

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

SBI-IFUSP



305M810T1583

QUANTIZAÇÃO DE TEORIAS
COVARIANTES GERAIS

Jorge Felipe Gamboa Rios



[Handwritten signature]
A.H.Z.

[Handwritten signature]
Jm
[Handwritten signature]

Tese de Doutorado
Apresentada no Instituto de
Física da Universidade de São Paulo

Orientador: Victor de Oliveira Rivelles

Junho, 1989

Data de Defesa: 19/09/89

539.725

61929

D

e-1

QUANTIZAÇÃO DE TEORIAS
COVARIANTES GERAIS

Jorge Felipe Gamboa Rios

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Gamboa, Jorge Felipe
Quantização de teorias covariantes gerais. São
Paulo, 1989.

Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo. Ins-
tituto de Física. Departamento de Física Matemática.
Área de Concentração: Física de Partículas Elemen-
tares.

Orientador: Prof. Dr. Victor de Oliveira Rivelles

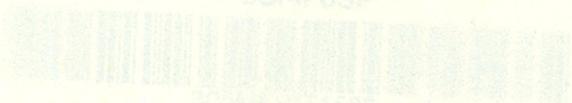
Unitermos: 1.Cordas; 2.P-Branas; 3.Bósons chirais;
4.Simetrias BRST.

USP/IF/SBI - 28/89

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA

SI-MFUSP



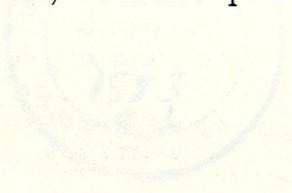
303661071583

QUANTIZAÇÃO DE TEORIAS

COVARIANTES GERAIS

por Felipe Guimboas Rios

A la memoria de mis amigos C. Carrasco y O. Gomez..... y a la de todos los demás, fusilados por la dictadura militar chilena.



Curso de Documentação
Arquivada no Instituto de
Física da Universidade de São Paulo

Orientador: Victor de Oliveira Rivelles

Junho, 1989

A Felipe y Ely.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a Felipe e Ely pela compreensão e apoio.

Agradeço especialmente ao meu orientador e amigo Victor O. Rivelles pela sua ajuda crítica, orientação científica e pela sua amizade. Ele contribuiu decisivamente para a realização deste trabalho.

Agradeço também aos amigos : M. M. Biancolin, F. M. P. Chaves, J. R. Gonçalves, J. J. Lopes e R. Pintanel por tornarem minha estada no Brasil mais fácil.

Nestes anos várias pessoas influíram profundamente na minha formação científica, a eles expresso minha gratidão: J. Alfaro, J. Frenkel, P. Gaete, J.R.Gonçales, M. Gomes, R. Hojman, L. Huerta, C. Ramírez, R. Rosende, M. Ruiz-Altaba, A. J. da Silva, V. O. Rivelles, C. Teitelboim e J. Zanelli.

Agradeço ainda ao meu amigo J. R. Gonçalves pela sua paciente ajuda para a edição desta tese.

ABSTRACT

In this thesis, we study the quantization of several examples of the generally covariant theories using the canonical and the BRST methods. The examples studied are: particles, chiral bosons, null strings and null membranes (and their supersymmetric extensions). We show, for all the examples considered that it is always possible to obtain consistent quantum theories.

We present several results: a) we propose a procedure to quantize chiral bosons based in the square root method. The resulting model has an explicit tensorial structure and it permits to quantize consistently particles with higher spin in two dimensions. b) We propose a new model of null strings with local supersymmetry in the world sheet. The null spinning string is constructed in the Lagrangian and the Hamiltonian formalism. The bosonic and fermionic null string are quantized and we shown that the critical dimensions are 26 and 10 respectively. c) We explore the path integral quantization of a null p-brane. A functional diffusion equation is obtained for the free quantum propagator of these objects. Our method can be considered, probably, a first step in the formulation of the null p-brane field theory. Here, we present also a supersymmetric null p-branes model. d) We present an argument that shows that the Fradkin-Vilkovisky theorem

is incomplet to quantize generally covariant theories. We propose a modification of this theorem and we obtain explicit (and correct) expressions for the propagator of the bosonic relativistic particle, spinning relativistic particle and chiral bosons.

RESUMO

Neste trabalho estuda-se a quantização de vários exemplos de teorias covariantes gerais do ponto de vista canônico e do ponto de vista do método de BRST. Os exemplos considerados são: partículas, bósons quirais, cordas nulas e membranas (e suas extensões supersimétricas). Demonstra-se para os exemplos estudados que é sempre possível obter teorias quânticas consistentes de ambos os pontos de vista.

Apresentamos vários resultados mencionados a seguir: A) Propomos um procedimento para a quantização de bósons quirais baseado no método da raiz quadrada. O modelo possui uma estrutura tensorial de Lorentz explícita e permite quantizar consistentemente partículas com spin superior em duas dimensões. B) Propomos uma nova corda nula com supersimetria local na superfície de evolução. Fazemos as formulações hamiltoniana e lagrangiana desta corda. Estes modelos de cordas são quantizados e demonstramos que as cordas nulas têm dimensões críticas 26 e 10 para os casos bosônicos e fermiônicos respectivamente. C) Propomos um modelo de p-branas nulas e as quantizamos via integral funcional. Obtemos uma expressão formal para o propagador destes objetos. O método proposto aqui poderia ser considerado como um ponto de partida para uma teoria de campos de p-branas nulas. Também propomos aqui um modelo de p-

branas nulas supersimétricas e fazemos a formulação hamiltoniana deste modelo. D) Apresentamos um argumento que demonstra que o teorema de Fradkin-Vilkovisky é incompleto para quantizar teorias covariantes gerais. Propomos uma modificação deste teorema e obtemos expressões explícitas (e corretas) para os propagadores de partículas relativísticas (bosônicas e supersimétricas) e bósons quirais.

Índice

Capítulo I: Quantização Canônica de Bósons Quirais Supersimétricos	4
1. Teoria Clássica	6
2. Quantização Canônica	11
Capítulo II : Cordas Nulas Supersimétricas	15
3. Álgebra de Vínculos da Corda Nula Supersimétrica	16
4. Formulação Lagrangiana da Corda Nula Supersimétrica	23
Capítulo III: P-branas Nulas Bosônicas e Supersimétricas	28
5. Quantização Via Integral Funcional	30
6. Um Modelo de P-branas Nulas Supersimétricas	38
Capítulo IV: Quantização BRST e Teorias Covariantes Gerais	41
7. Introdução	42
8. O Formalismo de BFV	44

9. Quantização BRST da Partícula Relativística Supersimétrica	51
10. Quantização BRST de Bósons Quirais Supersimétricos	56
11. Quantização BRST Operatorial de Cordas Nulas Bosônicas e Supersimétricas	59
Capítulo V: Conclusões	65
Apêndice A: Sistemas Hamiltonianos com Vínculos e Invariância de Gauge	67
Apêndice B: A Corda Supersimétrica com Tensão	69
Apêndice C: Regularização da Função ζ e Cálculo de $\det(-\partial_\tau^2)$	71
Referências	73.

INTRODUÇÃO

O princípio da invariância de gauge tem sido de grande importância na Física Teórica atual. No passado o uso da invariância de gauge para a construção de teorias físicas permitiu resolver importantes problemas em Teoria Quântica de Campos e Física de Partículas [1].

Do ponto de vista hamiltoniano, uma teoria invariante de gauge é aquela que possui vínculos de primeira classe. Os vínculos de primeira classe são os geradores desta simetria e têm um papel crucial na quantização desta classe de teorias [2].

As teorias de Yang-Mills e de cordas são exemplos de teorias de gauge. Entretanto, existe entre ambas uma importante diferença (ver apêndice A): A teoria de cordas (como qualquer outra teoria invariante por reparametrizações) é uma teoria covariante geral e a simetria de gauge não é interna, diferentemente de teorias de gauge do tipo Yang-Mills em que a simetria de gauge é interna [3].

Mais precisamente, isto significa que se temos um princípio variacional para uma teoria covariante geral, a invariância de gauge da ação fica completamente assegurada somente se os parâmetros de gauge nos extremos se anulam. Isso não ocorre no caso de teorias com simetrias internas, onde os parâmetros de gauge não têm nenhuma restrição. Esta distinção entre teorias com simetrias não internas e internas tem consequências severas no momento de se fazer a quantização. Enquanto no segundo caso a quantização é direta [4] , no primeiro caso há muitas sutilezas e dificuldades a serem consideradas , inclusive a nível clássico.

A quantização canônica de teorias de gauge não internas, num contexto particular, é quase tão antiga quanto a teoria quântica. Com efeito, numa linguagem diferente, foi considerada pela primeira vez por Rosenfeld em 1930. Ele usou idéias primitivas de teoria de campos e Mecânica Quântica numa tentativa de descrever quanticamente o campo gravitacional [5].

Num contexto mais moderno, de Witt e independentemente Wheeler e colaboradores [6] elaboraram uma série de artigos que culminaram, em 1967, com o agora conhecido programa de quantização canônica da gravidade [7].

Este programa permitiu desenvolver modelos de minisuperespaço [8], novos enfoques para a gravidade quântica [9], e, ultimamente, também foi útil na elaboração de novos argumentos que justificariam o por que a constante cosmológica poderia ser zero [10, 11].

No entanto, num contexto geral, a quantização canônica não respondeu a todas as perguntas que se fez: problemas associados ao ordenamento de operadores, regularização, renormalização, etc., ainda não têm uma solução definitiva. Em particular, no caso da corda, não existe nenhum argumento baseado no método da quantização canônica à la Wheeler-De Witt que permita derivar os resultados obtidos por outros métodos.

Uma alternativa a este programa é o formalismo de Batalin, Fradkin e Vilkovisky (BFV), baseado numa generalização da simetria de Becchi, Rouet, Stora e Tyutin (BRST) [12], (originalmente descoberta para o caso específico de teorias de Yang-Mills) e da integral funcional [13].

A idéia básica do formalismo de BFV consiste em substituir a simetria de gauge local original, por outra simetria global, conhecida agora como simetria BRST.

No formalismo de BFV há novas perspectivas conceituais. Por exemplo, a construção de BFV garante a unitariedade e consistência quântica (Isto foi provado em geral na referência [3]). Do ponto de vista de cálculo, o formalismo culmina com uma expressão para a matriz de espalhamento (teorema de Fradkin-Vilkovisky) a qual, em princípio, permite calcular a matriz S para qualquer teoria.

Nesta tese, confrontaremos estes dois métodos de quantização para o caso de vários exemplos de teorias covariantes gerais. São estes: a partícula relativística, a partícula supersimétrica, bosons quirais supersimétricos, cordas nulas e membranas nulas. Mostraremos que cada método tem méritos e dificuldades e demonstraremos, para os exemplos mencionados acima, que em ambos os casos é possível quantizar consistentemente esta classe de teorias.

No primeiro capítulo deste trabalho, estendemos o método de quantização proposto na referência [24] para o caso de bosons quirais supersimétricos usando o método da raiz quadrada. Demonstraremos que esta extensão permite quantizar consistentemente férmions de spin superior em duas dimensões. Demonstramos também que, ao contrário do que usualmente se pensava, o método da raiz quadrada nem sempre resulta em uma teoria fermiônica [14]. No capítulo II, usando métodos hamiltonianos, for-

mulamos uma teoria de cordas nulas com supersimetria local na superfície de evolução, a qual é a extensão natural da corda nula de Schild [16]. Apresentamos aqui também a formulação lagrangiana desta corda, a qual permite rederivar sistematicamente os vínculos (usando o método de Dirac) [17, 18].

No capítulo III, usando métodos funcionais, quantizamos uma p-brana bosônica (i.e., um objeto extenso de p dimensões espaciais), e encontramos uma expressão explícita para o propagador, a qual satisfaz uma equação de difusão funcional [40]. Esta é a generalização de um resultado encontrado previamente por Eguchi há vários anos atrás [39].

No capítulo IV, consideramos a quantização BFV das teorias anteriores; damos aqui um argumento que prova que, para o caso de teorias covariantes gerais, as condições de contorno usuais não fixam completamente uma trajetória no espaço de fase e, em consequência, é necessário impor condições adicionais. Isto traz como consequência uma modificação do teorema de Fradkin-Vilkovisky.

Tendo isso em conta, obtemos expressões explícitas para os propagadores da partícula relativística, da partícula supersimétrica, de bósons quirais supersimétricos. Neste capítulo também fazemos a quantização BRST das cordas nulas bosônica e supersimétrica e demonstramos que para esta classe de cordas as dimensões críticas são 26 e 10 respectivamente [17, 18].

Finalmente, o capítulo V contém as conclusões. Anexam-se três apêndices para fixar a notação: um que contém a definição de simetrias de gauge internas e não-internas, outro sobre cordas supersimétricas com tensão, e um terceiro sobre cálculo de determinantes usando regularização da função- ζ .

*

Capítulo I

Quantização Canônica de Bósons Quirais Supersimétricos

Capítulo I

Quantização Canônica de Bósons Quirais Supersimétricos

Os bósons quirais são os constituintes básicos da corda heterótica [20]. Fisicamente, representam os modos esquerdos e direitos da corda, e quando são fermionizados e combinados adequadamente dão lugar a um tipo de corda alternativo, que é conhecida como corda heterótica. Numa linguagem mais técnica, os modos esquerdos e direitos da corda estão desacoplados, e cada um deles é chamado um boson quiral ou um campo autodual.

A quantização da corda heterótica apresenta várias dificuldades e a origem do problema está no fato de que atualmente não existe um procedimento satisfatório de quantização de bósons quirais.

Várias tentativas engenhosas de quantização foram propostos na literatura para quantizar bósons quirais [21]. Das várias proposições feitas, a de Florianini e Jackiw [22] parece ser a mais promissora. A idéia deles, foi substituir o lagrangiano local de Siegel [23] por outro não local, e que tem a virtude de ser equivalente (após a bosonização) a uma teoria de férmions de Weyl.

Usando a estratégia de Florianini e Jackiw, os bósons quirais podem então ser interpretados como excitações solitônicas de tais férmions.

Um ponto de vista diferente na quantização de bósons quirais (e aparentemente mais simples) foi proposto na referência [24]. A idéia básica, é considerar o problema do ponto de vista de partículas e não de campos. Neste método, supõe-se uma partícula movendo-se numa direção (digamos à esquerda) e se constrói, usando unicamente argumentos de consistência, o correspondente vínculo hamiltoniano. A quantização canônica desta partícula quiral é direta: o cálculo do propagador, em analogia com a partícula relativística ordinária, é precisamente o propagador da correspondente teoria de campos de bósons quirais.

Neste capítulo, usaremos esta idéia para construir uma teoria de partículas de bósons quirais supersimétricos. Mostraremos explicitamente, como esta teoria pode conter bósons quirais de spin superior, e como a covariância geral é manifesta.

1- Bósons Quirais Supersimétricos: Teoria Clássica

Começaremos esta seção fazendo uma breve revisão do modelo de partículas quirais bosônicas; para uma visão mais completa, o leitor pode consultar a referência [24].

Consideremos uma partícula relativística sem massa, movendo-se à esquerda em um espaço-tempo bidimensional. Em tal caso, o momento e a energia são iguais ($P_0 = P_1$), e com este dado, devemos construir uma ação invariante por reparametrizações para esta partícula quiral.

A invariância por reparametrizações diz que o hamiltoniano canônico $H_0 = P\dot{X} - L = 0$ e, conseqüentemente, a ação deve ser [24]

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [P^\mu \dot{X}_\mu + N\mathcal{H}] \quad (1.1)$$

onde N é um multiplicador de Lagrange, e \mathcal{H} é um vínculo de primeira classe, o qual deve ser construído tendo em conta que a partícula é quiral.

Como está demonstrado na referência [24], a única possibilidade, fisicamente razoável, para este vínculo é que \mathcal{H} seja igual a

$$\mathcal{H} = (P_0 - P_1)P_1^\gamma \quad (1.2)$$

onde γ é um parâmetro real diferente de zero e que está relacionado ao spin da partícula por:

$$\gamma = 1 - \frac{\rho^2}{4\pi} \quad (1.3)$$

sendo $\rho^2 = 4\pi s$ e s é o spin [25].

Usando (1.1) e (1.2), vemos facilmente que as equações de movimento são:

$$\begin{aligned} \dot{x}^0 + \lambda p^1 &= 0 \\ \lambda(p^0 - p^1) - \dot{x}^1 - \lambda p^1 &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

as quais, quando são usadas em (1.1), permitem escrever o seguinte lagrangiano:

$$L = \frac{1}{\lambda} \dot{x}^0 (\dot{x}^1 - \dot{x}^0) \quad (1.5)$$

Pode-se comprovar usando

$$\delta x^0 = \xi \dot{x}^0, \delta x^1 = \xi \dot{x}^1, \delta \lambda = (\dot{\xi} \lambda) \quad (1.6)$$

que o lagrangiano (1.5) é invariante pelas transformações (1.6), e, conseqüentemente, estas transformações são a versão lagrangiana da invariância por reparametrizações.

Os autores da referência [24] demonstram que os propagadores que se podem calcular nesta teoria são os mesmos que os obtidos por Florianini e Jackiw [22], para o caso em que os campos têm dimensão 0 e 1 e γ assume os valores 1 e -1 respectivamente.

Pode-se argumentar que para γ 's gerais, a causalidade restringe os valores de γ a inteiros menores que 1. Nesta seção, consideraremos os casos em que $\gamma = -1, -2, -3, \dots$. Uma discussão mais rigorosa sobre isto pode ser encontrada na referência [25].

A quantização canônica deste modelo de bósons quirais é direta, com efeito, seguindo Dirac [2], substituímos o vínculo (1.2) por

$$\hat{\mathcal{H}}\psi = 0 \quad (1.7)$$

onde ψ é a função de onda. A equação (1.7) pode também ser obtida da ação

$$S = \int d^2x \psi \hat{\mathcal{H}}\psi \quad (1.8)$$

a qual também pode ser vista como a versão em segunda quantização de (1.7), se a função de onda ψ é interpretada como um campo.

Neste caso, é fácil verificar que o campo ψ tem dimensão $\frac{1}{2}(1 - \gamma)$. É neste ponto, que o modelo de Gomes-Rivelles-da Silva conecta-se com a formulação padrão (ao menos com a de Florianini-Jackiw-Siegel) de bósons quirais. O procedimento esboçado acima, no entanto, tem alguns inconvenientes. Nele, o campo ψ tem só uma componente, e a estrutura tensorial deste campo permanece obscura. Este não é um problema apenas deste modelo particular, mas parece estar sempre presente na quantização canônica à Dirac.

O modelo que apresentamos em seguida, elimina o problema da estrutura tensorial de ψ . Em particular, demonstraremos que neste modelo a estrutura tensorial de Lorentz é manifesta. A construção está baseada no método da raiz quadrada, o qual foi proposto por Teitelboim há vários anos atrás, como uma maneira de derivar os vínculos de supergravidade a partir da gravidade de Einstein [15].

A idéia do método da raiz quadrada consiste em supor que existe uma teoria bosônica com vínculos de primeira classe \mathcal{H}_a ($a = 1, 2, \dots, m$) (não

necessariamente quadráticos nos momentos), e cuja álgebra sob colchetes de Poisson é:

$$[\mathcal{H}_a, \mathcal{H}_b] = K_{ab}^c \mathcal{H}_c \quad (1.9)$$

onde os K_{ab}^c são coeficientes de estrutura que, em princípio, podem depender dos campos.

Então, introduzimos variáveis fermiônicas e definimos os vínculos fermiônicos (de primeira classe) \mathcal{S}_a com a condição que o novo conjunto de vínculos $\mathcal{H}_a, \mathcal{S}_a$ satisfaçam uma álgebra fechada, isto é se:

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathcal{H}}_a, \tilde{\mathcal{H}}_b] &= K_{ab}^c \tilde{\mathcal{H}}_c \\ [\tilde{\mathcal{H}}_a, \mathcal{S}_b] &= U_{ab}^c \mathcal{S}_c \\ \{\mathcal{S}_a, \mathcal{S}_b\} &= V_{ab}^c \tilde{\mathcal{H}}_c \end{aligned} \quad (1.10)$$

então dizemos que a teoria fermiônica é a raiz quadrada da teoria bosônica. Aqui, os $\tilde{\mathcal{H}}$ não são necessariamente os mesmos vínculos da teoria bosônica de partida, mas, reduzem-se aos \mathcal{H}_a quando os graus de liberdade fermiônicos são eliminados.

Em geral, a construção dos vínculos que satisfaçam à superálgebra (1.10) pode ser não trivial, no entanto, pode-se dar argumentos gerais nos quais (ao menos para teorias covariantes gerais) a existência de uma teoria supersimétrica dada uma teoria bosônica, esteja sempre assegurada.[26].

Seguindo os argumentos anteriores, nos propomos a construir a teoria supersimétrica associada a (1.2), i.e., construiremos um gerador fermiônico \mathcal{S} tal que o conjunto de vínculos $(\mathcal{H}, \mathcal{S})$ satisfaça uma superálgebra do tipo (1.10).

Começamos considerando (1.2) e tentemos encontrar um vínculo fermiônico \mathcal{S} , tal que satisfaça à equação

$$\{\mathcal{S}, \mathcal{S}\} = \alpha \mathcal{H} \quad (1.11)$$

onde α é algum número real diferente de 0.

Se introduzimos as variáveis de Grassman θ_μ ($\mu = 0, 1$) as quais satisfazem

$$\{\theta_\mu, \theta_\nu\} = 2i\eta_{\mu\nu} \quad (1.12)$$

a partir de (1.2) encontramos que o gerador fermiônico \mathcal{S} mais geral é:

$$\mathcal{S} = -\frac{i}{4}\theta_0\left(1 - 2\alpha - \frac{P_0}{P_1}\right)P_1^{\frac{\gamma+1}{2}} - \frac{i}{4}\theta_1\left(1 + 2\alpha - \frac{P_0}{P_1}\right)P_1^{\frac{\gamma+1}{2}}, \quad \gamma = -1, -3, \dots \quad (1.13)$$

Onde γ é um inteiro negativo ímpar.

O passo seguinte, é verificar que o resto da superálgebra é fechada. Um cálculo simples mostra que:

$$[\mathcal{H}, \mathcal{S}] = 0$$

$$[\mathcal{H}, \mathcal{H}] = 0$$

o que assegura que \mathcal{H} e \mathcal{S} podem ser impostos consistentemente como vínculos de primeira classe.

Em (1.13), os sinais relativos de α e θ não estão fixos, isto é uma consequência da simetria discreta $\theta \rightarrow -\theta$, presente em (1.12), e da simetria rígida contínua $\theta_+ \rightarrow \tilde{\alpha}\theta_+$, $\theta_- \rightarrow \tilde{\alpha}^{-1}\theta_-$ com $\theta_{\pm} = \theta_0 \pm \theta_1$. Tal simetria é manifesta quando (1.12) se escreve em componentes cone de luz. No que segue, tomaremos o mesmo sinal para a simetria discreta, e manteremos α fixo e diferente de zero.

A ação para este modelo é:

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [P^\mu \dot{X}_\mu + \frac{i}{4}\theta^\mu \dot{\theta}_\mu + NT + \lambda\mathcal{S}] - \frac{i}{4}\theta^\mu(\tau_2)\theta_\mu(\tau_1) \quad (1.14)$$

onde N e λ são os multiplicadores de Lagrange para os vínculos \mathcal{H} e \mathcal{S} respectivamente, e τ é o tempo próprio desta partícula quiral supersimétrica.

O termo de superfície em (1.14) é necessário para termos somente uma condição de contorno nas variáveis θ , digamos $\theta_\mu(\tau_1) + \theta_\mu(\tau_2) = \gamma_\mu$, enquanto para as variáveis bosônicas tem-se $X_\mu(\tau_1) = X_\mu(1)$, $X_\mu(\tau_2) = X_\mu(2)$.

Eliminando P_μ nas equações de movimento, encontramos:

$$P_0 = \frac{1}{\gamma} \frac{\dot{X}_1}{N} \left(-\frac{\dot{X}_0}{N} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} + \frac{1+\gamma}{\gamma} \left(-\frac{\dot{X}_0}{N} \right)^{\frac{1}{\gamma}} + \lambda(\theta_0 + \theta_1) \left[\frac{1-\gamma}{8\gamma^2} \frac{\dot{X}_1}{N^2} \left(-\frac{\dot{X}_0}{N} \right)^{\frac{1-3\gamma}{2\gamma}} + \frac{1+\gamma}{8\gamma^2} \frac{1}{N} \left(-\frac{\dot{X}_0}{N} \right)^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \alpha \frac{1+\gamma}{4\gamma} \lambda(\theta_0 - \theta_1) \frac{1}{N} \left(-\frac{\dot{X}_0}{N} \right)^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} \\
P_1 = & \left(-\frac{\dot{X}_0}{N} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \left[1 + \frac{1}{4\gamma} \lambda(\theta_0 + \theta_1) \frac{1}{N} \left(-\frac{\dot{X}_0}{N} \right)^{-\frac{1+\gamma}{2\gamma}} \right] \quad (1.15)
\end{aligned}$$

Substituindo (1.15) em (1.14) a ação é:

$$\begin{aligned}
S = & \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\left(-\frac{\dot{X}_0}{N} \right)^{\frac{1}{\gamma}} (\dot{X}_0 - \dot{X}_1) + \frac{i}{4} \theta^\mu \dot{\theta}_\mu \right. \\
& + \frac{1}{4\gamma} \lambda(\theta_0 + \theta_1) \frac{1}{N} (\dot{X}_0 - \dot{X}_1) \left(-\frac{\dot{X}_0}{N} \right)^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} - \\
& \left. - \frac{1}{2} \alpha \lambda(\theta_0 - \theta_1) \left(-\frac{\dot{X}_0}{N} \right)^{\frac{1+\gamma}{2\gamma}} \right] + b.t. \quad (1.16)
\end{aligned}$$

onde os termos de contorno ($t.v$) são os mesmos que em (1.14).

Verificamos diretamente, que sob reparametrizações

$$\begin{aligned}
\delta X_\mu & = \epsilon \dot{X}_\mu, & \delta N & = (\epsilon N) \\
\delta \theta_\mu & = \epsilon \dot{\theta}_\mu, & \delta \lambda & = (\epsilon \lambda) \quad (1.17)
\end{aligned}$$

com $\epsilon = \epsilon(\tau)$, o lagrangiano L se transforma como:

$$\delta L = (\epsilon L) \quad (1.18)$$

e para que este seja invariante, é necessário que $\epsilon(\tau_1) = 0 = \epsilon(\tau_2)$ que é um resultado bem conhecido em teorias com simetrias não internas (ver apêndice A).

Usando (1.12) e (1.13), encontramos que as transformações de supersimetrias locais são:

$$\begin{aligned}
\delta X_0 & = \frac{1}{4} \xi(\theta_0 + \theta_1) P_1^{\frac{\gamma-1}{2}} \\
\delta X_1 & = \frac{1}{8} \xi(\theta_0 + \theta_1) \left[\gamma + 1 - (\gamma - 1) \frac{P_0}{P_1} \right] P_1^{\frac{\gamma-1}{2}} - \alpha \frac{1+\gamma}{4} \xi(\theta_0 - \theta_1) P_1^{\frac{\gamma-1}{2}} \\
\delta \theta_0 & = \frac{1}{2} \xi \left(1 - 2\alpha - \frac{P_0}{P_1} \right) P_1^{\frac{\gamma+1}{2}} \\
\delta \theta_1 & = -\frac{1}{2} \xi \left(1 + 2\alpha - \frac{P_0}{P_1} \right) P_1^{\frac{\gamma+1}{2}} \quad (1.19)
\end{aligned}$$

onde $\xi(\tau)$ é o parâmetro de Grassman de supersimetria local.

A versão lagrangiana de (1.19) não tem a forma simples da partícula supersimétrica usual [27] (a qual é uma supergravidade unidimensional acoplada a campos escalares).

Substituindo (1.15) em (1.19), encontramos que a variação do lagrangiano é:

$$\delta L = \frac{d}{d\tau} \left[-\frac{1}{8} \xi(\theta_0 + \theta_1) (\dot{X}_0 - \dot{X}_1) \frac{1}{N} \left(-\frac{\dot{X}_0}{N} \right)^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} + \alpha \frac{\gamma}{4} \xi(\theta_0 - \theta_1) \left(-\frac{\dot{X}_0}{N} \right)^{\frac{1+\gamma}{2\gamma}} \right] \quad (1.20)$$

e os termos de contorno contribuem com

$$\begin{aligned} -\frac{i}{4} \delta[\theta^\mu(2)\theta_\mu(1)] &= -\frac{i}{8} \xi(2) \left\{ \left[\frac{1}{\gamma} [\dot{X}_0(2) - \dot{X}_1(2)] \frac{1}{N(2)} \left(-\frac{\dot{X}_0(2)}{N(2)} \right)^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \alpha \frac{1+\gamma}{4\gamma} \lambda(2) [\theta_0(2) - \theta_1(2)] \frac{1}{N(2)} \right] [\theta_0(1) + \theta_1(1)] - \right. \\ &\quad \left. - 2\alpha \left[\left(-\frac{\dot{X}_0(2)}{N(2)} \right)^{\frac{1+\gamma}{2\gamma}} + \frac{1+\gamma}{8\gamma} \lambda(2) [\theta_0(2) + \theta_1(2)] \frac{1}{N(2)} \right] [\theta_0(1) - \theta_1(1)] \right\} - \\ &\quad - (\tau_1 \leftrightarrow \tau_2) \end{aligned} \quad (1.21)$$

Escrevendo explicitamente o último termo, encontramos que a ação é invariante somente se $\xi(\tau_2) = 0 = \xi(\tau_1)$. Isto também ocorre para a partícula relativística supersimétrica [27]. A condição que os parâmetros ϵ e ξ se anulem nos extremos, nos diz que a condição de gauge apropriada é:

$$\dot{N} = 0, \dot{\lambda} = 0 \quad (1.22)$$

a qual é chamada gauge tempo próprio, e foi discutida extensivamente na referência [29]. O passo seguinte é quantizar este modelo.

2. Bósons Quirais Supersimétricos: Quantização Canônica

Para fazer a quantização canônica, seguimos a regra usual. Substituímos as variáveis dinâmicas por operadores e os vínculos por operadores

que atuam sobre a função de onda ψ . Neste caso, a regra é:

$$X_\mu \longrightarrow \hat{X}_\mu, P_\mu \longrightarrow \hat{P}_\mu \quad (2.1)$$

$$\theta_\mu \longrightarrow \gamma_\mu \quad (2.2)$$

$$\mathcal{H} \longrightarrow \hat{\mathcal{H}}\psi = 0, \mathcal{S} \longrightarrow \hat{\mathcal{S}}\psi = 0 \quad (2.3)$$

Em (2.3), as γ_μ são as matrizes de Dirac em duas dimensões e que obedecem à relação de anticomutação

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu} \quad (2.4)$$

Se escolhermos a representação

$$\gamma_0 = \sigma_1, \gamma_1 = i\sigma_2, \gamma_5 = \sigma_1\sigma_2$$

então a condição quântica $\hat{\mathcal{S}}\psi = 0$ é:

$$\begin{pmatrix} 0 & P_1^{\frac{\gamma+1}{2}} - P_0 P_1^{\frac{\gamma-1}{2}} \\ -2\alpha P_1^{\frac{\gamma+1}{2}} & 0 \end{pmatrix} \psi = 0 \quad (2.5)$$

Seguindo o mesmo argumento que em [24], podemos dizer que a equação (2.5) provém da ação

$$S = \int d^2x \bar{\psi} \mathcal{S} \psi \quad (2.6)$$

a qual é também a versão em segunda quantização se interpretamos a função de onda ψ como um campo. De acordo com esta interpretação, segue-se que a dimensão de ψ é $n = 1 - \frac{1}{4}(\gamma + 1)$.

Como γ é um inteiro ímpar negativo, então podemos escrever $\gamma = 1 - 2n$ ($n = 1, 2, \dots$).

Assim, temos o seguinte resultado notável: quando n é ímpar, o campo ψ é bosônico e quando n é par o campo ψ é fermiônico. Este é um aspecto novo no contexto do método da raiz quadrada, onde sempre, a raiz quadrada de uma teoria bosônica é uma teoria fermiônica.

Para fixar idéias, consideraremos dois exemplos concretos e depois generalizaremos o resultado.

Exemplo 1:

Para $n = 1$ e $\gamma = -1$, o campo ψ é bosônico e tem spin 1. Para este caso, podemos tomar a representação simétrica $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ do grupo de Lorentz $\psi_{\alpha\beta} = \psi_{\beta\alpha}$. Se introduzimos a matriz de conjugação de carga $C = i\frac{\sigma}{2}$ então $\psi_{\alpha\beta}$ pode ser escrito na forma:

$$\psi_{\alpha\beta} = A^\mu(\gamma_\mu C)_{\alpha\beta} + B(\gamma_5 C)_{\alpha\beta} \quad (2.7)$$

já que somente $\gamma_\mu C$ e $\gamma_5 C$ são simétricas. Em (2.7), não necessitamos por um campo pseudoescalar B, por que estamos considerando um campo de spin 1, e como veremos, sua equação de campo é trivial.

Usando explicitamente a representação de matrizes de Dirac em (2.7), encontramos que (2.5) fornece:

$$\begin{aligned} B(x) - \frac{1}{2} \int dy_1 \epsilon(x_1 - y_1) \dot{B}(x_0, y_1) &= B(x) = 0 \\ A^-(x) - \frac{1}{2} \int dy_1 \epsilon(x_1 - y_1) \dot{A}^-(x_0, y_1) &= A^+(x) = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde $A^\pm = A^0 \pm A^1$. Assim $B = A^+ = 0$ e A^- é a componente cone de luz esquerda de um campo vetorial autodual.

Exemplo 2:

Para $n = 2$ e $\gamma = -3$, o campo ψ é fermiônico e tem spin $\frac{3}{2}$. Se consideramos a representação totalmente simétrica do grupo de Lorentz $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, ψ em componentes é

$$\psi_{\alpha\beta\gamma} = \psi_\alpha^\mu(\gamma_\mu C)_{\beta\gamma} + \psi_\beta^\mu(\gamma_\mu C)_{\alpha\gamma} + \psi_\gamma^\mu(\gamma_\mu C)_{\alpha\beta} \quad (2.9)$$

Neste caso, (2.5) fornece:

$$\begin{pmatrix} 0 & P_1^{-1} - P_0 P_1^{-2} \\ -2\alpha P_1^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{1\beta\gamma} \\ \psi_{2\beta\gamma} \end{pmatrix} = 0 \quad (2.10)$$

Daqui, tem-se o seguinte par de equações:

$$\frac{1}{2} \int dy_1 \epsilon(x_1 - y_1) \psi_{2\beta\gamma}(x_0, y_1) -$$

$$-\frac{1}{2} \int dy_1 \epsilon(x_1 - y_1) \frac{1}{2} \int dz_1 \epsilon(y_1 - z_1) \dot{\psi}_{2\beta\gamma}(x_0, z_1) = 0 \quad (2.11)$$

$$\int dy \epsilon(x_1 - y_1) \psi_{1\beta\gamma}(x_0, y_1) = 0 \quad (2.12)$$

De (2.12), obtemos que $\psi_{1,\beta,\gamma} = 0$ e, usando (2.9) encontramos que $\psi_1^\mu = \psi_2^\dagger = 0$. De (2.11), obtemos que ψ_2^- é a componente de um campo de Rarita-Schwinger quiral. Assim, ψ_μ é um fermion de Weyl de spin $\frac{3}{2}$, com a componente cone de luz direita igual a 0 e a componente cone de luz esquerda autodual.

O procedimento dado nos dois exemplos anteriores pode ser generalizado facilmente. Para n geral, temos um campo $\psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}}$ totalmente simétrico e descrevendo uma partícula com spin $\frac{1}{2}(n+1)$ e com uma só de suas componentes não nulas.

O caso $n = 0$ também pode ser considerado. É fácil ver que neste caso ψ é um campo de spin $\frac{1}{2}$, o qual satisfaz

$$\begin{aligned} (\partial_1 - \partial_0)\psi_2 &= 0 \\ \partial_1\psi_1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

(2.13) descreve (se usamos condições de contorno apropriadas), um fermion de Weyl de spin $\frac{1}{2}$. A única razão pela qual não foi considerado aqui, é que resultados rescentes demonstram que o campo bosônico do qual provém ψ é não causal [30].

No Capítulo IV, consideraremos a quantização BRST destes bósons quirais supersimétricos, e calcularemos explicitamente os propagadores associados a estas partículas. É interessante fazer notar aqui, que um estudo de partículas com spin superior em duas dimensões também foi considerado por Bengtsson e Bengtsson na referência [59], em um contexto completamente diferente.

Capítulo II

Cordas Nulas Supersimétricas

Capítulo II

Cordas Nulas Supersimétricas

A corda nula é um objeto extenso unidimensional que corresponde ao limite de tensão zero da corda de Nambu-Goto usual. Esta corda foi proposta por Schild [16] em um paper póstumo como uma alternativa aos problemas que se apresentam na teoria de cordas padrão .

Por razões dimensionais, a tensão da corda é proporcional ao quadrado da massa de Planck (M_p) (e inversa à tangente de Regge). Assim, o limite de tensão zero em teorias de corda, também corresponde ao caso $M_p = 0$ e, conseqüentemente, a uma região de energias altas (inclusive além da escala de unificação da gravidade com interações fortes e eletro-fracas). Neste limite a tangente de Regge é infinita e todas as trajetórias colapsam a partículas de massa zero.

O limite $T \rightarrow 0$, e o caso inverso, isto é, o problema de gerar tensão para uma corda nula, é em si um problema importante e muito interessante, entretanto, sua solução parece ainda distante e é provável que envolva novas idéias ainda não discutidas na Física.

Neste capítulo estudaremos diretamente o caso $T = 0$ e faremos sua extensão supersimétrica. A extensão supersimétrica é claramente necessária para que haja férmions no espectro. A construção da corda nula supersimétrica é feita na seção 3 usando métodos hamiltonianos e então encontra-se explicitamente a álgebra de vínculos . Na seção 4 é feita a formulação lagrangiana e reconstruímos os vínculos derivados na seção 3.

Neste capítulo nos limitaremos a fazer a formulação clássica da corda nula supersimétrica e no Capítulo IV faremos a quantização.

3. Álgebra de Vínculos da Corda Nula Supersimétrica

Antes de construir a corda nula supersimétrica, vamos revisar brevemente o formalismo usado para a corda nula bosônica [17,18].

A corda nula bosônica está descrita pela seguinte ação:

$$S_0 = \int \frac{g}{2\gamma} d^2\sigma \quad (3.1)$$

onde $g = \det g_{mn}$, $g_{mn} = \partial_m X^\mu \partial_n X_\mu$, com $m, n = 0, 1$, $\mu = 0, 1, \dots, D - 1$ onde D é a dimensão do espaço-tempo em que está imersa a corda. Para manter a invariância conforme, γ deve se transformar como uma densidade invariante por reparametrizações na superfície de evolução, e o seu peso de Weyl é zero. A dinâmica do sistema descrito por esta ação pode ser estudada depois de se fixar o gauge

$$g_{mn} = \begin{pmatrix} -(\partial_\tau X)^2 & 0 \\ 0 & (\partial_\sigma X)^2 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

e assim:

$$L_0 = -\frac{1}{2\gamma} (\partial_\sigma X)^2 (\partial_\tau X)^2 \quad (3.3)$$

e

$$\dot{X} \cdot X' = 0 \quad (3.4)$$

Então, as equações de movimento são:

$$\begin{aligned} (\partial_\tau X)^2 (\partial_\sigma X)^2 &= 0 \\ \partial_0 \left(\frac{1}{\gamma} (\partial_\sigma X)^2 \dot{X}^i \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Mas, uma vez que estas equações são redundantes tem-se que a única solução não trivial é dada por:[†]

$$(\partial_\tau X)^2 = 0 \quad (3.6)$$

e, em consequência, os graus de liberdade restantes são fixados impondo-se que

$$\gamma = (\partial_\sigma X)^2 \quad (3.7)$$

As equações de movimento para X são:

$$\ddot{X} = 0 \quad (3.8)$$

[†] A rigor (3.5) tem uma simetria trivial $\sigma \leftrightarrow \tau$, assim, outra solução pode ser $(\partial_\sigma X)^2$, mas, escolhemos $(\partial_\tau X)^2$

sujeita aos vínculos

$$(\partial_\tau X)^2 = \partial_\tau X \cdot \partial_\sigma X = 0 \quad (3.9)$$

Fisicamente, as equações (3.8) e (3.9) descrevem um conjunto de partículas relativísticas puntuais livres sem massa (uma por cada ponto σ ao longo da corda), movendo-se com uma velocidade perpendicular à corda.

Do ponto de vista hamiltoniano, a corda nula é um sistema descrito pelo par de vínculos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\perp &= P^2 \\ \mathcal{H}_1 &= P \cdot \partial_\sigma X \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde $X^\mu(\tau, \sigma)$ é a posição da corda no espaço-tempo, e $P^\mu(\tau, \sigma)$ é o momento canônico conjugado, os quais satisfazem o parênteses de Poisson a tempos iguais:

$$[P^\mu(\sigma), X^\nu(\sigma')] = \eta^{\mu\nu} \delta(\sigma - \sigma') \quad (3.11)$$

É fácil verificar que os vínculos (3.10) satisfazem à álgebra:

$$\begin{aligned} [\mathcal{H}_\perp(\sigma), \mathcal{H}_\perp(\sigma')] &= 0 \\ [\mathcal{H}_\perp(\sigma), \mathcal{H}_1(\sigma')] &= (\mathcal{H}_\perp(\sigma) + \mathcal{H}_\perp(\sigma')) \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma') \\ [\mathcal{H}_1(\sigma), \mathcal{H}_1(\sigma')] &= (\mathcal{H}_1(\sigma) + \mathcal{H}_1(\sigma')) \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma') \end{aligned} \quad (3.12)$$

Para supersimetrizar esta corda, podemos, como uma tentativa, seguir o método da raiz quadrada, entretanto, tal método não é imediatamente aplicável aqui, porque a combinação linear $\mathcal{H}_\perp \pm 2T \mathcal{H}_1$ não é um quadrado perfeito como ocorre com a corda bosônica usual onde a supersimetrização se faz ao longo das direções do cone de luz. Neste caso, adotaremos um ponto de vista diferente; supersimetrizaremos ao longo das direções tangente e normal à evolução dinâmica da corda. Nosso método é não tradicional e tem algumas reminiscências das variáveis supernumerárias de Collins e Tucker [31].

Definamos os vínculos fermiônicos:

$$\mathcal{S}_a(\sigma) = P_\mu(\sigma) \Gamma_a^\mu(\sigma) \quad (3.13)$$

onde os sub-índices $a = \perp, 1$ denotam as direções normais e tangentes da superfície de evolução. As variáveis Γ_\perp^μ e Γ_1^μ se transformam como vetores

no espaço-tempo em que a corda está imersa, e como spinores na superfície de evolução. Impomos que elas satisfaçam a seguinte álgebra de Clifford:

$$[\Gamma_a^\mu(\sigma), \Gamma_b^\nu(\sigma')] = i \delta_{ab} \eta^{\mu\nu} \delta(\sigma - \sigma') \quad (3.14)$$

Obtemos que:

$$[\mathcal{S}_a(\sigma), \mathcal{S}_b(\sigma')] = \mathcal{H}_\perp^S \delta_{ab} \delta(\sigma - \sigma') \quad (3.15)$$

onde $\mathcal{H}_\perp^S = \mathcal{H}_\perp$ e, obviamente

$$\begin{aligned} [\mathcal{H}_\perp^S(\sigma), \mathcal{H}_\perp^S(\sigma')] &= 0 \\ [\mathcal{S}_a(\sigma), \mathcal{H}_\perp^S(\sigma')] &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (3.16)$$

O gerador tangente neste caso é

$$\mathcal{H}_1^S(\sigma) = \mathcal{H}_1(\sigma) - \frac{i}{2} \left(\Gamma_\perp(\sigma) \cdot \frac{\partial}{\partial \sigma} \Gamma_\perp(\sigma) + \Gamma_1(\sigma) \cdot \frac{\partial}{\partial \sigma} \Gamma_1(\sigma) \right) \quad (3.17)$$

Então, é fácil verificar que o resto da superálgebra é:

$$\begin{aligned} [\mathcal{S}_a(\sigma), \mathcal{H}_1^S(\sigma')] &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{S}_a(\sigma) + 2\mathcal{S}_a(\sigma') \right) \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma') \\ [\mathcal{H}_\perp^S(\sigma), \mathcal{H}_1^S(\sigma')] &= \left(\mathcal{H}_\perp^S(\sigma) + \mathcal{H}_\perp^S(\sigma') \right) \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma') \\ [\mathcal{H}_1^S(\sigma), \mathcal{H}_1^S(\sigma')] &= \left(\mathcal{H}_1^S(\sigma) + \mathcal{H}_1^S(\sigma') \right) \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma') \end{aligned} \quad (3.18)$$

O fechamento da superálgebra garante que \mathcal{S}_a e \mathcal{H}_a^S podem ser impostos consistentemente como vínculos de primeira classe. Os geradores fermiônicos \mathcal{S}_a geram transformações de supersimetria locais $\delta A = [A, \epsilon^a \mathcal{S}_a]$ nas direções temporais ($a = \perp$) e espaciais ($a = 1$). Mais explicitamente

$$\begin{aligned} \delta \Gamma_a^\mu(\sigma) &= \epsilon_a(\sigma) P^\mu(\sigma) \\ \delta X^\mu(\sigma) &= \sum_a \epsilon^a(\sigma) \Gamma_a^\mu(\sigma) \\ \delta P^\mu(\sigma) &= 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

O hamiltoniano total então é

$$H = \int_0^\pi d\sigma \sum_a \left(\lambda^a \mathcal{H}_a^S + \tilde{\lambda}^a \mathcal{S}_a \right) \quad (3.20)$$

onde λ^a são multiplicadores de Lagrange bosônicos e os $\tilde{\lambda}^a$ multiplicadores de Lagrange fermiônicos.

As condições de contorno da corda nula supersimétrica obtêm-se da maneira usual i.e., exigindo-se que a variação da ação não tenha termos de superfície.

Consideremos primeiro o caso de cordas abertas. Como é usual, convém estender o domínio de σ de $[0, \pi]$ a $[-\pi, +\pi]$ com as identificações:

$$\begin{aligned} X^\mu(\sigma < 0) &= X^\mu(-\sigma) \\ P^\mu(\sigma < 0) &= P^\mu(-\sigma) \end{aligned} \quad (3.21)$$

A condição de contorno sobre este intervalo estendido é simples periodicidade de $X^\mu(\sigma) = X(\sigma + 2\pi)$ (e da mesma maneira para P^μ e λ^a). As Γ 's são as únicas variáveis cujas condições de contorno devem ser determinadas. Isto se faz exigindo que os funcionais $\int \lambda^a \mathcal{H}_a^S$ e $\int \tilde{\lambda}^a \mathcal{S}_a$ estejam bem definidos, i.e., que não contenham termos de superfície.

A variação do funcional $\int \lambda^1 \mathcal{H}_1^S$ contém um termo da forma $\Gamma \partial_\sigma \Gamma$ e contribui com o termo de contorno

$$\lambda^1 (\Gamma_{\perp\mu} \delta \Gamma_{\perp}^\mu + \Gamma_{1\mu} \delta \Gamma_1^\mu) \Big|_0^\pi, \quad (3.22)$$

o qual implica $\Gamma_{\perp}^\mu(\frac{0}{\pi}) = \pm \Gamma_1^\mu(\frac{0}{\pi})$. Se definimos uma nova variável Γ^μ por:

$$\Gamma^\mu(\sigma) = \begin{cases} \Gamma_{\perp}^\mu(\sigma) & 0 \leq \sigma \leq \pi \\ \Gamma_1^\mu(-\sigma) & -\pi \leq \sigma \leq 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

Segue que (3.23) pode ser periódica (setor de Ramond) ou antiperiódica (setor de Neveu-Schwarz)

$$\Gamma^\mu(2\pi) = \pm \Gamma^\mu(0) \quad (3.24)$$

As condições de contorno sobre o multiplicador de Lagrange fermiônico $\tilde{\lambda}$ estendido como em (3.21), são também periódicas ou antiperiódicas. Na notação (3.23), as variáveis fermiônicas satisfazem :

$$[\Gamma^\mu(\sigma), \Gamma^\nu(\sigma')] = i\eta^{\mu\nu} \delta(\sigma - \sigma') \quad (3.25)$$

Para efeito da quantização, é conveniente escrever as variáveis da corda nula supersimétrica na representação de Fourier. As expansões de X^μ , P^μ e Γ^μ são:

$$\begin{aligned} X^\mu(\sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} x_n^\mu e^{in\sigma} \\ P^\mu(\sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} p_n^\mu e^{in\sigma} \\ \Gamma^\mu(\sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \gamma_n^\mu e^{in\sigma} \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde, na última expansão a soma é sobre $n \in \mathbf{Z}$ para o setor periódico (R) e sobre $n \in \mathbf{Z} + \frac{1}{2}$ para o setor antiperiódico (N).

Os parênteses de Poisson para os modos de Fourier X_n^μ , P_n^μ , e γ_n^μ são:

$$\begin{aligned} [p_m^\mu, x_n^\nu] &= \eta^{\mu\nu} \delta_{m+n,0} \\ [\gamma_m^\mu, \gamma_n^\nu] &= \eta^{\mu\nu} \delta_{m+n,0} \end{aligned} \quad (3.27)$$

e os demais parênteses de Poisson são nulos. O setor de Ramond contém modos zeros e assim o vácuo (fermiônico) é degenerado.

No caso de cordas fechadas as variáveis bosônicas da corda nula supersimétrica são periódicas. Considerações similares podem ser feitas para as variáveis fermiônicas e se chega à conclusão de que estas podem ser periódicas ou antiperiódicas.

As respectivas expansões de Fourier são:

$$\begin{aligned} X^\mu(\sigma) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} x_n^\mu e^{2in\sigma} \\ P^\mu(\sigma) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} p_n^\mu e^{2in\sigma} \\ \Gamma_a^\mu(\sigma) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n \in \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z} + \frac{1}{2} \end{array} \right\}} \gamma_{an}^\mu e^{2in\sigma} \end{aligned} \quad (3.28)$$

com $a = \perp, 1$. Os parênteses de Poisson não nulos são:

$$\begin{aligned} [p_m^\mu, x_n^\nu] &= \eta^{\mu\nu} \delta_{m+n,0} \\ [\gamma_{am}^\mu, \gamma_{bn}^\nu] &= \delta_{ab} \eta^{\mu\nu} \delta_{m+n,0} \end{aligned} \quad (3.29)$$

A corda nula supersimétrica fechada é diferente da aberta. Neste caso, σ varia entre $[0, \pi]$ em lugar de $[-\pi, \pi]$ e aqui também temos um índice extra que não aparece no caso aberto. Temos que recordar que o índice a é absorvido na definição da variável Γ_a^μ por Γ^μ . A seguir daremos todas as fórmulas para o caso aberto, embora a discussão feita seja válida para os dois casos.

Os vínculos da corda nula supersimétrica na representação de Fourier são:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_n^\perp &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} p_{n-k} \cdot p_k \\
 \mathcal{H}_n^1 &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} k (-p_{n-k} \cdot x_k) + \frac{i}{2} \sum_{k \in \left\{ \begin{smallmatrix} \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z} + \frac{1}{2} \end{smallmatrix} \right\}} k (\gamma_{n-k}^\perp \cdot \gamma_k^\perp - \gamma_{-n-k}^1 \cdot \gamma_k^1) \\
 \mathcal{S}_n^a &= \sum_{k \in \left\{ \begin{smallmatrix} \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z} + \frac{1}{2} \end{smallmatrix} \right\}} p_{n-k} \cdot \gamma_k^a
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

A álgebra de vínculos (em qualquer setor) é:

$$\begin{aligned}
 [\mathcal{H}_n^a, \mathcal{H}_n^1] &= i(n-m)\mathcal{H}_{n+m}^a \\
 [\mathcal{S}_m^a, \mathcal{H}_n^1] &= i\left(\frac{n}{2} - m\right)\mathcal{S}_{m+n}^a \\
 [\mathcal{S}_m^a, \mathcal{H}_n^\perp] &= 0 \\
 \{\mathcal{S}_m^a, \mathcal{S}_n^b\} &= i\delta^{ab}\mathcal{H}_{m+n}^\perp
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

onde $a = \perp, 1$. Na próxima seção, faremos a formulação lagrangiana desta corda.

4. Formulação Lagrangiana da Corda Nula Supersimétrica

Aqui, apresentamos a formulação lagrangiana da corda nula supersimétrica; para uma discussão do formalismo apresentado aqui aplicado à corda supersimétrica com tensão, ver o apêndice B.

A primeira idéia é supersimetrizar o lagrangiano $L = \frac{1}{2\lambda}g$ seguindo os métodos usuais de supergravidade [46]. Uma tentativa consiste em fazer a substituição:

$$\begin{aligned} g &\rightarrow sdet(g_{MN}) \\ \lambda &\rightarrow \lambda(\sigma, \theta) \end{aligned}$$

onde $sdet$ é o superdeterminante, e em seguida, substituir a ação

$$S = \int d^2\sigma d^2\theta \frac{sdet(g)}{\lambda}$$

Entretanto, esta construção óbvia não é correta porque não reproduz os vínculos da corda nula supersimétrica.

Outra possibilidade é proceder em analogia com a partícula relativística bosônica sem massa, descrita pela ação

$$S = \int d\tau \frac{\dot{X}^2}{2\lambda} \quad (4.1)$$

Então, a generalização natural para o caso da corda nula supersimétrica é:

$$S_0 = \frac{1}{2} \int d^2\sigma d^2\theta \frac{1}{\Gamma} E^2 (\mathcal{D}^\alpha X^i \mathcal{D}_\alpha X_i)^2 \quad (4.2)$$

onde $E = sdet\{E_M^A\}$ é a densidade invariante, e D_α são derivadas covariantes fermiônicas ($M = (m, \alpha)$ com $\alpha = 1, 2$). O supercampo X^i é neste caso

$$X^i(\sigma, \theta) = X^i(\sigma) + \theta^\alpha \psi_\alpha^i(\sigma) - \frac{1}{2} \theta^2 B^i(\sigma) \quad (4.3)$$

e

$$\mathcal{D}_\alpha X^i = E_\alpha^M \partial_M X^i \quad (4.4)$$

A ação (4.2) é invariante por supersimetria local na superfície de evolução, por transformações de super-Weyl e transformações de Poincaré globais. Γ

é um supercampo que se transforma como uma densidade invariante e está definido por:

$$\Gamma = \gamma + \theta^\alpha \eta_\alpha - \frac{1}{2} \theta^2 b \quad (4.5)$$

(4.5), é o análogo do einbein no caso da partícula relativística sem massa.

Encontramos, como demonstraremos mais abaixo, que (4.2) reproduz corretamente os vínculos da corda nula supersimétrica derivados por métodos hamiltonianos na seção 3 e, portanto, (4.2) é a ação lagrangiana para a corda nula supersimétrica. No gauge de Wess-Zumino, a ação (4.2) é:

$$\begin{aligned} S_0 = - \int d^2\sigma d^2\theta \frac{e^2}{\gamma} \left[- \frac{1}{4} \psi^2 \chi_m \gamma^n \gamma^m \chi_n \right. \\ + (-\psi^2 g^{mn} \eta^{ij} + \psi^i \gamma^m \gamma^n \psi^j) \partial_m X_i \partial_n X_j + i \psi^2 \psi \gamma^m \partial_m \psi \\ + (-\psi^2 \eta^{ij} + \psi^i \psi^j) B_i B_j + 2i \psi^i \gamma^m \psi^j B_i \partial_m X_j \\ \left. + \frac{1}{\gamma} \psi^2 \eta \gamma^m \psi \partial_m X + \frac{1}{\gamma} \psi^2 \eta \psi B - \frac{1}{4\gamma} \left(b - \frac{1}{\gamma} \eta^2 \right) \psi^2 \psi^2 \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

Note-se que (4.6) contem, como campos auxiliares o zweibein e_m^a , B^i e todas as componentes de Γ (γ , η_α e b). Note-se além disso, que não há termos cinéticos para o gravitino ξ_m o qual aqui é puramente gauge. Neste caso, os fixamos impondo

$$\chi_m = \gamma_m \phi \quad (4.7)$$

onde o spinor ϕ é então

$$\phi^\alpha = \frac{1}{2} (\gamma^m \chi_m)^\alpha \quad (4.8)$$

e, portanto

$$\gamma^m \gamma_n \chi_m = 0 \quad (4.9)$$

e escolhemos o zweibin diagonal:

$$e_m^a = f_m \delta_m^a \quad (4.10)$$

As componentes não diagonais de e_m^a são denotadas por g_0 e g_1 . O passo seguinte é eliminar os campos auxiliares em (4.2) usando suas equações de

movimento, i.e., fazemos:

$$\left. \frac{\partial L_0}{\partial A_i} \right|_{\substack{\text{conformal} \\ \text{gauge}}} = 0 \quad (4.11)$$

onde $A_i = (e_m^a, \gamma, \eta, b, V)$ e em seguida, substituímos no lagrangiano (4.2). Mas, por conveniência de cálculo, é melhor redefinir os campos antes de resolver as equações de movimento. Tendo isso em conta, reescalamos as variáveis de Grassman $\theta_\alpha \rightarrow f_0^{-\frac{1}{2}} \theta_\alpha$ por θ_α demais campos são reescalados como

$$\begin{aligned} \tilde{X}^i &= X^i \quad , \quad \tilde{\psi}^i = \sqrt{f_0} \psi^i \quad , \quad \tilde{B}^i = f_0 B^i \\ \tilde{\gamma} &= f_0 \gamma \quad , \quad \tilde{\eta}^\alpha = \sqrt{f_0} \eta^\alpha \quad , \quad \tilde{b} = f_0 b \end{aligned} \quad (4.12)$$

Depois destas redefinições, o lagrangiano (4.2) é (tirando-se os tils)

$$\begin{aligned} L_0 &= -\frac{e^2}{\gamma} \left[(-\psi^2 g^{mn} \eta^{ij} + \psi^i \gamma^m \gamma^n \psi^j) \partial_m X_i \partial_n X_j \right. \\ &+ \frac{i}{f_0} \psi^2 \psi \gamma^m \partial_m \psi + \frac{1}{f_0^2} (-\psi^2 \eta^{ij} + \psi^i \psi^j) B_i B_j \\ &+ i \left(\frac{2}{f_0} B \psi \gamma^m \psi + \frac{1}{\gamma} \psi^2 \eta \gamma^m \psi \right) \partial_m X + \frac{1}{f_0 \gamma} \psi^2 \eta \psi B \\ &\left. - \frac{1}{4\gamma} \left(\frac{b}{f_0} - \frac{1}{\gamma} \eta^2 \right) \psi^2 \psi^2 \right] + \mathcal{O}(\chi_m) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Então a equação para b é

$$\left. \frac{\partial L_0}{\partial b} \right|_{\substack{\text{conformal} \\ \text{gauge}}} = \frac{f_0 f_1^2}{2\gamma^2} \psi^2 \psi^2 = 0 \quad (4.14)$$

o que implica

$$f_0 = 0 \quad (4.15)$$

Isto se deve a que se colocamos f_0 ou ψ^2 iguais a zero no lagrangiano (4.13) o lagrangiano resultante é trivial. As equações de movimento para os demais campos auxiliares são:

$$\frac{\partial L_0}{\partial g_0} = \frac{f_1}{\gamma} \left[\psi^2 (2\dot{x} X' + i\psi \gamma^0 \psi') + 2\dot{X} \psi \psi X' - 2iB \psi \gamma^0 \psi X' \right] = 0 \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial g_1} = \frac{if_1}{\gamma} \left[\psi^2 \psi \gamma^1 \dot{\psi} + 2B\psi \gamma^1 \psi \dot{X} \right] = 0 \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_0}{\partial f_0} = -\frac{f_1}{\gamma} \left[2\dot{X}\psi\psi X' + 2iB\psi\gamma^1\psi X' + \psi^2\psi\gamma^1\psi' \right. \\ \left. + \frac{f_1}{\gamma}\psi^2 \left(\eta\psi B + i\eta\gamma^0\psi\dot{X} - \frac{1}{4}b\psi^2 \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_0}{\partial f_1} = \frac{2f_1}{\gamma} \left[-\psi^2\dot{X}^2 + (\dot{X}\psi)^2 - i\psi^2\psi\gamma^0\dot{\psi} + \right. \\ \left. + \psi^2 B^2 - (B\psi)^2 - 2iB\psi\gamma^0\psi\dot{X} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial \eta_\alpha} = 0 \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial B^i} = \frac{2f_1^2}{\gamma} \left[\psi^2 B^i + (B\psi)\psi^i + i\psi^i\gamma^0\psi\dot{X} \right] = 0 \quad (4.21)$$

Em (4.21), pode-se obter B_i da última equação. Se multiplicamos por ψ_α^i e usamos o fato de que $\psi_\alpha^i\psi_{\beta i} = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}\psi^2$ o resultado é

$$B^i = \frac{2i}{3} \frac{1}{\psi^2} \psi^i \gamma^0 \psi \dot{X} \quad (4.22)$$

Substituindo no lagrangiano (4.13) se tem:

$$L_0 = \frac{f_1^2}{\gamma} \psi^2 \left[\dot{X}^2 + i\psi\gamma^0\dot{\psi} - \frac{2}{3} \frac{(\dot{X}\psi)^2}{\psi^2} \right] \quad (4.23)$$

Se agora substituimos (4.20) em (4.17) obtemos

$$\psi\gamma^0\dot{\psi} = 0 \quad (4.24)$$

a qual, juntamente com (4.18) conduz a

$$\dot{X}^2\psi^2 - \frac{2}{3} (\dot{X}\psi)^2 = 0 \quad (4.25)$$

Usando a equação de movimento para ψ obtemos

$$i(\gamma^0\psi)_\alpha + \frac{4}{3\psi^2} \left[\frac{(\dot{X}\psi)}{\psi^2} \psi_\alpha^i - \dot{X}\psi_\alpha \dot{X}^i \right] = 0 \quad (4.26)$$

Se multiplicamos por ψ_β^i e V_i se obtem que (4.25) é

$$\psi_\alpha^i \dot{\psi}_{\beta i} = 0$$

e

$$(\dot{X}\psi)^2 \dot{X}\psi_\alpha = 0 \implies (\dot{X}\psi)^2 = 0 \quad (4.27)$$

a qual, em virtude da covariância de Lorentz, implica

$$\dot{X}\psi_\alpha = 0 \quad (4.28)$$

Portanto obtemos o lagrangiano

$$L_0 = -\frac{f_1^2}{\gamma} \psi^2 (\dot{X}^2 + i\psi\gamma^0\dot{\psi}) \quad (4.29)$$

e os vínculos

$$\dot{X}^2 = \dot{X}\psi_\alpha = \dot{X}X' + \frac{i}{2}\psi\gamma^0\psi' = 0 \quad (4.30)$$

os quais são a versão lagrangiana daqueles obtidos na seção 3. Por um procedimento de fixação do gauge adequado, o fator $-\frac{f_1^2\psi^2}{\gamma}$ pode ser escolhido convenientemente. Com efeito, na referência [17] demonstra-se que o gauge apropriado neste caso é

$$\gamma = f_1^2\psi^2 \quad (4.31)$$

e, em tal caso, (4.27) é

$$L_0 = \dot{X}^2 + i\psi\gamma^0\dot{\psi} \quad (4.32)$$

o que conduz às equações de movimento:

$$\ddot{X}^i = \dot{\psi}_\alpha^i = 0 \quad (4.33)$$

As equações (4.31) são o ponto de partida para a quantização deste sistema. Finalmente, fazemos notar que no formalismo hamiltoniano chega-se às mesmas equações de movimento (4.31) se escolhermos o gauge tempo-próprio. A relação entre ambos os gauges não é clara para nós ainda.

Capítulo III

P-branas Nulas Bosônicas e Supersimétricas

CAPÍTULO 3

P-branas Nulas Bosônicas e Supersimétricas

Uma p-brana é um objeto relativístico extenso de p dimensões espaciais e é a generalização imediata da corda. Há vários motivos pelos quais uma p-brana (ou mais geralmente, uma super-p-brana) poderia ser um sistema fisicamente interessante.

O primeiro motivo é que, a priori, não há nenhuma razão fundamental para que a corda seja o único objeto que conduza à teoria última de unificação. Por um lado, razões de consistência fazem pensar que a quantização destes objetos extensos deveria decidir o dilema: cordas-ou-membranas?. Por outro lado, o limite de baixas energias da supercorda não fornece a teoria de supergravidade mais geral conhecida em $d = 4$ (no esquema de Kaluza-Klein) [33]. Esta tem sido a motivação para o desenvolvimento da supermembrana ultimamente.

Uma segunda motivação para estudar p-branas provem da fenomenologia. Os modelos de membranas em teorias de interações fortes foram introduzidos como uma simplificação à QCD. As membranas(não relativísticas) em QCD são conhecidas como bag models e uma revisão sobre isto pode ser encontrada em [34].

Finalmente, uma terceira motivação é a construção de modelos de gravidade em dimensões inferiores. Dirac, em 1962, foi o primeiro que estudou um modelo de membranas a fim de propor uma teoria clássica do elétron [35]. Uma discussão recente sobre estes modelos e outras aplicações pode ser encontrada por exemplo em [36].

Entretanto, as p-branas são objetos matematicamente difíceis de estudar e tudo parece indicar que enquanto não se proponham simplificações ao problema será muito difícil encontrar resultados concretos.

Seguindo argumentos similares aos sugeridos no Capítulo II, proporemos estudar membranas nulas e daqui ver se é possível obter alguma informação sobre p-branas em geral.

Neste capítulo, na seção 1, faremos a quantização via integral funcional de uma p-brana bosônica nula. A estratégia que seguimos é uma idéia proposta para cordas por Nambu [37] e Polyakov [38] e desenvolvida por Eguchi [39]. O resultado principal que obtemos é uma expressão explícita para o propagador de uma p-brana nula em segunda quantização, e, neste sentido,

nossos resultados poderiam talvez ser considerados como um possível ponto de partida para uma teoria de campos de p-branas [40].

Na seção 2, usando métodos hamiltonianos, fazemos a generalização do que foi feito no Capítulo 2, para p-branas nulas e encontramos um modelo com supersimetria local na superfície de evolução.

5. Quantização Via Integral Funcional

Consideremos uma superfície de p dimensões espaciais com tensão superficial T, imersa num espaço-tempo de dimensão d. Se denotamos por $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p)$ as coordenadas que parametrizam a superfície, então, a ação para este objeto é:

$$S = -T \int d^{p+1}\sigma \sqrt{-g^{(p+1)}} \quad (5.1)$$

onde $g^{(p+1)}$ é o determinante do tensor $g^{\mu\nu}$ que define a geometria de evolução do volume (p+1)-dimensional. A ação (5.1), como no caso da corda, é invariante por reparametrizações e o formalismo hamiltoniano deve ser feito à la Dirac.

Do ponto de vista hamiltoniano a ação é:

$$S[X^\mu, P_\mu, N^\perp, N_k] = \int d^p\sigma [P^\mu \dot{X}_\mu - N^\perp \mathcal{H}_\perp - N^k \mathcal{H}_k] \quad (5.2)$$

$\mu = 1, 2, \dots, d; k = 1, 2, \dots, p.$

Aqui, N^\perp e N^k são multiplicadores de Lagrange e os vínculos \mathcal{H}_\perp e \mathcal{H}_k estão definidos por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\perp &= \frac{1}{2}(P^2 + T^2 g) \\ \mathcal{H}_k &= P_\mu X_{,k}^\mu \end{aligned} \quad (5.3)$$

sendo g a métrica espacial p-dimensional.

Um cálculo direto, ainda que tedioso, demonstra que a álgebra de vínculos é:

$$[\mathcal{H}_\perp(\sigma), \mathcal{H}_\perp(\sigma')] = Tg(X)(\mathcal{H}_i(\sigma) + \mathcal{H}_i(\sigma'))\partial_i\delta(\sigma, \sigma')$$

$$[\mathcal{H}_\perp(\sigma), \mathcal{H}_i(\sigma')] = (\mathcal{H}_\perp(\sigma) + \mathcal{H}_\perp(\sigma'))\partial_i\delta(\sigma, \sigma') \quad (5.4)$$

$$[\mathcal{H}_i(\sigma), \mathcal{H}_j(\sigma')] = \mathcal{H}_i(\sigma)\partial_j\delta(\sigma, \sigma') + \mathcal{H}_j(\sigma')\partial_i\delta(\sigma, \sigma')$$

e a qual, no limite $T \rightarrow 0$ é a álgebra de uma membrana nula.

Para quantizar uma membrana nula, a ação (5.1) é inconveniente como ponto de partida, já que ela é singular no limite $T \rightarrow 0$. Para resolver este problema pode-se adotar dois pontos de vista. O primeiro consiste em propor uma ação alternativa a (5.1) generalizada para o caso de p-branas [41]. Assim, em lugar de (5.1) escrevemos:

$$\tilde{S} = \int d^{p+1} \left[\frac{1}{2\Lambda} g - \frac{T^2}{2} \Lambda \right] \quad (5.5)$$

onde Λ é um campo auxiliar que se transforma como uma densidade e que quando é eliminado usando-se as equações de movimento, reproduz a ação (5.1). A ação (5.5), no limite $T \rightarrow 0$ descreve uma p-brana nula e é uma versão generalizada da ação proposta por Schild para o caso $p = 1$ no gauge $\Lambda = 1$ [16]. A equivalência clássica de (5.1) e (5.5) foi discutida mais extensamente em [41].

O segundo ponto de vista que se pode adotar é simplesmente tomar o limite $T \rightarrow 0$ na formulação hamiltoniana da teoria e quantizar, e.g., via método BRST. Este segundo ponto de vista foi extensamente usado em gravidade quântica [42]. Ambos os procedimentos tem vantagens, dependendo do que se quer fazer. Nesta seção, usaremos o primeiro procedimento para quantizar uma p-brana nula.

Para quantizar a p-brana nula consideremos a seguinte ação funcional:

$$S = \int_{\mathcal{R}} d^{p+1} \sigma \mathcal{L}_p \quad (5.6)$$

com

$$\mathcal{L}_p = \frac{1}{(p+1)!} \left| \frac{\partial(X^{\mu_0}, \dots, X^{\mu_p})}{\partial(\sigma_0 = \tau, \sigma_1, \dots, \sigma_p)} \right|^2 \quad (5.7)$$

Então, vamos supor que as equações de Euler-Lagrange obtidas a partir de (5.6) admitem uma solução para o problema de contorno. No caso de um domínio multiplamente conexo \mathcal{R} as fórmulas que se seguem abaixo aplicam-se a cada contorno $\partial\mathcal{R}$ separadamente, sendo então suficiente supor que \mathcal{R} é simplesmente conexo e que seus contornos $\partial\mathcal{R}$ são as configurações iniciais

e finais da p-brana. Consideraremos que o domínio \mathcal{R} está limitado por um contorno de Jordan γ parametricamente representado por $\sigma(s)$ sendo s_i , p parâmetros tais que $s_i \in [0, 1]$ e que os contornos satisfaçam

$$\sigma_a|_{\partial\mathcal{R}} = \sigma_a(s) \quad (a = 0, 1, \dots, p)$$

e, ainda, tal que em todos os pontos $\frac{\partial}{\partial s_i}$ seja paralelo a $\frac{\partial}{\partial s_j}$ ($i \neq j$).

Vamos impor agora as seguintes condições de contorno de Dirichlet sobre o problema variacional (5.6)

$$X^\mu[\sigma_0(s), \sigma_1(s), \dots, \sigma_p(s)] = f^\mu(s) \quad (5.8)$$

sendo as funções $f^\mu(s)$ as coordenadas do contorno $\partial\mathcal{R}$ no espaço-tempo, e cuja variação é:

$$\delta f^\mu(s) = \delta X^\mu(\sigma(s)) + X^\mu_{,a}(\sigma(s))\delta\sigma_a(s) \quad (5.9)$$

Por razões puramente geométricas (e por conveniência), separaremos os (p+1) parâmetros σ_a em uma parte normal ($n(s)$) a $\partial\mathcal{R}$ e em p partes tangentes $t_i(s)$

$$t_i = (t_i)_a \sigma_a = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial \sigma_a}{\partial s_i} \right) \sigma_a = \frac{1}{N} \sigma_{a,i} \sigma_a$$

$$n = n_a \sigma_a = \frac{1}{n} \epsilon_{a a_1 \dots a_p} \sigma_a \sigma_{a_1, 1} \dots \sigma_{a_p, p} \quad (5.10)$$

sendo N uma constante de normalização que determinaremos mais abaixo.

Note-se que se definimos o vetor $\mathbf{T}^T = (t^T, n)$ podemos escrever a seguinte fórmula conveniente:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{N} \mathbf{M} \cdot \sigma \quad (5.11)$$

com

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \sigma_{0,1} & \sigma_{1,1} & \dots & \sigma_{p,1} \\ \sigma_{0,2} & \sigma_{1,2} & \dots & \sigma_{p,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{0,p} & \sigma_{1,p} & \dots & \sigma_{p,p} \\ A_0 & A_1 & \dots & A_p \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

onde a última linha contém os cofatores de A_a , i.e. os determinantes das matrizes obtidas eliminando-se em M a última linha e a a -ésima coluna com um sinal alternante apropriado. A normalização apropriada para N é:

$$N = (\det M)^{\frac{1}{p+1}}$$

e $\det M = \det D$ onde D é uma matriz $p \times p$ dada por:

$$D_{i,j} = \sigma_{,i} \cdot \sigma_{,j} \quad (5.13)$$

Formalmente D é o lagrangiano quadrático de uma $(p-1)$ -brana parametrizada por s_i e evoluindo em um espaço-tempo de $p+1$ dimensões com coordenadas σ_a . A variação de t_i e n é:

$$\begin{aligned} \delta t_i(s) &= \frac{1}{N} \sigma_{a,i} \delta \sigma_a(s) \\ \delta n(s) &= \frac{1}{N} \epsilon_{a_0 a_1 \dots a_p} \delta \sigma_{a_0} \frac{\partial \sigma_{a_1}}{\partial s_1} \dots \frac{\partial \sigma_{a_p}}{\partial s_p} \end{aligned} \quad (5.14)$$

ou em forma matricial:

$$\delta \mathbf{T} = \frac{1}{N} \mathbf{M} \cdot \delta \sigma \quad (5.15)$$

A variação da área V $(p+1)$ -dimensional da superfície de evolução \mathcal{R} é:

$$\begin{aligned} \delta V &= \int_{\partial \mathcal{R}} d^p t N \delta n(s) \\ &= \int_{\partial \mathcal{R}} d^p \delta \sigma \wedge \sigma_{,1} \wedge \dots \wedge \sigma_{,p} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Do mesmo modo como fizemos com os vetores t e n podemos decompor o gradiente de X^μ , assim:

$$\begin{aligned} f_{,i}^\mu &= X_{,a}^\mu(\sigma(s)) \sigma_{a,i}(s) \\ h^\mu &= \epsilon_{a_0 \dots a_p} X_{,a_0}^\mu \sigma_{a_1} \dots \sigma_{a_p}, p \end{aligned}$$

ou em notação matricial:

$$(\mathbf{F}^\mu)^T = (f_{,1}^\mu, \dots, f_{,p}^\mu, h^\mu)^T$$

e a mudança de base acima pode ser escrita como:

$$F^\mu = \mathbf{M} \cdot \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \quad (5.17)$$

A variação completa da ação (5.6) é:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \delta S &= \int \delta V \mathcal{L} + \int_{\mathcal{R}} d^{p+1} \sigma \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\mu} \delta X^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu,a}} \delta X^{\mu,a} \right) \\ &= \int_{\partial \mathcal{R}} d^p t N \mathcal{L} \delta n + \int_{\mathcal{R}} d^p + 1 \sigma \frac{\partial}{\partial \sigma_a} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu,a}} \delta X^\mu \right) \end{aligned} \quad (5.18)$$

onde usamos (5.16) e as equações de movimento.

O segundo termo em (5.18) pode também ser escrito como:

$$\int_{\mathcal{R}} d^{p+1} T \frac{\partial}{\partial T_b} \left(M_{ab} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_c^\mu} M_{ca} \delta X^\mu \right)$$

o qual se simplifica bastante porque apenas o termo com $b = p+1$ (normal) contribui

$$\int_{\partial \mathcal{R}} d^p t M_{(p+1)a} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_c^\mu} M_{ca} \delta X^\mu$$

mas devido à estrutura peculiar de M , $M_{(p+1)a} M_{ca} = (\det M) \delta_{p+1,c}$ sendo o segundo termo em (5.18) exatamente:

$$\int_{\partial \mathcal{R}} d^p t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h^\mu} \delta X^\mu \quad (5.19)$$

Usando (5.9), (5.15) e (5.17) :

$$\delta X^\mu = \delta f^\mu - N (\mathbf{F}^\mu)^T (\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^T)^{-1} \delta T \quad (5.20)$$

as $(\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^T)^{-1}$ é

$$\begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & (\det M)^{-1} \end{pmatrix}$$

onde D é a matriz definida em (5.13).

Juntando tudo, podemos expressar a variação da ação em termos das variações independentes dos $p + 1$ parâmetros T e das D coordenadas do contorno f^μ . Assim obtém-se as seguintes relações funcionais:

$$\frac{1}{T} \frac{\delta S}{\delta f^\mu} = (\det M) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h^\mu} \quad (5.21)$$

$$\frac{1}{T} \frac{\delta S}{\delta t_i} = -(\det M)^{\frac{p+2}{p+1}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h^\mu} f_{,j}^\mu (D^{-1})_{ji} \quad (5.22)$$

$$\frac{1}{T} \frac{\delta S}{\delta n} = (\det M)^{\frac{1}{p+1}} \left[\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h^\mu} h^\mu \right] \quad (5.23)$$

Se consideramos agora a ação (5.6) com o lagrangiano (5.7) pode-se demonstrar facilmente que o jacobiano pode ser escrito como:

$$\frac{\partial(X^{\mu_0}, \dots, X^{\mu_p})}{\partial(\sigma_0, \dots, \sigma_p)} = \frac{1}{\det M} \begin{vmatrix} f_{,1}^{\mu_0} & f_{,1}^{\mu_1} & \dots & f_{,1}^{\mu_p} \\ f_{,2}^{\mu_0} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{,p}^{\mu_0} & \dots & \dots & \dots \\ h^{\mu_0} & \dots & \dots & h^{\mu_p} \end{vmatrix} \quad (5.24)$$

e daqui:

$$\mathcal{L}_p = \frac{1}{(p+1)!} \frac{1}{(\det M)^2} \begin{vmatrix} f_{,1}^2 & f_{,1} \cdot f_{,2} & \dots & f_{,1} \cdot h \\ f_{,2} \cdot f_{,1} & f_{,2}^2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_p \cdot f_1 & \dots & \dots & \dots \\ h \cdot f_{,1} & \dots & \dots & h^2 \end{vmatrix} \quad (5.25)$$

donde se segue que:

$$h^\mu \frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial h^\mu} = 2\mathcal{L}_p \quad (5.27)$$

$$f_{,i}^\mu \frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial h^\mu} = 0 \quad (5.27)$$

As equações (5.22) são assim automaticamente satisfeitas como uma consequência da invariância da ação S_p por reparametrizações de $\sigma_a(s)$ e $f_\mu(s)$. Além disso:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial h^\mu}\right)^2 = 4 \left(\frac{1}{(p+1)!} \frac{1}{(\det M)^2} \right) \begin{vmatrix} f_{,1}^2 & f_{,1} \cdot f_{,2} & \dots & f_{,1} \cdot f_{,p} \\ f_{,2} \cdot f_{,1} & f_{,2}^2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{,p} \cdot f_{,1} & \dots & \dots & f_{,p}^2 \end{vmatrix} \mathcal{L}_p \quad (5.28)$$

de modo que podemos combinar (5.21) e (5.23) em apenas uma equação de "difusão", se introduzimos a derivada funcional com respeito ao volume de evolução, $\frac{\delta}{\delta V} = \frac{1}{N} \frac{\delta}{\delta n}$; temos:

$$\left(\frac{\delta S}{\delta f^\mu}\right)^2 = \frac{(p+1)!}{4} T |f| \frac{\delta S}{\delta V} \quad (5.29)$$

onde o fator de proporcionalidade é:

$$\begin{aligned} |f| &= \begin{vmatrix} f_{,1}^2 & f_{,1} \cdot f_{,2} & \dots & f_{,1} \cdot f_{,p} \\ f_{,2} \cdot f_{,1} & f_{,2}^2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{,p} \cdot f_{,1} & \dots & \dots & f_{,p}^2 \end{vmatrix} \\ &= \det f_{,i}^\mu f_{,j}^\nu \eta_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{p!} \left| \frac{\partial(f^{\mu_1}, \dots, f^{\mu_p})}{\partial(s_1, \dots, s_p)} \right|^2 \end{aligned} \quad (5.30)$$

o qual tem a estrutura da ação quadrática para uma (p-1)-brana com coordenadas f^μ parametrizada por s_i . Portanto, $|f|$ é invariante por reparametrizações do contorno. Além disso, a ação quadrática é invariante por reparametrizações simpléticas gerais tal como no caso da corda [39] já que se depende apenas da medida V e não da forma do domínio de evolução \mathcal{R} . Matematicamente, isto significa que podemos substituir $\frac{\delta S}{\delta V}$ por $\frac{\partial S}{\partial V}$ na equação

(5.29) [43]. Por razões de conveniência podemos introduzir a derivada funcional com respeito a um elemento de volume $(p+1)$ -dimensional, digamos $v_{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_p}$ antisimétrico em todos os índices

$$\frac{\delta}{\delta v_{\mu_0 \mu_1 \dots \mu_p}(X(s))} = \frac{\partial(s_1, \dots, s_p)}{\partial(X^{\mu_0}, \dots, X^{\mu_p})} \frac{\delta}{\delta X_{\mu_0}} \quad (5.31)$$

A vantagem destas derivadas funcionais de volume é a forma que toma a equação de difusão funcional, esta é:

$$\frac{\delta^2}{\delta v_{\mu_0 \dots \mu_{-p}} \delta v^{\mu_0 \dots \mu_p}} S = \kappa \frac{\partial S}{\partial V} \quad (5.32)$$

onde $\kappa = \frac{p+1}{4} T$.

O "propagador de difusão" $K[M, M_0]^2$ para uma configuração inicial da p -brana M_0 e que evolui a uma configuração final M satisfaz a equação:

$$\frac{\delta^2}{\delta v_{\mu_0 \dots \mu_p} \delta v^{\mu_0 \dots \mu_p}} K[M, M_0] = \kappa \frac{\partial K[M, M_0]}{\partial V} \quad (5.33)$$

a qual possui a seguinte solução formal:

$$K[M, M_0] = \int DX^\mu(\sigma) \exp[-S_p] \quad (5.34)$$

onde X^μ são os pontos interiores do volume $(p+1)$ -dimensional.

A equação (5.33) pode ser vista como a generalização para objetos extensos da equação de Hamilton-Jacobi para partículas puntuais ($p = 0$ e $\kappa = m$). A equação de difusão funcional (5.33) é basicamente a equação quântica completa para o propagador livre e a sua solução completa é altamente não trivial. Fisicamente, o volume de evolução para a p -brana é o análogo do tempo próprio para o caso da partícula relativística puntual.

Até onde sabemos, o cálculo da integral funcional (5.34) nunca foi apresentado na literatura, talvez uma forma possível, seja um cálculo à Regge, como se propôs previamente para o caso da corda [44].

A equação (5.34) pode ser vista como uma expressão explícita para o propagador de uma p -brana em segunda quantização no mesmo sentido que



o propagador da partícula livre é por sua vez o propagador para uma teoria de campos de spin 0.

Estes aspectos, no entanto, precisam ser investigados mais detalhadamente.

6. . Um Modelo de P-branas Nulas Supersimétricas

No Capítulo 2, fizemos a supersimetrização da corda de Schild e obtivemos um modelo de corda com spin, o qual pode servir como "laboratório teórico" para estudar propriedades mais complicadas das supercordas.

Nesta seção, vamos estender o método usado no Capítulo 2 e apresentaremos um modelo de p-branas nulas com supersimetria local no volume de evolução. O resultado tem uma característica muito interessante: De fato, na literatura discutiu-se extensamente que as membranas com spin não existem [45]. A afirmação refere-se ao caso de membranas com tensão. Entretanto, apresentaremos aqui um exemplo que mostra que talvez esta afirmação não seja válida para o caso de objetos extensos sem tensão.

Para construir o modelo começamos considerando o segundo ponto de vista mencionado na seção anterior e coloquemos $T = 0$ nos vínculos (5.3), então:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\perp &= P^2 \\ \mathcal{H}_k &= P_\mu X_{,k}^\mu\end{aligned}\tag{6.1}$$

A álgebra de vínculos (6.1) é precisamente a álgebra (5.4) colocando-se $T = 0$ na primeira equação. Começamos definindo $P + 1$ geradores fermiônicos dados por:

$$\mathcal{S}_a(\sigma) = \Gamma_a^\mu P_\mu(\sigma)\tag{6.2}$$

onde $a = \perp, 1, \dots, p$ e $\sigma = \sigma_0, \sigma_2, \dots, \sigma_p$. são as coordenadas que parametrizam o volume de evolução da p-brana. P_μ avaliado no ponto σ é o momento da p-brana, e os Γ_a^μ são quantidades reais que transformam-se como spinores no volume de evolução e como vetores no espaço-tempo em que está imersa a p-brana.

Se supomos que os Γ_a^μ satisfazem a álgebra de Clifford:

$$\{\Gamma_a^\mu(\sigma), \Gamma_b^\nu(\sigma')\} = i\delta_{ab}\mathcal{H}_\perp^S(\sigma)\delta(\sigma, \sigma')\tag{6.3}$$

então é fácil verificar que:

$$\{\mathcal{S}_a(\sigma), \mathcal{S}_b(\sigma')\} = 2i\delta_{ab}\mathcal{H}_\perp^S(\sigma)\delta(\sigma, \sigma')\tag{6.4}$$

de onde:

$$\mathcal{H}_\perp^S(\sigma) = \mathcal{H}_\perp(\sigma) = P^2(\sigma) \quad (6.5)$$

O passo seguinte na construção é verificar se os colchetes de Poisson restantes são fechados.

É fácil ver que:

$$\begin{aligned} [\mathcal{S}_a(\sigma), \mathcal{H}_\perp^S(\sigma')] &= 0 \\ [\mathcal{H}_\perp^S(\sigma), \mathcal{H}_\perp^S(\sigma')] &= 0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

mas não sabemos o que acontece com os parênteses que contém \mathcal{H}_i^S porque não sabemos que forma eles têm. Um cálculo direto mostra que:

$$\mathcal{H}_i^S(\sigma) = \mathcal{H}_i(\sigma) + \frac{i}{2} \sum_{a=1}^p \Gamma_a^\mu(\sigma) \partial_i \Gamma_{a\mu} \quad (6.7)$$

e então verifica-se que:

$$\begin{aligned} [\mathcal{S}_a(\sigma), \mathcal{H}_i^S(\sigma')] &= \frac{1}{2} (\mathcal{S}_a(\sigma) + 2\mathcal{S}_a(\sigma')) \partial_i \delta(\sigma, \sigma') \\ [\mathcal{H}_\perp^S(\sigma), \mathcal{H}_i^S(\sigma')] &= (\mathcal{H}_\perp^S(\sigma) + \mathcal{H}_\perp^S(\sigma')) \partial_i \delta(\sigma, \sigma') \\ [\mathcal{H}_i^S(\sigma), \mathcal{H}_j^S(\sigma')] &= \mathcal{H}_j^S(\sigma) \partial_i \delta(\sigma, \sigma') + \mathcal{H}_i^S(\sigma') \partial_j \delta(\sigma, \sigma') \end{aligned} \quad (6.8)$$

O conjunto de relações (6.4), (6.6) e (6.8) são a superálgebra de uma p-brana nula supersimétrica. Assim, os vínculos (6.2), (6.5) e (6.7) são de primeira classe.

O hamiltoniano deste modelo então é:

$$H = \int d^p \sigma [N^\perp \mathcal{H}_\perp^S + N^k \mathcal{H}_k^S + \bar{\lambda}^a \mathcal{S}_a] = 0 \quad (6.9)$$

onde N_\perp, N_k e $\bar{\lambda}^a$ são multiplicadores de Lagrange. Fisicamente, (N^\perp, N^k) e λ^a representam o graviton e o gravitino [46].

Pode-se verificar sem grande dificuldade que este modelo possui invariância por transformações de supersimetria locais. De fato, notemos que:

$$\delta X^\mu(\sigma) = [X^\mu(\sigma), \sum_{a=1}^p \int d^p \sigma' \zeta_a(\sigma') \mathcal{S}_a(\sigma')]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{a=\perp}^p \zeta_a(\sigma) \Gamma_a^\mu(\sigma) \\
&\delta P^\mu(\sigma) = 0
\end{aligned}
\tag{6.10}$$

$$\delta \Gamma_a^\mu(\sigma) = \zeta_a(\sigma) P^\mu(\sigma)$$

onde ζ é um parâmetro de Grassman local (mais transformações apropriadas para δN^a e $\delta \lambda^a$).

O último passo é a quantização deste modelo. Entretanto, é necessário resolver ainda alguns problemas clássicos, em particular o problema da fixação do gauge é a parte mais importante, e, aparentemente, a mais difícil. Não obstante, justificamos a apresentação deste modelo porque é um exemplo explícito em que se prova a existência de p-branas com supersimetria local.

*

Capítulo IV

Quantização BRST e Teorias Covariantes Gerais

Capítulo IV

Quantização BRST e Teorias Covariantes Gerais

7. Introdução

Na quantização de teorias de Yang-Mills é fundamental introduzir fantasmas para preservar a unitariedade. Os fantasmas são campos fictícios com estatística oposta aos campos em questão, e foram introduzidos por Feynman , em 1963, em seu estudo de gravidade quântica [48].

No contexto de teorias de Yang-Mills, os fantasmas entram de maneira menos intuitiva, ainda que convincente. De fato, devido à invariância de gauge, existem muitas histórias equivalentes que é necessário eliminar (e ficar apenas com um representante delas) por meio de um procedimento de fixação do gauge.

Então, o procedimento padrão introduzido por Faddeev e Popov [49] , consiste em inserir na integral funcional

$$Z = \int DA_\mu e^{-S[A]} \quad (7.1)$$

um fator "1" que preserve a invariância de gauge de (7.1). O fator adequadamente escolhido permite escrever (7.1) na forma:

$$Z = \int DA_\mu \delta[g(A)] \det\left(\frac{\delta g}{\delta \omega}\right) e^{-S[A]} \quad (7.2)$$

Aqui, $g(A) = 0$ é a condição de gauge, e as funções $\omega(x)$ denotam os parâmetros do grupo de gauge. A equação (7.2) determina a função geratriz correta para a teoria de Yang-Mills e não há ambiguidade de contagem extra de histórias, como acontece com (7.1). Entretanto, no momento de estudar a estrutura perturbativa da teoria, a expressão (7.2) é inadequada para determinar as regras de Feynman e, por essa razão, é necessário fazer uma modificação. O procedimento, também introduzido por Faddeev e Popov, consiste em exponenciar o determinante por meio da identidade:

$$\det\left(\frac{\delta g^A(x)}{\delta \omega^B(y)}\right) = \int D\eta^* D\eta e^{i \int d^4x d^4y \eta^{*A}(x) \frac{\delta g^A(x)}{\delta \omega^B(y)} \eta^B(y)} \quad (7.3)$$

onde os η e η^* são campos anticomutativos e se transformam como elementos da representação adjunta do grupo, e são conhecidos agora como "fantasmas de Faddeev-Popov".

Com o uso de (7.3) e a representação integral da função- δ , a integral (7.2) tem a seguinte estrutura geral:

$$Z = \int D\eta^* D\eta \int DA^\mu e^{-S_{eff}} \quad (7.4)$$

onde S_{eff} é a ação efetiva.

A teoria recém discutida é unitária por construção, (embora isto não seja explícito aqui). Um aspecto importante, e não observado por Faddeev e Popov em seu trabalho original, é que a ação efetiva não é invariante de gauge e a pergunta é então: O que aconteceu com ela?

Uma resposta a esta pergunta foi dada por Becchi, Rouet e Stora e independentemente por Tyutin [12], (BRST). A razão é que a inclusão de fantasmas é equivalente a trocar a simetria de gauge local, por uma supersimetria global conhecida agora como simetria BRST. A importância da descoberta de BRST foi rapidamente compreendida por Fradkin e colaboradores que generalizaram a simetria de BRST para outras teorias de gauge e desenvolveram um formalismo geral chamado formalismo de Batalin-Fradkin-Vilkovisky (BFV) [13].

O formalismo de BFV, além da sua generalidade, tem importantes ramificações em teoria de cohomologia [50] e tudo leva a crer que um estudo sistemático dele possa, talvez, conduzir a um grande aprofundamento no entendimento da estrutura das teorias de gauge. Entretanto, devido à generalidade do formalismo de BFV, na prática, é pouca a informação que se pode obter dele, a menos que se faça um estudo exemplo por exemplo.

Para o caso de teorias covariantes gerais, o método de BFV em sua versão integral funcional foi escassamente discutido na literatura [29], e a maioria dos trabalhos feitos neste campo se relacionam com a quantização operatorial [51].

Nos trabalhos citados anteriormente, os autores vêm-se obrigados a usar elementos que não estão no formalismo afim de obter resultados corretos. Em nossa opinião, isto é um indício de que o formalismo de BFV não está completo, porque, como veremos, não fixa todas as trajetórias no espaço de fase para o caso de teorias covariantes gerais.

Neste capítulo, proporemos uma modificação do teorema de Fradkin-Vilkovisky [19], e o aplicaremos a alguns exemplos. Na próxima seção, revisamos o formalismo de BFV e modificamos o teorema de Fradkin-Vilkovisky com um exemplo especial. Na seção 9, aplicamos o formalismo à partícula relativística supersimétrica. Na seção 10, o estendemos ao caso de bósons quirais supersimétricos. Na seção 11, o formalismo de BFV é usado para quantizar as cordas nulas bosônicas e supersimétricas e determinamos as dimensões críticas em que, quanticamente, estas cordas são consistentes.

8. O Formalismo de BFV

Consideremos um sistema hamiltoniano com N graus de liberdade e m vínculos de primeira classe ϕ_a , os quais satisfazem a álgebra:

$$[\phi_a, \phi_b] = C_{ab}^c \phi_c \quad (8.1)$$

onde $[,]$ denota colchetes de Poisson e as C_{ab}^c são constantes de estrutura que, em geral, também podem depender dos campos.

A ação para este sistema é:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt (p_i \dot{q}^i - H_0 - \lambda^a \phi_a), \quad (8.2)$$

onde H_0 é o hamiltoniano canônico e as λ^a são os m multiplicadores de Lagrange.

Nesta versão "à la Dirac" dos sistemas hamiltonianos com vínculos, os multiplicadores de Lagrange λ^a são quantidades estranhas ao formalismo. Por razões de consistência, podemos supor que existe um momento canônico π_a conjugado a λ^a e, em vez de considerar o espaço de fase original (p, x) , consideramos:

$$(p^i, x_i) \longrightarrow (p^i, x_i) \oplus (\pi_a, \lambda^a) \quad (8.3)$$

No entanto, para não mudar o conteúdo dinâmico da teoria (8.2), devemos impor que os π_a sejam novos vínculos da teoria, isto é:

$$\pi_a = 0. \quad (8.4)$$

Se denotamos por $G_a = (\pi_a, \phi_a)$ os $2m$ novos vínculos, segue-se que a álgebra (8.1) é:

$$[G_a, G_b] = K_{ab}^c G_c. \quad (8.5)$$

O próximo passo na construção de BFV consiste em aumentar o espaço de fase estendido (8.3) introduzindo para cada vínculo um par de fantasmas (η_a, \mathcal{P}^a) canonicamente conjugados entre si, i.e., satisfazendo:

$$\begin{aligned}\{\eta_a, \eta_b\} &= 0, \{\mathcal{P}^a, \mathcal{P}^b\} = 0, \\ \{\eta_a, \mathcal{P}^b\} &= -\delta_a^b\end{aligned}$$

onde $\{, \}$ e o colchete de Poisson simétrico. Assim, o novo espaço de fase é:

$$(p^i, x_i) \longrightarrow (p^i, x_i) \oplus (\pi_a, \lambda^a) \oplus (\mathcal{P}^a, \eta_a) \quad (8.6)$$

Do ponto de vista das simetrias da teoria (8.2), substituir o espaço de fase original por (8.6) é equivalente a substituir a simetria de gauge local por uma supersimetria global entre as variáveis bosônicas (fermiônicas) da teoria, e os fantasmas anticomutativos (comutativos). Esta é chamada uma simetria de BRST.

O gerador da simetria BRST (Q) é conhecido como carga BRST, e do ponto de vista matemático, é o operador que calcula a cohomologia do grupo de gauge (digamos G) com os valores na representação definida pelos vínculos G_a .

Para construir a carga BRST devemos ter em conta o seu caráter fermiônico. A nível clássico, a cohomologia se manifesta na propriedade de nilpotência

$$\{Q, Q\} = 0 \quad (8.7)$$

Seguindo Hennaux [52], se escolhermos que Q tenha estrutura geral:

$$Q = \sum_{n \geq 0} Q^{(n)a_1 \dots a_n} \mathcal{P}_{a_n} \dots \mathcal{P}_{a_1} \quad (8.8)$$

sendo $Q^{(n)a_1 \dots a_n}$ coeficientes que têm paridade de Grassman +1. Então, se impomos a propriedade adicional de que, na ordem mais baixa,

$$Q^{(0)} = \eta^a G_a \quad (8.9)$$

segue-se então que a forma mais geral da carga BRST para uma teoria com uma álgebra de vínculos (8.5) é:

$$Q = \eta_a G^a + \frac{1}{2} \mathcal{P}^a K_a^{bc} \eta_b \eta_c + \dots \quad (8.10)$$

Uma vez que a estrutura geral da carga BRST está determinada, pode-se começar a estudar a mecânica clássica neste espaço de fase estendido. Uma revisão exhaustiva disto se encontra em [52].

Estabelecido o formalismo clássico invariante de BRST, o passo seguinte é quantizar seguindo os métodos usuais.

O problema de definir uma amplitude vácuo-vácuo no caso de uma teoria de gauge geral é muito mais difícil do que no caso de uma teoria do tipo de Yang-Mills, porque, em geral, o lagrangiano efetivo deve conter termos de quatro férmions (ou $2p$ férmions, como no caso da p -brana) e assim, o método ingênuo de Faddeev-Popov no caso geral não funciona.

O problema de quantizar teorias com vínculos de primeira classe consiste em encontrar uma expressão para a integral funcional que contenha as propriedades mencionadas acima.

A solução para este problema foi proposta por Fradkin e Vilkovisky , a qual estabelecemos mediante o seguinte teorema:

Teorema

Seja um sistema hamiltoniano com vínculos de primeira classe e sujeito a condições de contorno invariantes de BRST. Seja S_{eff} a ação efetiva definida por:

$$S_{eff} = \int_{t_1}^{t_2} dt (p_i \dot{x}^i + \dot{\eta}_a \mathcal{P}^a + \pi_a \dot{\lambda}^a - H_0 - \{Q, \psi\}), \quad (8.11)$$

onde Q é a carga BRST e Ψ é uma função de fixação do gauge (fermion de gauge).

Então, a integral funcional

$$Z_\Psi = \int D\mu \exp [iS_{eff}], \quad (8.12)$$

é independente da escolha de Ψ .

Em (8.12), $D\mu$ é uma medida de Liouville que estabelece que a integração deve ser feita sobre todo o espaço de fase. A demonstração do teorema pode ser encontrada no artigo de revisão [52].

Na literatura [52] , usualmente, discute-se três tipos de condições de contorno invariantes de BRST, uma das mais usadas é a seguinte:

$$x(t_1) = x_1 \quad x(t_2) = x_2$$

$$\eta_a(t_1) = 0 = \eta_a(t_2) \quad (8.13)$$

$$\pi_a(t_1) = 0 = \pi_a(t_2)$$

Agora, com estas condições de contorno, apresentaremos um argumento que mostra que, para o caso de teorias covariantes gerais, o teorema de Fradkin-Vilkovisky é incompleto. Daremos nosso argumento em um caso especial, o da partícula relativística. Para outras situações, com vínculos arbitrários (mas invariantes por reparametrizações) a demonstração não é trivial.

A partícula relativística massiva está descrita pela seguinte ação:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} d\tau (p^\mu \dot{x}_\mu - N\mathcal{H}) \quad (8.14)$$

onde N é um multiplicador de Lagrange e \mathcal{H} é um vínculo de primeira classe definido por:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(p^2 + m^2) = 0 \quad (8.15)$$

É fácil ver que (8.14) é invariante pelo seguinte conjunto de transformações:

$$\delta x_\mu = \epsilon p_\mu$$

$$\delta p_\mu = 0 \quad (8.16)$$

$$\delta N = \dot{\epsilon}$$

as quais são a versão hamiltoniana da invariância por reparametrizações . Não obstante, um ponto importante que é necessário enfatizar aqui, é que a invariância da ação (8.14) é garantida apenas se nos extremos(ver apêndice A)

$$\epsilon(t_1) = 0 = \epsilon(t_2) \quad (8.17)$$

A condição (8.1) é uma característica geral das teorias de gauge cujas simetrias não são internas . Se denotamos por π_N o momento canônico associado a N e os fantasmas anticomutativos denotamos por $(\eta, \bar{\mathcal{P}}, \bar{\eta}, \mathcal{P})$ os quais satisfazem:

$$\{\eta, \bar{\mathcal{P}}\} = -1 = \{\bar{\eta}, \mathcal{P}\},$$

$$\{\eta, \bar{\eta}\} = 0 = \{\mathcal{P}, \bar{\mathcal{P}}\}$$

então é fácil demonstrar que a carga BRST é:

$$Q = \eta\mathcal{H} + \mathcal{P}\pi_N \quad (8.18)$$

Se escolhermos Ψ como $N\bar{\mathcal{P}}$ (gauge do tempo próprio) se segue que, pelo teorema de Fradkin-Vilkovisky, a amplitude de transição é:

$$K[x(1), x(2)] = \int DND\pi D\eta D\bar{\mathcal{P}} D\bar{\eta} D\mathcal{P} Dp^\mu Dx_\mu.$$

$$\cdot \exp\left[i \int_{t_1}^{t_2} d\tau (\pi_N \dot{N} + \dot{\eta}\bar{\mathcal{P}} + \dot{\bar{\eta}}\mathcal{P} + p_\mu \dot{x}^\mu + N\mathcal{H} + \mathcal{P}\bar{\mathcal{P}})\right]. \quad (8.19)$$

Para calcular (8.19) necessitamos das condições de contorno (8.13), que neste caso são:

$$\begin{aligned} x(t_1) &= x_1, x(t_2) = x_2, \\ \eta(t_1) &= 0 = \eta(t_2), \bar{\eta}(t_1) = \bar{\eta}(t_2) = 0, \\ \pi(t_1) &= \pi(t_2) = 0 \end{aligned} \quad (8.20)$$

Se integramos em π_N , obtemos $\delta[\dot{N}]$ o que nos diz, que só o modo $N(0)$ contribui, e podemos, conseqüentemente, substituir a integral funcional em N por uma integral ordinária em $N(0)$. As integrais funcionais dos momentos fantasmas são triviais, e o resultado para (8.19) é:

$$\begin{aligned} K[x(1), x(2)] &= \mathcal{N} \int_{-\infty}^{\infty} dN(0) \int D\eta D\bar{\eta} Dx_\mu Dp^\mu \\ &\exp\left[i \int_{t_1}^{t_2} d\tau (p^\mu \dot{x}_\mu + N(0)\mathcal{H} + \dot{\eta}\bar{\eta})\right] \end{aligned} \quad (8.21)$$

onde \mathcal{N} é um fator de normalização.

A integral nos fantasmas se faz diretamente e apenas contribui com $\det(-\partial_\tau^2)$ o qual se pode calcular usando regularização função ζ com as condições de contorno (8.20). O resultado deste cálculo é $t_2 - t_1$ (ver apêndice C). A expressão (8.21) é então:

$$Z_\Psi = \mathcal{N} \int_{-\infty}^{\infty} dT \int Dx^\mu Dp_\mu \exp\left[i \int_{t_1}^{t_2} d\tau (p^\mu \dot{x}_\mu + N(0)\mathcal{H})\right] \quad (8.22)$$

onde $T = N(0)(t_2 - t_1)$

A expressão (8.22) é uma quantidade que tem o "aspecto" de uma representação integral para o propagador de Feynman da partícula relativística, **exceto** pelos limites de integração em T , que no caso do propagador da partícula relativística vão de 0 a ∞ .

O argumento que usualmente se usa na literatura para restringir o intervalo de integração de $(-\infty, \infty)$ a $(0, \infty)$ provem da definição de momento da partícula [29, 54, 55]. De fato, se calculamos o momento da partícula relativística encontramos que este é:

$$p^\mu = \frac{\dot{x}^\mu}{N} \quad (8.23)$$

Então, o ponto central é que a energia (p^0) da partícula é uma função monótona crescente, e, conseqüentemente, não pode passar pelo valor zero. Isto é equivalente a dizer que devemos escolher histórias que se movam para trás ou para diante no tempo. Se escolhermos $N > 0$ ($N < 0$) então (8.22) é justamente uma representação integral funcional para o propagador de Feynman da partícula (antipartícula) relativística.

O argumento anterior, entretanto, não pode ser correto a nível da integral funcional, porque está baseado em argumentos clássicos, e, quanticamente, não há nenhuma razão, em princípio, para dizer que (8.22) seja válida também neste caso (de fato, ela experimenta flutuações quânticas).

Que N tenha que ser integrado entre $-\infty$ a ∞ é um fato que pode ser visto através das equações de movimento clássicas onde se encontra que:

$$N = \pm \sqrt{\frac{-1}{m^2} \left(\frac{\Delta x}{\Delta \tau} \right)^2}$$

Do ponto de vista das equações de movimento, a duplicidade se deve a que estas equações são invariantes ante a simetria discreta $x \rightarrow x, p \rightarrow -p, N \rightarrow -N, \pi \rightarrow \pi$. Estas transformações, como é fácil ver, deixam as condições de contorno (8.19) invariantes e, portanto, dá origem a duas trajetórias clássicas [28].

A dificuldade que se apresenta então é: como escolher uma das duas trajetórias clássicas?

A solução mais simples para este problema é supor que as condições de contorno (8.19) não sejam suficientes para fixar uma e só uma trajetória clássica, sendo então necessário impor uma condição adicional para fixá-la.

A escolha mais simples para este caso é dizer que a quantidade:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} d\tau N(\tau) \quad (8.24)$$

seja sempre positiva. Essa condição efetivamente seleciona uma das trajetórias (por que não é invariante por $N \rightarrow -N$). A imposição $I > 0$ pode ser implementada a nível quântico escrevendo-se a amplitude de transição como:

$$K[x(1), x(2)] = \int D\mu \theta(I) e^{iS_{eff}} \quad (8.25)$$

onde $D\mu = D\pi_N DND\bar{\eta}D\mathcal{P}D\eta D\bar{\mathcal{P}}Dx^\mu Dp_\mu$ e S_{eff} é a ação efetiva definida em (8.18). Aqui $\theta(I)$ é a função degrau.

Com esta modificação para o teorema de Fradkin-Vilkovisky, pode-se escrever a integral funcional na seguinte forma, depois de integrar-se em π_N e nos momentos e coordenadas fantasmas:

$$K[x(1), x(2)] = \mathcal{N} \int DNDx^\mu Dp_\mu \theta(I) \delta[\dot{N}] \Delta\tau \exp\left[i \int_{t_1}^{t_2} d\tau (p^\mu \dot{x}_\mu + N(0)\mathcal{H})\right] \quad (8.26)$$

Para calcular as integrais resultantes separamos o modo zero ($N(0)$) de $N(t)$ como $N(0) + M(t) = N(t)$ e usamos a identidade:

$$\delta[\dot{M}] = \int dN(0) \delta[M(t) - N(0)] \det(\partial_\tau)^{-1}, \quad (8.27)$$

Então, substituindo em (8.26):

$$\begin{aligned} K[x(1), x(2)] &= \\ &= \mathcal{N} \int_{-\infty}^{\infty} dN(0) \int Dx^\mu Dp_\mu \theta(N(0)\Delta\tau) \Delta\tau \exp\left[i \int_{t_1}^{t_2} d\tau (p^\mu \dot{x}_\mu + N(0)\mathcal{H})\right] \\ K[x(1), x(2)] &= \mathcal{N} \int_0^\infty dT \int Dx^\mu Dp_\mu \exp\left[i \int_{t_1}^{t_2} d\tau (p^\mu \dot{x}_\mu + N(0)\mathcal{H})\right] \quad (8.28) \end{aligned}$$

onde $T = N(0)\Delta\tau$ e \mathcal{N} é um fator de normalização.

Pode-se integrar facilmente (8.28) em x^μ e o resultado é:

$$\begin{aligned}
 K[x(1), x(2)] &= \int d^D p \int_0^\infty dT \exp[i(p \cdot \Delta x + T\mathcal{H})] \\
 &= \mathcal{N}' \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\exp ip \cdot (x_2 - x_1)}{p^2 + m^2 - i\epsilon}
 \end{aligned} \tag{8.29}$$

(8.29) é a expressão correta para o propagador de Feynman da partícula relativística.

Em tais circunstâncias, podemos fazer a conjectura de que (8.25) seja uma expressão válida do teorema de Fradkin-Vilkovisky para a amplitude de transição para o caso de teorias covariantes gerais (substituindo-se a S_{eff} por (8.10)). Uma demonstração para o caso geral é claramente necessária. Na referência [56] propõe-se um método que não utiliza as soluções das equações de movimento clássicas e, neste sentido, é mais geral que os argumentos dados aqui. Não obstante, trabalho posterior nesta linha mostra que também é difícil implementar este segundo método à outra classe de teorias.

9. Quantização BRST da Partícula Relativística Supersimétrica

A partícula relativística supersimétrica é um sistema de grande importância como "laboratório teórico", servindo de ajuda na compreensão da estrutura de teorias mais complicadas, como a supergravidade e a supercorda.

Do ponto de vista da Mecânica Quântica Relativística, a existência da partícula relativística supersimétrica explica porque a raiz quadrada da equação de Klein-Gordon é a equação de Dirac. Seguindo esta analogia, é possível derivar os vínculos da supergravidade como a raiz quadrada dos vínculos de relatividade geral [15].

Nesta seção, estudaremos a quantização BRST da partícula relativística supersimétrica usando o formalismo de BFV com a modificação proposta na seção anterior.

Demonstraremos que a quantização da partícula relativística supersimétrica usando este ponto de vista, permite elucidar o problema de construir-se um formalismo lagrangeano de primeira ordem sem introduzir campos auxiliares da teoria supersimétrica, se o formalismo hamiltoniano é

dado[57]. e calculamos explicitamente o propagador da partícula relativística supersimétrica [53].

A partícula relativística supersimétrica com massa é descrita pelos seguintes vínculos [57]:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{1}{2}(p^2 + m^2) = 0, \\ \mathcal{S} &= \theta^\mu p_\mu + m\theta_5 = 0\end{aligned}\tag{9.1}$$

onde θ_μ e θ_5 são variáveis de Grassman que obedecem à seguinte álgebra:

$$\begin{aligned}\{\theta_\mu, \theta^\nu\} &= i\delta_\mu^\nu, \\ \{\theta_5, \theta_5\} &= i\end{aligned}\tag{9.2}$$

Usando (9.2) e a álgebra canônica usual para x^μ e p_μ é fácil ver que a álgebra de vínculos (9.1) é:

$$\begin{aligned}[\mathcal{H}, \mathcal{H}] &= 0, \\ [\mathcal{H}, \mathcal{S}] &= 0, \\ \{\mathcal{S}, \mathcal{S}\} &= 2i\mathcal{H}.\end{aligned}\tag{9.3}$$

Usando (8.9) obtemos a seguinte expressão para a carga BRST:

$$Q = \eta\mathcal{H} + \mathcal{P}\pi_N + c\mathcal{S} + \pi_\lambda\mathcal{P}_c + i\bar{\mathcal{P}}cc\tag{9.4}$$

onde $(\eta, \bar{\eta}, \bar{\mathcal{P}}, \mathcal{P})$ são as coordenadas e momentos fantasmas (anticomutativos) associados a \mathcal{H} , e $(c, \bar{c}, \bar{\mathcal{P}}_c, \mathcal{P}_c)$ são as coordenadas e momentos fantasmas (comutativos) associados a \mathcal{S} , π_λ é o momento canônico do multiplicador de Lagrange anticomutativo λ .

A álgebra das variáveis fantasmas comutativas é :

$$[c, \bar{\mathcal{P}}_c] = 1 = [\bar{c}, \mathcal{P}_c]\tag{9.5}$$

e zero nos demais casos.

Escolheremos a função de fixação do gauge na forma (gauge do tempo próprio):

$$\Psi = \bar{\mathcal{P}}N + \lambda\bar{\mathcal{P}}_c.\tag{9.6}$$

Usando o teorema de Fadkin-Vilkovisky (8.25) se tem que a amplitude de transição é:

$$\begin{aligned}
K[x(1), x(2)] &= \\
&= \int DND\pi_N D\lambda D\pi_\lambda D\eta D\bar{\eta} D\mathcal{P} D\bar{\mathcal{P}} D\mathcal{P}_c D\bar{\mathcal{P}}_c Dc D\theta_\mu D\theta_5 Dp^\mu Dx_\mu \\
\theta(I) \exp[i \int_{t_1}^{t_2} d\tau (\pi_N \dot{N} + \dot{\lambda} \pi_\lambda + \dot{\eta} \bar{\mathcal{P}} + \theta \dot{\eta} \bar{\mathcal{P}} + \bar{\mathcal{P}}_c \dot{c} + \mathcal{P}_c \dot{\bar{c}} - \frac{i}{2} \dot{\theta}^\mu \theta_\mu - \frac{i}{2} \dot{\theta}_5 \theta_5 + \\
&\quad p_\mu \dot{x}^\mu + N\mathcal{H} + \lambda\mathcal{S} - \mathcal{P}\bar{\mathcal{P}} + \mathcal{P}_c \bar{\mathcal{P}}_c - 2i\bar{\mathcal{P}}c\lambda)] \quad (9.7)
\end{aligned}$$

onde I é alguma quantidade invariante por reparametrizações que determinaremos mais tarde. Faremos o cálculo de (9.7) com as seguintes condições de contorno invariantes BRST:

$$\begin{aligned}
x(t_1) &= x_1, x(t_2) = x_2, \\
\eta(t_1) &= \eta(t_2) = c(t_1) = c(t_2) = 0, \\
\bar{\eta}(t_1) &= \bar{\eta}(t_2) = \bar{c}(t_1) = \bar{c}(t_2) = 0, \\
\pi_N(t_1) &= \pi_N(t_2) = \pi_\lambda(t_1) = \pi_\lambda(t_2) = 0 \\
\frac{1}{2}(\theta^\mu(t_1) + \theta^\mu(t_2)) &= \gamma^\mu, \\
\frac{1}{2}(\theta_5(t_1) + \theta_5(t_2)) &= \gamma_5 \quad (9.8).
\end{aligned}$$

onde γ^μ e γ_5 são constantes a determinar. Integrando em $\pi_N, \pi_\lambda, \mathcal{P}, \bar{\mathcal{P}}, \mathcal{P}_c$ e $\bar{\mathcal{P}}_c$ obtemos:

$$\begin{aligned}
K[x(1), x(2), \gamma_\mu] &= \\
&= \int DND\lambda D\eta D\bar{\eta} D\bar{c} Dc D\theta_\mu D\theta_5 \\
&\quad Dp^\mu Dx_\mu \delta[\dot{N}] \delta[\dot{\lambda}] \theta(I)
\end{aligned}$$

$$\exp\left[i \int_{t_1}^{t_2} d\tau (p_\mu \dot{x}^\mu - \frac{i}{2} \dot{\theta}^\mu \theta P_\mu - \frac{i}{2} \dot{\theta}_5 \theta_5 + \right. \\ \left. + N\mathcal{H} + \lambda\mathcal{S} + \dot{\eta}\dot{\bar{\eta}} + 2ic\lambda\dot{P}\dot{\bar{\eta}} - \dot{c}\dot{\bar{c}}\right] \quad (9.10)$$

(9.10) é uma expressão para a integral funcional da partícula relativística supersimétrica no gauge tempo próprio $\dot{N} = 0 = \dot{\lambda}$. Esta expressão nos diz, como no caso da partícula relativística bosônica, que só os modos zero de N e λ contribuem na integração dos multiplicadores de Lagrange e, conseqüentemente, se usamos (8.27) e

$$\delta[\dot{\zeta}] = \int d\lambda(0) \delta[\zeta(t) - \lambda(0)] \det(\partial_\tau)^{+1} \quad (9.11)$$

as integrais funcionais em N e λ em (9.10) podem ser substituídas por integrais ordinárias em $N(0)$ e $\lambda(0)$. Não obstante, há aqui uma importante diferença que é necessário ressaltar: a integral em $\lambda(0)$ é uma integral de Berezin, para a qual o conceito de intervalo de integração não existe.

Do ponto de vista conceitual, isto implica em que a duplicidade de trajetórias clássicas neste caso, só se manifesta no setor bosônico e, em conseqüência, o fator $\theta(I)$ que aparece em (9.10) pode ser substituído pela mesma expressão que aparece no caso puramente bosônico, isto é, por (8.24).

Tendo isto em conta, (9.10) pode ser escrita na seguinte forma:

$$K[x(1), x(2), \gamma_\mu] = \int_{-\infty}^{\infty} dN(0) \int d\lambda(0) \int D\eta DP \bar{\eta} D\bar{c} Dc D\theta_\mu D\theta_5 Dp^\mu Dx_\mu \\ \theta(N(0)\Delta\tau) \exp\left[i \int_{t_1}^{t_2} d\tau (p_\mu \dot{x}^\mu - \frac{i}{2} P \dot{\theta}^\mu \theta_\mu - \frac{i}{2} \dot{\theta}_5 \theta_5 + \right. \\ \left. + N\mathcal{H} + \lambda\mathcal{S} + \dot{\eta}\dot{\bar{\eta}} + 2ic\lambda\dot{\eta} - P\dot{c}\dot{\bar{c}}\right] \quad (9.12)$$

Usando as condições de contorno (9.8) os fantasmas $\eta, \bar{\eta}, c$ e \bar{c} podem ser calculados explicitamente.

Assim, (9.12) é:

$$K[x(1), x(2), \gamma_\mu] = \int_0^\infty dN(0) \int d\lambda(0) \int D\theta_\mu D\theta_5 Dp^\mu Dx_\mu$$

$$\exp\left[i \int_{t_1}^{t_2} d\tau \left(p_\mu \dot{x}^\mu - \frac{i}{2} \dot{\theta}^\mu \theta_\mu - \frac{i}{2} \dot{\theta}_5 \theta_5 + N(0)\mathcal{H} + \lambda(0)\mathcal{S} \right)\right] \quad (9.13)$$

Integrando em p_μ :

$$K[x(1), x(2), \gamma_\mu] = \int_0^\infty dN(0) \int d\lambda(0) \int D\theta_\mu D\theta_5 Dx_\mu \exp\left[i \int_{t_1}^{t_2} d\tau \left(\frac{\dot{x}^2}{2N(0)} - \frac{i}{2} \dot{\theta}^\mu \theta_\mu - \frac{i}{2} \dot{\theta}_5 \theta_5 + \frac{\lambda(0)\theta_\mu \dot{x}^\mu}{N(0)} + \frac{m\lambda(0)\theta_5}{N(0)} \right)\right] \quad (9.14)$$

A ação efetiva que aparece em (9.14) é precisamente a ação de supergravidade unidimensional se interpretamos $N(0)$ e $\lambda(0)$ como o graviton e o gravitino respectivamente [46]. Esta derivação do lagrangiano efetivo da partícula relativística supersimétrica usualmente envolve cálculos complicados e a introdução de campos auxiliares (ver e.g. [57]).

Não fizemos aqui a demonstração da equivalência lagrangiana e hamiltoniana do sistema anterior, mas, nos parece, que mostramos um caminho simples para derivar o lagrangiano efetivo a partir de técnicas BRST.

Se fizermos a mudança de variáveis,

$$x^\mu(t) = x_1^\mu + \frac{\Delta x^\mu}{\Delta t}(t - t_1) + y^\mu(t),$$

$$\theta^\mu(t) = \gamma_5 \gamma^\mu + \psi^\mu(t),$$

$$\theta_5(t) = \gamma_5 + \psi(t), \quad (9.15)$$

onde y^μ, ψ^μ, ψ^5 são flutuações quânticas. Isto, por consistência, implica em que as $y(t)$ satisfaçam às condições de contorno:

$$y^\mu(t_1) = 0 = y^\mu(t_2). \quad (9.16)$$

então, substituindo (9.15) em (9.14) obtemos:

$$K[x(1), x(2), \gamma_\mu] = \int_0^\infty dN(0) \int d\lambda(0) \exp\left[i \left(\frac{(\Delta x)^2}{2T} + \frac{m^2 T}{2} + \frac{\lambda(0)\gamma_5 \gamma_\mu \Delta x^\mu}{N(0)} + \frac{m\lambda(0)\gamma_5}{N(0)} \right)\right]$$

$$\int Dy^\mu \exp\left[i \int_{t_1}^{t_2} d\tau \left(\frac{\dot{y}^2}{2N(0)} - \frac{i}{2} \dot{\psi}\psi - \frac{i}{2} \dot{\psi}_5\psi_5 \right)\right] \quad (9.17)$$

com $T = N(0)\Delta\tau$. Integrando $y(t)$ e $\lambda(0)$:

$$\begin{aligned} K[x(1), x(2), \gamma_\mu] &= \int_0^\infty \frac{dT}{T^{\frac{D+2}{2}}} (\gamma_5 \gamma_\mu \Delta x^\mu + m\gamma_5) \exp\left[i\left(\frac{\Delta x^2}{2T} + \frac{m^2 T}{2} - i\epsilon\right)\right] \\ &= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{e^{ip \cdot \Delta x}}{p^2 + m^2 - i\epsilon} (\gamma_5 \gamma^\mu p_\mu + m\gamma_5) \end{aligned} \quad (9.18)$$

a qual é o propagador de Feynman para uma partícula relativística massiva de spin $\frac{1}{2}$.

10. Quantização BRST de Bósons Quirais Supersimétricos

No Capítulo I, introduzimos um modelo de bósons quirais baseado num argumento de partículas quirais [14]. O modelo foi quantizado canonicamente e revelou explicitamente sua estrutura tensorial de Lorentz. Nesta seção, quantizaremos o modelo seguindo o formalismo de BRST e calcularemos explicitamente os propagadores para o caso geral.

Recordemos que os vínculos neste caso são:

$$\mathcal{H} = (P_0 - P_1)P_1^\gamma$$

$$\mathcal{S} = -\frac{i}{4}\theta_0\left(1 - 2\alpha - \frac{P_0}{P_1}\right)P_1^{\frac{\gamma+1}{2}} - \frac{i}{4}\theta_1\left(1 + 2\alpha - \frac{P_0}{P_1}\right)P_1^{\frac{\gamma+1}{2}}, \quad \gamma = -1, -3, \dots \quad (10.1)$$

onde α é um número real diferente de zero. As variáveis de Grassman θ_μ satisfazem à álgebra:

$$\{\theta_\mu, \theta_\nu\} = 2i\eta_{\mu\nu} \quad (10.2)$$

e a álgebra de vínculos é:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{S}, \mathcal{S}\} &= \alpha\mathcal{H} \\ [\mathcal{S}, \mathcal{H}] &= 0 \end{aligned} \quad (10.3)$$

$$[\mathcal{H}, \mathcal{H}] = 0$$

Para fazer a quantização BRST introduzimos os fantasmas anticomutativos $(\eta, \bar{\eta}, \mathcal{P}, \bar{\mathcal{P}})$ associados a \mathcal{H} , os quais satisfazem:

$$\{\eta, \bar{\mathcal{P}}\} = \{\bar{\eta}, \mathcal{P}\} = -1 \quad (10.4)$$

e os fantasmas comutativos (b, \bar{b}, c, \bar{c}) associados a \mathcal{S} que satisfazem :

$$\{\bar{b}, c\} = \{b, \bar{c}\} = -1 \quad (10.5)$$

Com isto, a carga BRST é:

$$Q = \eta\mathcal{H} + c\mathcal{S} + \Pi_N\mathcal{P} + \Pi_\lambda b + \frac{i}{2}\alpha\bar{\mathcal{P}}c^2 \quad (10.6)$$

onde Π_N e Π_λ são os momentos canônicos dos multiplicadores de Lagrange N e λ respectivamente.

Seguindo o teorema de Fradkin-Vilkovisky o propagador é:

$$K(X(1), X(2), \gamma_\mu) = \int DX_\mu DP_\mu D\theta_\mu DN D\Pi_N D\lambda D\Pi_\lambda D\mathcal{P} D\bar{\eta} D\bar{\mathcal{P}} D\eta Db D\bar{c} D\bar{b} Dc \theta(I) \exp iS_{eff} \quad (10.7)$$

onde $\theta(I)$ é a função degrau definida na seção 6 , I e a quantidade (10.24) e S_{eff} é:

$$S_{eff} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [P^\mu \dot{X}_\mu + \frac{i}{4}\theta^\mu \dot{\theta}_\mu + \Pi_N \dot{N} + \Pi_\lambda \dot{\lambda} - \mathcal{P}\dot{\eta} - \bar{\mathcal{P}}\dot{\eta} + b\dot{c} + \bar{b}\dot{c} - \{Q, \Psi\}] \quad (10.8)$$

Se escolhermos o gauge tempo próprio $\dot{N} = 0 = \dot{\lambda}$ então a função ψ deve ser:

$$\Psi = N\bar{\mathcal{P}} + \lambda\bar{b} \quad (10.9)$$

Com isto, $\{Q, \psi\}$ é:

$$\{Q, \Psi\} = -N\mathcal{H} + \mathcal{S}\lambda - \mathcal{P}\bar{\mathcal{P}} - b\bar{b} + i\alpha\bar{\mathcal{P}}c\lambda \quad (10.10)$$

Se substituimos (10.10) em (10.8) vemos que que as integrais nos fantasmas podem ser feitas sem nenhuma dificuldade. A integração em π_N e π_λ fornece como resultado $\delta[\dot{N}]$ e $\delta[\dot{\lambda}]$ o que diz que só os modos zero contribuem. Assim, a situação é similar à discutida na seção anterior. Então, se denotamos por λ_0 o modo zero de $\lambda(t)$, segue-se que (10.7) é:

$$K(X(1), X(2), \gamma_\mu) = \int_0^\infty dc \int d\lambda_0 \int DX_\mu DP_\mu D\theta_\mu \exp i \int d\tau (P\dot{X} + \frac{i}{4}\theta\dot{\theta} + c\mathcal{H} - S\lambda_0) \quad (10.11)$$

onde, no cálculo de (10.11) se fez os as seguintes mudanças de variáveis:

$$X_\mu = X_\mu(1) + \frac{\Delta X_\mu}{\Delta\tau}(\tau - \tau_1) + Y_\mu$$

$$\theta_\mu = \frac{1}{2}\gamma_\mu + \tilde{\theta}_\mu \quad (10.12)$$

$$\Delta X_\mu = X_\mu(2) - X_\mu(1)$$

onde $Y_\mu, \tilde{\theta}$ são flutuações quânticas e γ_μ e uma constante a determinar. A integração nas variáveis restantes é efetuada como na seção anterior. Assim, (exceto fatores numéricos) obtemos:

$$K(X(1), X(2), \gamma_\mu) = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{[\gamma_0(1 - 2\alpha - p_0/p_1) + \gamma_1(1 + 2\alpha - p_0/p_1)]p_1^{\frac{\gamma-1}{2}}}{p_0 - p_1 + i\epsilon} e^{ip \cdot \Delta X} \quad (10.13)$$

Se agora usamos $\gamma_0 = \sigma_1, \gamma_1 = i\sigma_2$ vemos que (10.13) pode ser escrita na forma:

$$K(X(1), X(2), \gamma_\mu) = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} e^{ip \cdot \Delta X} K(p) \quad (10.14)$$

onde

$$K(p) = \begin{pmatrix} 0 & p_1^{\frac{\gamma-3}{2}} \\ \frac{2\alpha p_1^{\frac{\gamma-1}{2}}}{p_0 - p_1} & 0 \end{pmatrix} \quad (10.15)$$

No mesmo sentido que o propagador da partícula relativística é o propagador para um campo de spin zero, interpretamos o resultado (10.15) como um propagador na representação de momento de um **campo** $\psi_{\alpha, \alpha_1 \dots \alpha_n}$. Então, (10.14) tem a seguinte estrutura geral:

$$K(X(1), X(2), \gamma_\mu) =$$

$$= \begin{pmatrix} \langle \psi_{2\alpha_1 \dots \alpha_n}^\dagger(x_1) \psi_{1\alpha'_1 \dots \alpha'_n}(x_2) \rangle & \langle \psi_{1\alpha_1 \dots \alpha_n}^\dagger(x_1) \psi_{1\alpha'_1 \dots \alpha'_n}(x_2) \rangle \\ \langle \psi_{2\alpha_1 \dots \alpha_n}^\dagger(x_1) \psi_{2\alpha'_1 \dots \alpha'_n}(x_2) \rangle & \langle \psi_{1\alpha_1 \dots \alpha_n}^\dagger(x_1) \psi_{2\alpha'_1 \dots \alpha'_n}(x_2) \rangle \end{pmatrix} \quad (10.16)$$

Assim, e.g., para $\gamma = -1$, (que corresponde a um campo de spin 1) (10.6) tem a seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} -\langle A^- A^+ \rangle & \langle A^+ A^+ \rangle \\ \langle A^- A^- \rangle & -\langle A^+ A^- \rangle \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\alpha} \\ \frac{-2p_1}{p_0 - p_1} & 0 \end{pmatrix} \quad (10.17)$$

a qual é o propagador em coordenadas cone de luz de um bóson quiral de spin 1.

11. Quantização BRST Operatorial de Cordas Nulas Bosônicas e Supersimétricas

Nesta seção, faremos a quantização BRST operatorial de cordas nulas bosônicas e supersimétricas. Estas cordas já foram discutidas no Capítulo II, em sua versão clássica, e a motivação fundamental para estudá-las é que elas são objetos sem massa que se movem a energias da ordem da de Planck. Nesta seção quantizaremos a corda nula bosônica e a supersimétrica seguindo o formalismo de BFV operatorial. O resultado principal que apresentaremos é que estes objetos são quanticamente consistentes apenas se as dimensões D do espaço-tempo em que está imersa a corda são 10 (26) para o caso supersimétrico (bosônico).

Para demonstrar os resultados acima, reescrevamos novamente os vínculos da corda nula supersimétrica em modos de Fourier:

$$\mathcal{H}_n^\perp = p_{n-k} \cdot p_k$$

$$\mathcal{H}_n^1 = k p_{n-k} \cdot x_k - \frac{k}{2} \gamma_{n-k}^a \cdot \gamma_k^a \quad (11.1)$$

$$\mathcal{S}_n^a = p_{n-k} \cdot \gamma_k^a \quad (a = \perp, 1)$$

onde supomos somas implícitas nos índices repetidos. Os vínculos de (11.1) se reduzem aos da corda nula bosônica se colocamos $\gamma = 0$, assim consideraremos (11.1) como os vínculos gerais para o nosso problema.

Os vínculos (11.1) satisfazem a seguinte álgebra de colchetes de Poisson:

$$\begin{aligned} [\mathcal{H}_n^a, \mathcal{H}_n^1] &= i(n-m)\mathcal{H}_{n+m}^a \\ [\mathcal{S}_m^a, \mathcal{H}_n^1] &= i\left(\frac{n}{2} - m\right)\mathcal{S}_{m+n}^a \end{aligned} \quad (11.2)$$

$$[\mathcal{S}_m^a, \mathcal{H}_n^\perp] = 0$$

$$\{\mathcal{S}_m^a, \mathcal{S}_n^b\} = i\delta^{ab}\mathcal{H}_{m+n}^\perp$$

Para fazer a quantização de BRST operatorial necessitamos introduzir dois pares de fantasmas anticomutativos: (η_a, \mathcal{P}^a) associados aos vínculos comutativos \mathcal{H}_a e outros dois pares de fantasmas comutativos $(\tilde{\eta}_a, \tilde{\mathcal{P}}^a)$ associados aos vínculos anticomutativos \mathcal{S}_a . Os colchetes de Poisson correspondentes aos modos de Fourier dos fantasmas são:

$$\{\mathcal{P}_n^a, \eta_{bm}\} = -\delta_b^a \delta_{m+n,0}$$

$$[\tilde{\mathcal{P}}_n^a, \tilde{\eta}_{mb}] = -\delta_b^a \delta_{m+n,0} \quad (11.3)$$

O passo seguinte é construir a carga BRST clássica e em seguida fazer a substituição:

$$(\text{Variável Dinâmica}) \longrightarrow (\text{Operador}) \quad (9.4)$$

Para o caso da carga BRST, a substituição (11.4) não está bem definida porque Q tem problemas de ordenamento (já que os modos zeros não comutam entre si) e é necessário regularizá-la na forma [51]:

$$Q \rightarrow \hat{Q} =: Q : + \alpha_0 \eta_0^1 \quad (11.5)$$

onde α_0 é uma constante a ser determinada .

Tendo em conta (11.5), encontramos que a carga BRST quântica tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \hat{Q} = & \eta_k^a \mathcal{H}_{-k}^a + \tilde{\eta}_k^a \mathcal{S}_{-k}^a + (m-n)\eta_m^\perp \eta_n^1 \mathcal{P}_{-n-m}^\perp + \frac{1}{2}(m-n)\eta_m^1 \eta_m^1 \mathcal{P}_{-m-n}^1 \\ & + (m - \frac{n}{2})\tilde{\eta}_m^a \eta_n^1 \tilde{\mathcal{P}}_{-m-n}^a - \frac{1}{2}\tilde{\eta}_m^a \tilde{\eta}_n^a \mathcal{P}_{-m-n}^\perp + \alpha_0 \eta_0^1 \end{aligned} \quad (11.6)$$

Em (11.6) supomos que todos os produtos estão normalmente ordenados, isto é, os modos positivos estão à direita.

Seguindo os argumentos padrão de quantização BRST da corda [51, 58], os operadores de Virasoro são:

$$L_m = \{Q, \mathcal{P}_m^1\} = L_m^{materia} + L_m^\perp + L_m^1 + L_m^{\tilde{1}} + L_m^{\tilde{1}} - \alpha_0 \delta_{m0} \quad (11.7)$$

onde

$$\begin{aligned} L_m^{materia} &= -\mathcal{H}_m^1 = L_m^x + L_m^{\gamma^\perp} + L_m^{\gamma^1} \\ L_m^x &= -k p_{m-k} \cdot x_k \\ L_m^{\gamma^a} &= \frac{k}{2} \gamma_{m-k}^a \cdot \gamma_k^a \\ L_m^a &= (k+m)\eta_k^a \mathcal{P}_{m-k}^a \\ L_m^{\tilde{a}} &= (k + \frac{m}{2})\tilde{\eta}_k^a \tilde{\mathcal{P}}_{m-k}^a \end{aligned} \quad (11.8)$$

Nas três últimas expressões, não somamos em a . Cada um dos conjuntos de operadores (11.8) satisfazem à seguinte álgebra de Virasoro:

$$[L_m^{\dots}, L_n^{\dots}] = (m-n)L_{m+n}^{\dots} + A_m^{\dots} \delta_{m+n,0} \quad (11.9)$$

onde \dots pode ser representada por $x, \gamma_a, a, \tilde{a}$ ($a = \perp, 1$).

O passo seguinte é definir o vácuo $|0\rangle$. Nossa definição de vácuo é a seguinte:

$$\begin{aligned} x_m^\mu |0\rangle &= p_m^\mu |0\rangle = \gamma_m^a |0\rangle = \eta_m^a |0\rangle = \\ &= \mathcal{P}_m^a |0\rangle = \tilde{\eta}_m^a |0\rangle = \tilde{\mathcal{P}}_m^a |0\rangle = 0, \quad m > 0 \end{aligned} \quad (11.10)$$

Esta escolha de vácuo é equivalente a afirmar que a função de onda do estado fundamental é uma função apenas dos modos zero da corda.

Definindo agora os operadores:

$$M_m = \{Q, \mathcal{P}_m^\perp\} = -\mathcal{H}_m^\perp + (m+k)\eta_k^1 \mathcal{P}_{m-k}^\perp$$

$$F_m^a = \{Q, \tilde{\mathcal{P}}_m^a\} = \mathcal{S}_m^a - (m + \frac{k}{2})\eta_k^1 \tilde{\mathcal{P}}_{m-k}^a - \tilde{\eta}_{m-k}^a - \tilde{\eta}_k^a \mathcal{P}_{m-k}^\perp \quad (11.11)$$

segue-se que:

$$L_0|0\rangle = -\alpha_0|0\rangle \quad (11.12)$$

e que os estados físicos são aqueles que satisfazem

$$L_m|0\rangle = M_m|0\rangle = F_m^a|0\rangle = 0 \quad m > 0 \quad (11.13)$$

os demais estados físicos se constróem aplicando: $L_m^\dagger = L_{-m}$, $M_m^\dagger = M_{-m}$ e $F_m^{a\dagger} = F_{-m}^a$ sucessivamente sobre $|0\rangle$.

A álgebra do conjunto de operadores (11.7) e (11.11) é a seguinte:

$$[M_m, M_n] = 0 = [M_m, F_n^a]$$

$$[M_m, L_n] = (m-n)M_{m+n}$$

$$\{F_m^a, F_n^b\} = \delta^{ab}M_{m+n} \quad (11.14)$$

$$[L_m, F_n^a] = (\frac{m}{2} - n)F_{m+n}^a$$

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + A_m \delta_{m+n,0}$$

Para calcular a anomalia A_m usamos o truque bem conhecido de calcular $\langle 0|[L_m, L_{-m}]|0\rangle$ de duas maneiras diferentes [58]. Avaliando a expressão anterior obtemos (sem soma em m):

$$\langle 0|[L_m, L_{-m}]|0\rangle = A_m - 2m\alpha_0 \quad (11.15)$$

e calculando esta expressão para $m = 1, 2$ e exigindo que a identidade de Jacobi seja satisfeita obtemos que a anomalia deve ter a forma: $A_m = c_3 m^3 + c_1 m$.

Para o caso da corda nula bosônica verifica-se que a anomalia tem a seguinte forma:

$$A_m^x = \frac{D}{6}(m^3 - m)$$

$$A_m^\perp = A_m^1 = \frac{1}{6}(-13m^3 + m) \quad (11.16)$$

Para o caso da corda nula supersimétrica é necessário distinguir entre os setores de Ramond e Neveu; as anomalias são:

$$\begin{aligned} A_m^{\perp R} &= A_m^{\bar{1}R} = \frac{1}{12}(11m^3 - 2m) \\ A_m^{\perp N} &= A_m^{\bar{1}N} = \frac{1}{12}(11m^3 + m) \\ A_m^{\gamma_\perp R} &= A_m^{\gamma_1 R} = \frac{D}{24}(m^3 + 2m) \\ A_m^{\gamma_\perp N} &= A_m^{\gamma_1 N} = \frac{D}{24}(m^3 - m) \end{aligned} \quad (11.17)$$

Determinadas as anomalias, o passo seguinte é verificar que, a nível quântico, a carga BRST é nilpotente. Este cálculo se faz usando a seguinte identidade [58]:

$$\hat{Q}^2 = \frac{1}{2}\{\hat{Q}, \hat{Q}\} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} ([L_m, L_n] - (m-n)L_{m+n})\eta_m\eta_n$$

Com esta identidade obtemos os seguintes resultados:

a) A corda nula bosônica é quanticamente consistente somente se:

$$D = 26 \quad , \quad \alpha_0 = -1 \quad (11.18)$$

b) A corda nula supersimétrica é consistente somente se:

$$\begin{aligned} RR : \quad D &= 10 \quad \alpha_0 = 0 \\ NN : \quad D &= 10 \quad \alpha_0 = -1 \\ RN : \quad D &= 10 \quad \alpha_0 = \frac{-1}{2} \\ NR : \quad D &= 10 \quad \alpha_0 = \frac{-1}{2} \end{aligned} \quad (11.19)$$

A existência de dimensões críticas para a corda nula é um resultado inesperado à luz de outras discussões nesta linha [60]. Cremos que a corda nula é de fato um sistema fisicamente interessante e que pode dar, provavelmente, muita informação em teoria de cordas a altas energias.

A quantização destes modelos de cordas no gauge cone de luz e a análise do espectro foi feita na referência [17].

Capítulo V

Conclusões

Capítulo V

Conclusões

Nesta tese estudamos a formulação clássica e quântica de teorias covariantes gerais. Nosso ponto de vista para estudar estas teorias foi formular o problema clássico usando o formalismo hamiltoniano de Dirac. Uma vez que o problema clássico ficou bem definido, fizemos a quantização desta classe de teorias de duas maneiras: 1) Por meio da quantização canônica; 2) Usando o formalismo BRST de Batalin-Fradkin-Vilkovisky.

Para os exemplos estudados neste trabalho apresentamos vários resultados novos que enumeramos a seguir:

- a) No Capítulo I propusemos uma nova formulação clássica de partículas quirais baseada no método da raiz quadrada. A teoria clássica resultante é invariante por reparametrizações e por supersimetria local.

A quantização canônica do modelo de partículas quirais proposto revelou uma estrutura tensorial de Lorentz a qual não era conhecida anteriormente. Com esta visão do problema, a supersimetria local do modelo é uma ferramenta auxiliar e é este o porque o espectro de partículas resultante não é supersimétrico.

- b) No Capítulo II fizemos a formulação clássica de uma nova corda nula fermiônica a qual é invariante por supersimetria local na superfície de evolução. Neste capítulo a corda nula fermiônica foi obtida de duas maneiras distintas, de um lado usando o formalismo de Dirac tradicional, e de outro, usando o formalismo lagrangiano e técnicas de supergravidade.
- c) No Capítulo III propusemos um objeto extenso nulo de p dimensões espaciais movendo-se num espaço-tempo plano d -dimensional, a p -brana nula. Este objeto é, por um lado, uma generalização da corda, e por outro, uma simplificação das p -branas com tensão. A p -brana nula foi quantizada via integral funcional, e pudemos demonstrar que o propagador associado a este objeto satisfaz uma equação de difusão funcional. Resolvendo esta equação pudemos encontrar uma expressão formal para o propagador da p -brana nula.

d) No Capítulo IV foi considerada a quantização BRST das teorias covariantes gerais anteriores. Neste capítulo demonstrou-se que a formulação corrente do teorema de Fradkin-Vilkovisky é incompleta porque não fixa completamente uma das trajetórias no espaço de fase sendo necessário introduzir uma condição adicional. Esta condição conduziu a uma modificação do teorema de Fradkin-Vilkovisky. Com os resultados anteriores obtivemos as expressões corretas para os propagadores da partícula relativística bosônica, da partícula supersimétrica e partículas quirais supersimétricas. Também neste capítulo fizemos a quantização BRST operatorial da corda nula bosônica e da supersimétrica. Demonstrou-se que a carga BRST é nilpotente somente se as dimensões do espaço-tempo são 26, para o caso bosônico, e 10 para o caso fermiônico.

Neste trabalho nos detivemos somente no estudo de uma classe de teorias covariantes gerais. Portanto, é claramente necessário investigar se nossos argumentos podem ser estendidos a qualquer teoria covariante geral, e se é possível definir para estes casos teorias quânticas consistentes. Em particular, o problema de formular a teoria de cordas diretamente a partir do teorema de Fradkin-Vilkovisky é uma questão que nunca foi discutida na literatura e cuja solução correta, certamente, trará alguma clareza acerca de problemas mais complicados. A esta questão estamos nos dedicando neste momento.

Apêndice A

Sistemas Hamiltonianos com Vínculos e Invariância de Gauge

Neste apêndice revisamos brevemente o formalismo hamiltoniano de sistemas com vínculos de primeira classe com o objetivo de fixar a notação; o leitor interessado em uma apresentação mais completa pode ver a referência [3].

Consideremos um sistema físico $2n$ -dimensional, descrito por um hamiltoniano canônico H_0 e m vínculos de primeira classe $\phi_a(p, q)$ os quais satisfazem à álgebra:

$$[\phi_a, \phi_b] = C_{ab}^c \phi_c \quad (A1)$$

aqui $[,]$ denota colchetes de Poisson, $a = 1, 2, \dots, m$.

A ação para tal sistema é:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt (p_i \dot{q}^i - H_0 - \lambda^a \phi_a), \quad (A2)$$

($i = 1, 2, \dots, n$), os λ^a são m multiplicadores de Lagrange.

Um resultado bem conhecido no formalismo hamiltoniano [2] é que os vínculos de primeira classe geram transformações de gauge. Este importante aspecto conceitual é crucial no momento de fazer-se a quantização. De fato, devido à liberdade de gauge da ação (A2) existe um conjunto infinito de histórias que a deixam invariante e o problema então é: como fixar uma história entre todas as classes equivalentes (fixação do gauge).

Para fixar o gauge, é necessário conhecer não apenas as regras de transformação dos multiplicadores de Lagrange, mas também é preciso saber de antemão de que tipo é a simetria de gauge. Por enquanto não especificaremos tal simetria, e abordaremos a situação em geral.

O problema mencionado acima foi extensivamente tratado por Fradkin e Vilkovisky [13] e independentemente por Teitelboim [15]. Para encontrar a regra de transformação dos multiplicadores de Lagrange é natural supor que as coordenadas (q^i, p_i) se transformam da seguinte maneira:

$$\delta q_i(t) = \epsilon^a(t) [q_i(t), \phi_a] = \epsilon^a(t) \frac{\partial \phi_a}{\partial p^i}$$

$$\delta p_i(t) = \epsilon^a(t)[p_i(t), \phi_a] = -\epsilon^a(t) \frac{\partial \phi_a}{\partial q^i} \quad (A3)$$

O próximo problema é: como tratar os λ_a os quais não pertencem ao espaço de fases. A resposta vem do fato de que a ação deve ser um invariante de gauge e, conseqüentemente, a invariância de (A2) e o conhecimento de (A3) permitem determinar $\delta \lambda_a$.

A invariância de gauge de (A2) implica em:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} d\tau (\delta p^i \dot{q}_i + p^i \delta \dot{q}_i - \delta H_0 - \delta \lambda^a \phi_a - \lambda^a \delta \phi_a) = 0 \quad (A4)$$

Por generalidade suponhamos que:

$$[H_0, \phi_a] = \kappa_a^b \phi_b \quad (A5)$$

onde $\kappa_a^b = \kappa_a^b(p, q)$.

Usando (A1), (A3) e (A5), (A4) fica:

$$\begin{aligned} \delta S = 0 = & \epsilon^a(t) (p^i \frac{\partial \phi_a}{\partial p^i} - \phi_a) \Big|_{t_1}^{t_2} + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} d\tau (\dot{\epsilon}^c - \epsilon^a \kappa_a^c - \delta \lambda^c - \lambda^a \epsilon^b C_{ab}^c) \phi_c \end{aligned} \quad (A6)$$

A anulação de (A6) implica em:

$$\delta \lambda^c = \dot{\epsilon}^c - \epsilon^a \kappa_a^c - \lambda^a \epsilon^b C_{ab}^c \quad (A7)$$

$$\epsilon^a (p^i \frac{\partial \phi_a}{\partial p^i} - \phi_a) \Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \quad (A8)$$

A condição (A7) é a regra de transformação que estávamos procurando. A relação (A8) é um requisito que devemos impor para que (A6) seja satisfeita e é ela que define o tipo de simetria de gauge em consideração.

A expressão (A8) é satisfeita em dois casos:

- a) Quando $\epsilon_a(t_1) = 0 = \epsilon^a(t_2)$, esta situação define uma teoria de gauge **não interna**. Exemplos de teorias descritas por simetrias não internas são, e.g. cordas, membranas, gravitação, etc..
- b) Quando $(p^i \frac{\partial \phi_a}{\partial p^i} - \phi_a) = 0$ e neste caso não há restrição sobre os ϵ 's nos extremos. Nesta situação a simetria de gauge é **interna**. Entre as teorias descritas por simetrias internas está, e.g. o caso de teorias tipo Yang-Mills.

Neste trabalho nos interessa as teorias do primeiro caso e dizemos que as teorias que satisfazem o critério **a)** são covariantes gerais.

Apêndice B

A Corda Supersimétrica com Tensão

Neste apêndice revisamos brevemente a formulação superespaço da corda supersimétrica com tensão. Nossa apresentação é similar à de Howe [61].

A ação da corda supersimétrica é:

$$S = T \int d^2\sigma d^2\theta E D^\alpha X^i \mathcal{D}_\alpha X_i \quad (B1)$$

onde $E = sdet(E_M^A)$ é a densidade invariante, as D_α são derivadas covariantes fermiônicas, E_M^A é um vierbein definido sobre o superespaço, o índice M é uma notação para (m, α) onde m é um índice de espaço-tempo e $\alpha = 1, 2$ é um índice definido sobre a superfície de evolução da corda.

A derivada do supercampo

$$X^i(\sigma, \theta) = X^i(\sigma) + \theta^\alpha \psi_\alpha^i(\sigma) - \frac{1}{2} \theta^2 B^i(\sigma) \quad (B2)$$

é:

$$\mathcal{D}_\alpha X^i = E_\alpha^M \partial_M X^i \quad (B3)$$

A regra de transformação do supercampo (B2) por reparametrizações infinitesimais é:

$$\delta X^i = \xi^M(\sigma, \theta) \partial_M X^i(\sigma, \theta) \quad (B4)$$

As quantidades geométricas do superespaço são a torção e a curvatura as quais estão vinculadas e, portanto, somente sobrevive um campo auxiliar no multiplete de supergravidade. Além disso, a liberdade de gauge das reparametrizações pode ser restrita permitindo apenas transformações com parâmetros $\xi^M(\sigma)$ (gauge de Wess-Zumino) e portanto os únicos campos de gauge são o graviton e_m^a e o gravitino χ_m^α . Assim, no gauge de W-Z, o multiplete de supergravidade é $(e_m^a, \chi_m^\alpha, A)$ onde A é um campo auxiliar.

A ação da corda supersimétrica é também invariante por transformações de super-Weyl,

$$\begin{aligned} \delta E_M^a &= \Lambda E_M^a \\ \delta E_M^\alpha &= E_M^\alpha - \frac{i}{2} E_M^a \gamma_a^{\alpha\beta} \mathcal{D}_\beta \Lambda \end{aligned} \quad (B5)$$

Devido à invariância (B5), o lagrangiano da corda supersimétrica no gauge de W-Z é:

$$L = e \left(1 - \frac{1}{8} \theta^2 \chi_m \gamma^n \gamma^m \chi_n \right) \mathcal{D}^\alpha X \cdot \mathcal{D}^\alpha X \quad (\text{lag})(B6)$$

onde $e = \det(e_m^a)$ e D_α é a derivada covariante no superespaço plano,

$$\mathcal{D}_\alpha = \partial_\alpha + i(\gamma^m \theta)_\alpha \partial_m \quad (B7)$$

Notemos que o campo auxiliar A não aparece em (B6). Em componentes (B6) fica:

$$L = e \left[\psi^2 - 2\theta\psi B - 2i\theta\gamma^m \partial_m X + \theta^2 \left(g^{mn} \partial_m X \partial_n X - i\psi\gamma^m \partial_m \psi + B^2 - \frac{1}{8} \psi^2 \chi_m \gamma^n \gamma^m \chi_n \right) \right] \quad (B8)$$

Apêndice C

Regularização da Função ζ e Cálculo de $\det(-\partial_\tau^2)$

Aqui demonstraremos que:

$$\det(-\partial_\tau^2) = \Delta t \quad (C1)$$

A idéia básica do cálculo é usar a identidade:

$$\det A = \prod_{n=1}^{\infty} A_n \quad (C2)$$

onde A é alguma matriz (operador) e os A_n são seus autovalores. No nosso caso $A = -\partial_\tau^2$ e com o uso das condições de contorno (8.20) é fácil ver que os autovalores são $(\frac{n\pi}{\Delta\tau})^2$. Então o problema seguinte é calcular o produto:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{\Delta t}\right)^2 \quad (C3)$$

Para isto consideremos o produto $\prod_{m=1}^{\infty} a m^b$ e escrevamos [62]:

$$\begin{aligned} \prod_{m=1}^{\infty} a m^b &= \prod_{m=1}^{\infty} \exp[\log(a m^b)] \\ &= \exp\left[\sum_{m=1}^{\infty} (\log a + b \log m)\right] \\ &= \exp\left[\log a \sum_{m=1}^{\infty} 1 + b \sum_{m=1}^{\infty} \log m\right] \\ &= \exp\left[\log a \cdot \lim_{s \rightarrow 0} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-s} - b \cdot \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-s}\right] \end{aligned} \quad (C4)$$

As somas que aparecem em (C4) podem ser calculadas usando a função ζ de Riemann a qual é:

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-s} \quad (C5)$$

Então, no limite $s \rightarrow 0$:

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2} \quad \zeta'(0) = -\frac{1}{2} \log(2\pi)$$

Assim (C4) é:

$$\prod_{m=1}^{\infty} a m^b = a^{-\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{b}{2}} \quad (C6)$$

Se usamos (C6) para calcular (C3) encontra-se (C1).

REFERÊNCIAS

- [1] E. Abers e B. W. Lee, Phys. Rep. 9 (1973) 1.
- [2] P. A. M. Dirac, Lectures on Quantum Mechanics, Yeshiva University (1964).
- [3] E. S. Fradkin e G. A. Vilkovisky, Quantization of Relativistic Systems: Equivalence of Canonical and Covariant Formalisms in Quantum Theory of Gravitational Field. Preprint CERN-Th2332/77. Não publicado.
- [4] L. D. Faddeev e A. A. Slavnov, Gauge Fields; Introduction to Quantum Theory, Benjamin (1980).
- [5] L. Rosenfeld, Z. Fur. Phys. 65 (1930) 589; Ann. Phys. (Leipzig) 5 (1930) 113.
- [6] Para uma revisão ver: J. A. Wheeler em, Relativity, Groups and Topology, North Holland (1963).
- [7] B. S. De Witt, Phys. Rev. 160 (1967) 1113.
- [8] Para uma revisão ver: C. J. Isham em Quantum Gravity I: An Oxford Symposium, D. Sciama, R. Penrose e C. J. Isham Ed. (1975).
- [9] J. Hartle e S. W. Hawking, Phys. Rev. D 28 (1983) 2960.
- [10] S. Coleman, Nucl. Phys. B 307 (1988) 867.
- [11] T. H. Banks, Preprint Santa Cruz IPP88/09.
- [12] C. Becchi, A. Rouet e R. Stora, Ann. Phys. (NY) 98 (1976) 287. I. V. Tyutin, Lebedev Preprint (1975), não publicado.
- [13] E. S. Fradkin e G. A. Vilkovisky, Phys. Lett. B 55 (1975) 224; I. A. Batalin e G. A. Vilkovisky, Phys. Lett. B 69 (1977) 309; E. S. Fradkin e T. E. Fradkina, Phys. Lett. B 72 (1978) 343.
- [14] J. Gamboa e V. O. Rivelles, Self Dual Spinning Particles, São Paulo Preprint.
- [15] C. Teitelboim, Phys. Rev. Lett. 38 (1977) 1106
C. Teitelboim e R. Tabensky, Phys. Lett. B 69 (1977) 453.
- [16] A. Schild, Phys. Rev. D 16 (1977) 1722.
- [17] J. Gamboa, C. Ramírez e M. Ruiz-Altaba, Spinning Null Strings, Preprint CERN-Th5346/89.
- [18] J. Gamboa, C. Ramírez e M. Ruiz-Altaba, Quantum Null (super) Strings,

- Preprint CERN-Th5367/89, a ser publicado em Phys. Lett. B.
- [19] J. Gamboa e V. O. Rivelles , em preparação.
 - [20] D. J. Gross, J. A. Harvey, E. J. Martinec e R. Rohm, Phys. Rev. Lett. 54 (1985) 502; idem Nucl. Phys. B 256 (1985) 253.
 - [21] J. M. Labastida e M. Pernici, Nucl. Phys. B 297 (1988) 557; C. Imbimbo e A. Schwimmer, Phys. Lett. B 193 (1987) 435.
 - [22] R. Floreanini e R. Jackiw, Phys. Rev. Lett. 59 (1987) 1873.
 - [23] W. Siegel, Nucl. Phys. B 238 (1984) 307.
 - [24] M. Gomes, V. O. Rivelles e A. J. da Silva, a ser publicado em Phys. Lett. B.
 - [25] H. O. Girotti, M. Gomes, V. Kurak, V. O. Rivelles e A. J. da Silva, Phys. Rev. Lett. 60 (1988) 1913.
 - [26] J. Gamboa e J. Zanelli, Class. and Quant. Grav. 5 (1988) L41; idem Ann. Phys.(NY) 188 (1988) 238.
 - [27] L. Brink, P. di Vecchia, P. Howe, S. Deser e B. Zumino, Phys. Lett. B 64 (1976) 435.
 - [28] M. Henneaux e C. Teitelboim, Ann. Phys. (NY) 143 (1982) 127.
 - [29] C. Teitelboim, Phys. Rev. D 25 (1982) 3152.
 - [30] H. O. Girotti, M. Gomes, V. O. Rivelles e A. J. da Silva, a ser publicado em Phys. Rev. D.
 - [31] P. A. Collins e R. W. Tucker, Phys. Lett. B 64 (1976) 207; idem Nucl. Phys. B 121 (1977) 307.
 - [32] J. Gamboa e M. Ruiz-Altaba, Proc. Sexto Simposio Chileno de Física, Pag. 158, Santiago de Chile (1988).
 - [33] E. Bergshoeff, E. Sezgin e P. K. Townsend, Phys. Lett. B 209 (1988) 451.
 - [34] F. E. Close, An Introduction to Quarks and Partons, Accademics Press (1979).
 - [35] P. A. M. Dirac, Proc. R. Soc. A 268 (1962) 57.
 - [36] J. D. Brown, Lower Dimensional Gravity, a ser publicado.
 - [37] Y. Nambu, Phys. Lett. B 80 (1979) 372.
 - [38] A. M. Polyakov, Phys. Lett. B 82 (1979) 247; idem Nucl. Phys. B 164 (1980) 171.
 - [39] T. Eguchi, Phys. Rev. Lett. 44 (1980) 126.
 - [40] J. Gamboa e M. Ruiz-Altaba, Phys. Lett. B 205 (1988) 405.
 - [41] J. Gamboa e V. Tapia, A Generic Action for Strings, Preprint Trieste IC/87/265, não publicado.

- [42] M. Pilati, Tese PhD Princeton University (1980).
- [43] J. Moser, Trans. Am. Math. Soc. 120 (1965) 286.
- [44] A. T. Ogielsky, Phys. Rev. D 22 (1980) 2407.
- [45] E. Bergshoef, E. Sezgin e P. K. Townsend, a ser publicado em Phys. Lett. B.
- [46] P. Van Nieuwenhuizen, Phys. Rep. 68 (1981) 189.
- [47] J. Barcelos-Neto, J. Gamboa, C. Ramírez e M. Ruiz-Altaba, em preparação.
- [48] R. P. Feynman, Acta Phys. Polon XXIV (1963) 697.
- [49] L. D. Faddeev e V. N. Popov, Phys. Lett. B 25 (1967) 30.
- [50] Ver, e.g., B. Doubrovin, S. Novikov e A. Fomenko, Geometrie Contemporaine, Vol. 3, Mir (1984).
- [51] S. Hwang, Phys. Rev. D 28 (1983) 2614;
M. Kato e O. K. Ogawa, Nucl. Phys. B 212 (1983) 443.
- [52] M. Henneaux, Phys. Rep. 126 (1985) 1.
- [53] J. Gamboa e V. O. Rivelles, The BRST Formalism and the Quantization of Hamiltonian Systems with First Class Constraints, a ser publicado em C. Caratheodory: An International Tribute, T. M. Rassias Ed..
- [54] E. Gozzi e M. Reuter, a ser publicado em Nucl. Phys. B.
- [55] A. Neveu e P. West, Nucl. Phys. B 293 (1987) 266.
- [56] V. O. Rivelles, Tese de Livre docência, USP (1989).
- [57] C. A. P. Galvão e C. Teitelboim, J. Math. Phys. 21 (1980) 1863.
- [58] M. B. Green, J. H. Schwarz e E. Witten, Superstrings Theory, Cambridge University Press (1987).
- [59] A. K. H. Bengtsson e I. Bengtsson, Phys. Lett. B 174 (1986) 307.
- [60] F. Lizzi, G. Sparano, B. Rai e A. Srivastava, Phys. Lett. B 182 (1986) 326.
- [61] P. Howe, J. Phys. A 12 (1979) 393.
- [62] I. Giannakis, C. R. Ordonez, M. A. Rubin e R. Zucchini, Rockefeller Preprint RU 88 / b1 / 28.