Elm Abdell

DIVERGÊNCIAS INFRAVERMELHAS NA

Keuper CROMODINÂMICA QUÂNTICA

Yosif Fraud
Alberto Farhi
J. Welbonson

TESE DE DOUTORAMENTO APRESENTADA AO INSTITUTO DE
FÍSICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SBI-FUSP

305M810T0572

CARLOS EUGENIO IMBASSAHY CARNEIRO

DEPTO. DE FÍSICA MATEMÁTICA

SAO PAULO, MARÇO DE 1982

AGRADECIMENTOS

- À FAPESP pelo apoio financeiro.
- Ao prof. Josif Frenkel pela orientação e estímulo à realização deste trabalho.
- À Maria Teresa C. dos Santos Thomaz pelas discussões que me foram extremamente proveitosas.

Esta tese foi realizada em um clima extremamente agradável de cooperação e camaradagem graças a estes meus dois grandes amigos. A eles esta tese é dedicada.

A B S T R A C T

In perturbative QCD, Bloch-Nordsieck inclusive cross sections are not infrared finite for processes where there are two or more coloured particles in the initial state. We have calculated, in all orders of perturbation, the contribution of the leading uncanceled infrared divergences for the annihilation of a pair quark anti-quark. The work was done in the axial gauge. In this gauge the ghosts don't couple to the other fields of the theory and this reduces the number of diagrams to be considered. Besides this, the Slavnov-Taylor identities have a simple structure and can be used to eliminate whole classes of diagrams. We have shown that the next to leading infrared divergences don't cancel and exponentiate.

R E S U M O

Na QCD perturbativa, seções de choque inclusivas do tipo Bloch-Nordsieck não são finitas no infravermelho em processos onde haja duas ou mais partículas coloridas no estado inicial. Calculamos, em todas as ordens de perturbação, a contribuição das divergências infravermelhas mais fortes que não se cancelam para o processo de aniquilação de um par quark anti-quark. O trabalho foi feito no gauge axial. Neste gauge os ghosts não se acoplam com os outros campos da teoria e isto reduz o número de diagramas a ser considerado. Além disto, as identidades de Slavnov-Taylor têm uma estrutura simples e podem ser usadas para eliminar classes inteiras de diagramas. Mostramos que as divergências infravermelhas subdominantes não se cancelam e se exponenciam.

Í N D I C E

Apresentação.....	vi
-------------------	----

PARTE I - TEORIAS DE GAUGE

1. A Eletrodinâmica Quântica Vista como uma Teoria de Gauge	1
2. Teorias de Gauge não Abelianas e a Construção de Yang-Mills.....	4
3. O Grupo de Simetria e os Campos Fundamentais da Cromodinâmica Quântica.....	10
4. Quantização de Teorias de Gauge.....	14
5. A Cromodinâmica Quântica no Gauge Axial.....	24
6. A Transformação de Becchi-Rouet e Stora.....	27
7. Identidades de Slavnov-Taylor.....	32

PARTE II - DIVERGÊNCIAS INFRAVERMELHAS

8. Introdução.....	47
9. Divergências Infravermelhas no Eletromagnetismo Clássico	54
10. Divergências Infravermelhas em Perturbação e a Aproximação Eikonal.....	61
11. O Mecanismo de Bloch e Nordsieck.....	69
12. Divergências Infravermelhas na Cromodinâmica Quântica...	80
13. Análise dos Fatores de Cor.....	83
14. O Método $R^e - R^a$	87
15. O Método de Momento Controlador.....	99
16. Identidades de Slavnov-Taylor.....	112
17. Diagramas em ordem g^4	126
18. Diagramas em ordem g^6	133

19. Ordens mais Elevadas.....	150
20. Interpretação e Conclusões.....	172
Apêndice A.....	176
Apêndice B.....	177
Apêndice C.....	181
Apêndice D.....	183
Apêndice E.....	187
Referências.....	188

APRESENTAÇÃO

Este trabalho tem por objetivo o estudo das divergências infravermelhas na Cromodinâmica Quântica (QCD). Entretanto achamos conveniente, por razões didáticas, apresentar também uma introdução às teorias de gauge. É apenas dentro do contexto das teorias de gauge que se pode entender as idéias fundamentais da QCD. Se intercalássemos comentários sobre resultados da QCD no texto sobre divergências infravermelhas comprometeríamos a sua fluência. Além do mais estes comentários marginais são via de regra ininteligíveis para o principiante e tediosos para o físico mais experimentado. Por esta razão optamos em dividir a tese em duas partes independentes.

Na primeira parte fazemos uma apresentação razoavelmente completa das teorias de gauge. No capítulo 1 examinamos a Eletrodinâmica Quântica (QED) do ponto de vista das teorias de gauge. Procuramos motivar o uso desta abordagem para estudar outros tipos de interação. No capítulo 2 apresentamos a construção de Yang-Mills que nos permite obter teorias de gauge renormalizáveis para interações mais complexas do que as da QED. Mostramos que uma teoria de gauge fica definida depois que escolhemos os campos fundamentais e o grupo de simetria de interação. O capítulo 3 discute brevemente as razões experimentais que levaram à escolha do grupo $SU(N) \times SU(3)$ e dos quarks como campos de matéria fundamentais da QCD. No capítulo 4 mostramos como quantizar as teorias de gauge. No capítulo 5 discutimos a QCD quantizada no

gauge axial, mostrando que neste gauge os ghosts se desacoplam dos outros campos da teoria. No capítulo 6 apresentamos a transformação de Becchi-Rouet-Stora . Ela é usada no capítulo 7 para deduzir as identidades de Slavnov Taylor da QCD. Esta primeira parte é quase inteiramente auto-contida. Pressupomos uma certa familiaridade com as integrais de trajetória e os métodos funcionais. Porém, não é pressuposto nenhum conhecimento de teorias de gauge.

Para os que têm alguma familiaridade com o material descrito acima sugerimos começar a leitura diretamente pela segunda parte. Ela trata exclusivamente das divergências infravermelhas e se constitui na tese propriamente dita. Uma descrição detalhada de seu conteúdo é feita no capítulo 8.

Em todo o trabalho, com exceção do capítulo 9, utilizamos o sistema de unidades em que $\hbar = c = 1$ e a métrica pseudo-euclidiana.

PARTE 1

TEORIAS DE GAUGE

1. A ELETRODINÂMICA QUÂNTICA VISTA COMO UMA TEORIA DE GAUGE

Historicamente a lagrangeana da Eletrodinâmica Quântica (QED) foi obtida usando-se o princípio da correspondência. A partir da lagrangeana de Dirac para elétrons livres:

$$\mathcal{L}_0 = -\bar{\Psi}(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\Psi \quad (1.1)$$

obteve-se o termo de interação, como na teoria não relativística, através da substituição minimal: $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - ie A_\mu$. O limite clássico também fornece o termo que dá a dinâmica do campo $-1/4 F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$. Ele tem a mesma forma do termo correspondente no Eletromagnetismo Clássico. Seguindo estas prescrições obteve-se a lagrangeana que descreve a interação entre elétrons e fótons:

$$\mathcal{L} = -\bar{\Psi}(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\Psi + ie \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi A_\mu - 1/4 F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (1.2)$$

Podemos porém, partindo de $\mathcal{L}_0$, chegar a (1.2) usando apenas a informação de que a teoria completa deve ser invariante por transformações de gauge locais.

É fácil ver que $\mathcal{L}_0$ é invariante sob transformações de gauge globais:

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{-i\alpha} \Psi \quad (1.3a)$$

$$\Psi \rightarrow \Psi' = (1 - i\alpha) \Psi \quad (\text{forma infinitesimal}) \quad (1.3b)$$

onde α = constante.

Esta teoria, porém, não é invariante sob transformação de gauge locais:

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{-i\alpha(x)} \Psi \quad (1.4a)$$

$$\Psi \rightarrow \Psi' = (1 - i\alpha(x)) \Psi \quad (\text{Forma infinitesimal}) \quad (1.4b)$$

α é agora uma função de x_μ

Daqui por diante trabalharemos apenas com transformações de gauge infinitesimais. Pode-se mostrar que se uma teoria é invariante sob transformações infinitesimais ela também é invariante sob transformações finitas. Isto ocorre porque estas últimas podem ser vistas como uma sucessão de transformações infinitesimais. Sob uma transformação de gauge infinitesimal

$$\delta \mathcal{L}_0 \equiv \mathcal{L}_0' - \mathcal{L}_0 = i \bar{\Psi} \gamma_\mu (\partial_\mu \alpha) \Psi \quad (1.5)$$

Este termo aparece porque

$$\partial_\mu \Psi' = \partial_\mu [(1 - i\alpha) \Psi] = (1 - i\alpha) \partial_\mu \Psi - i (\partial_\mu \alpha) \Psi \quad (1.6)$$

$1 - i\alpha$ não comuta com a derivada como no caso anterior porque agora α é uma função de x_μ (arbitrária).

Podemos restaurar a invariância substituindo ∂_μ por uma derivada covariante D_μ com a seguinte propriedade

$$D'_\mu \Psi' = (1 - i\alpha) D_\mu \Psi \quad (1.7)$$

Para construir D_μ introduzimos um campo A_μ definindo

$$D_\mu = \partial_\mu - ie A_\mu \quad (1.8)$$

Para descobrir como A_μ deve se transformar basta impor (1.7). Escrevendo A'_μ como $A_\mu + \delta A_\mu$ obtemos:

$$\begin{aligned} D'_\mu \Psi' &= (\partial_\mu - ie A_\mu - ie \delta A_\mu) (1 - i\alpha) \Psi \\ &= (1 - i\alpha) D_\mu \Psi - i (\partial_\mu \alpha) \Psi - ie \delta A_\mu \Psi \end{aligned} \quad (1.9)$$

Se impusermos que

$$\delta A_\mu = -\frac{1}{e} \partial_\mu \alpha \quad (1.10)$$

a propriedade (1.7) fica garantida.

Com isto obtemos a Lagrangeana invariante:

$$\mathcal{L}' = -\bar{\Psi} (\gamma_\mu D_\mu + m) \Psi = -\bar{\Psi} (\gamma_\mu \partial_\mu + m) \Psi + ie \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi A_\mu \quad (1.11)$$

O campo A_μ introduzido desta forma não possui equação de movimento. É necessário introduzir um outro termo em $\mathcal{L}'$ para garantir a dinâmica do campo A_μ . Este termo deve ser invariante sob transformações de gauge locais e um invariante de Lorentz. É fácil ver que $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é invariante sob transformações de gauge locais. Assim, o termo procurado é

$$-\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 \equiv -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (1.12)$$

Note que

$$\tilde{F}_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \equiv \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} F_{\mu\nu} \quad (1.13)$$

e

$$\tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \equiv \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F_{\rho\sigma} F_{\alpha\beta} \quad (1.14)$$

também satisfazem os mesmos requisitos. Porém o primeiro termo é uma derivada total* e portanto não altera as equações de movimento enquanto que o segundo é proporcional a $F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ **. Note que a invariância de gauge proíbe a presença de um termo de massa para o fóton ($-1/2 m A_\mu^2$).

Em resumo descobrimos que $\mathcal{L}_0$ é invariante sob transfor

* $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = 2 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\rho A_\sigma) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$
 $= 4 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\rho A_\sigma) (\partial_\mu A_\nu) = \partial_\rho [4 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu A_\nu) A_\sigma]$

** Basta usar:

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = 2 (\delta_{\rho\alpha} \delta_{\sigma\beta} - \delta_{\rho\beta} \delta_{\sigma\alpha})$$

mações de gauge globais (1.3). Isto é equivalente a dizer que $\mathcal{L}_0$ é invariante sob o grupo $U(1)$. O termo $e^{-i\alpha}$ é um operador da representação unidimensional de $U(1)$. Para tornarmos a teoria invariante sob transformações locais introduzimos um campo A_μ e um termo extra que dá a dinâmica deste campo.

2. TEORIAS DE GAUGE NÃO-ABELIANAS E A CONSTRUÇÃO DE YANG-MILLS

A maneira como construímos a QED apesar de artificiosa pode ser generalizada para outras teorias. No caso das interações fortes e fracas não temos um limite clássico para servir de guia na determinação da lagrangeana de interação. É interessante verificar se um procedimento análogo ao que nos levou à lagrangeana da QED não levaria a uma teoria para estas interações. Hoje a evidência experimental parece apoiar esta hipótese.

Para cada escolha dos campos fundamentais e do grupo de simetria obtemos uma teoria de gauge diferente. Esta escolha deve ser feita com base nas experiências, mas uma vez feita recaímos sempre no mesmo problema.

Tem-se um conjunto de campos $\phi^a, \phi^{a\dagger}$, $a = 1, \dots, n$ e uma lagrangeana $\mathcal{L}_0[\phi^a, \phi^{a\dagger}, \partial_\mu \phi^a, \partial_\mu \phi^{a\dagger}]$ que descreve a dinâmica do sistema. $\mathcal{L}_0$ é invariante sob um grupo de transformações, geralmente não abeliano, que atua nos campos $\phi^a, \phi^{a\dagger}$ da seguinte forma:

$$\phi^a \rightarrow [e^{-i\alpha^A t^A}]^{ab} \phi^b \quad (2.1a)$$

$$\phi^a \rightarrow [\delta^{ab} - i\alpha^A (t^A)^{ab}] \phi^b \quad (\text{forma infinitesimal}) \quad (2.1b)$$

$$\phi^{a\dagger} \rightarrow \phi^{b\dagger} [e^{i\alpha^A t^A}]^{ba} \quad (2.1c)$$

$$\phi^{a\dagger} \rightarrow \phi^{b\dagger} [\delta^{ba} + i\alpha^A (t^A)^{ba}] \quad (\text{forma infinitesimal}) \quad (2.1d)$$

$$a = 1, 2, \dots, n \quad ; \quad A = 1, 2, \dots, N$$

N é o número de gerados de G ; $N=1$ para o grupo $U(1)$ da QED, $n^2 - 1$ para $SU(n)$, etc.

t^A são matrizes hermiteanas $n \times n$ e são os geradores do grupo G no espaço n -dimensional ao qual os ϕ^a pertencem (espaço interno). Por exemplo se $G = SU(2)$ e os ϕ^a formam um isodoubleto $t^A = \frac{\sigma^A}{2}$ (σ^A = matrizes de Pauli).

α^A são N parâmetros infinitesimais constantes. Todo o operador de uma representação unitária pode ser colocado sob a forma $e^{-i\alpha^A t^A}$. Os α^A especificam o elemento completamente.

Os geradores t^A satisfazem a seguinte regra de comutação:

$$[t^A, t^B] = i f^{ABC} t^C \quad (2.2)$$

onde f^{ABC} é a constante da estrutura do grupo e é completamente antisimétrica sob permutação dos índices.

Temos ainda

$$f^{ABC} f^{DBC} = C_{YM} \delta^{AD} \quad (2.3)$$

$$\sum_A (t^A t^A)^{ab} = C_F \delta^{ab} \quad (2.4)$$

$$f^{ABE} f^{ECD} + f^{ACE} f^{EDB} + f^{ADE} f^{EBC} = 0 \quad (2.5)$$

A constante de estrutura é semelhante ao tensor de Levi-Civita ϵ_{ijk} . Isto sugere a introdução de um produto vetorial definido, em analogia ao produto vetorial usual, como:

$$(a \times b)^A = f^{ABC} a^B b^C \quad (2.6)$$

Definimos também um produto escalar

$$a \cdot b = a^A b^A \quad (2.7)$$

Das definições decorrem imediatamente*

$$a \times a = 0 \quad (2.8)$$

$$a \times b = -b \times a \quad (2.9)$$

$$(a \times b) \cdot c = a \cdot (b \times c) \quad (2.10)$$

$$(a \times b) \cdot b = 0 \quad (2.11)$$

Contraindo $a^B b^C c^D$ com a identidade (2.5) obtemos a componente "A" de

$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0 \quad (2.12)$$

Definimos ainda:

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \\ \vdots \\ \phi^n \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \phi^\dagger (\partial^2 - m^2) \phi \\ &= -\partial_\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi - m \phi^\dagger \phi + \text{termos de superfície} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Se as componentes de ϕ tiverem spin 1/2

$$\mathcal{L}_0 = -\phi^\dagger \gamma_0 (\gamma_\mu \partial_\mu + m) \phi \quad (2.15)$$

* Estamos supondo que as componentes dos vetores comutam.

De qualquer modo conseguimos uma teoria invariante sob transformações de gauge locais se substituirmos ∂_μ por uma derivada covariante D_μ tal que

$$D'_\mu \phi' = (I - i\alpha^A t^A) D_\mu \phi \quad (2.16)$$

$$\Rightarrow (D'_\mu \phi')^\dagger = (D_\mu \phi)^\dagger (I + i\alpha^A t^A)$$

Em analogia à QED colocamos

$$D_\mu = \partial_\mu - ig A_\mu \cdot \mathbf{t} \quad (2.17)$$

e impomos (2.16) para descobrir como A_μ deve se transformar. Desprezando infinitésimos de 2ª ordem obtemos:

$$\begin{aligned} D'_\mu \phi' &= [\partial_\mu - ig(A_\mu + \delta A_\mu) \cdot \mathbf{t}](I - i\alpha \cdot \mathbf{t})\phi \\ &= (I - i\alpha \cdot \mathbf{t})\partial_\mu \phi - i(\partial_\mu \alpha) \cdot \mathbf{t} \phi - ig(A_\mu \cdot \mathbf{t})(I - i\alpha \cdot \mathbf{t})\phi \\ &\quad - ig(\delta A_\mu \cdot \mathbf{t})\phi. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Não podemos no penúltimo termo de (2.18) passar $\alpha \cdot \mathbf{t}$ para a esquerda porque as matrizes t^A não comutam. Usando-se (2.2) e (2.6) deduz-se que

$$(A_\mu \cdot \mathbf{t})(\alpha \cdot \mathbf{t}) = (\alpha \cdot \mathbf{t})(A_\mu \cdot \mathbf{t}) - i(\alpha \times A_\mu) \cdot \mathbf{t} \quad (2.19)$$

Substituindo (2.19) em (2.18) chega-se a

$$\begin{aligned} D'_\mu \phi' &= (I - i\alpha \cdot \mathbf{t})D_\mu \phi - i(\partial_\mu \alpha) \cdot \mathbf{t} \phi - ig(\alpha \times A_\mu) \cdot \mathbf{t} \phi \\ &\quad - ig(\delta A_\mu \cdot \mathbf{t})\phi \end{aligned} \quad (2.20)$$

Escolhendo

$$\delta A_\mu \equiv A'_\mu - A_\mu = -\frac{1}{g} \partial_\mu \alpha + \alpha \times A_\mu \quad (2.21)$$

a expressão (2.16) fica satisfeita.

Precisamos agora construir o termo quadrático que dá a dinâmica do campo A_μ . Antes, porém, vamos mostrar uma propriedade que facilitará consideravelmente o trabalho.⁽¹⁾

Se um vetor no espaço interno se transforma como

$$W \rightarrow W' = W + \alpha \times W \quad (\alpha \text{ é infinitesimal}) \quad (2.22)$$

então seu quadrado é invariante i.e.

$$W'^2 = W^2 \quad (2.23)$$

Demonstração

$$\begin{aligned} W' \cdot W' &= (W + \alpha \times W) \cdot (W + \alpha \times W) \\ &= W \cdot W + (\alpha \times W) \cdot W + W \cdot (\alpha \times W) + O(\alpha^2) \end{aligned}$$

Usando (2.11) vemos que o 2º e o 3º termo são nulos e portanto $W' \cdot W' = W \cdot W$ a menos de infinitésimos de 2ª ordem.

Note que (2.22) é análoga a uma rotação usual que muda a direção do vetor mas preserva seu módulo. Além disto, o teorema é verdadeiro qualquer que seja o caráter tensorial de W no espaço físico.

Na QED $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ era invariante por transformações de gauge locais. Em teorias não abelianas não é possível conseguir um objeto com esta propriedade. Precisamos algo mais geral. A propriedade que acabamos de demonstrar mostra que basta encontrar um objeto que se transforme como (2.22) para garantir que seu quadrado seja invariante.

Tentemos primeiramente, novamente buscando inspiração na QED, o termo $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Sob uma transformação de gauge lo-

cal ele se transforma (veja (2.21)) em:

$$\begin{aligned}\partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \alpha \times (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\ &\quad + (\partial_\mu \alpha) \times A_\nu - (\partial_\nu \alpha) \times A_\mu\end{aligned}\quad (2.24)$$

Se não fossem os dois últimos termos o quadrado de $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ seria invariante. Para obter um objeto com as propriedades desejadas precisamos adicionar um outro termo que se transforme como (2.22) a menos de dois termos que sirvam para cancelar os dois últimos de (2.24). Perceba que o gradiente $\partial_\mu \alpha$ do termo $(\partial_\mu \alpha) \times A_\nu$ veio da transformação de A_μ : (2.21). Assim, se tivéssemos um termo do tipo $A_\mu \times A_\nu$, sob uma transformação de gauge ele geraria termos do tipo que estamos procurando. A escolha mais simples é $g(A_\mu \times A_\nu)$

$$\begin{aligned}g(A'_\mu \times A'_\nu) &= g(A_\mu \times A_\nu) - (\partial_\mu \alpha) \times A_\nu - A_\mu \times (\partial_\nu \alpha) \\ &\quad + g(\alpha \times A_\mu) \times A_\nu + g A_\mu \times (\alpha \times A_\nu) + O(\alpha^2)\end{aligned}\quad (2.25)$$

O segundo e o terceiro termos cancelam os termos indesejados de (2.24). Usando (2.9) e (2.12) obtemos

$$(\alpha \times A_\mu) \times A_\nu + A_\mu \times (\alpha \times A_\nu) = \alpha \times (A_\mu \times A_\nu)\quad (2.26)$$

Levando (2.26) em (2.25) chegamos a

$$\begin{aligned}g(A'_\mu \times A'_\nu) &= g(A_\mu \times A_\nu) + \alpha \times [g(A_\mu \times A_\nu)] \\ &\quad - (\partial_\mu \alpha) \times A_\nu + (\partial_\nu \alpha) \times A_\mu\end{aligned}\quad (2.27)$$

Portanto definindo

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g A_\mu \times A_\nu\quad (2.28)$$

obtemos sob transformações de gauge locais

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu} + \alpha \times F_{\mu\nu} \quad (2.29)$$

$F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ é o invariante procurado*

A Lagrangeana completa se escreve

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 [\phi, \phi^\dagger, D_\mu \phi, D_\mu^\dagger \phi^\dagger] - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (2.30)$$

O procedimento que acabamos de descrever é chamado construção de Yang-Mills ^{(2), (3)}. Seu grande mérito consiste em fornecer teorias de campo renormalizáveis.

3. O GRUPO DE SIMETRIA E OS CAMPOS FUNDAMENTAIS DA CROMODINÂMICA QUÂNTICA

Em 1961 M.Gell-Mann ⁽⁴⁾ e Y.Ne'eman ⁽⁵⁾ examinando a estrutura das famílias de mésons e bárions propuseram que o grupo de simetria das interações fortes era o SU(3). Cada família (multiplete) forma a base de uma representação irredutível de SU(3). Cada hádróns membro do multiplete é um vetor de base. Do ponto de vista matemático toda representação irredutível de SU(3) pode ser gerada através de produtos da representação fundamental $\mathbf{3}$ por ela mesma ou pela representação conjugada $\bar{\mathbf{3}}$. Ambas têm dimensão três o que significa que a base de cada uma delas tem três vetores linearmente independentes. Podemos expressar cada vetor que representa um méson ou um bárion em termos dos vetores base de $\mathbf{3}$ e $\bar{\mathbf{3}}$. (Podemos fazer uma analogia com um sistema de spins. A função de onda de uma partícula de spin qualquer po

* Para os termos $\tilde{F}_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ e $\tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}$ valem as mesmas considerações que fizemos para $\tilde{F}_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ e $\tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}$, veja a página 4.

de ser escrita em termos das funções de onda de spin $1/2$. Estas últimas formam o análogo da base da representação fundamental). Mas até 1964 isto era visto apenas como uma propriedade matemática.

Em 1964, Gell-Mann⁽⁶⁾ propôs que os vetores base de $\underline{3}$ ($\bar{\underline{3}}$) fossem identificados com partículas físicas mais fundamentais: os quarks (anti-quarks). Segundo este modelo os mésons são estados ligados de quark e anti-quark enquanto que os bárions são estados ligados de três quarks. Assim as famílias de mésons formariam as bases das representações irredutíveis de $\underline{3} \otimes \bar{\underline{3}} = \underline{1} \oplus \underline{8}$ e os bárions as das representações irredutíveis de $\underline{3} \otimes \underline{3} \otimes \underline{3} = \underline{1} \oplus \underline{8} \oplus \underline{8} \oplus \underline{10}$. Isto explicava muito bem o fato dos mésons conhecidos aparecerem apenas em famílias de 1 elemento (singleto) ou 8 elementos (octuplete) e dos bárions aparecerem apenas em singletos, octupletos e decupletos. O modelo na forma original tinha 3 tipos de quarks (sabores) u , d e s e seus respectivos anti-quarks. Hoje em dia já existem evidências experimentais da existência de dois novos quarks: c , t e razões teóricas levam a crer que exista um sexto: b . Para seis quarks o grupo de simetria é o $SU(6)$.

O modelo a quarks além de explicar razoavelmente a estrutura das famílias de mésons e bárions é particularmente útil para tratar partículas compostas de quarks pesados como o charmonium. Neste caso uma aproximação não relativística já fornece resultados em ótima concordância com a experiência.

A primeira evidência experimental da existência de constituinte mais fundamentais nos hádrons veio com as experiências de espalhamento altamente inelástico lépton-hádron no acelerador

linear de Stanford. Estas experiências mostraram que a altas energias os hadrons se comportam como se fossem constituídos de partículas puntiformes quase livres que foram chamados pãrtons. Mais tarde os pãrtons foram identificados com os quarks.

O modelo e quarks para os bãrions, na sua forma mais simples, leva a problemas de spin-estatística. Por exemplo, para formar o estado fundamental do Δ^{++} somos obrigados a colocar três quarks (fêrmions com spin $1/2$) com os mesmos números quânticos. Esta dificuldade é resolvida com a introdução de um novo número quântico: cor. Cada quark pode aparecer em 3 cores. Isto além de resolver o problema de spin-estatístico faz com que a taxa de decaimento $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ e a razão $R = \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hãdrons}) / \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$ sejam multiplicadas por um fator 3, necessário para haver concordância com a experiência. O grupo de simetria da cor é o $SU(3)$. A simetria de cor é exata. Isto significa que a cor é conservada nas interações e que membros de um tripleto de cor diferem apenas na cor, tendo todos as outras propriedades físicas iguais.

Com a introdução da cor o grupo de simetria passa a ser $SU(N) \times SU(3)$ (estamos supondo N sabores). O produto direto significa, na prática, apenas que o índice de sabor é completamente independente do índice de cor. Na Cromodinâmica Quântica (QCD) tornamos a simetria de cor uma simetria local através da construção de Yang-Mills. Com isto a cada um dos oito geradores do grupo $SU(3)$ associa-se um campo A_μ^β . Estes campos vão mediar as interações fortes e desempenham um papel análogo ao do fóton na QED. Porém, contrariamente ao fóton que é neutro, os gluons carregam carga de cor podendo interagir entre si. Esta nova possibilidade faz com que a QCD seja qualitativamente diferente da QED.

Contrariamente à QED, a constante de acoplamento efetiva da QCD vai a zero a altas energias. Este comportamento conhecido como liberdade assintótica explica porque a altas energias os quarks se comportam como se fossem quase livres. É interessante saber que as experiências de espalhamento altamente inelástica mostram que os quarks carregam apenas cerca da metade do momento do hádron, a outra metade é carregada por partículas sem carga elétrica, dando uma indicação da existência de gluons dentro dos hádrons.

Tendo o grupo de simetria e os campos básicos podemos escrever a lagrangeana livre da QCD que deve ser um escalar sob $SU(N) \times SU(3)$.

$$\mathcal{L}_0 = -\bar{\Psi}_j^a (\gamma_\mu \partial_\mu + m) \Psi_j^a \quad (3.1)$$

$j = 1, 2, \dots, N$ sabor ; $a = 1, 2, 3$ cor

$$\Psi = \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ d^1 \\ d^2 \\ d^3 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Tornando a cor uma simetria local através da construção de Yang-Mills obtemos a lagrangeana da QCD

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\bar{\Psi}_j^a \{ \gamma_\mu [\delta^{ab} \partial_\mu - ig (A_\mu^B t^B)^{ab}] + \delta^{ab} m \} \Psi_j^b \\ & - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^B F_{\mu\nu}^B \end{aligned} \quad (3.3)$$

Exatamente como na QED, o propagador do gluon não pode ser calculado a partir de (3.3) sem antes quebrarmos a invariância de gauge da teoria.

4. QUANTIZAÇÃO DE TEORIAS DE GAUGE

Para quantizar a QED no gauge de Feynman basta adicionar à lagrangeana (1.2) o termo $-\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\mu)^2$. Se tentarmos usar um procedimento análogo e adicionarmos a (3.3) o termo $-\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\mu^B)^2$, apesar de conseguirmos calcular o propagador do gluon, a matriz S obtida a partir desta Lagrangeana não é unitária. Para entender o que ocorre é interessante utilizar o formalismo de integrais de trajetória (Uma excelente introdução pode ser encontrada em Abers e Lee⁽³⁾).

Podemos escrever todas as funções de Green de uma teoria em termos de integrais de trajetória. Se $\mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i)$ é a lagrangeana desta teoria, pode-se mostrar que a transição vácuo a vácuo é dada por

$$\langle 0|0 \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int \mathcal{L} dx} \quad (4.1)$$

e as funções de Green por

$$\begin{aligned} \langle 0|T \phi_{i_1}(x_1) \dots \phi_{i_n}(x_n)|0 \rangle &= \\ &= \int \mathcal{D}\phi \phi_{i_1}(x_1) \dots \phi_{i_n}(x_n) e^{i \int \mathcal{L} dx} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Se definirmos um funcional gerador:

$$W[\mathcal{J}_i] = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int (\mathcal{L} + \mathcal{J}_i \phi_i) dx} \quad (4.3)$$

podemos escrever as relações acima como

$$\langle 0|0 \rangle = W[0] \quad (4.4)$$

e, lembrando das propriedades das derivadas funcionais,

$$\begin{aligned} \langle 0|T \phi_{i_1}(x_1) \dots \phi_{i_n}(x_n)|0 \rangle &= \\ &= \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n W[\mathcal{J}_i]}{\delta \mathcal{J}_{i_1}(x_1) \dots \delta \mathcal{J}_{i_n}(x_n)} \Big|_{\mathcal{J}_i=0} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Vamos começar examinando a teoria de gauge pura, i.e. aquela onde os únicos campos são os A_μ^B . Neste caso (3.3) se reduz a

$$\mathcal{L} = - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (4.6)$$

A transição vácuo a vácuo desta teoria é

$$W[0] = \int \mathcal{D}A_\mu e^{-i \int dx \frac{F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}}{4}} \quad (4.7)$$

Lembremos que (4.6) é invariante sob transformações de gauge locais que levam A_μ em A_μ^Ω dado pela expressão.*

$$A_\mu^\Omega = \Omega \left[A_\mu + \frac{1}{ig} \partial_\mu \Omega \right] \Omega \quad (4.8)$$

$$\Omega = e^{-i\alpha \cdot t} \quad \text{é um operador do grupo de gauge}$$

Em outras palavras, a ação: $\int dx$ é constante nas órbitas do grupo, as quais são formadas por todos os A_μ^Ω obtidos de um dado A_μ (fixo) fazendo-se Ω percorrer todo o grupo. Devido a esta invariância, a expressão para $W[0]$ está mal definida na mesma na formulação Euclidiana. Isto porque, para a integração em A_μ ao longo das órbitas, a exponencial da ação não fornece nenhum amortecimento. Um modelo simples do que ocorre é fornecido pela integral

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy e^{-y} \quad (4.9)$$

Neste modelo associamos a integração ao longo das órbitas à integração em x . A ação $S = y$ não depende de x e portanto o volume da órbita: $\int_0^\infty dx$ se fatoriza. Esta fatorização do volume da órbita de gauge também ocorre em (4.7). Fadeev e Popov⁽⁷⁾

* A expressão (2.21) que deduzimos é a versão infinitesimal de (4.8). Podemos deduzir (4.8) impondo

argumentaram que este volume deveria ser removido antes de se definir o funcional gerador $W[J_i]$. Comparando (4.1) e (4.3) vemos que $W[J_i]$ é obtido a partir da amplitude de transição vácuo a vácuo $W[0]$ simplesmente adicionando os termos de fontes. A idéia de Fadeev e Popov foi obter um $W'[0]$ do qual o volume (infinito) das órbitas de gauge já tinha sido retirado

$$W[0] = V W'[0] \quad (4.10)$$

e adicionar os termos de fonte a este $W'[0]$.

Fatorizar o volume das órbitas de gauge é equivalente a impor que a integral de trajetório deve ser feita apenas sobre campos A_μ que não estão ligados entre si por meio de uma transformação de gauge. Ou o que é equivalente de cada órbita de gauge devemos tomar um único representante.

Para implementar esta idéia devemos fazer a integração funcional sobre uma hipersuperfície que intercepte cada órbita apenas uma vez. Com isto garantimos que tomamos um único representante de cada órbita. Isto significa que se

$$f^A(A_\mu) = 0 \quad A = 1, 2, \dots, N \quad (4.11)$$

é a equação hipersuperfície, N sendo o número de geradores de grupo, a equação

$$f^A(A_\mu^\Omega) = 0 \quad (4.12)$$

só pode ser satisfeita para um único Ω , uma vez fixado A_μ . A condição $f^A(A_\mu) = 0$ fixa um gauge, um exemplo é o gauge de Feynman: $f^A(A_\mu) = \partial_\mu A_\mu$.

Vamos precisar de uma medida para a integral de trajetória sobre o espaço dos Ω que seja invariante no seguinte sentido

$$\mathcal{D}\Omega = \mathcal{D}(\Omega \Omega') \quad (4.13)$$

qualquer que seja a transformação de gauge local .

Em teoria de integração define-se uma integração invariante sobre um grupo e consequentemente sobre a representação do grupo tal que:

$$d\Omega = d(\Omega \Omega') \quad (4.14)$$

qualquer que seja Ω' pertencente à representação do grupo. Mas neste caso os Ω são independentes de x . Correspondem a

$$\Omega = e^{-i\alpha \cdot t} \quad (4.15)$$

com α = constante, ou o que é equivalente corresponderiam aos $\Omega(x)$ calculados em um ponto x fixo. Para transformações infinitesimais

$$\Omega \simeq 1 - i\alpha \cdot t \quad (4.16)$$

e podemos tomar como

$$d\Omega = d\alpha = d\alpha^1 d\alpha^2 \dots d\alpha^N \quad (4.17)$$

Vamos agora transportar estas idéias para a integral de trajetória. Para cada ponto do espaço podemos definir uma medida como (4.14). Podemos dividir o espaço em m células e tomar um ponto de cada célula na qual definimos a medida. Definimos $\mathcal{D}\Omega$ como o limite do produto destas medidas quando o número de células m tende ao infinito. Continuamos tendo para transformações infinitesimais:

$$\mathcal{D}\Omega = \mathcal{D}\alpha \equiv \mathcal{D}\alpha^1 \mathcal{D}\alpha^2 \dots \mathcal{D}\alpha^N \quad (4.18)$$

Tendo determinado $\mathcal{D}\Omega$ vamos definir a quantidade $\Delta_f[A_\mu]$ através de

$$\Delta_f[A_\mu] \int \mathcal{D}\Omega \prod_A \delta[f^A(A_\mu^A)] = 1 \quad (4.19)$$

Note que o objeto

$$\Delta_f^{-1} [A_\mu] = \int \mathcal{D}\Omega \prod_A \delta [f^A(A_\mu^\Omega)] \quad (4.20)$$

é invariante por transformações de gauge em A_μ . De fato

$$\begin{aligned} \Delta_f^{-1} [A_\mu^{\Omega'}] &= \int \mathcal{D}\Omega \prod_A \delta [f^A(A_\mu^{\Omega'\Omega})] \\ &= \int \mathcal{D}(\Omega\Omega') \prod_A \delta [f^A(A_\mu^{\Omega'\Omega})] \\ &= \int \mathcal{D}\Omega'' \prod_A \delta [f^A(A_\mu^{\Omega''})] = \Delta_f^{-1} [A_\mu] \end{aligned} \quad (4.21)$$

Esta propriedade decorre, portanto, da invariância da métrica sob transformações de gauge. Além disto (4.21) implica em

$$\Delta_f [A_\mu^{\Omega}] = \Delta_f [A_\mu] \quad (4.22)$$

Vamos agora inserir o número 1, na forma dada pela expressão (4.19), em $W[0]$.

$$W[0] = \int \mathcal{D}\Omega \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_f [A_\mu] \prod_A \delta [f^A(A_\mu^\Omega)] e^{i \int \mathcal{L}[A_\mu] dx} \quad (4.23)$$

A exponencial da ação independe de Ω uma vez que a lagrangeana é invariante sob transformações de gauge: $\mathcal{L}[A_\mu] = \mathcal{L}[A_\mu^\Omega]$. Acabamos de mostrar que $\Delta_f [A_\mu]$ também é independente de Ω . Para concluir que a integral em A_μ na expressão (4.23) é independente de Ω resta verificar se podemos substituir $\delta [f^A(A_\mu^\Omega)]$ por $\delta [f^A(A_\mu)]$. Isto pode ser feito. A integral em A_μ é calculada antes da integral em Ω , isto significa que enquanto integramos em A_μ o Ω está fixo. Já mostramos que $\Delta_f^{-1} [A_\mu] = \Delta_f^{-1} [A_\mu^{\Omega'}]$ qualquer que seja Ω' ou, usando a definição de Δ_f^{-1} ,

$$\int \mathcal{D}\Omega \prod_A \delta [f^A(A_\mu^\Omega)] = \int \mathcal{D}\Omega \prod_A \delta [f^A(A_\mu^{\Omega'\Omega})] \quad (4.24)$$

Podemos portanto substituir A_μ^Ω por $A_\mu^{\Omega'}$ onde Ω' é qualquer. Se escolhermos, para cada Ω fixo, $\Omega' = \Omega^{-1}$ substituímos A_μ^Ω por A_μ que é o que queremos. Assim:

$$W[0] = \left(\int \mathcal{D}\Omega \right) \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_f[A_\mu] \prod_A \delta[f^A(A_\mu)] e^{i \int \mathcal{L}[A_\mu] dx} \quad (4.25)$$

Conseguimos portanto fatorizar o volume de gauge: $\int \mathcal{D}\Omega$. Mas antes de definir $W'[\bar{J}_\mu]$ precisamos determinar $\Delta_f[A_\mu]$. Como o fator $\Delta_f[A_\mu]$ é multiplicado por $\prod_A \delta[f^A(A_\mu)]$, na expressão (3.37), basta calcular $\Delta_f(A_\mu)$ para os campos A_μ^Ω na vizinhança de A_μ onde A_μ é a solução das equações $f^A(A_\mu) = 0$. Podemos simplificar ainda mais o problema determinado antes $\Delta_f^{-1}[A_\mu]$ e depois calculando o seu inverso.

$$\Delta_f^{-1}[A_\mu] = \int \mathcal{D}\Omega \prod_A \delta[f^A(A_\mu^\Omega)]$$

Como apenas campos na vizinhança de A_μ vão contribuir para a integral podemos fazer

$$\mathcal{D}\Omega \rightarrow \mathcal{D}\alpha \quad (4.26)$$

$$f^A(A_\mu^\Omega(x)) = f^A(A_\mu(x)) + \int dy [M_f(x,y)]^{AB} \alpha^B(y) + O(\alpha^2) \quad (4.27)$$

Devido à condição $f^A(A_\mu) = 0$ o primeiro termo é nulo, assim,

$$\Delta_f^{-1}[A_\mu] = \int \mathcal{D}\alpha \delta[M_f^{AB} \alpha^B] = [\det M_f]^{-1} \quad (4.28)$$

(4.28) implica que

$$\Delta_f[A_\mu] = \det M_f$$

O operador M_f é facilmente determinado. Dada a condição de gauge $f^A(A_\mu)$, fazemos uma transformação infinitesimal em A_μ e M_f é obtido calculando-se a derivada funcional de (4.27) em relação a $\alpha^B(y)$. Vamos dar dois exemplos, antes porém va-

mos reescrever a transformação infinitesimal dos A_μ

$$A_\mu^{'A} = A_\mu^A - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^A + f^{ABC} \alpha^B A_\mu^C \quad (4.29)$$

No gauge de Feynman $f^A(A_\mu) = \partial_\mu A_\mu^A$

$$\partial_\mu A_\mu^{'A} = \partial_\mu A_\mu^A - \frac{1}{g} \partial^2 \alpha^A + f^{ABC} (\partial_\mu \alpha^B) A_\mu^C + f^{ABC} \alpha^B \partial_\mu A_\mu^C \quad (4.30)$$

o primeiro e o último termo são nulos devido à condição $\partial_\mu A_\mu^A = 0$

$$\partial_\mu A_\mu^{'A}(x) = \frac{1}{g} (-\partial^2 \delta^{AB} + g f^{ABC} A_\mu^C(x) \partial_\mu) \alpha^B(x) \quad (4.31)$$

Calculando a derivada funcional em relação a $\alpha^B(y)$ obtemos,

$$[M_F(x,y)]^{AB} = \frac{1}{g} (-\partial^2 \delta^{AB} - g f^{ABC} A_\mu^C(x) \partial_\mu) \delta(x-y) \quad (4.32)$$

No gauge axial $f^A(A_\mu) = n_\mu A_\mu^A$ (n_μ é um 4-vetor constante arbitrário).

$$n_\mu A_\mu^{'A}(x) = n_\mu A_\mu^A(x) - \frac{1}{g} n_\mu \partial_\mu \alpha^A(x) + f^{ABC} \alpha^B A_\mu^C n_\mu \quad (4.33)$$

Novamente o primeiro e o último termos são nulos e agora

$$[M_A(x,y)]^{AB} = -\frac{\delta^{AB}}{g} (n_\mu \partial_\mu) \delta(x-y) \quad (4.34)$$

Voltemos a $W'[0]$, colocando

$$\det M_F \equiv \det \left| \frac{\delta f^A(x)}{\delta \alpha^B(y)} \right| \quad (4.35)$$

podemos escrevê-lo como:

$$W'[0] = \int \mathcal{D}A_\mu \delta(f^A(A_\mu)) \det \left| \frac{\delta f^A}{\delta \alpha^B} \right| e^{i \int \mathcal{L}[A_\mu] dx} \quad (4.36)$$

Finalmente definimos o funcional gerador como:

$$W'[\mathcal{J}_\mu] = \int \mathcal{D}A_\mu \delta(f^A(A_\mu)) \det \left| \frac{\delta f^A}{\delta \alpha^B} \right| e^{i \int (\mathcal{L}[A_\mu] + \mathcal{J}_\mu A_\mu) dx} \quad (4.37)$$

Esta não é porém a forma mais cômoda para se trabalhar com o gerador funcional. Para podermos determinar as regras de Feynman da teoria precisamos transformar a função e o determinante em exponenciais e obter algo da forma

$$W'[\mathcal{J}] = \int \mathcal{D}A_\mu e^{i \int (\mathcal{L}_{ef} + \mathcal{J}_\mu A_\mu) dx} \quad (4.38)$$

É $\mathcal{L}_{ef}$ que fornece as regras de Feynman.

Vamos cuidar primeiro da função δ . A expressão (4.37) é independente de gauge⁽¹⁾ e portanto não depende das funções f^A .

Assim, podemos, substituir f^A por f'^A definida como:

$$f'^A = f^A - c^A \quad (4.39)$$

onde $c^A(x)$ é uma função arbitrária independente de A_μ^A como $c^A(x)$ independe de A_μ^A :

$$\det \left| \frac{\delta f'^A}{\delta \alpha^B} \right| = \det \left| \frac{\delta f^A}{\delta \alpha^B} \right| \quad (4.40)$$

$$W'[\mathcal{J}_\mu] = \int \mathcal{D}A_\mu \delta(f^A - c^A) \det \left| \frac{\delta f^A}{\delta \alpha^B} \right| e^{i \int (\mathcal{L} + \mathcal{J}_\mu A_\mu) dx} \quad (4.41)$$

Agora multiplicamos (4.41) por uma função de c^A e integramos funcionalmente em c^A . Como $W'[\mathcal{J}_\mu]$ independe de c^A o único efeito desta operação é multiplicar $W'[\mathcal{J}_\mu]$ por uma constante. Como queremos transformar $\delta(f^A - c^A)$ em uma exponencial e fazer a condição de gauge aparecer como uma forma quadrática (para fornecer o termo que permite inverter o propagador do gluon) a escolha apropriada é $\exp[-i/2\xi (\int dx c^A c^A)]$ onde ξ é uma constante

$$W''[\mathcal{I}_\mu] = \int \mathcal{D}c \mathcal{D}A_\mu e^{-\frac{i}{2\xi} \int dx c^A c^A} \delta(f^A - c^A) \det \left| \frac{\delta f^A}{\delta c^A} \right| e^{i \int (\mathcal{L} + \mathcal{I}_\mu \cdot A_\mu) dx} \quad (4.42)$$

$$W''[\mathcal{I}_\mu] = \int \mathcal{D}A_\mu \det \left| \frac{\delta f^A}{\delta \alpha^B} \right| e^{i \int (\mathcal{L} + \mathcal{I}_\mu \cdot A_\mu - \frac{1}{2\xi} f^A f^A) dx} \quad (4.43)$$

Usamos o δ para efetuar a integral funcional em $\mathcal{C}$.

Para exponenciar o determinante usamos uma propriedade de integrais funcionais sobre campos de Grassmann.

$$\det \left| \frac{\delta f^A(x)}{\delta \alpha^B(y)} \right| = \int \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\omega e^{-i \int \eta^A(x) \frac{\delta f^A(x)}{\delta \alpha^B(y)} \omega^B(y) dx dy} \quad (4.44)$$

Os campos η^A e ω^B são conhecidos como ghosts de Faddeev e Popov. Escolhemos η^A e ω^B reais. Eles possuem as seguintes propriedades

$$\eta^A \eta^B + \eta^B \eta^A = 0 \quad (4.45a)$$

$$\omega^A \omega^B + \omega^B \omega^A = 0 \quad (4.45b)$$

$$\eta^A \omega^B + \omega^B \eta^A = 0 \quad (4.45c)$$

$$(\eta^A)^2 = (\omega^B)^2 = 0 \quad (4.45d)$$

Tomaremos nosso gerador funcional na forma

$$\begin{aligned} X[\mathcal{I}_\mu, N, W] &= \\ &= \exp i \left\{ \int dx \left[\mathcal{L} - \frac{1}{2\xi} (f^A)^2 - \eta^A \int dy \left(\frac{\delta f^A}{\delta \alpha^B} \omega^B \right) + \mathcal{I}_\mu \cdot A_\mu + \eta \cdot N + \omega \cdot W \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.46)$$

Note que introduzimos fontes também para os ghosts. Estas fontes: N^A e W^A também são funções de Grassmann. Neste ca-

so os termos $\eta.N$ e $w.W$ se comportam como funções usuais (toda vez que comutamos $\eta.N$ ou $w.W$ com uma função de Grassmann temos sempre duas comutações a fazer e o sinal de menos acaba se cancelando) e não há mistura na exponencial.

Poderíamos ter feito toda esta discussão incluindo os campos Φ . Valem todos os argumentos dados e a única mudança consiste em fazer

$$e^{i \int \mathcal{L}[A_\mu] dx} \rightarrow \int \mathcal{D}\Phi^\dagger \mathcal{D}\Phi e^{i \int (\mathcal{L}[\Phi, \Phi^\dagger, D_\mu \Phi, D_\mu^\dagger \Phi^\dagger] + \mathcal{L}[A_\mu]) dx} \quad (4.47)$$

e subentender que a cada transformação de gauge dos A_μ , devemos fazer simultaneamente

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Omega \Phi \quad (4.48)$$

$$\Phi^\dagger \rightarrow \Phi'^\dagger = \Phi^\dagger \Omega^\dagger \quad (4.49)$$

de modo a assegurar a invariância de $\mathcal{L}[\Phi, \Phi^\dagger, D_\mu \Phi, D_\mu^\dagger \Phi^\dagger]$.

Acrescentando fontes também para os Φ e $\Phi^\dagger$ obtemos

$$\begin{aligned} X[\mathcal{J}_\mu, k, k^\dagger, \eta, w] &= \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\Phi^\dagger \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\eta \mathcal{D}w \times \\ &\times \exp \left\{ i \int dx \left[\mathcal{L} - \frac{1}{2\xi} (f^A)^2 - \eta^A \int dy \left(\frac{\delta f^A}{\delta \omega^B} \omega^B \right) + \mathcal{J}_\mu A_\mu + k^\dagger \Phi + \Phi^\dagger k + \eta N + w.W \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.50)$$

No formalismo de integrais funcionais se os Φ e $\Phi^\dagger$ forem campos de férmions eles devem ser tomados como campos de Grassmann, assim como suas fontes k e $k^\dagger$.

Ao lermos as regras de Feynman da Lagrangeana efetiva em (4.50) os campos de ghost, apesar de terem sido introduzidos como um artifício para exponenciar o determinante, têm o mesmo status dos outros campos. A eles estão associados vértices e propagadores exatamente como aos outros campos da teoria.

5. A CROMODINÂMICA QUÂNTICA NO GAUGE AXIAL

Vamos escrever o gerador funcional de QCD no gauge de Feynman e no gauge axial. As expressões de $\delta f^A / \delta \alpha^B$ já foram calculadas, veja (4.32), (4.34).

No gauge de Feynman

$$\begin{aligned} X[J_\mu, K, \bar{K}, N, W] = & \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\omega \times \\ & \times \exp \left\{ i \int d^4x \left[\mathcal{L} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu^B)^2 + \eta^A (\delta^{AB} \partial^2 - g f^{ABC} A_\mu^C \partial_\mu) \omega^B \right. \right. \\ & \left. \left. + J_\mu A_\mu + \bar{\Psi} K + \bar{K} \Psi + \eta N + \omega W \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.1)$$

No gauge axial:

$$\begin{aligned} X[J_\mu, K, \bar{K}, N, W] = & \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\omega \times \\ & \times \exp \left\{ i \int d^4x \left[\mathcal{L} - \frac{1}{2\xi} (\eta_\mu A_\mu^B)^2 + \eta^A \eta_\mu \partial_\mu \omega^A \right. \right. \\ & \left. \left. + J_\mu A_\mu + \bar{\Psi} K + \bar{K} \Psi + \eta N + \omega W \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Note que em ambos os casos os determinantes eram proporcionais a $1/g$. Podemos sempre fatorizar o termo $\det(1/g)$ ($\det 1/g M = \det 1/g \det M$) antes de exponenciar o determinante e desprezar esta constante.

Comparando (5.1) e (5.2) verificamos que o gauge axial possui uma propriedade notável. Neste gauge os ghosts estão completamente desacoplados dos outros campos da teoria. No gauge de Feynman os ghosts se acoplam aos campos A_μ^B através do termo: $-ig \eta^A f^{ABC} A_\mu^C \partial_\mu \omega^B$. Quando trabalhamos no gauge axial pode-

mos simplesmente esquecer os ghosts. Esta propriedade, como veremos mais adiante, faz com que as identidades de Slavnov-Taylor tenham uma estrutura simples, semelhante às identidades de Ward da QED*.

As regras de Feynman podem ser lidas diretamente da lagrangeana efetiva. O procedimento se acha explicado em detalhe no Diagrammar⁸.

Elas são as seguintes

<u>quark</u>	
	$\bar{u}_j^a(p, \sigma)$	p, q — 4 momentos
	$u_j^a(p, \sigma)$	
	<u>anti-quark</u>	$a, b = 1, 2, 3$ — cores dos quarks
$\bar{v}_j^b(q, \zeta)$	
	$v_j^b(q, \zeta)$	σ, ζ — componente z do spin
	<u>gluon</u>
$\epsilon_\mu^A(k, \lambda)$	k — 4 momento $A=1, \dots, 8$ — cores dos gluons λ — polarização

* É interessante sublinhar que no caso da QED, nos gauges mais simples, o termo de ghosts não se acopla com os outros campos. Esta é a razão pela qual a prescrição tradicional de quantizar a teoria simplesmente acrescentando o termo que fixa o gauge funciona. Mas mesmo na QED, em gauges mais complicados (e.g. $f(A_\mu) = \partial_\mu A_\mu + \lambda A_\mu A_\mu$) os ghosts são necessários.

Vértices

$$ig \gamma_\mu (t^A)^{ab}$$

$$-ig f^{ABC} [\delta_{\beta\gamma} (q-p)_\alpha + \delta_{\gamma\alpha} (k-q)_\beta + \delta_{\alpha\beta} (p-k)_\gamma]$$

$$-g^2 [f^{EAC} f^{EBD} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\gamma\beta}) + f^{EAD} f^{EBC} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} - \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta}) + f^{EAB} f^{ECD} (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma})]$$

Propagadores

$$g^{ab} \frac{-i \not{q} + m}{q^2 + m^2 - i\epsilon}$$

$$\frac{\delta^{AB}}{k^2 - i\epsilon} \Pi_{\mu\nu}(k)$$

$$\Pi_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} \quad (\text{gauge de Feynman})$$

$$\Pi_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - \frac{n_\mu k_\nu + n_\nu k_\mu}{n \cdot k} + \frac{n^2 k_\mu k_\nu}{(n \cdot k)^2} \quad (\text{gauge axial})$$

Há um fator de $(2\pi)^4 i$ para cada vértice e um fator $[(2\pi)^4 i]^{-1}$ para cada propagador.

O propagador do gluon no gauge axial na forma acima corresponde ao limite $\xi \rightarrow 0$. Se tomarmos os termos quadráticos nos campos

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^B - \partial_\nu A_\mu^B)^2 - \frac{1}{2\xi} (\eta_\mu A_\mu^B)^2 = \\
 & = \frac{1}{2} A_\mu^A \delta^{AB} \left(\delta_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu - \frac{1}{\xi} \eta_\mu \eta_\nu \right) A_\nu^B + \text{termos de superfície}
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

o propagador é dado pelo inverso de

$$-\delta^{AB} \left(\delta_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu - \frac{1}{\xi} \eta_\mu \eta_\nu \right)
 \tag{5.4}$$

No espaço dos momentos obtemos

$$\delta^{AB} \left(\delta_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu + \frac{1}{\xi} \eta_\mu \eta_\nu \right)
 \tag{5.5}$$

e seu inverso é dado por

$$\frac{\delta^{AB}}{k^2 - i\epsilon} \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu \eta_\nu + k_\nu \eta_\mu}{n \cdot k} + \frac{n^2 k_\mu k_\nu}{(n \cdot k)^2} + \xi \frac{k^2 k_\mu k_\nu}{(n \cdot k)^2} \right]
 \tag{5.6}$$

O último termo, para grandes momentos, tende a uma constante o que leva a problemas de renormalização. Mas podemos nos livrar dele fazendo $\xi \rightarrow 0$ e obtendo assim a forma usual do propagador.

6. A TRANSFORMAÇÃO DE BECCHI, ROUET E STORA

Devido ao termo que fixa o gauge e aos ghosts a lagrangeana da QCD não é mais invariante por transformações de gauge locais. Entretanto é possível achar uma transformação que deixa a lagrangeana invariante.

Vamos apresentar a transformação de Becchi-Rouet-Stora (TBRS) primeiramente para a QED no gauge de Feynman. Neste caso

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \bar{\Psi} [\gamma_{\mu} (\partial_{\mu} - ieA_{\mu}) + m] \Psi - \frac{1}{2} (\partial_{\mu} A_{\mu})^2 + \eta \partial^2 \omega \quad (6.1)$$

Se não houvesse os dois últimos termos $\mathcal{L}$ seria invariante sob a transformação de gauge local (infinitesimal)

$$\delta \Psi = ie\alpha \Psi ; \quad \delta \bar{\Psi} = -ie \bar{\Psi} \alpha ; \quad \delta A_{\mu} = \partial_{\mu} \alpha \quad (6.2)$$

(recaímos em (1.4) e (1.10) fazendo $\alpha \rightarrow -\frac{\alpha}{e}$)

A variação do termo que fixa o gauge e do termo de ghosts em (6.1) é

$$-(\partial_{\mu} A_{\mu})(\partial_{\nu} \delta A_{\nu}) + \delta \eta \partial^2 \omega + \eta \partial^2 \delta \omega \quad (6.3)$$

Conseguimos anular esta variação se impusermos que

$$\delta A_{\nu} = \partial_{\nu} (\sigma \omega) ; \quad \delta \eta = \partial_{\mu} A_{\mu} ; \quad \delta \omega = 0 \quad (6.4a)$$

σ é uma constante. Se σ é um parâmetro infinitesimal a transformação de A_{ν} em (6.4) é uma transformação de gauge infinitesimal. Identificando $\sigma \omega$ com o parâmetro α e definindo.

$$\delta \Psi = ie(\sigma \omega) \Psi ; \quad \delta \bar{\Psi} = -ie \bar{\Psi} (\sigma \omega) \quad (6.4b)$$

conseguimos uma transformação com a propriedade desejada.

O procedimento acima, entretanto, não é correto. De fato, se lembrarmos que η , ω , Ψ e $\bar{\Psi}$ são funções de Grassmann, vemos que a transformação (6.4) mistura funções de Grassmann, que representam campos de férmions, com funções usuais, que representam campos de bósons. Como resultado os novos campos não tem um caráter fermiônico ou bosônico definido. Mas este problema pode ser resolvido facilmente substituindo σ em (6.4) por um número de Grassmann ζ real e constante. ζ anticomuta com

os outros campos fermiônicos e consigo mesmo, portanto

$$\zeta^2 = 0 \quad (6.5)$$

A transformação correta é

$$\begin{aligned} \delta A_\nu &= \partial_\nu (\zeta \omega) ; \quad \delta \eta = \zeta \partial_\mu A_\mu ; \quad \delta \omega = 0 \\ \delta \psi &= ie (\zeta \omega) \psi ; \quad \delta \bar{\psi} = -ie \bar{\psi} (\zeta \omega) \end{aligned} \quad (6.6)$$

O termo $\zeta \omega$ se comporta como uma função usual. Para comutar $\zeta \omega$ com uma função de Grassmann precisamos comutar ζ e ω . Cada uma destas comutações produz um sinal de menos que acabam se anulando. ζ não precisa ser infinitesimal, a transformação (6.6) garante a invariância de $\mathcal{L}$ a menos de termos de ordem $(\zeta \omega)^2$. Mas devido a (6.5) estes termos são nulos.

Vamos aplicar o mesmo raciocínio para a QCD no gauge axial

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^B F_{\mu\nu}^B - \bar{\psi}_j^a [\gamma_\mu (\partial_\mu \delta^{ab} - ig (t^B)^{ab} A_\mu^B) + m] \psi_j^b - \\ &- \frac{1}{2} (\eta_\mu A_\mu^B)^2 + \eta^B \eta_\mu \partial_\mu \omega^B \end{aligned} \quad (6.7)$$

A variação dos dois últimos termos é

$$- \eta_\mu A_\mu^B \eta_\nu \delta A_\nu^B + \delta \eta^B \eta_\mu \partial_\mu \omega^B + \eta^B \eta_\mu \partial_\mu \delta \omega^B \quad (6.8)$$

Novamente escolhemos uma transformação com a estrutura de uma transformação de gauge infinitesimal para o campo A_ν^B . Colocando $\alpha = -g(\zeta \omega)$ em (2.21) obtemos

$$\delta A_\nu^B = \partial_\nu (\zeta \omega^B) - g f^{BCD} (\zeta \omega^C) A_\nu^D \quad (6.9a)$$

Note que

$$f^{BCD} (\eta_\mu A_\mu^B) (\eta_\nu A_\nu^B) = 0 \quad (6.10)$$

devido à antisimetria de f^{BCD} .

Portanto

$$-n_\mu A_\mu^B n_\nu \delta A_\nu^B = -n_\mu A_\mu^B n_\nu \partial_\nu (\zeta \omega^B)$$

e escolhendo

$$\delta \eta^B = \zeta n_\mu A_\mu^B, \quad \delta \omega^B = 0 \quad (6.9b)$$

garantimos que (5.8) se anula.

A transformação dos campos ψ_j^a e $\bar{\psi}_j^a$, para que o restante da lagrangeana seja invariante, também tem ter a estrutura de uma transformação de gauge infinitesimal com parâmetro α identificado com $-g(\zeta \omega)$. Assim

$$\begin{aligned} \delta \psi_j^a &= ig(t^B)^{ab} (\zeta \omega^B) \psi_j^b, \\ \delta \bar{\psi}_j^a &= -ig \bar{\psi}_j^b (t^B)^{ba} (\zeta \omega^B) \end{aligned} \quad (6.9c)$$

Em resumo, é possível construir uma transformação que deixa invariante as lagrangeanas completas da QED e da QCD desde que se introduzam números de Grassmann.

Uma propriedade bastante importante é que o Jacobiano destas transformações é igual a 1.

Para (6.9) temos

$$J = \frac{\partial (A_\mu^B(x), \bar{\psi}_j^a(x), \psi_j^a(x), \eta^B(x), \omega^B(x))}{\partial (A_\nu^C(y), \psi_k^b(y), \bar{\psi}_k^b(y), \eta^C(y), \omega^C(y))}$$

(6.11)

Este jacobiano pode ser escrito de forma simbólica co
mo:

$$\begin{vmatrix}
 \delta^{BC} \delta_{\mu\nu} & 0 & 0 & 0 & \delta^{BC} \partial_\mu \\
 0 & \delta_{jk} [\delta^{ba} - ig(t^B)^{ba} \zeta \omega^B] & 0 & 0 & -ig \bar{\psi}^b (t^B)^{ba} \zeta \delta^{BC} \\
 0 & 0 & \delta_{jk} [\delta^{ab} + ig(t^B)^{ab} \zeta \omega^B] & 0 & -ig \delta^{BC} \zeta (t^B)^{ab} \psi^b \\
 \zeta \eta_\mu \delta^{BC} & 0 & 0 & \delta^{BC} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \delta^{BC}
 \end{vmatrix} \delta^4(x-y)$$

(6.12)

Esta matriz é diagonal nos índices $a, b = 1, 2, 3$ (cores dos fermions) e diagonal na cor dos gluons $B, C = 1, 2, \dots, 8$. Se expandirmos o determinante por Laplace a partir da última linha concluímos que o determinante é igual ao produto dos elementos da diagonal (que são matrizes). Lembrando que $\zeta^2 = 0$ é fácil concluir que este produto vale 1.

Vamos usar agora a T BRS para gerar as identidades de Slavnov Taylor da QCD no gauge axial.

7. IDENTIDADES DE SLAVNOV TAYLOR

O gerador funcional da QCD no gauge axial é dado por

$$X = \int \mathcal{D}A'_\mu \mathcal{D}\bar{\Psi}' \mathcal{D}\Psi' \mathcal{D}\eta' \mathcal{D}w' \times$$

$$\times e^{i \int dx [\mathcal{L}' + J_\mu^A A'^A_\mu + \bar{K}_j^a \Psi_j'^a + \bar{\Psi}_j'^a K_j^a + \eta'^A N^A + w'^A W^A]}$$
(7.1)

$\mathcal{L}$ é a lagrangeana completa e é dado por (6.7).

Fazendo agora uma transformação de Becchi-Rovet-Stora nos campos

$$A'_\mu = A_\mu + \delta A_\mu ; \quad \bar{\Psi}'_j = \bar{\Psi}_j + \delta \bar{\Psi}_j ; \quad \Psi'_j = \Psi_j + \delta \Psi_j ; \quad \eta' = \eta + \delta \eta ; \quad w' = w$$

(a forma das variações é dado por (6.9)) obtemos, lembrando que o Jacobiano desta transformação é 1 e que $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$.

$$X = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\eta \mathcal{D}w \times e^{i \Sigma}$$

$$\times e^{i \int dx (J_\mu^A \delta A_\mu^A + \bar{K}_j^a \delta \Psi_j^a + \delta \bar{\Psi}_j^a K_j^a + \delta \eta^A N^A)}$$
(7.2)

onde

$$\Sigma = \int d^4x [\mathcal{L} + J_\mu^A A_\mu^A + \bar{K}_j^a \Psi_j^a + \bar{\Psi}_j^a K_j^a + \eta^A N^A + w^A W^A]$$
(7.3)

Examinando (6.9) vemos que todas as variações são proporcionais a ζ . Como $\zeta^2 = 0$, uma exponencial do tipo $e^{i\zeta A}$ pode ser escrita como

$$e^{i\zeta A} = 1 + i\zeta A \quad (7.4)$$

Esta expansão é exata uma vez que os termos de ordem mais alta são nulos. Expandindo a segunda exponencial em (7.2) obtemos:

$$\begin{aligned} X = & \int DA_\mu D\bar{\Psi} D\Psi D\eta D\omega e^{i\Sigma} \times \\ & \times \left[1 + i \int d^4x \left(J_\mu^A \delta A_\mu^A + \bar{K}_j^a \delta \psi_j + \delta \bar{\Psi}_j^a K_j + \delta \eta^A N^A \right) \right] \end{aligned} \quad (7.5)$$

Usando

$$\int DA_\mu D\bar{\Psi} D\Psi D\eta D\omega e^{i\Sigma} 1 = X$$

podemos cancelar o X do lado esquerdo de (7.5) e ficamos com

$$\begin{aligned} & \int DA_\mu D\bar{\Psi} D\Psi D\eta D\omega e^{i\Sigma} \left\{ \int d^4x \left[J_\mu^A (\delta^{AB} \partial_\mu - g f^{ABC} A_\mu^C) \omega^B \right. \right. \\ & \left. \left. - ig (t^c)^{ab} \bar{K}_j^a \omega^c \psi_j^b + ig (t^c)^{ba} \bar{\Psi}_j^b \omega^c K_j^a + \eta_\mu A_\mu^A N^A \right] \right\} \end{aligned} \quad (7.6)$$

Na expressão (7.6) substituímos as variações por suas expressões e fatorizamos o termo ζ . Para isto precisamos comutá-lo com campos de Grassmann, quando o número de comutações é ímpar, há mudança de sinal.

Vamos mostrar agora que

$$e^{i\Sigma} \omega^B(x) = -\frac{1}{i} \frac{\delta e^{i\Sigma}}{\delta \omega^B(x)} \quad (7.7)$$

O sinal de menos decorre do fato das derivadas funcionais em relação a funções de Grassmann também anticomutam. Assim, a regra de cadeia tem a seguinte forma ($C_i(x)$ = funções de Grassmann logo abaixo)

$$\frac{\delta}{\delta C_i(x)} (C_j(y) C_k(z)) = \frac{\delta C_j(y)}{\delta C_i(x)} C_k(z) - C_j(y) \frac{\delta C_k(z)}{\delta C_i(x)} \quad (7.8)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \frac{\delta e^{i\Sigma}}{\delta \omega^B(x)} &= \frac{\delta}{\delta \omega^B(x)} \left(i \int dx' \omega^A(x') W^A(x') \right) e^{i\Sigma} \\ &= -i \int dx' \omega^A(x') \delta^{AB} \delta(x-x') e^{i\Sigma} = -i \omega^B(x) e^{i\Sigma} \end{aligned} \quad (7.9)$$

O termo $e^{i\Sigma}$ pode ser comutado para a esquerda porque ele só contém bilineares nos campos de Grassmann (veja 7.3).

De modo análogo

$$e^{i\Sigma} A_\mu^c \omega^B = -\frac{1}{i^2} \frac{\delta^2 e^{i\Sigma}}{\delta \omega^B \delta J_\mu^c} \quad (7.10)$$

e assim por diante. Exprimindo todas as variáveis de integração em termos de derivadas funcionais obtemos:

$$\begin{aligned}
& \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\eta \mathcal{D}w \int d^4x \left[-J_\mu^A \partial_\mu \delta^{ab} \frac{1}{i} \frac{\delta e^{i\Sigma}}{\delta W^B} + \right. \\
& + g J_\mu^A f^{ABC} \frac{1}{i^2} \frac{\delta^2 e^{i\Sigma}}{\delta W^B \delta J_\mu^C} - ig(t^c)^{ab} \bar{K}_j^a \frac{1}{i^2} \frac{\delta^2 e^{i\Sigma}}{\delta \bar{K}_j^b \delta W^c} \\
& \left. - ig(t^c)^{ba} \frac{1}{i^2} \frac{\delta^2 e^{i\Sigma}}{\delta W^c \delta K_j^b} + n_\mu \frac{1}{i} \frac{\delta e^{i\Sigma}}{\delta J_\mu^A} N^A \right] = 0
\end{aligned}
\tag{7.11}$$

Como as derivadas funcionais independem das variáveis de integração podemos colocá-las para fora da integral funcional e, usando a definição de X , obtemos

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \left[-i J_\mu^A \partial_\mu \frac{\delta X}{\delta W^A} + g J_\mu^A f^{ABC} \frac{\delta^2 X}{\delta W^B \delta J_\mu^C} - ig(t^c)^{ab} \bar{K}_j^a \frac{\delta^2 X}{\delta \bar{K}_j^b \delta W^c} \right. \\
& \left. - ig(t^c)^{ba} \frac{\delta^2 X}{\delta W^c \delta K_j^b} K_j^a + i n_\mu \frac{\delta X}{\delta J_\mu^A} N^A \right] = 0
\end{aligned}
\tag{7.12}$$

O gerador Z das funções de Green conexas é dado por⁽³⁾

$$X = e^{iZ} \tag{7.13}$$

As funções de Green conexas podem ser expressas como derivadas funcionais de Z em relação às fontes que depois são colocadas iguais a zero (exatamente como a expressão (4.5) com $W \equiv Z$).

$$\frac{\delta X}{\delta J_\mu^c} = i \frac{\delta Z}{\delta J_\mu^c} e^{iZ} \Rightarrow \frac{\delta^2 X}{\delta W^B \delta J_\mu^c} = i \frac{\delta^2 Z}{\delta W^B \delta J_\mu^c} e^{iZ} + i^2 \frac{\delta Z}{\delta J_\mu^c} \frac{\delta Z}{\delta W^B} e^{iZ} \quad (7.14)$$

$$\frac{\delta X}{\delta W^c} = i \frac{\delta Z}{\delta W^c} e^{iZ} \Rightarrow \frac{\delta^2 X}{\delta \bar{K}_j^b \delta W^c} = i \frac{\delta^2 Z}{\delta \bar{K}_j^b \delta W^c} e^{iZ} + i^2 \frac{\delta Z}{\delta W^c} \frac{\delta Z}{\delta \bar{K}_j^b} e^{iZ} \quad (7.15)$$

Analogamente

$$\frac{\delta^2 X}{\delta W^c \delta K_j^b} = i \frac{\delta^2 Z}{\delta W^c \delta K_j^b} e^{iZ} - i^2 \frac{\delta Z}{\delta K_j^b} \frac{\delta Z}{\delta W^c} e^{iZ} \quad (7.16)$$

Os termos

$$\frac{\delta^2 Z}{\delta W^B \delta J_\mu^c}, \quad \frac{\delta^2 Z}{\delta \bar{K}_j^b \delta W^c}, \quad \frac{\delta^2 Z}{\delta K_j^b \delta W^c} \quad (7.17)$$

quando colocamos as fontes iguais a zero, dão termos de interação entre o ghost ω^B e os campos A_μ^c , ψ_j^b e $\bar{\psi}_j^b$ respectivamente. Em notação gráfica

$$(7.18)$$

Como no gauge axial os gluons se desacoplam dos outros campos estes termos devem se anular. Sô neste estágio, em que temos funções de Green conexas, podemos usar um argumento deste tipo. Conforme podemos ver examinando (7.14), por exemplo, $\delta^2 X / \delta W^B \delta J_\mu^c$ não representa necessariamente uma interação entre ω^B e A_μ^c .

Como X inclui funções desconexas podemos ter

$$(7.19)$$

Assim, desprezando os termos que dão interações entre gluons e os outros campos da teoria obtemos

$$\begin{aligned} \int d^4x \left[-J_\mu^A \partial_\mu \frac{\delta Z}{\delta W^A} + g J_\mu^A f^{ABC} \frac{\delta Z}{\delta J_\mu^C} \frac{\delta Z}{\delta W^B} + \right. \\ \left. + ig(t^c)^{ab} \bar{K}_j^a \frac{\delta Z}{\delta W^c} \frac{\delta Z}{\delta \bar{K}_j^b} + ig(t^c)^{ba} \frac{\delta Z}{\delta K_j^b} \frac{\delta Z}{\delta W^c} K_j^a \right. \\ \left. + n_\mu \frac{\delta Z}{\delta J_\mu^A} N^A \right] = 0 \end{aligned} \quad (7.20)$$

As funções de Green conexas ainda não são os objetos mais simples da teoria. Podemos expressá-las em termos das funções de Green 1 PI que são aquelas que não podem ser separadas em duas partes desconexas quando eliminamos uma linha interna. O gerador das 1 PI é dado por⁽³⁾

$$\begin{aligned} \Gamma[\check{A}_\mu, \check{\Psi}, \check{\bar{\Psi}}, \check{\eta}, \check{\omega}] = Z[J, \bar{K}, K, N, W] \\ - \int d^4x [J_\mu^A \check{A}_\mu^A + \bar{K}_j^a \check{\Psi}_j^a + \check{\bar{\Psi}}_j^a K_j^a + \check{\eta}^A N^A + \check{\omega}^A W^A] \end{aligned}$$

$$(7.21)$$

Os campos clássicos são definidos como

$$\begin{aligned} \check{A}_\mu^A &= \frac{\delta Z}{\delta J_\mu^A} ; \quad \check{\psi}_j^a = \frac{\delta Z}{\delta \bar{K}_j^a} ; \quad \check{\bar{\psi}}_j^a = -\frac{\delta Z}{\delta K_j^a} ; \\ \check{\eta}^A &= -\frac{\delta Z}{\delta N^A} ; \quad \check{\omega}^A = -\frac{\delta Z}{\delta W^A} . \end{aligned} \quad (7.22)$$

e valem as relações duais:

$$\begin{aligned} J_\mu^A &= -\frac{\delta \Gamma}{\delta \check{A}_\mu^A} ; \quad \bar{K}_j^a = \frac{\delta \Gamma}{\delta \check{\bar{\psi}}_j^a} ; \quad K_j^a = \frac{\delta \Gamma}{\delta \check{\psi}_j^a} ; \\ N^A &= -\frac{\delta \Gamma}{\delta \check{\eta}^A} ; \quad W^A = -\frac{\delta \Gamma}{\delta \check{\omega}^A} . \end{aligned} \quad (7.23)$$

Usando (7.22) e (7.23) podemos escrever (7.20) como:

$$\begin{aligned} \int d^4x \left[-\frac{\delta \Gamma}{\delta \check{A}_\mu^B} (\partial_\mu \check{\omega}^B) + g f^{ABC} \frac{\delta \Gamma}{\delta \check{A}_\mu^A} \check{A}_\mu^C \check{\omega}^B \right. \\ \left. - ig (t^B)^{de} \frac{\delta \Gamma}{\delta \check{\psi}_j^d} \check{\omega}^B \check{\psi}_j^e - ig (t^B)^{ed} \check{\bar{\psi}}_i^e \check{\omega}^B \frac{\delta \Gamma}{\delta \check{\bar{\psi}}_i^d} \right. \\ \left. - \eta_\mu \check{A}_\mu^A \frac{\delta \Gamma}{\delta \check{\eta}^A} \right] = 0 \end{aligned} \quad (7.24)$$

(7.24) é o núcleo gerador de todas as identidades de Slavnov-Taylor da QCD no gauge axial. Elas são geradas aplicando-se derivadas funcionais a (7.24) e em seguida colocando-se os campos clássicos iguais a zero. Para facilitar o trabalho é

interessante expandir Γ em relação aos campos clássicos*

$$\begin{aligned}
 \Gamma = & - \int d^4x d^4y \check{\eta}^A(x) [\Delta_G^{-1}(x,y)]^{AB} \check{\omega}^B(y) \\
 & - \int d^4x d^4y \check{\Psi}_i^a(x) [S_{ij}^{-1}(x,y)]^{ab} \check{\Psi}_j^b(y) \\
 & - \int d^4x d^4y [\Delta_{\mu\nu}^{-1}(x,y)]^{AB} \check{A}_\mu^A(x) \check{A}_\nu^B(y) \\
 & + \int d^4x d^4y d^4z \check{\Psi}_i^a(x) \Gamma_{ij\mu}^{abc}(x,y|z) \check{\Psi}_j^b(y) \check{A}_\mu^c(z) \\
 & + \int d^4x d^4y d^4z \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{ABC}(x,y,z) \check{A}_\alpha^A(x) \check{A}_\beta^B(y) \check{A}_\gamma^C(z) \\
 & + \int d^4x d^4y d^4z d^4t \check{\Psi}_i^a(x) \Gamma_{ij\mu\nu}^{abcd}(x,y|z,t) \check{\Psi}_j^b(y) \check{A}_\mu^c(z) \check{A}_\nu^d(t) \\
 & + \dots
 \end{aligned}
 \tag{7.25}$$

Aplicando o operador

$$\frac{\delta^3}{\delta \check{\Psi}_j^{b'}(x_2) \delta \check{\omega}^{B'}(x_3) \delta \check{\Psi}_i^{a'}(x_1)}$$

à expressão (7.24), usando (7.25) e em seguida colocando os campos clássicos iguais a zero obtemos:

* O sinal de menos na frente dos três primeiros termos é colocado para que possamos interpretar Δ_G^{-1} , S_{ij}^{-1} , $\Delta_{\mu\nu}^{-1}$ como o inverso dos propagadores dos ghosts, quarks e gluons respectivamente. A função de dois pontos é igual a menos o inverso do propagador.

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \left\{ \Gamma_{ij\mu}^{a'b'\beta'}(x_1, x_2|x) \partial_\mu \delta(x-x_3) \right. \\
& \quad - ig (t^{B'})^{db'} [S_{ij}^{-1}(x_1, x)]^{a'd} \delta(x-x_3) \delta(x-x_3) \\
& \quad \left. + ig (t^{B'})^{ad} [S_{ij}^{-1}(x, x_2)]^{db'} \delta(x-x_1) \delta(x-x_3) \right\} = 0
\end{aligned} \tag{7.26}$$

Integrando-se em x , retirando-se as linhas dos índices e colocando-se $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ chega-se a

$$\begin{aligned}
& -\partial_\mu^{(z)} \Gamma_{ij\mu}^{ab\beta}(x, y|z) - ig [S_{ij}^{-1}(x, y)]^{ad} (t^B)^{db} \delta(y-z) \\
& \quad + ig (t^B)^{ad} [S_{ij}^{-1}(x, y)]^{db} \delta(z-x) = 0
\end{aligned} \tag{7.27}$$

Para passar para o espaço dos momentos devemos calcular a transformada de Fourier. Usando a invariância translacional das funções de Green que diz que

$$\Gamma_{ij\mu}^{ab\beta}(x, y|z) = \Gamma_{ij\mu}^{ab\beta}(y-x|z-x) \tag{7.28a}$$

$$[S_{ij}^{-1}(x, y)]^{ab} = [S_{ij}^{-1}(y-x)]^{ab} \tag{7.28b}$$

ou de um modo geral

$$\Gamma \dots (x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_m, | z_1, \dots, z_n, \dots) =$$

$$= \Gamma \dots (x_2 - x_1, \dots, x_l - x_1, y_1 - x_1, \dots, y_m - x_1, | z_1 - x_1, \dots, z_n - x_1, \dots) \quad (7.28c)$$

concluimos que

$$\begin{aligned} & \int d^4x d^4y d^4z e^{ipx} e^{iqy} e^{ikz} (-) \delta_\mu^{(z)} \Gamma_{ij\mu}^{abB}(x, y | z) \\ &= (2\pi)^4 \delta(p+q+k) i k_\mu \Gamma_{ij\mu}^{abB}(q | k) \end{aligned} \quad (7.29)$$

$$\begin{aligned} & \int d^4x d^4y d^4z e^{ipx} e^{iqy} e^{ikz} (-i) g [S_{ij}^{-1}(x, y)]^{ad} (t^B)^{db} \delta(y-z) \\ &= (2\pi)^4 \delta(p+q+k) (-ig) [\tilde{S}_{ij}^{-1}(q+k)]^{ad} (t^B)^{db} \end{aligned} \quad (7.30)$$

$$\begin{aligned} & \int d^4x d^4y d^4z e^{ipx} e^{iqy} e^{ikz} ig (t^B)^{ad} [S_{ij}^{-1}(x, y)]^{db} \delta(z-x) \\ &= (2\pi)^4 \delta(p+q+k) ig (t^B)^{ad} [\tilde{S}_{ij}(q)]^{db} \end{aligned} \quad (7.31)$$

Portanto

$$\begin{aligned} & i k_\mu \tilde{\Gamma}_{ij\mu}^{abB}(q | k) - ig [\tilde{S}_{ij}^{-1}(q+k)]^{ad} (t^B)^{db} \\ & + ig (t^B)^{ad} [\tilde{S}_{ij}^{-1}(q)]^{db} = 0 \end{aligned} \quad (7.32)$$

Mas

$$\tilde{\Gamma}_{ij\mu}^{abB}(q|k) = g(t^B)^{ab} \delta_{ij} \tilde{\Gamma}_\mu(q|k) \quad (7.33)$$

$$[\tilde{S}_{ij}^{-1}(p)]^{ab} = \delta^{ab} \delta_{ij} \tilde{S}^{-1}(p) \quad (7.34)$$

(em ordem mais baixa $\tilde{\Gamma}_\mu = i\gamma_\mu$ e $\tilde{S}^{-1}(p) = i\not{p} + m$).

Substituindo (7.33) e (7.34) em (7.32) obtemos

$$k_\mu \tilde{\Gamma}_\mu(q|k) - \tilde{S}^{-1}(q+k) + \tilde{S}^{-1}(q) = 0 \quad (7.35)$$

Esta expressão tem a mesma aparência da identidade de Ward da QED. Toda a dedução que fizemos vale, passagem por passagem, para a QED, desde que suprimamos todos os índices de cor, de sabor, coloquemos $t^A = 1$ e $f^{ABC} = 0$.

Vamos agora deduzir a relação entre as funções

Aplicando

$$\frac{\delta^4}{\delta \bar{A}_{\nu'}^{D'}(x_4) \delta \bar{\Psi}_{j'}^{b'}(x_2) \delta \bar{\omega}^{B'}(x_3) \delta \bar{\Psi}_{i'}^{a'}(x_1)}$$

ao núcleo gerador (7.24), usando (7.25), em seguida colocando os campos clássicos iguais a zero, eliminando as linhas dos índices e colocando $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = t$, $B = A$ e $D = B$ chegamos a

$$\begin{aligned}
& -\partial_\mu^{(z)} \Gamma_{ij\mu\nu}^{abAB}(x,y|z,t) - g f^{CAB} \Gamma_{ij\nu}^{abC}(x,y|z) \delta(z-t) \\
& + ig (t^A)^{db} \Gamma_{ij\nu}^{adB}(x,y|t) \delta(y-z) \\
& - ig (t^A)^{ad} \Gamma_{ij\nu}^{dbB}(x,y|t) \delta(x-z) = 0
\end{aligned} \tag{7.36}$$

Calculando a transformada de Fourier de (7.36) e levando em conta a invariância translacional (7.28c) obtemos

$$\begin{aligned}
& ik_\mu \tilde{\Gamma}_{ij\mu\nu}^{abAB}(q|k,k') - g f^{CAB} \tilde{\Gamma}_{ij\nu}^{abC}(q|k+k') \\
& + ig (t^A)^{db} \tilde{\Gamma}_{ij\nu}^{adB}(q+k|k') - ig (t^A)^{ad} \tilde{\Gamma}_{ij\nu}^{dbB}(q|k') = 0
\end{aligned} \tag{7.37}$$

Derivando, agora, a relação (7.24) em relação a

$$\frac{\delta^2}{\delta \tilde{\omega}^D(x_1) \delta A_\nu^C(x_2)}$$

usando (7.25) e colocando os campos clássicos, em seguida, iguais a zero chegamos a

$$\partial_\mu^{(1)} [\Delta_{\mu\nu}^{-1}(x_1, x_2)]^{BC} = 0 \tag{7.38}$$

Usando a invariância translacional e calculando a transformada de Fourier obtem-se

$$k_\mu [\tilde{\Delta}_{\mu\nu}^{-1}(k)]^{BC} = 0 \tag{7.39}$$

Na verdade no gauge axial $\tilde{\Delta}^{-1}$ depende também do 4-vetor η_μ . A forma mais geral consistente com (7.39), omitindo o fator de cor δ^{BC} é

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_{\mu\nu}^{-1} = & (\delta_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) \Pi \\ & + \left[k_\mu k_\nu - \frac{k^2 (k_\mu \eta_\nu + k_\nu \eta_\mu)}{n \cdot k} + \frac{k^4 \eta_\mu \eta_\nu}{(n \cdot k)^2} \right] \Pi' \end{aligned} \quad (7.40)$$

Como o propagador deve ser uma função de grau zero em n , Π e Π' só podem depender de k^2 e $(k \cdot n)^2/n^2$.

No nosso trabalho estaremos interessados em divergências infravermelhas. Neste caso basta considerar o primeiro termo de (7.40) (9).

Para terminar derivemos (7.24) em relação a

$$\frac{\delta^3}{\delta A_\rho^F(x_3) \delta A_\nu^E(x_2) \delta \omega^D(x_1)}$$

colocando em seguida os campos clássicos iguais a zero e fazendo $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $D = A$, $E = B$, $F = C$, $\mu = \alpha$, $\nu = \beta$ e $\rho = \gamma$ chegamos a

$$\begin{aligned} \partial_\alpha^{(x)} \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{ABC}(x, y, z) - g [\Delta_{\rho\gamma}^{-1}(x, y)]^{BD} f^{DAC} \delta(x-z) \\ - g [\Delta_{\beta\gamma}^{-1}(x, z)]^{CD} f^{DAB} \delta(x-y) = 0 \end{aligned} \quad (7.41)$$

Calculando a transformada de Fourier e usando a invariância translacional chegamos a

$$-iq_\alpha \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}^{ABC}(q,k) - g [\tilde{\Delta}_{\beta\gamma}^{-1}(k)]^{BD} f^{DAC}$$

$$- g [\tilde{\Delta}_{\beta\gamma}^{-1}(q+k)]^{CD} f^{DAB} = 0 \quad (7.42)$$

Mas

$$[\tilde{\Delta}_{\beta\gamma}^{-1}]^{BD} = \delta^{BD} D_{\beta\gamma} \quad (7.43)$$

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}^{ABC} = ig f^{ABC} \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} \quad (7.44)$$

Portanto

$$q_\alpha \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}(q,k) = D_{\beta\gamma}(q+k) - D_{\beta\gamma}(k) \quad (7.45)$$

P A R T E 2

DIVERGÊNCIAS INFRAVERMELHAS

8. INTRODUÇÃO

Teorias com partículas de massa zero geralmente apresentam divergências infravermelhas (d.i.). Em teoria de perturbação elas se manifestam quando calculamos amplitudes de transição (diagramas de Feynman) ou seções de choque em ordem não trivial. Nestes cálculos percebemos que as integrais nos momentos das partículas sem massa geralmente divergem quando os momentos tendem a zero. Estas divergências associadas a pequenos momentos, ou o que é equivalente, a grandes comprimentos de onda, são chamadas d.i.s.

Uma análise simples⁽¹⁰⁾ mostra como surgem estas divergências. Considere o espalhamento de um elétron por um potencial externo V com a emissão de um fóton de baixa energia (fóton infravermelho). Os diagramas relevantes para o processo, em ordem mais baixa, são os seguintes

(i)

(ii)

$p(p')$ - 4-momento inicial (final) do elétron

k - 4-momento do fóton

Um fóton infravermelho tem energia e momento linear muito pequenos. Sua emissão (ou absorção) não altera, em pri

meira aproximação, o momento do elétron. Portanto a probabilidade relativa de se achar um fóton com energia entre $|k|$ e $|k| + d|k|$ (Estamos usando um sistema de unidades em que $\hbar = c = 1$) deve independer da cinemática do elétron. Esta probabilidade depende apenas de k e obviamente é um número adimensional. Usando análise dimensional concluímos que ela é proporcional a

$$e^2 \frac{d|k|}{|k|} \quad (8.1)$$

A probabilidade de se encontrar um fóton infravermelho com energia $|k| \leq \Delta$ é proporcional a

$$e^2 \int_0^\Delta \frac{d|k|}{|k|} \quad (8.2)$$

que é uma quantidade divergente.

Pode-se pensar que a origem da divergência está na aproximação drástica que fizemos acima. Sabemos do eletromagnetismo clássico que no limite de grandes comprimentos de onda a radiação emitida independer dos detalhes da região espectral. Ela depende apenas do momento inicial e final do elétron e da direção em que se observa a radiação. Esperamos encontrar uma dependência em p e p' e o resultado infinito obtido acima poderia simplesmente significar que não podemos desprezar a cinemática do elétron. Esta dependência em p e p' existe mas não altera a d.i. Mostraremos no capítulo 10 que o resultado completo é

$$e^2 \int_0^\Delta \frac{d|k|}{|k|} \left[\frac{1}{2(2\pi)^3} \sum_{p \neq p'} \int d\Omega \left(\frac{\epsilon \cdot p'}{|p'| \cos \theta' - p_0'} - \frac{\epsilon \cdot p}{|p| \cos \theta - p_0} \right)^2 \sigma_{p \rightarrow p'} \right] \quad (8.3)$$

- $\sigma_{p \rightarrow p'}$ - seção de choque para o espalhamento sem emissão de fótons em ordem mais baixa de perturbação
 ε_μ - polarização do fóton
 $\theta(\theta')$ - ângulo formado entre $\mathbf{k}$ e $\mathbf{p}$ ($\mathbf{p}'$)
 $\int d\Omega$ - integração angular

A integral divergente é idêntica a (8.2) e a dependência na cinemática do elétron aparece apenas como um fator finito. A parte angular é finita uma vez que $p_0 > |\mathbf{p}|$ e $p'_0 > |\mathbf{p}'|$ (O elétron tem uma massa diferente de zero).

Como a massa do fóton é nula, com uma quantidade mínima de energia podemos criar um número arbitrariamente grande de fótons infravermelhos. O fato desta produção de fótons ser energeticamente possível não causaria problemas se a probabilidade de tal emissão diminuísse suficientemente à medida que o número de fótons aumentasse. Mas como vimos acima este não é o caso. Devemos portanto esperar problemas com a série perturbativa. Note que multiplicamos um diagrama pelo fator e (carga do elétron) toda vez que incluimos um outro fóton emitido. A teoria de perturbação se baseia no fato de que esta nova amplitude, de ordem superior em e , é menor do que a anterior. A probabilidade da emissão de um novo fóton, proporcional ao módulo quadrado da amplitude, deveria também diminuir. Isto não ocorre porque devido às d.i. os termos da série perturbativa divergem. Para que possamos aplicar teoria de perturbação de maneira consistente é essencial que as d.i. se cancelem.

Em 1937, Bloch e Nordsieck⁽¹¹⁾ conseguiram, pela primeira vez resolver o problema das d.i. Eles mostraram que a probabilidade de ocorrência de um processo sem emissão de fótons ou

com a emissão de apenas um número finito de fótons de baixa energia é zero. O número de fótons de baixa energia emitidos num processo envolvendo cargas elétricas é infinito. Experimentalmente não podemos distinguir seções de choque de processos tais como $e(p) \xrightarrow{\nu} e(p')$ (espalhamento de um elétron por um potencial externo) e $e(p) \xrightarrow{\nu} e(p') + \text{fótons}$ se a energia destes fótons for menor do que a resolução de energia dos detetores. Por melhor que seja a resolução do detetor sempre podemos ter um número arbitrariamente grande de fótons desde que a soma de suas energias seja suficientemente pequena. A quantidade medida no laboratório é a soma da seção de choque para o processo sem emissão com as seções de choque do mesmo processo mas acompanhadas de emissão de fótons. Nesta soma as d.i. se cancelam. Este cancelamento ocorre ordem a ordem em perturbação. Portanto para cancelar as d.i. da seção de choque σ_4^{ν} do processo $e(p) \xrightarrow{\nu} e(p')$ até ordem e^4 :

$$\begin{aligned} \sigma_4^{\nu} \sim & \left[\text{diagram 1} \right] + \left[\text{diagram 2} \right] + \left[\text{diagram 3} \right] \\ & + \left[\text{diagram 4} \right] + \text{complexo conjugado} \end{aligned} \quad (8.4)$$

The diagrams in equation (8.4) represent Feynman diagrams for electron-electron scattering at order e^4 . Each diagram consists of two vertices (represented by 'x') connected by two fermion lines. The diagrams show various ways in which a photon (represented by a dashed line) can be emitted from the external electron lines. Diagram 1: Photon emission from the incoming electron line. Diagram 2: Photon emission from the outgoing electron line. Diagram 3: Photon emission from the internal fermion line. Diagram 4: Photon emission from the internal fermion line in a different configuration. The diagrams are enclosed in brackets and summed together, with the complex conjugate of the entire sum added.

basta adicionar a seção de choque σ_4^E com emissão de 1 fóton em ordem e^4 .

$$\sigma_4^E \sim \left[\text{diagram 5} + \text{diagram 6} + \text{diagram 7} + \text{diagram 8} \right]^* \quad (8.5)$$

The diagrams in equation (8.5) represent Feynman diagrams for electron-electron scattering at order e^4 with the emission of a photon. Each diagram consists of two vertices (represented by 'x') connected by two fermion lines. The diagrams show various ways in which a photon (represented by a wavy line) can be emitted from the external electron lines. Diagram 5: Photon emission from the incoming electron line. Diagram 6: Photon emission from the outgoing electron line. Diagram 7: Photon emission from the internal fermion line. Diagram 8: Photon emission from the internal fermion line in a different configuration. The diagrams are enclosed in brackets and summed together, with the complex conjugate of the entire sum added.

Qualquer outra seção de choque com um número maior de fótons emitidos é de ordem superior.

Na Eletrodinâmica Quântica (QED) podemos somar as contribuições das d.i. em todas as ordens de perturbação e mostrar que elas se fatorizam e se exponenciam. Este fato já havia sido mostrado por Bloch e Nordsieck em seu trabalho. Porém, a primeira demonstração usando teoria dos campos moderna foi feita em 1961 por Yennie, Frautschi e Suura⁽¹³⁾ (Um review histórico do que aconteceu entre estes dois trabalhos pode ser encontrado em Jauch e Rohrlich⁽¹⁴⁾). Se regularizamos as d.i. dando uma pequena massa ao fóton, a seção de choque sem emissão de radiação, por exemplo, tem a forma

$$\sigma = e^{-c \ln \frac{\Delta}{\lambda}} \sigma_{\text{finito}} \quad (8.6)$$

Quando fazemos $\lambda \rightarrow 0$, $\sigma \rightarrow 0$. Este é o mecanismo através do qual as d.i. anulam as seções de choque de processos sem um número infinito de fótons infravermelhos.

Existem outras abordagens para o problema das d.i. Uma é através do Teorema de Lee-Nauenberg⁽¹⁴⁾ e a outra através de estados coerentes^{(15), (16)}. Neste trabalho usaremos apenas o mecanismo de Bloch e Nordsieck para investigar o cancelamento das d.i. .

Na Cromodinâmica Quântica (QCD) as interações são mediadas por campos vetoriais de massa nula: os gluons, que em muitos aspectos são semelhantes ao fóton. A QCD, como a QED, apresenta d.i. . Quando discutimos o significado físico do mecanismo de Bloch e Nordsieck enfatizamos que processos que diferissem ape-

nas pela emissão de fótons infravermelhos não podem ser distinguidos experimentalmente. Suas seções de choque deveriam portanto ser somadas. Se a QCD apresenta realmente confinamento, nem quarks nem gluons podem ser detetados e não podemos falar em gluons com energia menor do que a resolução de detetores. Mas em essência o mecanismo de Bloch e Nordsieck diz que processos sem emissão de radiação ou com a emissão de um número finito de partículas de massa zero e de baixa energia não ocorrem. A emissão de radiação é uma parte essencial dos processos físicos e não pode ser desprezada. Levando em conta a emissão de radiação podemos usar a teoria de perturbação.

Até 1980 parecia que o mecanismo de Bloch e Nordsieck era suficiente para garantir o cancelamento das d.i. na Q.C.D. Em 1976, Frenkel e Taylor⁽¹⁷⁾ mostram que em qualquer processo as d.i. mais fortes (dominantes) se exponenciam e que o mecanismo de Bloch e Nordsieck garantia seu cancelamento ordem a ordem em perturbação. Neste mesmo ano Applequist et al.⁽¹⁸⁾ mostraram o cancelamento de todas as d.i.s. no processo $\gamma^* \rightarrow q + \bar{q} + \text{gluons}$ infravermelhos (criação de um par quark anti-quark a partir de um fóton virtual com emissão de gluons). Em 1978, Libby e Stermann⁽¹⁹⁾ provaram o cancelamento para o espalhamento de um quark por um potencial externo incolor. Mas em 1980 Dória, Frenkel e Taylor⁽²⁰⁾ mostraram que as d.i. mais fracas (subdominantes) não se cancelam em processos onde haja duas ou mais partículas com cor no estado inicial.

Neste trabalho analisaremos as d.i. subdominantes do processo $q + \bar{q} \rightarrow \gamma^* + \text{gluons}$ infravermelhos (aniquilação de um par quark anti-quark em um fóton virtual e gluons infravermelhos. Este é o processo mais simples da QCD com duas partículas colo-

ridas no estado inicial. Os cálculos foram feitos no gauge axial. Como neste gauge os ghosts não se acoplam com os outros campos da teoria (são campos livres) o número de diagramas a considerar diminui consideravelmente. Além disto as identidades de Slavnov-Taylor, como mostramos no capítulo 7, têm uma estrutura simples e podem ser usadas para eliminar classes inteiras de diagramas.

Este trabalho pretende também ser uma introdução didática ao estudo das d.i. . Isto explica porque incluímos um capítulo sobre as d.i. no Eletromagnetismo Clássico e discutimos a estrutura das d.i. da QED.

A Parte 2 está organizada da seguinte forma:

No Capítulo 9 mostramos que mesmo na teoria clássica do Eletromagnetismo existem indícios do problema do infravermelho. Veremos que se interpretarmos a radiação clássica como composta de fótons, obteremos um número infinito de fótons de baixa energia.

No capítulo 10 mostramos como as d.i. aparecem em teoria de perturbação e apresentamos a técnica-principal para o tratamento das d.i. : a aproximação eikonal.

No capítulo 11 apresentamos o mecanismo de Bloch e Nordsieck no contexto da QED. Este capítulo também serve para ilustrar o uso da aproximação eikonal.

No capítulo 12 discutimos as d.i. na QCD e comparamos esta teoria com o QED mostramos como podemos usar o fato das d.i. se cancelarem na QED.

Nos quatro capítulos seguintes apresentamos técnicas para analisar os diagramas. No capítulo 13 a análise dos fatores de cor; no capítulo 14 o método $R^e - R^a$; no capítulo 15 o método do momento controlador e no capítulo 16 mostramos como podemos usar as identidades de Slávnov Taylor para eliminar classes completas de diagramas.

Tendo apresentado os métodos para se lidar com os diagramas começamos a examiná-los ordem a ordem nos capítulos seguintes. No capítulo 17 analisamos a ordem g^4 , no capítulo 18 a ordem g^6 e no capítulo 19 as ordens mais elevadas.

No capítulo 20 analisamos os resultados e apresentamos as conclusões.

Os cálculos mais longos foram colocados em apêndices para não quebrar a fluência do trabalho.

9. DIVERGÊNCIAS INFRAVERMELHAS NO ELETROMAGNETISMO CLÁSSICO ⁽²¹⁾

Consideremos um elétron que após sofrer uma colisão com um centro espalhador de dimensão característica l , tem sua velocidade mudada de v_1 para v_2

Estaremos interessados em analisar a radiação emitida durante a colisão no limite de baixas frequências (baixas energias) e a distâncias muito grandes em relação a ℓ e ao comprimento de onda da radiação. Neste caso o campo eletromagnético pode ser considerado, dentro de pequenas regiões, como uma onda plana.

O potencial vetor do campo eletromagnético é dado por:

$$A(x,t) = \frac{1}{c} \int d^3x' dt' \frac{J(x',t')}{|x-x'|} \delta\left(t' - t + \frac{|x-x'|}{c}\right) \quad (9.1)$$

Escolheremos como origem dos tempos o instante em que se inicia a colisão. Um observador no ponto x vê no instante de tempo da ordem de $|x|/c$ um pulso de radiação de duração τ (duração da colisão). Isto ocorre porque fora do centro espalhador a partícula atinge rapidamente uma velocidade constante e portanto não irradia. $J(x,t)$ é diferente de zero apenas no ponto $r(t)$ onde se encontra a partícula:

$$J(x,t) = e \dot{r}(t) \delta(x - r(t)) \quad (9.2)$$

Portanto os x' relevantes para a radiação são tais que $|x'| \simeq \ell \ll |x|$ e neste caso podemos fazer a aproximação:

$$|x-x'| \simeq |x| - \frac{x' \cdot x}{|x|} \equiv |x| - x' \cdot n \quad (9.3)$$

Substituindo (9.2) em (9.1), usando a aproximação (9.3) no argumento do δ , colocando o denominador $|x-x'|$ de (9.1) igual a $|x|$ e calculando a integral em x' chegamos a

$$A(x,t) = \frac{e}{c|x|} \int dt' \dot{r}(t') \delta\left(t'-t + \frac{|x|}{c} - \frac{r(t') \cdot n}{c}\right) \quad (9.4)$$

Mas

$$\delta\left(t'-t + \frac{|x|}{c} + \frac{r(t') \cdot n}{c}\right) = \frac{\delta(t'-t_0)}{1 - \frac{\dot{r}(t_0) \cdot n}{c}} \quad (9.5)$$

onde t_0 é a raiz da equação

$$t_0 - t + \frac{|x|}{c} - \frac{r(t_0) \cdot n}{c} = 0 \quad (9.6)$$

Portanto

$$A(x,t) = \frac{e \dot{r}(t_0)}{c|x| \left(1 - \frac{n \cdot \dot{r}(t_0)}{c}\right)} \quad (9.7)$$

Os campos eletromagnéticos podem ser expressos através de A

$$B_i = (\text{rot } A)_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k \quad (9.8)$$

Usando (9.3) e integrando em t' também podemos escrever (9.1) como:

$$A(x,t) \simeq \frac{1}{c|x|} \int d^3x' J(x',T) \quad (9.9)$$

$$T \equiv t - \frac{|x|}{c} + \frac{x' \cdot n}{c} \quad (9.10)$$

$$\partial_j A_R = \frac{1}{c} \left\{ \partial_j \left(\frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) \int d^3 \mathbf{x}' J_R(\mathbf{x}', T) + \frac{1}{|\mathbf{x}|} \int d^3 \mathbf{x}' \frac{dJ_R}{dT} (\partial_j T) \right\} \quad (9.11)$$

O primeiro termo é de ordem $|\mathbf{x}|^{-2}$, além disto

$$\partial_j T = \frac{1}{c} \left(-\frac{x_j}{|\mathbf{x}|} + \frac{x_j}{|\mathbf{x}|} - \frac{\mathbf{x}' \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{x}|^2} x_j \right) = -\frac{x_j}{c |\mathbf{x}|} + O(|\mathbf{x}|^{-1}) \quad (9.12)$$

e

$$\frac{dJ_R}{dT} = \frac{dJ_R}{dt} \equiv \dot{J}_R \quad (9.13)$$

Portanto

$$B_i = -\frac{1}{c} \epsilon_{ijk} \frac{1}{c |\mathbf{x}|} \int d^3 \mathbf{x}' \dot{J}_R(\mathbf{x}', t) \frac{x_j}{|\mathbf{x}|} + O(|\mathbf{x}|^{-2}) \quad (9.14)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{n} \quad (9.15)$$

Para uma onda plana $\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{n}$, assim

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c} (\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} \quad (9.16)$$

O fluxo de energia através de um elemento unitário de área perpendicular à direção de propagação, é dado pelo vetor de

Poynting

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}(\mathbf{x}, t) &= \frac{c}{4\pi} |\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)| \\
 &= \frac{c}{4\pi} B^2(\mathbf{x}, t) \quad \text{(para uma onda plana)}
 \end{aligned}
 \tag{9.17}$$

Assim a quantidade de energia por unidade de tempo que atravessa o elemento $dA = |\mathbf{x}|^2 d\Omega$ de uma superfície esférica de centro na origem e de raio $|\mathbf{x}|$ é igual a

$$dI_m = \frac{c}{4\pi} B^2(\mathbf{x}, t) |\mathbf{x}|^2 d\Omega \tag{9.18}$$

Para calcular a energia irradiada durante o choque integramos em t de $-\infty$ a $+\infty$. Para instantes de tempo em que a partícula, no tempo retardado, não está na região espalhadora não há radiação uma vez que sua velocidade é constante. Portanto esta integração de $-\infty$ e $+\infty$ não é incompatível com as aproximações que fizemos.

$$d\mathcal{E}_m = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B^2(\mathbf{x}, t) dt |\mathbf{x}|^2 d\Omega \tag{9.19}$$

Façamos uma decomposição espectral de :

$$B(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} B_\omega(\mathbf{x}) \tag{9.20}$$

$$B_\omega(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi} e^{i\omega t} B(\mathbf{x}, t) \tag{9.21}$$

Como B é real

$$B_w^* = B_{-w} \quad (9.22)$$

portanto⁺

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt B^2(x,t) = 4\pi \int_0^{\infty} d\omega |B_\omega|^2 \quad (9.23)$$

Levando (9.23) em (9.19) obtemos

$$d\mathcal{E}_m = c \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |B_\omega|^2 |x|^2 d\Omega \quad (9.24)$$

de onde tiramos a energia por unidade de frequência que passou através de

$$d\mathcal{E}_{m\omega} = c |B_\omega|^2 |x|^2 d\Omega \quad (9.25)$$

B_ω é calculado substituindo-se (9.16) em (9.21)

$$B_\omega(x) = \frac{1}{2\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{A}(x,t) x_m e^{i\omega t} dt \quad (9.26)$$

$$\begin{aligned} + \int_{-\infty}^{\infty} B^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} dt B_i \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} B_{i\omega} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega B_{i\omega} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} B_i = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} d\omega B_{i\omega} B_{i-\omega} \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} d\omega B_{i\omega} B_{i\omega}^* = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |B_\omega|^2 = 4\pi \int_0^{\infty} d\omega |B_\omega|^2 \end{aligned}$$

No limite $\omega \rightarrow 0$

$$B_{\omega}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{A}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{m} dt = \frac{1}{2\pi c} (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \times \mathbf{m} \quad (9.27)$$

$\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_2$ são os potenciais vetores antes e depois da colisão.

Inserindo (9.27) em (9.25) e usando (9.7) resulta

$$d\mathcal{E}_{m\omega} = \frac{1}{4\pi^2 c^3} \left[\frac{\mathbf{v}_2 \times \mathbf{m}}{1 - \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{v}_2}{c}} - \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{m}}{1 - \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{v}_1}{c}} \right]^2 d\Omega d\omega \quad (9.28)$$

Note que a expressão acima independe de ω . Se interpretarmos o fluxo de radiação como sendo feito de fótons de energia $\hbar\omega$ podemos escrever

$$N_{m\omega} |\mathbf{x}|^2 d\Omega d\omega = \frac{1}{\hbar\omega} d\mathcal{E}_{m\omega} \quad (9.29)$$

($N_{m\omega}$ é o número de fótons que atravessa a área $|\mathbf{x}|^2 d\Omega$ com energia entre $\hbar\omega$ e $\hbar\omega + d\hbar\omega$)

$$N_{m\omega} = \frac{1}{4\pi^2 c^2 \hbar |\mathbf{x}|^2} \frac{1}{\omega} \left[\frac{\mathbf{v}_2 \times \mathbf{m}}{1 - \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{v}_2}{c}} - \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{m}}{1 - \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{v}_1}{c}} \right] \quad (9.30)$$

$N_{m\omega} \rightarrow \infty$ quando $\omega \rightarrow 0$ indicando que a probabilidade de emissão de fótons infravermelhos não diminui rápido o bastante. Assim, podemos encontrar vestígios do problema do infravermelho no Eletromagnetismo Clássico.

10. DIVERGÊNCIAS INFRAVERMELHAS EM PERTURBAÇÃO E A APROXIMAÇÃO EIKONAL

Em teoria de perturbação as d.i.s se manifestam quando calculamos diagramas de Feynman em ordem não trivial. Verificamos que as integrais nos momentos das partículas sem massa divergem para pequenos momentos.

Vamos tornar a discussão mais concreta com um exemplo da QED. Analisemos a amplitude para o processo $e^+ + e^- \rightarrow \gamma^*$ (aniquilação elétron pósitron em um fóton virtual).

Em ordem e^3 um dos diagramas relevantes é o seguinte

Usando as regras de Feynman da QED no apêndice A podemos escrever:

$$a_v =$$

$$-ie^3 \int \frac{d^4 k}{k^2 - i\epsilon} \frac{\bar{v}(q) \gamma_\mu [i(\not{q} + \not{k}) + m] \gamma_\nu [-i(\not{p} - \not{k}) + m] \gamma_\mu u(p)}{[q^2 + m^2 + k^2 + 2q \cdot k - i\epsilon][p^2 + m^2 + k^2 - 2p \cdot k - i\epsilon]}$$

Se p e q estão na camada de massa $p^2+m^2=q^2+m^2=0$ e os denominadores da expressão (10.1) vão todos a zero quando $k \rightarrow 0$. Como no numerador não existem potências de k suficientes, a integral diverge (logaritmicamente).

a_ν também diverge logaritmicamente para $k \rightarrow \infty$. Em nosso trabalho estaremos interessados, porém, apenas no comportamento das integrais para pequenos momentos. Conseguimos nos restringir a esta região, introduzindo nas integrais um cut-off superior $\Delta \ll m$, onde m é a menor massa da teoria.

Para conseguir lidar com os infinitos das d.i. precisamos regularizar as integrais. Isto será feito usando regularização dimensional. Calculamos as integrais num espaço de dimensão $4+\eta$, onde elas não têm divergências.

$$\begin{aligned} \int d^{4+\eta} k &\equiv \int d^{3+\eta} |k| \int_{-\Delta}^{\Delta} dk_0 \\ &\equiv \int_0^{\Delta} |k|^{3+\eta} d|k| \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_{-\Delta}^{\Delta} dk_0 \quad (10.2) \end{aligned}$$

As divergências se manifestarão, neste caso, como polos da forma $(1/\eta)^P$. Para os cálculos das d.i. subdominantes basta prolongar analiticamente o módulo do 3-vetor como fizemos em (10.2). A parte angular é sempre finita como veremos. A integral em k_0 também não apresenta divergências e podemos calculá-la para $-\infty < k_0 < \infty$ sem alterar as d.i.. A região extra contribui apenas com um termo finito.

O fato de k ser pequeno nos permite fazer algumas simplificações:

(i) podemos desprezar os k_μ dos numeradores

(ii) podemos aproximar denominadores do tipo $k^2 + 2kl - i\epsilon$ por $2k.l - i\epsilon$.

Estas simplificações são conhecidas como aproximação eikonal. Assim,

$$a_\nu \simeq -ie^3 \int \frac{d^4 k}{k^2 - i\epsilon} \frac{\bar{v}(q) \gamma_\mu [i\not{q} + m] \gamma_\nu [-i\not{p} + m] \delta_\mu u(p)}{[2q.k - i\epsilon] [-2p.k - i\epsilon]} \quad (10.3)$$

Como p e q estão na camada de massa podemos usar a equação de Dirac para partículas livres:

$$\text{elêtron} \quad (i\not{p} + m) u(p) = 0 \quad (10.4)$$

$$\text{pósitron} \quad \bar{v}(q) (-i\not{q} + m) = 0 \quad (10.5)$$

Usando estas equações e a fórmula

$$\gamma_\mu \cdot \not{a} + \not{a} \gamma_\mu = 2a_\mu \quad (10.6)$$

concluimos que

$$\bar{v}(q) \gamma_\mu (i\not{q} + m) = 2i q_\mu \bar{v}(q) + \bar{v}(q) (-i\not{q} + m) = 2i q_\mu \bar{v}(q) \quad (10.7)$$

$$(-i\not{p} + m) \delta_\mu u(p) = -2ip_\mu u(p) + (i\not{p} + m) u(p) = -2ip_\mu u(p) \quad (10.8)$$

Com isto

$$a_\nu = -e^2 \frac{p \cdot q}{(2\pi)^4 i} \int \frac{d^4 k}{k^2 - i\epsilon} \frac{1}{qk - i\epsilon} \frac{1}{-pk - i\epsilon} [\bar{u}(q) (-i(2\pi)^4 e \gamma_\nu) u(p)]$$

(10.9)

A expressão entre colchetes é a amplitude em ordem mais baixa para o processo estudado

$$\bar{u}(q) (-i(2\pi)^4 e \gamma_\nu) u(p) \equiv$$

(10.10)

Portanto na aproximação eikonal conseguimos fatorizar a contribuição dos fótons moles (fótons com pequenos momentos).

Esta fatorização pode ser feita em todas as ordens de perturbação. Basta aplicar (10.7) e (10.8) o número de vezes necessário para reduzir todos os termos do tipo $(-i\not{p} + m) \gamma_\mu$ (ou $\gamma_\mu (i\not{q} + m)$) a $-2i\not{p}_\mu$ (ou a $2i\not{q}_\mu$).

O processo descrito acima, apesar de simples, é bastante tedioso para diagramas de ordem perturbativa alta. Vamos introduzir para a parte mole da amplitude uma representação gráfica

$$\frac{1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{d^4 k}{k^2 - i\epsilon} \frac{e \not{q}_\mu}{qk - i\epsilon} \frac{e (-i) \not{p}_\mu}{-pk - i\epsilon} \equiv$$

(10.11)

Podemos obter rapidamente a contribuição dos fôtons moles aplicando ao diagrama (10.11) as regras de Feynmann modificadas

$$\begin{array}{c} \downarrow \sum_i k_i \\ \ell \\ (\mu) \end{array} \quad -e\ell_\mu \quad (10.12)$$

$$\begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ \ell + \sum_i k_i \end{array} \quad \frac{1}{\ell \cdot (\sum_i k_i) - i\epsilon} \quad (10.13)$$

O propagador do fôton é o mesmo da QED usual.

Desta forma podemos trabalhar graficamente

$$\begin{array}{c} p \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{wavy line } k \\ \swarrow \quad \searrow \\ -q \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{eikonal} \\ = \end{array} \quad \left[\begin{array}{c} p \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{wavy line } k \\ \swarrow \quad \searrow \\ -q \end{array} \right] \quad (10.14)$$

$$\begin{array}{c} \text{wavy line } k \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{wavy line } k \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{eikonal} \\ = \end{array} \quad \left[\begin{array}{c} \text{wavy line } k \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{wavy line } k \end{array} \right] \quad (10.15)$$

Feita a fatorização obtemos a contribuição dos fôtons moles aplicando as regras (10.12) e (10.13). Por definição

(10.16)

O objetivo deste trabalho será o cálculo de seções de choque infravermelhas. Uma seção de choque é basicamente igual ao módulo quadrado de uma amplitude dividido pelo fluxo incidente. As contribuições dos fótons moles se fatorizam também nas seções de choque. Para ver o mecanismo através do qual isto ocorre consideremos o processo $e^+ + e^- \rightarrow \gamma^* + 1$ fóton infravermelho.

Definimos

f - fluxo incidente

λ - polarização do fóton

Como não observamos o fóton devemos somar sobre suas polarizações e somar sobre os momentos compatíveis com $k_0 \leq \Delta$. Esta última soma é feita através da integral.

$$\int \frac{d^{3+\eta} k}{(2\pi)^3 2|k|} = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_0^\Delta |k|^{1+\eta} d|k| \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi d\theta \sin\theta$$

(10.17)

onde para fins de regularização passamos para um espaço de dimensões $3 + \eta$.

$$\sigma = \frac{1}{f} \sum_\lambda \int \frac{d^{3+\eta} k}{(2\pi)^3 2|k|} \left[\begin{array}{c} \text{diagram 1} \\ \text{diagram 2} \end{array} + \begin{array}{c} \text{diagram 3} \\ \text{diagram 4} \end{array} \right]^*$$

(10.18)

Um dos termos de (10.18) é

$$\frac{1}{f} \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2|k|} \left[\text{diagram 1} \right] \left[\text{diagram 2} \right]^* \equiv a \quad (10.19)$$

Diagram 1: A triangle diagram with an incoming photon line (wavy) from the top left, an outgoing photon line (wavy) from the top right, and an internal fermion line (solid) from the bottom left to the bottom right.

Diagram 2: A triangle diagram with an incoming photon line (wavy) from the top left, an outgoing photon line (wavy) from the top right, and an internal fermion line (solid) from the bottom left to the bottom right.

Usando a aproximação eikonal podemos escrever:

$$a = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2|k|} \left(\text{diagram 3} \right) \left(\text{diagram 4} \right)^* \left[\frac{1}{f} \left(\text{diagram 5} \right) \left(\text{diagram 6} \right)^* \right] \quad (10.20)$$

Diagram 3: A triangle diagram with an incoming photon line (wavy) from the top left, an outgoing photon line (wavy) from the top right, and an internal fermion line (solid) from the bottom left to the bottom right.

Diagram 4: A triangle diagram with an incoming photon line (wavy) from the top left, an outgoing photon line (wavy) from the top right, and an internal fermion line (solid) from the bottom left to the bottom right.

Diagram 5: A triangle diagram with an incoming photon line (wavy) from the top left, an outgoing photon line (wavy) from the top right, and an internal fermion line (solid) from the bottom left to the bottom right.

Diagram 6: A triangle diagram with an incoming photon line (wavy) from the top left, an outgoing photon line (wavy) from the top right, and an internal fermion line (solid) from the bottom left to the bottom right.

Note que o termo entre colchetes é a seção de choque para o processo $e^+ + e^- \rightarrow \gamma^*$ (sem emissão de fótons infravermelhos). Chamaremos esta seção de choque em ordem mais baixa σ_{Born} . Introduzindo ainda a notação

$$\left[\text{diagram 7} \right] \equiv \left[\text{diagram 8} \right]^* \quad (10.21)$$

Diagram 7: A triangle diagram with an incoming photon line (wavy) from the top left, an outgoing photon line (wavy) from the top right, and an internal fermion line (solid) from the bottom left to the bottom right.

Diagram 8: A triangle diagram with an incoming photon line (wavy) from the top left, an outgoing photon line (wavy) from the top right, and an internal fermion line (solid) from the bottom left to the bottom right.

podemos escrever (10.20) como

$$a = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2|k|} \left[\text{diagram 9} \right] \sigma_{\text{Born}} \quad (10.22)$$

Diagram 9: A triangle diagram with an incoming photon line (wavy) from the top left, an outgoing photon line (wavy) from the top right, and an internal fermion line (solid) from the bottom left to the bottom right.

Os outros termos de σ podem ser tratados de forma análoga. Omitindo a soma sobre polarizações, a integral e o fator σ_{BORN} que deverão, daqui por diante, ser sempre subentendidos obtemos

$$\sigma = \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \end{array} + \dots + \dots + \dots \quad (10.23)$$

A fatorização de σ_{BORN} pode ser feita em todas as ordens de perturbação. A demonstração acima claramente só depende da fatorização da contribuição dos fótons infravermelhos.

Para terminar calculemos a expressão (8.3). Na aproximação eikonal

$$\sigma = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2|k|} \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \end{array} \right] \sigma_{p \rightarrow p'}^{\gamma} \quad (10.24)$$

Usando as regras de Feynman modificadas podemos escrever

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} + \dots = \frac{-e p'_\mu \epsilon_\mu(k, \lambda)}{p'k - i\epsilon} + \frac{-e p_\mu \epsilon_\mu(k, \lambda)}{-pk - i\epsilon}$$

Como k está na camada de massa

$$p' \cdot k = |k| (|p'| \cos \theta' - p'_0) \quad (10.26)$$

$$p \cdot k = |k| (|p| \cos \theta - p_0) \quad (10.27)$$

e podemos desprezar o $i\epsilon$ dos propagadores de fêrmions (veja o apêndice B). Portanto a amplitude (10.25) é real e temos

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2|k|} \left[\frac{e p' \cdot \epsilon}{|p'| \cos \theta' - p'_0} - \frac{e p \cdot \epsilon}{|p| \cos \theta - p_0} \right]^2 \sigma_{p \rightarrow p'}^{\nu} \\ &= e^2 \int_0^{\Delta} \frac{d|k|}{|k|} \left[\frac{1}{2(2\pi)^3} \sum_{p \neq 1} \int d\Omega \left(\frac{p' \cdot \epsilon}{|p'| \cos \theta' - p'_0} - \frac{p \cdot \epsilon}{|p| \cos \theta - p_0} \right)^2 \sigma_{p \rightarrow p'}^{\nu} \right] \end{aligned} \quad (10.28)$$

A última expressão é igual a (8.3).

11. O MECANISMO DE BLOCH E NORDSIECK

Vamos apresentar o mecanismo de Bloch e Nordsieck dentro do contexto da QED, onde ele foi originalmente descoberto.

Analisaremos novamente o processo $e^+ e^- \rightarrow \gamma^*$, porém vamos nos restringir a uma classe de diagramas apenas. Estudaremos os diagramas "ladder" e "closed ladder" que são caracterizados pelo fato das correções de fótons infravermelhos ligarem as linhas dos elétrons e dos pósitrons. Não existem correções que

comecem e terminem na mesma linha. Alguns exemplos

Diagramas "ladder"

Diagramas "crossed ladder"

Estes diagramas entram na seção de choque, até ordem nas correções infravermelhas, da seguinte forma

Usando as regras (10.2) e (10.13) obtemos:

$\equiv$

1

(11.4)

$$= \frac{-e^2 p \cdot q}{(2\pi)^4 i} \int \frac{d^{4+\eta} k}{k^2 - i\epsilon} \frac{1}{qk - i\epsilon} \frac{1}{-pk - i\epsilon} \quad (11.5)$$

$\equiv$

$$= \left[\frac{-e^2 p \cdot q}{(2\pi)^4 i} \int \frac{d^{4+\eta} k_1}{k_1^2 - i\epsilon} \frac{1}{qk_1 - i\epsilon} \frac{1}{-pk_1 - i\epsilon} \right] \left[\frac{e^2 p \cdot q}{(2\pi)^4 i} \int \frac{d^{4+\eta} k_2}{k_2^2 - i\epsilon} \frac{1}{qk_2 + i\epsilon} \frac{1}{-pk_2 + i\epsilon} \right]$$

(11.6)

$\equiv$

$$= \frac{-e^2 p \cdot q}{(2\pi)^4 i} \int \frac{d^{4+\eta} k_1}{k_1^2 - i\epsilon} \frac{d^{4+\eta} k_2}{k_2^2 - i\epsilon} \frac{1}{qk_1 - i\epsilon} \frac{1}{q(k_1+k_2) - i\epsilon} \frac{1}{-pk_1 - i\epsilon} \frac{1}{-p(k_1+k_2) - i\epsilon}$$

(11.7)

$$= \frac{-e^2 p \cdot q}{(2\pi)^4 i} \int \frac{d^{4+\eta} k_1}{k_1^2 - i\epsilon} \frac{d^{4+\eta} k_2}{k_2^2 - i\epsilon} \frac{1}{q k_2 - i\epsilon} \frac{1}{q(k_1 + k_2) - i\epsilon} \frac{1}{-p k_1 - i\epsilon} \frac{1}{-p(k_1 + k_2) - i\epsilon}$$

(11.8)

As expressões para os diagramas

(11.9)

são obtidos tornando-se o complexo conjugado de (11.5), (11.7) e (11.8) respectivamente.

Usando

$$\frac{1}{q k_1 - i\epsilon} \frac{1}{q(k_1 + k_2) - i\epsilon} + \frac{1}{q k_2 - i\epsilon} \frac{1}{q(k_1 + k_2) - i\epsilon} = \frac{1}{q k_1 - i\epsilon} \frac{1}{q k_2 - i\epsilon}$$

(11.10)

obtemos:

$$= \left[-\frac{e^2 p \cdot q}{(2\pi)^4 i} \right]^2 \int \frac{d^{4+\eta} k_1}{k_1^2 - i\epsilon} \frac{d^{4+\eta} k_2}{k_2^2 - i\epsilon} \frac{1}{q k_1 - i\epsilon} \frac{1}{q k_2 - i\epsilon} \frac{1}{-p k_1 - i\epsilon} \frac{1}{-p(k_1 + k_2) - i\epsilon}$$

(11.11)

Como k_1 e k_2 são variáveis de integração o resultado da integral não se altera se permutarmos k_1 e k_2 . Levando isto em conta e usando (11.10) com $-p$ em lugar de q chegamos a

$$= \frac{1}{2} \left[\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + 1 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{e p \cdot q}{(2\pi)^4 i} \int \frac{d^{4+\eta} k_1}{k_1^2 - i\epsilon} \frac{1}{q k_1 - i\epsilon} \frac{1}{-p k_1 - i\epsilon} \right] \left[-\frac{e(p \cdot q)}{(2\pi)^4 i} \int \frac{d^{4+\eta} k_2}{k_2^2 - i\epsilon} \frac{1}{q k_2 - i\epsilon} \frac{1}{-p k_2 - i\epsilon} \right]$$

(11.12)

Graficamente:

$$\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \vdots \quad \vdots \end{array} + \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \vdots \quad \vdots \end{array} = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \vdots \quad \vdots \end{array} \right]^2 \quad (11.13)$$

Conseguimos separar completamente a integral em k_1 da integral em k_2 . É claro que o mesmo vale os diagramas obtidos a partir destes por conjugação complexa.

$$\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \vdots \quad \vdots \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \vdots \quad \vdots \end{array} = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \vdots \quad \vdots \end{array} \right]^2 \quad (11.14)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sigma^V = & \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \vdots \quad \vdots \end{array} + \begin{array}{c} \vdots \quad \vdots \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \vdots \quad \vdots \end{array} + \begin{array}{c} \vdots \quad \vdots \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \\ & + \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} \vdots \quad \vdots \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \vdots \quad \vdots \end{array} \right]^2 \end{aligned} \quad (11.15)$$

Lembrando que

$$\begin{array}{c} \diagup \end{array} = \begin{array}{c} \diagdown \end{array} = 1 \Rightarrow \begin{array}{c} \vdots \quad \vdots \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} = \left(\begin{array}{c} \vdots \quad \vdots \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \vdots \quad \vdots \end{array} \right)$$

vemos que σ^V pode ainda ser escrita como

$$\sigma^V = 1 + \text{diagrama 1} + \text{diagrama 2} + \frac{1}{2} \left(\text{diagrama 3} + \text{diagrama 4} \right)^2 \quad (11.16)$$

A expressão (11.16) é o começo de uma exponencial. Na QED as d.i. dos diagramas "ladder" e "crossed ladder" se exponenciam. Podemos generalizar, para ordens mais elevadas, o procedimento que nos levou a (11.16). Para isto precisamos do análogo de expressão (11.10):

$$\sum_P \frac{1}{qk_1 - i\epsilon} \frac{1}{q(k_1 + k_2) - i\epsilon} \dots \frac{1}{q(k_1 + k_2 + \dots + k_n) - i\epsilon} =$$

$$= \frac{1}{qk_1 - i\epsilon} \frac{1}{qk_2 - i\epsilon} \dots \frac{1}{qk_n - i\epsilon} \quad (11.17)$$

Na expressão acima $\sum_P$ significa soma sobre todas as permutações de $k_1, k_2, \dots, k_n$.

Consideremos agora o mesmo processo mas com emissão de fóton infravermelhos: $e^+ + e^- \rightarrow \gamma^* + n$ fótons infravermelhos.

Para cada número n de fótons infravermelhos obtemos um processo diferente. Não podemos misturar as amplitudes de processos diferentes como no exemplo abaixo.

Até ordem e^4 , na correção de fótons infravermelhos, os diagramas que contribuem para o cancelamento das divergências dos diagramas "ladder" e "crossed ladder" são os seguintes

$$\sigma^e =$$

(11.18)

O fator $1/2$ que aparece multiplicando os diagramas com 2 fótons é necessário porque estamos integrando sobre os momentos deste fótons. Ao fazermos a integração cada estado final é contado duas vezes. Um diagrama com n fótons emitidos deve ser multiplicado por $(1/n!)$.

Observe também que os momentos dos fótons são variáveis mudas, assim

(11.19)

Comecemos analisando

$$= e^2 \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2|k|} \frac{-p_{\mu} \epsilon_{\mu}(k, \lambda)}{-pk - i\epsilon} \frac{q_{\nu} \epsilon_{\nu}(k, \lambda)}{-qk + i\epsilon} \quad (11.20)$$

No gauge de Feynman

$$\sum_{\lambda} \epsilon_{\mu}(k, \lambda) \epsilon_{\nu}(k, \lambda) = \delta_{\mu\nu} \quad (11.21)$$

portanto

$$= -e^2 p \cdot q \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2|k|} \frac{1}{-pk - i\epsilon} \frac{1}{-qk + i\epsilon} \quad (11.22)$$

Devido a (11.21) os vrtices $-p_{\mu}$ e q_{ν} acabam se contraindo produzindo o fator cinemtico $-p \cdot q$. Se observamos os diagramas "ladder" e "crossed ladder" vemos que todos eles tm o fator $(-pq)^n$. Os diagramas que vo cancelar as d.i. destes diagramas tm que ter o mesmo fator cinemtico. Por isto no inclumos diagramas como

$$\sim p^2, \quad \text{ , } \quad \text{Feynman diagram showing two solid lines crossing. Two dashed lines are attached to the crossing point, one extending from the upper-left line and the other from the lower-right line.} \sim -p^2 p \cdot q, \quad \text{ , etc}$$

Usando as regras de Feynman (10.12) e (10.13) a expresso (11.10) no difcil mostrar que

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} = \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right]$$

(11.23)

$$\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} = \left[\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right]$$

(11.24)

$$\frac{1}{2} \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right]$$

(11.25)

$$\frac{1}{2} \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} = \frac{1}{4} \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right]$$

(11.26)

Os diagramas obtidos por conjugação complexa fornecem termos análogos.

Antes de somarmos estes diagramas com os "ladder" e "crossed ladder" vamos analisar o diagrama:

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} = -e^2 p \cdot q \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2|k|} \frac{1}{-pk - i\epsilon} \frac{1}{-qk - i\epsilon}$$

(11.27)

Como k está na camada de massa podemos retirar o $i\epsilon$ dos propagadores dos fêrmions (veja o apêndice B). O mesmo vale para seu complexo conjugado, que só difere no sinal dos $i\epsilon$ assim

$$\text{Diagram with } i\epsilon \text{ on fermion line} = \text{Diagram with } -i\epsilon \text{ on fermion line} \quad (11.28)$$

$$\sigma^e = 2 \left[\text{Diagram 1} \right] + \left[\text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} \right] \left[2 \text{Diagram 4} \right] + \left[\text{Diagram 5} \right]^2 \quad (11.29)$$

Segundo o mecanismo de Bloch-Nordsieck as d.i.s devem se cancelar quando adicionamos (11.29) a (11.16). Colocando $\sigma^V + \sigma^I = \sigma$ obtemos :

$$\sigma = 1 + \left(\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + 2 \text{Diagram 3} \right) + \frac{1}{2} \left(\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + 2 \text{Diagram 3} \right)^2 \quad (11.30)$$

Assim o efeito dos diagramas emitidos foi fazer

$$\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \rightarrow \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + 2 \text{Diagram 3} \quad (11.31)$$

Mostramos no apêndice B que a soma (11.31) não contém d.i.s. Se tivéssemos somado todas as ordens de perturbação obteríamos

$$\sigma = \exp \left\{ \text{diagrama 1} + \text{diagrama 2} + 2 \text{diagrama 3} \right\} \quad (11.32)$$

e novamente as d.i.s se cancelam. Usando o mecanismo de Bloch e Nordsieck conseguimos seções de choque finitas no infravermelho ordem a ordem em perturbação.

12. DIVERGÊNCIAS INFRAVERMELHAS NA CROMODINÂMICA QUÂNTICA

Neste trabalho calcularemos, no gauge axial, as d.i.s subdominantes (Em ordem $2m$ de perturbação as d.i.s dominantes são proporcionais a $(1/\eta)^m$, as d.i. subdominantes a $(1/\eta)^{m-1}$ e assim por diante) do processo $q + \bar{q} \rightarrow \gamma^* +$ gluons infravermelhos. O cálculo direto de todos os diagramas em uma dada ordem de perturbação é quase impraticável. Nos capítulos seguintes desenvolveremos técnicas que permitirão eliminar classes inteiras de diagramas e simplificarão consideravelmente nossa tarefa.

Para motivar a primeira destas técnicas vamos comparar rapidamente a QED e a QCD. (Uma apresentação bastante completa da QCD pode ser encontrada na Parte I desta tese).

	Q E D	Q C D
tipo de teoria	gauge, abeliana	gauge, não abeliana
carga conservada	elétrica	cor
interações mediada pelo	<u>fóton</u> : spin 1, massa zero, <u>sem</u> carga elétrica	<u>gluon</u> : spin 1 massa zero, <u>com</u> carga de cor
interação entre os mediadores	não há
interação com a matéria	$ie\gamma_\mu$	$ig\gamma_\mu t^A$

Analisando a tabela vemos que em termos de diagramas a grande diferença entre as duas teorias é a presença, na QCD, de vértices de interação entre gluons. Estes vértices que não têm análogo na QED, aparecem porque os gluons carregam carga de cor e podem interagir entre si. O vértice da QCD que descreve a interação com a matéria é semelhante ao da QED mas aparece multiplicado por uma matriz t^A (os t^A são os geradores do grupo $SU(3)$).

Os diagramas da QCD onde não aparecem vértices de interação entre gluons possuem análogos na QED. Denominaremos diagramas abelianos esta classe de diagramas e diagramas não abelianos os restantes. Alguns exemplos

Abelianos

, etc

Não abelianos

, etc

Uma idéia que ocorre naturalmente é tentar usar os resultados da QED para analisar os diagramas abelianos. Devido às matrizes t^A não conseguimos comparar diretamente estes diagramas com seus análogos na QED. Porém, precisamos sempre lembrar que estamos interessados em seções de choque e não em amplitudes. A cor não pode ser observada experimentalmente. Assim, ao calcularmos as seções de choque da QCD devem tirar uma média sobre as cores do estado inicial e somar sobre as cores do estado final. Procedendo desta maneira verificamos que aparecem traços das matrizes t^A . Toda a informação sobre as cores das partículas interagentes é fatorizada da seção de choque ficando toda ela contida no traço. Esta fatorização ocorre para os diagramas abelianos e não abelianos em todas as ordens de perturbação. Ela é exata e independe de usarmos ou não a aproximação eikonal.

A análise destes traços (fatores de cor) é extremamente importante, por exemplo, se todos os diagramas abelianos tivessem o mesmo fator de cor o cancelamento das d.i. na QED garantiria o cancelamento das d.i.s na QCD para os diagramas abelianos. É isto que examinaremos a seguir.

13. ANÁLISE DOS FATORES DE COR

Começaremos mostrando como surge o traço. Considere o diagrama

que faz parte da seção de choque, em ordem g^2 , de $q + \bar{q} \rightarrow \gamma^*$.

Como a cor se conserva e o fóton é incolor a cor do anti-quark é igual à anti-cor do quark, para que ela possa se aniquilar. Matematicamente isto significa que o índice de cor do quark (a) deve ser igual ao índice de cor do anti-quark.

Usando as regras de Feynman da QCD (veja o capítulo 5) podemos escrever

$$S_2 = \frac{1}{3} \sum_{a,b,c,d,A} \int \frac{d^4 k}{k^2 - i\epsilon} \bar{v}(q) ig \gamma_\mu (t^A)^{ab} \frac{[i(\not{q} + \not{k}) + m] \delta^{bc}}{q^2 + m^2 + k^2 + 2q \cdot k - i\epsilon} ie \gamma_\nu \times$$

$$\times \frac{[-i(\not{p} - \not{k}) + m] \delta^{cd}}{p^2 + m^2 + k^2 - 2p \cdot k - i\epsilon} ig \gamma_\mu (t^A)^{da} u(p) (2\pi)^4 i \bar{u}(p) (-ie \gamma_\nu) v(q)$$

Podemos fatorizar o termo

$$\frac{1}{3} \sum_{a,b,c,d,A} (t^A)^{ab} \delta^{bc} \delta^{cd} (t^A)^{da} = \frac{1}{3} \text{Tr} [t^A t^A] \quad (13.2)$$

Em ordem g^2 todos os diagramas são abelianos

$$\begin{aligned} \sigma_2^{\text{QCD}} = & \quad \text{diagrama 1} + \text{diagrama 2} + \text{diagrama 3} \\ & + \text{diagrama 4} + \text{diagrama 5} + \text{diagrama 6} \\ & + \text{diagrama 7} + \text{complexo conjugado} \end{aligned} \quad (13.3)$$

(Note: The diagrams in (13.3) are all variations of a crossed-line diagram with additional gluon lines (dashed) and vertices (labeled A) attached to the lines.)

Todos estes diagramas têm o mesmo fator de cor: $\frac{1}{3} \text{Tr} [t^A t^A]$

Ora, se tirarmos as matrizes t^A dos diagramas (13.3) obtemos a seção de choque da QED para $e^+ + e^- \rightarrow \gamma^* + \text{fótons infravermelhos}$ com a constante g substituindo e . Portanto

$$\sigma_2^{\text{QCD}} = \frac{g^2}{3e^2} \text{Tr} [t^A t^A] \sigma_2^{\text{QED}} \quad (13.4)$$

Esta relação é exata e por isso também vale no infravermelho. Porém, $\sigma_2^{\text{QED, i.v.}} = 0$ portanto podemos concluir, sem efetuar nenhum cálculo, que em 2^{a} ordem em g as d.i. se cancelam na QCD. Usaremos argumentos semelhantes para eliminar classes inteiras de diagramas.

Para ordens mais elevadas o traço surge de uma forma análoga. Uma vez compreendido o mecanismo pelo qual o traço se

fatoriza na seção de choque podemos escreve-lo diretamente usando a seguinte regra:

Escreva o diagrama cujo fator de cor se quer determinar, por exemplo,

da seguinte forma

O fator de cor é o traço das matrizes t^A com índices de cor colocados na sequência obtida percorrendo-se o diagrama no sentido anti-horário. O fator de cor do diagrama acima é portanto

$$\frac{1}{3} \text{Tr} [t^A t^B t^B t^A t^D t^C t^C t^D]$$

Devido à propriedade cíclica do traço não importa de que vértice começamos a percorrer o diagrama.

Nos diagramas não abelianos precisamos levar em conta, além das matrizes t^A que aparecem nos vértices abelianos, os fatores f^{ABC} dos vértices não abelianos. No caso do vértice

devemos fatorizar $i f^{ABC}$ e não apenas f^{ABC} . Com isto garantimos um fator de cor real.

O cálculo dos traços é feito usando-se as relações:

$$[t^A, t^B] = i f^{ABC} t^C \quad (13.5)$$

$$f^{ABC} f^{DBC} = C_{YM} \delta^{AD} \quad (13.6)$$

$$\sum_A (t^A t^A)^{ab} = C_F \delta^{ab} \quad (13.7)$$

$$t^A t^B = \frac{1}{2} \{t^A, t^B\} + \frac{1}{2} [t^A, t^B] \quad (13.8)$$

C_F e C_{YM} são constantes e f^{ABC} é antissimétrico nos três índices.

Em ordem g^4 os únicos traços que aparecem são os seguintes:

$$\frac{1}{3} \text{Tr} [t^A t^B t^A t^B] = C_F^2 - \frac{1}{2} C_{YM} C_F \quad (13.9)$$

$$\frac{1}{3} \text{Tr} [t^A t^A t^B t^B] = C_F^2 \quad (13.10)$$

$$\frac{1}{3} i f^{ABC} \text{Tr} [t^B t^A t^C] = \frac{1}{2} C_F C_{YM} \quad (13.11)$$

Calculemos o último deles

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} i f^{ABC} \text{Tr} [t^B t^A t^C] &= \frac{-i}{6} f^{ABC} \text{Tr} [[t^A, t^B] t^C] \\ &= \frac{1}{6} f^{ABC} f^{ABD} \text{Tr} [t^D t^C] = \frac{1}{6} \delta^{CD} C_{YM} \text{Tr} [t^D t^C] \\ &= \frac{1}{6} C_F C_{YM} \text{Tr} [\mathbb{1}] = \frac{C_F C_{YM}}{2} \end{aligned}$$

A análise dos fatores de cor dos diagramas é fundamental. Podemos usar os fatores de cor para dividir os diagramas em classes, cada classe caracterizada por um fator de cor. Como diagramas de classes diferentes não podem se cancelar, os cancelamentos devem ocorrer dentro de uma mesma classe. Este fato vai permitir simplificar a análise consideravelmente.

14. O MÉTODO $R^e - R^a$

Em 1976, Applequist et al⁽¹⁸⁾ mostraram que o mecanismo de Bloch e Nordsieck era suficiente para garantir o cancelamento das d.i.s do processo $\gamma^* \rightarrow q + \bar{q} + \text{gluons moles}$.

Vamos mostrar que este cancelamento decorre essencialmente da unitariedade da matriz S:

$$S S^\dagger = S^\dagger S = \mathbb{1} \quad (14.1)$$

Escrevendo

$$S = \mathbb{1} + iT \quad (14.2)$$

obtemos

$$T - T^\dagger = iT^\dagger T \quad (14.3)$$

A versão de (14.3) a nível de diagramas é a equação de Cutkosky. Sua dedução é feita em detalhe no Diagrammar⁽⁸⁾.

Para cada diagrama " " vale a relação:

Vértice fora da região sombreada: $(2\pi)^4 i$ (14.6a)

Vértice dentro da região sombreada: $-(2\pi)^4 i$ (14.6b)

Para os quarks temos (novamente omitindo fatores de cor)

$$\frac{1}{(2\pi)^4 i} \frac{-i\vec{k} + m}{k^2 + m^2 - i\epsilon} \quad (14.7a)$$

$$-\frac{1}{(2\pi)^4 i} \frac{-i\vec{k} + m}{k^2 + m^2 + i\epsilon} \quad (14.7b)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3} (-i\vec{k} + m) \theta(k_0) \delta(k^2 + m^2) \quad (14.7c)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3} (-i\vec{k} + m) \theta(-k_0) \delta(k^2 + m^2) \quad (14.7d)$$

Perceba que ao cortar um propagador colocamos a partícula na camada de massa. Além disto nos propagadores cortados, devido às funções θ , a energia sempre flui da região não sombreada para a região sombreada. O termo em (14.4) representa a soma sobre todos os cortes compatíveis com a conservação de energia. Por exemplo

(i)

(ii)

Em (i), como a energia flui sempre para a região sombreada, toda a energia no vértice 4 está entrando e portanto não pode haver conservação de energia. O diagrama (ii) é compatível.

Vamos ver agora a relação entre o termo e a seção de choque. Para tornar a discussão mais concreta analisaremos a auto-energia do elétron na QED.

$$= -e^2 \delta^4(k-k') \int d^4p \frac{\text{Tr} \{ \gamma_\mu [-i(\not{p}-\not{k})+m] \gamma_\nu [-i\not{p}+m] \}}{[(p-k)^2+m^2-i\epsilon][p^2+m^2-i\epsilon]} \quad (14.8)$$

$$= -(2\pi)^2 e^2 \delta^4(k-k') \int d^4p \text{Tr} \{ \gamma_\mu [-i(\not{p}-\not{k})+m] \theta(p_0) \delta(p^2+m^2) \gamma_\nu [-i\not{p}+m] \theta(k_0-p_0) \times \\ \times \delta[(p-k)^2+m^2] \} \quad (14.9)$$

Por outro lado, a amplitude para o decaimento $\gamma^* \rightarrow e^+ e^-$ é dado por

$$= (2\pi)^4 i e \bar{u}(p, \lambda) \gamma_\mu v(q, \lambda') \delta^4(k - p - q)$$

(14.10)

O conjugado desta amplitude é

$$= -(2\pi)^4 i e \bar{v}(q, \lambda') \gamma_\nu u(p, \lambda) \delta^4(k' - p - q)$$

(14.11)

A seção de choque de $\gamma^* \rightarrow e^+ + e^-$ é proporcional a

somado sobre os estados finais.

$$\sum_{\text{estados finais}} = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2p_0} \sum_{\lambda'} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2q_0} \quad (14.12)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{\text{estados finais}} \mathcal{M} \mathcal{M}^* &= (2\pi)^8 e^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2p_0} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2q_0} \delta^4(k - p - q) \delta^4(k' - p - q) \times \\ &\times \sum_{\lambda, \lambda'} \bar{u}_\alpha(p, \lambda) (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} v_\beta(q, \lambda') \bar{v}_\gamma(q, \lambda') (\gamma_\nu)_{\gamma\delta} u_\delta(p, \lambda) \end{aligned}$$

(14.13)

Usando

$$\sum_{\lambda} u_\delta(p, \lambda) \bar{u}_\alpha(p, \lambda) = (-i\not{p} + m)_{\delta\alpha} \quad (14.14)$$

$$\sum_{\lambda} v_\beta(q, \lambda') \bar{v}_\gamma(q, \lambda') = (-i\not{q} - m)_{\beta\gamma} \quad (14.15)$$

e também

$$\int \frac{d^3 p}{2p_0} = \int d^4 p \, \theta(p_0) \delta(p^2 + m^2) \quad (14.16)$$

chegamos a

$$\begin{aligned} \sum_{e.f.} \text{diagram} &= (2\pi)^2 e^2 \int d^4 p \, \theta(p_0) \delta(p^2 + m^2) \int d^4 q \, \theta(q_0) \delta(q^2 + m^2) \times \\ &\times \delta^4(k-p-q) \delta^4(k'-p-q) \text{Tr} \{ \gamma_\mu (i\not{q} + m) \gamma_\nu (-i\not{p} + m) \} \end{aligned} \quad (14.17)$$

Efetuada a integral em q , que é trivial devido ao $\delta^4(k-p-q) \delta^4(k'-p-q)$, conseguimos mostrar que (14.17) é igual a (14.9). Graficamente

$$\text{diagram} = \sum_{e.f.} \text{diagram} \propto \sigma_2(\gamma^* \rightarrow e^+ e^-) \quad (14.18)$$

Esta relação com a seção de choque vale também para diagramas mais complicados. Portanto

$$\text{diagram} + \text{diagram} = - \text{diagram} \propto \sigma(\gamma^* \rightarrow e^+ e^- + \text{fótons}) \quad (14.19)$$

(14.19) é a versão anível de diagramas do teorema óptico que relaciona a parte imaginária da amplitude para espalhamento fron-

tal com a seção de choque total.

Na QCD a auto energia do fóton não possui d.i. se o fóton está fora da camada de massa já vimos que os denominadores dos férmions só podem se anular quando as partículas incidentes estão na camada de massa.

Usando a equação de Cutkosky conseguimos relacionar a sub energia do fóton com a seção de choque do processo $\gamma^* \rightarrow q + \bar{q}$ + gluons moles.

Até ordem g^2 temos:

$$\text{Diagrama 1} = \text{Diagrama 2} + \text{Diagrama 3} + \text{Diagrama 4} + \text{Diagrama 5} \quad (14.20)$$

The equation shows a sum of five Feynman diagrams. The first diagram is a circle with two wavy lines (photons) attached. The other four diagrams are similar but include internal fermion lines (solid lines with arrows) and gluon lines (curly lines) within the loop structure.

Portanto

$$\text{Diagrama 6} = \text{Diagrama 7} + \text{Diagrama 8} + \text{Diagrama 9} + \text{Diagrama 10} + \text{Diagrama 11} + \text{Diagrama 12} + \text{Diagrama 13} + \text{Diagrama 14} + \text{Diagrama 15} + \text{Diagrama 16}$$

The equation shows a sum of sixteen Feynman diagrams. The first diagram is a circle with two wavy lines and a vertical cut. The subsequent diagrams show various combinations of internal fermion, gluon, and photon lines, with some diagrams featuring multiple cuts or different internal topologies.

(14.21)

Todos os cortes feitos acima são compatíveis com a

conservação da energia. Usando agora o equivalente da relação (14.18) podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagrama com um círculo e uma linha diagonal} = \\
 & \sum_{\text{e.f.}} \left\{ \begin{aligned} & \text{Diagrama 1} + \text{Diagrama 2} + \text{Diagrama 3} + \text{Diagrama 4} + \text{Diagrama 5} + \\ & \text{Diagrama 6} + \text{Diagrama 7} + \text{Diagrama 8} + \text{Diagrama 9} + \text{Diagrama 10} + \text{Diagrama 11} + \\ & \text{Diagrama 12} + \text{Diagrama 13} + \text{Diagrama 14} + \text{Diagrama 15} + \text{Diagrama 16} + \text{Diagrama 17} + \text{Diagrama 18} + \text{Diagrama 19} + \text{Diagrama 20} \end{aligned} \right\} \\
 & \propto \sigma(\gamma^* \rightarrow q + \bar{q} + \text{gluons}) \quad (14.22)
 \end{aligned}$$

Temos também

$$\text{Diagrama com um círculo e uma linha diagonal} = \text{Diagrama com um círculo} + \text{Diagrama com um círculo e uma linha curva} \quad (14.23)$$

Como o lado direito de (14.23), que é essencialmente a parte imaginária de $\text{Diagrama com um círculo}$, não possui d.i. podemos concluir que as d.i.s se cancelam no processo $\gamma^* \rightarrow q + \bar{q} + \text{gluons infravermelhos}$. Este cancelamento ocorre mesmo se não somarmos sobre os estados finais do quark e do antiquark (só precisamos somar as cores). O mecanismo de cancelamento é análogo

ao que vimos para a QED e independe de integrarmos ou não sobre os momentos p e q . Aqui, como na QED, a parte divergente das integrais virtuais se cancela com a parte divergente das integrais com gluon emitidos segundo o mecanismo de Bloch e Nordsieck.

Para relacionar o processo acima com o que estudamos $q + \bar{q} \rightarrow \gamma^* +$ gluons infravermelhos podemos usar a propriedade de invariância por inversão temporal da QCD perturbativa. Aplicando inversão temporal em $\gamma^* \rightarrow q + \bar{q} +$ gluons emitidos obtemos $q + \bar{q} +$ gluons absorvidos $\rightarrow \gamma^*$. A seção de choque deste processo é ..

$$\sigma_a \propto$$

+ complexo conjugado

(14.24)

Não recaímos no nosso processo porque os gluons são absorvidos e não emitidos, como prescreve o teorema de Bloch e Nordsieck. No infravermelho

$$\sigma_a^{i.v.} =$$

+ complexo conjugado .

(14.25)

$$\sigma_a^{i.v.} = 0 \quad (14.26)$$

Para o nosso processo temos:

$$\sigma_e^{i.v.} = \begin{array}{c} p \\ \diagup \quad \diagdown \\ -q \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ | \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} + p \Rightarrow -q$$

$$+ \text{complexo conjugado} \quad (14.27)$$

Os diagramas puramente virtuais, i.e. aqueles sem gluons emitidos ou absorvidos, que aparecem em σ_a são os mesmos que aparecem em σ_e . A contribuição destes diagramas desaparece na diferença $\sigma_e - \sigma_a$. Porém, os diagramas com pelo menos um gluon real são geralmente diferentes.

Se orientarmos os momentos virtuais de uma maneira conveniente é sempre possível fazer com que a única diferença entre um diagrama emitido e um absorvido seja o sinal do dos propagadores de fêrmions. Por exemplo, na QED

$$= \frac{-p^2 p \cdot q}{(2\pi)^4 i (2\pi)^3} \int \frac{d^4 k_1}{k_1^2 - i\epsilon} \frac{d^3 k_2}{|k_2|} \frac{1}{-p k_1 - i\epsilon} \frac{1}{-p(k_1 + k_2) - i\epsilon} \frac{1}{q k_1 - i\epsilon} \frac{1}{-p k_2 + i\epsilon}$$

$$(14.28)$$

Para o diagrama absorvido fazemos

$$= \frac{-p^2 p \cdot q}{(2\pi)^4 i (2\pi)^3} \int \frac{d^4 k_1}{k_1^2 - i\epsilon} \frac{d^3 k_2}{|k_2|} \frac{1}{-pk_1 + i\epsilon} \frac{1}{-p(k_1 + k_2) + i\epsilon} \frac{1}{qk_1 + i\epsilon} \frac{1}{-pk_2 - i\epsilon}$$

(14.29)

Os propagadores de fêrmions são lineares nos momentos. Se, ao calcularmos os diagramas absorvidos, invertemos também o sinal dos momentos virtuais e em seguida fatorizarmos -1 de cada um dos propagadores mudamos o sinal de todos os $i\epsilon$. Os fatores -1 acabam sempre se cancelando.

Mostramos no apêndice B que podemos desprezar o $i\epsilon$ de diagramas puramente reais como

(14.30)

Portanto estes diagramas são iguais aos absorvidos.

Chamando:

V - diagramas puramente virtuais

R^e - diagramas com pelo menos um gluon emitido

R^C - diagramas com pelo menos um gluon absorvido

$\sigma^{i.v.}$ - contribuição das divergências infravermelhas

é fácil ver

$$\sigma_e^{i.v.} = V + R^e = \sigma^{i.v.} \quad (14.31)$$

$$\sigma_a^{i.v.} = V + R^a = 0 \quad (14.32)$$

Subtraindo as duas equações obtemos:

$$\sigma^{i.v.} = R^e - R^a \quad (14.33)$$

Agora não precisamos mais calcular os diagramas puramente virtuais ou puramente reais, eles foram eliminados na diferença $\sigma_e^{i.v.} - \sigma_a^{i.v.}$.

Conforme já vimos os diagramas R^e diferem dos diagramas R^a apenas no sinal dos $i\epsilon$ dos propagadores de férmions. Pode-se mostrar que as d.i. dominantes são obtidas quando se toma o valor principal nos polos dos propagadores i.e. quando se despreza o $i\epsilon$ destes propagadores. Quando fazemos isto $R^e = R^a$ e podemos concluir que as d.i. dominantes se cancelam em todas as ordens de perturbação sem precisar efetuar nenhum cálculo.

15. O MÉTODO DO MOMENTO CONTROLADOR

Quando passamos para ordens mais elevadas de perturbação verificamos que o número de diagramas aumenta rapidamente. Além disto, estes diagramas se tornam tão complexos que calculá-los exatamente, mesmo na aproximação eikonal, é quase impraticável. Porém, precisamos ter sempre em vista que queremos apenas as d.i. subdominantes. Neste caso é possível achar um método que não apenas seleciona os diagramas relevantes como também mostra como simplificar as integrais. Usaremos o método do momento controlador descoberto por Grammer e Yennie⁽²⁵⁾. Vamos apresentá-lo através de exemplos. Considere primeiramente o diagrama.*

$$I_1 \sim \int \frac{d^3 k_1}{|k_1|} \frac{d^3 k_2}{|k_2|} \frac{(p \cdot \pi(k_1) \cdot q)(p \cdot \pi(k_2) \cdot q)}{(-pk_1 - i\epsilon)[-p(k_1+k_2) - i\epsilon](-qk_1 + i\epsilon)[-q(k_1+k_2) + i\epsilon]}$$

(15.1)

* Fatores de cor e constantes são irrelevantes para esta análise e serão, portanto, omitidos.

Analisando I_1 , vemos que ela apresenta uma d.i. quando $k_1 \rightarrow 0$, independentemente do comportamento de k_2 . Neste limite três denominadores: $-pk_1 - i\epsilon$, $-qk_1 + i\epsilon$ e $|k_1|$ vão a zero e o numerador não fornece potências de k_1 suficientes para impedir a divergência (Lembre que $\Pi(k_1) \sim 1$ i.e. é de grau zero em k_1). Uma vez que $k_1 \rightarrow 0$ a integral apresenta outro d.i. em k_2 . Isto ocorre porque neste caso $-p(k_1+k_2) - i\epsilon \rightarrow -pk_2 - i\epsilon$; $-q(k_1+k_2) + i\epsilon \rightarrow -qk_2 + i\epsilon$ e o denominador vai a zero mais depressa do que o numerador quando $k_2 \rightarrow 0$.

Assim, I_1 apresenta uma dupla d.i. Note, porém, que as divergências só ocorrem se $k_1 \rightarrow 0$. Se $k_1 \neq 0$ não há d.i. mesmo se $k_2 \rightarrow 0$. Portanto k_1 , o momento mais externo do diagrama, controla as d.i. de I_1 . Os momentos devem tender a zero numa ordem determinada para haver divergências infravermelhas: $k_1 \leq k_2$. Este ordenamento implica em que nem todas as regiões do domínio de integração contribuem para as divergências. Se estamos interessados apenas nas divergências infravermelhas podemos nos restringir a certas regiões do domínio de integração. Nestas regiões podemos fazer várias aproximações que simplificam consideravelmente os cálculos.

Vamos mostrar agora como selecionar as regiões de integração que fornecem d.i. simples, d.i. duplas e assim por diante. Para tornar as idéias mais claras é conveniente introduzir um modelo matemático simplificado para as nossas integrais.

Do ponto de vista de potências de k

$$p(k_1+k_2) \sim q(k_1+k_2) \sim k_1+k_2 \quad (15.2a)$$

$$pk \sim qk \sim k \quad (15.2b)$$

$$\Pi(k) \sim 1 \quad (15.3b)$$

Associando a variável x a k_1/Δ e y a k_2/Δ podemos dizer que I_1 se comporta aproximadamente como:

$$I_1' = \int_{\epsilon}^1 dx \int_{\epsilon}^1 dy \frac{y}{x} \frac{1}{(x+y)^2} \quad (15.4)$$

Para simplificar ainda mais regularizamos as integrais com um cutoff inferior ϵ . Neste caso uma d.i. simples aparece como um $\ln \epsilon$, uma d.i. dupla como $(\ln \epsilon)^2$, etc.

Se $\epsilon = 0$ a integral em x diverge quando $x \rightarrow 0$. Neste limite a integral em y também diverge. Analogamente ao caso anterior x controla as d.i..

A integral (15.4) é bastante simples e pode ser calculada exatamente. Lembremos que x e y são variáveis de integração e podem ser permutadas sem alterar o resultado. Assim,

$$I_1' = \frac{1}{2} \int_{\epsilon}^1 dx \int_{\epsilon}^1 dy \frac{y}{x} \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{2} \int_{\epsilon}^1 dx \int_{\epsilon}^1 dy \frac{x}{y} \frac{1}{(x+y)^2} \quad (15.5)$$

$$I_1' = \frac{1}{2} \int_{\epsilon}^1 dx \int_{\epsilon}^1 dy \frac{x^2 + y^2}{xy(x+y)^2} \quad (15.6)$$

Somando e subtraindo $2xy$ ao numerador do integrando obtemos:

$$I_1' = \frac{1}{2} \int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{x} \int_{\epsilon}^1 \frac{dy}{y} - \int_{\epsilon}^1 dx \int_{\epsilon}^1 dy \frac{1}{(x+y)^2} \quad (15.7)$$

$$I_1' = \frac{1}{2} (\ln \epsilon)^2 + \ln \epsilon - 2 \ln(1+\epsilon) + \ln 2 \quad (15.8)$$

Porém, se estamos interessados apenas nas d.i. podemos simplificar os cálculos. Como x é controlador devemos ter $x \simeq 0$ e $x \leq y$.

Para obtermos a divergência dupla precisamos que as integrais em x e y praticamente se desacoplam e cada uma forneça uma divergência. Isto ocorre na região $x \ll y$ ($y \ll x$ é in compatível com $x \leq y$). Nesta região $(x+y)^{-2} \simeq y^{-2}$,

$$I_1' \simeq \int_{\epsilon}^1 dy \int_{\epsilon}^y dx \frac{1}{x} \frac{1}{y} = \frac{1}{2} (\ln \epsilon)^2 \quad (15.9)$$

e reobtemos a d.i. dupla.

Note que mudamos o limite superior da integral em x para levar em conta o fato de que $x \leq y$. Esta mudança do limite inferior pode ser feita de forma rigorosa. Mostramos no apêndice D que

$$\int_a^b dx \int_a^b dy f(x,y) = \int_a^b dx \int_a^x dy [f(x,y) + f(y,x)] \quad (15.10)$$

e que

$$\int_a^b dx_1 \int_a^b dx_2 \dots \int_a^b dx_n f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_a^b dx_n \int_a^{x_n} dx_{n-1} \dots \int_a^{x_2} dx_1 \sum_P f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (15.11)$$

onde $\sum_P$ indica que devemos somar sobre todas as permutações das variáveis de integração.

Usando (15.11) introduzimos um ordenamento nas variáveis de integração. Olhando os limites de integração vemos que $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n$. Se este ordenamento coincide com o ordenamento induzido pelo momento controlador podemos simplificar (15.11) consideravelmente. Para ver isto voltemos à integral (15.4). Usando (15.10) podemos escrevê-la como

$$I_1' = \int_{\epsilon}^1 dy \int_{\epsilon}^y dx \left[\frac{y}{x} \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{x}{y} \frac{1}{(x+y)^2} \right] \quad (15.12)$$

Se calcularmos esta integral reobtemos o resultado (15.8). Mas suponha que novamente só queremos a d.i. dupla. No primeiro termo de (15.12) x é o controlador, portanto a d.i. mais forte vêm da região $x \ll y$. Nesta região $(x+y)^2 \simeq y^2$ e tomando apenas este termo recaímos em (15.9) que produz o resultado correto. No segundo termo a d.i. dupla viria da região $y \ll x$ porém, devido ao ordenamento das variáveis de integração ($x \leq y$) esta região não existe. Este termo só pode produzir uma divergência simples. De fato calculando-o exatamente obtemos:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 dy \int_{\epsilon}^y dx \frac{x}{y} \frac{1}{(x+y)^2} = \left(\frac{1}{2} - \ln 2 \right) \ln \epsilon \quad (15.13)$$

Assim, para obter a d.i. dupla bastou tomar o termo cujo ordenamento induzido pelo momento controlador coincide com o ordenamento das variáveis de integração. Além disto pudemos simplificá-lo consideravelmente.

Vamos agora obter a d.i. simples. Ela vem da região $x \simeq y \simeq 0$. Neste caso é mais conveniente não introduzir nenhum ordenamento nas variáveis de integração. Fazendo $x/y \simeq 1$ em (15.4) obtemos

$$I_1' \simeq \int_{\epsilon}^1 dx \int_{\epsilon}^1 dy \frac{1}{(x+y)^2} = \ln \epsilon$$

Precisamos mostrar ainda como aplicar estas idéias quando as variáveis de integração são 3-momentos. Voltemos para (15.1):

$$I_1 = \int_0^{\Delta} k_1^{1+\eta} dk_1 \int d\Omega_1 \int_0^{\Delta} k_2^{1+\eta} dk_2 \int d\Omega_2 \times \\ \times \frac{(p \cdot \pi(k_1) \cdot q)(p \cdot \pi(k_2) \cdot q)}{(-pk_1 - i\epsilon)[-p(k_1+k_2) - i\epsilon][-qk_1 + i\epsilon][-q(k_1+k_2) + i\epsilon]},$$

$$K_i \equiv |k_i| \quad i = 1, 2 \quad (15.14)$$

Introduziremos um ordenamento apenas na integrais nos módulos dos 3-vetores. As variáveis angulares Ω_i ($d\Omega_i = \sin\theta_i d\theta_i d\varphi_i$) são variáveis de integração, podemos designá-las com qualquer símbolo. Assim, toda vez que permutarmos k_1 e k_2 podemos simul-

taneamente permutar Ω_1 e Ω_2 . Com isto permutamos todo o 4-vetor. A versão de (6.14) para integrais nos 3-vetores é portanto:

$$\begin{aligned} & \int_0^\Delta dk_1^{1+\eta} K_1 \int d\Omega_1 \int_0^\Delta K_2^{1+\eta} dk_2 \int d\Omega_2 f(k_1, k_2) \\ &= \int_0^\Delta dk_2 K_2^{1+\eta} \int d\Omega_2 \int_0^{K_2} K_1^{1+\eta} dk_1 \int d\Omega_1 \left\{ f(k_1, k_2) + f(k_2, k_1) \right\} \end{aligned} \quad (15.15)$$

$$k_1 = (|k_1|, K_1) \quad ; \quad k_2 = (|k_2|, K_2) \quad ; \quad k_1^2 = k_2^2 = 0$$

Observando que k_1 é o controlador podemos escrever imediatamente o termo que fornece a d.i. dupla. A região relevante é $k_1 \ll K_2$. Tomando apenas o 1º termo de (15.15), conforme já explicamos, obtemos:

$$\begin{aligned} & \int_0^\Delta K_2^{1+\eta} dk_2 \int d\Omega_2 \int_0^{K_2} K_1^{1+\eta} dk_1 \int d\Omega_1 \frac{(p \cdot \Pi(k_1) \cdot q)(p \cdot \Pi(k_2) \cdot q)}{(-pk_1 - i\epsilon)(-qk_1 + i\epsilon)(-pk_2 - i\epsilon)(-qk_2 + i\epsilon)} \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_0^\Delta K^{1+\eta} dk d\Omega \frac{p \cdot \Pi(k) \cdot q}{(-pk - i\epsilon)(-qk + i\epsilon)} \right]^2 \end{aligned} \quad (15.16)$$

Na última passagem aproveitamos a simetria do integrando sob a troca $k_1 \rightleftharpoons k_2$ e usamos (15.15) no sentido oposto.

Em (15.15) os 4-vetores estavam na camada de massa, portanto não aparecia nenhuma integral em k_0 . Suponha que ti-

vêsemos um gluon fora da camada de massa. A integral teria a forma

$$\int d^{4+m} k_1 \int d^{3+m} k_2 g(k_1, k_1, k_{01}, k_2, k_2) \\ = \int d^{3+m} k_1 \int d^{3+m} k_2 \int dk_{01} g(k_1, k_1, k_{01}, k_2, k_2) \quad (15.17)$$

Definindo

$$f(k_1, k_1, k_2, k_2) = \int dk_{01} g(k_1, k_1, k_{01}, k_2, k_2) \quad (15.18)$$

recaímos no caso anterior. Geralmente quando existem integrais em k_0 o método de ordenamento se torna pouco prático.* Além disto, para o cálculo das d.i. subdominantes, precisamos considerar regiões em que dois momentos são da mesma ordem. Neste caso é mais conveniente não introduzir nenhum ordenamento entre estes dois momentos. Vamos apresentar uma fórmula que não ordena todos os momentos (ordenamento parcial).

Demonstramos no apêndice D que se

$$I = \int_a^b dx_1 \int_a^b dx_2 \int_a^b dx_3 f(x_1, x_2, x_3) \quad (15.19)$$

* A única exceção ocorre quando o único polo da integral em $\bar{\epsilon} \pm ||k|$. Neste caso, se calcularmos a integral por Cauchy, o efeito da integração se resume a colocar k_μ na camada de massa.

então

$$I = \int_a^b dx_1 \int_{x_1}^b dx_2 \int_{x_2}^b dx_3 \left[f(x_1, x_2, x_3) + f(x_2, x_1, x_3) + f(x_2, x_3, x_1) \right]$$

$$x_1 \leq x_2, x_3 \quad (15.20)$$

ou

$$I = \int_a^b dx_3 \int_a^{x_3} dx_1 \int_a^{x_3} dx_2 \left[f(x_1, x_2, x_3) + f(x_1, x_3, x_2) + f(x_3, x_1, x_2) \right]$$

$$x_1, x_2 \leq x_3 \quad (15.21)$$

Somamos sobre permutações de variável ordenada nos dois casos.

Para os 3-momentos aplicamos as fórmulas (15.20) e (15.21) apenas aos módulos dos 3-momentos, exatamente como fizemos em (15.15).

Por exemplo seja

$$J = \int d^{4+m} k_1 d^{3+m} k_2 d^{3+m} k_3 g(k_1, k_2, k_3) \quad (15.22)$$

Se queremos $k_1, k_2 \leq k_3$ usamos (15.21)

$$J = \int_0^\Delta k_3^{1+m} dk_3 \int d\Omega_3 \int_0^{k_3} k_1^{2+m} dk_1 \int d\Omega_1 \int_0^{k_3} k_2^{1+m} dk_2 \int d\Omega_2 \times$$

$$\times \left[f(|k_1, k_1, |k_2, k_2, |k_3, k_3) + f(|k_1, k_1, |k_3, k_3, |k_2, k_2) + f(|k_3, k_3, |k_1, k_1, |k_2, k_2) \right]$$

$$(15.23)$$

onde

$$f(k_1, k_1, k_2, k_2, k_3, k_3) = \int dk_0 \, g(k_1, k_2, k_3) \quad (15.24)$$

Veremos logo abaixo que geralmente basta tomar um único termo da soma das permutações.

Considere o diagrama

$$\equiv I_2$$

$$I_2 \sim \int \frac{d^4 k_1}{k_1^2 - i\epsilon} \frac{d^3 k_2}{|k_2|} \frac{d^3 k_3}{|k_3|} \frac{(p \cdot \pi(k_1) \cdot q)(p \cdot \pi(k_2) \cdot q)}{(-pk_1 - i\epsilon)[-p(k_1 + k_2) - i\epsilon][-p(k_1 + k_2 + k_3) - i\epsilon]} \times$$

$$\times \frac{p \cdot \pi(k_3) \cdot p}{(qk_1 - i\epsilon)(-pk_3 + i\epsilon)(-qk_2 + i\epsilon)}$$

k_1 é o momento controlador. Quando $k_1 \rightarrow 0$ aparece uma d.i. em k_2 . Depois que $k_2 \rightarrow 0$ aparece a d.i. em k_3 . Assim, o momento controlador impõe o ordenamento $k_1 \leq k_2 \leq k_3$. Na região $k_1 \ll k_2 \ll k_3$ podemos ter uma divergência tripla, uma vez que as integrais em k_1 , k_2 e k_3 praticamente se desacoplam. É conveniente introduzir uma representação gráfica para isto:

(15.26)

O traço ligando os colchetes serve para lembrar que elas não es tão completamente desacopladas.

Já vimos que quando dois momentos vão a zero simultaneamente obtem-se apenas uma divergência simples (Para haver d. i. dupla um momento tem que tender a zero mais rapidamente do que o outro). Para obtermos uma d.i. dupla em I_2 devemos ter, respeitando o ordenamento do momento controlador, ou $k_1 \approx k_2 \ll k_3$ ou $k_1 \ll k_2 \approx k_3$. Graficamente

(15.27)

(15.28)

Vamos usar (15.23) em I_2 na região $k_1 \simeq k_2 \ll k_3$ (figura (15.27)). Desprezando k_1 , k_2 em relação a k_3 obtemos

$$\begin{aligned}
 I_2 &\sim \int_0^\Delta k_3^{1+\eta} dk_3 \int d\Omega_3 \frac{p \cdot \Pi(k_3) \cdot p}{(-pk_3 - i\epsilon)^2} \times \\
 &\times \int_0^{k_3} k_2^{1+\eta} dk_2 \int d\Omega_2 \int_0^{k_3} k_1^{2+\eta} dk_1 \int d\Omega_1 \int dk_0 \times \\
 &\times \frac{(p \cdot \Pi(k_1) \cdot q)(p \cdot \Pi(k_2) \cdot q)}{(k_1^2 - i\epsilon)(-pk_1 - i\epsilon)[-p(k_1+k_2) - i\epsilon](qk_1 - i\epsilon)(-qk_2 + i\epsilon)} .
 \end{aligned}$$

(15.29)

Na região $k_1 \simeq k_2 \ll k_3$, devido à ordenação das variáveis de integração $k_1, k_2 \leq k_3$, bastou tomar o primeiro termo da soma sobre permutações da expressão (15.23).

$$S(\Delta) = \int_0^\Delta k_2^{1+\eta} dk_2 \int d\Omega_2 \int_0^\Delta k_1^{2+\eta} dk_1 \int d\Omega_1 \int dk_0 \times$$

$$\times \frac{(p \cdot \pi(k_1) \cdot q)(p \cdot \pi(k_2) \cdot q)}{(k_1^2 - i\epsilon)(-pk_1 - i\epsilon)[-p(k_1 + k_2) - i\epsilon][qk_1 - i\epsilon][-qk_2 + i\epsilon]} \quad (15.30)$$

No nosso caso estamos interessados em $S(k_3)$. Mas é fácil exprimir $S(k_3)$ em função de $S(\Delta)$. Note que se colocássemos $\eta = 0$ em (15.30) e fizéssemos a mudança de variável $k_1 \rightarrow k_1/\Delta$ e $k_2 \rightarrow k_2/\Delta$ o Δ desapareceria completamente. Os limites de integração passariam a ser de 0 até 1 e $S(\Delta) = S(1)$. Se temos o termo $k_1^\eta k_2^\eta$, quando fizermos a mudança, sobra um $\Delta^{2\eta}$. Assim

$$S(\Delta) = \Delta^{2\eta} S(1) \quad (15.31)$$

É claro que podemos designar Δ por qualquer outro símbolo portanto

$$S(k_3) = k_3^{2\eta} S(1) \quad (15.32)$$

Concluimos então que

$$S(k_3) = \left(\frac{k_3}{\Delta} \right)^{2\eta} S(\Delta) \quad (15.33)$$

Usando (15.33) podemos exprimir (15.29) em termos do resultado em ordem g^4

$$I_2 \sim \int_0^\Delta k_3^{1+3M} dk_3 \int d\Omega_3 \frac{p \cdot \Pi(k_3) \cdot g}{(-pk_3 - i\epsilon)^2} \frac{S(\Delta)}{\Delta^{2M}} \quad (15.34)$$

O uso do momento controlador nos permite exprimir, para as d.i.s subdominantes, a ordem g^6 em termos da ordem g^4 . A expressão (15.33) é verdadeira para qualquer diagrama de ordem g^4 .

16. IDENTIDADES DE SLAVNOV-TAYLOR

No capítulo 7 deduzimos, usando a transformação de Becchi-Rouet-Stora, as identidades de Slavnov Taylor para a QCD no gauge axial. A notação que usaremos abaixo é a deste capítulo.

Mostramos (veja a equação (7.32)) que

$$ik_\mu \tilde{\Gamma}_{ij\mu}^{abB}(q|k) - ig [\tilde{S}_{ij}^{-1}(q+k)]^{ad} (t^B)^{db} + \\ + ig (t^B)^{ad} [\tilde{S}_{ij}^{-1}(q)]^{db} = 0 \quad (16.1)$$

Graficamente

$$\begin{aligned}
 & i k_\mu \left[\text{diagram 1} \right] - i g \left[\text{diagram 2} \right] (t^B)^{ab} \\
 & + i g (t^B)^{ad} \left[\text{diagram 3} \right] = 0
 \end{aligned}
 \tag{16.2}$$

The diagrams are:

- Diagram 1: A circle with an incoming quark line from the left labeled (j, b, q) and an outgoing quark line to the right labeled $(i, a, q+k)$. A dashed line enters the top of the circle labeled (B, μ, k) .
- Diagram 2: A circle with an incoming quark line from the left labeled $(j, d, q+k)$ and an outgoing quark line to the right labeled $(i, a, q+k)$.
- Diagram 3: A circle with an incoming quark line from the left labeled (j, b, q) and an outgoing quark line to the right labeled (i, d, q) .

Como sempre

$B = 1, 2, \dots, 8$	índice de cor dos gluons
$a, b, d = 1, 2, 3.$	índice de cor dos quarks
$i, j = 1, 2, \dots, N.$	índice de sabor dos quarks
$\mu = 1, 2, 3, 4$	índice de Lorentz
q, k	4-momentos

Usando:

$$\tilde{\Gamma}_{ij\mu}^{abB}(q|k) = g (t^B)^{ab} \delta_{ij} \tilde{\Gamma}_\mu(q|k)
 \tag{16.3}$$

$$[\tilde{S}_{ij}^{-1}(p)]^{ab} = \delta^{ab} \delta_{ij} \tilde{S}^{-1}(p)
 \tag{16.4}$$

obtemos

$$k_\mu \tilde{\Gamma}_\mu(q|k) - \tilde{S}(q+k) + \tilde{S}(q) = 0
 \tag{16.5}$$

Vamos examinar a estrutura de cor do vértice $\tilde{\Gamma}_\mu$ em ordem g^3 . Os diagramas relevantes são os seguintes:

$$\sim i f^{BCA} (t^A t^C)^{ab} = \frac{1}{2} C_{YM} (t^B)^{ab} \quad (16.6)$$

$$\sim (t^A t^B t^A)^{ab} = \left(C_F - \frac{1}{2} C_{YM} \right) (t^B)^{ab} \quad (16.7)$$

Lembrando que na definição de $\tilde{\Gamma}_\mu$ fatorizamos o termo $(t^B)^{ab}$ é fácil ver que

$$\tilde{\Gamma}_\mu = \text{triangle diagram} + \text{loop diagram} = C_F A_\mu + C_{YM} B_\mu \quad (16.8)$$

onde A_μ e B_μ são funções de q e k .

Examinemos agora $\tilde{S}^{-1}$ em ordem g^2 . O único diagrama que contribui é

$$\sim (t^A t^A)^{ab} = C_F \delta^{ab} \quad (16.9)$$

$$\tilde{S}^{-1} = C_F C \quad (16.10)$$

Substituindo (16.8) e (16.10) em (16.5) obtemos

$$C_F \{ k_\mu A_\mu - C(q+k) + C(q) \} + C_{YM} k_\mu B_\mu = 0 \quad (16.11)$$

Os coeficientes de cada fator de cor devem se cancelar separadamente portanto

$$k_\mu B_\mu = 0 \quad (16.12)$$

Graficamente

$$k_\mu \left[\text{triangle diagram} + \text{bubble diagram} \right] = 0$$

Do segundo diagrama tomamos apenas o termo com potência máxima de C_{YM} .

Apesar de termos deduzidos esta expressão em ordem g^3 ela vale em todas as ordens de perturbação. O vértice possui sempre termos com uma potência de C_{YM} maior do que a de qualquer termo da função de 2 pontos . Se chamarmos B_μ a contribuição dos termos com potência máxima de C_{YM} novamente obtemos (16.12).

Vamos analisar agora o comportamento ultravioleta dos vértices e mostrar como ele está relacionado com o comportamento infravermelho.

Os vértices (16.6) e (16.7) são logaritmicamente diver

gentes, isto significa que eles podem ser escritos como⁽²²⁾

$$\begin{array}{c} \text{---} \xrightarrow{q} \text{---} \\ \quad \quad \quad \uparrow k_1 \mu \\ \quad \quad \quad \text{---} \end{array} = L^{(1)} \gamma_\mu + \Lambda_\mu^{(1)}(q|k) \quad (16.13)$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \xrightarrow{q} \text{---} \\ \quad \quad \quad \uparrow k_1 \mu \\ \quad \quad \quad \text{---} \end{array} = L^{(2)} \gamma_\mu + \Lambda_\mu^{(2)}(q|k) \quad (16.14)$$

Esta decomposição pode ser feita em todas as ordens de perturbação:

$$\begin{array}{c} \text{---} \xrightarrow{q} \text{---} \\ \quad \quad \quad \uparrow \\ \quad \quad \quad \text{---} \end{array} = L \gamma_\mu + \Lambda_\mu(q|k) \quad (16.15)$$

$L^{(1)}$, $L^{(2)}$ e L são integrais constantes, logaritmicamente divergentes no ultravioleta, $\Lambda_\mu^{(1)}$, $\Lambda_\mu^{(2)}$ e Λ_μ são integrais finitas. As expressões acima são basicamente expansões de Taylor. O primeiro termo corresponde ao termo de ordem-zero da expansão.

No gauge axial temos uma constante extra: n_μ . Em princípio poderíamos ter um outro termo constante da forma*

$$L' \frac{n_\mu}{(n^2)^{1/2}} \quad (16.16)$$

Porém devemos sempre lembrar que os vértices pertencem a diagramas como:

* Como a dependencia em n_μ é introduzida unicamente através dos propagadores de gluons, que são funções de grau zero em n_μ , as amplitudes também devem ser de grau zero em n_μ , assim, devemos ter $n_\mu/(n^2)^{1/2}$ e não simplesmente n_μ .

e neste diagramas somamos sobre as polarizações dos gluons. Neste caso n_μ acaba sempre contraído com $\pi_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - (n_\mu k_\nu + n_\nu k_\mu) / n \cdot k + k_\mu k_\nu n^2 / (n \cdot k)^2$ e sabemos que $n_\mu \pi_{\mu\nu} = 0$. Portanto não precisamos nos preocupar com (5.15).

Se regularizarmos as integrais dimensionalmente, trabalhando em um espaço de dimensão $4 - \epsilon$, todos os termos se tornam finitos. As divergências ultravioletas vão aparecer como polos da forma $(1/\epsilon)^n$. Este polos só aparecem em $L^{(1)}$, $L^{(2)}$ e L . Para investigar as d.u. basta considerar estes termos.

Se substituirmos os termos com polos de (16.13) e (16.14) em (16.12) obtemos:

$$L^{(1)} + L^{(2)} = 0 \quad (16.17)$$

Isto significa que a soma

não contém d.u.. Fazendo o mesmo para (16.15) conseguimos:

$$L = 0 \quad (16.18)$$

Ou seja, se somarmos os termos que contribuem para a máxima potência de C_{YM} dos vértices as d.u. se cancelam. Note que, em ordem g^3 , (16.18) coincide com (16.17).

Voltemos agora para as d.i.. Vamos analisar o diagrama

$$(16.19)$$

é um vértice que produz uma potência de

C_{YM} máxima. Em ordem g^5 , por exemplo, temos os seguintes vértices:

(16.20)

Usando argumentos de momento controlador não é difícil mostrar que enquanto K^* não tende a zero não aparecem d.i.. Este fato se manifesta através do aparecimento de termos proporcionam a $(\ln K)^P$ que justamente só divergem quando $K \rightarrow 0$. O K funciona como um cutoff inferior. Estes termos logaritmicos quando colocados em (16.19) produzem d.i.. De fato:

* Como sempre $K = ||k||$.

$$\int \frac{d^3 k}{|k|} \frac{1}{p \cdot k} \frac{1}{q \cdot k} (\log k)^p \propto \int_{\epsilon}^{\Delta} \frac{dk}{k} (\ln k)^p = \frac{(\ln \Delta - \ln \epsilon)^{p+1}}{p+1}$$

(16.21)

Este é o mecanismo através do qual as d.i. são produzidas.

Podemos usar análise dimensional para determinar estes termos logarítmicos.

Consideremos primeiramente a função de dois pontos

$$\text{---} \overset{k}{\curvearrowright} \text{---} = B_{\mu\nu}(k) \quad (16.22)$$

O polo ultravioleta desta função é igual a ⁽⁹⁾:

$$B_{\mu\nu}^{\text{polo}}(k) = \frac{-11}{24} C_{YM} g^2 \frac{\mu^\epsilon}{\epsilon} (\delta_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) \quad (16.23)$$

Regularizamos $B_{\mu\nu}$ dimensionalmente trabalhando em um espaço de dimensão $4 - \epsilon$. O parâmetro μ tem dimensão de massa e é introduzido para que g permaneça adimensional. Sabemos que $B_{\mu\nu}$ tem dimensão de massa ao quadrado. Examinando (16.23) vemos que $B_{\mu\nu}^{\text{polo}}$ não tem dimensão correta devido ao termo μ^ϵ . Para corrigir isto, a parte finita de $B_{\mu\nu}$ deve fornecer um termo que exatamente cancele esta dimensão extra.

Não devemos nos esquecer que no nosso caso $B_{\mu\nu}$ faz parte de algum subdiagrama como por exemplo

Após integrar em k_0 por Cauchy ficamos com integrais em $|k_1|$ e $|k_2|$. Para as d.i.s a direção com que $|k_1|$ e $|k_2|$ tendem a zero não é relevante, a parte angular das integrais é sempre finita. Para as d.i.s subdominantes os módulos de $|k_1|$ e $|k_2|$ vão para zero simultaneamente. Assim sempre fazemos a mudança de variável

$$K_1 = u(1-v) \quad (16.24a)$$

$$K_2 = uv, \quad (16.24b)$$

$K_1 \equiv |k_1|$, $K_2 \equiv |k_2|$, v é adimensional. Com isto vemos que o único parâmetro com dimensão de massa, relevante, é u . Se $B_{\mu\nu}$ pertence a um subdiagrama mais simples

$u = K$. De qualquer forma a análise dimensional mostra que

$$B_{\mu\nu} = \frac{-11}{24} C_{YM} g^2 \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\mu}{u} \right)^\epsilon (\delta_{\mu\nu} k_2 - k_\mu k_\nu) \quad (16.25)$$

Usando

$$a^\epsilon = 1 + \epsilon \ln a + \frac{\epsilon^2}{2!} (\ln a)^2 + \dots \quad (16.26)$$

e subtraindo o polo de (16.25) obtemos

$$\beta_{\mu\nu}(u) = \frac{11}{24} C_{YM} g^2 \ln\left(\frac{\mu}{u}\right) (\delta_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) \quad (16.27)$$

É interessante notar que a expressão (16.27) é exatamente igual à expressão de $\beta_{\mu\nu}$ para altas energias. Veremos mais adiante que este fato vai fazer com que as constantes de acoplamento efetiva no infravermelho, na aproximação dominante, seja igual à constante de acoplamento efetiva a altas energias, na aproximação do logaritmo dominante.

Vamos examinar agora os vértices

$$= \tilde{\Gamma}_\mu$$

Em ordem mais baixa de perturbação $\tilde{\Gamma}_\mu$ é dado por

$$\sim g \mu^{\frac{\epsilon}{2}} \gamma_\mu \quad (16.28)$$

A dimensão de $\tilde{\Gamma}_\mu$ deve ser a mesma em qualquer ordem de perturbação e portanto é igual a $\mu^{\frac{\epsilon}{2}}$.

Um vértice em ordem n de perturbação é multiplicado por um fator $(g \mu^{\frac{\epsilon}{2}})^n$. Analogamente ao caso da função de dois pontos deve aparecer um parâmetro massivo para cancelar a dimensão extra $\mu^{\frac{\epsilon}{2}(n-1)}$. Mas agora além de u temos o momento p do quark. No gauge de Coulomb foi verificado explicitamente que para os vértices com fator $(C_{YM})^{m_{\text{áx}}}$ o único parâmetro de massa re-

levante é o $u^{(23)}$. Supondo que esta propriedade também valha no gauge axial ficamos novamente apenas com um parâmetro massivo e podemos usar análise dimensional.

Em ordem g^n um vértice $\tilde{\Gamma}_\mu^i$ (i numera os vértices) pode ter polos ultravioletas, no máximo de ordem $\frac{n-1}{2}$. Assim,

$$\tilde{\Gamma}_\mu^i = \gamma_\mu g^n \mu^{\frac{\epsilon}{2}} \left(\frac{\mu}{u} \right)^{\frac{(n-1)\epsilon}{2}} \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{C_j^i}{\epsilon^j} \quad (16.29)$$

Definindo

$$\tilde{C}_j^i \equiv \left(\frac{n-1}{2} \right)^j C_j^i \quad (16.30)$$

$$\tilde{\epsilon} = \left(\frac{n-1}{2} \right) \epsilon \quad (16.31)$$

$$N = \frac{n-1}{2} \quad (16.32)$$

$$\frac{\mu}{u} = \Lambda \quad (16.33)$$

Podemos escrever (omitindo o fator $g^n \mu^{\frac{\epsilon}{2}}$ comum a todos os diagramas)

$$\tilde{\Gamma}_\mu^i \sim \gamma_\mu \Lambda^{\tilde{\epsilon}} \sum_{j=1}^N \frac{\tilde{C}_j^i}{\tilde{\epsilon}^j} \quad (16.34)$$

Lembrando que no final $\epsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \tilde{\epsilon} \rightarrow 0$ vamos ver que termos sobrevivem. Usando (5.25) para expandir $\Lambda^{\tilde{\epsilon}}$ obtemos

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_\mu^i &\sim \delta_\mu \left\{ \tilde{C}_1^i \ln \Lambda + \tilde{C}_2^i \frac{(\ln \Lambda)^2}{2} + \tilde{C}_3^i \frac{(\ln \Lambda)^3}{3!} + \dots + \tilde{C}_N^i \frac{(\ln \Lambda)^N}{N!} \right. \\
&+ \frac{1}{\tilde{\epsilon}} \left[\tilde{C}_1^i + \tilde{C}_2^i \ln \Lambda + \tilde{C}_3^i \frac{(\ln \Lambda)^2}{2} + \dots + \tilde{C}_N^i \frac{(\ln \Lambda)^{N-1}}{(N-1)!} \right] \\
&+ \frac{1}{\tilde{\epsilon}^2} \left[\tilde{C}_2^i + \tilde{C}_3^i \ln \Lambda + \dots + \tilde{C}_N^i \frac{(\ln \Lambda)^{N-2}}{(N-2)!} \right] \\
&+ \dots \\
&+ \frac{1}{\tilde{\epsilon}^{N-1}} \left[\tilde{C}_{N-1}^i + \tilde{C}_N^i \ln \Lambda \right] \\
&\left. + \frac{1}{\tilde{\epsilon}^N} \tilde{C}_N^i \right\}.
\end{aligned}$$

(16.35)

Já mostramos que quando somamos todos os vértices to dos os polos ultravioleta se cancelam (veja a expressão (16.18)). Polos de ordem diferente não podem se cancelar, portanto, o can celamento ocorre separadamente para cada ordem.

Para que os polos $1/\tilde{\epsilon}^N$ se cancelem é necessário que*

$$\sum_i \tilde{C}_N^i = 0 \quad (16.36)$$

Para que os polos $1/\tilde{\epsilon}^{N-1}$ se cancelem

$$\sum_i (\tilde{C}_{N-1}^i + \tilde{C}_N^i \ln \Lambda) = 0 \quad (16.37)$$

* $\sum_i$ = soma sobre todos os vértices de ordem n que têm termos com a potência máxima de .

Usando (5.36) em (5.37) concluimos

$$\sum_i \tilde{C}_{N-1}^i = 0 \quad (16.38)$$

Para os polos $1/\tilde{\epsilon}^{N-2}$ devemos ter

$$\sum_i \left(\tilde{C}_{N-2}^i + \tilde{C}_{N-1}^i \ln \Lambda + \tilde{C}_N^i \frac{(\ln \Lambda)^2}{2} \right) = 0 \quad (16.39)$$

Usando (5.36) e (5.38) obtemos

$$\sum_i \tilde{C}_{N-2}^i = 0 \quad (16.40)$$

Procedendo desta forma mostramos que

$$\sum_i \tilde{C}_m^i = 0 \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (16.41)$$

Como os polos se cancelam resta

$$\tilde{\Gamma}_r^i \sim \gamma_r \sum_{m=1}^N \tilde{C}_m^i \frac{(\ln \Lambda)^m}{m!} \quad (16.42)$$

Mas quando somarmos sobre todos os diagramas de ordem n

$$\sum_i \tilde{\Gamma}_r^i \sim \gamma_r \sum_{m=1}^N \left(\sum_i \tilde{C}_m^i \right) \frac{(\ln \Lambda)^m}{m!} \quad (16.43)$$

devido a (16.41). Portanto todos os $(\ln \Lambda)^m = \left[\ln \left(\frac{\mu}{u} \right) \right]^m$ se cancelam e podemos dizer que

$$\sum_i \rightarrow \text{diagrama com } i \text{ no círculo}$$

não produz nenhum $\ln \left(\frac{\mu}{\mu} \right)$.

Deduzimos no capítulo 7 que os vértices com duas pernas de gluons satisfazem a identidade de Slavnov-Taylor seguinte:

$$\begin{aligned}
 i k_\mu \tilde{\Gamma}_{ij\mu\nu}^{abAB}(q|k, k') - g f^{CAB} \tilde{\Gamma}_{ij\nu}^{abc}(q|k+k') + \\
 + i g (t^A)^{db} \tilde{\Gamma}_{ij\nu}^{adb}(q+k|k') - i g (t^A)^{ad} \tilde{\Gamma}_{ij\nu}^{adb}(q|k') = 0
 \end{aligned}
 \tag{16.44}$$

Acabamos de ver que os $\tilde{\Gamma}_{ij\nu}^{abc}$ com fator máximo de (γ_M) não produzem $(\ln u)^P$. No que se refere a logaritmos a parte $(\gamma_M)^{\max}$ de $\tilde{\Gamma}_{ij\mu\nu}^{abAB}$ satisfaz

$$i k_\mu \tilde{\Gamma}_{ij\mu\nu}^{abAB}(q|k, k') = 0 \tag{16.45}$$

e portanto não produz $(\ln u)^P$ por um mecanismo análogo.

Para concluir vamos examinar o vértice

Vimos no capítulo 7 que

$$k_{1\alpha} \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}(k_1, k_2) = \Pi_{\beta\gamma}(k_1+k_2) - \Pi_{\beta\gamma}(k_2) \tag{16.46}$$

Fazendo a transformação (16.24) ficamos apenas com um parâmetro de escala u . Podemos fazer uma demonstração análoga à anterior para mostrar que os $(\ln u)^P$ se cancelam na soma

$$\text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} \tag{16.47}$$

17. DIAGRAMAS EM ORDEM g^4

Tendo apresentado os métodos que utilizaremos podemos começar a analisar os diagramas do processo $q + \bar{q} \rightarrow \gamma^* +$ gluons infravermelhos em ordem g^4 .

O método $R^e - R^a$ permite a primeira grande simplificação. Lembremos que diagramas puramente virtuais e.g.:

ou puramente reais e.g.:

se cancelam na diferença entre diagramas absorvidos e emitidos.

O diagrama

possui um gluon fora da camada de massa, apesar disto ele se cancela com o diagrama absorvido

$$I_1^e \sim \frac{1}{i} \int \frac{d^{3+m} k_1}{|k_1|} \frac{d^{3+m} k_2}{|k_2|} \frac{\Gamma_{\alpha\beta\gamma}(k_1, k_2) \Pi_{\alpha\mu}(k_1) p_\mu \Pi_{\beta\nu}(k_2) q_\nu \Pi_{\gamma\sigma}(k_1+k_2) p_\sigma}{[(k_1+k_2)^2 - i\epsilon] [-p(k_1+k_2) - i\epsilon] [-pk_1 + i\epsilon] [-qk_2 + i\epsilon]} \quad (17.1)$$

$$I_1^a \sim \frac{1}{i} \int \frac{d^{3+m} k_1}{|k_1|} \frac{d^{3+m} k_2}{|k_2|} \frac{\Gamma_{\alpha\beta\gamma}(k_1, k_2) \Pi_{\alpha\mu}(k_1) p_\mu \Pi_{\beta\nu}(k_2) q_\nu \Pi_{\gamma\sigma}(k_1+k_2) p_\sigma}{[(k_1+k_2)^2 - i\epsilon] [-p(k_1+k_2) + i\epsilon] [-pk_1 - i\epsilon] [-qk_2 - i\epsilon]} \quad (17.2)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma}(k_1, k_2) = g [-(k_1+k_2)_\alpha \delta_{\beta\gamma} + (2k_1+k_2)_\beta \delta_{\gamma\alpha} + (k_2-k_1)_\gamma \delta_{\alpha\beta}] \quad (17.3)$$

A única diferença entre I_1^e e I_1^a está no sinal do $i\epsilon$ nos propagadores de fêrmions*. Podemos usar a análise do apêndice B para mostrar que podemos desprezar o $i\epsilon$ de todos os propagadores de fêrmions. Portanto $I_1^e - I_1^a = 0$.

* Lembre que $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}(-k_1, -k_2) = -\Gamma_{\alpha\beta\gamma}(k_1, k_2)$ e este sinal de menos compensa o sinal de menos que colocamos em evidência nos 3 propagadores de fêrmions de I_1^a .

Conforme mostramos no capítulo 16

$$(17.4)$$

não possui termos logarítmicos nos momentos dos glúons. Assim

$$= C_{\mu}^{(0)} + C_{\mu}^{(1)} + \dots \quad (17.5)$$

$C_{\mu}^{(i)}$ é uma função de grau "i" em k. O termo $C_{\mu}^{(1)}$ e os seguintes destroem as d.i. Basta considerar $C_{\mu}^{(0)}$.

Considere o diagrama

$$\equiv I_2^e \quad (17.6)$$

Ele é equivalente, do ponto de vista de d.i.s., a

$$(17.7)$$

Como $C_{\mu}^{(0)}$ é uma função de grau zero em k e o diagrama do qual ele está multiplicado é puramente real, $I_2^e - I_2^a = 0$ e portanto não precisamos nos preocupar com este diagrama.

Em ordem g^4 os únicos fatores de cor dos diagramas abelianos (diagramas em que não aparecem vértices de interação

entre gluons) são: C_F^2 e $C_F^2 - \frac{1}{2} C_F C_{YM}$. Por outro lado, os fatores de cor dos diagramas não abelianos (diagramas com pelo menos um vértice de interação entre gluons) são iguais a $\frac{1}{2} C_F C_{YM}$. Somando todos os diagramas em ordem g^4 obtemos uma expressão do tipo

$$\sigma_4^{i.v.} = C_F^2 A + C_F C_{YM} B \quad (17.8)$$

Note que todos os diagramas abelianos, e apenas eles, possuem o termo C_F^2 , assim, recaímos na QED se colocarmos $C_F = 1$ e $C_{YM} = 0$. Portanto a contribuição das d.i. na QED é igual a A. Como as d.i. se cancelam na QED concluímos que $A=0$. Assim, basta considerar os diagramas cujos fatores de cor possuem um termo proporcional a $C_F C_{YM}$.

Usemos a análise feita no capítulo 13: todo diagrama que possua duas matrizes adjacentes com um mesmo índice de cor não produz, em quarta ordem, um fator $C_F C_{YM}$. Com isto, podemos eliminar imediatamente os diagramas

etc.

Vamos examinar agora os diagramas de auto-energia. Para o gluon, em ordem g^2 , precisamos considerar os seguintes diagramas:

Os diagramas (i) e (ii) se anulam se usarmos regularização dimensional. O diagrama (iii) é análogo à auto-energia do fóton e não contém d.i. Devemos considerar apenas o diagrama (iv). Para o quark em ordem g^2 temos

O diagrama (vi) é análogo a (ii) e também se anula. No diagrama (vi) temos duas matrizes de cor adjacente com o mesmo índice e portanto ele não contribui para a potência máxima de .

O diagrama que restou: (iv) aparece em ordem g^4 em diagramas do tipo:

Como (iv) é uma função par do momento que entra (veja (7.40)), o diagrama emitido é igual ao absorvido. Eles se cancelam na diferença $R^e - R^a$.

O método $R^e - R^a$, a análise dos fatores de cor e as

identidades de Slavnov-Taylor reduzem os diagramas aos seguintes:

+ complexo conjugado - diagramas absorvidos. (17.12)

A soma destes diagramas não depende do gauge usado⁽²⁰⁾,
ela vale

$$\sigma_y^{i.v.} = C_F C_{YM} \left(\frac{g^2}{4\pi} \right)^2 \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right) \left[\frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) - 2 \right] \sigma_B \frac{\Delta^{2M}}{2\eta} \quad (17.13)$$

σ_{BORN} é a seção de choque em ordem zero em g

$\beta = [1 - (m^2/p.q)^2]^{1/2}$ é proporcional à velocidade
relativa dos quarks

Na expressão (7.17) o termo $1/\beta$ do fator $\frac{1}{\beta} - 1$ é
a contribuição dos diagramas abelianos e o termo -1 a dos não-
abelianos. Definimos:

$$F(\beta) = \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right) \left[\frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) - 2 \right] \quad (17.14)$$

Para $\beta \rightarrow 0$ $F(\beta) \simeq \frac{2}{3} \beta$ e a contribuição dominante vem dos diagramas abelianos. Para $\beta \rightarrow 1$ $F(\beta) \simeq -(1-\beta) \ln(1-\beta)$ e nesta região os diagramas abelianos e não abelianos contribuem igualmente.

Passemos agora para a ordem g^6 .

18. DIAGRAMAS EM ORDEM g^6

Nesta ordem de perturbação as d.i.s subdominantes são d.i.s duplas. Usando o método $R^e - R^a$, tomando apenas diagramas cujos fatores de cor possuam termos com potência máxima de (γ_M) (analisaremos os outros fatores de cor no capítulo seguinte) e empregando o método do momento controlador para selecionar os diagramas que podem fornecer d.i.s duplas, ficamos com os diagramas seguintes:

+ $p \rightleftharpoons -q$ + complexo conjugado

Fatores de cor dos diagramas sem bolhas de auto energia.

Os diagramas abelianos (nºs i a XVI) têm o fator de cor $C_F^3 - C_F^2 C_{YM} + \frac{1}{4} C_F C_{YM}^2$, as únicas exceções são os diagramas v, vi, vii e viii cujo fator de cor é $C_F^3 - \frac{3}{2} C_F^2 C_{YM} + \frac{1}{2} C_F C_{YM}^2$. Os não abelianos (nºs XVII a XXIV) têm todos o fator $\frac{1}{2} C_F^2 C_{YM} - \frac{1}{4} C_F C_{YM}^2$.

Fatores de cor dos diagramas com bolhas de auto energia.

Diagramas abelianos (nºs XXV a XXX) têm o fator $C_F^2 C_{YM} - \frac{1}{2} C_F C_{YM}^2$ e os não abelianos (nºs XXX a XXXIII) $\frac{1}{2} C_F C_{YM}^2$.

Estaremos interessados apenas no termo com potência máxima de C_{YM} . Fatorizando $\frac{1}{4} C_F C_{YM}^2$ nos diagramas sem bolha de auto-energia vemos que os diagramas v, vi, vii e viii ficam multiplicados por 2 e os diagramas não abelianos por -1. Analisaremos os diagramas com bolhas de auto energia depois.

Começemos com o diagrama i. Para produzir uma d.i. dupla devemos ter um dos momentos muito menor do que os outros dois

(veja o capítulo 15 onde discutimos o método do momento controlador). Temos duas possibilidades $k_3 \ll k_1 \approx k_2$ ou $k_3 \approx k_1 \ll k_2$. Para a primeira região obtemos

$$\sim \frac{1}{2} \left[\text{Diagram 1} \right] \left[\text{Diagram 2} \right]$$

(18.1)

O fator $1/2$ serve para evitar que contemos duas vezes o mesmo estado final ao integrarmos em k_1 e k_2 . Como k_1 e k_2 estão em camada de massa podemos desprezar o $i\epsilon$ dos propagadores de fêrmions (veja o apêndice B). Com isto o diagrama (18.1) é igual, na região $k_3 \ll k_1 \approx k_2$, ao diagrama absorvido e não contribui na diferença $R^e - R^a$. Resta a segunda região. Para temos

$$\sim \left[\text{Diagram 1} \right] \left[\text{Diagram 2} \right]$$

(18.2)

Note que agora como $k_1 \ll k_2$ não há perigo de dupla contagem e não precisamos multiplicar (8.2) por um fator $1/2$. (18.2) não se cancela na diferença $R^e - R^a$, precisamos mantê-lo.

A mesma análise vale para os diagramas de n^os ii até viii. Para estes diagramas a única região que contribui é

Os diagramas de nºs ix a xii são diferentes. Eles contribuem com duas regiões de integração: $k_1 \ll k_3 \simeq k_2$ e $k_1 \simeq k_3 \ll k_2$. Tomemos IX como exemplo. Para $k_1 \ll k_3 \simeq k_2$

(18.3)

Para $k_1 \simeq k_3 \ll k_2$

(18.4)

Os diagramas XIII e XIV contribuem apenas na região $k_3 \ll k_2 \simeq k_1$. Na região $k_3 \simeq k_2 \ll k_1$ o diagrama se cancela com o absorvido. Tomando (XIII) como exemplo, na região $k_3 \ll k_2 \simeq k_1$ temos:

(18.5)

Os diagramas XV e XVI contribuem para as d.i.s subdo-
minantes em 4 regiões. Consideremos o diagrama XV, por exemplo

Para $k_2 \simeq k_1 \ll k_3$

12

(18.6)

Para $k_2 \ll k_1 \simeq k_3$

12

(18.7)

Para $k_3 \simeq k_1 \ll k_2$

12

(18.8)

Para $k_3 \ll k_1 \simeq k_2$

12

(18.9)

Como já explicamos os diagramas v, vi, VII e VIII de-

vindo ao seu fator cor devem ser contados duas vezes. Adicionamos uma metade deles aos diagramas I, II, III e IV obtendo, na região $k_3 \simeq k_1 \ll k_2$, o seguinte resultado

$$\left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \\ \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \end{array} \right]$$

(18.10)

A outra metade adicionamos aos diagramas IX, X, XI e XII, tomando estes últimos na região $k_1 \simeq k_2 \ll k_3$. Obtemos

$$\left[\begin{array}{c} \text{Diagram 7} \\ \text{Diagram 8} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 9} \\ \text{Diagram 10} \\ \text{Diagram 11} \\ \text{Diagram 12} \end{array} \right]$$

(18.11)

Os diagramas IX, X, XI e XII na região $k_1 \ll k_2 \simeq k_3$ são adicionados aos diagramas XIII, XIV (ambos na região $k_3 \ll k_2 \simeq k_1$) e a (XV) e (XVI) (ambos nas regiões $k_2 \simeq k_1 \ll k_3$ e $k_3 \ll k_1 \simeq k_2$ *). Chegamos a

* As regiões $k_2 \ll k_1 \simeq k_3$ e $k_3 \simeq k_1 \ll k_2$ dos diagramas XV e XVI são usados para os diagramas complexos conjugados. Esta aparente sobra ocorreu porque XV é real (portanto metade dele deve ser usado para os diagramas complexos) e porque o conjugado de (XVI) coincide com o diagrama $p \rightleftharpoons -q$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \left[\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right] & + & \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} & + & \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} & + & \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} & + & \left[\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right] \\
 + & \left[\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right] & + & \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} & + & \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} & + & \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} & + & \left[\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right]
 \end{array}$$

(18.12)

Mostramos no apêndice F que

$$\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} = \left(\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right)$$

(18.13)

Substituindo em (8.11) obtemos

$$\left[\left(\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right) \right] \left[\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \quad \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \quad \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \quad \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right]$$

(18.14)

Esta expressão é igual à expressão com gluons absorvidos e portanto (18.14) não contribui na diferença $R^e - R^a$.

No apêndice C demonstramos que mesmo com o acoplamen

to*

$$= 0$$

(18.15)

Portanto (18.12) também não contribui.

A contribuição dos diagramas abelianos sem bolhas de auto energia se resume portanto a (18.10).

Usando uma análise análoga para os diagramas não abelianos vemos que eles contribuem com

(18.16)

Para os diagramas complexos conjugados e para os obtidos através de $p \rightleftharpoons -q$ vale exatamente a mesma análise, assim, a contribuição dos diagramas sem bolhas de auto-energia é dada por:

* O acoplamento faz com que apareça no integrando dos diagramas (18.15) uma função de $|k|$.

$$\sigma_6 = -\frac{1}{2} C_{YM} \left(-\frac{1}{2} C_F C_{YM} \right) X$$

$$X \left[\begin{array}{c} \text{diagram 1} + \text{diagram 2} - \text{diagram 3} + p \rightleftharpoons -q \\ \text{diagram 4} + \text{diagram 5} + \text{diagram 6} \end{array} \right] + \text{complexo conjugado} - \text{diagramas absorvidos}$$

Diagram 1: Two lines crossing, with dashed lines labeled 1 and 2. Diagram 2: Two lines crossing, with dashed lines labeled 2 and 2. Diagram 3: Two lines crossing, with dashed lines labeled 2 and 1. Diagram 4: Two lines crossing, with dashed lines labeled 3 and 3. Diagram 5: Two lines crossing, with dashed lines labeled 3 and 3. Diagram 6: Two lines crossing, with dashed lines labeled 3 and 3.

(18.17)

Para colocar em evidência o termo

$$\text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} \equiv D$$

Diagram 1: Two lines crossing, with dashed lines labeled 3 and 3. Diagram 2: Two lines crossing, with dashed lines labeled 3 and 3. Diagram 3: Two lines crossing, with dashed lines labeled 3 and 3. Diagram 4: Two lines crossing, with dashed lines labeled 3 and 3.

(18.18)

usamos o fato de que $D^{\text{emitido}} = D^{\text{absorvido}}$, que D fica invariante sob $p \rightleftharpoons -q$ e $D = D^*$.

Analisando (18.17) vemos que a expressão dentro do primeiro par de colchetes é a seção de choque infravermelha em ordem g^4 . Devido ao acoplamento das integrais a limite superior das integrais nos módulos de k_1 e k_2 , antes igual a Δ , passa a ser igual a k_3 . Discutimos este ponto detalhe no capítulo 15, veja a equação (15.33) e a discussão que se segue. Chame-mos $\sigma_4(k_3)$ a seção de choque em ordem g^4 assim obtida. $\sigma_4(\Delta)$ é a seção de choque usual de quarta ordem. Usando os resultados do capítulo 15 podemos escrever:

$$\sigma_4(k_3) = \left(\frac{k_3}{\Delta} \right)^{2\eta} \sigma_4(\Delta) \quad (18.19)$$

Inserindo este resultado em (8.21) obtemos

$$\sigma_6' = \frac{c_{YM}}{2} g^2 \int_0^\Delta dk_3 k_3^{3\eta-1} \int d\Omega \times$$

$$\left[2 \frac{p \cdot \Pi(\hat{k}_3) q}{(p \hat{k}_3)(q \hat{k}_3)} + \frac{p \cdot \Pi(\hat{k}_3) \cdot p}{(p \hat{k}_3)(p \hat{k}_3)} + \frac{q \cdot \Pi(\hat{k}_3) \cdot q}{(q \hat{k}_3)(q \hat{k}_3)} \right] \frac{\sigma_4(\Delta)}{\Delta^{2\eta}} \quad (18.20)$$

onde $\hat{k}_3 \equiv \left(\frac{|k_3|}{|k_3|}, 1 \right)$

A parte angular desta integral vale

$$\frac{1}{4\pi^2} \left[\frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) - 2 \right] \equiv \frac{E(\beta)}{4\pi^2} \quad (18.21)$$

Substituindo em (8.24) chegamos a

$$\sigma_6' = -\frac{c_{YM}}{2} \frac{g^2}{4\pi^2} E(\beta) \int_0^\Delta dk_3 k_3^{3\eta-1} \frac{\sigma_4(\Delta)}{\Delta^{2\eta}} \quad (18.22)$$

$$\sigma_6' = -\frac{c_{YM}}{2} \frac{g^2}{4\pi^2} E(\beta) \frac{\Delta^{3\eta}}{3\eta} \frac{\sigma_4(\Delta)}{\Delta^{2\eta}} \quad (18.23)$$

Passemos agora para os diagramas com bolha de auto-energia (nºs XXV e XXXIII).

Já mostramos no capítulo 16 que

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram: } \mu \xrightarrow{R} \text{ (circle) } \nu &= (\delta_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) \frac{11}{24} C_{YM} g^2 \ln\left(\frac{u}{\mu}\right) \\
 &\equiv (\delta_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) B(u) \equiv B_{\mu\nu}(u)
 \end{aligned}$$

(18.24)

Vejamos o que ocorre quando inserimos (18.24) em um diagrama. Seja

$$a \sim g^2 \int \frac{d^{4+M} k_1}{k_1^2 - i\epsilon} \frac{d^{3+M} k_2}{|k_2|} \frac{(p \cdot \Pi(k_1) \cdot q)(p \cdot \Pi(k_2) \cdot q)}{(-pk_1 - i\epsilon)[-p(k_1+k_2) - i\epsilon](qk_1 - i\epsilon)(-qk_2 + i\epsilon)}$$

(18.25)

$$a_B \sim \frac{1}{2} g^2 \int \frac{d^{4+M} k_1}{k_1^2 - i\epsilon} \frac{d^{3+M} k_2}{|k_2|} \frac{(p \cdot \Pi(k_1) \cdot q)(p_\mu \Pi_{\mu\alpha}(k_2) B_{\alpha\beta}(k_2) \Pi_{\beta\nu}(k_2) p_\nu)}{(-pk_1 - i\epsilon)[-p(k_1+k_2) - i\epsilon](qk_1 - i\epsilon)(-qk_2 + i\epsilon)(k_2^2 - i\epsilon)}$$

(18.26)

O fator $1/2$ aparece para as correções de auto energia em pernas externas, veja a referência 15. Para evitar divergências mantemos k_2 ligeiramente fora da camada de massa.

Podemos simplificar o numerador de (18.26). Lembrando que

$$k_\mu (\delta_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) = k_\nu (\delta_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) = 0 \quad (18.27)$$

é fácil ver que

$$\Pi_{\mu\alpha}(k_2) B_{\alpha\beta}(k_2) \Pi_{\beta\nu}(k_2) = k_2^2 B(u) \Pi_{\mu\nu} \quad (18.28)$$

Substituindo em (18.26) obtemos

$$a^B \sim \int \frac{d^{4+m} k_1}{k_1^2 - i\epsilon} \frac{d^{3+m} k_2}{|k_2|} \frac{(p \cdot \Pi(k_1) \cdot q) \left(\frac{g^2}{2} B(u) \Pi_{\mu\nu}(k_2) q_\nu \right)}{(p k_1 - i\epsilon) [-p(k_1 + k_2) - i\epsilon] (q k_1 - i\epsilon) (-q k_2 + i\epsilon)} \quad (18.29)$$

Portanto o efeito da inclusão da bolha de auto energia se resume em multiplicar o vértice p_μ pelo fator $g^2 B(u)/2$. Se a correção de auto energia é feita em uma linha de gluon interna o fator $1/2$ não é colocado.

As bolhas de auto-energia vão ser responsáveis pelo aparecimento da constante de acoplamento efetiva (na aproximação do logaritmo dominante). Para ver como isto ocorre considere as correções

$$\sim \frac{g^2}{k^2 - i\epsilon} \Pi_{\mu\nu}(k) + \frac{g^2}{k^2 - i\epsilon} \Pi_{\mu\alpha}(k) \frac{g^2}{k^2 - i\epsilon} B_{\alpha\beta}(k) \Pi_{\beta\nu}(k) + \dots$$

$$= \frac{g^2}{k^2 - i\epsilon} \Pi_{\mu\nu}(k) \left(1 + g^2 B + g^4 B^2 + \dots \right)$$

$$= \frac{g^2}{k^2 - i\epsilon} \Pi_{\mu\nu}(k) \cdot \frac{1}{1 - g^2 B} \quad (18.30)$$

Na penúltima passagem usamos a propriedade (18.28). Comparando (18.30) com o diagrama de ordem mais baixa vemos que o efeito da inclusão das bolhas de auto energia é fazer

$$g^2 \rightarrow \frac{g^2}{1 - g^2 B(u)} \equiv g^2(u) \quad (18.31)$$

$g^2(u)$ é precisamente a constante de acoplamento efetiva na aproximação do logaritmo dominante.

Conforme explicamos no capítulo 16 a correção do vértice cancela as correções nas pernas externas. Assim

$$+ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

(18.32)

Para as d.i. subdominantes não é necessário considerar correções para a bolha de ordem mais alta, tais como:

, etc.

Antes de analisar os diagramas que faltam em ordem g^6 convém reescrever o resultado em ordem g^4 .

$$\sigma_4 = \sigma_B C_F C_{YM} \frac{1}{4\pi^2} F(\beta) \int_0^{\Delta} du u^{2\gamma-1} g^2 \quad (18.33)$$

A integral em u se fatoriza em qualquer ordem de perturbação. A constante de acoplamento efetiva só depende de u e portanto se fatoriza junto.

Chamemos

 $\equiv A_4$

$$A_4 = h(\beta) \int_0^\Delta du u^{2\eta-1} g^4 \quad (18.34)$$

 $\equiv A_{6a}$

Como discutimos acima

$$A_{6a} = h(\beta) \int_0^\Delta du u^{2\eta-1} g^6 \frac{B(u)}{2} \quad (18.35)$$

 $\equiv A_{6b}$

$$A_{6b} = h(\beta) \int_0^\Delta du u^{2\eta-1} g^6 \frac{B(u)}{2} \quad (18.36)$$

 $\equiv A_{6c}$

$$A_{6c} = h(\beta) \int_0^\Delta du u^{2\eta-1} g^6 B(u)$$

Somando os 4 diagramas últimos obtemos

$$A = h(\beta) \int_0^{\Delta} du u^{2\eta-1} g^4 (1 + 2g^2 B(u)) \quad (18.37)$$

Mas até ordem g^6 é verdade que

$$g^4 (1 + 2g^2 B(u)) = g^4 [1 + g^2 B(u)]^2 \quad (18.38)$$

Portanto

$$A = h(\beta) \int_0^{\Delta} du u^{2\eta-1} [g^2 (1 + g^2 B(u))]^2 \quad (19.39)$$

Assim, também em nossos diagramas o efeito das bolhas de auto energia é fazer $g^2 \rightarrow g^2(u)$

As mesmas considerações valem para os diagramas XXXVI a XLIII. A contribuição de todos estes diagramas se resume a fazer

$$\int_0^{\Delta} du u^{2\eta-1} (g^2)^2 \longrightarrow \int_0^{\Delta} du u^{2\eta-1} [g^2 (1 + g^2 B)]^2 \quad (18.40)$$

em (18.33).

Usando o resultado (18.23) podemos finalmente escrever a contribuição das d.i. até ordem g^6

$$\sigma_6^{i.v.} = \sigma_B C_F C_{YM} \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 F(\beta) \int_0^{\Delta} du u^{2\eta-1} [g^2(1+g^2 B(u))]^2$$

$$- \frac{C_{YM}}{2} \frac{g^2}{4\pi^2} E(\beta) \frac{\Delta^{3\eta}}{3\eta} \frac{\sigma_4^{i.v.}}{\Delta^{2\eta}} \quad (18.41)$$

19. ORDENS MAIS ELEVADAS DE PERTURBAÇÃO

Vamos primeiramente desenvolver um método mais geral para tratar as d.i. subdominantes. Em ordem $2n$ de perturbação elas são proporcionais a $(1/\eta)^{n-1}$. Sabemos que quando dois momentos vão a zero simultaneamente obtem-se apenas uma d.i. Em ordem $2n$ temos n integrais nos momentos k_i dos gluons. Para obter $n-1$ d.i. devemos ter dois destes n momentos indo para zero simultaneamente. Portanto as d.i.s subdominantes devem vir da região

$$k_{i_1} \ll k_{i_2} \ll \dots \ll k_{i_\ell} \simeq k_{i_m} \ll \dots \ll k_{i_n} \quad (19.1)$$

$i_1, i_2, \dots, i_n$ é uma permutação dos momentos que coincide com o ordenamento do momento controlador.

Como k_{i_ℓ} e k_{i_m} vão para zero simultaneamente é extremamente conveniente fazer a seguinte mudança de variável:

$$k_{i_\ell} = u(1-v) \quad ; \quad k_{i_\ell} \equiv |k_{i_\ell}| \quad (19.2a)$$

$$k_{i_m} = uv \quad ; \quad k_{i_m} \equiv |k_{i_m}| \quad (19.2b)$$

$$\frac{\partial(k_{i_\ell}, k_{i_m})}{\partial(u, v)} = u \quad (19.3)$$

A integral em u sempre se desacopla completamente da integral em v . Após a mudança de variável usamos a fórmula (D.10) para introduzir o ordenamento

$$K_{i_1} \leq K_{i_2} \leq \dots \leq u \leq \dots \leq K_{i_n} \quad (19.4)$$

e em seguida analisamos a região

$$K_{i_1} \ll K_{i_2} \ll \dots \ll u \ll \dots \ll K_{i_n}$$

que é equivalente a (19.1).

A integral em v não produz d.i., ela é finita. Toda a d.i. vem da integral em u . Para entender o mecanismo através do qual isto ocorre vamos estudar de novo o diagrama

$$I_6 \sim \int \frac{d^4 k_1}{k_1^2 - i\epsilon} \frac{d^3 k_2}{|k_2|} \frac{d^3 k_3}{|k_3|} \frac{(p \cdot \Pi(k_1) \cdot q)(p \cdot \Pi(k_2) \cdot q)}{(-pk_1 - i\epsilon)[-p(k_1+k_2) - i\epsilon][-p(k_1+k_2+k_3) - i\epsilon](qk_1 - i\epsilon)} \times$$

$$\times \frac{p \cdot \Pi(k_3) \cdot q}{(-pk_3 + i\epsilon)(-qk_2 + i\epsilon)}$$

Vamos analisar a região $k_1 \approx k_2 \ll k_3$. Como explicamos devemos fazer

$$k_1 = u(1-v) \quad ; \quad k_2 = uv$$

e em seguida fazer a ordenação

$$u \leq k_3$$

Na região $u \ll k_3$ podemos desprezar k_1 e k_2 em relação a k_3 . Com isto obtemos:

$$I_2 \sim \int \frac{d^{4+\eta} k_1}{k_1^2 - i\epsilon} \frac{d^{3+\eta} k_2}{k_2} \frac{(p \cdot \pi(k_1) \cdot q)(p \cdot \pi(k_2) \cdot q)}{(-pk_1 - i\epsilon)[-p(k_1+k_2) - i\epsilon](qk_1 - i\epsilon)(-qk_2 + i\epsilon)} \times$$

$$\times \int_u^\Delta dk_3 k_3^{\eta+1} \int d\Omega_3 \frac{p \cdot \pi(k_3) \cdot q}{(-pk_3 - i\epsilon)(-pk_3 + i\epsilon)}$$

(19.6)

Nas integrais em k_1 e k_2 está subentendido que fizemos as transformações (19.2). Como antes

$$I_2 \sim \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 2} \end{array} \right] \quad (19.7)$$

O acoplamento agora é na integral em u . A fatorização de u das duas primeiras integrais pode ser vista com o seguinte argumento: após a integração em k_{01} , por Cauchy, k_{01} é substituído por

um termo do tipo $Ak_1 + Bk_2$ (A e B podem depender das variáveis angulares). Com isto ficamos apenas com os módulos k_1 , k_2 e as variáveis angulares. Lembrando que $\pi_{\mu\nu}(k)$ é uma função de grau zero em k é fácil ver que $\pi_{\mu\nu}(k, \Omega) = \pi_{\mu\nu}(v, \Omega)$. Além disto, como sô temos denominadores do tipo $a k_1 + b k_2$ podemos sempre fatorizar o u nos denominadores. Para qualquer diagrama em ordem g^4 a integral em u vale*

$$\int_0^1 du u^{2\eta-1} \quad (19.8)$$

Substituindo (19.8) em (19.6) chegamos a

$$I_6 \sim \int_0^1 du u^{2\eta-1} \int_0^1 dv d\Omega_1 d\Omega_2 g(v, \Omega_1, \Omega_2) \int_u^\Delta dk_3 k_3^{\eta-1} \int d\Omega_3 h(\Omega_3) \quad (19.9)$$

Lembremos que

$$\int_0^1 du u^{2\eta-1} \int_0^1 dv d\Omega_1 d\Omega_2 g(v, \Omega_1, \Omega_2) =$$

(19.10)

Desta forma conseguimos embutir a ordem g^4 na ordem g^6 . Note que o único acoplamento do resultado de 4^a ordem com o resto do diagrama ocorre através do integral em u .

* Se $\eta=0$ teríamos uma d.i. logaritmica: $\int \frac{du}{u}$; devido ao fator $k_1^\eta k_2^\eta$ no numerador quando fazemos a mudança (19.2) vai aparecer um $u^{2\eta}$ extra.

Este formalismo é adequado para o tratamento de diagramas mais complicados, como:

Neste caso a região de interesse é $k \ll k_1 \approx k_2 \ll k_3$. Usando o procedimento descrito acima e levando em conta que agora a integral em u também se acopla com a integral em K ($k \leq u \leq k_3$) podemos escrever

$$I_8 \sim \int_0^\Delta dk k^{\eta-1} \int d\Omega h(\Omega) \int_K^\Delta du u^{2\eta-1} \int_0^1 dv d\Omega_1 d\Omega_2 g(v, \Omega_1, \Omega_2) \times \\ \times \int_u^\Delta dk_3 k_3^{\eta-1} \int d\Omega_3 h(\Omega_3) .$$

(19.11)

Novamente o único acoplamento do resultado de 4^a ordem com o resto do diagrama se dá através da integral em u .

Pretendemos investigar também diagramas que fornecem d.i. subdominantes mas cujo fator de cor não fornece $(C_{YM})^{\text{máximo}}$. Mostraremos que apenas as d.i.s dos diagramas com $(C_{YM})^{\text{máximo}}$ sobrevivem. Com isto justificaremos o fato de em ordem g^6 termos considerado apenas estes diagramas.

O método do momento controlador mostra facilmente que toda vez que uma linha de gluon interna cruza outra perde-se uma d.i. Assim, o diagrama

não fornece d.i. Para diagramas com gluons reais ocorre algo parecido para não se perder divergências a ordenação dos momentos deve ser a mesma nos dois lados do diagrama. Considere:

(i)

(ii)

Em (i) dos dois lados do diagrama k_1 é o momento mais externo seguido de k . Também k_2 é mais externo do que k_3 nos dois lados. No diagrama (ii) a ordenação de um lado não é a mesma do outro. O diagrama (i) fornece d.i. dominantes ao passo que (ii) só fornece d.i. simples. As estruturas "paralelas" são fundamentais para as d.i. subdominantes.

No estudo da ordem g^6 vimos que as d.i. subdominantes são produzidas por diagramas que têm os diagramas de ordem g^4 embutidos neles. As divergências vêm da região em que os dois momentos que formam o diagrama de 4ª ordem são da mesma ordem. As d.i. subdominantes de outros tipos de diagramas ou de outras regiões de integração se cancelam. Este mecanismo funciona da mesma forma em ordens mais elevadas.

Assim os dois momentos da mesma ordem em (19.1) devem formar um dos diagramas de ordem g^4 . Para produzir d.i. subdominantes não podemos perder mais nenhuma divergência. O resto do diagrama deve ter apenas estrutura paralelas.

Colocando

$$\text{Diagram 1} \equiv \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} \quad (19.12)$$

The diagrammatic equation (19.12) shows a square vertex (a square with a dashed line through its center) on the left, followed by an equivalence symbol $\equiv$. To the right of the symbol are two triangle diagrams (triangles with a dashed line through their centers) separated by a plus sign $+$. The entire equation is labeled (19.12) on the far right.

não é difícil ver que precisamos investigar diagramas do tipo

(19.13)

ou com gluons reais na linha $-q$, mas sempre respeitando o ordenamento.

(19.14)

ou ainda com alguns gluons virtuais ligando as duas pernas

(19.15)

e misturas destes tipos de diagrama.

Conforme já vimos, as integrais angulares se desacoplam completamente. Assim a parte angular do integral em $\hat{k}_m$ em (19.13) é igual a

$$\frac{1}{2(2\pi)^3} \int d\Omega \frac{p_\mu \Pi_{\mu\nu}(\hat{k}_m) p_\nu}{(p \cdot \hat{k}_m)(p \cdot \hat{k}_m)} \equiv \text{ang} \left[\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right] \quad (19.16)$$

onde $\hat{k}_m = \left(\frac{|\vec{k}_m|}{|\vec{k}_m|}, 1 \right)$.

Por outro lado em (19.14) como um dos $\hat{k}_m$ está na perna $-q$ a integral angular vale

$$\frac{1}{2(2\pi)^3} \int d\Omega \frac{q_\mu \Pi_{\mu\nu}(\hat{k}_m) p_\nu}{(q \cdot \hat{k}_m)(p \cdot \hat{k}_m)} \equiv \text{ang} \left[\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right] \quad (19.17)$$

É fácil ver que, com exceção da integral angular do diagrama g^4 embutido, só podemos ter quatro tipos de integrais angulares

$$\text{ang} \left[\begin{array}{c} p \quad \diagup \quad \diagdown \\ -q \quad \diagdown \quad \diagup \end{array} \right] \equiv h_p(\beta) \quad (19.18)$$

$$\text{ang} \left[\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right] = \text{ang} \left[\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right] = h_{pq}(\beta) \quad (19.19)$$

$$\text{ang} \left[\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right] = h_q(\beta) \quad (19.20)$$

Como já mostramos no capítulo 18:

$$\text{ang} \left[\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \quad \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \quad \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \quad \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right]$$

$$= h_p(\beta) + 2 h_{pq}(\beta) + h_q(\beta) = \frac{E(\beta)}{4\pi^2} = \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{1}{2\beta} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) - 1 \right)$$

(19.21)

A bolha de auto-energia

(19.22)

quando colocada em uma linha interna fornece, em ordem 2ℓ , o termo

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\ell!} \left(\frac{-\Delta}{\eta} \right)^\ell \left[\frac{g^2}{4\pi^2} h_p(\beta) \right]^\ell$$

(19.23)

As integrais nos k'' são completamente desacopladas das integrais nos outros momentos. A bolha fornece a mesma contribuição dos dois lados do diagrama. Assim,

(19.24)

Portanto podemos colocar a bolha do lado esquerdo e esquecer o fator $1/2$.

Comecemos investigando (19.13). Ele é composto de dois diagramas

(19.25)

(19.26)

O fator de cor de (19.19) pode ser calculado usando as regras (13.5)-(13.8)

$$\begin{aligned}
 & \frac{i}{3} f^{ABC} \text{Tr} \left\{ t^{l'} \dots t^{n'} t^B t^{l'} \dots t^m t^{l''} \dots t^{l''} t^{l''} \dots t^{l''} t^m \dots t^l t^A t^{n'} \dots t^{l'} t^c \right\} \\
 &= \frac{i}{6} f^{ABC} C_F^{l+m} \text{Tr} \left\{ t^{l'} \dots t^{n'} [t^B, t^A] t^{n'} \dots t^{l'} t^c \right\} \\
 &= \frac{1}{6} f^{ABC} f^{ABD} C_F^{l+m} \text{Tr} \left\{ t^{l'} \dots t^{n'} t^D t^{n'} \dots t^{l'} t^c \right\} \\
 &= \frac{1}{6} C_{YM} C_F^{l+m} \text{Tr} \left\{ t^{l'} \dots t^{n'} t^c t^{n'} \dots t^{l'} t^c \right\}
 \end{aligned}$$

Usando

$$t^j t^c t^j = (C_F - \frac{1}{2} C_{YM}) t^c \quad (19.27)$$

na expressão acima obtemos:

$$\frac{1}{2} C_F C_{YM} C_F^{\ell+m} \left(C_F - \frac{1}{2} C_{YM} \right)^n \quad (19.28)$$

O fator de cor de (19.20) é igual a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \text{Tr} \{ t^{l'} \dots t^{n'} t^A t^B t^{l'} \dots t^m t^{\ell''} \dots t^{l''} t^{l'''} t^m \dots t^{l'} t^A t^{n'} \dots t^{l'} t^B \} \\ &= \frac{1}{3} C_F^{\ell+m} \text{Tr} \{ t^{l'} \dots t^{n'} t^A t^B t^A t^{l'} \dots t^{n'} t^B \} \\ &= \frac{1}{3} C_F^{\ell+m} \text{Tr} \{ t^A t^B t^A t^{l'} \dots t^{n'} t^B t^{n'} \dots t^{l'} \} \\ &= \frac{C_F^{\ell+m}}{3} \left(C_F - \frac{1}{2} C_{YM} \right)^n \text{Tr} \{ t^A t^B t^A t^B \} \end{aligned}$$

O termo $\frac{1}{3} \text{Tr} \{ t^A t^B t^A t^B \} = (C_F^2 - \frac{1}{2} C_F C_{YM})$ é o fator de cor do diagrama de ordem g^4 embutido em (19.26). Quando estudamos a ordem g^4 mostramos que os termos C_F^2 se cancelam. Assim, tomando apenas o segundo termo obtemos:

$$-\frac{1}{2} C_F C_{YM} C_F^{\ell+m} \left(C_F - \frac{1}{2} C_{YM} \right)^n \quad (19.29)$$

As integrais nos módulos dos 3-vetores são iguais para os dois diagramas:

$$\frac{1}{\ell!} \left(\frac{\Delta}{\eta} \right)^\ell \int_0^\Delta dk_m k_m^{\eta-1} \dots \int_0^\Delta dk_l k_l^{\eta-1} \int_{k_l}^\Delta du u^{2\eta-1} \int_u^\Delta dk_n k_n^{\eta-1} \dots \int_{k_2'}^\Delta dk_1' k_1'^{\eta-1} \equiv \int \quad (19.30)$$

Temos

$$\begin{aligned}
 \int_u^\Delta dk'_n \dots \int_{K_2}^\Delta dk'_1 k_n'^{\eta-1} \dots k_1'^{\eta-1} &= \frac{1}{n!} \int_u^\Delta dk'_n \dots \int_{K_2}^\Delta dk'_1 \sum_P k_n'^{\eta-1} \dots k_1'^{\eta-1} \\
 &= \frac{1}{n!} \left[\int_u^\Delta dk k^{\eta-1} \right]^n = \frac{1}{n!} \left(\frac{\Delta^\eta}{\eta} - \frac{u^\eta}{\eta} \right)^n.
 \end{aligned}$$

(19.31)

Na penúltima passagem usamos (D.10). Assim, (19.24) se escreve como:

$$J = \frac{1}{n!} \frac{1}{l!} \left(-\frac{\Delta^\eta}{\eta} \right)^l \int_0^\Delta dk_m k_m^{\eta-1} \dots \int_{K_2}^\Delta dk_1 k_1^{\eta-1} \int_{K_1}^\Delta du u^{2\eta-1} \left(\frac{\Delta^\eta}{\eta} - \frac{u^\eta}{\eta} \right)^n$$

(19.32)

Substituindo a relação:

$$\int_0^\Delta dk_m \int_{K_m}^\Delta dk_{m-1} \dots \int_{K_2}^\Delta dk_1 \int_{K_1}^\Delta du = \int_0^\Delta du \int_0^u dk_1 \dots \int_0^{K_{m-2}} dk_{m-1} \int_0^{K_{m-1}} dk_m.$$

(19.33)

em (19.32) obtemos

$$J = \frac{1}{n!} \frac{1}{l!} \left(-\frac{\Delta^\eta}{\eta} \right)^l \int_0^\Delta du u^{2\eta-1} \left(\frac{\Delta^\eta}{\eta} - \frac{u^\eta}{\eta} \right)^n \int_0^u dk_1 \dots \int_0^{K_{m-1}} dk_m k_1^{\eta-1} \dots k_m^{\eta-1}$$

(19.34)

As integrais em K_j podem ser calculadas como (19.31), mas usando (D.9) ao invés de (D.10)

$$J = \frac{1}{n!} \frac{1}{\ell!} \left(-\frac{\Delta^\eta}{\eta} \right)^\ell \int_0^\Delta du u^{2\eta-1} \left(\frac{\Delta^\eta}{\eta} - \frac{u^\eta}{\eta} \right)^n \frac{1}{m!} \left(\frac{u^\eta}{\eta} \right)^m \quad (19.35)$$

Chamemos $\oplus'(\beta)$ o resultado da integral em v do diagrama de ordem g^4 embutido em (19.25) e $\oplus(\beta)$ o resultado da integral em v de (19.26). As outras integrais angulares são iguais para os dois diagramas e fornecem um fator $(h_p(\beta))^{\ell+m+n}$

O diagrama (19.25) vale

$$g^4 \frac{C_F C_{YM}}{2} C_F^{\ell+m} \left(C_F - \frac{1}{2} C_{YM} \right)^n (h_p(\beta))^{\ell+m+n} \oplus'(\beta) \frac{1}{\ell!} \frac{1}{m!} \times \\ \times \left(-\frac{\Delta^\eta}{\eta} \right)^\ell \left(\frac{u^\eta}{\eta} \right) g^{2(\ell+m+n)} \frac{1}{n!} \int_0^\Delta du u^{2\eta-1} \left(\frac{\Delta^\eta}{\eta} - \frac{u^\eta}{\eta} \right)^n \equiv I' \quad (19.36)$$

e o diagrama (19.26):

$$-g^4 \frac{C_F C_{YM}}{2} C_F^{\ell+m} \left(C_F - \frac{1}{2} C_{YM} \right)^n (h_p(\beta))^{\ell+m+n} \oplus(\beta) \frac{1}{\ell!} \frac{1}{m!} \times \\ \times \left(-\frac{\Delta^\eta}{\eta} \right)^\ell \left(\frac{u^\eta}{\eta} \right) g^{2(\ell+m+n)} \frac{1}{n!} \int_0^\Delta du u^{2\eta-1} \left(\frac{\Delta^\eta}{\eta} - \frac{u^\eta}{\eta} \right)^n \equiv I \quad (19.37)$$

Suponha que estamos considerando a ordem $2M+4$ de perturbação. Vamos somar os diagramas da seguinte forma. Primeiro somamos sobre l e m mantendo porém $l+m \equiv N$ fixo. Observando (19.36) e (19.37) vemos que nos dois diagramas a única parte que se modifica é

$$\frac{1}{l!} \frac{1}{m!} \left(-\frac{\Delta^\eta}{\eta} \right)^l \left(\frac{u^\eta}{\eta} \right)^m \quad (19.38)$$

Somar sobre l e m , mantendo $l+m = N$ fixo é equivalente a substituir l por $N-m$ e somar sobre m de 0 até N .

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^N \frac{1}{(N-m)!} \frac{1}{m!} \left(-\frac{\Delta^\eta}{\eta} \right)^{N-m} \left(\frac{u^\eta}{\eta} \right)^m &= \frac{1}{N!} \sum_{m=0}^N \frac{N!}{(N-m)! m!} \left(-\frac{\Delta^\eta}{\eta} \right)^{N-m} \left(\frac{u^\eta}{\eta} \right)^m \\ &= \frac{1}{N!} \left(\frac{u^\eta}{\eta} - \frac{\Delta^\eta}{\eta} \right)^N = \frac{(-1)^N}{N!} \frac{(\Delta^\eta - u^\eta)^N}{\eta^N} \end{aligned} \quad (19.39)$$

Substituindo (19.39) em (19.36) e (19.37) e adicionando os dois resultados obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{g^4}{2} C_F C_{YM} \frac{(-1)^N}{N! n!} C_F^N \left(C_F - \frac{1}{2} C_{YM} \right)^n (h_p(\beta))^{N+n} [\Theta'(\beta) - \Theta(\beta)] \times \\ &\times \int_0^\Delta du u^{2\eta-1} (\Delta^\eta - u^\eta)^{N+n} \eta^{-(N+n)} g^{2(N+n)} \equiv J \end{aligned} \quad (19.40)$$

Vamos agora somar sobre N e n mantendo $N+n=M$ fixo.

Em (19.40) o único termo sensível a esta soma é

$$\frac{(-1)^N}{N! n!} C_F^N \left(C_F - \frac{1}{2} C_{YM} \right)^n \quad (19.41)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^M \frac{(-1)^{M-n}}{(M-n)! n!} C_F^{M-n} \left(C_F - \frac{1}{2} C_{YM} \right)^n = \\ &= \frac{1}{M!} \sum_{n=0}^M \frac{M!}{(M-n)! n!} (-C_F)^{M-n} \left(C_F - \frac{1}{2} C_{YM} \right)^n = \frac{1}{M!} \left(-\frac{1}{2} C_{YM} \right)^M \end{aligned} \quad (19.42)$$

Substituindo (19.42) em (19.40) chegamos finalmente a

$$\begin{aligned} J &= \frac{g^4}{2} C_F C_{YM} \frac{1}{M!} \left(-\frac{1}{2} C_{YM} \right)^M [h_p(\beta)]^M [\Theta'(\beta) - \Theta(\beta)] \times \\ &\times \int_0^\Delta du u^{2M-1} (\Delta^\eta - u^\eta)^M \eta^{-M} g^{2M} \end{aligned} \quad (19.43)$$

Assim, apenas a potência máxima de C_{YM} sobrevive. O único diagrama que satisfaz este requisito e que produz sozinho o resultado (19.43) contém todas as correções na parte interna em relação a u :

(19.44)

As mesmas considerações valem para o diagrama no qual as correções são colocadas apenas nas pernas $-q$. A única diferença em relação a (19.43) é a substituição de $h_p(\beta)$ por $h_q(\beta)$.

Os diagramas (19.15) com gluons virtuais acabam se cancelando. Vamos ilustrar o mecanismo através do qual isto ocorre com dois exemplos.

Na região de interesse

=

$$= \frac{C_F C_{YM}}{2} \left(C_F - \frac{1}{2} C_{YM} \right) \left[\text{diagram 1} \right] \left[\text{diagram 2} \right] \quad (19.45)$$

=

$$= \frac{C_F C_{YM}}{2} \left(C_F - \frac{1}{2} C_{YM} \right) \left[\text{diagram 1} \right] \left[\text{diagram 2} \right] \quad (19.46)$$

$$= \frac{C_F C_{YM}}{2} \left(C_F - \frac{1}{2} C_{YM} \right) \left[\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right] \quad (19.47)$$

$$= \frac{C_F C_{YM}}{2} \left(C_F - \frac{1}{2} C_{YM} \right) \left[\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right] \quad (19.48)$$

Adicionando (19.45), (19.46), (19.47) e (19.48) obte

mos:

$$\left[\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right] = 0$$

(19.49)

Mostramos no apêndice C que a quantidade dentro do primeiro par de colchetes se anula apesar do acoplamento.

Note que agora os quatro diagramas não têm todos o mesmo fator de cor. Quando os somarmos os quatro sobra sem se cancelar a parte com $(C_{YM})^{\max}$ dos diagramas (19.52) e (19.53). Algo análogo ocorre em ordens mais elevadas. Sobram novamente apenas a parte com $(C_{YM})^{\max}$ dos diagramas com gluons reais na parte interior de u .

(19.54)

A ordenação dos momentos neste diagrama respeita a ordenação imposta pelo momento controlador e temos apenas estruturas paralelas.

Quando somarmos (19.54) e (19.44) e aos diagramas com correções apenas na perna $-q$ substituiremos $h_p(\beta)$ em (19.43) por $h_p(\beta) + h_q(\beta) + 2 h_{pq}(\beta) = E(\beta) / 4\pi^2$ (Veja 19.21). Assim, terminamos com

$$J_t = \frac{1}{2} C_F C_{YM} \frac{1}{M!} \left(-\frac{1}{2} C_F C_{YM} \right)^M \left(\frac{E(\beta)}{4\pi^2} \right)^M \left[\Theta'(\beta) - \Theta(\beta) \right] \times$$

$$\times \int_0^\Delta du u^{2\eta-1} g^4 (\Delta^\eta - u^\eta) \eta^{-M} g^{2M}.$$

(19.55)

Para diagramas com outros diagramas de 4ª ordem embutidos valem as mesmas considerações. A única coisa que vai mu-

dar é o termo $\Theta'(\beta) - \Theta(\beta)$. Quando considerarmos todos os diagramas o fator da ordem g^4 :

$$\Theta'(\beta) - \Theta(\beta) \longrightarrow \frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right) E(\beta) \quad (19.56)$$

Escrevendo ainda

$$(\Delta^\eta - u^\eta)^M \eta^{-M} g^{2M} = \left[\int_u^\Delta dk k^{\eta-1} g^2 \right]^M \quad (19.57)$$

podemos finalmente escrever a soma dos diagramas relevantes de ordem $2M+4$:

$$\begin{aligned} J_{2M+4} &= \frac{C_F C_{YM}}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right) E(\beta) \int_0^\Delta du u^{2\eta-1} g^4 \times \\ &\times \frac{1}{M!} \left\{ - \frac{C_{YM}}{8\pi^2} E(\beta) \int_u^\Delta dk k^{\eta-1} g^2 \right\}^M \end{aligned} \quad (19.58)$$

Quando acrescentarmos os diagramas com bolha de auto energia

$$g^2 \longrightarrow g^2(u)$$

em (19.58).

Somando para todas as ordens de perturbação ficamos com a expressão

$$\sigma^{i.v.} = \frac{C_F C_{YM}}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right) E(\beta) \int_0^\Delta du u^{2\eta-1} g^4(u) \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{C_{YM}}{8\pi^2} E(\beta) \int_u^\Delta dk k^{\eta-1} g^2(k) \right\}$$

(19.59)

Reobtemos a expressão (18.41) expandindo (19.59) até ordem g^6 .

20. INTERPRETAÇÕES E CONCLUSÕES

Obtivemos para a contribuição das divergências infra vermelhas next to leading a seguinte expressão:

$$\sigma^{i.v.} = \frac{C_F C_{YM}}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right) E(\beta) \int_0^\Delta du u^{2\eta-1} g^4(u) \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{C_{YM}}{8\pi^2} E(\beta) \int_u^\Delta dk k^{\eta-1} g^2(k) \right\} \quad (20.1)$$

Para analisá-la a regularização usada (dimensional) não é a mais conveniente. Uma outra escolha teria sido deixar os quarks ligeiramente fora da camada de massa. Assim os denominadores dos propagadores de fêrmions para pequenos k seriam

$$\frac{1}{(k+p)^2 + m^2 - i\epsilon} \approx \frac{1}{p^2 + m^2 + 2k \cdot p - i\epsilon} \quad (20.2)$$

Se o quark está fora da camada de massa $p^2 + m^2 \neq 0$, portanto o denominador não se anula e a divergência desaparece. Ela vai se manifestar agora como um $\ln(p^2 + m^2)$. Definimos, agora, a quantidade $\Delta P^2 \equiv p^2 + m^2$ que essencialmente mede o quanto o quark está fora de camada de massa*. Em termos desta nova regularização a expressão (20.1) se escreve como:

$$\begin{aligned} \sigma^{i.v.} = & \frac{C_F C_{YM}}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right) E(\beta) \int_{\Delta P}^{\Delta} \frac{du}{u} g^4(u) \times \\ & \times \exp \left\{ - \frac{C_{YM}}{8\pi^2} E(\beta) \int_u^{\Delta} \frac{dk}{k} g^2(k) \right\} \end{aligned} \quad (20.3)$$

Precisamos analisar o comportamento desta expressão no limite $\Delta P \rightarrow 0$.

Como já discutimos, fazer $\Delta P \rightarrow 0$ é equivalente a colocar os fêrmions em camada de massa. Porém, só podemos dizer que $p^2 = q^2 = -m^2$ se os momentos das partículas são perfeitamente definidos. Porém sabemos, pelo Princípio de incerteza de Heisenberg, que uma determinação precisa dos momentos leva a uma indeterminação total na posição das partículas. Assim $\Delta P \rightarrow 0 \Leftrightarrow \Delta R \rightarrow \infty$ (ΔR é a incerteza na posição das partículas) ⁽²⁴⁾. Em Mecânica Quântica uma função de onda com momento bem definido é uma onda plana e descreve uma partícula livre. Interpretamos $\Delta P \rightarrow 0$, ou equivalentemente $\Delta R \rightarrow \infty$, como o limite no qual as partículas são livres.

* Deixaremos o antiquark também fora da camada de massa da mesma quantidade i.e. $q^2 + m^2 = \Delta P^2$.

Quando discutimos as d.i. em QED mencionamos que em processos sem emissão de radiação a contribuição das d.i. se exponenciam e se fatorizam na seção de choque $\sigma \propto \exp\{-c \ln \Delta R\}$. Quando $\Delta R \rightarrow \infty$, $\sigma \rightarrow 0$. Se não existissem processos com emissão de radiação que cancelassem as divergências através do mecanismo de Bloch e Nordsieck a QED apresentaria confinamento. O anulação da seção de choque indicaria que a probabilidade de duas partículas livres se espalharem é zero.

Não podemos fazer uma análise tão direta no caso de QCD. No nosso trabalho calculamos apenas a contribuição das divergências next to leading. A contribuição das d.i. mais fracas somadas em todas as ordens de perturbação pode eventualmente cancelar a expressão (20.3). Mesmo levando em conta apenas as d.i. subdominantes uma análise do comportamento de (20.3) depende do conhecimento, não disponível atualmente, da constante de acoplamento efetiva $g(k)$ em todas as ordens de perturbação. Além disto faltaria ainda saber se as d.i. se fatorizam na seção de choque.

Podemos, entretanto, mostrar que nossa expressão é consistente com a hipótese de confinamento. Analisando (20.3) vemos que os termos de perturbação, ordem a ordem divergentes para $\Delta R \rightarrow \infty$, se somam em uma exponencial. Se $g(k) \rightarrow \infty$ para $\Delta R \rightarrow \infty$, ou seja se a constante de acoplamento efetiva aumenta com distância, obtemos $\sigma \rightarrow 0$ quando $\Delta R \rightarrow \infty$. De acordo com a nossa interpretação isto significa que não podemos ter espalhamento de quarks livres.

Este comportamento pode ser interpretado como o confinamento dos quarks.

É interessante notar que se os quarks formam estado livres existe um ΔP natural para se colocar na equação (20.3): $\Delta P \approx \ell^{-1}$ onde ℓ é a dimensão do estado ligado. Nesta caso as d.i. dão uma contribuição finita diferente de zero para a seção de choque. Examinando nosso resultado vemos que ele é multiplicado por um fator $1-\beta$. Em altas energias este fator é proporcional a E^{-2} e portanto muito pequeno. As previsões da QCD perturbativa são feitas no limite de altas energias onde a constante de acoplamento efetiva vai a zero e é possível usar perturbação. Portanto estas previsões não são afetadas, em primeira aproximação, pela contribuição das d.i.. Podemos entender este resultado como uma indicação do fato de que processos confinantes (infravermelhos) não são importantes, em primeira aproximação, para processos a altas energias.

Para concluir, o não cancelamento das divergências infravermelhas, parece ser devida à troca de cor. Esta possibilidade não existe em teorias abelianas ou mesmo em teorias não abelianas ou processos onde haja menos de duas partículas coloridas no estado inicial. Para estes processos as d.i.s se cancelam.

A P Ê N D I C E A

Regras de Feynman da QED

$$\begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \text{---} \\ p, \sigma \end{array} \quad \bar{u}(p, \sigma)$$

$$\text{---} \rightarrow \text{---} \quad u(p, \sigma)$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \leftarrow \text{---} \\ -q, \sigma \end{array} \quad \bar{v}(q, \sigma)$$

$$\text{---} \leftarrow \text{---} \quad v(q, \sigma)$$

$$\begin{array}{c} k, \lambda, \mu \\ \text{~~~~~} \end{array} \quad \epsilon_{\mu}(k, \lambda)$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \text{---} \\ q \end{array} \quad \frac{-i \not{q} + m}{q^2 + m^2 - i\epsilon}$$

$$\text{~~~~~} \quad \frac{\delta_{\mu\nu}}{k^2 - i\epsilon} \quad \text{gauge de Feynman}$$

$$\begin{array}{c} \nearrow \text{---} \\ \nwarrow \text{---} \end{array} \quad ie\gamma_{\mu}$$

Hã um fator $(2\pi)^4 i$ para cada vÃrtice um fator $[(2\pi)^4 i]^{-1}$ para cada propagador.

A P Ê N D I C E B

Análise dos $i\epsilon$ dos propagadores de Fêrmions.

Temos a seguinte relação:

$$\frac{1}{x \pm i\epsilon} = \frac{\mathcal{P}}{x} \mp i\pi \delta(x) \quad (\text{B.1})$$

onde $\mathcal{P}$ significa valor principal de Cauchy. Quando desprezamos o $i\epsilon$ dos propagadores de fêrmions fica subentendido que estamos tomando o valor principal e desprezamos a contribuição do δ .

Começemos analisando

$$= -e^2 p \cdot q \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2|k|} \frac{1}{-pk - i\epsilon} \frac{1}{-qk + i\epsilon} \quad (\text{B.2})$$

Como p e q estão em camada de massa

$$-pk = |k| (p_0 - |p| \cos \theta) \quad (\text{B.3})$$

$$-qk = |k| (q_0 - |q| \cos \theta') \quad (\text{B.4})$$

Além disto como a massa das partículas incidentes é diferente de zero $p_0 > |p|$ e $q_0 > |q|$. Assim (B.4). (B.4) só se anulam quando $|k| = 0$.

Usando (B.1) em (B.2) obtemos (suprimindo o fator $-e^2 p \cdot q$)

$$\begin{aligned}
 \text{Diagrama} & \sim \int \frac{d^{3+\eta} k}{(2\pi)^3 2|k|} \frac{1}{p \cdot k} \frac{1}{q \cdot k} + i\pi \int \frac{d^{3+\eta} k}{(2\pi)^3 2|k|} \frac{\delta(p \cdot k)}{q \cdot k} \\
 & - i\pi \int \frac{d^{3+\eta} k}{(2\pi)^3 2|k|} \frac{\delta(q \cdot k)}{p \cdot k} + \pi^2 \int \frac{d^{3+\eta} k}{(2\pi)^3 2|k|} \delta(p \cdot k) \delta(q \cdot k)
 \end{aligned}
 \tag{B.5}$$

As três últimas integrais se anulam

$$i\pi \int \frac{d^{3+\eta} k}{|k|} \frac{\delta(p \cdot k)}{q \cdot k} = i\pi \int d\Omega \frac{1}{|q| |\cos\theta' - q_0|} \int_0^\Delta d|k| |k|^\eta \delta(p \cdot k)
 \tag{B.6}$$

Como já vimos $\delta(p \cdot k)$ se anula apenas quando $|k|=0$. Mas neste caso o fator $|k|^\eta$ no numerador anula a integral

$$x^\eta \delta(x) = 0 \quad \text{se} \quad \eta > 0
 \tag{B.7}$$

A mesma análise vale para as outras duas integrais. Assim,

$$\text{Diagrama} = -e^2 p \cdot q \int \frac{d^{3+\eta} k}{(2\pi)^3 2|k|} \frac{1}{(p \cdot k)(q \cdot k)}
 \tag{B.8}$$

Vejamos agora

$$\begin{aligned}
 & \text{Re} \left[\text{Diagrama} \right] \\
 & = \text{Re} \left[\frac{-e^2 p \cdot q}{(2\pi)^4 i} \int \frac{d^{4+\eta} k}{k^2 - i\epsilon} \frac{1}{-p \cdot k - i\epsilon} \frac{1}{q \cdot k - i\epsilon} \right]
 \end{aligned}
 \tag{B.9}$$

Para obter a parte real do diagrama entre colchetes, devido ao fator $1/i$, devemos tomar um número ímpar de funções δ . As outras possibilidades só contribuem para a parte imaginária.

$$\text{Re} \left[\text{Diagram} \right] \sim -\pi \int \frac{d^{4+\eta} k}{(2\pi)^4} \frac{\delta(k^2)}{(p \cdot k)(q \cdot k)} + \pi \int \frac{d^{4+\eta} k}{(2\pi)^4} \frac{\delta(p \cdot k)}{(k^2)(q \cdot k)} \\ - \pi \int \frac{d^{4+\eta} k}{(2\pi)^4} \frac{\delta(q \cdot k)}{k^2(p \cdot k)} + \pi^2 \int \frac{d^{4+\eta} k}{(2\pi)^4} \delta(k^2) \delta(p \cdot k) \delta(q \cdot k) \quad (\text{B.10})$$

A segunda e a terceira integrais são nulas. De fato, fazendo $k_\mu \rightarrow -k_\mu$ e lembrando que o δ é uma função par vemos que

$$\int \frac{d^{4+\eta} k}{k^2} \frac{\delta(p \cdot k)}{q \cdot k} = - \int \frac{d^{4+\eta} k}{k^2} \frac{\delta(p \cdot k)}{q \cdot k} \quad (\text{B.11})$$

O mesmo ocorre para a terceira integral.

Como

$$\delta(k^2) = \delta(k_0^2 - |\mathbf{k}|^2) = \frac{1}{2|\mathbf{k}|} [\delta(k_0 - |\mathbf{k}|) + \delta(k_0 + |\mathbf{k}|)] \quad (\text{B.12})$$

vemos que o efeito do $\delta(k^2)$ é colocar o gluon na camada de massa. A contribuição do segundo δ de (B.11) é igual à do primeiro. Para ver isto basta fazer $|\mathbf{k}| \rightarrow -|\mathbf{k}|$ após integrar em k_0 .

Substituindo (B.11) em (B.9) obtemos:

$$\text{Re} \left[\text{Diagram} \right] \sim - \int \frac{d^{3+\eta} |\mathbf{k}|}{(2\pi)^3 2|\mathbf{k}|} \frac{1}{q \cdot k} \frac{1}{p \cdot k} + \int \frac{d^{3+\eta} |\mathbf{k}|}{(2\pi)^3 4|\mathbf{k}|} \delta(p \cdot k) \delta(q \cdot k) \quad (\text{B.13})$$

Já mostramos que a última integral é zero (veja (B.5)).

Assim

$$\text{Re} \left[\text{Diagram} \right] \sim e^2 p \cdot q \int \frac{d^{3+\eta} |\mathbf{k}|}{(2\pi)^3 2|\mathbf{k}|} \frac{1}{p \cdot k} \frac{1}{q \cdot k} \quad (\text{B.14})$$

Usando (B.8) e (B.13) concluímos que

Diagrammatic equation (B.15) showing the sum of three crossed-line diagrams with dashed internal lines. The first diagram has a vertical dashed line on the left. The second has a vertical dashed line on the right. The third has two diagonal dashed lines forming an X. The equation is: $\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + 2 \text{Diagram 3} = 0$

Para encerrar vamos analisar os $i\epsilon$ de

$$= \left[\frac{-p q e^2}{2(2\pi)^3} \right]^2 \int \frac{d^{3+\eta} k_1}{|k_1|} \frac{d^{3+\eta} k_2}{|k_2|} \frac{1}{-p k_1 - i\epsilon} \frac{1}{-p(k_1+k_2) - i\epsilon} \frac{1}{-q k_1 + i\epsilon} \frac{1}{-q(k_1+k_2) + i\epsilon}$$

(B.16)

Como k_1 e k_2 estão em camada de massa podemos desprezar o $i\epsilon$ de $-p k_1 - i\epsilon$ e $-q k_1 - i\epsilon$. Além disto os dois termos de $-p(k_1+k_2) = |k_1|(p_0 - |p| \cos \theta) + |k_2|(p_0 - |p| \cos \tilde{\theta})$ são estritamente maiores que zero uma vez que a massa das partículas incidentes é diferente de zero. O denominador $-p(k_1+k_2)$ só se anula quando $|k_1| = |k_2| = 0$ mas neste caso o fator $|k_1|^\eta |k_2|^\eta$ anula a integral. A mesma análise vale para $-q(k_1+k_2)$ e portanto podemos desprezar todos os $i\epsilon$ dos propagadores de fêrmions.

Para diagramas sem correções virtuais podemos esquecer os $i\epsilon$ dos propagadores de fêrmions.

A P Ê N D I C E C

Mostremos que

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} \\
 \\
 = 2\text{Re} \left[\text{Diagram 1} \right] + 2\text{Re} \left[\text{Diagram 2} \right] = 0
 \end{array}
 \tag{C.1}$$

No gauge axial

$$2\text{Re} \left[\text{Diagram 1} \right] = -2\text{Re} \left\{ \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{d^4 k}{k^2 - i\epsilon} \frac{p \cdot \Pi(k) \cdot q}{(-pk - i\epsilon)(qk - i\epsilon)} \right\}
 \tag{C.2}$$

Usando a mesma análise do apêndice B para o diagrama no gauge de Feynman concluímos que o único termo diferente de zero é:

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 k \frac{\delta(k^2)}{(p \cdot k)(q \cdot k)} p \cdot \Pi(k) \cdot q
 \tag{C.3}$$

$$\delta(k^2) = \frac{1}{2|k|} \left[\delta(k_0 - |k|) + \delta(k_0 + |k|) \right] \text{ e os dois}$$

termos dão a mesma contribuição portanto

$$2\text{Re} \left[\text{Diagram 1} \right] = 2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2|k|} \frac{p \cdot \Pi(k) \cdot q}{(p \cdot k)(q \cdot k)}
 \tag{C.4}$$

Por outro lado novamente usando os resultados do apêndice B vemos que podemos desprezar os $i\epsilon$ de

portanto

$$2 \text{Re} \left[\text{diagram} \right] = -2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2|k|} \frac{p \cdot \Pi(k) \cdot q}{(p \cdot k)(q \cdot k)} \quad (\text{C.5})$$

Assim, somando (C.4) e (C.5) obtemos (C.1).

Se houvesse acoplamento como em

$$\left[2 \text{Re} \left[\text{diagram 1} \right] + 2 \text{Re} \left[\text{diagram 2} \right] \right] \left[\text{diagram 3} \right] \quad (\text{C.6})$$

o único efeito seria adicionar uma função $f(|k|)$ no integrando de (C.2) e (C.5). O cancelamento continuaria ocorrendo.

A P Ê N D I C E DOrdenamento completo

$$I = \int_a^b dx_1 \int_a^b dx_2 f(x_1, x_2) \quad (D.1)$$

$$I = \int_a^b dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 f(x_1, x_2) + \int_a^b dx_1 \int_{x_1}^b dx_2 f(x_1, x_2) \quad (D.2)$$

Se observamos a região de integração da segunda integral

veremos que

$$\int_a^b dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 = \int_a^b dx_2 \int_a^{x_2} dx_1 \quad (D.3)$$

Assim:

$$I = \int_a^b dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 f(x_1, x_2) + \int_a^b dx_2 \int_a^{x_2} dx_1 f(x_1, x_2) \quad (D.4)$$

Mas, sendo x_1 e x_2 variáveis de integração podemos permutá-las na primeira integral obtendo

$$\int_a^b dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 f(x_1, x_2) = \int_a^b dx_2 \int_a^{x_2} dx_1 [f(x_1, x_2) + f(x_2, x_1)] \quad (D.5)$$

Poderíamos também ter usado

$$\int_a^b dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 = \int_a^b dx_2 \int_{x_2}^b dx_1 \quad (D.6)$$

que pode ser deduzido examinando-se a região de integração

Neste caso obteríamos

$$I = \int_a^b dx_2 \int_{x_2}^b dx_1 f(x_1, x_2) + \int_a^b dx_1 \int_{x_1}^b dx_2 f(x_1, x_2) \quad (D.7)$$

e fazendo $x_2 \rightleftharpoons x_1$ na 1ª integral chegamos

$$\int_a^b dx_1 \int_a^b dx_2 f(x_1, x_2) = \int_a^b dx_1 \int_{x_1}^b dx_2 [f(x_1, x_2) + f(x_2, x_1)] \quad (D.8)$$

Para mais de duas variáveis pode-se mostrar, usando-se indução, que as versões de (D.5) e (D.8) são:

$$\int_a^b dx_1 \int_a^b dx_2 \dots \int_a^b dx_n f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_a^b dx_n \int_a^{x_n} dx_{n-1} \dots \int_a^{x_2} dx_1 \sum_p f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (D.9)$$

e

$$\int_a^b dx_1 \int_a^b dx_2 \dots \int_a^b dx_n f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_a^b dx_1 \int_{x_1}^b dx_2 \dots \int_{x_{n-1}}^b dx_n \sum_p f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (D.10)$$

onde $\sum_P$ significa soma sobre todas as permutações das variáveis de integração.

Ordenamento Parcial

Seja

$$I = \int_a^b dx_1 \int_{x_1}^b dx_2 \int_{x_2}^b dx_3 \sum_P f(x_1, x_2, x_3) \quad (D.11)$$

e suponha que queiramos eliminar o ordenamento entre x_2 e x_3

$$\begin{aligned} \sum_P f(x_1, x_2, x_3) &= f(x_1, x_2, x_3) + f(x_1, x_3, x_2) + f(x_2, x_1, x_3) + f(x_3, x_1, x_2) \\ &\quad + f(x_2, x_3, x_1) + f(x_3, x_2, x_1) \end{aligned} \quad (D.12)$$

Tomemos o 1º par de permutações:

$$\int_{x_1}^b dx_2 \int_{x_2}^b dx_3 [f(x_1, x_2, x_3) + f(x_1, x_3, x_2)] = \int_{x_1}^b dx_2 \int_{x_1}^b dx_3 f(x_1, x_2, x_3) \quad (D.13)$$

Para chegar a (D.13) aplicamos a fórmula (D.8) no sentido inverso. Analogamente

$$\int_{x_1}^b dx_2 \int_{x_2}^b dx_3 [f(x_2, x_1, x_3) + f(x_3, x_1, x_2)] = \int_{x_1}^b dx_2 \int_{x_1}^b dx_3 f(x_2, x_1, x_3) \quad (D.14)$$

$$\int_{x_1}^b dx_2 \int_{x_2}^b dx_3 [f(x_2, x_3, x_1) + f(x_3, x_2, x_1)] = \int_{x_1}^b dx_2 \int_{x_1}^b dx_3 f(x_2, x_1, x_3) \quad (D.15)$$

Substituindo estas três últimas igualdades em (D.11) obtemos

$$I = \int_a^b dx_1 \int_{x_1}^b dx_2 \int_{x_1}^b dx_3 [f(x_1, x_2, x_3) + f(x_2, x_1, x_3) + f(x_2, x_3, x_1)] \quad (D.16)$$

Nesta fórmula $x_1 \leq x_2, x_3$ e conseguimos o ordenamento parcial. Perceba que somamos apenas sobre permutações da variável ordenada.

Voltemos novamente para (D.11) e eliminemos agora o ordenamento entre x_1 e x_2 . Para isto é conveniente, antes de mais nada, comutar a integração em x_3 com as integrações em x_2 e x_1 . Observando as regiões de integração

concluimos que

$$\begin{aligned} \int_a^b dx_1 \int_{x_1}^b dx_2 \int_{x_2}^{x_3} dx_3 &\stackrel{(i)}{=} \int_a^b dx_1 \int_{x_1}^b dx_3 \int_{x_1}^{x_3} dx_2 \\ &\stackrel{(ii)}{=} \int_a^b dx_3 \int_a^{x_3} dx_1 \int_{x_1}^{x_3} dx_2 \end{aligned} \quad (D.17)$$

Levando (D.17) em (D.11) obtemos

$$I = \int_a^b dx_3 \int_a^{x_3} dx_1 \int_{x_1}^{x_3} dx_2 \sum_p f(x_1, x_2, x_3) \quad (D.18)$$

Para eliminar o ordenamento entre x_1 e x_2 usamos um raciocínio análogo ao que usamos para deduzir (D.16).

$$I = \int_a^b dx_3 \int_a^{x_3} dx_1 \int_a^{x_3} dx_2 \left[f(x_1, x_2, x_3) + f(x_1, x_3, x_2) + f(x_3, x_1, x_2) \right] \quad (D.19)$$

A P E N D I C E E

$$D_1 = \frac{1}{2(2\pi)^3 i} \int \frac{d^{4+\eta} k_1}{k_1^2 - i\epsilon} \frac{d^{3+\eta} k_2}{|k_2|} \frac{(p \cdot \Pi(k_1) \cdot q)(p \cdot \Pi(k_2) \cdot q)}{(-pk_1 - i\epsilon)[-p(k_1+k_2) - i\epsilon](qk_1 - i\epsilon)(-qk_2 + i\epsilon)}$$

$$D_2 = \frac{1}{2(2\pi)^3 i} \int \frac{d^{4+\eta} k_1}{k_1^2 - i\epsilon} \frac{d^{3+\eta} k_2}{|k_2|} \frac{(p \cdot \Pi(k_1) \cdot q)(p \cdot \Pi(k_2) \cdot q)}{(-pk_2 - i\epsilon)[-p(k_1+k_2) - i\epsilon](qk_1 - i\epsilon)(-qk_2 + i\epsilon)}$$

Usando

$$\frac{1}{-pk_1 - i\epsilon} \frac{1}{-p(k_1+k_2) - i\epsilon} + \frac{1}{-pk_2 - i\epsilon} \frac{1}{-p(k_1+k_2) - i\epsilon} = \frac{1}{-pk_1 - i\epsilon} \frac{1}{-pk_2 - i\epsilon}$$

é fácil ver que

$$D_1 + D_2 = \left(\frac{1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{d^{4+\eta} k_1}{k_1^2 - i\epsilon} \frac{p \cdot \Pi(k_1) \cdot q}{(qk_1 - i\epsilon)(-pk_1 - i\epsilon)} \right) \left(\int \frac{d^{3+\eta} k_2}{(2\pi)^3 2|k_2|} \frac{p \cdot \Pi(k_2) \cdot q}{(-pk_2 - i\epsilon)(-qk_2 + i\epsilon)} \right)$$

$$= \left(\text{Diagram 1} \right) \left(\text{Diagram 2} \right)$$

REFERÊNCIAS

1. R.P.Feynman, Gauge Theories, Les Houches, 1976 - Weak and Eletromagnetic Interaction at High Energy (eds: R. Balian e C.H.Llewellyn Smith), North Holland, 1977.
2. C.N.Yang e R.Mills, Phys. Rev. 96 (1954) 191.
3. E.S.Abers e B.W.Lee, Gauge Theories, Phys.Rep. 9C nº1 (1973).
4. M.Gell-Mann, California Institute of Technology Synchrotron Laboratory Report CTSL-20 (1961).
5. Y. Ne'eman, Nucl.Phys., 26 (1961) 222.
6. M.Gell-Mann, Phys. Letters, 8 (1964) 214.
7. L.D.Faddeev e V.N.Popov, Phys. Letters 25B (1967) 29.
8. G.t'Hooft e M.Veltman, CERN Report 73-9 (1973).
9. J.Frenkel, Tese de Livre Docência, USP (1977).
10. T.D.Lee, Particle Physics and Introduction to Field Theory, Harwood Academic Publishers (1981).
11. Bloch e Nordieck, Phys. Rev. 52 (1937) 54.
12. D.R.Yennie, S.C.Frautschi, H.Suura, Annals of Physics, 13 (1961) 379.
13. J.M.Jauch e F.Rohrlich, Helv.Phys.Acta 27 (1954) 613.
14. T.D.Lee e M.Nauenberg, Phys.Rev. B133 (1964) 1549.
15. J.M.Jauch e F.Rohrlich, The Theory of Photons and Electrons, Springer-Verlag (1976).
16. P.P.Kulish e L.D.Faddeev, Theor.Math.Phys. 4 (1971) 745.
17. J.Frenkel e J.C.Taylor, Nucl. Phys. B116 (1976) 185.
18. T.Applequist et al, Phys.Rev.Lett. 36 (1976) 768.
19. S.B.Libby e G.Sterman, Phys.Rev. D14 nº 8 (1979) 2468.
20. R.Doria, J.Frenkel e J.C.Taylor, Nucl.Phys. B168, 93 (1980).
21. M.T.Thomaz, Tese de Doutorado, USP (1981).
L.Landau, E.Lifchitz, Théorie du Champ, MIR.
22. S.Gupta, Quantum Eletrodynamics, Gordon and Breach (1977).
23. C.E.Carneiro, M.Day, J.Frenkel, J.C.Taylor, M.T.Thomaz, Nucl. Phys., B183 (1981) 445.
24. A.Andrasi, M.Day, R.Doria, J.Frenkel e J.C.Taylor, Oxford Preprint 37/80.
25. G.Grammer, Jr. e D.R.Yennie, Phys.Rev. D8, (1973) 4332.