos gráficos com um fóton real emitido no primeiro parêntese de l.d. da (3.30) são

$$\langle \text{diagram 9} \rangle + \langle \text{diagram 10} \rangle + \text{C.C.} =$$

$$= 0.$$

$$\tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{C.C.} = \frac{e^4 q^2 (p \cdot q)}{(2\pi)^7} \text{Im} \left\{ \int d^4 k_1 \frac{1}{q \cdot k_1 + i\epsilon} \frac{1}{q \cdot k_1 + i\epsilon} \frac{1}{k_1^2 - i\epsilon} \right. \\
 & \left. \cdot \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \frac{1}{q \cdot k_2} \frac{1}{p \cdot k_2} \right\} \sigma_B,
 \end{aligned}
 \tag{3.39}$$

e,

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \text{C.C.} = \frac{e^4 q^2 (p \cdot q)}{(2\pi)^7} \text{Im} \left\{ \int d^4 k_1 \frac{1}{q \cdot k_1 + i\epsilon} \frac{1}{p \cdot k_1 - i\epsilon} \frac{1}{k_1^2 - i\epsilon} \right. \\
 & \left. \cdot \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \frac{1}{(q \cdot k_2)^2} \right\} \sigma_B.
 \end{aligned}
 \tag{3.40}$$

As expressões dos gráficos do segundo parêntese da (3.30) são obtidos da (3.38), (3.39) e (3.40), fazendo $p \rightleftharpoons q$ nessas expressões. Assim, a contribuição para a seção de choque total de todos os gráficos com um fóton soft emitido é

$$\begin{aligned}
 & \frac{e^4 q^2 (p \cdot q)}{2 \cdot (2\pi)^6} \left\{ \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|} \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \frac{1}{(q \cdot k_1)^2} \frac{1}{q \cdot k_2} \frac{1}{p \cdot k_2} + \right. \\
 & \left. + \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|} \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \frac{1}{q \cdot k_1} \frac{1}{p \cdot k_1} \frac{1}{(q \cdot k_2)^2} \right\} \sigma_B + p \rightleftharpoons q,
 \end{aligned}
 \tag{3.41}$$

onde $p \rightleftharpoons q$ tem o mesmo significado que o explicado para os gráficos puramente virtuais.

As contribuições dos gráficos com dois fótons soft emitidos, que estão no primeiro parêntese do l.d. da (3.30) são

$$\frac{1}{2} \left[\text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{c.c.} \right] =$$

$$= -\frac{e^4 q^2}{2 \cdot (2\pi)^6} (p \cdot q) \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|} \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \frac{1}{q \cdot k_1 + q \cdot k_2} \frac{1}{q \cdot k_1} \frac{1}{q \cdot k_2} \frac{1}{p \cdot k_2} \sigma_B, \quad (3.42)$$

e

$$\frac{1}{2} \left[\text{diagram 3} + \text{diagram 4} + \text{c.c.} \right] =$$

$$= -\frac{e^4 q^2}{2 \cdot (2\pi)^6} (p \cdot q) \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|} \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \frac{1}{q \cdot k_1 + q \cdot k_2} \frac{1}{q \cdot k_1} \frac{1}{q \cdot k_1} \frac{1}{p \cdot k_2} \sigma_B, \quad (3.43)$$

As expressões dos gráficos com dois fótons soft emitidos no segundo parêntese da (3.30) são obtidas de (3.42) e (3.43) fazendo $p \rightleftharpoons q$ nessas expressões. Então, a contribuição dos gráficos puramente reais para a seção de choque total é dada por

$$-\frac{e^4 q^2}{2(2\pi)^6} (p \cdot q) \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|} \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \frac{1}{(q \cdot k_2)^2} \frac{1}{q \cdot k_1} \frac{\sigma_B}{p \cdot k_1} + p \rightleftharpoons q, \quad (3.44)$$

onde $p \rightleftharpoons q$ tem o mesmo sentido que das vezes anteriores.

Substituindo (3.37), (3.41) e (3.44) em (3.30), obtemos que a parte I.R. da seção de choque $\sigma_{\text{QED}}^{\text{II}(4)}$ é igual a

$$\sigma_{\text{QED}}^{\text{II}(4)} = 0. \quad (3.45)$$

Vemos, assim, que a divergência I.R. desses gráficos se cancela.

Os resultados (3.29) e (3.45) serão muito importantes para o próximo capítulo.

Capítulo 4.

CÁLCULO DAS DIVERGÊNCIAS SUBDOMINANTES DO PROCESSO DE ANIQUILAÇÃO $q\bar{q} \rightarrow \gamma^*$.

Neste capítulo calcularemos as divergências I.R. em ordem g^4 a σ_B em QCD. Sempre que possível faremos analogia com QED, inclusive usaremos resultados obtidos no capítulo 3.

Trataremos o processo (2.1) onde tomamos média sobre as cores e os spins dos quark e anti-quark do estado inicial.

Continuaremos a usar a aproximação eikonal para calcular as divergências I.R. dos gráficos em QCD.

Inicialmente apresentaremos o método de cálculo utilizado, que simplifica muito a forma de se chegar ao resultado final.

4.1. Método de Cálculo das Divergências Infravermelhas.

Estamos considerando o processo

$$q + \bar{q} \rightarrow \gamma^* + \text{soft gluons} \quad (2.1)$$

entretanto, vamos analisar inicialmente o processo de decaimento

$$\gamma^* \rightarrow q + \bar{q} + \text{soft gluons}, \quad (4.1)$$

onde q é o quark, $\bar{q}$ é o anti-quark, γ^* um fóton virtual, e compará-lo com o processo (2.1).

A parte imaginária da bolha de auto-energia do fóton está associada à seção de choque do processo (4.1), como consequência da unitariedade. Appelquist et al. (Appelquist 76) calcularam

a parte imaginária da bolha de auto-energia do fóton em ordem g^4 a σ_B , e mostraram que as divergências I.R. se cancelam. Pela unitariedade temos então que o processo de decaimento (4.1) é finito no I.R. em ordem g^4 a σ_B .

Vamos comparar os gráficos em ordem g^4 a σ_B que aparecem nos dois processos acima, e vai ficar claro que o que distingue as duas expressões dos dois processos é o sinal dos $i\epsilon$ nos propagadores de férmions.

Pelas razões expostas no capítulo 3, continuaremos a usar a aproximação eikonal para estudar as divergências I.R. em QCD.

Consideremos um exemplo de correções puramente virtuais nos dois processos.

a) Processo (2.1):[†]

(4.2)

b) Processo (4.1):

(4.3)

[†] Estamos usando a convenção do capítulo 3 de não desenhar o fóton virtual γ^* .

Notemos, usando as regras de Feynman na aproximação eikonal (cf. Apêndice A), que as expressões associadas aos gráficos (4.2) e (4.3) são iguais, incluindo o sinal dos $i\epsilon$ nos propagadores de fêrmions.

Esta constatação é verdadeira para todos os gráficos puramente virtuais, porque os gluons soft estão fora da camada de massa, assim fazendo $\vec{k}_1 \rightarrow -\vec{k}_1$ e $\vec{k}_2 \rightarrow -\vec{k}_2$ não mudamos a expressão associada ao gráfico e fazemos um gráfico ir no outro.

Vamos agora considerar um exemplo de gráfico com um gluon soft emitido que contribui para a seção de choque:

a) processo (2.1):

$$(4.4)$$

b) processo (4.1):

$$(4.5)$$

Notemos que as amplitudes das correções (4.4) e (4.5) são diferentes, porque elas possuem um propagador de fêrmion diferente. A (4.4) possui um propagador de fêrmion de 4-momento $(q-k_1-k_2)$ e a (4.5) possui um propagador de fêrmion de 4-momento $(q-k_1+k_2)$.

Como estamos na aproximação eikonal, temos que (cf. Apêndice A),

$$\begin{array}{c} q-k_1-k_2 \\ \longrightarrow \\ \mu \end{array} \times = g \frac{q_\mu}{-q \cdot (k_1+k_2) - i\epsilon} \quad (4.6)$$

e,

$$\begin{array}{c} q-k_1+k_2 \\ \longrightarrow \\ \mu \end{array} \times = g \frac{q_\mu}{-q \cdot (k_1-k_2) - i\epsilon}, \quad (4.7)$$

mas fazendo $k_1 \rightarrow -k_1$ na (4.7), isso em nada altera a expressão associada ao gráfico porque temos uma integral em $d^4 k_1$, então a (4.7) fica igual a

$$\begin{array}{c} q+k_1+k_2 \\ \longrightarrow \\ \mu \end{array} \times = -g \frac{q_\mu}{-q \cdot (k_1+k_2) + i\epsilon}, \quad (4.8)$$

A menos de um sinal global, o que difere a (4.6) da (4.8) é sinal do $i\epsilon$ no propagador de fêrmion. Vemos aqui a importância de levarmos em conta os $i\epsilon$'s nos propagadores de fêrmions.

Observemos que temos a mesma expressão que a (4.5) se consideramos no processo (2.1) um glun soft absorvido em lugar de um glun soft emitido, ou seja,

$$\left[\begin{array}{c} q \\ \longrightarrow \\ q-k_1 \\ \longrightarrow \\ q-k_1+k_2 \\ \longrightarrow \\ -p-k_1 \\ \longrightarrow \\ -p \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} q \\ \longrightarrow \\ q+k_2 \\ \longrightarrow \\ -p \end{array} \right]^* \quad (4.9)$$

Notemos que a (4.9) possui os mesmos propagadores que a (4.5). Assim, vemos que a expressão para o processo (4.1) com um gluon emitido no estado final é a mesma que para o processo (2.1) com um gluon absorvido no estado inicial.

Isso é o que deveríamos esperar fisicamente pois, aplicando a inversão temporal no processo (4.1) obtemos

$$q + \bar{q} + \text{soft gluons} \rightarrow \gamma^* \quad (4.10)$$

onde agora os gluons soft são absorvidos no estado inicial.

Frisamos novamente que, do ponto de vista técnico, a expressão associada aos gráficos com gluons emitidos no estado inicial (cf. processo (2.1)) só pode diferir no sinal do $i\epsilon$ nos propagadores de fêrmions das expressões dos gráficos com gluon absorvido no estado inicial.

Finalmente, vamos considerar gráficos com dois gluons na camada de massa. Consideremos o seguinte exemplo:

a) processo (2.1):

$$\left[\text{Diagram for process (2.1)} \right]^* \quad (4.11)$$

b) processo (4.1):

$$\left[\text{Diagram for process (4.1)} \right] \quad (4.12)$$

Como k_1 e k_2 estão na camada de massa, e as integrais possuem um cut-off inferior λ , os $i\epsilon'\lambda$ nos propagadores de férmions não contribuem. Como temos número par de propagadores de férmions, concluímos que as expressões (4.11) e (4.12) são iguais. Essa conclusão é verdadeira para todos os gráficos com dois gluons em camada de massa que contribuem para a seção de choque total em ordem g^4 a σ_s .

O cálculo das divergências I.R. leading, é feito desprezando os $i\epsilon'\lambda$ nos propagadores de férmions. Pela análise feita, a parte leading dos processos (2.1) e (4.1) é a mesma. Como já foi mostrado que o processo de decaimento (4.1) não possui divergência I.R. (Appelquist 76), concluímos então que a parte leading da divergência I.R. do processo (2.1) se cancela. É um resultado conhecido, que as divergências leading em QCD se cancelam através do mecanismo de Bloch-Nordsieck (Frenkel 76).

Vamos usar o fato do processo (4.1) ser finito no I.R. para estudar as divergências I.R. do processo de aniquilação (2.1).

Vamos representar por V_{abs} a contribuição para a parte I.R. da seção de choque total de todos os gráficos puramente virtuais do (4.1) e R_{abs} a dos gráficos com pelo menos uma correção de gluon soft na camada de massa. Lembramos que correções com um gluon soft emitido no (4.1) têm a mesma expressão que os gráficos com um gluon soft absorvido no (4.10).

Como o processo (4.1) é finito no I.R. em ordem g^4 a σ_s , temos então que

$$V_{abs} + R_{abs} = 0, \quad (4.13)$$

onde essa igualdade é válida para a parte I. R. da seção de choque total.

A contribuição no I.R. dos gráficos puramente virtuais no processo (2.1) vamos chamar de V_{em} , e a dos gráficos com pelo menos uma correção de fóton soft na camada de massa vamos designar por R_{em} . Seja $\sigma_{QCD}^{(4)}$ a parte I.R. na seção de choque total em ordem g^4 a σ_B , então:

$$\sigma_{QCD}^{(4)} = V_{em} + R_{em}. \quad (4.14)$$

Nos exemplos (4.2) e (4.3) mostramos que as partes puramente imaginárias nos dois processos são iguais. Assim, se subtraímos a (4.13) da (4.14) obtemos que

$$\sigma_{QCD}^{(4)} = R_{em} - R_{abs}. \quad (4.15)$$

Nas duas seções que seguem vamos usar a (4.15) para calcular as divergências I.R. dos gráficos abelianos e não-abelianos em ordem g^4 a σ_B do processo de aniquilação (2.1).

4.2. Cálculo das Divergências Infravermelhas nos Gráficos Abelianos em QCD.

Todos os gráficos que contribuem para a seção de choque em QED também contribuem para a seção de choque em QCD. Apenas, que em QCD esses gráficos possuem a mais uma estrutura de cor. Como estamos na aproximação eikonal, essa estrutura de cor se fotoriza sendo meramente uma constante que multiplica a expressão associada ao gráfico em QED.

Temos duas estrutura de cor diferentes multiplicando os gráficos que aparecem em QED, a ver mais abaixo.

4) GRÁFICOS DA CLASSE I E DA CLASSE II.

Seja $R_{em(abs)}^{I,a}$ a soma dos gráficos em QED da classe I (cf. seção 3.1 e (3.1)) com pelo menos um gluon emitido (absorvido) cuja estrutura de cor seja $C_F^{2†}$, ou seja (veja Apêndice C),

$$R_{em(abs)}^{I,a} = C_F^2 R_{em(abs)}^{I,a}, \quad (4.16)$$

onde $R_{em(abs)}^{I,a}$ é a contribuição desses gráficos para a seção de choque em QCD.

Seja $R_{em(abs)}^{I,b}$ a soma dos gráficos da classe I em QED, com pelo menos um gluon emitido (absorvido), cuja estrutura de cor seja $(C_F^2 - (C_{YM} C_F)/2)$, ou seja (veja Apêndice C),

$$R_{em(abs)}^{I,b} = \left(C_F^2 - \frac{C_F C_{YM}}{2} \right) R_{em(abs)}^{I,b}, \quad (4.17)$$

onde $R_{em(abs)}^{I,b}$ é a contribuição desses gráficos para a seção de choque em QCD

Pela (4.15) a contribuição dos gráficos da classe I para a seção de choque total, usando as (4.16) e (4.17), é dada por

$$\begin{aligned} \sigma_{QCD}^{I(4)} = C_F^2 & \left[R_{em}^{I,a} + R_{em}^{I,b} - (R_{abs}^{I,a} + R_{abs}^{I,b}) \right] + \\ & - \frac{C_{YM} C_F}{2} (R_{em}^{I,b} - R_{abs}^{I,b}). \end{aligned} \quad (4.18)$$

$† C_F \delta_{ab} = \text{Tr}(t^a \cdot t^b)$, onde t^a são metade das matrizes de cor de Gell-Mann,

$C_{YM} \delta_{cd} = f_{abc} f_{abd}$, onde f_{abc} é a constante de estrutura.

Entretanto, a (4.13) vale trivialmente em QED (não há divergência I.R. em QED), e assim,

$$R_{abs}^{I,a} + R_{abs}^{I,b} = -\mathcal{V}_{abs},$$

onde $\mathcal{V}_{abs}$ é a soma de todos os gráficos da classe I, puramente virtuais do processo em QED ($\gamma^* \rightarrow e^+ + e^- + \text{fótons soft}$) que também aparecem na (3.1). Com isso, e lembrando o significado da $R_{em}^{I,a(b)}$, reescrevemos a (4.18) como

$$\sigma_{QCD}^{I(4)} = c_F^2 \sigma_{QED}^{I(4)} - \frac{c_{YM} c_F}{2} (R_{em}^{I,b} - R_{abs}^{I,b}).$$

Usando a (3.29) podemos finalmente escrever que a contribuição dos gráficos da classe I para a parte infravermelha da seção de choque total é dada por

$$\sigma_{QCD}^{I(4)} = -\frac{c_{YM} c_F}{2} (R_{em}^{I,b} - R_{abs}^{I,b}), \quad (4.19)$$

onde os gráficos que compõem $R^{I,b}$ estão no Apêndice C.

Os gráficos da classe II (veja Apêndice D) possuem a mesma estrutura de cor que os gráficos da classe I. Separando os gráficos da classe II como fizemos acima, e procedendo de maneira análoga, obtemos que

$$\sigma_{QCD}^{II(4)} = -\frac{c_{YM} c_F}{2} (R_{em}^{II,b} - R_{abs}^{II,b}). \quad (4.20)$$

Somando a (4.19) com a (4.20), obtemos que a parte I.R. da seção de choque total em ordem g^4 a σ_B é igual a

$$\sigma_{QC}^{(4)} = -\frac{C_{YM}C_F}{2} \left[(R_{em}^{I,b} - R_{abs}^{I,b}) + (R_{em}^{II,b} - R_{abs}^{II,b}) \right]. \quad (4.21)$$

Como os $i\varepsilon$'s nos propagadores de férmions de gráficos com os dois gluons soft em camada de massa não contribuem, então, os gráficos que contribuem para a (4.21) são os que possuem apenas um gluon soft em camada de massa.

Pelos Apêndices C e D, temos que

$$\begin{aligned} R_{em}^{I,b} - R_{abs}^{I,b} &= \left[\text{diagram 1} - \text{diagram 2} \right] + \\ &+ \left[\text{diagram 3} - \text{diagram 4} \right] + C.C., \end{aligned} \quad (4.22)$$

e,

$$\begin{aligned} R_{em}^{II,b} - R_{abs}^{II,b} &= \left[\text{diagram 5} - \text{diagram 6} \right] + \left[\text{diagram 7} - \text{diagram 8} \right] + \\ &+ \left[\text{diagram 9} - \text{diagram 10} \right] + \left[\text{diagram 11} - \text{diagram 12} \right] + C.C.. \end{aligned} \quad (4.23)$$

O segundo termo do l.d. da (4.22) é obtido do primeiro fazendo $p \rightleftharpoons q$ nas expressões associadas a esses gráficos; da mesma maneira, os dois últimos termos da l.d. da (4.23) são obtidos dos dois primeiros, fazendo $p \rightleftharpoons q$ nas expressões. Por isso reescrevemos a seção de choque total como

$$\begin{aligned}
 \sigma_{QCD}^{(4)} = & -\frac{C_{YM} C_F}{2} \left\{ \left[\text{triangle with incoming gluon} - \text{triangle with outgoing gluon} \right] + \left[\text{triangle with incoming quark} - \text{triangle with outgoing quark} \right] + \right. \\
 & \left. + \left[\text{triangle with incoming antiquark} - \text{triangle with outgoing antiquark} \right] + \text{C.C.} + p \neq q \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{4.24}$$

Pela (3.15), temos que

$$\begin{aligned}
 \text{triangle with incoming gluon} + \text{C.C.} = & \frac{q^4}{(2\pi)^7} (p \cdot q)^2 \text{Im} \left\{ \int \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \int d^4 k_1 \frac{1}{q \cdot k_1 - q \cdot k_2 - i\epsilon} \frac{1}{q \cdot k_1 - i\epsilon} \right. \\
 & \left. \cdot \frac{1}{p \cdot k_1 + i\epsilon} \frac{1}{p \cdot k_2} \frac{1}{k_1^2 - i\epsilon} \right\} \sigma_B.
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

Como a expressão do gráfico com gluon absorvido só difere no sinal do $i\epsilon$ nos propagadores de férmions da expressão do gráfico com gluon emitido, então temos que

$$\begin{aligned}
 \text{triangle with outgoing gluon} + \text{C.C.} = & \frac{q^4}{(2\pi)^7} (p \cdot q)^2 \text{Im} \left\{ \int \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \int d^4 k_1 \frac{1}{q \cdot k_1 - q \cdot k_2 + i\epsilon} \right. \\
 & \left. \cdot \frac{1}{q \cdot k_1 + i\epsilon} \frac{1}{p \cdot k_1 - i\epsilon} \frac{1}{p \cdot k_2} \frac{1}{k_1^2 - i\epsilon} \right\} \sigma_B.
 \end{aligned}
 \tag{4.25}$$

Fazendo $k_1^0 \rightarrow k_1$ na (3.15) e calculando a integral em k_1^0 usando o teorema de Cauchy, e fechando o contorno no semi-plano inferior dos números complexos, obtemos que[†]

$$\begin{aligned}
 \triangle + C.C. = & \frac{-q^4}{2(2\pi)^6} (p \cdot q)^2 \left\{ \int \frac{d^3 \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|} \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \frac{1}{p \cdot k_1} \frac{1}{p \cdot k_2} \frac{1}{q \cdot k_1} \frac{1}{q \cdot k_1 + q \cdot k_2} + \right. \\
 & \left. - 2 \frac{p_0}{q^2} \int \frac{d^3 \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|} \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \frac{1}{p \cdot k_2} \frac{1}{\left(\frac{\vec{p}}{p_0} - \frac{\vec{q}}{q_0}\right) \cdot \vec{k}_1} \frac{1}{\left(\frac{\vec{p}}{p_0} - \frac{\vec{q}}{q_0}\right) \cdot \vec{k}_1 - \frac{q \cdot k_2}{q_0}} \frac{1}{p \cdot k_1} \frac{1}{p_0 |\vec{k}_1| + \vec{p} \cdot \vec{k}_1} \right\} \sigma_B.
 \end{aligned}
 \tag{4.26}$$

É importante notar que a (4.25) é um invariante de Lorentz, e como o primeiro termo do l.d. da (4.26) também é um invariante de Lorentz, então o segundo termo da (4.26) é um invariante de Lorentz. Com isso, esse segundo termo do l.d. da (4.26) poderá ser calculado no referencial mais conveniente.

Seguindo um procedimento análogo, resulta que

$$\begin{aligned}
 \triangle + C.C. = & \frac{q^4 (p \cdot q)^2}{2 \cdot (2\pi)^6} \left\{ \int \frac{d^3 \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|} \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \frac{1}{p \cdot k_2} \frac{1}{p \cdot k_1} \frac{1}{q \cdot k_1} \frac{1}{q \cdot k_1 - q \cdot k_2} + \right. \\
 & \left. - 2 \frac{p_0}{q^2} \int \frac{d^3 \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|} \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \frac{1}{p \cdot k_2} \frac{1}{\left(\frac{\vec{p}}{p_0} - \frac{\vec{q}}{q_0}\right) \cdot \vec{k}_1} \frac{1}{\left(\frac{\vec{p}}{p_0} - \frac{\vec{q}}{q_0}\right) \cdot \vec{k}_1 + \frac{q \cdot k_2}{q_0}} \frac{1}{p \cdot k_1} \frac{1}{p_0 |\vec{k}_1| + \vec{p} \cdot \vec{k}_1} \right\} \sigma_B.
 \end{aligned}
 \tag{4.27}$$

[†] O corte no símbolo da integral representa valor principal.

Por razão análoga ao que foi discutido para os termos da (4.26), o segundo termo da l.d. da (4.27) é um invariante de Lorentz, podendo ser calculado no referencial mais conveniente.

É fácil ver que os primeiros termos da l.d. das (4.26) e (4.27) se cancelam quando calculamos a diferença dessas expressões. Esses termos vêm da contribuição do $i\epsilon$ dos propagadores dos gluons, mas como essa contribuição se cancela, estamos reobtendo que as divergências leading se cancelam.

Por (4.26) e (4.27), temos que

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} - \text{Diagram 2} + \text{C.C.} = \\
 & = \frac{2g^4}{(2\pi)^6} (p \cdot q)^2 \frac{p_0}{q_0^2} \int_{\lambda}^{\Delta} d^3 \vec{k}_1 \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \frac{1}{p \cdot k_1} \frac{1}{p \cdot k_2} \frac{1}{\left(\frac{\vec{p}}{p_0} - \frac{\vec{q}}{q_0}\right) \cdot \vec{k}_1} \frac{1}{\left(\frac{\vec{p}}{p_0} - \frac{\vec{q}}{q_0}\right) \cdot \vec{k}_1 - \frac{q \cdot k_2}{q_0}} \frac{1}{p_0 |\vec{k}_1| + \vec{p} \cdot \vec{k}_1} \sigma_B.
 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Na aproximação eikonal, temos que

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} + \text{C.C.} = -\frac{g^4}{(2\pi)^7} q^2 (p \cdot q) \text{Im} \left\{ \int d^4 k_1 \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \frac{1}{q \cdot k_2} \frac{1}{p \cdot k_2} \frac{1}{q \cdot k_1 + i\epsilon} \right. \\
 & \left. \cdot \frac{1}{q \cdot k_1 + q \cdot k_2 + i\epsilon} \frac{1}{k_1^2 - i\epsilon} \right\} \sigma_B.
 \end{aligned} \quad (4.29)$$

A amplitude do gráfico com gluon absorvido $\bar{e}$, então,

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} + \text{C.C.} = -\frac{g^4}{(2\pi)^7} q^2 (p \cdot q) \text{Im} \left\{ \int d^4 k_1 \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \frac{1}{q \cdot k_2} \frac{1}{p \cdot k_2} \right. \\
 & \left. \cdot \frac{1}{q \cdot k_1 - i\epsilon} \frac{1}{q \cdot k_1 + q \cdot k_2 - i\epsilon} \frac{1}{k_1^2 - i\epsilon} \right\} \sigma_B.
 \end{aligned} \quad (4.30)$$

Aplicando o teorema de Cauchy na (4.29) na variável k_1^0 e fechando o contorno no semi-plano inferior dos números complexos, obtemos que

$$\text{Diagram} + \text{C.C.} = \frac{-q^4}{2(2\pi)^6} q^2 (p \cdot q) \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|} \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \frac{1}{q \cdot k_2} \frac{1}{p \cdot k_2} \frac{1}{q \cdot k_1} \frac{1}{q \cdot k_1 + q \cdot k_2} \sigma_B. \quad (4.31)$$

Para a integral em k_1^0 na (4.30), fechamos o contorno no semi-plano superior dos números complexos. Assim,

$$\text{Diagram} + \text{C.C.} = \frac{-q^4}{2(2\pi)^6} q^2 (p \cdot q) \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|} \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \frac{1}{q \cdot k_2} \frac{1}{p \cdot k_2} \frac{1}{q \cdot k_1} \frac{1}{q \cdot k_2 - q \cdot k_1} \sigma_B. \quad (4.32)$$

Simetrizando a (4.31) e a (4.32) fazendo $\vec{k}_1 \rightleftharpoons \vec{k}_2$, é fácil mostrar, por exemplo, no referencial de repouso de $q^\dagger$, que essas expressões são iguais. Isso porque, quando tomamos a diferença dessas expressões simetrizadas, vemos que a expressão resultante é antissimétrica sob a transformação $|\vec{k}_1| \rightleftharpoons |\vec{k}_2|$.

Logo,

$$\text{Diagram} - \text{Diagram} + \text{C.C.} = 0. \quad (4.33)$$

Finalmente, vamos considerar

$$\text{Diagram} + \text{C.C.} = \frac{q^4}{(2\pi)^7} q^2 (p \cdot q) \text{Im} \left\{ \int d^4 k_1 \int \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \frac{1}{q \cdot k_2} \frac{1}{q \cdot k_1 + i\epsilon} \frac{1}{p \cdot k_1 - i\epsilon} \frac{1}{q \cdot k_1 + q \cdot k_2 + i\epsilon} \frac{1}{k_1^2 - i\epsilon} \right\} \sigma_B. \quad (4.34)$$

[†] As (4.31) e (4.32) são invariantes por transformação de Lorentz.

Pelo que já foi discutido anteriormente, temos que

$$\begin{aligned}
 \triangleleft + \text{C.C.} &= \frac{q^4}{(2\pi)^7} q^2 (p, q) \operatorname{Im} \left\{ \int d^4 k_1 \int \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \frac{1}{q \cdot k_2} \frac{1}{q \cdot k_1 - i\epsilon} \frac{1}{p \cdot k_1 + i\epsilon} \right. \\
 &\quad \left. \cdot \frac{1}{q \cdot k_1 + q \cdot k_2 - i\epsilon} \frac{1}{k_1^2 - i\epsilon} \right\} \sigma_B. \quad (4.35)
 \end{aligned}$$

Calculando a integral em k_1^0 e fechando o contorno no semi-plano inferior dos números complexos, obtemos que

$$\begin{aligned}
 \triangleleft + \text{C.C.} &= \frac{q^4}{2 \cdot (2\pi)^6} q^2 (p, q) \left\{ \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|} \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \frac{1}{q \cdot k_2} \frac{1}{q \cdot k_1} \frac{1}{p \cdot k_1} \frac{1}{q \cdot k_1 + q \cdot k_2} + \right. \\
 &\quad - 2 \frac{p_0}{q^2} \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|} \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \frac{1}{q \cdot k_2} \frac{1}{\left(\frac{\vec{p}}{p_0} - \frac{\vec{q}}{q_0} \right) \cdot \vec{k}_1} \frac{1}{\left(\frac{\vec{p}}{p_0} - \frac{\vec{q}}{q_0} \right) \cdot \vec{k}_1 - \frac{q \cdot k_2}{q_0}} \\
 &\quad \left. \cdot \frac{1}{p \cdot k_1} \frac{1}{p_0 |\vec{k}_1| + \vec{p} \cdot \vec{k}_1} \right\} \sigma_B. \quad (4.36)
 \end{aligned}$$

Como a (4.34) é um invariante de Lorentz e o primeiro termo do l.d. da (4.36) também, decorre, então, que o segundo termo do l.d. da (4.36) também é um invariante de Lorentz.

Fazendo $k_1 \rightarrow -k_1$ na (4.35), e procedendo de maneira análoga, obtemos que

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram} + \text{C.C.} &= \frac{q^4}{2(2\pi)^6} q^2 (p \cdot q) \left\{ - \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|} \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \frac{1}{q \cdot k_2} \frac{1}{q \cdot k_1} \frac{1}{p \cdot k_1} \frac{1}{q \cdot k_1 - q \cdot k_2} + \right. \\
 &+ \frac{2 p_0}{q^2} \int_{\lambda}^{\Delta} d^3 \vec{k}_1 \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \frac{1}{q \cdot k_2} \frac{1}{\left(\frac{\vec{p}}{p_0} - \frac{\vec{q}}{q_0} \right) \cdot \vec{k}_1} \frac{1}{\left(\frac{\vec{p}}{p_0} - \frac{\vec{q}}{q_0} \right) \cdot \vec{k}_1 + \frac{q \cdot k_2}{q_0}} \cdot \\
 &\left. \frac{1}{p \cdot k_1} \frac{1}{p \cdot |\vec{k}_1| + \vec{p} \cdot \vec{k}_1} \right\} \sigma_3.
 \end{aligned}
 \tag{4.37}$$

Pela mesma razão explicada anteriormente, o segundo termo do l.d. da (4.37) é um invariante de Lorentz.

Já foi mostrado anteriormente que os primeiros termos do l.d. das (4.36) e (4.37) se cancelam. Tomando a diferença da (4.36) e (4.37), e fazendo $\vec{k}_1 \rightarrow -\vec{k}_1$ no segundo termo do l.d. da (4.37), obtemos que

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram} - \text{Diagram} + \text{C.C.} &= - \frac{2q^4}{(2\pi)^6} q^2 (p \cdot q) \frac{p_0}{q^2} \int_{\lambda}^{\Delta} d^3 \vec{k}_1 \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \frac{1}{q \cdot k_2} \cdot \\
 &\cdot \frac{1}{\left(\frac{\vec{p}}{p_0} - \frac{\vec{q}}{q_0} \right) \cdot \vec{k}_1} \frac{1}{\left(\frac{\vec{p}}{p_0} - \frac{\vec{q}}{q_0} \right) \cdot \vec{k}_1 - \frac{q \cdot k_2}{q_0}} \frac{1}{p \cdot k_1} \frac{1}{p \cdot |\vec{k}_1| + \vec{p} \cdot \vec{k}_1} \sigma_3.
 \end{aligned}
 \tag{4.38}$$

Voltando à (4.24) e substituindo as (4.28), (4.33) e (4.38), obtemos que

$$\sigma_{QCD}^{(4)} = -\frac{c_{YM} c_F}{2} \left\{ \frac{2q^4}{(2\pi)^4} (p \cdot q) \frac{p_0}{q_0^2} \int_{\lambda}^{\Delta} d^3 \vec{k}_1 \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \frac{1}{p \cdot k_1} \frac{1}{p_0 |\vec{k}_1| + \vec{p} \cdot \vec{k}_1} \right. \\ \left. \frac{1}{\left(\frac{\vec{p}}{p_0} - \frac{\vec{q}}{q_0}\right) \cdot \vec{k}_1} \frac{1}{\left(\frac{\vec{p}}{p_0} - \frac{\vec{q}}{q_0}\right) \cdot \vec{k}_1 - \frac{q \cdot k_2}{q_0}} \left[\frac{p \cdot q}{p \cdot k_2} - \frac{q^2}{q \cdot k_2} \right] + p \rightleftharpoons q \right\} \sigma_B. \quad (4.39)$$

É importante lembrar que, pelas razões discutidas anteriormente, cada um dos termos que aparecem na (4.39) é um invariante de Lorentz.

Vamos calcular o primeiro termo do l.d. da (4.39) no referencial de repouso do quark, $q = (m, 0, 0, 0)$. Neste referencial este termo fica igual a

$$I_1 = \frac{2q^4}{(2\pi)^4} \int_{-1}^1 dx dy \int_{\lambda}^{\Delta} dk_1 dk_2 \frac{1}{k_1 x} \frac{1}{k_2 + \beta k_1 x} \frac{1}{1 - \beta^2 x^2} \frac{y}{1 - \beta y}, \quad (4.40)$$

onde, λ e Δ são os cut-off inferior e superior, respectivamente, $k_i \equiv |\vec{k}_i|$, $i = 1, 2$; $x = \cos \theta_1$, onde θ_1 é o ângulo entre os vetores $\vec{k}_1$ e $\vec{p}$, $y = \cos \theta_2$, onde θ_2 é o ângulo entre $\vec{k}_2$ e $\vec{p}$ e finalmente, $\beta = |\vec{p}| / p_0$.

A integral em y é igual a

$$\int_{-1}^1 \frac{y}{1 - \beta y} dy = -\frac{2}{\beta} \left[1 + \frac{1}{2\beta} \ln \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right) \right]. \quad (4.41)$$

Substituindo a (4.41) e o resultado no Apêndice E na (4.40), obtemos que

$$I_1 = -\frac{2q^4}{(4\pi)^2} \frac{1}{\beta} \left[1 + \frac{1}{2\beta} \ln \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right) \right] \ln \left(\frac{1}{\lambda} \right) \sigma_B. \quad (4.42)$$

Fazendo $p \rightleftharpoons q$ na (4.42), obtemos o segundo termo do l.d. da (4.39).

Então, com esses resultados voltamos à (4.39) e obtemos, finalmente, que

$$\sigma_{\text{QCD}}^{(4)} = -\frac{2g^4}{(4\pi)^2} \frac{c_m c_f}{\beta} \left[1 - \frac{1}{2\beta} \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) \right] \ln\left(\frac{1}{\lambda}\right) \sigma_s. \quad (4.43)$$

ii) OUTROS GRÁFICOS ABELIANOS

Os gráficos que possuem bolha de auto-energia de gluons (tipo QED)[†] não contribuem para as divergências I.R. através do método $(R_{\text{em}} - R_{\text{abs}})$. Isso porque em ordem g^4 a σ_s os gráficos que possuem a bolha de auto-energia são

mas já foi discutido (cf. seção 4.1) que os gráficos puramente virtuais se cancelam no método $(R_{\text{em}} - R_{\text{abs}})$. Devemos observar ainda que, para os gráficos com um gluon soft em camada de massa, os $i\epsilon$'s nos propagadores de férmions não contribuem porque o k dos gluons que aparecem nos propagadores de férmions estão na camada de massa. Assim, os gráficos com um gluon em camada de massa se cancelam identicamente com os gráficos do processo de gluon absorvido.

Logo, essa classe de gráficos não contribuem para as divergências I.R. através do método utilizado.

[†] Bolha de auto-energia de gluons do tipo QED: .

Para concluir a discussão dos gráficos abelianos, precisamos discutir gráficos que só possuam correção em uma única perna. Gráficos do tipo:

Apesar de termos calculado explicitamente em ordem g^2 a σ_B o cancelamento das divergências I.R. na classe de gráficos com correção numa mesma perna incidente, isso não era necessário pois, já foi mostrado (Ganapathi 81) que os gráficos do processo de espalhamento por um potencial singlete não possuem divergências I.R..

Devemos notar que as expressões da classe de gráficos que envolvem correção em uma única perna incidente (no processo que estamos estudando) são iguais às expressões dos gráficos que aparecem no processo de espalhamento. Como no processo de espalhamento há cancelamento das divergências I.R., e os gráficos se cancelam por classes, ou seja, gráficos que possuem a mesma cinemática, de maneira que os gráficos que só possuem correção numa única perna que aparecem no processo que estamos tratando não possuem divergência I.R..

Pelo que foi dito nessa seção, a parte abeliana das divergências I. R. é dada pela (4.43), ou seja:

$$\sigma_{QC}^{A(4)} = -\frac{2g^4}{(4\pi)^2} \frac{C_{YM} C_F}{\beta} \left[1 - \frac{1}{2\beta} \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) \right] \ln\left(\frac{1}{\lambda}\right) \sigma_B. \quad (4.43)$$

$(R_{em} - R_{abs})$, a contribuição dos gráficos com bolha de auto-energia de gluons se cancela pois, nesse caso, as expressões dos processos com um gluon emitido e com um gluon absorvido são iguais.

Os gráficos de ghosts que poderiam contribuir pelo método $(R_{em} - R_{abs})$ são os que possuem loops fechados de ghosts, e ghosts livres no estado final, de maneira que os gráficos são da forma

e, pela mesma razão que os gráficos com bolhas de auto-energia de gluon, a contribuição dos gráficos com loop é cancelada, assim como na seção 4.1 mostramos que gráficos com duas partículas na camada de massa no estado final não contribuem para a (4.15).

Então, a contribuição dos gráficos não-abelianos para a seção de choque total é

$$\sigma_{QCD}^{NA(4)} = \frac{c_{YM} c_F}{2} \left\{ \left[\text{diagram 1} - \text{diagram 2} \right] + \left[\text{diagram 3} - \text{diagram 4} \right] + \right. \\ \left. + \left[\text{diagram 5} - \text{diagram 6} \right] + \left[\text{diagram 7} - \text{diagram 8} \right] + c.c. \right\}, \quad (4.44)$$

As expressões dos dois últimos gráficos são obtidas fazendo $p \rightleftharpoons q$ nas expressões dos dois primeiros gráficos, respectivamente.

Na aproximação eikonal temos que

$$\langle \text{diagram 1} \rangle - \langle \text{diagram 2} \rangle + \text{C.C.} = -\frac{g^4}{(2\pi)^6} \text{Re} \left\{ \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|} \frac{1}{q \cdot k_1} \frac{1}{p \cdot k_1} \int d^4 k_2 (2k_2 - k_1) \right.$$

$$\left. \cdot \frac{[p(q \cdot q) - q(p \cdot q)]}{k_2^2 - i\epsilon} \frac{1}{(k_2 - k_1)^2 - i\epsilon} \delta(q \cdot k_2) \right\} \sigma_B,$$

entretanto, como $\delta(k^2)$ não é compatível[†] com a $\delta(q \cdot k_2)$, então a expressão acima pode ser reescrita como

$$\langle \text{diagram 1} \rangle - \langle \text{diagram 2} \rangle + \text{C.C.} = -\frac{g^4}{(2\pi)^6} \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|} \frac{1}{q \cdot k_1} \frac{1}{p \cdot k_1} \int d^4 k_2 (2k_2 - k_1).$$

$$\cdot \frac{[p(q \cdot q) - q(p \cdot q)]}{k_2^2} \frac{\delta(q \cdot k_2)}{(k_1 - k_2)^2} \sigma_B. \quad (4.45)$$

Como a (4.45) é um invariante de Lorentz, vamos reescrevê-la no referencial de repouso do quark ($q = (m, 0, 0, 0)$) e, após algum algebrismo, obtemos que

$$\langle \text{diagram 1} \rangle - \langle \text{diagram 2} \rangle + \text{C.C.} = -\frac{g^4}{(2\pi)^6} \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|^2} \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|^2} \frac{1}{p \cdot k_1} \frac{(2\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{p}}{|\vec{k}_1 - \vec{k}_2|^2 - |\vec{k}_1|^2} \sigma_B. \quad (4.46)$$

Na aproximação eikonal temos que

$$\langle \text{diagram 1} \rangle - \langle \text{diagram 2} \rangle + \text{C.C.} = \frac{g^4}{(2\pi)^6} \text{Re} \left\{ \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|} \frac{1}{q \cdot k_1} \int d^4 k_2 (k_1 + k_2) \cdot [p(q \cdot q) - q(q \cdot p)] \right.$$

$$\left. \cdot \frac{1}{k_2^2 - i\epsilon} \frac{1}{(k_1 - k_2)^2 - i\epsilon} \left[-\frac{\delta(q \cdot k_2)}{p \cdot k_2 - p \cdot k_1} + \frac{\delta(p \cdot k_2 - p \cdot k_1)}{q \cdot k_2} \right] \right\} \sigma_B. \quad (4.47)$$

[†] Estamos usando a (2.5) para escrever a (4.45).

Notemos que cada um dos termos que aparecem na (4.47) é um invariante de Lorentz.

Vamos definir I_1 como o primeiro termo do l.d. da (4.47). Como $\delta(k_2^2)$ é incompatível com $\delta(q \cdot k_2)$, ficamos com

$$I_1 = -\frac{g^4}{(2\pi)^6} \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|} \frac{1}{q \cdot k_1} \int d^4 k_2 (k_1 + k_2) \cdot [p(q \cdot q) - q(q \cdot p)] \cdot \frac{1}{k_2^2} \frac{1}{(k_1 - k_2)^2} \frac{\delta(q \cdot k_2)}{p \cdot k_2 - p \cdot k_1} \sigma_B. \quad (4.48)$$

Calculando I_1 no referencial de repouso do quark, e após alguma manipulação, a (4.48) fica igual a

$$I_1 = -\frac{g^4}{(2\pi)^6} \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|^2} \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|^2} \frac{1}{|\vec{k}_1 - \vec{k}_2|^2 - |\vec{k}_1|^2} \frac{\vec{p} \cdot (\vec{k}_1 + \vec{k}_2)}{\vec{p} \cdot \vec{k}_2 - p \cdot k_1}. \quad (4.49)$$

Seja I_2 o segundo termo do l.d. da (4.47), ou seja,

$$I_2 = \frac{g^4}{(2\pi)^6} \operatorname{Re} \left\{ \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|} \frac{1}{q \cdot k_1} \int d^4 k_2 (k_1 + k_2) \cdot [p(q \cdot q) - q(q \cdot p)] \cdot \frac{1}{k_2^2 - i\varepsilon} \frac{1}{(k_1 - k_2)^2 - i\varepsilon} \frac{\delta(p \cdot k_2 - p \cdot k_1)}{q \cdot k_2} \right\} \sigma_B. \quad (4.50)$$

Usando a (2.5), fazendo $k_2 \rightarrow -k_2$, reescrevemos a (4.50) como

$$I_2 = \frac{g^4}{(2\pi)^6} \left\{ - \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|} \frac{1}{q \cdot k_1} \int d^4 k_2 (k_1 - k_2) \cdot [p(q \cdot q) - q(q \cdot p)] \cdot \frac{1}{k_2^2} \frac{1}{(k_1 + k_2)^2} \frac{\delta(p \cdot k_1 + p \cdot k_2)}{q \cdot k_2} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|} \frac{1}{q \cdot k_1} \int d^4 k_2 (k_1 - k_2) \cdot [p(q \cdot q) - q(q \cdot p) \delta(k^2) \\
& \quad \cdot \delta((k_1 + k_2)^2) \delta(p \cdot k_1 + p \cdot k_2)] \sigma_B.
\end{aligned}
\tag{4.51}$$

A parte contendo $\delta(k_2^2) \cdot \delta(k_1 + k_2)^2 \cdot \delta(p \cdot k_1 + p \cdot k_2)$ é mais facilmente calculada no referencial de repouso do anti-quark [$p = (m, 0, 0, 0)$]. Neste referencial, obtemos $\delta(\cos \alpha + 1)$, onde α é o ângulo entre $\vec{k}_1$ e $\vec{k}_2$. Por regularização dimensional temos que se integrarmos primeiro em $|\vec{k}_1|$ e mantendo o eixo z paralelo a $\vec{k}_2$, ficamos com

$$\sin^{\eta} \alpha \delta(\cos \alpha - 1) = (1 - \cos^2 \alpha)^{1/2} \delta(\cos \alpha + 1) = 0. \tag{4.52}$$

Substituindo a (4.52) na (4.51) e escrevendo a I_2 no referencial de repouso do anti-quark, obtemos que

$$\begin{aligned}
I_2 = & \frac{g^4}{(2\pi)^6} \left\{ - \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|} \frac{1}{\vec{\beta} \cdot \vec{k}_1 - |\vec{k}_1|} \int_{\lambda}^{\Delta} d^3 \vec{k}_2 \frac{\vec{\beta} \cdot (\vec{k}_1 + \vec{k}_2)}{|\vec{k}_2|^2 - |\vec{k}_1|^2} \frac{1}{|\vec{k}_1 - \vec{k}_2|^2} \frac{1}{|\vec{k}_1| - \vec{\beta} \cdot \vec{k}_2} + \right. \\
& \left. + 2\beta^2 \int_{\lambda}^{\Delta} d^3 \vec{k}_1 \frac{1}{\vec{\beta} \cdot \vec{k}_1 - |\vec{k}_1|} \int_{\lambda}^{\Delta} d^3 \vec{k}_2 \frac{1}{|\vec{k}_2|^2 - |\vec{k}_1|^2} \frac{1}{|\vec{k}_1 - \vec{k}_2|^2} \frac{1}{|\vec{k}_1| - \vec{\beta} \cdot \vec{k}_2} \right\} \sigma_B,
\end{aligned}
\tag{4.53}$$

onde $\vec{\beta} = \vec{p}/p_0$ e

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{m^4}{(p \cdot q)^2}}. \tag{4.54}$$

Pelo Apêndice F, a (4.53) fica igual a

$$I_2 = \frac{-g^4}{(2\pi)^6} \left[-4\pi^4 \left(\frac{1}{2\beta} \ln \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right) + 1 \right) \right] \ln \left(\frac{1}{\lambda} \right) \sigma_B, \quad (4.55)$$

e pelo Apêndice G, temos que

$$I_1 = \frac{-g^4}{(2\pi)^6} \left[-2\pi^4 \left(\frac{1}{2\beta} \ln \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right) + 1 \right) \right] \ln \left(\frac{1}{\lambda} \right) \sigma_B. \quad (4.56)$$

Somando (4.55) com (4.56) e substituindo na (4.47), obtemos que

$$\langle \text{diagram 1} \rangle - \langle \text{diagram 2} \rangle + \text{C.C.} = \frac{6\pi^4}{(2\pi)^6} g^4 \left[1 + \frac{1}{2\beta} \ln \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right) \right] \ln \left(\frac{1}{\lambda} \right) \sigma_B. \quad (4.57)$$

Pelo Apêndice H, a (4.46) fica igual a

$$\langle \text{diagram 3} \rangle - \langle \text{diagram 4} \rangle + \text{C.C.} = \frac{2\pi^4}{(2\pi)^6} g^4 \left[1 + \frac{1}{2\beta} \ln \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right) \right] \ln \left(\frac{1}{\lambda} \right) \sigma_B. \quad (4.58)$$

Voltando à (4.44), substituindo (4.57) e (4.58), não esquecendo de fazer $p \rightleftharpoons q$ nas duas expressões, temos, finalmente, que

$$\sigma_{\text{QCD}}^{\text{N.A.}(4)} = \frac{2}{(4\pi)^2} C_{\text{YM}} C_F g^4 \left[1 - \frac{1}{2\beta} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) \right] \ln \left(\frac{1}{\lambda} \right) \sigma_B. \quad (4.59)$$

Pela mesma razão que no caso dos gráficos abelianos, os gráficos que envolvam correções numa única perna, ou seja, gráficos do tipo

não possuem divergências I.R. (cf. seção 4.2, item ii).

Assim, a contribuição não abeliana para as divergências I.R. é dada pela (4.59).

Então, pelas (4.43) e (4.59) a divergência I.R. em ordem g^4 a σ_B é igual a

$$\sigma_{QCD}^{(4)} = 2 \left(\frac{g^2}{4\pi} \right)^2 C_{YM} C_F \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) \left[1 - \frac{1}{2\beta} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) \right] \ln \left(\frac{1}{\lambda} \right) \sigma_B. \quad (4.60)$$

No próximo capítulo discutiremos o resultado, inclusive mostraremos a dependência em β da seção de choque total $\sigma_{QCD}^{(4)}$.

CAPÍTULO 5.

CONCLUSÕES.

No capítulo 4 mostramos que apenas as divergências leading no processo

$$\bar{q} + q \rightarrow \gamma^* + \text{soft gluons} \quad (2.1)$$

se cancelam em ordem g^4 a σ_B . Vemos, assim, que somente o mecanismo de Bloch-Nordsieck não é suficiente para o cancelamento de todas as divergências infravermelhas nesse processo.

Vamos discutir o comportamento da dependência em β da divergência I.R. da seção de choque obtida (veja (4.60)).

Seja $F(\beta)$ definida pela expressão

$$F(\beta) = \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \left[1 - \frac{1}{2\beta} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) \right], \quad (5.1)$$

que tem a seguinte curva:

Para $\beta \rightarrow 0$ (quando os quarks não possuem movimento relativo), temos que

$$F(\beta) \approx \frac{\beta}{3},$$

que vem apenas da contribuição dos gráficos abelianos (cf. (4.43)) no gauge de Feynman. Então, a seção de choque (4.60) vai a zero quando não há variação de velocidade entre as partículas.

Para $\beta \rightarrow 1$, a função $F(\beta)$ vai a zero como

$$F(\beta) \approx \frac{1}{2} (1-\beta) \ln\left(\frac{1}{1-\beta}\right). \quad (5.2)$$

O limite relativístico da (4.60) é consistente com o fato de que para o processo de espalhamento e^+e^- em alta energia ($\beta \rightarrow 1$), a seção de choque vai a zero da forma $(1-\beta)$. Tanto os gráficos abelianos como os não-abelianos contribuem para a (5.2).

Consideremos a seção de choque

$$= \frac{e^2 q^2}{(2\pi)^3} \sum_a \int \frac{d^3 \vec{k}}{|\vec{k}|} \bar{v}(p) \frac{i(\not{q}-\not{k})+m}{(q^2+m^2)+k^2-2p \cdot k - i\epsilon} \gamma_a t^a u(q) \cdot \bar{u}(q) \gamma_a \frac{-i(\not{q}-\not{k})+m}{(q^2+m^2)+k^2-2p \cdot k + i\epsilon} t^a v(p). \quad (5.3)$$

Na região I.R. ($k^2 \ll p \cdot k$) os propagadores só divergem na região infravermelha se q estiver na camada de massa ($q^2 + m^2 = 0$). Vamos colocar $q^2 + m^2 = p^2 + m^2 = (\Delta P)^2$, onde ΔP mede o quanto os quarks estão fora da camada de massa. Com essa notação, a (5.3) escrita na aproximação eikonal fica sendo

$$= \frac{e^2 q^2}{2(2\pi)^3} C_F q^2 \int_0^\infty \frac{d^3 \vec{k}}{|\vec{k}|} \frac{1}{-q \cdot k + \Delta P^2 - i\epsilon} \frac{1}{-q \cdot k + \Delta P^2 + i\epsilon} \sigma_3. \quad (5.4)$$

Pela (5.4) vemos que o cut-off inferior $\underline{\lambda}$ introduzido para regularizar as integrais na região I.R. mede o quanto os quarks incidentes estão fora da camada de massa.

A expressão que obtivemos para a parte I.R. da seção de choque (cf. (4.60)) é

$$\sigma_{QCD}^{(4)} = 2 C_{YM} C_F \left(\frac{q^2}{4\pi} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) \left[1 - \frac{1}{2\beta} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) \right] \ln \left(\frac{1}{\lambda} \right) \sigma_B, \quad (4.60)$$

que é divergente se os quarks incidentes estiverem na camada de massa ($\Delta P = 0$). Neste caso a teoria de perturbação perde sentido, pois, cada termo da expansão é infinito.

Se os quarks não são livres, temos $\Delta P \neq 0$, e os quarks estão restritos a uma região ΔR do espaço que mede o tamanho do estado ligado. Pelo princípio incerteza de Heisenberg temos que

$$\Delta P \approx (\Delta R)^{-1},$$

e, neste caso, a (4.60) fica sendo igual a

$$\sigma_{QCD}^{(4)} = 2 C_{YM} C_F \left(\frac{q^2}{4\pi} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) \left[1 - \frac{1}{2\beta} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) \right] \ln (\Delta R) \sigma_B. \quad (5.5)$$

Neste caso a região I.R. pode dar uma contribuição não nula (finita) para a seção de choque total.

É muito importante mencionar que (4.60) também foi obtida no gauge de Coulomb por Carneiro et al. (Andrasi 81, Carneiro 81), mostrando que a seção de choque obtida em ordem g^4 a σ_B , (4.60), é independente de gauge.

Mencionamos no capítulo 4 que os processos de espalhamento de um quark por um potencial singleto (Ganapathi 81) e de criação de um quark com um anti-quark a partir de fóton virtual (Appelquist 76) não possuem divergência I.R.. O que distingue o processo que estudamos desses outros dois? A diferença está que no estado inicial do processo de aniquilação ($q + \bar{q} \rightarrow \gamma^*$) exis-

tem duas partículas coloridas. O fato de existirem duas partículas coloridas no mesmo estado, permite aparecer um fenômeno adicional, que é a troca de cor entre as partículas. Podendo esse novo fenômeno ser o responsável pelas divergências. Essa troca de cor não existe em QED, onde as divergências I.R. se cancelam através do mecanismo de Bloch-Nordsieck (Yennie 61).

No processo de espalhamento por um potencial singlete só existe uma partícula colorida em cada estado, não havendo, portanto, a possibilidade de troca de cor entre partículas que estão na camada de massa (partículas reais).

Devido à unitariedade da matriz S , a seção de choque do processo de criação (4.1), incluindo os gluons soft no estado final, é dada por

$$\sigma_{QCD} = \text{Im} \left\{ \gamma^* \text{---} \text{---} \text{---} \gamma^* \right\}, \quad (5.6)$$

onde é a bolha de auto-energia do fóton, vestida. Como a bolha de auto-energia do fóton não apresenta divergência I.R. (Ramon 81, pág. 323), a seção choque em QCD também não apresenta divergência I.R..

Pela (5.6) vemos que, se somamos a seção de choque ao processo de criação em todas as ordens, ficamos com um outro processo cujos estados inicial e final são partículas sem cor. Novamente o fenômeno de troca de cor entre partículas num mesmo estado não ocorre.

Dois subprodutos importantes da solução do problema são:

i) o método de cálculo utilizado, que permite calcular um número reduzido de gráficos de Feynman. Este método mostra como o cancelamento das divergências leading é obtido de maneira simples.

ii) é a primeira vez em QED em que os $i\epsilon\lambda$ nos propagadores de fêrmions foram levados em conta no cálculo das divergências I.R.. É importante ressaltar que para o cancelamento das divergências I.R. em QED, incluindo os $i\epsilon\lambda$ nos propagadores de fêrmions, é suficiente o mecanismo de Bloch-Nordsieck.

Um resultado extremamente importante é que o mecanismo de Bloch-Nordsieck nem sempre é suficiente para cancelar as divergências infravermelhas em QCD ordem a ordem. Assim, desde que a (4.60) é infinita no limite de $\lambda \rightarrow 0$, está claro que a seção de choque para o processo (2.1) não é uma quantidade física, pelo menos em teoria de perturbação. Concluimos, então, que a aproximação de impulso, onde os quarks são tratados como partículas assintoticamente livres, não é totalmente correta.

Como se supõe que os quarks só existem em estados ligados, a natureza não perturbativa deve ser levada em conta, e a região infravermelha pode dar uma contribuição finita para a seção de choque total (cf. (5.5)).

A continuação natural desse trabalho é o estudo das divergências infravermelhas na QCD em todas as ordens de perturbação. Precisamos saber se ao somarmos em todas as ordens de perturbação, no limite de $\lambda \rightarrow 0$, a parte infravermelha se fatoriza na seção de choque total e se obtem um resultado consistente com o confinamento. Esse estudo é complicado devido à complexidade das integrais que aparecem em ordens superiores de perturbação.

APÊNDICE A.

Regras de Feynman, no gauge de Feynman:

 $\bar{u}^n(p)$

 $u^n(p)$

 $\epsilon_\mu^a(k)$

 $\Delta_F = \frac{1}{i(2\pi)^4} \frac{1}{i\not{p} + m - i\epsilon}$

 $\frac{1}{i(2\pi)^4} \frac{\delta_{ab} \delta_{\mu\nu}}{k^2 - i\epsilon}$

 $- (2\pi)^4 g \gamma_\mu t^a$

 $(2\pi)^4 g f_{abc} [\delta_{\beta\gamma} (q-p)_\alpha + \delta_{\gamma\alpha} (k-q)_\beta + \delta_{\alpha\beta} (p-k)_\gamma]$

 $- i (2\pi)^4 g^2 \{ f_{gab} f_{gdc} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} - \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta}) + f_{gad} f_{gbc} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} - \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta}) + f_{gab} f_{gdc} (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) \}$

Soma sobre estados: $\frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{|\vec{k}|}$

Aproximação eikonal:

Na aproximação eikonal, o momento k dos gluons soft

é tal que

$$k \ll p, q, Q,$$

sendo p, q os momentos dos quarks incidentes e Q o momento do fóton virtual.

O propagador de fêrmions

$$\frac{-i(\not{p} + \not{k}) + m}{p^2 + m^2 + k^2 - 2p \cdot k - i\varepsilon},$$

tem as seguintes aproximações na região de gluon soft:

i) apenas os termos de ordem zero em k são mantidos no numerador do propagador.

ii) o termo quadrático em k no denominador do propagador é desprezado em relação ao termo linear em k .

Assim, para p em camada de massa, o propagador de fêrmions na aproximação eikonal fica

$$\begin{array}{c} a, \mu \\ \text{---} \times \text{---} \\ \uparrow \\ p \quad k \end{array} \quad p+k \quad = \quad g \quad \frac{\not{p}}{p \cdot k - i\varepsilon} \quad k^a.$$

A expressão acima, para o propagador na aproximação eikonal, inclui o vértice (μ, a) de gluon soft k .

As matrizes t^a são as matrizes de cor.

As regras de Feynman para a QED são as mesmas, apenas os vértices só de gluons não existem em QED.

APÊNDICE B.

Cálculo da Bolha de Auto-Energia de Fêrmions na Aproximação Eikonal.

$$\Sigma(p) = A + (i\not{p} + m)B + \Sigma^f,$$

onde $\Sigma(p)$ é expressão da bolha. Estamos interessados em calcular A e B na aproximação eikonal.

Temos que

$$\Sigma(p) = -2g^2 \int d^4k \frac{i(\not{p}-\not{k})+2m}{(p-k)^2+m^2-i\epsilon} \frac{1}{k^2-i\epsilon},$$

e

$$A = \Sigma(p) \Big|_{i\not{p} = -m} = -g^2 \int d^4k \frac{1}{k^2-2p \cdot k - i\epsilon} \frac{1}{k^2-i\epsilon}. \quad (\text{B.1})$$

Na aproximação eikonal, a (B.1) fica igual a

$$A \approx \frac{g^2}{2} \int d^4k \frac{1}{p \cdot k + i\epsilon} \frac{1}{k^2-i\epsilon} = 0, \quad (\text{B.2})$$

por integração simétrica.

Mas,

$$B = \frac{\partial \Sigma(p)}{\partial(i\not{p})} \Big|_{i\not{p} = -m} = -4g^2 \int d^4k \frac{i(\not{p}-\not{k})[i(\not{p}-\not{k})+2m]}{[-k^2+2p \cdot k + i\epsilon]^2 [k^2-i\epsilon]} \Big|_{i\not{p} = -m} \quad (\text{B.3})$$

APÊNDICE C.

C.1) Gráficos da Classe I, com pelo menos um Gluon em Camada de Massa, cuja Estrutura de Cor é C_F^2 :

i) um gluon soft em camada de massa:

ii) dois gluons soft em camada de massa:

C.2) Gráficos da Classe I, com pelo menos um Gluon em Camada de Massa, cuja Estrutura de Cor é $(C_F^2 - \frac{C_{YM} C_F}{2})$:

i) um gluon soft em camada de massa:

ii) dois gluons soft em camada de massa:

APÊNDICE D

D.1) Gráficos da Classe II, com pelo menos um Gluon em Camada de Massa, cuja estrutura de cor é C_F^2 :

i) um gluon soft em camada de massa:

ii) dois gluons soft em camada de massa:

D.2) Gráficos da Classe II, com pelo menos um Gluon Soft em Camada de Massa cuja estrutura de Cor é $(C_F^2 - \frac{C_{YM} C_F}{2})$:

i) um gluon soft em camada de massa:

ii) dois gluons soft em camada de massa:

APÊNDICE E.

Cálculo da parte I.R. da integral:

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_{\lambda}^{\Delta} dk_1 dk_2 \frac{1}{k_1 x} \frac{1}{k_2 + \beta k_1 x} \frac{1}{1 - \beta^2 x^2}. \quad (E.1)$$

Definindo $y = \beta x$ e usamos a identidade,

$$\frac{1}{y} \frac{1}{y^2 - 1} = \frac{1}{2} \frac{1}{y+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y},$$

e em seguida fazendo a integral em y , obtemos o seguinte resultado para (E.1):

$$I = \int_{\lambda}^{\Delta} dk_1 dk_2 \frac{k_1}{k_2} \frac{1}{k_1^2 - k_2^2} \ln \left| \frac{k_2 + \beta k_1}{k_2 - \beta k_1} \right|. \quad (E.2)$$

Definindo as variáveis u e v através das relações

$$k_1 = \frac{u}{1+v} \Delta \quad e \quad k_2 = \frac{uv}{1+v} \beta \Delta,$$

a contribuição para a divergência I.R. da (E.2) vem do limite inferior da integração em u , e como só estamos interessados na parte I.R., temos, então, que

$$I_{\text{I.R.}} = - \int_{\frac{\lambda}{\Delta} \sim 0}^1 \frac{du}{u} \int_0^{\infty} \frac{dv}{v} \frac{1}{1 - \beta^2 v^2} \ln \left| \frac{1-v}{1+v} \right|. \quad (E.3)$$

Derivando a (E.3) em relação a β^2 , usando a prescrição de valor principal e o teorema de Cauchy, mostra-se que $(\beta^2 I)$ é independente de β^2 . Assim, a (E.3) se reduz a

$$I_{\text{I.R.}} = - \ln\left(\frac{1}{\lambda}\right) \int_0^{\infty} \frac{dv}{v} \ln \left| \frac{1-v}{1+v} \right|.$$

Como

$$\int_0^{\infty} \frac{dv}{v} \ln \left| \frac{1+v}{1-v} \right| = \frac{\pi^2}{2}, \quad (\text{E.4})$$

temos, finalmente, que

$$I \stackrel{\text{I.R.}}{=} \frac{\pi^2}{2} \ln \left(\frac{1}{\lambda} \right). \quad (\text{E.5})$$

APÊNDICE F.

Vamos calcular a parte I.R. da integral.

$$A = - \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|} \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \frac{1}{\vec{\beta} \cdot \vec{k}_1 - |\vec{k}_1|} \frac{2\beta^2 |\vec{k}_1| - \vec{\beta} \cdot (\vec{k}_1 + \vec{k}_2)}{|\vec{k}_2|^2 - |\vec{k}_1|^2} \cdot \frac{1}{|\vec{k}_1 - \vec{k}_2|^2} \frac{1}{|\vec{k}_1| - \vec{\beta} \cdot \vec{k}_2} \quad (F.1)$$

Vamos usar a seguinte convenção:

$$K_i = \vec{\beta} \cdot \vec{k}_i, \quad i = 1, 2. \quad (F.2)$$

Fazendo $k_1 \rightleftharpoons k_2$ e em seguida $k_1 \rightarrow -k_1$, temos que

$$A = \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_1}{k_1} \frac{d^3 \vec{k}_2}{k_2} \frac{2\beta^2 k_2 + (K_1 - K_2)}{k_1^2 - k_2^2} \frac{1}{|\vec{k}_1 + \vec{k}_2|^2} \frac{1}{k_2 + K_1} \frac{1}{k_2 - K_2}, \quad (F.3)$$

onde $k_i = |\vec{k}_i|$, $i = 1, 2$.

Lembrando que

$$\frac{1}{k_2 - K_2} \frac{1}{k_2 + K_1} = \frac{1}{K_1 + K_2} \left(\frac{1}{k_2 - K_2} - \frac{1}{k_2 + K_1} \right),$$

a (F.3) fica igual a

$$A = \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_1}{k_1} \frac{d^3 \vec{k}_2}{k_2} \frac{2\beta^2 k_2 + K_1 - K_2}{k_1^2 - k_2^2} \frac{1}{|\vec{k}_1 + \vec{k}_2|^2} \frac{1}{K_1 + K_2} \frac{1}{k_2 - K_2} + \\ - \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_1}{k_1} \frac{d^3 \vec{k}_2}{k_2} \frac{2\beta^2 k_2 + K_1 - K_2}{k_1^2 - k_2^2} \frac{1}{|\vec{k}_1 + \vec{k}_2|^2} \frac{1}{K_1 + K_2} \frac{1}{k_2 + K_1}. \quad (F.4)$$

Fazendo $k_1 \rightleftharpoons k_2$ na primeira integral do l.d. da (F.4), e após essa operação escrevemos cada uma das integrais, como

$$\int d^3\vec{k}_1 d^3\vec{k}_2 I(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \frac{1}{2} \left\{ \int [I(\vec{k}_1, \vec{k}_2) + I(-\vec{k}_1, -\vec{k}_2)] d^3\vec{k}_1 d^3\vec{k}_2 \right\},$$

e decorre, então, que

$$\begin{aligned} A &= \int_{\lambda}^{\Delta} d^3\vec{k}_1 d^3\vec{k}_2 \frac{2\beta^2 k_1 + (k_2 - k_1)}{|\vec{k}_1 + \vec{k}_2|} \frac{1}{k_1 + k_2} \frac{1}{k_1^2 - k_2^2} \frac{1}{k_2^2 - k_1^2} = \\ &= 4\pi^4 \left[\frac{1}{2\beta} \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) - 1 \right] \ln\left(\frac{1}{\lambda}\right), \end{aligned}$$

(cf. referência (Dória, 80)).

APÊNDICE G.

Vamos calcular a parte I.R. da integral

$$B = \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|^2} \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|^2} \frac{\vec{p} \cdot (\vec{k}_1 + \vec{k}_2)}{|\vec{k}_1 - \vec{k}_2|^2 - |\vec{k}_1|^2} \frac{1}{\vec{p} \cdot \vec{k}_2 - \vec{p} \cdot \vec{k}_1} . \quad (G.1)$$

Fazendo $k_1 \rightleftharpoons k_2$, em seguida $k_1 \rightarrow -k_1$, e usando as convenções do Apêndice F, a (G.1) fica igual

$$B = \int \frac{d^3 \vec{k}_1}{k_1^2} \frac{d^3 \vec{k}_2}{k_2^2} \frac{k_2 - k_1}{|\vec{k}_1 + \vec{k}_2|^2 - k_2^2} \frac{1}{k_2 - (k_1 + k_2)} .$$

Fazendo a mudança de variáveis $\vec{k}'_2 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$, e em seguida tomando

$$\frac{1}{2} \int [I(\vec{k}_1, \vec{k}'_2) + I(-\vec{k}_1, -\vec{k}'_2)] d^3 \vec{k}_1 d^3 \vec{k}'_2 ,$$

chegamos a $(\vec{k}'_2 \equiv \vec{k}_2)$

$$B = \int d^3 \vec{k}_1 d^3 \vec{k}_2 \frac{1}{k_1^2} \frac{1}{|\vec{k}_1 - \vec{k}_2|^2} \frac{k_2 (k_2 - 2k_1)}{k_2^2 - |\vec{k}_2 - \vec{k}_1|^2} \frac{1}{|\vec{k}_2 - \vec{k}_1|^2 - k_2^2} . \quad (G.2)$$

Definimos θ_i como o ângulo entre $\vec{\beta}$ e $\vec{k}_i$, $i = 1, 2$, θ o ângulo entre $\vec{k}_1$ e $\vec{k}_2$ e χ o ângulo polar de $\vec{k}_1$. Trabalharemos com as variáveis $x_i = \cos \theta_i$, $i = 1, 2$ e $x = \cos \theta$. Assim, reescrevemos a (G.2) nas novas variáveis e fazendo a integração em χ , obtemos

$$B = (2\pi)^2 \beta^2 \int_{\lambda}^{\Delta} dk_1 dk_2 k_2^2 \int_{-1}^1 dx dx_2 \frac{1}{k_1 (2k_2 x - k_1)} .$$

$$\frac{k_2 x_2^2 (k_2 - 2k_1 x)}{k_1^2 + k_2^2 - 2k_1 k_2 x} \frac{1}{k_1^2 + k_2^2 - 2k_1 k_2 x - \beta^2 k_2^2 x_2^2} . \quad (G.3)$$

Usando que

$$\frac{\beta^2 k_2^2 x_2^2}{(k_1^2 + k_2^2 - 2k_1 k_2 x - \beta^2 k_2^2 x_2^2)(k_1^2 + k_2^2 - 2k_1 k_2 x)} =$$

$$= \frac{1}{k_1^2 + k_2^2 - 2k_1 k_2 x - \beta^2 k_2^2 x_2^2} - \frac{1}{k_1^2 + k_2^2 - 2k_1 k_2 x},$$

a (G.3) fica igual a

$$B = (2\pi)^2 \left\{ \int dk_1 dk_2 \int_{-1}^1 dx dx_2 \frac{k_2}{k_1} \frac{k_2 - 2k_1 x}{2k_2 x - k_1} \frac{1}{k_1^2 + k_2^2 - 2k_1 k_2 x - \beta^2 k_2^2 x_2^2} + \right.$$

$$\left. - \int dk_1 dk_2 \int_{-1}^1 dx dx_2 \frac{k_2}{k_1} \frac{k_2 - 2k_1 x}{2k_2 x - k_1} \frac{1}{k_1^2 + k_2^2 - 2k_1 k_2 x} \right\}. \quad (G.4)$$

Devemos notar que a segunda integral do l.d. da (G.4) é igual à primeira quando colocamos $\beta = 0$. Portanto, basta calcular a primeira integral do l.d. da (G.4), que será denominada de $G(\beta)$.

Usando que

$$\frac{k_2 - 2k_1 x}{2k_2 x - k_1} = \frac{1}{k_2} \frac{k_2^2 - k_1^2}{2k_2 x - k_1} - \frac{k_1}{k_2},$$

e integrando em x , obtemos para $G(\beta)$

$$G(\beta) = (2\pi)^2 \left\{ \int \frac{dk_1}{k_1} \frac{dk_2}{k_2} \int_0^1 dx_2 \ln \left| \frac{(k_1 - k_2)^2 - \beta^2 k_2^2 x_2^2}{(k_1 + k_2)^2 - \beta^2 k_2^2 x_2^2} \right| + \right.$$

$$\left. - \int \frac{dk_1}{k_1} \frac{dk_2}{k_2} \frac{k_2^2 - k_1^2}{k_2^2} \int_0^1 \frac{dx_2}{1 - \beta^2 x_2^2} \ln \left| \frac{(k_1 - k_2)^2 - \beta^2 k_2^2 x_2^2}{(k_1 + k_2)^2 - \beta^2 k_2^2 x_2^2} \right| + \right.$$

$$+ \int dk_1 dk_2 \frac{k_2^2 - k_1^2}{k_1 k_2^3} \int \frac{dx_2}{1 - \beta^2 x_2^2} \ln \left| \frac{k_1 - 2k_2}{k_1 + 2k_2} \right| \}. \quad (G.5)$$

Derivando em relação a β^2 as integrais

$$\int_{\lambda}^{\Delta} \frac{dk_1}{k_1} \frac{dk_2}{k_2} \ln \left| \frac{(k_1 - k_2)^2 - \beta^2 k_2^2 x_2^2}{(k_1 + k_2)^2 - \beta^2 k_2^2 x_2^2} \right|,$$

e

$$\int_{\lambda}^{\Delta} dk_1 dk_2 \frac{k_2^2 - k_1^2}{k_1 k_2^3} \ln \left| \frac{(k_1 - k_2)^2 - \beta^2 k_2^2 x_2^2}{(k_1 + k_2)^2 - \beta^2 k_2^2 x_2^2} \right|,$$

mostramos, como no caso da integral abeliana, que essas integrais são independentes de β . Consequentemente,

$$\begin{aligned} G(\beta) = (2\pi)^2 \Big\{ & 2 \int_0^1 dx_2 \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{dk_1}{k_1} \frac{dk_2}{k_2} \ln \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right| + \\ & - 2 \int_0^1 \frac{dx_2}{1 - \beta^2 x_2^2} \int_{\lambda}^{\Delta} dk_1 dk_2 \frac{k_2^2 - k_1^2}{k_1 k_2^3} \ln \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right| + \\ & + \int_0^1 \frac{dx_2}{1 - \beta^2 x_2^2} \int_{\lambda}^{\Delta} dk_1 dk_2 \frac{k_2^2 - k_1^2}{k_1 k_2^3} \ln \left| \frac{k_1 - 2k_2}{k_1 + 2k_2} \right| \Big\}. \quad (G.6) \end{aligned}$$

A primeira integral é independente de β e é cancelada quando calculamos $B = G(\beta) - G(0)$. As duas integrais restantes divergem para $k_2 \rightarrow 0$ porém, a soma das integrais é finita.

Fazendo a mudança de variáveis

$$k_1 = \frac{uv}{1+v} \Delta \quad e \quad k_2 = \frac{u}{1+v} \Delta,$$

obtemos

$$G(\beta) = (2\pi)^2 \left\{ \text{const.} + \int_0^1 \frac{dx_2}{1-\beta^2 x_2^2} \int_{\frac{\lambda}{\Delta} \sim 0}^1 \frac{du}{u} \int_0^\Lambda \frac{dv}{v} (1-v^2) \left[2 \ln \left| \frac{1+v}{1-v} \right| - \ln \left| \frac{2+v}{2-v} \right| \right] \right\}. \quad (G.7)$$

Colocamos um cut-off superior Λ na integral em v para podermos fazer mudanças de variável. Fazendo $v \rightarrow 2v$ na segunda integral da (G.7), obtemos que

$$G(\beta) = (2\pi)^2 \int_0^1 \frac{dx_2}{1-\beta^2 x_2^2} \int_{\frac{\lambda}{\Delta} \sim 0}^1 \frac{du}{u} \left\{ 2 \int_0^\Lambda \frac{dv}{v} \ln \left| \frac{1+v}{1-v} \right| + \right. \\ \left. - \int_0^{\Lambda/2} \frac{dv}{v} \ln \left| \frac{1+v}{1-v} \right| + 2 \int_0^\Lambda dv \, v \ln \left| \frac{1+v}{1-v} \right| + \right. \\ \left. - 4 \int_0^{\Lambda/2} dv \, v \ln \left| \frac{1+v}{1-v} \right| \right\}. \quad (G.8)$$

As duas primeira integrais são finitas para $\Lambda \rightarrow \infty$, e sua soma, usando a (E.4), é igual a

$$\frac{(2\pi)^4}{8} \frac{1}{2\beta} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) \ln \left(\frac{1}{\lambda} \right).$$

A soma da terceira com a quarta integral se cancela no limite de $\Lambda \rightarrow \infty$.

Portanto,

$$G(\beta) = \frac{(2\pi)^4}{8} \frac{1}{2\beta} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) \ln \left(\frac{1}{\lambda} \right).$$

Voltando para (G.4), obtemos que

$$B = \frac{(2\pi)^4}{8} \left[\frac{1}{2\beta} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) - 1 \right] \ln \left(\frac{1}{\lambda} \right). \quad (G.9)$$

APÊNDICE H.

Cálculo da parte I.R. da integral

$$C = \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|^2} \frac{d^3 \vec{k}_2}{|\vec{k}_2|^2} \frac{1}{p \cdot k_1} \frac{(2\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{p}}{|\vec{k}_1 - \vec{k}_2|^2 - |\vec{k}_1|^2}. \quad (H.1)$$

Fazendo $k_2 \rightarrow -k_2$, em seguida $k_1 \rightleftharpoons k_2$ e usando a notação dos apêndices anteriores, a (H.1) fica igual a

$$C = - \int \frac{d^3 \vec{k}_1}{k_1^2} \frac{d^3 \vec{k}_2}{k_2^2} \frac{1}{k_2 - k_1} \frac{2k_1 + k_2}{|\vec{k}_1 + \vec{k}_2|^2 - k_2^2}. \quad (H.2)$$

Faremos primeiro a integração em $\vec{k}_1$. Para isso manteremos $\vec{k}_2$ fixo. Escolhemos o conjunto de eixos coordenados de maneira que $\vec{k}_2$ coincida com o eixo dos z e $\vec{\beta}$ está contido no plano (y, z) . Definimos θ_i com o ângulo entre $\vec{\beta}$ e $\vec{k}_i$, $i = 1, 2$; θ o ângulo entre $\vec{k}_1$ e $\vec{k}_2$ e χ o ângulo polar de $\vec{k}_1$. Trabalharemos com as variáveis $x_i = \cos \theta_i$, $i = 1, 2$ e $x = \cos \theta$. Assim, a (H.2) fica como

$$C = -\beta \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d^3 \vec{k}_1}{k_1^2} \frac{d^3 \vec{k}_2}{k_2^2} \frac{1}{k_2(\beta x_2 - 1)} \frac{2k_1 x_1 + k_2 x_2}{k_1(k_1 + 2k_2 x)}. \quad (H.3)$$

Pelo teorema da adição, $x_1 = x x_2 + \sin \theta \sin \theta_2 \sin \chi$, e integrando a (H.3) em , obtemos

$$C = -2\pi\beta \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{dk_1}{k_1} \frac{dk_2}{k_2} \int d\Omega_2 \frac{x_2}{\beta x_2 - 1} \int_{-1}^1 dx \frac{k_2 + 2k_1 x}{k_1 + 2k_2 x}. \quad (H.4)$$

Escrevendo a (H.4) como,

$$\frac{1}{2} \left\{ \int [I(x) + I(-x)] dx \right\},$$

obtemos que

$$C = -2\pi\beta \int_{\lambda}^{\Delta} dk_1 dk_2 \int_{-1}^1 dx \frac{1-4x^2}{k_1^2 - 4k_2^2 x^2} \int d\Omega_2 \frac{x_2}{\beta x_2 - 1}. \quad (H.5)$$

Seja

$$\bar{I} = \int_{\lambda}^{\Delta} dk_1 dk_2 \int_{-1}^1 dx \frac{1-4x^2}{k_1^2 - 4k_2^2 x^2}.$$

Fazendo $p_i = k_i/\Delta$, $i = 1, 2$, usando que

$$\frac{1}{p_1^2 - 4p_2^2 x^2} = \frac{1}{2p_1} \left[\frac{1}{p_1 - 2p_2 x} + \frac{1}{p_1 + 2p_2 x} \right],$$

e integrando em p_2 , chegamos a

$$I = \int_{\frac{\lambda}{\Delta} \sim 0}^1 \frac{dp_1}{p_1} \int_0^1 dx (1-4x^2) \frac{1}{2x} \ln \left| \frac{p_1 + 2x}{p_1 - 2x} \right|. \quad (H.6)$$

Definindo novas variáveis u e v , como

$$p_1 = \frac{u}{1+v} \quad \text{e} \quad x = \frac{uv}{2(1+v)},$$

a (H.6) se reduz a

$$I = \frac{1}{2} \int_{\frac{\lambda}{\Delta} \sim 0}^1 \frac{du}{u} \int_0^{\infty} \frac{dv}{v} \ln \left| \frac{1+v}{1-v} \right| + \\ - \frac{1}{2} \int_{\frac{\lambda}{\Delta} \sim 0}^1 du u \int_0^{\infty} dv \frac{v}{(1+v)^2} \ln \left| \frac{1+v}{1-v} \right|. \quad (H.7)$$

Usando a (E.4), e notando que a segunda integral do l. d. da (H.7) não possui divergência I.R., temos, então,

$$I \underset{\text{I.R.}}{=} \frac{\pi^2}{4} \ln\left(\frac{1}{\lambda}\right). \quad (\text{H.8})$$

Voltando para (H.5) e substituindo (H.8) e (4.41), obtemos, finalmente, que

$$C = 2\pi^4 \left[\frac{1}{2\beta} \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) - 1 \right] \ln\left(\frac{1}{\lambda}\right). \quad (\text{H.9})$$

REFERÊNCIAS.

- Andrasi 80: Andrasi, A.; Day, M.; Dória, R.; Frenkel, J.; Taylor, J.C., Nucl. Phys. B182 (1981) 104.

- Andrasi 81: Andrasi, A.; Day, M.; Dória, R.; Taylor, J.C.; Thomaz, M.T, AIP Conference Proceedings nº 68, Particles and Fields Subseries nº 22 - XX Internacional Conference, Madison, Wisconsin (1980) 990.

- Appelquist 76: Appelquist, T.; Carazzone, J.; Klubers-Stern, H.; Roth, M., Phys. Rev. Let. 36 (1976) 768.

- Bloch 37: Bloch, F.; Nordsieck, A., Phys. Rev. 52 (1937) 54.

- Carneiro 81: Carneiro, C.E.; Day, M.; Frenkel, J.; Taylor, J.C.; Thomaz, M.T., Nucl. Phys. B183 (1981) 445.

- Dória 80: Dória, R.; Frenkel, J.; Taylor, J.C., Nucl. Phys. B168 (1980) 93.

- Faddeev 80: Faddeev, L.D.; Slavnov, A.A., Gauge Fields - Introduction to Quantum Theory, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc. (1980) pág. 15.

- Feynman 76: Feynman, R.P., Les Houches, Session XXIX (1976) 123.

- Frenkel 76: Frenkel, J.; Taylor, J.C., Nucl. Phys. B116 (1976) 185.

- Ganapathi 81: Ganapathi, V.; Sterman, G., Phys. Rev. D 10 (1981) 2408.

- Gupta77: Gupta, S.N., Quantum Electrodynamics, Gordon and Breach Science Publishers, 1977.

- Jackson 75: Jackson, W.D., Classical Electrodynamics, John Wiley and Sons, 2a. edição, 1975.

- Ramon 81: Ramon, P., Field Theory. A Modern Primer, Benjamin, 1a. edição, 1981.

- Yennie 61: Yennie, D.R.; Frautschi; Suura, H, Annals of Phys. 13 (1961) 379.