N.T. 454

ROGÉRIO LOPEZ GARCIA

SBI-IFUSP

305M810T0454

MÉTODOS COMPUTACIONAIS EM TEORIAS DE GAUGE

Tese de doutoramento apresen
tada ao Instituto de Física
da Universidade de São Paulo

SÃO PAULO - 1979

Orientador:

Prof. Dr. Henrique Fleming

À Filô e ao Fernando

A G R A D E C I M E N T O S

Ao Professor Henrique Fleming pela orientação segura deste trabalho e pelas facilidades que colocou a minha disposição;

Ao Professor Josif Frenkel por tudo que me ensinou sobre divergências infravermelhas;

A ambos pela leitura atenta do manuscrito;

Ao Adilson pela amizade e pelas corridas;

Aos colegas, funcionários e professores do Instituto de Física da Universidade de São Paulo pelo estímulo e compreensão;

A Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo pelo apoio financeiro.

"- Dize-lhe que tem toda razão ao considerar inúteis para o resto da humanidade os melhores cultores da filosofia; mas não te esqueças de acrescentar que a culpa dessa inutilidade cabe aos que não querem servir-se deles, e não a eles próprios."

Platão, República VI, 489 b

"- Imagina uma habitação subterrânea em forma de caverna, cuja entrada aberta à luz se estende ao longo da sua fachada, e uns homens que lá dentro se acham desde meninos, acorrentados pelas pernas e pelo pescoço de tal maneira que tenham de permanecer imóveis e olhar tão só para a frente, pois as correntes não lhes permitem voltar a cabeça; atrás deles e num plano superior, arde um fogo a certa distância, e entre o fogo e os acorrentados há um caminho elevado, ao longo do qual imagina que tenha sido construído um pequeno muro semelhante a esses tabiques que os titeriteiros colocam entre si e o público para exhibir por cima deles as suas maravilhas.

- Vejo a cena - disse ele

- E não vês também homens a passar ao longo desse muro, carregando toda espécie de objetos, cuja altura ultrapassa a da parede, e estátuas e figuras de animais feitas de pedra, de madeira e outros materiais variados? Alguns desses carregadores falam, outros marcham em silêncio.

- Que estranha situação descreves, e que estranhos prisioneiros!

- Semelhantes a nós - disse eu - Em primeiro lugar, crês que os que estão assim tenham visto outra coisa de si mesmos ou de seus companheiros senão as sombras projetadas pelo fogo sobre a parede fronteiriça da caverna?

- Como seria possível, se durante toda a sua vida foram obrigados a manter imóveis as cabeças?

- E dos objetos transportados, não veriam igualmente apenas as sombras?

- Sim.

- E se pudessem falar uns com os outros, não julgariam estar se referindo ao que se passava diante deles?

- Forçosamente.

- Supõe ainda que a prisão tivesse um eco vindo da parte da frente. Cada vez que falasse um dos passantes, não creriam eles que quem falava era a sombra que viam passar?

- Sim, por Zeus - disse ele.

- Para eles, pois - disse eu - a verdade nada mais seria do que as sombras dos objetos fabricados?"

Platão, República VII, 514 a 515 c

ÍNDICE

RESUMO.....	i
ABSTRACT.....	ii
INTRODUÇÃO.....	1
I - O POTENCIAL EFETIVO.....	3
II - MÉTODOS DE CÁLCULO.....	11
A - O método de Coleman-Weinberg.....	12
B - O método da fase estacionária.....	14
C - Girinos de Weinberg.....	18
III- UMA NOVA TÉCNICA.....	22
A - Apresentação do método.....	23
B - Eletrodinâmica de Bósons: Um loop.....	26
C - Eletrodinâmica de Bósons: Dois loops.....	35
IV - TEORIAS NÃO ABELIANAS.....	37
V - COMENTÁRIOS SUPLEMENTARES.....	51
VI - DIVERGÊNCIAS INFRAVERMELHAS: PRELIMINARES.....	61
VII- EXPONENCIAÇÃO DE DIVERGÊNCIAS INFRAVERMELHAS NO GAUGE AXIAL.....	74
VIII- ELEMENTOS DE MATRIZ DOMINANTES.....	96
IX - CANCELAMENTO DE DIVERGÊNCIAS.....	104
APÊNDICE A.....	114
APÊNDICE B.....	122
APÊNDICE C.....	127
APÊNDICE D.....	137
REFERÊNCIAS.....	149

R E S U M O

Apresentamos um método muito simples e eficiente para o cálculo do potencial efetivo para qualquer teoria contendo bósons escalares. Os exemplos incluem a Eletrodinâmica Escalar no gauge quadrático e Teorias de Yang-Mills puras, no gauge de Landau até um loop. É também rediscutido o método da fase estacionária, pois este se mostra aplicável ao caso dos férmions.

Em seguida é analisado o teorema de Lee-Nauenberg de cancelamento de divergências infravermelhas. As divergências infravermelhas dominantes do operador de evolução temporal são determinadas, no gauge axial para uma teoria de Yang-Mills pura, sem massa. Usando este resultado, vemos que as divergências infravermelhas principais da auto-energia se exponenciam de maneira simples. Para esta mesma teoria mostramos como parte das divergências infravermelhas se cancelam.

A B S T R A C T

We present an elementary and efficient method for computing the effective potential for any theory containing scalar bosons. Examples include massless scalar electrodynamics in the quadratic gauge and pure Yang-Mills theories in the Landau gauge, up to one loop. It is also rediscussed the method of the steepest descent since it is also applicable to the case of fermions.

The Lee-Nauenberg theorem of infrared divergences cancellation is examined. The leading infrared divergences of the temporal evolution operator are determined for pure massless Yang-Mills theories in the axial gauge. Using this result it is then shown that the leading infrared singularities of the self-energy function exponentiate in a very simple manner. For these theories partial cancellation of infrared divergences are also exhibited.

INTRODUÇÃO

Na teoria de campos clássicos pode-se definir o "vácuo" como sendo a solução de mínima energia das equações de campo. Já nesse nível é possível que a lagrangeana seja invariante sob um grupo de simetria, mas que o "vácuo" não tenha esta propriedade. Esta situação é usualmente chamada de quebra espontânea de simetria. Por exemplo, a teoria habitual do campo escalar com um potencial da forma $V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$, possui a simetria $\phi \rightarrow -\phi$. No entanto os seus dois mínimos $v = \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$ não têm esta invariança pois $v \neq -v$.

Abandonando o caso clássico, vemos que em geral não há razão para que uma invariança da hamiltoniana de um sistema quanto-mecânico seja também uma invariança do estado fundamental da teoria. A quebra espontânea de simetria em teorias de campos é passível de estudo pelo potencial efetivo, o qual é introduzido na secção I do nosso trabalho. Em seguida, na secção II, apresentamos várias maneiras de calculá-lo: a soma infinita de Coleman-Weinberg, o método da fase estacionária e os girinos de Weinberg. A secção III é dedicada à introdução de uma nova técnica mais simples e direta que as anteriores. A sua aplicação a uma teoria de gauge abeliana mostra a força desse novo método. Assim encorajados o estendemos a teorias não abelianas, sem fêrmions na secção IV. Aqui é importante notar o cancelamento de

divergências infravermelhas (em um loop no nosso método mas em infinitos no método de Coleman-Weinberg) que impediriam a definição do potencial efetivo. Em seguida, na secção V, retornamos a um dos métodos discutidos na secção II, o da fase estacionária, com uma abordagem, exemplificada na Eletrodinâmica de Bósons, que é extensível ao caso de férmions. Um novo tópico é estudado na secção seguinte de nº VI: as divergências infravermelhas. Lá vemos que elas aparentemente poderiam ser bem compreendidas com o auxílio de um teorema simples, conhecido como teorema de Lee-Nauenberg. Este, entretanto, não tem suas hipóteses verificadas nos casos realistas. A sua extensão envolve o conhecimento do operador de evolução temporal $\mathcal{U}$, o qual mesmo em Eletrodinâmica é de determinação difícil. Na secção VII, apresentamos uma técnica que permite obter uma parte deste operador em uma teoria de Yang-Mills pura. A secção VIII apresenta os seus elementos de matriz no caso da auto-energia. Finalmente, na última secção, vemos como parte das divergências infravermelhas podem ser canceladas.

I - O POTENCIAL EFETIVO

Um método para investigar a quebra espontânea de simetria é o de calcular uma função conhecida como potencial efetivo⁽¹⁾. Para uma dada lagrangeana, invariante sob alguma transformação de simetria, o comportamento da derivada do potencial efetivo em relação ao "campo clássico" mostra se o vácuo da teoria é ou não invariante. Vamos justificar o nome dado a esta função e depreender o seu sentido físico, estudando inicialmente o mesmo problema em Mecânica Quântica. A velha abordagem variacional será o nosso guia. Tipicamente, dada uma hamiltoniana H , queremos construir um estado $|a\rangle$, tal que a forma quadrática

$$\langle a | H | a \rangle$$

seja estacionária, mas com a restrição de que a sua norma seja unitária

$$\langle a | a \rangle = 1 .$$

A solução é encontrada, usando-se um truque muito bem conhecido, que é o de adicionar um multiplicador de Lagrange E e variar

$$\langle a | H | a \rangle - E \langle a | a \rangle$$

agora sem vínculo.

Este caminho nos leva a uma equação de auto-valores

$$H|a\rangle = E|a\rangle .$$

Aumentemos os ingredientes desse procedimento, introduzindo um segundo vínculo

$$(I-1) \quad \langle a|\varphi|a\rangle = \varphi_c ,$$

onde φ é algum operador interessante e φ_c é um número.

A grandeza a sofrer variações desvinculadas, mas com dois multiplicadores de Lagrange $\mathcal{E}$ e J , passa então a ser

$$(I-2) \quad \langle a|H|a\rangle - \mathcal{E}\langle a|a\rangle - J\langle a|\varphi|a\rangle .$$

A solução é

$$(I-3) \quad (H - \mathcal{E} - J\varphi)|a\rangle = 0 .$$

Então $|a\rangle$ é um auto estado da hamiltoniana perturbada $H - J\varphi$, cuja energia é $\mathcal{E}$. Desta forma podemos escrever:

$$(I-4) \quad \langle a|H|a\rangle = \mathcal{E} + J\varphi_c .$$

Como $\mathcal{E}$ é função de J vale a relação

$$(I-5) \quad \langle a | H | a \rangle = F(J, \varphi_c).$$

Mas $\langle a | H | a \rangle$ é estacionária o que implica

$$(I-6) \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial J} \delta J + \varphi_c \delta J = 0$$

e, portanto,

$$(I-7) \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial J} = -\varphi_c.$$

Esta equação pode, em princípio, ser utilizada para expressar J em função de φ_c e então a equação (I-4) pode ser escrita inteiramente em função de φ_c :

$$(I-8) \quad \langle a | H | a \rangle = V(\varphi_c).$$

A nova função definida é chamada de potencial efetivo.

Similarmente, podemos dizer que, em Teoria Quântica de Campos, o potencial efetivo é também uma densidade de energia; ele é o valor esperado da energia por unidade de volume em um certo estado para o qual o valor esperado do campo φ é φ_c ⁽²⁾, o chamado campo clássico.

Esta conceituação é aparentemente não operacional. Vamos seguir uma nova linha, a qual, depois de uma orgia ⁽³⁾

de formalismo, nos conduzirá a um método de tratar a quebra espontânea de simetria em Teoria Quântica de Campos juntamente com uma outra (equivalente) definição do potencial efetivo.

A limitação inicial ao estudo da mais simples teoria renormalizável a 4 dimensões, a de um campo escalar neutro, massivo, interagindo através de um acoplamento $\lambda \phi^4$, deve-se ao desejo de simplificar a notação. A generalização para casos mais complicados será feita em seguida.

Consideremos, então, a lagrangeana de $\lambda \phi^4$ à qual adicionamos um acoplamento linear do campo ϕ com uma fonte externa $J(x)$, um número c , função do espaço e do tempo:

$$(I-9) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 - J\phi.$$

Um modo conveniente de estudar as propriedades das funções de Green em teoria de perturbação é a introdução de um funcional gerador. Este, que gera todas as funções de Green, incluindo as desconexas, é definido em termos da amplitude de transição de um vácuo no passado remoto a um vácuo no futuro remoto, em presença da fonte externa

$$(I-10) \quad S_{desc} [J] = \langle 0^+ | 0^- \rangle_J.$$

Similarmente se introduz o funcional gerador $W(J)^{(4)}$

de todas as funções de Green conexas

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n),$$

$$(I-11) \quad e^{iW[J]} = \langle 0^+ | 0^- \rangle_J.$$

O desenvolvimento de $W[J]$ em série de Taylor funcional nos dá

$$(I-12) \quad W[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \int \prod_{i=0}^{2n} [d^4 x_i J(x_i)] G^{2n}(x_1, \dots, x_{2n})$$

onde, devido à simetria $\phi \rightarrow -\phi$ da equação (I-9), apenas os termos pares aparecem.

Introduzindo o chamado campo clássico φ_c dado por

$$(I-13) \quad \varphi_c(x) = \frac{\delta W}{\delta J(x)},$$

podemos definir a ação efetiva por uma transformação funcional de Legendre

$$(I-14) \quad \Gamma(\varphi_c) = W[J] - \int d^4 x J(x) \varphi_c(x),$$

da qual obtemos a relação

$$(I-15) \quad J(x) = - \frac{\delta \Gamma(\varphi_c)}{\delta \varphi_c(x)}.$$

A ação efetiva pode ser desenvolvida de duas manei-

ras interessantes. Uma, similar à da equação (I-12):

$$(I-16) \quad \Gamma = \sum_m \frac{1}{(2m)!} \int \prod_{i=1}^{2m} [d^4 x_i \varphi_c(x_i)] \tilde{\Gamma}^{(2m)}(x_1, \dots, x_m).$$

Os coeficientes $\tilde{\Gamma}^{(m)}$ que aparecem nesta expansão são os vértices próprios; $\tilde{\Gamma}^{(m)}$ é a soma de todos os diagramas 1PI (que são conexos e que não podem se tornar desconexos pelo corte de uma única linha) com m linhas externas. Por convenção os diagramas 1PI são avaliados sem propagadores nas linhas externas.

O outro modo de desenvolvimento de $\Gamma(\varphi_c)$, muito importante no que segue, é em torno de valor $\varphi_c = \text{constante}$, isto é, um desenvolvimento em potências de derivadas de φ_c . Levando em conta a invariância translacional, teremos

$$(I-17) \quad \Gamma(\varphi_c) = \int d^4 x \left\{ V(\varphi_c(x)) + \frac{1}{2} Z(\varphi_c(x)) (\partial \varphi_c(x))^2 + \dots \right\}$$

onde $V, Z, \dots$ são funções ordinárias de $\varphi_c(x)$. Vamos mostrar que (I-17) corresponde a uma expansão das funções vértice em torno do momento externo nulo. De fato, pela invariância translacional, $\tilde{\Gamma}^{(2m)}$ é função de apenas $2m-1$ variáveis $x_i - x_1$, e, portanto, introduzindo a transformada de Fourier $\tilde{\Gamma}^{(2m)}$, podemos escrever (I-16) na forma

$$(I-18) \quad \Gamma(\varphi_c) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \int \prod_{i=1}^{2n} [d^4 x_i] \prod_{j=1}^{2n} \frac{d^4 p_j}{(2\pi)^4} e^{i p_j x_j} (2\pi)^4.$$

$$\delta^n(\sum p_i) \Gamma^{(2n)}(p_1, \dots, p_n) \prod_{i=1}^{2n} [\varphi_c(x_i)] .$$

Desenvolvendo $\Gamma^{(2n)}(p_1, \dots, p_n)$ em torno de $p_i = 0$, obtemos, comparando as equações (I-17) e (I-18)⁽³⁾,

$$(I-19) \quad V(\varphi_c) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (\varphi_c)^{2n} \Gamma^{(2n)}(0, \dots, 0) .$$

Pode-se mostrar^(2,3,4,5) que as duas definições de potencial efetivo, ora como uma densidade de energia, ora como o primeiro termo de um desenvolvimento, coincidem.

Como as funções de Green, o potencial efetivo está sujeito ao aparecimento de infinitos e um processo regulador deve ser introduzido. Condições de normalização, que se deduzem das usuais, definirão completamente a grandeza que acabamos de apresentar:

$$(I-20) \quad \left. \frac{d^2 V(\varphi_c)}{d\varphi_c^2} \right|_{\varphi_c=0} = \mu^2 \quad \left. \frac{d^4 V(\varphi_c)}{d\varphi_c^4} \right|_{\varphi_c=0} = \lambda .$$

Temos agora os meios necessários ao estudo da quebra espontânea de simetria^(3,4). Suponhamos que a nossa lagrangeana possua uma simetria interna. Então, a quebra espontânea de simetria ocorre, se o campo quântico ϕ desenvolve

um valor esperado no vácuo, mesmo quando a fonte $J(x)$ se anula. As equações (I-13) e (I-15) mostram que isto ocorre se

$$(I-21) \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi_c} = 0 \quad ,$$

para algum valor não nulo de φ_c . Além disso, como nos casos de interesse o vácuo é translacionalmente invariante, podemos escrever

$$\frac{dV}{d\varphi_c} = 0$$

para algum valor não nulo de φ_c .

II - MÉTODOS DE CÁLCULO

Tendo definido o potencial efetivo e visto o seu significado físico, especialmente o seu papel na determinação da existência ou não de quebra espontânea de simetria, vamos expor vários métodos perturbativos para calculá-lo. Essencialmente eles são todos expansões em "loops", pois estas correspondem a desenvolvimentos em um parâmetro que multiplica a lagrangeana total que não é, portanto, afetada pelo deslocamento (shift) de campos ou pela redefinição da divisão da lagrangeana em partes livres e de interação associada com tais deslocamentos. A aproximação consistirá em somar todos os diagramas com zero loops, depois todos com um loop, etc.

Por razões meramente pedagógicas continuaremos falando de $\lambda \phi^4$. Consideremos, então, um diagrama conexo. Se L é o número de loops, I é o número de linhas internas, E de linhas externas, V de vértices, obtemos

$$(II-1) \quad 2I + E = 4V \quad L = I - V + 1 = V + 1 - \frac{E}{2}.$$

Introduzamos um parâmetro novo $\hbar$ que multiplica toda a lagrangeana. Em um diagrama conexo, cada vértice carregará um fator $\hbar^{-1}$, cada propagador um fator $\hbar$ e cada linha externa um fator $\hbar^{-1}$. Então, cada diagrama conexo terá uma potência de $\hbar$ dada por $\hbar^{L-1-E}$. Se a

gora considerarmos diagramas 1PI, os quais não possuem li
nhas externas, então, a potência de h será h^{L-1} .

Conseguimos, assim, o artifício desejado, onde o desen
volvimento em um parâmetro corresponde ao desenvolvimento
em loops.

A - O método de Coleman-Weinberg^(*)

Coleman e Weinberg calcularam o potencial efetivo ,
diretamente a partir da definição da aproximação em loops
que acabamos de dar, para a teoria de um campo mesônico, sem
massa em uma interação quártica descrita pela lagrangeana

$$(II-2) \quad \mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 + \frac{1}{2} A (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2} B \varphi^2 - \frac{1}{4!} C \varphi^4$$

onde A , B e C são os contra-termos usuais.

Na aproximação árvore apenas um gráfico contribui:

FIGURA 1 - Aproximação árvore do potencial efetivo
dando

$$(II-3) \quad V = \frac{\lambda}{4!} \varphi_c^4$$

Na aproximação de um loop temos uma soma infinita de diagramas mostrados na figura abaixo

FIGURA 2 - Aproximação de um loop do potencial efetivo

Obtemos assim

$$(II-4) \quad V = \frac{\lambda}{4!} \varphi_c^4 - \frac{1}{2} B \varphi_c^2 - \frac{1}{4!} C \varphi_c^4 + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \left(\frac{1/2 \lambda \varphi_c^2}{k^2 + i\epsilon} \right)^n$$

A série, que aí aparece, pode ser somada, para dar a pós uma rotação para o espaço euclidiano

$$(II-5) \quad V = \frac{\lambda}{4!} \varphi_c^4 - \frac{1}{2} B \varphi_c^2 - \frac{1}{4!} C \varphi_c^4 + \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \ln \left(1 + \frac{\lambda \varphi_c^2}{2 k^2} \right)$$

Esta expressão sofre do conhecido mal de divergência ultravioleta. Para remediá-lo, vamos cortar a integral em $k^2 = \Lambda^2$, resultando

$$(II-6) \quad V = \frac{\lambda}{4!} \varphi_c^4 + \frac{1}{2} B \varphi_c^2 + \frac{1}{4!} C \varphi_c^4 + \frac{\lambda \Lambda^2}{64 \pi^2} \varphi_c^2 + \frac{\lambda^2 \varphi_c^2}{256 \pi^2} \left(\ln \frac{\lambda \varphi_c^2}{2 \Lambda^2} - \frac{1}{2} \right)$$

As divergências infravermelhas só permitem usar a primeira das equações (I-20). Estas devem ser substituídas por

$$(II-7) \quad \left. \frac{d^4 V}{d \varphi_c^4} \right|_M = \lambda \quad \quad \left. \frac{d^4 V}{d \varphi_c^4} \right|_0 = 0 \quad ,$$

onde M é um número arbitrário com dimensão de massa. Os coeficientes arbitrários B e C são então determinados e a expressão final de V , na aproximação de um loop, passa a ser

$$(II-8) \quad V = \frac{\lambda}{4!} \varphi_c^4 + \frac{\lambda^2 \varphi_c^4}{256 \pi^2} \left(\ln \frac{\varphi_c^2}{M^2} - \frac{25}{6} \right) .$$

A abordagem de Coleman e Weinberg, embora de difícil extensão para teorias mais complicadas, como as não abelianas, mostra um interessante cancelamento de divergências infravermelhas. Com efeito, na série mostrada na equação (IV-4), cada termo, um gráfico da figura 2, é crescentemente divergente no infravermelho. A soma da série, no entanto, está livre deste problema.

B - O método da fase estacionária

Este método é um modo bem conhecido de tratar o funcional gerador, quando este é expresso em termos de "path

integrals" (4,7). Na teoria de mésons escalares, que temos usado como exemplo, podemos escrever

$$(II-9) \quad e^{i \frac{W(\phi)}{\hbar}} = \frac{\int \mathcal{D}(\phi) \exp \frac{i}{\hbar} \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 - J\phi \right]}{\int \mathcal{D}(\phi) \exp \frac{i}{\hbar} \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right]}$$

Aqui o símbolo $\mathcal{D}(\)$ indica integração funcional na variável entre parênteses. A constante $\hbar$ é o parâmetro introduzido no início e que, conforme já vimos, conduz à expansão em loops. Devemos, então, desenvolver o lado direito da equação (II-9) em torno do ponto $\phi_0(J)$ no qual ele é estacionário (o denominador é incluído para dar $W(0) = 0$). A função ϕ_0 satisfaz à equação de movimento

$$(II-10) \quad (\square + \mu^2) \phi_0 + \frac{\lambda}{3!} \phi_0^3 = J$$

O procedimento a seguir tem agora duas etapas. Numa escrevemos

$$(II-11) \quad \phi = \phi_0 + \tilde{\phi}$$

para ter o desenvolvimento desejado em torno do ponto ϕ_0 .

Na outra desenvolve-se $W(J)$ em potências de $\hbar$

$$(II-12) \quad W_0(J) + \hbar W_1(\varphi_0) + \dots$$

Igualando os coeficientes das potências sucessivas de $\hbar$, obtemos

$$(II-13) \quad W_0 = -\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_0)^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \varphi_0^2 + \frac{\lambda}{4!} \varphi_0^4 + J \varphi_0$$

e

$$(II-14) \quad W_1 = -\frac{1}{2} \ln \det K_{xy}(\varphi_0)$$

Aqui K é a matriz que multiplica a parte quadrática do campo. Uma definição operacional do determinante de K será dada mais adiante. Na teoria que estamos estudando, esta matriz é dada por

$$(II-15) \quad K_{xy}(\varphi_0) = \left(\partial_x \partial_y + \mu^2 + \frac{1}{2} \lambda \varphi_0^2 \right) \delta^4(x-y)$$

A ação efetiva deve agora também ser desenvolvida em potências de $\hbar$, pois, conforme veremos, o termo W_1 , que acabamos de calcular, é essencialmente a aproximação de um loop para o potencial efetivo. Teremos então

$$(II-16) \quad \Gamma(\varphi_c) = \Gamma_0(\varphi_c) + \hbar \Gamma_1(\varphi_c) + \hbar^2 \Gamma_2(\varphi_c) + \dots$$

Pode-se ver que, tomando-se apenas os termos de primeira ordem em $\hbar$, vale a relação

$$(II-17) \quad \Gamma_1(\varphi_c) = W_1(\varphi_c) \quad .$$

Lembrando que, se o potencial efetivo também for desenvolvido em potências de $\hbar$,

$$(II-18) \quad V(\varphi_c) = V_0(\varphi_c) + \hbar V_1(\varphi_c) + \dots$$

resultará a igualdade

$$(II-19) \quad -\Gamma_1(\varphi_c) = \int d^4x \, V_1(\varphi_c) \quad .$$

Usando-se um cut off, V_1 , a aproximação de um loop pode ser determinada e, uma vez livre das ambiguidades habituais das regularizações pela aplicação das condições de renormalização (II-7), nos dá o resultado de Coleman-Weinberg, a equação (II-8).

Este método, embora eficiente para calcular até a ordem que acabamos de ver, é, como aparecerá mais tarde, diretamente aplicável ao caso dos férmions, mas bastante complicado para ordens superiores. Jackiw⁽⁷⁾ observa que a aproximação de um loop é muito simples e que não é típica de termos de ordem mais elevada. No seu trabalho, aparece a expressão geral do desenvolvimento em loops:

$$(II-20) \quad V(\varphi_c) = V_0(\varphi_c) + V_1(\varphi_c) + i\hbar \left\langle \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L}_I(\varphi_c, \varphi)\right) \right\rangle.$$

Os dois primeiros termos já se tornaram nossos velhos conhecidos. O terceiro resume as seguintes operações: cálculo do valor esperado no vácuo de

$$T \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L}_I(\varphi_c, \tilde{\varphi})\right)$$

onde $\mathcal{L}_I$ é a parte de interação da lagrangeana total após o deslocamento (II-21). As regras de Feynman são as convencionais, mas o propagador é $i K^{-1}$ e apenas os gráficos 1PI devem ser tomados. Finalmente um fator de integração espaço temporal $\int d^4x$ deve ser eliminado. Não nos estendemos sobre este método pois não é nossa intenção usá-lo em ordens superiores.

C - Girinos de Weinberg

S. Weinberg^(*) tem por objetivo descrever em detalhes como levar a termo cálculos em um "loop" dos efeitos de quebra de simetria em teorias de gauge renormalizáveis. Para tanto é considerada uma lagrangeana da forma

$$(II-21) \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + P(\phi),$$

onde $\mathcal{L}_1$ contém a parte livre e a de interação que envolve férmions, campos de gauge e sua interação com os campos escalares ϕ_i ; $P(\phi)$ é o polinômio que só contém campos escalares. A simetria é quebrada em ordem zero, permitindo-se aos campos escalares ϕ_i desenvolverem valores esperados no vácuo, não nulos, determinados pela condição de que o polinômio $P(\phi)$ seja estacionário em $\phi_i = \lambda_i$. O gauge escolhido é o chamado gauge $\tilde{\gamma}$ geral⁽⁹⁾. Os girinos a que nos referimos, são os gráficos com uma única linha escalar ϕ_i externa.

Definamos os campos deslocados por

$$(II-22) \quad \tilde{\phi}_i = \phi_i - \langle \phi_i \rangle_0,$$

onde $\langle \phi_i \rangle_0$ é o verdadeiro valor esperado no vácuo de ϕ_i . Na teoria escrita em termos desse novo campo $\tilde{\phi}$, todos os gráficos de girinos se cancelariam e, se representarmos por $\tilde{T}_i$ a soma de girinos com um ou mais loops, teremos

$$(II-23) \quad i(2\pi)^4 \left(\frac{\partial P(\phi)}{\partial \phi_i} \right)_{\phi = \langle \phi \rangle_0} + \tilde{T}_i = 0,$$

como se vê pela fórmula de Gell-Mann - Low⁽¹⁰⁾.

Na aproximação de um loop, $\langle \phi_i \rangle_0$ será próximo de

um extremo λ_i de $P(\phi)$:

$$(II-24) \quad \langle \phi_i \rangle_0 = \lambda_i + \delta \lambda_i \quad .$$

Podemos usar esta expressão para desenvolver (II-23) em série de Taylor. Tomando apenas o primeiro termo em $\delta \lambda$ e número de loops, teremos

$$(II-25) \quad -i(2\pi)^4 \left. \frac{\partial^2 P}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right|_{\phi=\lambda} \delta \lambda_j + \tilde{T}_i' = 0 \quad .$$

Na expressão acima o índice superior 1 em $\tilde{T}_i'$ indica que apenas um loop é considerado.

Por outro lado, no desenvolvimento de Coleman-Weinberg, já mencionado, o desenvolvimento em loops do potencial efetivo é dado por

$$(II-26) \quad V(\phi) = P(\phi) + V_1(\phi) + V_2(\phi) + \dots$$

e, se o campo ϕ tiver valor esperado no vácuo $\langle \phi \rangle_0$, então,

$$(II-27) \quad \left. \frac{\partial V}{\partial \phi} \right|_{\phi = \langle \phi \rangle_0} = 0 \quad .$$

Usando a relação (II-25), desenvolvendo (II-27) em

série de Taylor e permanecendo na aproximação linear em $\delta\lambda$ e com um loop, teremos

$$(II-28) \quad \left. \frac{\partial V_1}{\partial \phi_i} \right|_{\phi=\lambda} + \frac{\partial^2 P}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \delta\lambda_j = 0.$$

As equações (II-25) e (II-28) só serão compatíveis se

$$(II-29) \quad \tilde{T}_i = -\varepsilon (2\pi)^4 \frac{\partial V_1}{\partial \lambda_i}.$$

Teríamos, assim, um bom meio de calcular o potencial efetivo em um loop a partir dos girínos. No entanto, para que valha uma relação do tipo (II-29), é necessário que

$$(II-30) \quad \frac{\partial T_i}{\partial \lambda_j} = \frac{\partial T_j}{\partial \lambda_i}.$$

Hã, contudo, conjectura de que esta relação não seja verificada no gauge $\tilde{f}$ geral⁽³⁾. A razão para tal seria a dependência de λ dos termos que determinam o gauge e dos que contêm os fantasmas (ghosts) na hamiltoniana efetiva.

Mostramos no Apêndice A que o rotacional dos girínos é nulo (equação II-30) na Eletrodinâmica de Bósons, isto é, que neste caso a equação (II-29) pode ser usada para determinar o potencial efetivo em um loop. Nossa preocupação, no próximo capítulo, será o desenvolvimento de uma técnica que permita obter a derivada do potencial efetivo em termos dos girínos com um ou mais loops, em qualquer gauge.

III - UMA NOVA TÉCNICA

O popular modelo $\lambda \phi^4$ teve o seu potencial efetivo computado até dois loops, por um método muito simples e direto, introduzido em 1975 por Lee e Sciaccaluga⁽¹³⁾. Como o título do seu trabalho parece indicar, a preocupação que o norteou, foi o uso da regularização dimensional⁽¹⁴⁾, pois nesse esquema os girinos têm uma forma muito simples e podem ser facilmente integrados (em $\lambda \phi^4$) em relação ao valor esperado no vácuo para se obter o potencial efetivo. Aparentemente eles não se interessaram por uma extensão às teorias de gauge onde novos problemas aparecem e o interesse é maior devido ao mecanismo de Higgs-Kibble⁽¹¹⁾ e à sua conexão com o comportamento dos hadrons.

Numa primeira etapa, o método de Lee-Sciaccaluga será generalizado às teorias de gauge abelianas⁽¹⁵⁾. O nosso laboratório será a eletrodinâmica de bósons⁽⁶⁾, onde as operações serão realizadas até dois loops em uma classe de gauges a um parâmetro envolvendo fantasmas. Ao mesmo tempo serão resolvidos certos problemas ligados ao termo que fixa o gauge. Teremos assim nos apoderado de uma técnica que permite cálculos em qualquer ordem na expansão em loops,* o que já constitui um resultado bastante geral. Em seguida, as teorias não abelianas serão estudadas e uma extensão do método se mostrará possível e exemplificada por um cálculo de um loop⁽¹⁶⁾.

*Para teorias abelianas sem férmions.

A - Apresentação do Método

A comparação com as técnicas usadas nas secções anteriores e a própria exposição serão facilitadas, se considerarmos inicialmente uma lagrangeana puramente escalar

$$(III-1) \quad \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi - P(\phi) ,$$

onde $P(\phi)$ é um polinômio no campo escalar ϕ , análogo ao que aparece na equação (II-31).

Neste ponto é conveniente lembrar a definição do potencial efetivo dada na secção I, não explicitando a simetria lá utilizada:

$$(I-19)' \quad V(\varphi_c) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [(n)!]^{-1} (\varphi_c)^n \Gamma^n(0, \dots, 0) ,$$

a qual permite a computação do potencial efetivo em termos de uma série infinita cujos coeficientes são as funções de Green 1PI calculadas com momentos nulos. Embora isto dificilmente possa ser considerado um método conveniente de cálculo, vimos na secção anterior que Coleman e Weinberg obtiveram, com grande engenhosidade, a aproximação de um loop em certos casos.

Claramente, na aproximação árvore, $V(\varphi_c)$ coincide com $P(\varphi_c)$ na equação III-1. Para uma teoria, na qual o valor esperado no vácuo do operador de campo não se anula

mas tem valor ν , temos em lugar de (I-19),

$$(III-2) \quad V(\varphi_c) = - \sum_m \frac{1}{m!} \Gamma^{(m)}(0, \dots, 0) (\varphi_c - \nu)^m.$$

Desta equação segue-se que

$$(III-3) \quad \left. \frac{dV(\varphi_c)}{d\varphi_c} \right|_{\varphi_c = \nu} = 0$$

a qual permite a determinação do valor esperado no vácuo como solução de um problema de mínimo. Esta é uma propriedade de muito importante, já mencionada na secção I, na determinação da quebra espontânea de simetria em uma teoria.

Introduzindo o campo deslocado,

$$(III-4) \quad \phi'(x) = \phi(x) - \nu,$$

onde ν é um parâmetro arbitrário, a lagrangeana $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ se transforma em uma nova lagrangeana $\mathcal{L}'(\phi', \partial_\mu \phi')$ que contém alguns vértices novos dependentes de ν .

A equação (II-6) pode então ser reescrita na forma

$$(III-5) \quad \Gamma(\varphi_c' + \nu) = \sum_m \frac{1}{m!} \int d^4x_1 \dots d^4x_m \tilde{\Gamma}^{(m)}(x_1, \dots, x_m) [\varphi_c'(x_1 + \nu)] \dots [\varphi_c'(x_m) + \nu].$$

Definindo

$$(III-6) \quad \Gamma'(\varphi'_c) = \Gamma(\varphi'_c + \omega)$$

e ressomando a equação (III-5), teremos

$$(III-7) \quad \Gamma'(\varphi'_c) = \sum_n \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \bar{\Gamma}^{(n)}(x_1 \dots x_n) \varphi'(x_1) \dots \varphi'(x_n).$$

Na aproximação árvore, $\Gamma'(\varphi'_c)$ coincide com a lagrangeana $\mathcal{L}'(\varphi'_c, \partial_\mu \varphi'_c)$. É então claro que $\bar{\Gamma}^{(n)}(x_1 \dots x_n)$ são os vértices próprios calculados com a lagrangeana $\mathcal{L}'(\phi', \partial_\mu \phi')$. Seguindo os mesmos passos dados na obtenção da equação (I-19), obteremos

$$(III-8) \quad (2\pi)^4 V'(\varphi'_c) = V(\varphi'_c + \omega) = - \sum_n \frac{1}{n!} \bar{\Gamma}^{(n)}(0 \dots 0) \varphi'^n_c.$$

Segue-se que

$$(III-9) \quad (2\pi)^4 \left. \frac{dV(\varphi'_c + \omega)}{d\varphi'_c} \right|_{\varphi'_c = 0} = \bar{\Gamma}^{(1)}(0).$$

Mas

$$(III-10) \quad \left. \frac{dV(\varphi'_c + \omega)}{d\varphi'_c} \right|_{\varphi'_c = 0} = \left. \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} \right|_{\varphi = \omega}.$$

então a equação (III-9) se torna

$$(III-11) \quad \left. \frac{\partial V}{\partial \varphi_c} \right|_{\varphi_c=0} = \frac{\partial V}{\partial \nu} = - \frac{1}{(2\pi)^4} \bar{\Gamma}^{(4)}(0) .$$

Assim, chegamos a uma equação diferencial simples, envolvendo girinos com qualquer número de loops, calculados com as regras da lagrangeana $\mathcal{L}'$. Colocando $\nu = \varphi_c$ no fim, obtemos o potencial efetivo $V(\varphi)$ da teoria definida pela lagrangeana da equação (III-1).

B - Eletrodinâmica de Bósons: Um loop

O método deve agora ser aplicado à lagrangeana de Coleman-Weinberg :

$$(III-12) \quad \mathcal{L} = - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1 + e A_\mu \phi_2)^2 - \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_2 - e A_\mu \phi_1)^2 \\ - \frac{\lambda}{4!} (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 ,$$

onde o rotacional $F_{\mu\nu}$ tem a expressão habitual

$$(III-13) \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu ,$$

os símbolos A_μ e ϕ_i representam os campos de gauge e

e escalar, respectivamente, e e λ são constantes de acoplamento.

Por razões de conveniência, a métrica e as regras de Feynman seguirão as convenções do Diagrammar⁽¹⁷⁾:

$$(III-14) \quad x_\mu = (\bar{x}, i c t) \quad , \quad k^\mu = \bar{k}^\mu + \kappa^\mu \quad , \quad k_\mu = i \kappa_\mu \quad \mu = 1 \dots 4.$$

Vamos simplificar o problema nos restringindo ao potencial efetivo apenas como função de φ_1 e φ_2 , isto é, tomando $A_{\mu c} = 0$. A simetria de gauge global θ vem em nossa ajuda para mostrar que $V(\varphi_1, \varphi_2)$ é função apenas de $\varphi_{1c}^2 + \varphi_{2c}^2$ (6). Basta então determinar a dependência em apenas uma das variáveis, por exemplo, φ_{1c} .

A questão, que se põe agora, diz respeito à escolha de gauge. Esta pode ser feita de duas formas. Uma, que nos parece a natural, consiste em primeiro fixar o gauge e depois deslocar o campo. Neste caso, para uma dada escolha de gauge na lagrangeana não deslocada, existe apenas um potencial efetivo. A outra forma se caracteriza por primeiro deslocar o campo $\varphi_i \rightarrow \varphi_i + \nu$ e depois escolher o gauge. Veremos, assim, que a parte da lagrangeana que fixa o gauge $\mathcal{L}_G$, é uma função de ν : $\mathcal{L}_G(\nu)$. Ora, a teoria não deslocada corresponde a $\nu = 0$ e não é difícil construir várias $\mathcal{L}_G(\nu)$ distintas que tendam ao mesmo valor $\mathcal{L}_G(0)$, quando ν tende a zero. Assim, para uma dada lagrangeana não deslocada em um gauge determinado, te

ríamos uma infinidade de potenciais efetivos, diferindo não trivialmente um do outro. É, então, claro que se deve primeiro fixar o gauge e depois deslocar a teoria.

A lagrangeana (III-12) após o deslocamento apresenta um vértice especialmente incômodo,

$$e \sim (\partial^\mu \varphi_2) A_\mu,$$

que podemos chamar de propagador misto. Ele aparece infinitas vezes em cada ordem da expansão em loops.

Há, no entanto, a agradável surpresa de que existe um termo fixador de gauge o qual, após o deslocamento, cancela justamente o propagador misto:

$$(III-15) \quad \mathcal{L}_G = - \frac{1}{2} \int (\partial^\mu A_\mu - \frac{e}{f} \varphi_1 \varphi_2)^2.$$

O termo correspondente de Faddeev-Popov⁽¹²⁾ é então

$$(III-16) \quad \mathcal{L}_{FP} = \bar{c} \left[\partial^\mu - \frac{e^2}{f} (\varphi_1^2 - \varphi_2^2) \right] c,$$

onde c representa o campo fantasma (ghost). (Os detalhes da obtenção de (III-15) e (III-16) estão no apêndice B).

Poderia parecer uma tarefa difícil calcular o potencial efetivo neste gauge devido ao aparecimento de fantas

mas. O nosso método, entretanto, não tem medo de assombrão e isto não põe nenhuma dificuldade especial.

As regras de Feynman da lagrangeana efetiva deslocada são pois:

Propagadores

a) $\frac{1}{(2\pi)^4 i} \frac{1}{k^2 + e^2 \omega^2} \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{1 - \bar{\epsilon}}{e^2 \omega^2 + k^2} k_\mu k_\nu \right)$

b) $\frac{1}{(2\pi)^4 i} \frac{1}{k^2 + \frac{\lambda \omega^2}{2}}$

c) $\frac{1}{(2\pi)^4 i} \frac{1}{k^2 + \frac{\lambda \omega^2}{3!} + \frac{e^2 \omega^2}{\bar{\epsilon}}}$

d) $\frac{1}{(2\pi)^4 i} \frac{1}{k^2 + \frac{\lambda \omega^2}{3!}}$

Vértices

e) $\frac{(2\pi)^4}{i} \lambda \omega$

$$\gamma \frac{1}{(2n)^4}$$

$$h \frac{1}{(2n)^4} \left(\frac{2 i g}{\lambda} + \frac{2 f}{e^2} \right)$$

$$\frac{1}{(2n)^4} 2 e (-i R_\mu)$$

$$\frac{1}{(2n)^4} \frac{2}{2 e^2 n}$$

$$\frac{1}{(2n)^4} 2 e^2 N$$

$$\frac{1}{2 (2n)^4} \left(\frac{4 i}{e^2 n} + \frac{2}{e^2 n} \right)$$

$$\frac{(2\pi)^4}{i} \lambda$$

$$4 \frac{(2\pi)^4}{i} \frac{e^2}{2} \delta_{\alpha\beta}$$

$$4 \frac{(2\pi)^4}{i} \frac{e^2}{2} \delta_{\alpha\beta}$$

$$2 \frac{(2\pi)^4}{i} \frac{e^4}{2}$$

$$- 2 \frac{(2\pi)^4}{i} \frac{e^4}{2}$$

Os girinos com um loop são mostrados na figura 3.

G_1

G_2

G_4

G_3

Figura 3 - Girinos com um loop

Suas expressões, divergentes no ultravioleta, serão regularizadas com o auxílio do prolongamento analítico para espaços de dimensão complexa de t' Hooft-Veltman⁽¹⁴⁾. No momento teremos necessidade apenas das integrais :

$$(III-17) \quad \int d_n p \frac{1}{(p^2 + 2kp + m^2)^\alpha} = \frac{\pi^{n/2}}{(m^2 - k^2)^{\alpha - \frac{n}{2}}} \cdot \frac{\Gamma(\alpha - \frac{n}{2})}{\Gamma(\alpha)},$$

$$(III-18) \quad \int d_n p \frac{p_\mu}{(p^2 + 2kp + m^2)^\alpha} = \frac{\pi^{n/2}}{(m^2 - k^2)^{\alpha - \frac{n}{2}}} \cdot \frac{\Gamma(\alpha - \frac{n}{2})}{\Gamma(\alpha)} (-k_\mu)$$

e

$$(III-19) \quad \int d_n p \frac{p^2}{(p^2 + 2kp + m^2)^\alpha} = \frac{\pi^{n/2}}{(m^2 - k^2)^{\alpha - \frac{n}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\Gamma(\alpha - \frac{n}{2}) k^2 + \Gamma(\alpha - 1 - \frac{n}{2}) \frac{n}{2} (m^2 - k^2) \right].$$

Notar a ausência do fator $\hat{l}$, pois estamos usando a métrica euclidiana.

O primeiro dos girinos da figura 3 é então dado por

$$(III-20) \quad G_1 = - \frac{\lambda \nu \pi^{m/2}}{2 \left(\frac{\lambda \nu^2}{2} \right)^{1 - \frac{m}{2}}} \Gamma \left(1 - \frac{m}{2} \right).$$

Desenvolvendo o monômio em série de Laurent e usando propriedades da função Γ , obtemos

$$(III-21) \quad G_1 = - \frac{\lambda \nu}{2} \pi^{\frac{m}{2}} \frac{\lambda \nu^2}{2} \left[1 - \left(2 - \frac{m}{2} \right) \ell_m \frac{\lambda \nu^2}{2} + \dots \right] \frac{\Gamma \left(3 - \frac{m}{2} \right)}{\left(1 - \frac{m}{2} \right) \left(2 - \frac{m}{2} \right)}.$$

Tomando apenas a parte finita desta expressão, não escrevendo uma constante arbitrária, teremos no limite $m = 4$

$$(III-22) \quad G_1^F = - \frac{\lambda^2 \nu^2}{4} \pi^2 \ell_m \frac{\lambda \nu^2}{2}.$$

Se procedermos da mesma forma com os outros girinos da figura 3, obteremos sucessivamente:

$$(III-23) \quad G_2^F = - \pi^2 e^2 \nu^2 \left(\frac{1 + 3 \mathcal{I}^2}{\mathcal{I}^2} \ell_m e^2 \nu^2 - \frac{2 \ell_m \mathcal{I} - \mathcal{I}^2 + 1}{2 \mathcal{I}^2} \right),$$

$$(III-24) \quad G_3^F = \frac{e^2 \nu}{\mathcal{I}} \pi^2 \frac{e^2 \nu^2}{\mathcal{I}} \ell_m \frac{e^2 \nu^2}{\mathcal{I}}.$$

(A notar neste caso a mudança de sinal por se tratar de um loop de fantasma)

e

$$(III-25) \quad G_q^F = -\pi^2 \left(\frac{\lambda N}{3!} + \frac{e^2 N}{f} \right) \left(\frac{\lambda N^2}{6} + \frac{e^2 N^2}{f} \right) \ln \left(\frac{\lambda N^2}{6} + \frac{e^2 N^2}{f} \right).$$

Para calcular o potencial efetivo, devemos reintroduzir os termos arbitrários da regularização e utilizar a relação (III-1). Teremos, assim, a contribuição de um loop para o potencial efetivo:

$$(III-26) \quad \frac{dV_1}{dN} = \frac{1}{32\pi^2} \left(6e^4 + \frac{5\lambda^2}{g} + \frac{2\lambda e^2}{3f} \right) N^3 \ln N + 2AN + 4BN^2$$

onde A e B são constantes a determinar.

Integrando, virá

$$(III-27) \quad V_1 = \frac{1}{32\pi^2} \left(6e^4 + \frac{5\lambda^2}{g} + \frac{2\lambda e^2}{3f} \right) \left(\frac{N^4}{4} \ln N - \frac{N^4}{16} \right) + AN^2 + BN^4.$$

Fazendo $N = (\varphi_{lc}^2 + \varphi_{lc}^2)^{1/2}$ e adicionando o termo sem loop, obtemos o potencial efetivo até a ordem de um loop. Se usarmos as condições de renormalização de Coleman e Weinberg:

$$(III-7) \quad \left. \frac{d^2 V}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=0} = 0 \quad \left. \frac{d^2 V}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=M} = \lambda,$$

podemos escrever

$$(III-28) \quad V = \frac{\lambda}{4!} (\varphi_{1c}^2 + \varphi_{2c}^2)^2 + \frac{1}{64\pi^2} \left(3e^2 + \frac{5\lambda^2}{18} + \frac{\lambda e^2}{3\bar{\zeta}} \right) \cdot$$

$$\cdot (\varphi_{1c}^2 + \varphi_{2c}^2) \left\{ \ln \frac{\varphi_{1c}^2 + \varphi_{2c}^2}{M} - \frac{25}{6} \right\}.$$

Usando a técnica descrita na seção (II-A), Coleman e Weinberg calcularam o potencial efetivo para este modelo, no gauge de Landau, isto é, no limite $\bar{\zeta} \rightarrow \infty$. Nestas condições o nosso resultado coincide exatamente com este. É interessante notar que a condição que fixa o gauge é compatível com

$$A_\mu = 0,$$

o ponto no qual o potencial efetivo foi calculado.

C - Eletrodinâmica de Bósons: Dois loops

A contribuição de dois ou mais loops não oferece maiores dificuldades, exceto pela extensão dos cálculos, pois o número de diagramas necessários é finito: os diagramas que contribuem para o potencial efetivo em dois loops são mostrados na figura 4.

FIGURA 4 - *Girinos com 2 loops*

O cálculo de todos esses diagramas é longo e exaustivo, pois há divergências que se interceptam. A sua expressão final, que ainda depende de parâmetros de Feynman, não é especialmente esclarecedora. O resultado completo, no gauge linear, que não difere essencialmente do nosso, pode ser encontrado na referência^(1a).

IV - TEORIAS DE GAUGE NÃO ABELIANAS

A determinação do potencial efetivo de teorias de gauge não abelianas se processa da mesma forma que no caso abeliano e aparentemente não é muito mais difícil. Vamos, então, considerar uma teoria de Yang-Mills⁽¹³⁾ sem fêrmions descrita pela lagrangeana:

$$(IV-1) \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{2} (D_\mu \phi, D_\mu \phi) - P(\phi)$$

onde

$$(IV-2) \quad (D_\mu \phi)_a = \partial_\mu \phi_a - \Theta_{ab}^c \phi_b A_\mu^c,$$

$$(IV-3) \quad P(\phi) = \frac{\mu^2}{2} \phi^a \phi^a + h \phi^4$$

e

$$(IV-4) \quad F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - C^{abc} A_\mu^b A_\nu^c.$$

O tensor C^{abc} representa as constantes de estrutura do grupo de gauge representado pelas matrizes Θ_{ab}^c ; finalmente μ^2 e h são constantes. Aqui são usadas as notações e convenções de Weinberg⁽¹⁴⁾, parcialmente expos

tas no apêndice A. Para uma explanação mais detalhada recomendamos o excelente artigo de Costa e Tonin⁽²⁰⁾.

Fazendo o habitual deslocamento dos campos escalares

$$(IV-5) \quad \phi_a \rightarrow \phi_a + \varepsilon_a^0,$$

obtemos uma nova lagrangeana escrita como

$$(IV-6) \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{livre}} + \mathcal{L}_{\text{interação}}$$

na qual

$$(IV-7) \quad \mathcal{L}_{\text{livre}} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha)(\partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha) - \\ -\frac{1}{2}(M^2)_{\alpha\beta} A_\mu^\alpha A_\mu^\beta - \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi, \partial_\mu \phi) - \frac{1}{2}(M^2)_{ab} \phi_a \phi_b + \\ + (\partial_\mu \phi, \partial^\mu \varepsilon^0) A_\mu^a$$

e também

$$(IV-8) \quad \mathcal{L}_{\text{interação}} = \frac{1}{2} C^{\alpha\beta\gamma}(\partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha) A_\mu^\beta A_\nu^\gamma - \frac{1}{4} C^{\alpha\beta\gamma} C^{\sigma\delta\epsilon} A_\mu^\alpha A_\mu^\beta A_\nu^\gamma A_\nu^\delta A_\nu^\epsilon \\ + A_\nu^\alpha A_\mu^\beta + (\partial_\mu \phi, \partial^\mu \phi) A_\mu^\alpha - (\partial^\mu \phi, \partial^\mu \varepsilon^0) A_\mu^\alpha A_\mu^\beta \\ - \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi, \partial^\mu \phi) A_\mu^\alpha A_\mu^\beta - \frac{1}{6} f_{abc} \phi_a \phi_b \phi_c - \\ - \frac{1}{24} f_{abcd} \phi_a \phi_b \phi_c \phi_d.$$

Os novos símbolos introduzidos são :

$$(IV-9) \quad (M^{\epsilon}_{ab}) = \left. \frac{\partial^2 P(\phi)}{\partial \phi_a \partial \phi_b} \right|_{\phi = \epsilon^0}$$

$$(IV-10) \quad (M^{\epsilon})^{\alpha\beta} = (\theta^{\alpha}\epsilon^0, \theta^{\beta}\epsilon^0)$$

$$(IV-11) \quad f_{abc} = \left. \frac{\partial^3 P(\phi)}{\partial \phi_a \partial \phi_b \partial \phi_c} \right|_{\phi = \epsilon^0}$$

$$(IV-12) \quad f_{abcd} = \left. \frac{\partial^4 P(\phi)}{\partial \phi_a \partial \phi_b \partial \phi_c \partial \phi_d} \right|_{\phi = \epsilon^0}$$

Como de costume, há o indesejável propagador misto na lagrangeana livre $\mathcal{L}_{\text{ivre}}$, isto é, um termo quadrático envolvendo dois campos diferentes. A complicação resultante pode ser evitada usando-se a liberdade de gauge para eliminar este termo. Tal foi realizado por 't Hooft⁽²¹⁾ com a introdução do termo que fixa o gauge :

$$(IV-13) \quad C^{\alpha}(x) = \xi^{1/2} \partial_{\mu} A^{\mu}_{\alpha}(x) - \xi^{-1/2} (\phi(x), \theta^{\alpha}\epsilon^0)$$

ao qual a quantização de Faddeev-Popov⁽¹²⁾ faz corresponder

a expressão

$$(IV-14) \quad \mathcal{L}_G = - \frac{1}{2} [C^i(x)]^2.$$

Além disso, conforme mencionamos no apêndice B, é ne
cessário o acréscimo do termo de fantasmas

$$(IV-15) \quad \mathcal{L}_{FP} = \bar{\mu}_\alpha \left\{ \xi^{1/2} \delta_{\alpha\beta} \square + \xi^{-1/2} (\mathcal{M}^i)_{\alpha\beta} - \xi^{-1/2} (\theta^i \varepsilon^0, \theta^0 \phi) \right\} \mu_\beta.$$

A teoria é, então, descrita por uma lagrangeana efetiva
dada por

$$(IV-16) \quad \mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_{FP}.$$

Para os nossos atuais propósitos é suficiente to
mar

$$(IV-17) \quad (\varepsilon^0)_\alpha = \mu \delta_{\alpha 1}.$$

A matriz de massa bosônica é então

$$(IV-18) \quad M_{ab}^2 = (\mu^2 + 4h\mu^2) \delta_{ab} + 8h\mu^2 \delta_{a1} \delta_{b1}.$$

Os auto-vetores desta matriz são δ_{bm} e os auto-
valores Λ_m são :

$$A_1 = \mu^2 + 12 \hbar \nu^2$$

(IV-19)

$$A_m = \mu^2 + 4 \hbar \nu^2 \quad m > 1$$

Por outro lado, usando as relações (A-12) e (IV-9), te
remos

$$(IV-20) \quad M_{ca}^t \theta_{a1}^* = (\mu^2 + 4 \hbar \nu^2) \theta_{a1}^*.$$

Vemos, então, que é conveniente escolher uma represen
tação tal que

$$(IV-21) \quad \theta_{a1}^* = \begin{cases} F_a \delta_{a1} & a > 1 \\ 0 & a = 1 \end{cases}$$

isto é, no máximo, por exemplo, na primeira coluna, um ele
mento é não nulo.

Podemos, então, escrever

$$(IV-22) \quad \theta_{a1}^* \theta_{b1}^* = R_a \delta_{ab} (1 - \delta_{a1} \delta_{b1}),$$

sem soma em a, onde

$$(IV-23) \quad R_a = \sum_{\alpha} F_{\alpha} F_{\alpha} \delta_{a1} \delta_{\alpha 1}.$$

O propagador de bósons escalares Δ^ϕ pode, então, ser calculado por^(20,17)

$$(IV-24) \quad [-(2\pi)^4 i \Delta^\phi]_{ab}^{-1} = k^2 \delta_{ab} + (\mu^2 + 4h\nu^2) \delta_{ab} + 8h\nu^2 \delta_{a1} \\ + R_a \delta_{ab} \frac{\nu^2}{3} (1 - \delta_{a1} \delta_{b1}).$$

Temos, então, de calcular o inverso da matriz

$$\begin{pmatrix} k^2 + \mu^2 + 12h\nu^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k^2 + \mu^2 + 4h\nu^2 & R_2 \frac{\nu^2}{3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

o que é trivial:

$$(IV-25) \quad \Delta^\phi(k)_{ab} = -\frac{1}{(2\pi)^4 i} \left\{ \frac{\delta_{a1} \delta_{b1}}{k^2 + \mu^2 + 12h\nu^2} + \frac{\delta_{ab} (1 - \delta_{a1} \delta_{b1})}{k^2 + \mu^2 + 4h\nu^2 + \frac{R_a \nu^2}{3}} \right\}$$

sem soma em a e b .

Para determinar o propagador de "fótons", devemos conhecer os auto-vetores da matriz $M_{\alpha\beta}^{(2)}$, a qual, tendo em vista as relações (IV-10), (IV-17) e (IV-21), tem a forma

$$(IV-26) \quad M_{\alpha\beta}^{(2)} = v^2 F_\alpha F_\beta \delta_{\alpha\beta}.$$

É conveniente distinguir dois tipos de índices isotópicos. Os primeiros, para os quais usaremos as letras i e j , verificam a relação :

$$(IV-27) \quad \alpha = i, i, i, \quad \Leftrightarrow \quad r_i = r_{i_1} = r_{i_2} = r_{i_3} \quad \Leftrightarrow \quad F_i \neq 0$$

$$\alpha = j, j, j, \quad \Leftrightarrow \quad r_j = r_{j_1} = r_{j_2} = r_{j_3} \neq r_i \quad \Leftrightarrow \quad F_j \neq 0.$$

A outra categoria de índices são todos os índices que não se incluem na primeira.

Podemos, então, escrever :

$$(IV-28) \quad M_{\alpha\beta}^{(2)} = v^2 F_\alpha F_\beta \delta_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta} \quad \alpha \neq i, j$$

onde

$$(IV-29) \quad B_{\alpha\beta} = \begin{cases} v^2 F_\alpha F_\beta & \text{se } \alpha, \beta = i, j \\ 0 & \text{se } \alpha, \beta \neq i, j \end{cases}$$

O problema de auto-valores se resolve agora facilmente. Um conjunto de auto-vetores é

$$(IV-30) \quad X_i^m = \delta_{im} \quad m \neq i, j.$$

Os auto-valores correspondentes $A^{(m)}$ são

$$(IV-31) \quad A^{(m)} = v^2 F_m F_m \quad m \neq i, j.$$

Outro auto-vetor é Y_i definido por

$$(IV-32) \quad Y_i = \begin{cases} F_i & \text{se } i = i, j \\ 0 & \text{se } i \neq i, j. \end{cases}$$

O auto-valor correspondente B é dado por

$$(IV-33) \quad B = v^2 \sum_{\beta=i,j} F_\beta F_\beta.$$

O conjunto de auto-vetores se completa com a inclusão dos auto-vetores $\tilde{F}_\beta^{(m)}$, que verificam as relações :

$$(IV-34) \quad \tilde{F}_\beta^{(m)} = 0 \quad \text{se } \beta \neq i, j$$

e

$$(IV-35) \quad \sum_{\beta=i,j} \tilde{F}_\beta^{(m)} F_\beta = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{\beta} \tilde{F}_\beta^{(m)} \tilde{F}_\beta^{(n)} = \delta_{mn}$$

O propagador é, então, dado por (17,20)

$$\begin{aligned}
 \text{(IV-36)} \quad \Delta_{\mu\alpha, \nu\beta}^A(k) = & \frac{-1}{(2\pi)^4 \epsilon} \left\{ \sum_{m \neq i, d} \delta_{\alpha m} \frac{1}{k^2 + N^2 F_m F_m} \left(g^{\mu\nu} + \frac{(1-\xi) k^\mu k^\nu}{\xi k^2 + N^2 F_m F_m} \right) \right. \\
 & + \frac{F_\alpha}{\sum_{m=i, d} F_m F_m} \frac{1}{k^2 + N^2 \sum_{m=i, d} F_m F_m} \left(g^{\mu\nu} + \frac{(1-\xi) k^\mu k^\nu}{\xi k^2 + N^2 \sum_{m=i, d} F_m F_m} \right) F_\beta \\
 & \left. + \sum_r \tilde{F}_\alpha^{(r)} \frac{1}{k^2} \left(g^{\mu\nu} + \frac{(1-\xi) k^\mu k^\nu}{\xi k^2} \right) \tilde{F}_\beta^{(r)} \right\} .
 \end{aligned}$$

De maneira análoga é obtido o propagador de fantasmas

$$\begin{aligned}
 \text{(IV-37)} \quad \Delta_{\alpha\beta}^H(k) = & \frac{-1}{(2\pi)^4 \epsilon} \sum_{m \neq i, d} \delta_{\alpha m} \frac{\sqrt{\xi}}{\xi k^2 + N^2 F_m F_m} \delta_{\beta m} + \\
 & \frac{F_\alpha}{\sum_{m=i, d} F_m F_m} \frac{\sqrt{\xi}}{\xi k^2 + N^2 \sum_{m=i, d} F_m F_m} F_\beta + \sum_r \tilde{F}_\alpha^{(r)} \frac{\sqrt{\xi}}{k^2} \tilde{F}_\beta^{(r)} .
 \end{aligned}$$

As regras de Feynman, relevantes para o cálculo de
 girinos que pretendemos encetar, são :

A) Vértices

$$(2\pi)^4 i 2 g^{\mu\nu} (F^\alpha F^\beta \delta_{\alpha\beta} + F^\alpha F^\beta) \nu$$

$\alpha \neq i, \beta \neq i, \delta$ $\alpha = i, \beta = i, \delta$

$$-(2\pi)^4 i 8 (\delta_{ci} \delta_{ab} + \delta_{bi} \delta_{ac} + \delta_{ai} \delta_{bc}) \nu$$

$$(2\pi)^4 i (F^\alpha F^\beta \delta_{\alpha\beta} + F^\alpha F^\beta) \frac{\nu}{\sqrt{3}}$$

$\alpha \neq i, \beta \neq i, \delta$ $\alpha = i, \beta = i, \delta$

B) Propagadores

$$\Delta_{a,b}^\phi(k)$$

$$\Delta_{\nu\beta, \mu\alpha}^A(k)$$

$$\Delta_{\alpha, \beta}^F$$

Os girinos que dão a derivada do potencial efetivo, estão na figura abaixo :

FIGURA 5 - Girinos de Yang-Mills

Teremos, então ,

$$(IV-38) \quad G_1 = 8\pi \int d^4 k \left(\frac{3}{k^2 + \mu^2 + 12 h v^2} + \sum_{a=2}^N \frac{1}{k^2 + \mu^2 + 4 h v^2 \frac{R_a v^2}{3}} \right)$$

onde N é a dimensão da representação.

Tomando apenas a parte finita desta expressão com o auxílio de

$$(IV-39) \quad \frac{\Gamma(1 - \frac{m}{2})}{A^{1 - \frac{m}{2}}} \longrightarrow 2A \lambda_m A \quad ,$$

teremos

$$(IV-40) \quad G_1^F = i\pi^2 8N \left[6(\mu^2 + 12h\nu^2) \ell_m(\mu^2 + 12h\nu^2) + \right. \\ \left. + \sum_{a=2}^N 2(\mu^2 + 4h\nu^2 + R_a \frac{\nu^2}{\xi}) \ell_m(\mu^2 + 4h\nu^2 + \frac{R_a \nu^2}{\xi}) \right]$$

O gráfico seguinte nos dá

$$(IV-41) \quad G_2^F = - \frac{i\pi^2 \nu^2}{\xi^2} \left[\sum_{\substack{\alpha \neq i, j \\ F_\alpha \neq 0}} F_\alpha F_\gamma \ell_m \nu^2 \frac{F_\alpha F_\gamma}{\xi} + \right. \\ \left. \sum_{\alpha=i, j} F_\alpha F_\gamma \ell_m \nu^2 \sum_{m=i, j} \frac{F_m F_m}{\xi} \right]$$

É interessante notar o fato extremamente curioso, que algumas pessoas chegam a chamar de conspiração, de que os fatores de grupo impedem o aparecimento de divergências infravermelhas nas integrais de loop. Por exemplo, no propagador de fantasma, o fator de $\tilde{F}_\alpha F_\beta$ é $(\kappa^2 \sqrt{\xi})^{-1}$ o qual é característico de partículas de massa nula e deveria gerar as habituais divergências infravermelhas. No nosso caso, entretanto, ele deve se acoplar com o vértice

que só contém vetores ortogonais a $\tilde{F}_\gamma$. O mesmo fenômeno

ocorre no girino seguinte

$$(IV-42) \quad G_3 = -2\omega \int d^4k \left[\sum_{\substack{\alpha \neq \beta, \delta \\ E_\alpha \neq 0}} F_\alpha F_\beta \frac{1}{k^2 + \omega^2 E_\alpha E_\beta} \left(m + \frac{(1-\gamma) k^2}{3k^2 + \omega^2 E_\alpha E_\beta} \right) \right. \\ \left. + \sum_{\alpha = \beta, \delta} F_\alpha F_\alpha \frac{1}{k^2 + \omega^2 \sum_{m=\beta, \delta} F_m F_m} \right]$$

onde fizemos uso da relação

$$(IV-43) \quad g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = m$$

Tomando o limite $\gamma \rightarrow \infty$ (16) obtemos sucessiva
mente :

$$(IV-44) \quad G_1^F = i\pi^2 8\omega \left[6(\mu^2 + 12h\omega^2) \ln(\mu^2 + 12h\omega^2) + \right. \\ \left. + (N-1) 2(\mu^2 + 4h\omega^2) \ln(\mu^2 + 4h\omega^2) \right],$$

$$(IV-45) \quad G_2^F = 0$$

e

$$(IV-46) \quad G_3^F = -4i\pi^2 \omega^3 \left\{ \sum_{\substack{\alpha \neq \beta, \delta \\ E_\alpha \neq 0}} F_\alpha F_\beta \ln \omega^2 E_\alpha E_\beta + \sum_{\substack{\alpha = \beta, \delta \\ E_\alpha \neq 0}} F_\alpha F_\alpha \ln \omega^2 E_\alpha E_\alpha \right\}$$

O potencial efetivo $\tilde{V}$, então, trivialmente obtido com a integração da equação:

$$(IV-47) \quad \frac{\partial V}{\partial v} = \frac{1}{(2\pi)^4 \epsilon} (G_1^F + G_3^F) .$$

Substituindo v por $(\phi, \phi)^{1/2}$, teremos o potencial efetivo da teoria caracterizada pela lagrangeana da equação (IV-1) no gauge obtido, pondo-se em (IV-14) $\epsilon^0 = 0$. A determinação de ordens superiores de loops é direta, embora fique em aberto saber se as divergências infravermelhas continuam sendo canceladas, como se espera. Assim, a menos desta ressalva, temos um método de cálculo do potencial efetivo de qualquer teoria que contenha bósons escalares em qualquer ordem da expansão em loops. Ordens mais altas não devem introduzir novas complicações, exceto as normais de teoria de perturbação. O método, por ser explícito, é particularmente conveniente para cálculos numéricos. A sua extensão para o caso de férmions ainda não foi realizada. No entanto, soubemos recentemente de um cálculo do potencial efetivo para férmions usando o método da fase estacionária⁽²²⁾. Tendo a completude como objetivo, na próxima seção utilizaremos os métodos desta referência na lagrangeana de Coleman-Weinberg, o que deixará transparente a sua aplicação à Eletrodinâmica.

V - COMENTÁRIOS SUPLEMENTARES

Nesta secção explicitaremos detalhes do emprego do método da fase estacionária no cálculo do potencial efetivo, visando uma abordagem cuja extensão de bósons a férmions é imediata.

Vamos partir da lagrangeana de Coleman-Weinberg⁽⁶⁾, já estudada na secção III. Esta, escrita na métrica de assinatura (+---), tem a forma

$$\begin{aligned}
 (V-1) \quad \mathcal{L}_{J_1} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1 - e A_\mu \phi_2)^2 + \\
 & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_2 + e A_\mu \phi_1)^2 - \frac{\lambda}{4!} (\phi_1^2 + \phi_2^2) - J_1 \phi_1 + \\
 & + \text{termos de gauge} .
 \end{aligned}$$

Devemos agora desenvolver a ação em torno da solução clássica, mas sem os bósons vetoriais, isto é, com $A_\mu = 0$. Para tanto escrevamos

$$(V-2) \quad \phi_i = \tilde{\phi}_i + \phi_i^0 ,$$

onde

$$(V-3) \quad \square \phi_i^0 - \frac{\lambda}{3!} \phi_i^{03} = J_i .$$

Definindo, para abreviar a notação ,

$$(V-4) \quad \mathcal{L}_{\mathcal{I}_1}^{\circ} \equiv \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \phi_1^{\circ})^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi_1^{\circ 4} - \mathcal{I}_1 \phi_1^{\circ},$$

$$(V-5) \quad K \equiv -\square - \frac{\lambda}{2} \phi_1^{\circ 2}$$

e observando que os termos lineares se anulam pelo uso da equação (V-3), teremos

$$\begin{aligned} (V-6) \quad \mathcal{L}_{\mathcal{I}_1} = \mathcal{L}_{\mathcal{I}_1}^{\circ} - \frac{i}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{e^2 \phi_1^{\circ 2}}{2} A^2 + \left[\frac{1}{2} (\partial_{\mu} \tilde{\phi}_1)^2 - \frac{\lambda}{4} \phi_1^{\circ 2} \tilde{\phi}_1^2 \right] + \\ + \left[\frac{1}{2} \phi_2 K \phi_2 - 2e A_{\mu} \phi_2 \partial_{\mu} \phi_1^{\circ} - e \phi_1^{\circ} \phi_2 \partial_{\mu} A_{\mu} \right] + \\ + \frac{e^2 A^2}{2} (\tilde{\phi}_1^2 + 2 \tilde{\phi}_1 \phi_1^{\circ} + \phi_2^2) - 2e A_{\mu} \phi_2 \partial_{\mu} \tilde{\phi}_1 - e \tilde{\phi}_1 \phi_2 \partial_{\mu} A_{\mu} \\ - \frac{\lambda}{4!} (\tilde{\phi}_1^4 + 4 \tilde{\phi}_1^3 \phi_1^{\circ} + 2 \tilde{\phi}_1^2 \phi_2^2 + 4 \phi_1^{\circ} \tilde{\phi}_1 \phi_2^2 + \phi_2^4) + \\ + \text{termos de gauge} . \end{aligned}$$

A parte mais importante deste método diz respeito à eliminação do propagador misto, o que é feito com um novo deslocamento, desta vez no campo ϕ_2 :

$$(V-7) \quad \phi_z = \psi_z + \chi$$

Um primeiro artifício é impor à constante funcional χ a relação

$$(V-8) \quad K\chi = e(2A_\mu \partial_\mu \phi_1^0 + \phi_1^0 \partial_\mu A_\mu),$$

pois ela faz desaparecer o propagador misto da lagrangeana

(V-6):

$$(V-9) \quad \frac{1}{2} (\psi_z + \chi) K (\psi_z + \chi) - (\psi_z + \chi) e (2A_\mu \partial_\mu \phi_1^0 + \phi_1^0 \partial_\mu A_\mu) = \\ = \frac{1}{2} \psi_z K \psi_z - \frac{1}{2} \chi K \chi$$

A nossa lagrangeana, em uma notação híbrida, tomará a forma

$$(V-10) \quad \mathcal{L}_{J_1} = \mathcal{L}_{J_1}^0 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{e^2 \phi_1^0{}^2}{2} A^2 - \\ - \frac{1}{2} e^2 (2A_\mu \partial_\mu \phi_1^0 + \phi_1^0 \partial_\mu A_\mu) K^{-1} (2A_\mu \partial_\mu \phi_1^0 + \phi_1^0 \partial_\mu A_\mu) + \\ + \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \tilde{\phi}_1)^2 - \frac{\lambda}{4} \tilde{\phi}_1^2 \tilde{\phi}_1^2 \right] + \frac{1}{2} \psi_z K \psi_z + \frac{e^2 A^2}{2} (\tilde{\phi}_1^2 + 2\tilde{\phi}_1^0 \phi_1^0 + \phi_1^0{}^2) - \\ - 2e A_\mu \phi_2 \partial_\mu \tilde{\phi}_1 - \sigma \tilde{\phi}_1 \phi_2 \partial_\mu A_\mu - \frac{\lambda}{4!} (\tilde{\phi}_1^4 + 4\tilde{\phi}_1^3 \phi_1^0 + 2\tilde{\phi}_1^2 \phi_1^0{}^2 + 4\tilde{\phi}_1^0 \phi_1^0 \phi_1^0 + \phi_1^0{}^4) + \text{termos de gauge}.$$

O funcional gerador, mencionado na secção (II-b), no caso presente, é dado por (usando a invariância translacional das integrais funcionais):

$$(V-11) \quad e^{i \frac{W(J_i)}{\hbar}} = N \int \mathcal{D}(\tilde{\phi}_1) \mathcal{D}(\phi_2) \mathcal{D}(A_\mu) \exp i S(\tilde{\phi}_1, \phi_2, A_\mu),$$

onde N é uma constante de normalização e S é a ação escrita com a lagrangeana (V-10).

O desenvolvimento de $W(J_i)$ em potência de $\hbar$ nos daria então

$$(V-12) \quad W(J_i) = W_0 + \hbar W_1 + \dots$$

O segundo artifício consiste em reescalar $\tilde{\phi}_1$, ϕ_2 e A_μ por $\hbar^{1/2}$ (4,22). Note-se que estamos reescalando ϕ_2 e não ψ_2 . Vemos, então, que apenas a parte quadrática contribui para W_1 . Usando novamente a invariância translacional teremos

$$(V-13) \quad W_1 = N \int \mathcal{D}(A_\mu) \mathcal{D}(\tilde{\phi}_1) \mathcal{D}(\psi_2) \exp i \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{e^2}{2} \tilde{\phi}_1^{02} A^0 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} e^2 (2 A_\mu \partial_\mu \phi_1^0 + \phi_1^0 \partial_\mu A_\mu) K^{-1} (2 A_\mu \partial_\mu \phi_1^0 + \phi_1^0 \partial_\mu A_\mu) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\partial_\mu \tilde{\phi}_1)^2 - \frac{\lambda}{4} \tilde{\phi}_1^{0c} \tilde{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} \psi_2 K \psi_2 + \text{termos de gauge} \right\}$$

Introduzindo o popular gauge de Lorentz com um parâmetro

$$\frac{1}{\sqrt{2\xi}} \partial_\mu A_\mu$$

as expressões resultantes se tornarão mais simétricas pela utilização da igualdade

$$(V-14) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu)^2 - e^2 \phi_1^{\sigma 2} (\partial_\mu A_\mu)^2 = \frac{1}{2} \int d^4y A_\mu(x) R^{\mu\nu}(x,y) A_\nu(y),$$

onde

$$(V-15) R^{\mu\nu}(x,y) \equiv \delta^4(x-y) \left(\partial^\mu g^{\nu\sigma} - \partial_\mu \partial_\nu + \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\xi} + e^2 \phi_1^{\sigma 2} \partial_\mu \partial_\nu K^{-1} \right).$$

Lembrando que o potencial efetivo deve ser determinado com ϕ_1^σ constante, podemos escrever (a notação deve ser vista na secção II):

$$(V-16) \Gamma_1(\phi_1^\sigma) = N \lim \int \mathcal{D}(A_\mu) \mathcal{D}(\tilde{\phi}_1) \mathcal{D}(\psi_1) \exp \left\{ \iint d^4x d^4y \left[A_\mu(x) \frac{R^{\mu\nu}}{2} \cdot A_\nu(x) + \delta(x-y) \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \tilde{\phi}_1)^2 - \frac{\lambda}{4} \phi_1^\sigma \tilde{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} \psi_1 K \psi_1 \right] \right. \right\}.$$

Podemos agora usar a expressão bem conhecida⁽³⁾

$$(V-17) \int \mathcal{D}(\theta) e^{i\theta M \theta} = (\det M)^{-\frac{1}{2}}.$$

Para calcular o determinante funcional, observemos que, dada uma matriz da forma

$$(V-18) K_{xy}^{\mu\nu} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\kappa f^{\mu\nu}(\kappa) e^{i\kappa(x-y)},$$

onde x e y são variáveis contínuas e κ só depende da sua diferença, μ e ν são índices discretos. Se resolvermos o problema de auto-valores, definido por

$$(V-19) \sum_\nu \int dy K_{xy}^{\mu\nu} g_y^\nu = A g_x^\mu,$$

usando a transformada de Fourier, teremos

$$(V-20) f^{\mu\nu}(r) \tilde{g}_i^\nu(r) = A_i(r) \tilde{g}_i^\mu(r)$$

onde acrescentamos um índice discreto i , pois para r fixo podem existir N auto-valores, não necessariamente distintos, representados por

$$A_i(r) \quad i = 1, \dots, N.$$

O logaritmo do determinante $\tilde{\epsilon}$, então, obtido, somando

sobre todos os índices:

$$(V-21) \int d\tau \det K_{xy}^{\mu\nu} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\tau \sum_i \lambda_i A_i(r) .$$

No nosso caso a matriz $f^{\mu\nu}(r)$ é dada por

$$(V-22) \quad f^{\mu\nu}(k) = -k^2 g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu + e^2 \phi_1^{02} g^{\mu\nu} - e^2 \phi_1^{02} \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 - \frac{\lambda}{6} \phi_1^{02}} + \frac{1}{3} k^\mu k^\nu .$$

Um auto-vetor é obviamente k^ν e o auto-valor correspondente é

$$(V-23) \quad A_1(k) = \frac{\frac{k^2}{3} \left(k^2 - \frac{\lambda}{6} \phi_1^{02} \right) - \frac{\lambda}{6} \phi_1^{02} e^2}{k^2 - \frac{\lambda}{6} \phi_1^{02}} .$$

Os outros auto-vetores η^ν , ortogonais a k^ν ,

$$(V-24) \quad \eta^\nu k^\nu = 0 ,$$

são degenerados e têm por auto-valor

$$(V-25) \quad A_2 = A_3 = A_4 = -k^2 + e^2 \phi_1^{02} .$$

Podemos, então, escrever

$$\begin{aligned}
 (V-26) \quad V_1(\phi_1^0) = & -\frac{1}{2(2\pi)^4} \int d^4k \left\{ \ln \left[\frac{k^2}{f} \left(k^2 - \frac{\lambda}{6} \phi_1^{02} \right) - \frac{\lambda}{6} \phi_1^{02} e^2 \right] \right. \\
 & - \ln \left(k^2 - \frac{\lambda}{6} \phi_1^{02} \right) + 3 \ln (k^2 - e^2 \phi_1^{02}) + \\
 & \left. + \ln \left(k^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_1^{02} \right) + \ln \left(k^2 - \frac{\lambda}{6} \phi_1^{02} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Estas integrais serão regularizadas pelo prolongamento analítico para espaços de dimensão complexa, já mencionado na secção anterior. Essencialmente a parte finita será tomada com o auxílio da seguinte expressão:

$$(V-27) \quad \int d_n p \, \ln(p^2 + m^2) \longrightarrow -\frac{(m^2)^2}{2} \ln m^2.$$

Assim, desprezando termos que só dependem de ϕ_1^{02} e não de $\ln \phi_1^{02}$, tendo ainda o cuidado de escalar $k^2 \rightarrow 3k^2$ na primeira integral, obteremos a contribuição de um loop para o potencial efetivo:

$$(V-28) \quad V_1(\phi_1^0) = \frac{1}{64\pi^2} \left\{ \frac{5}{18} \lambda^2 \phi_1^{04} + 3e^4 \phi_1^{04} + \frac{\lambda}{3} e^2 \phi_1^{04} \ln \phi_1^{02} \right\}$$

que já era conhecida por outros métodos^(7,16)

Férmions

O método, que acabamos de descrever, é diretamente aplicável à Eletrodinâmica⁽²²⁾, descrita pela lagrangeana:

$$(V-29) \quad \mathcal{L} = \bar{\Psi} (i \not{\partial} - \mu) \Psi - e \bar{\Psi} \not{A} \Psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\eta} \Psi + \bar{\Psi} \eta + \int d^4x A_\mu - \frac{1}{2J} (\partial A)^2.$$

O potencial efetivo é igualmente calculado em $A_\mu \in \mathcal{O}_3$. É feito um primeiro deslocamento do tipo (V-2) o qual induz um propagador misto de férmions e bósons vetoriais, mas que é igualmente eliminado por um segundo deslocamento do tipo (V-7), (V-8). Novamente, na expansão em loops, apenas a parte quadrática da lagrangeana deslocada contribui para o termo linear em $\hbar$. No caso de férmions, a equação (V-17) deve ser substituída por

$$(V-17') \quad \int \mathcal{D}(\Psi) \mathcal{D}(\bar{\Psi}) \exp i \bar{\Psi} M \Psi = \det M.$$

No entanto, a existência de matrizes J dificulta o cálculo do determinante M , que só pôde ser realizado em duas dimensões⁽²²⁾, com alguns resultados para quatro di

mensões, mas com a massa do elétron posta igual a zero. Em duas dimensões, neste último caso, observa-se que não há quebra espontânea de simetria em um loop.

Aqui, então, encerramos o estudo do potencial efetivo. Vimos a importância de dois métodos de cálculo. De um lado, temos, o que se pode chamar de método do deslocamento, descrito nas secções III e IV, que é simples e direto no caso de bósons, mesmo em teorias não abelianas. De outro, temos o método da fase estacionária, de aplicação difícil em cálculos de mais de um loop, mas que permite obter o potencial efetivo para os férmions na Eletrodinâmica. Acreditamos que o primeiro método pode ser reelaborado, de modo a se aplicar também aos férmions, mas esta tarefa será objeto de outro trabalho. Prosseguindo na nossa incursão aos métodos computacionais em teorias de gauge, vamos, nas próximas secções, estudar as divergências infravermelhas.

VI - DIVERGÊNCIAS INFRAVERMELHAS : PRELIMINARES

Até o presente momento, o estudo do potencial efetivo apenas em raras ocasiões nos levou a aflorar o problema das divergências infravermelhas em teorias de gauge. Este é complexo e tem chamado a atenção de uma boa parte da comunidade dos físicos nos últimos 40 anos. Certamente, a idéia essencial para entendimento da pateticamente chamada catástrofe infravermelha foi colocada no velho e clássico trabalho de Bloch e Nordsieck^(23,24). O âmago da sua idéia é de que, em qualquer experimento realizável, envolvendo partículas carregadas, é impossível especificar completamente o estado final do sistema. A razão é que fótons de baixa energia, os fótons soft, a partir de um certo limiar, escapam à detecção. Por outro lado, obtém-se uma secção de choque não nula, finita, quando se soma sobre todos os estados finais compatíveis com a resolução do aparelho de medida, isto é, quando a soma se estende aos estados com fótons não detectados. Seguindo esta linha de pensamento, é possível mostrar que, na teoria abeliana que é a Eletrodinâmica Quântica, uma abordagem geral capaz de eliminar a catástrofe infravermelha consiste na fatorização do "bremsstrahlung soft" e das divergências introduzidas por correções virtuais às linhas externas^(24,25). Estes fatores, que são exponenciais, cancelam-se mutuamente. Nas teorias de Yang-Mills⁽¹⁹⁾, no entanto, este cancelamento só foi verificado em ordens mais baixas da teoria de perturbação para as divergências dominan

tes^(26,27,28). Neste caso, esbarra-se com a consideração de um grande número de diagramas (são da ordem de 40, em quarta ordem na referência 28) e é muito difícil perceber por que este cancelamento deveria ocorrer.

Assim é importante a busca de um outro método, mais direto, que permita superar estas dificuldades. Um passo nesta direção, já há algum tempo, foi dado por Lee e Nauenberg⁽²⁹⁾, para os quais a ocorrência de tais singularidades e o seu cancelamento são consequência de um teorema elementar de Mecânica Quântica, que deveria ser estabelecido sem qualquer uso explícito de diagramas de Feynman ou mesmo da forma da hamiltoniana. Infelizmente uma de suas hipóteses, a de que os elementos diagonais da hamiltoniana de interação são grandezas bem comportadas, não se verifica nos casos realísticos. Fleming e Frenkel⁽³⁰⁾ conjecturam que ainda assim as linhas gerais deste teorema são relevantes para o entendimento das singularidades infravermelhas. Vamos fazer um rápido resumo dos resultados o que facilitará a exposição do nosso próprio trabalho.

Seja, então, uma hamiltoniana arbitrária $H_0 + g H_I$ a qual pode ser diagonalizada pela matriz unitária U :

$$(VI-1) \quad U^\dagger (H_0 + g H_I) U = E$$

onde H_0 e E são matrizes diagonais e g é a constante de acoplamento. $U = U_-$ ou $U = U_+$ conforme

sejam usados estados "in" ou "out". A matriz S é dada por

$$(VI-2) \quad S = U_-^+ U_+ .$$

Então a probabilidade de transição de um estado a a um estado b é

$$(VI-3) \quad |S_{ab}|^2 = \sum_{ij} [(U_+)_i a (U_+)_j a^*] [(U_-)_i b (U_-)_j b^*]^* .$$

Lee e Nauenberg mostraram que se $(H_I)_{ij}$ for finito, as divergências infravermelhas são completamente canceladas no desenvolvimento em série de potências da soma

$$(VI-4) \quad \sum_{D(E_a)} (U_\pm)_i a (U_\pm)_j a^* \equiv [T_\pm(E_a)]_{ij} ,$$

onde $D(E_a)$ é o conjunto de estados degenerados que têm a mesma energia que o estado a ⁽²⁹⁾.

Fleming e Frenkel conseguiram mostrar que, no caso do espalhamento de um fêrmion carregado por um potencial externo, em que os elementos diagonais da hamiltoniana de interação são funções singulares, as matrizes $T_\pm$ devem con

ter singularidades infravermelhas. No entanto, as divergências infravermelhas dominantes se cancelam no produto $T_+ T_-^*$ e nesta aproximação a secção de choque é uma grandeza finita⁽³⁰⁾.

A extensão destes resultados às teorias de gauge constitui um verdadeiro programa de pesquisas. Um Hércules moderno certamente teria como trabalho a determinação da matriz $\mathcal{V}$ em teorias de gauge não abelianas. Na próxima secção, descreveremos a nossa contribuição a esta tarefa.

Por ora cabe observar que a hamiltoniana de interação, tanto da Eletrodinâmica Quântica no gauge de Coulomb quanto da Teoria de Yang Mills pura no gauge axial, é da forma^(31, 32, 33):

$$(VI-5) \quad H_I = g H_1 + g^2 H_2$$

onde H_2 não é mais singular do que H_1 .

Admitindo que as singularidades da hamiltoniana de interação apareçam como funções da diferença de momento:

$$(VI-6) \quad (H_1)_{ik} = (A_1)_{ik} f_1(i-k)$$

e

$$(VI-7) \quad (H_2)_{ik} = (A_2)_{ik} f_2(i-k)$$

onde A_1 e A_2 são grandezas não singulares, mostramos no apêndice C que as divergências líderes da matriz V , na aproximação eikonal, se somam para dar uma exponencial

$$(VI-8) \quad U_{ij} = 1 + \frac{g(A_1)_{ij} f_i(i-j) + g^2(A_2)_{ij} f_i(i-j) \exp\{gB_1 + g^2B_2\}}{E_j - E_i}$$

onde B_1 e B_2 são singulares e o cancelamento de divergências ocorreria como em⁽³⁰⁾.

Malgrado a sua aparente simplicidade, este resultado não pode ser aplicado nem à Eletrodinâmica Quântica, devido à dificuldade de interpretação dos índices. Assim, por exemplo, em $(H_1)_{ij}$ as letras i e j denotam estados que podem conter um grande número de partículas e não é claro o significado da diferença $i - j$ que aparece nas equações (VI-6) e (VI-7). Além disso, surgem complicações devidas à conservação dos momenta que não foi levada em conta na dedução da equação (VI-8). Rigorosamente esta equação só se aplica aos casos em que H_1 e H_2 são potenciais externos. No entanto, o nosso resultado e principalmente as técnicas nele usadas constituem um guia poderoso para o que deve ocorrer em situações mais realísticas. Por exemplo, em Eletrodinâmica, estudando o processo

Com o fóton fora da camada de massa, no gauge de Coulomb, onde a hamiltoniana de interação é dada por⁽³⁴⁾

$$(VI-9) \quad H_I = eh + e^2 H$$

com

$$(VI-10) \quad h = \int d^3x : \bar{\Psi}(x) \vec{\gamma} \cdot \vec{A}(x) \Psi(x) :$$

e

$$(VI-11) \quad H = \frac{1}{8\pi} \int d^3x d^3y \frac{:\bar{\Psi}(x) \Psi(x): : \bar{\Psi}(y) \Psi(y):}{|\vec{x} - \vec{y}|},$$

mostramos, no apêndice D, que as divergências dominantes da matriz U ainda se exponenciam:

$$(VI-12) \quad U_{LQ}^K = \frac{eh_{LQ}^K}{E_{LQ} - E_K} \exp \left\{ e^+ A_1 + e^- A_2 \right\}$$

onde, por definição, K designa o momento do fóton, L o do elétron e Q o do pósitron. O símbolo E_{LQK} representa a soma das energias das três partículas citadas.

As convenções restantes são :

$$(VI-13) \quad U_{LQ}^K \equiv \langle K | U | L Q \rangle ,$$

$$(VI-14) \quad h_{LQ}^K \equiv \langle K | h(t=0) | L Q \rangle ,$$

$$(VI-15) \quad A_1 \equiv \int d^3 q_1 d^3 q_2 d^3 l_1 d^3 l_2 \frac{h_{LQ}^{l_1 k_1} h_{KQ}^{q_1}}{\left(\frac{\vec{L} \cdot \vec{l}_1}{L^0} + \frac{\vec{Q} \cdot \vec{q}_1}{Q^0} \right) \left(\frac{\vec{L} \cdot \vec{l}_2}{L^0} + \frac{\vec{Q} \cdot \vec{q}_2}{Q^0} \right)}$$

$$(VI-16) \quad A_2 \equiv \int d^3 q_1 d^3 l_1 \frac{H_{LQ}^{l_1 q_1}}{\frac{\vec{L} \cdot \vec{l}_1}{L^0} + \frac{\vec{Q} \cdot \vec{q}_1}{Q^0}}$$

O emaranhado de índices e a quantidade de termos considerados, para da fórmula de Lee-Nauenberg (D-18) se chegar a uma expressão simples das divergências infraverme-lhas num caso particular, mostram a dificuldade da sua extensão para qualquer processo. Em resumo temos uma dedução complicada de um resultado simples. Esta simplicidade das

expressões finais na aproximação eikonal leva a perguntar-se ela não pode também ser atingida nas etapas intermediárias, com uma hamiltoniana reduzida que já levasse em conta esta aproximação. Queremos dizer com isso um modelo simplificado da Eletrodinâmica cuja matriz $\mathcal{U}$ fosse idêntica à desta teoria na citada aproximação. Kulish e Faddeev⁽³⁶⁾ dão uma resposta parcialmente positiva a esta questão. O seu método usa o formalismo de Gupta-Bleuler. Vamos agora aplicá-lo ao gauge de Coulomb, onde é possível a quantização canônica e ao mesmo tempo exibir as suas características. A sua elegância levar-nos-á, na próxima secção, à sua extensão não trivial a teorias não abelianas.

Seja, então, a hamiltoniana dada pela equação (VI-9). Nossa primeira tarefa é assim estudar o comportamento de $\hbar$ e de H no limite $|t| \rightarrow \infty$. Neste limite todos os termos da hamiltoniana $\mathcal{H}$ podem ser classificados em dois grupos⁽³⁶⁾. Os termos do primeiro grupo contêm dois operadores de criação ou dois de destruição de férmions. O argumento da função exponencial, que caracteriza a dependência temporal destes termos, é proporcional à expressão $(p^2 + m^2)^{1/2} + [(p + k)^2 + m^2]^{1/2} \pm k_0$ (para a notação veja-se o apêndice D e as referências (34, 36)), a qual é diferente de zero para quaisquer p e k . Tais termos, portanto, decrescem de modo suficientemente rápido quando $|t| \rightarrow \infty$. Os termos do segundo grupo possuem diferenças de energia, isto é, têm o argumento da função ex

ponencial proporcional a $(p^2 + m^2)^{1/2} - [(p+k)^2 + m^2]^{1/2} \pm k_0$, o qual se anula para $k = 0$, qualquer que seja p . Certamente é dos termos deste segundo grupo que devem vir as contribuições mais divergentes no infravermelho. Na parte coulombiana da interação, é conveniente considerar o operador auxiliar $\mathcal{H}$, também definido no apêndice D, para o qual a parte mais singular provém de termos cujo argumento da exponencial é da forma $(p+q)^0 - p^0$, onde q é o momentum do fóton de gauge. É interessante observar que sempre esperamos que a máxima singularidade ocorra em diferenças de energia de partículas massivas. Assim, é irrelevante o fato de os fótons de gauge não contribuírem para a exponencial de energia.

A simplificação seguinte é baseada na observação de que a principal contribuição à integral remanescente no limite $|t| \rightarrow \infty$ vem da vizinhança de pequenos momenta k do fóton. Nos integrandos correspondentes, vamos então colocar $k = 0$ ($q = 0$) em todas as funções de variação lenta, isto é, nos operadores de criação e aniquilação de férmions e nos coeficientes compostos de spinores.

Nestas aproximações as hamiltonianas h e H passam a ser h^{eik} e H^{eik} , dadas, respectivamente, por

$$(VI-17) \quad h^{eik} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\vec{p} d\vec{k}}{p^0 \sqrt{2\omega_k}} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x} - i\vec{k} \cdot \vec{x}} [b^*(p,s) b(p,s) - d^*(p,s) d(p,s)] [p^\mu \epsilon_\mu(k,\lambda) a(k,\lambda) + p^\mu \epsilon_\mu(-k,\lambda) a^\dagger(k,\lambda)]$$

$i = 1, 2$

$$(VI-18) \quad H^{elk} = \frac{1}{16\pi^3} \int d^3q \, d^3p_1 \, d^3p_2 \, e^{i\epsilon \left(\frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{q}}{p_1^0} - \frac{\vec{p}_2 \cdot \vec{q}}{p_2^0} \right)} \frac{p_1^0 p_2^0}{m^2 (q^0 + \lambda^2)}$$

$$[b^\dagger(p_1, \lambda_1) b(p_1, \lambda_1) - d^\dagger(p_1, \lambda_1) d(p_1, \lambda_1)]$$

$$[b^\dagger(p_2, \lambda_2) b(p_2, \lambda_2) - d^\dagger(p_2, \lambda_2) d(p_2, \lambda_2)]$$

Devemos, em seguida, lembrar que o operador de evolução temporal U é definido por⁽¹⁰⁾

$$(VI-19) \quad U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle = |\Psi(t)\rangle$$

e que satisfaz à equação

$$(VI-20) \quad i \partial_t U(t, t_0) = H_I(t) U(t, t_0)$$

e à condição de contorno

$$(VI-21) \quad U(t, t) = 1.$$

A solução usual desse problema é expressa pela série :

$$(VI-22) \quad U(t, t_0) = T \exp \left[-i \int_{t_0}^t H_I(t') dt' \right]$$

Também é hábito, com o fim de assegurar a conver

gência de certos limites, substituir $H(t')$ por um "potencial adiabático":

$$(VI-23) \quad H(t) \longrightarrow e^{-\varepsilon|t|} H(t)$$

e tomar o limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ⁽³⁰⁾ no fim dos cálculos. No entanto, para não sobrecarregar a notação o termo $e^{-\varepsilon|t|}$ permanecerá subentendido.

A vantagem das simplificações, anteriormente introduzidas, aparecerá na determinação da parte mais divergente infravermelha da matriz U , denotada por U^0 e que pode ser calculada com o auxílio da identidade ⁽³⁷⁾:

$$(VI-24) \quad T \exp \left(-i \int_{t_0}^t H(t') dt' \right) \equiv \exp \left(-i \int_{t_0}^t H(t') dt' \right) \\ - \exp \left(-\frac{i}{2} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' [H(t'), H(t'')] \right) \dots$$

Usando ainda

$$(VI-25) \quad [b^+(p) b(p), b^+(q) b(q)] = [b^+(p) b(p), d^+(q) d(q)] = \\ = [d^+(p) d(p), d^+(q) d(q)] = 0$$

vemos que, no cálculo da matriz U^0 , empregando h^{cik} e H^{cik} , a identidade (VI-24) para o comutador, isto é, o triplo comutador é nulo. Nosso operador é então da forma

$$(VI-26) \quad U^0 = \exp \left\{ -i \int_{t_0}^{t_1} [e h^{eik}(t) + e^* H^{eik}(t)] dt \right\} \\
= \exp - \frac{i}{2} \int_{t_0}^{t_1} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 Q(t_1, t_2),$$

onde

$$(VI-27) \quad Q(t_1, t_2) \equiv [h^{eik}(t_1), h^{eik}(t_2)] = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 k}{2 \omega_k p_1^0 p_2^0} \\
\cdot f(p_1, \lambda_1) f(p_2, \lambda_2) \left[\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{k} \vec{p}_2 \cdot \vec{k}}{\omega_k^2} \right] \\
\cdot \left[e^{i \left(\frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{k}}{p_1^0} t_1 - \frac{\vec{p}_2 \cdot \vec{k}}{p_2^0} t_1 \right)} - e^{-i \left(\frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{k}}{p_1^0} t_1 - \frac{\vec{p}_2 \cdot \vec{k}}{p_2^0} t_2 \right)} \right]$$

e

$$(VI-28) \quad f(p, \lambda) \equiv b^*(p, \lambda) b(p, \lambda) - d^*(p, \lambda) d(p, \lambda).$$

Teríamos, assim, em mãos um procedimento extremamente simples para o cálculo das divergências infravermelhas dominantes. Infelizmente o operador U^0 obtido só conecta estados com o mesmo número de férmions e é, portanto, uma simplificação da aproximação eikonal⁽³⁸⁾. Não obstante, na teoria de Yang-Mills, no gauge axial as divergências principais

aparecem apenas nas pernas externas⁽³⁹⁾ e são pois passí
veis de determinação por um operador do tipo U^0 . A im
plementação deste resultado será reservada à próxima secção.

VII - EXPONENCIAÇÃO DAS DIVERGÊNCIAS INFRAVERMELHAS NO GAUGE AXIAL

Nosso objetivo é estudar as divergências infravermelhas principais na teoria de Yang-Mills⁽¹⁹⁾ pura, utilizando o formalismo hamiltoniano e a teoria formal do espalhamento⁽¹⁰⁾. Há aqui muitas diferenças em relação ao cálculo que acabamos de mostrar na Eletrodinâmica Quântica. A primeira é certamente o fato de presentemente todas as partículas, os glúons, terem uma carga, mas não terem massa. Além disso as divergências dominantes vêm não apenas de integrações sobre pequenos momenta, mas também de pequenos ângulos. A simplificação apontada pelo comportamento de $|t| \rightarrow \infty$ é muito pequena, pois ainda sobram termos de interação tri e quadrilineares, de manejo difícil. Considerações sobre o caráter das divergências dominantes permitem desprezar ordem por ordem os termos quárticos. A grande simplificação ocorre, quando se supõe que a integração é feita numa certa ordem, que graficamente corresponde a integrar dos loops mais internos aos mais externos. Como resultado obtém-se uma hamiltoniana, semelhante em muitos aspectos a h^{eik} da seção anterior. Há, no entanto, uma diferença fundamental. Quando usamos h^{eik} na identidade (VI-24), o triplo comutador se anulou e, a menos de uma fase, a matriz de evolução U^D se reduziu ao primeiro termo. Tal aqui não ocorre. Felizmente, considerações detalhadas mostram que já a contribuição do comutador é mais fraca que a do primeiro termo e, assim,

novamente a matriz U^D se reduz a este.

Consideremos, então, a lagrangeana que descreve a interação dos glúons⁽¹⁹⁾

$$(VII-1) \quad \mathcal{L} = - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a ,$$

a qual é invariante sob a ação de um grupo G não abeliano, cujas constantes de estrutura f^{abc} são escolhidas reais e anti-simétricas. Na expressão acima e nas subsequentes, as letras gregas $\mu, \nu \dots$ serão índices de Lorentz e as letras latinas $a, b, c \dots$ serão índices de simetria interna, os quais, por vezes, chamaremos de cor. O tensor $F_{\mu\nu}^a$ é dado por

$$(VII-2) \quad F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c ,$$

onde A_μ^a denota os bósons vetoriais sem massa de Yang-Mills e g a constante de acoplamento. A métrica espaço-temporal empregada será euclidiana $\delta_{\mu\nu}$, mas os quadri-vetores terão a quarta componente imaginária:

$$x = (\vec{x}, x_4)$$

$$(VII-3) \quad x_4 = i x_0$$

$$x^2 = -x_0^2 + \vec{x}^2$$

A soma sobre índices repetidos será subentendida salvo aviso em contrário.

A hamiltoniana $\mathcal{H}$ será obtida da equação (VII-1) no gauge axial^(31,32,33), aparentemente o único onde se po de defini-la:

$$(VII-4) \quad \Lambda_\mu A_\mu = 0$$

onde

$$\Lambda_\mu = (0, 0, 1, 0).$$

Usando uma notação vetorial para os índices de cor, obtemos as equações de "movimento":

$$(VII-5) \quad \partial_\mu \vec{F}_{\mu\nu} + g \vec{A}_\mu \times \vec{F}_{\mu\nu} = 0$$

e os momenta canônicos são dados por

$$(VII-6) \quad \vec{\pi}_i = -(\partial_0 \vec{A}_i - \partial_i \vec{A}_0) = i \vec{F}_{4i}, \quad i = 1, 2.$$

$$(VII-7) \quad \vec{\pi}_4 = 0$$

$$(VII-8) \quad \vec{\pi}_3 = i \vec{F}_{43}.$$

Assim a hamiltoniana tomará a forma

$$(VII-9) \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2} \vec{\pi}_i \cdot \vec{\pi}_i + \frac{1}{4} \vec{F}_{ij} \vec{F}_{ij} - \frac{1}{2} (\partial_i \vec{\pi} - g \vec{\pi}_i \times \vec{B}_i) \cdot \partial_j \vec{\pi} - \frac{1}{2} \partial_j \vec{\pi} \cdot \partial_j \vec{\pi} + \frac{1}{2} \partial_j \vec{\pi} \times \vec{B}_j \cdot \partial_j \vec{\pi},$$

onde os índices i e j variam de 1 a 2.

Vamos nos colocar na representação interação, onde os campos satisfazem equações de campos livres. É conveniente explicitar a decomposição em campos livres do operador A , dada por

$$(VII-10) \quad A_i^a = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \sum_{\lambda} \frac{e_i(k, \lambda)}{\sqrt{2k^0}} (C_{k\lambda}^a e^{ikx} + C_{k\lambda}^{+a} e^{-ikx}),$$

onde o momentum k está na camada de massa

$$k^2 = -k^{02} + \vec{k}^2 \equiv -\omega_k^2 + \vec{k}^2,$$

$e_i(k, \lambda)$ são as componentes do vetor de polarização. $C_{k\lambda}^a$ e $C_{k\lambda}^{+a}$ denotam os operadores de destruição e de criação

respectivamente, dos campos bosônicos e satisfazem à relação de comutação

$$(VII-11) \quad [C_{k\lambda}^a, C_{k'\lambda'}^{a\dagger}] = \delta^{aa'} \delta_{\lambda\lambda'} \delta(k-k').$$

A parte de interação da hamiltoniana $\mathcal{H}$, que representaremos por H , pode então ser escrita na forma

$$(VII-12) \quad H = H_1 + H_2 + H_3.$$

Nesta expressão os dois primeiros termos da direita denotam acoplamentos trilineares, os quais, usando a completa anti-simetria das constantes de estrutura f^{abc} e a consequente imposição de serem os índices a , b e c distintos, podem ser escritos na forma

$$(VIII-13) \quad H_1 = \frac{1}{(2\pi)^{9/2}} \int d^3k d^3k_1 d^3k_2 d^3x i g \frac{f_{abc}}{\sqrt{8\omega_k \omega_{k_1} \omega_{k_2}}} F(k, k_1, k_2)$$

$$\cdot [C_{k\lambda}^a C_{k_1\lambda_1}^b C_{k_2\lambda_2}^{c\dagger} e^{i(k+k_1-k_2)x} - C_{k\lambda}^c C_{k_1\lambda_1}^{b\dagger} C_{k_2\lambda_2}^{a\dagger} \cdot$$

$$\cdot e^{-i(k+k_1-k_2)x}] ,$$

$$\begin{aligned}
 \text{(VII-14)} \quad H_2 = & \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k d^3k_1 d^3k_2 d^3x \, \varepsilon_g \frac{f_{abc}}{\sqrt{8\omega_k \omega_{k_1} \omega_{k_2}}} \\
 & \cdot e(k\lambda) e(k_1\lambda_1) k \cdot e(k_2\lambda_2) [C_{k\lambda}^a C_{k_1\lambda_1}^b C_{k_2\lambda_2}^c \\
 & \cdot e^{i(k+k_1+k_2)x} - C_{k_2\lambda_2}^{c+} C_{k_1\lambda_1}^{b+} C_{k\lambda}^{a+} e^{-i(k+k_1+k_2)x}]
 \end{aligned}$$

onde introduzimos o símbolo:

$$\begin{aligned}
 \text{(VII-15)} \quad P(k, k_1, k_2) = & e(k\lambda) e(k_1\lambda_1) k \cdot e(k_2\lambda_2) - e(k\lambda) e(k_1\lambda_1) k \cdot e(k_2\lambda_2) - \\
 & - e(k_2\lambda_2) e(k_1\lambda_1) k_2 \cdot e(k\lambda)
 \end{aligned}$$

Os termos quárticos da interação, H_3 , serão objeto de estudo posterior. Vamos, então, mantê-los no espaço de posição onde podem ser representados de maneira mais compacta:

$$\text{(VII-16)} \quad H_3 = \frac{1}{4} g^2 (\vec{A}_i \times \vec{A}_j) (\vec{A}_i \times \vec{A}_j) + \frac{1}{2} g^2 (\vec{G}_{4i} \times \vec{A}_i) \delta_3^{-1} (\vec{G}_{4j} \times \vec{A}_j)$$

Aqui foi utilizada a grandeza $\vec{G}_{\mu\nu}$ definida por

$$\text{(VII-17)} \quad \vec{G}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \vec{A}_\nu - \partial_\nu \vec{A}_\mu$$

Podemos agora passar à discussão das singularidades da função de auto-energia S , definida por (sem soma em P, Λ e A):

$$(VII-18) \quad S = \lim_{\substack{t_0 \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow +\infty}} \langle P \Lambda A | U(t, t_0) | P \Lambda A \rangle$$

onde P representa o momento na camada de massa da partícula de Yang-Mills com polarização Λ e número quântico de simetria interna (cor) A .

Note-se que, substituindo-se a hamiltoniana de interação H na equação (VI-22) que dá a matriz U e usando a decomposição em campos livres (VII-10), aparecerão denominadores de energia. Como é bem conhecido⁽²⁹⁾, estes denominadores para os elementos de matriz do operador U conterão diferenças entre as energias dos estados intermediários e do estado inicial. As singularidades infravermelhas aparecem, quando estas energias se tornam degeneradas e os denominadores de energia tendem a zero. Isto pode acontecer de duas maneiras⁽³⁰⁾. Partículas virtuais podem ser emitidas, as quais alteram a energia inicial por uma quantidade arbitrariamente pequena. Estas são as verdadeiras singularidades infravermelhas. Além disso, para partículas externas sem massa, quanta sem massa emitidos quase paralelamente originam estados quase degenerados. Para as singularidades

infravermelhas ditas dominantes ou principais estas duas causas operam simultaneamente, isto é, os denominadores tendem a zero por ambas as razões. Então a parte da hamiltoniana H , representada por H_3 e que contém a constante de acoplamento g ao quadrado, para uma dada ordem em g , contribuirá, em um processo qualquer, com um número menor de denominadores de energia do que os termos associados a $H_1 + H_2$, que são lineares em g . Vemos então que as divergências associadas a H_3 têm grau menor do que as associadas a $H_1 + H_2$. Consequentemente o termo H_3 será negligenciado no que segue. O termo geral da série de perturbação de ordem g^{2L} tem $2L - 1$ denominadores de energia e L integrações espaciais em variáveis que chamaremos $\vec{k}_\lambda$ ($\lambda = 1 \dots L$). É importante notar que a máxima singularidade, objeto de nosso estudo, aparecerá quando todos os $\vec{k}_\lambda$ forem paralelos ao momentum externo $\vec{P}$, o que só acontece com a auto-energia.

Nossa tarefa é agora proceder como na Eletrodinâmica⁽³⁶⁾ e investigar o comportamento assintótico da expressão

$$(VII-19) \quad V \equiv \int_{t_0}^t (H_1(t') + H_2(t')) dt'$$

para $t \rightarrow \infty$ e $t_0 \rightarrow -\infty$. Como na secção VI, todos os termos desta expressão podem ser divididos em dois grupos.

Os termos do primeiro grupo, provenientes de $H_1(t')$, con
têm ou dois operadores de criação e um de destruição de bô
sons ou vice-versa. O argumento da função exponencial que
caracteriza a dependência temporal dos termos deste grupo
é proporcional a

$$(VII-20) \quad \Gamma_- \equiv k^0 + k_1^0 - (k_1 + k)^0 = k_0^0 + k_1^0 - \sqrt{\vec{k}_1^2 + \vec{k}^2 + 2k_1^0 k^0 \cos \theta}.$$

Os termos do segundo grupo, cujos termos sô contêm operado
res de criação ou sô de destruição, têm argumento da função
exponencial, onde sô aparecem somas de energia, proporcio -
nal a

$$(VII-21) \quad \Gamma_+ \equiv k^0 + k_1^0 + (k_1 + k)^0 = k_0^0 + k_1^0 + \sqrt{\vec{k}_1^2 + \vec{k}^2 + 2k_1^0 k^0 \cos \theta}.$$

É fácil ver que

$$(VII-22) \quad \lim_{k, k_1, \theta \rightarrow 0} \frac{\Gamma_-}{\Gamma_+} = 0,$$

quaisquer que sejam os caminhos usados para se atingir o
limite.

Fica, então, claro que os termos do primeiro grupo de terminam a parte mais divergente da matriz U , denotada por U^D , a qual pode agora ser calculada com o auxílio da identidade (VI-24).

O operador $H_1(t)$ resultante é ainda bastante complicado. Antes de introduzir uma hipótese que vai simplificar a sua forma, devemos notar que a função $P(k, k_1, k_2)$ que nele aparece e pode ser vista nas equações (VII-13) e (VII-15), vai a zero juntamente com os momentos e ângulos. Para ver como, consideremos o produto:

$$(VII-23) \quad \mathcal{F} \equiv e(k, \lambda) \cdot e(k_1, \lambda_1) \cdot k \cdot e(k_2, \lambda_2),$$

onde, devido à conservação de momento, vale a relação

$$(VII-24) \quad k + k_1 - k_2 = 0.$$

Como a expressão acima é um escalar, podemos escolher então um sistema de referência conveniente. Tomemos então para simplificar $\vec{k}$ na direção $\hat{z}$ e, no caso das divergências principais, $\vec{k}$ e $\vec{k}_1$ quase paralelos. Como $e(k, \lambda)$ só depende da direção de $\vec{k}$, podemos escolher:

$$(VII-25) \quad k = (0 \ 0 \ |\vec{k}| \ \varepsilon |\vec{k}|)$$

$$e(k, 1) = (0 \ 1 \ 0 \ 0)$$

$$e(k, 2) = (1 \ 0 \ 0 \ 0).$$

Esta situação está ilustrada na figura abaixo

FIGURA 6 - Vetores quase paralelos

É fácil ver, pela figura 6, onde $\hat{m}$ é um versor a duas componentes, que para pequenos ângulos

$$(VII-26) \quad \vec{k}_1 = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} (|\vec{k}_1| \cos \theta + \hat{m} |\vec{k}_1| \sin \theta) \sim \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} |\vec{k}_1| + |\vec{k}_1| \hat{m} \theta.$$

Teremos assim

$$(VII-27) \quad k_1 e(k\lambda) \sim |\vec{k}_1| \theta N,$$

onde N é uma grandeza finita não infinitesimal.

Vemos assim que as singularidades dominantes da primeira exponencial da equação (VII-24) aparecem, quando num produto $\int_{t_0}^t H_1(t') dt' \int_{t_0}^t H_2(t'') dt''$, quatro operadores de criação e de destruição são substituídos por dois comutadores, correspondentes a um "loop" no formalismo covariante. A sua forma é do tipo

$$(VII-28) \quad \int \frac{\Delta k}{k} \frac{\Delta \theta}{\theta} ,$$

isto é, temos divergências duplamente logarítmicas por "loop" (39).

As expressões (VII-13), (VII-15), (VII-20) e (VII-27) mostram que não devemos esperar mudança na estrutura de divergências dominantes da auto-energia, se escolhermos as variáveis k e k_1 , como sendo infinitésimos de ordens diferentes ou equivalentemente uma delas finita e a outra infinitesimal (soft). Em qualquer dos casos diremos que uma das variáveis é mais soft do que a outra. É esta a hipótese que, no formalismo covariante, corresponde a uma ordem de integração dos loops mais internos aos mais externos. Por exemplo, se k for não infinitesimal, o numerador perde uma potência em k , mas o denominador também perde, no caso $\sqrt{\omega_k \omega_{k_1}}$. É conveniente lembrar que, devido à conservação de momento, expressa pela distribuição $\delta(k + k_1 - k_2)$, se escolhermos k como não soft (infinitesimal), então k_1 ou k_2 devem ser não

soft. Quanto ao expoente Γ ele vai a zero da mesma forma em qualquer dos casos, isto é, se k_i for mais soft do que k , teremos

$$(VII-29) \quad \Gamma \sim \frac{k^\circ k_i^\circ \theta^2}{2(k^\circ + k_i^\circ)}.$$

Por outro lado, se k_i for tão soft quanto k :

$$(VII-30) \quad k_i^\circ = A k^\circ$$

onde A é uma grandeza finita, não infinitesimal, resultará:

$$(VII-31) \quad \Gamma \sim \frac{A}{2(A+1)} k^\circ \theta^2.$$

Vamos diferenciar a variável que estamos tomando como a mais soft por um til $\sim$:

$$(VII-32) \quad k_{\text{soft}} \equiv \tilde{k}.$$

É então plausível que a contribuição dominante de H_1 , da equação (VII-13), representada a seguir por H_1^D , para as divergências infravermelhas, virá da integração sobre as regiões em que ora k , ora k_1 ora k_2 será tomada soft. Desprezando termos não dominantes, podemos escre

ver a hamiltoniana H_1^0 explicitamente como uma soma de integrações sobre as várias regiões, da seguinte forma conveniente:

$$\begin{aligned}
 \text{(VII-33)} \quad H_1^0 = & \frac{ig f_{abc}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x \left\{ \left[\int d_3 \kappa d_3 \tilde{\kappa}_1 d^3 \kappa_2 + \int d_3 \kappa d_3 \kappa_1 d_3 \tilde{\kappa}_2 \right] \right. \\
 & \cdot [e(\kappa_\lambda) e(\kappa_{\lambda_1}) \kappa e(\kappa_{\lambda_1}) - e(\kappa_\lambda) e(\kappa_{\lambda_1}) \kappa e(\kappa_{\lambda_1})] - \\
 & - \left[\int d^3 \tilde{\kappa} d^3 \kappa_1 d^3 \kappa_2 + \int d_3 \kappa d_3 \tilde{\kappa}_1 d_3 \kappa_2 \right] e(\kappa_{\lambda_1}) e(\kappa_{\lambda_1}) \cdot \\
 & \left. \cdot \kappa_2 e(\kappa_\lambda) \right\} \left[\frac{c_{\kappa\lambda}^a c_{\kappa_{\lambda_1}}^b c_{\kappa_{\lambda_2}}^{c\dagger}}{\sqrt{8} \omega_\kappa \omega_{\kappa_1} \omega_{\kappa_2}} e^{i(\kappa + \kappa_1 - \kappa_2)x} - h.c. \right]
 \end{aligned}$$

onde h. c. abrevia hermitiano conjugado.

Agora, como na secção anterior, a próxima simplificação consiste em desprezar a variável soft frente às demais, em todo lugar onde não sejam acarretados o surgimento ou a nulação de singularidades. Teremos então igualdades do tipo

$$\text{(VII-34)} \quad \kappa + \tilde{\kappa}_1 = \kappa$$

A expressão (VII-33) assume então a forma :

$$\text{(VII-35)} \quad H_1^0 = \frac{ig f_{abc}}{(2\pi)^{3/2}} \left\{ \int d_3 \kappa d_3 \tilde{\kappa}_1 [e(\kappa_\lambda) e(\kappa_{\lambda_1}) \kappa e(\tilde{\kappa}_{\lambda_1}) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - e(k\lambda) e(\tilde{k}, \lambda_1) k e(k\lambda_2) \left[C_{k\lambda}^a C_{\tilde{k}, \lambda_1}^b C_{k\lambda_2}^{c+} \frac{e^{-i[k^0 + \tilde{k}_1^0 - (k + \tilde{k}_1)^0]}}{\sqrt{8\omega_k \omega_{\tilde{k}} \omega_k}} \right. \\
& \left. - h.c. \right] - \int d_3 k, d_3 \tilde{k} e(k, \lambda_2) e(k, \lambda_1) k_1 e(\tilde{k}\lambda) \\
& \cdot \left[C_{\tilde{k}\lambda}^a C_{k\lambda_1}^b C_{k\lambda_2}^{c+} \frac{e^{-i[\tilde{k}^0 + k_1^0 - (\tilde{k} + k_1)^0]}}{\sqrt{8\omega_{\tilde{k}} \omega_{k_1} \omega_{k_1}}} - h.c. \right] + \\
& + \int d_3 k, d_3 \tilde{k}_2 [e(-k, \lambda) e(\tilde{k}, \lambda_2) k_1 e(k, \lambda_2) + e(-k\lambda) e(k, \lambda_1) k_1 e(k, \lambda_2) \\
& \left[C_{-k, \lambda}^a C_{k, \lambda_1}^b C_{\tilde{k}, \lambda_2}^{c+} \frac{e^{-i[k^0 + \tilde{k}_2^0 + (k - \tilde{k}_2)^0]}}{\sqrt{8\omega_k \omega_{k_1} \omega_{\tilde{k}_2}}} - h.c. \right] - \\
& - \int d_3 k_2, d_3 \tilde{k}, \tilde{k}_1 e(k, \lambda_2) e(\tilde{k}, \lambda_1) k_2 e(k_2, \lambda) \left[C_{k, \lambda}^a C_{\tilde{k}, \lambda_1}^b C_{k_2, \lambda_2}^{c+} \right. \\
& \left. \frac{e^{-i[(k + \tilde{k}_1)^0 + \tilde{k}_1^0 - k_2^0]}}{\sqrt{8\omega}} - h.c. \right] \Bigg\} .
\end{aligned}$$

Algumas mudanças de variáveis, levando em conta a anti-simetria das constantes de estrutura, simplificam consideravelmente a nossa hamiltoniana, dando como resultado:

$$\begin{aligned}
\text{(VII-36)} \quad H_1^0 &= \frac{2i f a b c}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 k d^3 \tilde{k} \frac{e(k\lambda) e(k\lambda_2) k e(\tilde{k}, \lambda_1)}{\sqrt{8\omega_k \omega_k \omega_{\tilde{k}_1}}} \\
& \left[C_{\tilde{k}, \lambda_1}^b e^{-it[k^0 + \tilde{k}_1^0 - (k + \tilde{k}_1)^0]} \right. \\
& \left. + C_{\tilde{k}, \lambda_1}^{b+} e^{it[k^0 + k_1^0 - (k + \tilde{k}_1)^0]} \right] C_{k\lambda}^a C_{k\lambda_2}^{c+} .
\end{aligned}$$

Usando o fato de que os vetores de polarização são tomados normalizados

$$(VII-37) \quad e(k\lambda) e(k\lambda_1) = \delta_{\lambda\lambda_1}$$

e a relação aproximada, típica da aproximação eikonal,

$$(VII-38) \quad q^0 + \tilde{q}_1^0 = \sqrt{\vec{q}_1^2 + \tilde{\vec{q}}_1^2 + 2 \vec{q}_1 \cdot \tilde{\vec{q}}_1} \sim \frac{\tilde{q}_1 q_1}{q^0},$$

podemos, finalmente, escrever a hamiltoniana dominante numa forma bastante parecida à da hamiltoniana assintótica da E letrodinâmica, $\hbar^{eik}$, já citada na secção VI,

$$(VII-39) \quad H_1^0 = i g \frac{fabc}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k d^3\tilde{k}_1 \frac{\kappa e(\tilde{k}_1, \lambda_1)}{\omega_k \sqrt{\omega_{\tilde{k}_1}}} \left[C_{\tilde{k}_1, \lambda_1}^b e^{it \frac{\kappa \tilde{k}_1}{k^0}} + C_{\tilde{k}_1, \lambda_1}^{b+} e^{-it \frac{\kappa \tilde{k}_1}{k^0}} \right] C_{k, \lambda_2}^a C_{k, \lambda_2}^{c+}.$$

Vamos agora mostrar que, usando H_1^0 no lugar de H_1 , nas equações (VI-22) e (VI-24), podemos nesta última desprezar os termos contendo comutadores e conseqüentemente os termos seguintes. Para tanto é conveniente introduzir a notação

$$(VII-40) \quad \oint_K^b = -i f_{bac} C_{k, \lambda_2}^{a+} C_{k, \lambda_2}^c.$$

Este novo operador satisfaz às relações de comutação

$$(VII-41) \quad [p_k^a, p_{k'}^{a'}] = i \delta(\vec{k} - \vec{k}') f^{a,a',c} p_k^c$$

e

$$(VII-42) \quad [p_k^a, C_{k'\lambda'}^{a'}] = i \delta(\vec{k} - \vec{k}') f^{a,a',c} C_{k'\lambda'}^c$$

A equação (VII-39) passa a ter uma interpretação física muito simples: ela essencialmente representa o acoplamento do campo mole $C_{k,\lambda}^b$ à corrente (dura) de simetria interna $J_\mu^a = K_\mu p_k^a$.

Se definirmos o operador de soma B por

$$(VII-43) \quad B f(k, Q, k, q, \lambda, \lambda_c) \equiv g^2 \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3k d^3k d^3Q \frac{k}{k^0} \cdot e(k, \lambda) \frac{Q}{Q^0} e(q, \lambda_c) \frac{f(k, Q, k, q, \lambda, \lambda_c)}{\sqrt{4 \omega_k \omega_q}},$$

podemos escrever o comutador das hamiltonianas, que entra na identidade (VI-24), na forma

$$(VII-44) \quad I \equiv [H_1^0(t_1), H_1^0(t_2)] = B \left[\int_k^a C_{k\lambda}^a, \int_q^b C_{q\lambda_c}^b \right].$$

$$e^{i \frac{\kappa}{\kappa_0} \kappa t_1 + i \frac{Q}{Q_0} q t_2} + \left[\int_{\kappa}^a C_{\kappa \lambda}^{+a}, \int_Q^b C_{q \lambda_2}^{+b} \right].$$

$$e^{-i \frac{\kappa}{\kappa_0} \kappa t_1 - i \frac{Q}{Q_0} q t_2} + \left[\int_{\kappa}^a C_{\kappa \lambda}^a, \int_Q^b C_{q \lambda_2}^{+a} \right].$$

$$e^{-i \frac{\kappa}{\kappa_0} \kappa t_1 - i \frac{Q}{Q_0} q t_2} + \left[\int_{\kappa}^a C_{\kappa \lambda}^{+a}, \int_Q^b C_{q \lambda_2}^b \right].$$

$$e^{-i \frac{\kappa}{\kappa_0} \kappa t_1 + i \frac{Q}{Q_0} q t_2}$$

O aparecimento de uma grandeza, neste comutador, que se anula com o momento κ , levará a desprezã-lo. Para fazer surgir esta grandeza, que será um seno, empreguemos a i dentidade

$$(VII-45) \quad a_1 t_1 + a_2 t_2 \equiv (a_1 + a_2) \frac{(t_1 + t_2)}{2} - (a_1 - a_2) \frac{(t_1 - t_2)}{2}.$$

A equação (VII-44) tomará então a forma

$$(VII-46) \quad I = B \left[\int_{\kappa}^a C_{\kappa \lambda}^a, \int_Q^b C_{q \lambda_2}^b \right] e^{i \left(\frac{\kappa}{\kappa_0} \kappa + \frac{Q}{Q_0} q \right) \frac{t_1 + t_2}{2}}$$

$$e^{-i \left(\frac{\kappa}{\kappa_0} \kappa - \frac{Q}{Q_0} q \right) \frac{(t_1 - t_2)}{2}} + \left[\int_{\kappa}^a C_{\kappa \lambda}^{+a}, \int_Q^b C_{q \lambda_2}^{+b} \right].$$

$$e^{-i\left(\frac{k}{k^0}k + \frac{Q}{Q^0}q\right)\frac{t_1+t_2}{2}} + i\left(\frac{k}{k^0}k - \frac{Q}{Q^0}q\right)\frac{(t_2-t_1)}{2} +$$

$$+ \left[\int_K^a C_{K\lambda_1}^a, \int_Q^b C_{q\lambda_2}^{+b} \right] e^{i\left(\frac{k}{k^0}k - \frac{Q}{Q^0}q\right)\frac{t_1+t_2}{2}}$$

$$e^{-i\left(\frac{k}{k^0}k + \frac{Q}{Q^0}q\right)\frac{t_2-t_1}{2}} + \left[\int_K^a C_K^{+a}, \int_Q^b C_{q\lambda_2}^b \right]$$

$$e^{-i\left(\frac{k}{k^0}k - \frac{Q}{Q^0}q\right)\frac{t_1+t_2}{2}} + i\left(\frac{k}{k^0}k + \frac{Q}{Q^0}q\right)\frac{t_2-t_1}{2}.$$

Para, finalmente, emergir o seno são necessários alguns truques adicionais, que nos levam a proceder da seguinte maneira:

A) No primeiro termo da direita da equação (VII-46) façamos uso da identidade $A = \frac{A+A}{2}$. Ficamos assim com dois termos em lugar de um. Em seguida em um desses termos deve ser feita a mudança de variáveis.

$$Q \leftrightarrow k \quad q \leftrightarrow k \quad \lambda \leftrightarrow \lambda_2$$

B) Mesmo procedimento para o segundo termo

C) O terceiro termo de (VII-47) permanece inalterado.

D) Finalmente no quarto termo realizemos apenas a transformação de variáveis do item A.

Resultará :

$$(VII-47) \quad 1 = i B \left[\int_K^a C_{K\lambda}^a, \int_Q^b C_{Q\lambda_2}^b \right] e^{i \left(\frac{K}{K^0} K + \frac{Q}{Q^0} q \right) \frac{t_1 + t_2}{2}}$$

$$\cdot \operatorname{sen} \left(\frac{K}{K^0} K - \frac{Q}{Q^0} q \right) \frac{t_2 - t_1}{2} + \left[\int_K^a C_{K\lambda}^{+a}, \int_Q^b C_{Q\lambda_2}^{+b} \right]$$

$$\cdot e^{-i \left(\frac{K}{K^0} K + \frac{Q}{Q^0} q \right) \frac{t_1 + t_2}{2}} \operatorname{sen} \left(\frac{K}{K^0} K - \frac{Q}{Q^0} q \right) \frac{t_2 - t_1}{2} +$$

$$+ 2 \left[\int_K^a C_{K\lambda}^a, \int_Q^b C_{Q\lambda_2}^{+a} \right] e^{i \left(\frac{K}{K^0} K - \frac{Q}{Q^0} q \right) \frac{t_1 + t_2}{2}}$$

$$\cdot (-1) \operatorname{sen} \left(\frac{K}{K^0} K + \frac{Q}{Q^0} q \right) \frac{t_2 - t_1}{2} \Bigg\}$$

Note-se que o aparecimento do seno depende essencialmente de se ter o comutador das hamiltonianas e não o seu produto. Além disso, como este comutador aparece em uma integral do tipo $\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2$, o seno permanece na função integrada.

Assim, quando calculamos um elemento de matriz com o auxílio das expressões (VI-22) e (VI-24), devemos negligenciar os termos contendo comutadores, etc., pois estes terão um seno a mais no numerador em relação aos termos provenientes da primeira exponencial e a máxima divergência não poderá ser realizada.

Em resumo, a parte da matriz de evolução U que

nos dão os termos mais divergentes é da forma

$$(VII-48) \quad U^D(t, t_0) = \exp \left[-i \int_{t_0}^t H_1^D(t') dt' \right]$$

Vemos, então, que o operador de ordenação temporal T que aparece na equação (VI-22), não afeta o comportamento das divergências infravermelhas dominantes⁽⁴⁰⁾ e pode, portanto, ser ignorado. De maneira mais explícita, podemos dizer que, se na equação (VI-22) simplesmente eliminarmos o operador T , ainda obteremos toda a contribuição dominante, embora acompanhada de alguns termos não dominantes. É precisamente por esta razão que, como veremos a seguir, as singularidades infravermelhas dominantes da auto-energia se exponenciam de maneira tão simples:

Lembrando a equação (VI-23), introdutora do potencial adiabático, vemos que o operador $U^L(t)$, definido por

$$(VII-49) \quad U^L(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} U^D(t, t_0)$$

que governa o comportamento das singularidades dominantes das funções da auto-energia, fica com a expressão

$$(VII-50) \quad U^L(t) = \exp \int_0^t \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{\delta^4 \tilde{k} \delta^4 k}{\sqrt{2} \omega_k} \frac{K e(i\tilde{k}\lambda)}{k \tilde{k}} \rho_k^a$$

$$\left(c_{\tilde{k}\lambda}^a e^{i \frac{k}{k_0} \tilde{k} t} - c_{\tilde{k}\lambda}^{a+} e^{-i \frac{k}{k_0} \tilde{k} t} \right).$$

(A presença dos fatores $\tau \pm \varepsilon$ no denominador $k \tilde{k}$ continua subentendida)

É interessante notar que a nossa abordagem foi estendida aos gravitons infravermelhos, onde, assim é também possível mostrar a exponenciação das divergências infravermelhas⁽⁴⁴⁾.

VIII - ELEMENTOS DE MATRIZ DOMINANTES

Vamos agora mostrar que as divergências infravermelhas principais da auto-energia aparecem na forma da exponencial de uma função real.

Consideremos, então, a expressão (VII-50) e notemos que a nossa matriz de evolução simplificada verifica as relações

$$(VIII-1) \quad U^L(t) |0\rangle = U^{L*}(t) |0\rangle = |0\rangle.$$

Estas relações impõem que um estado de glúon de momentum duro (não soft) P , polarização Λ e índice de simetria A satisfaça à equação

$$(VIII-2) \quad U^L |P \Lambda A\rangle = U C_{P \Lambda}^{+A} U^+ |0\rangle.$$

Neste estágio, é conveniente definir o operador

$$(VIII-3) \quad B_K^a \equiv \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 \tilde{K} \frac{K e(\tilde{K}, \lambda)}{K \tilde{K} \sqrt{2 \omega_K}} \left(c_{K \Lambda}^a e^{i \frac{K \tilde{K} t}{K^+}} - c_{\tilde{K} \Lambda}^{a*} e^{-i \frac{\tilde{K} K t}{K^0}} \right)$$

Podemos, então, calcular a expressão (VIII-2) empregando a equação (VII-52) e a identidade

$$(VIII-4) \quad e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2} [A, [A, B]] + \dots$$

Como o momentum externo $\underline{P}$ é tomado duro, somente contribuirão para os termos dominantes comutadores do tipo :

$$[\int_{\underline{K}} a_i, C_{PA}^{+A}] = i \delta(\vec{K} - \vec{P}) f^{a_1 A C_1} C_{K1}^{+C_1}$$

$$(VIII-5) \quad [\int_{\underline{K}_2} a_2, [\int_{\underline{K}_1} a_1, C_{PA}^{+A}]] = (-i)^2 \delta(\vec{K}_1 - \vec{P}) \delta(\vec{K}_1 - \vec{K}_2) f^{a_1 C_1 A} f^{a_2 C_2 C_1} C_{K_2 1}^{+C_2}$$

Vemos, assim, que a contribuição dominante é dada pela série

$$(VIII-6) \quad U^L(t) C_{PA}^{+A} U^{L+}(t) |0\rangle = C_{PA}^{+A} - i B_P^{a_1} f^{a_1 C_1 A} C_P^{+C_1} + \\ + \frac{(-i)^2}{2!} f^{a_2 C_2 C_1} f^{a_1 C_1 A} B_P^{a_2} B_P^{a_1} C_P^{+C_2} + \dots$$

ou seja,

$$(VIII-7) \quad U^L(t) |P \wedge A\rangle = [e^{W(P,t)}]_{Ab} |P \wedge b\rangle.$$

O operador $W(P, t)$ é linear nos operadores de criação e de destruição de glúons moles (isto é, soft em relação ao momento externo P). A sua expressão pode ser posta na forma

$$(VIII-8) \quad W(P, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int F^c [\omega_{k\lambda}(P, t) C_{k\lambda}^c - \omega_{k\lambda}(P, t) C_{k\lambda}^{+c}].$$

onde F^c representa a matriz hermitiana, cujos elementos são

$$(VIII-9) \quad (F^c)_{mm} = -2 f^{cmm}$$

e as funções $\omega_{k\lambda}(P, t)$ são números dados por

$$(VIII-10) \quad \omega_{k\lambda}(P, t) = \frac{g}{\sqrt{2}\omega_k} \frac{P \cdot c(k, \lambda)}{P \cdot k} e^{i \frac{P \cdot k}{P^0} t}.$$

Vemos, com o auxílio das relações acima, que o cálculo das divergências infravermelhas dominantes da função de auto-energia S se reduz ao cálculo do valor esperado no vácuo do operador $[\exp W(P,t)]_{aa}$ (sem soma em a);

$$(VIII-11) \quad S^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle 0 | [\exp W(P,t)]_{aa} | 0 \rangle .$$

Para se calcular os elementos de matriz deste operador, sem dificuldade, os operadores de criação e de destruição que nele aparecem, devem ser colocados em ordem normal; o que pode ser feito com o auxílio da identidade bem conhecida,

$$(VIII-12) \quad e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]} ,$$

assim como da expressão, característica da teoria de grupos:

$$(VIII-13) \quad \delta^{aa'} C_{YM} = \sum_{b,c} f^{abc} f^{a'bc} .$$

Esta última expressão define o auto-valor do operador quadrático de Casimir, C_{YM} , para o grupo ao qual pertencem os campos de Yang-Mills.

Na aproximação líder, usando ainda as relações de comutação (VII-11), obtemos

$$(VIII-14) \quad \exp W(P, t) = \exp \left[-\frac{1}{2} C_{YM} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k \omega_{k\lambda}^*(P, t) \omega_{k\lambda}(P, t) \right] \\ \cdot \exp \left[-F^c \omega_{k\lambda}^*(P, t) C_{k\lambda}^{+c} \right] \exp \left[F^c \omega_{k\lambda} C_{k\lambda}^c \right]$$

Assim, a determinação da contribuição dominante da auto-energia S^L (equação VIII-11) se reduz ao cálculo da integral

$$(VIII-15) \quad J \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k \omega_{k\lambda}^*(P, t) \omega_{k\lambda}(P, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 k}{2K^0} \left(\frac{\vec{P} \cdot \vec{\epsilon}(k, \lambda)}{\vec{P} \cdot \vec{k}} \right)^2$$

Para defini-la usaremos o esquema da regularização dimensional, onde a integração é realizada num espaço de m dimensões⁽¹⁴⁾, fazendo a substituição:

$$(VIII-16) \quad \frac{d^3 k}{2K^0 (2\pi)^3} \longrightarrow \frac{d^{m-1} k}{2|\vec{k}| (2\pi)^{m-1}}$$

onde

$$k = (k^0, \underline{k})$$

é um vetor a m dimensões do gênero luz

$$k^0 = |\underline{k}| = (k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_{m-1}^2)^{1/2}.$$

Antes de discutir este processo, é conveniente explicar o modo como serão introduzidas as coordenadas polares; pois há uma certa liberdade de escolha⁽⁴¹⁾. A sua origem está no fato de termos uma quadri-vetor externo P , outro interno K e ainda um vetor a m dimensões $\underline{k}$, mas que no espaço quadrimensional coincide com o vetor K . Tais fatos, então, implicam a relação $P \cdot K = P^0 K^0$. No nosso caso, a escolha de maiores vantagens computacionais é a que acarreta

$$(VIII-17) \quad P \cdot K = |\underline{k}| (P^0 - P^0 \cos \theta)$$

onde, obviamente, θ é o ângulo entre $\vec{P}$ e $\underline{k}$.

Como estamos interessados apenas na contribuição líder à aproximação definida pelas equações (VII-25), (VII-26) e (VII-27), resulta

$$(VIII-18) \quad P e(k\lambda) \sim \hat{m}_\lambda |\vec{P}| \theta$$

e

$$(VIII-19) \quad k P \sim -|\vec{k}| |\vec{P}| \frac{\theta^2}{2}.$$

Estas relações impõem a igualdade

$$(VIII-20) \quad \sum_{\lambda} \left(\frac{P_{\theta}(k, \lambda)}{P k} \right)^2 \sim \frac{4}{|\vec{k}|^2 \theta^2}.$$

Então a integral J , definida pela equação (VIII-15), no espaço m -dimensional, onde será representada por J_m , tomará a forma simples

$$(VIII-21) \quad J_m \equiv \frac{1}{(2\pi)^{m-1}} \int \frac{d^{m-1} \underline{k}}{2 |\underline{k}|} \frac{4}{\underline{k}^2 \theta^2},$$

a qual está sendo determinada com o auxílio de coordenadas esféricas :

$$(VIII-22) \quad d^{m-1} \underline{k} \equiv |\underline{k}|^{m-2} \sin^{m-3} \theta \sin^{m-4} \theta_2 \dots \sin^2 \theta_{m-4} \\ \cdot \sin \theta_{m-3} d\theta d\theta_2 \dots d\theta_{m-2} d|\underline{k}|.$$

Usando as relações

$$\sin \theta \sim \theta ,$$

$$\int_0^{\pi} \sin^m \theta \, d\theta = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}$$

e tomando apenas a parte finita de J_m , de maneira semelhante à feita na secção III, obtemos o seguinte resultado

$$(VIII-23) \quad J_m = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{(m-4)^2}$$

o qual exhibe a estrutura de polo duplo característico das divergências infravermelhas dominantes.

Assim as mais fortes singularidades da auto-energia exponenciam de maneira simples^(39,40):

$$(VIII-24) \quad S^L = \exp \left[- \frac{g^2}{4\pi^2} C_{YM} \frac{1}{(m-4)^2} \right] .$$

IX - CANCELAMENTO DE DIVERGÊNCIAS

Não devemos nos esquecer de que a motivação do nosso trabalho é, de algum modo, tornar a Cromodinâmica finita no infravermelho. O teorema de Lee-Nauenberg teria oferecido o meio mais cômodo de atingir este objetivo, se as suas hipóteses não fossem tão restritivas. Mostramos em seguida que o cálculo da matriz de Moller, à maneira de Lee-Nauenberg, no caso dominante, embora de aparência simples (apêndice C), se revelou bastante complexo num caso mais realista (apêndice D). Impôs-se então uma nova abordagem, explicitada ao longo das seções VII e VIII. Obtivemos uma aproximação na matriz de evolução V , a qual, esperamos, servirá de base para uma aproximação eikonal mais refinada e sobretudo mais completa. Assim, ver-se-ia se a abordagem de Lee-Nauenberg é a mais correta ou mais simples para o estudo do cancelamento das singularidades infravermelhas. Por ora, devido a dificuldades técnicas, vamos nos restringir ao cancelamento destas singularidades em seções de choque. Mostraremos que tal ocorre em uma classe muito grande de gráficos, infinita, mas não completa, infelizmente.

Vamos nos servir do fato de que as divergências infravermelhas principais de um processo qualquer, representado pelo gráfico

FIGURA 7 - Espalhamento glúons-glúons

no gauge axial aparecem apenas nas suas pernas externas⁽³⁹⁾, para mostrar o cancelamento, na secção de choque, das divergências virtuais e reais, a la Bloch-Nordsieck^(23,24). Neste gauge basta então mostrar que o cancelamento ocorre em cada linha externa. É interessante notar que um cancelamento em ordem mais baixa na linha interna corresponde a uma soma infinita de gráficos interiores representada pela bolha

Usando os resultados do capítulo anterior, vamos escrever as regras de Feynman apenas para os vértices que contribuem para as divergências dominantes^(17,42)

$$(IX-1) \frac{a^\mu}{k} \frac{b^\nu}{k} = \frac{1}{(2\pi)^4} \delta^{ab} \frac{1}{k^2} \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu \Lambda_\nu + k_\nu \Lambda_\mu}{k \Lambda} + \frac{k_\mu k_\nu \Lambda^2}{(k \Lambda)^2} \right]$$

$$\equiv \Delta_{ab}^{\mu\nu}(k)$$

(IX-2) = $g (2\pi)^4 i f^{abc} [(p-q)_\nu \delta_{\lambda\mu} + (q-r)_\lambda \delta_{\mu\nu} + (r-q)_\mu \delta_{\nu\lambda}] \delta(p+q+r)$

(IX-3) = $\frac{e_\mu(P)}{\sqrt{2\omega_P}}$

É conveniente definir as grandezas :

(IX-4) $\equiv M_a^\mu(P)$

onde $M_a^\mu(P)$ representa o processo anteriormente mencionado com uma de suas pernas amputadas;

(IX-5) $\equiv \pi_{ba}^{\mu\nu}(P)$

onde $\pi_{ba}^{\mu\nu}(P)$ é a auto-energia com as pernas amputadas.

Vamos agora calcular a secção de choque em segunda ordem na constante de acoplamento das linhas externas. Seja então

(IX-6) $I_1 \equiv$ $= M_{\alpha'}^{\mu}(P) \Delta_{\alpha'a}^{\mu\nu} \pi_{\alpha a}^{\nu\beta}$

$$\frac{e_{\beta}(P, \beta)}{\sqrt{2\omega_P}} \delta(\Sigma P).$$

Aqui estamos nos ocupando apenas de uma linha externa. Usando a relação⁽⁴⁰⁾

$$(IX-7) \frac{1}{2i} \left(e_{\lambda}(P, \beta) \frac{\pi_{\lambda\lambda'}(P)}{P^2} e_{\lambda'}(P, \beta) \right)_{P^2=0} = - \frac{g^2}{4\pi^2} C_{YM} \frac{1}{(m-4)^2},$$

que está em perfeito acordo com o desenvolvimento em segunda ordem da nossa expressão (VIII-24) da secção anterior, obtemos

$$(IX-8) I_1 = M_{\alpha}^{\mu}(P) e_{\mu}(P, \beta) \left(- \frac{g^2}{4\pi^2} \right) \frac{C_{YM}}{\sqrt{2\omega_P}} \frac{1}{(m-4)^2}.$$

Nesta dedução empregamos a igualdade^(17,42) característica do gauge axial

$$(IX-9) \quad \Delta_{ab}^{\mu\nu}(P) = \delta^{\mu\nu} \frac{1}{P^2} \sum_{\lambda=1,2} e_{\mu}(P\lambda) e_{\nu}(P\lambda) .$$

Finalmente, para a ordem em que nos propomos a calcular a secção de choque necessitamos do termo :

$$(IX-10) \quad I_2 \equiv \text{diagrama} = M_a^{\mu}(P) \frac{e_{\mu}(P\lambda)}{\sqrt{2\omega_P}} \delta(\sum P) .$$

Lembramos que a matriz S para um certo processo é dada por $\delta(\sum P) S_{fe}$; então a secção de choque é dada por⁽⁴³⁾

$$(IX-11) \quad d\tau = \frac{\delta(\sum P)}{(2\pi)^4} |S_{fe}|^2 \frac{d^3 P_f}{(2\pi)^3} .$$

Assim, a secção de choque para o espalhamento glúons glúons, duros, em segunda ordem, em uma de suas linhas ex

ternas, darã

$$(IX-12) \, d\sigma_1^a = - \left(\frac{M_a^\mu(P) e_\mu(P, \lambda)}{\sqrt{2\omega_P}} \right)^2 \frac{\delta(\sum P)}{(2\pi)^4} 2 \frac{C_{YM}}{(n-4)^2} \frac{d^3 P}{(2\pi)^3}.$$

É importante notar que o resultado acima obtido é dependente do índice de simetria interna a .

Para implementar nosso programa de cancelamento de divergências infravermelhas da secção de choque, devemos agora adicionar um glúon mole à linha dura antes considera da^(23,24). Devemos então calcular o bremsstrahlung soft:

(IX-13) $I_3 =$

Empregando as regras de Feynman (IX-1), (IX-2), e (IX-3), teremos

$$(IX-14) \, I_3 = M_b^\mu(P+K) \Delta_{\mu\nu}(P+K) i(2\pi)^4 g f^{a'ba} [(-P-K-P)_{\beta'} \delta_{r\beta} + \\ + (P-K)_\nu \delta_{\beta\beta'} + (K+P+K)_{\beta'} \delta_{\beta'r}] \frac{e_{\beta'}(K, \lambda)}{\sqrt{2\omega_K}} \frac{e_\beta(P, \lambda)}{\sqrt{2\omega_P}} \delta(\sum P).$$

Desenvolvendo o propagador, com o auxílio da equação (IX-7), mais a condição de transversalidade satisfeita pelos vetores de polarização física:

$$k_\mu e_\mu(k\lambda) = 0,$$

resultará

$$\begin{aligned} \text{(IX-15)} \quad I_1 = & \frac{g}{(k+p)^2} \left\{ -2 M_b^\beta (p+k) p_{\beta'} + M_b^\gamma (p+k) (p-k)_\nu \delta_{\beta\beta'} + \right. \\ & + 2 M_b^{\beta'} (p+k) k_\beta + M_p^M (p+k) \cdot \\ & \cdot \left[\frac{2 (k+p)_\mu \Lambda_\beta + k_\beta \Lambda_\mu}{(k+p) \Lambda} p_{\beta'} \right. \\ & - \frac{(k+p)_\mu \Lambda_\nu + (k+p)_\nu \Lambda_\mu}{(k+p) \Lambda} (p-k)_\nu \delta_{\beta\beta'} - \\ & \left. \left. - 2 \frac{[(k+p)_\mu \Lambda_{\beta'} + p_{\beta'} \Lambda^\mu] k_\beta}{(k+p) \Lambda} \right] + M_b^M (p+k) \cdot \right. \\ & \cdot \left[-2 \frac{(k+p)_\mu k_\beta \Lambda^2 p_{\beta'}}{[(k+p) \Lambda]^2} + \right. \\ & + \frac{(k+p)_\mu (k+p)_\nu \Lambda^2 (p-k)_\nu \delta_{\beta\beta'}}{[(k+p) \Lambda]^2} + \\ & \left. \left. + \frac{(k+p)_\mu p_{\beta'} \Lambda^2 k_\beta}{[(k+p) \Lambda]^2} \right] \right\} \frac{a' b a}{\sqrt{4 \omega_k \omega_p}} \frac{e_{\beta'}(k\lambda) e_\beta(p\lambda)}{\delta(\Sigma p)} \end{aligned}$$

Note-se que os três primeiros termos de I_3 são os mesmos do gauge de Feynman.

Lembrando que os cálculos estão sendo feitos na camada de massa:

$$P^2 = k^2 = 0,$$

que no gauge axial vale a relação

$$\Lambda e = 0$$

e, além disso, supusemos k soft

$$(IX-16) \quad |\vec{k}| \ll |\vec{P}|,$$

então, na determinação das divergências infravermelhas principais, podemos fazer a aproximação

$$(IX-17) \quad P + k \sim P$$

(onde não houver divergências em k).

Estas considerações nos permitem escrever I_3 na forma

$$(IX-18) \quad I_3 = \frac{zg}{(k+p)^2} \frac{M_5^{\beta}(P) e_{\beta}(P\lambda)}{\sqrt{2\omega_P}} \frac{P e(k\lambda')}{\sqrt{2\omega_K}} \delta(\sum P).$$

Como estamos calculando as divergências dominantes,

podemos utilizar as relações (VII-18) e (VII-19) da sec
ção anterior para escrever :

$$Pe(\kappa\lambda) \sim \hat{m}_\lambda |\vec{P}| \theta$$

e

$$(\kappa + P)^+ \sim |\vec{\kappa}| |\vec{P}| \theta^+.$$

Supondo, como na Eletrodinâmica^(23,24), que os dete
tores não vejam energias e momenta pequenos, bem como
índices de simetria interna e polarização dos glúons moles,
podemos escrever a secção de choque física na forma :

$$(IX-19) \quad d\sigma_2^{aa'} = \sum_{bb'a'} \left(\frac{d_3 \kappa}{(2\pi)^3} \frac{4 M_b(P) e(P\lambda) M_b(P) e(P\lambda)}{2 \omega_P} f^{a'ba} \right. \\ \left. \cdot g^2 \frac{\delta(\Sigma P)}{(2\pi)^4} \frac{|\vec{P}_0|^2 \theta^2}{2 \omega_\kappa |\vec{\kappa}|^2 |\vec{P}|^2 \theta^4} f^{a'b'a} \frac{d^3 P}{(2\pi)^3} \right).$$

Podemos determinar o valor desta expressão, usando
a regularização dimensional^(14,41) para obter

$$(IX-20) \quad d\sigma_2 = \sum_{bb'a} f^{a'ba} f^{a'b'a} \left(\frac{M_b(P) e(P\lambda)}{\sqrt{2 \omega_P}} \right)^2 \frac{\delta(\Sigma P)}{(2\pi)^4} \\ \frac{g^2}{4\pi^2} \frac{2}{(n-4)^2} \frac{d^3 P}{(2\pi)^3}.$$

Esta secção de choque no bremsstrahlung soft não é
igual à anteriormente obtida das divergências virtuais. Tal

somente ocorrerá se fizermos a soma também nas "cores" da partícula dura, quando poderemos utilizar a relação (VIII-13) do capítulo anterior para obter

$$(IX-21) \quad \sum_a \delta \sigma_1^a + \sum_{a a'} \delta \sigma_1^{a a'} = 0 \quad .$$

APÊNDICE A

SOBRE A RELAÇÃO $\frac{\partial T_i}{\partial \lambda_j} \neq \frac{\partial T_j}{\partial \lambda_i}$.

A notação será explicitada com uma revisão da teoria geral^(a). A lagrangeana mais geral renormalizável possuindo invariância em relação a um grupo de Lie compacto semi-simples é

$$(A-1) \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (D_\mu \phi)_i (D^\mu \phi)_i + \bar{\Psi} \gamma^\mu D_\mu \Psi - \bar{\Psi} m_0 \Psi - P(\phi) - \bar{\Psi} \Gamma_i \Psi \phi_i,$$

onde :

(a) o rotacional covariante de gauge é

$$(A-2) \quad F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_{\nu} - \partial_\nu A_{\mu} - C_{abc} A_{b\mu} A_{c\nu},$$

onde C_{abc} é um conjunto de constantes de estruturas reais totalmente anti-simétricas, proporcionais a uma ou mais constantes de acoplamento de gauge;

(b) a derivada covariante de gauge do campo escalar

$$\phi_i(x) \quad \text{é}$$

$$(A-3) \quad (D_\mu \phi)_i \equiv \partial_\mu \phi_i + e (\theta_a)_{ij} \phi_j A_{a\mu},$$

onde $(\theta_a)_{ij}$ é a matriz que representa o a-ésimo gerador de G no multiplete de campos escalares. A matriz θ_a é proporcional às constantes de acoplamento de gauge e satisfaz às relações :

$$(A-4) \quad (\theta_a)_{ij} = (\theta_a)_{ji}^* = -(\theta_a)_{ji}$$

e

$$(A-5) \quad [\theta_a, \theta_b] = i C_{abc} \theta_c ;$$

(c) a derivada covariante de gauge do campo de spin $1/2 \psi(x)$ é

$$(A-6) \quad (D_\mu \psi)_n = \partial_\mu \psi_n + i (t_a)_{nm} \psi_m A_{a\mu} ,$$

onde $(t_a)_{nm}$ é a matriz que representa o a-ésimo gerador de G no multiplete de spin $1/2$. A matriz t_a é proporcional às constantes de acoplamento de gauge e satisfaz às relações

$$(A-7) \quad t_a^\dagger = t_a .$$

e

$$(A-8) \quad [t_a, t_b] = i C_{abc} t_c .$$

Usamos a métrica $\eta_{\mu\nu}$ cujos elementos não nulos são $-1, -1, -1, +1$ para $\mu = \nu = 1, 2, 3, 0$ e matrizes de Dirac com

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = -2\eta_{\mu\nu},$$

$$\gamma_4 = -i\gamma_0, \quad \gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4,$$

(A-9)

$$\bar{\gamma}^+ = \bar{\gamma}, \quad \gamma_4^+ = \gamma_4, \quad \gamma_5^+ = \gamma_5,$$

$$\bar{\psi} \equiv \psi^+ \gamma_4;$$

(d) a matriz de massa nua m_0 é hermitiana e G invariante no sentido que

$$(A-10) \quad m_0^+ = \gamma_4 m_0 \gamma_4,$$

$$(A-11) \quad [t_a, \gamma_4 m_0] = 0;$$

(e) a função $P(\phi)$ é um polinômio real de 4ª ordem em ϕ e é G -invariante no sentido que

$$(A-12) \quad \frac{\partial P(\phi)}{\partial \phi_i} (\theta_a)_{ij} \phi_j = 0.$$

Em ordem zero o valor esperado no vácuo do campo ϕ_i é a grandeza definida como um extremo de $P(\phi)$:

$$(A-13) \quad \left. \frac{\partial P(\phi)}{\partial \phi_i} \right|_{\phi=\lambda} = 0 .$$

O campo ϕ_i pode ser convenientemente substituído em (A-1) por um campo deslocado ϕ'_i :

$$(A-14) \quad \phi_i = \phi'_i + \lambda_i .$$

Como resultado da quebra de simetria, as partículas de spin 1 passam a apresentar uma matriz de massa⁽¹¹⁾ μ , dada por

$$(A-15) \quad (\mu^2)_{ab} = - (\theta_a \lambda)_c (\theta_b \lambda)_c = \lambda_c (\theta_a \theta_b)_c ,$$

enquanto as matrizes de massa formais M e m dos campos de spin 0 e 1/2 se tornam

$$(A-16) \quad M_{ij}^2 = \left. \frac{\partial^2 P(\phi)}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right|_{\phi=\lambda}$$

e

$$(A-17) \quad m = m_0 + \Gamma_i \lambda_i$$

Vê-se ainda que M^2 tem auto-vetores $\theta_a \lambda$ de auto-valores nulos

$$(A-18) \quad M^2 \theta_a \lambda = 0 .$$

Os campos correspondentes $(\theta_a \lambda)_i \phi_i$ descrevem os bósons de Goldstone desta teoria.

A teoria é, então, quantizada escolhendo-se f_a como função que determina o gauge:

$$(A-19) \quad f_a = \sqrt{\xi} \left[\partial_\mu A_\mu + i \xi^{-1} (\theta_a \lambda)_i (\phi_i - \lambda_i) \right]$$

a qual tem como efeito o acréscimo à lagrangeana (A-1) dos termos^(12,8):

$$(A-20) \quad \mathcal{L}_{FG} = - \frac{1}{2} \xi \left[\partial_\mu A_\mu + i \xi^{-1} (\theta_a \lambda)_i \phi_i \right]^2$$

e

$$(A-21) \quad \mathcal{L}_G = - (\partial_\mu \omega_a^*) C_{abc} \omega_b A_c^\mu - \partial_\mu \omega_a^* \partial^\mu \omega_a - \xi^{-1} \omega_a^* \omega_b (\theta_b \theta_a \lambda)_i \phi_i$$

no último dos quais o símbolo ω representa um fantasma, campo de bósons que satisfaz a relação de anticomutação. As regras de Feynman podem então ser simplesmente lidas da lagrangeana efetiva

$$(A-22) \quad \mathcal{L}_{ef} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{FG} + \mathcal{L}_G$$

O cálculo dos girinos não oferece maiores dificuldades, obtendo-se

$$(A-23) \quad T_i = - i (2\pi)^4 \frac{\partial V}{\partial \lambda_i} + \frac{1}{2} (M^2 \theta_a \theta_b \lambda)_i \int d^4 k \frac{(\xi k^2 + \mu^2)^{-1}_{ab}}{k^2},$$

onde V_1 é uma função já determinada por Coleman-Weinberg no gauge de Landau⁽⁶⁾.

Para ver se o segundo termo do lado direito da equação (A-23) também pode ser escrito como o gradiente de um potencial, resolvemos nos restringir a uma teoria mais simples, abeliana, a Eletrodinâmica de Bósons⁽⁶⁾, descrita pela lagrangeana :

$$(A-24) \quad \mathcal{L}_B = - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_1 - e A_\mu \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_2 + e A_\mu \varphi_2)^2 + \frac{1}{2} \mu_0^2 (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \frac{g}{4!} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2.$$

Nesta teoria, por ser abeliana, as constantes de estrutura são nulas. A massa aparece com o sinal trocado para haver quebra espontânea de simetria em nível clássico. A constante de acoplamento g aqui aparece explicitamente. Temos apenas um gerador do grupo G , representado por θ e dado por

$$(A-25) \quad \theta = e \cdot \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Note-se a interessante propriedade

$$(A-26) \quad \theta^2 = I.$$

A condição de mínimo do polinômio $P(\phi)$,

$$(A-27) \quad P(\phi) = \frac{1}{2} \mu_0^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{g}{4!} (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2,$$

nos dá uma única equação

$$(A-28) \quad \mu_0^2 - \frac{g}{6} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) = 0.$$

A matriz de massa, determinada pela relação (A-16), toma então a forma:

$$(A-29) \quad M = - \frac{g}{3} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_1 \lambda_2 \\ \lambda_1 \lambda_2 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}.$$

O vetor $M \theta \theta \lambda$ pode pois ser explicitado :

$$(A-30) \quad M \theta \theta \lambda = -2\mu_0^2 \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

A matriz de massa descrita pela equação (A-15) nos dará, então, com o auxílio de (A-25) e (A-28),

$$(A-31) \quad (\delta K^2 + M^2)^{-1} = \left(\delta K^2 - \frac{6\mu_0^2}{g} \right)^{-1}.$$

A contribuição dos girinos, equação (A-23), se escreve então como

a qual é obviamente derivada de um potencial.

$$(A-32) \quad T_z = -i(2\pi)^4 \frac{\partial \lambda_z}{\partial k_z} - M_z^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\frac{\partial^2 \lambda_z}{\partial k_z^2} - \frac{g}{M_z^2} \right)^{-1}$$

APÊNDICE BREGRAS DE FEYNMAN DA ELETRODINÂMICA DE BÓSONS NO GAUGE QUADRÁTICO

Seja a lagrangeana de partida :

$$(B-1) \quad \mathcal{L} = - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1 + e A_\mu \phi_2)^2 - \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_2 - e A_\mu \phi_1)^2 \\ - \frac{\lambda}{4!} (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 - \frac{\mu^2}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2) ,$$

a qual é invariante sob a transformação

$$(B-2) \quad \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \longrightarrow e^{\frac{i}{e} \Theta \omega} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \omega ,$$

onde ω é o parâmetro local de gauge e Θ é a matriz dada pela expressão (A-25).

Assim, para uma variação infinitesimal, teremos :

$$(B-3) \quad \begin{aligned} \delta \phi_2 &= \phi_1 \delta \omega , \\ \delta \phi_1 &= -\phi_2 \delta \omega , \\ \delta A_\mu &= \frac{1}{e} \partial_\mu (\delta \omega) . \end{aligned}$$

Segundo Faddeev-Popov⁽¹²⁾, a teoria é quantizada, definindo-se o funcional gerador pela relação (estamos omitindo a corrente externa para abreviar a notação):

$$(B-4) \quad e^{i\omega} = \int \mathcal{D}(\phi_1) \mathcal{D}(\phi_2) \mathcal{D}(A_\mu) e^{iS} \det \left(\frac{\partial F}{\partial \omega} \right) \delta(F),$$

onde S é a ação clássica derivada da expressão (B-1) e

$$(B-5) \quad F(\phi_1, \phi_2, A_\mu) = 0$$

é a equação do gauge.

Escolhamos então o gauge quadrático

$$(B-6) \quad F \equiv \left(\partial_\mu A_\mu - \frac{e}{\xi} \phi_1 \phi_2 \right) e^{-i f(x)},$$

no qual $f(x)$ é uma função qualquer e ξ é um parâmetro arbitrário.

Podemos, então, escrever

$$(B-7) \quad \frac{\delta F}{\delta \omega} = \square + \frac{e^2}{\xi} \phi_2^2 - \frac{e^2}{\xi} \phi_1^2$$

e, finalmente, usando os fantasmas c e $\bar{c}$,

$$(B-8) \quad \det \frac{\delta F}{\delta w} = \int \mathcal{D}(c) \mathcal{D}(\bar{c}) e^{i \int d^4 x \mathcal{L}_{FP}}$$

com

$$(B-9) \quad \mathcal{L}_{FP} = \int d^4 x \bar{c} \left[\square + \frac{e^2}{f} \phi_L^2 - \frac{e^2}{f} \phi_1^2 \right] c.$$

Definindo a função

$$(B-10) \quad G(f) \equiv e^{-\frac{e^2 f^2}{2e^2}},$$

multiplicando a equação (B-4) por (B-10), integrando em f e levando em conta (B-8), resultará:

$$(B-11) \quad e^{iW} \sim \int \mathcal{D}(\phi_1) \mathcal{D}(\phi_2) \mathcal{D}(A_\mu) \mathcal{D}(c) \mathcal{D}(\bar{c}).$$

$$e^{i \int d^4 x (\mathcal{L} + \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_{FP})},$$

isto é, as regras de Feynman podem ser lidas da lagrangeana

efetiva

$$(B-12) \quad \mathcal{L}_{ef} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_{FP}.$$

Uma vez realizado o deslocamento do campo escalar ϕ , equação (III-4) e feitas algumas integrações por partes, a lagrangeana efetiva da interação de bósons e fótons é

$$\begin{aligned}
 (B-13) \quad \mathcal{L}_{ef} = & \frac{1}{2} A_\mu \left[\delta_{\mu\nu} (\partial^2 - e^2 \nu^2) - \partial_\mu \partial_\nu (1 - \xi) \right] A^\nu + \\
 & + \frac{1}{2} \phi_1 \left(\partial^2 - \frac{\mu^2}{2} - \frac{\lambda \nu^2}{2} \right) \phi_1 + \frac{1}{2} \phi_2 \left(\partial^2 - \frac{\mu^2}{2} - \right. \\
 & \left. - \frac{\lambda \nu^2}{3!} - \frac{e^2 \nu^2}{\xi} \right) \phi_2 + \bar{c} \left(\partial^2 - \frac{e^2 \nu^2}{\xi} \right) c - \\
 & - 2e \phi_2 A_\mu \partial_\mu \phi_1 - \frac{e^2}{2} (A_\mu \phi_2)^2 - \frac{e^2}{2} (A_\mu \phi_1)^2 + \\
 & + \left(\frac{\nu \mu^2}{2} - \frac{\lambda}{3!} \nu^4 \right) \phi_1 - \frac{\lambda}{3!} \nu \phi_1^3 - \frac{\lambda}{4!} \phi_1^4 - \\
 & - \left(\frac{\lambda}{2 \cdot 3!} + \frac{e^2}{2 \xi} \right) \phi_1^2 \phi_2^2 - \left(\frac{\lambda}{3!} + \frac{e^2 \nu}{\xi} \right) \phi_1 \phi_2^2 - \\
 & - \frac{\lambda}{4!} \phi_2^4 - 2 \frac{e^2 \nu}{\xi} \bar{c} \phi_1 c - \frac{e^2}{\xi} \bar{c} \phi_1^2 c + \\
 & + \frac{e^2}{\xi} \bar{c} \phi_2^2 c.
 \end{aligned}$$

Como prometido não há propagadores que misturem cam
pos de partículas de spins diferentes.

APÊNDICE CEXPONENCIAÇÃO FORMAL DAS DIVERGÊNCIAS INFRAVERMELHAS DOMINANTES

Vamos mostrar que, se, em cada ordem da série da matriz U , tomarmos apenas a parte mais divergente, a soma da série é uma exponencial.

Suponhamos que a hamiltoniana de interação seja da forma:

$$(C-1) \quad H_I = g H_1 + g^2 H_2.$$

Então a matriz unitária U , que diagonaliza $H = H_0 + H_I$, deverá satisfazer⁽²⁹⁾

$$(C-2) \quad [U, E] = (g H_1 + g^2 H_2 + \Delta) U,$$

onde

$$(C-3) \quad \Delta = H_0 - E$$

é uma matriz diagonal.

Desenvolvendo em série (formalmente):

$$(C-4) \quad \Delta = \sum_{m=1}^{\infty} g^m \Delta_m,$$

$$(C-5) \quad U = \sum_{m=0}^{\infty} g^m U_m$$

e

$$(C-6) \quad T(E_a) = \sum_{m=0}^{\infty} g^m T_m(E_a).$$

Substituindo (C-4) e (C-5) em (C-2), obteremos

$$(C-7) \quad \sum_m g^m [U_m, E] = (g H_1 + g^2 H_2 + \sum_{m=1}^{\infty} g^m \Delta_m) \sum_{\lambda=0}^{\infty} g^{\lambda} U_{\lambda}$$

Desta igualdade resultará para o primeiro termo

$$(C-8) \quad [U_1, E] = g H_1 U_0 + \Delta$$

e para os seguintes

$$(C-9) \quad [U_{\beta}, E] = H_1 U_{\beta-1} + H_2 U_{\beta-2} + \sum_{\lambda=1}^{\beta} \Delta_{\lambda} U_{\beta-\lambda}.$$

Como a matriz E é diagonal

$$(C-10) \quad E_{ij} = \delta_{ij} E_i,$$

teremos

$$(C-11) \quad U_{\lambda j}^{\beta} (E_j - E_{\lambda}) = \sum_i (H_1)_{\lambda i} U_{i j}^{\beta-1} + (H_2)_{\lambda i} U_{i j}^{\beta-2} + \\ + \sum_i \sum_{\lambda=1}^{\beta} (\Delta_{\lambda})_{\lambda i} U_{i j}^{\beta-\lambda}$$

com $\beta \geq 2$.

No caso $\beta = 1$ a relação (C-8) nos dá, tendo em vista (C-10),

$$(C-12) \quad (\Delta_i)_{jj} = - (H_1)_{jj}.$$

Por outro lado, no caso $\beta \geq 2$, se considerarmos o elemento diagonal de (C-11), obteremos

$$(C-13) \quad 0 = \sum_i (H_1)_{\lambda i} U_{i \lambda}^{\beta-1} + (H_2)_{\lambda i} U_{i \lambda}^{\beta-2} + \sum_{\lambda=1}^{\beta} (\Delta_{\lambda})_{\lambda \lambda} U_{\lambda \lambda}^{\beta-\lambda},$$

onde a forma do último termo vem do fato de a matriz Δ_{λ} ser diagonal. Teremos, então,

$$(C-14) \quad (\Delta_{\beta})_{\lambda \lambda} = - \sum_i (H_1)_{\lambda i} U_{i \lambda}^{\beta-1} - (H_2)_{\lambda i} U_{i \lambda}^{\beta-2} - \\ - \sum_{\lambda=1}^{\beta-1} (\Delta_{\lambda})_{\lambda \lambda} U_{\lambda \lambda}^{\beta-\lambda}.$$

Suponhamos agora $\lambda \neq j$, a equação (C-11) dará

$$(C-15) \quad U_{\lambda j}^{\beta} (E_j - E_{\lambda}) = \sum_i (H_1)_{\lambda i} U_{i j}^{\beta-1} + (H_2)_{\lambda i} U_{i j}^{\beta-2} + \sum_{\lambda=1}^{\beta} (\Delta_{\lambda})_{\lambda j} U_{\lambda j}^{\beta-\lambda}$$

Vemos, assim, que o termo de mais alta ordem de Δ , Δ^β , que contribui para a matriz U na ordem β , quando os estados incidente e emergente são distintos, é da forma (C-14).

Suponhamos que para a mais forte divergência valham as relações

$$(C-16) \quad \text{Div} \left[\sum_i (H_1)_{\lambda i} U_{i\beta}^{\beta-1} \right] > \text{Div} \left[\Delta_{\beta\beta}^{\beta-1} \right]$$

e

$$(C-17) \quad \text{Div} \left[\sum_i (H_2)_{\lambda i} U_{i\beta}^{\beta-2} \right] > \text{Div} \left[U_{\beta\beta}^{\beta-1} \right]$$

Neste caso podemos desprezar os Δ no cálculo da divergência dominante e a nossa fórmula de recorrência fica com a forma simples (por razões de comodidade não estamos escrevendo os i, λ):

$$(C-18) \quad U_{\beta\beta}^\beta = \frac{1}{E_\beta - E_\beta} \left\{ \sum_\lambda \left[(H_1)_{\lambda\beta} U_{\lambda\beta}^{\beta-1} + (H_2)_{\lambda\beta} U_{\lambda\beta}^{\beta-2} \right] \right\}.$$

Como

$$(C-19) \quad U_{\beta\beta}^0 = \delta_{\beta\beta},$$

segue-se

$$(C-20) \quad U_{ij}^1 = \frac{1}{E_j - E_i} (H_i)_{ij}.$$

Para escrever o termo geral desta série, precisamos de um novo símbolo, que chamaremos $\sum^{\text{H}}$ e que será definido pelas relações

$$(C-21) \quad \sum^{\text{H}} (H_1)^m (H_2)^p \equiv \sum_{\substack{\text{permutações} \\ \text{de } H_1 \text{ e } H_2}} \sum_{\lambda_1 \dots \lambda_{m+p-1}} \frac{1}{E_j - E_i} \\ \cdot \frac{(H_1)_{i\lambda_1}}{E_j - E_{\lambda_1}} \frac{(H_1)_{\lambda_1\lambda_2}}{E_j - E_{\lambda_2}} \dots \frac{(H_1)_{\lambda_{m-1}\lambda_m}}{E_j - E_{\lambda_m}} \\ \cdot \frac{(H_2)_{\lambda_m\lambda_{m+1}}}{E_j - E_{\lambda_{m+1}}} \dots \frac{(H_2)_{\lambda_{m+p-1}\lambda_p}}{E_j - E_{\lambda_{m+p-1}}}.$$

e

$$(C-22) \quad \sum^{\text{H}} (H_i)^n \equiv \frac{1}{E_j - E_i} \frac{(H_i)_{i\lambda_1} (H_i)_{\lambda_1\lambda_2} \dots (H_i)_{\lambda_{n-1}\lambda_n}}{(E_j - E_{\lambda_1})(E_j - E_{\lambda_2}) \dots (E_j - E_{\lambda_{n-1}})}.$$

A fim de melhor explicitar a notação, tomemos por exemplo:

$$\begin{aligned}
 \text{(C-23)} \quad \sum_{\lambda} (H_1)^2 (H_2) &\equiv \frac{1}{E_d - E_i} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \left[(H_1)_{i, \lambda_1} (H_1)_{\lambda_1, \lambda_2} (H_2)_{\lambda_2, d} \right. \\
 &\quad \left. + (H_1)_{i, \lambda_1} (H_2)_{\lambda_1, \lambda_2} (H_1)_{\lambda_2, d} + \right. \\
 &\quad \left. + (H_2)_{i, \lambda_1} (H_1)_{\lambda_1, \lambda_2} (H_1)_{\lambda_2, d} \right] \frac{1}{(E_d - E_{\lambda_1})(E_d - E_{\lambda_2})}
 \end{aligned}$$

Este operador verifica as seguintes propriedades que se mostrarão muito úteis no decorrer do trabalho:

$$\text{(C-24)} \quad \sum_{\lambda} \frac{(H_1)_{i, \lambda}}{E_d - E_i} \sum_{\lambda'} (H_1)^m = \sum_{\lambda'} (H_1)^{m+1}$$

$$\text{(C-25)} \quad \sum_{\lambda} \frac{(H_1)_{i, \lambda}}{E_d - E_i} \sum_{\lambda'} (H_1)^m (H_2)^p + \sum_{\lambda} \frac{(H_2)_{i, \lambda}}{E_d - E_i} \sum_{\lambda'} (H_1)^{m+1}$$

$$(H_2)^{p-1} = \sum_{\lambda'} (H_1)^{m+1} (H_2)^p$$

e

$$\text{(C-26)} \quad \sum_{\lambda} (H_1)^m (H_2)^p = \sum_{\lambda} (H_2)^p (H_1)^m$$

Vamos agora mostrar que o termo de ordem N é da forma

$$(C-27) \quad U_{ij}^N = \begin{cases} \sum_{\lambda=0}^{N/2} \prod_{k=1}^{\lambda} (H_1)^{N-2\lambda} (H_2)^{\lambda} & \text{se } N \text{ for par} \\ \sum_{\lambda=0}^{(N-1)/2} \prod_{k=1}^{\lambda} (H_1)^{N-2\lambda} (H_2)^{\lambda} & \text{se } N \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

A demonstração é feita por indução matemática, partindo de N par. O caso ímpar é análogo. Suponhamos então (C-27) válida até a ordem N . Usando (C-18), teremos

$$(C-28) \quad U_{ij}^{N+1} = \frac{1}{E_j - E_i} \left\{ \sum_{\lambda} \left[(H_1)_{i\lambda} U_{j\lambda}^N + (H_2)_{i\lambda} U_{j\lambda}^{N+1} \right] \right\}.$$

Por outro lado, fazendo $\lambda = i-1$ na segunda soma, explicitando $\lambda = 0$ na primeira e usando a equação (C-27) virá :

$$(C-29) \quad U_{ij}^{N+1} = \frac{1}{E_j - E_i} \sum_{\lambda} \left\{ \sum_{\lambda=1}^{N/2} \left[(H_1)_{i\lambda} \prod_{k=1}^{\lambda} (H_1)^{N-2\lambda} \right. \right. \\ \left. \left. + (H_2)_{i\lambda} \prod_{k=1}^{\lambda} (H_1)^{N-2\lambda+1} (H_2)^{\lambda-1} \right] + \right.$$

$$+ (H_1)_{ix} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (H_1)^k \right\} .$$

Usando em seguida (C-24) e (C-25) obtemos o resultado desejado.

Para prosseguir, como devemos ser mais explícitos, usaremos o símbolo $\$$, o qual só difere de $\$$ por não realizar as somas em $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, que aparecem em (C-21) e (C-22). Assim $\$ B_1^\nu B_2^\rho$ realiza todas as permutações não triviais do produto $B_1 \dots B_1 B_2 \dots B_2$ e as soma.

A energia sendo definida por

$$(C-30) \quad E_j = (m^2 + j^2)^{1/2}$$

nos dá na aproximação eikonal relações do tipo⁽³⁰⁾

$$(C-31) \quad E_j - E_{k_1 + k_2 + j} \sim - \frac{(k_1 + k_2) j}{(m^2 + j^2)^{1/2}}$$

Se, finalmente, definirmos a mudança de variáveis

$$(C-32) \quad \begin{aligned} \lambda_m &= k_m + j, \\ \lambda_{m-1} &= k_m + k_{m-1} + j, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

e supusermos que as singularidades de H apareçam como funções f_1 e f_2 da diferença de momenta, fato mencionado

na secção VI

$$(C-33) \quad (H_1)_{ik} = (A_1)_{ik} f_1(i-k)$$

e

$$(C-34) \quad (H_2)_{ik} = (A_2)_{ik} f_2(i-k)$$

teremos, por exemplo :

$$(C-35) \quad \sum_{j=0}^{i-k} (H_1)^{2m-2\lambda+1} H_2^\lambda = \frac{[-(m^2+j^2)^{1/2}]^{2m-2\lambda+1}}{E_j - E_i} \{ (A_1)_{ij} f_1(i-j) \cdot \\ \cdot \frac{(A_1)_{jj} f_1(k_1) \dots (A_1)_{jj} f_1(k_{2m-2\lambda})}{j! k_1! \dots j! (k_1 + \dots + k_{2m-2\lambda})!} \cdot \\ \cdot (A_2)_{jj} f_2(k_{2m-2\lambda}) \}.$$

Usando a bem conhecida identidade

$$(C-36) \quad \sum_{\text{permutações}} \frac{1}{a_1 (a_1 + a_2) \dots} = \frac{1}{a_1} \frac{1}{a_2} \dots$$

obtemos

$$(C-37) \quad U = 1 + g \frac{(A_2)_{ij} f_2(i-j)}{E_j - E_i} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^m \left[\frac{j! (g B_1)^{2m-2\lambda} (g^2 B_2)^\lambda}{(2m-\lambda)!} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{j! (g B_1)^{2m-2\lambda+1} (g^2 B_2)^\lambda}{(2m-\lambda+1)!} \right] + g^2 \frac{(A_2)_{ij} f_2(i-j)}{E_j - E_i} \right\}.$$

$$\left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^m \left[\frac{(g B_1)^{2m-2\lambda+1} (g^+ B_2)^{\lambda}}{(2m-\lambda+1)!} + \frac{(g B_1)^{2m-2\lambda} (g^+ B_2)^{\lambda}}{(2m-\lambda)!} \right] \right\}.$$

Reconhecemos aqui a exponencial da soma

$$(C-38) \quad V = 1 + \frac{g(A_i)_{ij} p_1(i-j) + g^+(A_i)_{ij} p_2(i-j)}{E_d - E_i} \exp \left\{ g B_1 + g^+ B_2 \right\}$$

onde

$$(C-39) \quad B_1 = \sum_{j,k} \frac{(A_i)_{ij} p_1(k)}{j^k} (-E_j)$$

e

$$(C-40) \quad B_2 = \sum_{j,k} \frac{(A_i)_{ij} p_2(k)}{j^k} (-E_j).$$

Na nossa dedução algumas expressões são um tanto longas, pois não usamos a comutatividade de certos fatores. Isto se deve ao fato de não esperarmos que em uma teoria mais completa tal comutatividade ocorra de maneira óbvia.

APÊNDICE DMATRIZ DE MOLLER EM ELETRODINÂMICA NA APROXIMAÇÃO EIKONAL

A lagrangeana da interação de elétrons e fótons é dada por⁽³⁴⁾

$$(D-1) \quad \mathcal{L}_0(x) = \bar{\psi}(x) (i \not{\partial} - e_0 \not{A}(x) - m_0) \psi(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x).$$

Nos cálculos subsequentes, escreveremos e e m no lugar de e_0 e m_0 , pois não estaremos interessados em divergências ultravioletas.

A hamiltoniana de interação no gauge de Coulomb será, então, dada por

$$(D-2) \quad H_I = e h + e^2 H,$$

onde

$$(D-3) \quad h = \int d^3x : \bar{\psi}^*(x) \vec{\alpha} \cdot \vec{A} \psi(x) :$$

e

$$(D-4) \quad H = \frac{1}{8\pi} \int d^3x d^3y : \frac{\bar{\psi}^*(x) \psi(x) : : \bar{\psi}^*(y) \psi(y)}{|\vec{x} - \vec{y}|} .$$

Usando as transformadas de Fourier:

$$(D-5) \quad \Psi(x) = \int d^3p \sum_{\lambda} [b(p, \lambda) U_{p, \lambda} + d^*(p, \lambda) V(p, \lambda)],$$

$$(D-6) \quad U_{p, \lambda} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} u(p, \lambda) e^{-ipx},$$

$$(D-7) \quad V_{p, \lambda} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} v(p, \lambda) e^{ipx},$$

$$(D-8) \quad E_p = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2},$$

$$(D-9) \quad \bar{A}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_k}} \sum_{\lambda=1}^2 \bar{E}(k, \lambda) [a(k, \lambda) e^{-ikx} + a^*(k, \lambda) e^{ikx}],$$

$$(D-10) \quad k^0 = \omega_k = |\vec{k}| \quad k^i = 0$$

e

$$(D-11) \quad \frac{e^{\lambda x}}{x} = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int d^3q \frac{e^{-iqx}}{q^2 + \lambda^2}.$$

No que segue serão utilizadas as seguintes convenções:

a) as linhas ou estados externos serão designados por letras maiúsculas;

b) as letras minúsculas serão reservadas a variáveis sobre as quais se integra, permanecendo, em geral, a integração subentendida;

c) a letra K somente será usada para designar o momento do fóton;

d) a letra L denotará o momento do elétron e a letra Q o momento do pósitron.

Os estados emergentes serão designados por índices superiores e os incidentes por índices inferiores:

$$(D-12) \quad \langle K | h | L Q \rangle \equiv h_{LQ}^K$$

Como vamos calcular $U(o, -\infty)$, não precisaremos colocar os exponenciais de energia nos elementos de matriz. Assim, podemos escrever :

$$(D-13) \quad h_{LQ}^K = \frac{\delta(K-L-Q) m^2 v^+(Q) \bar{u}_L \tilde{E} M(L)}{\sqrt{2 \omega_K E_L E_Q} (2\pi)^{3/2}}$$

No que segue, será muito importante a igualdade

$$(D-14) \quad h_{\lambda_1 q_1 \kappa_1}^{\lambda_1 q_1} = \delta(\lambda_1 - \lambda_2) h_{q_2 \kappa_1}^{q_1} + \delta(q_1 - q_2) h_{\lambda_2 \kappa_1}^{\lambda_1}.$$

O termo coulombiano poderá ser melhor estudado com a introdução de um operador auxiliar definido por

$$(D-15) \quad \mathcal{H} = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \int d^3x d^3q : \psi^\dagger(x) \psi(x) : \frac{e^{-iqx} \tilde{a}(q)}{\sqrt{q^2 + \lambda^2}} \sqrt{\frac{1}{2\pi^2}},$$

onde $\tilde{a}$ é um fóton de gauge, que só pode se contrair com outro fóton de gauge, vindo da hamiltoniana contígua do produto

$$(D-16) \quad H = \mathcal{H} \mathcal{H}^\dagger.$$

Deve-se observar o seguinte :

- a) os fótons de gauge não contribuem para a energia;
- b) na representação gráfica, com o tempo na vertical, os fótons de gauge são sempre horizontais;
- c) no que segue, usaremos a letra β para o fóton de gauge;

- d) $\mathcal{H}$ não possui $\sum_{\lambda=1}^2 \vec{\epsilon}(\kappa, \lambda) \vec{a}$ e o denominador

de energia do fóton corresponde à expressão com cut-off :

$$(D-17) \quad E_{KLQ} \equiv \omega_K + \sqrt{L^2 + m^2} + \sqrt{Q^2 + m^2}.$$

A matriz de Møller pode então ser calculada com o auxílio da fórmula de Lee-Nauenberg⁽²⁹⁾:

$$(D-18) \quad U_{ij}^N = \frac{1}{E_j - E_i} h_{ij} U_{j_1}^{N-1} + \frac{1}{E_j - E_i} H_{ij} U_{j_1 j_2}^{N-2}.$$

Estudaremos o caso particular em que

$$(D-19) \quad i \equiv |k\rangle$$

$$j \equiv |LQ\rangle$$

com K fora da camada de massa. O gráfico correspondente é

É fácil ver que, neste processo, só entram os termos de ordem ímpar na constante de acoplamento.

Estaremos interessados apenas na contribuição dominante infravermelha à matriz U . Para ver quais são os

termos relevantes, vamos escrever a matriz completa em 3a.

ordem:

$$(D-20) \quad (E_{LQ} - E_k) \quad U_k^{LQ} = \frac{h_{k,q_1}^{LQ} h_{k_1,q_1}^{LQ}}{(E_{LQ} - E_k)(E_{LQ} - E_{k_1,q_1})} +$$

$$+ \frac{h_{k,q_1}^{LQ} h_{k_1,q_2}^{LQ}}{(E_{LQ} - E_{k_1,q_2})(E_{LQ} - E_{k_1,q_1})} \quad (2)$$

$$+ \frac{h_{k,q_1}^{LQ} h_{k_1,q_2}^{LQ} h_{k_2,q_1}^{LQ}}{(E_{LQ} - E_{k_1,q_1})(E_{LQ} - E_{k_1,q_2})(E_{LQ} - E_{k_2,q_1})} \quad (3)$$

$$+ \frac{h_{k,q_1}^{LQ} h_{k_1,q_2}^{LQ} h_{k_2,q_1}^{LQ} h_{k_3,q_1}^{LQ}}{(E_{LQ} - E_{k_1,q_2})(E_{LQ} - E_{k_2,q_1})(E_{LQ} - E_{k_3,q_1})} +$$

$$+ \dots \frac{h_{k,q_1}^{LQ} h_{k_1,q_2}^{LQ} h_{k_2,q_1}^{LQ} h_{k_3,q_2}^{LQ} h_{k_4,q_1}^{LQ}}{(E_{LQ} - E_{k_1,q_2})(E_{LQ} - E_{k_2,q_1})(E_{LQ} - E_{k_3,q_2})(E_{LQ} - E_{k_4,q_1})} \quad (5)$$

$$+ \frac{h_{k,q_1}^{LQ} h_{k_1,q_1}^{LQ} h_{k_2,q_1}^{LQ}}{(E_{LQ} - E_{k_1,q_1})(E_{LQ} - E_{k_2,q_1})} \quad (6)$$

$$+ \frac{h_{k,q_1}^{LQ} h_{k_1,q_1}^{LQ} h_{k_2,q_2}^{LQ}}{(E_{LQ} - E_{k_1,q_1})(E_{LQ} - E_{k_2,q_2})} \quad (7)$$

$$+ \frac{h_{k,q_1}^{LQ} h_{k_1,q_1}^{LQ} h_{k_2,q_1}^{LQ} h_{k_3,q_1}^{LQ}}{(E_{LQ} - E_{k_1,q_1})(E_{LQ} - E_{k_2,q_1})} \quad (8)$$

$$+ \frac{\mathcal{H}_{\lambda, q, \beta}^{\kappa} \mathcal{H}_{\kappa, \lambda, q}^{\lambda, q, \beta} h_{L, Q}^{\kappa, \lambda, q}}{(E_{L, Q} - E_{\kappa, \lambda, q})} \quad (9)$$

Aparece aqui a utilidade do operador auxiliar $\mathcal{H}$, que permite distinguir os termos

$$\mathcal{H}_{\beta, \lambda}^{\lambda, q} \mathcal{H}_{L, Q}^{\beta} \quad \text{e} \quad \mathcal{H}_{\beta, \lambda, q}^{\lambda, q} \mathcal{H}_{L, Q}^{\beta, \lambda, q}$$

o que seria impossível, se escrevêssemos simplesmente

$$H_{L, Q}^{\lambda, q}$$

Os termos mais divergentes são os que possuem o maior número de denominadores de diferenças de energia que se anulam, quando todos os momentos de fótons internos se anulam. Note-se que esta condição só se verifica quando, a menos de fatores infinitesimais (fótons de baixo momentum), as energias possuem os mesmos momenta. Por exemplo,

$$E_{L, Q} - E_{\kappa, \lambda}$$

não se anula. Mas esta condição não é suficiente pois, no termo de nº 6 da equação (D-20), uma integral em β , nos leva a

$$\delta(\lambda + q - L - Q)$$

e portanto

$$E_{L, Q} - E_{\lambda, q} \neq 0$$

Finalmente, a equação (D-14) nos mostra que o termo nº 9 na equação (D-20) não deve ser considerado pois $\kappa = \kappa$.

Assim a contribuição dominante em 3a. ordem será da da por

$$(D-21) (E_{LQ} - E_K) \tilde{U}_{LQ}^K = \frac{h_{LQ}^K h_{K, \lambda_1 q_1}^{\lambda_1 q_1} h_{LQ}^{K, \lambda_2 q_2}}{(E_{LQ} - E_{K, \lambda_1 q_1})(E_{LQ} - E_{\lambda_2 q_2})} +$$

$$\frac{h_{LQ}^K H_{\lambda_1 q_1}^{\lambda_1 q_1} H_{LQ}^{\lambda_2 q_2}}{E_{LQ} - E_{\lambda_1 q_1}} .$$

Observação: aqui não foram incluídos os Δ , citados no apêndice C e que correspondem à renormalização do ultravioleta, pois esta não altera as divergências infravermelhas⁽³⁵⁾.

Estamos usando o til ($\sim$) para lembrar que tomamos apenas a parte mais divergente.

Já na 5a. ordem dominante e nas ordens dominantes seguintes, o raciocínio anterior não exclui estados intermediários com um número maior de fótons. Teremos, por exemplo:

$$(D-22) (E_{LQ} - E_K) \tilde{U}_{LQ}^K = \frac{h_{LQ}^K h_{\lambda_1 q_1}^{\lambda_1 q_1} h_{\lambda_2 q_2}^{\lambda_2 q_2} h_{\lambda_3 q_3}^{\lambda_3 q_3} h_{LQ}^{K, \lambda_4 q_4}}{(E_{LQ} - E_{\lambda_1 q_1})(E_{LQ} - E_{\lambda_2 q_2, K_1})(E_{LQ} - E_{\lambda_3 q_3})} +$$

$$\frac{1}{(E_{LQ} - E_{\lambda_1 q_1, K_1})} +$$

$$+ \frac{h_{\lambda_1 q_1}^k h_{\lambda_2 q_2}^{q_1} h_{\lambda_3 q_3}^{q_1 k_1} \delta_{\lambda_1 q_1}^{q_1} \delta_{\lambda_2 q_2}^{q_1} \delta_{\lambda_3 q_3}^{q_1}}{(E_{LQ} - E_{\lambda_1 q_1})(E_{LQ} - E_{\lambda_2 q_2 k_1})(E_{LQ} - E_{\lambda_3 q_3})} +$$

$$+ \frac{h_{\lambda_1 q_1}^k \delta_{\lambda_1 q_1}^{q_1} \delta_{\lambda_2 q_2}^{q_1} h_{\lambda_3 q_3}^{q_1 k_1} h_{\lambda_4 q_4}^{q_1} h_{\lambda_5 q_5}^{q_1 k_1}}{(E_{LQ} - E_{\lambda_1 q_1})(E_{LQ} - E_{\lambda_2 q_2})(E_{LQ} - E_{\lambda_3 q_3 k_1})} +$$

$$+ \frac{h_{\lambda_1 q_1}^k h_{\lambda_2 q_2}^{q_1} \delta_{\lambda_3 q_3}^{q_1} \delta_{\lambda_4 q_4}^{q_1} h_{\lambda_5 q_5}^{q_1 k_1}}{(E_{LQ} - E_{\lambda_1 q_1})(E_{LQ} - E_{\lambda_2 q_2})(E_{LQ} - E_{\lambda_3 q_3 k_1})}$$

$$+ \frac{h_{\lambda_1 q_1}^k \delta_{\lambda_2 q_2}^{q_1} \delta_{\lambda_3 q_3}^{q_1} \delta_{\lambda_4 q_4}^{q_1} \delta_{\lambda_5 q_5}^{q_1}}{(E_{LQ} - E_{\lambda_1 q_1})(E_{LQ} - E_{\lambda_2 q_2})} +$$

$$+ \frac{h_{\lambda_1 q_1}^k h_{\lambda_2 q_2}^{q_1} h_{\lambda_3 q_3}^{q_1 k_1} h_{\lambda_4 q_4}^{q_1 k_2} h_{\lambda_5 q_5}^{q_1 k_3} h_{\lambda_6 q_6}^{q_1 k_4}}{(E_{LQ} - E_{\lambda_1 q_1})(E_{LQ} - E_{\lambda_2 q_2 k_1})(E_{LQ} - E_{\lambda_3 q_3 k_2})(E_{LQ} - E_{\lambda_4 q_4 k_3})}$$

onde o último termo já possui estados intermediários com dois fótons. Como a hamiltoniana só tem um operador de criação ou de destruição, aquele se cinde em dois termos:

$$\frac{h_{\lambda_1 q_1}^k h_{\lambda_2 q_2}^{q_1} h_{\lambda_3 q_3}^{q_1} h_{\lambda_4 q_4}^{q_1 k_1} h_{\lambda_5 q_5}^{q_1}}{(E_{LQ} - E_{\lambda_1 q_1})(E_{LQ} - E_{\lambda_2 q_2 k_1})(E_{LQ} - E_{\lambda_3 q_3 k_1})(E_{LQ} - E_{\lambda_4 q_4 k_1})}$$

e

$$\frac{h_{\lambda_1 q_1}^k h_{\lambda_2 q_2}^{q_1} h_{\lambda_3 q_3}^{q_1} h_{\lambda_4 q_4}^{q_1 k_1} h_{\lambda_5 q_5}^{q_1}}{(E_{LQ} - E_{\lambda_1 q_1})(E_{LQ} - E_{\lambda_2 q_2 k_1})(E_{LQ} - E_{\lambda_3 q_3 k_1})(E_{LQ} - E_{\lambda_4 q_4 k_1})}$$

Vemos assim que o efeito da consideração de um núme

ro maior de fótons em estados intermediários é que todos os pares possíveis de linhas fermiônicas superiores que aparecem em h , estarão conectados por um fóton. Embora estejamos exemplificando com termos de 5ª ordem, esta propriedade é geral.

O que segue será muito parecido com o apêndice anterior, com a diferença que o sentido dos índices é agora claro.

Façamos, então, a mudança de variáveis análoga à (C-32):

$$(D-23) \quad \lambda_4 \rightarrow \lambda_4 + L \qquad q_4 \rightarrow q_4 + Q$$

$$\lambda_3 \rightarrow \lambda_4 + \lambda_3 + L, \text{ etc.} \quad q_3 \rightarrow q_4 + q_3 + Q, \text{ etc.}$$

Lembrando que estamos na aproximação onde os fótons carregam pequenos momenta, o que implica

$$(D-24) \quad E_{L,Q} - E_{\lambda,q} \sim - \left(\frac{\lambda_4 L}{L^2} + \frac{q_4 Q}{Q^2} \right)$$

Usando (C-36) e (D-14), obtemos

$$(D-25) \quad (E_{L,Q} - E_{\lambda,q})^4 \hat{U}_{L,Q}^{\kappa} = h_{L,Q}^{\kappa} \left[\frac{2 \times 4}{(-1)^4 4!} \cdot \left[\frac{\epsilon(q_4) \epsilon(\lambda_4) h_{\lambda_4}^{\lambda_4} h_{q_4}^{q_4}}{\left(\frac{\lambda_4 L}{L^2} + \frac{Q q_4}{Q^2} \right) \left(\frac{\lambda_4 L}{L^2} + \frac{Q q_4}{Q^2} \right)} \right]^2 + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3 \times 2}{(-1)^4 3!} \frac{\delta(q_1) \delta(l_1) h_{\frac{1}{2}}^{l_1, \kappa_1} h_{\kappa_1, \frac{1}{2}}^{l_1} \delta l_{\frac{1}{2}}^{l_1, q_1} \delta l_{q_1, \frac{1}{2}}^{l_1} \delta l_{\frac{1}{2}}^{l_1, \beta_1} \delta l_{\beta_1, \frac{1}{2}}^{l_1}}{\left(\frac{L l_1}{L^0} + \frac{Q q_1}{Q^0}\right) \dots \left(\frac{L l_1}{L^0} + \frac{Q q_1}{Q^0}\right)} + \\
& + \frac{1}{(-1)^4 2!} \left[\frac{\delta l_{\frac{1}{2}}^{l_1, q_1} \delta l_{q_1, \frac{1}{2}}^{l_1} \delta l_{\frac{1}{2}}^{l_1, \beta_1} \delta l_{\beta_1, \frac{1}{2}}^{l_1}}{\left(\frac{L l_1}{L^0} + \frac{Q q_1}{Q^0}\right)} \right]^2.
\end{aligned}$$

A sequência agora é clara. A inclusão de todos os estados intermediários com um número qualquer de fótons leva simplesmente à existência de todos os ciclos (permutações circulares de dois elementos) de linhas de férmions que aparecem no produto $h \dots h$. Isto é, dadas duas linhas de férmions sempre existe um termo onde estas linhas aparecem conectadas por um fóton soft. Assim, em ordem $2N + 1$, o elemento de matriz do operador U que só contém h , terá N linhas de fótons e $2N$ índices de férmions. Desta forma o termo geral desta série da matriz U é

$$\begin{aligned}
(D-26) \quad (E_{L, q} - E_{\kappa})^{2N+1} \tilde{U}_{L, q}^{\kappa} &= h_{L, q}^{\kappa} \sum_{j=0}^N z^{N-j} \prod_{i=0}^{N-j-1} \left[z(N-j) - \right. \\
&\quad \left. - (2i+1) \right] \frac{A_{L, q}^{N-j} A_{\kappa}^j}{[z(N-j)! j!]}
\end{aligned}$$

onde

$$(D-27) \quad A_i = \frac{\delta(q_i) \delta(l_i) h_{\frac{1}{2}}^{l_i, \kappa_i} h_{\kappa_i, \frac{1}{2}}^{l_i}}{\left(\frac{L l_i}{L^0} + \frac{Q q_i}{Q^0}\right) \left(\frac{L l_i}{L^0} + \frac{Q q_i}{Q^0}\right)}.$$

$$(D-28) \quad A_z = - \frac{\frac{L_z}{q_i} + \frac{Q_z}{q_i}}{\frac{2L_z}{q_i} + \frac{2Q_z}{q_i}}$$

Empregando a relação

$$(D-29) \quad \frac{(2N)!}{2^N} \frac{1}{N!} [2N - (2i+1)] = \frac{N!}{1}$$

teremos, finalmente,

$$(D-30) \quad Q_k = \frac{e^{h_{LQ}}}{e^{L_Q - E_k}} \exp(e^2 A_1 + e^2 A_2)$$

REFERÊNCIAS

- (1) J. Goldstone, A. Salam, S. Weinberg, Phys. Rev. 127 (1962) 965
G. Jona - Lasinio, Nuovo Cimento 34 (1964) 1790
- (2) K. Symanzik, Comm. Math. Phys. 16 (1970) 48
- (3) S. Coleman, "Secret Symmetry" Erice Summer School 1973 (ed. A. Zichichi), Academic Press, New York, 1975.
- (4) J. Iliopoulos, C. Itsykson and A. Martin, Reviews of Modern Physics 47 n° 1 (1975).
- (5) M. Tuite, Dublin Preprint DIAS - TP - 18 - 14 (1978)
- (6) S. Coleman, E. Weinberg, Phys. Rev. D7 (1973) 1888
- (7) R. Jackiw, Phys. Rev. D9 (1974) 1686
- (8) S. Weinberg, Phys. Rev. D7 (1973) 2887
- (9) K. Fujikawa, B. W. Lee, A. I. Sanda, Phys. Rev. D6 (1972) 2923
Y. P. Yao, Phys. Rev. D7 (1973) 1647
G't Hooft, M. Veltman, Nucl. Phys. B50 (1972) 318
- (10) S. S. Schweber, "An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory", Row, Peterson and Company, 1961
- (11) P. W. Higgs, Phys. Letters 12 (1964) 132; Phys. Rev. Letters 13 (1964) 508; Phys. Rev. 145 (1966) 1156
F. Englert, G. Brout, Phys. Rev. Letters 13 (1964) 321
G. S. Guralnik, C. R. Hagen, T. W. B. Kibble, Phys. Rev. Letters 13 (1964) 585
T. W. B. Kibble, Phys. Rev. 155 (1967) 1554
- (12) L. D. Faddeev, V. N. Popov, Phys. Letters, 25B (1967) 29
- (13) S. Y. Lee, A. M. Sciaccaluga, Nucl. Phys. B96 (435) 1975
- (14) G't Hooft, M. Veltman, Nucl. Phys. B44 (1972) 189

- C. G. Bollini, J. J. Giambiagi, Nuovo Cimento 12B (1972) 20
- C. G. Bollini, J. J. Giambiagi, A. Gonzales Domingues, Nuovo Cimento 31, (1964) 550
- (15) P. S. S. Caldas, H. Fleming, R. Lopez Garcia, Rev. Brasil. Física 7 (1977) 43
- (16) P. S. S. Caldas, H. Fleming, R. Lopez Garcia, Nuovo Cimento 42A (1977) 360
- (17) Diagrammar - G't Hooft, M. Veltman, CERN Report 73/9
- (18) P.S.S. Caldas: Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo (1976)
- (19) C. N. Yang, R. L. Mills, Phys. Rev. 96 (1954) 191
- (20) G. Costa, M. Tonin, Riv. Nuovo Cimento 5 (1975) 29
- (21) G't Hooft, Nucl. Phys. 33B (1971) 173;
35B (1971) 167
- (22) M. Tuite, Ph. D. Thesis (não publicada), University of California, Irvine, (1976); Dublin Preprints DIAS - TP - 18 - 17, DIAS - TP - 78 - 20 (1978)
- (23) F. Bloch, A. Nordsieck, Phys. Rev. 52 (1937) 54
- (24) D. R. Yennie, S. C. Frautschi, H. Suura, Ann. Phys. (NY) 13 (1961) 379
- (25) J. M. Jauch, F. Rohrlich, "The Theory of Photons and Electrons" - Addison Wesley Pub. Co. (1955) ou Springer-Verlag (1976)
- (26) T. Appelquist et al., Phys. Rev. Lett. 36 (1976) 768
- (27) J. Frenkel, R. Meuldermans, I. Mohammad, J. C. Taylor, Phys. Lett. 64B (1976) 211
- (28) J. Frenkel, R. Meuldermans, I. Mohammad, J. C. Taylor, Nucl. Phys. B121 (1977) 58
- (29) T. D. Lee, M. Nauenberg, Phys. Rev. 133 (1964) 133

- (30) H. Fleming, J. Frenkel, São Paulo preprint IFUSP/P 114 (1977)
- (31) R. L. Arnowitt, S. I. Fickler, Phys. Rev. 127 (1962) 1821
- (32) R. N. Mohapatra, Phys. Rev. D4 (1971) 2215
- (33) J. Frenkel, Nuovo Cimento 32A (1976) 313
- (34) J. D. Bjorken, S. D. Drell, "Relativistic Quantum Fields", McGraw Hill Book Company, 1965
- (35) Sou grato ao Prof. J. Frenkel por esta observação.
- (36) P. P. Kulish, L. D. Faddeev, Theoret. and Math. Phys. 4 (1970) 745
- (37) I. Białyński - Birula, Z. Białyńska - Birula, "Quantum Electrodynamics", Pergamon Press (1975)
- (38) Sou grato ao Prof. G. C. Marques por ter me chamado a atenção sobre este ponto e sobre o artigo (36).
- (39) J. Frenkel, J. C. Taylor, Nucl. Phys. B116 (1976) 185
J. Frenkel, Tese de Livre Docência - USP 1977
- (40) J. Frenkel, R. L. Garcia, Phys. Lett. 73 B (1978) 171
- (41) R. Gastmans, R. Meuldermans, Nucl. Phys. B63 (1973) 277
W. J. Marciano, A. Sirlin, Nucl. Phys. B88 (1975) 86
- (42) E. S. Abers, B. W. Lee, Phys. Rep. 9 (1973)
- (43) J. D. Bjorken, S. D. Drell, "Relativistic Quantum Mechanics" McGraw Hill Book Company (1973)
- (44) T. Matsuki - University of Tokyo Preprint, I. N. S. - Report 323, Novembro, 1978