Universidade de São Paulo
Instituto de Física
Departamento de Física Matemática

Análise Hamiltoniana e Quantização da Teoria de Gravitação Dilatônica em Duas Dimensões

Tese de Doutorado
submetida ao Instituto de Física
da Universidade de São Paulo

Sebastião Cassemiro de Figueiredo Filho

Banca Examinadora: Prof. Dr. Henrique Fleming (USP)
Prof. Dr. Josif Frenkel (USP)
Prof. Dr. A. Zimerman (IFT)
Prof. Dr. J. A. Helayel Neto (CBPF)
Prof. Dr. Victor O. Rivelles (USP)

Sylvio Casanto
Orientador : Prof. Victor O. Rivelles

São Paulo
1999

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Figueiredo Filho, Sebastião Cassemiro de

Análise Hamiltoniana e quantização da teoria de gravitação dilatônica em duas dimensões. São Paulo, 1999.

**Tese (Doutorado) Universidade de São Paulo.
Instituto de Física - Departamento de Física Matemática.**

**Orientador: Prof. Dr. Victor O. Rivelles
Área de Concentração: Física de Partículas Elementares**

Unitermos: 1. Gravitação em 2D; 2. Modelos dilatônicos em 2D; 3. Modelo de CGHS

USP/IF/SBI-013/99

Agradecimentos

Ao Prof. V.O.Rivelles pelo trabalho proposto.

Ao colega L.Buffon pelas sugestões no trabalho de edição de texto.

A CAPES e ao CNPq pelo suporte financeiro.

Abstract

We analyse a theory of gravitation in two dimensions using the hamiltonian formalism. For this purpose we use the CGHS model in the conformal gauge. The theory of constraints shows that we have only first-class constraints. After that, we apply the BRST-BFV technique to quantize the theory. We show that the ghosts in the partition function are decoupled from the fields. Then we integrate the ghosts in the partition function. By a suitable canonical transformation we write the constraints in a quadratic form which facilitates the quantization of the theory. To complete the quantization we use the Dirac procedure to obtain the constraints algebra expressed in the energy-momentum tensor form. There is an anomaly in the algebra which can be suitably eliminated by the addition of an improvement term in the action. Finally we use the Dirac procedure to obtain solutions for the wave function. This proves that the CGHS theory in two dimensions is quantizable.

Resumo

Neste trabalho, analisamos o modelo de gravitação dilatônica proposto por Callan, Giddings, Harvey e Strominger (modelo de CGHS). Aplicamos a teoria de vínculos ao modelo e mostramos que só existem vínculos de primeira classe. Em seguida aplicamos a técnica de BRST-BFV para quantizar a teoria. Mostramos que os fantasmas na função de partição estão desacoplados dos campos e podem ser integrados. Utilizamos uma transformação canônica para escrever os vínculos na forma quadrática, que facilita a quantização da teoria. Para completar a quantização usamos o procedimento de Dirac para obter a álgebra dos vínculos expressa na forma do tensor momento-energia. Existe uma anomalia na álgebra que é apropriadamente eliminada quando adicionamos um termo de improvement à ação. Finalmente usamos o procedimento de Dirac para obter soluções para a função de onda. Isto prova que a teoria de CGHS em duas dimensões é perfeitamente quantizável.

Conteúdo

1	INTRODUÇÃO	3
2	MODELO DE CGHS	9
2.1	Descrição do Modelo	9
2.2	Sistemas vinculados	11
2.3	Teoria de Sistemas Vinculados Aplicada ao Modelo de CGHS	18
3	QUANTIZAÇÃO DO MODELO DE CGHS	20
3.1	Método de Quantização BRST-BFV	20
3.2	Quantização BRST-BFV do Modelo de CGHS	24
3.3	Função de Partição para o Modelo de CGHS no Gauge Conforme	27
3.4	Forma Quadrática do Modelo de CGHS	32
3.5	Quantização BRST-BFV do Modelo de CGHS na Forma Quadrática	34
3.6	Análise de Anomalias para o Modelo de CGHS	40
3.6.1	Cálculo da Anomalia	40
3.6.2	Termo de Improvement para o Cancelamento da Anomalia	48
3.6.3	Quantização de Dirac para o Modelo de CGHS	55
4	Conclusão	63
A	Parênteses de Poisson	65
B	Tensor Momento Energia para os Fantasma	67
C	Álgebra do Tensor Momento-Energia para o Campo Escalar	71

D	Álgebra do Tensor Momento-Energia para os Fantasma	82
E	Álgebra do Tensor Momento-Energia para o Campo Escalar + Termo de Improvement	93

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Com a descoberta de Hawking de que buracos negros evaporam devido a efeitos quânticos [1], houve uma grande quantidade de debates sobre as propriedades dos buracos negros. Estas discussões tratam das possibilidades de incluir efeitos quânticos na teoria de gravitação, embora em 4d não exista uma teoria quântica para a gravitação.

A descoberta da evaporação de Hawking levantou um problema sério cuja solução requer um melhor entendimento da física na escala de Planck. Este é o problema relacionado com a perda de informação. Tratando este problema de forma abreviada, consideramos um buraco negro formado a partir de um estado puro $|\psi\rangle$. Este buraco negro então evapora e de acordo com o cálculo de Hawking o estado final é um estado térmico. Isto significa que a matriz densidade é da forma $\sum_{\alpha} p_{\alpha} |\psi_{\alpha}\rangle\langle\psi_{\alpha}|$, onde $|\psi_{\alpha}\rangle$ são estados base normalizados e p_{α} números, dos quais mais de um é diferente de zero. Neste caso os p_{α} s são aproximadamente as probabilidades térmicas usuais. De acordo com o cálculo de Hawking se o buraco negro não deixa um "remnant" isto significa que na teoria quântica de buracos negros estados puros podem evoluir para estados térmicos. Isto está em conflito com as leis usuais da mecânica quântica que sempre preservam a evolução unitária dos estados. Comparando estados puros e térmicos, verificamos que existe perda de informação de fase nestes últimos. Uma medida útil da perda de informação é dada pela entropia $S = -\sum_{\alpha} p_{\alpha} \ln p_{\alpha}$ [2][3].

Hawking propôs subsequentemente ao seu trabalho a modificação da mecânica quântica para incluir o problema de perda de informação. Entretanto, criar uma dinâmica alternativa é problemático. Nesta situação o melhor que se pode fazer é estudar modelos

simplificados que incluem o colapso gravitacional.

Nos últimos anos uma compreensão mais avançada da evaporação do buraco negro foi adquirida através da investigação de modelos simplificados em duas dimensões. O modelo simplificado mais realístico estudado até o momento é o do campo escalar esfericamente simétrico em 4d [4]. Entretanto, a teoria de campos em 2d obtida é ainda muito complicada para ser útil, por isto é necessário recorrer a modelos mais simples. Vários modelos mais simples foram estudados recentemente, incluindo o colapso de uma camada de poeira [5], colapso de uma nuvem de poeira esférica [6] e mais notavelmente as teorias de gravitação dilatônicas em 2d [3][7][8][9] [10][11].

Os modelos dilatônicos são obtidos a partir do limite de baixa energia da teoria de cordas com supersimetria quebrada [8]. Em particular, o modelo de CGHS (Callan, Giddings, Harvey e Strominger) para a gravitação dilatônica [2] atraiu uma grande atenção, já que é classicamente solúvel e a solução descreve a formação de um buraco negro em 2d quando acoplamos N campos de matéria à gravitação. Além disso o modelo assim obtido apresenta evaporação de Hawking e é uma teoria de campos renormalizável. A análise dos modelos dilatônicos veio confirmar os cálculos de Hawking, entretanto o problema da perda de informação levou os pesquisadores a procurar explicações alternativas, como considerar que a informação escape do buraco negro ou fique armazenada em um "remnant" deste. Ambas as alternativas apresentam dificuldades conforme descreveremos a seguir e portanto o problema permanece insolúvel.

Discutiremos agora as alternativas mencionadas acima usando os resultados encontrados na literatura para o modelo de CGHS acoplado à campos de matéria e, em alguns casos, variações deste, como por exemplo, o modelo de RST (Russo, Susskind e Thorlacius) [12]. O modelo de CGHS permitiu confirmar as previsões de Hawking sobre a evaporação do buraco negro. Entretanto, neste caso, tanto a entropia total quanto a energia da matriz densidade são infinitos. Isso se deve ao fato de que no cálculo da emissão de Hawking não se leva em consideração o efeito da radiação sobre a geometria do buraco negro durante a evaporação. Este efeito é conhecido como "backreaction" e pode ser incluído no modelo fazendo com que o tensor momento-energia atue como fonte nas equações de movimento clássicas para a métrica. Estas equações modificadas podem ser obtidas a partir da ação de Polyakov-Liouville [2][3]. A teoria obtida é tratada dentro da aproximação semiclássica. O interessante modelo proposto por Russo, Susskind e

Thornlacius (RST) incorpora todas as características da evaporação de Hawking e inclui o efeito de "backreaction". Além disso pode ser resolvido exatamente sem a restrição de N grande. Entretanto a aproximação semiclássica não é válida na fase final da evaporação do buraco negro. Strominger [10] também mostra que o modelo de RST viola o princípio de conservação da energia.

A possibilidade proposta por Hawking de que o buraco negro desapareça no final do processo de evaporação e que a informação seja simplesmente perdida, é na opinião de alguns autores, muito radical pois implica em falha da mecânica quântica. Pior que isso, temos que a perda de informação viola o princípio da conservação de energia. A explicação heurística para isto é a de que a transmissão de informação requer energia, portanto uma perda de informação implica em não conservação da energia.

A segunda possibilidade é de que a informação seja retornada na radiação de Hawking. A análise do modelo de CGHS com campos de matéria acoplados à gravitação mostra que o retorno de informação viola os princípios de localidade/causalidade [3][7]. Este modelo foi estudado utilizando-se uma descrição semiclássica que parece ser válida até o buraco negro atingir a massa de Planck (m_{pl}). Assim, outra possibilidade é de que a informação seja irradiada depois que o buraco negro atinja $M \sim m_{pl}$. Aqui o princípio de causalidade ordinário não mais se aplica ao interior do buraco negro e é plausível que a informação escape. Entretanto, neste caso, a única maneira segundo a qual a radiação possa conter tamanha quantidade de informação com uma energia tão pequena é a de que ela seja constituída de um número muito grande de partículas "soft", por exemplo fótons. Esta hipótese implica, segundo os cálculos, em um tempo de vida do buraco negro da ordem do tempo de vida do universo. Isto implica em uma terceira possibilidade, a de que depois de cessada a radiação de Hawking os buracos negros deixem um "remnant" de longa vida ou estável.

Se os "remnants", sejam eles estáveis ou de longa vida, resolvem o problema da informação, então deve existir um número infinito de espécies de "remnants" (um número infinito de estados internos) para armazenar a informação de um buraco negro inicial muito grande. Isto implicaria na produção de um número infinito de pares se raciocinarmos usando o conceito da produção de pares de Schwinger [13]. A produção de pares de Schwinger é ilustrada em [3] como exemplo para o caso de um "remnant" carregado eletricamente, e vemos que a taxa total de produção de pares tende a infinito para um

número infinito de estados internos.

A tabela abaixo apresenta de forma resumida as propostas para o problema da perda de informação e os respectivos princípios violados

Proposta	Princípios Violados
Perda de Informação	Unitariedade, Conservação da Energia
Informação Irradiada	-Durante Colapso/Evaporação: Localidade/Causalidade -Depois de atingir a Escala de Planck: Taxa Infinita de Produção de Pares
Informação Retida nos "Remnants"	Taxa Infinita de Produção de Pares

Conclui-se do exposto acima que antes do ponto final de evaporação os modelos em 2d se comportam justamente como Hawking previu para os buracos negros em 4d. Os problemas que surgem depois desse ponto ainda precisam ser examinados através de estudos de modelos na escala de Planck.

Neste trabalho, analisamos o modelo de CGHS em 2d utilizando o formalismo hamiltoniano e quantizamos a teoria utilizando o método BRST-BFV, desconsiderando o acoplamento com campos de matéria. Esta é uma primeira aproximação para entender a quantização das teorias dilatônicas em 2d. A quantização do modelo de CGHS utilizando o procedimento de BRST-BFV representa uma solução nova não disponível na literatura. Em uma etapa futura poderemos estudar a quantização do modelo acoplando campos de matéria ao campo gravitacional, o que permitirá analisar a formação de buracos negros e a radiação de Hawking.

A sequência usada no trabalho para análise da teoria é descrita a seguir. Escrevemos inicialmente a ação para o modelo de CGHS na forma usual. Utilizando uma transformação conforme reescrevemos o modelo em uma forma mais simples para análise. Com o modelo nesta forma aplicamos a teoria de sistemas vinculados e a seguir utilizamos o

método de quantização de BRST-BFV para obter a carga de BRST, a ação efetiva e a função de partição para o modelo no gauge conforme. Integramos, então, os fantasmas que estão desacoplados dos campos da teoria. Utilizamos em seguida, uma transformação canônica que torna os vínculos quadráticos. Com os vínculos na forma quadrática a função de partição obtida anteriormente representa uma integral gaussiana nos campos. Reescrevemos a carga de BRST e a ação efetiva para o modelo onde a contribuição dos fantasmas é escrita on-shell. Verificamos que o modelo original escrito em função do campo gravitacional e do campo escalar dilatônico, mais contribuições dos fantasmas, é agora descrito por uma ação de dois campos escalares, um com energia cinética positiva e o outro com energia cinética negativa, mais contribuição dos fantasmas. Realizamos uma segunda transformação canônica nos fantasmas que permite escrever os vínculos na forma do tensor momento-energia. Utilizando o procedimento de quantização canônico expandimos os campos e fantasmas em operadores de criação e aniquilação e analisamos a álgebra para o tensor momento-energia. Verificamos a presença de uma anomalia na álgebra. Esta anomalia não é anulada considerando a contribuição dos fantasmas. Introduzimos então um termo de improvement na ação (termo de superfície) que não altera a dinâmica do sistema. Reobtemos a álgebra do tensor momento-energia total relativo aos campos. Verificamos que as álgebras, quântica e clássica, para o tensor momento-energia, só são de primeira classe na condição em que as cargas Q_a (introduzidas no termo de improvement) satisfazem à condição $Q_a Q^a$ igual a zero. Nesta condição só conseguimos anular a anomalia quando desprezamos a contribuição dos fantasmas. Discutimos também o caso em que $Q_a Q^a$ é diferente de zero, sem introduzir a definição de parênteses de Dirac para converter vínculos de segunda classe em vínculos de primeira classe. No caso em que $Q_a Q^a = \pm 13/6\pi$ conseguimos anular a anomalia. Quando $Q_a Q^a = \mp 1/6\pi$, verificamos, que as possíveis soluções possuem norma negativa, o que é inconsistente com a definição usual do espaço de Hilbert físico.

Analisamos também as possíveis escolhas para o vácuo do sistema.

Mostramos ainda, um caso mais simples de anulamento da anomalia utilizando o procedimento canônico, ou seja, desconsideramos o termo de improvement e o procedimento de BRST-BFV.

Finalmente, utilizamos o método de quantização de Dirac e obtemos as soluções para a função de onda que satisfazem aos vínculos do sistema. Nesta etapa utilizamos também

um procedimento alternativo ao método de quantização de Dirac conhecido como quantização RPS que facilita a obtenção do funcional de onda no caso em que desconsideramos o termo de improvement. Utilizamos este método e reobtemos as soluções encontradas usando-se o primeiro método. As soluções para o funcional de onda no caso em que Q_a é diferente zero, na condição em que $Q_a Q^a$ é igual a zero, representam uma contribuição nova na literatura.

Acrescentamos uma discussão sobre o problema de ordenamento normal nos vínculos, mostrando a modificação dos vínculos na forma operatorial para uma prescrição arbitrária do ordenamento dos operadores.

Concluimos, finalmente, que o modelo de CGHS em 2d pode ser quantizado utilizando-se o procedimento de BRST-BFV.

Capítulo 2

MODELO DE CGHS

2.1 Descrição do Modelo

O Modelo de CGHS (Callan, Giddings, Harvey e Strominger) é descrito pela ação [2]

$$S = \int dx^2 \sqrt{-\bar{g}} \exp(-2\bar{\phi}) \left(\bar{R} + 4\bar{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \bar{\phi} \partial_\nu \bar{\phi} + \Lambda \right), \quad (2.1)$$

onde $\bar{\phi}$ é um campo escalar chamado campo dilatônico, $\bar{R}$ é o escalar de curvatura construído a partir do tensor métrico $\bar{g}_{\mu\nu}$, $\bar{g}$ é o determinante de $\bar{g}_{\mu\nu}$ e Λ a constante cosmológica.

O escalar de curvatura $\bar{R}$ é definido por [14]

$$\bar{R} = \bar{g}^{\mu\nu} \bar{R}_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

onde $\bar{R}_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci,

$$\bar{R}_{\mu\nu} = \bar{R}^\sigma_{\mu\sigma\nu} \quad (2.3)$$

$\bar{R}^\nu_{\gamma\sigma\rho}$ é o tensor de curvatura definido por

$$\bar{R}^i_{klm} = \frac{\partial \bar{\Gamma}^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \bar{\Gamma}^i_{kl}}{\partial x^m} + \bar{\Gamma}^i_{nl} \bar{\Gamma}^n_{km} - \bar{\Gamma}^i_{nm} \bar{\Gamma}^n_{kl} \quad (2.4)$$

Vamos usar uma transformação conforme que permita reescrever o modelo de CGHS sem o termo exponencial [15][16]

$$\begin{aligned}\phi &= \exp(-2\bar{\phi}) \\ g_{\mu\nu} &= \exp(-2\bar{\phi})\bar{g}_{\mu\nu}\end{aligned}\tag{2.5}$$

O escalar de curvatura é transformado, a menos de termos de superfície, em

$$\bar{R} = \exp(-2\bar{\phi}) [R - 4(\nabla\bar{\phi})^2]\tag{2.6}$$

e a ação pode ser então escrita na forma simplificada

$$S = \int dxdt \sqrt{-g} (\phi R + \Lambda)\tag{2.7}$$

Analisaremos o modelo de CGHS na forma dada acima.

Na análise do modelo de CGHS vamos utilizar a parametrização ADM (Arnowitt, Deser e Misner) da métrica [14] [17]

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -N_1^2 + gN_0^2 & gN_0 \\ gN_0 & g \end{pmatrix}\tag{2.8}$$

Procedendo com o cálculo de R , utilizando a parametrização acima, obtemos

$$\begin{aligned}R &= -[N_1\dot{g}^2 + 2g\dot{g}\dot{N}_1 - 2g\ddot{g}N_1 - 2\dot{g}g'N_0N_1 + 2gg'N_1\dot{N}_0 - 2gg'N_0\dot{N}_1 \\ &+ g'^2N_0^2N_1 + 4g\dot{g}N_1N_0' - 4g^2\dot{N}_1N_0' - 6gg'N_0N_1N_0' - 4g^2N_1N_0'^2 \\ &- 2g\dot{g}N_0N_1' + 2gg'N_0^2N_1' - 2g'N_1^2N_1' + 4g^2N_0N_0'N_1' + 4g\dot{g}'N_0N_1 \\ &+ 4g^2N_1\dot{N}_0' - 2gg''N_0^2N_1 - 4g^2N_0N_1N_0'' + 4gN_1^2N_0''] / (2g^2N_1^3)\end{aligned}\tag{2.9}$$

A análise do modelo de CGHS será realizada utilizando a teoria de sistemas vinculados descrita na próxima seção.

2.2 Sistemas vinculados

A teoria de sistemas vinculados é aqui descrita dentro do formalismo hamiltoniano [18]. Usando este formalismo partimos inicialmente de uma ação geral

$$S = S[\varphi_i] = \int dt L(\varphi_i, \partial_\mu \varphi_i) \quad (2.10)$$

onde L é a lagrangeana e $\varphi_i(x_\mu)$ ($i = 1, \dots, N$) os campos da teoria. Definimos a densidade de lagrangeana $\mathcal{L}$ por

$$L \equiv \int d^{D-1}x \mathcal{L} \quad (2.11)$$

onde D é o número de dimensões do espaço-tempo.

Os momentos canonicamente conjugados aos campos φ_i são definidos por

$$\Pi_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} \quad (2.12)$$

Pelo princípio da mínima ação, devemos ter $\delta S = 0$ [19], o que nos leva às equações de movimento de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_i} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \varphi_i)} = 0 \quad (2.13)$$

A densidade de hamiltoniana canônica é definida por

$$\mathcal{H}_c = \Pi_i \dot{\varphi}_i - \mathcal{L} \quad (2.14)$$

e a hamiltoniana canônica por

$$H_c = \int d^{D-1}x \mathcal{H}_c \quad (2.15)$$

O princípio da mínima ação nos leva às equações de movimento de Hamilton

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial \Pi_i}, \quad \dot{\Pi}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial \varphi_i} \quad (2.16)$$

Podemos escrever para as equações de movimento na forma hamiltoniana

$$\dot{\varphi}_i = \{\varphi_i, H_c\} \quad , \quad \dot{\Pi}_i = \{\Pi_i, H_c\} \quad (2.17)$$

onde as chaves representam os parênteses de Poisson [18], denotados no texto por PB's.

Na teoria de sistemas vinculados, usamos o hessiano generalizado para campos

$$W_{ij}^{\mu\nu} = \frac{\partial^2 L}{\partial(\partial_\mu \varphi_i) \partial(\partial_\nu \varphi_j)}, \quad (2.18)$$

onde $i, j = 1, \dots, N$. Em particular para $\mu = 0, \nu = 0$

$$W_{ij}^{00} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\varphi}_i \partial \dot{\varphi}_j} = \frac{\partial \Pi_i}{\partial \dot{\varphi}_j} \quad (2.19)$$

Temos um sistema regular quando

$$\det(W_{ij}^{00}) \neq 0 \quad (2.20)$$

Neste caso, todas as velocidades $\dot{\varphi}_i$ podem ser expressas em termos dos campos φ_i e dos momentos Π_i . Caso tenhamos

$$\det(W_{ij}^{00}) = 0 \quad (2.21)$$

teremos m velocidades $\dot{\varphi}_l$ que não podem ser expressas em termos dos campos e dos momentos. Neste caso dizemos que a teoria possui m vínculos.

Isolando os momentos relativos às " l " linhas em função das outras variáveis obtemos

$$\Pi_l = h_l(\varphi_i, \Pi_i, \partial_j \varphi_i, \partial_j \Pi_i) \quad (2.22)$$

Definimos agora a função ϕ_l dos momentos e das coordenadas como

$$\phi_l \equiv \Pi_l - h_l(\varphi^i, \Pi_k, \partial_j \varphi^i, \partial_j \Pi_k) \quad (2.23)$$

Estas funções ϕ_l são chamadas vínculos primários, pois estabelecem relações entre alguns momentos e outras variáveis, definem um subespaço Γ_ν (no espaço de fase Γ) onde os vínculos são nulos.

Vamos utilizar a notação introduzida por Dirac de sinal de igualdade fraca " $\approx$ ". Este sinal indica que ϕ_l só pode ser colocado igual a zero depois de calculados os parênteses de Poisson nos cálculos desejados [20]. Assim, escrevemos

$$\phi_l \approx 0 \quad (l = 1, \dots, m) \quad (2.24)$$

Como os vínculos são nulos a hamiltoniana canônica fica determinada a menos de fatores que são os multiplicadores de Lagrange

$$\mathcal{H}_p = \mathcal{H}_c + \lambda^l \phi_l \quad (2.25)$$

onde $\mathcal{H}_p$ é a densidade de hamiltoniana primária

As equações de movimento são agora escritas como

$$\dot{\varphi}_i = \{\varphi_i, H_p\} \quad , \quad \dot{\Pi}_i = \{\Pi_i, H_p\} \quad (2.26)$$

ou

$$\dot{\varphi}_i(x) = \{\varphi_i(x), H_c\} + \int d^{D-1}x' \lambda^l(x') \{\varphi_i(x), \phi_l(x')\} \quad (2.27)$$

$$\dot{\Pi}_i(x) = \{\Pi_i(x), H_c\} + \int d^{D-1}x' \lambda^l(x') \{\Pi_i(x), \phi_l(x')\} \quad (2.28)$$

$$\phi_l \approx 0 \quad (2.29)$$

Devemos impor uma condição sobre os vínculos, a de que eles permaneçam fracamente nulos com o decorrer do tempo [18] [20]. Portanto devemos ter

$$\dot{\phi}_l(x) \approx 0 \quad (2.30)$$

ou

$$\{\phi_l(x), H_p\} \approx 0 \quad (2.31)$$

ou expandindo H_p

$$\{\phi_l(x), H_c\} + \int d^{D-1}x' \lambda^k(x') \{\phi_l(x), \phi_k(x')\} \approx 0 \quad (2.32)$$

Esta equação possui três tipos de solução

- A) $0 \approx 0$; ou seja $\{\phi_l, H_p\} = 0$. Neste caso temos uma identidade e não obtemos nenhuma relação entre as variáveis do espaço de fase.
- B) Soluções que envolvem os λ^k . Estas soluções impõem relações que definem alguns dos multiplicadores de lagrange.
- C) Soluções que não envolvem os λ^k . Esse tipo de solução estabelece relações extras entre as variáveis do espaço de fase que chamaremos vínculos secundários, representados por

$$\phi_r^{(2)} \approx 0, \quad (2.33)$$

onde $r = 1, \dots, u$.

Os vínculos secundários devem também permanecer fracamente nulos com o decorrer do tempo, e procedendo dessa forma poderemos ainda obter mais relações que determinem outros multiplicadores de lagrange ou que forneçam mais vínculos. Este procedimento deve ser repetido até obtermos apenas soluções do tipo A.

Obtidos todos os vínculos da teoria podemos definir a densidade de hamiltoniana estendida

$$\mathcal{H}_e = \mathcal{H}_c + \lambda^s \phi_s \quad (2.34)$$

onde $s = 1, \dots, v$ (v é o numero total de vínculos)

A evolução temporal de uma função qualquer do espaço de fase pode ser obtida tanto de H_c , H_p ou H_e [18]

$$\dot{A} = \{A, H_c\} \approx \{A, H_p\} \approx \{A, H_e\} \quad (2.35)$$

Agora definimos outra classificação importante para os vínculos. São chamados vínculos de primeira classe os vínculos que possuem parênteses de Poisson fracamente nulos com todos os outros vínculos da teoria, e vínculos de segunda classe os que não possuem esta propriedade. Representamos os vínculos de segunda classe por $\chi_k (k = 1, \dots, t)$. Consideramos agora $\phi_i (i = 1, \dots, v - t)$ representando os vínculos de primeira classe. Assim

$$\{\phi_i, \phi_j\} = \{\phi_i, \chi_k\} \approx 0 \quad (2.36)$$

$$\{\chi_k, \chi_l\} \neq 0 \quad (2.37)$$

onde $i = 1, \dots, v - t$ e $k, l = 1, \dots, t$.

Representamos os parênteses de Poisson dos vínculos de segunda classe como uma matriz $t \times t$ cujos elementos são dados por

$$\{\chi_k, \chi_l\} = M_{kl} \quad (2.38)$$

$$\det(M_{kl}) \neq 0 \quad (2.39)$$

Caso o determinante da matriz (M_{kl}) seja zero, teremos combinações lineares de vínculos de segunda classe que serão vínculos de primeira classe uma vez que depois de escalonada a matriz apresenta algumas linhas nulas.

Utilizando esta notação, a densidade de hamiltoniana estendida pode ser escrita como

$$\mathcal{H}_e = \mathcal{H}_c + \lambda^i \phi_i + \alpha^k \chi_k \quad (2.40)$$

onde $i = 1, \dots, v - t$; $k = 1, \dots, t$.

A preservação dos vínculos de primeira classe no tempo implica em

$$\dot{\phi}_i \approx 0 \quad (2.41)$$

ou

$$\{\phi_i, H_e\} \approx 0 \quad (2.42)$$

o que resulta em

$$\{\phi_i, H_c\} \approx 0 \quad (2.43)$$

e para os vínculos de segunda classe

$$\dot{\chi}_k(x) \approx 0 \quad (2.44)$$

ou

$$\{\chi_k(x), H_e\} \approx 0 \quad (2.45)$$

e expandindo H_e

$$\{\chi_k(x), H_c\} + \int d^{D-1} x' \alpha^j(x') \{\chi_k(x), \chi_j(x')\} \approx 0 \quad (2.46)$$

ou em termos da matriz (M_{kj})

$$\{\chi_k(x), H_c\} + \int d^{D-1} x' \alpha^j(x') M_{kj}(x, x') \approx 0 \quad (2.47)$$

A equação de movimento para uma função "A" das variáveis do espaço de fase é dada neste caso por

$$\dot{A}(x) = \frac{\partial A(x)}{\partial t} + \{A(x), H_c\} + \int d^{D-1} x' \lambda^i(x') \{A(x), \phi_i(x')\} + \int d^{D-1} x' \alpha^k(x') \{A(x), \chi_k(x')\} \quad (2.48)$$

ou substituindo a expressão para α^k

$$\begin{aligned}\dot{A}(x) &\approx \frac{\partial A(x)}{\partial t} + \{A(x), H_c\} + \int d^D x' \lambda^i(x') \{A(x), \phi_i(x')\} \\ &- \int \int d^{D-1} x' d^{D-1} y' \{A(x), \chi^k(x')\} M_{kj}^{-1}(x', y') \{\chi^j(y'), H_c\}\end{aligned}\quad (2.49)$$

Introduzindo os parênteses de Dirac definidos por [20]

$$\{A(x), B(y)\}_D = \{A(x), B(y)\} - \int \int d^{D-1} x' d^{D-1} y' \{A(x), \chi^j(x')\} M_{jk}^{-1}(x', y') \{\chi^k(y'), B(y)\} \quad (2.50)$$

escrevemos

$$\dot{A}(x) \approx \frac{\partial A(x)}{\partial t} + \{A(x), H_c\}_D + \int d^{D-1} x' \lambda^i(x') \{A(x), \phi_i(x')\} \quad (2.51)$$

Na próxima seção aplicamos a teoria de sistemas vinculados ao modelo de CGHS.

2.3 Teoria de Sistemas Vinculados Aplicada ao Modelo de CGHS

A partir da ação dada pela equação (2.7) definimos os momentos canonicamente conjugados a g e a ϕ respectivamente por

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{g}}, \quad \Pi_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \quad (2.52)$$

usando as expressões para os momentos juntamente com a expressão para R (2.9) na equação para a ação (2.7) obtemos para a hamiltoniana do modelo de CGHS [14][21]

$$H_c = \int dx \left(\frac{N_1}{\sqrt{g}} G_0 + N_0 G_1 \right), \quad (2.53)$$

onde G_0 e G_1 são dados por

$$\begin{aligned} G_0 &= -gp\Pi_\phi - g\Lambda + 2\phi'' - \frac{\phi'g'}{g} \\ G_1 &= \Pi_\phi\phi' - 2p'g - pg' \end{aligned} \quad (2.54)$$

Já que na ação não aparecem derivadas temporais de N_1 e N_0 , estes são os multiplicadores de Lagrange da teoria.

Introduzindo o fator conforme ρ

$$g = e^\rho \quad (2.55)$$

o momento p é transformado da seguinte forma

$$p = e^{-\rho}\Pi_\rho \quad (2.56)$$

e os vínculos passam a ser dados por

$$\begin{aligned}
G_0 &= -\Pi_\rho \Pi_\phi - \Lambda \exp^\rho + 2\phi'' - \rho' \phi' \\
G_1 &= \Pi_\rho \phi' - \Pi_\rho \rho' - 2\Pi'_\rho
\end{aligned} \tag{2.57}$$

G_0 e G_1 são na realidade os vínculos secundários da teoria já que N_0 e N_1 são multiplicadores de Lagrange. Os vínculos primários são dados pelos momentos associados a N_0 e N_1 , respectivamente dados por P_{N_0} e P_{N_1} .

Assim a hamiltoniana primária da teoria (2.25) é a própria hamiltoniana canônica e a evolução temporal de G_0 e de G_1

$$\begin{aligned}
\dot{G}_1 &= \{G_1, H_c\} \approx 0 \\
\dot{G}_0 &= \{G_0, H_c\} \approx 0
\end{aligned} \tag{2.58}$$

não leva à novos vínculos secundários pois obtemos a solução $0 \approx 0$.

Os vínculos da teoria são de primeira classe uma vez que satisfazem a álgebra [22] [23]

$$\begin{aligned}
\{G_0(x), G_0(y)\} &= \delta'(x-y) [G_1(x) + G_1(y)] \\
\{G_1(x), G_0(y)\} &= \delta'(x-y) [G_0(x) + G_0(y)] \\
\{G_1(x), G_1(y)\} &= \delta'(x-y) [G_1(x) + G_1(y)],
\end{aligned} \tag{2.59}$$

onde δ' corresponde a $\frac{\partial \delta}{\partial x}$.

Capítulo 3

QUANTIZAÇÃO DO MODELO DE CGHS

Vamos proceder com a quantização do modelo de CGHS utilizando o método BRST-BFV proposto por Batalin, Fradkin e Vilkovisky [24][25][26] [27]. Na próxima seção descrevemos o método BRST-BFV e na seção 3.2 aplicamos o método ao modelo de CGHS.

3.1 Método de Quantização BRST-BFV

Nesta seção vamos tratar da quantização BRST (Bechi, Rouet e Stora)[24][25] de um sistema dentro do formalismo hamiltoniano desenvolvido por Batalin, Fradkin e Vilkovisky, conhecido como BRST-BFV [26] [27].

Vamos considerar um sistema definido em um espaço de fase descrito por campos φ_i cujos momentos associados são dados por Π_i . Eliminamos os vínculos de segunda classe utilizando o procedimento de Dirac, e obtemos a relações de comutação básicas

$$\begin{aligned}\{\varphi_i(x), \Pi_j(y)\}_D &= \alpha_{ij} \delta(x-y) \\ \{\varphi_i(x), \varphi_j(y)\}_D &= 0\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde α_{ij} são constantes.

Vamos considerar nesta seção os parênteses de Dirac representados de forma idêntica aos parênteses de Poisson.

Os vínculos deste sistema são representados por $\phi_i(\varphi_i, \Pi_j)$, são de primeira classe e satisfazem a álgebra

$$\{\phi_i(x), \phi_j(y)\} = \int d^{D-1}z C_{ij}^k(x, y, z) \phi_k(z), \quad (3.2)$$

onde $C_{ij}^k(x, y, z)$ são as funções de estrutura da álgebra de vínculos. A hamiltoniana estendida para este sistema é dada por

$$H_e = \int d^{D-1}y (\mathcal{H}_e + \lambda_i \phi^i) \quad (3.3)$$

onde λ_i são os multiplicadores de Lagrange dos vínculos, ou seja funções indeterminadas das coordenadas.

No método de quantização BFV, o espaço de fase é estendido de forma a considerar os multiplicadores de Lagrange λ_i como variáveis dinâmicas e associar aos mesmos momentos p_i de forma que

$$\{\lambda^i(x), p_j(y)\} = \delta_j^i \delta(x - y) \quad (3.4)$$

Como não podemos modificar o conteúdo dinâmico da teoria estes momentos são impostos como novos vínculos

$$p_i = 0 \quad (3.5)$$

Com esta consideração incluímos novas constantes de estrutura também representadas por C_{jk}^i .

A etapa seguinte no método de BFV consiste em introduzir um par de fantasmas canonicamente conjugado para cada vínculo e com paridade de Grassmann [28] oposta a do vínculo considerado. Para os vínculos usuais da teoria usamos o par de fantasmas canonicamente conjugado $(\eta^i, \bar{P}_i)$ e para os vínculos associados aos multiplicadores de Lagrange o par $(\bar{\eta}^i, P_i)$. Estes fantasmas obedecem, por definição,

$$\begin{aligned}
\{\eta^i, \eta^j\} &= 0 \\
\{\bar{\mathcal{P}}_i, \bar{\mathcal{P}}_j\} &= 0 \\
\{\eta^i, \bar{\mathcal{P}}_j\} &= -\delta_j^i \delta(x-y) \\
\{\bar{\eta}^i, \bar{\eta}^j\} &= 0 \\
\{\mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j\} &= 0 \\
\{\bar{\eta}^i, \mathcal{P}_j\} &= -\delta_j^i \delta(x-y) \\
\{\bar{\eta}^i, \eta^j\} &= 0 \\
\{\bar{\mathcal{P}}_i, \mathcal{P}_j\} &= 0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

É conveniente, neste ponto, introduzirmos o conceito de número de fantasmas. A cada uma das variáveis do espaço de fase estendido (incluindo os multiplicadores de Lagrange e os fantasmas) associaremos um número de fantasmas representado por “gh” [29]

$$\begin{aligned}
gh(\varphi^i) &= gh(\Pi_i) = 0 \\
gh(\phi^j) &= gh(\lambda^j) = 0 \\
gh(\eta^j) &= gh(\mathcal{P}^j) = 1 \\
gh(\bar{\mathcal{P}}_j) &= gh(\bar{\eta}_j) = -1
\end{aligned} \tag{3.7}$$

O número de fantasmas respeita a seguinte propriedade

$$gh(AB) = gh(A) + gh(B) \tag{3.8}$$

A etapa seguinte do método BFMV é escrever a carga de BRST que é dada pela seguinte expressão [26][27]

$$\begin{aligned}
Q &= \int d^{D-1}x \left(\eta^i(x) \phi_i(x) + p^i(x) \mathcal{P}_i(x) \right) \\
&- \frac{1}{2} (-1)^{n_i+n_j} \int d^{D-1}x d^{D-1}y d^{D-1}z \bar{\mathcal{P}}_i(z) C_{jk}^i(x, y, z) \eta^k(y) \eta^j(x) + \dots
\end{aligned} \tag{3.9}$$

onde p_i 's são os momentos associados aos multiplicadores de Lagrange e n_i definido como a paridade de Grassmann da função ϕ_i (vínculo).

A carga de BRST é nilpotente ou seja

$$\{Q, Q\} = 0 \quad (3.10)$$

e possui número de fantasmas igual a 1.

Na etapa final do método BFV, escrevemos a função de partição

$$Z = \int \mathcal{D}\varphi^i \mathcal{D}\Pi_i \mathcal{D}\lambda_j \mathcal{D}p^j \mathcal{D}\eta^j \mathcal{D}\bar{\mathcal{P}}_j \mathcal{D}\bar{\eta}^j \mathcal{D}\mathcal{P}_j e^{iS_{ef}}, \quad (3.11)$$

onde S_{ef} é a ação efetiva dada por [26][28]

$$S_{ef} = \int dt \left[\int d^{D-1}x \left(\Pi^i \dot{\phi}_i + p^j \dot{\lambda}_j + \dot{\eta}^j \bar{\mathcal{P}}_j + \dot{\bar{\eta}}^j \mathcal{P}_j - \mathcal{H}_c \right) - \{Q, \Psi\} \right], \quad (3.12)$$

e onde Ψ é uma função Grasmaniana das variáveis do espaço de fase chamada função fixadora de gauge. Ψ em geral é dada por [29]

$$\Psi = \int d^{D-1}x \left(\bar{\eta}^i \chi_i + \bar{\mathcal{P}}_i \lambda^i \right), \quad (3.13)$$

onde χ_i são funções arbitrárias dos campos conhecidas como funções fixadoras de gauge.

É interessante observar que ação efetiva é construída de forma a ser invariante sob transformações geradas pelo gerador Q .

O teorema de Batalin, Fradkin e Vilkovisky [26] [27] garante que a função de partição Z dada por (3.11) é independente da função fermiônica arbitrária Ψ .

Este é basicamente o procedimento de quantização BRST-BFV. Na próxima seção aplicamos o método BFV ao modelo de CGHS.

3.2 Quantização BRST-BFV do Modelo de CGHS

O modelo de CGHS será aqui analisado utilizando-se a ação escrita na forma apresentada na equação (2.7)

$$S = \int dx dt \sqrt{-g} (\phi R + \Lambda)$$

Seguindo o procedimento de quantização BRST-BFV descrito na seção anterior, identificamos inicialmente todos os vínculos da teoria com os respectivos pares de fantasmas. Obtemos

$$\begin{aligned} G_0 &\longrightarrow (\eta^0, \bar{\mathcal{P}}_0) \\ G_1 &\longrightarrow (\eta^1, \bar{\mathcal{P}}_1) \\ P_{N_0} &\longrightarrow (\bar{\eta}^1, \mathcal{P}_1) \\ P_{N_1} &\longrightarrow (\bar{\eta}^0, \mathcal{P}_0), \end{aligned} \tag{3.14}$$

onde todos os vínculos são bosônicos e, portanto, possuem paridade zero, e os fantasmas variáveis fermiônicas possuindo paridade 1.

Os fantasmas respeitam os seguintes PB's básicos

$$\begin{aligned} \{\eta^i, \eta^j\} &= 0 \\ \{\bar{\mathcal{P}}_i, \bar{\mathcal{P}}_j\} &= 0 \\ \{\eta^i, \bar{\mathcal{P}}_j\} &= -\delta_j^i \delta(x-y) \\ \{\bar{\eta}^i, \bar{\eta}^j\} &= 0 \\ \{\mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j\} &= 0 \\ \{\bar{\eta}^i, \mathcal{P}_j\} &= -\delta_j^i \delta(x-y) \\ \{\bar{\eta}^i, \eta^j\} &= 0 \\ \{\bar{\mathcal{P}}_i, \mathcal{P}_j\} &= 0 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Da álgebra dos vínculos fornecida pelas equações (2.59) obtemos as constantes de estrutura para os vínculos

$$\begin{aligned}
C_{00}^0 &= 0 \\
C_{00}^1 &= \delta'(x-y) \delta(x-z) + \delta'(x-y) \delta(y-z) \\
C_{10}^0 &= \delta'(x-y) \delta(x-z) + \delta'(x-z) \delta(y-z) \\
C_{10}^1 &= 0 \\
C_{11}^0 &= 0 \\
C_{11}^1 &= \delta'(x-y) \delta(x-z) + \delta'(x-y) \delta(y-z)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Para facilitar os cálculos, redefinimos

$$N_1 \rightarrow \frac{N_1}{\sqrt{g}} \tag{3.17}$$

Portanto P_{N_1} representa o momento associado ao novo multiplicador de Lagrange N_1
 Escrevemos agora para a carga de BRST (3.9)

$$\begin{aligned}
Q &= \int dx [\eta^0 G_0 + \eta^1 G_1] + \int dx [\mathcal{P}_1 P_{N_0} + \mathcal{P}_0 P_{N_1}] \\
&+ \int dx [\bar{\mathcal{P}}_0 \eta^1 \eta^{0'} + \bar{\mathcal{P}}_0 \eta^0 \eta^{1'}] + \int dx [\bar{\mathcal{P}}_1 \eta^0 \eta^{0'} + \bar{\mathcal{P}}_1 \eta^1 \eta^{1'}]
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Pode-se verificar que Q é nilpotente. As variações de BRST geradas por Q são definidas para um campo arbitrário "A" por

$$\delta A = \{A, Q\} \tag{3.19}$$

Para o modelo de CGHS as variações dos campos são dadas por (para os cálculos envolvendo PB's com variáveis fermiônicas veja apêndice A)

$$\begin{aligned}
\delta \rho &= -\frac{\eta^0 \Pi_\phi}{2} + \eta^1 \rho' + \eta^{1'} \\
\delta \phi &= -\frac{\eta^0 \Pi_\rho}{2} + \eta^1 \phi'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\Pi_\rho &= -2\eta^{0'}\phi' - 2\eta^0\phi'' + \eta^{1'}\Pi_\rho + \eta^1\Pi'_\rho + 2\Lambda\eta^0e^{2\rho} \\
\delta\Pi_\phi &= -2\eta^{0''} - 2\eta^{0'}\rho' - 2\eta^0\rho'' + \eta^{1'}\Pi_\phi + \eta^1\Pi'_\phi \\
\delta\eta^0 &= \eta^{1'}\eta^0 + \eta^{0'}\eta^1 \\
\delta\eta^1 &= \eta^{0'}\eta^0 + \eta^{1'}\eta^1 \\
\delta\bar{\mathcal{P}}_0 &= -G^0 + \bar{\mathcal{P}}'_0\eta^1 + 2\bar{\mathcal{P}}_0\eta^{1'} + \bar{\mathcal{P}}'_1\eta^0 + 2\bar{\mathcal{P}}_1\eta^{0'} \\
\delta\bar{\mathcal{P}}_1 &= -G^1 + \bar{\mathcal{P}}'_0\eta^0 + 2\bar{\mathcal{P}}_0\eta^{0'} + \bar{\mathcal{P}}'_1\eta^1 + 2\bar{\mathcal{P}}_1\eta^{1'} \\
\delta\bar{\eta}^0 &= -P_{N_1} \\
\delta\bar{\eta}^1 &= -P_{N_0} \\
\delta\mathcal{P}_0 &= \delta\mathcal{P}_1 = \delta P_{N_0} = \delta P_{N_1} = 0 \\
\delta N_0 &= \mathcal{P}_1 \\
\delta N_1 &= \mathcal{P}_0
\end{aligned} \tag{3.20}$$

De (3.13) obtemos para a função fixadora de gauge

$$\Psi = \int dx \left[\bar{\eta}^0\chi_0 + \bar{\eta}^1\chi_1 - \bar{\mathcal{P}}_0N_1 + \bar{\mathcal{P}}_1N_0 \right], \tag{3.21}$$

onde χ_0 e χ_1 são funções arbitrárias dos campos e são utilizadas para fixar o gauge.

Agora calculamos $\{Q, \Psi\}$

$$\begin{aligned}
\{Q, \Psi\} &= \int dx \left[-P_{N_1}\chi_0 + \bar{\eta}^0\delta\chi_0 - P_{N_0}\chi_1 + \bar{\eta}^1\delta\chi_1 \right. \\
&\quad + G_0N_1 - \bar{\mathcal{P}}'_0\eta^1N_1 - 2\bar{\mathcal{P}}_0\eta^{1'}N_1 - \bar{\mathcal{P}}'_1\eta^0N_1 \\
&\quad - 2\bar{\mathcal{P}}_1\eta^{0'}N_1 - \bar{\mathcal{P}}_0\mathcal{P}_0 - G_1N_0 + \bar{\mathcal{P}}'_0\eta^0N_0 \\
&\quad \left. + 2\bar{\mathcal{P}}_0\eta^{0'}N_0 + \bar{\mathcal{P}}'_1\eta^1N_0 + 2\bar{\mathcal{P}}_1\eta^{1'}N_0 + \bar{\mathcal{P}}_1\mathcal{P}_1 \right]
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Utilizando esta expressão podemos escrever para a ação efetiva do modelo de CGHS

$$\begin{aligned}
S_{ef} = & \int d\tau \int dx \left[P_{N_0} \dot{N}_0 + P_{N_1} \dot{N}_1 + \dot{\eta}^0 \bar{\mathcal{P}}_0 + \dot{\eta}^1 \bar{\mathcal{P}}_1 \right. \\
& + \dot{\bar{\eta}}^0 \mathcal{P}_0 + \dot{\bar{\eta}}^1 \mathcal{P}_1 + \Pi_\rho \dot{\rho} + \Pi_\phi \dot{\phi} \\
& - \left\{ P_{N_1} \chi_0 + \bar{\eta}^0 \delta \chi_0 - P_{N_0} \chi_1 + \bar{\eta}^1 \delta \chi_1 \right. \\
& + G_0 N_1 - \bar{\mathcal{P}}'_0 \eta^1 N_1 - 2 \bar{\mathcal{P}}_0 \eta^\nu N_1 - \bar{\mathcal{P}}'_1 \eta^0 N_1 \\
& - 2 \bar{\mathcal{P}}_1 \eta^{0\nu} N_1 - \bar{\mathcal{P}}_0 \mathcal{P}_0 - G_1 N_0 + \bar{\mathcal{P}}'_0 \eta^0 N_0 \\
& \left. \left. + 2 \bar{\mathcal{P}}_0 \eta^{0\nu} N_0 + \bar{\mathcal{P}}'_1 \eta^1 N_0 + 2 \bar{\mathcal{P}}_1 \eta^{1\nu} N_0 + \bar{\mathcal{P}}_1 \mathcal{P}_1 \right\} \right] \quad (3.23)
\end{aligned}$$

e de acordo com (3.11) podemos escrever para a função de partição Z

$$Z = \int \mathcal{D}\rho \mathcal{D}\Pi_\rho \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\Pi_\phi \mathcal{D}N_0 \mathcal{D}P_{N_0} \mathcal{D}N_1 \mathcal{D}P_{N_1} \mathcal{D}\eta^0 \mathcal{D}\bar{\mathcal{P}}_0 \mathcal{D}\eta^1 \mathcal{D}\bar{\mathcal{P}}_1 \mathcal{D}\bar{\eta}^0 \mathcal{D}\mathcal{P}_0 \mathcal{D}\bar{\eta}^1 \mathcal{D}\mathcal{P}_1 e^{iS_{ef}} \quad (3.24)$$

3.3 Função de Partição para o Modelo de CGHS no Gauge Conforme

O gauge conforme é definido fixando-se os multiplicadores de Lagrange

$$\begin{aligned}
N_0 &= 0 \\
N_1 &= 1
\end{aligned} \quad (3.25)$$

Antes de fixar o gauge através da escolha de χ_0 e χ_1 em (3.21), vamos usar a seguinte transformação na ação efetiva

$$\begin{aligned}
P_{N_0} &\rightarrow \epsilon P_{N_0} \\
P_{N_1} &\rightarrow \epsilon P_{N_1} \\
\bar{\eta}^1 &\rightarrow \epsilon \bar{\eta}^1 \\
\bar{\eta}^0 &\rightarrow \epsilon \bar{\eta}^0
\end{aligned} \quad (3.26)$$

É importante observar que esta transformação possui jacobiano igual a 1. Assim obtemos

$$\begin{aligned}
S_{ef} = & \int d\tau \int dx \left[\epsilon P_{N_0} \dot{N}_0 + \epsilon P_{N_1} \dot{N}_1 + \bar{\eta}^0 \bar{\mathcal{P}}_0 + \bar{\eta}^1 \bar{\mathcal{P}}_1 \right. \\
& + \epsilon \dot{\bar{\eta}}^0 \bar{\mathcal{P}}_0 + \epsilon \dot{\bar{\eta}}^1 \bar{\mathcal{P}}_1 + \Pi_\rho \dot{\rho} + \Pi_\phi \dot{\phi} \\
& - \left\{ \epsilon P_{N_1} \chi_0 + \epsilon \bar{\eta}^0 \delta \chi_0 - \epsilon P_{N_0} \chi_1 + \epsilon \bar{\eta}^1 \delta \chi_1 \right. \\
& + G_0 N_1 - \bar{\mathcal{P}}'_0 \eta^1 N_1 - 2 \bar{\mathcal{P}}_0 \eta^{1'} N_1 - \bar{\mathcal{P}}'_1 \eta^0 N_1 \\
& - 2 \bar{\mathcal{P}}_1 \eta^{0'} N_1 - \bar{\mathcal{P}}_0 \mathcal{P}_0 - G_1 N_0 + \bar{\mathcal{P}}'_0 \eta^0 N_0 \\
& \left. \left. + 2 \bar{\mathcal{P}}_0 \eta^{0'} N_0 + \bar{\mathcal{P}}'_1 \eta^1 N_0 + 2 \bar{\mathcal{P}}_1 \eta^{1'} N_0 + \bar{\mathcal{P}}_1 \mathcal{P}_1 \right\} \right] \quad (3.27)
\end{aligned}$$

Agora escolhemos para as funções fixadoras de gauge

$$\begin{aligned}
\chi_0 &= \frac{N_0}{\epsilon} \\
\chi_1 &= \frac{N_1 - 1}{\epsilon} \quad (3.28)
\end{aligned}$$

Usando (3.20)

$$\begin{aligned}
\delta \chi_0 &= \frac{\mathcal{P}_1}{\epsilon} \\
\delta \chi_1 &= \frac{\mathcal{P}_0}{\epsilon} \quad (3.29)
\end{aligned}$$

Agora tomando o limite $\epsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
S_{ef} = & \int d\tau \int dx \left\{ \bar{\eta}^0 \bar{\mathcal{P}}_0 + \bar{\eta}^1 \bar{\mathcal{P}}_1 + \Pi_\rho \dot{\rho} + \Pi_\phi \dot{\phi} \right. \\
& - \bar{\eta}^0 \mathcal{P}_1 - \bar{\eta}^1 \mathcal{P}_0 - \left\{ P_{N_1} N_0 - P_{N_0} (N_1 - 1) \right. \\
& + G_0 N_1 - \bar{\mathcal{P}}'_0 \eta^1 N_1 - 2 \bar{\mathcal{P}}_0 \eta^{1'} N_1 - \bar{\mathcal{P}}'_1 \eta^0 N_1 \\
& - 2 \bar{\mathcal{P}}_1 \eta^{0'} N_1 - \bar{\mathcal{P}}_0 \mathcal{P}_0 - G_1 N_0 + \bar{\mathcal{P}}'_0 \eta^0 N_0 \\
& \left. \left. + 2 \bar{\mathcal{P}}_0 \eta^{0'} N_0 + \bar{\mathcal{P}}'_1 \eta^1 N_0 + 2 \bar{\mathcal{P}}_1 \eta^{1'} N_0 + \bar{\mathcal{P}}_1 \mathcal{P}_1 \right\} \right\} \quad (3.30)
\end{aligned}$$

A função de partição é dada por (3.24), com S_{ef} dada por (3.30)

Vamos agora realizar integrações em Z sobre os multiplicadores de Lagrange e fantasmas. Integrando sobre P_{N_0} e P_{N_1} obtemos

$$\int \mathcal{D}P_{N_0} e^{-i \int d\tau \int dy P_{N_0} (N_1 - 1)} \int \mathcal{D}P_{N_1} e^{i \int d\tau \int dy P_{N_1} N_0} = \delta(N_0) \delta(N_1 - 1) \quad (3.31)$$

Os argumentos dos deltas funcionais mostram que fixamos o gauge conforme. S_{ef} é dada agora por

$$\begin{aligned} S_{ef} = & \int d\tau \int dx \left[\dot{\eta}^0 \bar{\mathcal{P}}_0 + \dot{\eta}^1 \bar{\mathcal{P}}_1 + \Pi_\rho \dot{\rho} + \Pi_\phi \dot{\phi} \right. \\ & - \bar{\eta}^0 \mathcal{P}_1 - \bar{\eta}^1 \mathcal{P}_0 - G_0 N_1 + \bar{\mathcal{P}}'_0 \eta^1 N_1 \\ & + 2\bar{\mathcal{P}}_0 \eta^{1'} N_1 + \bar{\mathcal{P}}_1 \eta^0 N_1 + 2\bar{\mathcal{P}}_1 \eta^{0'} N_1 + \bar{\mathcal{P}}_0 \mathcal{P}_0 \\ & + G_1 N_0 - \bar{\mathcal{P}}'_0 \eta^0 N_0 - 2\bar{\mathcal{P}}_0 \eta^{0'} N_0 - \bar{\mathcal{P}}^{1'} \eta^1 N_0 \\ & \left. - 2\bar{\mathcal{P}}_1 \eta^{1'} N_0 - \bar{\mathcal{P}}_1 \mathcal{P}_1 \right] \end{aligned} \quad (3.32)$$

e Z por

$$\begin{aligned} Z = & \int \mathcal{D}\rho \mathcal{D}\Pi_\rho \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\Pi_\phi \mathcal{D}N_0 \mathcal{D}P_{N_0} \mathcal{D}N_1 \mathcal{D}P_{N_1} \mathcal{D}\eta^0 \mathcal{D}\bar{\mathcal{P}}_0 \mathcal{D}\eta^1 \mathcal{D}\bar{\mathcal{P}}_1 \\ & \mathcal{D}\bar{\eta}^0 \mathcal{D}\mathcal{P}_0 \mathcal{D}\bar{\eta}^1 \mathcal{D}\mathcal{P}_1 \delta(N_0) \delta(N_1 - 1) e^{iS_{ef}} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Integrando sobre N_0 e N_1 a ação efetiva torna-se

$$\begin{aligned} S_{ef} = & \int d\tau \int dx \left[\dot{\eta}^0 \bar{\mathcal{P}}_0 + \dot{\eta}^1 \bar{\mathcal{P}}_1 + \Pi_\rho \dot{\rho} + \Pi_\phi \dot{\phi} \right. \\ & - \bar{\eta}^0 \mathcal{P}_1 - \bar{\eta}^1 \mathcal{P}_0 - G_0 + \bar{\mathcal{P}}_0 \eta^{1'} \\ & \left. + \bar{\mathcal{P}}_1 \eta^{0'} + \bar{\mathcal{P}}_0 \mathcal{P}_0 - \bar{\mathcal{P}}_1 \mathcal{P}_1 \right] \end{aligned} \quad (3.34)$$

Integrando agora sobre $\bar{\mathcal{P}}_0$

$$\int \mathcal{D}\bar{\mathcal{P}}_0 e^{i \int d\tau \int dy \bar{\mathcal{P}}_0 (-\dot{\eta}^0 + \eta^{1'} + \mathcal{P}_0)} = \delta(\mathcal{P}_0 - (\dot{\eta}^0 - \eta^{1'})) \quad (3.35)$$

e integrando sobre $\mathcal{P}_0$, obtemos para a ação efetiva

$$\begin{aligned} S_{ef} = & \int d\tau \int dy [\dot{\eta}^1 \bar{\mathcal{P}}_1 + \Pi_\rho \dot{\rho} + \Pi_\phi \dot{\phi} - \bar{\eta}^0 \mathcal{P}_1 \\ & - \bar{\eta}^1 (\dot{\eta}^0 - \eta^{1'}) - G_0 + \bar{\mathcal{P}}_1 \eta^{0'} - \bar{\mathcal{P}}_1 \mathcal{P}_1] \end{aligned} \quad (3.36)$$

Integrando sobre $\bar{\mathcal{P}}_1$

$$\int \mathcal{D}\bar{\mathcal{P}}_1 e^{i \int d\tau \int dy \bar{\mathcal{P}}_1 (-\dot{\eta}^1 + \eta^{0'} - \mathcal{P}_1)} = \delta(\mathcal{P}_1 - (\dot{\eta}^1 - \eta^{0'})) \quad (3.37)$$

e integrando sobre $\mathcal{P}_1$ obtemos para S_{ef}

$$S_{ef} = \int d\tau \int dy [\Pi_\rho \dot{\rho} + \Pi_\phi \dot{\phi} - \bar{\eta}^0 (\dot{\eta}^1 - \eta^{0'}) - \bar{\eta}^1 (\dot{\eta}^0 - \eta^{1'}) - G_0] \quad (3.38)$$

Integrando sobre $\bar{\eta}^0$ e $\bar{\eta}^1$

$$\int \mathcal{D}\bar{\eta}^0 e^{-i \int d\tau \int dy \bar{\eta}^0 (\dot{\eta}^1 - \eta^{0'})} \int \mathcal{D}\bar{\eta}^1 e^{-i \int d\tau \int dy \bar{\eta}^1 (\dot{\eta}^0 - \eta^{1'})} = \delta(\dot{\eta}^1 - \eta^{0'}) \delta(\dot{\eta}^0 - \eta^{1'}) \quad (3.39)$$

e a ação efetiva torna-se

$$S_{ef} = \int d\tau \int dy (\Pi_\rho \dot{\rho} + \Pi_\phi \dot{\phi} - G_0) \quad (3.40)$$

Agora a função de partição é dada por

$$\begin{aligned} Z = & \int \mathcal{D}\eta^0 \mathcal{D}\eta^1 \mathcal{D}\rho \mathcal{D}\Pi_\rho \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\Pi_\phi \delta(\dot{\eta}^1 - \eta^{0'}) \delta(\dot{\eta}^0 - \eta^{1'}) \\ & e^{(i \int d\tau \int dy (\Pi_\rho \dot{\rho} + \Pi_\phi \dot{\phi} - G_0))} \end{aligned} \quad (3.41)$$

A primeira função delta no integrando da ação acima pode ser escrita como

$$\delta \left(\dot{\eta}^1 - \eta^{0'} \right) = \delta \left[\partial_0 \left(\eta^1 - \frac{1}{\partial_0} \eta^{0'} \right) \right] = \frac{1}{\det(\partial_0)} \delta \left(\eta^1 - \frac{1}{\partial_0} \eta^{0'} \right) \quad (3.42)$$

Integrando sobre η^1

$$\frac{1}{\det(\partial_0)} \int \mathcal{D}\eta^1 \delta \left(\eta^1 - \frac{1}{\partial_0} \eta^{0'} \right) \delta \left(\dot{\eta}^0 - \eta^{1'} \right) = \frac{1}{\det(\partial_0)} \delta \left(\dot{\eta}^0 - \frac{1}{\partial_0} \eta^{0''} \right) \quad (3.43)$$

A função delta que aparece acima pode ser escrita como

$$\delta \left(\dot{\eta}^0 - \frac{1}{\partial_0} \eta^{0''} \right) = \delta \left[\frac{1}{\partial_0} \left(\dot{\eta}^0 - \eta^{0''} \right) \right] = \det(\partial_0) \delta \left(\dot{\eta}^0 - \eta^{0''} \right) \quad (3.44)$$

Assim Z pode ser escrita como

$$Z = \int \mathcal{D}\eta^0 \mathcal{D}_\rho \mathcal{D}\Pi_\rho \mathcal{D}_\phi \mathcal{D}\Pi_\phi \delta \left(\dot{\eta}^0 - \eta^{0''} \right) e^{i \int d\tau \int dy [\Pi_\rho \dot{\rho} + \Pi_\phi \dot{\phi} - G_0]} \quad (3.45)$$

Concluimos, do resultado acima, que para o modelo de CGHS os fantasmas estão desacoplados dos campos da teoria podendo ser integrados na função de partição. Os fantasmas só contribuirão para o termo central da álgebra do tensor momento-energia, conforme será mostrado na seção 3.7.

3.4 Forma Quadrática do Modelo de CGHS

Os vínculos escritos na forma original (2.57) podem ser escritos na forma quadrática utilizando-se duas transformações canônicas [15]. A primeira é obtida através do funcional gerador

$$\begin{aligned} F(\rho, \Pi_\phi; \rho^0, \rho^1) &= - \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma e^{\phi(\sigma)} [\rho^0(\sigma) \sinh \theta(\sigma) - \rho^1(\sigma) \cosh \theta(\sigma)] \\ \theta(\sigma) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\sigma} d\tilde{\sigma} \Pi_\phi(\tilde{\sigma}), \end{aligned} \quad (3.46)$$

onde $\rho^a (a = 0, 1)$ são as novas variáveis. Os momentos canonicamente conjugados a $\rho^a(\sigma)$ são as variáveis $p_a(\sigma)$. As novas variáveis obedecem juntamente com ϕ e Π_ρ a

$$\begin{aligned} p_a &= - \frac{\partial F}{\partial \rho^a} \\ \phi &= - \frac{\partial F}{\partial \Pi_\phi} \\ \Pi_\rho &= \frac{\partial F}{\partial \rho} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Usando (3.46) em (3.47) podemos escrever os vínculos como

$$\begin{aligned} G_0 &= -\rho^{aj} \epsilon_a^b p_b - \Lambda p_a p^a \\ G_1 &= p_a \rho^{aj}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

onde $\epsilon^{ab} = -\epsilon^{ba}$ e $\epsilon^{01} = 1$ e os índices são levantados e abaixados com $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1)$. A segunda transformação canônica é dada por

$$\begin{aligned} \Pi_a &= -\Lambda p_a + \frac{1}{2} \epsilon_{ab} \rho^{bj} \\ r^a &= -\frac{\rho^a}{\Lambda}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

onde (r_a, Π^a) constitui um par canonicamente conjugado. Esta última transformação nos permite escrever os vínculos na forma quadrática

$$\begin{aligned} G_0 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{2}{\Lambda} \Pi_a \Pi^a + \frac{\Lambda}{2} r'_a r^{a'} \right) \\ G_1 &= \Pi_a r^{a'} \end{aligned} \quad (3.50)$$

A transformação canônica que resume as duas transformações indicadas, de forma única é a seguinte [31]

$$\begin{aligned} \Pi_0 - \frac{\Lambda}{2} r^{1'} &= \Lambda e^\rho \sinh \theta \\ \Pi_1 + \frac{\Lambda}{2} r^{0'} &= -\Lambda e^\rho \cosh \theta \\ \Lambda r^0 &= -e^{-\rho} (2\phi' \cosh \theta - \Pi_\rho \sinh \theta) \\ \Lambda r^1 &= e^{-\rho} (\Pi_\rho \cosh \theta - 2\phi' \sinh \theta) \\ \theta(\sigma) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\sigma} d\tilde{\sigma} \Pi_\phi(\tilde{\sigma}) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Aplicando (3.51) na equação (3.45) obtemos

$$Z = \int \mathcal{D}\eta^0 \mathcal{D}\Pi_a \mathcal{D}r^a \delta(\tilde{\eta}^0 - \eta^{0'}) e^{i \int d\tau \int dy [\Pi_a \dot{r}^a - G_0]}, \quad (3.52)$$

onde o vínculo G_0 é dado acima.

Observamos agora que em Z só aparecem integrais gaussianas nos campos.

Miković [14] utiliza outro método para obter a transformação canônica que torna os vínculos quadráticos. O método é baseado na transformação de Bäcklund, obtido a partir da teoria de Liouville.

3.5 Quantização BRST-BFV do Modelo de CGHS na Forma Quadrática

Para quantizarmos o modelo de CGHS com os vínculos escritos na forma quadrática seguimos o procedimento de quantização BRST-BFV idêntico ao utilizado na seção 3.2. Obtemos inicialmente a identificação dos vínculos com os respectivos pares de fantasmas

$$\begin{aligned}
 G_0 &\longrightarrow (\xi^0, \bar{\Sigma}_0) \\
 G_1 &\longrightarrow (\xi^1, \bar{\Sigma}_1) \\
 P_{N_0} &\longrightarrow (\bar{\xi}^1, \Sigma_1) \\
 P_{N_1} &\longrightarrow (\bar{\xi}^0, \Sigma_0),
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

onde P_{N_0} e P_{N_1} são os momentos canonicamente conjugados aos multiplicadores de Lagrange N_0 e N_1 . Os vínculos são bosônicos como no caso da seção 3.2 e portanto os fantasmas possuem paridade 1. Estes fantasmas respeitam os seguintes PB's básicos

$$\begin{aligned}
 \{\xi^i, \xi^j\} &= 0 \\
 \{\Sigma_i, \Sigma_j\} &= 0 \\
 \{\bar{\xi}^i, \bar{\xi}^j\} &= 0 \\
 \{\bar{\Sigma}_i, \bar{\Sigma}_j\} &= 0 \\
 \{\bar{\xi}^i, \xi^j\} &= 0 \\
 \{\bar{\Sigma}_i, \Sigma_j\} &= 0 \\
 \{\xi^i, \bar{\Sigma}_j\} &= -\delta^i_j \delta(x-y) \\
 \{\bar{\xi}^i, \Sigma_j\} &= -\delta^i_j \delta(x-y)
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

A álgebra dos vínculos é a mesma obtida no caso anterior (seção 3.2)

$$\{G_0(x), G_0(y)\} = \delta^x(y-x) [G_1(x) + G_1(y)]$$

$$\begin{aligned}
\{G_1(x), G_0(y)\} &= \delta'(x-y)[G_0(x) + G_0(y)] \\
\{G_1(x), G_1(y)\} &= \delta'(x-y)[G_1(x) + G_1(y)]
\end{aligned}
\tag{3.55}$$

As constantes de estrutura são também as mesmas do caso não quadrático da seção 3.2 e são dadas por

$$\begin{aligned}
C_{00}^0 &= 0 \\
C_{00}^1 &= \delta'(x-y)\delta(x-z) + \delta'(x-y)\delta(y-z) \\
C_{10}^0 &= \delta'(x-y)\delta(x-z) + \delta'(x-z)\delta(y-z) \\
C_{10}^1 &= 0 \\
C_{11}^0 &= 0 \\
C_{11}^1 &= \delta'(x-y)\delta(x-z) + \delta'(x-y)\delta(y-z)
\end{aligned}
\tag{3.56}$$

A partir destes resultados, concluímos que a carga BRST possui a mesma forma da obtida na seção 3.2

$$\begin{aligned}
Q &= \int dx [\xi^0 G_0 + \xi^1 G_1] + \int dx [\Sigma_1 P_{N_0} + \Sigma_0 P_{N_1}] \\
&+ \int dx [\bar{\Sigma}_0 \xi^1 \xi^{0'} + \bar{\Sigma}_0 \xi^0 \xi^{1'}] + \int dx [\bar{\Sigma}_1 \xi^0 \xi^{0'} + \bar{\Sigma}_1 \xi^1 \xi^{1'}]
\end{aligned}
\tag{3.57}$$

As variações dos campos agora são dadas por

$$\begin{aligned}
\delta r^0 &= \frac{2}{\Lambda} \xi^0 \Pi_0 + \xi^1 r^{0'} \\
\delta r^1 &= -\frac{2}{\Lambda} \xi^0 \Pi_1 + \xi^1 r^{1'} \\
\delta \Pi_0 &= \frac{\Lambda}{2} (\xi^{0'} r^{0''} + \xi^0 r^{0''}) + \xi^{1'} \Pi_0 + \xi^1 \Pi'_0 \\
\delta \Pi_1 &= -\frac{\Lambda}{2} (\xi^{0'} r^{1''} + \xi^0 r^{1''}) + \xi^{1'} \Pi_1 + \xi^1 \Pi'_1 \\
\delta \xi^0 &= \xi^{0'} \xi^1 + \xi^{1'} \xi^0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\xi^1 &= \xi^{0'}\xi^0 + \xi^{1'}\xi^1 \\
\delta\Sigma_0 &= \delta\Sigma_1 = 0 \\
\delta\bar{\Sigma}_0 &= -G_0 + \bar{\Sigma}'_0\xi^1 + 2\bar{\Sigma}_0\xi^{1'} + \bar{\Sigma}'_1\xi^0 + 2\bar{\Sigma}_1\xi^{0'} \\
\delta\bar{\Sigma}_1 &= -G_1 + \bar{\Sigma}'_0\xi^0 + 2\bar{\Sigma}_0\xi^{0'} + \bar{\Sigma}'_1\xi^1 + 2\bar{\Sigma}_1\xi^{1'} \\
\delta P_{N_0} &= \delta P_{N_1} = 0 \\
\delta N_0 &= \Sigma_1 \\
\delta N_1 &= \Sigma_0 \\
\delta\bar{\xi}^0 &= -P_{N_1} \\
\delta\bar{\xi}^1 &= -P_{N_0}
\end{aligned} \tag{3.58}$$

O termo de fixação de gauge é dado por

$$\Psi = \int dx \left[\bar{\xi}^0 \chi_0 + \bar{\xi}^1 \chi_1 - \bar{\Sigma}_0 N_1 + \bar{\Sigma}_1 N_0 \right] \tag{3.59}$$

Assim obtemos para $\{Q, \Psi\}$

$$\begin{aligned}
\{Q, \Psi\} &= \int dx \left[-P_{N_1} \chi_0 + \bar{\xi}^0 \delta \chi_0 - P_{N_0} \chi_1 + \bar{\xi}^1 \delta \chi_1 \right. \\
&\quad - \left(-G_0 + \bar{\Sigma}'_0 \xi^1 + 2\bar{\Sigma}_0 \xi^{1'} + \bar{\Sigma}'_1 \xi^0 \right. \\
&\quad \left. + 2\bar{\Sigma}_1 \xi^{0'} \right) N_1 - \bar{\Sigma}_0 \Sigma_0 + \left(-G_1 + \bar{\Sigma}'_0 \xi^0 \right. \\
&\quad \left. + 2\bar{\Sigma}_0 \xi^{0'} + \bar{\Sigma}'_1 \xi^1 + 2\bar{\Sigma}_1 \xi^{1'} \right) N_0 + \bar{\Sigma}_1 \Sigma_1 \left. \right]
\end{aligned} \tag{3.60}$$

A ação efetiva é dada por

$$\begin{aligned}
S_{ef} &= \int d\tau \left\{ \int dx \left[P_{N_0} \dot{N}_0 + P_{N_1} \dot{N}_1 + \dot{\xi}^0 \bar{\Sigma}_0 + \dot{\xi}^1 \bar{\Sigma}_1 + \dot{\bar{\xi}}^0 \Sigma_0 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \dot{\bar{\xi}}^1 \Sigma_1 + \Pi_0 \dot{r}^0 + \Pi_1 \dot{r}^1 - \mathcal{H}_c \right] - \{Q, \Psi\} \right\}
\end{aligned} \tag{3.61}$$

ou

$$\begin{aligned}
S_{ef} = & \int d\tau \int dx \left\{ P_{N_0} \dot{N}_0 + P_{N_1} \dot{N}_1 + \dot{\xi}^0 \bar{\Sigma}_0 + \dot{\xi}^1 \bar{\Sigma}_1 \right. \\
& + \dot{\bar{\xi}}^0 \Sigma_0 + \dot{\bar{\xi}}^1 \Sigma_1 + \Pi_0 \dot{r}^0 + \Pi_1 \dot{r}^1 \\
& + P_{N_1} \chi_0 - \bar{\xi}^0 \delta \chi_0 + P_{N_0} \chi_1 - \bar{\xi}^1 \delta \chi_1 \\
& + \left(-G_0 + \bar{\Sigma}'_0 \xi^1 + 2\bar{\Sigma}_0 \xi^{1'} + \bar{\Sigma}'_1 \xi^0 \right. \\
& + \left. 2\bar{\Sigma}_1 \xi^{0'} \right) N_1 + \bar{\Sigma}_0 \Sigma_0 + \left(G_1 - \bar{\Sigma}'_0 \xi^0 \right. \\
& - \left. 2\bar{\Sigma}_0 \xi^{0'} - \bar{\Sigma}'_1 \xi^1 - 2\bar{\Sigma}_1 \xi^{1'} \right) N_0 - \bar{\Sigma}_1 \Sigma_1 \left. \right\}
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Para fixarmos o gauge conforme devemos ter para as funções de fixação de gauge

$$\begin{aligned}
\chi_0 &= \frac{N_0}{\epsilon} \\
\chi_1 &= \frac{N_1 - 1}{\epsilon}
\end{aligned} \tag{3.63}$$

e assim obtemos com auxílio de (3.58)

$$\begin{aligned}
\delta \chi_0 &= \frac{\Sigma_1}{\epsilon} \\
\delta \chi_1 &= \frac{\Sigma_0}{\epsilon}
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Usamos agora a seguinte transformação

$$\begin{aligned}
P_{N_0} &= \epsilon P_{N_0} \\
P_{N_1} &= \epsilon P_{N_1} \\
\bar{\xi}^0 &= \epsilon \bar{\xi}^0 \\
\bar{\xi}^1 &= \epsilon \bar{\xi}^1
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Usando (3.64) e (3.65) em (3.62)

$$\begin{aligned}
S_{ef} = & \int d\tau \int dx \left\{ \epsilon P_{N_0} \dot{N}_0 + \epsilon P_{N_1} \dot{N}_1 + \dot{\xi}^0 \bar{\Sigma}_0 + \dot{\xi}^1 \bar{\Sigma}_1 \right. \\
& + \epsilon \dot{\xi}^0 \Sigma_0 + \epsilon \dot{\xi}^1 \Sigma_1 + \Pi_0 \dot{r}^0 + \Pi_1 \dot{r}^1 \\
& + P_{N_1} N_0 - \bar{\xi}^0 \Sigma_1 + P_{N_0} (N_1 - 1) - \bar{\xi}^1 \Sigma_0 \\
& + (-G_0 + \bar{\Sigma}'_0 \xi^1 + 2\bar{\Sigma}_0 \xi^{1'} + \bar{\Sigma}'_1 \xi^0 \\
& + 2\bar{\Sigma}_1 \xi^{0'}) N_1 + \bar{\Sigma}_0 \Sigma_0 + (G_1 - \bar{\Sigma}'_0 \xi^0 \\
& \left. - 2\bar{\Sigma}_0 \xi^{0'} - \bar{\Sigma}'_1 \xi^1 - 2\bar{\Sigma}_1 \xi^{1'}) N_0 - \bar{\Sigma}_1 \Sigma_1 \right\} \quad (3.66)
\end{aligned}$$

e tomando o limite $\epsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
S_{ef} = & \int d\tau \int dx \left\{ \dot{\xi}^0 \bar{\Sigma}_0 + \dot{\xi}^1 \bar{\Sigma}_1 + \Pi_0 \dot{r}^0 + \Pi_1 \dot{r}^1 - \bar{\xi}^0 \Sigma_1 - \bar{\xi}^1 \Sigma_0 \right. \\
& + P_{N_1} N_0 + P_{N_0} (N_1 - 1) + (-G_0 + \bar{\Sigma}'_0 \xi^1 + 2\bar{\Sigma}_0 \xi^{1'} + \bar{\Sigma}'_1 \xi^0 + 2\bar{\Sigma}_1 \xi^{0'}) N_1 \\
& \left. + (G_1 - \bar{\Sigma}'_0 \xi^0 - 2\bar{\Sigma}_0 \xi^{0'} - \bar{\Sigma}'_1 \xi^1 - 2\bar{\Sigma}_1 \xi^{1'}) N_0 + \bar{\Sigma}_0 \Sigma_0 - \bar{\Sigma}_1 \Sigma_1 \right\} \quad (3.67)
\end{aligned}$$

De forma semelhante ao realizado na seção 3.3 integramos a ação em P_{N_0} e P_{N_1} , e assim fixamos o gauge conforme. Obtemos

$$\begin{aligned}
S_{ef} = & \int d\tau \int dx \left\{ \dot{\xi}^0 \bar{\Sigma}_0 + \dot{\xi}^1 \bar{\Sigma}_1 + \Pi_0 \dot{r}^0 + \Pi_1 \dot{r}^1 - \bar{\xi}^0 \Sigma_1 - \bar{\xi}^1 \Sigma_0 \right. \\
& \left. + (-G_0 + \bar{\Sigma}'_0 \xi^1 + 2\bar{\Sigma}_0 \xi^{1'} + \bar{\Sigma}'_1 \xi^0 + 2\bar{\Sigma}_1 \xi^{0'}) + \bar{\Sigma}_0 \Sigma_0 - \bar{\Sigma}_1 \Sigma_1 \right\} \quad (3.68)
\end{aligned}$$

Das equações fornecidas para as variações (3.58) verificamos que $\bar{\xi}^0$ e $\bar{\xi}^1$ não são variáveis independentes. Vamos então integrar a ação nestas duas variáveis.

Integrando a função de partição em $\bar{\xi}^0$ e $\bar{\xi}^1$ obtemos deltas funcionais que fixam Σ_0 e Σ_1 em

$$\Sigma_0 = \Sigma_1 = 0 \quad (3.69)$$

Logo

$$S_{ef} = \int d\tau \int dx \left\{ \dot{\xi}^0 \bar{\Sigma}_0 + \dot{\xi}^1 \bar{\Sigma}_1 + \Pi_0 \dot{r}^0 + \Pi_1 \dot{r}^1 \right. \\ \left. + \left(-G_0 + \bar{\Sigma}'_0 \xi^1 + 2\bar{\Sigma}_0 \xi^{1'} + \bar{\Sigma}'_1 \xi^0 + 2\bar{\Sigma}_1 \xi^{0'} \right) \right\} \quad (3.70)$$

Realizando integrações por partes no sexto e oitavo termos, obtemos

$$S_{ef} = \int d\tau \int dx \left\{ \dot{\xi}^0 \bar{\Sigma}_0 + \dot{\xi}^1 \bar{\Sigma}_1 + \Pi_0 \dot{r}^0 + \Pi_1 \dot{r}^1 \right. \\ \left. + \left(-G_0 + \bar{\Sigma}_0 \xi^{1'} + \bar{\Sigma}_1 \xi^{0'} \right) \right\} \quad (3.71)$$

ou

$$S_{ef} = \int d\tau \int dx \left\{ \Pi_0 \dot{r}^0 + \Pi_1 \dot{r}^1 - G_0 \right. \\ \left. + \bar{\Sigma}_0 (\xi^{1'} - \dot{\xi}^0) + \bar{\Sigma}_1 (\xi^{0'} - \dot{\xi}^1) \right\} \quad (3.72)$$

usando a equação para o vínculo G_0 (3.50) na expressão acima obtemos

$$S_{ef} = \int d\tau \int dx \left\{ \frac{\Lambda}{4} (\dot{r}^{0\,2} - r^{0'\,2}) - \frac{\Lambda}{4} (\dot{r}^{1\,2} - r^{1'\,2}) \right. \\ \left. + \bar{\Sigma}_0 (\xi^{1'} - \dot{\xi}^0) + \bar{\Sigma}_1 (\xi^{0'} - \dot{\xi}^1) \right\} \quad (3.73)$$

Integrar a função de partição em $\bar{\xi}^0$ e $\bar{\xi}^1$, como fizemos acima, corresponde a escrever a ação on-shell, ou seja, a usar as equações de movimento para Σ_0 e Σ_1 (3.69).

Notamos da equação acima que os campos estão desacoplados dos fantasmas. Percebemos ainda que possuímos um termo escalar com energia cinética positiva r^0 e outro com energia cinética negativa r^1 .

3.6 Análise de Anomalias para o Modelo de CGHS

3.6.1 Cálculo da Anomalia

Anomalias ocorrem quando simetrias de um sistema clássico não podem ser mantidas na teoria quântica.

Quando quantizamos os campos do modelo de CGHS esperamos que a álgebra dos vínculos expressa por (3.55) seja preservada, uma vez que devemos seguir a prescrição de Dirac para transformar PB's em comutadores, ou seja

$$\{A, B\} \longrightarrow \frac{[A, B]}{i} \quad (3.74)$$

Entretanto analisando a álgebra dos vínculos expressos na forma do tensor momento-energia, verificamos a presença de uma anomalia, conforme demonstraremos a seguir.

Obtivemos os vínculos na forma quadrática em (3.50) escritos em função dos campos escalares r^0 e r^1 . Para obter a contribuição dos fantasmas nos vínculos vamos reescrevê-los na forma [32]

$$\tilde{G}_a = \{Q, \tilde{\Sigma}_a\} = -\delta \tilde{\Sigma}_a \quad (3.75)$$

Usando (3.58) obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{G}_0 &= G_0 - (\tilde{\Sigma}'_0 \xi^1 + 2\tilde{\Sigma}_0 \xi^{1'} + \tilde{\Sigma}'_1 \xi^0 + 2\tilde{\Sigma}_1 \xi^{0'}) \\ \tilde{G}_1 &= G_1 - (\tilde{\Sigma}'_0 \xi^0 + 2\tilde{\Sigma}_0 \xi^{0'} + \tilde{\Sigma}'_1 \xi^1 + 2\tilde{\Sigma}_1 \xi^{1'}) \end{aligned} \quad (3.76)$$

As contribuições dos fantasmas para os vínculos são denotadas por G_{gh0} e G_{gh1} . Temos

$$\begin{aligned} G_{gh0} &= -(\tilde{\Sigma}'_0 \xi^1 + 2\tilde{\Sigma}_0 \xi^{1'} + \tilde{\Sigma}'_1 \xi^0 + 2\tilde{\Sigma}_1 \xi^{0'}) \\ G_{gh1} &= -(\tilde{\Sigma}'_0 \xi^0 + 2\tilde{\Sigma}_0 \xi^{0'} + \tilde{\Sigma}'_1 \xi^1 + 2\tilde{\Sigma}_1 \xi^{1'}) \end{aligned} \quad (3.77)$$

Vamos agora reescrever G_0 e G_1 de forma a facilitar a análise da anomalia. Utilizando as equações para os momentos canonicamente conjugados aos campos r^0 e r^1 (veja a ação expressa em (3.73))

$$\Pi_a = -\frac{\Lambda}{2} \dot{r}_a \quad (3.78)$$

Podemos escrever para os vínculos (3.50)

$$\begin{aligned} G_0 &= -\frac{\Lambda}{4} [\dot{r}_a \dot{r}^a + r^a r'_a] \\ G_1 &= -\frac{\Lambda}{2} [\dot{r}_a r'^a] \end{aligned} \quad (3.79)$$

Usando coordenadas do cone de luz

$$\begin{aligned} x^+ &= \frac{x^0 + x^1}{2} \\ x^- &= \frac{x^0 - x^1}{2} \end{aligned} \quad (3.80)$$

podemos escrever para G_0 e G_1

$$\begin{aligned} G_0 &= -\frac{\Lambda}{8} [\partial_+ r_a \partial_+ r^a + \partial_- r_a \partial_- r^a] \\ G_1 &= -\frac{\Lambda}{8} [\partial_+ r_a \partial_+ r^a - \partial_- r_a \partial_- r^a] \end{aligned} \quad (3.81)$$

Reescrevemos G_{ph0} e G_{ph1} utilizando a transformação

$$\begin{aligned} \xi^0 &= \frac{1}{2} (c + d) \\ \xi^1 &= \frac{1}{2} (c - d) \\ \bar{\Sigma}_0 &= \frac{1}{2} (\bar{c} + \bar{d}) \\ \bar{\Sigma}_1 &= \frac{1}{2} (\bar{c} - \bar{d}) \end{aligned} \quad (3.82)$$

obtemos

$$\begin{aligned}
G_{gh0} &= -\frac{1}{2} [\bar{c}'c + 2\bar{c}c' - \bar{d}'d - 2\bar{d}d'] \\
G_{gh1} &= -\frac{1}{2} [\bar{c}'c + 2\bar{c}c' + \bar{d}'d + 2\bar{d}d']
\end{aligned} \tag{3.83}$$

ou em coordenadas do cone de luz

$$\begin{aligned}
G_{gh0} &= -\frac{1}{4} [(\partial_+\bar{c} - \partial_-\bar{c})c + 2\bar{c}(\partial_+c - \partial_-c) - (\partial_+\bar{d} - \partial_-\bar{d})d - 2\bar{d}(\partial_+d - \partial_-d)] \\
G_{gh1} &= -\frac{1}{4} [(\partial_+\bar{c} - \partial_-\bar{c})c + 2\bar{c}(\partial_+c - \partial_-c) + (\partial_+\bar{d} - \partial_-\bar{d})d + 2\bar{d}(\partial_+d - \partial_-d)]
\end{aligned} \tag{3.84}$$

Agora definimos

$$\begin{aligned}
G_{0+} &= \frac{(\tilde{G}_0 + \tilde{G}_1)}{2} \\
G_{0-} &= \frac{(\tilde{G}_0 - \tilde{G}_1)}{2}
\end{aligned} \tag{3.85}$$

e usando (3.76) (3.81) (3.83) e (3.84) na equação acima obtemos

$$\begin{aligned}
G_{0+} &= -\frac{\Lambda}{8} (\partial_+ r_a \partial_+ r^a) - \frac{1}{4} [(\partial_+\bar{c} - \partial_-\bar{c})c + 2\bar{c}(\partial_+c - \partial_-c)] \\
G_{0-} &= -\frac{\Lambda}{8} (\partial_- r_a \partial_- r^a) + \frac{1}{4} [(\partial_+\bar{d} - \partial_-\bar{d})d + 2\bar{d}(\partial_+d - \partial_-d)]
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Agora vamos nos referir a equação (3.73). A contribuição dos fantasmas para a lagrangeana efetiva é dada por

$$L_{gh} = \bar{\Sigma}_0 (\xi^{1'} - \xi^0) + \bar{\Sigma}_1 (\xi^{0'} - \xi^1) \tag{3.87}$$

Usando a transformação (3.82) obtemos

$$L_{gh} = -\frac{1}{2}\bar{c}\partial_-c - \frac{1}{2}\bar{d}\partial_+d \quad (3.88)$$

desta ação derivamos as equações de movimento

$$\partial_-c = \partial_- \bar{c} = \partial_+d = \partial_+ \bar{d} = 0 \quad (3.89)$$

Utilizando estas equações em G_{0+} e G_{0-} chegamos ao resultado

$$\begin{aligned} G_{0+} &= -\frac{\Lambda}{8}(\partial_+r_a\partial_+r^a) - \frac{1}{4}\partial_+\bar{c}c - \frac{1}{2}\bar{c}\partial_+c \\ G_{0-} &= -\frac{\Lambda}{8}(\partial_-r_a\partial_-r^a) - \frac{1}{4}\partial_-\bar{d}d - \frac{1}{2}\bar{d}\partial_-d \end{aligned} \quad (3.90)$$

Verificaremos agora, que os vínculos escritos na forma de G_{0+} e G_{0-} representam respectivamente as componentes do tensor momento energia T_{++} e T_{--} . De fato, dada uma lagrangeana para um campo escalar φ com energia cinética positiva

$$L = -\frac{1}{2}\int dx \partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi \quad (3.91)$$

e usando a definição usual para o tensor momento energia

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} \quad (3.92)$$

obtemos

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\mathcal{L} \quad (3.93)$$

que nas coordenadas do cone de luz toma a forma

$$\begin{aligned} T_{\pm\pm} &= -\frac{1}{2}\partial_\pm\varphi\partial_\pm\varphi \\ T_{+-} &= 0 \end{aligned} \quad (3.94)$$

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} \quad (3.95)$$

Comparando (3.94) com (3.90) verificamos que elas representam a mesma equação (a menos de uma constante). Para o caso de um campo escalar com energia cinética negativa basta inverter o sinal de (3.95), (3.93) e (3.94). É importante notar que G_{0+} e G_{0-} contém a contribuição de um termo com energia cinética positiva referente a r^0 e outro com energia cinética negativa referente a r^1 .

Para os fantasmas calculamos também o tensor momento energia partindo da seguinte lagrangeana

$$L = -\frac{1}{2} \int dx \, c^\mu \partial^\nu b_{\mu\nu}, \quad (3.96)$$

onde $b_{\mu\nu}$ é um tensor de segunda ordem simétrico e de traço nulo ou seja

$$b_\mu{}^\mu = 0 \quad (3.97)$$

O tensor momento-energia neste caso, é dado por (veja apêndice B)

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \partial_{(\mu} c^\rho b_{\nu)\rho} + \frac{1}{2} c^\rho \partial_\rho b_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} \partial_\rho c^\lambda b_{\lambda\sigma} \right] \quad (3.98)$$

Nas coordenadas do cone de luz

$$\begin{aligned} T_{\pm\pm} &= \frac{1}{2} \partial_\pm c^\pm b_{\pm\pm} + \frac{1}{4} c^\pm \partial_\pm b_{\pm\pm} \\ T_{+-} &= 0 \end{aligned} \quad (3.99)$$

Novamente, comparando (3.99) com o termo de (3.90) referente aos fantasmas, verificamos que estas expressões representam a mesma equação.

Da álgebra (3.55) esperamos obter, após converter PB's em comutadores ou anticomutadores, tanto para os campos escalares quanto para os fantasmas (veja apêndice C)

$$[:T_{++}(x):, :T_{++}(y):] = -i(:T_{++}(x): + :T_{++}(y):)\delta'(x-y) + c\delta'''(x-y), \quad (3.100)$$

onde "c" corresponde ao termo central a ser determinado.

Vamos considerar novamente o campo escalar em (3.91) e seu respectivo tensor $T_{\mu\nu}$ (3.94). Utilizando expansões em operadores de criação e aniquilação para os campos (veja apêndice C) obtemos

$$[:T_{++}^{(S)}(x):, :T_{++}^{(S)}(y):] = -i(:T_{++}^{(S)}(x): + :T_{++}^{(S)}(y):)\delta'(x-y) + \frac{i}{24\pi}\delta'''(x-y), \quad (3.101)$$

onde $T_{++}^{(S)}$ corresponde ao tensor momento-energia para o campo escalar com energia cinética positiva. Para o campo escalar com energia cinética negativa verificamos que o termo central não muda de sinal (apêndice C).

Para a contribuição dos fantasmas obtemos (veja apêndice D)

$$[:T_{++}^{(F)}(x):, :T_{++}^{(F)}(y):] = -i(:T_{++}^{(F)}(x): + :T_{++}^{(F)}(y):)\delta'(x-y) - \frac{13i}{12\pi}\delta'''(x-y), \quad (3.102)$$

onde $:T_{++}^{(F)}:$ corresponde ao tensor momento-energia para os fantasmas. Os mesmos resultados obtidos nas equações (3.101) e (3.102) são válidos também para $T_{--}^{(S)}$ e $T_{--}^{(F)}$.

A hamiltoniana para o campo escalar obtida a partir de (3.91) pode ser escrita como

$$H^{(S)} = \frac{1}{2} \int dx (\pi^2 + \varphi'^2), \quad (3.103)$$

onde π é o momento canonicamente conjugado ao campo φ . A expansão do campo φ em operadores de criação e aniquilação fornece uma hamiltoniana cujos autovalores são negativos (veja apêndice C).

A hamiltoniana para os fantasmas é obtida a partir de (3.96)

$$H^{(F)} = \int dx [\pi_{b_{++}} b'_{++} - \pi_{b_{--}} b'_{--}], \quad (3.104)$$

onde $\pi_{b_{++}}$ e $\pi_{b_{--}}$ são os momentos canonicamente conjugados aos campos b_{++} e b_{--} . Neste caso também os autovalores da hamiltoniana são negativos (veja apêndice D).

É importante neste ponto discutir o problema da definição do vácuo usada nos cálculos apresentados. Nos apêndices C e D usamos as seguintes expansões para os campos

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2|k|} [a(k) e^{ikx} + a^\dagger(k) e^{-ikx}] \\ b_{++}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} dk [b(k) e^{ikx} + b^\dagger(k) e^{-ikx}] \\ c^\pm(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} dk [c(k) e^{ikx} + c^\dagger(k) e^{-ikx}]\end{aligned}\quad (3.105)$$

Nos cálculos do termo central utilizamos tanto as definições usuais para o vácuo

$$a|0\rangle = b|0\rangle = c|0\rangle = 0, \quad (3.106)$$

onde a , b e c são operadores de aniquilação, como as definições invertidas onde os operadores de criação passam a ser de aniquilação

$$a^\dagger|0\rangle = b^\dagger|0\rangle = c^\dagger|0\rangle = 0, \quad (3.107)$$

Verificamos, que usando esta última convenção, a partir dos cálculos dos apêndices C e D, que o termo central tem o sinal invertido, tanto para o campo escalar quanto para os fantasmas. Resumimos nas tabelas abaixo os resultados obtidos incluindo os sinais das normas em cada caso para os campos escalares (analisados no apêndice C)

Campo Escalar

Sinal Energia Cinética	Definição Vácuo	Sinal da Norma	Autovalores da Hamiltoniana	Termo Central em Unidades de ($-i/24\pi$)
+	$a 0\rangle = 0$	+	$E \geq 0$	1
+	$a^\dagger 0\rangle = 0$	-	$E \leq 0$	-1
-	$a 0\rangle = 0$	-	$E \geq 0$	1
-	$a^\dagger 0\rangle = 0$	+	$E \leq 0$	-1

Fantasma

Sinal Energia Cinética	Definição Vácuo	Autovalores da Hamiltoniana	Termo Central em Unidades de ($-i/24\pi$)
+	$b 0\rangle = c 0\rangle = 0$	$E \leq 0$	26
+	$b^\dagger 0\rangle = c^\dagger 0\rangle = 0$	$E \geq 0$	-26
-	$b 0\rangle = c 0\rangle = 0$	$E \leq 0$	26
-	$b^\dagger 0\rangle = c^\dagger 0\rangle = 0$	$E \geq 0$	-26

Os fantasmas possuem norma zero, e portanto não possuem significado físico.

Os valores obtidos para "c" mostram não ser possível eliminar a anomalia combinando diferentes definições do vácuo para campos diferentes. Ao introduzirmos um termo de superfície na ação denominado termo de improvement, conseguimos eliminar a anomalia, conforme veremos na próxima seção.

3.6.2 Termo de Improvement para o Cancelamento da Anomalia

Para anular a anomalia, vamos acrescentar um termo à ação (3.73), que não altera a dinâmica do sistema. O termo acrescido à ação é representado por S_I e é conhecido como termo de improvement. S_I é dado por

$$S_I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Lambda}{2}} Q_a \int d^2x \partial^\mu \partial_\mu r^a, \quad (3.108)$$

onde os Q^a 's são constantes arbitrárias. Para constatarmos que S_I não altera o conteúdo físico da teoria, basta aplicar o teorema de Gauss a (3.108) para verificar que S_I é igual a zero (assumindo que $r^a \rightarrow 0$ no infinito).

Usando (3.95) obtemos para o tensor momento-energia

$$T_{\mu\nu}^{(I)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Lambda}{2}} Q_a \partial_\mu \partial_\nu r^a - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (3.109)$$

ou em coordenadas do cone de luz

$$\begin{aligned} T_{\pm\pm}^{(I)} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Lambda}{2}} Q_a \partial_\pm^2 r^a \\ T_{+-}^{(I)} &= 0 \end{aligned} \quad (3.110)$$

A nova lagrangeana (L_T) é obtida a partir de (3.73) e (3.108)

$$L_T = \int d^2x \left\{ \frac{\Lambda}{2} \left[\frac{1}{2} \partial^\mu r^a \partial_\mu r_a + \sqrt{\frac{2}{\Lambda}} Q_a \partial^\mu \partial_\mu r^a \right] + \bar{\Sigma}_0 (\xi^{1'} - \xi^0) + \bar{\Sigma}_1 (\xi^{0'} - \xi^1) \right\} \quad (3.111)$$

A partir de L_T obtemos os novos vínculos

$$\begin{aligned} \bar{G}_0 &= G_0 + \sqrt{\frac{\Lambda}{2}} Q_a r^{aa} \\ \bar{G}_1 &= G_1 - \sqrt{\frac{2}{\Lambda}} Q_a \Pi^{ar}, \end{aligned} \quad (3.112)$$

onde G_0 e G_1 são dados por (3.50).

Para a álgebra dos novos vínculos obtemos

$$\begin{aligned}\{G_0(x), G_0(y)\} &= [G_1(x) + G_1(y)] \delta'(x - y) \\ \{G_1(x), G_0(y)\} &= [G_0(x) + G_0(y)] \delta'(x - y) - Q_a Q^a \delta'''(x - y) \\ \{G_1(x), G_1(y)\} &= [G_1(x) + G_1(y)] \delta'(x - y)\end{aligned}\quad (3.113)$$

Portanto teremos uma álgebra de vínculos de primeira classe se

$$Q_a Q^a = 0 \quad (3.114)$$

Este resultado esta de acordo com o obtido por Miković [14] [15].

Com esta condição as constantes de estrutura são as mesmas obtidas para G_0 e G_1 (equações (3.56)). A nova carga de BRST pode ser obtida usando a seguinte substituição em (3.57)

$$\begin{aligned}G_0 &\longrightarrow \bar{G}_0 \\ G_1 &\longrightarrow \bar{G}_1\end{aligned}\quad (3.115)$$

obtemos

$$\begin{aligned}Q &= \int dx [\xi^0 \bar{G}_0 + \xi^1 \bar{G}_1] + \int dx [\Sigma_1 P_{N_0} + \Sigma_0 P_{N_1}] \\ &+ \int dx [\bar{\Sigma}_0 \xi^1 \xi^{0'} + \bar{\Sigma}_0 \xi^0 \xi^{1'}] + \int dx [\bar{\Sigma}_1 \xi^0 \xi^{0'} + \bar{\Sigma}_1 \xi^1 \xi^{1'}]\end{aligned}\quad (3.116)$$

As novas transformações geradas por Q são dadas abaixo

$$\begin{aligned}\delta r^0 &= \frac{2}{\Lambda} \xi^0 \Pi_0 + \xi^1 r^{0'} + \sqrt{\frac{2}{\Lambda}} \xi^{1'} Q^0 \\ \delta r^1 &= -\frac{2}{\Lambda} \xi^0 \Pi_1 + \xi^1 r^{1'} + \sqrt{\frac{2}{\Lambda}} \xi^{1'} Q^1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\Pi_0 &= \frac{\Lambda}{2} (\xi^{0'} r^{0'} + \xi^0 r^{0''}) + \xi^{1'} \Pi_0 + \xi^1 \Pi_0' - \sqrt{\frac{\Lambda}{2}} \xi^{0''} Q_0 \\
\delta\Pi_1 &= -\frac{\Lambda}{2} (\xi^{0'} r^{1'} + \xi^0 r^{1''}) + \xi^{1'} \Pi_1 + \xi^1 \Pi_1' - \sqrt{\frac{\Lambda}{2}} \xi^{0''} Q_1 \\
\delta\bar{\Sigma}_0 &= -\bar{G}_0 + \bar{\Sigma}_0' \xi^1 + 2\bar{\Sigma}_0 \xi^{1'} + \bar{\Sigma}_1' \xi^0 + 2\bar{\Sigma}_1 \xi^{0'} \\
\delta\bar{\Sigma}_1 &= -\bar{G}_1 + \bar{\Sigma}_0' \xi^0 + 2\bar{\Sigma}_0 \xi^{0'} + \bar{\Sigma}_1' \xi^1 + 2\bar{\Sigma}_1 \xi^{1'} \\
\delta\xi^0 &= \xi^{0'} \xi^1 + \xi^{1'} \xi^0 \\
\delta\xi^1 &= \xi^{0''} \xi^0 + \xi^{1''} \xi^1 \\
\delta\Sigma_0 &= \delta\Sigma_1 = 0 \\
\delta P_{N_0} &= \delta P_{N_1} = 0 \\
\delta N_0 &= \Sigma_1 \\
\delta N_1 &= \Sigma_0 \\
\delta\bar{\xi}^0 &= -P_{N_1} \\
\delta\bar{\xi}^1 &= -P_{N_0}
\end{aligned} \tag{3.117}$$

Prosseguimos agora com o cálculo do termo central para o tensor momento-energia levando-se em consideração o termo de improvement. Denotaremos por $T_{\pm\pm}^{(I)}$ o tensor de improvement para o campo escalar com termo cinético positivo (equação (E.1)). O tensor momento-energia total neste caso, é dado por

$$:T_{++}^{(T)}: = :T_{++}^{(S)}: + :T_{++}^{(I)}: \tag{3.118}$$

e deve satisfazer a álgebra (3.100). Este cálculo é realizado no apêndice E. Obtemos

$$\begin{aligned}
\left[:T_{++}^{(T)}(x):, :T_{++}^{(T)}(y): \right] &= -i \left(:T_{++}^{(T)}(x): + :T_{++}^{(T)}(y): \right) \delta'(x-y) \\
&\quad - \frac{i}{24\pi} \left(-1 + 12\pi Q^2 \right) \delta'''(x-y),
\end{aligned} \tag{3.119}$$

onde Q neste caso é igual a Q^0 (componente correspondente ao campo r^0 que possui o termo cinético positivo). De (3.101) e (3.108) notamos que a contribuição de $T^{(I)}$ para o termo central é dada por

$$-i\frac{Q^2}{2} \quad (3.120)$$

Redefinindo o vácuo de acordo com (3.106) verificamos que não há inversão de sinal no termo central. Invertendo o sinal da energia cinética verificamos uma inversão de sinal apenas do termo de improvement (apêndice E).

Resumimos os resultados analisados na tabela abaixo incluindo os sinais das normas em cada caso (veja apêndice E)

Campo Escalar com Termo de Improvement

Sinal Energia Cinética	Definição Vácuo	Sinal da Norma	Autovalores da Hamiltoniana	Termo Central em Unidades de $(-i/24\pi)$
+	$a 0\rangle = 0$	+	$E \geq 0$	$1 + 12\pi Q^2$
+	$a^\dagger 0\rangle = 0$	-	$E \leq 0$	$-1 + 12\pi Q^2$
-	$a 0\rangle = 0$	-	$E \geq 0$	$1 - 12\pi Q^2$
-	$a^\dagger 0\rangle = 0$	+	$E \leq 0$	$-1 - 12\pi Q^2$

É importante observar que Q corresponde a Q^0 para o campo escalar com energia cinética positiva e a Q^1 para o campo escalar com energia cinética negativa.

Dos resultados analisados nesta seção e na anterior concluímos que o tensor total da soma dos campos e dos fantasmas satisfaz a álgebra

$$\left[:T_{++}^c : + :T_{++}^F : , :T_{++}^c : + :T_{++}^F : \right] = -i \left(:T_{++}^c : + :T_{++}^F : \right) - \frac{i}{24\pi} (c_{\varphi+} + c_{\varphi-} + c_F), \quad (3.121)$$

onde $:T_{++}^c :$ e $:T_{++}^F :$ correspondem respectivamente as contribuições dos campos e fantasmas. $c_{\varphi+}$ e $c_{\varphi-}$ correspondem respectivamente aos valores do termo central para os campos com energia cinética positiva e energia cinética negativa, e c_F corresponde ao termo central dos fantasmas.

Das tabelas da seção anterior e desta seção concluímos que para o anulamento do termo central devemos ter [15]

$$c_{\varphi+} + c_{\varphi-} + c_F = -12\pi Q_a Q^a \pm 26 = 0 \quad (3.122)$$

logo

$$Q_a Q^a = \pm \frac{13}{6\pi} \quad (3.123)$$

Portanto, neste caso temos $Q_a Q^a \neq 0$.

O anulamento da carga central nestes casos ocorre para as seguintes definições do vácuo

$$\begin{aligned} a^+ |0\rangle &= (a^-)^\dagger |0\rangle = b |0\rangle = c |0\rangle = 0 \\ a^+ |0\rangle &= (a^-)^\dagger |0\rangle = b^\dagger |0\rangle = c^\dagger |0\rangle = 0, \end{aligned} \quad (3.124)$$

onde $(a^-)^\dagger$ e a^+ correspondem respectivamente a operadores de criação para o campo escalar com energia cinética negativa e de aniquilação para o campo escalar com energia cinética positiva, e onde a primeira solução corresponde à solução com sinal positivo e a segunda à solução com sinal negativo. Ambas as soluções são consistentes pois em ambos os casos o espaço de Hilbert para os campos escalares possui norma positiva e para os fantasmas, que não possuem significado físico, possui norma nula.

Jackiw [15] comenta outras possibilidades para anular a anomalia, como usar operadores de aniquilação com energia positiva e os de criação com energia negativa.

Conforme comentamos anteriormente, a solução em (3.122) (3.123) (3.124) corresponde ao caso em que $Q^a Q_a \neq 0$ (ou seja, não temos o anulamento do termo central clássico). Vamos agora considerar o caso em que $Q^a Q_a \neq 0$ e desprezamos a contribuição dos fantasmas [34]. Este caso corresponde ao procedimento de quantização canônico de operadores e não ao procedimento de quantização de BRST-BFV. Para o anulamento do termo central, devemos ter

$$Q^a Q_a = \mp \frac{1}{6\pi} \quad (3.125)$$

Da tabela da página 51, verificamos que neste caso podemos ter as seguintes possibilidades para o vácuo

$$\begin{aligned}(a^+)^{\dagger}|0\rangle &= (a^-)^{\dagger}|0\rangle = 0 \\ a^+|0\rangle &= a^-|0\rangle = 0\end{aligned}\tag{3.126}$$

Da tabela verificamos que em ambos os casos o espaço de Hilbert do campo com energia cinética negativa possui norma negativa. Portanto esta solução não corresponde a um caso físico de interesse, uma vez que a positividade da norma no espaço de Hilbert é comprometida. Se considerarmos a contribuição dos fantasmas, chegaremos a mesma conclusão, uma vez que estes apenas alteram o valor da carga central.

Chegaremos à mesma conclusão na seção 3.6.3 quando analisarmos a solução na representação de Schrödinger.

É interessante também considerar o caso em que não temos cargas de fundo (termo de improvement), ou seja, $Q_a = 0$. Aqui desconsideramos a contribuição dos fantasmas. Neste caso, das tabelas da página 47, temos o anulamento da anomalia para a seguinte definição do vácuo

$$a^+|0\rangle = (a^-)^{\dagger}|0\rangle = 0,\tag{3.127}$$

Este caso corresponde a solução

$$c_T = c_+ + c_- = 1 - 1 = 0,\tag{3.128}$$

onde c_T corresponde a carga central total e c_+ e c_- correspondem respectivamente as contribuições de a^+ e $(a^-)^{\dagger}$ para c_T .

No caso

$$(a^+)^{\dagger}|0\rangle = a^-|0\rangle = 0\tag{3.129}$$

temos também o anulamento da anomalia, mas a norma é negativa e esta solução é desconsiderada.

No caso em que não consideramos a contribuição dos fantasmas, ou seja, desconsideramos o método de quantização de BRST-BFV e consideramos $Q_a Q^a = 0$, temos ainda o anulamento da anomalia para o caso

$$a^+|0\rangle = (a^-)^\dagger|0\rangle = 0 \quad (3.130)$$

Conforme comentamos anteriormente existem na literatura outras formas de anular a anomalia. Basicamente existem três formas para atingir o anulamento da anomalia. A primeira, consiste em utilizar uma escolha não convencional para o vácuo. Isto significa que para alguns campos, os operadores de criação e aniquilação possuem papéis invertidos. A segunda forma consiste em modificar os vínculos introduzindo termos colocados a mão. A terceira consiste em introduzir cargas de fundo (introdução de um termo de improvement). Jackiw [15] discute as três possibilidades.

3.6.3 Quantização de Dirac para o Modelo de CGHS

Para quantizarmos um sistema com vínculos usando o procedimento proposto por Dirac [20] é necessário inicialmente identificar os vínculos de primeira e segunda classe. Descrevemos a seguir os casos possíveis.

No caso em que existem apenas vínculos de primeira classe o primeiro passo é converter os campos em operadores. Substituímos em seguida os parênteses de Poisson entre duas funções dos campos pelos comutadores ou anticomutadores entre os correspondentes operadores, ou seja

$$\{A, B\} \longrightarrow \frac{[A, B]_{\pm}}{i}, \quad (3.131)$$

onde aqui usamos $[A, B]_-$ para comutadores e $[A, B]_+$ para anticomutadores.

O próximo passo é impor os vínculos de primeira classe, aqui denotados por ϕ_i , como operadores atuando nos vetores de estado do sistema, ou seja

$$\hat{\phi}_i |\varphi\rangle = 0, \quad (3.132)$$

onde $\hat{\phi}_i$ é o operador correspondente ao vínculo clássico de primeira classe ϕ_i e $|\varphi\rangle$ representa um estado físico. O passo final é implementar os operadores que satisfazem a (3.131) e (3.132).

No caso do modelo de CGHS possuímos apenas vínculos de primeira classe. Vamos quantizar a teoria, inicialmente desconsiderando o termo de improvement ($Q_a = 0$). Assim temos

$$\begin{aligned} [r_a(x), \Pi^b(y)] &= i \delta_a^b \delta(x-y) \\ \Pi_a(x) &= -i \frac{\delta}{\delta r^a(x)} \end{aligned} \quad (3.133)$$

Os vínculos (3.50) são impostos na forma operatorial sobre o funcional de onda Ψ

$$-\frac{1}{2} \left[-\frac{2}{\Lambda} \frac{\delta^2 \Psi}{\delta r^a(x) \delta r_a(x)} + \frac{\Lambda}{2} r^{ab}(x) r'_a(x) \Psi \right] = 0$$

$$r^a \frac{\delta \Psi}{\delta r^a} = 0 \quad (3.134)$$

Verificamos que o funcional de onda Ψ é função apenas dos r^a 's. Agora resolvemos estas equações juntamente com o operador hamiltoniano aplicado a função de onda. Conforme vimos na seção 2.3 (equação 2.53) a hamiltoniana é identicamente nula. Portanto, basta resolver (3.134).

Podemos verificar por substituição, que temos duas soluções que satisfazem (3.134)

$$\Psi[r^a] = e^{\pm i \frac{\Lambda}{4} \int dx \epsilon_{ab} r^a(x) r^b(x)} \quad (3.135)$$

De fato, calculando a primeira e segunda derivadas de Ψ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Psi}{\delta r^a} &= \pm i \frac{\Lambda}{2} \epsilon_{ab} r^b \Psi \\ \frac{\delta^2 \Psi}{\delta r^a \delta r_a} &= \frac{\Lambda^2}{4} r_a' r'^a \Psi \end{aligned} \quad (3.136)$$

e substituindo em (3.134), concluímos que os vínculos são satisfeitos. Nas duas soluções encontradas a hamiltoniana possui autovalores nulos.

A solução obtida para Ψ esta de acordo com o resultado calculado por Jackiw [15].

Um sistema vinculado pode também ser quantizado utilizando-se uma versão diferente do procedimento de Dirac. Este é o método de quantização do espaço de fase reduzido (RPS) [14]. No método proposto por Dirac, conforme vimos acima, quantizamos o sistema primeiro e depois resolvemos os vínculos. No método RPS, primeiro resolvemos os vínculos e depois quantizamos o sistema.

Quantizamos a seguir o modelo de CGHS usando o método RPS. Resolvendo os vínculos (3.50) para o momento, obtemos

$$\Pi^a = \pm \frac{\Lambda}{2} \epsilon^{ab} r_b' \quad (3.137)$$

Logo operatorialmente devemos ter

$$-i \frac{\delta \Psi}{\delta r^a} = \pm \frac{\Lambda}{2} \epsilon^{ab} r_b' \Psi \quad (3.138)$$

Esta equação é satisfeita pelas duas soluções encontradas para Ψ (3.135) usando o procedimento usual de quantização de Dirac. De fato, usando a equação (3.136) para a derivada primeira, obtemos uma identidade.

Se incluirmos o termo de improvement obtemos segundo (3.50) e (3.112)

$$\begin{aligned} G_0 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{2}{\Lambda} \Pi_a \Pi^a + \frac{\Lambda}{2} r'_a r^{a'} \right) + \sqrt{\frac{\Lambda}{2}} Q_a r^{a''} \\ G_1 &= \Pi_a r^{a'} - \sqrt{\frac{2}{\Lambda}} Q_a \Pi^{a'} \end{aligned} \quad (3.139)$$

A funcional de onda deve portanto satisfazer a

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \left(-\frac{2}{\Lambda} \frac{\delta^2}{\delta r^a \delta r_a} + \frac{\Lambda}{2} r'_a r^{a'} \right) \Psi + \sqrt{\frac{\Lambda}{2}} Q_a r^{a''} \Psi &= 0 \\ r^{a'} \frac{\delta \Psi}{\delta r^a} - \sqrt{\frac{2}{\Lambda}} Q_a \partial_1 \frac{\delta \Psi}{\delta r^a} &= 0 \end{aligned} \quad (3.140)$$

obtemos as soluções

$$\Psi = e^{\pm i \frac{\Lambda}{4} \int dx \epsilon_{ab} r^a r'^b \mp i \sqrt{\frac{\Lambda}{2}} \int dx \epsilon_{ab} Q^a r'^b \ln \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{2}} Q_c r^{c'} \right)} \quad (3.141)$$

onde usamos (3.114).

Neste caso, como no caso anterior, verificamos que a solução satisfaz os vínculos usando as expressões para as derivadas abaixo

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Psi}{\delta r^a} &= \left[\pm \frac{i}{2} \frac{\Lambda}{2} \epsilon_{ab} r^{b'} \pm i \sqrt{\frac{\Lambda}{2}} \frac{\epsilon_{da} Q^d Q_c r^{c''}}{Q_c r^{c'}} \right] \Psi \\ \frac{\delta^2 \Psi}{\delta r^a \delta r_a} &= \frac{\Lambda^2}{4} r'_a r^{a'} \Psi - 2 \left(\frac{\Lambda}{2} \right)^{3/2} Q_a r^{a''} \Psi \end{aligned} \quad (3.142)$$

De forma semelhante ao caso anterior os autovalores da hamiltoniana são nulos.

As soluções apresentadas em (3.141) são novas [34].

É interessante obter o funcional de onda do vácuo na representação de Schrödinger. Consideremos os casos $Q_a = 0$ e $Q_a Q^a = 0$. Utilizamos a expansão de Fourier para o campo escalar (3.105)

$$\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{1}{\sqrt{4\pi|k|}} \left(a(k) e^{ikx} + a^\dagger(k) e^{-ikx} \right) \quad (3.143)$$

Para o momento associado ao campo escalar com energia positiva, obtemos

$$\pi = -i \int_{-\infty}^{+\infty} dk |k| \frac{1}{\sqrt{4\pi|k|}} \left(a(k) e^{ikx} - a^\dagger(k) e^{-ikx} \right) \quad (3.144)$$

Invertendo as equações acima, obtemos para $a(k)$ e $a^\dagger(k)$

$$\begin{aligned} a(k) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi|k|}} \int dx e^{-ikx} (|k|\varphi(x) \pm i\pi(x)) \\ a^\dagger(k) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi|k|}} \int dx e^{ikx} (|k|\varphi(x) \mp i\pi(x)), \end{aligned} \quad (3.145)$$

onde o sinal positivo é usado para o campo com energia cinética positiva r^0 e o sinal negativo para o campo com energia cinética negativa r^1 . Conforme vimos anteriormente, a solução de Fock no vácuo deve satisfazer a

$$\begin{aligned} a^+(k) \Psi_v &= 0 \\ (a^-)^\dagger(k) \Psi_v &= 0, \end{aligned} \quad (3.146)$$

onde Ψ_v corresponde ao funcional de Schrödinger para o vácuo e onde a^+ e $(a^-)^\dagger$ são respectivamente, os campos de aniquilação para o campo escalar com energia cinética positiva e criação para o campo escalar com energia cinética negativa.

Operatorialmente, as equações (3.145) podem ser escritas em termos de r^0 e r^1 como

$$\int dx e^{-ikx} \left(|k|r^0(x) + \frac{\delta}{\delta r^0(x)} \right) \Psi_v = 0$$

$$\int dx e^{ikx} \left(|k| r^1(x) + \frac{\delta}{\delta r^1(x)} \right) \Psi_v = 0 \quad (3.147)$$

Por substituição, mostramos que a solução Ψ_v é dada por

$$\Psi_v = N e^{-\frac{1}{2} \int dx dy (r^0(x) w(x-y) r^0(y) + r^1(x) w(x-y) r^1(y))}, \quad (3.148)$$

onde N é uma constante de normalização e onde

$$w(x-y) = \frac{1}{2\pi} \int dk |k| e^{ik(x-y)} \quad (3.149)$$

N é calculada a partir da condição de normalização

$$\int dr^0 dr^1 \Psi_v \Psi_v^* = 1 \quad (3.150)$$

Obtemos

$$N = \left(\frac{\det w}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.151)$$

Logo

$$\Psi_v = \left(\frac{\det w}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \int dx dy (r^0(x) w(x-y) r^0(y) + r^1(x) w(x-y) r^1(y))}, \quad (3.152)$$

Agora verificaremos o caso em que $Q_a Q^a = \mp 1/6\pi$. A solução que satisfaz a (3.126) é dada por

$$\tilde{\Psi}_v = e^{-\frac{1}{2} \int dx dy (r^0(x) w(x-y) r^0(y) - r^1(x) w(x-y) r^1(y))} \quad (3.153)$$

Esta solução é não-normalizável pois o expoente é indeterminado no termo em r^0 e não existe um estado de vácuo neste caso.

É interessante comentar neste ponto, um procedimento alternativo ao realizado neste trabalho e adotado por Kuchař [35]. Ele introduz diretamente correções nos vínculos

para eliminação da anomalia. Não procederemos neste trabalho com uma solução igual a de Jackiw, entretanto é interessante discutir alguns detalhes nos cálculos envolvendo o ordenamento normal em cada termo dos vínculos.

O produto normal de dois campos arbitrários $A(x)$ e $B(y)$ é definido por

$$: A(x)B(y) := A(x)B(y) - \langle 0|A(x)B(y)|0 \rangle \quad (3.154)$$

Utilizando as expansões em operadores de criação e aniquilação anteriores para os campos escalares, podemos escrever

$$\begin{aligned} : \phi'(x) \phi'(y) &:= \phi(x)' \phi(y)' \pm \frac{1}{2} w(x-y) \\ : \pi(x) \pi(y) &:= \pi(x) \pi(y) \pm \frac{1}{2} w(x-y) \\ : \phi'(x) \pi(y) &:= \phi'(x) \pi(y) - \frac{i}{2} \delta'(x-y), \end{aligned} \quad (3.155)$$

onde os sinais $\pm$ são escolhidos de acordo com a tabela abaixo

Sinal-Energia Cinética	Vácuo	Sinal Expressão
+	$a 0\rangle = 0$	+
+	$a^\dagger 0\rangle = 0$	-
-	$a 0\rangle = 0$	-
-	$a^\dagger 0\rangle = 0$	+

Utilizando (3.139) e as equações acima, obtemos para os vínculos

$$\begin{aligned} : \tilde{G}_0 : &= -\frac{1}{2} \left(\frac{2}{\Lambda} \Pi_a \Pi^a + \frac{\Lambda}{2} r'_a r'^a \right) + \sqrt{\frac{\Lambda}{2}} Q_a r'^a + \frac{cr}{2} \lim_{y \rightarrow x} w(x-y) \\ : \tilde{G}_1 : &= \Pi_a r'^a - \sqrt{\frac{2}{\Lambda}} Q_a \Pi^a - i \lim_{y \rightarrow x} \delta'(x-y), \end{aligned} \quad (3.156)$$

onde $c_T = 0, \pm 2$, e o limite é tomado para definir a função no ponto x .

Agora as equações que fornecem os estados físicos na representação de Schrödinger são dadas por

$$\begin{aligned} r^a(x) \frac{\delta \Psi}{\delta r^a(x)} + Q^a \left(\frac{\delta \Psi}{\delta r^a(x)} \right)' + i \alpha \lim_{y \rightarrow x} \delta'(x-y) \Psi = 0 \\ \frac{1}{2} \left(- \frac{\delta^2 \Psi}{\delta r^a(x) \delta r_a(x)} + r'^a(x) r'_a(x) \Psi \right) + Q_a r'^{2a}(x) \Psi + \frac{c_T}{2} \lim_{y \rightarrow x} w(x-y) \Psi = 0, \end{aligned} \quad (3.157)$$

onde α é uma constante que seleciona a prescrição de ordenamento dos operadores. A escolha mais simples é tomar $\alpha = 0$.

Com a obtenção dos funcionais de onda, completamos a quantização da teoria de CGHS. O sucesso na quantização de uma teoria de gravitação em duas dimensões proporciona uma perspectiva para quantizar outros modelos simplificados e a teoria em quatro dimensões.

Conforme citamos durante o texto, outros autores chegaram a resultados similares utilizando outras variações dos procedimentos usuais de quantização. Entre os principais (veja capítulo 1), estão Miković, Jackiw e Cangemi.

Miković [14], trabalha com o modelo de CGHS com acoplamento do campo gravitacional aos campos de matéria. Utiliza o procedimento de quantização canônica. Para escrever os vínculos na forma quadrática, utiliza um método baseado na transformação Bäcklund. Para eliminar a anomalia introduz correções nos vínculos, que estão de acordo com os resultados obtidos neste trabalho através da utilização de um termo de improvement. Nos cálculos da anomalia escreve o tensor momento-energia definido no círculo. Miković estuda também, a quantização do modelo via BRST operatorial. Conclui que a unitariedade é estabelecida trabalhando no gauge do cone de luz. Conclui ainda, que buracos negros não violam o princípio da unitariedade e que não existe perda de informação. Argumenta ainda, que a informação escapa durante o processo de evaporação.

Jackiw e Cangemi [15] realizam também um estudo semelhante utilizando o mesmo modelo analisado por Miković. Trabalham com os procedimentos de quantização canônica e de BRST operatorial. Acrescentam ao estudo discussões sobre a redefinição do vácuo

para eliminação da anomalia, devido a presença de um campo com energia cinética negativa. Utilizam alternativamente correções colocadas a mão nos vínculos para eliminar a anomalia. Obtém a álgebra do tensor momento-energia tanto na reta quanto no círculo. Discutem ainda inversões nos sinais da energia para operadores de aniquilação e criação para eliminação da anomalia.

Conforme, exposto no texto utilizamos nos cálculos uma composição do procedimento de quantização BRST-BFV e do procedimento de quantização canônica. Chegamos a resultados que estão de acordo com os de Miković, Jackiw e Cangemi. Também chegamos a soluções novas no caso em que $Q_a Q^a$ é igual a zero.

Capítulo 4

Conclusão

Analizamos o modelo de CGHS usando o formalismo hamiltoniano e mostramos que esta teoria só possui vínculos de primeira classe. Usamos a técnica de BRST-BFV para quantizar a teoria. Mostramos que a função de partição pode ser integrada nos fantasmas que estão desacoplados dos campos. Utilizamos uma transformação canônica adequada para escrever os vínculos na forma quadrática, que permite obter o espaço de Hilbert. Verificamos que após esta transformação, a teoria inicial que possuía dois campos, o gravitacional e o campo dilatônico, é colocada na forma de uma teoria escalar com dois campos com assinaturas opostas. Utilizamos o procedimento de quantização de Dirac para obter a álgebra de vínculos na forma do tensor momento-energia. Mostramos que existe uma anomalia na álgebra. Mostramos que é possível eliminar a anomalia acrescentando um termo de improvement à ação. Mostramos também um caso mais simples onde é possível anular a anomalia utilizando o procedimento canônico, ou seja sem considerar a contribuição de fantasmas introduzida pela técnica de BRST-BFV e sem considerar o termo de improvement. Encontramos soluções para a função de onda utilizando o procedimento de Dirac. Mostramos ser possível obter soluções fisicamente viáveis nos casos em que as cargas de fundo Q_a são nulas e no caso em que são diferentes de zero com $Q_a Q^a$ igual a zero. Estas últimas soluções não são encontradas na literatura. Acrescentamos uma discussão para o caso em que $Q_a Q^a = \mp 1/6\pi$. Mostramos que neste caso a solução é inconsistente fisicamente pois possui norma negativa. Nestes casos em que a norma é negativa é possível mostrar através do funcional de onda na representação de Schrödinger que a solução é não normalizável. Com isso provamos que o modelo de CGHS em 2d pode

ser quantizado utilizando-se a técnica de BRST-BFV.

Comparamos os resultados dos cálculos com os de outros autores, principalmente os de Miković, Jackiw e Cangemi que trabalharam em linhas semelhantes. Verificamos um perfeito acordo entre nossos resultados e os desses autores.

A quantização de uma teoria gravitacional em 2d mostra um avanço no sentido de entender a quantização da teoria em 4d, que ainda não foi realizada. Isto mostra a importância dos modelos em 2d e justifica estudos futuros incluindo o acoplamento de campos de matéria ao campo gravitacional para o estudo de formação de buracos negros e confirmação das hipóteses de Hawking concernentes a evaporação de buracos negros.

Apêndice A

Parênteses de Poisson

Neste apêndice generalizamos as definições e propriedades dos parênteses de Poisson para incluirmos variáveis de Grassmann no sistema estudado. Neste tratamento representaremos por φ_i e P^i os campos canonicamente conjugados do tipo bosônico e por ψ_α e π^α os do tipo fermiônico.

As definições dos parênteses de Poisson entre campos bosônicos e fermiônicos devem satisfazer as condições da mecânica quântica quando convertemos PB's em comutadores ou anticomutadores [28] [30] ou seja, os PB's entre dois campos bosônicos ou entre um campo bosônico e um fermiônico devem respeitar a propriedade de anticomutatividade e os PB's entre dois campos fermiônicos devem respeitar a propriedade comutativa. Representando de maneira geral uma função bosônica dos campos por E e uma fermiônica por F obtemos

$$\{E_1, E_2\} = -\{E_2, E_1\} = \int dx \left[\left(\frac{\partial E_1}{\partial \varphi_i} \frac{\partial E_2}{\partial P^i} - \frac{\partial E_2}{\partial \varphi_i} \frac{\partial E_1}{\partial P^i} \right) + \left(\frac{\partial E_1}{\partial \psi_\alpha} \frac{\partial E_2}{\partial \pi^\alpha} - \frac{\partial E_2}{\partial \psi_\alpha} \frac{\partial E_1}{\partial \pi^\alpha} \right) \right] \quad (\text{A.1})$$

$$\{F, E\} = -\{E, F\} = \int dx \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_i} \frac{\partial E}{\partial P^i} - \frac{\partial E}{\partial \varphi_i} \frac{\partial F}{\partial P^i} \right) - \left(\frac{\partial F}{\partial \psi_\alpha} \frac{\partial E}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial E}{\partial \psi_\alpha} \frac{\partial F}{\partial \pi^\alpha} \right) \right] \quad (\text{A.2})$$

$$\{F_1, F_2\} = \{F_2, F_1\} = \int dx \left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial \varphi_i} \frac{\partial F_2}{\partial P^i} + \frac{\partial F_2}{\partial \varphi_i} \frac{\partial F_1}{\partial P^i} \right) - \left(\frac{\partial F_1}{\partial \psi_\alpha} \frac{\partial F_2}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial F_2}{\partial \psi_\alpha} \frac{\partial F_1}{\partial \pi^\alpha} \right) \right] \quad (\text{A.3})$$

Representando os campos de paridade arbitrária e seus respectivos momentos por ψ_I e Π^I podemos escrever as expressões acima de forma mais geral como

$$\{A, B\} = \int dx \left[\frac{\partial A}{\partial Q_I} \Big|_E \frac{\partial B}{\partial \Pi^I} \Big|_D - (-1)^{n_A n_B} \frac{\partial B}{\partial Q_I} \Big|_E \frac{\partial A}{\partial \Pi^I} \Big|_D \right], \quad (\text{A.4})$$

onde n_A e n_B fornecem a paridade das funções consideradas e os índices inferiores nas barras E e D indicam derivadas a esquerda e a direita respectivamente.

Os parênteses de Poisson generalizados satisfazem as seguintes propriedades

$$\{A, B\} = -(-1)^{n_A n_B} \{B, A\} \quad (\text{A.5})$$

$$\{A, B + C\} = \{A, B\} + \{A, C\} \quad (\text{A.6})$$

$$\{A, BC\} = \{A, B\} + (-1)^{n_A n_B} B \{A, C\} \quad (\text{A.7})$$

$$(-1)^{n_A n_B} \{A, \{B, C\}\} + (-1)^{n_B n_A} \{B, \{C, A\}\} + (-1)^{n_C n_B} \{C, \{A, B\}\} = 0 \quad (\text{A.8})$$

Apêndice B

Tensor Momento Energia para os Fantasmas

Vamos inicialmente escrever a ação para os fantasmas á partir da equação (3.96) escrita na forma covariante

$$L = -\frac{1}{2} \int dx \sqrt{-g} g^{\mu\nu} c^\rho D_\mu b_{\nu\rho} \quad (\text{B.1})$$

Temos

$$D_\mu b_{\nu\rho} = \partial_\mu b_{\nu\rho} - \Gamma_{\mu(\nu}^\lambda b_{\rho)\lambda} \quad (\text{B.2})$$

A variação da ação com relação a métrica é dada por

$$\begin{aligned} \delta S = & -\frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{2} \delta g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} c^\rho D_\mu b_{\nu\rho} + \delta g^{\mu\nu} c^\rho D_\mu b_{\nu\rho} \right. \\ & \left. - g^{\mu\nu} c^\rho \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(D_\mu \delta g_{(\nu\sigma} + D_{(\nu} \delta g_{\mu\sigma} - D_\sigma \delta g_{\mu(\nu} \right) b_{\rho)\lambda} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

onde usamos [33]

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda m} [D_\nu \delta g_{m\mu} + D_\mu \delta g_{m\nu} - D_m \delta g_{\mu\nu}] \quad (\text{B.4})$$

O último termo de (B.3) pode ser escrito como

$$-\frac{1}{2} \left[\delta g_{\sigma(\nu} g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} D_{\mu} (c^{\rho} b_{\rho)\lambda}) + \delta g_{\mu\sigma} g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} D_{(\nu} (c^{\rho} b_{\rho)\lambda}) - \delta g_{\mu(\nu} g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} D_{\sigma} (c^{\rho} b_{\rho)\lambda}) \right] \quad (\text{B.5})$$

ou desenvolvendo

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} \left[\delta g_{\sigma\nu} g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} D_{\mu} (c^{\rho} b_{\rho\lambda}) + \delta g_{\sigma\rho} g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} D_{\mu} (c^{\rho} b_{\nu\lambda}) + \delta g_{\mu\sigma} g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} D_{\nu} (c^{\rho} b_{\rho\lambda}) \right. \\ & \left. + \delta g_{\mu\sigma} g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} D_{\rho} (c^{\rho} b_{\nu\lambda}) - \delta g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} D_{\sigma} (c^{\rho} b_{\rho\lambda}) - \delta g_{\mu\rho} g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} D_{\sigma} (c^{\rho} b_{\nu\lambda}) \right] \quad (\text{B.6}) \end{aligned}$$

e simplificando

$$-\delta g_{\mu\sigma} g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} D_{\nu} (c^{\rho} b_{\rho\lambda}) - \frac{1}{2} \delta g_{\mu\sigma} g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} D_{\rho} (c^{\rho} b_{\nu\lambda}) + \frac{1}{2} \delta g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} D_{\sigma} (c^{\rho} b_{\rho\lambda}) \quad (\text{B.7})$$

Substituindo o último termo simplificado na expressão (B.3)

$$\begin{aligned} \delta S &= -\frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{-g} \delta g^{\alpha\beta} \left\{ -\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} c^{\rho} D_{\mu} b_{\nu\rho} + c^{\rho} D_{\alpha} b_{\beta\rho} - D_{\beta} (c^{\rho} b_{\rho\alpha}) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} D_{\rho} (c^{\rho} b_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g^{\lambda\sigma} D_{\sigma} (c^{\rho} b_{\rho\lambda}) \right\} \quad (\text{B.8}) \end{aligned}$$

desenvolvendo o terceiro termo e agrupando o primeiro e quinto termos, temos

$$\begin{aligned} \delta S &= -\frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{-g} \delta g^{\alpha\beta} \left\{ -D_{\beta} c^{\rho} b_{\rho\alpha} - \frac{1}{2} D_{\rho} c^{\rho} b_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} c^{\rho} D_{\rho} b_{\alpha\beta} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (g^{\mu\nu} c^{\rho} D_{\mu} b_{\nu\rho} - g^{\lambda\sigma} D_{\sigma} c^{\rho} b_{\rho\lambda} - g^{\lambda\sigma} c^{\rho} D_{\sigma} b_{\rho\lambda}) \right\} \quad (\text{B.9}) \end{aligned}$$

Simplificando

$$\delta S = -\frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{-g} \delta g^{\alpha\beta} \left\{ -D_{\alpha} c^{\rho} b_{\rho\beta} - \frac{1}{2} D_{\rho} c^{\rho} b_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} c^{\rho} D_{\rho} b_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g^{\lambda\sigma} D_{\sigma} c^{\rho} b_{\rho\lambda} \right\} \quad (\text{B.10})$$

e usando a relação

$$\delta(g^{\mu\nu}b_{\mu\nu}) = \delta(b_\mu{}^\mu) = \delta g^{\mu\nu}b_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{B.11})$$

obtemos

$$\delta S = \frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{-g} \delta g^{\alpha\beta} \left\{ D_\alpha c^\rho b_{\rho\beta} + \frac{1}{2} c^\rho D_\rho b_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} D_\mu c^\nu b_{\rho\nu} \right\} \quad (\text{B.12})$$

Portanto obtemos para $T_{\mu\nu}$

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \left[D_\mu c^\rho b_{\rho\nu} + \frac{1}{2} c^\rho D_\rho b_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} D_\rho c^\lambda b_{\lambda\sigma} \right] \quad (\text{B.13})$$

ou

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} D_{(\mu} c^\rho b_{\nu)\rho} + \frac{1}{2} c^\rho D_\rho b_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} D_\rho c^\lambda b_{\lambda\sigma} \right] \quad (\text{B.14})$$

Para escrever as componentes do tensor momento-energia nas coordenadas do cone de luz, vamos usar as equações de movimento obtidas a partir da lagrangeana (3.96). A ação para os fantasmas é escrita como

$$S = -\frac{1}{2} \int d^2x c^\mu \partial^\nu b_{\mu\nu} \quad (\text{B.15})$$

ou em termos de componentes nas coordenadas do cone de luz

$$S = -\frac{1}{2} \int dx (c^+ \partial^+ b_{++} + c^- \partial^- b_{--}) \quad (\text{B.16})$$

ou

$$L = \frac{1}{2} \int dx (c^+ \partial_- b_{++} + c^- \partial_+ b_{--}), \quad (\text{B.17})$$

onde usamos o fato de que $b_{+-} = 0$ é obtido de

$$b_\mu{}^\mu = \eta^{\mu\nu} b_{\mu\nu} = 2\eta^{+-} b_{+-} = 0, \quad (\text{B.18})$$

onde $\eta^{\mu\nu}$ representa a métrica de Minkowski.

De (B.17) obtemos as equações de movimento respectivamente para c^+ e c^-

$$\begin{aligned}\partial_- b_{++} &= 0 \\ \partial_+ b_{--} &= 0\end{aligned}\tag{B.19}$$

e respectivamente para b_{++} e b_{--}

$$\begin{aligned}\partial_- c^+ &= 0 \\ \partial_+ c^- &= 0\end{aligned}\tag{B.20}$$

Escrevemos agora (B.14) nas coordenadas do cone de luz usando as equações de movimento acima obtemos

$$\begin{aligned}T_{\pm\pm} &= \frac{1}{2}\partial_{\pm}c^{\pm}b_{\pm\pm} + \frac{1}{4}c^{\pm}\partial_{\pm}b_{\pm\pm} \\ T_{+-} &= 0\end{aligned}\tag{B.21}$$

Apêndice C

Álgebra do Tensor Momento-Energia para o Campo Escalar

A lagrangeana para o campo escalar com termo cinético positivo, é dado por (E.1)

$$L = -\frac{1}{2} \int dx \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi \quad (\text{C.1})$$

Usando (3.95), obtemos para o tensor momento-energia

$$T_{\pm\pm}^{(S)} = -\frac{1}{2} \partial_\pm \varphi \partial_\pm \varphi \quad (\text{C.2})$$

Classicamente é fácil mostrar que o tensor momento-energia satisfaz a álgebra

$$\{T_{++}^{(S)}(x), T_{++}^{(S)}(y)\} = -\left(T_{++}^{(S)}(x) + T_{++}^{(S)}(y)\right) \quad (\text{C.3})$$

Quânticamente, a álgebra pode apresentar uma anomalia. Fazendo a análise dimensional da expressão acima esperamos para a álgebra quântica

$$[:T_{++}^{(S)}(x):, :T_{++}^{(S)}(y):] = -i \left(:T_{++}^{(S)}(x): + :T_{++}^{(S)}(y): \right) \delta'(x-y) + c \delta'''(x-y), \quad (\text{C.4})$$

onde "c" corresponde a contribuição do termo central. Este termo é conhecido como termo de Schwinger [15].

Vamos calcular o termo central expandido o campo φ em operadores de aniquilação e criação

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2|\mathbf{k}|} \left[a(\mathbf{k}) e^{ikx} + a^\dagger(\mathbf{k}) e^{-ikx} \right], \quad (\text{C.5})$$

onde

$$kx = -|\mathbf{k}|x^0 + \mathbf{k}\mathbf{x} \quad (\text{C.6})$$

e onde usamos a convenção usual nas exponenciais, ou seja, " $a^\dagger$ " associado ao termo com energia positiva e " a " ao termo com energia negativa.

O momento canonicamente conjugado a φ é dado por

$$\pi = \dot{\varphi} \quad (\text{C.7})$$

logo

$$\pi = -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2\pi}} \left[a(\mathbf{k}) e^{ikx} - a^\dagger(\mathbf{k}) e^{-ikx} \right] \quad (\text{C.8})$$

Utilizando o procedimento de Dirac devemos ter

$$[\varphi(x), \pi(y)] = i \delta(x - y) \quad (\text{C.9})$$

utilizando as expansões acima em (C.9), obtemos

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = 2|\mathbf{k}| \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (\text{C.10})$$

Normalizando $a(\mathbf{k})$ para facilitar os cálculos

$$a \longrightarrow \sqrt{2|\mathbf{k}|} a \quad (\text{C.11})$$

obtemos

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (\text{C.12})$$

E reescrevemos $\varphi(x)$ e $\pi(x)$ como

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}} [a(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}x} + a^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}x}] \quad (\text{C.13})$$

$$\pi(x) = -\frac{i}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{|\mathbf{k}|} [a(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}x} - a^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}x}] \quad (\text{C.14})$$

A derivada $\partial_+ \varphi(x)$ é dada por

$$\partial_+ \varphi(x) = -i \int_{-\infty}^0 \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{|\mathbf{k}|} [a(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}x} - a^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}x}], \quad (\text{C.15})$$

onde utilizamos o intervalo de $(-\infty, 0)$ para facilitar os cálculos.

Vamos usar a substituição $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ em ∂_+ para trabalharmos apenas com frequências positivas. Para facilitar a notação definimos ainda

$$\begin{aligned} A(\mathbf{k}) &= a^\dagger(-\mathbf{k}) \\ A^\dagger(\mathbf{k}) &= a(-\mathbf{k}) \\ [A^\dagger(\mathbf{k}), A(\mathbf{k}')] &= [a(-\mathbf{k}), a^\dagger(-\mathbf{k}')] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ A^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle &= a(-\mathbf{k})|0\rangle = 0 \\ \mathbf{k} &> 0 \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Com estas considerações, e usando $t = 0$ para facilitar os cálculos obtemos

$$\partial_+ \varphi(x) = -i \int_0^{+\infty} \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{|\mathbf{k}|} [A^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}x} - A(\mathbf{k}) e^{+i\mathbf{k}x}], \quad (\text{C.17})$$

onde usamos $\mathbf{x}$, em vez de x para facilitar a notação.

Usando esta equação em (C.2) obtém-se para $T_{++}^{(S)}(x)$

$$: T_{++}^{(S)}(x) : = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dk dk'}{4\pi} \sqrt{kk'} \left[A^\dagger(k) A^\dagger(k') e^{-i(k+k')x} - 2A(k) A^\dagger(k') e^{-i(k-k')x} + A(k) A(k') e^{i(k+k')x} \right] \quad (C.18)$$

Como "c" em (C.4)) é um numero, o cálculo do termo central é feito através do elemento de matriz

$$\langle 0 | [: T_{++}^{(S)}(x) : , : T_{++}^{(S)}(y) :] | 0 \rangle \quad (C.19)$$

Substituindo (C.18) em (C.19) obtemos

$$\begin{aligned} \langle 0 | [: T_{++}^{(S)}(x) : , : T_{++}^{(S)}(y) :] | 0 \rangle &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dk dk'}{4\pi} \frac{dp dp'}{4\pi} \sqrt{kk'} \sqrt{pp'} \\ \langle 0 | A^\dagger(k) A^\dagger(k') A(p) A(p') | 0 \rangle &= \left[e^{-i(k+k')x} e^{i(p+p')y} - e^{-i(k+k')y} e^{i(p+p')x} \right] \end{aligned} \quad (C.20)$$

usando (C.16)

$$\begin{aligned} \langle 0 | [: T_{++}^{(S)}(x) : , : T_{++}^{(S)}(y) :] | 0 \rangle &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dk dk'}{4\pi} \frac{dp dp'}{4\pi} \sqrt{kk'} \sqrt{pp'} \\ &\cdot (\delta(k-p') \delta(k'-p) + \delta(k-p) \delta(k'-p')) \left[e^{-i(k+k')x} e^{i(p+p')y} - e^{-i(k+k')y} e^{i(p+p')x} \right] \end{aligned} \quad (C.21)$$

Integrando sobre p e p'

$$\langle 0 | [: T_{++}^{(S)}(x) : , : T_{++}^{(S)}(y) :] | 0 \rangle = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dk dk'}{(4\pi)^2} kk' (e^{-i(k+k')(x-y)} - e^{i(k+k')(x-y)}) \quad (C.22)$$

Usando a transformação de variáveis

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} dk dk' f(k, k') &= \int_0^{+\infty} dq \int_0^q dq' f(q - q', q') \\
k &= q - q' \\
k' &= q'
\end{aligned} \tag{C.23}$$

Obtemos

$$\langle 0 | [: T_{++}^{(S)}(x) : , : T_{++}^{(S)}(y) :] | 0 \rangle = - \int_0^{+\infty} \frac{dq}{8\pi^2} \int_0^q dq' (q - q') q' (e^{iq(x-y)} - e^{-iq(x-y)}) \tag{C.24}$$

ou

$$\langle 0 | [: T_{++}^{(S)}(x) : , : T_{++}^{(S)}(y) :] | 0 \rangle = - \frac{1}{48\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dq q^3 e^{iq(x-y)} = - \frac{i}{24\pi} \delta'''(x - y) \tag{C.25}$$

logo

$$c = - \frac{i}{24\pi} \tag{C.26}$$

Vamos agora verificar o primeiro termo do lado direito de (C.4). O elemento de matriz a ser usado neste cálculo deve ser tal que permita reobter o tensor no primeiro termo do lado direito da expressão para fechar a álgebra. Os cálculos a seguir mostram que o elemento de matriz adequado é o seguinte

$$\langle 0 | [: T_{++}^{(S)}(x) : , : T_{++}^{(S)}(y) :] | q_1 q_2 \rangle, \tag{C.27}$$

onde

$$|q_1 q_2 \rangle = A(q_1) A(q_2) |0 \rangle \tag{C.28}$$

Usando (C.18) em (C.27)

$$\begin{aligned}
\langle 0 | [: T_{++}^{(S)}(x) : , : T_{++}^{(S)}(y) :] | q_1 q_2 \rangle &= -2 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dk dk'}{4\pi} \frac{dp dp'}{4\pi} \sqrt{kk'} \sqrt{pp'} \\
\langle 0 | A^\dagger(\mathbf{k}) A^\dagger(\mathbf{k}') A(\mathbf{p}') A(\mathbf{p}) | q_1 q_2 \rangle &= [e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')x} e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')y} - e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')y} e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')x}]
\end{aligned}
\tag{C.29}$$

ou

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \dots | q_1 q_2 \rangle &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} dk dk' dp dp' \sqrt{kk'} \sqrt{pp'} \\
&\cdot [\delta(\mathbf{k}' - \mathbf{p}) \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{q}_1) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}_2) + \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{p}) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1) \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{q}_2) \\
&+ \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{q}_1) \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{q}_2) + \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{q}_1) \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{q}_2)] \\
&\cdot [e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')x} e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')y} - e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')y} e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')x}],
\end{aligned}
\tag{C.30}$$

onde $\langle 0 | \dots | q_1 q_2 \rangle$ corresponde a $\langle 0 | [: T_{++}^{(S)}(x) : , : T_{++}^{(S)}(y) :] | q_1 q_2 \rangle$.

Integrando sobre $\mathbf{k}'$, $\mathbf{p}$ e $\mathbf{p}'$

$$\langle 0 | \dots | q_1 q_2 \rangle = \frac{\sqrt{q_1 q_2}}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} dk k (e^{-i(q_1 x + q_2 y)} + e^{-i(q_2 x + q_1 y)}) (e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)}) \tag{C.31}$$

ou

$$\langle 0 | \dots | q_1 q_2 \rangle = -\frac{\sqrt{q_1 q_2}}{4\pi^2} (e^{-i(q_1 x + q_2 y)} + e^{-i(q_2 x + q_1 y)}) \int_{-\infty}^{+\infty} dk k e^{ik(x-y)} \tag{C.32}$$

$$\langle 0 | \dots | q_1 q_2 \rangle = -i \frac{\sqrt{q_1 q_2}}{2\pi} (e^{-i(q_1 x + q_2 y)} + e^{-i(q_2 x + q_1 y)}) \delta'(x-y), \tag{C.33}$$

onde $\delta'(x-y)$ corresponde a $\partial_x \delta(x-y)$. Podemos escrever (C.33) usando as identidades abaixo:

$$e^{-iq_1 x - iq_2 y} \delta'(x - y) = e^{-i(q_1 + q_2)x} \delta'(x - y) - iq_2 e^{-i(q_1 + q_2)x} \delta(x - y) \quad (C.34)$$

$$e^{-iq_2 x - iq_1 y} \delta'(x - y) = e^{-i(q_1 + q_2)y} \delta'(x - y) + iq_2 e^{-i(q_1 + q_2)y} \delta(x - y) \quad (C.35)$$

Substituindo (C.34) e (C.35) e (C.33)

$$\langle 0 | \dots | q_1 q_2 \rangle = -i \frac{\sqrt{q_1 q_2}}{2\pi} \left(e^{-i(q_1 + q_2)x} + e^{-i(q_1 + q_2)y} \right) \delta'(x - y) \quad (C.36)$$

Calculamos agora $\langle 0 | : T_{++}^{(S)}(x) : | q_1 q_2 \rangle$ para comparar com (C.36). Usando (C.18)

$$\langle 0 | : T_{++}^{(S)}(x) : | q_1 q_2 \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{dk dk'}{4\pi} \sqrt{kk'} \langle 0 | A^\dagger(k) A^\dagger(k') | q_1 q_2 \rangle e^{-i(k+k')x} \quad (C.37)$$

$$\begin{aligned} \langle 0 | : T_{++}^{(S)}(x) : | q_1 q_2 \rangle &= \int_0^{+\infty} \frac{dk dk'}{4\pi} \sqrt{kk'} [\delta(k' - q_1) \delta(k - q_2) \\ &+ \delta(k - q_1) \delta(k' - q_2)] e^{-i(k+k')x} \end{aligned} \quad (C.38)$$

Integrando sobre k' e k

$$\langle 0 | : T_{++}^{(S)}(x) : | q_1 q_2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \sqrt{q_1 q_2} e^{-i(q_1 + q_2)x} \quad (C.39)$$

De (C.36) e (C.39) obtemos o primeiro termo de (C.4).

Fica assim demonstrada a álgebra do tensor $T_{++}^{(S)}$.

É interessante também discutir neste ponto, o sinal da norma no espaço de Hilbert. Levando em consideração a relação de comutação dada em (C.16) obtemos

$$\langle 0 | A(k) A^\dagger(k') | 0 \rangle = -\delta(k - k') \langle 0 | 0 \rangle \quad (C.40)$$

Logo neste caso temos uma norma negativa, o que não é consistente com a definição do espaço de Hilbert onde requeremos norma positiva.

Vamos analisar agora o efeito da mudança na definição do vácuo sobre o termo central. Redefinimos o vácuo para

$$A|0\rangle = 0 \quad (C.41)$$

Mudando o ordenamento de $:T_{++}^{(S)}(x):$ a expressão (C.18) toma agora a forma

$$\begin{aligned} :T_{++}^{(S)}(x): &= \int_0^{+\infty} \frac{dkdk'}{4\pi} \sqrt{kk'} \left[A^\dagger(k) A^\dagger(k') e^{-i(k+k')x} \right. \\ &\quad \left. - 2A^\dagger(k) A(k') e^{-i(k-k')x} + A(k) A(k') e^{i(k+k')x} \right] \end{aligned} \quad (C.42)$$

e o termo central é agora escrito seguindo procedimento similar ao caso da definição usual do vácuo como

$$\langle 0| \left[:T_{++}^{(S)}(x):, :T_{++}^{(S)}(y): \right] |0\rangle = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dkdk'}{(4\pi)^2} k k' \left(e^{i(k+k')(x-y)} - e^{-i(k+k')(x-y)} \right) \quad (C.43)$$

Comparando (C.22) com (C.43) verificamos que existe uma inversão de sinal do termo central devido a mudança de sinal nas exponenciais. Logo

$$c = \frac{i}{24\pi} \quad (C.44)$$

Portanto concluímos que a nova definição para o vácuo introduz uma inversão de sinal do termo central.

Neste caso, temos

$$\langle 0| A^\dagger(k) A(k') |0\rangle = \delta(k - k') \langle 0|0\rangle \quad (C.45)$$

Logo a norma é positiva.

Uma vez que temos também um termo na ação com energia cinética negativa vamos analisar o caso (veja (3.73))

$$L = \frac{1}{2} \int dx \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi \quad (C.46)$$

Agora o momento canonicamente conjugado a φ é dado por

$$\pi = -\dot{\varphi} \quad (C.47)$$

Para manter

$$\{\varphi(x), \pi(y)\} = i\delta(x-y) \quad (C.48)$$

devemos ter agora

$$\begin{aligned} [A^\dagger(k), A(k')] &= [a(-k), a^\dagger(-k')] = -\delta(k-k') \\ A^\dagger(k)|0\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (C.49)$$

Temos, portanto, : $T_{++}^{(S)}(x)$: com sinal invertido para energia cinética negativa, mas o termo central mantém o mesmo sinal obtido em (C.25). De fato, o cálculo envolve o produto de duas relações de comutação.

Assim

$$c = \frac{i}{24\pi} \quad (C.50)$$

Neste caso obtemos o sinal para a norma da mesma forma que no caso anterior

$$\langle 0|A(k)A^\dagger(k')|0\rangle = \delta(k-k')\langle 0|0\rangle \quad (C.51)$$

Assim, possuímos norma positiva.

Se redefinirmos o vácuo para

$$A(k)|0\rangle = 0$$

obtemos uma inversão de sinal do termo central como no caso (C.44)

$$c = \frac{i}{24\pi} \quad (\text{C.52})$$

Neste caso temos

$$\langle 0 | A^\dagger(k) A(k') | 0 \rangle = -\delta(k - k') \langle 0 | 0 \rangle \quad (\text{C.53})$$

assim possuímos norma negativa.

Para analisarmos os autovalores do operador hamiltoniano, no caso do campo escalar com energia cinética positiva, usamos as expansões para φ (C.13) e π (C.14) na expressão (3.103). Obtemos

$$\begin{aligned} H &= 2 \int_0^{+\infty} dk \, k \, A^\dagger(k) A(k) \\ [A^\dagger(k), A(k')] &= \delta(k - k') \\ A(k) | 0 \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.54})$$

Os autovalores E neste caso são positivos, uma vez que a hamiltoniana é positiva definida, ou seja

$$E \geq 0 \quad (\text{C.55})$$

Mudando a definição para o vácuo

$$\begin{aligned} H &= 2 \int_0^{+\infty} dk \, k \, A(k) A^\dagger(k) \\ [A^\dagger(k), A(k')] &= \delta(k - k') \\ A^\dagger(k) | 0 \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.56})$$

obtemos autovalores negativos, uma vez que a hamiltoniana é negativa definida

$$E \geq 0 \quad (C.57)$$

Mudando para a lagrangeana escalar com energia cinética negativa e usando a definição usual para o vácuo

$$\begin{aligned} H &= -2 \int_0^{+\infty} dk \, k \, A^\dagger(k) A(k) \\ [A^\dagger(k), A(k')] &= -\delta(k - k') \\ A(k) |0\rangle &= 0 \\ E &\leq 0 \end{aligned} \quad (C.58)$$

e mudando a definição para o vácuo

$$\begin{aligned} H &= -2 \int_0^{+\infty} dk \, k \, A(k) A^\dagger(k) \\ [A^\dagger(k), A(k')] &= -\delta(k - k') \\ A^\dagger(k) |0\rangle &= 0 \\ E &\geq 0 \end{aligned} \quad (C.59)$$

Apêndice D

Álgebra do Tensor Momento-Energia para os Fantasma

Neste apêndice, procedemos com os cálculos da álgebra do tensor momento-energia para a contribuição dos fantasmas. Analisamos inicialmente o caso em que o termo cinético possui sinal positivo. O procedimento é semelhante ao utilizado no apêndice C. O tensor momento-energia para os fantasmas neste caso, é dado por (3.99), ou seja

$$\begin{aligned} T_{\pm\pm}^{(F)} &= \frac{1}{2} \partial_{\pm} c^{\pm} b_{\pm\pm} + \frac{1}{4} c^{\pm} \partial_{\pm} b_{\pm\pm} \\ T_{+-}^{(F)} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

Desejamos provar a seguinte relação

$$[: T_{++}(x) :, : T_{++}(y) :] = -i (: T_{++}(x) : + : T_{++}(y) :) \delta'(x-y) + c \delta'''(x-y) \quad (\text{D.2})$$

Expandindo os campos em operadores de aniquilação e criação

$$\begin{aligned} b_{++}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} dk \left[b(\mathbf{k}) e^{ikx} + b^{\dagger}(\mathbf{k}) e^{-ikx} \right] \\ c^{\pm}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} dk \left[c(\mathbf{k}) e^{ikx} + c^{\dagger}(\mathbf{k}) e^{-ikx} \right], \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

onde

$$\begin{aligned} kx &= k^0 x^0 + \mathbf{k} \mathbf{x} \\ k^0 &= k \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Os momentos canonicamente conjugados aos campos podem ser obtidos a partir da lagrangeana (3.96), ou seja

$$L = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int dx \left[c^+ \dot{b}_{++} - c^+ b'_{++} + c^- \dot{b}_{--} + c^- b'_{--} \right] \quad (\text{D.5})$$

obtemos

$$\begin{aligned} \pi_{b_{++}} &= -\frac{\partial L}{\partial \dot{b}_{++}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} c^+ \\ \pi_{b_{--}} &= -\frac{\partial L}{\partial \dot{b}_{--}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} c^- \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Vamos efetuar apenas os cálculos envolvendo a componente $T_{++}^{(F)}$ do tensor, a análise da componente $T_{--}^{(F)}$ se faz de maneira análoga. Usando (D.3) e (D.6) na equação acima obtemos

$$\pi_{b_{++}}(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} dk \left[c(\mathbf{k}) e^{ikx} + c^\dagger(\mathbf{k}) e^{-ikx} \right] \quad (\text{D.7})$$

Devemos ter

$$\{b_{++}(x), \pi_{b_{++}}(y)\} = i\delta(x-y) \quad (\text{D.8})$$

obtemos

$$\{b(\mathbf{k}), c^\dagger(\mathbf{k}')\} = \frac{i}{\sqrt{2}} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (\text{D.9})$$

normalizando $c(\mathbf{k})$

$$c(\mathbf{k}) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} c(\mathbf{k}) \quad (\text{D.10})$$

obtemos para os PB's entre os coeficientes das expansões

$$\begin{aligned}\{b(\mathbf{k}), c^\dagger(\mathbf{k}')\} &= i\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ \{b^\dagger(\mathbf{k}), c(\mathbf{k}')\} &= i\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ b(\mathbf{k})|0\rangle &= c(\mathbf{k})|0\rangle = 0\end{aligned}\quad (\text{D.11})$$

Reescrevemos b_{++} , c^+ e $\pi_{b_{++}}$

$$\begin{aligned}b_{++}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} dk [b(\mathbf{k}) e^{ikx} + b^\dagger(\mathbf{k}) e^{-ikx}] \\ c^+(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} dk [c(\mathbf{k}) e^{ikx} + c^\dagger(\mathbf{k}) e^{-ikx}] \\ \pi_{b_{++}}(x) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} dk [c(\mathbf{k}) e^{ikx} + c^\dagger(\mathbf{k}) e^{-ikx}]\end{aligned}\quad (\text{D.12})$$

As funções $\partial_+ b_{++}$ e $\partial_+ c^+$ que aparecem no tensor são dadas por (para $t = 0$)

$$\begin{aligned}\partial_+ c^+(x) &= i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} dk k [c(\mathbf{k}) e^{ikx} - c^\dagger(\mathbf{k}) e^{-ikx}] \\ \partial_+ b_{++} &= \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} dk k [b(\mathbf{k}) e^{ikx} - b^\dagger(\mathbf{k}) e^{-ikx}]\end{aligned}\quad (\text{D.13})$$

Usando estas equações em (D.1) obtemos para $T_{++}^{(F)}(x)$

$$\begin{aligned}:T_{++}^{(F)}(x): &= \frac{i}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} dk dp [(2k+p) c(\mathbf{k}) b(\mathbf{p}) e^{i(k+p)x} - (2k-p) b^\dagger(\mathbf{p}) c(\mathbf{k}) e^{i(k-p)x} \\ &\quad - (2k-p) c^\dagger(\mathbf{k}) b(\mathbf{p}) e^{-i(k-p)x} - (2k+p) c^\dagger(\mathbf{k}) b^\dagger(\mathbf{p}) e^{-i(k+p)x}]\end{aligned}\quad (\text{D.14})$$

Para calcular o valor do termo central (constante d em (D.2)) é necessário calcular o elemento de matriz

$$\langle 0 | [:T_{++}^{(F)}(x) : , :T_{++}^{(F)}(y) :] | 0 \rangle \quad (\text{D.15})$$

Substituindo (D.14) em (D.15) obtemos

$$\begin{aligned}
\langle 0 | [: T_{++}^{(F)}(x) : , : T_{++}^{(F)}(y) :] | 0 \rangle &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} dk dk' dp dp' \\
\langle 0 | c(k) b(k') c^\dagger(p) b^\dagger(p') | 0 \rangle &= (2k + k') (2p + p') \left[e^{i(k+k')x - i(p+p')y} - e^{i(k+k')y - i(p+p')x} \right]
\end{aligned}
\tag{D.16}$$

usando (D.11)

$$\begin{aligned}
\langle 0 | [: T_{++}^{(F)}(x) : , : T_{++}^{(F)}(y) :] | 0 \rangle &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} dk dk' dp dp' \\
&\cdot \delta(k' - p) \delta(k - p') (2k + k') (2p + p') \left[e^{i(k+k')x - i(p+p')y} - e^{i(k+k')y - i(p+p')x} \right]
\end{aligned}
\tag{D.17}$$

Integrando sobre k' e p'

$$\begin{aligned}
\langle 0 | [: T_{++}^{(F)}(x) : , : T_{++}^{(F)}(y) :] | 0 \rangle &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} dk dp (2k + k') (2p + p') \\
&\cdot \left[e^{i(k+p)(x-y)} - e^{-i(k+p)(x-y)} \right]
\end{aligned}
\tag{D.18}$$

Usando a transformação

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} dk dk' f(k, k') &= \int_0^{+\infty} dq \int_0^q dq' f(q - q', q') \\
k &= q - q' \\
k' &= q'
\end{aligned}
\tag{D.19}$$

Escrevemos para (D.17)

$$\begin{aligned}
\langle 0 | [: T_{++}^{(F)}(x) : , : T_{++}^{(F)}(y) :] | 0 \rangle &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} dq \int_0^q dq' (2q^2 + qq' - q'^2) \\
&\cdot \left[e^{iq(x-y)} - e^{-iq(x-y)} \right]
\end{aligned}
\tag{D.20}$$

ou

$$\langle 0 | [: T_{++}^{(F)}(x) : , : T_{++}^{(F)}(y) :] | 0 \rangle = -\frac{13}{24\pi^2} \int_0^{+\infty} dq q^3 (e^{iq(x-y)} - e^{-iq(x-y)}) \quad (D.21)$$

ou ainda

$$\langle 0 | [: T_{++}^{(F)}(x) : , : T_{++}^{(F)}(y) :] | 0 \rangle = -\frac{13i}{12\pi} \delta'''(x-y) \quad (D.22)$$

Portanto concluímos que

$$c = -\frac{13i}{12\pi} \quad (D.23)$$

Vamos agora verificar o primeiro termo do lado direito de (D.2). Utilizamos para este fim o elemento de matriz.

$$\langle 0 | [: T_{++}^{(F)}(x) : , : T_{++}^{(F)}(y) :] | q_1 q_2 \rangle, \quad (D.24)$$

onde

$$| q_1 q_2 \rangle = c^\dagger(q_1) b^\dagger(q_2) | 0 \rangle \quad (D.25)$$

Usando (D.14) em (D.24)

$$\begin{aligned} \langle 0 | [: T_{++}^{(F)}(x) : , : T_{++}^{(F)}(y) :] | q_1 q_2 \rangle &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} dk dk' dp dp' \\ &\cdot (2k + k') (2p - p') e^{i(k+k')x} \left[\langle 0 | c(k) b(k') b^\dagger(p') c(p) c^\dagger(q_1) b^\dagger(q_2) | 0 \rangle e^{i(p-p')y} \right. \\ &+ \left. \langle 0 | c(k) b(k') c^\dagger(p) b(p') c^\dagger(q_1) b^\dagger(q_2) | 0 \rangle e^{-i(p-p')y} \right] - (x \leftrightarrow y), \end{aligned} \quad (D.26)$$

onde o termo $(x \leftrightarrow y)$ corresponde a segunda parte do comutador que corresponde a trocar x por y . Usando (D.11) em (D.26)

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \dots | q_1 q_2 \rangle &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} dk dk' dp dp' (2k + k') (2p - p') e^{i(k+k')x} \\
&\cdot \left[\delta(k - p') \delta(p - q_2) \delta(k' - q_1) e^{i(p-p')y} + \delta(k - q_2) \delta(k' - p) \delta(p' - q_1) e^{-i(p-p')y} \right] \\
&- (x \leftrightarrow y),
\end{aligned}
\tag{D.27}$$

onde $\langle 0 | \dots | q_1 q_2 \rangle$ corresponde a (D.24).

Mudando k por k' no segundo termo entre colchetes e integrando sobre p' , p e k'

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \dots | q_1 q_2 \rangle &= -\frac{i}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} dk \left[(2k + q_1) (2q_2 - k) e^{ik(x-y) + iq_1 x + iq_2 y} \right. \\
&\quad \left. + (2k - q_1) (2q_2 + k) e^{ik(x-y) + iq_2 x + iq_1 y} \right] - (x \leftrightarrow y)
\end{aligned}
\tag{D.28}$$

ou desenvolvendo $(x \leftrightarrow y)$

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \dots | q_1 q_2 \rangle &= -\frac{i}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} dk \left[(2k + q_1) (2q_2 - k) \left(e^{ik(x-y) + iq_1 x + iq_2 y} - e^{-ik(x-y) + iq_1 y + iq_2 x} \right) \right. \\
&\quad \left. + (2k - q_1) (2q_2 + k) \left(e^{ik(x-y) + iq_2 x + iq_1 y} - e^{-ik(x-y) + iq_2 y + iq_1 x} \right) \right]
\end{aligned}
\tag{D.29}$$

Fazendo a transformação $k \rightarrow -k'$ nos segundos termos das expressões entre parênteses

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \dots | q_1 q_2 \rangle &= -\frac{i}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} dk \left\{ \left[-2k^2 + (4q_2 - q_1)k + 2q_1 q_2 \right] e^{ik(x-y) + iq_1 x + iq_2 y} \right. \\
&\quad \left. + \left[2k^2 + (4q_2 - q_1)k - 2q_1 q_2 \right] e^{ik(x-y) + iq_2 x + iq_1 y} \right\}
\end{aligned}
\tag{D.30}$$

Utilizando a definição da função delta

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \dots | q_1 q_2 \rangle &= -\frac{i}{2\pi} \left\{ [2\delta''(x-y) - i(4q_2 - q_1)\delta'(x-y) + 2q_1 q_2 \delta(x-y)] e^{iq_1 x + iq_2 y} \right. \\
&\quad \left. + [-2\delta''(x-y) - i(4q_2 - q_1)\delta'(x-y) - 2q_1 q_2 \delta(x-y)] e^{iq_1 y + iq_2 x} \right\}
\end{aligned}
\tag{D.31}$$

Vamos simplificar esta expressão usando as seguintes relações

$$\begin{aligned}\delta''(x-y) e^{iq_1 x + q_2 y} &= (\delta(x-y) e^{q_2 x})'' e^{iq_1 x} \\ &= \delta''(x-y) e^{i(q_1+q_2)x} + 2iq_2 \delta'(x-y) e^{i(q_1+q_2)x} - q_2^2 \delta(x-y) e^{i(q_1+q_2)x}\end{aligned}\quad (D.32)$$

$$\begin{aligned}\delta''(x-y) e^{iq_1 y + q_2 x} &= (\delta(x-y) e^{q_1 x})'' e^{iq_2 x} \\ &= \delta''(x-y) e^{i(q_1+q_2)x} + 2iq_1 \delta'(x-y) e^{i(q_1+q_2)x} - q_1^2 \delta(x-y) e^{i(q_1+q_2)x}\end{aligned}\quad (D.33)$$

$$\begin{aligned}\delta'(x-y) e^{iq_1 x + q_2 y} &= (\delta(x-y) e^{q_2 x})' e^{iq_1 x} \\ &= \delta'(x-y) e^{i(q_1+q_2)x} + iq_2 \delta(x-y) e^{i(q_1+q_2)x}\end{aligned}\quad (D.34)$$

$$\begin{aligned}\delta'(x-y) e^{iq_1 y + q_2 x} &= -\partial_y (\delta(x-y) e^{iq_2 y}) e^{iq_1 x} \\ &= \delta'(x-y) e^{i(q_1+q_2)y} - iq_2 \delta(x-y) e^{i(q_1+q_2)y}\end{aligned}\quad (D.35)$$

Substituindo estas relações em (D.31) obtemos

$$\begin{aligned}\langle 0 | \dots | q_1 q_2 \rangle &= -\frac{i}{2\pi} \left\{ 4i(4q_2 - q_1) \delta'(x-y) e^{i(q_1+q_2)x} + 2(q_1^2 - q_2^2) \delta(x-y) e^{i(q_1+q_2)x} \right. \\ &\quad \left. - i(4q_2 - q_1) \delta'(x-y) (e^{i(q_1+q_2)x} + e^{i(q_1+q_2)y}) \right\}\end{aligned}\quad (D.36)$$

Usando a identidade abaixo no primeiro termo

$$\begin{aligned}\delta'(x-y) e^{i(q_1+q_2)x} &= (\delta(x-y) e^{i(q_1+q_2)x})' - i(q_1 + q_2) \delta(x-y) e^{i(q_1+q_2)x} \\ &= \delta'(x-y) e^{i(q_1+q_2)y} - i(q_1 + q_2) \delta(x-y) e^{i(q_1+q_2)x}\end{aligned}\quad (D.37)$$

obtemos

$$\langle 0 | \dots | q_1 q_2 \rangle = -\frac{1}{2\pi} (2q_2 + q_1) (e^{i(q_1+q_2)x} + e^{i(q_1+q_2)y}) \delta'(x-y) \quad (D.38)$$

Agora calculamos o elemento de matriz $\langle 0 | : T_{++}^{(F)}(x) : | q_1 q_2 \rangle$ para comparar com (D.38) e obtermos a constante a . Usando (D.14) obtemos

$$\langle 0 | : T_{++}^{(F)}(x) : | q_1 q_2 \rangle = \frac{i}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} dk dp (2k + p) \langle 0 | c(k) b(p) c^\dagger(q_1) b^\dagger(q_2) | 0 \rangle e^{i(k+p)x} \quad (D.39)$$

usando as relações de comutação (D.11) podemos escrever

$$\langle 0 | : T_{++}^{(F)}(x) : | q_1 q_2 \rangle = -\frac{i}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} dk dp (2k + p) \delta(p - q_1) \delta(k - q_2) e^{i(k+p)x} \quad (D.40)$$

ou

$$\langle 0 | : T_{++}^{(F)}(x) : | q_1 q_2 \rangle = -\frac{i}{2\pi} (2q_2 + q_1) e^{i(q_1+q_2)x} \quad (D.41)$$

De (D.41) e (D.38) concluímos que a álgebra (D.2) foi satisfeita para o tensor $T_{++}^{(F)}(x)$.

Vamos analisar a seguir o efeito da redefinição do vácuo sobre o termo central. Os cálculos anteriores foram realizados usando-se a definição usual (D.11). Redefinimos o vácuo para

$$b^\dagger(k) | 0 \rangle = c^\dagger(k) | 0 \rangle = 0 \quad (D.42)$$

com esta definição $T_{++}^{(F)}(x)$ é escrito como (veja equação D.14)

$$\begin{aligned} : T_{++}^{(F)}(x) : &= \frac{i}{2\pi} \int_0^{+\infty} dk dp \left[(2k + p) c(k) b(p) e^{i(k+p)x} + (2k - p) c(k) b^\dagger(p) e^{i(k-p)x} \right. \\ &\quad \left. + (2k - p) b(p) c^\dagger(k) e^{-i(k-p)x} - (2k + p) c^\dagger(k) b^\dagger(p) e^{-i(k+p)x} \right] \end{aligned} \quad (D.43)$$

O termo central é agora escrito seguindo procedimento similar ao da definição usual do vácuo como

$$\begin{aligned} \langle 0 | [: T_{++}^{(F)}(x) : , : T_{++}^{(F)}(y) :] | 0 \rangle &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} dk dp (2k + p) (2p + k) \\ &\quad \cdot \left[e^{-i(k+p)(x-y)} - e^{i(k+p)(x-y)} \right] \end{aligned} \quad (D.44)$$

Comparando (D.44) com (D.18) verificamos que existe uma inversão de sinal do termo central. Logo

$$c = \frac{13i}{12\pi} \quad (D.45)$$

Vamos analisar agora o efeito da mudança no sinal da energia cinética para o modelo. Invertamos o sinal da ação (3.96)

$$L = \frac{1}{2} \int dx \, c^\mu \partial^\nu b_{\mu\nu}, \quad (D.46)$$

Agora o momento canonicamente conjugado a b_{++} é dado por

$$\pi_{b_{++}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}c^+ \quad (D.47)$$

Portanto para manter

$$\{b_{++}(x), \pi_{b_{++}}(y)\} = i\delta(x-y) \quad (D.48)$$

devemos ter

$$\begin{aligned} \{b(\mathbf{k}), c^\dagger(\mathbf{k}')\} &= -i\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \\ \{b^\dagger(\mathbf{k}), c(\mathbf{k}')\} &= -i\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \\ b(\mathbf{k})|0\rangle &= c(\mathbf{k})|0\rangle = 0 \end{aligned} \quad (D.49)$$

O tensor momento-energia (D.1) também muda de sinal mas o termo central mantém o mesmo sinal como pode ser visto de (D.17)

$$c = -\frac{13i}{12\pi} \quad (D.50)$$

Se redefinirmos o vácuo para

$$b^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle = c^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle = 0 \quad (D.51)$$

verificamos de forma similar á usada no caso anterior que o sinal do termo central é invertido (equação (D.45))

$$c = \frac{13i}{12\pi} \quad (D.52)$$

Para analisarmos os autovalores do operador hamiltoniano usamos as expansões para b_{++} e c^+ (D.12) na expressão para H (equação 3.104). Obtemos

$$\begin{aligned} H &= i \int_0^{+\infty} dk k \left\{ c^\dagger(k) b(k) + b^\dagger(k) c(k) \right\} \\ \{b(k), c^\dagger(k')\} &= i\delta(k - k') \\ \{b^\dagger(k), c(k')\} &= i\delta(k - k') \\ b(k) |0\rangle &= c(k) |0\rangle = 0 \end{aligned} \quad (D.53)$$

aplicando H sobre um autoestado $|p\rangle = b^\dagger(p) |0\rangle$, obtemos autovalores E negativos

$$E \leq 0 \quad (D.54)$$

Redefinindo o vácuo

$$\begin{aligned} H &= -i \int_0^{+\infty} dk k \left[b(k) c^\dagger(k) + c(k) b^\dagger(k) \right] \\ \{b(k), c^\dagger(k')\} &= i\delta(k - k') \\ \{b^\dagger(k), c(k')\} &= i\delta(k - k') \\ b^\dagger(k) |0\rangle &= c^\dagger(k) |0\rangle = 0 \end{aligned} \quad (D.55)$$

obtemos autovalores positivos

$$E \geq 0 \quad (D.56)$$

Mudando o sinal da energia cinética e usando a definição usual para o vácuo

$$\begin{aligned}
H &= -i \int_0^{+\infty} dk k \{ c^\dagger(k) b(k) + b^\dagger(k) c(k) \} \\
\{ b(k), c^\dagger(k') \} &= -i \delta(k - k') \\
\{ b^\dagger(k), c(k') \} &= -i \delta(k - k') \\
b(k) |0\rangle &= c(k) |0\rangle = 0 \\
E &\leq 0
\end{aligned} \tag{D.57}$$

Redefinindo o vácuo e mantendo a energia cinética com sinal negativo

$$\begin{aligned}
H &= i \int_0^{+\infty} dk k [b(k) c^\dagger(k) + c(k) b^\dagger(k)] \\
\{ b(k), c^\dagger(k') \} &= -i \delta(k - k') \\
\{ b^\dagger(k), c(k') \} &= -i \delta(k - k') \\
b^\dagger(k) |0\rangle &= c^\dagger(k) |0\rangle = 0 \\
E &\geq 0
\end{aligned} \tag{D.58}$$

É interessante discutir a norma dos estados no espaço de Hilbert, no caso dos fantasmas. Já que

$$\{ b(k), b^\dagger(k') \} = \{ c(k), c^\dagger(k') \} = 0 \tag{D.59}$$

os estados do espaço de Hilbert possuem norma nula.

Apêndice E

Álgebra do Tensor Momento-Energia para o Campo Escalar + Termo de Improvement

Neste apêndice analisamos a álgebra quântica do tensor total $T_{++}^{(T)}$ para o campo escalar com energia cinética positiva mais termo de improvement. O procedimento é identico ao utilizado nos apêndices C e D. A lagrangeana neste caso é dada por (de (3.108))

$$L = -\frac{1}{2} \int dx (\partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi + Q \partial^\mu \partial_\mu \varphi) \quad (\text{E.1})$$

onde Q é igual a Q^0 e φ corresponde a r^0 (veja a 3.73). Para o fechamento da álgebra não é necessário usar as constantes presentes em (3.73) e (3.108) uma vez que o tensor $T_{\mu\nu}$ pode ser normalizado arbitrariamente.

O tensor momento-energia total nas coordenadas do cone de luz é obtido a partir de (3.94) e (3.110)

$$T_{++}^{(T)} = -\frac{1}{2} \partial_+ \varphi \partial_+ \varphi - \frac{1}{2} Q \partial_+^2 \varphi \quad (\text{E.2})$$

ou escrevendo de forma abreviada

$$T_{++}^{(T)} = T_{++}^{(S)} + T_{++}^{(I)} \quad (\text{E.3})$$

onde denotamos de $T_{++}^{(S)}$ a contribuição usual do campo escalar e de $T_{++}^{(I)}$ a contribuição do termo de improvement.

Queremos demonstrar a álgebra expressa na equação (3.100)

$$[:T_{++}^{(T)}(x):, :T_{++}^{(T)}(y):] = -i (:T_{++}^{(T)}(x): + :T_{++}^{(T)}(y):) \delta'(x-y) + c \delta'''(x-y) \quad (\text{E.4})$$

Vamos inicialmente calcular o termo central da álgebra. Para efetuar o cálculo precisamos das expansões normalizadas dos campos (apêndice C)

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2|k|}} [a(k) e^{ikx} + a^\dagger(k) e^{-ikx}] \\ \partial_+ \varphi(x) &= -i \int_0^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{k} [A^\dagger(k) e^{-ikx} - A(k) e^{ikx}] \\ \partial_+^2 \varphi(x) &= - \int_0^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{\pi}} k^{\frac{3}{2}} [A(k) e^{ikx} + A^\dagger(k) e^{-ikx}], \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

onde foram utilizadas as seguintes convenções

$$\begin{aligned} A(k) &= a^\dagger(-k) \\ A^\dagger(k) &= a(-k) \\ [A^\dagger(k), A(k')] &= [a(-k), a^\dagger(-k')] = \delta(k-k') \\ A(k) |0\rangle &= a^\dagger(-k) |0\rangle = 0 \\ k &> 0 \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Utilizando as expansões dadas em (E.5) obtivemos o tensor $:T_{++}^{(S)}(x):$ para o campo escalar com energia cinética positiva, (conforme mostramos no apêndice C, equação (C.18))

$$\begin{aligned} :T_{++}^{(S)}(x): &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dk dk'}{4\pi} \sqrt{kk'} [A^\dagger(k) A^\dagger(k') e^{-i(k+k')x} \\ &\quad - 2A^\dagger(k) A(k') e^{-i(k-k')x} + A(k) A(k') e^{i(k+k')x}] \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Usando (E.2), (E.5) e (E.6) obtemos : $T_{++}^{(I)}(x)$:

$$: T_{++}^{(I)}(x) := \frac{Q}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} dk k^{\frac{1}{2}} [A(k) e^{ikx} + A^\dagger(k) e^{-ikx}] \quad (E.8)$$

O termo central da álgebra do tensor total é calculado a partir do elemento de matriz

$$\langle 0 | [: T_{++}^{(T)}(x) : , : T_{++}^{(T)}(y) :] | 0 \rangle \quad (E.9)$$

usando (E.3), escrevemos para o elemento acima

$$\begin{aligned} & \langle 0 | : T_{++}^{(S)}(x) : : T_{++}^{(S)}(y) : + : T_{++}^{(S)}(x) : : T_{++}^{(I)}(y) : \\ & + : T_{++}^{(I)}(x) : : T_{++}^{(S)}(y) : + : T_{++}^{(I)}(x) : : T_{++}^{(I)}(y) : | 0 \rangle - (x \leftrightarrow y), \end{aligned} \quad (E.10)$$

onde $(x \leftrightarrow y)$ corresponde ao primeiro termo com x trocado por y .

O primeiro termo desta expressão já foi calculado no apêndice C e é dado por (C.25)

$$\langle 0 | [: T_{++}^{(S)}(x) : , : T_{++}^{(S)}(y) :] | 0 \rangle = \frac{1}{48\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dq q^3 e^{iq(x-y)} = \frac{i}{24\pi} \delta'''(x-y) \quad (E.11)$$

Usando (E.7) e (E.8) obtemos para o segundo termo

$$\begin{aligned} & \langle 0 | [: T_{++}^{(S)}(x) : , : T_{++}^{(I)}(y) :] | 0 \rangle = \frac{Q}{8\pi\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} dk dk' dp \sqrt{kk'} p^{\frac{1}{2}} \\ & \langle 0 | A(k) A(k') A^\dagger(p) | 0 \rangle e^{i(k+k')x - ipy} - (x \leftrightarrow y) \end{aligned} \quad (E.12)$$

O elemento de matriz indicado no integrando desta expressão é nulo, logo obtemos

$$\langle 0 | [: T_{++}^{(S)}(x) : , : T_{++}^{(I)}(y) :] | 0 \rangle = 0 \quad (E.13)$$

Para o terceiro termo de (E.10) obtemos de forma similar

$$\begin{aligned}
\langle 0 | [: T_{++}^{(I)}(x) : , : T_{++}^{(S)}(y) :] | 0 \rangle &= \frac{Q}{8\pi\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} dk dk' d\mathbf{p} \sqrt{k k'} \mathbf{p}^{\frac{3}{2}} \\
\langle 0 | A(\mathbf{p}) A^\dagger(\mathbf{k}) A^\dagger(\mathbf{k}') | 0 \rangle &= e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')y + i\mathbf{p}x} - (x \leftrightarrow y)
\end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

o elemento de matriz indicado no integrando desta expressão também é nulo, logo

$$\langle 0 | [: T_{++}^{(I)}(x) : , : T_{++}^{(S)}(y) :] | 0 \rangle = 0 \quad (\text{E.15})$$

O quarto termo de (E.10) corresponde a contribuição individual do termo de improvement para o termo central. Usando (E.8)

$$\begin{aligned}
\langle 0 | [: T_{++}^{(I)}(x) : , : T_{++}^{(I)}(y) :] | 0 \rangle &= \frac{Q^2}{4\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} dk dk' [k^{\frac{3}{2}} k'^{\frac{3}{2}} \\
&\quad \cdot \langle 0 | A(\mathbf{k}) A^\dagger(\mathbf{k}') | 0 \rangle e^{i(\mathbf{k}x - \mathbf{k}'y)}] - (x \leftrightarrow y)
\end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

Usando as relações de comutação em (E.6)

$$\begin{aligned}
\langle 0 | [: T_{++}^{(I)}(x) : , : T_{++}^{(I)}(y) :] | 0 \rangle &= -\frac{Q^2}{4\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} dk dk' [k^{\frac{3}{2}} k'^{\frac{3}{2}} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') e^{i(\mathbf{k}x - \mathbf{k}'y)}] \\
&\quad - (x \leftrightarrow y)
\end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

ou integrando em $\mathbf{k}'$ e desenvolvendo $(x \leftrightarrow y)$

$$\langle 0 | [: T_{++}^{(I)}(x) : , : T_{++}^{(I)}(y) :] | 0 \rangle = -\frac{Q^2}{4\pi} \int_0^{+\infty} dk dk k^3 [e^{i\mathbf{k}(x-y)} - e^{-i\mathbf{k}(x-y)}] \quad (\text{E.18})$$

ou

$$\langle 0 | [: T_{++}^{(I)}(x) : , : T_{++}^{(I)}(y) :] | 0 \rangle = -i \frac{Q^2}{2} \delta'''(x - y) \quad (\text{E.19})$$

portanto

$$c = -i \frac{Q^2}{2} \quad (\text{E.20})$$

Concluimos que para $T_{++}^{(T)}$ o termo central pode ser obtido da soma de (E.11) e (E.19) sendo dado por

$$\langle 0 | [: T_{++}^{(T)}(x) : , : T_{++}^{(T)}(y) :] | 0 \rangle = -\frac{i}{24\pi} (-1 + 12\pi Q^2) \delta'''(x - y) \quad (\text{E.21})$$

e neste caso

$$c = -\frac{i}{24\pi} (-1 + 12\pi Q^2) \quad (\text{E.22})$$

Para completar a álgebra do tensor momento-energia precisamos verificar se o primeiro termo de (E.4) é satisfeito. Utilizamos para este fim o elemento de matriz

$$\langle 0 | [: T_{++}^{(T)}(x) : , : T_{++}^{(T)}(y) :] | q \rangle, \quad (\text{E.23})$$

ou expandindo $T_{++}^{(T)}$

$$\begin{aligned} & \langle 0 | : T_{++}^{(S)}(x) : : T_{++}^{(S)}(y) : + : T_{++}^{(S)}(x) : : T_{++}^{(I)}(y) : \\ & + : T_{++}^{(I)}(x) : : T_{++}^{(S)}(y) : + : T_{++}^{(I)}(x) : : T_{++}^{(I)}(y) : | q \rangle - (x \leftrightarrow y), \end{aligned} \quad (\text{E.24})$$

onde

$$|q\rangle = A^\dagger(q) |0\rangle \quad (\text{E.25})$$

Neste caso, usando as expansões para $T_{++}^{(S)}$ (E.7) e $T_{++}^{(I)}$ (E.8) temos o anulamento da primeira e da última contribuições, ou seja

$$\begin{aligned} \langle 0 | [: T_{++}^{(S)}(x) : , : T_{++}^{(S)}(y) :] | q \rangle &= 0 \\ \langle 0 | [: T_{++}^{(I)}(x) : , : T_{++}^{(I)}(y) :] | q \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E.26})$$

Os outros termos de (E.24) contribuirão. Para o segundo termo temos

$$\begin{aligned} \langle 0 | [: T_{++}^{(S)}(x) : , : T_{++}^{(I)}(y) :] | q \rangle &= \frac{Q}{8\pi\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} dk dk' dp [\sqrt{k k'} p^{\frac{3}{2}} \\ &\cdot \langle 0 | A(k) A(k') A^\dagger(p) A^\dagger(q) | 0 \rangle] e^{i(k+k')x - ipy} - (x \leftrightarrow y) \end{aligned} \quad (E.27)$$

Utilizando as relações de comutação (E.6)

$$\begin{aligned} \langle 0 | [: T_{++}^{(S)}(x) : , : T_{++}^{(I)}(y) :] | q \rangle &= \frac{Q}{8\pi\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} dk dk' dp [\sqrt{k k'} p^{\frac{3}{2}} \\ &\cdot (\delta(k-q)\delta(k'-p) + \delta(k-p)\delta(k'-q))] e^{i(k+k')x - ipy} - (x \leftrightarrow y) \end{aligned} \quad (E.28)$$

Integrando o primeiro produto de deltas em p e k , o segundo em p e k' e expandindo $(x \leftrightarrow y)$, obtemos

$$\langle 0 | [: T_{++}^{(S)}(x) : , : T_{++}^{(I)}(y) :] | q \rangle = \frac{Q}{4\pi\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} dk \sqrt{q} k^2 [e^{ik(x-y)+iqx} - e^{-ik(x-y)+iqy}] \quad (E.29)$$

De forma similar obtemos para o terceiro termo de (E.24)

$$\langle 0 | [: T_{++}^{(I)}(x) : , : T_{++}^{(S)}(y) :] | q \rangle = \frac{Q}{4\pi\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} dk \sqrt{q} k^2 [e^{-ik(x-y)+iqx} - e^{ik(x-y)+iqy}] \quad (E.30)$$

Somando-se (E.29) e (E.30) obtemos o elemento de matriz (E.23)

$$\begin{aligned} \langle 0 | [: T_{++}^{(T)}(x) : , : T_{++}^{(T)}(y) :] | q \rangle &= \frac{Q}{8\pi\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \sqrt{q} k^2 [e^{iqx} (e^{ik(x-y)} + e^{-ik(x-y)}) \\ &- e^{iqy} (e^{-ik(x-y)} + e^{ik(x-y)})] \end{aligned} \quad (E.31)$$

ou, usando a definição da função delta

$$\langle 0 | [: T_{++}^{(T)}(x) : , : T_{++}^{(T)}(y) :] | q \rangle = -\frac{Q}{2} \sqrt{\frac{q}{\pi}} (e^{iqx} - e^{iqy}) \delta''(x-y) \quad (E.32)$$

Agora desenvolvemos as relações

$$e^{iqx} \delta''(x-y) = \frac{d}{dx} (e^{iqx} \delta'(x-y)) - i q e^{iqx} \delta'(x-y) \quad (\text{E.33})$$

e

$$\begin{aligned} e^{iqy} \delta''(x-y) &= \frac{d^2}{dx^2} (e^{iqy} \delta(x-y)) = \frac{d^2}{dx^2} (e^{iqx} \delta(x-y)) \\ &= \frac{d}{dx} (i q e^{iqx} \delta(x-y) + e^{iqx} \delta'(x-y)) \\ &= \frac{d}{dx} (i q e^{iqy} \delta(x-y)) + \frac{d}{dx} (e^{iqx} \delta'(x-y)) \\ &= \frac{d}{dx} (e^{iqx} \delta'(x-y)) + i q e^{iqy} \delta'(x-y) \end{aligned} \quad (\text{E.34})$$

Usando estas relações em (E.32)

$$\langle 0 | [: T_{++}^{(T)}(x) : , : T_{++}^{(T)}(y) :] | q \rangle = i \frac{Q}{2} \frac{q^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} (e^{iqx} + e^{iqy}) \delta'(x-y) \quad (\text{E.35})$$

Para verificar a álgebra (E.4) precisamos calcular

$$\langle 0 | : T_{++}^{(T)}(x) : | q \rangle \quad (\text{E.36})$$

Uma vez que

$$\langle 0 | : T_{++}^{(S)}(x) : | q \rangle = 0 \quad (\text{E.37})$$

precisamos calcular apenas

$$\langle 0 | : T_{++}^{(I)}(x) : | q \rangle \quad (\text{E.38})$$

De (E.8)

$$\langle 0 | : T_{++}^{(I)}(x) : | q \rangle = \frac{Q}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} dk k^{\frac{3}{2}} \langle 0 | A(\mathbf{k}) A^\dagger(q) | 0 \rangle e^{iqx} \quad (\text{E.39})$$

usando (E.6)

$$\langle 0 | : T_{++}^{(I)}(x) : | q \rangle = -\frac{Q}{2\sqrt{\pi}} q^{\frac{1}{2}} e^{iqx} \quad (\text{E.40})$$

De (E.35) e (E.40), verificamos que o primeiro termo de (E.4) é satisfeito.

Para completar a álgebra de $T_{++}^{(T)}$, fica faltando obter $T_{++}^{(S)}$ no segundo membro de (E.4). Este cálculo é efetuado no apêndice C.

Vamos agora analisar o efeito de uma redefinição do vácuo sobre o termo central para o tensor de improvement. Para o campo escalar este aspecto foi considerado no apêndice C.

Redefinimos o vácuo para

$$A^\dagger |0\rangle = 0 \quad (\text{E.41})$$

com esta definição escrevemos para o termo central de $T_{++}^{(I)}$

$$\begin{aligned} \langle 0 | [: T_{++}^{(I)}(x) : , : T_{++}^{(I)}(y) :] | 0 \rangle &= \frac{Q^2}{4\pi} \int_0^{+\infty} dk dp \, k^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} \langle 0 | A^\dagger(k) A(p) | 0 \rangle e^{-i(kx-py)} \\ &- (x \leftrightarrow y) \end{aligned} \quad (\text{E.42})$$

ou usando as relações de comutação (E.6) e expandindo $(x \leftrightarrow y)$

$$\langle 0 | [: T_{++}^{(I)}(x) : , : T_{++}^{(I)}(y) :] | 0 \rangle = -i \frac{Q^2}{2} \delta'''(x-y) \quad (\text{E.43})$$

Portanto com esta definição para o vácuo

$$c = -i \frac{Q^2}{2} \quad (\text{E.44})$$

e concluímos que não houve uma inversão no sinal do termo central em relação ao calculado para definição usual do vácuo. Para analisarmos o efeito da redefinição do vácuo sobre o termo central para o tensor total é necessário considerar a contribuição de $T_{++}^{(S)}$. Chegamos a conclusão no apêndice C de que o termo central para o campo escalar tem o sinal invertido com a redefinição para o vácuo. Assim

$$\langle 0 | [: T_{++}^{(T)}(x) : , : T_{++}^{(T)}(y) :] | 0 \rangle = -\frac{i}{24\pi} (1 + 12\pi Q^2) \delta'''(x - y) \quad (\text{E.45})$$

logo

$$c = -\frac{i}{24\pi} (1 + 12\pi Q^2) \quad (\text{E.46})$$

É importante também analisar o efeito da mudança no sinal da energia cinética do campo escalar, uma vez que possuímos um campo com energia cinética positiva e outro com energia cinética negativa . Conforme vimos no apêndice C para o campo escalar , uma mudança no sinal da lagrangeana leva a inversão do momento e passa a ser necessário inverter o sinal das relações de comutação. Assim passamos a ter

$$\begin{aligned} [A^\dagger(\mathbf{k}) , A(\mathbf{k}')] &= [a(-\mathbf{k}) , a^\dagger(-\mathbf{k})] = -\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ A(\mathbf{k}) |0\rangle &= a^\dagger(-\mathbf{k}) |0\rangle = 0 \\ \mathbf{k} &> 0 \end{aligned} \quad (\text{E.47})$$

A lagrangeana para o termo com energia cinética negativa é dada por

$$L = \frac{1}{2} \int dx (\partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi + Q \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi) \quad (\text{E.48})$$

onde Q é igual a Q^1 .

Com a inversão de sinal de L , $T_{++}^{(T)}$ tem o sinal invertido, mas o termo central correspondente muda de valor uma vez que o termo central para o campo escalar $T_{++}^{(S)}$ permanece com o mesmo sinal (apêndice C) enquanto para $T_{++}^{(I)}$ o termo central tem o sinal invertido (E.16). Portanto concluímos que invertendo o sinal da lagrangeana obtemos (de (C.50) e (E.20))

$$c = -\frac{i}{24\pi} (-1 - 12\pi Q^2) \quad (\text{E.49})$$

onde usamos a definição usual do vácuo.

Redefinindo o vácuo de acordo com (E.41) obtemos

$$c = -\frac{i}{24\pi} (1 - 12\pi Q^2) \quad (\text{E.50})$$

Os sinais das normas no espaço de Hilbert para os casos analisados neste apêndice, são os mesmos discutidos no apêndice C.

Bibliografia

- [1] S.W.Hawking, Commun.Math.Phys. 43 (1975) 199.
- [2] C.G.Callan, S.B.Giddings, J.A.Harvey e A.Strominger, Phys.Rev. 45D (1992) 1005.
- [3] S.B.Giddings, "Quantum Mechanics of Black Holes", preprint UCSBTH-94-52, 1994.
- [4] W.G.Unruh, Phys.Rev. D14 (1976) 870.
- [5] P.Hajicek, Commun.Math.Phys. 150 (1992) 545.
- [6] Y.Peleg, "Quantum Dust Black Holes", Brandeis U. preprint BRX-TH-350, 1993.
- [7] S.B.Giddings, "Black Holes and Quantum Predictability", Proceedings, Quantum Gravity, Nishinomiya, 1992.
- [8] J.A.Harvey e A.Strominger, "Quantum Aspects of Black Holes", preprint EFI-92-41, 1992.
- [9] Y.Kazama, "On Quantum Black Holes", Lectures given at 13th Symposium on Theoretical Physics: Field Theory and Mathematical Physics, 1994.
- [10] A.Strominger, "Les Houches Lectures on Black Holes", Lectures given at Les Houches Summer School, Session 62: Fluctuating Geometries in Statistical Mechanics and Field Theory, 1994.
- [11] V.Balasubramanian e H.Verlinde, Nucl.Phys. B464, (1996) 213.
- [12] J.G.Russo, L.Susskind e L.Thorlacius, Phys.Lett. B292 (1992) 13.
- [13] J.Schwinger, Phys.Rev. 82 (1951) 664.

- [14] A.Miković, "Black Holes and Nonperturbative Canonical 2D Dilaton Gravity", preprint IMPERIAL-TP/93-94/16, 1994.
- [15] D.Cangemi, R.Jackiw e B.Zwiebach, *Ann.Phys.* 245 (1996) 408.
- [16] L.D.Landau e M.Lifshitz, "The Classical Theory of Fields", Pergamon Press, (1975).
- [17] T.Fujiwara, Y.Igarashi e J.Kubo, "Unrecognizable Black Holes in Two Dimensions", preprint KANAZAWA-93-01, 1993.
- [18] K.Sundermeyer, "Constrained Dynamics", Springer Verlag, Heidelberg, (1982).
- [19] F.Mandl e G.Shaw, "Quantum Field Theory", John Wiley and Sons, (1986).
- [20] P.A.M.Dirac, "Lectures on Quantum Mechanics", Yeshiva University, (1964).
- [21] T.Uchino, "Canonical Theory of 2D Gravity Coupled to Conformal Matter", preprint TIT/HEP-216, 1993.
- [22] A.Miković, *Phys.Lett.* B291 (1992) 19.
- [23] A.Miković, *Phys.Lett.* B304 (1993) 70.
- [24] C.Becchi, A.Rouet e R.Stora, *Commun.Math.Phys.* 42 (1975) 127.
- [25] C.Becchi, A.Rouet e R.Stora, *Ann.Phys.* 98 (1976) 287.
- [26] E.S.Fradkin e G.A.Vilkovisky, *Phys.Lett.* 55B (1975) 224.
- [27] I.A.Batalin e G.A.Vilkovisky, *Phys.Lett.* 69B (1977) 309.
- [28] M.Henneaux e C.Teitelboim, "Quantization of Gauge Systems", Princeton University Press, (1992).
- [29] M.Henneaux, *Phys.Rep.* 126 No. 1 (1985) 1.
- [30] R.Casalbuoni, *Nuovo Cimento* 33A (1976) 115.
- [31] T.Fujiwara, Y.Igarashi e J.Kubo, "Weyl Invariance and Spurious Black Hole in Two-Dimensional Dilaton Gravity", *Int.J.Mod.Phys.* A9 (1994) 4811.

- [32] E.Benedict, R.Jackiw e H.J.Lee, "Functional Schrödinger and BRST Quantization of (1+1)-Dimensional Gravity", Phys.Rev. D54 (1996) 6213.
- [33] S.Weinberg, "Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the Theory of Relativity", John Wiley Sons, (1972).
- [34] S.Cassemiro F.F. and V.O.Rivelles, "Canonical and Functional Schrödinger Quantization of Two-Dimensional Dilaton Gravity", Submetido para Publicação.
- [35] K.Kuchař, Phys.Rev.D 39 (1989) 2263.
K.Kuchař and G.Torre, J.Math.Phys. 30 (1989) 1769.