UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

**FLUTUAÇÕES ELETROMAGNÉTICAS DE PONTO
ZERO, REAÇÃO DA RADIAÇÃO E OS ESTADOS
COERENTES DO OSCILADOR**

KALED DECHOUM

Dissertação de Mestrado
submetida ao Instituto de Física
da Universidade de São Paulo

Humberto de Menezes França

ORIENTADOR: Prof.Dr. HUMBERTO DE MENEZES FRANÇA

SÃO PAULO

1992

SBI-IFUSP

305M810T3863

~~TYFDSP
D293f
M
Ex. 2~~

530.15
D293f
M
Ex. 2

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Dechoum, Kaled

Flutuações eletromagnéticas de ponto zero, reação
da radiação e os estados coerentes do oscilador. São
Paulo, 1992.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo.
Instituto de Física. Departamento de Física Matemática
Área de Concentração: Física de Partículas Elementares

Orientador: Prof^o Dr^o Humberto de Menezes França

Unitermos: 1. Processo estocástico; 2. Princípio de
incerteza; 3. Equação de Fokker-Planck; 4. Estados coerentes; 5. Estados coerentes comprimidos.

USP/IF/SBI - 46/92

*Em memória de
Ahmad e Mariam*

Agradecimentos

Ao Humberto, pelo estímulo e amizade.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Ao Newton Bernardes e sua física paranormal.

À Lígia pelo excelente trabalho com o $\text{\LaTeX}$.

Aos amigos do IFUSP.

Resumo

A eletrodinâmica clássica estocástica pode ser entendida como sendo a teoria clássica de Maxwell, onde se inclui um novo elemento da realidade física: As flutuações eletromagnéticas de ponto zero.

Sob esse enfoque, estudamos a interação de um "ensemble" de osciladores harmônicos carregados com a radiação térmica e de ponto zero (atérmica). Incluímos os efeitos de dissipação através da força de reação da radiação. Além disso estudamos também a excitação do oscilador por uma força determinística com dependência temporal arbitrária. Nossa análise estatística do sistema físico é baseada na solução exata da equação de Fokker-Planck adequada ao problema. Obtém-se a evolução temporal, no espaço de fase, para uma dada distribuição inicial que caracteriza um "ensemble" de osciladores forçados que apresentam estados excitados na forma de estados coerentes e estados coerentes comprimidos e pulsantes.

A comparação direta com a formulação quântica do mesmo problema nos faz reconhecer que é possível obter da física clássica alguns resultados antes só obtidos pela teoria quântica. Identificamos na radiação de ponto zero o ingrediente que torna possível entender a estabilidade do estado fundamental e o princípio de incerteza.

Abstract

Classical stochastic electrodynamics may be understood as classical electrodynamic theory, when a new element of physical reality is included: The zero point electrodynamics fluctuations.

Under this approach, we study the interaction of a charged harmonic oscillator with the thermal radiation and zero point radiation. We include the effect of dissipation by the radiation reaction force. We also study the excitation of this oscillator by a deterministic force with arbitrary temporal dependence. Our statistical analysis of the physical system is based on the exact solution of the appropriate Fokker-Planck equation. We get the temporal evolution in phase space for a given initial distribution that characterizes one "ensemble" of forced oscillators that presents excited states in the coherent and squeezed states form; .

A direct comparison with the quantum formulation of the same problem make us recognize that it is possible to get some results from classical physics which were accomplished previously only by quantum theory. We identify in the zero point radiation the ingredient that makes it possible to understand the stability of the fundamental state and the uncertainty principle.

Índice

Introdução	3
1 O “Vácuo” Eletromagnético	8
1.1 A distribuição espectral da radiação térmica do vácuo	9
1.2 Campos eletromagnéticos aleatórios associado a uma cavidade com temperatura T	14
1.3 O vácuo da eletrodinâmica quântica	17
1.4 O espectro de radiação de ponto zero como um invariante de Lorentz	18
2 O Oscilador Harmônico na QED com Inclusão das Flutuações de Ponto Zero e da Reação da Radiação	21
2.1 A Equação de Movimento na Representação de Heisenberg	22
2.2 Energia e Estabilidade do Estado Fundamental	24
2.3 Relação de comutação	29
2.4 Evolução Temporal do Comutador $[X(t), m\dot{X}(t)]$	31
3 O Oscilador Forçado na Eletrodinâmica Estocástica	37
3.1 A equação de Fokker-Planck no espaço de fase	39
3.2 Resolução da equação de Fokker-Planck para o oscilador forçado . . .	43
3.3 Discussão	50
Apêndices	57
A Dedução da Expressão do Espectro de Radiação do Corpo Negro	

Segundo a S.E.D.

57

B Cálculo das Variâncias da Distribuição de Probabilidade no Espaço de Fase a Partir da Solução da Equação de Langevin

61

Introdução

Apesar de nascer de uma base epistemológica muito discutível, o sucesso da teoria quântica na predição dos processos microscópicos, envolvendo radiação e matéria, fez dela a teoria mais respeitável dos tempos modernos.

As tentativas frustradas de se compreender os processos microscópicos através do arcabouço da física clássica (basicamente a eletrodinâmica de Maxwell e a mecânica estatística de Boltzmann) geraram muitas dúvidas. Serão estes fenômenos passíveis de interpretações clássicas ou devemos reestruturar nossa lógica e nosso determinismo para entender essa nova dinâmica que surge no domínio do microcosmos?

Esse é um problema mal resolvido na física e que, na nossa opinião, poderá ser solucionado se esgotarmos todas as possibilidades que a física clássica dispõe para explicar os fenômenos microscópicos.

Uma dessas possibilidades (a que discutiremos aqui) inclui elementos novos à teoria, não reconhecidos anteriormente. Veremos que ela poderá talvez revelar a origem da imprevisibilidade (no sentido clássico determinístico) dos fenômenos quânticos e explicar de forma mais clara e coerente o “princípio” de incerteza de Heisemberg.

Em 1911, Max Planck em sua “segunda teoria”^[1] assume que a absorção da radiação eletromagnética por um oscilador carregado ocorria continuamente de acordo com a teoria clássica, enquanto que a emissão se procedia descontinuamente em discretos quanta de energia. Sob essa hipótese, ao analisar o equilíbrio na interação entre a radiação e a matéria, Planck obteve a seguinte expressão para a densidade espectral de energia, posteriormente confirmada pela eletrodinâmica quântica:

$$\rho(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1} + \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3}.$$

O primeiro termo do segundo membro se refere ao espectro térmico enquanto o segundo termo à densidade espectral de ponto zero.

Planck, depois Einstein e Nernst^[1], concebiam a existência dessas flutuações eletromagnéticas do campo mesmo à temperatura zero, atérmica e de caráter estocástico. Para eles esse campo de fundo tinha existência real e não poderia ser desprezado.

A ação desses campos de radiação de ponto zero sobre as partículas carregadas, ou com momento de dipolo magnético (ou elétrico) gera uma espécie de movimento Browniano, que pode revelar a origem do caráter aleatório dos processos quânticos e do princípio de incerteza. Verificamos também ser a radiação de ponto zero a responsável pela estabilidade dos estados fundamentais dos sistemas microscópicos.

Essa nova maneira de interpretação dos processos quânticos fez surgir uma teoria que poderia ser interpretada classicamente. A resumiríamos como sendo a teoria eletromagnética de Maxwell com esse novo elemento da realidade física: as flutuações eletromagnéticas de ponto zero. A essa teoria chamamos de Eletrodinâmica Clássica Estocástica (random electrodynamics ou stochastic electrodynamics, ou abreviadamente SED)^[2,3].

Alguns sistemas quânticos têm sido abordados segundo esse enfoque e com diferentes graus de sucesso. Como exemplos temos o oscilador harmônico^[2-5], a distribuição espectral de Planck^[6], o efeito Compton^[7], spin e paramagnetismo na matéria^[8], o estado fundamental do átomo de Hidrogênio^[9], e lei de Debye para o calor específico de sólidos^[10] entre outros fenômenos.

Outros desafios têm ocupado os físicos adeptos dessa teoria como as estatísticas de bósons e férmions, os estados excitados (espectro de linhas), a regra de composição de probabilidades e a própria dedução da equação de Schrödinger.

A distribuição espectral desse campo de radiação de ponto zero (vácuo) é obtida no capítulo 1 por vias clássicas. Percebemos ser idêntico ao estado de “zero fótons”

do campo eletromagnético quantizado. Porém, enquanto na eletrodinâmica quântica esse campo de radiação é “subtraído” por meio de renormalização, na SED os seus efeitos são incluídos integralmente. Sua existência real é comprovada, entre outros efeitos, pela força de Casimir (ver Cap.1), que teve comprovação experimental através da experiência de Sparnaay^[11].

O sistema mais amplamente estudado na SED (e com maior sucesso) é o oscilador harmônico. Diferentemente da visão da mecânica quântica (no período de 1925 a 1960 aproximadamente), a estabilidade do estado fundamental do oscilador é atingida porque a potência irradiada, por estar acelerado, é igual à potência absorvida do campo de radiação de ponto zero. Não podemos dizer simplesmente que a solução estacionária, é a de energia mais baixa quando se encontra os autovalores da equação de Schrödinger^[12].

Nesse estado de equilíbrio, a energia média do oscilador de frequência natural ω é $\hbar\omega/2$ ^[2,3]. Pode-se mostrar que a constante $\hbar$ está intimamente relacionada à intensidade das flutuações eletromagnéticas do vácuo^[12].

A teoria ainda prevê estados excitados do oscilador na forma de estados coerentes e estados coerentes comprimidos e pulsantes (squeezed states), como mostramos no capítulo 3.

O oscilador harmônico forçado não tem sido muito discutido no contexto da SED^[5,13]. Essas discussões têm se limitado a comparar as previsões da SED no limite estacionário, onde há concordância com a mecânica quântica.

Para tempos mais curtos e próximos às condições iniciais (regime transiente), a SED poderá descrever esse sistema de forma diferente da mecânica quântica, já que nessa teoria clássica o princípio de incerteza pode ser violado.

O objetivo desse estudo é analisar, através do cálculo da distribuição de probabilidades de transição no espaço de fase, para qualquer intervalo de tempo, o comportamento de um “ensemble” de osciladores forçados que interagem com as radiações térmica e de ponto zero, ambas estocásticas, e que ainda sofrem a ação da força de reação da radiação emitida pelo próprio oscilador.

Essa distribuição de probabilidades é obtida como solução da equação de Fokker-

Planck que, no limite estacionário, fornece uma descrição que se confunde à da mecânica quântica. Estados coerentes não comprimidos e estados coerentes comprimidos e pulsantes são obtidos a partir da escolha de condições iniciais apropriadas.

Na mecânica quântica, os estados coerentes não comprimidos do oscilador são estados obtidos a partir de uma certa combinação linear dos auto-estados do operador de energia do oscilador^[14]. As variâncias (quadrados das incertezas) dos valores esperados da posição e do momento são constantes no tempo, não ocorrendo a dispersão do pacote de ondas de de Broglie, e o produto dessas incertezas é igual ao valor mínimo permitido pelo princípio de incerteza de Heisenberg.

Esses estados podem ser vistos como sendo um pacote de ondas gaussiano de incerteza mínima, idêntico ao do estado fundamental do oscilador, centrado em sua trajetória clássica. O valor esperado do operador de posição em um estado coerente é uma função harmônica, como por exemplo:

$$\langle \Psi_{coer} | X(t) | \Psi_{coer} \rangle = A \cos(\omega t - \phi).$$

Por outro lado como no caso dos estados coerentes, existem certas combinações lineares dos auto-estados do oscilador que produzem estados contraídos e pulsantes (squeezed states)^[15]. Esses estados são na verdade estados coerentes onde as variâncias da posição e do momento oscilam no tempo com uma frequência igual ao dobro da frequência natural do oscilador. Vale observar que os estados comprimidos não permanecem como estados de incerteza mínima, mas se restabelecem a cada período de tempo correspondente à metade do período do oscilador. Os estados comprimidos (squeezed) do oscilador e também do campo eletromagnético, têm sido pesquisados ao nível experimental e teórico principalmente no que diz respeito à possível detecção de ondas gravitacionais^[16]. A idéia é melhorar a sensibilidade em experimentos com interferômetro. Esta é limitada pelo ruído quântico e se acredita que o uso cuidadoso de estados "squeezed" poderia, em princípio, aumentar a sensibilidade diminuindo o ruído^[17].

A análise do problema, segundo o formalismo quântico, será discutida no capítulo 2, onde utilizamos a representação de Heisenberg para obtermos a evolução temporal dos operadores momento e posição do oscilador, usando os campos de ponto zero na forma quantizada.

Entretanto nossa abordagem principal consistirá em estudar a interação do oscilador eletrizado com a radiação térmica e de ponto zero de maneira clássica, escrevendo uma equação do tipo Langevin para o problema, incluindo uma força externa determinística com dependência temporal arbitrária e a força de reação da radiação. A evolução temporal das variâncias pode ser obtida diretamente a partir da equação de Langevin (Apêndice B) ou, como dissemos, através da solução da equação de Fokker-Planck do problema, como mostramos no capítulo 2. Admitiremos que o processo de interação entre o oscilador e a radiação aleatória possa ser considerado Markoviano como primeira aproximação. Apesar de, na realidade, o processo ser não markoviano, já que a radiação aleatória não constitui um ruído branco, poderemos mostrar que essa hipótese é justificada no caso não relativístico. Isso é mostrado no Apêndice B.

Os resultados obtidos classicamente estão em acordo com as previsões da mecânica quântica, como podemos ver no capítulo 3. As vantagens de se estudar esse problema no âmbito da eletrodinâmica estocástica são, principalmente, as seguintes:

1. Obteremos diretamente, sem ambiguidades, a solução do problema no espaço de fase.
2. Efeitos dissipativos são considerados através da força de reação da radiação.

Por se tratar de processos irreversíveis, não há contradição entre a SED e o segundo princípio da Termodinâmica.

3. Os efeitos térmicos são automaticamente levados em conta através da interação entre o oscilador eletrizado e a radiação térmica de Planck. Esta será obtida (Apêndice A) segundo argumentos clássicos, sem a imposição da quantização da energia dos osciladores.

Capítulo 1

O “Vácuo” Eletromagnético

A realidade das flutuações de ponto zero do campo eletromagnético parece ser um fato irrefutável. Há muitas evidências teóricas e experimentais de sua existência^[18]. Efeitos como a emissão espontânea, Lamb shift e força de Casimir seriam muito difíceis de explicar sem levar em conta as flutuações eletromagnéticas do vácuo.

A questão de sua origem é controversa. Há pelo menos duas hipóteses possíveis^[19]. Uma sugere que o espectro de radiação de ponto zero seria simplesmente parte das condições de contorno iniciais do universo. Numa segunda hipótese essas flutuações seriam dinamicamente geradas pelo movimento acelerado de partículas carregadas que existem no universo. Sendo cada carga elementar um irradiador de campo eletromagnético, o conjunto de todas as cargas que constitui o universo, gera radiações que produzem em cada ponto do espaço um complexo campo de fundo, homogêneo e isotrópico, cuja natureza estocástica fica evidente devido ao grande número de fontes independentes que emitem incoerentemente.

Independentemente das diferentes hipóteses sobre sua origem, a densidade espectral dessas flutuações pode ser deduzida por vias clássicas e também da Eletrodinâmica Quântica (QED). Há um perfeito acordo entre as distribuições espectrais obtidas pela QED e SED, como mostramos a seguir.

1.1 A distribuição espectral da radiação térmica do vácuo

Sem ir além da Termodinâmica e da Teoria Eletromagnética Clássica da luz é possível ter importantes informações a respeito do vácuo eletromagnético, tomando por base a Lei de Deslocamento de Wien, particularizada para temperatura zero^[20].

A Lei de Wien, por ter sido deduzida com raciocínios inteiramente baseados em considerações termodinâmicas e na eletrodinâmica clássica, usando hipóteses muito claras, é um bom ponto de partida. Essa lei diz respeito ao comportamento da função densidade espectral da radiação contida em um recipiente, com paredes internas perfeitamente refletoras, onde se realiza uma compressão adiabática e quase estática¹.

Figura 1.1

Vamos imaginar que certa radiação eletromagnética, descrita por uma função densidade espectral $\rho(\omega, T)$, está contida em um cilindro de êmbolo móvel com paredes internas refletoras. Sobre esse sistema realizamos uma compressão adiabática e

¹Apesar de ser uma lei conhecida nos propomos a fazer aqui uma apresentação "didática" visando facilitar a compreensão a nível elementar.

quase estática (figura 1.1).

Vejamos primeiro o que ocorre com um feixe de luz monocromático que atinge o êmbolo em movimento. Por uma questão de simplicidade consideremos uma incidência normal (figura 1.2).

Figura 1.2

O plano A representa a posição do refletor no instante t e A' a posição em $t + \delta t$ e a distância AA' sendo igual a $v\delta t$. λ é o comprimento de onda do raio incidente e λ' do raio refletido. No instante t existem, no intervalo AB , $\frac{AB}{\lambda}$ ondas incidindo e $\frac{AB}{\lambda'}$ ondas emergindo. O número total de ondas no intervalo AB no instante t será então $AB \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} \right)$, enquanto que no instante $t' = t + \delta t$ teremos $A'B \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} \right)$.

No intervalo de tempo δt passam $\nu\delta t$ ondas para cima e $\nu'\delta t$ ondas para baixo atravessando o plano imaginário B .

Podemos então estabelecer a seguinte igualdade:

$$(\nu' - \nu)\delta t = (AB - A'B) \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} \right). \quad (1.1)$$

Como sabemos que $AB - A'B = v\delta t$ e ainda $\lambda = c/\nu$ e $\lambda' = c/\nu'$ obtemos:

$$\nu' = \frac{c+v}{c-v} \nu. \quad (1.2)$$

Por se tratar de um processo quase estático, a velocidade do êmbolo é muito menor que a da radiação, de maneira que sua aproximação até primeira ordem em v/c é bastante boa, obtendo então:

$$\nu' = \nu \left(1 + \frac{2v}{c} \right) \quad \text{ou} \quad \omega' = \omega \left(1 + \frac{2v}{c} \right) \quad (1.3)$$

onde $\omega = 2\pi\nu$ é a frequência angular.

Concluimos então que após a reflexão no êmbolo móvel a frequência da radiação aumenta.

No caso da incidência não normal, mas segundo um ângulo de incidência θ em relação à reta perpendicular ao espelho, a relação se torna:

$$\omega' = \omega \left(1 + \frac{2v}{c} \cos \theta \right). \quad (1.4)$$

Figura 1.3

Voltando ao problema original de se observar o que ocorre com a densidade espectral após uma compressão adiabática, vamos escrever a quantidade de energia

que atinge um elemento de área δA do êmbolo (num dado intervalo de tempo δt) proveniente de um ângulo sólido $\delta\Omega$, ao redor da direção indicada pelo ângulo θ (ver figura 3), em um intervalo de frequência ω e $\omega + \delta\omega$.

$$dE_\omega = \frac{1}{4\pi} \rho(\omega, T) d\omega \delta\Omega \delta A c \delta t \cos \theta \quad (1.5)$$

onde $\rho(\omega, T)$ é a densidade espectral da radiação contida no recipiente. Para a radiação refletida nas mesmas condições:

$$dE_{\omega'} = \frac{1}{4\pi} \rho(\omega', T) d\omega \delta\Omega \delta A c \delta t \cos \theta. \quad (1.6)$$

A variação da energia interna devido à transformação adiabática será então:

$$\delta E_\omega = dE_{\omega'} - dE_\omega = \frac{1}{4\pi} [\rho(\omega', T) - \rho(\omega, T)] d\omega \delta\Omega \delta A c \delta t \cos \theta. \quad (1.7)$$

Expandindo os colchetes em torno de $\omega' = \omega$ (até 1ª ordem):

$$\rho(\omega', T) = \rho(\omega, T) + \frac{\partial \rho(\omega, T)}{\partial \omega} (\omega' - \omega). \quad (1.8)$$

Usando a expressão (1.4) e substituindo em ω' na expressão anterior obtemos:

$$\rho(\omega', T) - \rho(\omega, T) = \frac{\partial \rho(\omega, T)}{\partial \omega} \frac{2v\omega}{c} \cos \theta \quad (1.9)$$

portanto, voltando à equação (1.7):

$$\delta E_\omega = \frac{\delta\Omega}{4\pi} \delta A c \delta t \cos \theta \frac{2v}{c} \omega \cos \theta \frac{\partial \rho(\omega, T)}{\partial \omega} d\omega. \quad (1.10)$$

Integrando sobre o hemisfério, lembrando ainda que $\int_{hemisf.} \cos^2 \theta d\Omega = \frac{2}{3}\pi$ e que a variação de volume do sistema é $\delta V = v \delta t \delta A$, obtemos:

$$\delta E_\omega = \frac{\omega}{3} \frac{\partial \rho(\omega, T)}{\partial \omega} d\omega \delta V \quad (1.11)$$

por outro lado, devido ao fato da transformação ser adiabática podemos escrever:

$$\delta E_\omega = \delta[\rho(\omega, T)V] d\omega = [V \delta \rho(\omega, T) + \rho(\omega, T) \delta V] d\omega. \quad (1.12)$$

Relacionando as equações (1.11) e (1.12) obtemos finalmente a Lei de Wien:

$$\delta\rho(\omega, T) = \left[\frac{\omega}{3} \frac{\partial\rho(\omega, T)}{\partial\omega} - \rho(\omega, T) \right] \frac{\delta V}{V}. \quad (1.13)$$

A expressão acima deve ser satisfeita pela distribuição espectral $\rho(\omega, T)$ que caracteriza a radiação eletromagnética a uma temperatura T qualquer. À temperatura zero, devemos ter “vácuo” no interior da cavidade. Esse vácuo pode ser descrito por uma função densidade espectral que não se altera ainda que ocorra uma variação de volume do recipiente. Isso implica que não haverá mudança na energia eletromagnética da cavidade qualquer que seja a compressão (ou expansão) feita pelo êmbolo.

Da equação acima, (1.13), vemos que a distribuição espectral à temperatura zero deve ser tal que:

$$\frac{\omega}{3} \frac{\partial\rho_0(\omega)}{\partial\omega} - \rho_0(\omega) = 0. \quad (1.14)$$

A equação (1.14) é claramente satisfeita nos seguintes casos:

- a) $\rho_0(\omega) = 0$ (solução trivial) $\implies$ “vácuo” da eletrodinâmica clássica usual.
- b) $\rho_0(\omega) = \alpha\omega^3 \implies$ “vácuo” da eletrodinâmica estocástica.

O “vácuo” responsável pelo Lamb Shift, decaimento espontâneo, forças de Casimir, entre outros efeitos^[18], certamente não corresponde ao caso a. Portanto acreditamos que a densidade espectral do vácuo deve ter a forma:

$$\rho_0(\omega) = \alpha\omega^3 \quad (1.15)$$

onde a constante α é um fator de proporcionalidade relacionado com a intensidade dessas flutuações de ponto zero e deve ser determinado experimentalmente.

Verificaremos mais adiante que α pode ser escrito em termos de constantes conhecidas. Obteremos $\alpha = \hbar/(2\pi^2c^3)$, sendo $\hbar$ a constante de Planck dividida por 2π e c a velocidade de radiação eletromagnética no vácuo. Desta forma a densidade espectral de ponto zero pode ser escrita como:

$$\rho_0(\omega) = \frac{\hbar}{2\pi^2 c^3} \omega^3. \quad (1.16)$$

Uma observação importante a ser feita é que esse espectro de radiação é um invariante de Lorentz, ou seja, tem a mesma forma em qualquer referencial inercial, como mostraremos adiante. Essa característica do ruído eletromagnético de ponto zero é especial, pois o distingue do ruído eletromagnético térmico que não apresenta a propriedade de ser invariante de Lorentz.

Um aspecto curioso que vale a pena mencionar, não fazendo parte desse trabalho, é que para um observador em um referencial se movendo com aceleração constante, esse espectro é visto como aquele associado a um corpo negro em uma temperatura T , que depende da aceleração a do referencial ($kT = \hbar a / 2\pi c$)^[21].

1.2 Campos eletromagnéticos aleatórios associado a uma cavidade com temperatura T

O campo eletromagnético no espaço livre satisfaz as equações homogêneas de Maxwell e portanto permite uma expansão em termos de ondas planas transversais.

Para caracterizar uma radiação aleatória (térmica e de ponto zero), usaremos a maneira introduzida por Einstein, no início do século^[1]. O objetivo de Einstein e Hopf era estudar a interação de matéria com radiação térmica gerada por um número muito grande de fontes emitindo incoerentemente. Para o campo elétrico usaremos a seguinte expansão:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3\vec{k} H(\vec{k}, T) \hat{e}(\vec{k}, \lambda) \cos [\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \theta(\vec{k}, \lambda)]. \quad (1.17)$$

Nessa expansão todas as frequências estão presentes com fases aleatórias $\theta(\vec{k}, \lambda)$ distribuídas uniformemente de 0 à 2π . $H(\vec{k}, T)$ é a amplitude da onda (cujo vetor de onda é $\vec{k}$) e também função da temperatura T e certamente está relacionado com a distribuição espectral $\rho(\omega, T)$. Estamos denotando por $\hat{e}(\vec{k}, \lambda)$ o vetor de polarização que obedece às seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}
\vec{k} \cdot \hat{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) &= 0 \\
\hat{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) \cdot \hat{\epsilon}(\vec{k}, \lambda') &= \delta_{\lambda\lambda'} \\
\sum_{\lambda=1}^2 \hat{\epsilon}_i(\vec{k}, \lambda) \hat{\epsilon}_j(\vec{k}, \lambda) &= \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

As propriedades estatísticas dos campos são devidas ao caráter aleatório das fases pois as fontes que emitem são incoerentes, isto é, serão consideradas estatisticamente independentes. Propriedades físicas importantes serão obtidas calculando médias no “ensemble”, isto é, médias sobre as fases aleatórias $\theta(\vec{k}, \lambda)$.

Assim, por exemplo, o valor médio do campo elétrico aleatório num dado ponto do espaço e num determinado instante é obtido como segue:

$$\begin{aligned}
\langle \vec{E}(\vec{r}, t) \rangle &= \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3 \vec{k} H(\vec{k}, T) \hat{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) \langle \cos[\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \theta(\vec{k}, \lambda)] \rangle \\
\langle \cos[\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \theta(\vec{k}, \lambda)] \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos[\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \theta(\vec{k}, \lambda)] d\theta = 0 \\
\langle \vec{E}(\vec{r}, t) \rangle &= 0.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

A expressão para o campo magnético $\vec{B}(\vec{r}, t)$ é análoga à de $\vec{E}(\vec{r}, t)$ apenas substituindo $\hat{\epsilon}$ por $\frac{\vec{k} \times \hat{\epsilon}}{k}$, consequentemente, $\langle \vec{B}(\vec{r}, t) \rangle = 0$.

A função de correlação $\langle \vec{E}(\vec{r}_1, t_1) \vec{E}(\vec{r}_2, t_2) \rangle$ pode ser avaliada de maneira análoga:

$$\begin{aligned}
\langle \vec{E}_i(\vec{r}_1, t_1) \vec{E}_j(\vec{r}_2, t_2) \rangle &= \\
&= \sum_{\lambda_1} \sum_{\lambda_2} \int d^3 \vec{k}_1 \int d^3 \vec{k}_2 \epsilon_i(\vec{k}_1, \lambda_1) \epsilon_j(\vec{k}_2, \lambda_2) H(\vec{k}_1, T) H(\vec{k}_2, T) \\
&\times \langle \cos[\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 - \omega_1 t + \theta(\vec{k}_1, \lambda_1)] \cos[\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 - \omega_2 t + \theta(\vec{k}_2, \lambda_2)] \rangle.
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Nessa expressão, se $\vec{k}_1 \neq \vec{k}_2$ ou $\lambda_1 \neq \lambda_2$ então $\theta_1(\vec{k}_1, \lambda_1)$ e $\theta_2(\vec{k}_2, \lambda_2)$ estarão distribuídos independentemente e a média acima será nula. Porém se $\vec{k}_1 = \vec{k}_2$ e $\lambda_1 = \lambda_2$, então a média sobre as fases dará:

$$\begin{aligned}
& \langle \cos[\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 - \omega_1 t + \theta(\vec{k}_1, \lambda_1)] \cos[\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 - \omega_2 t + \theta(\vec{k}_2, \lambda_2)] \rangle = \\
& = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 - \omega_1 t + \theta(\vec{k}_1, \lambda_1)) \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 - \omega_2 t + \theta(\vec{k}_2, \lambda_2)) \\
& = \frac{1}{2} \cos[\vec{k}_1 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) - \omega_1(t_1 - t_2)].
\end{aligned} \tag{1.21}$$

A função de correlação do campo elétrico aleatório será então:

$$\begin{aligned}
\langle \vec{E}_i(\vec{r}_1, t_1) \vec{E}_j(\vec{r}_2, t_2) \rangle &= \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3\vec{k} \frac{1}{2} H^2(\vec{k}, T) \varepsilon_i(\vec{k}, \lambda) \varepsilon_j(\vec{k}, \lambda) \\
&\times \cos[\vec{k}_1 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) - \omega_1(t_1 - t_2)].
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Se em particular $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$ e $t_1 = t_2$ e lembrando ainda que $\langle \vec{E}^2 \rangle = \langle E_x^2 \rangle + \langle E_y^2 \rangle + \langle E_z^2 \rangle$ podemos escrever

$$\langle \vec{E}^2 \rangle = \int_0^\infty 4\pi \frac{\omega^2 d\omega}{c^3} H^2(\vec{k}, T). \tag{1.23}$$

Para relacionar $H(\vec{k}, T)$ com a densidade espectral $\rho(\omega, T)$ devemos nos lembrar da expressão da densidade de energia eletromagnética:

$$\frac{\langle \vec{E}^2 + \vec{B}^2 \rangle}{8\pi} = \frac{\langle \vec{E}^2 \rangle}{4\pi} = \int_0^\infty d\omega \rho(\omega, T). \tag{1.24}$$

A comparação direta das duas últimas expressões nos fornece a expressão para $H(\vec{k}, T)$:

$$H^2(\vec{k}, T) = \frac{c^3 \rho(\omega, T)}{\omega^2}. \tag{1.25}$$

Ainda, das equações (1.22) e (1.25) obtemos, finalmente, a função de correlação do campo elétrico aleatório

$$\langle E_x(\vec{r}, t) E_x(\vec{r}, 0) \rangle = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty d\omega \rho(\omega, T) \cos \omega t = \phi(t). \tag{1.26}$$

Como o termo de correlação não é do tipo delta de Dirac (ruído branco), segue que o processo é estocástico, porém não Markoviano. Isso ocorre porque

as frequências não contribuem igualmente para a função de correlação. É o que comumente se chama de ruído colorido.

1.3 O vácuo da eletrodinâmica quântica

O campo de radiação eletromagnética quantizado dentro de uma cavidade pode ser formalmente tratado como um conjunto de osciladores harmônicos desacoplados onde cada oscilador tem uma frequência angular ω bem definida que, para cada polarização, forma um modo normal de oscilação do campo.

A energia de cada modo é dada pela relação bem conhecida para o oscilador quantizado:

$$E = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (1.27)$$

onde n representa o número de quanta de energia (fótons) que excitam o modo de frequência ω , sendo a energia de cada quantum igual a $\hbar\omega$.

A energia correspondente a $\frac{1}{2}\hbar\omega$ representa a energia eletromagnética contida nesse modo ainda que o número de ocupação de fótons seja zero. A energia total contida na cavidade à temperatura zero, estado sem fótons, será a soma da energia mínima $\frac{1}{2}\hbar\omega$ para todos os modos.

$$E_0 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \hbar\omega_i \quad (1.28)$$

ou seja, ainda que não haja fótons presentes, o campo flutua com energia média igual a $\frac{1}{2}\hbar\omega$ por modo normal. Essa é portanto a energia do vácuo contida dentro da cavidade.

Um procedimento simples para se chegar a esse resultado consiste em se fazer uma decomposição em ondas planas do campo de radiação eletromagnética no interior de uma cavidade. Obtém-se então, como expressão para a energia no interior da cavidade, uma soma de energias de osciladores harmônicos unidimensionais desacoplados. Então quantizamos o campo eletromagnético pela simples quantização da energia dos osciladores assim obtidos.

O valor da energia no interior da cavidade no estado de vácuo obtido a partir do procedimento acima será:

$$E_0 = 2 \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2} \hbar \omega_{\vec{k}} \quad (1.29)$$

onde o fator 2 introduzido indica as duas polarizações possíveis.

A somatória acima pode ser convertida em uma integração quando o volume da cavidade tende ao infinito através da transformação:

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{k} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int 4\pi k^2 dk$$

A energia de ponto zero torna-se então:

$$\frac{E_0}{V} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int 2 \frac{1}{2} \hbar \omega 4\pi \frac{\omega^2}{c^2} \frac{d\omega}{c}$$

ou,

$$\frac{E_0}{V} = \int_0^\infty \rho(\omega, T=0) d\omega = \int_0^\infty \rho_0(\omega) d\omega = \int_0^\infty \frac{\hbar \omega^3}{2\pi^2 c^3} d\omega$$

portanto,

$$\rho_0(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{2\pi^2 c^3} \quad (1.30)$$

que é o mesmo espectro de radiação obtido na seção 1.1 com considerações apenas termodinâmicas.

1.4 O espectro de radiação de ponto zero como um invariante de Lorentz

Vamos supor que exista um espectro de radiação, aleatório, que seja idêntico em todos os sistemas de referências inerciais. Determinaremos a sua densidade espectral usando o método apresentado por Boyer em 1969^[22].

Para isso vamos reescrever a densidade de energia eletromagnética dessa radiação através da relação:

$$U = \frac{2}{8\pi} \langle \vec{E}^2 \rangle = \frac{2}{8\pi} \int d^3\vec{k} f(\omega_{\vec{k}}) \quad (1.31)$$

Aqui $\omega_{\vec{k}} = c(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$ e $f(\omega_{\vec{k}})$ a função densidade espectral para o vetor de onda $\vec{k}$, num dado sistema de referência inercial. Comparando a expressão acima com a equação (1.23), identificamos a densidade espectral $f(\omega_{\vec{k}})$ com o quadrado da amplitude de uma onda plana de vetor de onda $\vec{k}$, isto é, $H^2(\vec{k}, T)$.

Em um outro sistema de referência que se desloca com velocidade $\vec{V} = v \vec{i}$ ao longo do eixo x , em relação ao referencial anterior a densidade de energia eletromagnética será:

$$U' = \frac{2}{8\pi} \int d^3\vec{k}' f'(\omega_{\vec{k}'}). \quad (1.32)$$

A função densidade espectral se transforma de um referencial para outro da mesma forma que o quadrado da amplitude da onda plana, ou seja:

$$f'(\omega_{\vec{k}'}) = \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{\gamma \left[1 + \frac{vk'_x}{\omega_{\vec{k}}} \right]} \quad (1.33)$$

onde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{1/2}$.

Temos ainda para a transformação de frequências a relação:

$$\omega_{\vec{k}} = \gamma (\omega_{\vec{k}'} + vk'_x). \quad (1.34)$$

Substituindo (1.34) em (1.33) obtemos:

$$f'(\omega_{\vec{k}'}) = \frac{f(\gamma[\omega_{\vec{k}'} + vk'_x])}{\gamma \left[1 + \frac{vk'_x}{\omega_{\vec{k}}} \right]}. \quad (1.35)$$

Para que a densidade de energia eletromagnética medida nos dois referenciais sejam exatamente a mesma, é necessário que os dois referenciais observem a mesma

densidade espectral, ou seja, que $f(\omega_{\vec{k}}) = f'(\omega_{\vec{k}'})$. Para que isso ocorra, devemos ter $f(\omega_{\vec{k}}) = cte \omega_{\vec{k}}$.

De fato, se $f(\omega_{\vec{k}})$ for linear em $\omega_{\vec{k}}$ então, de acordo com a equação (1.35) teremos:

$$f'(\omega_{\vec{k}'}) = \frac{cte \left(\gamma [\omega_{\vec{k}} + v k'_x] \right)}{\gamma \left[1 + \frac{v k'_x}{\omega_{\vec{k}}} \right]} = cte \omega_{\vec{k}}. \quad (1.36)$$

Denotaremos, por conveniência, a constante por $\hbar/(2\pi^2)$. Voltando à expressão (1.31) obtemos:

$$\begin{aligned} U &= \frac{2}{8\pi} \int d^3\vec{k} f(\omega_{\vec{k}}) = \frac{2}{8\pi} 4\pi \int_0^\infty \frac{\omega^2}{c^2} \frac{d\omega}{c} f(\omega) \\ &= \int_0^\infty \frac{\omega^2}{c^3} f(\omega) d\omega = \int_0^\infty d\omega \rho(\omega). \end{aligned} \quad (1.37)$$

comparando-se as duas últimas expressões da sequência acima e utilizando o resultado (1.36) obtemos, finalmente

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{2\pi^2 c^3}. \quad (1.38)$$

Essa é a expressão para a densidade espectral de uma radiação isotrópica e homogênea em todos os sistemas de referências inerciais.

Capítulo 2

O Oscilador Harmônico na QED com Inclusão das Flutuações de Ponto Zero e da Reação da Radiação

A partir do desenvolvimento da teoria quântica na década de vinte a radiação de ponto zero reapareceu (após as idéias de Planck, Einstein e Nernst) como uma consequência direta da quantização do campo eletromagnético. no entanto, assumiu um caráter de campo virtual que não poderia ser observado diretamente.

Posteriormente com descobertas de efeitos ligados a essas flutuações (efeito Casimir, Lamb Shift), os campos de ponto zero ganharam maior atenção com o trabalho de Sokolov e Tumanov (1956)^[23], onde as flutuações quânticas do campo eletromagnético são considerados como fontes de flutuações microscópicas reais.

Nesse capítulo estudando o problema simples do oscilador carregado poderemos entender o importante papel dessas flutuações. Usando o formalismo da teoria quântica, analisaremos a evolução temporal dos operadores de posição e momento que descrevem um oscilador carregado que interage com as flutuações quânticas de ponto zero do campo eletromagnético e que sofre a ação dos campos irradiados por ele mesmo, ou seja, incluiremos a reação da radiação.

Essa evolução temporal será obtida através da solução da equação de Heisenberg para o operador de posição. Essa equação de operadores é análoga à equação clássica

de Einstein-Hopf do mesmo problema^[1,24].

Obteremos inicialmente a solução estacionária para os operadores de posição e momento canônico. Verificamos que nesse estado a energia do oscilador é $\hbar\omega_0/2$ desde que se inclua, na equação de operadores, a reação da radiação e as flutuações de ponto zero. A estabilidade desse estado ocorre, como será mostrado, porque a potência emitida pelo oscilador é igual à potência absorvida dos campos flutuantes do "vácuo".

A relação de comutação usual entre os operadores de posição e momento é obtida no regime estacionário a partir da solução da equação de movimento. A solução transiente da equação de Heisenberg nos permite visualizar como a relação de incerteza evolui no tempo e atinge a forma conhecida em regimes estacionários, a partir de um instante em que os operadores de posição e momento comutam. Essa análise sugere que a origem das incertezas quânticas estejam provavelmente no "vácuo" eletromagnético.

2.1 A Equação de Movimento na Representação de Heisenberg

Consideremos uma partícula de carga e e massa m sujeita a uma força de restauração elástica em um movimento unidimensional (eixo x). Sob o enfoque da eletrodinâmica quântica não relativística, a equação de movimento de Heisenberg para esse sistema tem a forma:

$$\ddot{X}(t) + \omega_0^2 X(t) - \tau \ddot{X}(t) = \frac{e}{m} E_x(t) \quad (2.1)$$

onde ω_0 é a frequência natural do oscilador, $E_x(t)$ é o operador que corresponde à componente x do campo elétrico quantizado na aproximação de dipolo e o operador $\tau \ddot{X}(t) = \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3} \ddot{X}(t)$ descreve a força de reação da radiação.

Na aproximação de dipolo (aproximação de ondas longas) despreza-se qualquer variação espacial do campo sobre as posições em que a partícula possa ocupar e despreza-se também a componente magnética do operador de campo

eletromagnético. Essas aproximações são consistentes com a abordagem não relativística^[25].

O operador $E_x(t)$ pode ser escrito como uma superposição de ondas planas análoga à descrição na seção 1.2:

$$E_x(t) = i \sum_{\vec{k}, \lambda} \left(\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V} \right)^{1/2} \hat{\epsilon}_x(\vec{k}, \lambda) \left[a_{\vec{k}\lambda} e^{-i\omega_k t} - a_{\vec{k}\lambda}^\dagger e^{i\omega_k t} \right] \quad (2.2)$$

aqui $a_{\vec{k}\lambda}$ e $a_{\vec{k}\lambda}^\dagger$ são os operadores de aniquilação e criação, respectivamente, do modo cujo vetor de onda é $\vec{k}$ e índice de polarização λ . V é o volume de quantização e $\hat{\epsilon}_x(\vec{k}, \lambda)$ é a componente x do vetor unitário de polarização associado ao modo $(\vec{k}, \lambda)$ e $\omega_k = kc$.

Os operadores de criação e aniquilação obedecem às seguintes relações de comutação:

$$\begin{aligned} [a_{\vec{k}\lambda}, a_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger] &= \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \\ [a_{\vec{k}\lambda}, a_{\vec{k}'\lambda'}] &= [a_{\vec{k}\lambda}^\dagger, a_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger] = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Descreveremos, inicialmente uma situação de equilíbrio através da solução estacionária da equação (2.1):

$$X(t) = -\frac{ie}{m} \sum_{\vec{k}, \lambda} \left(\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V} \right)^{1/2} \hat{\epsilon}_x(\vec{k}, \lambda) \left[F_k a_{\vec{k}\lambda} e^{-i\omega_k t} - F_k^* a_{\vec{k}\lambda}^\dagger e^{i\omega_k t} \right] \quad (2.4)$$

onde

$$F_k = (\omega_k^2 - \omega_0^2 + i\tau\omega_k^3)^{-1} \quad (2.5)$$

consequentemente teremos as seguintes expressões para os operadores $\dot{X}(t)$ e $\ddot{X}(t)$

$$\dot{X}(t) = -\frac{ie}{m} \sum_{\vec{k}, \lambda} \left(\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V} \right)^{1/2} \hat{\epsilon}_x(\vec{k}, \lambda) \left[-i\omega_k F_k a_{\vec{k}\lambda} e^{-i\omega_k t} - i\omega_k F_k a_{\vec{k}\lambda}^\dagger e^{i\omega_k t} \right] \quad (2.6)$$

$$\ddot{X}(t) = -\frac{ie}{m} \sum_{\vec{k}, \lambda} \left(\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V} \right)^{1/2} \hat{\epsilon}_x(\vec{k}, \lambda) \left[-\omega_k^2 F_k a_{\vec{k}\lambda} e^{-i\omega_k t} + \omega_k^2 F_k a_{\vec{k}\lambda}^\dagger e^{i\omega_k t} \right] \quad (2.7)$$

2.2 Energia e Estabilidade do Estado Fundamental

Para calcularmos a energia do oscilador no regime estacionário (estado fundamental) escrevemos o operador de energia na forma proposta por Sokolov-Tumanov^[23]

$$E_0 = \langle 0 | H | 0 \rangle = \left\langle 0 \left| \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 x}{2} \right| 0 \right\rangle \quad (2.8)$$

sendo p o momento canonicamente conjugado ao operador de posição x :

$$P = m\dot{X} + \frac{e}{c} (A_{VF} + A_{SR}) \quad (2.9)$$

onde A_{VF} é o potencial vetor associado às flutuações quânticas de ponto zero, sendo obtido a partir da expressão $E_x(t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_{VF}}{\partial t}$, $E_x(t)$ dado por 2.2, podendo ser escrito na forma:

$$A_{VF} = -ic \sum_{\vec{k}, \lambda} \left(\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V} \right)^{1/2} \hat{\epsilon}_x(\vec{k}, \lambda) \left[\frac{e^{-i\omega_k t}}{(-i\omega_k)} a_{\vec{k}\lambda} - \frac{e^{i\omega_k t}}{i\omega_k} a_{\vec{k}\lambda}^\dagger \right] \quad (2.10)$$

Denotamos ainda por A_{SR} o potencial vetor associado aos campos que geram a força de reação da radiação (self reaction), o momento associado a esse termo pode ser obtido da força de reação da radiação na aproximação de partícula puntual

$$-\frac{e}{c} \dot{A}_{SR} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{X} \implies A_{SR} = -\frac{mc}{e} \tau \ddot{X} \quad (2.11)$$

através da equação (2.7) podemos escrever

$$A_{SR} = ic\tau \sum_{\vec{k}, \lambda} \left(\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V} \right)^{1/2} \hat{\epsilon}_x(\vec{k}, \lambda) \left[-\omega_k^2 F_k a_{\vec{k}\lambda} e^{-i\omega_k t} + \omega_k^2 F_k a_{\vec{k}\lambda}^\dagger e^{i\omega_k t} \right] \quad (2.12)$$

Substituindo as expressões (2.6), (2.10) e (2.12) na expressão do momento canônico, expressão (2.9), obtemos:

$$P = -ie \sum_{\vec{k}, \lambda} \left(\frac{2\pi\hbar}{\omega_k V} \right)^{1/2} \hat{\epsilon}_x(\vec{k}, \lambda) \left[-\omega_0^2 F_k a_{\vec{k}\lambda} e^{-i\omega_k t} + \omega_0^2 F_k^* a_{\vec{k}\lambda}^\dagger e^{i\omega_k t} \right] \quad (2.13)$$

De posse das expressões dos operadores $X(t)$ e $P(t)$ que descrevem o regime estacionário calcularemos então a energia do estado fundamental do oscilador através da expressão (2.8):

$$\begin{aligned} E_0 = & \left\langle 0 \left| \frac{P^2}{2m} \right| 0 \right\rangle + \left\langle 0 \left| \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} \right| 0 \right\rangle = \\ & -\frac{\pi\hbar e^2 \omega_0^4}{m} \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda'} \left(\frac{1}{\omega_k \omega_{k'}} \right)^{1/2} \hat{\epsilon}_x(\vec{k}, \lambda) \hat{\epsilon}_x(\vec{k}', \lambda') \\ & \times \left\langle 0 \left| \left(F_k a_{\vec{k}\lambda} e^{-i\omega_k t} - F_k^* a_{\vec{k}\lambda}^\dagger e^{i\omega_k t} \right) \left(F_{k'} a_{\vec{k}'\lambda'} e^{-i\omega_{k'} t} - F_{k'}^* a_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger e^{i\omega_{k'} t} \right) \right| 0 \right\rangle + \\ & -\frac{\pi\hbar e^2 \omega_0^2}{m} \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda'} (\omega_k \omega_{k'})^{1/2} \hat{\epsilon}_x(\vec{k}, \lambda) \hat{\epsilon}_x(\vec{k}', \lambda') \\ & \times \left\langle 0 \left| \left(F_k a_{\vec{k}\lambda} e^{-i\omega_k t} - F_k^* a_{\vec{k}\lambda}^\dagger e^{i\omega_k t} \right) \left(F_{k'} a_{\vec{k}'\lambda'} e^{-i\omega_{k'} t} - F_{k'}^* a_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger e^{i\omega_{k'} t} \right) \right| 0 \right\rangle \quad (2.14) \end{aligned}$$

Utilizando as relações de comutação (2.3) obtemos para a expressão acima:

$$E_0 = \frac{\pi\hbar e^2 \omega_0^2}{m} \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}\lambda} \hat{\epsilon}_x^2(\vec{k}, \lambda) |F_k|^2 \frac{1}{\omega} (\omega_0^2 + \omega^2). \quad (2.15)$$

A somatória acima pode ser convertida em uma integral no limite do contínuo, $V \rightarrow \infty$, de acordo com a relação:

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k}\lambda} \longrightarrow \frac{1}{8\pi^3} \sum_{\lambda=1,2} \int d^3k \quad (2.16)$$

Usando a relação (2.5) que define F_k na equação (2.15) já no limite do contínuo obtemos:

$$E_0 = \frac{\pi e^2 \omega_0^2 \hbar}{m} \frac{1}{8\pi^3} \frac{1}{c^3} \int_0^\infty \frac{\frac{1}{\omega} (\omega_0^2 + \omega^2) \omega^2 d\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \tau^2 \omega^6} \int d\Omega \sum_{\lambda=1,2} \hat{\epsilon}_x^2(k, \lambda). \quad (2.17)$$

A integração angular resulta em $(8\pi/3)$, portanto a expressão para a energia fica

$$E_0 = \frac{\hbar\omega_0^2\tau}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\omega(\omega_0^2 + \omega^2) d\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \tau^2\omega^6}. \quad (2.18)$$

O integrando acima é uma função fortemente concentrada em $\omega = \omega_0$ para $\tau\omega \ll 1$ de maneira que vale a aproximação (aproximação de ressonância)^[1,24]:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\omega(\omega_0^2 + \omega^2) d\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \tau^2\omega^6} &= \int_0^\infty \frac{\omega(\omega_0^2 + \omega^2) d\omega}{(\omega - \omega_0)^2 (\omega + \omega_0)^2 + \tau^2\omega^6} \\ &\simeq \frac{2\omega_0^3}{4\omega_0^2} \int_0^\infty \frac{d\omega}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\tau^2\omega_0^4}{4}} = \frac{\pi}{\tau\omega_0}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Substituindo o resultado (2.19) em (2.18) obtemos finalmente para a energia do oscilador no regime estacionário o valor:

$$E_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2}. \quad (2.20)$$

Analisaremos agora a estabilidade do estado estacionário desse oscilador harmônico, através do cálculo da potência absorvida do campo de ponto zero e da potência emitida, já que o oscilador se encontra acelerado.

A potência absorvida pelo oscilador, quando se encontra no estado fundamental (estado estacionário), na aproximação não relativística, é dado pelo valor esperado do operador de potência, que para ser um operador hermiteano deve ser escrito em forma simetrizada. Esse valor esperado é dado pela expressão:

$$P_{ABS} = \frac{1}{2} \langle 0 | e (\dot{X}E_x + E_x\dot{X}) | 0 \rangle \quad (2.21)$$

sendo que $\dot{X}(t)$ é dado pela expressão (2.6) e $E_x(t)$ dado por (2.2). $E_x(t)$ e $\dot{X}(t)$ são operadores na representação de Heisenberg descritos no espaço de Fock. Portanto escrevemos:

$$\begin{aligned}
P_{ABS} = & \frac{e^2}{2m} \left(\frac{2\pi\hbar}{V} \right) \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda'} (\omega_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}'})^{1/2} \hat{\epsilon}_x(\vec{k}, \lambda) \cdot \hat{\epsilon}_x(\vec{k}', \lambda') \\
& \times \left[g e^{-i(\omega_k + \omega_{k'})t} \langle 0 | a_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}'\lambda'} | 0 \rangle + g^* e^{i(\omega_k + \omega_{k'})t} 2 \langle 0 | a_{\vec{k}\lambda}^\dagger a_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger | 0 \rangle \right. \\
& - g e^{-i(\omega_k - \omega_{k'})t} \langle 0 | a_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger a_{\vec{k}\lambda} + a_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger | 0 \rangle \\
& \left. - g^* e^{i(\omega_k - \omega_{k'})t} \langle 0 | a_{\vec{k}\lambda}^\dagger a_{\vec{k}'\lambda'} + a_{\vec{k}'\lambda'} a_{\vec{k}\lambda}^\dagger | 0 \rangle \right] \quad (2.22)
\end{aligned}$$

onde

$$g = -\frac{i\omega}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\tau\omega^3} \quad (2.23)$$

Devido à ortogonalidade dos estados do oscilador e do fato de que o operador de aniquilação atuando no estado fundamental resulta em zero, a expressão (2.22) fica

$$\begin{aligned}
P_{ABS} = & -\frac{e^2}{2m} \left(\frac{2\pi\hbar}{V} \right) \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda'} (\omega_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}'})^{1/2} \hat{\epsilon}_x(\vec{k}, \lambda) \cdot \hat{\epsilon}_x(\vec{k}', \lambda') \\
& \times \left[g e^{-i(\omega_k - \omega_{k'})t} \langle 0 | a_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger | 0 \rangle + g^* e^{i(\omega_k - \omega_{k'})t} \langle 0 | a_{\vec{k}'\lambda'} a_{\vec{k}\lambda}^\dagger | 0 \rangle \right] \\
= & -\frac{e^2}{2m} \left(\frac{2\pi\hbar}{v} \right) \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda'} (\omega_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}'})^{1/2} \hat{\epsilon}_x(\vec{k}, \lambda) \cdot \hat{\epsilon}_x(\vec{k}', \lambda') \\
& \left[g e^{-i(\omega_k - \omega_{k'})t} + g^* e^{i(\omega_k - \omega_{k'})t} \right] \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\lambda\lambda'} \quad (2.24)
\end{aligned}$$

e portanto:

$$P_{ABS} = -\frac{e^2}{2m} \left(\frac{2\pi\hbar}{V} \right) \sum_{\vec{k}\lambda} \omega_k \hat{\epsilon}_{\vec{k}\lambda}^2 (g + g^*) \quad (2.25)$$

Para calcularmos $(g + g^*)$ observamos a expressão (2.23) e obtemos

$$g + g^* = -\frac{2\tau\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \tau^2\omega^6} \quad (2.26)$$

lembrando ainda que no limite de V tendendo ao infinito a somatória tende a uma integral pela transformação (2.16). Substituindo (2.26) em (2.25) obtemos, já realizando a integração angular, a expressão:

$$P_{ABS} = \frac{\hbar\tau^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega^7 d\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \tau^2 \omega^6} \quad (2.27)$$

Calcularemos agora a potência emitida pelo oscilador de maneira análoga a da potência absorvida, porém aqui utilizaremos a expressão do operador de campo elétrico irradiado. A expressão é a que segue:

$$P_{EM} = \frac{1}{2} \langle 0 | e (\dot{X} E_{SR} + E_{SR} \dot{X}) | 0 \rangle \quad (2.28)$$

O campo E_{SR} é obtido a partir do potencial vetor A_{SR} dado pela relação (2.12):

$$\begin{aligned} E_{SR} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial A_{SR}}{\partial t} \\ &= -i\tau \sum_{\vec{k}\lambda} \left(\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V} \right)^{1/2} \hat{\epsilon}_x(\vec{k}, \lambda) \left[j e^{-i\omega_k t} a_{\vec{k}\lambda} - j^* e^{i\omega_k t} a_{\vec{k}\lambda}^\dagger \right] \end{aligned} \quad (2.29)$$

sendo

$$j = \frac{i\omega^3}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\tau\omega^3} \quad (2.30)$$

De posse dos operadores $\dot{X}(t)$ e $E_{SR}(t)$ calculamos então a potência emitida, expressão (2.28), de forma semelhante à P_{ABS} . O resultado é:

$$P_{EM} = -\frac{1}{2} \frac{e^2 \tau}{m} \left(\frac{2\pi\hbar}{V} \right) \sum_{\vec{k}\lambda} \omega_k \hat{\epsilon}_x^2(\vec{k}, \lambda_x) (gj^* + g^*j) \quad (2.31)$$

Calculando $(gj^* + g^*j)$ com auxílio das expressões (2.23) e (2.30) e fazendo a mesma transformação de somatória em integral obtemos finalmente

$$P_{EM} = \frac{\hbar\tau^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega^7 d\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^6} \quad (2.32)$$

Constatamos assim que apesar de obtermos integrais divergentes para as expressões de potência absorvida e potência emitida, elas são idênticas. Nesse estado, a taxa de energia absorvida do "vácuo" é exatamente igual à taxa de energia irradiada, o que garante a estabilidade do estado fundamental. Este é um exemplo (quântico) do teorema flutuação-dissipação.

2.3 Relação de comutação

Uma das bases fundamentais da mecânica quântica é sem dúvida o princípio de incerteza proposto inicialmente por Heisenberg, que diz respeito à impossibilidade de determinação simultânea da posição de uma partícula e de seu momento canonicamente conjugado. Em termos de operadores, esse indeterminismo quântico é revelado na expressão:

$$P_x X - X P_x = \frac{\hbar}{i} \quad (2.33)$$

A hipótese (aceita pelos representantes da escola de Copenhagen) que o princípio de incerteza é o resultado da interação incontrollável entre o objeto e o aparelho de medida, ou então, que esses operadores são associados a medidas incompatíveis, não revela o significado físico dessa importante relação.

Talvez a obtenção dessa relação de comutação a partir da solução da equação de operadores de Heisenberg, para o caso particular do oscilador, possa trazer alguma compreensão maior para a M. Q.. Isso foi sugerido primeiramente por E. Wigner em 1950^[26]. A. A. Sokolov e V. S. Tumanov^[23] em 1959, analisando a equação (2.1), obtiveram um resultado que esclarece alguns detalhes desse difícil problema.

Inicialmente vamos calcular a relação de comutação (para tempos longos) entre o operador de posição $X(t) = X$ e o operador de momento canonicamente conjugado a ele $P(t) = P$, dado pela expressão (2.9).

Portanto, o comutador entre X e P será dado pela expressão:

$$[X, P] = [X, m\dot{X}] + \frac{e}{c} [X, A_{VF}] + \frac{e}{c} [X, A_{SR}] \quad (2.34)$$

Calculemos então cada um desses comutadores no regime estacionário. Usando as expressões (2.4) e (2.6) escrevemos:

$$\begin{aligned} [X, m\dot{X}] = & -\frac{e^2}{m} \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda'} \left(\frac{2\pi\hbar\omega_{\vec{k}}}{V} \right)^{1/2} \left(\frac{2\pi\hbar\omega_{\vec{k}'}}{V} \right)^{1/2} \hat{\epsilon}_x(\vec{k}, \lambda) \hat{\epsilon}_x(\vec{k}', \lambda') \\ & \times \left[(F_{\vec{k}} a_{\vec{k}\lambda} e^{-i\omega_{\vec{k}}t} - F_{\vec{k}}^* a_{\vec{k}\lambda}^\dagger e^{i\omega_{\vec{k}}t}), (-i\omega_{\vec{k}'} F_{\vec{k}'} a_{\vec{k}'\lambda'} e^{-i\omega_{\vec{k}'}t} - i\omega_{\vec{k}'} F_{\vec{k}'}^* a_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger e^{i\omega_{\vec{k}'}t}) \right] \end{aligned} \quad (2.35)$$

sendo F_k dado pela relação (2.5). Desenvolvendo o comutador do lado direito

$$\begin{aligned}
 & \left[\left(F_k a_{\vec{k}\lambda} e^{-i\omega_k t} - F_k^* a_{\vec{k}\lambda}^\dagger e^{i\omega_k t} \right), \left(-i\omega_{k'} F_{k'} a_{\vec{k}'\lambda'} e^{-i\omega_{k'} t} - i\omega_{k'} F_{k'}^* a_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger e^{i\omega_{k'} t} \right) \right] = \\
 & = -i\omega_{k'} F_k F_{k'} e^{-i(\omega_k + \omega_{k'})t} [a_{\vec{k}\lambda}, a_{\vec{k}'\lambda'}] - i\omega_{k'} F_k F_{k'}^* e^{-i(\omega_k - \omega_{k'})t} [a_{\vec{k}\lambda}, a_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger] \\
 & \quad + i\omega_{k'} F_k^* F_{k'} e^{i(\omega_k - \omega_{k'})t} [a_{\vec{k}\lambda}^\dagger, a_{\vec{k}'\lambda'}] + i\omega_{k'} F_k^* F_{k'}^* e^{i(\omega_k + \omega_{k'})t} [a_{\vec{k}\lambda}^\dagger, a_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger] \\
 & = \left(-i\omega_{k'} F_k^* F_{k'} e^{-i(\omega_k - \omega_{k'})t} - i\omega_{k'} F_{k'}^* F_k e^{-i(\omega_{k'} - \omega_k)t} \right) \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\lambda\lambda'} \quad (2.36)
 \end{aligned}$$

Essa última igualdade é decorrência da relação de comutação (2.3).

Substituindo (2.36) em (2.35) obtém-se:

$$\begin{aligned}
 [X, m\dot{X}] &= -i \frac{e^2}{m} \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda'} \left(\frac{2\pi\hbar\omega_{\vec{k}}}{V} \right)^{1/2} \left(\frac{2\pi\hbar\omega_{\vec{k}'}}{V} \right)^{1/2} \hat{\epsilon}_x(\vec{k}, \lambda) \hat{\epsilon}_x(\vec{k}', \lambda') \\
 &\quad \times \left[\omega_k F_k^* F_{k'} e^{-i(\omega_k - \omega_{k'})t} + \omega_{k'} F_{k'}^* F_k e^{-i(\omega_{k'} - \omega_k)t} \right] \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\lambda\lambda'} \\
 &= \frac{4\pi i \hbar e^2}{mV} \sum_{\vec{k}\lambda} \omega_k^2 \hat{\epsilon}_{\vec{k}\lambda}^2 |F_k|^2 \quad (2.37)
 \end{aligned}$$

Para o volume da cavidade tendendo ao infinito, a somatória se transforma numa integral como mostra a transformação (2.16), no que resulta

$$[X, m\dot{X}] = \frac{4\pi i \hbar e^2}{m} \frac{1}{8\pi^3} \frac{1}{c^3} \int_0^\infty \omega^2 d\omega \omega^2 |F_k|^2 \int d\Omega_{\vec{k}} \sum_{\lambda=1}^2 \hat{\epsilon}_x^2(\vec{k}, \lambda) \quad (2.38)$$

realizando a integração angular e utilizando a expressão de F_k temos:

$$[X, m\dot{X}] = \frac{i\hbar 2\tau}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega^4 d\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \tau^2 \omega^6} \quad (2.39)$$

Usando um procedimento análogo encontramos ainda

$$\left[X, \frac{e}{c} A_{VF} \right] = -i\hbar \frac{2\tau}{\pi} \int_0^\infty \frac{(\omega^2 - \omega_0^2) \omega^2 d\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \tau^2 \omega^6} \quad (2.40)$$

$$\left[X, \frac{e}{c} A_{SR} \right] = 0 \quad (2.41)$$

Substituindo esses resultados, relações (2.39), (2.40) e (2.41) em (2.34) obtemos

$$[X, P] = i\hbar \frac{2\tau}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega_0^2 \omega^2 d\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \tau^2 \omega^6} = i\hbar \quad (2.42)$$

A integral acima é semelhante à calculada em (2.19) e resulta, pelo mesmo procedimento, em $\pi/2\tau$.

Vale notar que obtivemos essa relação de comutação não a partir da definição usual dos operadores de posição e momento, $P = -i\hbar \frac{\partial}{\partial X}$, mas a partir da solução estacionária da equação de Heisenberg. Verificamos então que para preservar a relação de incerteza na forma em que a conhecemos foi necessário incluir as flutuações eletromagnéticas de ponto zero e a reação da radiação.

2.4 Evolução Temporal do Comutador $[X(t), m\dot{X}(t)]$

Para percebermos como as flutuações do campo eletromagnético de ponto zero geram as incertezas quânticas e a incompatibilidade entre certos operadores dinâmicos, mostraremos, como exemplo, de que forma o comutador $[X(t), m\dot{X}(t)]$ evolui no tempo a partir de uma situação hipotética em que os operadores de posição e momento cinemático são nulos em $t = 0$.

Faremos aqui uma aproximação para o termo de reação da radiação análoga à que se faz no caso clássico para o oscilador harmônico^[2,3]. Essa aproximação consiste em considerar que o termo de força harmônica é preponderante e que vale a hipótese

$$m\ddot{X}(t) + m\omega_0^2 X(t) \simeq 0 \implies \dot{X}(t) \simeq -\omega_0^2 \dot{X}(t)$$

nessa aproximação poderemos então escrever a equação de Heisenberg para o oscilador, eq.(2.1) de maneira semelhante ao do oscilador amortecido:

$$\ddot{X}(t) + \gamma \dot{X}(t) + \omega_0^2 X(t) = \frac{e}{m} E_x(t) \quad (2.43)$$

sendo $\gamma = \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3} \omega_0^2$ o coeficiente de amortecimento devido à reação da radiação.

Uma solução da equação (2.43) é dada por:

$$X(t) = \frac{e}{m} \int_0^t G(t-t') E_x(t') dt' \quad (2.44)$$

onde $G(t-t')$ é a função de Green do oscilador subamortecido:

$$\begin{aligned} G(t-t') &= \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0(t-t') e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t')} \\ &= \frac{1}{\omega_0} e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t')} \left[\frac{e^{i\omega_0(t-t')} - e^{-i\omega_0(t-t')}}{2i} \right] \end{aligned} \quad (2.45)$$

Substituindo (2.2) e (2.45) em (2.44) obtemos:

$$\begin{aligned} X(t) &= \frac{e}{m\omega_0} \int_0^t dt' e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t')} \left[\frac{e^{i\omega_0(t-t')} - e^{-i\omega_0(t-t')}}{2i} \right] \\ &\quad \times \sum_{\vec{k}\lambda} \left(\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V} \right)^{1/2} \hat{\epsilon}_x(\vec{k}, \lambda) \left[e^{-i\omega_k t} a_{\vec{k}\lambda} - e^{i\omega_k t} a_{\vec{k}\lambda}^\dagger \right] \end{aligned} \quad (2.46)$$

Integrando em t' e agrupando termos resulta em:

$$\begin{aligned} X(t) &= \frac{e}{2m\omega_0} \sum_{\vec{k}\lambda} \left(\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V} \right)^{1/2} \hat{\epsilon}_x(\vec{k}, \lambda) \\ &\quad \times \left\{ \left[\frac{e^{-i\omega_k t} - e^{(i\omega_0 - \frac{\gamma}{2})t}}{\frac{\gamma}{2} - i\omega_0 - i\omega_k} - \frac{e^{-i\omega_k t} - e^{-(i\omega_0 + \frac{\gamma}{2})t}}{\frac{\gamma}{2} + i\omega_0 - i\omega_k} \right] a_{\vec{k}\lambda} \right. \\ &\quad \left. + \text{conjugado hermiteano} \right\} \end{aligned} \quad (2.47)$$

e portanto:

$$\begin{aligned} X(t) &= \frac{e}{2m\omega_0} \sum_{\vec{k}\lambda} \left(\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V} \right)^{1/2} \hat{\epsilon}_x(\vec{k}, \lambda) \\ &\quad \times \left\{ \frac{2i\omega_0 e^{-i\omega_k t} - [(2\omega + i\gamma) \sin \omega_0 t + 2i \cos \omega_0 t] e^{-\frac{\gamma}{2}t}}{(\omega_0^2 + \frac{\gamma^2}{4} - \omega^2) - i\gamma\omega} a_{\vec{k}\lambda} \right. \\ &\quad \left. + \text{conjugado hermiteano} \right\} \end{aligned} \quad (2.48)$$

O operador de momento cinemático é obtido por derivação em relação ao tempo de (2.48), o que resulta:

$$\begin{aligned}
 m\dot{X}(t) = & \frac{e}{2m\omega_0} \sum_{\vec{k}\lambda} \left(\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V} \right)^{1/2} \hat{\epsilon}_x(\vec{k}, \lambda) \\
 & \times \left\{ \frac{2\omega_0\omega_{\vec{k}} e^{-i\omega_{\vec{k}}t} + \left[(\gamma\omega + 2i\omega_0^2 + i\frac{\gamma^2}{2}) \sin \omega_0 t - 2\omega_0\omega_{\vec{k}} \cos \omega_0 t \right] e^{-\frac{\gamma}{2}t}}{(\omega_0^2 + \frac{\gamma^2}{4} - \omega^2) - i\gamma\omega} a_{\vec{k}\lambda} \right. \\
 & \left. + \text{conjugado hermiteano} \right\}
 \end{aligned} \quad (2.49)$$

Vamos utilizar uma notação mais simplificada, e descrever o processo até primeira ordem de γ/ω_0 :

$$X(t) = \frac{e}{2m\omega_0} \sum_{\vec{k}\lambda} \left(\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V} \right)^{1/2} \hat{\epsilon}_x(\vec{k}, \lambda) \{ F a_{\vec{k}\lambda} + F^* a_{\vec{k}\lambda}^\dagger \} \quad (2.50)$$

e

$$m\dot{X}(t) = \frac{e}{2\omega_0} \sum_{\vec{k}\lambda} \left(\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V} \right)^{1/2} \hat{\epsilon}_x(\vec{k}, \lambda) \{ G a_{\vec{k}\lambda} + G^* a_{\vec{k}\lambda}^\dagger \} \quad (2.51)$$

onde

$$F = \frac{2i\omega_0 e^{-i\omega_k t} - [(2\omega + i\gamma) \sin \omega_0 t + 2i \cos \omega_0 t] e^{-\frac{\gamma}{2}t}}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega} \quad (2.52)$$

e

$$G = \frac{2\omega_0\omega_{\vec{k}} e^{-i\omega_{\vec{k}}t} + \left[(\gamma\omega + 2i\omega_0^2 + i\frac{\gamma^2}{2}) \sin \omega_0 t - 2\omega_0\omega_{\vec{k}} \cos \omega_0 t \right] e^{-\frac{\gamma}{2}t}}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega} \quad (2.53)$$

Relação de comutação entre $X(t)$ e $m\dot{X}(t)$:

$$\begin{aligned}
 [X(t), m\dot{X}(t)] = & \frac{e^2}{4m\omega_0^2} \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda'} \frac{2\pi\hbar}{V} (\omega_{\vec{k}} \cdot \omega_{\vec{k}'})^{1/2} \hat{\epsilon}_x(\vec{k}, \lambda) \hat{\epsilon}_x(\vec{k}', \lambda') \\
 & \times [F a_{\vec{k}\lambda} + F^* a_{\vec{k}\lambda}^\dagger, G a_{\vec{k}'\lambda'} + G^* a_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger]
 \end{aligned} \quad (2.54)$$

Sendo:

$$\begin{aligned} [F a_{\vec{k}\lambda} + F^* a_{\vec{k}\lambda}^\dagger, G a_{\vec{k}'\lambda'} + G^* a_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger] &= F \cdot G [a_{\vec{k}\lambda}, a_{\vec{k}'\lambda'}] \\ &+ F \cdot G^* [a_{\vec{k}\lambda}, a_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger] + F^* \cdot G [a_{\vec{k}\lambda}^\dagger, a_{\vec{k}'\lambda'}] + F^* \cdot G^* [a_{\vec{k}\lambda}^\dagger, a_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger] \end{aligned} \quad (2.55)$$

Devido às relações (2.3) a equação (2.54) torna-se

$$\begin{aligned} [X(t), m\dot{X}(t)] &= \frac{e^2}{4m\omega_0^2} \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda'} \frac{2\pi\hbar}{V} (\omega_{\vec{k}} \cdot \omega_{\vec{k}'})^{1/2} \\ &\times \hat{\epsilon}_x(\vec{k}, \lambda) \hat{\epsilon}_x(\vec{k}', \lambda') (FG^* - F^*G) \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$[X(t), m\dot{X}(t)] = \frac{\pi\hbar e^2}{2m\omega_0^2} \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \lambda} \omega_{\vec{k}} \hat{\epsilon}_x^2(\vec{k}, \lambda) (FG^* - f^*G) \quad (2.57)$$

Sendo $FG^* - f^*G = 2 \cdot \text{Im}(FG^*)$

$$\begin{aligned} FG^* &= \left\{ \frac{2i\omega_0 e^{-i\omega_k t} - [(2\omega + i\gamma) \sin \omega_0 t + 2i \cos \omega_0 t] e^{-\frac{\gamma}{2}t}}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega} \right\} \\ &\times \left\{ \frac{2\omega_0 \omega_{\vec{k}} e^{i\omega_{\vec{k}} t} + [(\gamma\omega - 2i\omega_0^2) \sin \omega_0 t - 2\omega_0 \omega \cos \omega_0 t] e^{-\frac{\gamma}{2}t}}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega} \right\} \end{aligned} \quad (2.58)$$

Vamos definir $D(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2$ e obter $D(\omega) \cdot \text{Im}FG^*$. Feito isso já com os termos agrupados encontramos:

$$\begin{aligned} D(\omega) \cdot \text{Im}FG^* &= 4i \left\{ \omega_0^2 \omega_k (1 + e^{-\gamma t}) \right. \\ &\left. - e^{-\frac{\gamma}{2}t} (2\omega_0^2 \omega_k \cos \omega_0 t \cos \omega_k t - \omega_0^3 \sin \omega_0 t \sin \omega t - \omega_0 \omega^2 \sin \omega_0 t \omega_k t) \right\} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Substituindo (2.58) em (2.56) obtemos:

$$\begin{aligned} [X(t), m\dot{X}(t)] &= \frac{\pi\hbar e^2}{2m\omega_0^2} \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \lambda} \omega_{\vec{k}} \hat{\epsilon}_x^2(\vec{k}, \lambda) 8i \left\{ \frac{\omega_0^2 \omega_k (1 + e^{-\gamma t})}{D(\omega)} \right. \\ &\left. - \frac{(2\omega_0^2 \omega_k \cos \omega_0 t \cos \omega_k t - \omega_0^3 \sin \omega_0 t \sin \omega t - \omega_0 \omega^2 \sin \omega_0 t \omega_k t) e^{-\frac{\gamma}{2}t}}{D(\omega)} \right\} \end{aligned} \quad (2.60)$$

fazendo

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \lambda} \hat{\epsilon}_x^2(\vec{k}, \lambda) \Rightarrow \frac{1}{3\pi^2 c^3} \int_0^\infty \omega^2 d\omega \quad (2.61)$$

obtemos:

$$\begin{aligned} [X(t), m\dot{X}(t)] = & \frac{\pi \hbar e^2}{2m\omega_0^2} \frac{8i}{3\pi^2 c^3} \left\{ \omega_0^2 (1 + e^{-\gamma t}) \int_0^\infty \frac{\omega^4 d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \right. \\ & - 2\omega_0^2 \cos \omega_0 t e^{-\frac{\gamma}{2}t} \int_0^\infty \frac{\omega^4 \cos \omega t d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \\ & - \omega_0^3 \sin \omega_0 t e^{-\frac{\gamma}{2}t} \int_0^\infty \frac{\omega^3 \sin \omega t d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \\ & \left. - \omega_0 \sin \omega_0 t e^{-\frac{\gamma}{2}t} \int_0^\infty \frac{\omega^5 \sin \omega t d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \right\} \quad (2.62) \end{aligned}$$

As integrais acima são divergentes. Fazendo-se cortes em altas frequências pelo método discutido no Apêndice B, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_0^{\omega_c} \frac{\omega^4 d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} &= \frac{\pi}{2\gamma} \omega_0^2 \\ \int_0^{\omega_c} \frac{\omega^4 \cos \omega t d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} &= \frac{\pi}{2\gamma} \omega_0^2 \left(\cos \omega_0 t + \frac{\gamma}{2\omega_0} \sin \omega_0 t \right) e^{-\frac{\gamma}{2}t} \\ \int_0^{\omega_c} \frac{\omega^3 \sin \omega t d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} &= \frac{\pi}{2\gamma} \omega_0 \sin \omega_0 t e^{-\frac{\gamma}{2}t} \\ \int_0^{\omega_c} \frac{\omega^5 \sin \omega t d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} &= \frac{\pi}{2\gamma} \omega_0^3 \sin \omega_0 t e^{-\frac{\gamma}{2}t} \quad (2.63) \end{aligned}$$

Substituindo as integrais em (2.62) resulta:

$$\begin{aligned} [X(t), m\dot{X}(t)] = & i\hbar \frac{2\gamma}{\pi \omega_0^4} \left\{ \omega_0^2 (1 + e^{-\gamma t}) \frac{\pi \omega_0^2}{2\gamma} \right. \\ & - 2\omega_0^2 \cos \omega_0 t e^{-\frac{\gamma}{2}t} \frac{\pi \omega_0^2}{2\gamma} \left(\cos \omega_0 t - \frac{\gamma}{2\omega_0} \sin \omega_0 t \right) e^{-\frac{\gamma}{2}t} \\ & - \omega_0^3 \sin \omega_0 t e^{-\frac{\gamma}{2}t} \frac{\pi}{2\gamma} \omega_0 \sin \omega_0 t e^{-\frac{\gamma}{2}t} \\ & \left. - \omega_0 \sin \omega_0 t e^{-\frac{\gamma}{2}t} \frac{\pi}{2\gamma} \sin \omega_0 t e^{-\frac{\gamma}{2}t} \right\} \quad (2.64) \end{aligned}$$

E finalmente obtemos:

$$[X(t), m\dot{X}(t)] = i\hbar \left[1 - \left(1 + \frac{\gamma}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t \right) e^{-\gamma t} \right] \quad (2.65)$$

Observando os limites assintóticos da expressão anterior, percebemos os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} [X(t), m\dot{X}(t)] &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} [X(t), m\dot{X}(t)] &= i\hbar \end{aligned} \quad (2.66)$$

A relação (2.65) sugere portanto que a origem do princípio de incerteza está diretamente ligada à estrutura do vácuo, e essa mesma expressão nos mostra, em aproximação de $O\left(\frac{\gamma^2}{\omega_0^2}\right)$, de que forma uma partícula inicialmente localizada (no caso um oscilador) atinge, o que se pode chamar, o regime quântico.

Capítulo 3

O Oscilador Forçado na Eletrodinâmica Estocástica

A interação entre a radiação e a matéria na eletrodinâmica estocástica é inteiramente clássica. Os campos são descritos pela solução das equações de Maxwell incluindo as flutuações de ponto zero e os movimentos das partículas descritos por meio da solução da equação de Newton com a expressão da força de Lorentz.

No caso de uma das forças que age sobre a partícula ser aleatória, a equação de Newton dá origem a uma equação estocástica conhecida como equação de Langevin. A solução de uma equação desse tipo, e sua análise estatística, fornece meios para calcularmos médias e variâncias associadas à posição e ao momento da partícula. Estes são utilizados para determinarmos a distribuição de probabilidades no espaço de fase.

Consideremos o caso particular da interação entre um oscilador carregado com a radiação térmica, radiação de ponto zero (ambas aleatórias) e uma força externa determinística com dependência temporal arbitrária. A equação para o movimento unidimensional, também chamada de equação de Braffort-Marshall, tem a seguinte forma:

$$m\ddot{x} - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{x} + m\omega_0^2 x = F(t) + f(t) \quad (3.1)$$

no caso de uma aproximação não relativística.

Em (3.1), $F(t)$ representa a força externa determinística e $f(t) = eE_x(t)$ repre-

sentada a força aleatória, devido à componente x do campo elétrico flutuante total, na aproximação do dipolo elétrico. A não inclusão da componente magnética na expressão da força é coerente com a aproximação de dipolo elétrico dado que o movimento é não relativístico^[27]. O termo $\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{x}$ representa a força de reação da radiação para uma partícula puntiforme.

Em um estudo mais rigoroso a força de radiação, deveria incluir correções à aproximação $\left(\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{x}\right)$ que usamos. Este é o caso da análise do movimento de uma carga extensa. Pode-se mostrar neste caso que a equação de movimento não apresenta soluções patológicas como pré-acelerações ou solução “runaway”, desde que certas condições sejam satisfeitas. Não abordaremos estas questões neste nosso trabalho^[28].

No que segue, consideraremos a força harmônica como preponderante de modo que, em primeira aproximação, teremos

$$m\ddot{x} \simeq -m\omega_0^2 x \implies \ddot{x} \simeq -\omega_0^2 x$$

e então escrevemos

$$m\ddot{x} + m\gamma\dot{x} + m\omega_0^2 x = F(t) + f(t) \quad (3.2)$$

onde $\gamma = \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3} \omega_0^2$.

Com essa aproximação, a força de reação da radiação assume uma forma em que o caráter dissipativo é bem explícito. Com esse procedimento também contornamos os problemas gerados pelas soluções “runaway” que aparece na equação (3.1).

É evidente que, devido ao caráter estocástico da radiação térmica e de ponto zero, só será possível fazer uma descrição estatística de um “ensemble” de osciladores no espaço de fase.

A evolução temporal da distribuição de probabilidades, no espaço de fase pode ser obtida resolvendo-se diretamente a equação do tipo Langevin (3.2) e posteriormente calculando as variâncias da posição e do momento como é mostrado no apêndice B, ou então, dentro de certas aproximações, como fazemos nesse capítulo, resolvendo-se

a equação de Fokker-Planck que descreve o movimento estatístico do "ensemble" no espaço de fase.

O fato desses dois métodos (uso da equação de Langevin ou uso da equação de Fokker-Planck) conduzirem a resultados idênticos sugere que a aproximação markoviana para esse problema se justifica. Decidimos então usar o método de Fokker-Planck pois obteremos diretamente a função densidade de probabilidades no espaço de fase.

3.1 A equação de Fokker-Planck no espaço de fase

Consideremos as variáveis aleatórias x e p (posição e momento) e escrevamos $W(x_0, p_0|x, p, t)dx dp$, ou simplesmente $W dx dp$, como sendo a probabilidade de transição dos valores iniciais x_0 e p_0 para os valores x e p , decorrido um intervalo de tempo t . Essa transição se dá devido à ação de todas as forças (aleatórias e determinísticas) que atuam na partícula.

O conhecimento da função $W(x_0, p_0|x, p, t)$ nos possibilita uma descrição estatística completa do problema.

Para um processo markoviano, essa probabilidade de transição é obtida como solução da equação de Fokker-Planck no espaço de fase^[29,30], conhecida também como equação de Liouville generalizada:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\partial[D_x W]}{\partial x} - \frac{\partial[D_p W]}{\partial p} + \frac{\partial^2[D_{pp} W]}{\partial p^2} + \frac{\partial^2[D_{xx} W]}{\partial x^2} + \frac{\partial^2[D_{xp} W]}{\partial x \partial p} \quad (3.3)$$

com a condição $W(x_0 p_0|x p, t \rightarrow 0) = \delta(x - x_0)\delta(p - p_0)$.

Os coeficientes de difusão que aparecem na equação acima, também chamados de momentos de transição da distribuição de probabilidades, são dadas pelas relações que se seguem^[29,30]:

$$D_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta x \rangle}{\Delta t} \quad D_p = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta p \rangle}{\Delta t}$$

$$\begin{aligned}
D_{xx} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle (\Delta x)^2 \rangle}{2\Delta t} & D_{pp} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle (\Delta p)^2 \rangle}{2\Delta t} \\
D_{xp} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta x \Delta p \rangle}{\Delta t}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

onde o símbolo $\langle \rangle$ indica média no "ensemble".

Obteremos esses coeficientes por dois métodos diferentes. Um deles consiste em resolver a equação de Langevin e obter $x(t)$ e $p(t)$ como função das fases aleatórias e depois tomar as médias. Esse método é mais rigoroso e está discutido com detalhe no Apêndice B. Porém, é possível calcular esses coeficientes usando argumentos físicos simplificadores. É o que faremos em seguida. Gostaríamos de salientar que ambos os métodos fornecem os mesmos resultados.

A equação de Langevin pode ser desmembrada no seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{p}{m} \\
\frac{dp}{dt} &= -\gamma p - m\omega_0^2 x + f(t) + F(t).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Consideremos um intervalo de tempo pequeno o suficiente para que o momento e a posição da partícula variem muito pouco, embora as forças aleatórias possam flutuar bastante.

Por integração aproximada das equações (3.5), podemos determinar as variações Δx e Δp , isto é:

$$\begin{aligned}
\Delta x &= \frac{p}{m} \Delta t \\
\Delta p &= -(\gamma p + m\omega_0^2 x - F(t)) \Delta t + \int_0^{\Delta t} f(t') dt'.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Tomando as médias no "ensemble" e fazendo o limite de Δt tendendo a zero obtemos, para os coeficientes (3.4), as expressões:

$$D_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta x \rangle}{\Delta t} = \frac{p}{m}$$

$$\begin{aligned}
D_p &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta p \rangle}{\Delta t} = -(\gamma p + m\omega_0^2 x - F(t)) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \langle f(t') \rangle dt' \\
D_{xp} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta x \Delta p \rangle}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[-\frac{p}{m} (\gamma p + m\omega_0^2 x - F(t)) \Delta t + \frac{p}{m} \int_0^{\Delta t} \langle f(t') \rangle dt' \right] \\
D_{xx} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle (\Delta x)^2 \rangle}{2\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p^2}{2m^2} \Delta t \\
D_{pp} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle (\Delta p)^2 \rangle}{2\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[(\gamma p + m\omega_0^2 x - F(t))^2 \Delta t \right. \\
&\quad \left. - 2(\gamma p + m\omega_0^2 x - F(t)) \int_0^{\Delta t} \langle f(t') \rangle dt' \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} dt' \int_0^{\Delta t} dt'' \langle f(t') f(t'') \rangle \right]. \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Levando-se em conta as equações (1.19) e (1.22), obtemos finalmente os coeficientes (3.4) sob as formas simplificadas:

$$\begin{aligned}
D_x &= \frac{p}{m} \\
D_p &= -(\gamma p + m\omega_0^2 x - F(t)) \\
D_{xp} &= 0 \\
D_{xx} &= 0 \\
D_{pp} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta t} \int_0^{\Delta t} dt' \int_0^{\Delta t} dt'' \langle f(t') f(t'') \rangle. \tag{3.8}
\end{aligned}$$

Não calcularemos $D_{pp} = D$ usando a expressão (3.8). Preferiremos obtê-lo analisando a solução estacionária da equação de Fokker-Planck.

Com esses coeficientes a equação de Fokker-Planck para o oscilador forçado unidimensional, na aproximação não relativística, assume a seguinte forma:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{p}{m} \frac{\partial W}{\partial x} + \gamma W + [\gamma p + m\omega_0^2 x - F(t)] \frac{\partial W}{\partial p} + D \frac{\partial^2 W}{\partial p^2}. \tag{3.9}$$

No regime estacionário, temos para a distribuição de probabilidades no espaço de fase o seguinte resultado:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = 0 \tag{3.10}$$

O que nos fornece:

$$\frac{p}{m} \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial p} \left[\gamma p + m\omega_0^2 x + D \frac{\partial}{\partial p} \right] W = 0 \quad (3.11)$$

E então reescrevemos:

$$\left(\frac{p}{m} \frac{\partial W}{\partial x} - m\omega_0^2 x \frac{\partial W}{\partial p} \right) + \frac{\partial}{\partial p} \left(\gamma p W + D \frac{\partial W}{\partial p} \right) = 0 \quad (3.12)$$

Esta última equação do tipo $A(p, x) + \frac{\partial}{\partial p} B(p, x) = 0$, é satisfeita se

$$- \gamma p W = D \frac{\partial W}{\partial p} \quad (3.13)$$

e

$$\frac{p}{m} \frac{\partial W}{\partial x} = m\omega_0^2 x \frac{\partial W}{\partial p} \quad (3.14)$$

Na equação (2.13) substituiremos $W(x, p)$ por $R(x) \cdot S(p)$ e obtemos:

$$- \gamma p S = D \frac{dS}{dp} \quad (3.15)$$

cuja solução é:

$$S(p) = \text{cte} \exp \left[-\frac{\gamma p^2}{2D} \right] \quad (3.16)$$

Concluimos então que:

$$D = \gamma \langle p^2 \rangle = \gamma \sigma_2^2 \quad (3.17)$$

onde σ_2 (veja Apêndice B) é tomado no regime estacionário ($t \rightarrow \infty$), e então obtemos facilmente:

$$D = \frac{m\gamma\hbar\omega_0}{2} \coth \left(\frac{\hbar\omega_0}{2kT} \right) \quad (3.18)$$

Vamos agora procurar uma solução exata para a equação (3.9). Calcularemos a probabilidade de transição no espaço de fase com a condição $W(x_0 p_0 | x p, t \rightarrow 0) = \delta(x - x_0) \delta(p - p_0)$.

3.2 Resolução da equação de Fokker-Planck para o oscilador forçado

A equação de Langevin para o oscilador unidimensional na aproximação de dipolo, equação (3.2), pode ser reescrita como um sistema de duas equações:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= -\gamma p - \omega_0^2 y + F(t) + f(t) \\ p &= \frac{dy}{dt}\end{aligned}\quad (3.19)$$

onde $y \equiv mx$. Com essa mudança de variável a equação de Fokker-Planck, equação (3.9), assume a forma:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -p \frac{\partial W}{\partial y} + \gamma W + [\gamma p + \omega_0^2 y - F(t)] \frac{\partial W}{\partial p} + D \frac{\partial^2 W}{\partial p^2}. \quad (3.20)$$

Uma grande simplificação pode ser feita se conhecermos as constantes de movimento da parte determinística da equação de Langevin, ou seja, se conhecermos a solução da equações:

$$\begin{aligned}\frac{dp_c}{dt} &= -\gamma p_c - \omega_0^2 y_c + F(t) \\ p_c &= \frac{dy_c}{dt}\end{aligned}\quad (3.21)$$

A solução dessas equações pode ser facilmente obtida pelo método da variação das constantes o qual fornece o seguinte resultado para as condições iniciais y' e p' :

$$mx_c(t) \equiv y_c(t) = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left\{ e^{\mu_1 t} \int_0^t dt' e^{-\mu_1 t'} F(t') + (p' - \mu_2 y') e^{\mu_1 t} - e^{\mu_2 t} \int_0^t dt' e^{-\mu_2 t'} F(t') + (y' \mu_1 - p') e^{\mu_2 t} \right\} \quad (3.22)$$

sendo $\mu_1 = -\frac{\gamma}{2} + \left(\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2\right)^{1/2}$ e $\mu_2 = -\frac{\gamma}{2} - \left(\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2\right)^{1/2}$.

Facilmente se observa que as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} & (y_c \mu_1 - p_c) e^{-\mu_2 t} + \int_0^t dt' e^{-\mu_2 t'} F(t') \\ & (y_c \mu_2 - p_c) e^{-\mu_1 t} + \int_0^t dt' e^{-\mu_1 t'} F(t') \end{aligned} \quad (3.23)$$

são constantes de movimento.

Nesse ponto é conveniente introduzir as seguintes mudanças de coordenadas na equação de Fokker-Planck:

$$\begin{aligned} \xi & \equiv (y \mu_1 - p) e^{-\mu_2 t} + \int_0^t dt' e^{-\mu_2 t'} F(t') \\ \eta & \equiv (y \mu_2 - p) e^{-\mu_1 t} + \int_0^t dt' e^{-\mu_1 t'} F(t') \\ t & \equiv t'. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Com essas mudanças de variáveis da equação de Fokker-Planck, equação (3.10), assume a forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} &= \gamma W \\ &+ D \left\{ \exp(-2\mu_2 t) \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + 2 \exp[-(\mu_1 + \mu_2) t] \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} + \exp(-2\mu_1 t) \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Introduzindo ainda a função $\chi(\xi, \eta, t)$ através da definição:

$$W \equiv \chi \exp(\gamma t) \quad (3.26)$$

obtemos uma forma ainda mais simétrica para a equação de Fokker-Planck:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = D \left\{ \exp(-2\mu_2 t) \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} + 2 \exp[-(\mu_1 + \mu_2) t] \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi \partial \eta} + \exp(-2\mu_1 t) \frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta^2} \right\}. \quad (3.27)$$

Obtemos então uma equação do tipo parabólica, cuja solução^[29], para a condição $\delta(\xi - \xi_0)\delta(\eta - \eta_0)$ quando $t \rightarrow 0$ é:

$$\chi(\xi, \eta, t) = \frac{1}{2\pi\Delta^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{[a(\xi - \xi_0)^2 + 2h(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0) + b(\eta - \eta_0)^2]}{2\Delta} \right\} \quad (3.28)$$

onde

$$\begin{aligned} a &= 2D \int_0^t dt' \exp(-2\mu_2 t') = \frac{D}{\mu_1} [1 - e^{-2\mu_1 t}] \\ b &= 2D \int_0^t dt' \exp(-2\mu_1 t') = \frac{D}{\mu_2} [1 - e^{-2\mu_2 t}] \\ h &= -2D \int_0^t dt' \exp[-(\mu_1 + \mu_2)t'] = \frac{-2D}{\mu_1 + \mu_2} [1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2)t}] \\ \Delta &= ab - h^2. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Voltando às variáveis originais y e p , usando as equações de transformação de coordenadas e ainda as seguintes definições:

$$\begin{aligned} \xi' &\equiv (y_c \mu_1 - p_c) e^{-\mu_2 t} + \int_0^t dt' e^{-\mu_2 t'} F(t') \\ \eta' &\equiv (y_c \mu_2 - p_c) e^{-\mu_1 t} + \int_0^t dt' e^{-\mu_1 t'} F(t') \end{aligned} \quad (3.30)$$

obteremos

$$\begin{aligned} \xi - \xi' &= [\mu_1 (y - y_c) - (p - p_c)] \exp(-\mu_2 t) \\ \eta - \eta' &= [\mu_2 (y - y_c) - (p - p_c)] \exp(-\mu_1 t). \end{aligned}$$

Calculando então $(\xi - \xi')^2$, $(\xi - \xi')(\eta - \eta')$ e $(\eta - \eta')^2$ e lembrando das relações $W = \chi \exp(\gamma t)$ e $y = mx$ obtemos ainda:

$$W(x', p' | x, p, t) = N \exp \left\{ -\frac{[Am^2(x - x_c)^2 + B(p - p_c)^2 + Cm(x - x_c)(p - p_c)]}{2\Delta} \right\} \quad (3.31)$$

onde

$$A = \frac{4D\omega_1^2}{\gamma} \exp(2\gamma t) \left\{ -1 + \left[\omega_1^2 + \frac{\gamma^2}{2} \sin^2 \omega_1 t - \frac{\gamma\omega_1}{2} \sin 2\omega_1 t \right] \frac{\exp(-\gamma t)}{\omega_1^2} \right\}$$

$$B = \frac{4D\omega_1^2}{\gamma\omega_0^2} \exp(2\gamma t) \left\{ -1 + \left[\omega_1^2 + \frac{\gamma^2}{2} \sin^2 \omega_1 t + \frac{\gamma\omega_1}{2} \sin 2\omega_1 t \right] \frac{\exp(-\gamma t)}{\omega_1^2} \right\}$$

$$C = 8D \sin^2 \omega_1 t \exp(\gamma t)$$

$$\Delta = \frac{4D^2\omega_1^2}{\gamma^2\omega_0^2} \exp(2\gamma t) \left\{ 2 \exp(-\gamma t) \left[1 + \frac{\gamma^2}{2\omega_1^2} \sin^2 \omega_1 t \right] - \exp(-2\gamma t) - 1 \right\}$$

$$N = \frac{\gamma m \omega_0}{2\pi D} \left\{ -2 \exp(-\gamma t) \left[1 + \frac{\gamma^2}{2\omega_1^2} \sin^2(\omega_1 t) \right] + \exp(-2\gamma t) + 1 \right\}^{1/2} \quad (3.32)$$

sendo ainda $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}$ e N a constante de normalização.

Podemos ainda colocar essa expressão para $W(x', p' | xpt)$ em uma forma mais conveniente^[30] que a expressão (3.31) acima. Reescrevemos a distribuição normalizada na forma de uma gaussiana bidimensional com correlação:

$$W(x', p' | xpt) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)^{1/2}} \times \exp \left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{(x-x_c)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(p-p_c)^2}{\sigma_2^2} - \frac{2\rho(p-p_c)(x-x_c)}{\sigma_1\sigma_2} \right) \right] \quad (3.33)$$

onde, por uma comparação direta entre as expressões (3.33) e (3.31) e os resultados (3.32) obtemos:

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \frac{D}{m^2\omega_0^2\gamma} \left\{ 1 - \left[\omega_1^2 + \frac{\gamma^2}{2} \sin^2 \omega_1 t + \frac{\gamma\omega_1}{2} \sin 2\omega_1 t \right] \frac{\exp(-\gamma t)}{\omega_1^2} \right\} \\ \sigma_2^2 &= \frac{D}{\gamma} \left\{ 1 - \left[\omega_1^2 + \frac{\gamma^2}{2} \sin^2 \omega_1 t - \frac{\gamma\omega_1}{2} \sin 2\omega_1 t \right] \frac{\exp(-\gamma t)}{\omega_1^2} \right\} \\ \rho\sigma_1\sigma_2 &= \frac{D}{m\omega_1^2} \sin^2 \omega_1 t \exp(-\gamma t) \end{aligned} \quad (3.34)$$

sendo x_c e p_c as soluções determinísticas do oscilador forçado quando $\frac{\gamma}{2} < \omega_0$.

Expressões análogas a estas são encontradas na literatura no caso não forçado^[29].

A distribuição acima descreve a evolução (no espaço de fase) do movimento de um ensemble de osciladores que em $t = 0$ estavam perfeitamente localizados em um ponto x', p' do espaço de fase, isto é, $W(x', p' | x, p, t \rightarrow 0) = \delta(x - x')\delta(p - p')$.

Trata-se de uma gaussiana bidimensional centrada na trajetória clássica (determinística) com um termo de correlação entre x e p que se anula em $t = 0$ e também no limite estacionário do sistema.

As variâncias da posição e do momento, σ_1^2 e σ_2^2 , estão em acordo com os resultados obtidos no Apêndice B quando se resolve diretamente a equação de Braffort-Marshall.

A evolução temporal da distribuição de probabilidades de um "ensemble" de partículas que inicialmente não estão perfeitamente localizadas, mas estão associadas a uma distribuição inicial $Q_0(x', p')$, também pode ser calculado. Denotaremos por $Q(x, p, t)$ a função que fornece a evolução temporal dessa distribuição inicial. $Q(x, p, t)$ será obtida a partir de $Q_0(x', p')$ e $W(x', p' | x, p, t)$ através da expressão:

$$Q(x, p, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dp' Q_0(x', p') W(x', p' | x, p, t). \quad (3.35)$$

A obtenção de $Q(x, p, t)$ para qualquer $Q_0(x', p')$ pode ser complicada, por isso, nos restringiremos a distribuições iniciais gaussianas por nos facilitar os cálculos. Pode-se mostrar^[29] que para essa condição inicial, $Q(x, p, t)$ também será uma gaussiana bidimensional do tipo:

$$Q(x, p, t) = \frac{1}{2\pi\tau_1\tau_2(1-\eta^2)^{1/2}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\eta^2)} \left[\frac{(x-\bar{x})^2}{\tau_1^2} + \frac{(p-\bar{p})^2}{\tau_2^2} - \frac{2\eta(x-\bar{x})(p-\bar{p})}{\tau_1\tau_2} \right] \right\} \quad (3.36)$$

onde

$$\tau_1^2 = \langle (x - \bar{x})^2 \rangle_Q \equiv \int dx dp (x - \bar{x})^2 Q(x, p, t)$$

$$\begin{aligned}
\tau_2^2 &= \langle (p - \bar{p})^2 \rangle_Q \equiv \int dx dp (p - \bar{p})^2 Q(x, p, t) \\
\eta\tau_1\tau_2 &= \langle (x - \bar{x})(p - \bar{p}) \rangle_Q \equiv \int dx dp (x - \bar{x})(p - \bar{p}) Q(x, p, t) \\
\bar{x} &= \int dp dx x Q(x, p, t) \\
\bar{p} &= \int dp dx p Q(x, p, t).
\end{aligned} \tag{3.37}$$

O símbolo $\langle \rangle_Q$ indica que as médias são feitas sobre o “ensemble” caracterizado pela distribuição $Q(x, p, t)$.

Das expressões anteriores podemos ainda desenvolver:

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp x Q(x, p, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx dp x \int_{-\infty}^{\infty} dx' dp' Q_0(x', p') W(x', p' | x, p, t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx' dp' Q_0(x', p') \int_{-\infty}^{\infty} dx dp x W(x', p' | x, p, t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx' dp' Q_0(x', p') x_c
\end{aligned} \tag{3.38}$$

onde x_c representa a solução determinística da equação tipo Langevin.

Nessa expressão podemos ainda utilizar a seguinte relação:

$$x_c \equiv x_f(t) + x_h(x', p', t) \tag{3.39}$$

sendo x_h a parte homogênea da solução e x_f a parte não homogênea. Dessa forma é fácil ver que $\bar{x}$ assume a forma:

$$\bar{x} = \langle x_h(x', p', t) \rangle_{Q_0} + x_f(t) \tag{3.40}$$

e de forma análoga:

$$\bar{p} = \langle p_h(x', p', t) \rangle_{Q_0} + p_f(t). \tag{3.41}$$

Através do desenvolvimento de cálculos simples, porém extensos, das equações (3.37) obtemos as seguintes expressões para as variâncias de $Q(x, p, t)$:

$$\begin{aligned}
\tau_1^2 &= \sigma_1^2(t) + x_f^2(t) + 2x_f(t) \langle x_h(x', p', t) \rangle_{Q_0} + \langle x_h^2(x', p', t) \rangle_{Q_0} - \bar{x}^2 \\
\tau_2^2 &= \sigma_2^2(t) + p_f^2(t) + 2p_f(t) \langle p_h(x', p', t) \rangle_{Q_0} + \langle p_h^2(x', p', t) \rangle_{Q_0} - \bar{p}^2 \\
\eta\tau_1\tau_2 &= \rho\sigma_1\sigma_2 + x_f(t)p_f(t) + x_f(t) \langle p_h(x', p', t) \rangle_{Q_0} \\
&\quad + p_f(t) \langle x_h(x', p', t) \rangle_{Q_0} \langle x_h(x', p', t)p_h(x', p', t) \rangle_Q - \bar{x}\bar{p}
\end{aligned} \tag{3.42}$$

onde σ_1 , σ_2 e ρ foram explicitados anteriormente através das equações (3.34).

Para o caso concreto de um oscilador com fator de amortecimento $\frac{\gamma}{2} < \omega_0$ e força externa determinística (além da força aleatória), a solução determinística da equação de movimento é bem conhecida e dada pelas expressões (veja (3.5) e (3.39)):

$$\begin{aligned}
x_f(t) &= \frac{1}{m\omega_1} \int_0^t \exp\left[-\frac{\gamma}{2}(t-t')\right] \sin \omega_1(t-t') F(t') dt' \\
x_h(x', p', t) &= \left(\frac{\gamma}{2\omega_1} \sin \omega_1 t + \cos \omega_1 t\right) \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) x' + \frac{1}{m\omega_1} \sin \omega_1 t \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) p' \\
p_f(t) &= \int_0^t \exp\left[-\frac{\gamma}{2}(t-t')\right] \left[\cos \omega_1(t-t') - \frac{\gamma}{2\omega_1} \sin \omega_1(t-t')\right] F(t') dt' \\
p_h(x', p', t) &= -\frac{m\omega_0^2}{\omega_1} \sin \omega_1 t \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) x' \\
&\quad + (\cos \omega_1 t - \gamma \sin \omega_1 t) \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) p'.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Consideremos, como um exemplo simples, o caso em que a distribuição inicial é uma gaussiana bidimensional da forma:

$$\begin{aligned}
Q_0(x', p') &= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_p(1-\theta^2)} \\
&\times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\theta^2)} \left[\frac{(x'-x_0)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(p'-p_0)^2}{\sigma_p^2} - \frac{2\theta(x'-x_0)(p'-p_0)}{\sigma_x\sigma_p}\right]\right\}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

aqui as variâncias iniciais σ_x e σ_p bem como o parâmetro de correlação θ são considerados conhecidos. Podemos então calcular τ_1^2 e τ_2^2 e $\rho\tau_1\tau_2$ e expressá-los como função dos parâmetros σ_x , σ_p e θ , característicos do exemplo que estamos considerando. Encontramos então os seguintes resultados para as relações (3.42):

$$\begin{aligned}
\tau_1^2 = & \frac{D}{m^2 \omega_0^2 \gamma} \left\{ 1 - \left[\omega_1^2 + \frac{\gamma^2}{2} \sin^2 \omega_1 t + \frac{\gamma \omega_1}{2} \sin 2\omega_1 t \right] \frac{\exp(-\gamma t)}{\omega_1^2} \right\} \\
& + \sigma_x^2 \left[\cos \omega_1 t + \frac{\gamma}{2\omega_1} \sin \omega_1 t \right]^2 \exp(-\gamma t) + \sigma_p^2 \frac{1}{m^2 \omega_1^2} \sin^2 \omega_1 t \exp(-\gamma t) \\
& + \frac{2\theta \sigma_x \sigma_p}{m \omega_1} \left[\sin \omega_1 t \cos \omega_1 t + \frac{\gamma}{2\omega_1} \sin^2 \omega_1 t \right] \exp(-\gamma t)
\end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned}
\tau_2^2 = & \frac{D}{\gamma} \left\{ 1 - \left[\omega_1^2 + \frac{\gamma^2}{2} \sin^2 \omega_1 t - \frac{\gamma \omega_1}{2} \sin 2\omega_1 t \right] \frac{\exp(-\gamma t)}{\omega_1^2} \right\} \\
& + \sigma_p^2 \left[\cos \omega_1 t + \frac{\gamma}{2\omega_1} \sin \omega_1 t \right]^2 \exp(-\gamma t) + \sigma_x^2 \frac{m^2 \omega_0^2}{\omega_1^2} \sin^2 \omega_1 t \exp(-\gamma t) \\
& - \frac{2\theta \sigma_x \sigma_p m \omega_0^2}{\omega_1} \left[\sin \omega_1 t \cos \omega_1 t - \frac{\gamma}{2\omega_1} \sin^2 \omega_1 t \right] \exp(-\gamma t)
\end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned}
\eta \tau_1 \tau_2 = & \frac{D}{m \omega_1^2} \sin^2 \omega_1 t \exp(-\gamma t) \\
& + \theta \sigma_x \sigma_p \left[\cos^2 \omega_1 t - \left(\frac{\gamma^2/4 + \omega_0^2}{\omega_1^2} \right) \sin^2 \omega_1 t \right] \exp(-\gamma t) \\
& + \frac{\sigma_p^2}{m \omega_1} \left[\sin \omega_1 t \cos \omega_1 t - \frac{\gamma}{2\omega_1} \sin^2 \omega_1 t \right] \exp(-\gamma t) \\
& - \frac{m \omega_0^2 \sigma_x^2}{\omega_1} \left[\sin \omega_1 t \cos \omega_1 t + \frac{\gamma}{2\omega_1} \sin^2 \omega_1 t \right] \exp(-\gamma t).
\end{aligned} \quad (3.47)$$

Até agora obtivemos expressões bem gerais que poderão ser particularizadas através da escolha de θ , σ_x e σ_p além de x_0 e p_0 . Por simplicidade analisaremos apenas situações em que $\theta = 0$.

3.3 Discussão

O principal resultado aqui obtido é que, considerando não mais do que a mecânica clássica e a eletrodinâmica clássica, a descrição de um ensemble de osciladores harmônicos carregados é feita de forma essencialmente indistinguível da descrição da

mecânica quântica para uma partícula individual. A única hipótese extra necessária, também clássica, são os campos de ponto zero, discutidos no Capítulo 1.

O modelo seguido nessa dissertação não faz nenhuma distinção, em termos de resultados, entre o valor esperado do operador que representa uma grandeza dinâmica na mecânica quântica e a média sobre um ensemble das grandezas dinâmicas da física clássica em regimes estacionários.

Quanto ao oscilador não forçado as duas teorias, SED e mecânica quântica, prevêem que o estado de equilíbrio estável (estado fundamental) ocorre quando a potência irradiada pelo oscilador for igual a potência absorvida pelo mesmo devido ao acoplamento com o campo de ponto zero.

A distribuição de probabilidades desse estado no espaço de configuração (ou de momento) é dada, na teoria quântica, pela solução da equação de Schrödinger. Na eletrodinâmica estocástica a distribuição foi obtida diretamente no espaço de fase através da solução estacionária da equação de Fokker-Planck na aproximação Markoviana, ou através do teorema central do limite, onde as variâncias são obtidas diretamente da equação de Langevin para o problema (Apêndice B).

Quanto à descrição do oscilador forçado, também aqui, ocorre acordo entre as teorias. Ambas prevêem, dependendo de como se prepara o experimento, estados coerentes e estados coerentes comprimidos e pulsantes (squeezed states) com dissipação.

Os estados coerentes consistem em uma distribuição de probabilidades do tipo gaussiano (idêntico ao do estado fundamental do oscilador harmônico) onde o centro dessa distribuição oscila sobre a trajetória clássica do oscilador forçado^[32].

Esses estados são obtidos na SED para um ensemble de osciladores forçados cuja distribuição inicial é idêntica ao do pacote de mínima incerteza do oscilador quantizado.

Para percebermos esse resultado nos utilizamos das expressões gerais (3.45), (3.46) e (3.47), que descrevem a evolução temporal do ensemble de osciladores para uma dada distribuição inicial arbitrária. Para uma distribuição inicial em que σ_x e σ_p são os mesmos do estado fundamental do oscilador harmônico, ou seja, $\sigma_x^2 =$

$\hbar/(2m\omega_0)$ e $\sigma_p^2 = (\hbar m\omega_0)/2$ e $\theta = 0$, obtemos que essas variâncias não mudam com o tempo permanecendo, como na mecânica quântica^[32], uma distribuição de incerteza mínima, $\tau_1^2 = \hbar/(2m\omega_0)$ e $\tau_2^2 = (\hbar m\omega_0)/2$. Decorre então que quando começamos com estado coerente, o sistema continua nesse estado durante todo o tempo, qualquer que seja a força externa.

Se prepararmos um ensemble de osciladores forçados de tal maneira que o produto das variâncias da posição e do momento seja correspondente ao do pacote de incerteza mínima, porém com a variância relativa à posição (ou relativa ao momento) menor que a do pacote gaussiano relativo ao estado fundamental do oscilador, então teremos os chamados "squeezed states".

Para essa situação, que percebemos através dos resultados (3.45), (3.46) e (3.47), as variâncias oscilam no tempo com uma frequência igual ao dobro da frequência do oscilador, ou seja, a cada oscilação completa do oscilador, o pacote de incerteza mínima se restabelece duas vezes, comprimido em uma das variâncias e alargada na outra. Esses estados decaem para um estado coerente após algum tempo.

Para que possamos visualizar estes efeitos vamos fazer uma análise gráfica dos resultados obtidos para a distribuição de probabilidades fixando um dado valor do argumento da exponencial na equação (3.36). Escreveremos a distribuição de probabilidades como:

$$Q(x, p, t) = \frac{1}{2\pi\tau_1\tau_2(1-\eta^2)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} G(x, p, \bar{x}, \bar{p}, \tau_1, \tau_2) \right\} \quad (3.48)$$

e tomaremos $G = \text{const.}$ Isto define uma elipse no plano x, p , centrada em $\bar{x}$ e $\bar{p}$, cujos semi-eixos a e b variam com o tempo enquanto que a própria orientação da elipse também muda. O fato é que dado um representante do ensemble, este terá uma probabilidade de 39,4% de estar dentro da área definida pela elipse no caso em que $G = 1$. Esta elipse é uma curva equiprovável para cada instante de tempo pois como sabemos, a forma da gaussiana varia com o decorrer do tempo. Ela será chamada elipse de incerteza e será usada na análise do exemplo porque com ela teremos uma visualização mais clara do que se passa.

Podemos escrever as larguras da distribuição de probabilidades $Q(x, p, t)$ de

forma a torná-las adimensionais facilitando a análise gráfica que faremos abaixo.

Vamos definir então:

$$\tilde{\tau}_1^2 \equiv \frac{2}{\hbar m \omega_0} \tau_1^2 \quad \text{e} \quad \tilde{\tau}_2^2 \equiv \frac{2m\omega_0}{\hbar} \tau_2^2 \quad (3.49)$$

bem como

$$\tilde{\sigma}_p^2 \equiv \frac{2}{\hbar m \omega_0} \sigma_p^2 \quad \text{e} \quad \tilde{\sigma}_x^2 \equiv \frac{2m\omega_0}{\hbar} \sigma_x^2 \quad (3.50)$$

Mostraremos inicialmente um gráfico de $\tilde{\tau}_1$ e $\tilde{\tau}_2$ como função de $\omega_0 t$. Escolheremos um estado inicial comprimido ($\tilde{\sigma}_x^2 = 1/3$) que obedece a relação de incerteza ($\tilde{\sigma}_x^2 \tilde{\sigma}_p^2 = 1$). A razão γ/ω_0 foi tomada igual à 0.1.

Observamos no gráfico 1 abaixo a variação com o tempo de $\tilde{\tau}_1$ e $\tilde{\tau}_2$ para este caso. Verifica-se que $\tilde{\tau}_1$ e $\tilde{\tau}_2$ apresentam oscilações rápidas em torno do valor assintótico que é $\tilde{\tau}_1 = \tilde{\tau}_2 = 1$.

Figura 3.1: Evolução temporal das larguras $\tilde{\tau}_1^2$ e $\tilde{\tau}_2^2$ para uma situação inicial em que $\tilde{\sigma}_x^2 = 1/3$ e $\tilde{\sigma}_p^2 = 3$.

Vamos agora mostrar como fica mais fácil observar a evolução temporal usando a elipse de incerteza ($G = 1$). O que faremos é observar o comportamento dos seus semi-eixos^[31].

Os semi-eixos a e b são expressos por:

$$a^2 = \frac{\bar{\tau}_1^2 \bar{\tau}_2^2 (1 - \eta^2)}{\bar{\tau}_2^2 \cos^2 \theta - \eta \bar{\tau}_1 \bar{\tau}_2 \sin 2\theta + \bar{\tau}_1^2 \sin^2 \theta} \quad (3.51)$$

$$b^2 = \frac{\bar{\tau}_1^2 \bar{\tau}_2^2 (1 - \eta^2)}{\bar{\tau}_2^2 \sin^2 \theta - \eta \bar{\tau}_1 \bar{\tau}_2 \sin 2\theta + \bar{\tau}_1^2 \cos^2 \theta} \quad (3.52)$$

onde $\theta = \frac{1}{2} \arctan \{2\eta \bar{\tau}_1 \bar{\tau}_2 / (\bar{\tau}_1^2 - \bar{\tau}_2^2)\}$.

A evolução temporal do sistema será acompanhada pelo comportamento dos semi-eixos a e b conforme se fixa alguns valores de $\bar{\sigma}_x$ e $\bar{\sigma}_p$ iniciais. Analisaremos uma distribuição inicial que obedeça o princípio da incerteza. Lembrando que estamos lidando com quantidades adimensionais, vamos tomar por exemplo os valores $\bar{\sigma}_x^2 = 1/3$ e $\bar{\sigma}_p^2 = 3$ que obedecem a relação de incerteza no instante inicial. Obtemos o seguinte gráfico para os semi-eixos:

Figura 3.2: Evolução temporal do quadrado dos semi-eixos da elipse de incerteza, a^2 e b^2 , para $\bar{\sigma}_x^2 = 1/3$ e $\bar{\sigma}_p^2 = 3$.

$a < 1$ significa que a elipse no instante inicial está comprimida no espaço das posições e alargada no espaço dos momentos.

O efeito da temperatura é automaticamente considerado no coeficiente de difusão $D = \frac{m\gamma\hbar\omega_0}{2} \text{Coth} \left(\frac{\hbar\omega_0}{2kT} \right)$.

Esses resultados foram obtidos recentemente por Peter Schramm e Hermann Grabert^[33] onde eles estudam o decaimento de um estado "squeezed" de um oscilador acoplado a um meio dissipativo e em contato com um reservatório de calor (ensemble canônico), usando formalismo de matriz densidade.

Os resultados por nós obtidos, usando a teoria da Eletrodinâmica Estocástica, concordam perfeitamente com os resultados de Schramm e Grabert, como pode ser visto por uma comparação mais direta do gráfico 2 com o gráfico que esses autores apresentam, o que comprova, mais uma vez, que a SED é uma possibilidade real para se compreender os resultados da mecânica quântica.

Os resultados ainda sugerem que para qualquer situação inicial, inclusive que viole o princípio de incerteza, haverá um decaimento para um estado coerente.

Por fim gostaríamos de comentar alguns resultados do capítulo 2 no que concerne às relações de comutação e princípio de incerteza.

Tratamos no capítulo 2, o problema do oscilador harmônico dentro da teoria quântica não relativística usando o método proposto por Sokolov e Tumanov^[23]. Calculamos as relações de comutação entre as variáveis dinâmicas da partícula (operadores na representação de Heisenberg) e do campo que continham componentes do campo eletromagnético de ponto zero, obtendo a conhecida relação, para regimes de tempos longos, $[x, p] = i\hbar$.

Esse resultado sugere que a origem das incertezas da mecânica quântica esteja no vácuo eletromagnético.

Obtivemos também a evolução temporal do comutador $[x, p]$ a partir de uma situação hipotética em que o oscilador supostamente tivesse posição e momento nulos e que a partir de um certo instante ficasse sujeito às flutuações de ponto zero. Os limites assintóticos obtidos são os esperados, ou seja, para $t = 0$, $[x, p] = 0$ e para tempos longos, $[x, p] = i\hbar$.

A solução transiente para o comutador $[x, p]$, até ordem de $O\left(\frac{\gamma^2}{\omega_0^2}\right)$, pode sugerir de que forma e em quanto tempo a perda de informação ocorre, até se atingir as incertezas que a mecânica quântica postulou nas suas origens.

Apêndice A

Dedução da Expressão do Espectro de Radiação do Corpo Negro Segundo a S.E.D.

Consideremos radiação eletromagnética contida dentro de uma cavidade e em equilíbrio com a mesma e caracterizada por uma função densidade espectral $\rho(\omega, T)$. Consideremos ainda que as cargas que interagem com a radiação estejam ligadas às paredes da cavidade por uma força harmônica.

A equação de movimento para esse oscilador carregado será então a equação de Braffort-Marshall:

$$m\ddot{\vec{x}} = -m\omega_0^2\vec{x} + \frac{2e^2}{3c^3}\dot{\vec{x}} + \vec{f}(t) \quad (\text{A.1})$$

na aproximação de dipolo elétrico.

Usando a mesma aproximação para a força de reação da radiação usada no capítulo 3 e expressando a força flutuante $\vec{f}(t)$ (de origem térmica e de ponto zero) como uma expansão de ondas planas, eq.(1.17), obtemos a seguinte equação estocástica:

$$m\ddot{\vec{x}} + m\gamma\dot{\vec{x}} + m\omega_0^2\vec{x} = R \left\{ e \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3\vec{k} \hat{e}(\vec{k}, \lambda) \dot{H}(\vec{k}, T) \exp[-i\omega t + i\eta(\vec{k}, \lambda)] \right\} \quad (\text{A.2})$$

O termo do lado direito da equação acima corresponde à expansão em ondas

planas do campo elétrico aleatório dentro da cavidade multiplicado pela carga. $\eta(\vec{k}, \lambda)$ são fases aleatórias e $g(\omega, T)$ a amplitude da onda plana.

A solução estacionária pode ser escrita como:

$$\vec{x} = \frac{e}{m} R \left\{ \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3 \vec{k} \frac{H(\vec{k}, T) \hat{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) \exp [-i\omega_{\vec{k}} t + i\eta(\vec{k}, \lambda)]}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \right\} \quad (\text{A.3})$$

Com base nesse resultado, calculemos o valor médio da energia total da carga:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2} m \langle \dot{\vec{x}}^2 \rangle + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \langle \vec{x}^2 \rangle \quad (\text{A.4})$$

e

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}^2 \rangle &= \frac{e^2}{m^2} \sum_{\lambda_1=1}^2 \sum_{\lambda_2=1}^2 \int d^3 \vec{k}_1 \int d^3 \vec{k}_2 \hat{\epsilon}(\vec{k}_1, \lambda_1) \hat{\epsilon}(\vec{k}_2, \lambda_2) g(\omega_1, T) g(\omega_2, T) \\ &\times \frac{\langle \cos [\omega_1 t + \eta(\vec{k}_1, \lambda_1)] \cos [\omega_2 t + \eta(\vec{k}_2, \lambda_2)] \rangle}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \gamma^2 \omega^2} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

A média sobre as fases aleatórias nos fornece o seguinte resultado^[3]:

$$\langle \cos [\omega_1 t + \eta(\vec{k}_1, \lambda_1)] \cos [\omega_2 t + \eta(\vec{k}_2, \lambda_2)] \rangle = \frac{1}{2} \delta^3 (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \delta_{\lambda_1, \lambda_2} \quad (\text{A.6})$$

Com esse resultado escrevemos (A.5):

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}^2 \rangle &= \frac{e^2}{m^2} \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3 \vec{k} \frac{\hat{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) H^2(\vec{k}, T)}{2 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \gamma^2 \omega^2]} \\ &= \frac{e^2}{m^2} \sum_{\lambda=1}^2 \int_0^\infty \frac{4\pi}{c^3} \frac{\omega^2 H^2(\vec{k}, T) d\omega}{2 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \gamma^2 \omega^2]} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Depois de somar sobre as polarizações obtemos:

$$\langle \vec{x}^2 \rangle = \frac{4\pi e^2}{m^2 c^3} \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^2 H^2(\vec{k}, T)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (\text{A.8})$$

Analogamente,

$$\langle \dot{\vec{x}} \rangle = \frac{4\pi e^2}{m^2 c^3} \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^4 H^2(\vec{k}, T)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (\text{A.9})$$

Utilizando a expressão (1.25)

$$\rho(\omega, T) = \frac{\omega^2 H^2(\vec{k}, T)}{c^3} \quad (\text{A.10})$$

obtemos para a energia média $\langle \epsilon \rangle = \frac{1}{2} \langle \dot{\vec{x}}^2 \rangle + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \langle \vec{x}^2 \rangle$, o resultado:

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{2\pi e^2}{m} \int_0^\infty d\omega \frac{(\omega^2 + \omega_0^2) \rho(\omega, T)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (\text{A.11})$$

A integral acima diverge desde que não se faça cortes em altas frequências. Isso pode ser feito introduzindo um fator de convergência $\exp(-a\omega^2)$ que atenua contribuições devido às frequências altas, depois do cálculo tomamos $a \rightarrow 0$ [27,28].

O integrando é uma função fortemente centrada em ω_0 . Usando o método de Laplace para integrais obtemos:

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{3\pi c^3}{\omega_0^2} \rho(\omega_0, T) \quad (\text{A.12})$$

Tanto $\vec{x}$ quanto $\vec{p} = \frac{\dot{\vec{x}}}{m}$, são variáveis aleatórias estatisticamente independentes. Podemos então usar o teorema central do limite para encontrar a distribuição de probabilidades, no espaço de fase, do oscilador em equilíbrio

$$W(\vec{x}, \vec{p}) = \left(\frac{4\pi^2}{9} \langle \vec{x}^2 \rangle \langle \vec{p}^2 \rangle \right)^{-3/2} \exp \left[-\frac{3}{2} \left(\frac{\vec{x}^2}{\langle \vec{x}^2 \rangle} + \frac{\vec{p}^2}{\langle \vec{p}^2 \rangle} \right) \right] \quad (\text{A.13})$$

usando essa distribuição e o fato que: $\langle \epsilon \rangle = m \langle \dot{\vec{x}}^2 \rangle = m \omega_0^2 \langle \vec{x}^2 \rangle$, e portanto $\langle \epsilon \rangle = \frac{3\pi c^3 \rho(\omega_0, T)}{\omega_0^2}$, obtemos

$$\langle \epsilon^2 \rangle = \int d^3 \vec{x} \int d^3 \vec{p} W(\vec{x}, \vec{p}) \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \vec{x}^2 \right)^2 = \frac{4}{3} \langle \epsilon \rangle^2 \quad (\text{A.14})$$

utilizando a expressão para as flutuações térmicas em um ensemble canônico:

$$kT^2 \frac{\partial \langle \epsilon \rangle}{\partial T} = (\langle \epsilon^2 \rangle - \langle \epsilon \rangle^2)_{\text{Térmica}} = (\langle \epsilon^2 \rangle - \langle \epsilon \rangle^2)_{\text{Total}} = (\langle \epsilon^2 \rangle - \langle \epsilon \rangle^2)_{\text{Ponto Zero}} \quad (\text{A.15})$$

As flutuações térmicas são consideradas estatisticamente independentes das flutuações de ponto zero.

Da expressão $\langle \epsilon^2 \rangle = \frac{4}{3} \langle \epsilon \rangle^2$ obtemos

$$\langle \epsilon^2 \rangle - \langle \epsilon \rangle^2 = \langle \epsilon \rangle^2 / 3 \quad (\text{A.16})$$

Substituindo as expressões (A.12) e (A.16) em (A.15) obtemos

$$kT^2 \frac{\partial \rho(\omega_0, T)}{\partial T} = \frac{1}{3} \left(\frac{3\pi^2 c^2}{\omega_0^2} \right) \left[\rho^2(\omega_0, T) - \left(\frac{\hbar \omega_0^3}{2\pi^2 c^3} \right)^2 \right] \quad (\text{A.17})$$

onde $\rho(\omega_0, T) = \rho_T(\omega_0) + \rho_0(\omega_0)$. A equação diferencial (A.17) é facilmente resolvida nos fornecendo o resultado:

$$\rho(\omega, T) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\hbar \omega / kT} - 1} \right] \quad (\text{A.18})$$

Apêndice B

Cálculo das Variâncias da Distribuição de Probabilidade no Espaço de Fase a Partir da Solução da Equação de Langevin

Equação de Langevin:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \quad (\text{B.1})$$

sendo $\gamma = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{\omega_0^2}{m}$ e $f(t) = \frac{e}{m} E_x(t)$.

Solução geral:

$$x(t) = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left\{ e^{\mu_1 t} \int_0^t dt' e^{-\mu_1 t'} f(t') - e^{\mu_2 t} \int_0^t dt' e^{-\mu_2 t'} f(t') \right. \\ \left. + (p_0 - \mu_2 m x_0) e^{\mu_1 t} + (\mu_1 m x_0 - p_0) e^{\mu_2 t} \right\} \quad (\text{B.2})$$

onde $\mu_1 = -\frac{\gamma}{2} + \left(\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2 \right)^{1/2} = -\frac{\gamma}{2} + i\omega_1$ e $\mu_2 = -\frac{\gamma}{2} - i\omega_1$

Solução homogênea:

$$x_H(t) = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left[(p_0 - \mu_2 m x_0) e^{\mu_1 t} + (\mu_1 m x_0 - p_0) e^{\mu_2 t} \right] \quad (\text{B.3})$$

Vamos escrever a solução da seguinte forma:

$$x(t) = x_f(t) + x_H(t) \quad (\text{B.4})$$

sendo $x_H(t)$ a parte determinística da solução geral e $x_f(t)$ a parte estocástica da solução geral.

A variância no espaço de configurações da distribuição de probabilidades será então:

$$\sigma_1^2 = \langle x_f^2 \rangle = \langle (x - x_H)^2 \rangle \quad (\text{B.5})$$

portanto,

$$\sigma_1^2 = \int_0^t dt' \int_0^t dt'' G(t-t') G(t-t'') \langle f(t') f(t'') \rangle \quad (\text{B.6})$$

sendo $G(t-t')$ a função de Green do oscilador subamortecido e

$$\langle f(t') f(t'') \rangle = \frac{e^2}{m^2} \langle E(t') E(t'') \rangle = \frac{4\pi e^2}{3m^2} \int_0^\infty d\omega \rho(\omega, T) \cos \omega(t' - t'') \quad (\text{B.7})$$

de acordo com a equação (1.26). $\rho(\omega, T)$ é a distribuição espectral de Planck que inclui radiação térmica e de vácuo. Sua expressão é

$$\rho(\omega, T) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\hbar \omega / kT} - 1} \right] = \frac{\hbar \omega^3}{2\pi^2 c^3} \text{Coth} \left(\frac{\hbar \omega}{2kT} \right) \quad (\text{B.8})$$

Com esses dados escrevemos σ_1^2 :

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 = & \frac{4\pi e^2}{3m^2} \left(\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \right)^2 \\ & \times \left[e^{2\mu_1 t} \int_0^\infty d\omega \rho(\omega, T) \int_0^\infty dt' e^{-\mu_1 t'} \int_0^\infty dt'' e^{-\mu_1 t''} \cos \omega(t'' - t') \right. \\ & + e^{2\mu_2 t} \int_0^\infty d\omega \rho(\omega, T) \int_0^\infty dt' e^{-\mu_1 t'} \int_0^\infty dt'' e^{-\mu_1 t''} \cos \omega(t'' - t') \\ & \left. - 2e^{(\mu_1 + \mu_2)t} \int_0^\infty d\omega \rho(\omega, T) \int_0^\infty dt' e^{-\mu_1 t'} \int_0^\infty dt'' e^{-\mu_1 t''} \cos \omega(t'' - t') \right] \quad (\text{B.9}) \end{aligned}$$

Escrevendo $\cos \omega(t'' - t') = \frac{e^{i\omega(t'' - t')} + e^{-i\omega(t'' - t')}}{2}$ e integrando em t' e t'' obtém-se:

$$\begin{aligned}
\sigma_1^2 = & -\frac{\pi e^2}{3m^2\omega_1^2} \left\{ e^{2\mu_1^2 t} \int_0^\infty d\omega \frac{\rho(\omega, T)}{\mu_1^2 + \omega^2} [1 + e^{-2\mu_1 t} - 2 \cos \omega t e^{-\mu_1 t}] \right. \\
& + e^{2\mu_2^2 t} \int_0^\infty d\omega \frac{\rho(\omega, T)}{\mu_2^2 + \omega^2} [1 + e^{-2\mu_2 t} - 2 \cos \omega t e^{-\mu_2 t}] \\
& - e^{-\gamma t} \int_0^\infty d\omega \frac{\rho(\omega, T)}{(\omega^2 - \omega_0^2) + \gamma^2 \omega^2} [2(\omega^2 + \omega_0^2)(1 + e^{\gamma t}) \\
& \left. - (\omega_0^2 + \omega^2) 4e^{\frac{\gamma}{2} t} \cos \omega_1 t \cos \omega t - 8\omega \omega_1 e^{\frac{\gamma}{2} t} \sin \omega_1 t \sin \omega t] \right\} \quad (B.10)
\end{aligned}$$

Substituindo os valores de μ_1 e μ_2 acima, agrupando os termos e ainda definindo $D(\omega) = (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2$, obtemos

$$\begin{aligned}
\sigma_1^2 = & \frac{2\pi e^2}{3m^2\omega_1^2} \left\{ 2\omega_1^2 \int_0^\infty d\omega \frac{\rho(\omega, T)}{D(\omega)} + e^{-\gamma t} \int_0^\infty d\omega \frac{(\omega^2 + \omega_0^2) \rho(\omega, T)}{D(\omega)} \right. \\
& + \gamma \omega_1 \sin 2\omega_1 t e^{-\gamma t} \int_0^\infty d\omega \frac{\rho(\omega, T)}{D(\omega)} \\
& - \cos 2\omega_1 t e^{-\gamma t} \int_0^\infty d\omega \frac{(\omega^2 - \omega_0^2 + \frac{\gamma^2}{2}) \rho(\omega, T)}{D(\omega)} \\
& - 2\gamma \omega_1 e^{-\frac{\gamma}{2} t} \sin \omega_1 t \int_0^\infty d\omega \frac{\cos \omega t \rho(\omega, T)}{D(\omega)} \\
& - 2e^{-\frac{\gamma}{2} t} \cos \omega_1 t \left(2\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2} \right) \int_0^\infty d\omega \frac{\cos \omega t \rho(\omega, T)}{D(\omega)} \\
& \left. - 4e^{-\frac{\gamma}{2} t} \sin \omega_1 t \int_0^\infty d\omega \frac{\omega_1 \omega \sin \omega t \rho(\omega, T)}{D(\omega)} \right\} \quad (B.11)
\end{aligned}$$

As integrais acima são divergentes desde que não sejam efetuados cortes nas altas frequências. Isto é feito introduzindo um fator de convergência: $e^{-a\omega^2}$, que atenua contribuições em altas frequências. Depois do cálculo, tomamos $a \rightarrow 0$ [27,28].

Além disso, o denominador do integrando será pequeno quando $\omega \simeq \omega_0$, isso significa que a integral assumirá valores grandes num pico em torno de ω_0 , sendo possível então expandir o numerador em série de potências até ordem de γ^2/ω_0^2 .

Fazendo o que indicamos acima obtemos:

$$\sigma_1^2 = \frac{2\pi e^2 \rho(\omega_0, T)}{3m^2\omega_1^2} \left\{ 2\omega_1^2 \int_0^\infty \frac{d\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} + e^{-\gamma t} \int_0^\infty \frac{(\omega^2 + \omega_0^2) d\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \gamma \omega_1 \sin 2\omega_1 t e^{-\gamma t} \int_0^\infty \frac{d\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \\
& - e^{-\gamma t} \cos 2\omega_1 t \int_0^\infty \frac{(\omega^2 - \omega_0^2 + \frac{\gamma^2}{2}) d\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \\
& - 2\gamma \omega_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin \omega_1 t \int_0^\infty \frac{\cos \omega t d\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \\
& - 2e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos \omega_1 t \left(2\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2} \right) \int_0^\infty \frac{\cos \omega t d\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \\
& - 4\omega_1 \sin \omega_1 t e^{-\frac{\gamma}{2}t} \int_0^\infty \frac{\omega \sin \omega t d\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \Bigg\} \quad (B.12)
\end{aligned}$$

As integrais acima são facilmente calculadas pelo método dos resíduos dando os resultados:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{d\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} &= \frac{\pi}{2\gamma \omega_0^2} \\
\int_0^\infty \frac{\omega^2 d\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} &= \frac{\pi}{2\gamma} \\
\int_0^\infty \frac{\cos \omega t d\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} &= \frac{\pi}{2\gamma \omega_0^2} \left(\cos \omega_1 t + \frac{\gamma}{2\omega_1} \sin \omega_1 t \right) e^{-\frac{\gamma}{2}t} \\
\int_0^\infty \frac{\omega \sin \omega t d\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} &= \frac{\pi}{2\gamma \omega_1} \sin \omega_1 t e^{-\frac{\gamma}{2}t} \quad (B.13)
\end{aligned}$$

Substituindo os valores das integrais em (B.12) temos:

$$\begin{aligned}
\sigma_1^2 &= \frac{2\pi e^2 \rho(\omega_0, T)}{3m^2 \omega_1^2} \left[2\omega_1^2 \frac{\pi}{2\gamma \omega_0^2} + 2\omega_0^2 \frac{\pi}{2\gamma \omega_0^2} + \gamma \omega_1 \sin 2\omega_1 t e^{-\gamma t} \frac{\pi}{2\gamma \omega_0^2} \right. \\
& - e^{-\gamma t} \cos 2\omega_1 t \frac{\gamma^2}{2} \frac{\pi}{2\gamma \omega_0^2} - 2\gamma \omega_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin \omega_1 t \frac{e^{-\frac{\gamma}{2}t}}{\gamma \omega_0^2} \left(\cos \omega_1 t + \frac{\gamma}{2\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \\
& - 2e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos \omega_1 t \left(2\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2} \right) \left(\cos \omega_1 t + \frac{\gamma}{2\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \frac{\pi e^{-\frac{\gamma}{2}t}}{2\gamma \omega_0^2} \\
& \left. - 4e^{-\frac{\gamma}{2}t} \omega_1 \sin \omega_1 t \frac{\pi e^{-\frac{\gamma}{2}t}}{2\gamma \omega_0} \sin \omega_1 t \right] \quad (B.14)
\end{aligned}$$

Ainda

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 = & \frac{2\pi e^2}{3m^2\omega_1^2} \frac{\hbar\omega_0^2}{2\pi^2 c^3} \coth\left(\frac{\hbar\omega_0}{2kT}\right) \frac{\pi}{\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{\omega_0^2}{m}} \left[1 + e^{-\gamma t} - 2e^{-\gamma t} + \frac{\gamma}{2\omega_1} \sin 2\omega_1 t e^{-\gamma t} \right. \\ & - \frac{\gamma}{2\omega_1} \sin 2\omega_1 t e^{-\gamma t} - \frac{\gamma}{2\omega_1} \sin 2\omega_1 t e^{-\gamma t} + \frac{\gamma^2}{2\omega_0} \sin^2 \omega_1 t e^{-\gamma t} \\ & \left. - \frac{\gamma^2}{2\omega_1} \sin^2 \omega_1 t e^{-\gamma t} - \frac{\gamma^2}{2\omega_0} \sin^2 \omega_1 t e^{-\gamma t} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

O que resulta finalmente em:

$$\sigma_1^2 = \frac{\hbar}{2m\omega_0} \coth\left(\frac{\hbar\omega_0}{2kT}\right) \left[1 - \left(\omega_1^2 + \frac{\gamma^2}{2} \sin^2 \omega_1 t + \frac{\gamma\omega_1}{2} \sin 2\omega_1 t \right) \frac{e^{-\gamma t}}{\omega_1^2} \right] \quad (\text{B.16})$$

analogamente podemos calcular $\sigma_2^2 = \langle (p - p_H)^2 \rangle$ e $\rho\sigma_1\sigma_2$, onde ρ é o termo de correlação, obtendo os seguintes resultados

$$\sigma_2^2 = \frac{m\hbar\omega_0}{2} \coth\left(\frac{\hbar\omega_0}{2kT}\right) \left[1 - \left(\omega_1^2 + \frac{\gamma^2}{2} \sin^2 \omega_1 t - \frac{\gamma\omega_1}{2} \sin 2\omega_1 t \right) \frac{e^{-\gamma t}}{\omega_1^2} \right] \quad (\text{B.17})$$

$$\rho\sigma_1\sigma_2 = \frac{\hbar\gamma}{2\omega_1^2} \coth\left(\frac{\hbar\omega_0}{2kT}\right) \sin^2 \omega_1 t e^{-\gamma t} \quad (\text{B.18})$$

Essas variâncias obtidas diretamente da equação de Langevin estão em acordo com os resultados obtidos via solução da equação de Fokker-Planck no capítulo 2.

Isso nos faz acreditar que a hipótese do processo ser Markoviano, numa aproximação não relativística, seja bastante razoável.

Referências

- [1] P.W. Milonni and M.L. Shih, "Zero Point Energy in the Early Quantum Theory", Am. J. Phys. 59,684(1991); M.M.S. Bergia *et al.*, "Zero-Point Energy, Planck's Law and the Prehistory of Stochastic Eletrodynamics", Ann. Fond. L. de Broglie 5,39(1980).
- [2] T.W. Marshall, "Random Electrodynamics", Proc. Royal Soc. (London) 276A,475(1963).
- [3] T.H. Boyer, "Random Electrodynamics: The Theory of Classical Electrodynamics with Classical Electromagnetic Zero-Point Radiation", Phys. Rev. D11,790(1975).
- [4] E. Santos, "The Harmonic Oscillator in Stochastic Electrodynamics", Il Nuovo Cimento B19,57(1974).
- [5] H.M. França and M.T. Thomas, "Forced Harmonic Oscillator with Damping and Thermal Effects", Phys. Rev. D31,1337(1985).
- [6] T.H. Boyer, "Classical Statistical Thermodynamics and Electromagnetic Zero-Point Radiation", Phys. Rev. 186,1304(1969).
- [7] A.V. Barranco and H.M. França, "Stochastic Electrodynamics and Compton Effect", Phys. Essays 3,53(1990) e também Found. Phys. Lett, 5,25(1992).
- [8] A.V. Barranco, S.A. Brunini and H.M. França, "Spin and Paramagnetism in Classical Stochastic Electrodynamics", Phys. Rev. A39,5492(1989).

- [9] H.E. Puthoff, "Ground State of Hydrogen as a Zero Point Fluctuation - Determined State", Phys. Rev. D35,3266(1987).
- [10] R. Blanco, H.M. França and E. Santos, "Classical Interpretation of the Debye Law for the Specific Heat of Solids", Phys. Rev. A42,693(1991).
- [11] M.J. Sparnaay, "Measurement of Attractive Forces Between Flat Plates", Physica 24,751(1958).
- [12] K. Dechoum, H.M. França and A.M. Garcia, "Vacuum Fluctuation, Radiation Reaction and New Squeezed States", preprint IFUSP, Set(1992).
- [13] H.M. França and T.W. Marshall, "Excited States in Stochastic Electrodynamics", Phys. Rev. A38,3258(1988).
- [14] Ver, por exemplo, R. Loudon, "The Quantum Theory of Light", cap.7, Clarendon Press - Oxford - 1973.
- [15] M.M. Nieto, "What are Squeezed States Really Like?", published in Proceedings of Nato Advanced Study Institute: "Frontier of Nonequilibrium Statistical Physics", Santa Fé, New Mexico (1984).
- [16] M.T. Jaekel and S. Reynaud, "Quantum Limits in Interferometric Measurement", Europhys. Lett. 13,301(1990).
- [17] Coves C.M. *et al.*, "On the Measurement of a Weak Classical Force Coupled to a Quantum-Mechanical Oscillator.I. Issues of Principle", Rev. Mod. Phys. 52,341(1980).
- [18] J.J.R. Aitchinson, "Nothing's Plenty - The Vacuum in Modern Quantum Field Theory", Contemp. Phys. 26,333(1985).
- [19] H.E. Puthoff, "Source of Vacuum Electromagnetic Zero Point Energy", Phys. Rev. A40,4857(1989).

- [20] Ver, por exemplo, P.T. Landsberg, "Thermodynamics", pg.293 vol.2 Interscience Publishers (1961).
- [21] T.H. Boyer, "Thermal Effects of Acceleration Random Classical Radiation", Phys. Rev. D21,2137(1980).
- [22] T.H. Boyer, "Derivation of the Blackbody Radiation Spectrum Without Quantum Assumptions", Phys. Rev. 182,1374(1969).
- [23] A.A. Sokolov and V.S. Tumanov, "The Uncertainty Relation and Fluctuation Theory", Sov. Phys. JETP 3,958(1957). Veja também R. Schiller and H. Tesser, "Note on Fluctuations", Phys. Rev. A3,2035(1971).
- [24] P.W. Milonni, "Quantum Mechanics of the Einstein-Hopf Model", Am. Journal Phys. 49,177(1981).
- [25] J. Dalibard, J. Dupont-Roc and C. Cohen Tannoudji, "Vacuum Fluctuation and Radiation Reaction: Identification of Their Respective Contributions", J. Physique 43,1617(1982).
- [26] E.P. Wigner, "Do the Equations of Motion Determine the Quantum Mechanical Commutation Relations?", Phys. Rev. 77,711(1950).
- [27] H.M. França and G.C. Santos, "The Extended Charge in Stochastic Electrodynamics", Il Nuovo Cimento B86, 51(1985).
- [28] H.M. França, G.C. Marques and A.J. da Silva, "Some Aspects of Classical Motion of Extended Charges", Il Nuovo Cimento A48,65(1978).
- [29] S. Chandrasekhar, "Stochastic Problems in Physics and Astronomy", Rev. Mod. Phys. 15,1(1943).
- [30] Ming Chen Wang and G.E. Uhlenbeck, "On the Theory of the Brownian Motion II", Rev. Mod. Phys. 17,323(1945).

- [31] Meyer, Stuart L., "Data Analysis for Scientists and Engineers", John Wiley & Sons, Inc., New York (1975).
- [32] P. Carruthers and M.M. Nieto, "Coherent States and the Forced Quantum Oscillator", Am. Journal Phys. 33.537(1965).
- [33] P. Schramm and H. Grabert, "Effect of Dissipation on Squeezed Quantum Fluctuations", Phys. Rev. A34,4515(1986).