



305M810T2723

Universidade de São Paulo
Instituto de Física

O Termo Sigma Nuclear no
Modelo de Skyrme

Arnaldo Gammal

Orientador: Prof. Dr. Tobias Frederico

Tese de Doutorado
apresentada ao Instituto
de Física da Universidade
de São Paulo

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Emerson J.V. de Passos (IFUSP)

Prof. Dr. Iuda D. Goldman (IFUSP)

Prof. Dr. José de Sá Borges Filho (UERJ)

Prof. Dr. Lauro Tomio (IFT)

Prof. Dr. Tobias Frederico (ITA) (Orientador)



Tobias Frederico

São Paulo - 1997

Sylbio Carunto
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

*Data da defesa
31/10/97*

G-193-1

D

1997

FICHA CATALOGRÁFICA

**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Gammal, Arnaldo

**O Termo Sigma Nuclear no Modelo de Skyrme.
São Paulo, 1997.**

**Tese (Doutoramento) Universidade de São Paulo.
Instituto de Física - Departamento de Física Experimental**

**Área de Concentração: Física de Partículas Elementares
Orientador: Prof. Dr. Tobias Frederico**

**Unitermos: 1. Termo Sigma Nuclear; 2. Modelo de Skyrme;
3. Interação NN; 4. Potencial Ótico Píon-Núcleo;
5. Condensado de Quarks.**

USP/IF/SBI - 73/97

**Aos
meus pais,
Fanny e Mauricio,
à minha irmã, Telma**

**À
*Ester***



Ao meu irmão, Prof. Dr. Gastroenterologista,
SERGIO HENRIQUE GAMMAL [Z"L] (*in memoriam*), que
estimulou o início de minha vida científica. Na infância, assistíamos juntos
então a série “O Professor” na TV, versando sobre experimentos básicos
da Física.

Algum dia nos reencontraremos.

Agradecimentos

Ao Prof. Tobias Frederico que muito me ensinou a sua forma de fazer ciência, se revelando incansável no esclarecimento de diversas dúvidas e sempre encontrando saídas nas situações mais difíceis.

Ao Prof. Manoel Roberto Robilotta a quem devo a introdução ao Modelo de Skyrme e ao ansatz produto e a oportunidade inicial deste trabalho; os capítulos 4 e 5 foram escritos ainda sob sua orientação.

Ao Prof. J.M.Eisenberg pelo estímulo e esclarecimento de dúvidas no modelo de Skyrme e ansatz simetrizado.

Ao Prof. J.Wambach e ao seu estudante T.Waindzoeh pelas informações a respeito da solução exata para o problema skyrmion-skyrmion.

Ao Prof. Celso Luis Lima, que muito ajudou com diversas dificuldades no trato com os computadores e FORTRAN, trocando referências como discutindo temas controversos da Física.

Ao Prof. P.Gouffon pelo esclarecimento de dúvidas em UNIX e métodos numéricos.

Aos professores Marina Nielsen e Fernando Navarra pelas discussões e sugestões de referências.

Aos professores Brett V. Carlson e Ricardo A. Rego pelas discussões e sugestões de referências.

Aos professores I.D.Goldman e P.R.Pascholati, já companheiros no meu mestrado, pelo incentivo e estrutura nos momentos mais críticos, procurando sempre me convencer a concluir o trabalho.

A Orildo pelo esclarecimento de dúvidas sobre o modelo de Skyrme.

Às secretárias do FINPE e do LINEAR, ao pessoal do xérox e aos funcionários da biblioteca, sempre dispostos a ajudar.

Aos colegas do FINPE: Emílio, Claudio, Varese, Gadelha, Claudia, Isabela, Joel, Di Marco, Raquel, e aos colegas do LINEAR: Ana Lima, Carlos, Davi, Odair, Paulo Rios, R.Barbosa, Rodrigo, Rui e tantos outros pela ajuda e amizade de cada um.

A toda minha família que pelo incentivo e compreensão, em especial a meus pais que me propiciaram toda a educação básica para que eu chegasse até aqui, e à minha irmã Telma que tanto tem me ajudado.

A Ester pela amizade, alegria, carinho, compreensão e apoio em todos os momentos que convivemos.

À Fapesp, ao CNPq e a mim mesmo pelo apoio concedido.

RESUMO

O termo sigma nuclear (o conteúdo isoescalar de quarks do estado nuclear) é calculado no contexto do modelo de Skyrme, através da consideração da dependência do potencial núcleon-núcleon com as massas de corrente. O termo sigma nuclear é extraído da massa nuclear usando-se o teorema de Hellmann-Feynman, derivando a interação núcleon-núcleon com respeito às massas dos quarks *up* e *down*, $m_q \frac{\partial V_{NN}}{\partial m_q}$. O potencial é construído na aproximação do ansatz produto quantizado no modelo de Skyrme. A dependência às massas dos quarks vem do termo relativo a massa do pión na Lagrangiana de Skyrme. Esta conexão é feita usando a relação de Gell-Mann, Oakes e Renner. É feita uma discussão de como $m_q \frac{\partial V_{NN}}{\partial m_q}$ deve entrar no cálculo do termo sigma nuclear no contexto da mecânica quântica não-relativística. Também calculamos o termo sigma do núcleon e as derivadas das constantes de acoplamento pión-núcleon, carga axial, raios eletromagnéticos e momentos magnéticos. Considerando a contribuição do potencial para o termo sigma da matéria nuclear, o valor local do condensado de quarks é estimado. Devido ao caráter repulsivo do termo do potencial, o condensado diminui somente 5% na densidade normal. O problema da falta de repulsão na magnitude da parte real do potencial ótico isoescalar pión-núcleon, provenientes da análise de dados de espalhamento e átomos piônicos, é resolvido no contexto presente. A contribuição do potencial skyrmion-skyrmion ao termo sigma nuclear, proporciona a repulsão necessária para o potencial pión-núcleon, em um surpreendente acordo com os parâmetros ajustados e também com a sua dependência da massa nuclear.

Palavras-Chaves: Termo Sigma Nuclear, Modelo de Skyrme, Interação NN, Potencial Ótico Pión-Núcleon, Condensado de Quarks

ABSTRACT

The nuclear sigma term, the isoscalar quark content of the nuclear state, is calculated within the Skyrme model considering the current quark mass dependence of the nucleon-nucleon potential. The nuclear sigma term is extracted from the nuclear mass using the Hellmann-Feynman theorem, which demands for the derivative of the nucleon-nucleon interaction, $m_q \frac{\partial V_{NN}}{\partial m_q}$, with respect to the up-down quark masses. The potential is evaluated in the skyrmion-skyrmion picture within the quantized product ansatz. The quark mass dependence of the potential comes from the pion mass term in the Skyrme Lagrangian. Such connection is made using the Gell-Mann, Oakes and Renner relation. We provide a discussion on how $m_q \frac{\partial V_{NN}}{\partial m_q}$ should enter in the evaluation of the nuclear sigma-term in the context of nonrelativistic quantum mechanics. We also calculate the nucleon sigma term, and the derivatives of the pion-nucleon coupling constant, axial charge, electromagnetic radius and magnetic moments. Considering the contribution of the potential to the nuclear matter sigma term, the local value quark condensate is estimated. Due to the repulsive nature of the potential term, the condensate drops only 5% at normal density. The problem of missing repulsion in the magnitude of the real part of the isoscalar s-wave pion nucleus optical potential, as taken from pionic atom and elastic scattering data analysis, is fixed in the present context. The contribution of the skyrmion-skyrmion potential to the nuclear sigma term, provides the missing repulsion to the pion-nucleus optical potential, in remarkable agreement with the fitted parameters and also reproducing its mass dependence.

Keywords: Nuclear Sigma Term, Skyrme model, NN Interaction, Pion-Nucleus Optical Potential, Quark Condensate

ÍNDICE

1	Introdução	3
2	Simetria Quiral	6
2.1	Simetrias	6
2.2	Correntes vetorial e axial	8
2.3	Interação Píon-Núcleon	9
2.4	Álgebra de Correntes	10
2.5	Modelo Sigma Linear	11
2.6	CVC e PCAC	15
2.7	Modelo Sigma Não-Linear	15
2.8	Campos e Transformações	16
3	Relação de Gell-Mann,Oakes e Renner, O Termo Sigma Nuclear e o Condensado de Quarks	18
3.1	Teorema de Goldstone	18
3.2	Teorema de Dashen	21
3.3	Lagrangiana Quiral para o píon	22
3.4	Termo Sigma Nuclear	26
3.5	Condensado de quarks	29
4	Modelo de Skyrme	30
4.1	Introdução	30
4.2	Modelo para os bárions	34
4.3	Massa Clássica	38
4.4	Equação de Movimento	39
4.5	Momento de Inércia	40
4.6	Quantização do Sóliton	43
4.7	Correntes	47
4.8	Observáveis	49
4.9	O Papel da Simetria Quiral	53
4.10	Função Potencial	59

5	Interação NN no Modelo de Skyrme	62
5.1	Introdução	62
5.2	Ansatz Produto	65
5.3	Ansatz Produto: número bariônico	66
5.4	Ansatz Produto: Interação NN quântica	68
5.5	Ansatz Produto: Violação de Simetrias	77
6	Observáveis nucleares e as massas dos quarks	80
6.1	Observáveis de um corpo	80
6.2	Observáveis de dois corpos	82
6.3	Contribuição do Potencial NN para o termo Σ nuclear	91
6.3.1	Dêuteron	91
6.3.2	$A > 2$	93
6.3.3	Correlação de curto alcance	96
6.3.4	Contribuição da Energia Cinética	98
7	Interação Píon-Núcleo	100
7.1	Espalhamento píon-núcleon	100
7.2	Espalhamento píon-dêuteron	103
7.3	Comprimento de espalhamento píon-núcleo na aproximação de Born	104
7.4	Potencial ótico	105
7.5	O termo sigma nuclear no potencial onda s píon-núcleo	107
8	Conclusões	112
A	Unidades e Notação	114
B	Teorema de Hellmann-Feynman	116
C	Relações Úteis	117
C.1	Modelo de Skyrme	117
C.2	Ansatz Produto	118
C.3	Integração Angular	119
C.4	Operador tensor	120
D	Numero Bariônico	121
E	OPEP	124
F	Aproximação de Hartree	125
G	Métodos Numéricos	127

1. INTRODUÇÃO

A descoberta por Rutherford, de que o átomo possuía em seu interior um núcleo, projetou ao longo de cerca de noventa anos, a formulação de modelos de Física Nuclear, que são capazes de descrever os decaimentos de núcleos excitados e espalhamento. Porém a descoberta do pión por Lattes et al(1947) [Lat47] e a verificação de que o próton tem estrutura levou a modelos de quarks e glúons(QCD) para composição dos mésons e bárions.

A manifestação da QCD em baixas energias sempre apresentou um desafio tanto para físicos teóricos como para experimentais. Infelizmente a QCD em baixas energias não pode ser resolvida por métodos perturbativos e sua solução até o presente encontra-se relegada a cálculos numéricos na rede que consomem enormes recursos computacionais. Em vista disto, surgiram modelos efetivos que procuram satisfazer as simetrias da QCD, onde os graus de liberdade seriam não os quarks, mas os mésons e bárions.

Uma conexão sutil entre a descrição efetiva hadrônica e fundamental do núcleo, em termos de quarks e glúons, foi sugerida ao ser considerada a estrutura do vácuo[Coh91]. A presença de matéria hadrônica altera o valor local do condensado de quarks [Coh92][Li94][Del95-96][BW96], através do termo sigma nuclear (Σ_A) sendo este o conteúdo isoescalar nuclear $\langle \bar{q}q \rangle$. O valor do termo sigma do núcleon (Σ_N) já foi extraído de dados experimentais [Gas91]. Uma maneira de inferir o termo sigma nuclear é obtida através da análise do espalhamento pión núcleo em baixas energias e de átomos piônicos. De fato, em trabalho recente de Brown e Rho [BR96] foi sugerida a possibilidade de se obter, de experimentos com átomos piônicos, informações sobre o condensado de quarks.

Usando modelos efetivos hadrônicos, segundo Cohen et al [Coh92], o cálculo do termo sigma nuclear deve levar em consideração o termo sigma de cada núcleon, adicionando-se o termo sigma devido à interação núcleon-núcleon(NN). Porém naquele trabalho é questionada a forma de como realizar este cálculo pois envolveria derivadas, em relação às massas dos quarks de corrente, das massas e constantes de acoplamento dos diversos mésons que compõem o potencial NN. Isto tudo discutido sob ponto de vista de um modelo realístico para interação NN, baseado em troca de mésons como, por exemplo, o potencial de Bonn[Mac87].

A questão fundamental, apresentada em [Coh92], é até que ponto co- nhecemos

realmente a dependência das massas de corrente na interação NN. Para investigar a dependência do potencial NN em relação às massas dos quarks, devemos ter a conexão do modelo efetivo hadrônico com a QCD. O modelo de Skyrme [Sk61-62], oferece esta possibilidade, uma vez que o termo que quebra explicitamente a simetria quiral na Lagrangiana é incluído no modelo, sendo este proporcional ao quadrado da massa do pión. Da natureza de bóson de Goldstone do pión, vem a relação de Gell-Mann-Oakes-Renner (GOR) [GOR68], que garante que o quadrado da massa do pión é proporcional à massa do quark de corrente, $m_q = (m_u + m_d) / 2$. Esta relação vai nos permitir inferir a dependência dos observáveis nucleares, descritos através do modelo de Skyrme, com a massa dos quarks.

O modelo de Skyrme descreve a interação NN com certo sucesso com apenas campos piônicos. Com a relação de Gell-Mann-Oakes-Renner (GOR), $2m_q \langle \bar{q}q \rangle_{vac} = -m_\pi^2 f_\pi^2$, podemos portanto calcular a derivada do potencial NN em relação à massa do quark, através da sua derivada em relação à massa do pión. Assim, dentro do modelo de Skyrme, mostraremos que é possível calcular o termo sigma do potencial sem a necessidade de conhecer como variam as massas dos diversos mésons trocados e constantes de acoplamento, como seria no caso de potenciais baseados em troca de mésons.

Construímos o potencial de interação NN na aproximação do ansatz produto quantizado [Ja85][Vi85] e obtivemos a sua variação com a massa dos quarks. Para tanto foi necessário desenvolver os códigos computacionais e os métodos numéricos que permitissem cálculos numéricos muito precisos, tanto para os observáveis do núcleon como para a interação NN no ansatz produto. Isto de fato é que tornou possível calcular a derivada numérica da interação NN em relação à massa do pión.

Utilizando a derivada em relação a m_q ou m_π^2 da componente central do potencial Skyrme-Skyrmion, calculamos o termo sigma nuclear para alguns núcleos finitos, com densidades nucleares parametrizadas [JVV74], em um cálculo não relativístico. Dada a magnitude da derivada do potencial central, encontramos que Σ_A é muito inferior ao produto do termo sigma do núcleon pela massa do núcleon. De acordo com nossos cálculos, a contribuição ao termo sigma nuclear gera uma componente repulsiva no potencial pión-núcleon, consistente com a análise das observações experimentais [Sek83][Sek88][Klu91][Nie93]. Isto torna estimulante, sob este ponto de vista, a investigação experimental tanto de átomos piônicos como do espalhamento pión-núcleon em baixas energias.

Embora o ansatz produto resulte em um potencial NN no canal central apenas aproximado em relação ao cálculo numérico exato [WW91], acreditamos ser possível utilizá-lo no cálculo da derivada. Segundo a ref. [Ja85], a dificuldade do ansatz produto em reproduzir a interação NN vem da origem do potencial como sendo a diferença de duas quantidades de magnitudes duas ordens de grandeza

maior do que o próprio potencial. Portanto uma pequena deformação nos skyrmions pode originar efeitos drásticos. Este fato não deve ocorrer no cálculo da derivada do potencial em relação à massa do quark, uma vez que o resultado final é da mesma ordem de grandeza da contribuição dos núcleons, como veremos. Portanto, deformações que possam ocorrer nos skyrmions, devido à sua proximidade, seriam neste caso apenas correções que não poderiam mudar a grandeza do resultado.

Discutiremos em detalhe como o termo sigma do potencial contribui no espalhamento píon-núcleo, em átomos piônicos e no valor do condensado à densidade normal, com resultados surpreendentes.

Resumindo, o objetivo da tese foi calcular a contribuição do potencial NN ao termo sigma nuclear utilizando o modelo de Skyrme na aproximação do ansatz produto. Obtivemos a contribuição repulsiva ao potencial ótico píon-núcleo que este termo traz e comparamos com os resultados de ajuste dos dados experimentais de átomos piônicos e espalhamento píon-núcleo em baixas energias.

A organização do trabalho inicia-se com uma descrição do formalismo de Lagrangianas e da simetria quiral no capítulo 2. No capítulo 3 mostraremos a origem da relação de GOR como uma consequência dos teoremas de Goldstone e de Dashen e discutiremos o termo sigma nuclear e sua influência no condensado de quarks no meio nuclear. Nos capítulos 4 e 5 serão introduzidas as descrições de um núcleon e do potencial NN no modelo de Skyrme, respectivamente. Finalmente, o termo sigma do potencial NN é calculado no capítulo 6. As contribuições do termo sigma proveniente do potencial NN para o espalhamento píon-núcleo, átomos piônicos e valor do condensado na densidade normal são apresentados nos capítulos 7 e 8. As principais conclusões desta tese encontram-se resumidas no capítulo 8.

2. SIMETRIA QUIRAL

Atualmente se reconhece que as interações fortes devem ser regidas pela QCD. Para grande transferência de momento q , como na região de espalhamento elástico de léptons sobre hádrons, $\alpha(q^2)$ é pequeno. Pode-se então usar a teoria de perturbação para fazer previsões teóricas que, de fato, estão em bom acordo com a experiência. Por outro lado, para processos de interesse da física nuclear, a escala de comprimento é tipicamente 1fm, correspondendo a uma pequena transferência de momento q . A constante de acoplamento $\alpha(q^2)$ é então grande e a teoria de perturbação não se aplica, dando origem a modelos efetivos.

Por exemplo, modelos efetivos estão presentes na mecânica clássica. A lei de Hooke $F = k\Delta x$, que estabelece a força exercida por uma mola para um dado deslocamento é um modelo efetivo. A lei de Hooke não descreve o limite de ruptura da mola. Um modelo completo deveria descrever como os átomos da mola interagem entre si segundo a mecânica quântica. De forma análoga, um modelo completo deveria descrever os bárions em termos da QCD. Isto porém envolve cálculos muito complexos dos campos dos quarks interagindo. Criam-se então modelos efetivos baseados na experiência e que incorporam as simetrias da QCD. Uma propriedade importante da QCD é a sua simetria quiral (se as massas dos quarks forem desprezadas) que deve ser preservada nas teorias efetivas.

2.1. Simetrias

Em geral podemos escrever a densidade de Langrangiana como uma função de um conjunto de campos $\phi_i(x)$ e suas derivadas $\partial_\mu\phi_i(x)$, onde cada componente i é independente das outras e x é um quadrivetor (ver métrica no apêndice A). Então

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu\phi_i). \quad (2.1)$$

Introduzindo um conjunto de funções infinitesimais e independentes $\varepsilon_\alpha(x)$ com $\alpha = 1\dots N$, define-se a transformação

$$\phi'_i(x) = \phi_i + \delta\phi_i = \phi_i(x) - \varepsilon_\alpha(x)F_i^\alpha(\phi_i) \quad (2.2)$$

onde F é uma função do conjunto ϕ_i . Sob esta transformação, $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$, onde

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}\delta\phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\partial_\mu(\delta\phi_i) \\ &= -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}\varepsilon_\alpha F_i^\alpha - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}[(\partial_\mu\varepsilon_\alpha)F_i^\alpha + \varepsilon_\alpha\partial_\mu F_i^\alpha].\end{aligned}\quad (2.3)$$

Usando as equações de movimento de Euler,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} = 0, \quad (2.4)$$

temos

$$\delta\mathcal{L} = -\varepsilon_\alpha\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}F_i^\alpha\right) - (\partial_\mu\varepsilon_\alpha)\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}F_i^\alpha\right). \quad (2.5)$$

Definimos uma corrente

$$j^{\mu\alpha} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}F_i^\alpha, \quad (2.6)$$

associada com a transformação infinitesimal dos campos.

Podemos assim escrever

$$\delta\mathcal{L} = \varepsilon_\alpha\partial_\mu j^{\mu\alpha} + (\partial_\mu\varepsilon_\alpha)j^{\mu\alpha} \quad (2.7)$$

e identificar a corrente como

$$j^{\mu\alpha} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\varepsilon_\alpha)}\delta\mathcal{L} \quad (2.8)$$

e

$$\partial_\mu j^{\mu\alpha} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon_\alpha}\delta\mathcal{L}, \quad (2.9)$$

que são conhecidas como equações de Gell-Mann e Lévy [Ge60]. A obtenção das correntes por este método é conhecida como “método variacional de Gell-Mann e Lévy” [Ge60][Sa69 p.19].

Pelo teorema de Noether se a Lagrangiana for invariante por uma transformação haverá uma grandeza conservada. Por exemplo, uma Lagrangiana escalar, que garante invariância de Lorentz por translações e rotações, resultará em momento-energia e momento angular conservados, respectivamente.

Tomemos uma transformação global onde ε_α não depende de x_μ . Se a Lagrangiana for invariante por esta transformação temos $\delta\mathcal{L} = 0$ e segue-se de (2.7) que há N correntes associadas, localmente conservadas, i.e.,

$$\partial_\mu j^{\mu\alpha}(x) = 0. \quad (2.10)$$

Integrando sobre o volume temos

$$\int_V dV \partial_\mu j^{\mu\alpha} = 0 \Rightarrow \int_V dV \partial_0 j^{0\alpha} = - \int_V dV \partial_i j^{i\alpha} = - \int_S dS \hat{n}_i j^{i\alpha}, \quad (2.11)$$

onde aplicamos o teorema de Gauss na última igualdade sendo dS = elemento da superfície que contém o volume V , $i = 1, 2, 3$.

Admitindo que o fluxo de corrente através da superfície seja nulo no infinito temos $\int_V dV \partial_0 j^{0\alpha} = 0$, ou $\frac{d}{dt} \int_V dV j^{0\alpha} = 0$.

Isto gerará grandezas conservadas que chamaremos de cargas,

$$Q^\alpha = \int j^{0\alpha}(x) d^3x \quad (2.12)$$

que são independentes do tempo. As N cargas são os geradores das transformações infinitesimais no espaço de Hilbert.

2.2. Correntes vetorial e axial

Tomemos uma partícula de Dirac. Sua Lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (2.13)$$

Fazendo transformações de fase e de fase quirial do tipo

$$\psi(x) \rightarrow e^{-i\alpha}\psi(x), \psi(x) \rightarrow e^{-i\gamma_5\beta}\psi(x) \quad (2.14)$$

com α e β infinitesimais, gerarão, respectivamente, uma corrente vetorial j^μ e uma corrente vetorial axial¹ j_5^μ na forma

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, j_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi. \quad (2.15)$$

A corrente j^μ é vetorial pois sob uma transformação de Lorentz se comporta como um quadrivetor x^μ . De forma análoga, j_5^μ tem propriedade de transformação de um vetor axial. Calculando a quadri-divergência para a corrente vetorial, temos

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (2.16)$$

¹Na literatura é comum encontrar-se o índice subscrito “5” para denotar a corrente axial obtida por transformações de fase que envolvem a matriz de Dirac γ_5 . Porém em muitos textos se usam de forma geral o índice subscrito A para denotar a corrente axial e V para a vetorial, pois as transformações dos campos de mésons não envolvem a matriz γ_5 .

e portanto teremos uma carga $Q = \int j^0(x) d^3x$ conservada. Por outro lado, para a corrente vetorial axial teremos

$$\partial_\mu j_5^\mu = 2im\bar{\psi}\gamma_5\psi \quad (2.17)$$

e a carga axial $Q_5 = \int j_5^0(x) d^3x$ será conservada somente se $m = 0$. Há evidências experimentais de que nas interações fortes a corrente axial é aproximadamente conservada no setor não estranho (u, d). Isto indica que a massa m que aparece em (2.17) para os quarks u e d deve ser pequena em relação a alguma escala básica de massa nas interações fortes. Este parâmetro de escala é o Λ da QCD que é aproximadamente 200 MeV. Assim as massas de u e d que são colocadas nas equações relativísticas são tipicamente de poucos MeV. Essas massas são chamadas de massas de quarks de corrente para distinguí-las das massas de quarks constituintes(efetivos).

2.3. Interação Píon-Núcleon

A interação píon-núcleon pode ser descrita por

$$\mathcal{L}_{\pi N} = g_{\pi NN}\bar{\psi}(\sigma + i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}\gamma_5)\psi$$

onde τ^a são as matrizes de Pauli, $g_{\pi NN}$ é a constante de acoplamento píon-núcleon, ψ é o campo do núcleon, π_a é o campo do píon e σ é um campo escalar.²

Para férmions, teremos a transformação quiral

$$\psi(x) \rightarrow \left(1 - i\beta_a\gamma_5\frac{\tau^a}{2}\right)\psi(x) \quad (2.18)$$

e no setor mesônico, para que haja invariância sob transformação quiral no termo de interação devemos ter [Tho84],

$$\sigma \rightarrow \sigma - \pi_a\beta_a \quad , \quad \pi_a \rightarrow \pi_a + \sigma\beta_a \quad (2.19)$$

onde β_a é um infinitesimal e $a = 1, 2, 3$ é o índice de isospin. Essas transformações nos permitem obter a corrente axial.

Para obter a corrente vetorial fazemos a transformação:

$$\psi(x) \rightarrow \left(1 - i\alpha_a\frac{\tau^a}{2}\right)\psi(x) \quad (2.20)$$

que corresponde a uma rotação de um férmion no espaço de isospin, com α_a infinitesimal.

²Uma ótima revisão sobre a simetria quiral na interação píon-núcleo é encontrada em [Br79].

Para campos mesônicos, desde que σ é um isoescalar, ele não se alterará por rotações, i.e., $\sigma \rightarrow \sigma$. O campo $\boldsymbol{\pi}$ se transformará vetorialmente por

$$\boldsymbol{\pi} \rightarrow \boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\pi}. \quad (2.21)$$

Usando as transformações axial e vetorial obtemos respectivamente a corrente axial

$$j_5^{\mu a} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \beta_a)} \delta \mathcal{L} \quad (2.22)$$

e a corrente vetorial

$$j^{\mu a} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \alpha_a)} \delta \mathcal{L}. \quad (2.23)$$

Definem-se então cargas axial e vetorial respectivamente. A partir das correntes podemos obter as cargas axial e vetorial pelas relações

$$Q_A^a = \int j_5^{0a}(x) d^3x \quad \text{e} \quad Q^a = \int j^{0a}(x) d^3x \quad (2.24)$$

e chegaremos às relações de comutação para as cargas nos setores fermiônico e mesônico, que apresentamos em seguida.

2.4. Álgebra de Correntes

Transformações de simetria sempre formam um grupo. No caso da simetria quiral o grupo é um grupo de Lie (as transformações são contínuas) e seus geradores satisfazem as relações

$$\begin{aligned} [Q^a, Q^b] &= i\epsilon^{abc} Q^c \\ [Q^a, Q_A^b] &= i\epsilon^{abc} Q_A^c \\ [Q_A^a, Q_A^b] &= i\epsilon^{abc} Q^c \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde ϵ^{abc} é o tensor de Levi-Civita definido no apêndice A.

Agora, se definirmos

$$Q_R^a = \frac{1}{2} (Q^a + Q_A^a) \quad , \quad Q_L^a = \frac{1}{2} (Q^a - Q_A^a) \quad (2.26)$$

teremos

$$\begin{aligned} [Q_R^a, Q_R^b] &= i\epsilon^{abc} Q_R^c \\ [Q_L^a, Q_L^b] &= i\epsilon^{abc} Q_L^c \\ [Q_R^a, Q_L^b] &= 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Assim as combinações de Q_R e Q_L se desacoplam e obedecem relações do grupo $SU(2)$ independentemente. Daí temos o grupo $SU(2)_L \times SU(2)_R$.

2.5. Modelo Sigma Linear

Assumindo invariância sob transformações quirais e vetoriais, Gell-Mann e Lévy [Ge60], baseando-se parcialmente em trabalho de Schwinger [Sch57][Sa69 p.89], propuseram o modelo sigma linear, que descreveremos em detalhe adiante. Incluindo a parte fermiônica, ele é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\sigma = & i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + g_{\pi NN}\bar{\psi}(\sigma + i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}\gamma_5)\psi \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \partial_\mu\vec{\pi}\partial^\mu\vec{\pi}) - \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) + \frac{\lambda^2}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Usando as transformações axial e vetorial e as equações (2.22) e (2.23) obtemos, respectivamente, a corrente axial

$$\mathbf{j}_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\psi + \sigma(\partial^\mu\boldsymbol{\pi}) - (\partial^\mu\sigma)\boldsymbol{\pi} \quad (2.29)$$

e a corrente vetorial

$$\mathbf{j}^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\psi + (\boldsymbol{\pi} \times \partial^\mu\boldsymbol{\pi}). \quad (2.30)$$

O modelo σ linear, proposto por Gell-Mann e Lévy[Ge60], é o mais celebrado exemplo de Lagrangiana em que a invariância quiral está presente. O seu setor mesônico é baseado em quatro graus de liberdade independentes, três dos quais associados ao campo do pión e o quarto a uma partícula escalar e isoescalar, denominada σ . As transformações vetoriais e axiais desses campos são dadas por:

$$\delta^V\sigma = 0, \quad (2.31)$$

$$\delta^V\boldsymbol{\pi} = -\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\pi}, \quad (2.32)$$

$$\delta^A\sigma = -\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\pi}, \quad (2.33)$$

$$\delta^A\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\beta}\sigma \quad (2.34)$$

A Lagrangiana do setor mesônico invariante por transformações quirais é dada por:

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \partial_\mu\vec{\pi}\partial^\mu\vec{\pi}) - \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) + \frac{\lambda^2}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2 \quad (2.35)$$

A simetria dessa Lagrangiana corresponde, pelo teorema de Noether, a uma corrente axial conservada que, como vemos na eq. (2.61), impede o decaimento fraco do pión. A forma mais simples de se obter a amplitude de tal decaimento é através da hipótese de PCAC, onde a divergência da corrente axial é dada por [Nam60][Ber60][Man84][Bh88]

$$\partial_\mu\mathbf{j}_5^\mu = f_\pi m_\pi^2 \vec{\pi}. \quad (2.36)$$

Para que isto aconteça, a Lagrangiana deve conter um termo de quebra de simetria, dado por:

$$\mathcal{L}_{SB} = f_\pi m_\pi^2 \sigma. \quad (2.37)$$

Assim, a Lagrangiana do setor mesônico passa a ser:

$$\mathcal{L}_M + \mathcal{L}_{SB} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \partial_\mu \vec{\pi} \partial^\mu \vec{\pi}) - \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) + \frac{\lambda^2}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2 + f_\pi m_\pi^2 \sigma. \quad (2.38)$$

As equações de movimento para o pión e para o sigma são dadas por

$$(\partial^2 + \mu^2)\vec{\pi} = \lambda^2(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)\vec{\pi}, \quad (2.39)$$

$$(\partial^2 + \mu^2)\sigma = \lambda^2(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)\sigma + f_\pi m_\pi^2. \quad (2.40)$$

A Lagrangiana quiral (2.38) pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = T - V(\sigma, \vec{\pi}), \quad (2.41)$$

onde T é a componente cinética e $V(\sigma, \vec{\pi})$ é um potencial, dado por

$$V(\sigma, \vec{\pi}) = \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) - \frac{\lambda^2}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2 - f_\pi m_\pi^2 \sigma, \quad (2.42)$$

que não contém derivadas dos campos. O termo de energia cinética é sempre positivo. Por isso, para se obter a configuração de menor energia, basta que se minimize o potencial, o que corresponde a

$$\frac{\partial V}{\partial \pi_a} = 0, \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} = 0. \quad (2.44)$$

Estas condições correspondem às equações de movimento (2.39) e (2.40) para campos independentes de x^μ , e podem ser escritas como

$$\lambda^2 [\alpha^2 - \sigma^2 - \vec{\pi}^2] \vec{\pi} = 0, \quad (2.45)$$

$$\lambda^2 [\alpha^2 - \sigma^2 - \vec{\pi}^2] \sigma - f_\pi m_\pi^2 = 0, \quad (2.46)$$

onde $\alpha^2 = \mu^2/\lambda^2$.

Este sistema de equações pode ter dois conjuntos de soluções, ilustrados nos gráficos da figura 2.1, onde desenhamos apenas as projeções nos eixos V e σ .

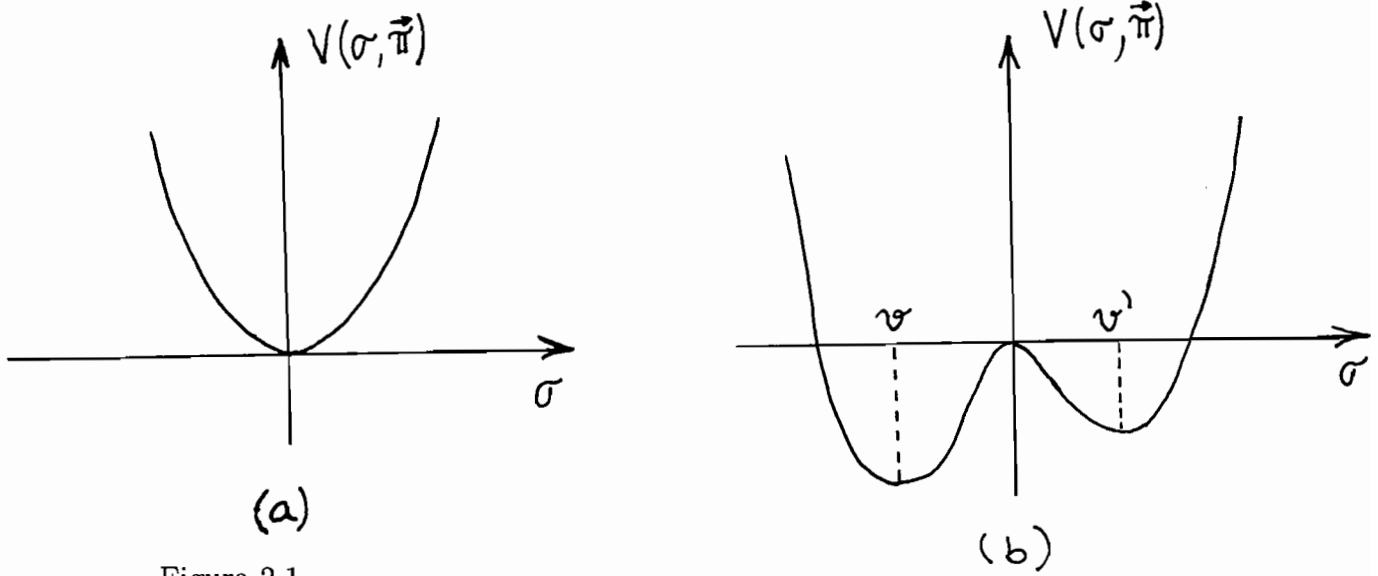


Figura 2.1

No caso $\alpha^2 < 0$, mostrado na figura 2.1a, podemos ver que o mínimo ocorre para $\sigma = \vec{\pi} = 0$. No caso $\alpha^2 > 0$, os mínimos de $V(\sigma, \vec{\pi})$ ocorrem no ponto $\vec{\pi} = 0$ e $\sigma = v$, onde v é uma constante que satisfaz a equação

$$\lambda^2 (\alpha^2 v - v^3) = f_\pi m_\pi^2 \quad (2.47)$$

Resolvendo esta equação de forma aproximada, levando em conta que $f_\pi m_\pi^2$ é pequeno, temos duas soluções:

$$v \cong -\alpha - \frac{f_\pi m_\pi^2}{2\alpha^2 \lambda^2}, \quad (2.48)$$

$$v' \cong \alpha - \frac{f_\pi m_\pi^2}{2\alpha^2 \lambda^2}, \quad (2.49)$$

Como $v < v'$, temos um mínimo do potencial no ponto v mostrado na figura 2.1b. É importante notar, entretanto, que a separação entre os estados v e v' é pequena, sendo que eles se tornam degenerados quando $m_\pi = 0$.

Nessa situação, os mínimos de $V(\sigma, \vec{\pi})$ estariam sobre a circunferência $\sigma^2 + \pi^2 = \alpha^2$, dando origem ao chapéu mexicano, assim chamado devido à forma do gráfico em três dimensões. Neste caso, teríamos um número infinito de mínimos degenerados. Voltando ao caso massivo, notamos que, se α^2 for negativo, o modelo prevê que as massas do quarteto $(\sigma, \vec{\pi})$ serão degeneradas, um fato sem evidências experimentais. Por outro lado, quando α^2 é positivo, o modelo prevê que a constante

v também é o valor esperado no vácuo do campo σ , entendendo-se como vácuo, o estado de menor energia do sistema. Neste estado não há partículas (quanta). Por isso é que se estuda a configuração de menor energia do sistema tratando-se os campos como graus de liberdade clássicos. Os efeitos quânticos são incorporados supondo-se que o campo σ seja composto por uma componente clássica v e por uma quântica, σ' :

$$\sigma = v + \sigma'. \quad (2.50)$$

Assim, enfatizando as componentes quânticas, a Lagrangiana é escrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M = & \frac{1}{2} [(\partial_\mu \vec{\pi})^2 - (\mu^2 - \lambda^2 v^2) \vec{\pi}^2] + \frac{1}{2} [(\partial_\mu \sigma')^2 - (\mu^2 - 3\lambda^2 v^2) \sigma'^2] + \\ & + \frac{\lambda^2}{4} (\vec{\pi}^2 + \sigma'^2)^2 + \lambda^2 v \sigma' (\vec{\pi}^2 + \sigma'^2) - (\mu^2 v - \lambda^2 v^3 - f_\pi m_\pi^2) \sigma'. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Usando-se a condição (2.47), o termo linear em σ' se anula, e obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M = & \frac{1}{2} [(\partial_\mu \vec{\pi})^2 - m_\pi^2 \vec{\pi}^2] + \frac{1}{2} [(\partial_\mu \sigma')^2 - m_{\sigma'}^2 \sigma'^2] \\ & + \frac{\lambda^2}{4} (\vec{\pi}^2 + \sigma'^2)^2 + \lambda^2 v \sigma' (\vec{\pi}^2 + \sigma'^2). \end{aligned} \quad (2.52)$$

onde o pión e o sigma têm massas diferentes, dadas por:

$$m_\pi^2 = \mu^2 - \lambda^2 v^2, \quad (2.53)$$

$$m_\sigma^2 = \mu^2 - 3\lambda^2 v^2. \quad (2.54)$$

Da Lagrangiana (2.52), usando as transformações (2.67), (2.55) e com (2.9) deriva-se a seguinte expressão para a divergência da corrente axial:

$$\partial_\mu \vec{j}_5^\mu = v m_\pi^2 \vec{\pi}. \quad (2.55)$$

Usando-se a hipótese de PCAC identificamos:

$$v = f_\pi. \quad (2.56)$$

Das equações (2.53), (2.54) e (2.56) podemos obter os parâmetros do modelo como funções dos “observáveis” f_π , m_π e m_σ :

$$\mu^2 = \frac{1}{2} (3m_\pi^2 - m_\sigma^2), \quad (2.57)$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{2f_\pi^2} (m_\pi^2 - m_\sigma^2). \quad (2.58)$$

2.6. CVC e PCAC

A invariância da Lagrangiana sob rotações no espaço de isospin corresponde a conservação da corrente isovetorial (CVC). Nas interações fortes isto leva a forças independentes da carga e é uma das melhores simetrias que temos quebrada apenas levemente.

Considere o elemento de matriz do decaimento do pión (de um estado de um pión para o vácuo). A partir de considerações de paridade, somente a corrente axial pode contribuir para este processo, e podemos escrever

$$\langle 0 | j_5^{\mu a}(0) | \pi^b(k) \rangle = i k^\mu \delta^{ab} f_\pi, \quad (2.59)$$

onde k^μ é o quadrivetor momento energia.

A equação acima resulta puramente de considerações de paridade e da observação de que k^μ é o único quadrivetor disponível. No decaimento, a equação (2.59) fornece o elemento de matriz da corrente hadrônica, com a parte leptônica já conhecida. Da largura do decaimento do pión $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ pode ser então obtida a constante de decaimento $f_\pi = 93$ MeV. Da simetria de translação

$$\langle 0 | j_5^{\mu a}(x) | \pi^b(k) \rangle = i k^\mu \delta^{ab} f_\pi e^{-i k^\mu x_\mu}. \quad (2.60)$$

Segue então que

$$\langle 0 | \partial_\mu j_5^{\mu a}(0) | \pi^b(k) \rangle = m_\pi^2 \delta^{ab} f_\pi \quad (2.61)$$

pois $k^2 = m_\pi^2$. Comparando com (2.55) temos

$$\partial_\mu j_5^\mu(x) = f_\pi m_\pi^2 \pi \quad (2.62)$$

que é a relação de conservação parcial da corrente axial (PCAC), já que m_π é pequeno.

2.7. Modelo Sigma Não-Linear

Como a partícula σ não foi encontrada, foi proposto por Gell-Mann e Lévy [Ge60] o modelo sigma não linear. Neste modelo trabalha-se com o tripleto usual de campos do pión π^i e com o campo escalar σ , necessário para implementação da simetria quiral. Eles são vinculados, no modelo sigma não linear, pela relação

$$\sigma^2 + \pi^2 = f_\pi^2, \quad (2.63)$$

onde f_π é a largura do decaimento do pión e a Lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L}_\pi = \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi) \quad (2.64)$$

que tem a mesma forma do modelo sigma linear, mas o conteúdo é diferente pois possui a restrição $\sigma = \sqrt{f_\pi^2 - \boldsymbol{\pi}^2}$. A Lagrangiana acima juntamente com o vínculo constitui o modelo sigma não linear.

No caso dos modelos não lineares, o campo escalar é eliminado. Para tanto podemos notar que o vínculo (2.63) sugere a parametrização:

$$\begin{aligned}\sigma &= f_\pi \cos F, \\ \boldsymbol{\pi} &= f_\pi \hat{\boldsymbol{\pi}} \sin F.\end{aligned}\tag{2.65}$$

Assim os graus de liberdade podem ser incorporados num campo unitário U , escrito como

$$U = e^{i\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}} F},\tag{2.66}$$

onde $\boldsymbol{\tau}$ são as matrizes de Pauli de isospin. Expandindo esse campo U em série e agrupando convenientemente os termos, podemos escrever

$$U = \cos F + i\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}} \sin F.\tag{2.67}$$

Usando (2.65), obtemos a forma alternativa

$$U = \frac{1}{f_\pi} (\sigma + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi})\tag{2.68}$$

e a Lagrangiana do modelo sigma não-linear pode ser reescrita como

$$\mathcal{L}_\pi = \frac{f_\pi^2}{4} \text{Tr} (\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger).\tag{2.69}$$

2.8. Campos e Transformações

A partir do campo U , podemos construir as formas esquerda L^μ e direita R^μ :

$$L^\mu = U^\dagger \partial^\mu U,\tag{2.70}$$

$$R^\mu = U \partial^\mu U^\dagger.\tag{2.71}$$

Usando a unitariedade de U , representada pela relações $UU^\dagger = U^\dagger U = 1$, obtemos as formas alternativas

$$L^\mu = -(\partial^\mu U^\dagger) U,\tag{2.72}$$

$$R^\mu = -(\partial^\mu U) U^\dagger.\tag{2.73}$$

O resultado (2.68), usado nas eqs. (2.72) (2.73) permite-nos escrever:

$$L^\mu = \frac{i}{f_\pi^2} \boldsymbol{\tau} \cdot [\boldsymbol{\pi} \times \partial^\mu \boldsymbol{\pi} + (\sigma \partial^\mu \boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\pi} \partial^\mu \sigma)] \equiv i\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{L}^\mu\tag{2.74}$$

$$R^\mu = \frac{i}{f_\pi^2} \boldsymbol{\tau} \cdot [\boldsymbol{\pi} \times \partial^\mu \boldsymbol{\pi} - (\sigma \partial^\mu \boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\pi} \partial^\mu \sigma)] \equiv i\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{R}^\mu.\tag{2.75}$$

As transformações vetorial e axial desses campos são dadas por:

$$\begin{aligned}
 \delta^V \sigma &= 0 \\
 \delta^V \boldsymbol{\pi} &= -\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\pi} \\
 \delta^V U &= \frac{i}{2} [\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}, U] \\
 \delta^V \mathbf{L}^\mu &= -\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{L}^\mu \\
 \delta^V \mathbf{R}^\mu &= -\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R}^\mu
 \end{aligned} \tag{2.76}$$

e

$$\begin{aligned}
 \delta^A \sigma &= -\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\pi}, \\
 \delta^A \boldsymbol{\pi} &= \boldsymbol{\beta} \sigma \\
 \delta^A U &= \frac{i}{2} \{ \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\beta}, U \} \\
 \delta^A \mathbf{L}^\mu &= \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{L}^\mu \\
 \delta^A \mathbf{R}^\mu &= -\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{R}^\mu
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

Estes resultados indicam que tanto δ^V como δ^A produzem iso-rotações de sentidos contrários em \mathbf{L}^μ e \mathbf{R}^μ . Deste modo, qualquer isoescalar construído a partir de \mathbf{L}^μ ou \mathbf{R}^μ é um invariante quiral, isto é, conservará corrente vetorial e axial.

3. RELAÇÃO DE GELL-MANN, OAKES E RENNER, O TERMO SIGMA NUCLEAR E O CONDENSADO DE QUARKS

Neste capítulo introduziremos a relação de Gell-Mann-Oakes-Renner(GOR) [GOR68] como um caso particular do teorema de Dashen[Das69] aplicado à quebra espontânea da simetria quiral. Mostraremos que a relação de GOR permite calcular contribuições das massas dos quarks para quantidades hadrônicas. Posteriormente o conceito do termo sigma nuclear(Σ) será introduzido. Será discutido o condensado de quarks a densidade finita e o papel do termo sigma da matéria nuclear no condensado.

3.1. Teorema de Goldstone

O teorema de Goldstone[Gol61] pode ser enunciado da seguinte forma: “Se o estado fundamental é degenerado e não possui uma simetria da Hamiltoniana teremos uma quebra espontânea de simetria. Se essa simetria for contínua, uma partícula sem massa será gerada”. (ver também [Col85][Man94][PS95])

Vamos começar discutindo um exemplo¹: suponha que em uma linha estejam dispostos sistemas com spin e que cada sistema interaja com o seu vizinho próximo de modo que os spins fiquem alinhados (isto não deve ser confundido com interação entre dipolos magnéticos). (fig.3.1)

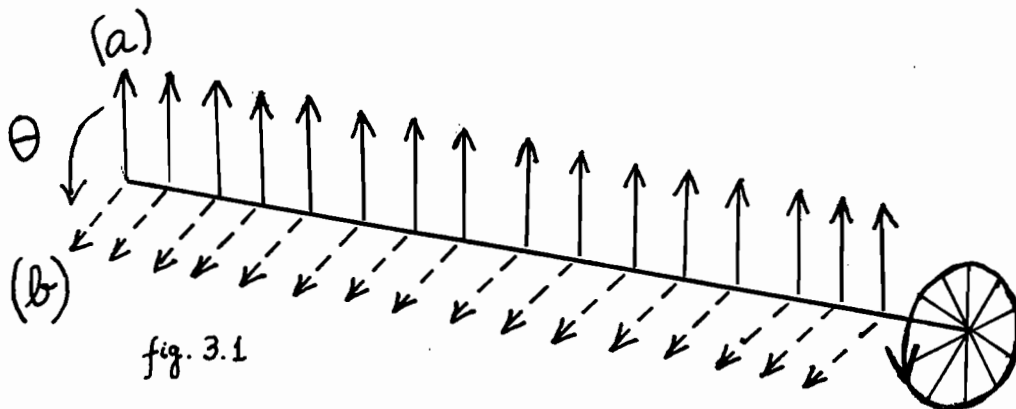
O sistema tem simetria de rotação em torno da linha, uma vez que somente o ângulo relativo entre as direções dos spins dos vizinhos próximos é que importa para a energia de interação.

O estado fundamental corresponde a todos os spins alinhados em uma direção qualquer, quebrando a simetria original da Hamiltoniana do sistema. Isto é chamado de quebra espontânea de simetria.

Escolhendo a direção (\underline{a}) na figura 3.1 como estado fundamental do sistema, houve quebra da simetria de rotação em torno do eixo, que era presente na Hamil-

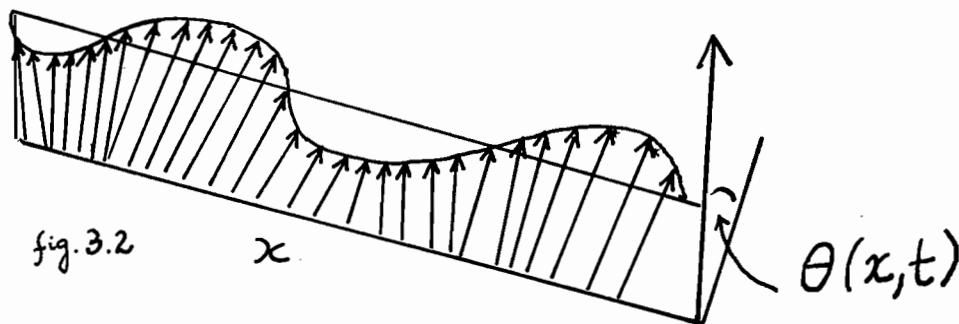
¹Esta explanação e a do item seguinte baseiam-se nas notas de aula do curso “Diagramas de Feynman e suas aplicações” (IFUSP 1995) ministrado pelo Prof. Tobias Frederico.

toniana. Porém a situação (b) também é um vácuo aceitável para o sistema, pois uma rotação em torno do eixo de um ângulo θ , não muda a energia. Assim concluímos que o grau de liberdade coletivo associado ao ângulo θ não envolve energia ou massa, correspondendo ao bóson de Goldstone [Gol61].



O estado fundamental é infinitamente degenerado, pois qualquer rotação não muda a energia. Assim podemos ter a superposição de infinitos estados como vácuo da teoria, impondo um caráter bosônico para este grau de liberdade θ .

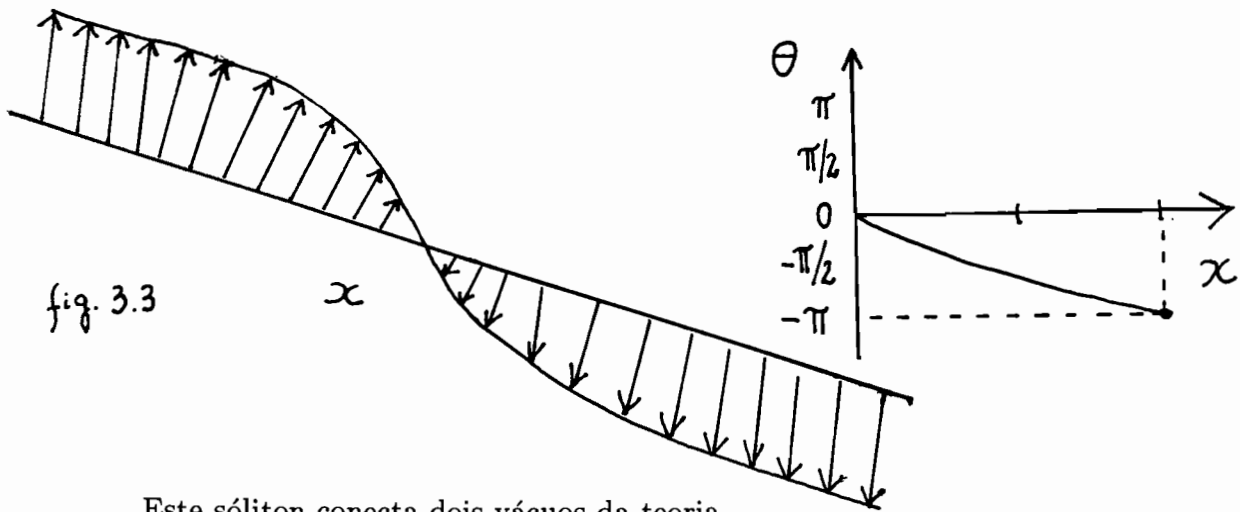
Por enquanto discutimos as rotações globais do sistema, porém localmente o ângulo pode variar em posição ao longo da linha e no tempo. Caracterizamos, por exemplo a seguinte situação:



A onda $\theta(x, t)$ quando quantizada corresponde ao bóson de Goldstone.

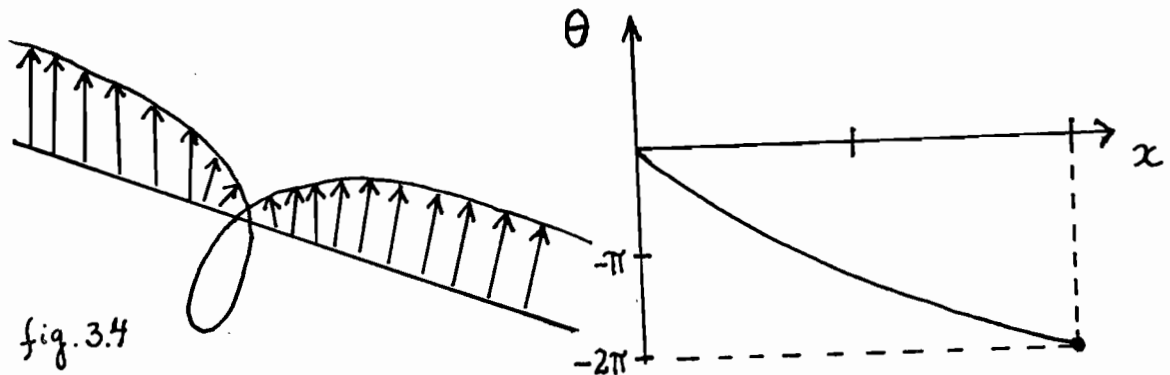
Outra situação que pode ocorrer com este sistema é uma variação grande no ângulo θ , o que corresponde a uma variação macroscópica angular, isto origina as

ondas solitárias, por exemplo:



Este sóliton conecta dois vácuos da teoria.

Uma outra possibilidade seria o análogo do skyrmion neste sistema, os spins dariam uma volta completa, voltando ao vácuo original,



Estas “torções” que fazemos nos spins, estão ligadas a conceitos topológicos, que não entraremos em detalhes aqui [Col85].

O Teorema de Goldstone é bastante geral e podemos esquematizar sua prova, partindo de uma transformação que mantém a Hamiltoniana invariante.

O gerador desta transformação contínua é o operador Hermitiano G tal que:

$$[G, H] = 0 . \quad (3.1)$$

A transformação unitária que representa no espaço de Hilbert a rotação G é

$$U(\theta) = e^{iG\theta} . \quad (3.2)$$

Como $G = G^\dagger$ temos $\mathcal{U}\mathcal{U}^\dagger = 1$.

Obs.: Em geral $\det\mathcal{U} = 1$ e usando que $i\theta\text{tr}G = \ln \det e^{iG\theta} = 0$, isto implica que $\text{tr}G = 0$,

Na última situação em que o estado fundamental não tem a simetria da Hamiltoniana, temos que este estado não é auto-função de G ,

$$|0\rangle_\theta = e^{iG\theta} |0\rangle, \quad (3.3)$$

e o estado $|0\rangle_\theta \neq e^{i\alpha} |0\rangle$.

Todos os estados $|0\rangle_\theta$ são auto-estados de H , com a mesma energia,

$$H |0\rangle_\theta = H e^{iG\theta} |0\rangle = e^{iG\theta} H |0\rangle = E_f |0\rangle_\theta$$

onde E_f é a energia do estado fundamental.

O ângulo θ é o grau de liberdade associado ao bóson de Goldstone. E a “rotação” de um ângulo θ não modifica a energia do sistema. Este bóson tem energia zero, que em uma teoria relativística corresponde a massa zero.

3.2. Teorema de Dashen

Se a Hamiltoniana contém um pequeno termo que quebra a simetria, tal que

$$[\Delta H, G] \neq 0, \quad (3.4)$$

este termo gera massa para o bóson de Goldstone [Das69]. Vamos calcular perturbativamente a contribuição deste termo para a energia do estado fundamental, modificado pela transformação de simetria:

$$\Delta E = \langle 0_\theta | \Delta H | 0_\theta \rangle \quad (3.5)$$

para pequenos θ 's, temos:

$$|0_\theta\rangle = e^{iG\theta} |0\rangle \simeq \left(1 + iG\theta - \frac{(G\theta)^2}{2}\right) |0\rangle. \quad (3.6)$$

Introduzindo (3.6) em (3.5) temos:

$$\begin{aligned} \Delta E &\approx \langle 0 | \left(1 - iG\theta - \frac{(G\theta)^2}{2}\right) \Delta H \left(1 + iG\theta - \frac{(G\theta)^2}{2}\right) | 0 \rangle \\ &\approx \langle 0 | \Delta H | 0 \rangle + \theta \langle 0 | i[\Delta H, G] | 0 \rangle + \theta^2 \langle 0 | G\Delta H G - \frac{1}{2}\{G^2, \Delta H\} | 0 \rangle \end{aligned} \quad (3.7)$$

O primeiro termo de (3.7) apenas desloca a energia do estado fundamental, o termo linear em θ corresponde ao acoplamento do bóson com o estado fundamental

e o termo quadrático em θ corresponde à energia carregada por um bóson de Goldstone,

$$\Delta E_{\text{bóson}} = \theta^2 \langle 0 | G\Delta HG - \frac{1}{2}\{G^2, \Delta H\} | 0 \rangle . \quad (3.8)$$

Comparando (3.8) com o termo de massa da Lagrangiana de um bóson , $\mathcal{L} = (\partial_\mu \theta \partial_\mu \theta - m_\theta^2 \theta^2)/2$, temos

$$-\frac{m_\theta^2 \theta^2}{2} = -\theta^2 \langle 0 | G\Delta HG - \frac{1}{2}\{G^2, \Delta H\} | 0 \rangle , \quad (3.9)$$

e obtemos a massa:

$$m_\theta^2 = 2 \langle 0 | G\Delta HG - \frac{1}{2}\{G^2, \Delta H\} | 0 \rangle . \quad (3.10)$$

Para $\Delta H = 0$, a massa é nula.

3.3. Lagrangiana Quiral para o pión

Os quarks *up* ($|u\rangle$) e *down* ($|d\rangle$) que formam o núcleon, têm massas próximas de zero. Porém no interior do núcleon eles adquirem massa, que ajustes fenomenológicos indicam ser em torno de 300MeV. Esses quarks não são mais os quarks fundamentais porém correspondem a graus de liberdade efetivos ou como são chamados quarks constituintes.

A massa do quark fundamental, chamada de quark de corrente é [Leu82]

$$m_u \simeq 5\text{MeV} , m_d \simeq 10\text{MeV} . \quad (3.11)$$

Assim, na Lagrangiana dos quarks up e down podemos supor, em uma primeira aproximação, que $m_u = m_d = 0$.

A Lagrangiana de Dirac para os quarks de corrente up e down é dada por

$$\mathcal{L}_0 = \bar{q}_\alpha (i\cancel{\partial} - m_q) q_\alpha , \quad (3.12)$$

onde $\cancel{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$ e por simplicidade usamos $m_q = (m_u + m_d)/2$ e com soma no índice $\alpha = 1, 2$.

Na forma (3.12) a Lagrangiana é invariante pela transformação quiral

$$\mathcal{U}_5 = e^{i\gamma^5 \frac{\tau \cdot \pi}{2f_\pi}} \quad (3.13)$$

se desconsiderarmos a pequena massa m_q ; τ são as matrizes de Pauli no espaço de isospin dos quarks up-down.

A interação entre os quarks através da troca de glúons, também é invariante pela transformação quiral (3.13). O fator $2f_\pi$ é introduzido para de modo que a

relação de Goldberger Treiman seja satisfeita. Veremos mais adiante que $f_\pi = 93$ MeV é a constante de decaimento fraca do pión. O pión é encontrado em três estados de carga π^+ , π^0 e π^- , o que lhe confere isospin 1. Além disso ele é uma partícula pseudo-escalar, com massa 138 MeV.

Acredita-se que a simetria quiral é espontaneamente quebrada na natureza e o ângulo quiral sendo o pión ganha status de grau de liberdade coletivo, sendo uma excitação do vácuo com a simetria quebrada.

Introduzindo a transformação (3.13) na Lagrangiana (3.12) e omitindo os índices α temos

$$\mathcal{L}'_0 = \bar{q}'(i\cancel{\partial} - m_q)q' , \quad (3.14)$$

com

$$q' = \mathcal{U}_5 q = e^{i\gamma^5 \frac{\tau \cdot \pi}{2f_\pi}} q , \quad (3.15)$$

temos

$$\mathcal{L}'_0 = \mathcal{L}_0 + \bar{q}\mathcal{U}_5 i\cancel{\partial}\mathcal{U}_5 q - m_q \bar{q}\mathcal{U}_5 \mathcal{U}_5 q . \quad (3.16)$$

A Lagrangiana efetiva

$$\mathcal{L}_{eff}^\pi = \bar{q}\mathcal{U}_5 i\cancel{\partial}\mathcal{U}_5 q - m_q \bar{q}\mathcal{U}_5 \mathcal{U}_5 q \quad (3.17)$$

contém em ordem mais baixa a interação do quark com o pión e do pión com um pión, etc. Além disso, introduzindo o acoplamento com o fóton, podemos obter a amplitude do processo de fotoprodução de pions.

A transformação unitária \mathcal{U}_5 pode ser escrita como:

$$\mathcal{U}_5 = e^{i\gamma^5 \frac{\tau \cdot \pi}{2f_\pi}} = \cos \frac{|\pi|}{2f_\pi} + i\gamma^5 \boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\pi} \sin \frac{|\pi|}{2f_\pi} . \quad (3.18)$$

Definindo

$$\mathcal{U} \equiv e^{i\frac{\tau \cdot \pi}{2f_\pi}} = \cos \frac{|\pi|}{2f_\pi} + i\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\pi} \sin \frac{|\pi|}{2f_\pi} \quad (3.19)$$

temos:

$$\mathcal{U}_5 = \frac{1 + \gamma^5}{2} \mathcal{U} + \frac{1 - \gamma^5}{2} \mathcal{U}^\dagger . \quad (3.20)$$

Introduzindo (3.20) em (3.17), temos :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff}^\pi = & \bar{q} \left\{ \left[\frac{1 + \gamma^5}{2} \mathcal{U} + \frac{1 - \gamma^5}{2} \mathcal{U}^\dagger \right] i\cancel{\partial} \left[\frac{1 + \gamma^5}{2} \mathcal{U} + \frac{1 - \gamma^5}{2} \mathcal{U}^\dagger \right] \right\} q \\ & - m_q \bar{q} \left[\frac{1 + \gamma^5}{2} \mathcal{U}^2 + \frac{1 - \gamma^5}{2} (\mathcal{U}^\dagger)^2 \right] q , \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde foi usado que $(1 + \gamma^5)(1 - \gamma^5) = 0$ e $\left(\frac{1 \pm \gamma^5}{2}\right)^2 = \frac{1 \pm \gamma^5}{2}$. Aplicando as derivadas temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff}^\pi &= i\bar{q} \left[\mathcal{U} \partial_\mu \mathcal{U}^\dagger \frac{1 + \gamma^5}{2} \gamma^\mu \right] q + i\bar{q} \left[\mathcal{U}^\dagger \partial_\mu \mathcal{U} \frac{1 - \gamma^5}{2} \gamma^\mu \right] q \\ &\quad - m_q \bar{q} \left[\frac{1 + \gamma^5}{2} \mathcal{U}^2 + \frac{1 - \gamma^5}{2} (\mathcal{U}^\dagger)^2 \right] q. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Agora separamos os termos de caráter pseudo-escalar e pseudovetorial:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff}^\pi &= \frac{i}{2} \bar{q} \left[\mathcal{U}^\dagger \partial_\mu \mathcal{U} + \mathcal{U} \partial_\mu \mathcal{U}^\dagger \right] \gamma^\mu q + \frac{i}{2} \bar{q} \left[\mathcal{U} \partial_\mu \mathcal{U}^\dagger - \mathcal{U}^\dagger \partial_\mu \mathcal{U} \right] \gamma^5 \gamma^\mu q \\ &\quad - \frac{m_q}{2} \bar{q} \left[\mathcal{U}^2 + (\mathcal{U}^\dagger)^2 \right] q - \frac{m_q}{2} \bar{q} \left[\mathcal{U}^2 - (\mathcal{U}^\dagger)^2 \right] \gamma^5 q. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Expandindo a Lagrangiana (3.23) até segunda ordem² no campo do pión obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff}^\pi &= -\frac{1}{2f_\pi} (\partial_\mu \pi) \cdot \bar{q} \gamma^\mu \gamma^5 \tau q - i \frac{m_q}{f_\pi} \pi \cdot \bar{q} \gamma^5 \tau q \\ &\quad - \frac{1}{4f_\pi^2} (\pi \times \partial_\mu \pi) \cdot \bar{q} \gamma^\mu \tau q + \frac{m_q}{2f_\pi^2} \pi^2 \bar{q} q + \dots \end{aligned} \quad (3.24)$$

Vamos analisar os diversos termos da Lagrangiana efetiva (3.24).

Primeiro observamos que a interação do pión com os quarks é fraca para momentos pequenos. Esta é uma característica de bósons de Goldstone, eles interagem fracamente em energias e momentos pequenos.

O primeiro termo de (3.24) é o acoplamento pseudovetorial do pión com o quark ,

$$\mathcal{L}_{PV}^\pi = -\frac{1}{2f_\pi} (\partial_\mu \pi) \cdot \bar{q} \gamma^\mu \gamma^5 \tau q, \quad (3.25)$$

adicionando uma quadridivergência torna a Lagrangiana equivalente e assim este acoplamento pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\mathcal{L}_{PV}^\pi = +\frac{1}{2f_\pi} \pi_i \bar{q} (\overleftarrow{\not{\partial}} + \overrightarrow{\not{\partial}}) \gamma^5 \tau_i q. \quad (3.26)$$

Estes quarks são os quarks efetivos após a quebra espontânea de simetria quiral e portanto eles adquirem uma massa constituinte $M_c \simeq 300$ MeV. Usando a equação de Dirac temos que para quarks constituintes “livres” (dentro de uma certa região) :

$$\begin{aligned} i \overrightarrow{\not{\partial}} q &= M_c q & \text{e} \\ -i \bar{q} \overleftarrow{\not{\partial}} &= M_c \bar{q}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

²Usa-se a expansão $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \dots$

Introduzindo (3.27) em (3.26) temos:

$$\mathcal{L}_{PV}^\pi = g_{\pi q} i \bar{q} \gamma^5 \tau q \cdot \pi , \quad (3.28)$$

com

$$g_{\pi q} = \frac{M_c}{f_\pi} . \quad (3.29)$$

A relação (3.29) é conhecida como relação de Goldberger-Treiman [GT58] para os quarks. Ela foi descoberta no caso do núcleon. O núcleon sendo uma partícula composta temos que (3.29) é levemente modificada para [GT58]:

$$g_{\pi NN} = \frac{g_A M_N}{f_\pi} , \quad (3.30)$$

com $g_A \simeq 1,25$, que é a constante de acoplamento axial isovetorial.

O termo (3.25) também dá origem ao termo cinético do pión, assim temos

$$\langle 0 | j_5^{\mu a}(x) | \pi_b \rangle = \langle 0 | \bar{q}(x) \gamma^\mu \gamma^5 \tau_a q(x) | \pi_b \rangle = i k^\mu f_\pi \delta_{ab} e^{-i k^\mu x_\mu} \quad (3.31)$$

que é conhecida como hipótese da conservação parcial da corrente axial, (PCAC),

$$\partial_\mu \langle 0 | j_5^{\mu a}(x) | \pi_b \rangle = k^\mu k_\mu f_\pi \delta_{ab} = m_\pi^2 f_\pi \delta_{ab} . \quad (3.32)$$

Como $m_\pi \simeq 0$, temos $\partial_\mu \vec{j}_5^\mu \simeq 0$.

O último termo da Lagrangiana efetiva (3.24) também contribui para a massa do pión. Comparando com o termo de massa da Lagrangiana de Klein-Gordon temos³

$$m_\pi^2 = -\frac{m_q}{f_\pi^2} \langle 0 | \bar{u}(\vec{x})u(\vec{x}) + \bar{d}(\vec{x})d(\vec{x}) | 0 \rangle \equiv -\frac{2m_q}{f_\pi^2} \langle 0 | \bar{q}(\vec{x})q(\vec{x}) | 0 \rangle , \quad (3.33)$$

onde agora *definimos o condensado de quarks como* $\langle 0 | \bar{q}(\vec{x})q(\vec{x}) | 0 \rangle \equiv \langle 0 | \frac{\bar{u}(\vec{x})u(\vec{x}) + \bar{d}(\vec{x})d(\vec{x})}{2} | 0 \rangle$. Esta é a equação (??), que havíamos derivado de modo bastante geral, onde $|0\rangle$ é o vácuo com a simetria espontaneamente quebrada. É conhecida como relação de Gell-Mann, Oakes e Renner (GOR) [GOR68].

O valor do condensado de quarks reflete a complexidade do vácuo da QCD onde existem infinitos pares de quarks-antiquarks advindos da interação forte e também ele é o parâmetro de ordem da quebra espontânea de simetria quiral. No vácuo este valor é da ordem de $(-230 \pm 25 \text{ MeV})^3$ [BW96].

³Abusamos da liguagem ao definirmos $\langle 0 | \bar{q}(\vec{x})q(\vec{x}) | 0 \rangle \equiv \langle 0 | \frac{\bar{u}(\vec{x})u(\vec{x}) + \bar{d}(\vec{x})d(\vec{x})}{2} | 0 \rangle$ que passaremos a utilizar a para nos referir ao valor esperado do condensado. Não se deve confundir esta definição com a omissão dos índices α na derivação da Lagrangiana efetiva.

Usando a relação de GOR, a derivada de qualquer quantidade hadrônica O com respeito à massa dos quarks pode ser relacionada com a derivada em relação à massa do pión na forma

$$m_q \frac{\partial O}{\partial m_q} = m_q \frac{\partial O}{\partial m_\pi^2} \frac{\partial m_\pi^2}{\partial m_q} = m_\pi^2 \frac{\partial O}{\partial m_\pi^2} = \frac{1}{2} m_\pi \frac{\partial O}{\partial m_\pi}. \quad (3.34)$$

Isto permite calcular dependência de quantidades hadrônicas em relação a massa dos quarks usando puramente uma Lagrangiana efetiva piônica, sem o uso explícito dos quarks. Isto será retomado a seguir no cálculo do termo sigma nuclear.

3.4. Termo Sigma Nuclear

O termo sigma [Eri90-93][Loc90][Glo96] é uma medida do conteúdo isoescalar de um estado quântico. Ele pode ser formalmente definido como o valor esperado dos comutadores da carga axial (Q_A) com a Hamiltoniana [Che94][Coh92], i.e.,

$$\Sigma_N = \frac{1}{3} \sum_{a=1}^3 (\langle \Psi_N | Q_A^a [Q_A^a, H] | \Psi_N \rangle - \langle 0 | Q_A^a [Q_A^a, H] | 0 \rangle). \quad (3.35)$$

Na descrição da QCD para um núcleon, ele pode ser expresso como [Che94]

$$\Sigma_N = 2m_q \int d^3x (\langle \Psi_N | \bar{q}(\vec{x})q(\vec{x}) | \Psi_N \rangle - \langle 0 | \bar{q}(\vec{x})q(\vec{x}) | 0 \rangle) \quad (3.36)$$

o que revela a importância da magnitude das massas dos quarks de corrente para este observável.

Para se medir esta quantidade no caso do núcleon é necessário uma partícula capaz de interagir com a parte isoescalar. Píons têm essa propriedade. No último termo da Lagrangiana (3.24), o elemento de matriz

$$\begin{aligned} & \left\langle \Psi_N \pi \left| \int d^3x \frac{2m_q}{2f_\pi^2} \pi^2(\vec{x}) : \bar{q}(\vec{x})q(\vec{x}) : \right| \pi \Psi_N \right\rangle \\ &= \frac{1}{2f_\pi^2} \int d^3x \langle \pi | \pi^2(\vec{x}) | \pi \rangle 2m_q (\langle \Psi_N | \bar{q}(\vec{x})q(\vec{x}) | \Psi_N \rangle - \langle 0 | \bar{q}(\vec{x})q(\vec{x}) | 0 \rangle) \end{aligned}$$

dá a amplitude de espalhamento escalar pión-núcleon. Assim, medidas de baixa energia no espalhamento pión-núcleon determinaram um $\Sigma_N \sim 45$ MeV [Gas91].

O termo sigma pode ser relacionado com a derivada em relação à massa do quark pela aplicação do teorema de Hellmann-Feynman (ver apêndice B) à Hamiltoniana da QCD [Coh92],

$$\begin{aligned}
\Sigma_N &= 2m_q \int d^3x (\langle \Psi_N | \bar{q}(\vec{x})q(\vec{x}) | \Psi_N \rangle - \langle 0 | \bar{q}(\vec{x})q(\vec{x}) | 0 \rangle) \\
&= m_q \left\langle \Psi_N \left| \frac{\partial H_{QCD}}{\partial m_q} \right| \Psi_N \right\rangle = m_q \frac{\partial}{\partial m_q} \langle \Psi_N | H_{QCD} | \Psi_N \rangle = m_q \frac{\partial M_N}{\partial m_q}.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Pode-se também definir um termo sigma nuclear na forma

$$\Sigma_A = 2m_q \int d^3x (\langle \Psi_A | \bar{q}(\vec{x})q(\vec{x}) | \Psi_A \rangle - \langle 0 | \bar{q}(\vec{x})q(\vec{x}) | 0 \rangle) \tag{3.38}$$

que pela aplicação também do teorema de Hellmann-Feynman fornece, da mesma forma,

$$\Sigma_A = m_q \frac{\partial M_A}{\partial m_q}, \tag{3.39}$$

onde M_A é a massa do núcleo. Usando que $M_A = ZM_p + (A - Z)M_n + E_B$, onde Z é o número de prótons, M_p e M_n são as massas do próton e do nêutron, respectivamente, e E_B é a energia de ligação, temos

$$\Sigma_A = m_q \frac{\partial M_A}{\partial m_q} = A\Sigma_N + m_q \frac{\partial E_B}{\partial m_q}. \tag{3.40}$$

Isto significa que o conteúdo isoescalar de um núcleo é calculado pelo conteúdo em cada núcleon mais uma componente devida à energia de ligação. Usando o teorema de Hellmann-Feynman, o termo sigma nuclear é dado por

$$\Sigma_A = A\Sigma_N + \langle \Psi_A | m_q \frac{\partial H}{\partial m_q} | \Psi_A \rangle, \tag{3.41}$$

onde H é a Hamiltoniana que descreve o sistema de núcleons. O efeito da energia de ligação para o termo sigma pode ser calculado por exemplo pela equação de Schrödinger no centro de massa do sistema, escrita como

$$H |\Psi_A\rangle = \left[\sum_{i=1,A} \left(-\frac{\hbar^2}{2M_N} \nabla_i^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^{i,j} V_{ij} \right] |\Psi_A\rangle = E_B |\Psi_A\rangle. \tag{3.42}$$

Substituindo esta Hamiltoniana em (3.41) e considerando que M_N e V_{ij} dependem de m_q , o termo sigma nuclear é dado por

$$\Sigma_A = A\Sigma_N - \frac{\Sigma_N}{M_N} \bar{E}_K + \langle \Psi_A | \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^{i,j} m_q \frac{\partial V_{ij}}{\partial m_q} | \Psi_A \rangle, \tag{3.43}$$

onde $\bar{E}_K = \langle \Psi_A | \sum_{i=1,A} \left(-\frac{\hbar^2}{2M_N} \nabla_i^2 \right) | \Psi_A \rangle$ é o valor esperado da soma das energias cinéticas no referencial de centro de massa do núcleo. A energia potencial média do núcleo é $\bar{E}_V = \langle \Psi_A | \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij} | \Psi_A \rangle$, e portanto podemos definir o termo sigma nuclear devido ao potencial NN como

$$\Sigma_A^V \equiv \langle \Psi_A | \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^{ij} m_q \frac{\partial V_{ij}}{\partial m_q} | \Psi_A \rangle \quad (3.44)$$

e analogamente um termo sigma devido à energia cinética dos núcleons

$$\Sigma_A^K \equiv -\frac{\Sigma_N}{M_N} \bar{E}_K . \quad (3.45)$$

Usando esta definições reescrevemos (3.43) na forma

$$\Sigma_A = A\Sigma_N + \Sigma_A^K + \Sigma_A^V . \quad (3.46)$$

O termo $A\Sigma_N$ já foi discutido no contexto da matéria nuclear na ref.[Coh92]. O último termo mostra que se o potencial for de alguma forma dependente das massas dos quarks então ele deverá contribuir para o termo sigma na quantidade indicada. *Como o potencial de interação núcleon-núcleon varia com as massas dos quarks?* Por exemplo, se as massas dos quarks de corrente fossem da ordem de 100MeV e não apenas da ordem de 10 MeV, como isso alteraria a interação NN? Esta questão foi colocada por Cohen[Coh92] e usando a descrição do potencial de Bonn[Mac87] verificou a dificuldade de calcular sem ambigüidades as derivadas das massas do mésons e das constantes de acoplamento com respeito às massas dos quarks.

Se dispusermos de uma Lagrangiana efetiva dependente apenas do campo piônico então poderemos usar a relação (3.34) e obter

$$\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} m_q \frac{\partial V_{ij}}{\partial m_q} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} m_\pi^2 \frac{\partial V_{ij}}{\partial m_\pi^2} . \quad (3.47)$$

Assim, de um modo geral, a partir de uma Lagrangiana efetiva que pretenda representar a QCD a baixas energias, pode-se inferir a dependência do potencial de interação de hádrons com a massa dos quarks. Em outras palavras, *diga-me como o potencial depende da massa do pión que te direi como ele depende das massas dos quarks.*

Uma Lagrangiana efetiva capaz de descrever o núcleon e a interação NN somente usando o campo do pión foi proposta por Skyrme[Sky59] que descreveremos no capítulo seguinte.

3.5. Condensado de quarks

Podemos relacionar o termo sigma com o condensado de quarks.

O termo sigma de um núcleon é dado por

$$\Sigma_N = 2m_q \int d^3x (\langle N | \bar{q}(\vec{x})q(\vec{x}) | N \rangle - \langle 0 | \bar{q}(\vec{x})q(\vec{x}) | 0 \rangle) = m_q \frac{\partial M_N}{\partial m_q} \quad (3.48)$$

O termo sigma nuclear à densidade ρ para um dado volume Vol será expresso por

$$\Sigma_\rho = 2m_q Vol (\langle \rho | \bar{q}(\vec{x})q(\vec{x}) | \rho \rangle - \langle 0 | \bar{q}(\vec{x})q(\vec{x}) | 0 \rangle) = m_q \frac{\partial(\mathcal{E}Vol)}{\partial m_q}, \quad (3.49)$$

onde \mathcal{E} é a densidade de energia da matéria nuclear dada por $\mathcal{E} = M_N \rho + \frac{\bar{E}_V + \bar{E}_K}{A} \rho$, no limite de $A \rightarrow \infty$. Desde que $\rho = A/Vol$, obtemos de (3.49)

$$2m_q (\langle \bar{q}q \rangle_\rho - \langle \bar{q}q \rangle_{vac}) = m_q \frac{\partial M_N}{\partial m_q} \rho + m_q \frac{\partial(\bar{E}_V/A + \bar{E}_K/A)}{\partial m_q} \rho \quad (3.50)$$

Manipulando algebricamente, usando (3.48), as definições de Σ_A^V (3.44) e Σ_A^K (3.45) e a relação de GOR, $2m_q \langle \bar{q}q \rangle_{vac} = -m_\pi^2 f_\pi^2$, temos

$$\frac{\langle \bar{q}q \rangle_\rho}{\langle \bar{q}q \rangle_{vac}} \simeq 1 - \frac{\Sigma_N + (\Sigma_A^V + \Sigma_A^K)/A}{m_\pi^2 f_\pi^2} \rho + \dots \quad (3.51)$$

Se desconsiderarmos $(\Sigma_A^V + \Sigma_A^K)$, a expressão se reduz à encontrada em [Coh92]. Trabalhos recentes de Brown et al [BR96] estudaram o condensado no meio nuclear mas desprezaram contribuições do termo sigma do potencial NN. Neste caso um valor numérico na densidade normal é da ordem de $\langle \bar{q}q \rangle_{\rho_N} / \langle \bar{q}q \rangle_{vac} \approx 0,70$. Os trabalhos de Delfino et al [Del95-96] e Brockman e Weise [BW96] procuram calcular as contribuições do termo sigma devido ao potencial NN tentando implementar o método proposto por Cohen[Coh92] mas enfrentam as dificuldades para derivar as massas dos mésons, acoplamentos e fatores de forma em função da massa do quark. No capítulo 6 faremos as nossas estimativas de $\Sigma_A^V + \Sigma_A^K$ e Σ_A usando o modelo de Skyrme e a relação de GOR. No capítulo 7, calcularemos a contribuição de Σ_A^V ao potencial ótico pión-núcleo. Nas conclusões no capítulo 8, apresentaremos uma estimativa do condensado na densidade normal utilizando a equação (3.51), com Σ_A^V estimado a partir do modelo de Skyrme.

4. MODELO DE SKYRME

4.1. Introdução

Levou mais de duas décadas para a maior descoberta do físico inglês, Tony Hilton Royle Skyrme (1922-1987), se tornar largamente conhecida. Seu modelo [Sk61,62]- “the model of baryons as topological solitons”- foi amplamente ignorado até o início da década de 80. Sua criação foi tão original que, na ocasião de sua produção, poucos se atreveram a se aprofundar em sua teoria, que parecia distante do progresso na física de partículas. Mas esta situação mudou drasticamente no início dos anos 80, quando se percebeu que o modelo de Skyrme poderia ser considerado como o limite de baixa energia da QCD. Esta conexão foi explicitada primeiramente num trabalho de t’Hooft[t’Ho74], que estudou o comportamento da QCD no limite de $N_c \rightarrow \infty$, onde N_c é o número de cores. O resultado notável foi que, quando $1/N_c \rightarrow 0$, a QCD se simplifica para uma teoria de campos locais de mésons e glueballs fracamente acoplados(não interagentes para N_c infinito). Witten[Wi79], posteriormente, fez o mesmo tipo de análise para bárions. Ele concluiu que para N_c grande, bárions parecem ter propriedades típicas dos sólitons. *Até o momento, entretanto, não se provou que um bárion é um sólito topológico da Lagrangiana da QCD.*

Skyrme encontrou suporte para as suas idéias em artigos de Kelvin(1904,1910). Kelvin era contra a descrição de átomos como pontuais e sugeriu o “Vortex Atom”, inspirado na descoberta por Helmholtz da “vorticidade”, uma quantidade absolutamente conservada no movimento de qualquer porção de um fluido perfeito, sem viscosidade.

Antes de propor o modelo que leva seu nome, Skyrme já havia estudado o comportamento de soluções solitônicas para equações diferenciais[Pe61]. Em particular, ele propôs a chamada equação de sine-Gordon[Sk61][Re79][Go80][Ry85], cuja densidade de Lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{c^2}{2} \left(\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right) - \mu_0^2 c^2 (1 - \cos \varphi) . \quad (4.1)$$

A equação sine-Gordon é invariante por transformações de Lorentz e suas soluções solitônicas são protótipos para o modelamento de partículas elementares.

A energia do sistema clássico associado a esta Lagrangiana é:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \frac{c^2}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \mu_0^2 c^2 (1 - \cos \varphi) \right] \quad (4.2)$$

e o campo φ satisfaz a equação de movimento

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \mu_0^2 c^2 \sin \varphi . \quad (4.3)$$

Esta equação diferencial é não linear e admite solução na forma de um distúrbio que viaja com velocidade v , mas mantém sua forma, função de $\tau = t - x/v$. Neste caso a eq. (4.3) reduz a

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} - A \sin \varphi = 0 , \quad (4.4)$$

onde

$$A = \frac{\mu_0^2 c^4 v^2}{c^2 - v^2} . \quad (4.5)$$

Em termos da variável τ a equação de movimento é, de fato, a de um pêndulo simples de amplitude finita. Essa equação admite soluções com propriedades análogas a outras equações não lineares, em especial a equação de Korteweg-de Vries (KdV), descoberta em 1895, que governa o comportamento de ondas moderadamente pequenas num líquido raso:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + 6\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} = 0, \quad (4.6)$$

Esta última equação admite soluções tipo [Ab81]

$$\phi = 2k^2 \operatorname{sech}^2 k(x - 4k^2 t - x_0), \quad (4.7)$$

onde k e x_0 são constantes.

Em 1965 Zabusky e Kruskal [Za65] descobriram que os pulsos solitários da solução equação KdV tinham uma propriedade até então desconhecida, a de interagir elasticamente umas com as outras. Estas soluções, que preservam sua forma mesmo após interações, foram denominadas “sólitons”. O prefixo “solit” vem de solitária e o sufixo “on” é o mesmo que designa partículas como próton, elétron, méson, etc.

Voltando ao problema da Lagrangiana de sine-Gordon, no caso da eq.(4.3), é possível a solução:

$$\tan \frac{1}{4} \varphi = \exp[\pm \sqrt{A}(x - x_0)],$$

que corresponde à condição de vácuo $\cos \varphi = 1$, sendo que todas as soluções estáticas com energia finita satisfazem a condição $\cos \varphi(x) \rightarrow 1$ quando $|x| \rightarrow \infty$.

Num tempo fixo $t = t_0$, um ângulo $\varphi(x)$ é associado a cada ponto x no intervalo de $-\infty$ a $+\infty$. Temos, assim, um mapeamento, que leva à condição de contorno $\varphi(-\infty) = 2\pi n_-$, $\varphi(+\infty) = 2\pi n_+$, onde n_-, n_+ são inteiros.

Neste problema é possível definir uma densidade de corrente topológica como:

$$\mathcal{B}_\mu = \frac{1}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \varphi(x, t), \quad (4.8)$$

com $\epsilon_{01} = 1$, $\epsilon_{10} = -1$ e $\epsilon_{00} = \epsilon_{11} = 0$. Calculando a divergência, obtemos

$$\partial^\mu \mathcal{B}_\mu = \frac{1}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu \varphi = 0. \quad (4.9)$$

É interessante notar que a corrente \mathcal{B}_μ não segue da invariância de \mathcal{L} sob qualquer transformação de simetria e, portanto, não é uma corrente de Noether. Sua divergência é nula, independentemente das equações de movimento.

O fato de a divergência da corrente \mathcal{B}_μ ser nula dá origem a uma carga conservada:

$$q = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{B}_0 dx = \frac{1}{2\pi} \epsilon_{01} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = \frac{1}{2\pi} (\varphi(+\infty) - \varphi(-\infty)). \quad (4.10)$$

Geometricamente, a carga q pode ser entendida como o número de voltas dadas em torno de uma circunferência pela variação do ângulo φ , já que o fator 2π representa perímetro de uma circunferência de raio unitário.

Usando as condições de contorno para o campo φ , temos

$$q = \frac{1}{2\pi} (\varphi(+\infty) - \varphi(-\infty)) = n_+ - n_-,$$

o que indica que q é um número inteiro.

O integrando da expressão (4.10) também pode ser escrito na forma cartesiana

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = \epsilon_{ij} \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial x} dx, \quad (4.11)$$

onde $\phi_1 = \cos \varphi$ e $\phi_2 = \sin \varphi$ são as projeções do raio da esfera unitária sobre os eixos coordenados. Essas variáveis auxiliares ϕ_1 e ϕ_2 satisfazem a relação:

$$(\phi_1)^2 + (\phi_2)^2 = 1. \quad (4.12)$$

Em termos dessas novas coordenadas, temos

$$q = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon_{ij} \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial x} dx.$$

A utilidade de se expressar a carga em termos das novas coordenadas ϕ_1 e ϕ_2 ficará clara com generalização para um sistema com mais dimensões, como discutiremos a seguir.

Como vimos, a carga topológica em uma dimensão pode ser construído geometricamente pelo número de voltas em torno de uma circunferência(S^1) ou pelo comprimento de arco varrido pelo ângulo φ dividido pelo comprimento do arco de uma circunferência de raio unitário. Para generalizar este resultado para o caso de três dimensões angulares, partimos do cálculo do volume de uma hipersuperfície varrida pelos ângulos δ, θ e φ , definidos no espaço quadridimensional. Dividindo esse volume pelo volume de uma hipersfera(S^3) de raio unitário, teremos definido uma carga topológica em três dimensões, da forma:

$$B = \frac{1}{2\pi^2} \int \sin^2 \delta d\delta \int \sin \theta d\theta \int d\varphi , \quad (4.13)$$

sendo que os ângulos δ, θ e φ são mapeados para um espaço tridimensional com coordenadas x_1, x_2 e x_3 através de uma projeção estereográfica de S^3 em R^3 .

O uso de novas coordenadas cartesianas ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 e ϕ_4 permite, agora, que esta expressão possa ser escrita numa forma independente de uma representação particular dos ângulos, como

$$B = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon_{ijkl} \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial x_1} \frac{\partial \phi_k}{\partial x_2} \frac{\partial \phi_l}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3 , \quad (4.14)$$

onde

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \sin \delta \sin \theta \cos \varphi \\ \phi_2 &= \sin \delta \sin \theta \sin \varphi \\ \phi_3 &= \sin \delta \cos \theta \\ \phi_4 &= \cos \delta . \end{aligned} \quad (4.15)$$

Como no caso unidimensional, as coordenadas cartesianas satisfazem uma condição de vínculo

$$(\phi_1)^2 + (\phi_2)^2 + (\phi_3)^2 + (\phi_4)^2 = 1. \quad (4.16)$$

A carga B também pode ser apresentada numa forma simétrica[Sk61]:

$$B = \frac{1}{3!2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon_{ijkl} \epsilon_{\nu\alpha\beta} \phi_i \partial^\nu \phi_j \partial^\alpha \phi_k \partial^\beta \phi_l dx_1 dx_2 dx_3. \quad (4.17)$$

Analogamente ao caso unidimensional, uma densidade de corrente pode ser definida, na forma

$$\mathcal{B}_\mu = \frac{1}{12\pi^2} \epsilon_{ijkl} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \phi_i \partial^\nu \phi_j \partial^\alpha \phi_k \partial^\beta \phi_l. \quad (4.18)$$

Os índices $\mu\nu\alpha\beta$ são índices de Lorentz com soma covariante enquanto que $ijkl$ assumem valores de 1 a 4 com convenção de soma euclidiana [Ho86].

Essa densidade satisfaz identicamente a relação

$$\partial^\mu \mathcal{B}_\mu = 0, \quad (4.19)$$

porque o Jacobiano das quatro coordenadas ϕ com respeito às quatro coordenadas do espaço-tempo deve se anular já que são funcionalmente dependentes.

4.2. Modelo para os bárions

Até aqui, tudo o que foi feito é puramente geométrico. A física começa quando esses aspectos geométricos são associados ao fato do modelo sigma não linear envolver, como vimos no capítulo 2, três campos piônicos π e uma função σ tal que $\sigma^2 = f_\pi^2 - \pi^2$. Isto permite identificar os campos do pión e a função σ aos campos ϕ e ϕ_4 das equações (4.15) e (4.16). Assim:

$$\phi_4 = \sigma/f_\pi, \quad \phi_i = \pi_i/f_\pi. \quad (4.20)$$

Na formulação original do modelo, Skyrme identificou a densidade topológica à densidade de corrente bariônica conservada \mathcal{B}_μ , dada por

$$\mathcal{B}_\mu = \frac{1}{12\pi^2 f_\pi^4} \epsilon_{ijkl} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \pi_i \partial^\nu \pi_j \partial^\alpha \pi_k \partial^\beta \pi_l. \quad (4.21)$$

A carga bariônica é, portanto,

$$B_0 = \frac{\epsilon_{0\nu\alpha\beta}}{12\pi^2 f_\pi^4} \int d^3x \epsilon_{abc} \partial^\nu \pi_a \partial^\alpha \pi_b (\sigma \partial^\beta \pi_c - 3\pi_c \partial^\beta \sigma). \quad (4.22)$$

Como discutimos no capítulo 2, existem outras formas possíveis para de se representar os graus de liberdade piônicos numa Lagrangiana quirar. Em particular, em muitos casos é conveniente usarmos os campos U , L ou R , dados pelas equações (2.18) e (2.20). Em termos desses campos, a corrente bariônica pode ser escrita nas três formas alternativas:

$$\mathcal{B}_\mu = \frac{1}{24\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr}[(U^\dagger \partial^\nu U)(U^\dagger \partial^\alpha U)(U^\dagger \partial^\beta U)] \quad (4.23)$$

$$= \frac{1}{24\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr}[L^\nu L^\alpha L^\beta] \quad (4.24)$$

$$= \frac{1}{24\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr}[R^\nu R^\alpha R^\beta]. \quad (4.25)$$

As características geométricas da corrente bariônica asseguram a sua conservação. Entretanto, por razões físicas, é importante também que a carga bariônica

possa assumir valores discretos e inteiros. Para obter esta propriedade, Skyrme buscou configurações que não dependessem do tempo e propôs uma forma característica para o campo do pión, conhecida como ouriço ("hedgehog"), pois ela corresponde a usar $\hat{\pi} = \hat{r}$ na expressão (2.66)

$$U_0 = e^{i\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{r} F}. \quad (4.26)$$

Usando o campo do ouriço estático na eq.(4.23), temos

$$\mathcal{B}_0 = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{\text{sen}^2 F}{r^2} \frac{dF}{dr}. \quad (4.27)$$

A carga topológica é

$$\begin{aligned} B &= \int d^3\mathbf{r} \mathcal{B}_0 = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty 4\pi r^2 \frac{\text{sen}^2 F}{r^2} \frac{dF}{dr} dr \\ &= \frac{-2}{\pi} \int_0^\infty \text{sen}^2 F \frac{dF}{dr} dr = \frac{-2}{\pi} \times \frac{1}{2} \left[F - \frac{1}{2} \text{sen } 2F \right]_0^\infty. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Este resultado mostra que a carga topológica é determinada pelas condições de contorno na origem e no infinito. Como o campo U é dado por

$$U_0 = \cos F(r) + i(\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{r}) \text{sen } F(r), \quad (4.29)$$

no caso da origem escolhe-se $\text{sen} F(0) = 0$ pois evita-se o problema de se determinar a direção do campo piônico neste ponto. No infinito, por outro lado, espera-se que o campo seja o do vácuo, para o qual $U = 1$, o que corresponde a tomarmos $\cos F(\infty) = 1$. Assim, as condições de contorno são dadas por:

$$\begin{aligned} F(0) &= n\pi \\ F(\infty) &= 2m\pi, \end{aligned} \quad (4.30)$$

onde m e n são números inteiros. Substituindo esses valores na eq.(4.28), obtemos uma carga bariônica inteira, dada por:

$$B = \frac{-1}{\pi} (2m\pi - n\pi) = n - 2m. \quad (4.31)$$

Assim, o número bariônico é calculado pela diferença das condições de contorno na origem e no infinito. Como é apenas a diferença que nos interessa, tomamos, por convenção, $m = 0$ e carga bariônica assume o valor de n (inteiro). Se n assumir valor negativo, temos o campo associado a uma antipartícula. Se construirmos uma Lagrangiana tal que sua equação de movimento admita soluções dadas por campos com condições de contorno deste tipo, teremos construído um

sóliton topológico. Sóliton, pois representará uma configuração de energia do sistema que é ao mesmo tempo localizada espacialmente e indestrutível, já que B é conservado. Esse sóliton é dito topológico porque sua indestrutibilidade é associada às condições de contorno, que definem o tipo de relação topológica entre os píons e o espaço tridimensional.

Até aqui, apenas fixamos as condições de contorno da função $F(r)$. Resta ainda determinar o “meio fluido” desta função, que decorre da dinâmica do sistema. Esta é representada pela sua Lagrangiana que deve determinar, entre outras coisas, sua massa.

Skyrme partiu de uma Lagrangiana equivalente à do modelo sigma não linear, definida em (2.64) e que reescrevemos aqui:

$$\mathcal{L}_\pi = \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \boldsymbol{\pi})^2 = \frac{f_\pi^2}{2} (L_{\mu a})^2 = \frac{f_\pi^2}{4} \text{Tr} (\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) \quad (4.32)$$

onde $L_{\mu a}$ foi definido pela eq. (2.74) e U em (2.68).

Entretanto, diferentemente da Lagrangiana de sine-Gordon, a expressão (4.32) não dá origem a um sóliton estável, e a minimização da energia leva a um encolhimento da partícula a um ponto. A não estabilidade do sóliton, nesta formulação, foi matematicamente demonstrada por Derrick, posteriormente ao trabalho de Skyrme, para sistemas com dimensão $D \geq 2$ [De64][Col85]. Em seu trabalho original, Skyrme reconheceu que deveria adicionar um outro termo para obter a estabilização. Identificando $L_{\mu a}$ como um campo vetorial massivo e (4.32) como seu termo de massa, imaginou que o termo cinético seria dado por :

$$\frac{1}{4} (\partial_\mu L_{\nu a} - \partial_\nu L_{\mu a}) (\partial^\mu L_a^\nu - \partial^\nu L_a^\mu).$$

Assim, na forma original proposta por Skyrme, a Lagrangiana ficou sendo

$$\mathcal{L} = -\frac{f_\pi^2}{2} (L_{\mu a})^2 - \frac{\epsilon}{8\pi^2} (\partial_\mu L_{\nu a} - \partial_\nu L_{\mu a}) (\partial^\mu L_a^\nu - \partial^\nu L_a^\mu) \quad (4.33)$$

onde ϵ é uma constante. Reescrevendo esta expressão em termos do campo U , definido em (2.68), temos a Lagrangiana de Skyrme na sua forma mais conhecida

$$\mathcal{L} = \frac{f_\pi^2}{4} \text{Tr} (\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) + \frac{1}{32e^2} \text{Tr} [U^\dagger \partial_\mu U, U^\dagger \partial_\nu U]^2, \quad (4.34)$$

onde fizemos a substituição, $\frac{\epsilon}{\pi^2} = \frac{1}{2e^2}$. Ao primeiro e segundo termos chamamos de termos de segunda e quarta ordem nas derivadas dos campos σ e $\boldsymbol{\pi}$, e denotamos por \mathcal{L}_2 e \mathcal{L}_4 , respectivamente.

Quando o modelo de Skyrme foi retomado, no início da década de 80, ficou claro que seria importante incorporar o fato do pión ser massivo. Nos modelos

sigma, essa massa é associada a um termo de quebra de simetria da Lagrangiana, da forma

$$\mathcal{L}_{sb} = f_\pi m_\pi^2 \sqrt{f_\pi^2 - \boldsymbol{\pi}^2}. \quad (4.35)$$

Em termos do campo U, esta Lagrangiana de quebra de simetria é escrita como

$$\mathcal{L}_{sb} = \frac{1}{2} f_\pi^2 m_\pi^2 (Tr U - 2) \quad (4.36)$$

que difere da forma (4.35) por uma constante, escolhida de modo que \mathcal{L}_{sb} tenda a zero no infinito.

Assim, a Lagrangiana de Skyrme para o caso massivo, consistente com PCAC, fica:

$$\mathcal{L} = \frac{f_\pi^2}{4} Tr (\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) + \frac{1}{32e^2} Tr [U^\dagger \partial_\mu U, U^\dagger \partial_\nu U]^2 + \frac{1}{2} f_\pi^2 m_\pi^2 (Tr U - 2). \quad (4.37)$$

Em alguns casos, é conveniente reescrever essa Lagrangiana de outros modos. Por exemplo, em termos da forma esquerda L_μ , temos:

$$\mathcal{L} = \frac{f_\pi^2}{4} Tr (L_\mu L^\mu) + \frac{1}{32e^2} Tr [L_\mu, L_\nu]^2 + \frac{f_\pi^2 m_\pi^2}{4} Tr [U + U^\dagger - 2]. \quad (4.38)$$

Substituindo $L_\mu = i\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{L}_\mu$ nesse resultado, após extrair o traço, chegamos a

$$\mathcal{L} = \frac{f_\pi^2}{2} \mathbf{L}_\mu \cdot \mathbf{L}^\mu + \frac{1}{4e^2} (\mathbf{L}_\mu \cdot \mathbf{L}_\nu \mathbf{L}^\mu \cdot \mathbf{L}^\nu - \mathbf{L}_\mu \cdot \mathbf{L}^\mu \mathbf{L}_\nu \cdot \mathbf{L}^\nu) + \frac{f_\pi^2 m_\pi^2}{4} Tr [U + U^\dagger - 2]. \quad (4.39)$$

Por outro lado, explicitando os campos dos píons e a função sigma, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \{ (\partial_\mu \sigma)^2 + (\partial_\mu \boldsymbol{\pi})^2 \} \\ & + \frac{1}{32e^2 f_\pi^4} 8 \{ -2 (\partial_\mu \sigma)^2 (\partial_\nu \boldsymbol{\pi})^2 + 2 \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma \partial^\mu \pi_a \partial^\nu \pi_a + \partial_\mu \pi_a \partial_\nu \pi_a \partial^\mu \pi_c \partial^\nu \pi_c - (\partial_\mu \boldsymbol{\pi})^2 (\partial_\nu \boldsymbol{\pi})^2 \} \\ & + f_\pi^2 m_\pi^2 (\sigma / f_\pi - 1). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Alternativamente, podemos também exprimir a Lagrangiana de Skyrme na forma quadrivetorial, ou seja, em termos de um quadrivetor $\xi = (\boldsymbol{\pi}, \sigma)$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \xi)^2 + \frac{1}{32e^2 f_\pi^4} 8 \{ -(\partial_\mu \xi)^2 (\partial_\nu \xi)^2 + (\partial_\mu \xi \cdot \partial_\nu \xi) (\partial^\mu \xi \cdot \partial^\nu \xi) \} + f_\pi^2 m_\pi^2 (\xi_4 / f_\pi - 1). \quad (4.41)$$

Pode-se, ainda, propor possíveis variantes ao modelo neste contexto. Se só permitirmos derivadas primeiras do campo, existem apenas dois termos de quarta ordem que satisfazem os requerimentos de simetria,

$$(\partial_\mu \xi)^2 (\partial_\nu \xi)^2 \text{ e } (\partial_\mu \xi \cdot \partial_\nu \xi) (\partial^\mu \xi \cdot \partial^\nu \xi).$$

Não há, em princípio, nenhum forte argumento para se preferir um ou outro. Entretanto, a diferença entre eles, usada na equação (4.41), contém só produtos de duas derivadas temporais, o que é conveniente para o procedimento de quantização.

É interessante notar que a restrição ao emprego exclusivo de derivadas primeiras e de no máximo duas derivadas temporais permite só mais um termo compatível com as simetrias, que é de sexta ordem e dado pelo quadrado da corrente bariônica [Ja85a]

$$\mathcal{L}_6 = Tr (\mathcal{B}_\mu \mathcal{B}^\mu) . \quad (4.42)$$

O termo de estabilização de Skyrme também pode ser obtido a partir da incorporação de bósons vetoriais ao modelo sigma não linear por meio de uma simetria de calibre escondida. Isto implica em que, num modelo que contém explicitamente mésons ρ em adição ao campo piônico, os bárions são estáveis sem necessidade de termos quárticos ou sêxtuplos para sua estabilização [Ho86].

4.3. Massa Clássica

A massa de um skyrmion não quantizado é associada à energia estática do sóliton e, portanto, dada pela relação

$$M = -L = - \int d^3\mathbf{r} \mathcal{L}_E , \quad (4.43)$$

onde \mathcal{L}_E é a Lagrangiana para os campos independentes do tempo e que, por isso, não recebe contribuições das derivadas temporais.

Usando a eq. (4.37), obtemos

$$M = \int d^3\mathbf{r} \left\{ \frac{f_\pi^2}{4} Tr (\partial_i U \partial_i U^\dagger) - \frac{1}{32e^2} Tr [U^\dagger \partial_i U, U^\dagger \partial_j U]^2 - \frac{1}{2} f_\pi^2 m_\pi^2 (Tr U - 2) \right\}. \quad (4.44)$$

Alternativamente, usando os campos do pión e função σ podemos escrever

$$M = \int d^3\mathbf{r} \left\{ \frac{1}{2} (\partial_i \sigma)^2 + \frac{1}{2} (\partial_i \boldsymbol{\pi})^2 - \frac{1}{32e^2 f_\pi^4} 8 [- 2 (\partial_i \sigma)^2 (\partial_j \boldsymbol{\pi})^2 + 2 \partial_i \sigma \partial_j \sigma \partial_i \pi_a \partial_j \pi_a + \partial_i \pi_a \partial_j \pi_a \partial_i \pi_c \partial_j \pi_c - (\partial_i \boldsymbol{\pi})^2 (\partial_j \boldsymbol{\pi})^2] + f_\pi^2 m_\pi^2 (1 - \sigma/f_\pi) \right\}. \quad (4.45)$$

As várias derivadas que aparecem nesta expressão são calculadas no apêndice C. Usando aqueles resultados e manipulando as expressões assim obtidas, encontramos a seguinte forma para a massa clássica em função do ângulo quiral:

$$M = \int_0^\infty dr \mathcal{M}(r) \quad (4.46)$$

onde

$$\mathcal{M}(r) = 4\pi r^2 \left\{ \frac{1}{2} f_\pi^2 \left[F'^2 + \frac{2s^2}{r^2} \right] + \frac{1}{2e^2} \frac{s^2}{r^2} \left[2F'^2 + \frac{s^2}{r^2} \right] + f_\pi^2 m_\pi^2 (1 - c) \right\} \quad (4.47)$$

4.4. Equação de Movimento

A expressão obtida para a massa explicitada na seção anterior permite-nos obter a equação diferencial para a função F , pois ela deve ser tal que M seja mínimo. Essa minimização dá origem à equação Euler-Lagrange para o campo $F(r)$:

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \mathcal{L}(r)}{\partial \left(\frac{\partial F}{\partial r} \right)} - \frac{\partial \mathcal{L}(r)}{\partial F} = 0. \quad (4.48)$$

Usando esta equação para a função $\mathcal{M}(r)$ dada por (4.47) resulta em uma equação diferencial não linear de segunda ordem, da forma:

$$\left(\frac{u^2}{4} + 2 \sin^2 F \right) F'' + \frac{1}{2} u F' + (\sin 2F) F'^2 - \frac{1}{4} \sin 2F - \frac{\sin^2 F \sin 2F}{u^2} - \frac{1}{4} \beta^2 u^2 \sin F = 0, \quad (4.49)$$

escrita em termos das variáveis adimensionais $u = 2ef_\pi r$ e $\beta = m_\pi / (2ef_\pi)$, conforme [Ad83-87].

Não se conhece solução analítica para esta equação, exceto no limite assintótico de grandes distâncias em que $u \rightarrow \infty$. Nesse limite $F(u) \rightarrow 0$, ela se reduz a

$$\frac{u^2}{4} F_\infty'' + \frac{u F_\infty'}{2} - \frac{F_\infty}{2} - \frac{1}{4} \beta^2 u^2 F_\infty = 0, \quad (4.50)$$

onde F_∞ é a função assintótica de F para $u \rightarrow \infty$. A solução desta equação tem a forma

$$F_\infty(u) = C(1 + \beta u) \frac{e^{-\beta u}}{u^2}, \quad (4.51)$$

onde C é uma constante a ser determinada numericamente.

O conhecimento da forma assintótica da função F é muito útil, pois ele permite resolver numericamente a equação diferencial (4.49) pelo método de Euler, variando-se a condição $F'(0)$ até a função para valores grandes de $u(r)$ comporte-se como a equação (4.51). Usando este procedimento, obtivemos as formas da função de perfil $F(r)$. Na fig.4.1, por exemplo, exibimos o resultado com $B=1$ correspondente a $f_\pi = 93$ MeV e $e = 4,0$, para o caso $m_\pi = 138$ MeV. Essa função de perfil será usada posteriormente no capítulo 5 nos cálculos de $B=2$ na aproximação ansatz produto.

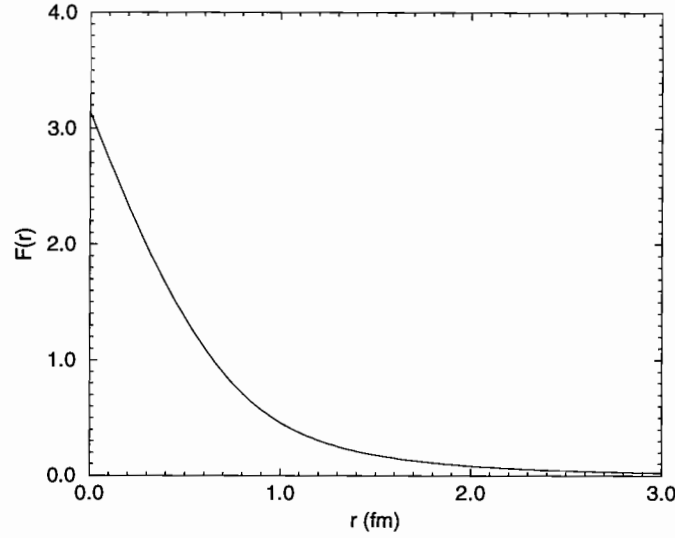


Figura 4.1: Função de perfil do skyrmion para $B=1$, parâmetros $m_\pi = 138\text{MeV}$, $f_\pi = 93\text{MeV}$ e $e = 4,0$.

4.5. Momento de Inércia

Nesta seção apresentamos uma rederivação do momento de inércia já feito em detalhe por [Ad87] e [Bh88], mas usando a nossa Lagrangiana de σ 's e π 's e matrizes de rotação. No modelo de Skyrme, o momento de inércia é obtido por meio de uma rotação dependente do tempo, baseada em coordenadas coletivas. No presente estudo, o campo do pión é um vetor e, por isso, as suas rotações podem ser representadas em termos dos ângulos de Euler usuais α, β , e γ [Go80 p.607],[Sa85 p.171]. Assim a rotação do campo do pión pode ser descrita por matriz de rotação¹ $\mathbf{D}(3 \times 3)$ que depende dos ângulos de Euler α, β, γ e dada, na convenção y , por

$$\mathbf{D}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} -\text{sen}\gamma \text{sen}\alpha + \cos\beta \cos\alpha \cos\gamma & \text{sen}\gamma \cos\alpha + \cos\beta \text{sen}\alpha \cos\gamma & -\cos\gamma \text{sen}\beta \\ -\cos\gamma \text{sen}\alpha - \cos\beta \cos\alpha \text{sen}\gamma & \cos\gamma \cos\alpha - \cos\beta \text{sen}\alpha \text{sen}\gamma & -\text{sen}\gamma \text{sen}\beta \\ \text{sen}\beta \cos\gamma & \text{sen}\beta \text{sen}\gamma & \cos\beta \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

A matriz \mathbf{D} representa rotações e, portanto, preserva o módulo dos vetores

¹Comumente autores americanos representam matrizes de rotação pela letra R (*rotation*) e as matrizes de Wigner pela letra D . Já os alemães usam a letra D (*drehung*) para matrizes de rotação e \mathcal{D} para as matrizes de Wigner. Preferimos as últimas pois o texto já contém largamente o quadri vetor R^μ (*right*).

sobre os quais age. Isso faz com que essas matrizes sejam ortogonais, satisfazendo a relação

$$\mathbf{D}^T = \mathbf{D}^{-1}$$

em componentes

$$D_{ab}D_{ab'} = \delta_{bb'} \quad (4.53)$$

Aplicando uma rotação a vetor genérico \mathbf{v} teremos $\mathbf{D}\mathbf{v} = \mathbf{v}'$ onde \mathbf{v}' é o vetor rodado. Da mecânica clássica, se a direção de um vetor varia uniformemente no tempo podemos escrever $\dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$, onde $\boldsymbol{\omega}$ é a velocidade angular de rotação. Em componentes temos:

$$D_{ab}v_b = v'_a ; \dot{v}_a = \epsilon_{acd}\omega_c v_d \quad (4.54)$$

Derivando a primeira expressão e usando a segunda temos

$$\dot{D}_{ab}v_b = \dot{v}'_a = \epsilon_{acd}\omega_c v'_d = \epsilon_{acd}\omega_c D_{db}v_b \quad (4.55)$$

donde

$$\dot{D}_{ab} = \epsilon_{acd}\omega_c D_{db}, \quad (4.56)$$

e multiplicando esta expressão por ela mesma teremos o resultado

$$\dot{D}_{ab}\dot{D}_{ab} = 2\boldsymbol{\omega}^2. \quad (4.57)$$

Ainda multiplicando ambos os membros de (4.56) por D_{eb} temos

$$D_{eb}\dot{D}_{ab} = \epsilon_{acd}\omega_c D_{db}D_{eb} = \epsilon_{acd}\omega_c \delta_{de} = \epsilon_{ace}\omega_c \quad (4.58)$$

Multiplicando ambos os membros desta última por ϵ_{efa} chegamos a [Ho86 p.839]

$$\epsilon_{efa}D_{eb}\dot{D}_{ab} = 2\omega_f \quad (4.59)$$

que pode ser usada como definição da velocidade angular em termos dos elementos da matriz de rotação.

Em termos da matriz de rotação, a transformação da componente do campo do pión por uma rotação no espaço de isospin é escrita como

$$\pi_a = D_{ab}\pi_b = f_\pi D_{ab}\hat{r}_b \text{sen}F. \quad (4.60)$$

A ortogonalidade das matrizes \mathbf{D} garante que o campo do σ não “roda”, i.e., se matém invariante por rotações, o que era esperado pois ele é um campo isoescalar. Este fato simplifica nosso cálculo pois corresponde à condição

$$\partial_0\sigma = 0. \quad (4.61)$$

Para se calcular o momento de inércia neste problema, precisamos obter a energia cinética. Para tanto, supomos que os ângulos de Euler dependam do tempo e reescrevendo a Lagrangiana (4.40) usando (4.61) fica:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{estática} + \mathcal{L}_{rot}$$

onde

$$\mathcal{L}_{rot} = \frac{1}{2} (\partial_0 \boldsymbol{\pi})^2 + \frac{1}{32e^2} 8 \left[2 \left((\partial_i \sigma)^2 + (\partial_i \boldsymbol{\pi})^2 \right) (\partial_0 \boldsymbol{\pi})^2 - 2 \partial_i \pi_a \partial_0 \pi_a \partial_i \pi_c \partial_0 \pi_c \right]. \quad (4.62)$$

Usando a expressão para o momento canônico $\Pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \pi_i)}$ e $\mathcal{H} = \Pi_i \dot{\pi}_i - \mathcal{L}$ teremos $\mathcal{H}_{rot} = \mathcal{L}_{rot}$.

Substituindo o resultado (4.60) nas derivadas temporais e fazendo integrações angulares, temos:

$$\int (\partial_0 \boldsymbol{\pi})^2 d\Omega = \int f_\pi^2 \dot{D}_{ab} \dot{D}_{ac} \hat{r}_b \hat{r}_c s^2 d\Omega = \dot{D}_{ab} \dot{D}_{ab} \frac{4\pi}{3} f_\pi^2 s^2 \quad (4.63)$$

$$\int \partial_i \pi_a \partial_0 \pi_a \partial_i \pi_c \partial_0 \pi_c d\Omega = \int f_\pi^4 b^2 \delta_{ac} \dot{D}_{ad} \dot{D}_{ce} \hat{r}_d \hat{r}_e s^2 d\Omega = \dot{D}_{ab} \dot{D}_{ab} \frac{4\pi}{3} f_\pi^4 \frac{s^2}{r^2} s^2 \quad (4.64)$$

onde usamos $\int \hat{x}_m \hat{x}_n d\Omega = 1/3 \int \delta_{mn} d\Omega$.

Assim a energia de rotação fica:

$$E_{rot} = \frac{1}{4} \dot{D}_{ab} \dot{D}_{ab} \lambda = \frac{1}{2} \lambda \boldsymbol{\omega}^2. \quad (4.65)$$

Podemos identificar o coeficiente λ como o momento de inércia do skyrmion. As expressões (4.57), (4.60) e (4.65) e resultados do apêndice C permitem-nos escrever:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{8\pi}{3} \int_0^\infty r^2 dr \left\{ f_\pi^2 s^2 + \frac{1}{e^2} \left[s^2 (F'^2 + 2 \frac{s^2}{r^2}) - s^2 \frac{s^2}{r^2} \right] \right\} \\ &= \frac{8\pi}{3} \int_0^\infty r^2 dr \left\{ f_\pi^2 s^2 + \frac{1}{e^2} s^2 (F'^2 + \frac{s^2}{r^2}) \right\}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Alternativamente, em termos da variável adimensional u , obtemos

$$\lambda = \frac{1}{2f_\pi e^3} 4\pi \int_0^\infty u^2 du \frac{s^2}{6} \left\{ 1 + 4 \left[F'^2 + \frac{s^2}{u^2} \right] \right\}, \quad (4.67)$$

onde, nas integrais em u , $F' = dF/du$.

No contexto da mecânica clássica, para um objeto esfericamente simétrico, é válida a relação

$$\mathbf{J} = \lambda \boldsymbol{\omega} \quad (4.68)$$

Por isso, podemos reescrever a energia total do sistema como

$$H = M + \frac{1}{2\lambda} \mathbf{J}^2 \quad (4.69)$$

Para completar esta seção, é interessante notar que o momento de inércia dado pela expressão (4.66) foi obtido por meio de um procedimento adequado à mecânica quântica. Ele é diferente do correspondente clássico, obtido a partir de rotação de toda a massa M do sistema. Nesse caso, o resultado seria:

$$\lambda_M = \frac{8\pi}{3} \int_0^\infty \rho_M(r) r^4 dr, \quad (4.70)$$

onde $4\pi r^2 \rho_M(r) = \mathcal{M}(r)$.

Substituindo a densidade de massa da expressão (4.46) temos:

$$\lambda_M = \frac{8\pi}{3} \int_0^\infty r^2 dr \left\{ f_\pi^2 \left(\frac{1}{2} F'^2 r^2 + s^2 \right) + \frac{1}{e^2} s^2 \left(F'^2 + \frac{1}{2} \frac{s^2}{r^2} \right) \right\}, \quad (4.71)$$

expressão diferente da (4.66) onde só os píons rodam. *A parte que vem da rotação de \mathcal{L}_2 é incrementada, como esperado, mas, surpreendentemente, a parte proveniente de \mathcal{L}_4 sofre um decréscimo.*

Poder-se-ia supor que a causa dessa disparidade está no fato de o σ ter energia (contribuir para a massa) mas não ter momento de inércia. Desligando o campo σ teremos:

$$\lambda_{(\sigma=0)} = \frac{8\pi}{3} \int_0^\infty r^2 dr \left\{ f_\pi^2 s^2 + \frac{1}{e^2} s^2 \left(c^2 F'^2 + \frac{s^2}{r^2} \right) \right\} \quad (4.72)$$

e

$$\lambda_{M(\sigma=0)} = \frac{8\pi}{3} \int_0^\infty r^2 dr \left\{ f_\pi^2 \left(\frac{1}{2} c^2 F'^2 r^2 + s^2 \right) + \frac{1}{e^2} s^2 \left(c^2 F'^2 + \frac{1}{2} \frac{s^2}{r^2} \right) \right\}. \quad (4.73)$$

Os resultados (4.72) (4.73) continuam discordantes entre si, refutando a explicação com base somente no campo σ .

4.6. Quantização do Sóliton

A quantização do sóliton a partir da Hamiltoniana (4.69) é um exercício familiar da mecânica quântica. Entretanto apresentamos aqui a derivação em termos

das coordenadas coletivas visando a conexão entre os espaços de spin e isospin, seguindo a abordagem de Adkins, Nappi e Witten [Ad83]. Esses autores implementaram a rotação do skyrmion por meio de uma matriz unitária $A \in \text{SU}(2)$ escrita como

$$A = a_0 + i\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{a} . \quad (4.74)$$

A condição de unitariedade $AA^\dagger = 1$ vincula as coordenadas coletivas pela relação

$$a_0^2 + \mathbf{a}^2 = 1 . \quad (4.75)$$

A matriz A é conhecida como a representação de Cayley-Klein das matrizes de rotação [Go80][Sa85] e relaciona-se aos ângulos de Euler por:

$$A = e^{-i\frac{\tau_3}{2}\alpha} e^{-i\frac{\tau_2}{2}\beta} e^{-i\frac{\tau_3}{2}\gamma} . \quad (4.76)$$

A rotação do sóliton é feita transformando o campo U com as coordenadas coletivas a_i por meio da relação

$$U(r, t) = A(t)U_0(r)A^\dagger(t) . \quad (4.77)$$

Usando-se a expressão unitária do campo do pión, dada pela eq. (2.67) obtemos

$$U(r, t) = \cos F(r) + i\tau_a D_{ab}(t)\hat{\pi}_b \text{sen } F(r) . \quad (4.78)$$

Esta expressão mostra a equivalência entre as descrições tanto em termos dos graus de liberdade coletivos a_0 e \mathbf{a} como em termos de $\pi_b(r)$ que pode variar pela aplicação da matriz de rotação

$$\pi_a(r, t) = D_{ab}(t)\pi_b(r) . \quad (4.79)$$

No caso do ouriço temos:

$$U(r, t) = \cos F(r) + i\tau_a D_{ab}(t)\hat{r}_b \text{sen } F(r) . \quad (4.80)$$

É interessante notar que este resultado é consistente com a abordagem usada na seção anterior, pois a rotação do pión na equação (4.80) é idêntica à da eq. (4.60).

Em termos das variáveis coletivas da matriz A , e eq. (4.57) fica:

$$\dot{D}_{ab}\dot{D}_{ab} = 8(\dot{a}_0^2 + \dot{\mathbf{a}}^2) = 8 \times \frac{1}{2} \text{Tr}[\partial_0 A \partial_0 A^\dagger] . \quad (4.81)$$

Os resultados (4.65), (4.69) e (4.68) permitem-nos escrever a Lagrangiana como

$$L = -M + 2\lambda(\dot{a}_0^2 + \dot{\mathbf{a}}^2) .$$

Definindo o momento $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i}$ conjugado à coordenada a_i temos

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i} = 2\lambda 2\dot{a}_i \Rightarrow \dot{a}_i = \frac{p_i}{4\lambda} \quad (4.82)$$

O Hamiltoniano então é dado por

$$H = p_i \dot{a}_i - L \quad (4.83)$$

e

$$\begin{aligned} H &= p_i \frac{p_i}{4\lambda} - \left[-M + 2\lambda \sum_{i=0}^3 \dot{a}_i^2 \right] \\ &= \frac{p_i^2}{4\lambda} + M - 2\lambda \sum_{i=0}^3 \left(\frac{p_i}{4\lambda} \right)^2 \\ &= M + \frac{1}{8\lambda} \sum_{i=0}^3 p_i^2 \end{aligned} \quad (4.84)$$

Para quantizar este sistema, substituímos $p_i \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial a_i}$, para obter

$$H = M + \frac{1}{8\lambda} \sum_{i=0}^3 \left(-\frac{\partial^2}{\partial a_i^2} \right) \quad (4.85)$$

com o vínculo $\sum_i a_i^2 = 1$.

No espaço tridimensional ordinário, sabemos que o operador ∇^2 é dado por

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \mathbf{L}^2 \\ &= -\mathbf{L}^2 \quad \text{se } \sum_{i=1}^3 x_i^2 = r^2 = 1. \end{aligned} \quad (4.86)$$

\mathbf{L} é o operador momento angular com componentes

$$\begin{aligned} L_{ij} &\equiv L_k = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_k = x_i p_j - x_j p_i \\ &= -i \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \right), \end{aligned} \quad (4.87)$$

com $i, j, k = 1, 2, 3$ -com ordenação cíclica.

Já no caso de rotações em quatro dimensões, há seis geradores L_{ij} e podemos escrever, desde que $\sum_{i=0}^3 a_i^2 = 1$,

$$L_{ij} = -\left(a_i \frac{\partial}{\partial a_j} - a_j \frac{\partial}{\partial a_i} \right) \quad (4.88)$$

e podemos definir $L_{0i} = K_i$. Com isto temos $L_i = -\epsilon_{ijk}a_j\partial_k$ e $K_i = a_i\partial_0 - a_0\partial_i$; esses geradores obedecem as relações de comutação

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k, \quad [L_i, L_k] = i\epsilon_{ijk}K_k, \quad [K_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}L_k. \quad (4.89)$$

Assim as combinações $L_i^\pm = \frac{1}{2}(L_i \pm K_i)$ irão, como no estudo das cargas quirais, desacoplar em duas álgebras independentes $SU(2) \times SU(2)$. Por esta razão diz-se que $SU(2) \times SU(2)$ é isomórfico ao $SO(4)$.

Na seqüência,

$$\sum_{i=0}^3 -\frac{\partial^2}{\partial a_i^2} = (L_{23}^2 + L_{31}^2 + L_{12}^2) + (L_{01}^2 + L_{02}^2 + L_{03}^2) \quad (4.90)$$

e identificando o segundo termo como \mathbf{K}^2 ,

$$\sum_{i=0}^3 -\frac{\partial^2}{\partial a_i^2} = \mathbf{L}^2 + \mathbf{K}^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{K}) \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{K}) \quad (4.91)$$

Define-se²

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{K}), \quad \mathbf{J} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{K}) \quad (4.92)$$

onde \mathbf{I} é o operador de isospin e \mathbf{J} o operador de momento angular total. Há o desacoplamento $SU(2)_L \times SU(2)_R$.

Mas

$$\begin{aligned} \mathbf{K} \cdot \mathbf{L} &= K_k L_k = (a_0\partial_k - a_k\partial_0) \epsilon_{klm} a_l \partial_m \\ &= a_0 \epsilon_{klm} \partial_k \partial_m a_l - \epsilon_{klm} \partial_0 a_l a_k \partial_m \\ &= 0, \end{aligned} \quad (4.93)$$

portanto,

$$\mathbf{J}^2 = \mathbf{I}^2 = \frac{1}{4}(\mathbf{L}^2 + \mathbf{K}^2) \quad (4.94)$$

o que leva a

$$M_J = M + \frac{1}{4\lambda} (J(J+1) + I(I+1)) \quad (4.95)$$

$$= M + \frac{1}{2\lambda} J(J+1) = M + \frac{1}{2\lambda} I(I+1). \quad (4.96)$$

O operador

$$\mathcal{K}^2 = \mathbf{L}^2 + \mathbf{K}^2 = 2(\mathbf{J}^2 + \mathbf{I}^2) \quad (4.97)$$

²Usamos a convenção de [Bh88]. A convenção usada por [Ad83] é $\mathbf{I} = \frac{1}{2}(\mathbf{K} - \mathbf{L})$ e $\mathbf{J} = \frac{1}{2}(\mathbf{K} + \mathbf{L})$ porém isto não é relevante para efeito da quantização

pode ser visto como o operador momento angular ao quadrado no espaço quadridimensional. Atuando no espaço de momento angular da função de onda $|JM_J, IM_I\rangle = |JM_J\rangle |IM_I\rangle$ (as funções \mathcal{D}^J em termos dos ângulos de Euler) obtemos:

$$\mathcal{K}^2 |JM_J, IM_I\rangle = 2(J(J+1) + I(I+1)) \quad (4.98)$$

Assim o momento angular l em quatro dimensões, que é inteiro, corresponde a

$$l = 2J = 2I \quad (4.99)$$

e $J = I$ pode tomar valores inteiros e semi-inteiros. Os valores semi-inteiros correspondem à quantização do sóliton como um férmion.

O resultado (4.69) foi obtido primeiramente por [Ad83] usando este formalismo da matrizes $A(t)$ para evoluir o campo U e quantizando o momento angular em quatro dimensões em coordenadas cartesianas. Devido à simetria esférica do problema, este resultado é mais facilmente obtido em coordenadas esféricas usando matrizes de rotação para evoluir o campo do pión, bastando quantizar a expressão (4.69). Neste caso, a rotação no espaço de configuração leva a uma quantização do momento angular com valor de momento angular mais baixo de $1/2$. Como no hedgehog o isospin está na mesma direção do versor \hat{r} também será juntamente gerado um novo espaço quantizado com valor de isospin $1/2$.

4.7. Correntes

Nesta seção calculamos as correntes vetorial e axial a partir das transformações dos campos σ e π . Essas correntes possibilitam o cálculo de alguns observáveis como veremos.

Para o cálculo da corrente vetorial aplicamos a transformação $\sigma \rightarrow \sigma$ e $\pi \rightarrow \pi - \alpha \times \pi$ (2.21) na Lagrangiana (4.62) e calculamos (2.23),

$$J_V^{\mu a} = \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \alpha_a)} \delta \mathcal{L}. \quad (4.100)$$

Efetuada explicitamente este cálculo, temos para J_V^{0a}

$$J_V^{0a} = \varepsilon_{abc} \pi_b \partial^0 \pi_c + \frac{1}{e^2 f_\pi^4} \left\{ ((\partial_i \sigma)^2 + (\partial_i \pi)^2) \varepsilon_{abc} \pi_b \partial^0 \pi_c + \partial_i \pi_b \partial^0 \pi_b \varepsilon_{cag} \partial_i \pi_c \pi_g \right\} \quad (4.101)$$

A densidade unidimensional de corrente é obtida usando o resultado (4.74), que descreve o pión quantizado e integrado sobre as variáveis angulares. Para o primeiro termo, temos:

$$\int d\Omega \varepsilon_{abc} \pi_b \partial^0 \pi_c = \int d\Omega \varepsilon_{abc} (f_\pi s D_{b\alpha} \hat{r}_\alpha) \partial^0 (f_\pi s D_{c\beta} \hat{r}_\beta) = \frac{4\pi}{3} f_\pi^2 \varepsilon_{abc} D_{b\alpha} \dot{D}_{c\alpha} s^2, \quad (4.102)$$

onde usamos

$$\int d\Omega \hat{r}_m \hat{r}_n = \int d\Omega \frac{1}{3} \delta_{mn}. \quad (4.103)$$

De forma análoga, para o segundo termo, temos

$$\begin{aligned} \partial_i \pi_b \partial_0 \pi_b \varepsilon_{cag} \partial_i \pi_c \pi_g &= \partial_i (D_{b\alpha} \pi_\alpha) \partial_0 (D_{b\beta} \pi_\beta) \varepsilon_{cag} \partial_i (D_{c\gamma} \pi_\gamma) D_{g\delta} \pi_\delta \\ &= D_{b\alpha} \partial_i \pi_\alpha \dot{D}_{b\beta} \pi_\beta \varepsilon_{cag} D_{c\gamma} \partial_i \pi_\gamma D_{g\delta} \pi_\delta. \end{aligned} \quad (4.104)$$

Usando os resultados de $\partial_i \pi_a$ dados no apêndice C, temos

$$\begin{aligned} \partial_i \pi_b \partial_0 \pi_b \varepsilon_{cag} \partial_i \pi_c \pi_g &= f_\pi^4 D_{b\alpha} (b\delta_{i\alpha} + d\hat{r}_i \hat{r}_\alpha) \dot{D}_{b\beta} \hat{r}_\beta \varepsilon_{cag} D_{c\gamma} (b\delta_{i\gamma} + d\hat{r}_i \hat{r}_\gamma) D_{g\delta} \hat{r}_\delta s \\ &= f_\pi^4 s^2 \varepsilon_{cag} \left[b^2 \delta_{\alpha\gamma} + (2bd + d^2) \hat{r}_\alpha \hat{r}_\gamma \right] D_{b\alpha} D_{c\gamma} \dot{D}_{b\beta} \hat{r}_\beta D_{g\delta} \hat{r}_\delta \\ &= f_\pi^4 s^2 \varepsilon_{cag} \left[b^2 D_{b\alpha} D_{c\alpha} \dot{D}_{b\beta} \hat{r}_\beta D_{g\delta} \hat{r}_\delta + (2bd + d^2) \hat{r}_b \hat{r}_c \dot{D}_{b\beta} \hat{r}_\beta D_{g\delta} \hat{r}_\delta \right]. \end{aligned} \quad (4.105)$$

O segundo termo desta expressão se anula pois $\hat{r}_b \dot{D}_{b\beta} \hat{r}_\beta = \hat{r}_b \hat{r}_b = 0$. No primeiro termo, usando $D_{b\alpha} D_{c\alpha} = \delta_{bc}$ e (4.103) encontramos

$$\int d\Omega \partial_i \pi_b \partial_0 \pi_b \varepsilon_{cag} \partial_i \pi_c \pi_g = \frac{4\pi}{3} f_\pi^4 b^2 \varepsilon_{agc} D_{g\delta} \dot{D}_{c\delta} s^2. \quad (4.106)$$

O fator de rotação pode ser escrito na forma (4.59) :

$$\varepsilon_{agc} D_{g\delta} \dot{D}_{c\delta} = 2\omega_a, \quad (4.107)$$

sendo ω_a a velocidade de rotação angular no espaço de isospin. Pode-se também usar a relação $\omega_a = iT r[\tau_a A \partial_0 A^\dagger]$ para efeito de comparação com [Ad83].

Reunindo todos os resultados e usando o apêndice C, chegamos finalmente em

$$\int d\Omega J_V^{0a} = \omega_a \frac{8\pi}{3} \left\{ f_\pi^2 s^2 + \frac{1}{e^2} s^2 (F'^2 + \frac{s^2}{r^2}) \right\}, \quad (4.108)$$

Esta expressão é menor por um fator dois do que a correspondente obtida por Adkins, Nappi e Witten [Ad83] e como já apontado em [Ad87 p.126]. A nossa definição é mais padrão e os resultados obtidos ao final são os mesmos.

A carga elétrica é dada pela relação

$$Q = \frac{1}{2} B + I_3 = \int r^2 dr d\Omega \left(\frac{1}{2} \mathcal{B}^0 + J_V^{03} \right). \quad (4.109)$$

Assim,

$$Q = \int_0^\infty \rho_Q(r) dr, \quad (4.110)$$

onde a densidade linear de carga vale

$$\rho_Q(r) = \frac{1}{2} \left(\frac{-2}{\pi} \right) s^2 F' + \frac{I_3}{\lambda} \frac{8\pi}{3} \left\{ f_\pi^2 s^2 + \frac{1}{e^2} s^2 (F'^2 + \frac{s^2}{r^2}) \right\}, \quad (4.111)$$

onde usamos $\omega_3 = I_3/\lambda$. Em função da variável adimensional, escrevemos

$$\rho_Q(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{-2}{\pi} \right) s^2 F' + \frac{I_3}{I_2} \frac{2\pi}{3} s^2 \left\{ 1 + 4(F'^2 + \frac{s^2}{u^2}) \right\}, \quad (4.112)$$

onde I_2 é dado na tabela 4.1. Para o isospin $I_3 = 1/2$ temos a distribuição de carga de um próton e para $I_3 = -1/2$ a do nêutron.

A corrente axial pode ser calculada de modo análogo, fazendo a transformação $\sigma \rightarrow \sigma - \beta \cdot \pi$ e $\pi \rightarrow \pi + \beta \sigma$ (2.19) e calculando (2.22), ou seja,

$$J_A^{\mu a} = \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \beta_a)} \delta \mathcal{L}. \quad (4.113)$$

O cálculo explícito fornece

$$\begin{aligned} J_A^{ia} = \frac{\partial}{\partial (\partial_i \beta_a)} \delta \mathcal{L} = & \sigma \partial_i \pi_a - \partial_i \sigma \pi_a + \frac{1}{4e^2 f_\pi^4} 4 \left\{ -[\partial_i \sigma \pi_a (\partial_j \pi)^2 - \partial_i \pi_a \sigma (\partial_j \sigma)^2] \right. \\ & \left. + [\pi_a \partial_j \sigma \partial_i \pi_b \partial_j \pi_b - \sigma \partial_i \sigma \partial_j \sigma \partial_j \pi_a] - \sigma \partial_j \pi_a \partial_i \pi_b \partial_j \pi_b + \sigma \partial_i \pi_a (\partial_j \pi)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.114)$$

Procedendo de forma análoga ao cálculo da corrente vetorial, teremos para a corrente axial:

$$\int d\Omega J_A^{ia} = \frac{4\pi}{3} D_{ai} \left\{ \frac{2sc}{r} [f_\pi^2 + \frac{1}{e^2} (F'^2 + \frac{s^2}{r^2})] + F' (f_\pi^2 + \frac{1}{e^2} \frac{2s^2}{r^2}) \right\}. \quad (4.115)$$

4.8. Observáveis

Nesta seção extraímos as previsões físicas para as propriedades estáticas dos bárions, a partir do modelo de Skyrme.

As previsões do modelo para as massas do nêutron ($I=S=1/2$) e do delta ($I=S=3/2$) são dadas pela eq.(4.96), que permite-nos escrever:

$$M_N = M + \frac{3}{8\lambda}, \quad (4.116)$$

$$M_\Delta = M + \frac{15}{8\lambda}, \quad (4.117)$$

onde M é a massa clássica e λ o momento de inércia, dados respectivamente pelas eqs. (4.47) e (4.66). Elas podem ser expressas em termos de duas integrais adimensionais como:

$$M = I1(2f_\pi/e), \quad (4.118)$$

$$\lambda = I2(1/2f_\pi e^3), \quad (4.119)$$

onde $I1$ e $I2$ são dadas na tabela 4.1 .

Se usarmos as massas do nucleon e do delta como ponto de partida para fixar as constantes do modelo, escrevemos as relações:

$$M = \frac{1}{4}(5M_N - M_\Delta), \quad (4.120)$$

$$\lambda = \frac{3}{2}(M_\Delta - M_N)^{-1}, \quad (4.121)$$

e se desejarmos reproduzir as massas do nucleon e do delta, calculamos f_π e e usando

$$f_\pi = \frac{1}{2} \left[\frac{M^3 I2}{I1^3 \lambda} \right], \quad (4.122)$$

$$e = \left[\frac{I1 I2}{M \lambda} \right]^{1/4}. \quad (4.123)$$

As características eletromagnéticas do modelo, representadas pelos raios quadráticos e momentos magnéticos, são devidas às componentes isoescalar e isovetorial da corrente. A componente isoescalar  identificada  corrente bariônica, enquanto que a componente vetorial  calculada do modo mostrado na seção anterior. Assim, as distribuições escalar e isovetorial são dadas por

$$\rho_{E,I=0}(r) = \mathcal{B}^0(r) = -\frac{2}{\pi} s^2 F', \quad (4.124)$$

e

$$\rho_{E,I=1}(r) = \frac{2\pi}{3\lambda} r^2 s^2 \left[4f_\pi^2 + \frac{4}{e^2} s^2 (F'^2 + \frac{s^2}{r^2}) \right]. \quad (4.125)$$

A partir destes resultados calculamos os raios quadráticos médios, através das expresses:

$$\langle r^2 \rangle_{E,I=0} = \int_0^\infty dr r^2 \rho_{E,I=0}(r) = \left(\frac{1}{e2f_\pi} \right)^2 I3, \quad (4.126)$$

$$\langle r^2 \rangle_{E,I=1} = \int_0^\infty dr r^2 \rho_{E,I=1}(r) = \left(\frac{1}{e2f_\pi} \right)^2 \left(\frac{1}{\lambda e^3 2f_\pi} \right) I4 \quad (4.127)$$

sendo que $I3$ e $I4$ estão relacionadas na tabela 4.1 .

Para os raios magnéticos, temos³

$$\langle r^2 \rangle_{M,I=0} = \langle r^4 \rangle_{E,I=0} / \langle r^2 \rangle_{E,I=0}, \quad (4.128)$$

onde

$$\langle r^4 \rangle_{E,I=0} = \int_0^\infty dr r^4 \rho_{E,I=0}(r) = \left(\frac{1}{2ef_\pi} \right)^4 I5, \quad (4.129)$$

e

$$\langle r^2 \rangle_{M,I=1} = \langle r^2 \rangle_{E,I=1}. \quad (4.130)$$

Os momentos magnéticos são obtidos a partir dos fatores de forma magnéticos, e dados por [Ad87]

$$\mu_p = 2M_N \left(\frac{1}{12\lambda} \langle r^2 \rangle_{E,I=0} + \frac{\lambda}{6} \right), \quad (4.131)$$

$$\mu_n = 2M_N \left(\frac{1}{12\lambda} \langle r^2 \rangle_{E,I=0} - \frac{\lambda}{6} \right). \quad (4.132)$$

O momento magnético do Δ^{++} também pode ser calculado por

$$\mu_{\Delta^{++}} = 2M_N \left(\frac{1}{4\lambda} \langle r^2 \rangle_{E,I=0} + \frac{3\lambda}{10} \right) \quad (4.133)$$

e o elemento de transição $\mu_{N\Delta}$ é

$$\mu_{N\Delta} = 2M_N \left(\frac{\sqrt{2}\lambda}{6} \right) = \sqrt{\frac{1}{2}} (\mu_p - \mu_n). \quad (4.134)$$

Tabela 4.1			
		$m_\pi = 0$	$m_\pi=138\text{MeV},$ $f_\pi=93\text{MeV}$ $e=4,0$
$I1$	$4\pi \int_0^\infty du u^2 \left\{ \frac{1}{8} \left(F'^2 + \frac{2s^2}{u^2} \right) + \frac{s^2}{2u^2} \left(2F'^2 + \frac{s^2}{u^2} \right) + \frac{\beta^2}{4} (1-c) \right\}$	36,46	37,77
$I2$	$4\pi \int_0^\infty du u^2 \frac{s^2}{6} \left[1 + 4 \left(F'^2 + \frac{s^2}{u^2} \right) \right]$	106,7	71,58
$I3$	$-\frac{2}{\pi} \int_0^\infty du u^2 s^2 F'$	4,48	3,67
$I4$	$\frac{2\pi}{3} \int_0^\infty du u^4 s^2 \left[1 + 4 \left(F'^2 + \frac{s^2}{u^2} \right) \right]$	∞	764,1
$I5$	$-\frac{2}{\pi} \int_0^\infty du u^4 s^2 F'$	48,3	27,59
$I6$	$-\int_0^\infty du u^2 \left\{ \frac{2sc}{u} \left[1 + 4 \left(F'^2 + \frac{s^2}{u^2} \right) \right] + F' \left[1 + \frac{8s^2}{u^2} \right] \right\}$	17,27	23,06
$F'(0)$		-1,00376	-1,08087
C		8,64	7,95

³Segundo Battistel[Bat94 p.99], que partiu das expressões dos fatores de forma magnéticos, os raios quadráticos magnéticos definidos por [Ad83] devem ser multiplicados por um fator 3/5.

A constante de acoplamento πN é extraída do comportamento assintótico do ângulo quiral, sendo dada por

$$g_{\pi NN} = \frac{2\pi M_N}{3e^2 f_\pi} C, \quad (4.135)$$

onde C é a constante definida em (4.51).

A constante de acoplamento axial, g_A , por outro lado, é obtida a partir da corrente axial calculada na seção anterior e pode ser escrita como

$$g_A = \frac{\pi}{3e^2} I6. \quad (4.136)$$

No caso de píons sem massa, temos também a forma equivalente [Ad87],

$$g_A = \frac{\pi}{3e^2} 2C. \quad (4.137)$$

No caso de píons massivos, a relação que determina g_A se modifica para [Ad87 p.155]:

$$g_A = \frac{2\pi}{9e^2} I6. \quad (4.138)$$

No caso de píons sem massa, as constantes $g_{\pi NN}$ e g_A estão ligadas pela relação de Goldberger-Treiman

$$g_A M_N = g_{\pi NN} f_\pi. \quad (4.139)$$

No caso de píons massivos, esta relação é violada em 5% na direção fisicamente correta [Ad87 p.156].

Na tabela 4.1, apresentamos as integrais $I1 - I6$ e calculamos os seus valores em termos de $u(u = 2f_\pi e r)$. No caso de píons sem massa, esses valores não dependem da escolha de parâmetros f_π e e . No caso massivo essas integrais dependem de β , dado por $\beta = m_\pi / (2f_\pi e)$ com F função de β .

Com esses resultados e as expressões desenvolvidas nesta seção, calculamos os observáveis constantes da tabela 4.2, tomando $M_N = 938,9$ MeV nas expressões

que envolvem o cálculo dos observáveis.

Tabela 4.2			
	$m_\pi = 0$	$m_\pi = 138 \text{ MeV}$	<i>Exp</i>
M	1695 MeV	1756 MeV	–
$\lambda(\times 10^{-3})$	$8,96 (\text{MeV})^{-1}$	$6,01 (\text{MeV})^{-1}$	–
$\langle r^2 \rangle_{E,I=0}^{1/2}$	0,56 fm	0,51 fm	0,72 fm
$\langle r^2 \rangle_{E,I=1}^{1/2}$	∞	0,87 fm	0,88 fm
$\langle r^2 \rangle_{M,I=0}^{1/2}$	0,87 fm	0,73 fm	0,82 fm
$\langle r^2 \rangle_{M,I=1}^{1/2}$	∞	0,87 fm	0,80 fm
μ_p	2,94	2,05	2,79
μ_n	-2,66	-1,70	-1,91
$\mu_{\Delta^{++}}$	5,30	3,90	4,6 – 6,7
$\mu_{N\Delta}$	3,8	2,69	3,29
g_A	1,13	1,01	1,23
$g_{\pi NN}$	11,4	10,5	13,5
$g_{\pi N\Delta}$	17,1	15,7	20,4

Tabela 4.2- Resultados dos observáveis de um núcleon no modelo de Skyrme para dois conjuntos de parâmetros, $m_\pi = 0$, $f_\pi = 93 \text{ MeV}$, $e = 4,0$ e $m_\pi = 138 \text{ MeV}$, $f_\pi = 93 \text{ MeV}$, $e = 4,0$.

4.9. O Papel da Simetria Quiral

Como discutimos na introdução, a simetria quiral é ingrediente essencial no modelo de Skyrme, pois é ela quem dá origem à variável dinâmica vinculada pela eq. (4.16). Esse vínculo, por sua vez, tem dois tipos de papel no interior do modelo. O primeiro deles consiste em permitir a conservação de uma corrente topológica, identificada à corrente bariônica. A segunda é restringir fortemente a Lagrangiana que descreve a dinâmica do sistema e, por extensão, os valores dos observáveis.

No caso da realização não linear da simetria quiral, que está na base do modelo de Skyrme, as transformações dos campos são dadas por (ver capítulo 2)

$$\begin{aligned}
 \delta^V \pi &= -\alpha \times \pi \\
 \delta^A \pi &= \beta \sigma \\
 \delta^V \sigma &= 0 \\
 \delta^A \sigma &= -\beta \cdot \pi
 \end{aligned} \tag{4.140}$$

onde σ é a função

$$\sigma = \pm \sqrt{f_\pi^2 - \pi^2} \tag{4.141}$$

Assim, a simetria quiral corresponde ao uso dos graus de liberdade expressos pelo campo π e pela função σ , sujeitos à condição

$$\pi^2 + \sigma^2 = f_\pi^2, \quad (4.142)$$

como indicado pelas equações (4.15),(4.16) e (4.20).

Atualmente o estudo do papel da simetria quiral nas interações fortes tem sido alvo de grande interesse, especialmente depois dos trabalhos de Weinberg[We79] e Leutwyler[Leu82], que estabeleceram as bases da teoria da perturbação quiral. Neste contexto, o modelo de Skyrme pode ser especialmente útil, pois ele produz as conseqüências da simetria quiral de forma não perturbativa.

Nesta seção estudamos as conseqüências da simetria quiral no modelo. Para tanto, introduzimos um novo parâmetro χ , que multiplica a função σ , substituindo em todas as equações:

$$\sigma \rightarrow \chi\sigma. \quad (4.143)$$

Assim, esse parâmetro define um “peso” para a função σ relativamente ao campo do pión. Podemos por exemplo desligar a função σ fazendo χ muito pequeno. Evidentemente, quando $\chi = 1$, recuperamos os resultados das seções anteriores.

No caso da corrente bariônica, a modificação (4.143) produz o resultado

$$\mathcal{B}_\mu = \frac{\chi}{12\pi^2 f_\pi^4} \epsilon_{ijkl} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \pi_i \partial^\nu \pi_j \partial^\alpha \pi_k \partial^\beta \pi_l, \quad (4.144)$$

indicando que a conservação dessa corrente não é alterada. Entretanto, para que tenham ainda números bariônicos inteiros, é preciso redefinir o valor da constante nas eqs. (4.21) e (4.22), o que pode ser feito sem problemas[NNR93]. Por outro lado, quando o parâmetro χ é diferente de 1, expressões da forma $(\pi^2 + \chi^2\sigma^2)$ ou $(\partial_\mu \pi \cdot \partial^\mu \pi + \chi^2 \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma)$ não são mais invariantes por transformações axiais.

Assim, a introdução do parâmetro χ dá origem a uma família de modelos com número bariônico conservado, mas sem simetria quiral na Lagrangiana e, por isso, permite o estudo do papel dessa simetria. É importante notar que a quebra da simetria que consideramos aqui é diferente daquela que dá origem ao termo de massa do pión, eq. (4.36). Por este motivo, para não confundir os efeitos associados às duas possibilidades, consideramos apenas os efeitos devidos à variação de χ , num modelo com $m_\pi = 0$.

Na versão mais radical, com $\chi = 0$, a fórmula de massa, dada pela eq.(4.45), se modifica para:

$$M_{\chi=0} = \int d^3\mathbf{r} \left\{ \frac{1}{2} (\partial_i \pi)^2 - \frac{8}{32e^2 f_\pi^4} [\partial_i \pi_a \partial_j \pi_a \partial_i \pi_c \partial_j \pi_c - (\partial_i \pi)^2 (\partial_j \pi)^2] \right\}. \quad (4.145)$$

Substituindo nesta expressão as expressões apresentadas no apêndice C, temos:

$$M = \int_0^\infty dr \mathcal{M}(r) \quad (4.146)$$

onde

$$\mathcal{M}(r) = 4\pi r^2 \left\{ \frac{1}{2} f_\pi^2 \left[c^2 F'^2 + \frac{2s^2}{r^2} \right] + \frac{1}{2e^2} \frac{s^2}{r^2} \left[2c^2 F'^2 + \frac{s^2}{r^2} \right] \right\} \quad (4.147)$$

Esse resultado deve ser comparado à eq. (4.47). A minimização desta expressão leva a uma equação diferencial para a variável F que diverge quando $F = \pi/2$, indicando que o estudo é problemático no caso $\chi = 0$. É interessante notar que, neste limite, também a corrente bariônica, dada pela eq. (4.144), fica indefinida.

No caso em que χ é não nulo, a Lagrangiana fica

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \chi^2 (\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi)^2 + \frac{8}{32e^2 f_\pi^4} \left\{ -2\chi^2 (\partial_\mu \sigma)^2 (\partial_\nu \pi)^2 + 2\chi^2 \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma \partial^\mu \pi_a \partial^\nu \pi_a \right. \quad (4.148)$$

$$\left. + \partial_\mu \pi_a \partial_\nu \pi_a \partial^\mu \pi_c \partial^\nu \pi_c - (\partial_\mu \pi)^2 (\partial_\nu \pi)^2 \right\}. \quad (4.149)$$

Esse resultado corresponde à seguinte expressão para a massa clássica do sóliton

$$M(\chi) = \int d^3 \mathbf{r} \left\{ \frac{1}{2} f_\pi^2 \left[(\chi^2 s^2 + c^2) F'^2 + \frac{2s^2}{r^2} \right] + \frac{1}{2e^2} \frac{s^2}{r^2} \left[2(\chi^2 s^2 + c^2) F'^2 + \frac{s^2}{r^2} \right] \right\}, \quad (4.150)$$

que foi obtida de forma análoga à realizada na seção 4.3. A minimização desta função dá origem à seguinte equação diferencial,

$$\left(\frac{u^2}{4} + 2s^2 \right) (\chi^2 s^2 + c^2) F''' + \frac{1}{2} u (\chi^2 s^2 + c^2) F'' + F'^2 2sc [(\chi^2 s^2 + c^2) + (s^2 + \frac{u^2}{8}) (\chi^2 - 1)] - \frac{1}{2} sc - \frac{2s^3 c}{u^2} = 0 \quad (4.151)$$

que se reduz à (4.49) ($\beta = 0$) quando $\chi = 1$.

Essa equação, como no caso $\chi = 1$, pode ser resolvida pelo método de Euler (ou por Runge-Kutta). Entretanto tal solução é difícil de ser obtida, especialmente para valores pequenos de χ . Por isso, utilizamos também um método variacional. As funções de perfil para $\chi^2 = 1, 0,5$ e $0,05$ são mostradas na fig. 4.2, onde se pode notar que a quebra de simetria quiral é responsável pelo aparecimento de uma inflexão em torno do ponto onde $F = \pi/2$.

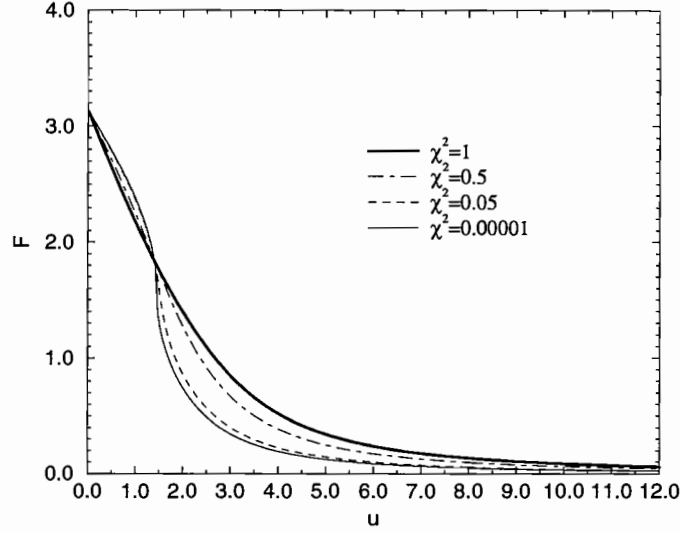


Figura 4.2: Funções de perfil do skyrmion para $B=1$ e $m_\pi = 0$ variando o parâmetro χ .

No caso não massivo, os observáveis do modelo são expressos em termos de seis integrais, como discutido na seção 4.8. Quando a simetria quiral é quebrada, elas passam a ser dadas por:

$$I1 = 4\pi \int_0^\infty du u^2 \left\{ \frac{1}{8} \left[(\chi^2 s^2 + c^2) F'^2 + \frac{2s^2}{u^2} \right] + \frac{s^2}{2u^2} \left[2(\chi^2 s^2 + c^2) F'^2 + \frac{s^2}{u^2} \right] \right\} \quad (4.152)$$

$$I2 = 4\pi \int_0^\infty du u^2 \frac{s^2}{6} \left\{ 1 + 4 \left[(\chi^2 s^2 + c^2) F'^2 + \frac{s^2}{u^2} \right] \right\} \quad (4.153)$$

$$I3 = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty du u^2 s^2 F' \quad (4.154)$$

$$I4 = \frac{2\pi}{3} \int_0^\infty du u^4 s^2 \left\{ 1 + 4 \left[(\chi^2 s^2 + c^2) F'^2 + \frac{s^2}{u^2} \right] \right\} \quad (4.155)$$

$$I5 = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty du u^4 s^2 F' \quad (4.156)$$

$$I6 = -\int_0^\infty du u^2 \left\{ \frac{2sc}{u} \left[1 + 4 \left[(\chi^2 s^2 + c^2) F'^2 + \frac{s^2}{u^2} \right] \right] + (\chi^2 s^2 + c^2) F' \left[1 + \frac{8s^2}{u^2} \right] \right\} \quad (4.157)$$

Estas expressões se reduzem às da tabela 4.1 quando $\chi = 1$. Na tabela 4.3 apre-

sentamos os valores das integrais I1-I6 para valores de χ diferentes.

χ^2	I1	I2	I3	I4	I5	I6	$F'(0)$	C
1	36,46	106,7	4,48	∞	48,3	17,27	-1,00376	8,64
0,5	27,8	68,43	3,69	∞	27,94	9,92	-0,85444	6,22
0,05	16,9	32,2	2,63	∞	11,04	4,07	-0,70416	3,59

Nota-se que quando $\chi^2 < 1$ não vale mais a relação $I6 = 2C$ derivada por [Ad87] com base na conservação da corrente axial.

Estas integrais permitem-nos calcular os observáveis. Adotando $f_\pi = 93$ MeV e $e = 4,0$, obtemos os valores para os observáveis dados na tabela 4.4.

	$\chi^2 = 1$	$\chi^2 = 0,5$	$\chi^2 = 0,05$
M	1695 MeV	1292 MeV	786 MeV
$\lambda (\times 10^{-3})$	8,64 (MeV) ⁻¹	5,74 (MeV) ⁻¹	2,71 (MeV) ⁻¹
$\langle r^2 \rangle_{E,I=0}^{1/2}$	0,56 fm	0,51 fm	0,43 fm
$\langle r^2 \rangle_{E,I=1}^{1/2}$	∞	∞	∞
$\langle r^2 \rangle_{M,I=0}^{1/2}$	0,87 fm	0,73 fm	0,54 fm
$\langle r^2 \rangle_{M,I=1}^{1/2}$	∞	∞	∞
$\mu_{I=0}$	0,165	0,180	0,275
$\mu_{I=1}$	2,71	1,79	0,845
$\mu_{\Delta^{++}}$	5,30	3,78	2,34
$\mu_{N\Delta}$	3,8	2,54	1,20
g_A	1,13	0,65	0,26
$g_{\pi NN}$	11,4	8,21	4,74
$g_{\pi N\Delta}$	17,1	12,3	7,10

A primeira coluna apresenta os resultados com simetria quiral, a segunda e terceira colunas contém os resultados com simetria quiral parcial para $\chi^2 = 0,5$ e $\chi^2 = 0,05$ respectivamente.

Recentemente, Battistel[Bat94] em seu trabalho de doutorado, argumentou que o caráter preditivo do modelo de Skyrme é melhor representado por correlações entre observáveis do que pela análise isolada destes mesmos observáveis. Em particular, ele mostrou que as razões entre os valores dos observáveis e potências da grandeza $A = C/4e^2 f_\pi^2$, que representa o comportamento assintótico da função de perfil, são bastante estáveis. Por isso, para poder avaliar o papel da simetria quiral no modelo, apresentamos na tabela 4.5 as mesmas razões consideradas por Battistel[Bat94]

Tabela 4.5($m_\pi = 0$)			
	$\chi^2 = 1$	$\chi^2 = 0,5$	$\chi^2 = 0,05$
$A(\text{MeV})^{-2}$	$15,6 \times 10^{-6}$	$11,2 \times 10^{-6}$	$6,48 \times 10^{-6}$
$A(\text{fm}^2)$	0,607	0,437	0,252
$M / (2f_\pi)^2 \sqrt{A}$	12,4	11,2	8,9
$\lambda / (2f_\pi)^2 A^{3/2}$	4,06	4,42	4,75
$\langle r^2 \rangle_{E,I=0} / A$	0,516	0,595	0,733
$\langle r^2 \rangle_{E,I=1} / A$	∞	∞	∞
$\langle r^2 \rangle_{M,I=0} / A$	1,25	1,22	1,16
$\langle r^2 \rangle_{M,I=1} / A$	∞	∞	∞
$\mu_{I=0} (2f_\pi)^2 \sqrt{A}$	0,114	0,105	0,122
$\mu_{I=1} / (2f_\pi)^3 A^{3/2}$	6,82	7,40	7,96
$g_A / (2f_\pi)^2 A$	2,09	1,68	1,16
$g_{\pi NN} / 2f_\pi^2 A$	42,2	42,2	42,2

A inspeção da tabela 4.5 mostra que, no modelo de Skyrme, a constante assintótica A e, conseqüentemente, $g_{\pi NN}$, dependem fortemente da simetria quiral, o mesmo acontecendo com a massa clássica M e com g_A . Essa sensibilidade à simetria acontece porque essas grandezas dependem fortemente das interações entre píons, que são muito influenciadas pela simetria. Já as grandezas associadas às interações eletromagnéticas são relativamente pouco influenciadas pela eliminação quase total da simetria efetuada neste estudo. Assim, $\langle r^2 \rangle_{E,I=0}^2 / A$, $\langle r^2 \rangle_{M,I=0}^2 / A$, $\mu_{I=0} (4f_\pi^2) \sqrt{A}$ e $\mu_{I=1} / (2f_\pi)^3 A^{3/2}$ variam 42%, 7%, 10% e 16% respectivamente.

Esses resultados sugerem, portanto, que as propriedades eletromagnéticas do skyrmion dependem pouco das interações entre os píons. Eles confirmam, os resultados obtidos por Pupin[Pu95] no caso particular da fotoprodução de píons, que mostrou que as amplitudes em nível de árvore são totalmente independentes da simetria quiral.

A partir da comparação destes resultados podemos notar que as características eletromagnéticas são pouco alteradas tanto nos raios quadráticos médios como nos momentos magnéticos. Já as constantes axial e de interação πNN e $\pi N\Delta$ sofreram considerável redução em maior desacordo ainda com os resultados experimentais.

A tabela 4.6 mostra os resultados usando as massas do núcleon e do delta como “input”.

	$1,0\sigma$ [Ad83]	$\sqrt{0,05}\sigma$	<i>Exp</i>
F_π	129 MeV	170 MeV	186 MeV
e	5,44	3,33	–
eF_π	$(0,281\text{fm})^{-1}$	$(0,347\text{fm})^{-1}$	–
$\langle r \rangle_{E,I=0}^2$	0,59 fm	0,56 fm	0,72 fm
$\langle r \rangle_{E,I=1}^2$	∞	∞	0,88 fm
$\langle r \rangle_{M,I=0}^2$	0,92 fm	0,71 fm	0,82 fm
$\langle r \rangle_{M,I=1}^2$	∞	∞	0,80 fm
μ_p	1,88	1,85	2,79
μ_n	-1,32	-1,35	-1,91
$\mu_{\Delta^{++}}$	3,72	3,62	4,6 – 6,7
$\mu_{N\Delta}$	2,27	2,26	3,29
g_A	0,61	0,38	1,23
$g_{\pi NN}$	8,9	6,88	13,5
$g_{\pi N\Delta}$	13,4	10,32	20,4

Tabela 4.6- Observáveis de um núcleon com simetria quiral e com simetria quiral parcial com $\sigma \rightarrow \chi\sigma$, ambos com $m_\pi = 0$, comparados aos resultados experimentais.

4.10. Função Potencial

Uma das características mais intrigantes do modelo de Skyrme é que ele é baseado num campo piônico estático, com a forma de um ouriço, dado adimensionalmente por

$$\pi(u) = \hat{u} \text{sen} F(u) . \quad (4.158)$$

Ele guarda, portanto, alguma semelhança com o campo elétrico de uma distribuição esférica de carga, especialmente pelo seu caráter radial. No caso da eletrostática, sabemos que campos elétricos radiais e esfericamente simétricos são conservativos e podem ser obtidos a partir de uma função potencial. Analogamente, no caso do campo piônico, podemos introduzir uma função escalar $\eta(u)$, chamada de potencial, tal que

$$\pi(u) = -\nabla\eta(u). \quad (4.159)$$

Para obter o potencial η basta integrar a função do pión,

$$\eta(r) = \eta(0) - \int_0^u \text{sen} F(u) du. \quad (4.160)$$

Nesta expressão $\eta(0)$ é o potencial na origem, calculado de tal forma que $\eta(\infty) = 0$. Assim,

$$\eta(0) = \int_0^{\infty} \text{sen } F(u) du, \quad (4.161)$$

e podemos também escrever

$$\eta(u) = - \int_{\infty}^u \text{sen } F(u) du. \quad (4.162)$$

O comportamento assintótico do campo piônico é dado pela eq. (4.51), onde temos

$$F_{\infty}(u) = C(1 + \beta u) \frac{e^{-\beta u}}{u^2}. \quad (4.163)$$

Notando que esta função também pode ser escrita como:

$$F_{\infty}(u) = - \frac{\partial}{\partial u} \left(C \frac{e^{-\beta u}}{u} \right), \quad (4.164)$$

obtemos o comportamento assintótico da função η de potencial:

$$\eta_{\infty}(u) = C \frac{e^{-\beta u}}{u}. \quad (4.165)$$

No caso de píons sem massa, $\beta \rightarrow 0$ e obtemos

$$F_{\infty}(u) = \frac{C}{u^2}, \quad (4.166)$$

$$\eta_{\infty}(u) = \frac{C}{u}. \quad (4.167)$$

Continuando a explorar a analogia com a eletrostática, podemos definir uma densidade de fonte para o pión, ρ_{π} , dada por

$$-\nabla^2 \eta(u) = \rho_{\pi}(u) \quad (4.168)$$

ou seja,

$$\rho_{\pi}(u) = - \frac{\partial}{\partial u} \left(u^2 \frac{\partial \eta}{\partial u} \right) = - \left\{ \frac{2}{u} \frac{\partial \eta}{\partial u} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} \right\} = \frac{2}{u} \text{sen } F + \cos F F'. \quad (4.169)$$

Ainda em analogia com a eletrostática, a expressão (4.168) permite-nos escrever a “carga” que gera o campo piônico como:

$$Q_{\pi} = 4\pi \int_0^{\infty} u^2 du \rho_{\pi}(u) \quad (4.170)$$

$$= -4\pi \int_0^{\infty} du \frac{\partial}{\partial u} \left(u^2 \frac{\partial \eta}{\partial u} \right) \quad (4.171)$$

$$= -4\pi \left[u^2 \frac{\partial \eta}{\partial u} \right]_0^{\infty} \quad (4.172)$$

$$= 4\pi C \quad (4.173)$$

Juntando este resultado com a eq. (4.135), podemos exprimir a constante de acoplamento $g_{\pi NN}$ em função de $\rho_\pi(u)$

$$g_{\pi NN} = \frac{2\pi M_N}{3e^2 f_\pi} \int_0^\infty u^2 du \rho_\pi(u). \quad (4.174)$$

Esse resultado indica que, de fato, a grandeza $\rho_\pi(u)$ pode ser interpretada como sendo a densidade de distribuição de fonte do modelo.

Uma das motivações para estudarmos o potencial η foi verificar se ele, por ser uma função escalar e mais básica que o campo do pión, poderia permitir uma formulação mais simples do modelo de Skyrme. Para verificar esta possibilidade, escrevemos a Lagrangiana do modelo fazendo as substituições $\boldsymbol{\pi} \rightarrow -\nabla\eta$ e $\sigma \rightarrow \sqrt{f_\pi^2 - (\nabla\eta)^2}$ na equação (4.45). Entretanto, o resultado obtido é muito complexo, não oferecendo aparentemente nenhuma perspectiva de simplificação. A vantagem de expressar o modelo em termos da variável η é que ela é um escalar e transforma o problema em determinar a variável vetorial $\boldsymbol{\pi}$ em termos de uma variável escalar.

Se os campos de dois skyrmions fossem somados vetorialmente teríamos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}_x + \boldsymbol{\pi}_y &= -\nabla\eta_x - \nabla\eta_y \\ &= -\nabla(\eta_x + \eta_y) \end{aligned} \quad (4.175)$$

Assim o potencial proveniente da soma dos campos piônicos corresponderia à soma dos potenciais η individuais de cada skyrmion.

5. INTERAÇÃO NN NO MODELO DE SKYRME

5.1. Introdução

Na sua formulação original do modelo, Skyrme[Sk62] considerou tanto as soluções para um único núcleon como para sistemas com número bariônico $B=2$, de onde ele extraiu algumas características das interações NN(núcleon-núcleon). Na versão original, as massas dos píons eram nulas e os sólitons eram clássicos, não possuindo spin ou isospin. Estas características quânticas foram incorporadas ao modelo em 1983 por Adkins, Nappi e Witten[Ad83], sendo estendidas a interações NN quase que imediatamente por Jackson, Jackson e Pasquier[Ja85].

No modelo de Skyrme, interação NN é um problema de dois corpos extensos. Para ilustrar possíveis soluções no contexto desse modelo, é interessante considerar o problema do cálculo da energia eletrostática[Ko81 p.504] de dois corpos não condutores esféricos rígidos, carregados e separados por uma distância fixa.

A energia eletrostática num dado volume é dada por

$$\mathcal{E} = \frac{\epsilon_0}{2} \int \mathbf{E}^2 dV, \quad (5.1)$$

onde \mathbf{E} é o vetor do campo elétrico e ϵ_0 é a suscetibilidade elétrica.

Para duas esferas, aplicando o princípio da superposição para os campos elétricos, obtemos:

$$\mathcal{E} = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\mathbf{E}_A + \mathbf{E}_B)^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\mathbf{E}_A^2 + \mathbf{E}_B^2 + 2\mathbf{E}_A \cdot \mathbf{E}_B) dV. \quad (5.2)$$

com E_A e E_B os campos individuais das esferas A e B respectivamente.

A partir desta expressão, podemos definir uma energia de interação, que é a que sobra quando extraímos as auto-energias das esferas isoladas:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{int} &= \frac{\epsilon_0}{2} \int (\mathbf{E}_A^2 + \mathbf{E}_B^2 + 2\mathbf{E}_A \cdot \mathbf{E}_B) dV - \frac{\epsilon_0}{2} \int \mathbf{E}_A^2 dV - \frac{\epsilon_0}{2} \int \mathbf{E}_B^2 dV \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int 2\mathbf{E}_A \cdot \mathbf{E}_B dV. \end{aligned} \quad (5.3)$$

O terceiro termo é o chamado de termo de interação e dá a medida de energia potencial entre os não condutores. Esta solução é porém aproximada para condutores pois não leva em conta que a densidade de carga se altera devido a presença do campo da outra esfera.

Para condutores a solução exata é tradicionalmente obtida pelo método de imagens aplicado sucessivamente de um condutor no outro. A solução do problema converge bem a longa distância dos condutores mas a convergência é lenta a curta distância[Ko81]. Isto nos mostra como se deformam os campos gerados pelos condutores quanto mais próximos eles estiverem. *É muito interessante notar que para os dois condutores esféricos “superpostos” a relação (5.2) é válida e, se os dois condutores tiverem a mesma carga, a energia é quatro vezes a energia de um único condutor. Se as cargas forem opostas a energia no campo eletrostático será nula.*

Considerando deformação nos campos podemos escrever:

$$\text{Energia} = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\mathbf{E}_{A_{def}} + \mathbf{E}_{B_{def}})^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\mathbf{E}_{A_{def}}^2 + \mathbf{E}_{B_{def}}^2 + 2\mathbf{E}_{A_{def}} \cdot \mathbf{E}_{B_{def}}) dV \quad (5.4)$$

Agora a energia de interação deve ser dada por:

$$\text{Energia}_{int} = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\mathbf{E}_{A_{def}}^2 + \mathbf{E}_{B_{def}}^2 - 2\mathbf{E}_{A_{def}} \cdot \mathbf{E}_{B_{def}}) dV - \frac{\epsilon_0}{2} \int (\mathbf{E}_A^2 + \mathbf{E}_B^2) dV, \quad (5.5)$$

i.e., o termo com produto escalar é modificado pelas deformações dos campos e não é mais o único responsável pela energia de interação.

Outra forma de resolver exatamente o problema dos dois condutores é minimizar a energia $\int \mathbf{E}^2 dV$ de um único campo \mathbf{E} sujeito às condições de contorno $\mathbf{E} = 0$ no interior das esferas e no infinito, $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_A = Q_A$ e $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_B = Q_B$. $S_{A(B)}$ é uma superfície qualquer envolvendo exclusivamente a esfera A(B) e $Q_{A(B)}$ é a carga total na superfície da esfera A(B).

No caso dos skyrmions, as idéias básicas são as mesmas. Entretanto, sua execução é bem mais difícil, devido ao caráter quântico dos núcleons e, por isso, atualmente existem várias abordagens possíveis para o problema, cada uma delas tendo vantagens e desvantagens.

Em princípio, o método mais rigoroso para se tratar o problema da interação consiste em se obter as soluções numéricas exatas das equações de movimento do sistema, que minimizam a Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{f_\pi^2}{4} \text{Tr} (\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) + \frac{1}{32e^2} \text{Tr} [U^\dagger \partial_\mu U, U^\dagger \partial_\nu U]^2 - \frac{f_\pi^2 m_\pi^2}{4} \text{Tr} [U + U^\dagger - 2], \quad (5.6)$$

onde U é o campo com B=2.

O método numérico, desenvolvido inicialmente por Verbaarschot e outros [Ve87], consiste em considerar o campo piônico com $B=2$ e adicionar um vínculo dependente da distância entre os núcleons. A Lagrangiana é escrita, então, como

$$L \rightarrow L - \frac{1}{2}\lambda(R - R_0)^2, \quad (5.7)$$

onde λ é um multiplicador de Lagrange e R é um parâmetro definido como a distância entre os bárions. No artigo [Ve87], esta distância é definida a partir da densidade bariônica $\mathcal{B}(r)$, pela relação $R = 2 \int_{z>0} d^3r \mathcal{B}(r)z$, sendo que os centros skyrmions foram posicionados equidistantes no eixo z . Posteriormente, a definição da separação foi modificada para o dobro do raio quadrático médio da densidade bariônica, ou seja, $\frac{1}{4}R^2 = \frac{1}{B} \int d^3r r \mathcal{B}(r)$ em [WW91]. Assim, a definição da separação entre os skyrmions não é clara e bem definida. Além disso, a solução numérica envolve métodos de relaxação que dispendem tempo considerável de computação, chegando a necessitar de um supercomputador.

Uma outra possibilidade para se estudar as interações entre skyrmions consiste em se tentar obter soluções aproximadas para a equação diferencial que rege o sistema, a partir das soluções exatas com $B=1$. Neste caso, a idéia é produzir um ansatz, ou seja, uma prescrição que produza um campo com $B=2$. A primeira abordagem da interação foi feita neste contexto, empregando-se o chamado ansatz produto [Sk62].

No caso de skyrmions quantizados, a primeira tentativa de se descrever a interação NN foi feita por Jackson, Jackson e Pasquier [Ja85], utilizando também o ansatz produto, que permite conservar o número bariônico e quebrar a Lagrangiana em dois skyrmions independentes e um termo de interação, analogamente ao caso eletrostático. O mesmo trabalho foi reproduzido por Vinh Mau e outros [Vi85]. Posteriormente, Yabu e Ando [Ya85] refizeram esse cálculo numa linguagem mais simples e o estenderam para a interação $N\bar{N}$. O ansatz produto, utilizado por esses autores, consiste numa forma de se aplicar o princípio de superposição aos campos piônicos. Para se perceber isto, basta notar que, ignorando-se momentaneamente a não comutatividade entre as matrizes de Pauli, temos $U = e^{i\tau \cdot (\phi_1 + \phi_2)}$. O ansatz produto gera, assim, um campo piônico correspondente à superposição do campo do primeiro skyrmion com o do segundo. Referindo-se ao ansatz produto, Kälberman [Ka93] afirma: “na aproximação adiabática, que sabe-se valer para o núcleon e para os isóbaros baixos, isto meramente resulta em superposição”. A aproximação ansatz produto deve ser boa para separações grandes, mas não a curtas distâncias, quando a presença de um sóliton pode deformar o outro.

Como demonstraremos oportunamente ao longo deste capítulo, o uso do ansatz produto apresenta três problemas conceituais importantes. O primeiro deles está associado ao fato de ele produzir densidades de Lagrangiana que violam a paridade

G. O segundo, é que ele dá origem a um campo com uma componente azimutal, assimétrica em relação à permuta dos dois núcleons. Finalmente, a extensão do ansatz produto a sistemas com mais de dois núcleons produz resultados fortemente dependentes do ordenamento das coordenadas dos núcleons, fato de difícil interpretação física.

Nas seções seguintes, apresentamos o ansatz produto, de modo a explicitar as suas características básicas. Para tanto, tomamos dois skyrmions na configuração ouriço, em repouso ao longo do eixo z , com os centros separados por uma distância $R=2d$, como mostra a figura 5.1. Assim, os campos individuais são dados por,

$$U_1 = e^{i\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{r}}_1 F_1}, \quad (5.8)$$

$$U_2 = e^{i\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{r}}_2 F_2}, \quad (5.9)$$

onde

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - \mathbf{d} = (\rho \sin\varphi, \rho \cos\varphi, z - d), \quad (5.10)$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r} + \mathbf{d} = (\rho \sin\varphi, \rho \cos\varphi, z + d), \quad (5.11)$$

sendo φ, ρ e z são coordenadas cilíndricas no espaço tridimensional ordinário, que aproveitam a simetria do problema.

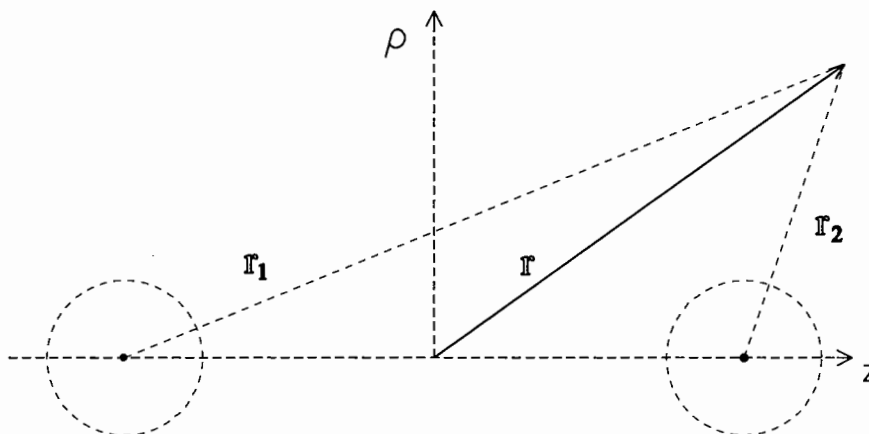


Figura 5.1: Skyrmions separados por uma distância $R=2d$.

5.2. Ansatz Produto

A proposição do ansatz produto como solução para o problema de interação skyrmion-skyrmion veio do próprio Skyrme[Sk62]. Ele sugeriu que o campo de um

estado com número bariônico $B=2$ poderia ser construído a partir das soluções com $B=1$, através do produto:

$$U_P = U_1 U_2 . \quad (5.12)$$

A idéia neste tipo de abordagem, é que o campo U_P seria uma boa aproximação para o campo U , solução exata do problema, por ser unitário e incorporar corretamente as condições de contorno do problema.

5.3. Ansatz Produto: número bariônico

Para efetuar o cálculo do número bariônico associado ao campo U_P , é conveniente reescrevermos \mathcal{B}^0 em termos das forma esquerda L^i , dada pela equação (4.24).

$$\mathcal{B}_P^0 = \frac{-\epsilon_{ijk}}{24\pi^2} \text{Tr} [L^i L^j L^k] . \quad (5.13)$$

onde $L^\mu = U^\dagger \partial^\mu U$.

No caso do ansatz produto, escrevemos

$$\begin{aligned} L_P^\mu &= U_P^\dagger \partial^\mu U_P \\ &= U_2^\dagger U_1^\dagger \partial^\mu (U_1 U_2) = U_2^\dagger U_1^\dagger ((\partial^\mu U_1) U_2 + U_1 (\partial^\mu U_2)) \\ &= U_2^\dagger U_1^\dagger (\partial^\mu U_1) U_2 + U_2^\dagger (\partial^\mu U_2) U_1 = U_2^\dagger (L_1^\mu - R_2^\mu) U_2. \end{aligned} \quad (5.14)$$

onde $R^\mu = U \partial^\mu U^\dagger$.

Usando este resultado, podemos escrever a densidade bariônica como

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_P^0 &= \frac{-1}{24\pi^2} \epsilon_{ijk} \text{Tr} (L_P^i L_P^j L_P^k) \\ &= \frac{-1}{24\pi^2} \epsilon_{ijk} \text{Tr} [U_2^\dagger (L_{(1)}^i - R_{(2)}^i) U_2 U_2^\dagger (L_{(1)}^j - R_{(2)}^j) U_2 U_2^\dagger (L_{(1)}^k - R_{(2)}^k) U_2] \\ &= \frac{-1}{24\pi^2} \epsilon_{ijk} \text{Tr} [(L_{(1)}^i - R_{(2)}^i) (L_{(1)}^j - R_{(2)}^j) (L_{(1)}^k - R_{(2)}^k)] \\ &= \frac{-1}{24\pi^2} \epsilon_{ijk} \text{Tr} [L_{(1)}^i L_{(1)}^j L_{(1)}^k - R_{(2)}^i R_{(2)}^j R_{(2)}^k \\ &\quad - L_{(1)}^i L_{(1)}^j R_{(2)}^k - L_{(1)}^i R_{(2)}^j L_{(1)}^k + L_{(1)}^i R_{(2)}^j R_{(2)}^k \\ &\quad - R_{(2)}^i L_{(1)}^j L_{(1)}^k + R_{(2)}^i L_{(1)}^j R_{(2)}^k + R_{(2)}^i R_{(2)}^j L_{(1)}^k] \\ &= \frac{-1}{24\pi^2} \epsilon_{ijk} \text{Tr} [L_{(1)}^i L_{(1)}^j L_{(1)}^k - R_{(2)}^i R_{(2)}^j R_{(2)}^k + 3 (-L_{(1)}^i L_{(1)}^j R_{(2)}^k + L_{(1)}^i R_{(2)}^j R_{(2)}^k)] \\ &= \mathcal{B}_1^0 + \mathcal{B}_2^0 - \frac{1}{8\pi^2} \epsilon_{ijk} \text{Tr} [-L_{(1)}^i L_{(1)}^j R_{(2)}^k + L_{(1)}^i R_{(2)}^j R_{(2)}^k] . \end{aligned} \quad (5.15)$$

sendo que na segunda passagem os campos U_2 e U_2^\dagger foram eliminados por unitariedade e propriedades do traço. Esta mesmo artifício de simplificação será usado no desenvolvimento da Lagrangiana do ansatz produto.

Esta expressão pode ser simplificada, usando-se a identidade de Maurer-Cartan, dada por [Za86 p.13]:

$$\partial_\mu L_\nu - \partial_\nu L_\mu + [L_\mu, L_\nu] = 0. \quad (5.16)$$

Considerando apenas as componentes espaciais e multiplicando os dois membros por ϵ_{ijk} , obtemos

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} [L_i, L_j] &= -\epsilon_{ijk} [\partial_i L_j - \partial_j L_i] \\ \epsilon_{ijk} L_i L_j &= -\epsilon_{ijk} \partial_i L_j. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Um procedimento análogo para as formas direitas, leva a

$$\epsilon_{ijk} R_i R_k = -\epsilon_{ijk} \partial_i R_k. \quad (5.18)$$

Estes resultados permitem-nos escrever

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} \left(-L_{(1)}^i L_{(1)}^j R_{(2)}^k + L_{(1)}^i R_{(2)}^j R_{(2)}^k \right) &= -\epsilon_{ijk} L_{(1)}^i L_{(1)}^j R_{(2)}^k - \epsilon_{ijk} L_{(1)}^j R_{(2)}^i R_{(2)}^k \\ &= \epsilon_{ijk} \partial^i L_{(1)}^j R_{(2)}^k + \epsilon_{ijk} L_{(1)}^j \partial^i R_{(2)}^k \\ &= \epsilon_{ijk} \partial^i \left(L_{(1)}^j R_{(2)}^k \right). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Voltando à equação da densidade bariônica, temos

$$\mathcal{B}_P^0 = \mathcal{B}_1^0 + \mathcal{B}_2^0 - \frac{1}{8\pi^2} \text{Tr} [\epsilon_{ijk} \partial^i (L_{(1)}^j R_{(2)}^k)]. \quad (5.20)$$

Integrando no espaço tridimensional, obtemos

$$B_P = B_1 + B_2 - \frac{1}{8\pi^2} \text{Tr} \int \nabla \cdot (L_{(1)} \times R_{(2)}) dV, \quad (5.21)$$

onde a integral estende-se sobre um volume infinito.

Usando o teorema de Gauss, podemos escrever

$$B_P = B_1 + B_2 - \frac{1}{8\pi^2} \text{Tr} \int (L_{(1)} \times R_{(2)}) \cdot \hat{n} dS, \quad (5.22)$$

sendo S uma superfície de raio infinito. Admitindo que os campos π_1 e π_2 diminuam suficientemente rápido no infinito, essa integral se anula e obtemos:

$$B_P = B_1 + B_2. \quad (5.23)$$

Este resultado, verificado originalmente por Skyrme[Sk62], mostra que o número bariônico no ansatz produto é aditivo, uma propriedade bem conhecida do produto de mapas[Za86].

5.4. Ansatz Produto: Interação NN quântica

Nesta seção, reproduzimos o cálculo [Ja85,Vi85] do potencial de interação NN realizado a partir do ansatz produto. Para tanto, partimos da Lagrangiana estática do modelo, escrita em termos dos isovetores \mathbf{L} ou \mathbf{R} , dada pela equação (4.39) :

$$\mathcal{L} = -\frac{f_\pi^2}{2} L_{ai}^P L_{ai}^P + \frac{1}{4e^2} (L_{ai}^P L_{aj}^P L_{bi}^P L_{bj}^P - L_{ai}^P L_{ai}^P L_{bj}^P L_{bj}^P) + \frac{f_\pi^2 m_\pi^2}{4} \text{Tr} [U_P + U_P^\dagger - 2]. \quad (5.24)$$

Para obter a energia do sistema skyrmion-skyrmion clássico a partir do ansatz produto, bastaria usar a mesma técnica empregada no cálculo do número bariônico, ou seja, fazer a substituição

$$L_{ai}^P \rightarrow L_{ai}^{(1)} - R_{ai}^{(2)} \quad (5.25)$$

na Lagrangiana acima. Entretanto estamos interessados inicialmente em obter o resultado quantizado e, para tanto, devemos primeiro aplicar uma rotação a cada um dos skyrmions isolados, para depois quantizar seus graus de liberdade, como foi feito anteriormente. Este procedimento corresponde à substituição:

$$L_{ai}^{P(\text{rodado})} \rightarrow D_{ab}^{(1)} L_{bi}^{(1)} - D_{ab}^{(2)} R_{bi}^{(2)}, \quad (5.26)$$

onde $D_{ab}^{(1)} \equiv D_{ab}(A_1)$ e $D_{ab}^{(2)} \equiv D_{ab}(A_2)$ são matrizes de rotação dos skyrmions “1” e “2”, respectivamente. Desta forma os skyrmions podem assumir quaisquer orientações individualmente.

Para os campos U_1 e U_2 , o processo de quantização corresponde ao uso da expressão (4.80). Assim, para o campo U_P , temos:

$$\begin{aligned} U_P^{(\text{rodado})} &= U_1^{(\text{rodado})} U_2^{(\text{rodado})} \\ &= (c_1 + i\tau_a D_{ab}^{(1)} \widehat{r}_{1b} s_1) (c_2 + i\tau_c D_{cf}^{(2)} \widehat{r}_{2f} s_2) \\ &= (c_1 c_2 - D_{ab}^{(1)} D_{af}^{(2)} \widehat{r}_{1b} s_1 \widehat{r}_{2f} s_2) \\ &\quad + i\tau_g (D_{gb}^{(1)} \widehat{r}_{1b} s_1 c_2 + D_{gb}^{(2)} \widehat{r}_{2b} s_2 c_1 - \epsilon_{gac} D_{ab}^{(1)} \widehat{r}_{1b} s_1 D_{cf}^{(2)} \widehat{r}_{2f} s_2) \end{aligned} \quad (5.27)$$

onde $s_i = \sin F_i$ e $c_i = \cos F_i$.

Efetuada explicitamente a substituição de (5.26) e (5.27) em (5.24) e ajustando os índices, temos:

$$\mathcal{L} = \frac{-f_\pi^2}{2} (D_{ab}^{(1)} L_{bi}^{(1)} - D_{ab}^{(2)} R_{bi}^{(2)}) (D_{ac}^{(1)} L_{ci}^{(1)} - D_{ac}^{(2)} R_{ci}^{(2)})$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4e^2} \left[\left(D_{ab}^{(1)} L_{bi}^{(1)} - D_{ab}^{(2)} R_{bi}^{(2)} \right) \left(D_{ac}^{(1)} L_{cj}^{(1)} - D_{ac}^{(2)} R_{cj}^{(2)} \right) \times \right. \\
& \quad \left(D_{de}^{(1)} L_{ei}^{(1)} - D_{de}^{(2)} R_{ei}^{(2)} \right) \left(D_{df}^{(1)} L_{fj}^{(1)} - D_{df}^{(2)} R_{fj}^{(2)} \right) \\
& \quad - \left(D_{ab}^{(1)} L_{bi}^{(1)} - D_{ab}^{(2)} R_{bi}^{(2)} \right) \left(D_{ac}^{(1)} L_{ci}^{(1)} - D_{ac}^{(2)} R_{ci}^{(2)} \right) \times \\
& \quad \left. \left(D_{de}^{(1)} L_{ej}^{(1)} - D_{de}^{(2)} R_{ej}^{(2)} \right) \left(D_{df}^{(1)} L_{fj}^{(1)} - D_{df}^{(2)} R_{fj}^{(2)} \right) \right] \\
& + f_\pi^2 m_\pi^2 [(c_1 c_2 - 1) - D_{ab}^{(1)} D_{ac}^{(2)} \widehat{r}_{1b} \widehat{r}_{2c} s_1 s_2]
\end{aligned}$$

Multiplicando os parênteses dois a dois e empregando a relação usada em [WW92 p.694],

$$D_{ab}^{(1)} D_{ac}^{(2)} = D_{ab}(A_1) D_{ac}(A_2) = D_{ba}(A_1^\dagger) D_{ac}(A_2) = D_{bc}(A_1^\dagger A_2) = D_{bc}(C) \quad (5.28)$$

onde $C = A_1^\dagger A_2$ descreve a orientação relativa entre os skyrmions, temos, omitindo os índices (1) para L e (2) para R:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -\frac{f_\pi^2}{2} [L_{bi} L_{bi} + R_{bi} R_{bi} - 2D_{bc} L_{bi} R_{ci}] \\
& + \frac{1}{4e^2} [(L_{bi} L_{bj} + R_{bi} R_{bj} - 2D_{bc} L_{bi} R_{cj}) \times (L_{ei} L_{ej} + R_{ei} R_{ej} - 2D_{ef} L_{ei} R_{fj}) \\
& - (L_{bi} L_{bi} + R_{bi} R_{bi} - 2D_{bc} L_{bi} R_{ci}) \times (L_{ej} L_{ej} + R_{ej} R_{ej} - 2D_{ef} L_{ej} R_{fj})] \\
& + f_\pi^2 m_\pi^2 [(c_x c_y - 1) - D_{bc} \widehat{r}_{1b} \widehat{r}_{2c} s_1 s_2]. \quad (5.29)
\end{aligned}$$

O desenvolvimento desta expressão leva a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -\frac{f_\pi^2}{2} [L_{bi} L_{bi} + R_{bi} R_{bi} - 2D_{bc} L_{bi} R_{ci}] \\
& + \frac{1}{4e^2} \{ [(L_{bi} L_{bj} + R_{bi} R_{bj})(L_{ei} L_{ej} + R_{ei} R_{ej}) - (L_{bi} L_{bi} + R_{bi} R_{bi})(L_{ej} L_{ej} + R_{ej} R_{ej})] \\
& - 2D_{bc} [L_{bi} R_{cj} (L_{ei} L_{ej} + R_{ei} R_{ej}) - L_{bi} R_{ci} (L_{ej} L_{ej} + R_{ej} R_{ej})] \\
& + 4D_{bc} D_{ef} (L_{bi} R_{cj} L_{ei} R_{fj} - L_{bi} R_{ci} L_{ej} R_{fj}) \} \\
& + f_\pi^2 m_\pi^2 [(c_1 c_2 - 1) - D_{bc} \widehat{r}_{1b} \widehat{r}_{2c} s_1 s_2]. \quad (5.30)
\end{aligned}$$

Uma característica importante desta expressão é que ela contém termos com nenhum, um e dois elementos da matriz \mathbf{D} , que representam a parte quântica do potencial e incorporam os efeitos devidos a spin e isospin. Os termos contendo dois elementos da matrizes \mathbf{D} podem ser simplificados usando-se o resultado:

$$D_{ab}(C) D_{cd}(C) = \frac{1}{3} \delta_{ac} \delta_{bd} + \frac{1}{2} \epsilon_{ace} \epsilon_{bdf} D_{ef}(C) + \sum_{m, m'} \mathcal{C}_{abcd}^{m, m'} \mathcal{D}_{m, m'}^{(2)}(C), \quad (5.31)$$

que vem do fato de que $\mathbf{D}(C)$ pode ser expresso em termos de funções \mathcal{D} de Wigner com $J=1$. Os detalhes dos coeficientes $\mathcal{C}_{abcd}^{m,m'}$ não são importantes para o cálculo da projeção do potencial do sistema, $\langle N'_x N'_y | V_{NN} | N_x N_y \rangle$, já que:

$$\mathcal{D}_{m,m'}^{(j)}(C) = \mathcal{D}_{m,m'}^{(j)}(A_1^\dagger A_2) = \sum_{m''} (-1)^{m''-m} \mathcal{D}_{-m''-m}^{(j)}(A_1) \mathcal{D}_{m''m'}^{(j)}(A_2) \quad (5.32)$$

e

$$\langle N | \mathcal{D}_{m,m'}^{(2)}(A) | N \rangle \propto \int dA \mathcal{D}_{-i's'}^{(1/2)}(A) \mathcal{D}_{mm'}^{(2)}(A) \mathcal{D}_{-is}^{(1/2)}(A) = 0 \quad (5.33)$$

onde $dA = d\beta \sin\beta d\alpha d\gamma$, $0 \leq \beta \leq \pi$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ e $0 \leq \gamma \leq 2\pi$.

Termos proporcionais a $\mathcal{D}^{(2)}(C)$ em V_{NN} correspondem a uma troca de isospin-2 que não pode ocorrer entre núcleons.

Usando a eq. (5.31) e eliminando os termos de isospin-2, temos:

$$E_P = M_{H1} + M_{H2} + V_{NN} = 2M_H + V_{NN} \quad (5.34)$$

onde $E_P = -\int d^3\mathbf{r} \mathcal{L}$ é a energia total do sistema, M_H é a massa de um skyrmion na configuração hedgehog e

$$V_{NN} = V_C + D_{ab}(C) V_{ST}^{ab} \quad (5.35)$$

sendo

$$V_C = \int d^3\mathbf{r} \left\{ \frac{1}{3e^2} [(L_{ai})^2 (R_{bj})^2 - L_{ai} L_{aj} R_{bi} R_{bj}] - m_\pi^2 f_\pi^2 (1 - c_1)(1 - c_2) \right\} \quad (5.36)$$

e

$$\begin{aligned} V_{ST}^{ab} = & \int d^3\mathbf{r} \left\{ -f_\pi^2 L_{ai} R_{bi} + \frac{1}{e^2} R_{bj} [L_{ci} L_{ai} L_{cj} - L_{aj} (L_{ci})^2] \right. \\ & + \frac{1}{e^2} L_{ai} [R_{ci} R_{bj} R_{cj} - R_{bi} (R_{cj})^2] \\ & \left. + \frac{3}{4e^2} (\epsilon_{mna} L_{mi} L_{nj}) (\epsilon_{rsb} R_{ri} R_{sj}) + m_\pi^2 f_\pi^2 s_1 s_2 \widehat{r}_{1a} \widehat{r}_{2b} \right\} \quad (5.37) \end{aligned}$$

onde omitimos os índices na forma $L=L^{(1)}$ e $R=R^{(2)}$, ou seja, L refere-se ao skyrmion (1) e R refere-se ao skyrmion (2)¹.

¹Esses resultados diferem dos obtidos por [WW92 p.694] pois L e R foram definidos de outra forma. Nossa convenção $L_\mu = U^\dagger \partial_\mu U$ e $R_\mu = U \partial_\mu U^\dagger$ é a adotada por [Ad87], [Za86], [Pa86] e [Bh88]. Em [WW92] usou-se a convenção $L_\mu = -\frac{i}{2} \text{Tr}[\tau_a \partial_\mu U U^\dagger]$ e $R_\mu = -\frac{i}{2} \text{Tr}[\tau_a U^\dagger \partial_\mu U]$. Assim para chegar ao mesmo resultado de [WW92] basta substituir na nossa expressão $R \rightarrow -L$ e $L \rightarrow R$.

Com a ajuda dos resultados do apêndice C, explicitamos:

$$V_C = \frac{2f_\pi}{e} 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{\infty} \rho d\rho \left\{ \frac{1}{3} [(F_1'^2 + t_1^2)(F_2'^2 + t_2^2) + 2t_1^2 t_2^2 - (F_1'^2 - t_1^2)(F_2'^2 - t_2^2)(\widehat{r}_1 \cdot \widehat{r}_2)^2] - \frac{\beta^2}{4} (1 - c_1)(1 - c_2) \right\} \quad (5.38)$$

onde $\beta = m_\pi/2ef_\pi$, $t_1 = \frac{\text{sen}F_1}{r_1}$, $t_2 = \frac{\text{sen}F_2}{r_2}$.

Usando os produtos triplos do apêndice C e reunindo os vários termos, obtemos:

$$V_{ST}^{ab} = \int d^3\mathbf{1} \left\{ [-f_\pi^2 - \frac{1}{e^2}(F_1'^2 + t_1^2) - \frac{1}{e^2}(F_2'^2 + t_2^2)] L_{ai} R_{bi} + \frac{1}{e^2} F_1' (F_1'^2 - t_1^2) R_{bi} \widehat{r}_{1a} \widehat{r}_{1i} + \frac{1}{e^2} (-F_2') (F_2'^2 - t_2^2) L_{ai} \widehat{r}_{1b} \widehat{r}_{2i} + \frac{3}{4e^2} (\epsilon_{mna} L_{mi} L_{nj}) (\epsilon_{rsb} R_{ri} R_{sj}) + m_\pi^2 f_\pi^2 \widehat{r}_{1a} \widehat{r}_{2b} s_1 s_2 \right\}. \quad (5.39)$$

Recuperando ainda os resultados do apêndice C e definindo $\widehat{1} \equiv \widehat{r}_1$ e $\widehat{2} \equiv \widehat{r}_2$ temos

$$\begin{aligned} V_{ST}^{ab} = & \int d^3\mathbf{r} \left\{ -[f_\pi^2 + \frac{1}{e^2}(F_1'^2 + t_1^2 + F_2'^2 + t_2^2)] \times \right. \\ & [s_1 t_1 s_2 t_2 (\widehat{1} \cdot \widehat{2}) (\delta_{ab} - \widehat{1}_b \widehat{2}_a) - t_1 c_1 (F_2' - c_2 t_2) \delta_{ab} - t_1 c_1 (F_2' - c_2 t_2) \widehat{2}_a \widehat{2}_b \\ & - (F_1' - c_1 t_1) c_2 t_2 \widehat{1}_a \widehat{1}_b - (F_1' - c_1 t_1) (F_2' - c_2 t_2) (\widehat{1} \cdot \widehat{2}) \widehat{1}_a \widehat{2}_b + \underline{\epsilon_{abj} \widehat{1}_j s_1 t_1 c_2 t_2} \\ & - \underline{(\widehat{1} \times \widehat{2})_a \widehat{2}_b s_1 t_1 (F_2' - c_2 t_2)} - \underline{t_1 c_1 t_2 s_2 \epsilon_{bak} \widehat{2}_k} - \underline{(F_1' - c_1 t_1) t_2 s_2 (\widehat{1} \times \widehat{2})_b \widehat{1}_a}] \\ & + \frac{1}{e^2} F_1' (F_1'^2 - t_1^2) [-\underline{(\widehat{1} \times \widehat{2})_b \widehat{1}_a s_2 t_2} - t_2 c_2 \widehat{1}_a \widehat{1}_b - (F_2' - c_2 t_2) (\widehat{1} \cdot \widehat{2}) \widehat{1}_a \widehat{2}_b] \\ & + \frac{1}{e^2} (-F_2') (F_2'^2 - t_2^2) [\underline{(\widehat{1} \times \widehat{2})_a \widehat{2}_b s_1 t_1} + t_1 c_1 \widehat{2}_b \widehat{2}_a + (F_1' - c_1 t_1) (\widehat{1} \cdot \widehat{2}) \widehat{1}_a \widehat{2}_b] \\ & + \frac{3.2}{4e^2} [\delta_{ab} t_1^2 c_1^2 t_2^2 c_2^2 + s_2^2 t_2^2 t_1^2 c_1^2 \widehat{2}_a \widehat{2}_b - \underline{F_2' s_2 t_2 t_1^2 c_1^2 \epsilon_{abj} \widehat{2}_j} \\ & + (F_2' - c_2 t_2) t_2 c_2 t_1^2 c_1^2 (\delta_{ab} - \widehat{2}_a \widehat{2}_b) + s_1^2 t_1^2 t_2^2 c_2^2 \widehat{1}_a \widehat{1}_b + s_1^2 t_1^2 s_2^2 t_2^2 \widehat{1}_a \widehat{1}_b (\widehat{1} \cdot \widehat{2}) \\ & - \underline{F_2' s_2 t_2 s_1^2 t_1^2 (\widehat{2} \times \widehat{1})_b \widehat{1}_a} + (F_2' - t_2 c_2) s_1^2 t_1^2 (\widehat{1}_a \widehat{1}_b - \widehat{1}_a \widehat{2}_b (\widehat{1} \cdot \widehat{2})) \\ & + F_1' s_1 t_1 t_2^2 c_2^2 \epsilon_{baj} \widehat{1}_j + \underline{F_1' s_1 t_1 s_2^2 t_2^2 (\widehat{1} \times \widehat{2})_a \widehat{2}_b} - F_2' s_2 t_2 F_1' s_1 t_1 (\delta_{ab} \widehat{1} \cdot \widehat{2} - \widehat{1}_b \widehat{2}_a) \\ & + \underline{F_1' s_1 t_1 (F_2' - t_2 c_2) t_2 c_2 (\epsilon_{bas} \widehat{2}_s (\widehat{1} \cdot \widehat{2}) - (\widehat{1} \times \widehat{2})_b \widehat{2}_a)} \\ & + (F_1' - t_1 c_1) t_1 c_1 t_2^2 c_2^2 (\delta_{ab} - \widehat{1}_a \widehat{1}_b) + (F_1' - t_1 c_1) t_1 c_1 s_2^2 t_2^2 (\widehat{2}_a \widehat{2}_b - \widehat{1}_a \widehat{2}_b (\widehat{1} \cdot \widehat{2})) \\ & - \underline{(F_1' - t_1 c_1) t_1 c_1 F_2' s_2 t_2 (\epsilon_{abn} \widehat{1}_n (\widehat{1} \cdot \widehat{2}) + (\widehat{1} \times \widehat{2})_a \widehat{1}_b)} \\ & + (F_1' - t_1 c_1) t_1 c_1 (F_2' - c_2 t_2) t_2 c_2 (\delta_{ab} (\widehat{1} \cdot \widehat{2})^2 - \widehat{1}_b \widehat{2}_a (\widehat{1} \cdot \widehat{2}) + (\widehat{2} \times \widehat{1})_a (\widehat{2} \times \widehat{1})_b)] \\ & \left. + m_\pi^2 f_\pi^2 s_1 s_2 \widehat{1}_a \widehat{2}_b \right\} \quad (5.40) \end{aligned}$$

Os termos sublinhados se anulam após integração angular.

Usando as relações de integração angular do apêndice C, o potencial V_{ST}^{ab} pode ser desmembrado tensorialmente na forma

$$V_{ST}^{ab} = \bar{V}_{SS}\delta_{ab} + \bar{V}_T [3\hat{r}_a\hat{r}_b - \delta_{ab}]. \quad (5.41)$$

Projetando a matriz de rotação nos estados dos núcleons[Ad87][WW92]:

$$\begin{aligned} \langle N'_1 N'_2 | D_{ab}(C) | N_1 N_2 \rangle &= \langle N'_1 | D_{ca}^{(1)} | N_1 \rangle \langle N'_2 | D_{cb}^{(2)} | N_2 \rangle \\ &= -\frac{1}{3} \langle N'_1 | \tau_c^{(1)} \sigma_a^{(1)} | N_1 \rangle \times -\frac{1}{3} \langle N'_2 | \tau_c^{(2)} \sigma_b^{(2)} | N_2 \rangle \\ &= \frac{1}{9} (\boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)}) \sigma_a^{(1)} \sigma_b^{(2)} \end{aligned} \quad (5.42)$$

que tem embutida a quantização do modelo de Skyrme. Em outras palavras através desta relação de projeção e proibindo troca de isospin-2 que passamos do modelo com rotação clássica para o quântico.

Reunindo os resultados e substituindo em (5.35), a expressão para o potencial fica:

$$V_{NN} = V_C + \boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)} [\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)} V_{SS} + S_{12}(\hat{r}) V_T] \quad (5.43)$$

onde $V_{SS} = \bar{V}_{SS}/9$, $V_T = \bar{V}_T/9$ e $S_{12}(\hat{r}) = 3\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \hat{r} \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot \hat{r} - \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)}$ é o operador tensor.

Explicitamente,

$$\begin{aligned} V_{SS} &= \frac{1}{9} \frac{2\pi}{3} \int_0^\infty \rho d\rho \int_{-\infty}^\infty dz \times \\ &\quad \{ -[f_\pi^2 + \frac{1}{e^2}(F_1'^2 + t_1^2 + F_2'^2 + t_2^2)] \times \\ &\quad [2s_1 t_1 s_2 t_2 \alpha - 3t_1 c_1 t_2 c_2 - t_1 c_1 F_2' - t_2 c_2 F_1' - (F_1' - c_1 t_1)(F_2' - c_2 t_2)\alpha^2] \\ &\quad - \frac{1}{e^2} F_1' (F_1'^2 - t_1^2) [F_2'^2 \alpha^2 - (1 - \alpha^2)c_2 t_2] \\ &\quad - \frac{1}{e^2} F_2' (F_2'^2 - t_2^2) [F_1'^2 \alpha^2 - (1 - \alpha^2)c_1 t_1] \\ &\quad + \frac{3}{2e^2} t_1 t_2 [3t_1 t_2 c_1^2 c_2^2 + t_1 t_2 s_2^2 c_1^2 + t_1 t_2 s_1^2 c_2^2 + t_1 t_2 s_1^2 s_2^2 \alpha^2 \\ &\quad + 2(F_1' - c_1 t_1)c_1 t_2 c_2^2 + 2(F_2' - c_2 t_2)c_2 t_1 c_1^2 - 2F_2' s_2 F_1' s_1 \alpha \\ &\quad + (F_1' - c_1 t_1)c_1 s_2^2 t_2 (1 - \alpha^2) + (F_2' - c_2 t_2)c_2 s_1^2 t_1 (1 - \alpha^2) \\ &\quad + (F_1' - c_1 t_1)c_1 (F_2' - c_2 t_2)c_2 (2\alpha^2 + \frac{4d^2 \rho^2}{r_1^2 r_2^2})] \\ &\quad + m_\pi^2 f_\pi^2 s_1 s_2 \alpha \} \end{aligned} \quad (5.44)$$

e

$$\begin{aligned}
V_T = & \frac{1}{9} \frac{2\pi}{3} \int_0^\infty \rho d\rho \int_{-\infty}^\infty dz \times \\
& \left\{ -[f_\pi^2 + \frac{1}{e^2}(F_1'^2 + t_1^2 + F_2'^2 + t_2^2)] \times \right. \\
& \quad \left[-t_1 c_1 (F_2' - c_2 t_2) \left(1 - \frac{3\rho^2}{2r_2^2}\right) - t_2 c_2 (F_1' - c_1 t_1) \left(1 - \frac{3\rho^2}{2r_1^2}\right) \right. \\
& \quad \left. - s_1 t_1 s_2 t_2 \left(\alpha - \frac{3\rho^2}{2r_1 r_2}\right) - (F_1' - c_1 t_1)(F_2' - c_2 t_2) \alpha \left(\alpha - \frac{\rho^2}{r_1 r_2}\right) \right] \\
& - \frac{1}{e^2} F_1' (F_1'^2 - t_1^2) \left[t_2 c_2 \left(1 - \frac{3\rho^2}{2r_1^2}\right) + (F_2' - c_2 t_2) \alpha \left(\alpha - \frac{3\rho^2}{2r_1 r_2}\right) \right] \\
& - \frac{1}{e^2} F_2' (F_2'^2 - t_2^2) \left[t_1 c_1 \left(1 - \frac{3\rho^2}{2r_2^2}\right) + (F_1' - c_1 t_1) \alpha \left(\alpha - \frac{3\rho^2}{2r_1 r_2}\right) \right] \\
& + \frac{3}{2e^2} t_1 t_2 \left[t_1 t_2 s_2^2 c_1^2 \left(1 - \frac{3\rho^2}{2r_2^2}\right) + t_1 t_2 s_1^2 c_2^2 \left(1 - \frac{3\rho^2}{2r_1^2}\right) + t_1 t_2 s_1^2 s_2^2 \alpha \left(\alpha - \frac{3\rho^2}{2r_1 r_2}\right) \right. \\
& \quad - (F_2' - c_2 t_2) c_2 t_1 c_1^2 \alpha \left(\alpha - \frac{3\rho^2}{2r_2^2}\right) - (F_1' - c_1 t_1) c_1 t_2 c_2^2 \left(1 - \frac{3\rho^2}{2r_1^2}\right) \\
& \quad + (F_2' - c_2 t_2) c_2 t_1 s_1^2 \left(1 - \frac{3\rho^2}{2r_1^2} - \alpha \left(\alpha - \frac{3\rho^2}{2r_1 r_2}\right)\right) + F_1' s_1 F_2' s_2 \left(\alpha - \frac{3\rho^2}{2r_1 r_2}\right) \\
& \quad + (F_1' - c_1 t_1) c_1 t_1 s_2^2 \left(1 - \frac{3\rho^2}{2r_2^2} - \alpha \left(\alpha - \frac{3\rho^2}{2r_1 r_2}\right)\right) \\
& \quad \left. - (F_1' - c_1 t_1) c_1 (F_2' - c_2 t_2) c_2 \left(\alpha \left(\alpha - \frac{3\rho^2}{2r_1 r_2}\right) + \frac{2d^2 \rho^2}{r_1^2 r_2^2}\right) \right] \\
& \left. + m_\pi^2 f_\pi^2 s_1 s_2 \left(\alpha - \frac{3\rho^2}{2r_1 r_2}\right) \right\} \tag{5.45}
\end{aligned}$$

onde $\alpha = \widehat{r}_1 \cdot \widehat{r}_2$.

Para expressar as integrais de V_{SS} e V_T em termos da variável adimensional u basta multiplicar tudo por $\frac{2f_\pi}{e}$ e fazer $f_\pi \rightarrow \frac{1}{2}$, $e \rightarrow 1$ e $m_\pi \rightarrow \beta$.

Os resultados obtidos nesta seção indicam que o modelo de Skyrme dá origem a um potencial de interação contendo termos central, spin-spin e tensor. Em princípio, esse potencial descreve as interações para quaisquer valores de distância relativa entre os skýrmions. No caso de distâncias grandes, é razoável esperar que os resultados válidos para núcleons puntiformes sejam recuperados.

Para núcleons puntiformes, o termo de longo alcance do potencial é gerado pela troca de um pión- V_{NN}^{OPEP} (OPEP=one pión exchange potential)[Mac87] e

dado por ($r \neq 0$):

$$V_{NN}^{OPEP} = \frac{1}{3} \frac{m_\pi}{4\pi} \left(\frac{g_{\pi NN} m_\pi}{2M_N} \right)^2 \boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)} \left[\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)} + S_{12}(\hat{r}) \left(\frac{3}{(m_\pi r)^2} + \frac{3}{m_\pi r} + 1 \right) \right] \frac{e^{-m_\pi r}}{m_\pi r} \quad (5.46)$$

No modelo de Skyrme, por outro lado, a constante de acoplamento é dada pela eq. (4.135)

$$g_{\pi NN} = \frac{4\pi}{3e^2} \frac{M_N}{2f_\pi} C. \quad (5.47)$$

Por isso, podemos esperar que, assintoticamente, com $d \rightarrow \infty$, tenhamos:

$$V_{SS} = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi m_\pi}{3e^2 f_\pi} C \right)^2 \frac{m_\pi}{4\pi} \frac{e^{-m_\pi r}}{m_\pi r} \quad (5.48)$$

$$V_T = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi m_\pi}{3e^2 f_\pi} C \right)^2 \frac{m_\pi}{4\pi} \left(1 + \frac{3}{m_\pi r} + \frac{3}{(m_\pi r)^2} \right) \frac{e^{-m_\pi r}}{m_\pi r} \quad (5.49)$$

Na figuras 5.2, 5.3 e 5.4 mostramos as funções de perfil $V_C(2d)$, $V_{SS}(2d)$ e $V_T(2d)$, dadas pelas eqs. (5.38) (5.44) e (5.45) para o caso de píons massivos, para os conjuntos de parâmetros $f_\pi = 54$ MeV e $e = 4,84$ e $f_\pi = 93$ MeV e $e = 4,0$.

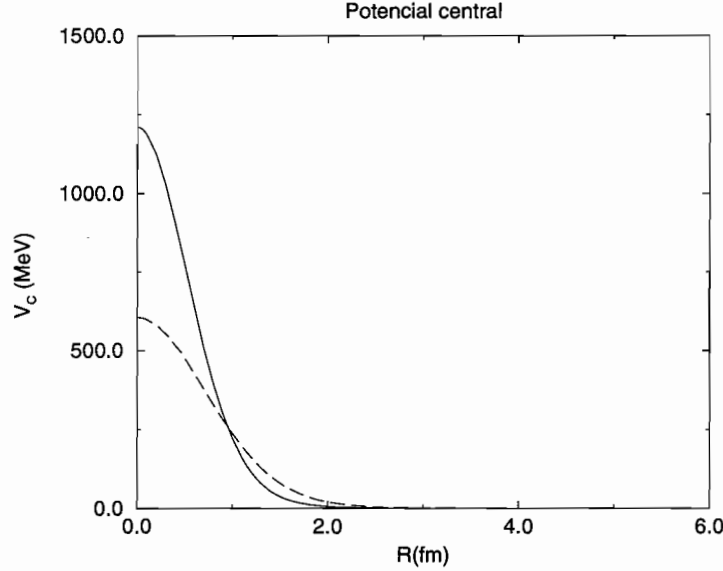


Figura 5.2: Potencial central usando o ansatz produto para os parâmetros $f_\pi = 54$ MeV, $e = 4,84$ (tracejado) e $f_\pi = 93$ MeV, $e = 4,0$ (linha contínua).

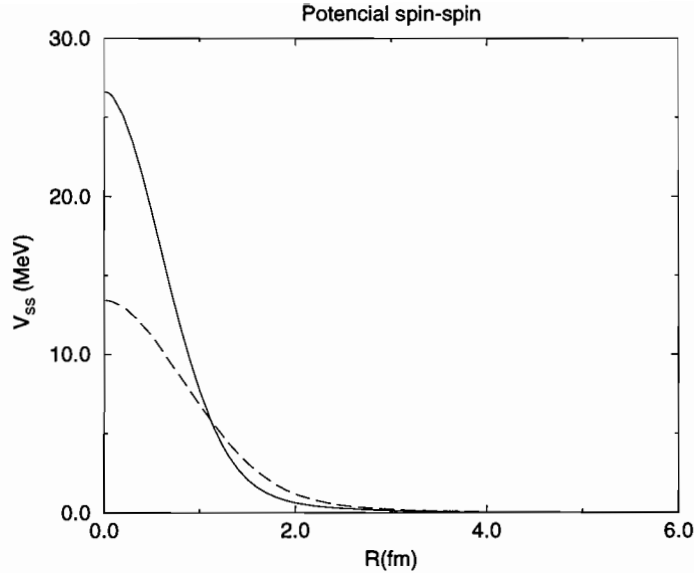


Figura 5.3: Potencial spin-spin usando o ansatz produto para conjuntos de parâmetros $f_\pi = 54\text{MeV}$, $e = 4,84$ (tracejado) e $f_\pi = 93\text{MeV}$, $e = 4,0$ (linha contínua).

Inspecionando a figura 5.2, notamos que o ansatz produto dá origem a uma interação central que é repulsiva. Este resultado está em desacordo com as previsões dos potenciais fenomenológicos existentes atualmente como por exemplo os potenciais de Paris[Lac80], Argonne[Lag81][Wir84] e Bonn[Mac87], principalmente no que diz respeito à região intermediária, que deve ser atrativa para explicar a saturação da matéria nuclear e as defasagens de onda 1S_0 no espalhamento NN. Porém na solução numérica exata[WW91] aparece um potencial central atrativo, revelando a enorme capacidade de previsão do modelo.

As figuras 5.3 e 5.4, por outro lado, mostram os potenciais spin-spin e tensor. Em ambos os casos, para grandes distâncias, as curvas convergem para as correspondentes ao OPEP, como verificado. Para distâncias pequenas, por outro lado, ambas as curvas são suaves e limitadas, ao contrário do que ocorre no caso de partículas puntiformes. Esse resultado indica que, previsivelmente, o tamanho finito do skyrmion elimina as divergências na origem das interações de partículas puntiformes.

Nas figuras 5.5, 5.6 e 5.7 apresentamos o potencial obtido a partir do ansatz produto, das soluções numéricas exatas e o potencial de Paris[WW91] para V_C , V_{SS} e V_T respectivamente.

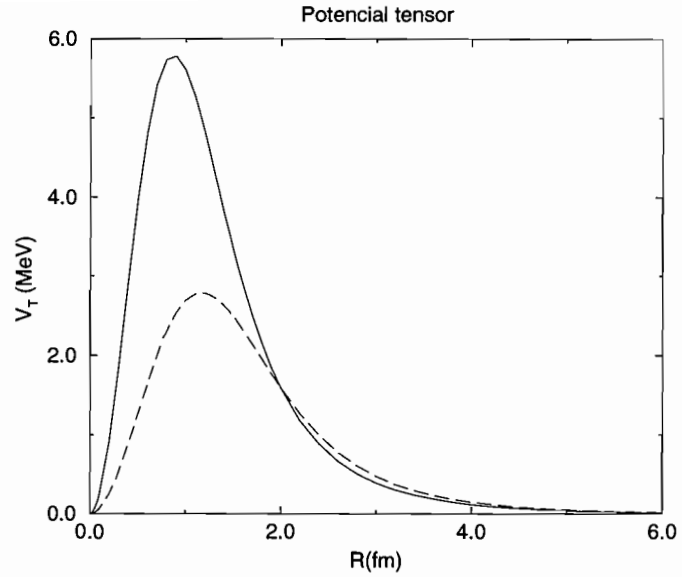


Figura 5.4: Potencial tensor usando o ansatz produto, para os parâmetros $f_\pi = 54\text{MeV}$, $e = 4,84$ (tracejado) e $f_\pi = 93\text{MeV}$, $e = 4,00$ (linha contínua).

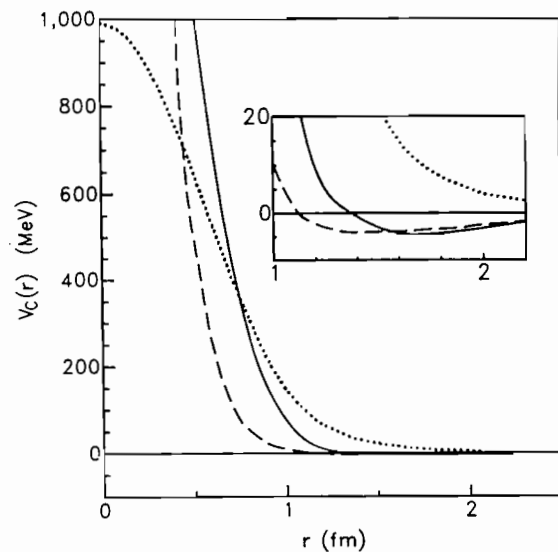


Fig. 5.5 A parte central da interação núcleon-núcleon $V_C(r)$ para o cálculo exato [WW91] (curva sólida), o potencial de Paris [Lac80] (linha tracejada), e o ansatz produto (linha pontilhada). $f_\pi = 93 \text{ MeV}$, $c = 4,76$

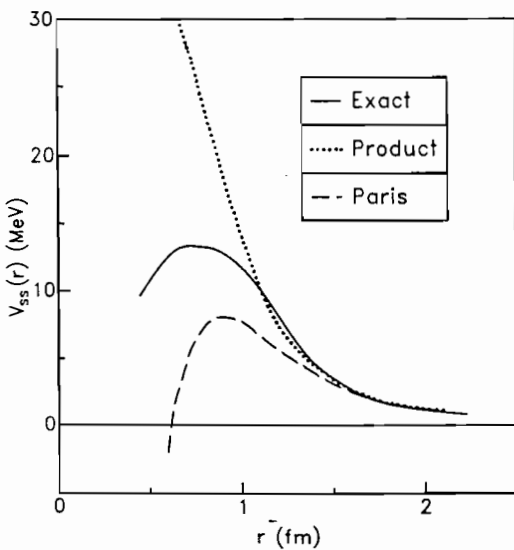


Fig 5.6 A parte spin-spin do potencial núcleon-núcleon $V_{SS}(r)$ com as curvas conforme a Fig 5.5.

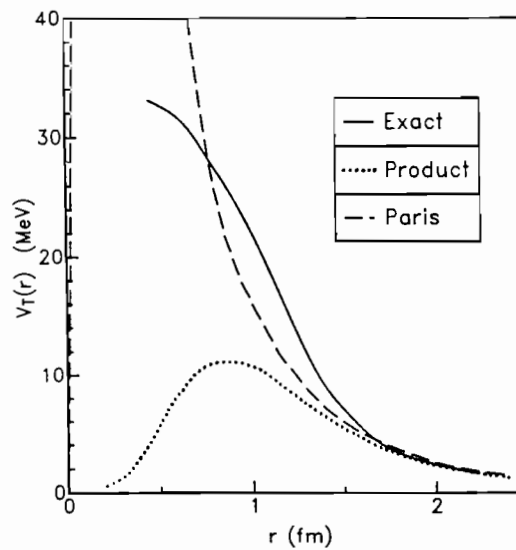


Fig 5.7 A parte tensor do potencial núcleon-núcleon $V_T(r)$ com as curvas conforme a Fig.5.5.

5.5. Ansatz Produto: Violação de Simetrias

O ansatz produto foi originalmente proposto pelo próprio Skyrme[Sk62]. Sua virtude é a aditividade do número bariônico como mostrado na seção 5.3. Entretanto, ao admitir que o Skyrmion é feito a partir de uma “pasta” mesônica, esta tem de satisfazer as simetrias e as propriedades dos píons. Nesta seção apresentamos quatro argumentos, que sugerem que uma formulação baseada no ansatz produto não é livre de problemas. Esses quatro argumentos dizem respeito à paridade G , à existência de uma componente azimutal, a problemas com a simetria quiral e à dependência dos resultados com a ordem em que os núcleon são considerados.

A paridade G é uma propriedade típica das interações de píons. A interação forte de hádrons não estranhos é invariante sob transformação da paridade G , $G = C \exp(i\pi I_2)$, onde C é o operador conjugação de carga e I_2 é a componente y de isospin. Agindo sobre o campo do pión temos:

$$G |\pi\rangle = -|\pi\rangle.$$

O pión tem, portanto, paridade G negativa. Um sistema de n píons tem paridade G igual a $(-1)^n$. A conservação da paridade G prevê que as interações puramente piônicas só podem ocorrer envolvendo vértices com um número par de píons. Por exemplo, dois píons livres não podem interagir e gerar três píons. Assim, numa densidade de Lagrangiana de interação que conserve paridade G , devemos ter apenas termos com números pares de campos de píons. É importante ressaltar que essa propriedade deve ser respeitada localmente, como é característico na física de partículas.

Um primeiro do ansatz produto é que ele dá origem a uma Lagrangiana de interação entre dois núcleons em que há termos que correspondem a um número ímpar de píons, como indicam os elementos sublinhados na expressão (5.40). *Esses termos violam, portanto, a paridade G . Mas essa violação é pontual, ou seja, após integração sobre o volume estes termos se anulam.*

O segundo problema do ansatz produto é a existência de uma componente azimutal na variável dinâmica. Se explicitarmos o campo U_P em termos dos campos piônicos, teremos:

$$\begin{aligned} U_P &= U_1 U_2 = e^{i\tau \cdot \hat{\pi}_1 F_1} e^{i\tau \cdot \hat{\pi}_2 F_2} \\ &= \frac{1}{f_\pi^2} [\sigma_1 \sigma_2 - \underline{\pi}_1 \cdot \underline{\pi}_2] + i\tau \cdot (-\underline{\pi}_1 \times \underline{\pi}_2 + \sigma_1 \underline{\pi}_2 + \sigma_2 \underline{\pi}_1) \end{aligned} \quad (5.50)$$

onde $\sigma_1 = \sqrt{f_\pi^2 - \underline{\pi}_1^2}$ e $\sigma_2 = \sqrt{f_\pi^2 - \underline{\pi}_2^2}$. Esse resultado equivale a dizer que a variável dinâmica do problema é

$$\underline{\pi} = -\underline{\pi}_1 \times \underline{\pi}_2 + \sigma_1 \underline{\pi}_2 + \sigma_2 \underline{\pi}_1. \quad (5.51)$$

O problema com esta variável é que o primeiro termo tem a paridade G positiva e corresponde a uma componente azimutal que pode ser invertida pela troca $U_1U_2 \rightarrow U_2U_1$. Assim, existe uma arbitrariedade na definição da variável dinâmica, o que contradiz o fato de estarmos tratando de um sistema formado por dois núcleons idênticos. Esse problema já foi detectado anteriormente por Nyman e Riska[Ny86], que propuseram o uso da combinação simetrizada

$$U_{PS}(r_1, r_2; r) = \frac{1}{2N}(U_1U_2 + U_2U_1), \quad (5.52)$$

onde

$$N = [1 - s_1^2 s_2^2 (1 - \widehat{r}_1 \cdot \widehat{r}_2)]^{1/2}. \quad (5.53)$$

O fator N de normalização tem de ser introduzido para garantir $U^\dagger U = 1$ em qualquer ponto do espaço. Esse fator complica o cálculo consideravelmente e, na prática, só cálculos para $R > 1,5\text{fm}$ foram feitos[Ny86], onde as derivadas de N podem ser presumidamente ignoradas[Ei88].

Outra possibilidade é o ansatz simetrizado proposto por Nathanson e Eisenberg [Nat93] na forma

$$U = e^{i\tau \cdot (\widehat{\pi}_1 F_1 + \widehat{\pi}_2 F_2)}.$$

Entretanto este último ansatz se mostrou ainda mais repulsivo que o ansatz produto e não conserva carga bariônica para curtas distâncias. A carga bariônica não é conservada pois a função de perfil é descontínua sobre os centros dos skyrmions, o que acarreta “fuga de carga bariônica”². Isto pode ser mais facilmente compreendido no caso unidimensional com carga topológica $q = 1$. Imaginemos o mapeamento *contínuo* de um eixo infinito $x(-\infty, +\infty)$ para uma circunferência varrida por um ângulo $\varphi(0, 2\pi)$. A carga topológica será

$$q = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi}{dx} dx = \frac{1}{2\pi} [\varphi(+\infty) - \varphi(-\infty)] = \frac{1}{2\pi} [2\pi - 0] = 1. \quad (5.54)$$

Se φ é descontínua em um ponto a então

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi}{dx} dx = \frac{1}{2\pi} [\varphi(+\infty) - \varphi(a_+) + \varphi(a_-) - \varphi(-\infty)] \\ &= 1 - \frac{\varphi(a_+) - \varphi(a_-)}{2\pi} \end{aligned} \quad (5.55)$$

e se $\varphi(a_+) > \varphi(a_-)$ teremos $q < 1$, daí a fuga de carga topológica.

²Isto nos foi chamado à atenção pelo Prof. J.M.Eisenberg no encontro de Física de Hádrons em Mangaratiba, RJ, 1996.

O terceiro problema associado ao ansatz produto vem do fato que, para dois skyrmions, a variável dinâmica leva a uma forma esquerda dada por

$$\begin{aligned}
L_\mu^P &= U_2^\dagger U_1^\dagger \partial_\mu (U_1 U_2) \\
&= U_2^\dagger U_1^\dagger (\partial_\mu U_1) U_2 + U_2^\dagger U_1^\dagger U_1 (\partial_\mu U_2) \\
&= U_2^\dagger (L_\mu^{(1)} - R_\mu^{(2)}) U_2.
\end{aligned} \tag{5.56}$$

Ao empregarmos esse resultado na Lagrangiana, os fatores U_2^\dagger e U_2 desaparecem mediante o uso da condição de unitariedade. Assim, o ansatz produto dá origem à correspondência

$$L_\mu^P \rightarrow L_\mu^{(1)} - R_\mu^{(2)}. \tag{5.57}$$

O problema com este resultado é que ele não é “covariante” quiral, já que o membro direito envolve uma forma esquerda $L_\mu^{(1)}$ e a forma direita $R_\mu^{(2)}$, que têm propriedades opostas por transformações axiais.

O quarto problema com o ansatz produto é que, no caso de três ou mais partículas, ele produz expressões altamente assimétricas pela permutação dessas partículas. Por exemplo, no caso de três partículas, temos

$$\begin{aligned}
L_\mu^P &= U_3^\dagger U_2^\dagger U_1^\dagger \partial_\mu (U_1 U_2 U_3) \\
&= U_3^\dagger U_2^\dagger U_1^\dagger (\partial_\mu U_1) U_2 U_3 \\
&\quad + U_3^\dagger (\partial_\mu U_2) U_3 (U_3^\dagger U_3) \\
&\quad + U_3^\dagger (\partial_\mu U_3) (U_3^\dagger U_3) \\
&= U_3^\dagger [U_2^\dagger (L_\mu^{(1)} - R_\mu^{(2)}) U_2 - R_\mu^{(3)}] U_3.
\end{aligned} \tag{5.58}$$

Como no caso de dois corpos, o uso deste resultado na Lagrangiana produz o desaparecimento dos campos U_3^\dagger e U_3 e equivale à correspondência

$$L_\mu^P \rightarrow U_2^\dagger (L_\mu^{(1)} - R_\mu^{(2)}) U_2 - R_\mu^{(3)}, \tag{5.59}$$

que é altamente assimétrica nos índices das partículas. Este problema não pode ser resolvido por meio de simples manipulações deste resultado, indicando a existência de um problema intrínseco no ansatz produto.

6. OBSERVÁVEIS NUCLEARES E AS MASSAS DOS QUARKS

Recuperando a questão do capítulo 3, *Qual a dependência do potencial NN em função das massas dos quarks* [Coh92]? Um cálculo explícito usando o potencial de Bonn [Mac87] leva a ambigüidades nas derivadas das constantes de acoplamento e das massas dos mésons em relação à massa do quark [Coh92].

Mostramos no capítulo 3, que é possível fazer a derivada do potencial NN em relação à massa do quark sem ambigüidades. Usando uma Lagrangiana que só envolve píons e a relação de Gell-Mann-Oakes-Renner (GOR), podemos calcular derivadas de quantidades de um e dois núcleons em relação à massa do quark derivando em relação à massa do pión. Nos capítulos 4 e 5 descrevemos o modelo de Skyrme e a interação NN com o ansatz produto quantizado. O ansatz produto permitiu calcular os potenciais central (V_C), spin-spin (V_{SS}) e tensor (V_T) com razoável acordo qualitativo com o cálculo exato e com potencial de Paris.

Neste capítulo calcularemos as derivadas $m_q \frac{\partial V_C}{\partial m_q}$, $m_q \frac{\partial V_{SS}}{\partial m_q}$ e $m_q \frac{\partial V_T}{\partial m_q}$ usando o modelo de Skyrme e a relação de GOR, conforme discutido no capítulo 3 eq. (3.34). Aproveitamos também para calcular a variação dos diversos observáveis de um corpo em função das massas dos quarks, procurando responder a uma nova pergunta, *como variam os observáveis de um núcleon com as massas dos quarks de corrente?*

6.1. Observáveis de um corpo

Iniciaremos calculando os observáveis de um corpo. Variando a massa do pión de um pequeno valor calculamos numericamente as quantidades $m_\pi^2 \frac{\partial M_N}{\partial m_\pi^2}$, $m_\pi^2 \frac{\partial g_{\pi NN}}{\partial m_\pi^2}$ e $m_\pi^2 \frac{\partial g_A}{\partial m_\pi^2}$. Estes resultados correspondem ao termo sigma (Σ_N), $m_q \frac{\partial g_{\pi NN}}{\partial m_q}$ e $m_q \frac{\partial g_A}{\partial m_q}$, respectivamente. Os resultados dessas derivadas juntamente com as dos outros observáveis são apresentados na tabela 6.1.

Tabela 6.1-Observáveis de um corpo					
	$f_\pi = 54 \text{ MeV } e = 4,84$		$f_\pi = 93 \text{ MeV } e = 4,0$		Experim.
	O	$m_q \frac{\partial O}{\partial m_q}$	O	$m_q \frac{\partial O}{\partial m_q}$	O
M_N	938 MeV	52,2 MeV	1818MeV	59,6 MeV	938 MeV
$\langle r^2 \rangle_{E,I=0}^{1/2}$	0,68fm	-0,064fm	0,51fm	-0,034fm	0,72fm
$\langle r^2 \rangle_{E,I=1}^{1/2}$	1,04fm	-0,25fm	0,87fm	-0,21fm	0,88fm
$\langle r^2 \rangle_{M,I=0}^{1/2}$	0,96fm	-0,12fm	0,72fm	-0,072fm	0,82fm
$\langle r^2 \rangle_{M,I=1}^{1/2}$	1,04 m	-0,25fm	0,87fm	-0,21fm	0,80fm
μ_P	1,96	-0,20	3,98	-0,47	2,79
μ_N	-1,23	0,25	-3,31	0,52	-1,91
$\mu_{\Delta^{++}}$	3,98	-0,34	7,56	-0,83	4,6-6,7
$\mu_{N\Delta}$	2,27	-0,32	5,15	-0,70	3,29
g_A	0,65	-0,064	1,01	-0,069	1,23
$g_{\pi NN}$	11,88	-0,022	20,35	-0,33	13,5
$g_{\pi N\Delta}$	17,81	-0,032	30,53	-0,49	20,4

Os cálculos foram realizados com dois conjuntos de parâmetros, $f_\pi = 54 \text{ MeV}$ e $e = 4,84$ [Ad87] e $f_\pi = 93 \text{ MeV}$ e $e = 4,0$ [Hol90] com $m_\pi = 138 \text{ MeV}$. Na tabela 6.1, os valores do termo sigma do núcleon estão incluídos. O termo sigma por nós calculado está em acordo com o calculado por Adkins e Nappi [Ad84] e o mencionado em [Hol95] (sem correções de loop) e próximo do valor experimental ($\Sigma_N \sim 45 \text{ MeV}$). Adkins e Nappi [Ad84] obtiveram os valores 38 MeV e 49 MeV só que considerando apenas a contribuição do termo de quebra de simetria e sem usar a relação de GOR.

Na tabela 6.1, observamos que as contribuições das massas dos quarks para os raios eletromagnéticos são negativas e da ordem de até 25%. A massa finita do pión explica o decréscimo do raio do núcleon. Os momentos magnéticos também apresentam um decréscimo em valor absoluto da ordem de 10% a 20%, quando a massa finita do pión é considerada. Isto é uma consequência da diminuição do momento de inércia já que o raio tende a decrescer. Nas eqs. (4.131) e (4.132), o termo dominante nos momentos magnéticos é o momento de inércia, o que explica o comportamento observado.

As constantes de acoplamento axial decrescem da ordem de 10% com a massa finita do pión. Fisicamente, isto é similar ao que ocorre com os momentos magnéticos, pois a constante de acoplamento axial também reflete em parte a distribuição do spin no núcleon. As constantes de acoplamento $g_{\pi NN}$ e $g_{\pi N\Delta}$ tem valores muito diferentes nos dois conjuntos de parâmetros da tabela. Elas são o resultado da subtração de grandes quantidades. Entretanto, no caso de $g_{\pi NN}$,

as derivadas $m_q \frac{\partial g_{\pi NN}}{\partial m_q}$, o termo sigma e $m_q \frac{\partial g_A}{\partial m_q}$ são consistentes com a relação de Goldberger-Treiman[GT58],[Che94].

6.2. Observáveis de dois corpos

A derivada $m_q \frac{\partial V_{NN}}{\partial m_q}$ foi calculada numericamente no modelo de Skyrme usando o ansatz produto quantizado. Foi calculada a interação NN na descrição skyrmion-skyrmion e foi recalculada para uma pequena variação na massa do pión. Assim obteve-se numericamente as quantidades $m_q \frac{\partial V_C}{\partial m_q}$, $m_q \frac{\partial V_T}{\partial m_q}$ e $m_q \frac{\partial V_{SS}}{\partial m_q}$. Elas são mostradas nas figuras 6.1,6.2 e 6.3, respectivamente. Pode-se observar as contribuições de cada termo da Lagrangiana. Ao contrário do que se poderia imaginar, a contribuição do termo de quebra de simetria à derivada do potencial nem sempre é dominante. Na figura 6.1, para derivada do potencial central, vemos que o termo de quarta ordem (\mathcal{L}_4), definido logo após eq.(4.34), tem contribuição muito importante e não pode ser desprezado em nenhuma das regiões. Nas figuras 6.2 e 6.3 é interessante notar que a longas distâncias ($>3\text{fm}$), \mathcal{L}_2 e \mathcal{L}_{sb} se cancelam restando somente a contribuição de \mathcal{L}_4 .

Na figura 6.4 a derivada do potencial central é comparada à contribuição ao potencial originada apenas pelo termo de quebra de simetria correspondendo ao último termo na eq.(5.38). Comparando 6.1 com 6.4 pode-se também observar que a derivada do termo de quebra de simetria é muito similar ao próprio termo de quebra de simetria. Este resultado permite concluir que a derivada da função de perfil F dos skyrmions não é crítica no termo que quebra simetria, porém a variação de F' com a massa do quark passa a ter um papel importante já que \mathcal{L}_4 domina em $m_q \frac{\partial V_C}{\partial m_q}$.

Ainda na Fig.6.4, os cálculos mostram que há um mínimo em torno de 1,0 a 1,5 fm com valores em torno de -20MeV, enquanto a curta distância apresentam repulsão. Os mínimos de cada conjunto distam entre si cerca de 0,3 fm, o que corresponde aproximadamente a duas vezes a diferença no raio do núcleon encontrado na tabela 6.1.

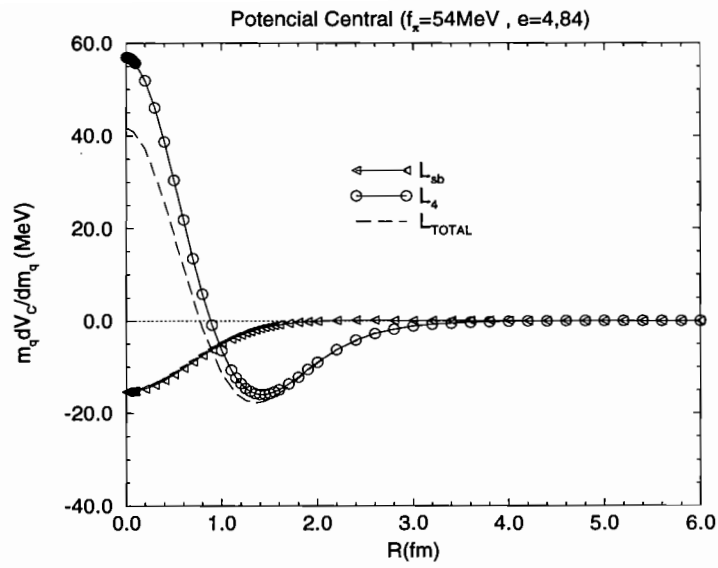


Figura 6.1: Derivada do potencial central em relação a m_q e as contribuições de cada termo da Lagrangiana, parâmetros $f_\pi = 54 \text{ MeV}$ e $e = 4,84$.

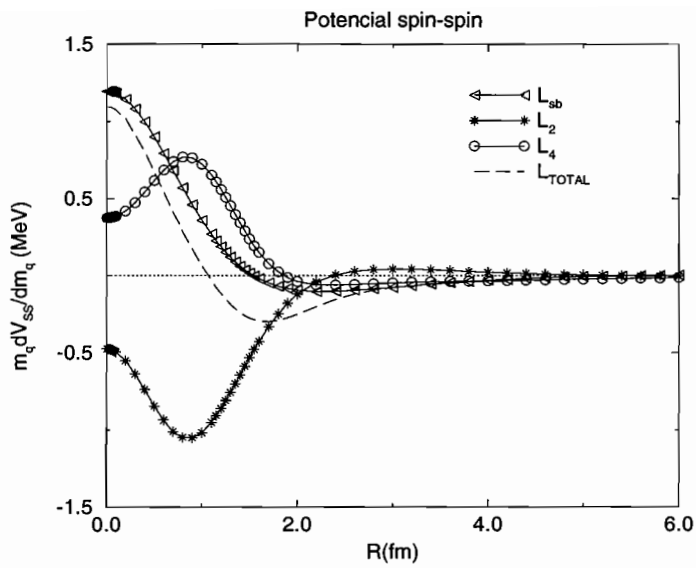


Figura 6.2: Derivada do potencial spin-spin em relação a m_q e as contribuições de cada termo da Lagrangian, parâmetros $f_\pi = 54\text{MeV}$ e $e = 4,84$.

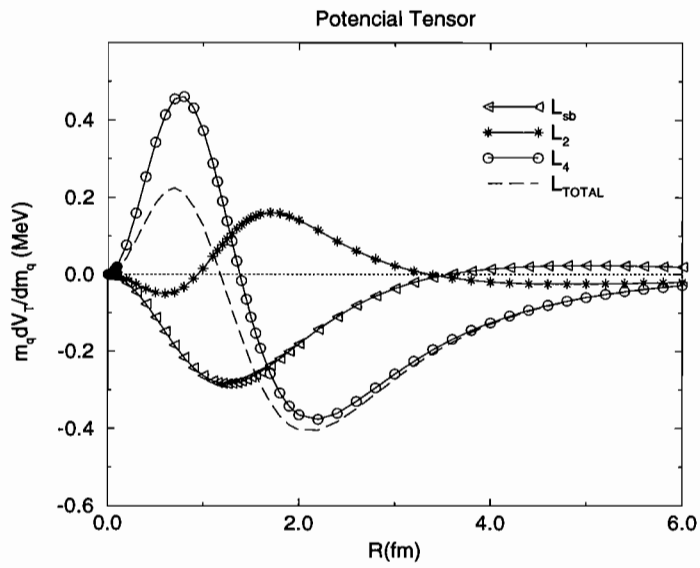


Figura 6.3: Derivada do potencial tensor em relação a m_q e as contribuições de cada termo da Lagrangiana, parâmetros $f_\pi = 54\text{MeV}$ e $e = 4,84$.

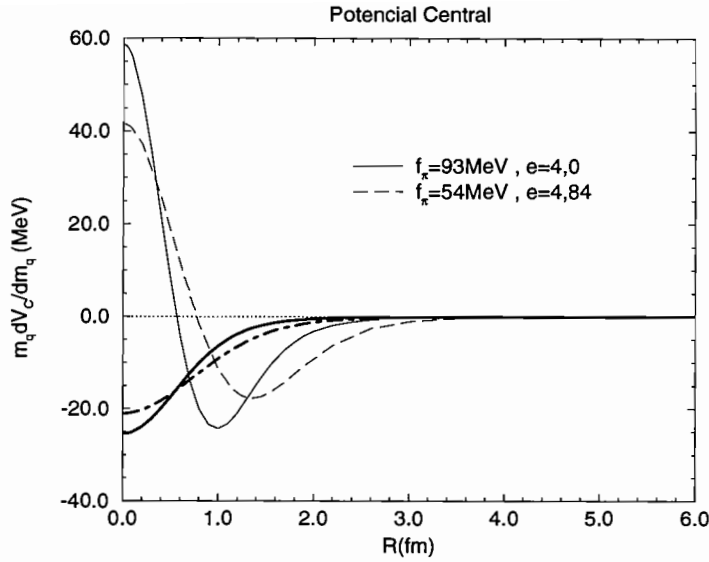


Figura 6.4: Comparação entre a derivada do potencial central em relação à m_q (legendado para os dois conjuntos de parâmetros) e a contribuição do termo de quebra de simetria para o potencial central com os parâmetros $f_\pi = 54\text{MeV}$, $e = 4,84$ (linha grossa traço ponto) e $f_\pi = 93\text{MeV}$, $e = 4,0$ (linha grossa contínua).

As figuras 6.5,6.6 mostram as derivadas do potencial spin-spin e tensor são comparadas às extraídas do potencial de troca de um pión (OPEP)¹, apresentadas no apêndice E, onde g_A , f_π e $m_q \frac{\partial g_A}{\partial m_q}$ foram tomados da Tabela 6.1. Ambas as figuras mostram que para distâncias superiores a 3fm a derivada do potencial se reduz àquela prevista pela derivada do OPEP. Isto era de se esperar pois a longas distâncias os potenciais spin-spin e tensor calculados a partir do modelo de Skyrme se reduzem ao OPEP. À curtas distâncias as derivadas usando OPEP divergem enquanto que para o modelo de Skyrme revelam o fator de forma. No caso do potencial tensor as derivadas encontradas no OPEP são negativas a curtas distâncias, enquanto as provenientes do ansatz produto são positivas.

A seguir faremos uma comparação das derivadas dos potenciais com a diferença $V^{(m_\pi=138)} - V^{(m_\pi=0)}$ em cada um dos potenciais V_C, V_{SS}, V_T . Na fig.6.7, para $f_\pi = 54\text{MeV}$ e $e = 4,84$ a diferença $V_C^{(m_\pi=138)} - V_C^{(m_\pi=0)}$ (quadrados cheios) é comparável a $m_q \frac{\partial V_C}{\partial m_q}$ (linha tracejada), podemos observar o mesmo para $f_\pi = 93\text{MeV}$ e $e = 4,0$, $V_C^{(m_\pi=138)} - V_C^{(m_\pi=0)}$ (círculos) e $m_q \frac{\partial V_C}{\partial m_q}$ (linha contínua).

¹A comparação com a derivada do OPEP foi sugerida na ref. [Rob97].

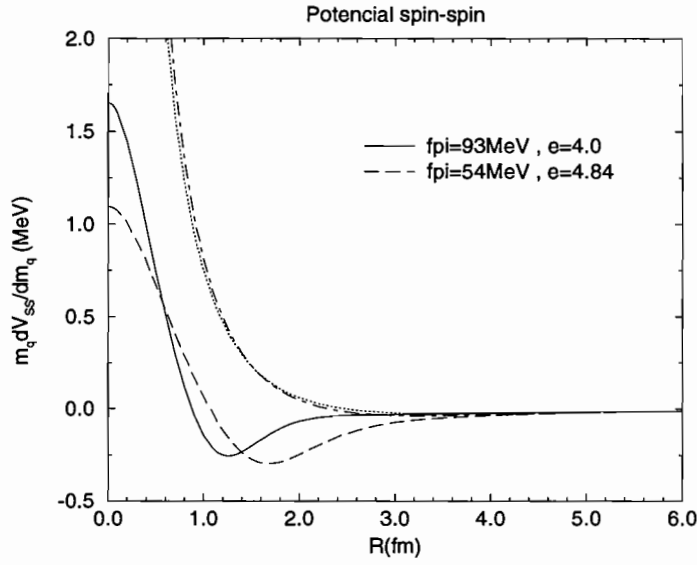


Figura 6.5: Comparação de $m_q \partial V_{SS} / \partial m_q$ (legendado para os dois conjuntos de parâmetros) com $m_q \partial V_{SS}^{OPEP} / \partial m_q$ para os conjuntos de parâmetros: $f_\pi = 54 \text{ MeV}$, $e=4,84$ (traço ponto) e $f_\pi = 93 \text{ MeV}$, $e=4,0$ (pontilhado).

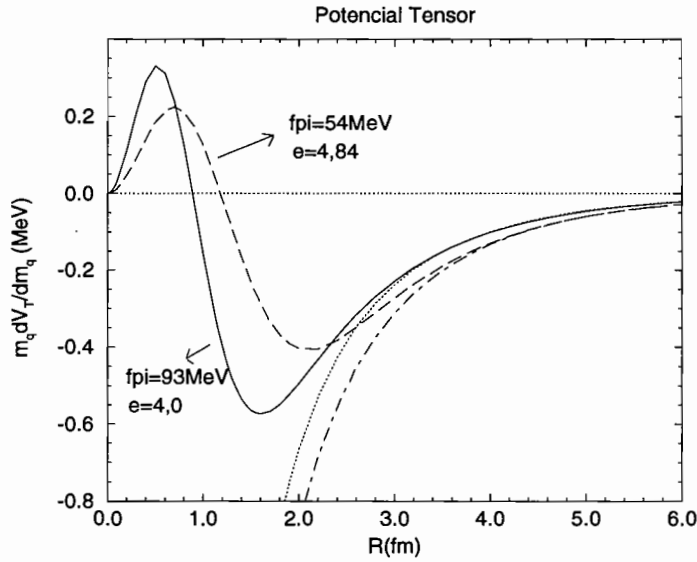


Figura 6.6: Comparação de $m_q \partial V_T / \partial m_q$ (indicado por setas para os dois conjuntos de parâmetros) com $m_q \partial V_T^{OPEP} / \partial m_q$ para os conjuntos de parâmetros: $f_\pi = 54 \text{ MeV}$, $e=4,84$ (traço ponto) e $f_\pi = 93 \text{ MeV}$, $e=4,0$ (pontilhado).

Na fig.6.8, para $f_\pi = 54\text{MeV}$ e $e = 4,84$ a diferença $V_{SS}^{(m_\pi=138)} - V_{SS}^{(m_\pi=0)}$ (quadrados cheios) é similar a $m_q \frac{\partial V_{SS}}{\partial m_q}$ (linha tracejada). Foi constatado que a distâncias acima de cerca de 3 fm, a diferença entre os potenciais com píons com massa finita e zero são essencialmente idênticos aos resultados obtidos com o OPEP.

Na fig. 6.9, para $f_\pi = 54\text{MeV}$ e $e = 4,84$ a diferença $V_T^{(m_\pi=138)} - V_T^{(m_\pi=0)}$ (quadrados cheios) é qualitativamente a mesma que $m_q \frac{\partial V_T}{\partial m_q}$ (linha tracejada). À distâncias acima de cerca 3 fm, as diferenças entre os potenciais com píons com massa e sem massa são dadas pelas diferença entre os OPEPs correspondentes, como foi observado.

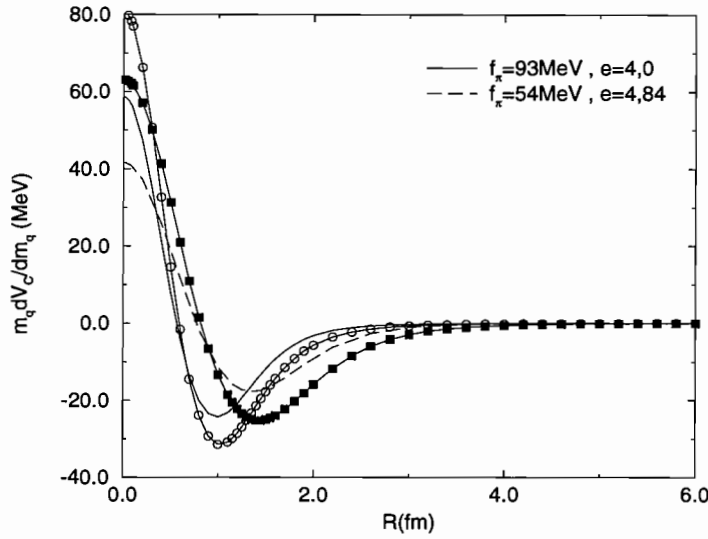


Figura 6.7: Derivada do potencial central em relação à massa do quark (legendado para os dois conjuntos de parâmetros) comparada a $V_C^{(m_\pi=138)} - V_C^{(m_\pi=0)}$ para os dois conjuntos de parâmetros: quadrados cheios ($f_\pi = 54\text{MeV}$ e $e = 4,54$) e círculos ($f_\pi = 93\text{MeV}$ e $e = 4,0$).

Os cálculos numéricos mostrados nas figuras 6.7,6.8 e 6.9, permitem concluir que $m_q \frac{\partial V_{NN}}{\partial m_q} \approx V_{NN}^{(m_\pi=138)} - V_{NN}^{(m_\pi=0)}$. Esta derivada pode ser interpretada como a contribuição da massa finita do quark para o potencial núcleon-núcleon. Os cálculos são indicativos da dependência da interação skyrmion-skyrmion com a massa dos quarks na , e se apóiam na aproximação do ansatz produto. É interessante observar que as quantidades $m_q \frac{\partial V_{NN}}{\partial m_q}$ para os três canais são significativas justamente abaixo da região de 2fm onde o valor absoluto do potencial NN na aproximação do ansatz produto é apenas grosseiramente correto.

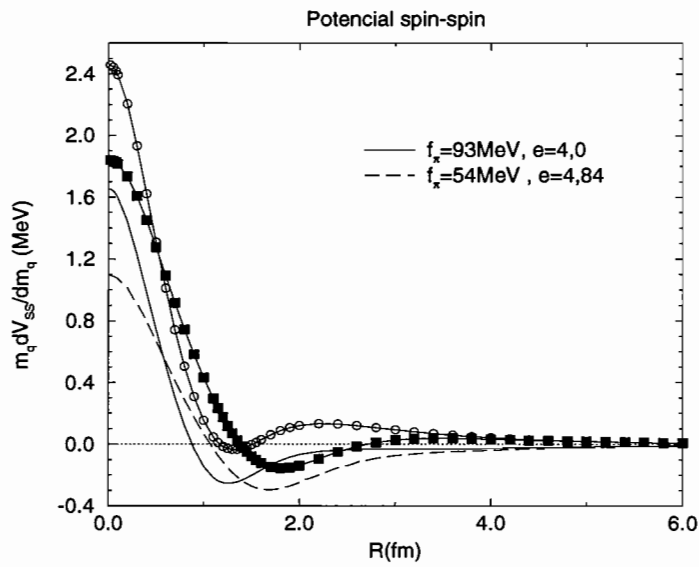


Figura 6.8: Derivada do potencial spin-spin em relação à massa do quark(legendado para os dois conjuntos de parâmetros) comparada a $V_{SS}^{(m_\pi=138)} - V_{SS}^{(m_\pi=0)}$ para os dois conjuntos de parâmetros: quadrados cheios ($f_\pi = 54\text{MeV}$ e $e = 4,54$) e círculos ($f_\pi = 93\text{MeV}$ e $e = 4,0$).

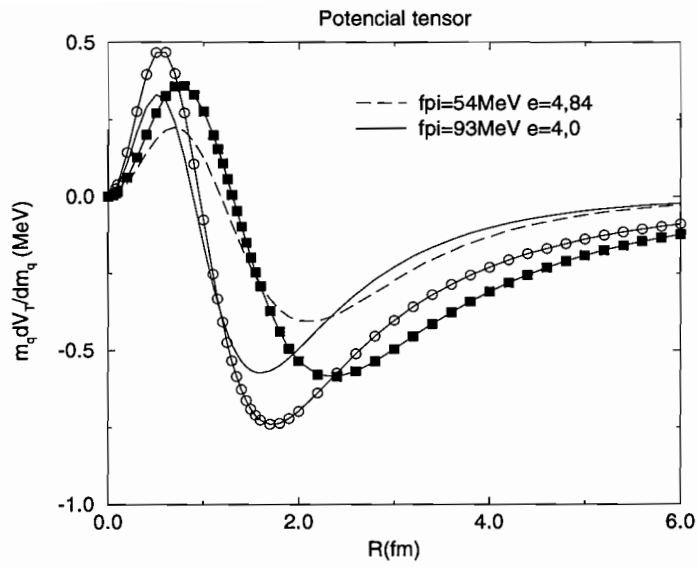


Figura 6.9: Derivada do potencial tensor em relação à massa do quark (legendado para os dois conjuntos de parâmetros) comparada a $V_T^{(m_\pi=138)} - V_T^{(m_\pi=0)}$ para os dois conjuntos de parâmetros: quadrados cheios ($f_\pi = 54\text{MeV}$ e $e = 4,84$) e círculos ($f_\pi = 93\text{MeV}$ e $e = 4,0$).

Resumindo, foram calculadas as derivadas do potencial Skyrmion-Skyrmion com respeito às massas dos quarks, $m_q \frac{\partial V_{NN}}{\partial m_q}$, no ansatz produto quantizado. Elas foram relacionadas a $m_\pi^2 \frac{\partial V_{NN}}{\partial m_\pi^2}$ usando a relação de Gell-Mann-Oakes-Renner, que tornaram o cálculo possível. Elas foram comparadas às derivadas obtidas a partir do OPEP e estão em acordo entre si para distâncias acima de 3 fm. Os elementos de matriz das derivadas de V_{NN} no estado nuclear é parte do termo sigma nuclear. As magnitudes das contribuições das massas dos quarks com o potencial nuclear se revelaram apreciáveis. As derivadas dos observáveis do núcleon foram também calculadas e as massas dos quarks contribuem para os observáveis de 10 a 20% . Conclusões mais definitivas sobre a dependência do potencial NN em relação às massas dos quarks devem ser extraídas a partir de cálculos exatos da interação skyrmion-skyrmion, o que vai além do presente trabalho.

Em seguida, calcularemos os elementos de matriz das derivadas de V_{NN} nos estados fundamentais dos núcleos para calcular o termo sigma nuclear.

6.3. Contribuição do Potencial NN para o termo Σ nuclear

O potencial NN extraído a partir do ansatz produto não é realístico na medida em que não possui a atração central na região intermediária. Isto não pode ser ignorado pois significa que não há estado ligado com este potencial. Decidimos então abrir mão da consistência e, a partir da derivada do potencial calculado, podemos, numa primeira estimativa, obter sua contribuição ao termo sigma nuclear usando densidades de carga obtidas do espalhamento elástico de elétrons[JVV74]. Faremos a suposição de que a densidade de carga devidamente normalizada é aproximadamente igual à densidade nuclear.

Nesta seção analisaremos a contribuição do potencial ao termo sigma nuclear do dêuteron usando funções de onda de potenciais fenomenológicos. Para os núcleos mais pesados usaremos a aproximação de Hartree. Posteriormente faremos correções ao cálculo do termo sigma nuclear, considerando funções de correlação no cálculo de Hartree e também contribuições cinéticas.

6.3.1. Dêuteron

No caso particular do dêuteron, tomamos o elemento de matriz

$$\Sigma_{2H}^V = \langle \psi_{2H} | m_q \frac{\partial V}{\partial m_q} | \psi_{2H} \rangle \quad (6.1)$$

O spin do dêuteron é 1 suas projeções encontram-se em estado tripleto e portanto é um singlete de isospin($I=0, I_z=0$). A função de onda do dêuteron normalizada

é dada por [EW88]

$$\psi_{2H} = \psi_{J=1,M} = (4\pi)^{-1/2} \left\{ \frac{u(r)}{r} + \frac{w(r)}{r} \frac{1}{\sqrt{8}} S_{12}(\hat{r}) \right\} \chi_{1M}. \quad (6.2)$$

sendo respectivamente u e w as componentes de onda s (3S_1) e d (3D_1) do dêuteron extraídas do potencial de Reid [Rei68] disponíveis na internet (<http://nn-online.sci.kun.nl>) [Rei93] e a normalização é tal que $\int_0^\infty dr (u^2 + w^2) = 1$. A componente de spin $\chi_{1M} \equiv |1M\rangle$ é tal que $\chi_{1M} \chi_{1M}^\dagger = 1$ e $r = |r_1 - r_2|$ é a distância relativa entre os núcleons.

Devido à ortogonalidade entre as funções onda s e d (descrevem momentos angulares $L = 0$ e $L = 2$, respectivamente) , a parte do termo sigma do dêuteron que vem do potencial central será simplesmente

$$\Sigma_{2H}^{V_c} = \langle \text{onda-s} | m_q \frac{\partial V_C}{\partial m_q} | \text{onda-s} \rangle + \langle \text{onda-d} | m_q \frac{\partial V_C}{\partial m_q} | \text{onda-d} \rangle \quad (6.3)$$

$$= \int_0^\infty dr u^2 m_q \frac{\partial V_C(r)}{\partial m_q} + \int_0^\infty dr w^2 m_q \frac{\partial V_C(r)}{\partial m_q} \quad (6.4)$$

onde usamos $\int d\Omega \chi_{1M}^\dagger \frac{1}{\sqrt{8}} S_{12}(\hat{r}) \frac{1}{\sqrt{8}} S_{12}(\hat{r}) \chi_{1M} = 4\pi$.

Podemos calcular também o valor da contribuição do potencial tensor para o termo sigma do dêuteron. Pelo teorema de Wigner-Eckart, o elemento de matriz $\langle \text{onda-s} | m_q \frac{\partial V_{tensor}}{\partial m_q} | \text{onda-s} \rangle$ é nulo. Restam portanto os elementos $\langle \text{onda-s} | m_q \frac{\partial V_{tensor}}{\partial m_q} | \text{onda-d} \rangle$, $\langle \text{onda-d} | m_q \frac{\partial V_{tensor}}{\partial m_q} | \text{onda-s} \rangle$ e $\langle \text{onda-d} | m_q \frac{\partial V_{tensor}}{\partial m_q} | \text{onda-d} \rangle$. Assim os dois primeiros elementos contribuirão na forma

$$\begin{aligned} \Sigma_{2H(sd)}^{V_T} &= 2 \langle \text{onda-s} | m_q \frac{\partial V_{tensor}}{\partial m_q} | \text{onda-d} \rangle \\ &= 2 \langle \text{onda-s} | \vec{\tau}^{(1)} \cdot \vec{\tau}^{(2)} S_{12}(\hat{r}) m_q \frac{\partial V_T}{\partial m_q} | \text{onda-d} \rangle \end{aligned} \quad (6.5)$$

Mas $\vec{\tau}^{(1)} \cdot \vec{\tau}^{(2)} = 2[I(I+1) - 3/2]$ e no caso do dêuteron , $I = 0$, e esse fator será -3. Substituindo as funções de onda s e d temos

$$\begin{aligned} \Sigma_{2H(sd)}^{V_T} &= 2(-3) \int d^3r (4\pi)^{-1/2} \chi_{1M}^\dagger \frac{u}{r} S_{12}(\hat{r}) m_q \frac{\partial V_T(r)}{\partial m_q} (4\pi)^{-1/2} \frac{w}{r} \frac{1}{\sqrt{8}} S_{12}(\hat{r}) \chi_{1M} \\ &= -6\sqrt{8} \int_0^\infty dr u \left[m_q \frac{\partial V_T(r)}{\partial m_q} \right] w. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Na tabela 6.2 relacionamos os resultados para o dêuteron em cada onda com as contribuições mais importantes. A contribuição do potencial spin-spin é bem menor que as contribuições calculadas.

Tabela 6.2- termo sigma do potencial NN no dêuteron				
	$f_\pi=54\text{MeV } e=4,84$		$f_\pi=93\text{MeV } e=4,0$	
	$\Sigma_{2\text{H}}^V$ (MeV)	$\Sigma_{2\text{H}}^V/A$ (MeV)	$\Sigma_{2\text{H}}^V$ (MeV)	$\Sigma_{2\text{H}}^V/A$ (MeV)
$\langle \text{onda-s} m_q \frac{\partial V_C}{\partial m_q} \text{onda-s} \rangle$	-4,83	-2,42	-4,22	-2,11
$\langle \text{onda-d} m_q \frac{\partial V_C}{\partial m_q} \text{onda-d} \rangle$	-0,47	-0,23	-0,48	-0,24
$2\langle \text{onda-s} m_q \frac{\partial V_{\text{tensor}}}{\partial m_q} \text{onda-d} \rangle$	+0,70	+0,35	+1,10	0,55
<i>total</i>	-4,60	-2,30	-3,60	-1,80

6.3.2. $A > 2$

O modelo de Skyrme proporciona naturalmente forças de dois, três e mais corpos. Ainda assim, é provavelmente uma aproximação bem razoável ignorá-las todas no cálculo do termo sigma nuclear, exceto as contribuições provenientes do potencial de dois corpos. A contribuição do potencial NN para o termo sigma nuclear pode ser expressa por

$$\Sigma_A^V = \langle \Psi_A | \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} m_q \frac{\partial V_{ij}}{\partial m_q} | \Psi_A \rangle . \quad (6.7)$$

Assumindo a aproximação apresentada no apêndice F), teremos

$$\Sigma_A^V = \frac{A(A-1)}{2} \int d^3\mathbf{r}_1 \rho(\mathbf{r}_1) \int d^3\mathbf{r}_2 \rho(\mathbf{r}_2) m_q \frac{\partial V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{\partial m_q} \quad (6.8)$$

sendo que $\int d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) = 1$ e A é o número de núcleons. Na matéria nuclear

Com intenção de efetuar cálculos numéricos para núcleos esféricos, podemos abrir esta última expressão na forma

$$\Sigma_A^V = \frac{A(A-1)}{2} 4\pi \int_0^\infty dr_2 r_2^2 2\pi \int_0^\infty dr_1 r_1^2 \int_{-1}^1 d(\cos \theta_{12}) \rho(r_1) \rho(r_2) m_q \frac{\partial V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{\partial m_q} \quad (6.9)$$

onde $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = [r_1^2 + r_2^2 - 2(\cos \theta_{12})r_1 r_2]^{1/2}$ e θ_{12} é o ângulo entre \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 .

Na matéria nuclear simétrica os potenciais de spin-spin e tensor não devem contribuir na aproximação de Hartree, uma vez que a magnitude das derivadas do potencial spin-spin e tensor são muito menores que a derivada do potencial central. Assim só a derivada do potencial central deve contribuir para Σ_A^V neste limite.

Na tabela 6.3 estão relacionados nossos cálculos de Σ_A^V usando (6.8) e as densidades obtidas a partir do espalhamento elástico de elétrons [JVV74]. Neste cálculo inicial assumimos que prótons e nêutrons possuem a mesma distribuição de densidade. Os resultados do dêuteron foram incluídos nesta tabela. No caso

do dêuteron verifica-se que para uma ligação NN temos uma contribuição de $-3,60\text{MeV}$ ($f_\pi=93\text{MeV}$ e=4,0). Era de se esperar que para núcleos mais massivos pudéssemos contar o número de ligações NN. Por exemplo, para o ${}^4\text{He}$ podemos contar 6 interações NN e portanto deveríamos ter $6 \times -3,60\text{MeV} = -21,6\text{MeV}$ que é um valor, em módulo, abaixo do calculado $-34,5\text{MeV}$. Podemos talvez explicar isso pois o dêuteron é muito “grande” e sua interação NN é mais fraca que no ${}^4\text{He}$. O trítio (${}^3\text{H}$) (ou o ${}^3\text{He}$) possui 3 interações NN e estima-se que seu termo sigma nuclear deve ter entre $3 \times \Sigma_{2\text{H}}^V = -10,8\text{MeV}$ e $3 \times \Sigma_{4\text{He}}^V/6 = -17,2\text{MeV}$. Portanto estimamos um valor médio de -14MeV para o trítio. O mesmo deve valer para o ${}^3\text{He}$. Para os núcleos mais pesados Σ_A^V é sempre menor que $(n^{\circ}\text{de interações NN}) \times \Sigma_{2\text{H}}^V$ ou $(n^{\circ}\text{de interações NN}) \times (\Sigma_{4\text{He}}^V/6)$ e vai ficando cada vez menor pois a interação NN é de curto alcance. Ainda podemos notar que Σ_A^V/A também vai sempre crescendo excetuando-se o caso do ${}^{197}\text{Au}$ e do ${}^{208}\text{Pb}$. A figura 6.10 mostra que o chumbo tem distribuição menos densa a média distância, que é a predominante.

Tabela 6.3-Termo Sigma do Potencial Nuclear				
	$f_\pi=54\text{MeV}$ e=4,84		$f_\pi=93\text{MeV}$ e=4,0	
	Σ_A^V (MeV)	Σ_A^V/A (MeV)	Σ_A^V (MeV)	Σ_A^V/A (MeV)
${}^2\text{H}(\text{Reid})$	-4,60	-2,30	-3,60	-1,80
${}^4\text{He}(\text{3pF})$	-39,5	-9,8	-34,5	-8,6
${}^{10}\text{B}(\text{h.o.})$	-150	-15,0	-107	-10,7
${}^{12}\text{C}(\text{3pF})$	-221	-18,4	-157	-13,1
${}^{14}\text{N}(\text{h.o.})$	-269	-19,2	-188	-13,4
${}^{16}\text{O}(\text{3pF})$	-320	-20,0	-220	-13,8
${}^{20}\text{Ne}(\text{2pF})$	-398	-19,9	-268	-13,4
${}^{24}\text{Mg}(\text{3pF})$	-578	-24,1	-388	-16,2
${}^{32}\text{S}(\text{3pF})$	-845	-26,4	-557	-17,4
${}^{40}\text{Ca}(\text{3pF})$	-1115	-27,9	-727	-18,2
${}^{56}\text{Fe}(\text{3pG})$	-1777	-31,7	-1144	-20,4
${}^{118}\text{Sn}(\text{3pG})$	-4392	-37,2	-2763	-23,4
${}^{148}\text{Sm}(\text{2pF})$	-5690	-38,4	-3556	-24,0
${}^{197}\text{Au}(\text{2pF})$	-8325	-42,3	-5187	-26,3
${}^{208}\text{Pb}(\text{3pG})$	-8484	-40,8	-5724	-25,4
$\rho = 0,17\text{fm}^{-3}$	-64,1A	-64,1	-38,0A	-38,0

Tabela 6.3- Termo sigma do potencial nuclear calculado com modelo de Skyrme para interação NN.

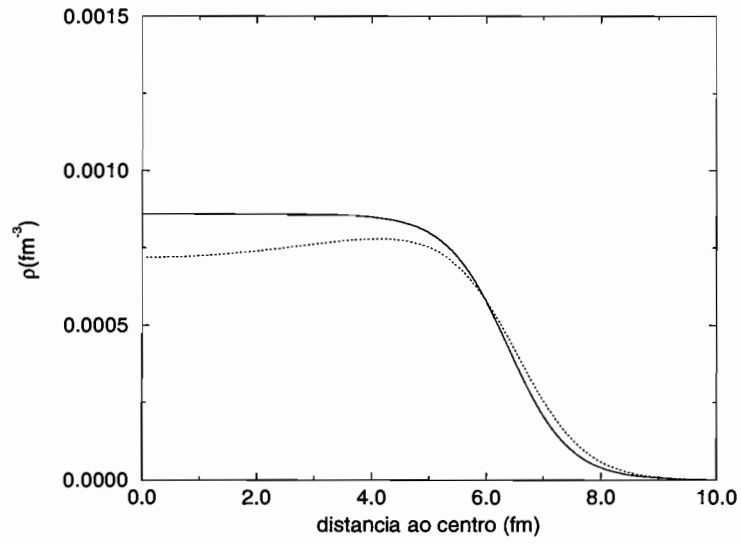


Figura 6.10: Densidades normalizadas do Pb²⁰⁸ (linha pontilhada) e do Au¹⁹⁷ (linha contínua).

Para efeito de investigação calculamos as contribuições para o $\Sigma_A^{V_c}$ devidas às regiões de curto (0-1fm), médio (1-2fm) e longo alcance (2-6fm) na distância relativa aos núcleons. Observando a tabela 6.4 vemos que para todos os núcleos, sem exceção, a região de médio alcance é predominante, onde os núcleons têm alguma superposição.

Tabela 6.4- $\Sigma_A^{V_c}/A, f_\pi=93\text{MeV } e=4,0$				
	0-1fm	1fm-2fm	2fm-6fm	0-6fm(total)
$^2\text{H}^{(\text{onda-s})}$	-0,42	-1,54	-0,15	-2,11
^4He	-1,48	-6,47	-0,67	-8,63
^{10}B	-1,48	-7,76	-1,46	-10,7
^{12}C	-1,82	-9,51	-1,78	-13,1
^{14}N	-1,82	-9,69	-1,91	-13,4
^{16}O	-1,85	-9,92	-2,02	-13,8
^{20}Ne	-1,75	-9,56	-2,09	-13,4
^{24}Mg	-2,09	-11,51	-2,54	-16,2
^{32}S	-2,22	-12,33	-2,85	-17,4
^{40}Ca	-2,30	-12,81	-3,07	-18,2
^{56}Fe	-2,54	-14,34	-3,56	-20,4
^{118}Sn	-2,80	-16,36	-4,27	-23,4
^{148}Sm	-2,85	-16,61	-4,57	-24,0
^{197}Au	-3,07	-18,20	-5,08	-26,3
^{208}Pb	-2,87	-17,76	-4,73	-25,4

Tabela 6.4- Contribuição das regiões de curto(0-1fm), médio(1-2fm) e longo alcance (2-6fm) do potencial central NN ao termo sigma nuclear.

6.3.3. Correlação de curto alcance

Uma correção considerando as correlações de curto alcance² pode ser incorporada na expressão (6.8) multiplicando o integrando por funções de correlação $g(r)$ [BJ76][Sal95], para os casos:

$$\begin{aligned}
 \text{I)} \quad g(r) &= 1 - j_0(q_c r) \\
 \text{II)} \quad g(r) &= 1 - \exp(-r^2/R^2) \\
 \text{III)} \quad g(r) &= \left(1 - \exp(-r^2/a^2)\right)^2 + br^2 \exp(-r^2/c^2) \quad (6.10)
 \end{aligned}$$

onde r é a distância relativa entre os núcleons, $q_c = 780\text{MeV}$, $R = 0,75\text{fm}$, $a = 0,5\text{fm}$, $b = 0,25\text{fm}^{-2}$ e $c = 1,28\text{fm}$. Essas três funções de correlação estão apresentadas na figura (6.11). Utilizando as funções de correlação $g(r)$, recalculamos $\Sigma_A^{V_c}$ com

²Uma exposição didática sobre a correlação de curto alcance é dada por Ring e Schuck[RS80].

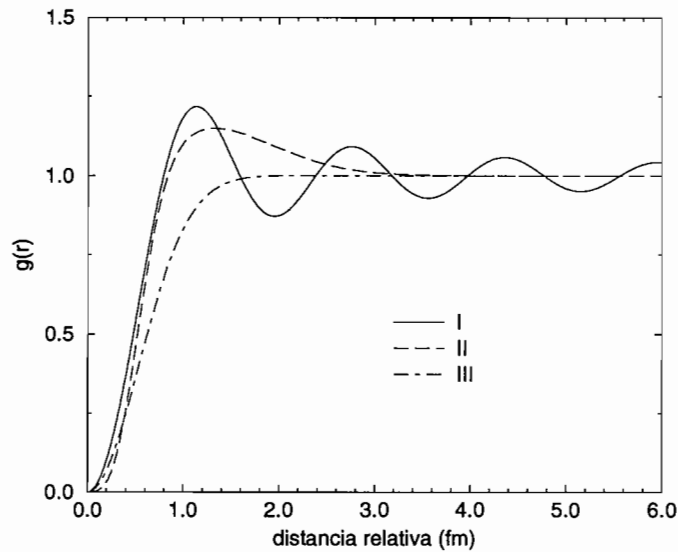


Figura 6.11: funções de correlação de pares de núcleons no meio nuclear.

estas correções e construímos a tabela 6.5. Podemos observar que I e III produzem ligeiro aumento no termo sigma o que pode ser explicado pelo fato de I e III serem maiores que 1 na região intermediária do potencial que é a preponderante. Da mesma forma II produziu resultados menores já que sua função de correlação é menor que 1 nessa região. De forma geral, a correção devida à correlação não ultrapassa cerca de 10% em qualquer dos três casos.

Tabela 6.5- $f_\pi=93\text{MeV}$ $e=4,0$				
	(sem corr.)	I	II	III
^4He	-34,5	-39,0	-32,5	-39,7
^{10}B	-107	-118	-101	-121
^{12}C	-157	-173	-149	-178
^{14}N	-188	-206	-178	-213
^{16}O	-220	-242	-209	-250
^{20}Ne	-268	-293	-255	-303
^{24}Mg	-388	-423	-368	-438
^{32}S	-557	-608	-530	-630
^{40}Ca	-727	-793	-691	-821
^{56}Fe	-1144	-1247	-1089	-1292
^{118}Sn	-2763	-3011	-2638	-3122
^{148}Sm	-3556	-3877	-3400	-4021
^{197}Au	-5187	-5650	-4959	-5863
^{208}Pb	-5724	-5756	-5048	-5970
$\rho = 0,17\text{fm}^{-3}$	-38,0A	-41,1A	-36,3A	-42,7A

Tabela 6.5- Contribuição ao termo sigma nuclear do potencial incluindo funções de correlação de curto alcance citadas em [Sal95]. Unidades em MeV.

6.3.4. Contribuição da Energia Cinética

Como vimos no capítulo 3, para cálculo mais completo do termo sigma nuclear (Σ_A) devemos adicionar as contribuições de cada corpo ($A\Sigma_N$), as contribuições de energia cinética \bar{E}_K dos núcleons e Σ_A^V . A contribuição da energia cinética foi dada por:

$$\Sigma_A^K = -\Sigma_N \bar{E}_K / M_N. \quad (6.11)$$

As energias cinéticas do dêuteron e do ^4He foram extraídas do trabalho de Schiavilla [Sch86]. Para os núcleos mais pesados tomamos a energia cinética média de um férmion em um gás de férmions dada por [Lan90] $\langle E_K \rangle = \frac{3}{10}(2)\varepsilon_f$. Para $\rho = 0,17\text{fm}^{-3}$, $k_f = 1,36\text{fm}^{-1}$, $\varepsilon_f = 38\text{MeV}$ e chegamos em $\langle E_K \rangle = 22,8\text{MeV}$ por núcleon. A partir destes resultados construímos a tabela 6.6. Juntando a contribuição do termo sigma de um corpo, ($A\Sigma_N$ - adotando $\Sigma_N = 45\text{MeV}$ - valor experimental) podemos estimar o termo sigma nuclear total. Os valores de $\Sigma_A^V + \Sigma_A^K$ irão compor o potencial ótico pión-núcleo que poderão ser comparados a resultados experimentais provenientes do espalhamento e átomos piônicos.

Tabela 6.6- $f_\pi=93\text{MeV}$ $e=4,0$					
	$\bar{E}_K(\text{MeV})$	$\Sigma_A^K(\text{MeV})$	$\Sigma_A^V(\text{MeV})$	$\Sigma_A^V + \Sigma_A^K (\text{MeV})$	$(\Sigma_A^V + \Sigma_A^K) / A(\text{MeV})$
^2H	17,8	-0,86	-3,60	-4,46	-2,23
$^3\text{H}^{(\text{est})}$	≈ 60	≈ -3	≈ -14	≈ -17	$\approx -5,66$
$^3\text{He}^{(\text{est})}$	≈ 60	≈ -3	≈ -14	≈ -17	$\approx -5,66$
^4He	106	-5,09	-34,5	-39,6	-9,90
^{10}B	228	-10,9	-107	-118	-11,8
^{12}C	274	-13,1	-157	-170	-14,2
^{14}N	319	-15,3	-188	-203	-14,5
^{16}O	365	-17,5	-220	-238	-14,9
^{20}Ne	456	-21,8	-268	-290	-14,5
^{24}Mg	547	-26,2	-388	-414	-17,2
^{32}S	730	-35,0	-557	-592	-18,5
^{40}Ca	912	-43,8	-727	-771	-19,3
^{56}Fe	1273	-61,1	-1144	-1205	-21,5
^{118}Sn	2690	-129	-2763	-2892	-24,5
^{148}Sm	3374	-162	-3556	-3718	-25,1
^{197}Au	4492	-216	-5187	-5403	-27,4
^{208}Pb	4742	-227	-5724	-5951	-28,6
$\rho(0,17\text{fm}^{-3})$	$22,8A$	$-1,09A$	$-38,0A$	$-39,1A$	$-39,1$

Tabela 6.6- Contribuição da energia cinética dos núcleons e do potencial ao termo sigma nuclear, sem correlação NN.

7. INTERAÇÃO PÍON-NÚCLEO

Nesse capítulo iremos calcular a contribuição repulsiva, proveniente da interação nuclear, ao termo sigma e que será considerado no potencial pión-núcleo. Iremos estimar a intensidade deste potencial e comparar com os valores obtidos de ajustes aos deslocamentos da energia dos níveis de átomos piônicos e espalhamento pión-núcleo.

Faremos a revisão da interação pión-núcleon sob ponto de vista da simetria de isospin na seção 7.1. Na seção 7.2 iremos revisar o cálculo tradicional para o comprimento de espalhamento pión dêuteron ($a_{\pi d}$), onde é incluído o termo de reespalhamento, ainda que este cálculo esteja em completo desacordo com medida experimental recente de $a_{\pi-d}$ [Cha95]. Por completeza, na seção 7.3, apresentamos o comprimento de espalhamento pión-núcleo na aproximação de Born considerando apenas o espalhamento simples, para fixar a notação e normalizações. Na seção 7.4 revisamos a parametrização do potencial ótico pión-núcleo e sua conexão com a auto-energia do pión.

Na seção 7.5 apresentamos nossos resultados para o potencial isoescalar pión-núcleo considerando as estimativas do termo sigma nuclear obtidas no nosso cálculo no modelo de Skyrme (capítulo 6). Mostramos que é possível explicar a repulsão no canal isoescalar do potencial ótico se for levada em conta a contribuição do termo sigma da interação nuclear (Σ_A^V) na interação pión-núcleo.

7.1. Espalhamento pión-núcleon

Assumindo a invariância das interações fortes por rotações no espaço de isospin, o pión e o núcleon podem ser descritos como $|\pi^+\rangle = |1, +1\rangle$, $|\pi^0\rangle = |1, 0\rangle$, $|\pi^-\rangle = |1, -1\rangle$ e $|p\rangle = |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle$ e $|n\rangle = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$. Usando a teoria da adição do momento angular podemos fazer a projeção na base do isospin total na forma [Bay69 p.351]:

$$\begin{aligned} |\pi^+p\rangle &= \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle \\ |\pi^0p\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ |\pi^-p\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ |\pi^+n\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \end{aligned}$$



$$|\pi^0 n\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$|\pi^- n\rangle = \left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle.$$

Os fatores com raiz quadrada são coeficientes de Clebsch-Gordan. Vejamos as predições das seguintes reações

$$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p \quad (7.1)$$

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p \quad (7.2)$$

e a reação de troca de carga

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n. \quad (7.3)$$

Suponhamos que o próton esteja em repouso inicialmente e que a energia do pión seja a mesma nos três casos. O estado inicial está em um estado $I = 3/2$, $I_3 = 3/2$. Já que I é conservado ($[H_{int}, \mathbf{I}] = 0$), o estado final deve também ter $I = 3/2$ e $I_3 = 3/2$ e a amplitude deste processo é unicamente determinada pela interação no estado de $I = 3/2$. Podemos chamar esta amplitude de $f_{3/2}$,

$$f_{3/2} \equiv f_3 \equiv -\frac{\mu_{red}}{2\pi} \left\langle \frac{3}{2}, m \left| H_{int} \right| \frac{3}{2}, m \right\rangle, \quad (7.4)$$

onde $\mu_{red} = \frac{m_\pi}{1+m_\pi/M_N}$.

Na reação (7.2) o estado inicial $|\pi^- p\rangle$ é a combinação linear de estados de $I = 3/2$ e $I = 1/2$. A componente $I = 3/2, I_3 = -1/2$ do espalhamento tem amplitude de espalhamento $f_{3/2}$ determinada pela interação no estado $I = 3/2$ (é a mesma $f_{3/2}$ pois a amplitude não depende de I_3); o espalhamento da componente $I = 1/2, I_3 = -1/2$ será determinado pela interação no estado $I = 1/2$, que terá amplitude $f_{1/2}$,

$$f_{1/2} \equiv f_1 \equiv -\frac{\mu_{red}}{2\pi} \left\langle \frac{1}{2}, m \left| H_{int} \right| \frac{1}{2}, m \right\rangle. \quad (7.5)$$

Levando em conta os fatores de Clebsch-Gordan presentes nas projeções de $|\pi^- p\rangle$, teremos

$$A_{\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p} = -\frac{\mu_{red}}{2\pi} \left\langle \pi^- p \left| H_{int} \right| \pi^- p \right\rangle = \frac{1}{3} f_3 + \frac{2}{3} f_1 \quad (7.6)$$

Com raciocínio análogo

$$A_{\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n} = -\frac{\mu_{red}}{2\pi} \left\langle \pi^- n \left| H_{int} \right| \pi^- n \right\rangle = \frac{\sqrt{2}}{3} (f_3 - f_1) \quad (7.7)$$

e

$$A_{\pi^- n} = -\frac{\mu_{red}}{2\pi} \left\langle \pi^- n \left| H_{int} \right| \pi^- n \right\rangle = f_3. \quad (7.8)$$

Até aqui fizemos uma explanação simplificada para ilustrar como se calculam as amplitudes de transição projetadas nos canais de isospin. Uma abordagem

mais completa [EW88 p.15][Tho80] é dada pela expansão em ondas parciais em termos dos polinômios de Legendre e suas derivadas $P'_l(x) = dP_l/dx$,

$$A(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \sum_I \hat{P}_I \left\{ \sum_l [(l+1)f_{I,l+}(\omega) + lf_{I,l-}(\omega)] P_l(\cos \theta) - i\sigma \cdot (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}}') \sum_l [f_{I,l+}(\omega) - f_{I,l-}(\omega)] P'_l(\cos \theta) \right\}. \quad (7.9)$$

As ondas parciais são especificadas pelo isospin I e momento angular orbital l^\pm correspondendo a um momento angular total de $J = l \pm \frac{1}{2}$. Aqui \hat{P}_I é o operador projeção num estado de isospin total I . No espalhamento elástico, $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'|$ e a amplitude em ondas parciais ($\alpha \equiv Il_j$) é

$$f_\alpha(k) = \frac{\eta_\alpha \exp[2i\delta_\alpha] - 1}{2ik} \quad (7.10)$$

onde δ_α é o deslocamento de fase e $\eta_\alpha (\leq 1)$ o parâmetro de inelasticidade. O canal inelástico tem o seu limiar na energia de produção de píons $\pi + N \rightarrow \pi\pi + N$. O espalhamento em muito baixa energia tem contribuição da onda s apenas e, no limite de energia cinética zero, definimos os comprimentos espalhamento (a_1, a_3) como [Lan90 p.51]

$$a_{2I} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\tan \delta_{I,0}}{k}. \quad (7.11)$$

Valores experimentais para os comprimentos de espalhamento comuns na literatura [EW88 p.17] são encontrados como

$$a_1 = 0,173(3)m_\pi^{-1} \quad \text{e} \quad a_3 = -0,101(4)m_\pi^{-1}. \quad (7.12)$$

Experimentos mais recentes obtiveram no átomo piônico, $a_{\pi^-p \rightarrow \pi^-p} = 0,0885(9)m_\pi^{-1}$ e $a_{\pi^-p \rightarrow \pi^0n} = -0,136(1)m_\pi^{-1}$ [Sig95] e no espalhamento π^+p , $a_{\pi^+p \rightarrow \pi^+p} = a_3 = -0,077(3)m_\pi^{-1}$ [Fet97].

Numa forma geral o comprimento de espalhamento pión-núcleon pode ser expresso por ¹:

$$a_{\pi N} = b_0 + b_1 \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (7.13)$$

onde \mathbf{t} é operador de isospin para o pión com propriedades $t_3 |\pi_\lambda\rangle = \lambda |\pi_\lambda\rangle$ e $\mathbf{t}^2 |\pi_\lambda\rangle = 2 |\pi_\lambda\rangle$, $\boldsymbol{\tau}$ é o operador de isospin do núcleon de forma que $\tau_3 |p\rangle = |p\rangle$, $\tau_3 |n\rangle = -|n\rangle$, τ_i são as matrizes de Pauli e o isospin total \mathbf{I} é obtido por $\mathbf{I} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\tau} + \mathbf{t}$. Os parâmetros

$$b_0 = \frac{1}{3}(2a_3 + a_1) \quad \text{e} \quad b_1 = \frac{1}{3}(a_3 - a_1) \quad (7.14)$$

¹Revisões a respeito do espalhamento pion-nucleon (πN) e pión-núcleo (πA) podem ser encontradas em [Tho80][EK80 p.18][EW88 p.15][Klu91].

são respectivamente os comprimentos de espalhamento isoescalar e isovetorial. Eles podem ser também relacionados diretamente aos comprimentos de espalhamento experimentais na forma

$$\begin{aligned} a_{\pi^-p \rightarrow \pi^0n} &= \sqrt{2}b_1, \\ a_{\pi^-p \rightarrow \pi^-p} &= b_0 - b_1. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Usando (7.12) obtemos

$$b_0 = -0,010(3)m_\pi^{-1} \quad \text{e} \quad b_1 = -0,091(2)m_\pi^{-1} \quad (7.16)$$

e com dados mais recentes $a_{\pi^-p \rightarrow \pi^-p} = 0,0885(9)m_\pi^{-1}$ e $a_{\pi^-p \rightarrow \pi^0n} = -0,136(1)m_\pi^{-1}$ [Sig95] temos

$$b_0 = -0,0077(11)m_\pi^{-1} \quad \text{e} \quad b_1 = -0,0962(7)m_\pi^{-1}. \quad (7.17)$$

7.2. Espalhamento pión-dêuteron

Considere dois espalhadores fixos '1' e '2' a uma distância r_{12} e com um comprimento de espalhamento elementares $a_{(1)}$ e $a_{(2)}$. Em ordem mais baixa, o comprimento de espalhamento total é a soma dos espalhamentos $a_{(1)} + a_{(2)}$. Esta é chamada de *aproximação de impulso*. Em segunda ordem o espalhamento na partícula '1' dá origem a uma onda esférica $a_{(1)}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^{-1}$ que será reespalhada em '2' e vice-versa. Tomando o valor esperado com os centros de espalhamento estáticos, o comprimento de espalhamento total a até segunda ordem é [EW88 p.110]

$$a = a_{(1)} + a_{(2)} + 2a_{(1)}a_{(2)} \left\langle \frac{1}{r_{12}} \right\rangle + \dots \quad (7.18)$$

Se $a_{(1,2)}/r_{12}$ é um número pequeno, é em geral suficiente considerar só o termo de primeira ordem na expressão (7.18). Entretanto se em $a_{(1)} + a_{(2)}$ há grande cancelamento, o segundo termo deve ser cuidadosamente considerado.

É uma característica da interação pión-núcleon que a soma isoescalar, $a_{\pi n} + a_{\pi p}$ (que é uma quantidade relevante no espalhamento πd), é muito pequena devido a cancelamentos. De fato, no limite quiral para píons moles o comprimento de espalhamento isoescalar se anula [Wei66]. A aproximação de impulso para o cálculo do espalhamento pión-dêuteron é

$$a_{\pi^-p} + a_{\pi^-n} = \frac{1}{3}a_3 + \frac{2}{3}a_1 + a_3 = 2\left(\frac{2}{3}a_3 + \frac{1}{3}a_1\right) = 2b_0. \quad (7.19)$$

O terceiro termo na expressão (7.18), correspondente ao duplo espalhamento, deve ter papel importante nesse contexto.

A expressão (7.18) foi aplicada ao sistema πd com duas pequenas modificações. Primeiro, o comprimento de espalhamento πN , $a_{\pi N} = b_0 + b_1 \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\tau}$ (7.13), não é diagonal com respeito ao próton e ao nêutron. Ele permite troca de carga no termo de duplo espalhamento. Segundo, os núcleons têm massas finitas e haverá correções de massa reduzida. Cada espalhamento πN deve ser substituído por $(1 + m_\pi/M_N)a_{\pi N}$ e o comprimento de espalhamento do dêuteron por $(1 + m_\pi/2M_N)a_{\pi d}$. Com essas modificações a parte real do comprimento de espalhamento fica [EK80 p.90][EW88 p.110]

$$\text{Re } a_{\pi d} = 2\left(1 + \frac{m_\pi}{2M_N}\right)^{-1} \left[\left(1 + \frac{m_\pi}{M_N}\right) b_0 + \left(1 + \frac{m_\pi}{M_N}\right)^2 (b_0^2 - 2b_1^2) \left\langle \frac{1}{r_{12}} \right\rangle \right] \quad (7.20)$$

onde b_0 e b_1 são os parâmetros de espalhamento πN em onda-s descritos na seção anterior. O primeiro termo da expressão corresponde a $a_{\pi-p} + a_{\pi-n}$ obtido em (7.19) com as devidas correções de centro de massa. Ele é muito sensível aos valores experimentais dos comprimentos de espalhamento πN . O termo de duplo espalhamento é governado pela parte dependente de isospin de $a_{\pi N}$ e é insensível a sua incerteza empírica de b_0 . Tomando $\langle 1/r_{12} \rangle = 0,64m_\pi$ e mostrando separadamente as contribuições de simples e duplo espalhamento obteve-se [EW88 p.110]

$$\begin{aligned} \text{Re } a_{\pi d} &= [-0,021(6) - 0,026(1)]m_\pi^{-1} \\ &\simeq -0,047m_\pi^{-1}. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Os erros são devidos às incertezas experimentais dos parâmetros b_0 e b_1 . Esta predição concorda favoravelmente com o valor experimental de $\text{Re } a_{\pi d} = -0,056(9)m_\pi^{-1}$ [Bov85]. Cálculos mais completos considerando interação de três corpos foram realizados por Weinberg[Wei92] chegando a um valor de $-0,050(9)m_\pi^{-1}$. Entretanto um experimento mais recente [Cha95], realizado através da medição do desvio e largura na energia no decaimento $3P - 1S$ do átomo piônico π^-d , resultou num valor $a_{\pi-d} = -0,0264(11) + i0,0054(11)m_\pi^{-1}$. Acreditando neste valor experimental recente, temos que ou o valor de b_0 não é preciso ou a correção de duplo espalhamento não é completa.²

7.3. Comprimento de espalhamento pión-núcleo na aproximação de Born

Com intuito de escrever a normalização dos parâmetros de intensidade do potencial ótico pión-núcleo, escrevemos o comprimento de espalhamento pión-núcleo

²O cometário a esse resultado em [Cha95]: "From this we conclude that either our theoretical understanding of the pion-deuteron scattering length is incomplete or the uncertainties assigned to the πN scattering lengths are greatly underestimated—always assuming isospin symmetry to hold."

considerando apenas o espalhamento simples(*es*). A expressão (7.20) também pode ser generalizada para o comprimento de espalhamento pión-núcleo isoescalar na aproximação de Born [EW88 p.200]

$$\text{Re } a_{\pi A}^{(es)} = A \left(1 + \frac{m_\pi}{AM_N}\right)^{-1} \left(1 + \frac{m_\pi}{M_N}\right) b_0 \quad (7.22)$$

Num caso ainda mais geral, para núcleos quaisquer (isoescalares ou não) teremos [EW88 p.201]

$$\text{Re } a_{\pi^\pm A}^{(es)} = \left(1 + \frac{m_\pi}{AM_N}\right)^{-1} \left(1 + \frac{m_\pi}{M_N}\right) [Ab_0 \mp (N - Z)b_1]. \quad (7.23)$$

7.4. Potencial ótico

No limite estático e sem levar em consideração os fatores de recuo do alvo, o potencial ótico em primeira ordem [EW88 p.202] (ou auto-energia do pión) é

$$\begin{aligned} \Pi^{(0)}(\mathbf{r}) &\equiv 2m_\pi U^{(0)}(\mathbf{r}) \\ &= -4\pi \{b_{0\text{eff}}\rho(\mathbf{r}) + b_1\delta\rho(\mathbf{r}) - \nabla \cdot [c_0\rho(\mathbf{r}) + c_1\delta\rho(\mathbf{r})]\nabla\}. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Este é um potencial na forma proposta por Kisslinger [Kis55]. Aqui ρ e $\delta\rho$ são dados em termos das densidades nêutron ρ_n e do próton ρ_p :

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}) &= \rho_n(\mathbf{r}) + \rho_p(\mathbf{r}), \\ \delta\rho(\mathbf{r}) &= \rho_n(\mathbf{r}) - \rho_p(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (7.25)$$

$\rho(\mathbf{r})$ é normalizado tal que $\int d^3\mathbf{r}\rho(\mathbf{r}) = A$ e

$$b_{0\text{eff}} = b_0 - (b_0^2 + 2b_1^2) \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle. \quad (7.26)$$

e ainda b_0 , b_1 e c_0 , c_1 são os parâmetros do comprimento de espalhamento πN em onda-s e do volume de espalhamento em onda-p, respectivamente.

O potencial ótico em primeira ordem é insuficiente para descrever os dados dos átomos piônicos. Termos de ordem superior são importantes. Uma modificação deste tipo é a renormalização efetiva de campo ou correção de Lorentz-Lorenz [Eri66]. Outro efeito importante é a absorção de píons. Eles são descritos por

$$\Pi_{\text{abs}}(\mathbf{r}) \equiv 2m_\pi U_{\text{abs}}^{(0)}(\mathbf{r}) = -4\pi [B_0\rho^2(\mathbf{r}) - C_0\nabla \cdot \rho^2(\mathbf{r})\nabla]. \quad (7.27)$$

Os parâmetros complexos B_0 e C_0 são relacionados a processos onde o pión é absorvido por pares de núcleons em onda-s e onda-p dadas por $\text{Im } B_0$ e $\text{Im } C_0$,

respectivamente. As partes reais $\text{Re } B_0$ e $\text{Re } C_0$ descrevem as correspondentes contribuições de dispersão.

Incluindo as correções cinemáticas de centro de massa temos uma expressão total

$$\Pi(\mathbf{r}) \equiv 2m_\pi U(\mathbf{r}) = 2m_\pi (U^{l=0}(\mathbf{r}) + U^{l=1}(\mathbf{r})) \quad (7.28)$$

onde

$$\begin{aligned} 2m_\pi U^{l=0}(\mathbf{r}) &= \Pi^{l=0}(\mathbf{r}) = -4\pi [b(\mathbf{r}) + B(\mathbf{r})] \\ 2m_\pi U^{l=1}(\mathbf{r}) &= \Pi^{l=1}(\mathbf{r}) = +4\pi \nabla \cdot \left[\frac{c(\mathbf{r}) + C(\mathbf{r})}{1 + 4\pi g' [c(\mathbf{r}) + C(\mathbf{r})]} \right] \nabla \end{aligned}$$

e as quantidades de onda-s e onda-p $b(\mathbf{r}), B(\mathbf{r})$ e $c(\mathbf{r}), C(\mathbf{r})$ são definidas como

$$\begin{aligned} b(\mathbf{r}) &= \left(1 + \frac{m_\pi}{M_N} \right) [b_{0\text{eff}}\rho(\mathbf{r}) + b_1\delta\rho(\mathbf{r})] \\ c(\mathbf{r}) &= \left(1 + \frac{m_\pi}{M_N} \right)^{-1} [c_0\rho(\mathbf{r}) + c_1\delta\rho(\mathbf{r})] \\ B(\mathbf{r}) &= \left(1 + \frac{m_\pi}{2M_N} \right) B_0\rho^2(\mathbf{r}) \\ C(\mathbf{r}) &= \left(1 + \frac{m_\pi}{2M_N} \right)^{-1} C_0\rho^2(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Conforme o trabalho de Seki e Masutani [Sek83], não é possível separar experimentalmente, sem ambigüidades, a dependência de ρ e ρ^2 do potencial ótico. A razão para isto é que o pión não é sensível em baixas energias aos detalhes da densidade e tudo se passa como se o pión fosse espalhado a uma densidade média ρ_e . Assim os ajustes experimentais determinam univocamente a quantidade

$$b_0^{SM} = b_{0\text{eff}} + \left(1 + \frac{m_\pi}{2M_N} \right) B_0\rho_e \quad (7.29)$$

e $\rho_e \sim \rho_N/2$, ρ_N é a densidade normal da matéria nuclear. Na discussão que se seguirá iremos determinar b_0^{SM} para os vários núcleos.

Na descrição dos níveis de energia de átomos piônicos, o potencial ótico é usado na equação de Klein-Gordon juntamente com o potencial de Coulomb V_{Coul} da distribuição de carga nuclear [EW88 p.205]

$$\left[\nabla^2 + (\omega - V_{Coul}(\mathbf{r}))^2 - m_\pi^2 - \Pi(\mathbf{r}) \right] \varphi(\mathbf{r}) = 0, \quad (7.30)$$

aqui ω é a energia do pión no centro de massa do sistema $\varphi(\mathbf{r})$ é a função de onda do pión.

7.5. O termo sigma nuclear no potencial onda s pión-núcleo

Considerando que no capítulo anterior obtivemos uma estimativa da contribuição do potencial NN para o termo sigma nuclear, podemos também avaliar como esse resultado se manifesta no potencial onda s pión-núcleo. A contribuição para a Lagrangiana de interação entre o pión e o núcleo que é originada pelo termo sigma nuclear (Σ_A) é dada por

$$\mathcal{L}_{\text{int}}^{\Sigma} = \frac{m_q}{2f_{\pi}^2} \langle \psi_A | \bar{q}(x)q(x) | \psi_A \rangle \pi^2. \quad (7.31)$$

Podemos aproximar

$$m_q \langle \psi_A | \bar{q}(x)q(x) | \psi_A \rangle \simeq \frac{\Sigma_A}{A} \rho(\mathbf{r}) \quad (7.32)$$

com $\int d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) = A$. O termo sigma nuclear é separado nas contribuições de um núcleo, potencial e energia cinética; $\Sigma_A = A\Sigma_N + \Sigma_A^V + \Sigma_A^K$ (ver eq. 3.46). Definiremos $\Sigma_A^{V+K} \equiv \Sigma_A^V + \Sigma_A^K$.

A componente da Lagrangiana de interação que origina o potencial s ($U^{l=0}(\mathbf{r})$) pode ser escrita como

$$\mathcal{L}_{\text{int}}^{l=0} = -\frac{\Pi^{l=0}(\mathbf{r})}{2} \pi^2 \quad (7.33)$$

onde a auto energia onda s é dada por

$$\Pi^{l=0}(\mathbf{r}) = -4\pi(1 + m_{\pi}/M_N)[b_{0\text{eff}}^{\text{livre}} + \frac{\Sigma_A^{V+K}}{4\pi f_{\pi}^2 A} (1 + \frac{m_{\pi}}{M_N})^{-1}] \rho(\mathbf{r}). \quad (7.34)$$

Na equação (7.34) para auto energia $\Pi^{l=0}(\mathbf{r})$, o termo que contém Σ_A^{V+K} vem de $\mathcal{L}_{\text{int}}^{\Sigma^{V+K}} \simeq \frac{\Sigma_A^{V+K}}{A} \rho(\mathbf{r})$. O termo $b_{0\text{eff}}^{\text{livre}}$ contém todos os mecanismos de interação do pión com o núcleo não incluídos em $\mathcal{L}_{\text{int}}^{\Sigma^{V+K}}$. A normalização foi escolhida de forma que $b_{0\text{eff}}^{\text{livre}}$ tenha a mesma normalização do comprimento de espalhamento πN .

Introduzindo na equação de Klein-Gordon para o pión (7.30), a auto-energia $\Pi^{l=0}(\mathbf{r})$, usando $\omega^2 = k^2 + m_{\pi}^2$ e dividindo pelo fator $2m_{\pi}$, obtemos

$$\left[-\frac{\nabla^2}{2m_{\pi}} + \frac{2\omega V_{\text{Coul}}}{2m_{\pi}} - \frac{V_{\text{Coul}}^2}{2m_{\pi}} - \frac{\Pi^{l=0}(\mathbf{r})}{2m_{\pi}} \right] \varphi_a(\mathbf{r}) = \frac{k^2}{2m_{\pi}} \varphi_a(\mathbf{r}). \quad (7.35)$$

Com isto obtemos a equação de Schrödinger para o pión, onde identificamos o potencial

$$U^{l=0}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2m_{\pi}} \Pi^{l=0}(\mathbf{r}). \quad (7.36)$$

A contribuição do potencial ótico e do termo Σ_A^{V+K} é dada por

$$U_{\Sigma_A^{V+K}}^{l=0}(\mathbf{r}) = -\frac{\Sigma_A^{V+K}}{2m_\pi f_\pi^2 A} \rho(\mathbf{r}), \quad (7.37)$$

onde a definição de (7.34) foi usada. Assim, se Σ_A^{V+K} for positivo ele terá uma contribuição atrativa ao potencial ótico e repulsiva caso contrário.

Na aproximação de Born, a amplitude de espalhamento na aproximação de grandes comprimentos de onda é dada por

$$f(\mathbf{k}) = -\frac{\mu_\pi}{2\pi} \int d^3\mathbf{r} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} U^{l=0}(\mathbf{r}). \quad (7.38)$$

O recuo do núcleo é considerado na equação (7.38) pelo fator de massa reduzida $\mu_\pi = m_\pi M_A / (m_\pi + M_A)$, que corresponde a adicionar a energia cinética não relativística do alvo na equação de Schrödinger para o pión (7.35).

O comprimento de espalhamento pión-núcleo na aproximação de Born é dado por

$$a = -\frac{\mu_\pi}{2\pi} \int d^3\mathbf{r} U^{l=0}(\mathbf{r}). \quad (7.39)$$

Apesar de discutirmos a aproximação de Born em geral, ela só será utilizada para os núcleos leves como o dêuteron, ^3He e ^4He , quando discutirmos os dados experimentais. Para os núcleos mais pesados iremos comparar com o parâmetro de espalhamento b_0^{SM} obtido da análise de dados experimentais [Sek83] e definido como o coeficiente do termo $\rho(\mathbf{r})$ no potencial ótico

$$2m_\pi U^{l=0}(\mathbf{r}) = -4\pi(1 + m_\pi/M_N) b_0^{\text{SM}} \rho(\mathbf{r}). \quad (7.40)$$

Comparando as equações (7.34)(7.36) e (7.40), obtemos

$$b_0^{\text{SM}} = b_{0\text{eff}}^{\text{livre}} + \frac{\Sigma_A^{V+K}}{4\pi f_\pi^2 A} \left(1 + \frac{m_\pi}{M_N}\right)^{-1}, \quad (7.41)$$

que é a contribuição por núcleon do termo sigma nuclear devido ao potencial NN acrescido da contribuição da energia cinética para o comprimento de espalhamento πN que cada núcleon apresenta no meio nuclear.

O comprimento de espalhamento isoescalar $b_{0\text{eff}}^{\text{livre}}$ foi obtido utilizando o valor experimental do comprimento de espalhamento πd ($\text{Re } a_{\pi d} = -0,0264(11)m_\pi^{-1}$) [Cha95],

$$b_{0\text{eff}}^{\text{livre}} = \left(1 + \frac{m_\pi}{M_N}\right)^{-1} \left[\left(1 + \frac{m_\pi}{M_d}\right) \frac{\text{Re } a_{\pi d}}{2} - \frac{\Sigma_d^{V+K}}{8\pi f_\pi^2} \right], \quad (7.42)$$

com os valores $m_\pi = 138\text{MeV}$, $M_N = 938\text{MeV}$, $M_d = 2M_N$, $f_\pi = 93\text{MeV}$. Foi utilizado $\Sigma_d^{V+K} = -4,46\text{MeV}$, extraído da Tabela 6.6 para os parâmetros $f_\pi =$

93MeV e $e = 4,0$. Estes parâmetros se ajustam à onda parcial p do espalhamento πN [Hol90]. Substituindo estes valores em (7.42) obtivemos³

$$b_{0\text{eff}}^{\text{livre}} = -0,0099 (m_{\pi}^{-1}). \quad (7.43)$$

Este valor é consistente com o valor de $-0,0077(11) m_{\pi}^{-1}$ obtido da ref. [Sig95] na hipótese da simetria de isospin ser válida e também com o valor de $-0,0083(38) m_{\pi}^{-1}$ [Koc86].

Foi relatado que o comprimento de espalhamento para núcleons ligados se desvia do comprimento de espalhamento previsto pela teoria para núcleons livres⁴. Nesse sentido admitimos que a causa para tal desvio é justamente a contribuição do termo sigma devida ao potencial e energia cinética. Existe muita controvérsia sobre o valor da constante isoescalar b_0 e não é o objetivo deste trabalho calcular precisamente este valor. Assim, obtivemos o valor isoescalar efetivo $b_{0\text{eff}}^{\text{livre}}$ originado pelo valor experimental para o comprimento de espalhamento pión-dêuteron que tem embutidos o cálculo do espalhamento simples e duplo além do incluído no valor de Σ_d^{V+K} .

Com os resultados da contribuição do potencial e energia cinética ao termo sigma calculados no capítulo anterior e usando (7.41) construímos a tabela 7.1. Os resultados experimentais foram extraídos a partir da análise de átomos piônicos e espalhamento pión-núcleo [Sek83].

No caso particular do ${}^3\text{He}$ o valor de $b_{0\text{eff}}^{(\text{exp})}$ foi calculado descontando-se a contribuição isovetorial com base na eq.(7.23), i.e., considerando apenas espalhamento simples

$$b_{0\text{eff}}^{(\text{exp})} \pi^{-A} = \frac{1}{A} \left[\left(1 + \frac{m_{\pi}}{M_N} \right)^{-1} \left(1 + \frac{m_{\pi}}{AM_N} \right) \text{Re} a_{\pi^{-A}}^{(es)} - (N - Z)b_1 \right] \quad (7.44)$$

e para com o valor experimental de $\text{Re} a_{\pi^{-3}\text{He}} = 0,056(6)$ [EW88 p.201] e $b_1 = -0,0962(7)$ de (7.17) obtivemos $b_{0\text{eff}}^{(\text{exp})}({}^3\text{He}) \approx -0,015$. O resultado experimental para o ${}^{12}\text{C}$ foi obtido da análise de Seki-Masutani [Sek83]. O mesmo também para o ${}^{16}\text{O}$ extrapolado de dados do espalhamento com π^{-} em energias de 29MeV e 50MeV. No referido trabalho também é definida a densidade efetiva $\rho_e = \rho_N/2$ própria para descrição da interação do pión com a matéria nuclear. Para matéria nuclear,

³Para obter o resultado em unidades de m_{π}^{-1} basta multiplicar o termo em Σ (7.42) por $m_{\pi} = 138\text{MeV}$.

⁴[Klu91 p.1302]: "The conclusion is that this repulsion cannot be obtained by an iteration of πN interaction, but rather represents an independent feature of the interaction of pions with bulk nuclear matter. An attempt to explain this as a binding effect of the nucleons has been undertaken in the framework of relativistic mean field theory of the nucleus (Birbair et al 1983 J.Phys.G: Nucl.Phys 9 1473; Goudsmit et al 1989 Preprint ETHZ-IMP RP-90-03 ETH Zürich)"

o valor empírico de $-0,0304m_\pi^{-1}$ foi obtido por Salcedo et al[Sal95] fazendo uma média de análises de átomos piônicos.

Tabela-7.1 $-f_\pi=93\text{MeV } e=4,0$		espalhamento em onda s (m_π^{-1})		
	$\Sigma_A^{V+K}/A(\text{MeV})$	b_0^{V+K}	$b_0^{V+K} + b_{0\text{eff}}^{\text{livre}}$	$b_{0\text{eff}}^{(\text{exp})}$
$^2\text{H}(\text{Reid})$	-2,23	-0,0025	-0,0123	-0,0123(3)
$^3\text{H}(\text{estim.})$	-5,67	-0,0063	-0,0162	-
$^3\text{He}(\text{estim.})$	-5,67	-0,0063	-0,0162	$\approx -0,015$
$^4\text{He}(3\text{pF})$	-9,90	-0,0110	-0,0209	-0,0212(5)
$^{10}\text{B}(\text{h.o.})$	-11,8	-0,0131	-0,0230	-
$^{12}\text{C}(3\text{pF})$	-14,2	-0,0157	-0,0256	-0,0260
$^{14}\text{N}(\text{h.o.})$	-14,5	-0,0160	-0,0259	-
$^{16}\text{O}(3\text{pF})$	-14,9	-0,0165	-0,0264	$-0,026^{(50\text{MeV})}; -0,027^{(29\text{MeV})}$
$^{20}\text{Ne}(2\text{pF})$	-14,5	-0,0160	-0,0259	-
$^{24}\text{Mg}(3\text{pF})$	-17,2	-0,0190	-0,0289	-
$^{32}\text{S}(3\text{pF})$	-18,5	-0,0204	-0,0303	-
$^{40}\text{Ca}(3\text{pF})$	-19,3	-0,0213	-0,0312	$-0,033^{(25\text{MeV})}$
$^{56}\text{Fe}(3\text{pG})$	-21,5	-0,0228	-0,0327	-
$^{118}\text{Sn}(3\text{pG})$	-24,5	-0,0271	-0,0370	-
$^{148}\text{Sm}(2\text{pF})$	-25,1	-0,0277	-0,0376	-
$^{197}\text{Au}(2\text{pF})$	-27,4	-0,0303	-0,0402	-
$^{208}\text{Pb}(3\text{pG})$	-28,6	-0,0316	-0,0415	-
$\rho_e = 0,17\text{fm}^{-3}/2$	-19,5A	-0,0216	-0,0315	-0,0304

Tabela 7.1 Cálculo do parâmetro isoescalar do potencial ótico incluindo a contribuição do termo sigma do potencial na eq. (7.41). Os valores experimentais do ^{12}C , ^{16}O foram estimados a partir da análise descrita em [Sek83] e do ^{40}Ca em [Sek88]⁵. O valor experimental do dêuteron foi usado para cálculo do $b_{0\text{eff}}^{\text{livre}}$, que foi suposto constante para todos os núcleos e igual a $-0,0099(m_\pi^{-1})$.

O termo sigma do potencial por nós calculado gera uma repulsão no ^{12}C da ordem de $U_\Sigma^{V+K}(\mathbf{r}) = -\frac{\Sigma_A^{V+K}}{2m_\pi f_\pi^2 A} \rho(\mathbf{r}) \simeq -(-14,2)/(2 \times 138 \times 93^2) \times 0,17 \times 197,3^3 \approx 8\text{MeV}$ que é aproximadamente da mesma ordem que o desejado para fitar os átomos piônicos (≈ 15 a 30 MeV) [Klu91 p.1301] e “é pouco dependente de A” [Klu91p.1301].

⁵ “We find that the real part of the local potential parameter ($\text{Re } b_o$) best fit to the ^{40}Ca and ^{58}Ni data is appreciably larger than the value best fit to the π^\pm - ^{12}C and π^\pm - ^{16}O data” [Sek88].

Observamos um bom acordo de nossos cálculos com resultados semi-empíricos. Para concluir, se usarmos o valor de $b_0 = -0,0077(11)m_\pi^{-1}$ obtido usando a simetria de isospin a partir dos dados experimentais de Sigg et al[Sig95], obtemos para o dêuteron, usando apenas Σ_d^{V+K} como única contribuição,

$$\begin{aligned} a_{\pi d} &= 2 \times [(-0,0077) + (-0,0025)]m_\pi^{-1} \times (1 + m_\pi/M_N)/(1 + m_\pi/2M_N) \\ &= -0,022m_\pi^{-1}. \end{aligned}$$

Isto indicaria que é possível que a contribuição para o reespalhamento no dêuteron esteja superestimada nos cálculos realizados até aqui.

8. CONCLUSÕES

Calculamos o termo sigma de um núcleon no modelo de Skyrme usando a relação de Gell-Mann, Oakes e Renner (GOR) chegando a um valor em torno de 50 a 60 MeV. Utilizamos um método diferente do de Adkins[Ad84]. Com o nosso método também mostramos que as massas dos quarks têm papel importante nos observáveis de um núcleon.

Calculamos o termo sigma do potencial NN no contexto do modelo de Skyrme no ansatz produto e usando a relação de GOR obtivemos $m_q \frac{\partial V^{NN}}{\partial m_q}$. No canal central esta derivada do potencial se mostrou com valor apreciável na região de 0,8 a 2fm, da ordem de -20MeV, suficiente para justificar o potencial NN atrativo. Isso revelou que se as massas dos quarks fossem nulas, núcleos mais pesados que o dêuteron não ligariam.

Com o resultado $m_q \frac{\partial V^{NN}}{\partial m_q}$ e com as funções de densidade de núcleos finitos, calculamos a contribuição do termo sigma devida à interação entre os núcleons. Nosso cálculo do termo sigma do potencial, usando a relação de GOR e derivando em relação à massa do pión, produziu resultados muito diferentes daqueles que calculamos tomando apenas a contribuição do termo de quebra de simetria \mathcal{L}_{sb} (conforme [Ad84] no caso de um corpo). Isto ocorre pois há uma enorme contribuição do termo de quarta ordem \mathcal{L}_4 . Constatamos que é na região intermediária(1fm-2fm) que o potencial NN dá a maior contribuição ao termo sigma.

A contribuição do termo sigma do potencial foi incorporada ao comprimento de espalhamento isoescalar efetivo do potencial ótico pión-núcleo e houve um acordo surpreendente com os valores empíricos extraídos de experimentos com átomos piônicos e espalhamento. Mostramos que é possível explicar a repulsão no canal isoescalar do potencial ótico se for levada em conta a contribuição do termo sigma da interação nuclear (Σ_A^V) na interação pión-núcleo.

Na matéria nuclear, concluímos que devemos considerar a correção do termo sigma do potencial ao termo sigma nuclear na forma $\Sigma_A = A\Sigma_N + \Sigma_A^V + \Sigma_A^K$. Esta correção tem influência no cálculo do condensado $\langle \bar{q}q \rangle_\rho / \langle \bar{q}q \rangle_{vac} = 1 - \rho\Sigma_A / Am_\pi^2 f_\pi^2$, e como Σ_A^V é negativo há uma tendência de diminuir drasticamente o valor de Σ_A . Assim o condensado, na densidade normal para matéria nuclear deve valer $\langle \bar{q}q \rangle_{\rho_N} / \langle \bar{q}q \rangle_{vac} \approx 1 - 0,17 \times (45 - 39) / (138^2 \times 93^2) \times (197,3)^3 \approx 0,95$ e portanto não diminui tanto quanto previsto pelas estimativas recentes [Coh92,

Li94,Del95,BW96].

Perspectivas Futuras

1)Recalcular o termo sigma do potencial usando a solução exata com métodos numéricos, o que irá dar maior credibilidade aos nossos resultados obtidos na aproximação do ansatz produto.

2)Na área de átomos piônicos poderemos fazer comparações mais diretas do nosso potencial πA para prever os desvios nos níveis de energia para os diferentes núcleos nos átomos piônicos e comparar com os desvios experimentais.

3)Estender nossos cálculos usando o modelo de Skyrme no SU(3). Isto permitirá inferir grandezas do espalhamento káon-núcleo e átomos kaônicos [Bat95].

4)Na matéria nuclear deveremos nos aprofundar no estudo da variação do valor do condensado no meio nuclear e explorar suas conseqüências.

A. UNIDADES E NOTAÇÃO

Usamos unidades naturais onde $\hbar = c = 1$.

A convenção de soma de Einstein se aplica a todos os índices repetidos. Em geral, as letras gregas em geral $\alpha, \beta, \mu, \nu, \dots$ denotam índices de Lorentz, as letras do início do alfabeto a, b, c, d, \dots são índices de isospin e as letras do meio do alfabeto i, j, k, l, m, n, \dots são índices espaciais.

A métrica usada é

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Os tensores de Levi-Civita são definidos por $\epsilon_{ijk} = +1(-1)$ para (i, j, k) para um número par(ímpar) de permutações de $(1,2,3)$ e $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = -\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = +1(-1)$ para $(\mu, \nu, \alpha, \beta)$ com um número par(ímpar) de permutações de $(0,1,2,3)$. Para índices repetidos seus valores são nulos.¹ Algumas identidades envolvendo os tensores de Levi-Civita são:

$$\begin{aligned} \epsilon_{0ijk} &= \epsilon_{ijk} \\ \epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} &= \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km} \\ \epsilon_{ijk}\epsilon_{mj k} &= 2\delta_{im} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Um trivetor com chapéu ($\hat{\ }$) é um vetor unitário ou versor

$$\hat{r}_i = \frac{r_i}{r} \quad (\text{A.3})$$

onde $r^2 = r_i r_i$.

Sob ação da derivada temos

$$\partial_i \mathbf{r} = \hat{r}_i \quad (\text{A.4})$$

¹Esta convenção difere da aprensetada no apêndice B de [Bh88], onde $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = -\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = +1(-1)$ para $(\mu, \nu, \alpha, \beta)$ com um número par(ímpar) de permutações de $(0,1,2,3)$.

e

$$\partial_i \hat{r}_a = \frac{1}{r} (\delta_{ia} - \hat{r}_i \hat{r}_a) \quad (\text{A.5})$$

As matrizes τ_i de Pauli 2×2 são dadas por

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

que são hermitianas e satisfazem a álgebra

$$\tau_i \tau_j = \delta_{ij} I + i \epsilon_{ijk} \tau_k \quad (\text{A.7})$$

que corresponde às seguintes relações de comutação e anticomutação:

$$[\tau_i, \tau_j] = 2i \epsilon_{ijk} \tau_k \quad (\text{A.8})$$

$$\{\tau_i, \tau_j\} = 2\delta_{ij} I, \quad (\text{A.9})$$

onde I é a matriz identidade 2×2 . Algumas relações úteis envolvendo as matrizes τ são:

$$\tau_i \tau_i = 3I \quad (\text{A.10})$$

$$\tau_i \tau_a \tau_i = -\tau_a \quad (\text{A.11})$$

$$\tau_i \tau_a \tau_b \tau_i = -\tau_a \tau_b + 4\delta_{ab} I \quad (\text{A.12})$$

e ainda

$$\text{Tr}[\tau_a] = 0 \quad (\text{A.13})$$

$$\text{Tr}[\tau_a \tau_b] = 2\delta_{ab} \quad (\text{A.14})$$

$$\text{Tr}[\tau_a \tau_b \tau_c] = 2i \epsilon_{abc} \quad (\text{A.15})$$

$$\text{Tr}[\tau_a \tau_b \tau_c \tau_d] = 2(\delta_{ab} \delta_{cd} - \delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ad} \delta_{bc}). \quad (\text{A.16})$$

B. TEOREMA DE HELLMANN-FEYNMAN

Seja $H(\lambda)$ um operador Hermitiano que depende de um parâmetro real λ e $|\psi(\lambda)\rangle$ um autovetor normalizado de $H(\lambda)$ de autovalor $E(\lambda)$:

$$H(\lambda) |\psi(\lambda)\rangle = E(\lambda) |\psi(\lambda)\rangle \quad (\text{B.1})$$

$$\langle \psi(\lambda) | \psi(\lambda) \rangle = 1 \quad (\text{B.2})$$

O Teorema de Hellmann-Feynman afirma que [Mer70][CoT77 p.1192] :

$$\frac{d}{d\lambda} E(\lambda) = \langle \psi(\lambda) | \frac{d}{d\lambda} H(\lambda) | \psi(\lambda) \rangle \quad (\text{B.3})$$

Esta relação pode ser provada da seguinte forma. De acordo com (B.1) e (B.2), temos:

$$E(\lambda) = \langle \psi(\lambda) | H(\lambda) | \psi(\lambda) \rangle \quad (\text{B.4})$$

Se diferenciarmos esta relação com respeito a λ , obteremos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} E(\lambda) &= \langle \psi(\lambda) | \frac{d}{d\lambda} H(\lambda) | \psi(\lambda) \rangle \\ &+ \left[\frac{d}{d\lambda} \langle \psi(\lambda) | \right] H(\lambda) | \psi(\lambda) \rangle + \frac{d}{d\lambda} \langle \psi(\lambda) | H(\lambda) \left[\frac{d}{d\lambda} | \psi(\lambda) \rangle \right] \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Usando (B.1) e a relação do conjugado [$H(\lambda)$ é hermitiano e portanto $E(\lambda)$ é real] resulta em

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} E(\lambda) &= \langle \psi(\lambda) | \frac{d}{d\lambda} H(\lambda) | \psi(\lambda) \rangle \\ &+ E(\lambda) \left\{ \left[\frac{d}{d\lambda} \langle \psi(\lambda) | \right] | \psi(\lambda) \rangle + \langle \psi(\lambda) | \left[\frac{d}{d\lambda} | \psi(\lambda) \rangle \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

A expressão entre chaves é a derivada de $\langle \psi(\lambda) | \psi(\lambda) \rangle$, que é zero pois $|\psi(\lambda)\rangle$ é normalizada; e assim chegamos a (B.3).

C. RELAÇÕES ÚTEIS

C.1. Modelo de Skyrme

Combinamos diversas convenções [Ro86], [Bh88] para aquela que julgamos mais simples de operar; $c = \cos F$, $s = \sin F$, $F' = \partial F / \partial r$. As letras a, b e d denotam variáveis de Silbar [Op.cit Bh88] sendo: $a = -sF'$, $b = s/r$ e $d = cF' - s/r$.

A partir das relações $\sigma = f_\pi \cos F$ e $\boldsymbol{\pi} = f_\pi \hat{\mathbf{r}} \sin F$ podemos escrever

$$\partial_\alpha \sigma = -f_\pi \sin F F' \hat{r}_\alpha = f_\pi s F' \hat{r}_\alpha = f_\pi a e_\alpha \quad (\text{C.1})$$

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \pi_a &= f_\pi \left[\frac{\sin F}{r} \delta_{\alpha a} + \left(\cos F F' - \frac{\sin F}{r} \right) \hat{r}_\alpha \hat{r}_a \right] \\ &= f_\pi \left[\frac{s}{r} \delta_{\alpha a} + \left(cF' - \frac{s}{r} \right) \hat{r}_\alpha \hat{r}_a \right] = f_\pi [b \delta_{\alpha a} + d e_\alpha e_a] \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Após alguma manipulação algébrica teremos:

$$\begin{aligned} (\partial_i \sigma)^2 &= f_\pi^2 a^2 \\ (\partial_i \boldsymbol{\pi})^2 &= f_\pi^2 [3b^2 + 2bd + d^2] \\ 2(\partial_i \sigma)^2 (\partial_j \boldsymbol{\pi})^2 &= f_\pi^4 2a^2 [3b^2 + 2bd + d^2] \\ 2\partial_i \sigma \partial_j \sigma \partial_i \pi_a \partial_j \pi_a &= f_\pi^4 2a^2 (b + d)^2 \\ \partial_i \pi_a \partial_j \pi_a \partial_i \pi_c \partial_j \pi_c &= f_\pi^4 \{ b^2 [b^2 + 2(b + d)^2] + (2bd + d^2)^2 \} \\ (\partial_i \boldsymbol{\pi})^2 (\partial_j \boldsymbol{\pi})^2 &= f_\pi^4 [3b^2 + 2bd + d^2] [3b^2 + 2bd + d^2] \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

O isovetor esquerdo ("left") pode ser escrito na forma

$$\mathbf{L}_i = \frac{1}{f_\pi^2} [\boldsymbol{\pi} \times \partial_i \boldsymbol{\pi} + (\sigma \partial_i \boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\pi} \partial_i \sigma)],$$

em componentes de isospin, temos

$$L_{ai} = -\epsilon_{aib} \frac{s^2}{r} \hat{r}_b + \frac{sc}{r} \delta_{ai} + \left(F' - \frac{cs}{r} \right) \hat{r}_a \hat{r}_i$$

e analogamente o direito ("right")

$$R_{ai} = -\epsilon_{aib} \frac{s^2}{r} \hat{r}_b - \frac{sc}{r} \delta_{ai} - \left(F' - \frac{cs}{r} \right) \hat{r}_a \hat{r}_i$$

C.2. Ansatz Produto

As seguintes definições foram usadas para efeito de notação e manipulação algébrica,

$$\begin{aligned}
s_{1,2} &\equiv \sin F_{1,2} \\
c_{1,2} &\equiv \cos F_{1,2} \\
t_{1,2} &\equiv \frac{s_{1,2}}{r_{1,2}} \\
\alpha &\equiv (\widehat{r}_1 \cdot \widehat{r}_2) \\
\widehat{1} &\equiv \widehat{r}_1 \\
\widehat{2} &\equiv \widehat{r}_2 .
\end{aligned}$$

Produtos duplos

$$\begin{aligned}
L_{ai}^{(1)} R_{ai}^{(2)} &= 2s_1 t_1 s_2 t_2 \alpha - 3t_1 c_1 t_2 c_2 - t_1 c_1 (F'_2 - c_2 t_2) - t_2 c_2 (F'_1 - c_1 t_1) \\
&\quad - (F'_1 - c_1 t_1) (F'_2 - c_2 t_2) \alpha^2 \tag{C.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{ai}^{(1)} R_{bi}^{(2)} &= s_1 t_1 s_2 t_2 (\widehat{1} \cdot \widehat{2} \delta_{ab} - \widehat{1}_b \widehat{2}_a) + \epsilon_{abk} \widehat{1}_k s_1 t_1 c_2 t_2 - (\widehat{1} \times \widehat{2})_a \widehat{2}_b (F'_2 - c_2 t_2) s_1 t_1 \\
&\quad - t_1 c_1 t_2 s_2 \epsilon_{bak} \widehat{2}_k - t_1 c_1 c_2 t_2 \delta_{ab} - t_1 c_1 (F'_2 - c_2 t_2) \widehat{2}_a \widehat{2}_b \\
&\quad - (F'_1 - c_1 t_1) t_2 s_2 (\widehat{1} \times \widehat{2})_b \widehat{1}_a - (F'_1 - c_1 t_1) c_2 t_2 \widehat{1}_b \widehat{1}_a \\
&\quad - (F'_1 - c_1 t_1) (F'_2 - c_2 t_2) (\widehat{1} \cdot \widehat{2}) \widehat{1}_a \widehat{2}_b \tag{C.5}
\end{aligned}$$

Produtos triplos

$$L_{ci} L_{ai} L_{cj} - L_{aj} (L_{ci})^2 = - (F'^2 + t^2) L_{aj} + F' (F'^2 - t^2) \widehat{r}_a \widehat{r}_j \tag{C.6}$$

$$R_{ci} R_{bj} R_{cj} - R_{bi} (R_{cj})^2 = - (F'^2 + t^2) R_{bi} + F' (F'^2 - t^2) \widehat{r}_b \widehat{r}_i \tag{C.7}$$

Produtos Quadruplos

$$\begin{aligned}
&(\epsilon_{mna} L_{mi}^{(1)} L_{nj}^{(1)}) (\epsilon_{rsb} R_{ri}^{(2)} R_{sj}^{(2)}) = \\
&2[\delta_{ab} t_1^2 c_1^2 t_2^2 c_2^2 + s_2^2 t_2^2 t_1^2 c_1^2 \widehat{2}_a \widehat{2}_b - F'_2 s_2 t_2 t_1^2 c_1^2 \epsilon_{abj} \widehat{2}_j \\
&\quad + (F'_2 - c_2 t_2) t_2 c_2 t_1^2 c_1^2 (\delta_{ab} - \widehat{2}_a \widehat{2}_b) + s_1^2 t_1^2 t_2^2 c_2^2 \widehat{1}_a \widehat{1}_b + s_1^2 t_1^2 s_2^2 t_2^2 \widehat{1}_a \widehat{1}_b (\widehat{1} \cdot \widehat{2}) \\
&\quad - F'_2 s_2 t_2 s_1^2 t_1^2 (\widehat{2} \times \widehat{1})_b \widehat{1}_a + (F'_2 - t_2 c_2) s_1^2 t_1^2 (\widehat{1}_a \widehat{1}_b - \widehat{1}_a \widehat{2}_b (\widehat{1} \cdot \widehat{2})) \\
&\quad + F'_1 s_1 t_1 t_2^2 c_2^2 \epsilon_{baj} \widehat{1}_j + F'_1 s_1 t_1 s_2^2 t_2^2 (\widehat{1} \times \widehat{2})_a \widehat{2}_b - F'_2 s_2 t_2 F'_1 s_1 t_1 (\delta_{ab} \widehat{1} \cdot \widehat{2} - \widehat{1}_b \widehat{2}_a) \\
&\quad + F'_1 s_1 t_1 (F'_2 - t_2 c_2) t_2 c_2 (\epsilon_{bas} \widehat{2}_s (\widehat{1} \cdot \widehat{2}) - (\widehat{1} \times \widehat{2})_b \widehat{2}_a) \\
&\quad + (F'_1 - t_1 c_1) t_1 c_1 t_2^2 c_2^2 (\delta_{ab} - \widehat{1}_a \widehat{1}_b) + (F'_1 - t_1 c_1) t_1 c_1 s_2^2 t_2^2 (\widehat{2}_a \widehat{2}_b - \widehat{1}_a \widehat{2}_b (\widehat{1} \cdot \widehat{2}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{(F'_1 - t_1 c_1)t_1 c_1 F'_2 s_2 t_2 (\epsilon_{abn} \widehat{1}_n (\widehat{1} \cdot \widehat{2}) + (\widehat{1} \times \widehat{2})_a \widehat{1}_b)}{+ (F'_1 - t_1 c_1)t_1 c_1 (F'_2 - c_2 t_2)t_2 c_2 [\delta_{ab} (\widehat{1} \cdot \widehat{2})^2 - \widehat{1}_b \widehat{2}_a (\widehat{1} \cdot \widehat{2}) + (\widehat{2} \times \widehat{1})_a (\widehat{2} \times \widehat{1})_b]} \\
& \tag{C.8}
\end{aligned}$$

onde os termos grifados indicam violação local da paridade G.

$$L_{ai}^{(1)} L_{aj}^{(2)} R_{bi}^{(2)} R_{bj}^{(2)} = t_1^2 t_2^2 + t_1^2 F_2'^2 + t_2^2 F_1'^2 + (F_1'^2 - t_1^2)(F_2'^2 - t_2^2) \tag{C.9}$$

$$\begin{aligned}
L_{ai}^{(1)} R_{bi}^{(2)} L_{bj}^{(1)} R_{aj}^{(2)} &= t_1 t_2 \{ 2s_1^2 s_2^2 t_1 t_2 \alpha^2 - 8s_1 t_1 s_2 t_2 c_1 c_2 \alpha - 3s_1 s_2 (F'_1 - c_1 t_1)(F'_2 - c_2 t_2) \alpha (\alpha^2 - 1) \\
& - 2t_1 s_1^2 t_2 c_2^2 - 2(1 - \alpha^2) [s_1^2 c_2 t_1 (F'_2 - c_2 t_2) + c_1 t_2 s_2^2 (F'_1 - c_1 t_1)] \\
& - 2t_1 c_1^2 t_2 s_2^2 + 3t_1 c_1^2 t_2 c_2^2 + 2t_1 c_1^2 c_2 (F'_2 - c_2 t_2) + 2c_1 c_2^2 t_2 (F'_1 - c_1 t_1) \\
& + 4c_1 c_2 (F'_1 - c_1 t_1)(F'_2 - c_2 t_2) \alpha^2 \} \\
& + t_1^2 c_1^2 (F'_2 - c_2 t_2)^2 + 2t_1 c_1 (F'_2 - c_2 t_2)^2 (F'_1 - c_1 t_1) \alpha^2 + (F'_1 - c_1 t_1)^2 c_2^2 t_2^2 \\
& + 2(F'_1 - c_1 t_1)^2 (F'_2 - c_2 t_2)t_2 c_2 \alpha^2 + (F'_1 - c_1 t_1)^2 (F'_2 - c_2 t_2)^2 \alpha^4 \\
& \tag{C.10}
\end{aligned}$$

C.3. Integração Angular

Simetria cilíndrica

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_1 &= \rho \cos \varphi \widehat{i} + \rho \sin \varphi \widehat{j} + (z - d) \widehat{k} \Rightarrow r_1 = [\rho^2 + (z - d)^2]^{1/2} \\
\mathbf{r}_2 &= \rho \cos \varphi \widehat{i} + \rho \sin \varphi \widehat{j} + (z + d) \widehat{k} \Rightarrow r_2 = [\rho^2 + (z + d)^2]^{1/2}
\end{aligned}$$

1. $\int d\varphi \delta_{ab} = 2\pi \delta_{ab}$
2. $\int d\varphi \epsilon_{abc} \widehat{r}_{1c} = 2\pi \frac{z-d}{r_1} \epsilon_{ab3}$
3. $\int d\varphi \epsilon_{abc} \widehat{r}_{2c} = 2\pi \frac{z+d}{r_2} \epsilon_{ab3}$
4. $\int d\varphi \widehat{r}_{1a} \widehat{r}_{2b} = 2\pi \left[\frac{1}{3} \widehat{r}_1 \cdot \widehat{r}_2 \delta_{ab} + \left(\widehat{r}_1 \cdot \widehat{r}_2 - \frac{3}{2} \frac{\rho^2}{r_1 r_2} \right) T_{ab}^{33} \right]$
5. $\int d\varphi \widehat{r}_{1a} \widehat{r}_{1b} = 2\pi \left[\frac{1}{3} \delta_{ab} + \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\rho^2}{r_1^2} \right) T_{ab}^{33} \right]$
6. $\int d\varphi \widehat{r}_{2a} \widehat{r}_{2b} = 2\pi \left[\frac{1}{3} \delta_{ab} + \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\rho^2}{r_2^2} \right) T_{ab}^{33} \right]$
7. $\int d\varphi (\widehat{r}_1 \times \widehat{r}_2)_a \widehat{r}_{2b} = 2\pi \frac{1}{r_1 r_2^2} d\rho^2 \epsilon_{ab3}$
8. $\int d\varphi \widehat{x}_a (\widehat{r}_1 \times \widehat{r}_2)_b = -2\pi \frac{1}{r_1^2 r_2} d\rho^2 \epsilon_{ab3}$
9. $\int d\varphi (\widehat{r}_1 \times \widehat{r}_2)_a (\widehat{r}_1 \times \widehat{r}_2)_b = 2\pi \frac{2d^2 \rho^2}{x^2 y^2} \left(\frac{2}{3} \delta_{ab} - T_{ab}^{33} \right)$
10. $(\widehat{r}_1 \times \widehat{r}_2) \cdot (\widehat{r}_1 \times \widehat{r}_2) = 1 - (\widehat{r}_1 \cdot \widehat{r}_2)^2$
11. $(\widehat{r}_1 \cdot \widehat{r}_2) = \frac{1}{r_1 r_2} (\rho^2 + z^2 - d^2)$

onde

$$T_{ab}^{33} = \left(\delta_{a3}\delta_{b3} - \frac{1}{3}\delta_{ab} \right) \quad (\text{C.11})$$

$$\begin{aligned} S_{12}(\hat{r}) &= 3 \left(\sigma^{(1)} \cdot \hat{r} \right) \left(\sigma^{(2)} \cdot \hat{r} \right) - \sigma^{(1)} \cdot \sigma^{(2)} \quad (\hat{r} // \hat{z}) \\ &= 3\sigma_a^{(1)}\sigma_b^{(2)} \left(\delta_{a3}\delta_{b3} - \frac{1}{3}\delta_{ab} \right) \\ &= 3\sigma_a^{(1)}\sigma_b^{(2)} T_{ab}^{33} \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

C.4. Operador tensor

$$\begin{aligned} \int S_{12}(\hat{r}) S_{12}(\hat{r}) d\Omega &= \int d\Omega \{ 9\sigma^{(1)} \cdot \hat{r} \sigma^{(2)} \cdot \hat{r} \sigma^{(1)} \cdot \hat{r} \sigma^{(2)} \cdot \hat{r} \\ &\quad - 3[\sigma^{(1)} \cdot \hat{r} \sigma^{(2)} \cdot \hat{r} \sigma^{(1)} \cdot \sigma^{(2)} + \sigma^{(1)} \cdot \sigma^{(2)} \sigma^{(1)} \cdot \hat{r} \sigma^{(2)} \cdot \hat{r}] + \sigma^{(1)} \cdot \sigma^{(2)} \sigma^{(1)} \cdot \sigma^{(2)} \} \\ &= 4\pi \{ 9 - \sigma^{(1)} \cdot \sigma^{(2)} \sigma^{(1)} \cdot \sigma^{(2)} \} \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Mas

$$\begin{aligned} 2\frac{\sigma^{(1)}}{2} \frac{\sigma^{(2)}}{2} |1M\rangle &= 2S_1 \cdot S_2 |1M\rangle = (S_T^2 - S_1^2 - S_2^2) |1M\rangle \\ &= [S_T(S_T + 1) - S_1(S_1 + 1) - S_2(S_2 + 1)] \\ &= \left[2 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \right] = \frac{1}{2} \Rightarrow \sigma^{(1)} \cdot \sigma^{(2)} |1M\rangle = 1 \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Calculando o elemento de matriz em (C.13) e usando (C.14) temos

$$\int d\Omega \langle 1M | S_{12}(\hat{r}) S_{12}(\hat{r}) | 1M \rangle = 4\pi \{ 9 - 1^2 \} = 4\pi \times 8. \quad (\text{C.15})$$

D. NUMERO BARIÔNICO

A densidade bariônica pode ser definida como

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^0 &= \frac{-\epsilon_{ijk}}{24\pi^2} \text{Tr}[L_i L_j L_k] \\ &= \frac{-\epsilon_{ijk}}{24\pi^2} \text{Tr}[\partial_i U^\dagger \partial_j U \partial_k U^\dagger U] \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

onde

$$U = e^{i\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{n} \theta} . \quad (\text{D.2})$$

Calculando a derivada de U ,

$$\partial_i U = -\sin \theta \partial_i \theta + i \cos \theta \partial_i \theta (\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{n}) + i \sin \theta (\boldsymbol{\tau} \cdot \partial_i \hat{n}) \quad (\text{D.3})$$

e substituindo na expressão da densidade bariônica teremos após uma longa manipulação algébrica e cálculo do traço:

$$\mathcal{B}^0 = \frac{-\epsilon_{ijk}}{4\pi^2} \partial_i \theta \sin^2 \theta \hat{n} \cdot (\partial_j \hat{n} \times \partial_k \hat{n}) . \quad (\text{D.4})$$

Ou por outro método, se partirmos de (4.22)

$$\mathcal{B}^0 = \frac{\epsilon^{0\alpha\beta\gamma}}{12\pi^2} (\sigma \partial_\gamma \boldsymbol{\pi} - 3\boldsymbol{\pi} \partial_\gamma \sigma) \cdot (\partial_\alpha \boldsymbol{\pi} \times \partial_\beta \boldsymbol{\pi}) \quad (\text{D.5})$$

e substituímos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi} &= \hat{n} \sin \theta \\ \sigma &= \cos \theta \\ \partial_\alpha \boldsymbol{\pi} &= \partial_\alpha \hat{n} \sin \theta + \hat{n} \cos \theta \partial_\alpha \theta \\ \partial_\alpha \sigma &= -\sin \theta \partial_\alpha \theta , \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

usando $\hat{n} \cdot \partial_\alpha \hat{n} = 0$ e reunindo termos simétricos temos

$$\mathcal{B}^0 = \frac{\epsilon^{0\alpha\beta\gamma}}{12\pi^2} 3\partial_\alpha \theta \sin^2 \theta \hat{n} \cdot (\partial_\beta \hat{n} \times \partial_\gamma \hat{n})$$

que é idêntica à expressão (D.4) bastando observar que $\epsilon^{0\alpha\beta\gamma} = -\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$.

Podemos obter também uma expressão geral da carga bariônica para um sistema com simetria cilíndrica.

De maneira geral

$$U = e^{i\tau \cdot \theta} \quad (\text{D.7})$$

onde $\theta = \hat{n}\theta$.

Se θ possui simetria cilíndrica e representa um campo irrotacional então pode ser escrito na forma:

$$\theta = (\theta_\rho \cos \varphi, \theta_\rho \sin \varphi, \theta_z)$$

Escrevendo (D.4) explicitamente em termos de \hat{n} e θ e agrupando dois a dois os termos iguais temos a carga bariônica dada por:

$$B = \frac{-1}{2\pi^2} \int_V \hat{n} \cdot [\partial_1 \theta \partial_2 \hat{n} \times \partial_3 \hat{n} + \partial_2 \theta \partial_3 \hat{n} \times \partial_1 \hat{n} + \partial_3 \theta \partial_1 \hat{n} \times \partial_2 \hat{n}]. \quad (\text{D.8})$$

Para parte do primeiro termo temos

$$\begin{aligned} \hat{n} \cdot \partial_2 \hat{n} \times \partial_3 \hat{n} &= \frac{\theta}{\theta} \cdot \partial_2 \left(\frac{\theta}{\theta} \right) \times \partial_3 \left(\frac{\theta}{\theta} \right) \\ &= \frac{\theta}{\theta} \cdot \left(\frac{\partial_2 \theta}{\theta} - \frac{\theta}{\theta^2} \partial_2 \theta \right) \times \left(\frac{\partial_3 \theta}{\theta} - \frac{\theta}{\theta^2} \partial_3 \theta \right) \\ &= \frac{1}{\theta^3} \theta \cdot \partial_2 \theta \times \partial_3 \theta. \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Assim o primeiro termo fica

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x} \theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} \times \frac{\partial \theta}{\partial z} &= \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \theta \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \times \frac{\partial \theta}{\partial z} \\ &= \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \theta \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial \rho} (-\sin \varphi) + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{\rho} \right) \times \frac{\partial \theta}{\partial z}. \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Simetricamente, obtemos o segundo termo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial y} \theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} \times \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} \times \left(\frac{\partial \theta}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} \times \left(\frac{\partial \theta}{\partial \rho} \cos \varphi + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \left(-\frac{\sin \varphi}{\rho} \right) \right). \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Somando as expressões (D.10) e (D.11) temos

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \theta}{\partial x} \boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial y} \times \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial z} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial z} \times \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial x} \\
&= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \boldsymbol{\theta} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial z} \right) \\
&= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} (\theta_\rho \cos \varphi, \theta_\rho \sin \varphi, \theta_z) \cdot (-\theta_\rho \sin \varphi, \theta_\rho \cos \varphi, 0) \times \left(\frac{\partial \theta_\rho}{\partial z} \cos \varphi, \frac{\partial \theta_\rho}{\partial z} \sin \varphi, \frac{\partial \theta_z}{\partial z} \right) \\
&= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \left[-\theta_z \theta_\rho \frac{\partial \theta_\rho}{\partial z} + \theta_\rho^2 \frac{\partial \theta_z}{\partial z} \right] \tag{D.12}
\end{aligned}$$

Resta apenas calcular o último termo de (D.8),

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \theta}{\partial z} \boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial y} \\
&= \frac{\partial \theta}{\partial z} \boldsymbol{\theta} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \times \left(\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial \theta}{\partial z} \boldsymbol{\theta} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \rho} \cos \varphi - \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{\rho} \right) \times \left(-\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{\rho} \right) \\
&= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial z} \boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \varphi} \\
&= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial z} (\theta_\rho \cos \varphi, \theta_\rho \sin \varphi, \theta_z) \cdot \left(\frac{\partial \theta_\rho}{\partial \rho} \cos \varphi, \frac{\partial \theta_\rho}{\partial \rho} \sin \varphi, \frac{\partial \theta_z}{\partial \rho} \right) \times (-\theta_\rho \sin \varphi, \theta_\rho \cos \varphi, 0) \\
&= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial z} \left[\theta_z \theta_\rho \frac{\partial \theta_\rho}{\partial \rho} - \theta_\rho^2 \frac{\partial \theta_z}{\partial \rho} \right] \tag{D.13}
\end{aligned}$$

Finalmente, substituindo os resultados (D.12) e (D.13) em (D.8) temos,

$$\begin{aligned}
B &= \frac{-1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \rho d\rho \int_{-\infty}^{+\infty} dz \sin^2 \theta \frac{1}{\theta^3} \frac{1}{\rho} \times \\
&\quad \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \left[-\theta_z \theta_\rho \frac{\partial \theta_\rho}{\partial z} + \theta_\rho^2 \frac{\partial \theta_z}{\partial z} \right] + \frac{\partial \theta}{\partial z} \left[\theta_z \theta_\rho \frac{\partial \theta_\rho}{\partial \rho} - \theta_\rho^2 \frac{\partial \theta_z}{\partial \rho} \right] \right\}, \tag{D.14}
\end{aligned}$$

que é uma expressão geral da carga bariônica para qualquer sistema com simetria cilíndrica com um campo $\boldsymbol{\theta}$ irrotacional. Expressão similar também pode ser encontrada em [Nat93].

E. OPEP

A redução não relativística do potencial de troca de um pión (OPEP) é dada por:

$$\begin{aligned}
 V^{OPEP} &= \frac{g_A^2}{4\pi} \left(\frac{m_\pi}{2f_\pi} \right)^2 (\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) \left[\frac{1}{3} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) + \left(\frac{1}{(m_\pi r)^2} + \frac{1}{m_\pi r} + \frac{1}{3} \right) S_{12} \right] \frac{e^{-m_\pi r}}{r} \\
 &= (\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) \left[V_{SS}^{OPEP} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) + V_T^{OPEP} S_{12} \right]. \quad (E.1)
 \end{aligned}$$

As derivadas das componentes do OPEP em relação às massas pions resultam em [Ro97]

$$m_\pi^2 \frac{\partial V_{SS}^{OPEP}}{\partial m_\pi^2} = \frac{1}{12\pi} \left(\frac{m_\pi}{2f_\pi} \right)^2 \left\{ 2g_A \frac{\partial g_A}{\partial m_\pi^2} m_\pi^2 + g_A^2 \left(1 - \frac{m_\pi r}{2} \right) \right\} \frac{e^{-m_\pi r}}{r} \quad (E.2)$$

e

$$m_\pi^2 \frac{\partial V_T^{OPEP}}{\partial m_\pi^2} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{m_\pi}{2f_\pi} \right)^2 \left\{ 2g_A \frac{\partial g_A}{\partial m_\pi^2} m_\pi^2 \left(\frac{1}{(m_\pi r)^2} + \frac{1}{m_\pi r} + \frac{1}{3} \right) - \frac{g_A^2}{6} (1 + m_\pi r) \right\} \frac{e^{-m_\pi r}}{r}. \quad (E.3)$$

F. APROXIMAÇÃO DE HARTREE

O termo sigma nuclear do potencial é dado por

$$\Sigma_A^V = \langle \Psi_A | \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} m_q \frac{\partial V_{ij}}{\partial m_q} | \Psi_A \rangle \quad (\text{F.1})$$

Na aproximação de partícula independente a função de onda anti-simetrizada (pois núcleons são férmions) é dada pelo determinante de Slater

$$|\Psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{A!}} \epsilon_{i_1 \dots i_n} \psi_{i_1}(\mathbf{r}_1) \dots \psi_{i_n}(\mathbf{r}_n) \quad (\text{F.2})$$

onde ϵ é o operador anti-simétrico com

$$\epsilon_{i_1 \dots i_n} = \begin{cases} +1 & \text{para número par de permutações de } i_1 \dots i_n \\ -1 & \text{para número ímpar de permutações de } i_1 \dots i_n \\ 0 & \text{para índices repetidos.} \end{cases}$$

Usando (F.2) em (F.1) temos

$$\begin{aligned} \Sigma_A^V &= \langle \Psi_A | \frac{1}{2} m_q \sum_{i \neq j} \frac{\partial V_{ij}}{\partial m_q} | \Psi_A \rangle \\ &= \frac{A(A-1)}{2} \langle \Psi_A | m_q \frac{\partial V_{12}}{\partial m_q} | \Psi_A \rangle \\ &= \frac{A(A-1)}{2(n!)} \sum \epsilon_{i_1 \dots i_n} \sum \epsilon_{i'_1 \dots i'_n} \times \\ &\quad \int d^3 \mathbf{r}_1 \dots d^3 \mathbf{r}_n \psi_{i'_1}^\dagger(\mathbf{r}_1) \dots \psi_{i'_n}^\dagger(\mathbf{r}_n) m_q \frac{\partial V(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|)}{\partial m_q} \psi_{i_1}(\mathbf{r}_1) \dots \psi_{i_n}(\mathbf{r}_n) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i_1, i_2} \int d^3 \mathbf{r}_1 d^3 \mathbf{r}_2 \left[\psi_{i_1}^\dagger(\mathbf{r}_1) \psi_{i_1}(\mathbf{r}_1) m_q \frac{\partial V(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|)}{\partial m_q} \psi_{i_2}^\dagger(\mathbf{r}_2) \psi_{i_2}(\mathbf{r}_2) \right. \\ &\quad \left. - \psi_{i_1}^\dagger(\mathbf{r}_1) \psi_{i_2}^\dagger(\mathbf{r}_2) m_q \frac{\partial V(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|)}{\partial m_q} \psi_{i_2}(\mathbf{r}_1) \psi_{i_1}^\dagger(\mathbf{r}_2) \right] \quad (\text{F.3}) \end{aligned}$$

Entre colchetes, o primeiro termo corresponde ao termo de Hartree e o segundo ao termo de Fock. Iremos efetuar o nosso cálculo usando

$$\Sigma_A^V \simeq \frac{1}{2} \sum_{\substack{i_1, i_2 \\ i_1 \neq i_2}} \int d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 \psi_{i_1}^\dagger(\mathbf{r}_1) \psi_{i_1}(\mathbf{r}_1) m_q \frac{\partial V(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|)}{\partial m_q} \psi_{i_2}^\dagger(\mathbf{r}_2) \psi_{i_2}(\mathbf{r}_2) \quad (\text{F.4})$$

onde a parte do termo de Fock é somado ao termo de Hartree. Desta forma subtraímos a contribuição de estados ocupados no termo de Hartree. A densidade de um corpo é definida por

$$A\rho(r) = \sum_i \psi_i^\dagger(\mathbf{r}_1) \psi_i(\mathbf{r}_1) \quad (\text{F.5})$$

onde $\int d^3r \rho(r) = 1$.

Reescrevendo (F.4) usando (F.5) teremos

$$\Sigma_A^V \simeq \frac{A(A-1)}{2} \int d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 \rho(\mathbf{r}_1) \rho(\mathbf{r}_2) m_q \frac{\partial V(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|)}{\partial m_q}. \quad (\text{F.6})$$

Observe que o fator $(A-1)$ aparece pois os estados ocupados foram retirados da eq. (F.4).

G. MÉTODOS NUMÉRICOS

Este apêndice foi escrito especialmente àqueles que queiram reproduzir nossos cálculos ou usar os resultados. Para tanto, além dos gráficos apresentados ao longo da tese, julgamos ser importante apresentar nossos resultados sob forma de tabelas juntamente com os códigos computacionais que as geraram. Esperamos que este esforço sirva de alavanca para iniciantes no assunto ou possibilite novos estudos com o Modelo de Skyrme.

Três programas foram desenvolvidos, o `skyvar.f`, `skyrme.f`, e o `skyap.f`. O primeiro programa (`skyvar.f`) serviu especialmente para conferir os resultados de `skyrme.f` e para obter soluções grosseiras no caso do modelo se Skyrme com remoção gradual da simetria quiral. O segundo (`skyrme.f`) teve objetivo de reproduzir com precisão os resultados dos observáveis de um corpo [Ad83-87] e possibilitar cálculo da derivada destes observáveis (O) em relação à massa do pión ($m_\pi^2 \frac{\partial O}{\partial m_\pi^2}$).

O programa `skyap.f` foi elaborado a princípio para reproduzir os resultados de [Ja85] e [Vi85] calculando o potencial NN no ansatz produto quantizado e tendo como "input" uma função de perfil de um corpo parametrizada. *Posteriormente foi incorporado ao programa o método de geração da função de perfil de um corpo numericamente como executado em `skyrme.f`. Foi isto que possibilitou por em prática o cálculo numérico das derivadas, $m_\pi^2 \frac{\partial V_C}{\partial m_\pi^2}$, $m_\pi^2 \frac{\partial V_{SS}}{\partial m_\pi^2}$ e $m_\pi^2 \frac{\partial V_T}{\partial m_\pi^2}$, incluindo variações na função de perfil de um corpo com m_π , o que foi essencial para nosso trabalho.*

Para solução da equação diferencial de segunda ordem com dois pontos de contorno aplicamos o método de Euler (ou Runge-Kutta) convergindo os chutes ("shooting") por método de bissecção (ou por Newton-Raphson).

A integração do potencial NN foi executada por método de Gauss-Legendre interpolando a função de perfil pelo método de Spline. Usamos as rotinas `gauleg.f` para Gauss-Legendre e `spline.f` e `splint.f` para Spline, da ref. [Pr92].

A seguir descreveremos os métodos numéricos aplicados e mostraremos seus resultados.

Método Variacional

Para cálculo da massa do skyrmion, podemos evitar a solução da equação diferencial tentando encontrar a função que minimiza a energia do sistema[Ad87]. Isto é possível pois a equação diferencial gerada tem, na sua derivação, o princípio da mínima ação.

Como exemplo, tomemos a expressão para a massa do Skyrmion,

$$M = 4\pi \frac{F_\pi}{e} \int_0^\infty du u^2 \left\{ \frac{1}{8} (F'^2 + \frac{2s^2}{u^2}) + \frac{s^2}{2u^2} (2F'^2 + \frac{s^2}{u^2}) + \frac{1}{4} \beta^2 (1 - c) \right\} \quad (\text{G.1})$$

Fazendo a mudança de variável $u = \frac{x}{1-x}$ teremos um mapeamento $u(0, \infty) \rightarrow x(0, 1)$. Logo, $\frac{du}{dx} = \frac{1}{(1-x)^2}$ e

$$F' = \frac{dF}{du} = \frac{dF}{dx} \frac{dx}{du} = \frac{dF}{dx} (1-x)^2 \quad (\text{G.2})$$

Assim a integral pode ser toda expressa em termos de x e fica:

$$M = 4\pi \frac{F_\pi}{e} \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^2} u^2 \left\{ \frac{1}{8} (F'^2 + \frac{2s^2}{u^2}) + \frac{s^2}{2u^2} (2F'^2 + \frac{s^2}{u^2}) + \frac{1}{4} \beta^2 (1 - c) \right\} \quad (\text{G.3})$$

onde $u = \frac{x}{1-x}$.

Particiona-se o intervalo unitário em N partes iguais com pontos $x_n = n/N$. Os valores $F_n = F(x_n)$ serão os parâmetros a ser variados mantendo $F_0 = \pi$ e $F_N = 0$ fixos. Iniciando com um conjunto de valores F_n (e.g. $F_n = \pi(1 - x_n)$), os valores de F_n podem ser ajustados um de cada vez, com valor ajustado mantido se M diminuir. O ajuste é feito particionando F_n em d divisões na vertical e incrementando ou decrementando uma divisão vertical. Para melhorar a precisão e evitar o ponto $x = 1$ usamos os valores médios $x_m = (x_n + x_{n-1})/2$ e respectivo $F_m = (F_n + F_{n-1})/2$ para cálculo da massa.

Pode-se automatizar que o número de subdivisões vertical seja dobrado após atingir o mínimo. Isto reduz o tempo de execução, i.e., partindo de estimativas grosseiras e refinando(aumentando) a subdivisão vertical. O método variacional apresenta vantagem de convergir direto para a solução sem necessidade de chutar a derivada inicial. Porém o método de Euler já é mais preciso. No nosso trabalho foi usado especificamente para conferir a solução do método de Euler(Runge-Kutta) e para estimativas iniciais no modelo sem simetria quiral. O programa e resultados encontram-se nas páginas 139 e 140.

Método de Euler

O método de Euler é o método mais simples de solução de uma equação diferencial de primeira ordem $y' = f(y, t)$ que tem $y(t)$ como solução. O método pode ser estendido para equações até ordem n ou sistema de equações diferenciais. Tipicamente ele necessita de condições iniciais de contorno $y(t_0), y'(t_0) \dots y^{(n)}(t_0)$.

O método de Euler baseia-se na aproximação

$$y'(t_i) \simeq \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i}. \quad (\text{G.4})$$

que é exata no limite em que $t_{i+1} \rightarrow t_i$. Invertendo a expressão em termos de $y(t_{i+1})$,

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i = y_i + hf(y_i, t_i) \quad (\text{G.5})$$

onde $h \equiv t_{i+1} - t_i$ é chamado de passo e $y_i \equiv y(t_i)$. Portanto, dada a condição inicial $y_0 \equiv y(t_0)$ e um passo h suficientemente pequeno, avança-se sucessivamente obtendo-se y_{i+1} .

Para uma equação de segunda ordem $y'' = g(y', y, t)$, o método de Euler pode ser aplicado transformado a equação de segunda ordem em duas de primeira ordem na forma $y' = z$ e $z' = g(z, y, t)$. Assim no método de Euler teremos as relações de recorrência

$$z_{i+1} = z_i + hz'_i = z_i + hg(z_i, y_i, t_i) \quad (\text{G.6})$$

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i = y_i + hz_i \quad (\text{G.7})$$

onde agora devemos fornecer as condições iniciais $y_0 \equiv y(t_0)$ e $z_0 = y'(t_0)$.

Método de Runge-Kutta

O método de Runge-Kutta é em geral muito mais preciso que o de Euler e é uma sofisticação do método de Euler no sentido que leva pontos adiantados em consideração. Atribuem-se o nome de ordem ao Runge-Kutta ao número de pontos adiantados que leva em consideração. O Runge-Kutta de primeira ordem se reduz ao método de Euler. Para solução de uma equação de primeira ordem $y' = f(y, t)$, o Runge-Kutta de quarta ordem tem as relações de recorrência

$$\begin{aligned} k_0 &= f(y_i, t_i) \\ k_1 &= f\left(y_i + \frac{hk_0}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right) \\ k_2 &= f\left(y_i + \frac{hk_1}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right) \\ k_3 &= f(y_i + hk_2, t_i + h). \end{aligned}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3). \quad (\text{G.8})$$

Para um sistema de equações diferenciais de primeira ordem devemos considerar o algoritmo com equações *acopladas*¹. Assim, de forma geral, para o sistema $y' = f(x, y, t)$ e $x' = g(x, y, t)$ devemos ter, *em seqüência*,

$$\begin{aligned} k_{0y} &= f(x_i, y_i, t_i) \\ k_{0x} &= g(x_i, y_i, t_i) \\ k_{1y} &= f\left(x_i + \frac{hk_{0x}}{2}, y_i + \frac{hk_{0y}}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right) \\ k_{1x} &= g\left(x_i + \frac{hk_{0x}}{2}, y_i + \frac{hk_{0y}}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right) \\ k_{2y} &= f\left(x_i + \frac{hk_{1x}}{2}, y_i + \frac{hk_{1y}}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right) \\ k_{2x} &= g\left(x_i + \frac{hk_{1x}}{2}, y_i + \frac{hk_{1y}}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right) \\ k_{3y} &= f(x_i + hk_{2x}, y_i + hk_{2y}, t_i + h) \\ k_{3x} &= g(x_i + hk_{2x}, y_i + hk_{2y}, t_i + h) \\ \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{6}(k_{0y} + 2k_{1y} + 2k_{2y} + k_{3y}) \\ x_{i+1} &= x_i + \frac{h}{6}(k_{0x} + 2k_{1x} + 2k_{2x} + k_{3x}). \end{aligned} \quad (\text{G.9})$$

Para resolver uma equação diferencial de segunda ordem $y'' = g(y', y, t)$ podemos desmembrá-la em duas equações de primeira ordem $y' = z$ e $z' = g(z, y, t)$ e aplicando as equações (G.9) temos:

$$\begin{aligned} k_{0y} &= z_i \\ k_{0z} &= g(z_i, y_i, t_i) \\ k_{1y} &= z_i + \frac{hk_{0z}}{2} \\ k_{1z} &= g\left(z_i + \frac{hk_{0z}}{2}, y_i + \frac{hk_{0y}}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right) \\ k_{2y} &= z_i + \frac{hk_{1z}}{2} \\ k_{2z} &= g\left(z_i + \frac{hk_{1z}}{2}, y_i + \frac{hk_{1y}}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right) \\ k_{3y} &= z_i + hk_{2z} \\ k_{3z} &= g(z_i + hk_{2z}, y_i + hk_{2y}, t_i + h) \end{aligned}$$

¹Isto nos foi particularmente chamado a atenção pelo Prof. P.Gouffon.

$$\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{6}(k_{0y} + 2k_{1y} + 2k_{2y} + k_{3y}) \\
z_{i+1} &= z_i + \frac{h}{6}(k_{0z} + 2k_{1z} + 2k_{2z} + k_{3z}).
\end{aligned}
\tag{G.10}$$

Como no método de Euler, devemos fornecer as condições iniciais $y_0 \equiv y(t_0)$ e $z_0 = y'(t_0)$.

Interpolação de Spline

Consiste em ajustar polinômios cúbicos a cada três pontos da função de maneira que a função interpolada e suas derivadas sejam contínuas. Interpolamos a função perfil F de Skyrme com a solução da equação diferencial até $u = 12$ e a partir daí usamos a expressão de $F(u)$ para u grande, i.e.

$$F(u) = C \frac{e^{-\beta u}(1 + \beta u)}{u^2} \tag{G.11}$$

onde a constante foi obtida previamente na solução da equação diferencial como uma média $C = (C_F + C_{F'})/2$. Usamos 1200 pontos para interpolação. Aproveitamos a rotinas [Pr92] spline.f para cálculo dos fatores interpolantes e splint.f para interpolação propriamente dita.

Integração por Gauss-Legendre

Consiste em fazer a integração por determinados pontos e respectivos pesos. Tem por base a expansão da função em polinômios ortogonais de Legendre [Ca69]. Usamos a rotina gauleg.f [Pr92] para gerar os pontos de 0 a 1 e seus pesos. Fizemos a integração usando esses pontos no espaço inverso ($u \rightarrow \frac{x}{1-x}$). Na mudança de variável é importante lembrar que introduzimos o Jacobiano para obter o resultado final correto. Por este método foi integrado o potencial skyrmion-skyrmion, com 50 pontos em ρ e 400 pontos em z .

Programa skyrme.f

O modelo de Skyrme dá origem a uma equação diferencial não linear de segunda ordem, da forma:

$$\left(\frac{u^2}{4} + 2 \operatorname{sen}^2 F\right) F'' + \frac{1}{2} u F' + (\operatorname{sen} 2F) F'^2 - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2F - \frac{\operatorname{sen}^2 F \operatorname{sen} 2F}{u^2} - \frac{1}{4} \beta^2 u^2 \operatorname{sen} F = 0,
\tag{G.12}$$

onde $\beta = m_\pi/2ef_\pi$. As condições de contorno para número bariônico $B = 1$ são $F(0) = \pi$ e $F(\infty) = 0$. As formas assintóticas ($u \rightarrow \infty$) de $F(u)$ e $F'(u)$ são dadas

por

$$F_{\infty}(u) = C e^{-\beta u} \frac{(1 + \beta u)}{u^2}, \quad (\text{G.13})$$

$$F'_{\infty}(u) = \frac{\partial}{\partial u} F_{\infty}(u) = C \frac{e^{-\beta u}}{u} \left(-2 \frac{\beta}{u} - \frac{2}{u^2} - \beta^2 \right), \quad (\text{G.14})$$

onde C é uma constante a ser determinada.

Para solução da equação diferencial de segunda ordem usando o método de Euler, fornecemos F e F' no ponto inicial e calculamos o ponto seguinte pelas equações[Ad87]:

$$F(u_{n+1}) = F(u_n) + hF'(u_n) \quad \text{e} \quad (\text{G.15})$$

$$F'(u_{n+1}) = F'(u_n) + hF''(u_n), \quad (\text{G.16})$$

onde h é um pequeno passo e $F''(u_n)$ é obtida a partir da equação diferencial. Calcula-se subseqüentemente os valores para $F(u_{n+1})$. Normalmente a aplicação do método de Euler prevê que se saiba *a priori* o valor de $F'(0)$. Porém, a equação diferencial da função de perfil do modelo de Skyrme é uma equação de problema de dois valores de pontos de contorno². Como $F'(0)$ não é dado, temos de chutar (método de "shooting" [Pr92 p.745]) a derivada no ponto inicial $F'(0)$ até que satisfaça $F(\infty) = 0$ ou alternativamente se obtenha a razão

$$C_F = \frac{F_{\infty}(u)}{e^{-\beta u} \frac{(1+\beta u)}{u^2}} \quad \text{ou} \quad C_{F'} = \frac{F'_{\infty}(u)}{\frac{e^{-\beta u}}{u} \left(-2 \frac{\beta}{u} - \frac{2}{u^2} - \beta^2 \right)}$$

constante para grandes distâncias. Quando se atinge o valor correto de $F'(0)$ devemos ter $C_F = C_{F'} = C$. Apenas a primeira destas expressões na verdade já substitui com vantagem a condição de contorno $F(\infty) = 0$. Para precisão do método será interessante notar que superestimando o valor inicial $F'(0)$ faz com que C_F cresça e $C_{F'}$ diminua (e vice-versa). Isto permite sintonizar o método de forma que saberemos que temos o valor $F'(0)$ correto quando para u suficientemente grande obtivermos $C_F = C_{F'}$. Isto equivale a resolver a equação $C_F - C_{F'} = 0$, tendo como incógnita $F'(0)$. A solução desta equação foi feita por método de bissecção (ou por método de Newton-Raphson).

Também realizamos os mesmo cálculos com o método de Runge Kutta de quarta ordem, obtendo resultados muito semelhantes ao método de Euler pois nosso passo no método de Euler era muito pequeno ($h = 2 \times 10^{-5}$).

Os métodos de Euler ou Runge-Kutta conduzem a resultado divergente para $F''(0)$, portanto iniciam-se os métodos com pontos levemente deslocados da origem

²Denominada em inglês: "two point boundary value problem" [Pr92 p.745].

[Ad87]. Adkins[Ad87] usou as correções de ponto inicial³

$$F(\Delta) = \pi + \alpha_1 \Delta + \alpha_3 \Delta^3, \quad (\text{G.17})$$

$$F'(\Delta) = \alpha_1 + 3\alpha_3 \Delta^2, \quad (\text{G.18})$$

onde $\alpha_1 \equiv F'(0)$, $\alpha_3 = -2\frac{\alpha_1^3}{15}(\frac{1+2\alpha_1^2}{1+8\alpha_1^2})$ e Δ um valor pequeno. Como provavelmente dispusemos de maiores recursos computacionais do que Adkins [Ad87], usamos um ponto inicial mais próximo da origem ($\Delta = 10^{-6}$) e nosso ponto inicial só necessitou a correção

$$F(\Delta) = \pi + \alpha_1 \Delta \quad (\text{G.19})$$

e $F'(\Delta)$ foi tomado como $F'(\Delta) = \alpha_1$, conduzindo a resultados praticamente idênticos aos que obtivemos com as correções (G.17) e (G.18).

A automatização dos chutes de $F'(0)$ foi feita por dois métodos distintos, o primeiro por bissecção entre os limites prováveis de $F'(0)$ levando cerca de 20 iterações até a convergência. O segundo aplicou o método de Newton-Raphson convergindo apenas 6 iterações. Ambos os resultados foram concordantes.

Resumindo, o programa `skyrme.f` efetua as seguintes operações:

1) Dada uma estimativa de $F'(0)$ ($z_0 = (z_{0a} + z_{0b})/2$, média de duas estimativas z_{0a} e z_{0b} com $z_{0a} > z_{0b}$ no caso de bissecção ou um valor próximo da solução no caso de Newton-Raphson), calcula-se $F(u)$ e $F'(u)$ por método de Euler (ou Runge-Kutta) com passo $h = 2 \times 10^{-5}$ até chegar em $u = 12(20)$ para o caso massivo (sem massa).

2) No caso de bissecção, compara-se o valor de C_F e $C_{F'}$, para $u = 12$. Retorna-se a $\underline{1}$ com a nova estimativa $z_{0a} = z_0$ se $C_F > C_{F'}$ ou $z_{0b} = z_0$ se $C_F < C_{F'}$. Repete-se esta operação até que z_0 não varie mais de 10^{-8} . Se optarmos pelo método de Newton-Raphson, procuramos encontrar $F'(0)$ de tal forma que satisfaça a equação $C_F - C_{F'} = 0$. Na verdade usamos método de secantes que é o mesmo que o Newton-Raphson só que a com a derivada envolvida calculada numericamente. O valor final encontrado para C é calculado como $(C_F + C_{F'})/2$.

3) Com o valor de $F'(0)$ usamos novamente o método de Euler (ou Runge-Kutta) e calculamos as seis integrais de Adkins [Ad87] com método de retângulos. Os resultados das seis integrais possibilitaram o cálculo dos observáveis.

4) Para obter $m_\pi^2 \frac{\partial O}{m_\pi^2}$ numericamente basta rodar o programa duas vezes com m'_π e m''_π e calcular

$$m_\pi^2 \frac{O_{m_\pi'^2} - O_{m_\pi''^2}}{m_\pi'^2 - m_\pi''^2}.$$

³A Expansão de $F(\Delta)$ para Δ pequeno até o termo de quinta potência é [Ana90] $F(\Delta) = \pi + \alpha_1 \Delta + \alpha_3 \Delta^3 + \alpha_5 \Delta^5$, com $\alpha_5 = (\alpha_1/7) \{ \alpha_1^4/15 - \alpha_3(48\alpha_3 - 6\alpha_1^3 + \alpha_1)/(1 + 8\alpha_1^2) \}$.

Usamos $m'_\pi = 138 + \delta m_\pi$ e $m''_\pi = 138 - \delta m_\pi$ com $\delta m_\pi = 1$. O cálculo é insensível a δm_π à medida que $\delta m_\pi \rightarrow 0$. Para valores de δm_π perto demais de zero o cálculo começa a falhar e perde estabilidade.

Os programa skyrme.f e os resultados de $F(u)$ e $F'(u)$ para os parâmetros $m_\pi = 138$, $f_\pi = 93\text{MeV}$ e $e = 4,0$ são mostrados nas páginas 141 e 144.

Os resultados para $F'(0)$ são mostrados nas tabelas G.1, G.2 e G.3. Nas tabelas G.1 e G.2 foi feito um estudo da estabilidade da constante C e de $F'(0)$ com o passo h para os casos $m_\pi = 0$ e $m_\pi = 138$ MeV. Como era esperado, o método de Runge Kutta se mostrou muito superior ao método de Euler, tendo já estabilidade para C na terceira (segunda) casa após a vírgula no caso sem massa (massivo) com $h = 10^{-1}$. Essa mesma estabilidade só é atingida pelo método de Euler a partir de $h = 10^{-5}$. As tabela G.3a e G.3b mostram um estudo da estabilidade da constante C à medida que se assume a validade da aproximação assintótica de F e F' para valores cada vez maiores de u (u_∞). Este estudo mostrou que C é estável até a quarta casa após a vírgula para o caso sem massa (massivo) quando $u_\infty = 40$ (12).

A tabela G.4 apresenta uma compilação de resultados com diversos parâmetros e segue de guia para eventual reprodução dos cálculos de autores diversos. Finalmente, a tabela G.5 apresenta os resultados de $F'(0)$ e C para o modelo com simetria quiral parcial onde $m_\pi = 0$ e $\sigma \rightarrow \chi\sigma$.

h	Euler		Runge-Kutta	
	$F'(0)$	C	$F'(0)$	C
10^{-1}	-0,99014390464630	7,67285506693753	-1,00361845488827	8,63420231736528
10^{-2}	-1,00230089731715	8,53510393578763	-1,00376670251107	8,63418527085951
10^{-3}	-1,00361998278932	8,62423644550476	-1,00376893242705	8,63417437157186
10^{-4}	-1,00375410568505	8,63317755203811	-1,00376904026755	8,63417423178075
10^{-5}	-1,00376755465668	8,63407283289014	-1,00376904867473	8,63417222644540
10^{-6}	-1,00376889995457	8,63416228521711	-1,00376904933844	8,63417225354260

Tabela G.1-Estabilidade da solução da equação diferencial do modelo de Skyrme para $m_\pi = 0$ para diversos passos comparando os métodos de Euler e Runge-Kutta, cálculo de C para $u_\infty = 12$. Resultados Brutos.

h	Euler		Runge-Kutta	
	$F'(0)$	C	$F'(0)$	C
10^{-1}	-1,06187532352026	6,89907619205530	-1,08069246383310	7,95094498281151
10^{-2}	-1,07883128987196	7,84318149092247	-1,08087603910847	7,95228760870337
10^{-3}	-1,08067035366198	7,94130936127597	-1,08087792599274	7,95228632614089
10^{-4}	-1,08085717173303	7,95118517554324	-1,08087797954757	7,95228156836376
10^{-5}	-1,08087589430645	7,95216716843977	-1,08087797390571	7,95227613902143
10^{-6}	-1,08087776683499	7,95226559508663	-1,08087797497655	7,95227645717824

Tabela G.2-Estabilidade da solução da equação diferencial do modelo de Skyrme para $m_\pi = 138$ MeV, $f_\pi = 93$ MeV e $e = 4,0$ variando o passo. Resultados Brutos.

Tabela G. 3a: $m_\pi = 0$			Tabela G. 3b: $m_\pi = 138, f_\pi = 93$ e $e = 4,0$		
u_∞	$F'(0)$	C	u_∞	$F'(0)$	C
12	-1,00376904026755	8,63417423178075	6	-1,08105173008834	7,91556828588895
20	-1,00376423097713	8,63808849657050	8	-1,08088568214863	7,94740643017949
40	-1,00376411173389	8,63857448454653	12	-1,08087797954757	7,95228156836376
100	-1,00376411398248	8,63912639816595	20	-1,08087791482010	7,95225782159220
200	-1,00376410304042	8,63900699315374	30	-1,08087790802228	7,94719912606803

Tabelas G.3a e G.3b-Estabilidade do método de Runge-Kutta na solução da equação diferencial do modelo de Skyrme para os casos sem massa e massivo variando o valor a partir do qual assumimos a aproximação assintótica, u_∞ . (usamos $h = 10^{-4}$). m_π e f_π em MeV.

Tabela-G.4					
	m_π	f_π	e	$F'(0)$	C
B=1	0	-	-	-1,00376411	8,6385
B=1	138	54	4,84	-1,1316980	7,65443
B=1	138	93	3,6	-1,0939078	7,86722
B=1	138	93	4,0	-1,0808779	7,95228
B=2	0	-	-	-1,96530957	25,8357
B=2	138	93	4,0	-2,1186316	21,50143

Tabela-G.4 Resultados numéricos do programa skyrme.f para o método de Runge Kutta com parâmetros f_π e e usados por diferentes autores[Ad83-84-87][Vi85][Hol90]. Valores de f_π e m_π em MeV. $F'(0)$ e C em unidades adimensionais. O passo tomado

foi $h = 2 \times 10^{-5}$ e assumiu-se que para $u = 12$ (40) no caso massivo (sem massa) praticamente já tinha sido atingida a forma assintótica.⁴

χ^2	$F'(0)$	C
1,0	-1,00376	8,638
0,5	-0,85444	6,225
0,2	-0,75600	4,600
0,1	-0,72146	3,962
0,05	-0,70418	3,589
0,02	-0,69415	3,323
0,01	-0,69098	3,217
0,005	-0,68945	3,157
0,001	-0,68829	3,100
0,0005	-0,68815	3,091
0,0001	-0,68804	3,083
0,00005	-0,68805	3,082
0,00001	-0,68801	3,0817

Tabela G.5- Resultados para o modelo de Skyrme com $m_\pi = 0$ retirando a simetria quiral gradativamente pela transformação $\sigma \rightarrow \chi\sigma$. Método de Runge-Kutta com passo $h = 2 \times 10^{-5}$ e $u_\infty = 20$. Para $\chi^2 = 10^{-5}$ o cálculo tornou-se instável mas estabilizou com passo $h = 10^{-6}$.

Programa skyap.f

Este programa tem as seguintes operações:

1) Resolução da equação diferencial modelo Skyrme por método de Euler (Runge Kutta) e interpolação por Spline.

2) Cálculo do potencial Skyrmion-Skyrmion no ansatz produto quantizado com integração bidimensional por método Gauss-Legendre com 50 pontos no eixo ρ e 400 pontos no eixo z . Saídas de V_C , V_{SS} e V_T .

⁴Nossos resultados para $B=1$ e $m_\pi = 0$ diferem ligeiramente dos exibidos na ref. [Ana90] e verificamos que isto não se deve ao fato de se usar uma expressão mais refinada para a expansão de $F(u)$ para valores grandes u dada por [Ana90]

$$F(u) = \left(\frac{C}{u^2}\right) \left\{ 1 - (1/21)(C/u^2)^2 - (4/3C)(C/u^2)^3 \right. \\ \left. + (2/35 \times 11)(C/u^2)^4 + (136/21 \times 13 \times C)(C/u^2)^5 \right\}$$

3) Armazenamento dos resultados e repetição de todo o programa desde o item 1 para uma pequena variação na massa do pión (usamos $\delta m_\pi = 1$ MeV). A derivada é insensível a partir desse valor de δm_π , da mesma forma que discutido no programa skyrme.f.

4) Cálculo das derivadas $m_\pi^2 \frac{\partial V_G}{\partial m_\pi^2}$, $m_\pi^2 \frac{\partial V_{SS}}{\partial m_\pi^2}$ e $m_\pi^2 \frac{\partial V_T}{\partial m_\pi^2}$ do potencial com a massa do pión.

O programa e os resultados são mostrados nas páginas 145 e 149.

Dupla Precisão

Todos os cálculos foram feitos em FORTRAN usando a compilação automática de dupla precisão (opção f77 -r8 -o executável programa.f) num servidor axp2000 da DigitalTM com sistema operacional UNIX. O tempo total de execução do programa completo skyap.f com $h = 2 \times 10^{-5}$ e $u_\infty = 12$ foi de cerca de 10 min.

```

***** MODELO de SKYRME
*****METODO VARIACIONAL INTERATIVO
FUNCTION G(F0,F1,X0,X1)
COMMON pi,B,QUI
      XM=(X1+X0)/2
      DX=X1-X0
      FM=(F1+F0)/2
      AUX=1.0-XM
      AUX2=AUX*AUX
      U=XM/AUX
      DUX=1.0/(AUX*AUX)
      DFU=(F1-F0)*AUX2/DX
      S=SIN(FM)
      C=COS(FM)
      S2=S*S
      U2=XM*XM/AUX2
      EX=QUI*S2+C**2
      U2=U*U
      G=4*pi*DX*U2*( (EX*DFU+2*S2DU2)/8.0+
      & (2*EX*DFU+DFU+S2DU2)*0.5*S2DU2
      & )/AUX2
      & +.25*B*B*QUI**0.5*(1.0-COS(FM))/AUX2 ! com massa
      RETURN
      END
*****PROGRAMA PRINCIPAL
PROGRAM SKYVMASS
EXTERNAL G
DIMENSION X(0:1010),F(0:1010),GZ(0:1010),Z(0:1010)
INTEGER N,ND
COMMON pi,B,Qui
      ND=100
      ERR=1.0E-6 !1E-6
      DIV=10000 !10000(250) no pontos na vertical
      qui=1.
      mpi=138
      mpi=0.
      fpi=93
      GR=4.0
      B=0.264
      B=0.
      B=mpi/(2*GR*fpi)
      OPEN(UNIT=2,NAME='varint.lst',STATUS='unknown')
      C*****
      PI=ACOS(-1.0)
      F(0)=PI
      DO N=1,ND
        A=A+1.0
        X(N)=A/ND
        F(N)=PI*(1-X(N))
        Z(N)=G(F(N-1),F(N),X(N-1),X(N))
        GZ(N)=GZ(N-1)+Z(N)
      995 FORMAT(7(F10.4))
      996 FORMAT(1,(F10.4))
      ENDDO
      DO N=1,ND
        GIN=GIN+G(F(N-1),F(N),X(N-1),X(N))
      ENDDO
      GAUX=GIN
      DO K=1,9
      C$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
      DO WHILE (GIN-GPOS.GE.ERR)
      100 GIN=GAUX+GPOS
      GAUX=0.0

```

```

C*****
      DO I=1,ND
        E=F(I)/DIV
        F(I)=F(I)+E
        GUP=0.0
        DO N=1,ND
          GUP=GUP+G(F(N-1),F(N),X(N-1),X(N))
        ENDDO
        F(I)=F(I)-2*E
        GDOWN=0.0
        DO N=1,ND
          GDOWN=GDOWN+G(F(N-1),F(N),X(N-1),X(N))
        ENDDO
      C
      WRITE(6,996) I,GUP,GDOWN
      IF (GUP.LT.GDOWN) THEN
        F(I)=F(I)+2*E
      ENDDIF
      ENDDO
      C*****
      GPOS=0.0
      DO N=1,ND
        GPOS=GPOS+G(F(N-1),F(N),X(N-1),X(N))
      ENDDO
      WRITE(6,996) K,GIN,GPOS
      IF (GIN-GPOS.GE.ERR) GOTO 100
      WRITE(6,996) K,ND,GIN,GPOS
      WRITE(6,996) N,GPOS
      WRITE(2,996) K,DIV,GIN,GPOS
      DIV=2*DIV
      ENDDO
      WRITE(6,996) N,GPOS
      C*****
      WRITE(6,995) X(N),F(N),Z(N),GZ(N),GD,GT
      DO J=0,ND-1
        WRITE(2,995) X(J),X(J)/(1-X(J)),F(J)
      ENDDO
      WRITE(2,996) ND,ERR,DIV,GPOS
      CLOSE(2)
      END
      tempo de execucao
      ND      Div      Minimo      tempo de execucao
      C      100      500      49,90      imediato
      C      100      1000      49,92      s
      C      100      2000      44,83      min
      C      100      5000      36,75      min
      C      100      10000      36,93      20min
      C      100      25000      36,72      1R30

```

x	u	F(u)
0.0000	0.0000	3.1416
0.0100	0.0101	3.1325
0.0200	0.0204	3.1233
0.0300	0.0309	3.1138
0.0400	0.0417	3.1033
0.0500	0.0526	3.0932
0.0600	0.0638	3.0821
0.0700	0.0753	3.0714
0.0800	0.0870	3.0597
0.0900	0.0989	3.0483
0.1000	0.1111	3.0360
0.1100	0.1236	3.0239
0.1200	0.1364	3.0110
0.1300	0.1494	2.9983
0.1400	0.1628	2.9846
0.1500	0.1765	2.9712
0.1600	0.1905	2.9569
0.1700	0.2048	2.9428
0.1800	0.2195	2.9278
0.1900	0.2346	2.9130
0.2000	0.2500	2.8972
0.2100	0.2658	2.8817
0.2200	0.2821	2.8652
0.2300	0.2987	2.8489
0.2400	0.3158	2.8316
0.2500	0.3333	2.8146
0.2600	0.3514	2.7966
0.2700	0.3699	2.7787
0.2800	0.3889	2.7599
0.2900	0.4085	2.7412
0.3000	0.4286	2.7216
0.3100	0.4493	2.7021
0.3200	0.4706	2.6816
0.3300	0.4925	2.6613
0.3400	0.5152	2.6400
0.3500	0.5385	2.6188
0.3600	0.5625	2.5966
0.3700	0.5873	2.5745
0.3800	0.6129	2.5514
0.3900	0.6393	2.5274
0.4000	0.6667	2.5024
0.4100	0.6949	2.4765
0.4200	0.7241	2.4497
0.4300	0.7544	2.4220
0.4400	0.7857	2.3933
0.4500	0.8182	2.3638
0.4600	0.8519	2.3334
0.4700	0.8868	2.3021
0.4800	0.9231	2.2700
0.4900	0.9608	2.2370
0.5000	1.0000	2.2028
0.5100	1.0408	2.1674
0.5200	1.0833	2.1309
0.5300	1.1277	2.0932
0.5400	1.1739	2.0544
0.5500	1.2222	2.0141
0.5600	1.2727	1.9725
0.5700	1.3256	1.9296
0.5800	1.3810	1.8851
0.5900	1.4390	1.8391
0.6000	1.5000	1.7918
0.6100	1.5641	1.7428
0.6200	1.6316	1.6923
0.6300	1.7027	1.6402
0.6400	1.7778	1.5864
0.6500	1.8571	1.5306
0.6600	1.9412	1.4733
0.6700	2.0303	1.4143
0.6800	2.1250	1.3537

0.6900	2.2258	1.2914
0.7000	2.3333	1.2274
0.7100	2.4483	1.1621
0.7200	2.5714	1.0954
0.7300	2.7037	1.0277
0.7400	2.8462	0.9593
0.7500	3.0000	0.8905
0.7600	3.1667	0.8218
0.7700	3.3478	0.7540
0.7800	3.5455	0.6875
0.7900	3.7619	0.6232
0.8000	4.0000	0.5614
0.8100	4.2632	0.5028
0.8200	4.5556	0.4477
0.8300	4.8824	0.3964
0.8400	5.2500	0.3493
0.8500	5.6667	0.3063
0.8600	6.1429	0.2675
0.8700	6.6923	0.2329
0.8800	7.3333	0.2025
0.8900	8.0909	0.1762
0.9000	9.0000	0.1540
0.9100	10.1111	0.1359
0.9200	11.5000	0.1208
0.9300	13.2857	0.1057
0.9400	15.6667	0.0906
0.9500	19.0000	0.0755
0.9600	24.0000	0.0604
0.9700	32.3333	0.0453
0.9800	49.0000	0.0302
0.9900	99.0000	0.0151

Tabela - Resultados da funcao de perfil com metodo variacional em unidades adimensionais no caso mpi=0 Usamos 100 divisoes na horizontal e 10000 na vertical. Tempo de execucao 20min. Valor da massa (minimo) adimensional M=36,9394.

```

C MODELO DE SKYRME
C EQ. DIFERENCIAL DO SKYRMION -VER[ad83-84-87]
C CALCULO DE OBSERVAVEIS
C compilar em dupla precisao com o comando
C f77 -r8 -o executavel programa.f
C *****definicao da eq.dif.
FUNCTION G(Z,T,Y)
COMMON B
T2=T*T
S=SIN(Y)
S2=S*S
G=- ( T*Z/2+SIN(2.0*Y)*(-1.0/4.0+Z*T-Z-S2/T2)
& -(B*T/2)**2*S )
& RETURN
END

C ***** PROGRAMA PRINCIPAL
EXTERNAL G
real H
REAL I,I1,I2,I3,I4,I5,I6
REAL L1,L2,L3,L4,L5,L6
REAL M,ME,MFI,MIP,MIN,MIDMM,MIND
REAL MN,MD
COMMON B
OPEN (UNIT=1,NAME='skyEu.lst',STATUS='unknown')
OPEN (UNIT=2,NAME='skyFu.lst',STATUS='unknown')
OPEN (UNIT=3,NAME='dmdmp2.lst',STATUS='unknown')

pi=acos(-1.)
MP=138.0
read(5,*) MP
MP=0.0 ! Z0=-1.00376
*****Adkins massivo
C FP=54.0
C E=4.84
C Z0=-1.131698 !mp=138
*****vIn Mau
C FP=93.0
C E=3.6
C Z0=-1.09390 ! mp=138
*****Holtzwarth
C FP=93.0
C E=4.0
C Z0=-1.08087 ! mp=138

C dmp=1 ! 0.01
dmp=0.0
XMP=MP-dMP
YMP=MP+dMP
DO id=0,0
if (id.eq.0) then
XYMP=XMP
else
XYMP=YMP
endif
B=XYMP/(2*FP*E)
t0=1.E-6 ! 1.E-6

Y0=pi ! pi p/ B=1, 2pi p/ B=2
h=2.e-5 ! 2.E-5
NP=500 ! 500
IMP=1200 ! 1200
NFIMP=NP*IMP

C write(1,*) 't0',t0,y0,h,np,imp
C write(6,*) 't0=',t0,'h=',h,np,imp
    
```

```

C *****Condicoes iniciais
C z0a=-1.0 ! Bissecas
C z0b=-1.4

z1=-1.0 ! NR
z0=z1
inr=0

z0aux=0.1
do while(z0aux.gt.1.e-8)
Z0=(z0a+z0b)/2 ! Bissecas
C a3=-2*Z0**3*(1+2*Z0**2)/(1+8*Z0**2)/15
C Y1=Y0+Z0*T0+a3*T0**3
C Z1=Z0*T0+3*a3*T0**2
Y1=Y0+T0*Z0
Z1=Z0
TI=T0
DO J=1,IMP
DO K=1,NP
DO KJ=1,NPIMP
C CO=G(Z1,TI,Y1) ! EULER na 1a eq. do sistema ja simplificada
C Y1=Y1+H*Z1 ! EULER na 2a eq. do sistema
C Z1=Z1+H*CO
B0=Z1 ! RUNGE-KUTTA
CO=G(Z1,TI,Y1)
B1=Z1+H/2*CO
C1=G(Z1+H*CO/2,TI+H/2,Y1+H/2*B0)
B2=Z1+H/2*C1
C2=G(Z1+H*C1/2,TI+H/2,Y1+H/2*B1)
B3=Z1+H*C2
C3=G(Z1+H*C2,TI+H,Y1+H*B2)
Y1=Y1+H*(B0+2*B1+2*B2+B3)/6
Z1=Z1+H*(CO+2*C1+2*C2+C3)/6

TI=TI+H
enddo !fim do NPIMP
C
U=TI
AL=Y1*EXP(B*U)*U/(1.0+B*U)
BL=Z1*U*EXP(B*U)/(-2*B/U-2/(U*U)-B*B)
AL=Y1*U/(1-(1./21.)*(AL/U**2)**2)
BL=Z1*U/(-2/(U*U)+6./21.*BL**2/U**6)

C if (al.gt.bl) then ! Bissecas
C z0a=z0
C else
C z0b=z0
C endif
C z0aux=abs(z0a-z0b)

C if (inr.eq.0) then ! Newton-Raphson
FZ1=AL-BL
z2=1.1*z1
inr=1
else
FZ2=AL-BL
z3=z2-FZ2/(FZ2-FZ1)*(z2-z1)
FZ1=FZ2
z1=z2
z2=z3
endif
z0=z2
    
```



```

GA=2*PI*I6/(9*E*E)
GFINN=PI*MM*4*BL/(3*E*E*FPI)
GPFIND=3*GFINN/2
        impressao dos observaveis
C
WRITE(1,*) MN
WRITE(1,*) ROEIOFM
WRITE(1,*) ROEILFM
WRITE(1,*) ROMIOFM
WRITE(1,*) ROMILFM
WRITE(1,*) MIP
WRITE(1,*) MIN
WRITE(1,*) MIDMM
WRITE(1,*) MIND
WRITE(1,*) GA
WRITE(1,*) GFINN
WRITE(1,*) GPFIND
        enddo ! fim do id
CLOSE(1)
C cauculos de derivadas em relacao a mpi**2
open(unit=1,file='skyEu.lst', status='old')
read(1,*) xmn
read(1,*) xRQEIOFM
read(1,*) xRQEILFM
read(1,*) xRQMIOFM
read(1,*) xRQMILFM
read(1,*) xMIP
read(1,*) xMIN
read(1,*) xMIDMM
read(1,*) xMIND
read(1,*) xGA
read(1,*) xGFINN
read(1,*) xGPFIND
read(1,*) ymn
read(1,*) yRQEIOFM
read(1,*) yRQEILFM
read(1,*) yRQMIOFM
read(1,*) yRQMILFM
read(1,*) yMIP
read(1,*) yMIN
read(1,*) yMIDMM
read(1,*) yMIND
read(1,*) yGA
read(1,*) yGFINN
read(1,*) yGPFIND
        if(xmp.ne.ymp) then
a= ((XMP+YMP)/2)**2/(xmp**2-ymp**2)
c
a=138.**2/(xmp2-ymp2)
dmnmp2=(xmn-ymn)*a
dRQEIOFM=(xRQEIOFM-yRQEIOFM)*a
dRQEILFM=(xRQEILFM-yRQEILFM)*a
dROMIOFM=(xROMIOFM-yROMIOFM)*a
dROMILFM=(xROMILFM-yROMILFM)*a
dMIP=(xMIP-yMIP)*a
dMIN=(xMIN-yMIN)*a
dMIDMM=(xMIDMM-yMIDMM)*a
dMIND=(xMIND-yMIND)*a
dGA=(xGA-yGA)*a
dGFINN=(xGFINN-yGFINN)*a
dGPFIND=(xGPFIND-yGPFIND)*a
endif
write(3,*) dmn=', dmnmp2
write(3,*) dRQEIOFM=', dRQEIOFM
write(3,*) dRQEILFM=', dRQEILFM
write(3,*) dROMIOFM=', dROMIOFM
write(3,*) dROMILFM=', dROMILFM

```

```

write(3,*) dMIP=', dMIP
write(3,*) dMIN=', dMIN
write(3,*) dMIDMM=', dMIDMM
write(3,*) dMIND=', dMIND
write(3,*) dGA=', dGA
write(3,*) dGFINN=', dGFINN
write(3,*) dGPFIND=', dGPFIND
        end

```



```

CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C  PROGRAMA PARA GERACAO DO POTENCIAL NN no modelo de SKYRME NA
C  APROXIMACAO DE ANSATZ PRODUTO
C  E DERIVADA DO POTENCIAL EM RELACAO A mpi**2
C  usa rotinas spline.f, splint.f e gauleg.f de [Pr92]
C  CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C  definicao da eq.dif.de Skyrme
FUNCTION GS(Z,T,Y)
COMMON B
T2=T*T
S=SIN(Y)
S2=S*S
GS=- ( T*Z/2+SIN(2.0*Y) * (-1.0/4.0+Z*S2-S2/T2)
& - (B*T/2)**2*S )
&
& RETURN
END
C ***** PROGRAMA PRINCIPAL
EXTERNAL GS
DIMENSION XJ(0:1200),YJ(0:1200),FDJ(0:1500)
DIMENSION Y2spl(0:1200),Y2d(0:1200)
Real H,MP,MN,MPD
REAL x1g,x2g,x9g(200002),wg(200002)
REAL x1z,x2z,xgz(200002),wz(200002)
COMMON B
pi=acos(-1.0)
C OPEN(UNIT=1,NAME='vp.lst',STATUS='unknown')
MP=138.0
MP=0.0
MP=137.0
*****Adkins massivo
FP=54.0
GR=4.84
*****Vin Mau
MP=0.0
FP=93.0
GR=3.6
*****Holtzwarth
FP=93.0
GR=4.0
MN=37.77*2*fp/gr
*****
dmp=1.
XMP=MP+dmp
YMP=MP-dmp
DO id=0,1
if(id.eq.0) then
XYMP=MP+dmp
else
XYMP=MP-dmp
endif
B=XYMP/(2*FP*GR)
T0=1.0E-6 ! 1.0e-6
Y0=pi
h=1.0E-3 ! 2e-5
NP=10 ! 500
IMP=1200 !1200
write(6,*) 't0=',t0,'h=',h,np,imp
C *****Condicoes iniciais
C z0a=-1.0
C z0b=-1.3 ! Bisseccao
z1=-1.0 ! NR
z0=z1
inr=0

```

```

z0aux=0.1
do while(z0aux.gt.1e-8)
z0=(z0a+z0b)/2 ! Bisseccao
C
C
C YI=Y0+T0*Z0 correcao de ponto inicial
ZI=Z0
TI=T0
XJ(0)=T0
YJ(0)=YI
FDJ(0)=ZI
*****Contrucao das tabelas que serao interpoladas
DO J=1,IMP
DO K=1,NP
C0=GS(ZI,TI,YI)
YI=YI+H*ZI ! EULER na 1a eq. do sistema ja simplificada
ZI=ZI+H*CO ! EULER na 2a eq. do sistema
B0=ZI ! RUNGE-KUTTA
C0=GS(ZI,TI,YI)
B1=ZI+h/2*CO
C1=GS(ZI+H*CO/2,TI+H/2,YI+h/2*B0)
B2=ZI+h/2*C1
C2=GS(ZI+H*C1/2,TI+H/2,YI+h/2*B1)
B3=ZI+h*C2
C3=GS(ZI+H*C2,TI+H,YI+h*B2)
YI=YI+H*(B0+2*B1+2*B2+B3)/6
ZI=ZI+H*(C0+2*C1+2*C2+C3)/6
TI=TI+H
ENDDO
XJ(J)=TI
YJ(J)=YI
FDJ(J)=ZI
ENDDO
U=TI
AL=YI*EXP(B*U)*U/(1.0+B*U)
BL=ZI*U*EXP(B*U)/(-2*B/U-2/(U*U)-B*B)
C
C if (al.gt.bl) then ! Bisseccao
z0a=z0
else
z0b=z0
endif
z0aux=abs(z0a-z0b)
C
C
C if (inr.eq.0) then ! Newton-Raphson
FZ1=AL-BL
z2=1.1*z1
inr=1
else
FZ2=AL-BL
z3=z2-FZ2/(FZ2-FZ1)*(z2-z1)
FZ1=FZ2
z1=z2
z2=z3
endif
z0=z2
z0aux=abs(z2-z1)
write(6,*) z0,AL,BL
enddo
ns=1200
AL0=AL

```

```

*****construcao dos parametros para interpolacao
call spline(xj,yj,ns,z0,fdj(1200),y2spl)
call spline(xj,fdj,ns,0,0,0,y2d)
OPEN(UNIT=3,NAME='dirack.dat',STATUS='unknown')
OPEN(UNIT=3,NAME='dirv0.dat',STATUS='unknown')
OPEN(UNIT=3,NAME='dirv10.dat',STATUS='unknown')
OPEN(UNIT=3,NAME='dirvim.dat',STATUS='unknown')
OPEN(UNIT=3,NAME='dirvim.dat',STATUS='unknown')
write(3,*) AL0,BL0
DO I=1,ns
write(3,*) XJ(I),YJ(I)
write(3,*) FDJ(I),Y2d(I)
write(3,*) Y2spl(I),Y2d(I)
enddo
close(3)

*****
OPEN(UNIT=3,NAME='dirack.dat',STATUS='old')
OPEN(UNIT=3,NAME='dirv0.dat',STATUS='old')
OPEN(UNIT=3,NAME='dirvim.dat',STATUS='old')
OPEN(UNIT=3,NAME='dirhol.dat',STATUS='old')
read(3,*) AL,BL
DO I=1,ns
read(3,*) XJ(I),YJ(I)
read(3,*) FDJ(I)
read(3,*) Y2spl(I),Y2d(I)
enddo
close(3)

ns=1200
write(6,*) AL,BL
*****INTEGRACAO 2d de 0 a inf.
X1g=0.00
X2g=0.99
x1z=0.00
Pz=2.
x2z=0.99
NY=50
NY=100

if (.d.eq.0) then
OPEN(UNIT=11,NAME='vc.lst',STATUS='unknown')
OPEN(UNIT=21,NAME='vs.lst',STATUS='unknown')
OPEN(UNIT=31,NAME='vt.lst',STATUS='unknown')
open(41,file='xv.lst',status='unknown')
else
open(42,file='yv.lst',status='unknown')
endif

write(6,*) xmp,fp,gr,z0
write(6,*) x1g,x2g,nx
write(6,*) x1z,x2z,ny,pz

CALL gauleg(x1g,x2g,xgg,wg,nx)
CALL gauleg(x1z,x2z,xgz,wz,ny)
OPEN(UNIT=2,NAME='dis.dat',STATUS='old')
OPEN(UNIT=2,NAME='dis2.dat',STATUS='old')
read(2,*) disfm
do while (disfm.ge.0)
d=disfm*(2*fp*GR)/197.3/2
d2=d*d
dg=2*d
d=.0
VC=0.0
VS=0.0

```

```

VT=0.0
DO I=1,NX
XU=XGq(I)
Xin=XU/(1.0-ABS(XU))
VCXI=0.0
VXSI=0.0
DO J=1,NY
YU=XGz(J)
Yin=YU/(1.0-ABS(YU))
write(6,*) 'aqui',i,j
*****Xin e Yin sao variaveis de integracao
G=Xin
Z=Yin
*****FUNCAO a ser integrada
G2=G*G
Z2=Z*Z
ZMD=Z-D
ZPD=Z+D
ZMD2=ZMD*ZMD
ZPD2=ZPD*ZPD
X=(G2+ZPD2)**.5
Y=(G2+ZMD2)**.5
X2=X*X
Y2=Y*Y
***** calculo de F(X),F(Y),FD(Y) por interpolacao
if (X.le.12.0) then
call splint(XJ,YJ,Y2spl,ns,x,FX)
call splint(XJ,FDJ,Y2d,ns,x,FDX)
else
FX=AL*(1.0+B*X)*EXP(-B*X)/(X*X)
FDX=AL*EXP(-B*X)*(-2*B/X-2/X2-B*B)/X
endif

if (x.le.1e-8) then
FX=pi
FDX=Z0
endif
FX=FX-pi
if (Y.le.12.0) then
call splint(XJ,YJ,Y2spl,ns,y,FY)
call splint(XJ,FDJ,Y2d,ns,y,FDY)
else
FY=AL*(1.0+B*Y)*EXP(-B*Y)/(Y*Y)
FDY=AL*EXP(-B*Y)*(-2*B/Y-2/Y2-B*B)/Y
endif
if (y.le.1e-8) then
FY=pi
FDY=Z0
endif
FY=FY-pi

FX=pi/(X2+1)-pi
FDX=-2.0*X*pi/(X2+1.0)**2
FY=pi/(Y2+1)-pi
FDY=-2.0*pi*Y/(Y2+1.0)**2
*****funcao H
*****funcao ja simplificada em cartesianas
Nnbar
fx=-fx
fdx=-fdx
***** dos skyrminion eh zerado(so tem sentido na distancia zero)
if (d.eq.0) then
FY=0.0
FDY=0.0
endif
FX=0.0
FDX=0.0
*****
FX2=FX*FX

```

```

FY2=FY+FY
FDX2=FDX*FDX
FDY2=FDY*FDY

CX=COS(FX)
CY=COS(FY)
CX2=CX*CX
CY2=CY*CY

SX=SIN(FX)
SY=SIN(FY)
SX2=SX*SX
SY2=SY*SY

TX=SX/X
TY=SY/Y

TX2=TX*TX
TY2=TY*TY

XY=(G2+(Z+D)*(Z-D))/(X*Y)
funcao
a=X*Y
a2=a*a

z12=1.
z14=1.
z1b=1.

#####dens. pot. central
crob
C & AVC= (1./3.)*( (Fdx2+tx2)*(fdy2+ty2)+2*tx2*ty2
C & -a2*(fdx2-tx2)*(fdy2-ty2) )
C & -25*B*B*(1.-cx)*(1.-cy)
crob

C AVC=z14*( (Fdx2+tx2)*(FDY2+ty2)+2*tx2*ty2
& -(Fdx2-tx2)*(FDY2-ty2)*a2
& -z1b*.25*B*B*(1.0-cx)*(1.0-cy) )/3.

DVC=2*pi*pz*g*AVC

#####dens. pot. spin-spin
crob
C axy=(a-1.5*g2/(x*y))
C bet=1.5*g2/(x*y)
C del=dd*2/(3*x*y)

C AVS=
C (.25*fdx2+tx2+fdy2+ty2)*
C (-2*a*sx*tx*sy*ty*(1+a2)*tx*cx*ty*cy)
C +(1-a2)*(.25+2*tx2+fdy2+ty2)*fdx*ty*cy
C +(.25+fdx2+tx2+2*ty2)*tx*cx*fdy
C +a2*(.25+2*tx2+2*ty2)*fdx*fdy

C +1.5*tx*ty*
C (-2*a*fdy*sy*fdx*sx
C +(1.0-a2-2*bet*del)*cx*cy*(Fdx*ty*cy+fdy*tx*cx-tx*cx*ty*cy)
C +tx*ty*a2+(Fdx*cx*ty+fdy*cy*tx)*(1-a2)
C +2*(a2+bet*del)*cx*fdx*cy*fdy

C & +.25*B*B*a*sx*sy
crob

C AVS=
C (-.25*z12+z14*(Fdx2+tx2+fdy2+ty2))*
C (2*sx*tx*sy*ty*a-tx*cx*ty*cy-tx*cx*fdy-ty*cy*fdx
C - (Fdx-tx*cx)*(fdy-ty*cy)*a2)
C +z14*( -Fdx*(Fdx2-tx2)*(fdy*a2+(1-a2)*ty*cy)
C -fdy*(fdy2-ty2)*(fdx*a2+(1-a2)*tx*cx)
C +1.5*tx*ty*
```

```

& (3*tx*ty*cx2*cy2+tx*ty*sy2*cx2+tx*ty*sx2*cy2
& +2*(fdy-ty*cy)*cy*tx*cx2+2*(fdx-tx*cx)*cx*ty*cy2
& +(1-a2)*(fdx-tx*cx)*cx*sy2*ty+(1-a2)*(fdy-ty*cy)*cy*sx2*tx
& +tx*ty*sx2*sy2*a2
& -2*fdy*sy*fdx*sx*a
& +(fdx-tx*cx)*cx*(fdy-ty*cy)*cy*(2*a2+4*d2*g2/x2/y2) )
& +z1b*.25*B*B*a*sx*sy

DVS=1.0/27*2*pi*pz*g*AVS

#####dens. pot. tensor
ax=(1.0-1.5*g2/x2)
ay=(1.0-1.5*g2/y2)
axy=(a-1.5*g2/(x*y))

crob dm=2*d
C bet=1.5*g2/(x*y)
C det=dm*dm/(3*x*y)
C AVT=
C (.25+fdx2+tx2+fdy2+ty2)*
C (axy*sx*tx*sy*ty+(-2+a2+bet*(y/x+x/y-a))*tx*cx*ty*cy)
C +(1.-a2+bet*(-y/x+a))*(.25+2*tx2+fdy2+ty2)*fdx*ty*cy
C +(1.-a2+bet*(-x/y+a))*(.25+fdx2+tx2+2*ty2)*tx*cx*fdy
C + (a2-a*bet)*(.25+2*tx2+2*ty2)*fdx*fdy

C +1.5*tx*ty*
C (a-bet)*sx*fdx*sy*fdy+(-2+a2+bet*(y/x+x/y-a)*det))*
C cx*cy*(-tx*cx*ty*cy+fdx*ty*cy+tx*cx*fdy)+a*axy*tx*ty
C +(1.-a2+bet*(-x/y+a))*cx*fdx*ty
C +(1.-a2+bet*(-y/x+a))*tx*cy*fdy
C +(-a2+bet*(a-det))*cx*fdx*cy*fdy
crob & +.25*B*B*axy*sx*sy

avt=
& (-.25*z12+z14*(Fdx2+tx2+fdy2+ty2))*
& (-sx*tx*sy*ty*axy
& -tx*cx*(fdx-cy*ty)*axy-ty*cy*(fdx-cx*tx)*ax
& -(fdx-cx*tx)*(fdy-cy*ty)*a*axy)

& +z14*( -Fdx*(Fdx2-tx2)*(ty*cy*ax+(fdy-cy*ty)*a*axy)
& -fdy*(fdy2-ty2)*(tx*cx*ay+(fdx-cx*tx)*a*axy)

& +z14*1.5*tx*ty*
& (sy2*tx*ty*cx2*ay*sx2*tx*ty*cy2*ax
& +sx2*tx*ty*sy2*a*axy
& -(fdy-cy*ty)*cy*tx*cx2*ay-(fdx-cx*tx)*cx*ty*cy2*ax
& +(fdy-cy*ty)*cy*sx2*tx*(ax-a*axy)
& +(fdx-cx*tx)*cx*sy2*ty*(ay-a*axy)
& +fdy*sy*fdx*sx*axy
& -(fdy-cy*ty)*(fdx-cx*tx)*cx*cy*(a*axy+2*d2*g2/(x2*y2) )
& +z1b*.25*B*B*axy*sx*sy

DVT=(1.0/27)*2*pi*pz*g*AVT
#####fim da funcao
VCXI=VCXI+DVC*Wz(J)/(1.0-ABS(YU))*2
VSXI=VSXI+DVS*Wz(J)/(1.0-ABS(YU))*2
VTXI=VTXI+DVT*Wz(J)/(1.0-ABS(YU))*2
ENDDO
VC=VC+VCXI*Wg(I)/(1.0-ABS(XU))*2
VS=VS+VSXI*Wg(I)/(1.0-ABS(XU))*2
VT=VT+VTXI*Wg(I)/(1.0-ABS(XU))*2
ENDDO

VCMEV=VC*2*FP/GR
VSMEV=VS*2*FP/GR
VTMEV=VT*2*FP/GR
#####comportamento assintotico
dd=2*d
```

```

*$$$$$$$$$$$ m=0
if (mp.eq.0) then
  ASC=VC*dd
  ASS=VS*dd
  AST=VT*dd**3
*$$$$$$$$$$$ m=138
else
  ASC=VC*dd*dd*EXP(2*B*dd)
  ASS=VS*3*dd*EXP(B*dd)
  ASS2=.760/(3*dd*EXP(B*dd))*2*FP/GR
  gprn=10.5
  vsgrn=gprn**2/4./pi*(mp/(2*939))**2/3.
  &
  AST=VT*dd*EXP(B*dd)/(1.0/(B*dd)**2+1.0/(B*dd)+1.0/3)
  AST=VT*dd*EXP(B*dd)/(1.0/(B*dd)+1.0/3)
  ast2=.760/(dd*EXP(B*dd))/(1.0/(B*dd)**2+
  1.0/(B*dd)+1.0/3))*2*FP/GR
  &
endif

C   ASC=VCMEV*disfm*EXP(MP*disfm/197.3)
C   ASS=VSMEV*disfm*EXP(MP*disfm/197.3)
C   AST=VTMEV*disfm*EXP(B*dd)/(1.0/(B*dd)**2+1.0/(B*dd)+1.0/3)

if(id.eq.0) then
write(11,991) disfm,VC,VCMEV,asc
write(21,991) disfm,VS,VSMEV,ass
write(31,991) disfm,VT,VTMEV,ast,ast2
write(41,990) disfm,VCMEV,VSMEV,VTMEV
else
write(42,990) disfm,VCMEV,VSMEV,VTMEV
endif

write(6,*) vcmev,vsmev,vtmev

991  format(1(f9.5),1(F25.16),1(F15.6),3(F15.6))
read(2,*) disfm
enddo
close(2)
if (mp.ne.0) then
  GK2=4*pi*(2*939)/MP)**2*AST/gr**2
  GK=ck2**5
  write(6,*) ast,GK2
endif
continue
close(1)
enddo !(fim do do id=0,1)
close(41)
close(42)

open(41,file='xv.lst',status='unknown')
open(42,file='yv.lst',status='unknown')
open(50,file='dvtmp.lst',status='unknown')
do while(a.le.5.9)
  read(41,*) a,xvc,xvs,xvt
  read(42,*) a,yvc,yvs,yvt
  dvc=(xvc-yvc)/(xmp**2-ympp**2)*138**2
  dvs=(xvs-yvs)/(xmp**2-ympp**2)*138**2
  dvt=(xvt-yvt)/(xmp**2-ympp**2)*138**2
  write(50,990) a, dvc,dvs,dvt
enddo

990  FORMAT(1F4.2,3(F16.10))
end

C fator de assintota 0.759

```


REFERÊNCIAS

- [Ana90] J.Ananias Neto, R.M.Galain e E.Ferreira, *Lectures on Hadron Physics* ed. E. Ferreira, 1990, World Scientific, Singapore, p.164.
- [Ab81] M.J.Ablowitz e H.Segur, *Solitons and the Inverse Scattering Transform*, Siam, Philadelphia, 1981, pp. 1-5.
- [Ad83-84-87] G.S.Adkins, C.R.Nappi, E.Witten, Nucl. Phys.B228(1983) 552. G.S.Adkins, C.R.Nappi, Nucl.Phys. B233(1984)109. G.S.Adkins, *Chiral Solitons*, ed. K.F.Liu, p.99, World Scientific, Singapore, 1987.
- [Al73] V. De Alfaro, S. Fubini, G.Furlan, G.Rosseti, *Currents in Hadron Physics*, North Holland, Amsterdam,1973.
- [Ba83] A.P.Balachandran, V.P.Nair, S.G.Rajeev, A.Stern, Phys. Rev. D27(1983)1153.
- [Bat94] O.L.Battistel, Tese de Doutorado, IFUSP, São Paulo,1994.
- [Bat95] C.J.Batty, Nucl.Phys. A585(1995)229c.
- [Ber60] J.Bernstein, S.Fubini, M.Gell-Mann, W.Thirring, N.Cim. 17(1960)757.
- [Bh88] R.K.Bhaduri, *Models of the Nucleon, from quarks to soliton*, Academic Press,1988.
- [Bov95] E.Bovet et al, Phys.Lett.B 153(1985)231.
- [Br79] G.E.Brown, *Mesons in Nuclei*, Eds. M.Rho e D.Wilkinson, North Holland, 1979, p.329-356.
- [BJ76] G.E.Brown e A.D.Jackson, *The Nucleon-Nucleon Interaction*, North Holland, Amsterdam, 1979.
- [BR96] G.E.Brown e M.Rho, Phys.Rep.269(1996)333, Nucl.Phys.A 596 (1996) 503.
- [BW75] G.E.Brown e W.Weise, Phys.Rep. 22(1975)279.
- [BW96] R.Brockmann e W.Weise, Phys.Lett B 367(1996)40.
- [Ca69] B.Carnahan, H.A.Luther, J.O.Wilkes, *Digital Computing and Numerical Methods*, John Wiley & Sons, New York, 1969.
- [Che94] T.P.Cheng e L.F.Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1994, p.160-165.
- [Cha95] D.Chatellard et al, Phys.Rev.Lett. 74(1995)4157.
- [Col85] S.Coleman, *Aspects of Symmetry*, Cambridge Univ. Press, 1985 p.194.
- [CoT77] C.Cohen-Tanoudji, B.Diu, F.Laloë, *Quantum Mechanics*, Hermann and J.Wiley & Sons, Paris, 1977, vol II.
- [Coh91] T.D.Cohen, R.J.Furnstahl e D.K.Griegel, Phys.Rev. Lett. 67(1991)961.
- [Coh92] T.D.Cohen, R.J.Furnstahl e D.K.Griegel, Phys.Rev. C45(1992)1881.
- [Das69] R.Dashen, Phys.Rev. 183(1969)1245.
- [De64] G.H.Derrick, J.Math. Phys. 5(1964)1252.
- [Del95] A.Delfino, Jishnu Dey, Mira Dey, M.Malheiro, Phys.LettB363(1995)17.
- [Del96] A.Delfino, Jishnu Dey, Mira Dey, M.Malheiro, Z.Phys.C71(1996)507.

- [Delo96] J.Delorme, G.Chanfray e M. Ericson, Nucl. Phys. A603(1996)239.
- [Eri90-93] T.E.O.Ericson, CERN-TH 5621/90, CERN-TH 7104/93 UUITP33/93, CERN-TH61615/91, CERN-TH 6693/93 UUITP 18/1993.
- [Ei88] J.M.Eisenberg e G.Kälbermann, Progr. Part.Nucl. Physics, 22(1988)1-42, Ed. A.Faessler (Plenum, New York 1989).
- [EK80] J.M.Eisenberg e D.Koltun, *Theory of Meson Interactions with Nuclei*, Wiley, 1980.
- [EW88] T.E.O.Ericson e W.Weise, *Pions and Nuclei*, Clarendon Press, Oxford, 1988.
- [Fet97] N.Fettes e E.Matsinos, Phys. Rev. C55(1997)464.
- [Gas91] J.Gasser, H.Leutwyler, M.E.Sainio, Phys.Lett.B 253(1991)252 e 260.
- [Ge60] M.Gellmann e M.Lévy, Nuovo Cim. 16(1960)705.
- [Glo96] L.Ya.Glozman, hep-ph/9608283.
- [Gol61] J.Goldstone, Nuovo Cim. 19(1961)15; J.Goldstone, A.Salam, S.Weinberg, Phys.Rev.127(1962)965.
- [Go80] H.Goldstein, *Classical Mechanics*, 1980, pp. 578-579.
- [GOR68] M.Gell-Mann, R.Oakes, e B.Renner, Phys. Rev.175(1968)2195.
- [GT58] M.L.Goldberger e S.B.Treiman, Phys. Rev. 110(1958)1178.
- [Ho86] G.Holzwarth e B. Schwesinger, Rep. Prog. Phys. 49(1986) 825-871.
- [Hol90] G.Holzwarth, G.Pari e B.K.Jennings, Nucl.Phys. A515(1990)665.
- [Hol95] G.Holzwarth, Progr.Part.Nucl.Phys. 36(1996)161.
- [Ja85] A. Jackson, A.D. Jackson, V.Pasquier, Nucl.Phys. A432(1985)567.
- [Ja85a] A.Jackson, A.D.Jackson, A.S.Goldhaber, G.E.Brown, Phys. Lett. B154, 101(1985).
- [JVV74] C.W.de Jager, H.de Vries, C.de Vries, Atom. Data and Nucl. Data Tabl. 14(1974)479.
- [Ka93] G.Kälbermann, Nucl. Phys. A561(1993)582.
- [Ke04] W.T. Kelvin, Baltimore Lectures on Molecular Dynamics and the Wave Theory of Light, Clay&Son, Baltimore,1904. Op.cit.[Ma93]
- [Ke10] Kelvin,W.T. Mathematical and Physical Papers, vol IV Hydrodynamics and General Dynamics, Cambridge Univ. Press, Cambridge,1910. Op.cit.[Ma93].
- [Ko81] E.J.Konopinski, *Electromagnetic Fields and Relativistic Particles*, Mc Graw-Hill, 1981, p.504.
- [Koc86] R.Koch, Nucl.Phys.A448(1986)107.
- [Klu91] W.Kluge, Rep. Prog. Phys. 54(1991)1251-1332.
- [Lac80] M.Lacombe et al., Phys.Rev.C21(1980)861.
- [Lag81] J.E.Lagaris e V.R.Pandharipande, Nucl.Phys.A 359(1981)331.
- [Lan90] R.H.Landau, *Quantum Mechanics II*, Wiley, 1990.
- [Lat47] C.M.G.Lattes, H.Muirhead, C.F.Powell, G.P.Occhialini, Nature 159(1947)694.
- [Leu82] J.Gasser e H.Leutwyler, Phys.Rep.87(1982)77.

- [Li94] G.Q.Li e C.M.Ko, Phys. Lett. 338B(1994)118.
- [Loc90] M.P.Locher e M.E.Sainio, Nucl. Phys. A518(1990)201.
- [Mac87] R.Machleidt, K.Holinde, C.Elster, Phys.Rep. 149(1987)1.
- [Mac89] R.Machleidt, Adv. Nucl. Phys. 19(1989)189.
- [Ma93] V.G.Makhankov, Y.P.Rybakov e V.I.Sanyuk, *The Skyrme Model*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg,1993.
- [Man84] F.Mandl e G.Shaw, *Quantum Field Theory*, Wiley, 1984.
- [Mer70] E.Merzbacher, *Quantum Mechanics*, Wiley, New York, 1970, 2nd ed., p.442.
- [Mu81] J.H.Mulvey, *The Nature of Matter*, Clarendon Press, Oxford, 1981.
- [Nat93] L.Nathanson e J.M.Eisenberg, Int.J.Mod.Phys.E vol. 2 no. 3(sept,1993)587.
- [Nam60] Y.Nambu, Phys.Rev.Lett. 4(1960)380.
- [Nie93] J.Nieves, E.Oset, C.Garcia-Recio, Nucl. Phys.A554(1993)509; A554(1993)554.
- [NNR93] F.S.Navarra, M.Nielsen, M.R.Robilotta, J.Phys. G 19(1993)685.
- [Ny86] E.M.Nyman e D.O.Riska, Phys. Scripta, vol. 34, 533,1986; Phys.Rev.Lett. 57(1986)3007; Int.J.Mod.Phys.A3,1535(1988).
- [Pa92] Particle Data Group Phys.Rev. D45 S,n.11,1992.
- [Pa86] A. De Pace, H.Muther e A.Faessler, Z.Phys.A325(1986)229.
- [Pe61] J.K.Perring e T.H.R.Skyrme, Nucl. Phys. 31(1962)550.
- [Pr92] W.H.Press, S.A.Teukolsky, W.T.Vettering, B.P.Flannery, *Numerical Recipes in Fortran-2nd ed.*, Cambridge Univ. Press, Cambridge,1992.
- [Pu95] J.Pupin, Tese de Mestrado, IFT, São Paulo, 1995.
- [PS95] M.E.Peskin e D.V.Schroeder, *Introduction to Quantum Field Theory*, Addison Wesley, 1995, p.351.
- [Re79] C.Rebbi, Solitons, Sci.Am. Feb(1979)76.
- [Rei68] R.V.Reid, Ann. Phys. 50(1968) 411.
- [Rei93] <http://nn-online.sci.kun.nl/NN/deuteron/w3s1-r93.html> (onda s) e [w3d1-r93.html](http://nn-online.sci.kun.nl/NN/deuteron/w3d1-r93.html) (onda d).
- [Ro87] M.R.Robilotta, Notas de aula da III Escola de Verão Jorge André Swieca, Petrópolis, 1987.
- [Ro90] M.R.Robilotta, Lectures on Hadron Physics, ed. Erasmo Ferreira, p.197(1990), World Scientific,Singapore.
- [Ro91] M.R.Robilotta, Notas de aula do curso de Física Nuclear, IFUSP, 1991.
- [Ro97] J.L.Ballot, M.Ericson, M.R.Robilotta, Changes in the Quark Condensate Induced by Nucleon-Nucleon Interaction, 1997, a ser submetido.
- [RS80] P.Ring-e P.Schuck, *The Nuclear Many Body Problem*, Springer-Verlag, 1980, seção 4.3.
- [Ry85] L.H.Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge Univ. Press, 1985, pp.401-406.
- [Sa67] J.J.Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, Addison Wesley, 1967, p.19.

- [Sa69] J.J.Sakurai, *Currents and Mesons*, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1969.
- [Sa85] J.J.Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison Wesley, 1985.
- [Sal95] L.L.Salcedo, K.Holinde, E.Oset, C.Schütz., Phys.Lett B 353(1995)1.
- [Sek83] R.Seki e K.Masutani, Phys.Rev.C 27(1983)2799.
- [Sek88] K.Masutani e R.Seki, Phys.Rev.C 38(1988)867.
- [Sch57] J.Schwinger, Ann.Phys. 2(1957)407. Op.cit. [Sa69 p.89]
- [Sch86] R.Schiavilla, V.R.Phandaripande, R.B.Wiringa, Nucl.Phys.A449(1986)219, table 2.
- [Sig95] D.Sigg et al, Phys.Rev.Lett 75(1995)3245.
- [Sk54] T.H.R.Skyrme, Proc.Roy.Soc.A, 226(1954)521.
- [Sk55] T.H.R.Skyrme, Proc.Roy.Soc.A, 230(1955)277.
- [Sk58] T.H.R.Skyrme, Proc.Roy.Soc.A, 247(1958)260.
- [Sk59] T.H.R.Skyrme, Nucl. Phys. 9(1959)615.
- [Sk61] T.H.R.Skyrme, Proc.Roy.Soc.A, 260(1961)127; A 262(1961)237.
- [Sk62] T.H.R.Skyrme, Nucl. Phys. 31(1962)550 e 556.
- [Sk88] T.H.R.Skyrme, Int. J. Mod. Phys. A3(1988)2745. Op.cit. [Ma93].
- [SW86] B.D.Serot e J.D.Walecka, Adv.Nucl.Phys. vol.16,1986.
- [Ta79] B.A.P.Taylor, What is a solitary wave?, Am. J. Phys.47(10), Oct(1979)847.
- [t'Ho74] G.t'Hooft, Nucl.Phys.B72(1974)461; B75(1974)461.
- [Tho80] A.W.Thomas e R.H.Landau, Phys.Rep.58(1980)121-212.
- [Tho84] A.W.Thomas, Adv.Nucl.Phys. vol.13(1984) p.47.
- [Vi85] R.Vinh Mau, M.Lacombe, B.Loiseau, W.N.Cottingham, P.Lisboa, Phys.Lett.B 150(1985)259.
- [Ve87] J.J.M.Verbaarschot, T.S.Walhout, J.Wambach, H.W.Wyld, Nucl. Phys. A468(1987)520; A461(1987)603.
- [Wei66] S.Weinberg, Phys. Rev. Lett. 17(1966)616.
- [We68] S.Weinberg, Phys. Rev. 166(1968)1598.
- [We79] S.Weinberg, Physica 96A(1979)327.
- [Wi79] E.Witten, Nucl. Phys. B160(1979)57.
- [Wir84] R.B.Wiringa, R.A.Smith, T.L.Ainsworth, Phys.Rev.C 29(1984)1207.
- [WW91] T.S.Walhout e J.Wambach, Phys. Rev. Lett. 67(1991)314.
- [WW92] T.S.Walhout e J.Wambach, Int.J.Mod.Phys.E, vol 1 n.4 (1992) 665-738.
- [Ya85] H.Yabu e K.Ando, Progr. Theor. Phys. 74(1985)750.
- [Zab65] N.J. Zabusky e M.D.Kruskal, Phys.Rev.Lett. 15(1965)240.
- [Za86] I.Zahed e G.E.Brown, Phys. Rep. 142, Nos. 1 & 2 (1986) 1-102, North-Holland, Amsterdam.

Com objetivo de reunir os diversos grupos que trabalharam com o modelo de Skyrme, apresentamos uma relação de teses defendidas no Brasil versando sobre o tema:

Hércules Borges Rodrigues, Tese de Mestrado, *Quantização Relativística do Skyrmion*, Orientador: Michel Betz, Univ. Fed. do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1991.

Fernando Monti Steffens, Tese de Mestrado, *Efeitos de Vibração no Skyrmion*, Orientadora: Victoria Herscovitz, Univ. Fed. do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1992.

Stenio Wulk Alves de Melo, Tese de Doutorado, *Estudos sobre os Sólitons Bariônicos no Modelo de Skyrme*, Orientador: Juan Alberto Mignaco, Univ. Fed. do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1992.

Jorge Ananias Neto, Tese de Doutorado, *Propriedades Analíticas do Sóliton de Skyrme*, Orientador: Erasmo Ferreira, PUC-RJ, Rio de Janeiro, 1992.

Orildo Luis Battistel, Tese de Doutorado, *Fenomenologia Hadrônica no Modelo de Skyrme*, Orientador: Manoel Roberto Robilotta, Instituto de Física-USP, São Paulo, 1994.

Aproveito para agradecer as valiosas correções e contribuições da banca examinadora, Prof. Dr. Emerson V.R. Passos, Prof. Dr. Iuda D. Goldman, Prof. Dr. José de Sá Borges Filho e Prof. Dr. Lauro Tomio, para a versão final deste trabalho.