UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
1445
e.1
INSTITUTO DE FÍSICA

MECÂNICA ESTATÍSTICA E DINÂMICA DAS FASES DE SÓLITONS NO ^{4}HE LÍQUIDO

Luiz Roberto Evangelista

SBI-IFUSP

Defesa ... 11/9/88

Orientador: Prof. Dr. Ivan Ventura

Tese de Doutoramento apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo

SÃO PAULO
1988

530.13
E92m
D
e.1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Evangelista, Luiz Roberto
Mecânica estatística e dinâmica das fases de sólitons no ^{4}He líquido. São Paulo, 1988.

Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Departamento de Física Matemática.
Área de Concentração: Física de Partículas Elementares.
Orientador: Prof. Dr. Ivan Ventura

Unitermos: 1.Sólitons; 2.Hélio líquido; 3.Mecânica estatística; 4.Superfluidez

USP/IF/SBI - 29/88

AGRADECIMENTOS

Que tens tu, que não tenhas recebido?
(1 Cor 4,7)

- Ao Ivan, pela acolhida no IFUSP e por sua valorosa orientação.

- Aos professores do Departamento de Física Matemática pelo agradável, estimulante e fértil convívio.

- Aos amigos Manoel Simões Filho, Wagner Truppel, Carla Goldman, Sílvia Brunini e Rubens Freire Ribeiro, irmãos e companheiros na empreitada.

- Ao amigo José Carlos Brunelli, pelo inestimável auxílio na versão TEX do manuscrito.

- À Rita, à Cláudia e ao pessoal da Xerox, por inúmeras (e óbvias) razões.

- À FUEM e à CAPES pelo suporte financeiro.

"A razão humana, num determinado domínio dos seus conhecimentos, possui o singular destino de se ver atormentada por questões que não pode evitar, pois lhe são impostas pela sua natureza, mas às quais também não pode dar resposta por ultrapassarem completamente as suas possibilidades."

(Kant, *Crítica da Razão Pura*, pref. 1781)

"De tudo isso se segue que não pode ser nossa tarefa encontrar uma teoria absolutamente correta, senão uma imagem, a mais simples possível, e que represente o mais fielmente que puder, esses fenômenos..."

(L. Boltzmann, *Sobre a evolução dos métodos da física teórica nos tempos recentes*, 1899)

À minha esposa, Aparecida, e à minha filha, Heloísa, com amor, e aos meus pais.

RESUMO

Apresenta-se uma teoria microscópica para as fases do hélio líquido, baseada na existência de sólitons planares no fluido. O trabalho adota a interpretação de London para o gás de Bose-Einstein. E segue, principalmente, o trabalho pioneiro de Ventura, que é também uma extensão, para condensados não uniformes, da Teoria de Bogoliubov para a superfluidez.

Esta abordagem tem, no sóliton, sua principal faceta e na nuvem térmica e no segundo campo condensado suas principais novidades. A nuvem térmica é constituída por excitações térmicas ligadas ao sóliton. Assumimos, num primeiro momento, e como hipótese central, que a densidade da nuvem térmica é proporcional ao buraco do sóliton. Duas dinâmicas, então, são desenvolvidas: o campo médio, que dá origem ao fluido normal e a dinâmica da nuvem térmica . Essas duas dinâmicas são compatibilizadas e, por autoconsistência, desenvolve-se a Mecânica Estatística dos sólitons, no líquido. Os resultados obtidos estão em bom acordo com os resultados experimentais conhecidos. Há um calor específico com uma divergência tipo λ em $T = 2.1\ K$ e um *gap* térmico efetivo na região $T = 6 - 9\ K$, que concorda com o *gap* obtido experimentalmente por espalhamento de nêutrons.

A teoria é, rigorosamente, microscópica e foi aperfeiçoada, num segundo momento, com a descoberta do segundo campo condensado. Usando uma lagrangiana efetiva, construída a partir da primeira etapa dos cálculos, aperfeiçoou-se a teoria e a dinâmica sóliton/nuvem térmica pôde ser reproduzida de maneira mais apurada. O fenômeno central dessa abordagem é a condensação de um segundo campo clássico no menor estado de energia. As duas abordagens são equivalentes, mas a segunda é a mais correta e conduz, essencialmente, aos mesmos resultados.

ABSTRACT

A microscopic theory for the liquid phases of helium-4 is presented, based in the existence of planar solitons in the fluid. The work follows the London's interpretation of the Bose-Einstein gas. Mainly, it follows the pioneer work of Ventura on superfluidity, which is also an extension for the non-uniform condensates, of the Bogoliubov theory in the subject.

This approach has in the soliton its main feature and in the thermal cloud its main novelty. The thermal cloud is constituted by thermal excitations bounded to the soliton. We assume, at the first moment, and as a central hypothesis, that the density of the thermal cloud is proportional to the soliton hole (which is related to the matter vacancy) in the soliton frame.

Two dynamics are developed: the mean-field, that gives origin to the normal fluid and the dynamics of the thermal cloud excitations. These two dynamics are compatibilized and by self-consistency we build the Statistical Mechanics of the solitons in the liquid. The results so obtained are in good agreement with the known results of experiments. There is a specific heat with a λ-divergence at T=2.1 K, and a thermal gap in the range T=6 − 9 K, which agrees with the neutron sacattering gap.

The theory is microscopic in all respects and is improved with the introduction of the second condensed field. Using an effective Lagrangian, we have perfected the theory and have reproduced the soliton/thermal cloud dynamics in a more accurate fashion. The central phenomena in this approach is the condensation of the second classical field in the lowest energy state. The two approaches are equivalent, but the second one is the more correct and gives, essentially, the same results.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO 1

CAPÍTULO I 13
CONDENSADOS UNIFORMES E NÃO–UNIFORMES

I. A VERSÃO CANÔNICA DA TEORIA DE BOGOLIUBOV 13

a)– Comentários acerca do potencial 13

b)– A Aproximação de Bogoliubov 14

II. A VERSÃO SEMI–CLÁSSICA DA TEORIA DE BOGOLIUBOV 19

III. CONDENSADOS NÃO UNIFORMES 24

CAPÍTULO II 31
AS DUAS DINÂMICAS

I. A DINÂMICA DO FLUIDO NORMAL 32

a)– O "campo médio" 32

b)– O fluido normal de Bose–Einstein 35

II. A DINÂMICA DA NUVEM TÉRMICA 37

a)– O que é a nuvem térmica ? 37

b)– A nuvem térmica ao nível clássico 38

c)– A nuvem térmica ao nível quântico 41

III. AS CONDIÇÕES DE COMPATIBILIZAÇÃO 47

CAPÍTULO III 54
A MECÂNICA ESTATÍSTICA E AS FASES DO LÍQUIDO.(I)

I. A ENERGIA LIVRE DO SISTEMA DE SÓLITONS 54

II. AS FASES DO LÍQUIDO (I) 61

CAPÍTULO IV 73
O SEGUNDO CAMPO
I. A FORMULAÇÃO LAGRANGIANA INDEPENDENTE 74
II. O FENÔMENO DA CONDENSAÇÃO DO NOVO CAMPO 78

CAPÍTULO V 82
A MECÂNICA ESTATÍSTICA E AS FASES DO LÍQUIDO.(II)
I. PRELIMINARES 82
II. AS FASES DO LÍQUIDO (II) 84
III. ANÁLISE COMPLEMENTAR DAS FASES 91
a)– O Mecanismo da Superfluidez 91
b)– Outras Densidades 95

CAPÍTULO VI 99
CONCLUSÕES

CAPÍTULO VII 106
APÊNDICE
CÁLCULO NUMÉRICO
I. Introdução 106
II. A Minimização da energia livre 106
a)– Os Programas 106
III. A Região de Saturação 112
IV. Calor Específico 114
V. Outras Grandezas 115
VI. Observações 115
VII. Listagens 116

REFERÊNCIAS 117

INTRODUÇÃO

Foi em 1908 que Kamerlingh-Onnes e sua equipe, no célebre Laboratório da Universidade de Leiden, pela primeira vez, obtiveram o Hélio na fase líquida[1].

Pode-se dizer que, dali por diante, o hélio líquido e o seu comportamento peculiar tornar-se-iam um dos grandes desafios para a física teórica e experimental da Matéria Condensada em nosso século.

Ao longo desses anos, juntamente com a Supercondutividade (outra das descobertas de K.Onnes) as tentativas de desenvolvimento de teorias para o hélio líquido — notadamente o hélio superfluido — multiplicaram-se.

Começaremos esta introdução, comentando brevemente algumas das mais importantes contribuições teóricas para o problema do hélio líquido. Procuraremos atentar para aquelas cuja conexão com nosso trabalho seja mais evidente. Maiores detalhes sobre a evolução histórica desse instigante problema podem ser encontrados nas referências [2], [3] e também nas referências [4] e [5]. Os primeiros resultados experimentais sobre o calor específico foram publicados por L. Dana e K. Onnes[6] numa região de temperatura um pouco acima de 2.5 K.

M. Wolfke e W. H. Keesom[7], em 1928, registraram a existência de dois estados líquidos diferentes no hélio. As medidas foram aperfeiçoadas por Clusius e Keesom[8] que relataram a existência de um máximo muito agudo na região próxima de 2 K; Keesom e Miss Keesom[9], registraram com grande precisão os dados do calor específico e atribuíram a letra λ ao ponto desse máximo. Cunharam também as expressões consagradas de He I e He II para aquelas diferentes fases já registradas.

Nessa época muitos físicos teóricos debruçavam-se, já, sobre essas questões. A eventual conexão entre o fenômeno da existência do He II e outros fenômenos era inquirida.

Fröhlich[10] em 1937, atentou para a semelhança entre a anomalia do calor específico no ponto λ e o comportamento de algumas ligas na região

de transição ordem-desordem.

Sugeriu que a estrutura do hélio pudesse ser descrita por duas redes cirstalinas iguais e interpenetradas. Nas baixas temperaturas, somente uma das redes seria ocupada por átomos de He. O comportamento anômalo seria resultante da gradual transição entre uma situação em que uma só rede é ocupada, para aquela onde os átomos estão ocupando, aleatoriamente, as duas redes. Foi Fröhlich quem propôs, pela primeira vez, a existência de um *gap* no espectro do líquido.

Por outro lado, ao invés da analogia com o sólido, Fritz London[11] em 1938, sugeriu a conexão entre a condensação de Bose-Einstein e o comportamento do He II.

O núcleo dessa abordagem é a condensação no espaço dos momentos e não no espaço ordinário (como, p. ex., o rearranjo dos átomos numa rede cristalina).

Essa condensação é um efeito quântico macroscópico, estando relatada ao fato de o modo zero ser descrito por uma função de onda que é constante sobre a totalidade do líquido.

A condensação acontece, portanto, diretamente com a ocupação macroscópica do modo de momento zero, quando o número de ocupação deve ter uma singularidade para o limiar de energia zero.

Mas nesse meio tempo, P. Kapitza[12] e J. F. Allen e A. D. Misener[13], independentemente, descobriram o fenômeno da superfluidez, isto é, o escoamento não viscoso do líquido, em sua fase de baixa temperatura (He II). Novas questões, então, vieram à baila.

L. Tisza[14] propôs, no espírito dos trabalhos de London, uma teoria de dois fluidos interpenetrados. De fato, a idéia dos dois fluidos havia sido basicamente traçada por Gorter e Casimir[15], mas acabou desenvolvida por Tisza e por Landau (uma apreciação comparativa da teoria dos dois fluidos para supercondutores e superfluidos foi feita por C. J. Gorter[16]).

O ponto de partida da teoria dos dois fluidos é que, embora o sistema seja homogêneo no espaço ordinário, ele deve consistir de duas fases no espaço

dos momentos. As principais hipóteses dessa teoria são[11]:

(*i*) A existência de dois fluidos interpenetrados: o fluido normal e o superfluido;

(*ii*) A conexão da fase condensada (via teoria de London) à componente superfluida, com coeficiente de viscosidade nulo;

(*iii*) As excitações térmicas do líquido estão relatadas ao fluido normal e, portanto, a entropia é por ele carregada. Além disso, o fluido normal é viscoso.

Essas idéias, embora qualitativas, davam conta de muitos fenômenos importantes. Foi Tisza quem previu a existência do segundo som no hélio líquido, destinado a igualar as inomogeneidades de densidades e pressões que surgiam das peculiaridades das temperaturas dos dois fluidos.

A sugestão de que o calor específico do hélio pudesse tornar-se infinito na transição foi feita originalmente por Tisza[17].

Na mesma direção de London e Tisza, apontavam os trabalhos de A. Bijl[18] e de A. Michels, A. Bijl e J. de Boer[19]. Aceitando essencialmente as propostas de London, introduziram uma energia de excitação finita para mostrar que o comportamento do calor específico a baixas temperaturas, podia ser explicado, se na teoria do gás de Bose-Einstein, à sua energia cinética, se adicionasse um potencial médio por molécula.

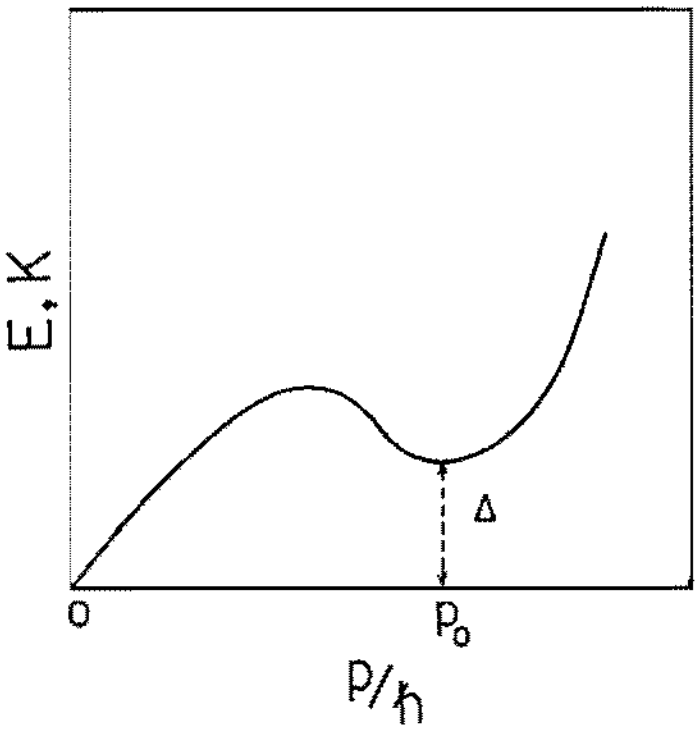
Numa postura bastante diferente, surgem os trabalhos de Landau[20−21]. Rejeitando as idéias de Tisza, opta por desenvolver uma hidrodinâmica quantizada, com ênfase no espectro de excitações coletivas do líquido, ou seja, nas quase-partículas.

O espectro energético que decorre de sua teoria é constituído por uma região onde os menores níveis de energia são os fônons (predominantes nas regiões de baixas temperaturas) e a parte superior da curva é a região dos rótons (veja a figura).

Há um *gap*, Δ, no espectro, que foi introduzido via parametrizaçao dos dados experimentais, de acordo com a expressão:

$$\epsilon = \frac{(p - p_0)^2}{2\mu} + \Delta$$

onde ϵ é a energia da quase-partícula, p é o seu momento e μ é a massa



Espectro de fônons e rótons na teoria de Landau[20].

efetiva da quase-partícula.

Estudando a propagação do som no He II, Landau também predisse a propagação do segundo som. Fê-lo, derivando as equações hidrodinâmicas para o líquido, a partir de leis de conservação e da invariância de Galileu do sistema.

Portanto, o enfoque de Landau centra-se, essencialmente, nas excitações coletivas do líquido. As tentativas de obtenção de valores apurados para os parâmetros de equilílibrio, a partir da mecânica estatística, em geral concentram-se no espectro de Landau.

A partir desses trabalhos, pode-se dizer que duas maneiras diferentes de abordar o problema do hélio líquido encontram-se: a abordagem do *gap*, inspirada nos trabalhos de Fröhlich e de Landau, e a abordagem do condensado, herdeira das contribuições de London e Tisza.

Rivalizadas num primeiro momento, essas duas posturas começaram a convergir a partir do trabalho pioneiro de N. N. Bogoliubov[22]. Usando métodos de segunda quantização, Bogoliubov desenvolveu uma teoria microscópica aproximada, onde coexistem as excitações coletivas da

abordagem de Landau (embora na teoria de Bogoliubov não haja um *gap*), com a idéia de condensação bosônica proposta por London.

Dedicamos a seção I do capítulo I deste trabalho a uma discussão geral das idéias de Bogoliubov, enfatizando certos aspectos que são essenciais para os nossos desenvolvimentos.

Beliaev[23] e Hugenholtz e Pines[24], na direção proposta por Bogoliubov, desenvolveram métodos de teoria quântica de campos para a abordagem do problema de muitos corpos, com ênfase particular ao problema bosônico.

Lee, Huang e Yang[25], aplicando o método do pseudo-potencial estudaram um sistema bosônico interagente como um sistema de esferas duras, a uma certa densidade.

Já Feynmann[26–27] propôs uma teoria fenomenológica que relacionava a função de estrutura estática do líquido à relação de dispersão das quase-partículas da teoria de Landau.

Por essa época (início da década de 1950) começavam as primeiras medidas com espalhamento de nêutrons no He[28]. Isso permitiu um avanço significativo no estudo do espectro do líquido. Em particular, grande atenção se devotou à região em torno do mínimo do róton. Remetemos o leitor às referências [29] e [30] para um apanhado recente na matéria e voltamos às abordagens teóricas.

Desenvolvimentos importantes foram feitos por Feenberg, Jackson e Woo e outros[31], tratando, por métodos variacionais, a Equação de Schrödinger com potenciais realísticos e estudando o estado fundamental do sistema e a função de estrutura estática.

Anderson[32],em 1966, fazendo uso de um campo clássico complexo para descrever o superfluido, concluiu que o movimento superfluido da matéria, num capilar, estava associado à diferença de fase do campo, entre as extremidades do tubo. Assim, a superfluidez se realizaria conjugada ao deslizamento da fase local.

Ginzsburg e Sobaynin[33] analisaram o papel que sólitons estáticos poderiam ter no hélio líquido, especialmente em conexão com a descrição da tensão superficial numa superfície livre.

Em 1979, I. Ventura[34–35] propôs uma abordagem alternativa para o problema do hélio líquido. O problema do superfluido foi ali abordado a partir de uma expansão semi-clássica em torno da solução da equação de Gross-Pitaevskii[36]. Essa expansão é equivalente à expansão efetuada por Bogoliubov[22], mas apresenta a importante vantagem de ser mais natural e mais própria para tratar de condensados não uniformes.

O fato fundamental dessa abordagem é a consideração de que os sólitons planares devem existir no hélio, em equilíbrio. E que, com eles, se poderia explicar em princípio, o espectro rotônico, o ponto λ e a superfluidez.

Nesse trabalho, a quantização foi feita a partir da extensão para o caso de sólitons tridimensionais, do esquema proposto por Dashen, Hasslacher e Neveu[37]. Essas aplicações aos casos tridimensionais foram discutidas por Friedberg, Lee e Sirlin[38] e também por I.Ventura e Marques[39].

Na referência em pauta[34], a regra de Bohr-Sommerfeld foi usada para quantizar as próprias quase-partículas. De saída, o espectro obtido para as excitações mostrou-se ainda mais rico que o da teoria de Bogoliubov.

Os estados ligados, obtidos com a quantização das flutuações em torno do campo de fundo clássico — o sóliton — foram tratados pelo método variacional. Sua semelhança com os rótons foi apontada, analisada e discutida. O espectro, como um todo, foi favoravelmente comparado com aquele que se obtém via espalhamento de nêutrons.

Também uma teoria dos dois fluidos semelhante àquela desenvolvida por Tisza[14], foi analisada considerando-se o fato de que a corrente de matéria deve mover-se em sentido oposto ao do sóliton.

A questão da transição λ e o papel que os sólitons poderiam desempenhar no seu surgimento foram abordados. Fazendo uso de uma analogia com sistemas ferromagnéticos, uma estimativa para a temperatura crítica, 2 K também foi obtida. Entre as previsões ali aventadas, está a da existência de um resquício do condensado mesmo um pouco acima da temperatura crítica.

A relação dos sólitons com o mecanismo da superfluidez também foi discutida.

Num trabalho posterior, Ventura e Vitielo[40] estudaram o espectro de

quase-partículas das configurações de muitos sólitons e suas respectivas funções de estrutura por meio do método de Monte Carlo, na aproximação de que as quase-partículas são puntiformes. Os resultados exibem o pico do róton e o pico dos fônons (nas energias mais altas), produzindo efeitos muito semelhantes aos que se observam no espalhamento de nêutrons[41]. Esse desdobramento em dois picos é produzido pelo movimento interno do condensado e por causa das variações locais de densidade.

Uma questão importante, que está por detrás de todos esses tratamentos, é a do favorecimento de uma fase de sólitons planares no fluido. É uma questão delicada porque esses sólitons funcionam como paredes de energia infinita. Contudo, uma indicação mais detalhada de como o sóliton poderia surgir no fluido, resultou de um estudo sobre a termodinâmica da teoria ϕ^4 relativística, com quebra espontânea de simetria[42−43]. Devido à natureza basilar desse trabalho, voltaremos a discuti-lo na seção **III** do capítulo I.

Prosseguindo na estratégia inaugurada na referência [34], neste trabalho desenvolvemos a mecânica estatística dos sólitons no hélio líquido.

Deve ter ficado claro ao leitor que a curva de Landau e o modelo de excitações fracamente interagentes são, hoje, parte de uma situação mais rica e mais complexa.

Exatamente por isso, a realização da mecânica estatística a partir dessa nova estratégia para abordar o líquido pode responder a questões muito importantes.

A teoria que aqui apresentamos é, rigorosamente, microscópica. Partimos da teoria de Bogoliubov e desenvolvemos a mecânica estatística do hélio, considerando um condensado cheio de sólitons e efetuando a conexão correta com o fluido normal. Um único parâmetro fenomenológico entra na teoria. É a velocidade do som, c, que é introduzida na equação $(I.16)$ do capítulo I. Essa velocidade,c, é necessária pois desconhecemos o valor da integral $\int V(\vec{r})\,d\vec{r}$, onde $V(\vec{r})$ é o potencial de interação entre dois átomos de hélio.

O propósito fundamental deste trabalho é determinar e explorar as configurações de sólitons planares que são favorecidas no equilíbrio, à tempe-

ratura finita.

Começamos por estudar o espectro de flutuações do campo do condensado. A equação das flutuações determina que o espectro apresente dois tipos de quase-partículas: os estados não ligados e os estados ligados nos sólitons planares.

O tratamento dos estados do contínuo é feito por intermédio de uma aproximação de campo médio. Disso resulta um fluido normal análogo ao do gás de Bose-Einstein[44], com um tratamento semelhante àquele dado por London[11]. Esse fluido normal também renormaliza o sóliton, fornecendo uma prescrição de cálculo para a densidade do condensado e a do próprio fluido normal.

As excitações ligadas são tratadas, num primeiro momento, de acordo com uma maneira diferente daquela empregada para os estados do contínuo.

Movendo-se no fluido, a temperatura finita, o sóliton representa uma rarefação local na densidade, nada impedindo que esse buraco do sóliton seja preenchido por quase-partículas excitadas termicamente. Eis então formada a nuvem térmica. Essa nuvem é constituída por aquelas quase-partículas, excitadas termicamente que, capturadas pelo sóliton, passam a mover-se com ele (presas a ele) ao longo de uma certa direção. A nuvem térmica acarreta mais uma renormalização no sóliton, que altera sua largura e sua velocidade.

A tendência mecânica da nuvem é a de encher completamente o buraco do sóliton. Essa tendência se manifesta também estatisticamente, mas agora é abrandada e o enchimento não é total. Em todo caso, o fator de enchimento está sempre próximo da unidade, revelando, como veremos, que o sistema é fortemente determinado por seus aspectos mecânicos.

Como cada quase-partícula interage com o sóliton e com a nuvem térmica, a partir dessa tendência de ocupação do buraco do sóliton fazemos uma importante hipótese: *a densidade da nuvem térmica é proporcional ao buraco do sóliton.*

Essa hipótese é confirmada, depois, auto-consistentemente.

Temos, então, duas dinâmicas: a do fluido normal e a da nuvem térmica. Essas duas dinâmicas devem ser compatibilizadas. Quando isso é feito,

acabamos por obter um espectro energético, no referencial de laboratório, que apresenta um *gap*: o *gap* das quase-partículas.

Com esse espectro pode-se implementar a mecânica estatística do sistema. A energia livre dos sólitons pode ser escrita como função do *gap*, Δ e da temperatura.

Ao minimizá-la encontramos as fases de equilíbrio do fluido. Encontramos também uma transição de fase conectada a uma região de saturação para o buraco do sóliton.

Num segundo momento, retomamos a dinâmica da nuvem térmica desde uma perspectiva melhor elaborada.

Depois de calculadas todas as propriedades do sistema, determinadas as fases de equilíbrio do fluido e suas mais importantes características, um primeiro quadro completo de seu comportamento foi montado. A partir de todas essas informações que obtivemos, foi possível construir uma lagrangiana efetiva para o sistema. Nessa lagrangiana entram dois campos clássicos. Esses dois campos são tais que suas dinâmicas reproduzem, fielmente, toda a intrincada relação sóliton/núvem térmica.

Dessa forma, a formulação lagrangiana que apresentamos como um aperfeiçoamento de nosso método de cálculo, na verdade é uma decorrência de todo o aprendizado resultante da descoberta da nuvem térmica e do seu tratamento a partir daquela hipótese fundamental, anteriormente referida.

A nuvem térmica passa a ser descrita por um campo clássico, ψ_c que vai envolver os estados ligados de cada sóliton, como um envelope. A hipótese feita anteriormente sobre a densidade da nuvem térmica é retomada. Mas agora, o campo clássico, ψ_c, é tal que o seu módulo quadrado é igual à densidade da nuvem térmica. É um segundo campo clássico que condensa.

Novamente o espectro energético é obtido no referencial de laboratório e a mecânica estatística é implementada. A energia livre é agora expressa como funcão do *gap*, Δ e da temperatura. Esse *gap* é apenas a energia cinética que cada excitação ligada possui, por mover-se com o sóliton.

A primeira abordagem foi a que usamos para aprender a fazer as contas! A segunda é a correta. Ambas dão conta de uma transição superfluido/fluido normal e apresentam quadros muito semelhantes de todas as fases do líquido.

O plano do trabalho é, basicamente, o seguinte. No capítulo **I** discutimos a aproximação de Bogoliubov, já particularizada para o potencial delta. Uma rápida revisão do método semi-clássico de quantização é apresentada na seção **II**, acompanhada de uma aplicação[34] à teoria de Bogoliubov. A seção **III** é dedicada aos sólitons e aos condensados não uniformes. Introduzimos o número de sólitons, $\underline{a}$, e revisamos brevemente, o mecanismo do favorecimento de uma fase solitônica em três dimensões, a partir da referência [42].

No capítulo **II**, discutimos as duas dinâmicas do fluido.

A seção **I** trata da dinâmica do contínuo (campo médio) e do fluido normal de Bose-Einstein. Na seção **II** introduzimos a nuvem térmica e a tratamos, primeiramente ao nível clássico e, em seguida, ao nível quântico. Ali mostramos a renormalização que ela implica para o sóliton. Na seção **III** discutimos as condicões de compatibilização entre as duas dinâmicas. Obtemos o espectro energético no referencial de laboratório.

O capítulo **III** é dedicado à mecânica estatística dos sólitons. Ali tratamos do condensado, dos sólitons, das nuvens térmicas e do fluido normal. Analisamos, igualmente, o surgimento da região de saturação.

Na seção **II** desse mesmo capítulo, apresentamos os resultados e uma discussão mais detalhada das fases de equilíbrio do fluido, nesta primeira abordagem.

No capítulo **IV** introduzimos o segundo campo.

Na seção **I** propomos uma formulação lagrangiana independente para discutir a relação sóliton/nuvem térmica. O fenômeno da condensação do novo campo está discutido na seção **II**.

No capítulo **V** retomamos a mecânica estatística do fluido a partir da introducão do segundo campo.

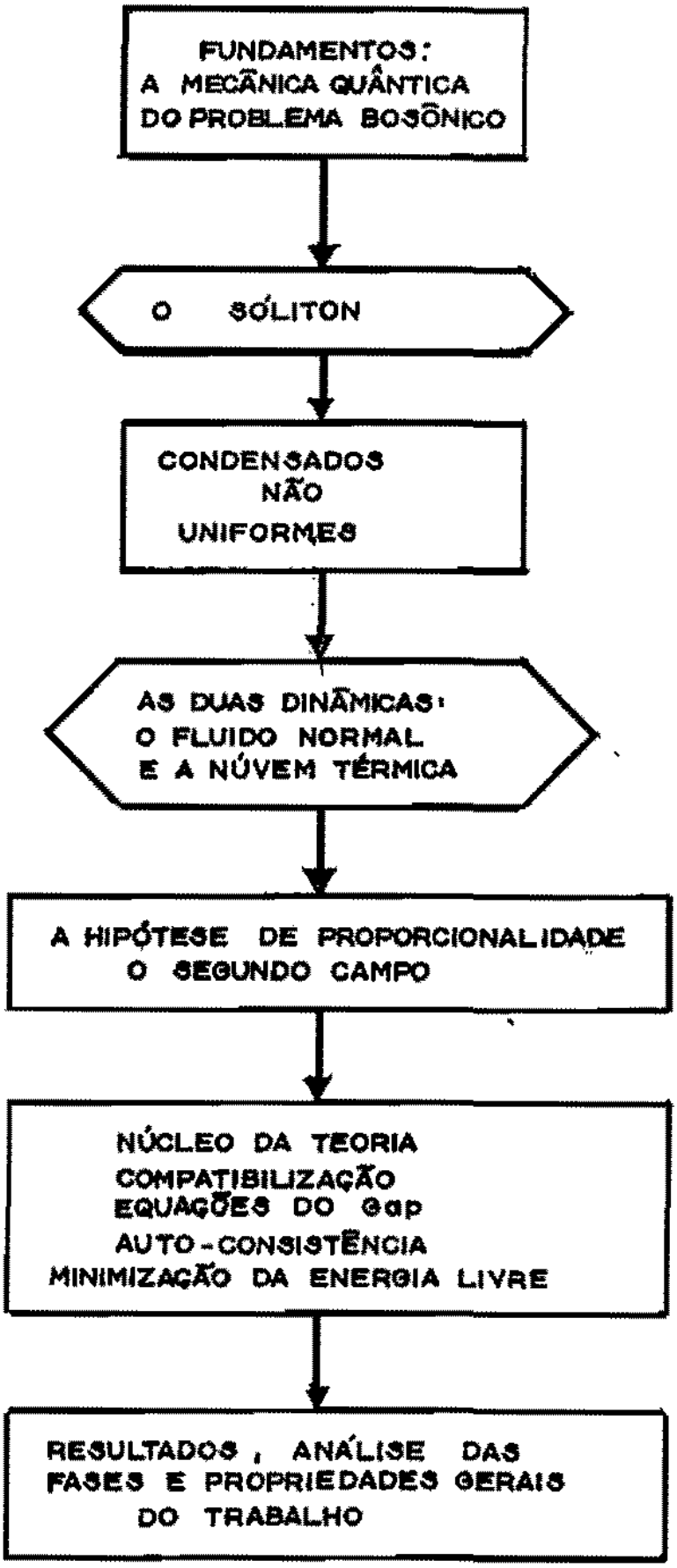
As fases do líquido são analisadas na seção **II**, de maneira semelhante ao que foi feito na seção **II** do capítulo **III**. Na seção **III** discutimos a questão da

relação sóliton/mecanismo de superfluidez. Ali introduzimos um índice de superfluidez e analisamos seus desdobramentos. O final da seção é dedicado a uma análise de todo o conjunto, para outros valores de densidade. Uma discussão com tabelas e gráficos é também apresentada. No capítulo **VI** procuramos tecer algumas considerações de caráter conclusivo, confrontando nossos resultados com muitas das propostas aqui referidas.

O Apêndice Numérico é apresentado com o objetivo de dar ao leitor — se interessado — a possibilidade de reproduzir todos os cálculos e obter os resultados que aqui exibimos.

Apresentamos, na próxima página, um quadro genérico da abordagem que desenvolveremos, com a finalidade de esclarecer a estrutura geral da teoria. Ali apresentamos em blocos, os principais desdobramentos do trabalho e a interdependência entre as suas diversas etapas. Cremos, com isso, facilitar o acesso a cada uma de suas partes.

Finalmente, lembramos ao leitor que os principais resultados deste trabalho podem ser encontrados na referência [45].


FUNDAMENTOS:
A MECÂNICA QUÂNTICA
DO PROBLEMA BOSÔNICO
O SÓLITON
CONDENSADOS
NÃO
UNIFORMES
AS DUAS DINÂMICAS:
O FLUIDO NORMAL
E A NÚVEM TÉRMICA
A HIPÓTESE DE PROPORCIONALIDADE
O SEGUNDO CAMPO
NÚCLEO DA TEORIA
COMPATIBILIZAÇÃO
EQUAÇÕES DO Gap
AUTO-CONSISTÊNCIA
MINIMIZAÇÃO DA ENERGIA LIVRE
RESULTADOS, ANÁLISE DAS
FASES E PROPRIEDADES GERAIS
DO TRABALHO

CAPÍTULO I

CONDENSADOS UNIFORMES E NÃO UNIFORMES

Discutimos aqui a aproximação empregada por Bogoliubov[22] para tratar do problema de um sistema de bósons em interação.

Desejamos explorar o espírito semi-clássico que permeia sua abordagem. Por isso desenvolvemos uma versão resumida e particularizada desse seu esquema de tratar N bósons interagentes, na presença de um potencial repulsivo.

Obtemos, primeiramente, pelo método canônico, a relação de dispersão das quase-partículas. Em seguida, aplicamos diretamente o esquema semi-clássico de quantização, para obter a mesma relação de dispersão. Agora, porém, através da quantização das flutuações harmônicas em torno da solução clássica que representa o condensado uniforme.

Finalmente, numa extensão da teoria de Bogoliubov, o método semi-clássico é empregado para tratar de condensados não uniformes.

I. A VERSÃO CANÔNICA DA TEORIA DE BOGOLIUBOV[22,46]

a)-Comentários acerca do potencial

O potencial de interação entre os átomos de hélio possui um caroço repulsivo infinito e uma cauda atrativa de Van der Walls, relativamente fraca, como mostramos na figura $I.1$.

Uma forma analítica para esse potencial foi obtida por Slater e Kirkwood[47] e é:

$$V(r) = \alpha\, \mathrm{e}^{-21.5\, r/\sigma} - \beta \left(\frac{\sigma}{r}\right)^6$$

onde $\alpha \simeq 5.7\text{x}10^6\ K$; $\sigma \simeq 4.6\ \mathring{A}$ e $\beta \simeq 1.1\ K$.

Aproximaremos esse potencial pela delta repulsiva

$$V(\vec{x} - \vec{x}') = \lambda\, \delta(\vec{x} - \vec{x}') \qquad (I.1)$$

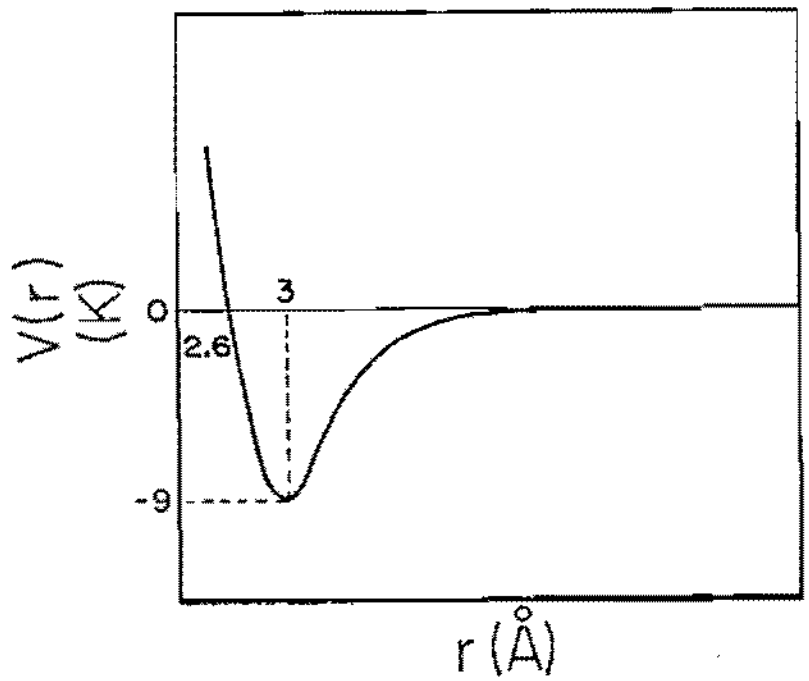


Figura I.1 - Potencial de interação entre dois átomos de He.

Obviamente, o efeito da cauda atrativa não é computado. Entretanto, o seu papel é o de aglutinar os átomos para que constituam o líquido[26]. Por outro lado, é possível introduzir o efeito dessa cauda atrativa por um potencial externo, negativo e constante, cujo efeito principal é o de acrescentar uma correção aditiva (constante) à energia do estado fundamental.

A forma escolhida para o potencial (eq. $(I.1)$), além de simplificar o tratamento, reproduz algumas das principais características de nosso sistema. E conduz, ao nível clássico, ao tratamento da teoria $\lambda|\phi|^4$.

Essa teoria clássica revela-se muito mais rica do que usualmente se supõe!

b)-A Aproximação de Bogoliubov

Comecemos com o problema de N bósons interagentes, num volume Ω, cuja hamiltoniana, na representação das coordenadas do formalismo de segunda quantização, é:

$$H = \frac{1}{2m}\int d\vec{x}^{\,3}\ \vec{\nabla}\Psi^\dagger(\vec{x})\cdot\vec{\nabla}\Psi(\vec{x}) + \frac{1}{2}\iint d\vec{x}^{\,3}d\vec{x}'^{3}\ \Psi^\dagger(\vec{x})\,\Psi^\dagger(\vec{x}')\,V(\vec{x}-\vec{x}')\,\Psi(\vec{x})\,\Psi(\vec{x}') \qquad (I.2)$$

Os operadores Ψ e $\Psi^\dagger$ obedecem à relação bosônica de comutação:

$$[\,\Psi(\vec{x}\,), \Psi^\dagger(\vec{x}\,')\,] = \delta(\vec{x} - \vec{x}\,')$$

As equações de movimento dos campos bosônicos podem ser obtidas via Equação de Heisenberg

$$\partial_t \Psi = i\,[\,H, \Psi\,]$$

e são:

$$\begin{aligned} i\,\partial_t \Psi &= -\frac{1}{2m}\,\vec{\nabla}^2 \Psi + \lambda\,\Psi^\dagger\,\Psi\,\Psi \\ -i\,\partial_t \Psi^\dagger &= -\frac{1}{2m}\,\vec{\nabla}^2 \Psi^\dagger + \lambda\,\Psi^\dagger\,\Psi^\dagger\,\Psi \end{aligned} \qquad (I.3)$$

pois a equação $(I.1)$ já foi utilizada.

A aproximação de Bogoliubov que desejamos exemplificar constitui-se numa reinterpretação do caráter operatorial dos campos que comparecem nas equações $(I.3)$. Introduz-se uma decomposição na estrutura desses objetos, a partir da substituição dos operadores $a_0^\dagger$ e a_0 (respectivamente, operadores de criação e aniquilação no modo zero) por números-c.

Reconsideremos, brevemente, o caso do gás ideal de Bose-Einstein. Nesse caso, todas as N partículas que o constituem estão condensadas no modo zero ($\vec{k} = 0$) em $T = 0\ K$.

Seja $\left|\Phi_0\right\rangle$ o estado fundamental de um tal sistema. O efeito da atuação dos operadores de criação e aniquilação de partículas no modo zero, sobre esse estado, é, respectivamente:

$$\begin{aligned} a_0^\dagger\ \left|\Phi_0(N)\right\rangle &= \sqrt{N+1}\ \left|\Phi_0(N+1)\right\rangle \\ a_0\ \left|\Phi_0(N)\right\rangle &= \sqrt{N}\ \left|\Phi_0(N-1)\right\rangle \end{aligned} \qquad (I.4)$$

É claro que, até aqui, estamos considerando a relação de comutação:

$$[\,a_0, a_0^\dagger\,] = 1 \qquad (I.5)$$

No entanto, como N é um número muito grande, é razoável esperar que um tal sistema não tenha alteradas suas propriedades físicas na presença

ou na ausência de uma única partícula. Assim sendo, promovemos a aproximação de substituir os operadores a_0 e $a_0^\dagger$ por números

$$a_0 = a_0^\dagger \cong \sqrt{N_0} \tag{I.6}$$

Quando ligamos a interação, esse quadro sofre uma ligeira mudança. Mesmo no zero absoluto de temperatura, haverá um número, pequeno, de estados excitados. Essas excitações, ou quase-partículas, não são estados de uma partícula, mas excitações do sistema como um todo. Dizemos, portanto, que a interação produz um efeito depletivo no condensado. Para substituir os operadores a_0 e $a_0^\dagger$ por números-c é crucial que a ocupação do modo zero seja feita por um número grande de partículas, ou que a depleção do condensado seja pequena.

Enfim, a aproximação sugerida de trocar os operadores a_0 e $a_0^\dagger$ por números ($a_0 \cong \sqrt{N_0}$) será tanto melhor quanto menor a depleção do condensado. Veremos, mais adiante, que esse é um dos requisitos essenciais para a validade geral da teoria desenvolvida por Bogoliubov.

A relação de comutação ($I.5$) pressupõe a decomposição de Fourier do campo Ψ, na forma

$$\Psi(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_k a_k \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tag{I.7}$$

De acordo com as aproximações anteriormente sugeridas, a expressão ($I.7$) será reescrita como a contribuição, separada, de dois termos. A saber,

$$\Psi(\vec{x}) = \phi + \xi \tag{I.8}$$

onde ϕ é a parte da solução correspondente ao condensado e ξ é a correção quântica e dá conta das excitações do sistema ou das quase-partículas. Substituir a expressão ($I.8$) nas equações de movimento ($I.3$) implica em linearizá-las, se mantivermos termos até a primeira ordem em ξ. Mas implica, também, em levar em conta apenas os seguintes tipos de interação:

(i) interação entre as partículas do condensado somente, representado pelo campo ϕ;

(ii) interação entre uma partícula fora do condensado, com o condensado, refletida pela linearidade em ξ das equações de movimento.

Promovendo a substituição ventilada (($I.8$) em ($I.3$)), teremos:

$$\begin{aligned} i\,\partial_t \xi^\dagger &= \frac{1}{2m}\,\vec{\nabla}^2 \xi^\dagger - 2\,\lambda\,\phi^*\phi\,\xi^\dagger - \lambda\,\phi^{*2}\xi \\ -i\,\partial_t \xi &= \frac{1}{2m}\,\vec{\nabla}^2 \xi - 2\,\lambda\,\phi^*\phi\,\xi - \lambda\,\phi^2\xi^\dagger \end{aligned} \tag{I.9}$$

Como desejamos descrever o hélio líquido, podemos, por conveniência, modificar a hamiltoniana original (eq. ($I.2$)) de modo tal que acabemos por descrever estados cuja menor configuração energética ocorra para $\phi = \sqrt{\rho}$. Na hamiltonina ($I.2$) fazemos a substituição:

$$H \longrightarrow H - \int d\vec{x}^{\,3}\,\Psi^\dagger(\vec{x})\,V_{ext}\,\Psi(\vec{x})\,, \tag{I.10}$$

isto é, introduzimos um potencial químico, $V_{ext} = \lambda\,\rho$. Com isto mudamos o nível zero da energia (e também simulamos o efeito da cauda atrativa!) e podemos reescrever as equações de movimento ($I.9$) na forma:

$$\begin{aligned} i\,\partial_t \xi^\dagger &= \frac{1}{2m}\,\vec{\nabla}^2 \xi^\dagger - \lambda\,\rho(\xi^\dagger + \xi) \\ -i\,\partial_t \xi &= \frac{1}{2m}\,\vec{\nabla}^2 \xi - \lambda\,\rho(\xi + \xi^\dagger) \end{aligned} \tag{I.11}$$

Nas equações acima nós já identificamos o módulo quadrado do campo ϕ com a densidade do condensado (uniforme): $|\phi|^2 = \rho$. Procuraremos soluções para as duas equações anteriores, na forma:

$$\begin{aligned} \xi^\dagger &= \sum_k \left[\, u_k(\vec{r}\,)\,A_k^\dagger\,\mathrm{e}^{iwt} + v_k(\vec{r}\,)\,A_k\,\mathrm{e}^{-iwt}\right] \\ \xi &= \sum_k \left[\, u_k^*(\vec{r}\,)\,A_k\,\mathrm{e}^{-iwt} + v_k^*(\vec{r}\,)\,A_k^\dagger\,\mathrm{e}^{iwt}\right] \end{aligned} \tag{I.12}$$

Só que os operadores que comparecem em ($I.12$) não são mais os operadores de criação e aniquilação de partículas, originalmente introduzidos, mas representam uma combinação linear deles. São, na verdade, criadores e aniquiladores de quase-partículas que preservam o caráter bosônico original.

De fato, se $u^2 - v^2 = 1$ e escrevermos:

$$\begin{aligned} A_k &= u\, a_k - v\, \underline{a}_k^\dagger \\ A_k^\dagger &= u\, a_k^\dagger - v\, \underline{a}_k \end{aligned} \tag{I.13}$$

ficará patente a natureza bosônica das excitações do sistema. A transformação definida em $(I.13)$ é a conhecidíssima tranformação de Bogoliubov.

Levando $(I.12)$ em $(I.11)$, teremos:

$$\begin{aligned} -\omega\, u(\vec{r}\,) &= \frac{1}{2m}\, \vec{\nabla}^2 u(\vec{r}\,) - \lambda\, \rho\, \big(u(\vec{r}\,) + v^*(\vec{r}\,)\big) \\ \omega\, v^*(\vec{r}\,) &= \frac{1}{2m}\, \vec{\nabla}^2 v(\vec{r}\,) - \lambda\, \rho\, \big(v^*(\vec{r}\,) + u(\vec{r}\,)\big) \end{aligned} \tag{I.14}$$

Se introduzirmos:

$$\begin{aligned} u(\vec{r}\,) &= u\, \mathrm{e}^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \\ v^*(\vec{r}\,) &= v\, \mathrm{e}^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \end{aligned}$$

e usarmos o fato de que $u^2 - v^2 = 1$, veremos que o conjunto $(I.14)$ só será satisfeito se:

$$w(k) = \sqrt{\frac{k^4}{4\, m^2} + \lambda\, \rho\, \frac{k^2}{m}} \tag{I.15}$$

É este, exatamente, o espectro das excitações que decorre da teoria de Bogoliubov quando o potencial é da forma $(I.1)$. Quando k é muito pequeno as excitações, de longos comprimentos de onda, possuem a energia

$$w(k) \cong \sqrt{\frac{\lambda\, \rho}{m}}\, k = c\, k \tag{I.16}$$

sendo c a velocidade do som no zero absoluto. Essas excitações são fônons e este é um resultado que concorda com os resultados experimentais conhecidos para o líquido, no limite de temperaturas muito baixas. Assim, a teoria de Bogoliubov é também o primeiro exemplo de como, partindo-se dos fundamentos da Mecânica Quântica, aparecem as quase-partículas.

No outro extremo, para grandes valores do momento,

$$w(k) \cong \frac{k^2}{2m} + \lambda\, \rho\ , \tag{I.17}$$

o espectro ganha a forma de um espectro de partícula independente.

Se não tivéssemos particularizado esses desenvolvimentos para o potencial $(I.1)$, o espectro $(I.15)$ deveria ter a forma mais genérica:

$$w(k) = \sqrt{\frac{k^4}{4\,m^2} + \nu(k)\,\rho\,k^2} \qquad (I.18)$$

onde $\nu(k)$ é a tranformada de Fourier do potencial $V(r)$, que dá a interação entre dois átomos.

Os resultados que apresentamos são conhecidos há muito tempo. Constituem, como já sugerimos, os primeiros resultados microscópicos para o hélio superfluido. É bom lembrar, todavia, que de uma maneira bastante geral, as aproximações feitas dependem de que:

(a) Exista a tranformada $\nu(k)$ do potencial;

(b) $\nu(0) > 0$, para garantir a estabilidade termodinâmica do sistema;

(c) A quantidade, $N - N_0$, que mede a depleção do estado fundamental, seja pequena.

A condição (b) decorre do fato de que a pressão, no zero absoluto, é uma função da densidade ρ e de $\nu(0)$. Ao impormos que $\nu(0) > 0$, estamos garantindo que

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} > 0$$

que é, precisamente, a condição de estabilidade termodinâmica em baila. Supomos que a condição (c), por outro lado, está assegurada devido à natureza fraca do potencial.

II. A VERSÃO SEMI-CLÁSSICA DA TEORIA DE BOGOLIUBOV[34]

O trabalho de Bogoliubov é um aperfeiçoamento do método de Hartree--Fock[48]. É também um pioneiro na área dos métodos semi-clássicos. Os desenvolvimentos efetuados até aqui e que culminaram na obtenção da relação de dispersão $(I.15)$ são muito semelhantes aos procedimentos básicos do método semi-clássico.

São tão semelhantes que pode parecer ocioso repetir o mesmo itinerário nessa versão. Contudo, essa semelhança tornou-se transparente depois que

I. Ventura[34], usando o método semi-clássico, a estabeleceu. Assim e também por razões pedagógicas, reproduziremos a versão semi-clássica da teoria de Bogoliubov, a fim de ilustrar *inter alia*, a aplicabilidade de um método que empregaremos amplamente neste trabalho.

A literatura sobre os métodos semi-clássicos é muito vasta. Uma referência básica e relativamente recente é o conhecido livro de R.Rajaraman[49], cuja abundância de citações propicia um roteiro bastante rico para a compreensão dos métodos. Aqui seguiremos mais de perto os trabalhos de Dashen e outros[37]. A referência [50] é particularmente recomendada.

Para implementar o esquema semi-clássico de quantização de uma teoria de campos clássica, descrita por uma lagrangiana $L[\phi]$ é necessário que conheçamos uma solução clássica, ϕ_c, da equação de movimento do campo ϕ. Quando a teoria é não-trivial (como será o caso) a equação para o campo é uma equação não-linear. O conhecimento dessa solução, juntamente com a primeiras correções quânticas, fazem desse esquema semi-clássico um método não perturbativo. As correções quânticas são introduzidas através da quantização de flutuações harmônicas, η, em torno dessa solução clássica.

Operacionalmente, definimos o campo $\phi = \phi_c + \eta$ e expandimos a lagrangiana em torno da solução ϕ_c até termos de segunda ordem nas flutuações. Efetivamente, o resultado obtido é uma nova lagrangiana constituída por uma parte dependente de ϕ_c, exclusivamente, e de um outro termo que é bilinear nas flutuações, na forma:

$$L[\phi] \longrightarrow L[\phi_c] + L[\eta]$$

A equação de movimento para as flutuações é obtida a partir da aplicação das equações de Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \eta)} = \frac{\partial L}{\partial \eta} \qquad (I.19)$$

Evidentemente, a mesma equação para as flutuações pode ser obtida se substituirmos, diretamente, $\phi = \phi_c + \eta$ na equação de movimento do campo clássico, retendo apenas os termos lineares em η. Em seguida, devemos

encontrar a forma da flutuação η que é solução da equação $(I.19)$ e quantizá-la. Esse passo implica em resolver o problema de Schrödinger associado às flutuações. Isso nem sempre é facil!

O processo de quantização que utilizaremos ao longo deste trabalho é uma extensão, para a Teoria de Campos, da Regra de Quantização de Bohr-Sommerfeld, RQBS[77]. Em verdade, nós podemos quantizar as quase-partículas tanto no esquema de Bogoliubov como no esquema de Bohr-Sommerfeld, que é igualmente fácil e simples. No capítulo II, em vista das aproximações (justificadas) que faremos, desprezando termos com oscilações de fase, a quantização das flutuações será quase que imediata.

Esboçados os passos fundamentais do esquema semi-clássico, aplicaremos essas idéias à Teoria de Bogoliubov discutida anteriormente. A versão clássica da hamiltonina é:

$$H = \int d\vec{x}^{\,3} \Big\{ -\frac{1}{2m}\, \phi^* \vec{\nabla}^2 \phi - \lambda\, \rho\, \phi^* \phi + \frac{1}{2}\, \lambda\, (\phi^* \phi)^2 \Big\} \qquad (I.20)$$

onde ϕ é agora o campo bosônico clássico. Se as flutuações desse campo forem quantizadas em torno do estado de densidade zero, os *quanta* do campo em questão serão os átomos de hélio.

Certamente, a partir de $(I.20)$, obtemos a lagrangiana da teoria, que é:

$$L = \int d\vec{x}^{\,3} \Big\{ \frac{i}{2} \Big(\phi^* \partial_t \phi - \phi\, \partial_t \phi^* \Big) \Big\} - H \qquad (I.21)$$

A equação de movimento do campo ϕ será, portanto,

$$i\, \partial_t \phi = -\frac{1}{2m}\, \vec{\nabla}^2 \phi - \lambda\, \rho\, \phi + \lambda\, \phi^* \phi^2 \qquad (I.22)$$

que é a conhecida equação de Gross-Pitaevskii[36].

A solução clássica, que corresponde ao condensado uniforme da teoria de Bogoliubov — sendo, então, o vácuo clássico da hamiltoniana, é:

$$\phi_u = \sqrt{\rho}\, e^{i\theta} \qquad (I.23)$$

A solução $(I.23)$ põe de manifesto a degenerescência contínua do vácuo clássico, uma vez que θ é um número real qualquer no intervalo $(0, 2\pi)$.

Essa degenerescência contínua permite que o sistema possa exibir soluções não triviais mais complexas que $(I.23)$. Permite, assim, que investiguemos soluções não triviais para condensados não uniformes.

O espectro de Bogoliubov, na região dos pequenos momentos, é caracterizado por fônons. Como esses fônons são pequenas excitações do condensado, o método semi-clássico é naturalmente implementado se, ao invés de ϕ, na equação $(I.22)$, pusermos $\phi_u + \eta$, ou seja:

$$\phi = e^{i\theta}(\phi_c + \eta) \tag{I.24}$$

Lembramos que η representa uma pequena flutuação que deve ser ortogonal à função de onda do condensado, a saber:

$$\int d\vec{x}^{\,3}\, \phi_c\, \eta = 0 \tag{I.25}$$

De um modo geral, estaremos interessados em termos do seguinte tipo:

$$\phi^*\phi = \phi_c^*\phi_c + \eta^*\eta + \phi_c^*\eta + \phi_c\eta^* \tag{I.26}$$

$$\begin{aligned}(\phi^*\phi)^2 = (\phi_c^*\phi_c)^2 + 2\,(\phi_c^{*2}\phi_c\,\eta + \phi_c^2\,\phi_c^*\,\eta^*) + 4\,\eta\,\eta^*\phi_c^*\phi_c \\ + \eta^{*2}\phi_c^2 + \eta^2\,\phi_c^{*2} + O(\eta^3)\end{aligned} \tag{I.27}$$

Quando substituímos $(I.26)$ e $(I.27)$ na equação $(I.21)$, usando a condição $(I.25)$, ficamos com:

$$L[\phi] = L[\phi_c] + L_{bilinear}[\eta] + L[\phi_c, \eta] \tag{I.28}$$

onde

$$\begin{aligned}L[\phi_c] = \frac{i}{2}\int d\vec{x}^{\,3}\Big[\,\phi_c^*\,\partial_t\phi_c - (\partial_t\phi_c^*)\,\phi_c \\ + \phi_c^*\left(\frac{1}{2m}\,\vec{\nabla}^2 + \lambda\,\rho\right)\phi_c - \frac{\lambda}{2}\,\phi_c^*\,\phi_c^2\Big]\end{aligned} \tag{I.29}$$

$$\begin{aligned}L_{bilinear}[\eta] = \int d\vec{x}^{\,3}\Big[\eta^*\left(i\,\partial_t + \frac{1}{2m}\,\vec{\nabla}^2 + \lambda\,\rho\right)\eta \\ - 2\,\lambda\,\phi_c^*\phi_c\,\eta^*\eta - \frac{\lambda}{2}\left(\phi_c^{*2}\eta^2 + \phi_c^2\,\eta^{*2}\right)\Big]\end{aligned} \tag{I.30}$$

$$\begin{aligned}L[\phi_c, \eta] = \int d\vec{x}^{\,3}\Big\{\eta^*\left(i\,\partial_t\phi_c + \frac{1}{2m}\,\vec{\nabla}^2\phi_c + \lambda\,\rho\,\phi_c\right) \\ - \lambda\,\phi_c^2\,\phi_c^*\,\eta^* \quad + \text{conjugado hermitiano}\end{aligned} \tag{I.31}$$

A aplicação das equações ($I.19$) à lagrangiana ($I.28$) conduz à equação de movimento do campo η, ainda clássico (note que, nesse caso, o termo linear em η, correspondente à expressão ($I.31$) é nulo, pois ϕ_c satisfaz à equação de movimento ($I.22$):

$$i\,\partial_t\eta = -\frac{1}{2m}\,\vec{\nabla}^2\eta - \lambda\,(\rho - 2\,\phi_c^*\phi_c)\,\eta + \lambda\,\phi_c^2\,\eta^* \qquad (I.32)$$

Notemos que a solução $\phi_c = \sqrt{\rho}$ ainda não foi explicitamente utilizada, de modo que a equação ($I.32$) é a forma geral para uma flutuação em torno de uma solução clássica, ϕ_c, qualquer.

Em particular, se $\phi_c = \sqrt{\rho}$ (condensado uniforme) teremos:

$$i\,\partial_t\eta = -\frac{1}{2m}\,\vec{\nabla}^2\eta + \lambda\,\rho\,(\eta^* + \eta) \qquad (I.33)$$

que é formalmente idêntica à segunda das equações em ($I.11$). Portanto, a flutuação η deve ter a forma:

$$\eta = \frac{\text{cte}}{\sqrt{\Omega}}\left\{u\;\mathrm{e}^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-wt)} + v\;\mathrm{e}^{i(-\vec{k}\cdot\vec{x}+wt)}\right\} \qquad (I.34)$$

donde decorre que:

$$w = \sqrt{\frac{\lambda\,\rho}{m}}\,k\left\{1 + \frac{k^2}{4m\lambda\rho}\right\}^{1/2} \qquad (I.35)$$

Para que o campo η_k venha a descrever o estado de uma única quase-partículas (n=1), empregamos a RQBS para a flutuação η_k, na forma:

$$i\int_0^{2\pi/w} dt\int d\vec{x}^{\,3}\,\eta^*\partial_t\eta = 2\pi \qquad (I.36)$$

e acabamos por obter:

$$E(\vec{k}) = w(\vec{k})\,; \qquad \vec{p}(\vec{k}) = \vec{k} \qquad (I.37)$$

Com isto se completa o processo semi-clássico de quantização da teoria e obtém-se, obviamente, os mesmos resultados do método canônico (seção

I). Vale lembrar que a definição da velocidade do som, c, no zero absoluto como (ver eq. $(I.16)$)

$$c = \sqrt{\frac{\lambda\,\rho}{m}} \tag{I.38}$$

é uma maneira de eliminar λ das equações em favor de um parâmetro fenomenológico que entra na teoria.

Na vasta literatura experimental que envolve o hélio líquido, essa grandeza, juntamente com a densidade, foi medida amplamente e podemos usar os seus valores com grande segurança. Em geral, na seqüência do trabalho utilizaremos os seguintes valores numéricos aproximados:

$$\begin{aligned} \lambda\,\rho &\cong m\,c^2 \cong 29.7\ K \\ (m\lambda/\rho)^{3/2} &= (mc)^3/\rho \cong 186 \end{aligned} \tag{I.39}$$

E depois introduziremos variações percentuais consistentes com valores experimentais para verificar a legitimidade dessas aproximações e estudar a dependência do *gap*, Δ com a densidade (cf. cap. **V**, sec. **III**-b).

III. CONDENSADOS NÃO UNIFORMES

Conforme mencionamos na seção anterior, a degenerescência contínua do vácuo clássico da hamiltoniana $(I.10)$ permite que a equação de movimento $(I.22)$ exiba soluções diferentes e mais complexas que $(I.23)$. De fato, se ϕ_c for definida como:

$$\phi_c(\vec{x}, t) = \sqrt{\rho}\,\{V - i\gamma\,\mathrm{tgh}\,\gamma mc(x - cVt)\} \tag{I.40}$$

com V sendo um número real compreendido no intervalo $(-1, 1)$ e γ tal que:

$$V = \sqrt{1 - \gamma^2} \tag{I.41}$$

então, a expressão $(I.40)$ representa uma solução da equação de movimento $(I.22)$.

Esta solução é um sóliton planar que deforma o condensado, caminhando sobre ele como uma onda subsônica de densidade, ao longo da direção

da coordenada x. Para certificar-se que trata-se de uma onda de densidade como a descrita, notamos que:

$$\phi_c^* \phi_c = \rho \left[1 - \frac{\gamma^2}{\cosh^2 \gamma mc(x - cVt)} \right] \qquad (I.42)$$

e que o seu valor tende à densidade do condensado uniforme, quando $|x| \to \infty$.

Como este sóliton é a peça chave para o desenvolvimento desta teoria de muitos corpos para o hélio líquido, é conveniente que demoremo-nos um pouco mais sobre ele.

Em primeiro lugar, notamos que esse sóliton funciona como uma parede de Bloch (parede de domínio) que divide o condensado em domínios de fases distintos, pois:

$$\lim_{|x| \to \infty} \phi_c(\vec{x}, t) = \sqrt{\rho}\, e^{\pm i\delta} \qquad (I.43)$$

onde

$$\delta = \text{arc} \begin{cases} \text{sen}\, \gamma \\ \cos V \end{cases} \qquad (I.44)$$

isto é, a grandes distâncias do centro desse objeto, o sóliton tende a domínios de fase diferentes, com uma defasagem de 2δ. Esta defasagem é uma carga topológica que é conservada, garantindo sua estabilidade. Em outros termos, a conservação da carga topológica proíbe que o sóliton ($I.40$) decaia na solução ($I.23$), ou seja, garante que o estado na sua presença não seja equivalente ao estado fundamental representado por ($I.23$). Daí porque o sóliton ($I.40$) não é, ele mesmo, uma excitação do condensado.

Essa defasagem característica do sóliton está também relacionada ao deslizamento de fase no escoamento superfluido, proposta por Anderson[32] (cf. cap. V, sec. III-a).

Como a onda ϕ_c carrega momento longitudinal, por unidade de área ($\mathcal{A}$ é a área total do sóliton):

$$\vec{p} = -\frac{i}{\mathcal{A}} \int d\vec{x}^{\,3}\, \phi_c^* \, \vec{\nabla} \phi_c = -2\rho V \sqrt{1 - V^2} \qquad (I.45)$$

vemos que o escoamento de matéria dá-se em sentido oposto ao movimento do sóliton. Note-se, a título de ilustração, que em fenômenos como o *efeito*

fonte, típicos do hélio superfluido, a componente normal do líquido segue em direção oposta à componente superfluida[51].

A energia clássica do sóliton, por unidade de área, é dada substituindo-se a solução $(I.40)$ na expressão $(I.20)$ e é:

$$\sigma(\gamma) = \frac{4}{3} c\rho\gamma^3 \tag{I.46}$$

correspondendo à tensão superficial clássica do líquido.

Finalmente, voltando à expressão $(I.42)$ vemos que é possível reescrevê-la na forma:

$$\phi_c^* \phi_c = \rho - Z(\vec{x}, t) \tag{I.47}$$

onde

$$Z(\vec{x}, t) = \frac{\rho\gamma^2}{\cosh^2 \gamma mc(x - cVt)} \tag{I.48}$$

é o que denominaremos de buraco do sóliton e representa um vazio local de matéria acarretado pela presença do sóliton. A figura $(I.2)$ ilustra a razão porque o termo *buraco* é o adequado.

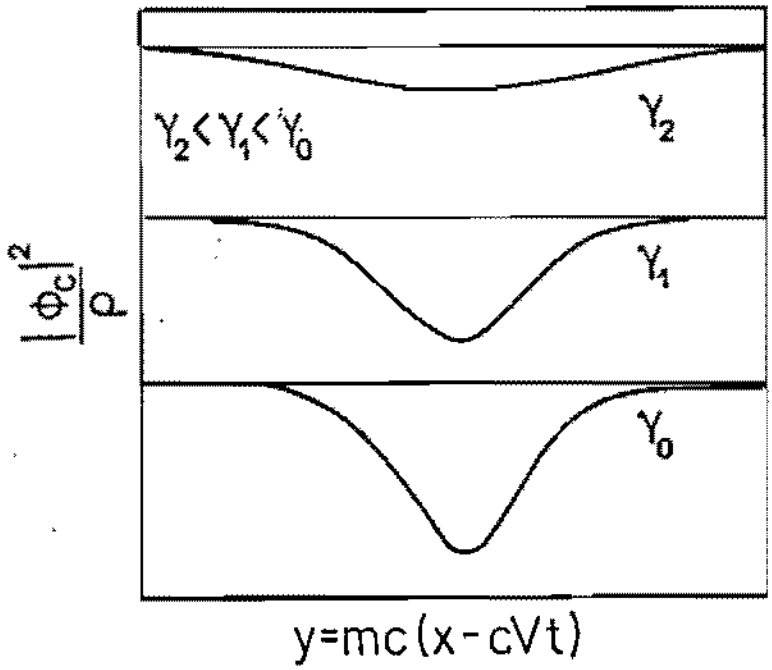


Figura 1.2 - O buraco do sóliton.

As paredes no sistema podem ocorrer mesmo sem a introdução de efeitos térmicos, isto é, no zero absoluto de temperatura essas paredes podem estar presentes no vácuo da hamiltoniana ($I.20$), induzidas por flutuações de ponto zero. Isso porque a expressão ($I.46$) mostra que os sólitons têm energia positiva e somente efeitos quânticos poderiam explicar a existência de um vácuo recheado de paredes.

O que se verifica, depois, à temperatura finita, é que essas paredes, de energia infinita têm, na verdade, um relevante papel termodinâmico e acabam por introduzir mudanças na entropia do sistema (veja discussão no final da seção). De fato, há um favorecimento claro de fases solitônicas à temperatura finita, como mostraremos na seqüência, de modo que o sistema preferirá ter sólitons a não tê-los.

Associado a esse favorecimento está o problema de contar o número desses objetos. Estamos considerando a existência de paredes independentes no sistema, isto é, ignorando a interação entre elas; em particular, não levando em conta a energia armazenada na interseção de duas paredes. A uma dada temperatura, portanto, o sistema deve exibir um certo tipo de sóliton caracterizados, todos eles, por um único parâmetro γ (cf. eq. ($I.41$)) e por um número $\underline{a}$, pequeno, desses objetos.

Se o número deles for muito grande, as aproximações que fazemos precisariam ser revistas e a abordagem tornar-se-ia um pouco mais difícil.

Portanto, dois fatores devem ser imediatamente registrados, quando desejamos caracterizar uma configuração do sistema, numa dada temperatura T:

(i) A configuração é determinada conhecendo-se o par de números $\underline{a}$ e γ que a caracterizam e que devem ser diferentes para diferentes temperaturas;

(ii) o número de paredes, por unidade de comprimento, $\underline{a}$, deve ser muito pequeno;

Introduzimos, então, a seguinte definição: *sendo $\mathcal{A}$ a área transversa total dos sólitons presentes numa dada configuração e sendo Ω o volume do sistema, então*

$$\underline{a} = \frac{\mathcal{A}}{\Omega} \qquad (I.49)$$

será o numero de sólitons por unidade de comprimento. Será, também, função da temperatura pois mesmo que os sólitons se movimentem, a área total deles se manterá constante, numa temperatura fixa.

Podemos entender melhor o significado desse número, considerando um domínio típico numa configuração de três sólitons paralelos aos eixos coordenados, ou seja, num cubo de aresta d. Como o número total de sólitons no domínio é 3, $\underline{a}\, d = 3$, e $\underline{a} = 3/d$. Para garantir que os sólitons estejam suficientemente espaçados, consideremos o comportamento do termo $\operatorname{tgh} \gamma mcx$ (cf. eq. $(I.40)$) para valores muito grandes de x, onde supomos haver um outro sóliton:

$$\operatorname{tgh} \gamma mcx \cong 1 - \mathrm{e}^{-2\gamma mcx}$$

Nesse domínio cúbico, a distância média entre dois sólitons vizinhos é da ordem de $1/\underline{a}$. Portanto, basta exigir que

$$\mathrm{e}^{-2\gamma mc/\underline{a}} << 1 \qquad (I.50)$$

para assegurar a validade da aproximação que fazemos.

Podemos adiantar que nossos resultados indicam que o valor de $\underline{a}$, para qualquer temperatura, é sempre muito pequeno, satisfazendo, muitíssimo bem, a exigência expressa em $(I.50)$ (cf. cap. III).

Lembramos que o sóliton $(I.40)$ e a equação $(I.22)$ já foram estudados em outros contextos. Tsuzuki[52], analisando as soluções não lineares e periódicas da equação $(I.22)$ investigou a conexão entre essas soluções e a relação de dispersão da teoria de Bogoliubov, em limites apropriados. Sugeriu, também, que ondas não lineares poderiam existir estavelmente onde os efeitos dissipativos fossem pequenos, como nos sistemas a baixas temperaturas.

Por sua vez, a equação $(I.22)$ foi abordada por Zakharov[53] ao estudar a evolução de um envelope complexo de uma onda monocromática num meio não linear. E foi resolvida, exatamente, em uma dimensão, por Zakharov e Shabat[54] pelo método do espalhamento inverso. A solução quântica do problema foi encontrada por Kulish e outros[55]. Hasegawa e Tappert[56] usaram o mesmo sóliton, na física aplicada, para tratar da transmissão de pulsos óticos em meios não lineares dispersivos. Mais recentemente, Makhankov

e outros[57] estudaram esse campo clássico em teorias unidimensionais. Como já mencionamos, I. Ventura e colaboradores[34–35,40], nos últimos anos, vêm estudando o seu papel no contexto da teoria do hélio líquido.

Antes de encerrar o capítulo, voltemos a uma questão da maior importância para o tratamento do hélio líquido, com esta abordagem centrada no sóliton ($I.40$).

Do que dissemos até aqui poderia parecer que o favorecimento, no fluido, de uma fase solitônica em três dimensões, seria uma simples extensão do caso unidimensional. Mas a situação é, no entanto, bastante distinta e bem mais complexa.

Para trabalharmos em três dimensões, promovemos uma imersão do espaço unidimensional no espaço tridimensional. Neste caso, como vimos, teremos sólitons planares caracterizados por uma única variável espacial, como é o caso da solução ($I.40$). Esses sólitons planares (paredes) têm energia infinita, que diverge com a área transversa (cf. eq. ($I.46$)). Isso, em princípio, inviabilizaria o seu surgimento espontâneo no fluido, devido ao elevadíssimo custo energético dessas paredes. Essa situação não ocorre em uma dimensão, onde o sóliton, de energia finita, pode ocorrer, termodinamicamente, a qualquer temperatura[58].

Contudo, I. Ventura[42] mostrou que a presença de sólitons macroscópicos provocam tal modificação no espectro das flutuações que as variações daídecorrentes, na entropia, podem favorecer o surgimento espontâneo dessas paredes. O tratamento original foi levado a cabo para o bóson escalar da teoria ϕ^4 relativística em três dimensões. Nesse trabalho a nuvem térmica (que introduziremos no próximo capítulo) não havia sido descoberta. A nuvem térmica e o segundo campo condensado (veja cap. **IV**) são essenciais para o trabalho que ora apresentamos. Assim, comparados com os resultados que agora temos, os resultados da referência [42] são ainda muito pobres. Mas ali se concluiu que a fase de sólitons poderia existir exatamente por causa da entropia.

Um balanço detalhado revelou que sempre que a desigualdade

$$F_{sol} + F^1_{exc} < F_{vac} + F^0_{exc}$$

for válida, o sistema preferirá ter sólitons a não tê-los. Na expressão acima

o lado esquerdo é a energia livre do sistema na presença de sólitons e o lado direito é a quantidade equivalente na ausência deles.

Por outro lado, o favorecimento espontâneo desses objetos não é ilimitado. De fato, ainda no contexto da teoria ϕ^4, na referência em questão se mostra que o número desses objetos é controlado por sua própria interação. Desse modo, enquanto as flutuações quânticas induzem ao favorecimento e à produção de sólitons, sua interação proíbe a existência de um número catastrófico deles.

Essa análise minuciosa da teoria ϕ^4 serviu de suporte para a conjectura de que também o hélio líquido, se descrito pela hamiltoniana (I.20), apresentará um vácuo recheado de sólitons do tipo (I.40). Para reforçar essa idéia, lembramos que ondas quânticas macroscópicas (das quais o sóliton (I.40) é um exemplo), aparecem numa ampla classe de teorias não locais e de teorias não relativisticas do tipo $\lambda|\phi|^n$, com $n > 2$ [35]. Daí porque a sua existência no problema real do hélio líquido seja um fato bastante provável. A plausibilidade dessa conjectura, aliás, foi amplamente demonstrada em referências já citadas[34–35,40].

No caso da parede (I.40) há ainda um detalhe a mais que é importante. A dependência no parâmetro γ faz dela uma família contínua de ondas quânticas macroscópicas. Isso explica o porquê de termos enfatizado, anteriormente, que uma dada configuração será caracterizada, a cada temperatura, pelos números $(\underline{a},\gamma)$. Agora a energia livre do sistema, na presença de paredes, dependerá explicitamente desses parâmetros.

Assim, a realização da mecânica estatística das paredes, para o caso do hélio líquido, a que nos propusemos, permitirá, entre outras coisas, um mecanismo completo de controle sobre o número e o tipo de parede favorecida a uma dada temperatura. Tudo isso, é claro, além do fato mais importante que é o balanço termodinâmico desse favorecimento.

CAPÍTULO II

AS DUAS DINÂMICAS

Precisamos conhecer as energias das excitações que povoam o sistema a temperatura finita, no referencial de laboratório, para desenvolver a mecânica estatística dos sólitons no hélio líquido.

Estamos tratando de um condensado não uniforme representado pelo campo clássico ϕ_c. Empregando o método semi-clássico, devemos investigar as flutuações em torno desse campo de fundo, considerando-o, agora, na equação (I.32).

O caso em que $\phi_c(\vec{x})$ representa um único sóliton foi tratado na referência [34]. Ali, uma análise bastante detalhada permitiu antecipar alguns dos resultados que aqui encontramos. E que concordam, substancialmente, com a literatura experimental acerca do hélio líquido. Em particular, registramos que essa análise variacional revelou, entre outras coisas, que os estados ligados da equação (I.32) são muito sememelhantes aos rótons. Também estimou que a temperatura crítica so sistema de sólitons do hélio deveria estar em torno de 2 K. E aventou a possibilidade de que o condensado pudesse existir acima da temperatura crítica. E esses pontos são basilares no tratamento do hélio líquido.

Podemos antecipar que as análises deste trabalho e os seus resultados numéricos, corroboram integralmente essas previsões.

A aduzida análise da versão unisolitônica da equação (I.32), mostrou também que, de um modo geral, ela apresenta dois tipos de soluções: os estados do contínuo e os estados ligados. Os estados do contínuo são as excitações do tipo fonônico, como antecipado na seção II do capítulo precedente. Já os estados ligados representam quase-partículas ligadas ao sóliton, obrigadas a moverem-se, com ele, ao longo da direção x, mas livres para moverem-se nas direções transversais (ao longo da interface). Verificamos, então, que o espectro resultante dessa equação deve ser ainda mais rico que o espectro que decorre da teoria de Bogoliubov, que não apresenta estados

ligados.

Propomo-nos a explorar essas novas facetas do espectro. Valendo-nos de uma aproximação de campo médio, trataremos os estados do contínuo (sec. I); a dinâmica da nuvem térmica surgirá em conexão com os estados ligados (sec. II). Encerraremos o capítulo tratando de formalizar a compatibilização entre essas duas dinâmicas (sec. III).

I. A DINÂMICA DO FLUIDO NORMAL

a)-O "campo médio"

Concentremo-nos inicialmente nas excitações do contínuo da equação $(I.32)$. Seja, agora, $\phi_c(\vec{x},t)$ o campo clássico que descreve o condensado não uniforme. A equação $(I.32)$ se reescreverá como:

$$i\,\partial_t\eta = -\frac{1}{2m}\,\vec{\nabla}^2\eta - \lambda\,(\rho - 2\,\phi_c^*\phi_c)\,\eta + \lambda\,\phi_c^2\,\eta^* \qquad (II.1)$$

As quase-partículas que ocupam os estados do contínuo estão em agitação térmica, formando um gás em repouso relativamente ao laboratório. Esse é um gás de Bose-Einstein que, no espírito da teoria dos dois fluidos, vai constituir o que denominamos de fluido normal. É um gás de quase-partículas.

Estaremos interessados naquelas quase-partículas de energia mais baixa, que constituem a fração preponderante do fluido normal. Sendo pouco energéticas, seu grande comprimento de onda possibilita que elas *sintam* a presença de muitos sólitons, simultaneamente. Como a quase-partícula está imersa no líquido, ela não distingue entre um ou outro sóliton. Dessa forma, na equação $(II.1)$, os termos que envolvem a interação entre as flutuações e o campo do condensado, podem ser tratados como se a flutuação apenas fosse afetada por um campo médio. Um campo médio que reproduziria o intrincado efeito, sobre a flutuação, de um grande número de sólitons, movendo-se aleatoriamente.

Analiticamente, esses fatos implicam em reescrever, uma vez mais, a equação $(II.1)$ na seguinte forma:

$$i\,\partial_t\eta = -\frac{1}{2m}\,\vec{\nabla}^2\eta + \overline{V}_1\,\eta + \overline{V}_2\,\eta^* \qquad (II.2)$$

onde introduzimos as médias volumétricas:

$$\overline{V}_1 = \frac{\lambda}{\Omega}\int d\vec{x}^{\,3}\left[2\,|\phi_c|^2 - \rho\right] = \lambda\left(2\langle\phi_c^*\phi_c\rangle - \rho\right) \qquad (II.3)$$

$$\overline{V}_2 = \frac{\lambda}{\Omega}\int d\vec{x}^{\,3}\,\phi_c^2 = \lambda\,\langle\phi_c\phi_c\rangle \qquad (II.4)$$

A equação $(II.1)$ é a proposição de um problema de flutuações de difícil solução, que foi abordado na referência [34] por meio de técnicas variacionais e cuja solução, até onde sabemos, não é conhecida.

A introdução do campo médio permite uma considerável simplificação para o problema. De fato, a equação $(II.2)$ pode ser resolvida facilmente. Vamos descartar o seu último termo e resolvê-la. As fortíssimas razões físicas que nos permitem fazê-lo serão discutidas logo abaixo. Portanto, temos de encontrar a solução da seguinte equação para as flutuações:

$$i\,\partial_t\eta = -\frac{1}{2m}\,\vec{\nabla}^2\eta + \overline{V}_1\,\eta \qquad (II.5)$$

A lagrangiana que dá origem à equação $(II.5)$ é:

$$L = \int d\vec{x}^{\,3}\left\{(i\,\partial_t\eta)\eta^* + \frac{1}{2m}\,\eta^*\vec{\nabla}^2\eta - \overline{V}_1\,\eta^*\eta\right\} \qquad (II.6)$$

sendo $\pi = i\eta^*$ o momento conjugado ao campo de flutuação η.

Após a quantização (veja a seção **II** do cap. **I**) o espectro de excitação é dado por:

$$E(\vec{p}) = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \overline{V}_1 \qquad (II.7)$$

com

$$\overline{V}_1(\underline{a},\gamma) = \lambda\rho\left[1 - \frac{4\gamma\underline{a}}{mc}\right] \qquad (II.8)$$

Desenvolvendo a mecânica estatística dessas partículas cujo espectro é dado por $(II.7)$, teremos um fluido normal igual de Bose-Einstein. Faremos isso na próxima seção. Discutiremos agora as razões físicas que nos permitiram aproximar a equação $(II.2)$ pela equação $(II.5)$.

O que fizemos nessa passagem foi descartar os termos com oscilação de fase.

Num sistema com muitos sólitons, como o nosso, a freqüência de variação local do campo do condensado $\phi_c(\vec{x},t)$ é muito grande. Num dado ponto do condensado, digamos em $x = x_0$, o módulo do campo ao quadrado deve flutuar muito em torno de um valor médio. Esse valor médio, no tempo, será dado por:

$$\left\langle \phi_c^*(x_0,t)\,\phi_c(x_0,t)\right\rangle_{tempo} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int dt\,\phi_c^*(x_0,t)\,\phi_c(x_0,t) \qquad (II.9)$$

O movimento de muitos sólitons, provenientes das mais variadas direções e a intervalos irregulares, é o responsável por essa intensa variação no módulo quadrado do campo $\phi_c(\vec{x},t)$. Daí porque será legítimo aproximá-lo pela média dada em $(II.9)$, acrescida de um ruído. Na presença da excitação, quando substituímos o campo $\phi_c(\vec{x},t)$ por $\phi_c(\vec{x},t)+\eta(\vec{x},t)$, temos:

$$\phi_c^*(\vec{x},t)\,\phi_c(\vec{x},t) = \rho + \delta\rho \qquad (II.10)$$

onde

$$\rho = \phi_c^*\phi_c \qquad (II.11)$$

$$\delta\rho = \eta^*\eta + \phi_c^*\eta + \eta^*\phi_c \qquad (II.12)$$

Os dois últimos termos da expressão $(II.12)$ representam um acoplamento entre as oscilações das excitações. Em vista da disparidade entre os valores das freqüências de oscilações locais dos dois campos, ϕ_c e η, podemos descartá-los. A mesma argumentação se aplica ao produto de três campos. O termo

$$(\phi_c^*+\eta^*)(\phi_c+\eta)^2 = \phi_c^*\phi_c^2 + \eta^*\phi_c^2 + \phi_c^*\eta^2 + \eta^*\eta^2 + 2\phi_c^*\phi_c\,\eta + 2\,\phi_c\,\eta^*\eta \qquad (II.13)$$

reduz-se a:

$$(\phi_c^*+\eta^*)(\phi_c+\eta)^2 \cong \phi_c^*\phi_c^2 + 2\,\phi_c^*\phi_c\,\eta + O(\eta^2) \qquad (II.14)$$

Estas aproximações equivalem a desprezar o termo $\overline{V}_2$ em $(II.2)$. O termo que permanece, $2\,\phi_c^*\phi_c\,\eta$ é tratado em campo médio.

b)-O fluido normal de Bose-Einstein

Como é sabido, a ocupação macroscópica do modo zero no gás de Bose-Einstein caracteriza o fenômeno de condensação. De acordo com London[11], a fase condensada ocorre conjugada ao fato de o potencial químico igualar-se ao valor médio do potencial V_1, dado por $(II.8)$. Remetemos o leitor à referência [11] para uma revisão da abordagem de London para o gás de Bose-Einstein.

Aqui, portanto, para a ocorrência da fase condensada, poremos:

$$\mu = \overline{V}_1 = \lambda\rho - \frac{4\gamma a}{mc}\lambda\rho \qquad (II.15)$$

Com esse espectro, a densidade do fluido normal será dada por:

$$\rho_n(T) = 2.612\left(\frac{mT}{2\pi}\right)^{3/2} \qquad (II.16)$$

esta é a densidade correspondente ao número máximo de partículas nos estados excitados do gás de Bose-Einstein. Como a temperatura crítica é dada por:

$$T_0 = \frac{2\pi}{m}\left(\frac{\rho}{2.612}\right)^{2/3}, \qquad (II.17)$$

a expressão $(II.16)$ torna-se:

$$\rho_n(T) = \rho\left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \qquad (II.18)$$

A expressão acima fornece-nos a densidade do fluido normal como função da temperatura, a partir da densidade total do líquido, ρ.

Daqui por diante expressaremos a temperatura a partir de um novo parâmetro, τ, dado por:

$$\tau = \frac{T}{T_0} = \frac{mT}{2\pi\left(\rho/2.612\right)^{2/3}} \qquad (II.19)$$

que deve funcionar como uma temperatua reescalada. Quando substituímos os valores de ρ e m correspondentes aos valores do hélio líquido, encontramos que $T_0 = 3.12\ K$, conforme o resultado pioneiro de London[11].

Teremos ocasião de ver, mais adiante, que todos os cálculos numéricos aqui desenvolvidos, são feitos numa região de temperatura onde $0 \leq \tau \leq 0.85$. Essa região inclui, obviamente, o ponto λ experimental ($\tau \approx 0.696$).

Podemos, agora, relatar essa imagem do gás de Bose-Einstein com a teoria dos dois fluidos de Tisza[14].

A equação ($II.18$) fornece uma prescrição clara para a densidade do fluido normal a cada temperatura. O nosso superfluido será constituído pelo condensado, recheado de sólitons, mais as suas nuvens térmicas. Vale lembrar que nas imagens usuais do sistema de Bose interagente, o superfluido é constituído pelo condensado mais as partículas que povoam os níveis de depleção.

Essas duas versões não são equivalentes. O que as torna profundamente distintas é a dinâmica própria da nuvem térmica; ou, fundamentalmente, a presença de sólitons no sistema. A essa dinâmica devotaremos as próximas seções.

Por enquanto, podemos obter a densidade do superfluido subtraindo a densidade do fluido normal da densidade total:

$$\rho_c(T) = \rho - \rho_n(T) = \rho(1 - \tau^{3/2}) \qquad (II.20)$$

Observamos que a densidade ρ_c não é exatamente a densidade do condensado. Assim como está, a equação ($II.20$) incorpora a nuvem térmica. Entretanto, como o número de sólitons é pequeno e como as nuvens enchem quase que completamente o buraco do sóliton, podemos usar a expressão ($II.20$) para a densidade do superfluido e para a densidade do condensado. Quando tivermos completado a dinâmica da nuvem térmica, voltaremos à questão e veremos se esse quadro deve ser alterado e em que medida.

Antes de prosseguir é preciso que substituamos o parâmetro ρ por ρ_c em todas as expressões até agora introduzidas. Em particular, a velocidade do som, c, que era dada por ($I.16$), agora será:

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{\lambda\, \rho_c(T)}{m}} = c\sqrt{1 - \tau^{3/2}} \qquad (II.21)$$

Assim, a presença do fluido normal acarreta uma primeira renormalização na densidade do sistema. A nuvem térmica será a responsável por uma segunda. Vejamos como.

II. A DINÂMICA DA NUVEM TÉRMICA

a)-O que é a nuvem térmica?

Nas últimas linhas insistimos na distinção entre o fluido normal e o superfluido. É bom lembrar, no entanto, que não ocorre uma separação espacial dessas duas componentes, quando consideramos o líquido globalmente. Isso quer dizer, por exemplo, que as partículas estão imersas no líquido e acompanham o seu movimento. A distinção, feita por Tisza[14], envolve um ordenamento no espaço dos momentos, mas não uma nítida separação de fases no espaço.

Já a presença do sóliton, quando observado desde o seu referencial de repouso, acarreta um vazio local de matéria, onde a densidade é mais rarefeita. A partir desse fato, definimos a função $Z(\vec{x}, t)$ como o buraco do sóliton (veja a seção III do cap. I).

À temperatura finita, qualquer quase-partícula excitada termicamente pode ser capturada pelo sóliton, tornando-se ligada a ele. E depois movendo-se, com ele, numa certa direção x. Vai ocorrer, portanto, um *enchimento* nessa região do buraco do sóliton. Esse *enchimento* dependerá, obviamente, da temperatura. Dizemos, então, que formou-se a nuvem térmica.

A figura $(II.1)$ é um esboço ingênuo, mas ilustrativo, do que pode ocorrer numa dada temperatura.

O caso (a) mostra o buraco do sóliton parcialmente ocupado por uma nuvem de excitações térmicas e o caso (b) mostra a completa ocupação do buraco pela nuvem. O parâmetro b, que denominamos de *fator de enchimento* da nuvem, é tal que $0 < b < 1$ no caso (a) e $b = 1$ no caso (b).

Não há, em princípio, um mecanismo privilegiado para impedir ou estimular essa ocupação. Para constatar qual o tipo de situação a ser favorecida, a uma dada temperatura, será preciso realizar um balanço termodinâmico mais completo.

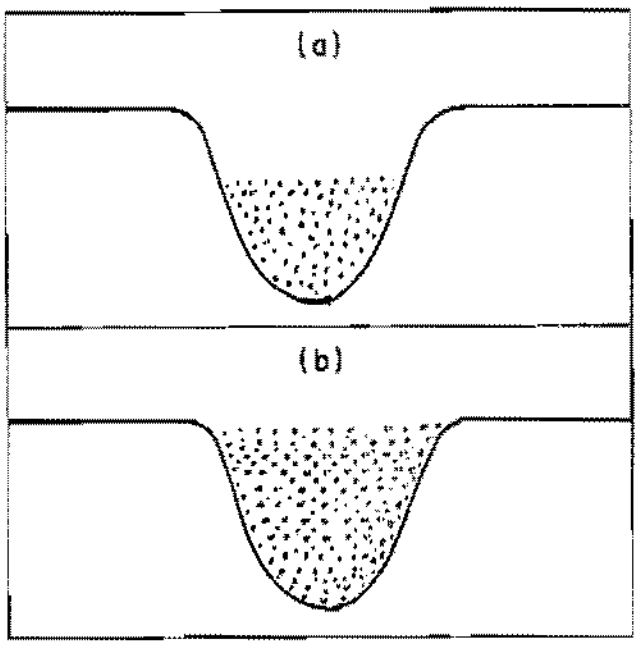


Figura II.1 - A nuvem térmica.

Neste capítulo, a nuvem térmica será tratada a partir de uma densidade ρ_{nt} que deverá aparecer na hamiltoniana. Sobre ela lançaremos a hipótese fundamental deste trabalho. No capítulo **IV**, introduziremos um segundo campo clássico na lagrangiana do problema e trataremos da interdependência desses dois campos. A dinâmica da nuvem térmica poderá ser representada de uma maneira ainda melhor e mais completa.

b)-A nuvem térmica ao nível clássico

A presença da nuvem térmica deve incorporar mais dois termos na hamiltoniana ($I.22$), a saber:

(1) o acoplamento sóliton/nuvem térmica, que é um termo do tipo:

$$\lambda\, \phi_c^* \phi_c\, \rho_{nt}(\vec{x}, t) \ ;$$

(2) a auto-interação da nuvem térmica, na forma:

$$\frac{1}{2}\, \lambda\, \rho_{nt}^2(\vec{x}, t)$$

Com estes dois termos a energia clássica do sistema será reescrita na forma:

$$E_c[\,\phi_c;\rho_{nt}\,] = \int d\vec{x}^{\,3}\left\{\frac{1}{2m}\;\vec{\nabla}\phi_c^*\cdot\vec{\nabla}\phi_c - \lambda\,\rho_c\,\phi_c^*\phi_c + \frac{\lambda}{2}\,(\phi_c^*\phi_c)^2\right\}$$
$$+\int d\vec{x}^{\,3}\left\{\lambda\,\phi_c^*\phi_c\,\rho_{nt}(\vec{x},t) + \frac{1}{2}\,\lambda\,\rho_{nt}^2 - \lambda\,\rho_c\,\rho_{nt}(\vec{x},t)\right\} \qquad (II.22)$$

O último termo foi introduzido pelas mesmas razões que conduziram à equação $(I.10)$ e depois à equação $(I.20)$.

Começamos a nossa análise da nuvem térmica perguntando que tipo de configuração mecânica torna a energia, E_c, $(II.22)$ mínima?

A resposta a esta pergunta é muito ilustrativa. Seja:

$$\frac{\delta E_c\,[\phi_c(\vec{x},t);\rho_{nt}(\vec{x},t)]}{\delta\rho_{nt}(\vec{x},t)} = 0 \qquad (II.23)$$

A solução será:

$$\lambda\,\phi_c^*\phi_c + \lambda\,\rho_{nt} - \lambda\,\phi_c = 0 \qquad (II.24)$$

Assim, no equilíbrio, a densidade da nuvem térmica é:

$$\begin{aligned}\rho_{nt}^{(0)} &= \rho_c - \phi_c^*\phi_c\\ \rho_{nt}^{(0)} &= Z(\vec{x},t)\end{aligned} \qquad (II.25)$$

A equação $(II.25)$ mostra que a nuvem térmica ocupa completamente o buraco do sóliton!

Mas esta é uma tendência puramente mecânica. Como estamos interessados no equilíbrio termodinâmico, é a energia livre que devemos minimizar. Para obter essa energia livre acrescentamos à equação $(II.25)$ a energia livre das quase-partículas ligadas ao sóliton. Depois, multiplicamos o resultado pelo número de sólitons, $\underline{a}$, de todo o sistema. Esperamos que a situação mude. A igualdade na expressão $(II.25)$ deve ser alterada. Mas é bem verdade que não deve mudar muito.

Isso porque a energia típica do sistema é da ordem de $\lambda\rho \approx 30\ K$. No intervalo de temperatura em que estamos interessados $0 < T < 3\ K$,

a energia livre das quase-partículas presas ao sóliton deve ser pequena, se comparada a esse valor. Logo, o resultado estabelecido por $(II.25)$ revela uma forte tendência do sistema, que é determinado, fundamentalmente, por seus aspectos mecânicos.

Fazemos, então, a hipótese de que *a densidade da nuvem térmica é proporcional ao buraco do sóliton*:

$$\begin{aligned} \rho_{nt}(\vec{x},t) &= b\, Z(\vec{x},t) \\ &= b\,(\rho_c - \phi_c^*\phi_c) \end{aligned} \qquad (II.26)$$

A proporcionalidade é estabelecida pelo *fator de enchimento*, b. É esta a hipótese fundamental a que nos referimos anteriormente. A dinâmica da nuvem térmica será ditada por $(II.26)$, funcionando como um critério para que um dado campo participe dessa dinâmica.

A verificação dessa hipótese é feita, ao longo do trabalho, de maneira auto-consistente.

Na equação de movimento do campo do condensado deve aparecer o termo de interação sóliton/nuvem térmica, isto é:

$$i\,\partial_t\phi_c = -\frac{1}{2m}\,\vec{\nabla}^2\phi_c - \lambda\,\rho_c\,\phi_c + \lambda\,\phi_c^*\phi_c^2 + \lambda\,\rho_{nt}\,\phi_c \qquad (II.27)$$

Usando a equação $(II.26)$ na equação $(II.27)$, teremos uma equação de movimento semelhante à equação $(I.22)$:

$$i\,\partial_t\phi_c = -\frac{1}{2m}\,\vec{\nabla}^2\phi_c - \lambda(1-b)\,\rho_c\,\phi_c + \lambda\,(1-b)\phi_c^*\phi_c^2\,. \qquad (II.28)$$

Aqui aparece uma constante de acoplamento efetiva, dada por

$$\begin{aligned} \widetilde{\lambda} &= \lambda(1-b) \\ &= \lambda\,\chi \end{aligned} \qquad (II.29)$$

onde introduzimos o parâmetro χ. Este será o *índice de profundidade* relativa. Deve medir quão vazio (ou cheio) fica o buraco do sóliton na presença ou na ausência da nuvem. Se $\chi = 1$, o sóliton está vazio. Se $\chi = 0$, o buraco

do sóliton está cheio (veja a figura $(II.1-b)$). O parâmetro χ será sempre pequeno quando comparado à unidade, em todo o trabalho (veremos depois que esta é uma aproximação muito boa).

Temos, portanto, a seguinte equação de movimento:

$$i\,\partial_t\phi_c = -\frac{1}{2m}\,\vec{\nabla}^2\phi_c - \widetilde{\lambda}\,\rho_c\,\phi_c + \widetilde{\lambda}\,\phi_c^*\phi_c^2\,. \qquad (II.30)$$

Sua solução é o sóliton renormalizado:

$$\phi_v^{(R)} = \sqrt{\rho_c}\,\{V - i\gamma\,\mathrm{tgh}\,\gamma m\widetilde{c}(x-\widetilde{c}Vt)\} \qquad (II.31)$$

onde

$$\widetilde{c} = \sqrt{\frac{\widetilde{\lambda}\,\rho_c}{m}} = \sqrt{\chi}\,\bar{c} \qquad (II.32)$$

A solução $(II.31)$ que corresponde ao sóliton $(I.40)$ duplamente renormalizado, mostra-o carregando sua nuvem térmica. Como χ é sempre tal que $\chi < 1$, vemos que um efeito imediato da nuvem sobre o sóliton é torná-lo mais lento. Olhando para $(II.31)$ vemos que ele tornou-se também largo. Como fizemos ao final da seção anterior, a segunda renormalização deve alterar as equações até aqui encontradas. Agora vamos estudar as excitações da nuvem térmica.

c)-A nuvem térmica ao nível quântico

A nuvem térmica foi introduzida ao nível clássico. Empregaremos, novamente, o método semi-clássico para quantizar as flutuações. Partimos da expressão para a energia clássica $(II.22)$ onde o campo $\phi_c(\vec{x},t)$ será agora representado pelo sóliton renormalizado $(II.31)$. Estudaremos as flutuações, $\eta(\vec{x},t)$ em torno desse campo clássico.

Ao introduzirmos $\phi_c + \eta$ na energia clássica $(II.22)$ ficamos com dois termos, um deles bilinear nas flutuações:

$$E_c[\,\phi_c + \eta;\rho_{nt}\,] = E_c^{(1)}[\,\phi_c;\rho_{nt}(\vec{x},t)\,] + E_c^{(2)}[\,\eta;\rho_{nt}(\vec{x},t)\,] \qquad (II.33)$$

onde:

$$E_c^{(1)}[\,\phi_c;\rho_{nt}(\vec{x},t)\,] = \int d\vec{x}^{\,3}\left\{\frac{1}{2m}\,\vec{\nabla}\phi_c^*\cdot\vec{\nabla}\phi_c - \lambda\,\rho_c\,\phi_c^*\phi_c \right.$$
$$\left. + \frac{\lambda}{2}\,(\phi_c^*\phi_c)^2 + \lambda(\phi_c^*\phi_c - \rho_c)\,\rho_{nt}(\vec{x},t)\right\} \qquad (II.34)$$

e,

$$E_c^{(2)}[\eta;\rho_{nt}(\vec{x},t)] = \int d\vec{x}^{\,3}\left\{\frac{1}{2m}\,\vec{\nabla}\eta^*\cdot\vec{\nabla}\eta \right.$$
$$\left. + \lambda\Big(2\,\phi_c^*\phi_c - \rho_c + \rho_{nt}(\vec{x},t)\Big)\,\eta^*\eta\right\} + O(\eta^3)\,. \quad (II.35)$$

Os termos com oscilações de fase foram descartados pelas mesmas razões da seção I-a. A parte da energia clássica, bilinear nas flutuações, ficou separada e pode, agora, determinar a equação de movimento das flutuações.

O processo de quantização deveria começar. Antes, porém, é necessário que façamos uma análise da estrutura desses termos.

Após a quantização da flutuação η, garantimos a auto-consistência do sistema impondo a igualdade entre a densidade da nuvem térmica e a média térmica da densidade das flutuações

$$\rho_{nt}(\vec{x},t) = \langle\eta^*\eta\rangle_{térmica} \quad (II.36)$$

Quantizamos a flutuação, definindo:

$$\eta = \sum_i a_i\, f_i(\vec{x}) \quad (II.37)$$

$$\eta^* = \sum_i a_i^*\, f_i^*(\vec{x}) \quad (II.38)$$

onde os $f_i(\vec{x})$ são os modos normais "ortonormais" das flutuações em torno de ϕ_c. A soma, em i, se estende sobre todos os modos ligados[49]. É claro que a definição formal em $(II.37)$ pressupõe um problema de Schrödinger associado à flutuação, na forma característica:

$$\left\{-\vec{\nabla}^2 + \left(\frac{d^2U}{d\phi^2}\right)_{\phi=\phi_c}\right\} f_i = w_i^2\, f_i \quad (II.39)$$

A relação $(II.36)$ associada às definições formais $(II.37)$, permite que trabalhemos com uma energia média, advinda de $(II.35)$. Devemos, então, identificar a hamiltoniana das quase-partículas da nuvem térmica e tomar a sua média (térmica). Na expressão $(II.35)$ há alguns termos que já estão

contidos, formalmente, na parte clássica $(II.34)$. Observemos os seguintes termos:

$$\lambda\,\phi_c^*\phi_c\,\rho_{nt} \longrightarrow \text{nuvem/campo clássico}$$
$$-\lambda\,\rho_c\,\rho_{nt} \longrightarrow \text{nuvem/fonte externa}$$

Em vista de $(II.36)$, estes termos devem ser da mesma estrutura que os termos:

$$\lambda\,\phi_c^*\phi_c\,\eta^*\eta$$
$$-\lambda\,\rho_c\,\eta^*\eta$$

Considerando a energia $(II.39)$, vemos que estes termos foram computados duas vezes: uma na parte clássica, $(II.34)$ e a outra em $(II.35)$, quando tomarmos a média térmica.

Assim sendo, para recuperar a hamiltoniana da quase-partícula somente, devemos subtrair, de $(II.35)$, os seguintes contra-termos:

$$\int d\vec{x}^{\,3}\,\lambda(\phi_c^*\phi_c - \rho_c)\,\eta^*\eta \qquad (II.40)$$

Com isto, obtemos:

$$H_{nt} = E_c^{(2)}[\eta;\rho_{nt}(\vec{x},t)] - \int d\vec{x}^{\,3}\,\lambda(\phi_c^*\phi_c - \rho_c)\,\eta^*\eta$$

ou

$$H_{nt}\{\eta\} = \int d\vec{x}^{\,3}\left\{\frac{1}{2m}\,\vec{\nabla}\eta^*\cdot\vec{\nabla}\eta + \lambda\,(\phi_c^*\phi_c + \rho_{nt})\,\eta^*\eta\right\} \qquad (II.41)$$

A energia interna das quase-partículas da nuvem térmica, será dada por:

$$\varepsilon_{int} = \langle H_{nt}\rangle_{térmica} \qquad (II.42)$$

Agora vamos encontrar a expressão de $\eta(\vec{x},t)$, isto é, resolver o problema $(II.39)$. A equação de movimento que decorre da hamiltoniana $(II.41)$ é:

$$i\,\partial_t\eta = -\frac{1}{2m}\,\vec{\nabla}^2\eta + U(x)\,\eta \qquad (II.43)$$

onde o potencial $U(x)$ é dado por:

$$U(x) = \lambda(\phi_c^* \phi_c + \rho_{nt}) \qquad (II.44)$$

Usando as definições $(II.26)$ e o sóliton renormalizado $(II.31)$ temos:

$$U(x) = \lambda\, \rho_c - \frac{\gamma^2 m \tilde{c}^2}{\cosh^2 \gamma m \tilde{c}(x - \tilde{c} V t)} \qquad (II.45)$$

Portanto, o potencial é dependente do tempo! As quase-partículas ligadas ao sóliton são modos normais da equação $(II.43)$. Mas não são autoestados de energia devido a essa dependência temporal do potencial. Daí porque será necessário que trabalhemos com as energias médias, para a mecânica estatística do sistema.

Isso ocorre, também, porque precisamos conhecer as energias médias das excitações no referencial de laboratório. No referencial do sóliton o potencial não depende do tempo. Mas é possível relacionar as soluções do problema no referencial do sóliton e no referencil do laboratório, por meio de uma transformação de Galileu apropriada.

Passemos ao referencial do sóliton. Ali, o problema que temos de resolver é o seguinte:

$$i\, \partial_t \eta^{(s)} = -\frac{1}{2m}\, \vec{\nabla}^2 \eta^{(s)} + U(x)^{(s)}\, \eta^{(s)} \qquad (II.46)$$

ou:

$$\varepsilon^{(s)}(\vec{k})\, \eta^{(s)} = -\frac{1}{2m}\, \vec{\nabla}_z^2\, \eta^{(s)} - \frac{1}{2m}\, \vec{\nabla}_x^2\, \eta^{(s)} + U(x)^{(s)}\, \eta^{(s)} \qquad (II.47)$$

onde o símbolo $\vec{\nabla}_x^2$ indica a operação com as variáveis transversais à direção do movimento do sóliton.

Se, na equação $(II.47)$ introduzirmos

$$\eta^{(s)}(z, x) = \frac{1}{\sqrt{A}}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{z}}\, \psi_0(x) \qquad (II.48)$$

($\vec{z}$ é o vetor formado com as componentes transversais), ela implicará no espectro:

$$\varepsilon^{(s)}(\vec{k}) = \frac{\vec{k}^2}{2m} + \lambda\,\rho_c + \varepsilon_0 \qquad (II.49)$$

onde

$$\varepsilon_0\,\psi_0(x) = -\frac{1}{2m}\,\frac{d^2\psi_0}{d\,x^2} - \frac{\gamma^2 m\widetilde{c}^2}{\cosh^2\gamma m\widetilde{c}\,x}\psi_0(x) \qquad (II.50)$$

A equação $(II.49)$ dá o espectro das quase-partículas ligadas no referencial em que o sóliton está em repouso. Vamos reescrever a equação $(II.50)$ e resolvê-la. Pondo $y = \gamma m\widetilde{c}x$, vem:

$$\frac{\varepsilon_0}{\gamma^2 m\widetilde{c}^2}\,\psi_0(y) = -\left(\frac{1}{2}\,\frac{d^2}{d\,y^2} + \frac{1}{\cosh^2 y}\right)\psi_0(y) \qquad (II.51)$$

ou, mais compactamente,

$$\widetilde{\varepsilon}_0\,\psi_0 = \widehat{O}_0\,\psi_0(y) \qquad (II.52)$$

com:

$$\widehat{O}_0 = -\left(\frac{1}{2}\,\frac{d^2}{d\,y^2} + \frac{1}{\cosh^2 y}\right)\;;\quad \widetilde{\varepsilon}_0 = \frac{\varepsilon_0}{\gamma^2 m\widetilde{c}^2} \qquad (II.53)$$

O espectro do operador $(II.53)$ é conhecido. Sendo

$$\psi_0 = B\,\frac{1}{\cosh y} \qquad (II.54)$$

resta:

$$\widetilde{\varepsilon}_0 = -1/2 \qquad (II.55)$$

A função $(II.54)$ pode ser dada, também, por:

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{\gamma m\widetilde{c}}{2}}\,\frac{1}{\cosh\gamma m\widetilde{c}\,x} \qquad (II.56)$$

com isto, o espectro das excitações da nuvem térmica, no referencial do sóliton é:

$$\varepsilon(\vec{k}) = \frac{\vec{k}^2}{2m} + \lambda\,\rho_c - \frac{1}{2}\,\gamma^2 mc^2 \qquad (II.57)$$

Portanto, no referencial do sóliton as equações $(II.52)$, $(II.55)$, $(II.56)$ e $(II.57)$ completam as informações sobre o espectro.

A função de onda associada ao estado de momento $\vec{k}$, no referencial de laboratório, é dada por:

$$\psi_{\vec{k}}^{(Lab)}(\vec{x},t) = \frac{1}{\sqrt{A}}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{z}+m\widetilde{c}Vx)}\, \psi_0(x-\widetilde{c}Vt) \qquad (II.58)$$

Finalmente, as energias médias, no laboratório, serão:

$$\varepsilon_{Lab}(\vec{k}) = \frac{\vec{k}^2}{2m} + \frac{1}{2}m(\widetilde{c}V)^2 + \lambda\,\rho_c - \frac{1}{2}\gamma^2 m\widetilde{c}^2 \qquad (II.59)$$

Dispomos, assim, do espectro da nuvem térmica — valores médios da energia — no ref. de laboratório. Podemos usá-lo para a mecânica estatística da nuvem. Antes disso, porém, essas informações devem ser *amadurecidas* e compatibilizadas.

Nós supusemos que a densidade da nuvem térmica fosse proporcional ao buraco do sóliton (veja eq. $(II.26)$). Na equação $(II.36)$ assumimos que a densidade da nuvem térmica seria proporcional à média térmica das excitações. A expressão $(II.48)$ "mostra" que a densidade da nuvem térmica é proporcional ao buraco do sóliton. É fácil ver!

O módulo quadrado de $(II.48)$ é:

$$\left|\eta^{(s)}(z,x)\right|^2 = \left|\psi_0(x)\right|^2 = \frac{\gamma m\widetilde{c}/2}{\cosh^2\gamma m\widetilde{c}\,x} \cong Z(x,t) \qquad (II.60)$$

Essa equação reflete, portanto, a consistência entre as duas hipóteses anteriormente aventadas. Em particular, confirma, *a posteriori* a hipótese lançada em $(II.26)$.

Neste ponto, uma pequena retrospectiva dos fatos envolvendo a equação $(II.1)$ se faz necessária.

Inicialmente, tratamos os seus estados do contínuo numa aproximação de campo médio. Fomos levados à existência de um fluido normal análogo ao de Bose-Einstein. Esse tratamento implicou numa primeira renormalização das densidades, sem a presença da nuvem térmica. Em seguida, tratamos

dos estados ligados do problema usando uma importante hipótese sobre a nuvem térmica. Concluímos, assim, que as excitações do sistema — em vista da aproximação de campo médio para o fluido normal e da correlação existente entre as quase-partículas da nuvem térmica — seguem duas dinâmicas distintas.

Necessitamos, portanto, de uma prescrição de compatibilização entre esses dois procedimentos, para garantir a consistência dos resultados. A próxima seção é dedicada à discussão e à compatibilização entre essas duas dinâmicas.

III. AS CONDIÇÕES DE COMPATIBILIZAÇÃO

Vimos na seção precedente a condição para que um estado participe da dinâmica da nuvem térmica (nunca é demais repetir!): o módulo quadrado de sua função de onda deve ser proporcional ao buraco do sóliton.

Se um dado estado está presente e não satisfaz a esse critério de proporcionalidade, ele deve ser tratado na dinâmica do fluido normal. Trata-se, certamente, da dinâmica do fluido normal desenvolvida na seção I-a, do capítulo II, que agora deve ser modificada. Precisa incorporar as contribuições da nuvem térmica.

Na seção referida, o campo médio ao qual estavam sujeitas as partículas do fluido normal era dado por (eq.II.3):

$$\overline{V}_1 = \lambda \left(2\langle \phi_c^* \phi_c \rangle - \rho\right)$$

Agora, como mais uma renormalização da densidade foi efetuada, o campo médio deve ser alterado. Trocando, na equação acima, ρ pela densidade do condensado, ρ_c e introduzindo o termo $\lambda < \rho_{nt} >$ — que deve refletir de que maneira o fluido normal se "ressente" da presença da nuvem térmica — o novo campo médio será:

$$\begin{aligned} \widetilde{V}_1 &= \overline{V}_1\{\rho_c\} + \lambda \langle \rho_{nt} \rangle \\ V_1 &= \lambda \rho_c \left\{ 1 - \frac{4\gamma \underline{a}}{mc} + \frac{2\gamma b \underline{a}}{mc} \right\} \end{aligned} \qquad (II.61)$$

Como $\chi << 1$, e, em conseqüência, $b \simeq 1$, aproximaremos $(II.61)$ por:

$$\widetilde{V}_1 = \lambda \rho_c \left\{ 1 - \frac{2\gamma \underline{a}}{m\widetilde{c}} \right\} \qquad (II.62)$$

O espectro que daí resulta é, formalmente, idêntico ao da equação $(II.7)$, com $\overline{V}_1$ substituído por $\widetilde{V}_1$:

$$E_n - \widetilde{\mu} = \frac{\vec{p}^2}{2m} \qquad (II.63)$$

onde $\widetilde{\mu} = \widetilde{V}_1$, pelas mesmas razões aludidas anteriormente. Isto é, esta escolha do valor do potencial químico segue o critério de London[11], de que o número de ocupação correspondente ao estado de menor energia deve ser infinito.

Dentro do contexto dessas duas dinâmicas há uma situação, muito importante, que se refere aos estados de espalhamento. Esses estados são tais que, num preciso momento $(t = 0)$, no referencial de laboratório, satisfazem ao critério de proporcionalidade com a nuvem térmica, mas *não* são modos normais da hamiltoniana $(II.41)$. Quando levados a evoluir segundo a dinâmica dessa equação, fazem-no de maneira complicada, perdendo a correlação com a nuvem térmica.

Um exemplo disso é o pacote de onda instantâneo do tipo:

$$f_0(\vec{x}, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{A}} \psi_0(\vec{x}) \qquad (II.64)$$

definido no referencial de laboratório em $t = 0$, com $\psi_0(x)$ dado por $(II.56)$. Vemos, de fato, que a densidade de probabilidade a ele associada, $| f_0(\vec{x}) |^2$, é proporcional ao buraco do sóliton, em $t = 0$. Embora, como já dissemos, o estado descrito pelo pacote $(II.64)$ não seja um modo normal da hamiltoniana $(II.41)$, em $t = 0$ ele é o seu estado de menor energia.

Para esclarecer, ainda melhor, o surgimento desses estados como $(II.64)$, vamos usar uma analogia (somente analogia) com a estrutura de bandas eletrônicas do estado sólido.

O fato de o potencial $U(x)$ (cf. eq. $(II.45)$) depender do tempo, mostra que, em nosso sistema de sólitons planares tridimensionais, forma-se um

certo gás (diluído) de potenciais atrativos que se movem aleatoriamente, como planos, em todas as direções.

Congelemos, momentaneamente, o nosso sistema e consideremos um único potencial, $U_0(x - x_0)$, centrado no ponto x_0. Uma partícula a ele ligada terá energia $-E_0$, se a distância entre esse potencial e o seu vizinho mais próximo for grande. Mantido esse espaçamento relativo, teremos uma sucessão infinita de potenciais desse tipo, com situações individuais idênticas. Formar-se-á, portanto, uma estrutura semelhante à estrutura de bandas. Pode-se adiantar que um bom piso para essa "banda" é a própria energia $-E_0$.

O estado ligado no potencial $U_0(x - x_0)$ é descrito, justamente, por um pacote como $(II.64)$ em $t = 0$. Os estados dessa banda são descritos pela superposição desses estados individuais:

$$\Phi_n = \sum_j c_j^{(n)} \psi_0(x - x_j)$$

e haverá tantos estados na banda, quantos potenciais houver no sistema.

Essa imagem que acabamos de traçar é, certamente, restrita ao caso unidimensional. No entanto, em nosso sistema tridimensional, algo semelhante deve ocorrer. À medida em que o tempo passa e os potenciais se aproximam, começam a aparecer estados mistos, pois os efeitos de tunelamento passam a ser importantes. Então, a qualquer instante, haverá um conjunto de estados mistos formando uma "banda".

De fato, nesta análise prelimilar de Mecânica Quântica, constata-se que o sistema de muitos sólitons terá uma banda estreita em torno do nível do pacote instantâneo. Entretanto, veremos que, quando estudarmos o sistema a temperatura finita, do ponto de vista de cada sóliton, vai condensar um segundo campo clássico. Mas, do ponto de vista do sistema como um todo, condensará um segundo campo clássico, na própria banda.

Passemos aos critérios de compatibilização. Enquanto excitação do

fluido normal, a energia média do pacote($II.64$) deve ser dada por:

$$E_N\{f_0\} = \widetilde{V}_1 + \frac{1}{2m}\int d\vec{x}^{\,3}\left(\vec{\nabla} f_0(\vec{x}, t=0)\right)^2 \qquad (II.65)$$

ou

$$E_N\{f_0\} = \widetilde{V}_1 + \frac{1}{6}\gamma^2 m\widetilde{c}^2 \qquad (II.66)$$

As equações ($II.65$) e ($II.66$) revelam que acrescentamos ao campo médio ($II.62$) a energia cinética do pacote instantâneo, $f_0(\vec{x}, t)$:

$$E_N\{f_0\} = \lambda\,\rho_c\left\{1 - \frac{2\gamma a}{m\widetilde{c}}\right\} + \frac{1}{6}\gamma^2 m\widetilde{c}^2 \qquad (II.67)$$

Nas vizinhanças de $t = 0$, o estado genérico ($II.64$) deve estar correlacionado com a nuvem térmica, por obedecer ao critério de proporcionalidade ($II.26$). Nessa dinâmica, a energia média do pacote instantâneo é:

$$E_{NT}\{f_0; t=0\} = \int d\vec{x}^{\,3}\left\{\frac{1}{2m}\,\left|\,\vec{\nabla} f_0\,\right|^2 + U(x)\,f_0^2\right\} \qquad (II.68)$$

ou, ainda,

$$\begin{aligned} E_{NT}\{f_0; t=0\} &= \lambda\,\rho_c + \varepsilon_0 \\ &= \lambda\,\rho_c - \frac{1}{2}\gamma^2 m\widetilde{c}^2 \end{aligned} \qquad (II.69)$$

Os estados ligados da hamiltoniana($II.41$), que descrevem as quase-partículas da nuvem térmica, são (veja $II.58$)

$$\psi_{\vec{k}}^{(Lab)}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{A}}\,\mathrm{e}^{i\vec{k}\cdot\vec{z}}\,\mathrm{e}^{i[m\widetilde{c}Vx - \varepsilon_{Lab}(\vec{k})\,t]}\,\psi_0(x - \widetilde{c}Vt) \qquad (II.70)$$

O critério que usaremos, neste capítulo, para compatibilizar as duas dinâmicas consistirá em exigir que o valor *médio* da energia dos estados ligados da hamiltoniana desses estados, tenham o mesmo valor, tanto na dinâmica de campo médio como na dinâmica da nuvem térmica. De maneira equivalente, dizemos que as energias médias do pacote instantâneo, nas duas dinâmicas, são iguais:

$$E_N\{f_0\} = E_{NT}\{f_0; t=0\} \qquad (II.71)$$

Este é um critério provisório que usaremos para acertar o nivelamento de cotas energéticas do problema. Quando introduzirmos o segundo campo, no capítulo **IV**, veremos que é possível justificar, em detalhe, o mecanismo que governa o nivelamento de cotas. Na seção **II** mostramos que esse nivelamento ocorre para minimizar a energia livre do fluido normal. Na verdade, ali nós ajustaremos o valor do potencial químico para zerar a energia do pacote instantâneo. Quando isso se der, condensará um segundo campo clássico. Depois é a minimização da energia livre do fluido normal que garantirá a validade da equação $(II.71)$.

Da equação $(II.71)$ decorre que

$$\lambda\,\rho_c\left\{1-\frac{2\gamma\underline{a}}{m\widetilde{c}}\right\}+\frac{1}{6}\,\gamma^2 m\widetilde{c}^2=\lambda\,\rho_c-\frac{1}{2}\,\gamma^2 m\widetilde{c}^2 \qquad (II.72)$$

Esta relação determina o número de sólitons, $\underline{a}$, no sistema, como função dos parâmetros γ e χ e da temperatura. A saber,

$$\frac{\underline{a}}{mc}=\frac{1}{3}\sqrt{1-\tau^{3/2}}\,\gamma\,\chi^{3/2} \qquad (II.73)$$

Assim sendo, as duas dinâmicas só serão compatíveis se o sistema produzir sólitons em número suficiente para satisfazer a equação $(II.73)$. Note que o lado esquerdo da equação $(II.72)$ envolve o número $\underline{a}$, enquanto que o lado direito não. Assim, numa dada temperatura o equilíbrio se dá via produção de sólitons. A condição de compatibilização esclarece em que medida surge um número maior ou menor de sólitons no sistema e resulta num mecanismo controlador para o número de sólitons. É esse mecanismo que acaba resolvendo o problema da contagem de sólitons. Voltaremos ao assunto na seção **II** do capítulo **IV**.

Resta por calcular o ingrediente fundamental para a mecânica estatística da nuvem térmica: a energia da quase-partícula ligada menos o potencial químico, no referencial de laboratório.

A energia da quase-partícula ligada é dada inicialmente a partir da equação $(II.59)$. O potencial químico é fornecido pela equação $(II.62)$. Usando a equação $(II.72)$, teremos:

$$\varepsilon_{Lab}(\vec{k})-\mu=\frac{\vec{k}^2}{2m}+\frac{1}{2}\,m(c\,V)^2+\frac{1}{6}\,m(c\,\gamma)^2 \qquad (II.74)$$

A figura $(II.2)$ ilustra a disposição dessas energias, exibindo um sóliton nu e o outro vestido pela nuvem térmica.

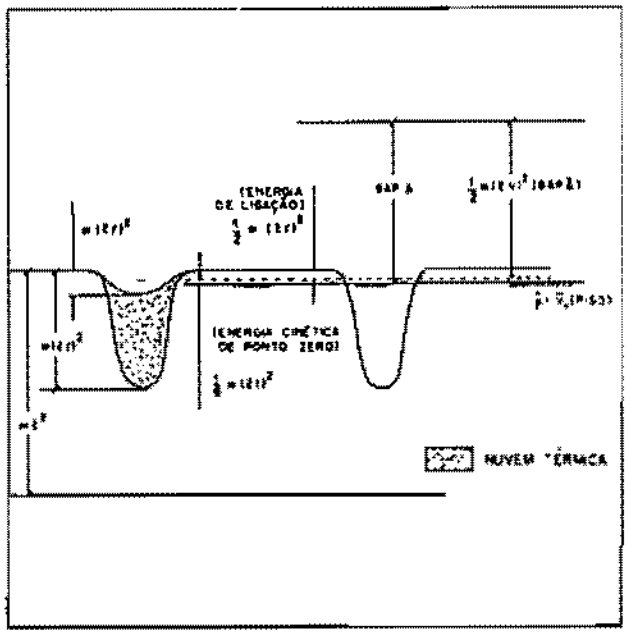


Figura II.2 - Disposição das energias do problema.

Observamos a existência de um *gap* entre o piso do potencial químico e a energia das quase-partículas. Desse modo, a aduzida diferença entre a energia e o potencial químico é dada por esse *gap* mais a energia cinética do movimento transversal das quase-partículas ligadas ao sóliton. Analiticamente, temos:

$$\varepsilon_{Lab}(\vec{k}) - \tilde{\mu} = \Delta + \frac{\vec{k}^2}{2m} \qquad (II.75)$$

onde

$$\Delta = \frac{1}{2} m\tilde{c}^2\Big(1 - \frac{2}{3}\gamma^2\Big) \qquad (II.76)$$

A equação $(II.74)$ envolve apenas as energias cinéticas. Mais precisamente, ela representa a energia cinética total do estado de quase-partícula ligada. Explicitemos cada um dos seus termos:

(i) $\vec{k}^2/2m$ é a energia cinética associada ao movimento transversal das quase-partículas;

(*ii*) $1/2\,m(\widetilde{c}V)^2$ é a energia que a quase-partícula adquire por mover-se longitudinalmente com o sóliton;

(*iii*) $1/6\,m(\widetilde{c}\gamma)^2$ é a energia cinética de ponto zero, por estar a quase-partícula ligada.

O *gap* existente na expressão ($II.75$) é de origem microscópica. Na vasta literatura experimental concernente ao hélio líquido a existência de *gaps* é prevista e tratada. Mas, em geral ele é introduzido num contexto fenomenológico ou semi-fenomenológico, como no caso da teoria de Landau[20]. Portanto, temos aqui um fato novo: um *gap* no espectro energético, que resulta de primeiros princípios.

Antes de adiantar que esse fato nos proporciona uma boa descrição para o líquido, lembramos que o seu surgimento representa mais um fato importante em direção à unificação das abordagens "rivais" apontadas na introdução.

CAPÍTULO III

A MECÂNICA ESTATÍSTICA E AS FASES DO LÍIQUIDO.(I)

As análises e os desenvolvimentos dos capítulos anteriores forneceram-nos um balanço detalhado das energias que estão presentes no sistema, no referencial de laboratório.

A feição característica desse processo todo é a de um modelo de três fluidos: o condensado, o fluido normal e a nuvem térmica. Com o método e o espírito dos trabalhos de London[11] e Tisza[14] chegamos a uma teoria de dois fluidos: o fluido normal e o superfluido. Mas, diversamente da teoria original, esta teoria de dois fluidos é quantitativa e microscópica, decorrendo de primeiros princípios. Isso tudo graças ao formalismo de segunda quantização introduzido por Bogoliubov[22] e pela abordagem de condensados não uniformes — via sóliton/teoria de campos — implementada na referência [34].

Com esses aperfeiçoamentos, trataremos, na próxima seção, da mecânica estatística dos sólitons no líquido. Na seção seguinte analisaremos os resultados mais proeminentes dessa abordagem. Adiantamos *in parenthesi* que os resultados deste capítulo, e em particular os da seção (II), são muito reveladores e gratificantes.

Ao que nos consta, trata-se da primeira abordagem microscópica que revela, de uma maneira conseqüente, um panorama completo de todas as fases do hélio líquido. Inclusive com um ponto λ muito próximo do experimental.

Mas, mais não adiantaremos. Deixaremos para a seção mencionada, uma discussão mais amenudada da amplitude e da abrangência desses resultados.

I. A ENERGIA LIVRE DO SISTEMA DE SÓLITONS

Para obtê-la, computamos a contribuição de dois termos: a energia

clássica do sistema sóliton/nuvem térmica e a energia livre das quase-partículas ligadas ao sóliton.

No caso de *um único sóliton*, teremos:

$$F_S(T) = E_c[\phi_c; \rho_{nt}(\vec{x}, t)] + F_{qp}(T) \qquad (III.1)$$

onde

$$F_{qp}(T) = \frac{AT}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d^2\vec{k} \, \ln\left\{1 - \mathrm{e}^{-(\varepsilon_{Lab}(\vec{k}) - \widetilde{\mu})/T}\right\} \qquad (III.2)$$

A integral acima é bidimensional porque apenas os modos transversais são integrados. Definindo f_{qp} como a energia livre por unidade de área e substituindo a expressão $(II.74)$ para $\varepsilon_{Lab}(\vec{k}) - \widetilde{\mu}$, teremos:

$$f_{qp} = \frac{T}{2\pi} \int_0^\infty dk \; k \, \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-(k^2/2m + \Delta)/T}\right) \qquad (III.3)$$

Fazendo $z = \Delta/T$ e $x = k/\sqrt{2mT}$, após uma integração por partes, vem:

$$f_{qp} = -\frac{mT^2}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{x^3}{\mathrm{e}^{x^2+z} - 1} \qquad (III.4)$$

se, ainda, fizermos $y = x^2$ e integrarmos, então:

$$f_{qp} = -\frac{mT^2}{2\pi} F_2(\Delta/T) \qquad (III.5)$$

A funcão $F_2(z)$ está definida no livro de London[11] (veja a equação (1′) do Apêndice) como:

$$F_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nz}}{n^2} \qquad (III.6)$$

Para obter a energia clássica do sóliton, por unidade de área, combinamos a equação $(II.22)$ com a hipótese $(II.26)$ e com a equação $(II.29)$, que define o índice de profundidade relativa. Então temos:

$$\sigma(\gamma, \chi) = \frac{2}{3} \bar{c} \, \rho_c \sqrt{\chi} \, \gamma^3 + O(\chi^{3/2}) \qquad (III.7)$$

Os termos em $\chi^{3/2}$ e potências maiores foram ignorados, porque χ é um número muito pequeno. Depois da minimização da energia livre e do estudo das fases no equilíbrio, veremos que esta aproximação é muito boa.

Com esses resultados, a energia livre, por unidade de área, de um sóliton com sua nuvem térmica, é dada por:

$$f_s = \frac{2}{3}\,\bar{c}\,\rho_c\,\sqrt{\chi}\,\gamma^3 - \frac{mT^2}{2\pi}\,F_2(\Delta/T) \qquad (III.8)$$

A energia livre total de todos os sólitons com suas nuvens térmicas, é obtida pela multiplicação da equação $(III.8)$ pelo número de sólitons $\underline{a}$ (veja a expressão $(II.73)$) como:

$$\begin{aligned} F_T &= F_T(\gamma,\chi,\Delta,T) \\ &= \frac{1}{3}\,m\,\bar{c}^2\rho_c\left\{\frac{2}{3}\,\chi^2\gamma^4 - \frac{mT^2}{2\pi\rho_c\bar{c}}\,\gamma\,\chi^{3/2}\,F_2(\Delta/T)\right\} \qquad (III.9) \end{aligned}$$

A energia livre total dos sólitons depende, de um modo bastante envolvente, de quatro variáveis: γ, χ, Δ e da temperatura T. Para determinar as configurações de equilíbrio $(\underline{a},\gamma)$ que são favorecidas numa certa temperatura, é preciso minimizar essas energia livre, nesses parâmetros.

No entanto, o problema pode ser simplificado um pouco mais, uma vez que essas quatro variáveis estão vinculadas. Vamos, pois, explicitar esses vínculos para obter uma energia livre que depende, unicamente, do *gap*, Δ e da temperatura, T. Aí, então, estaremos prontos para estudar as configurações de equilíbrio.

A primeira vinculação está dada na equação $(II.76)$, que define o *gap* das quase-partículas:

$$\Delta = \frac{1}{2}\,m\,\bar{c}^2\Big(1 - \frac{2}{3}\,\gamma^2\Big)$$

ou:

$$\frac{2\Delta}{m\,\bar{c}^2} = \Big(1 - \frac{2}{3}\,\gamma^2\Big)\chi \qquad (III.10)$$

Se tivermos uma equação para γ e outra para χ, poderemos, em princípio, obter a dependência dos parâmetros Δ, γ e χ com a temperatura.

Impomos, explicitamente, a aduzida condição de auto-consistência. Exigimos que a densidade da nuvem térmica fosse proporcional ao buraco do

sóliton pela equação $(II.26)$; e que fosse igual à média térmica da densidade das flutuações, pela equação $(II.36)$. Assumimos, pois, que:

$$\rho_{nt} = b\,Z(\vec{x},t) = \langle \eta^* \eta \rangle_{térmica} \qquad (III.11)$$

Assim, o cálculo de $\langle \eta^* \eta \rangle_{térmica}$ nos deve fornecer uma segunda relação de vínculo. A partir de $(II.37)$ podemos escrever:

$$\langle \eta^* \eta \rangle_{térmica} = \sum_m f_m^*(\vec{x})\, f_m(\vec{x})\, \langle a_m^* a_m \rangle_{térmico} \qquad (III.12)$$

O termo $\langle a_m{}^* a_m \rangle_{térmica}$ determina o número médio de ocupação do m-ésimo estado ligado à temperatura T. No referencial de laboratório os estados ligados de momento transversal $\vec{k}$, são dados por $(II.58)$. Então:

$$\langle \eta^* \eta \rangle_{térmica} = \frac{\mathcal{A}}{(2\pi)^2} \int d^2\vec{k}\, \left| \psi_{\vec{k}}^{(Lab)}(\vec{x},t) \right|^2 \frac{1}{e^{(\varepsilon_{Lab}(\vec{k}) - \widetilde{\mu})/T} - 1} \qquad (III.13)$$

Mas $\left| \psi_{\vec{k}}^{(Lab)}(\vec{x},t) \right|^2$ não depende de $\vec{k}$ e é dado por:

$$\left| \psi_{\vec{k}}^{(Lab)}(\vec{x},t) \right|^2 = \frac{m\widetilde{c}}{2\mathcal{A}\gamma\rho_c}\, Z(\vec{x},t) \qquad (III.14)$$

Assim:

$$\langle \eta^* \eta \rangle_{térmica} = -\frac{m^2 \bar{c}\sqrt{\chi}}{4\pi\rho_c\gamma} \left[\int_0^\infty \frac{ds}{\exp\left(\Delta/T + s - 1\right)} \right] Z(\vec{x},t) \qquad (III.15)$$

ou:

$$\langle \eta^* \eta \rangle_{térmica} = \frac{\sqrt{\chi}}{\gamma}\, S(\Delta,T)\; Z(\vec{x},t) \qquad (III.16)$$

se introduzirmos:

$$S(\Delta,T) = -\frac{m^2 \bar{c} T}{4\pi\rho_c} \ln(1 - e^{-\Delta/T}) \qquad (III.17)$$

Comparando a expressão $(III.16)$ com a expressão $(III.11)$, temos:

$$b = \sqrt{\chi}\, \frac{S(\Delta,T)}{\gamma} \qquad (III.18)$$

Por outro lado, como $b \sim 1$, podemos aproximar a equação acima para:

$$\gamma \cong \sqrt{\chi}\, S(\Delta, T) \qquad (III.19)$$

Portanto temos uma segunda relação de vínculo. Levando-a em $(III.10)$, ficamos com uma equação de segundo grau para o índice de profundidade:

$$\frac{2}{3} S^2 \chi^2 - \chi + \frac{2\Delta}{m\bar{c}^2} = 0 \qquad (III.20)$$

cujas raízes são:

$$\chi_{\pm}(\Delta, T) = \frac{3}{4S^2(\Delta, T)} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{16}{3} \frac{\Delta S^2}{m\bar{c}^2}} \right] \qquad (III.21)$$

Logo, podemos exprimir nossa energia livre $(III.9)$, fazendo uso dessas relações $(II.73), (II.19)$ e $(II.21)$, como:

$$F_T(\Delta, T) = \frac{1}{3} m\bar{c} \left\{ \frac{2}{3} \bar{c}\, \rho_c\, \chi^4\, S^4 - \frac{mT^2}{2\pi} \chi^2\, S\, F_2(\Delta/T) \right\} \qquad (III.22)$$

Ainda assim, a dependência da energia livre para com o *gap* é bastante envolvente. Estudaremos as fases de equilíbrio minimizando, numericamente, a energia acima, a cada temperatura. Devemos encontrar os valores de $\Delta_0(T)$ que a minimizam. Conhecidos os valores de $\Delta_0(T)$, os demais parâmetros estarão determinados numericamente, a partir das relações de vínculos anteriormente deduzidas. Deixamos para o Apêndice Numérico um tratamento mais detalhado da minimização da energia livre e de todos os outros detalhes do cálculo numérico.

Chamamos a atenção para a existência da região de saturação que ocorre no diagrama $\Delta_0(T) \times T$, conjugada ao fato de o radicando da equação $(III.21)$ tornar-se negativo. Olhemos com mais vagar esse ponto.

O radicando que aparece na definição do índice de profundidade $(III.21)$ pode ser posto na seguinte forma:

$$1 - \frac{16}{3} \frac{\Delta S^2}{m\,\bar{c}^2} = 1 - g(T)\; h(\Delta/T) \qquad (III.23)$$

onde:

$$g(T) = \frac{1}{3\pi^2}\frac{(mT)^3}{\rho_c^2(T)} \qquad (III.24)$$

$$h(y = \Delta/T) = y\left|\ln(1 - e^{-y})\right|^2 \qquad (III.25)$$

A figura $(III.1)$ (a e b) ilustra o comportamento dessas duas funções.

A função $g(T)$ cresce com a tempertura muito fortemente na proximidade da temperatura crítica do gás de Bose-Einstein. Já a função $h(y)$, que é nula na origem, passa por um máximo em $y_0 = 0.1748$ (quando $h_{máx} =$ .5855) e decai rapidamente.

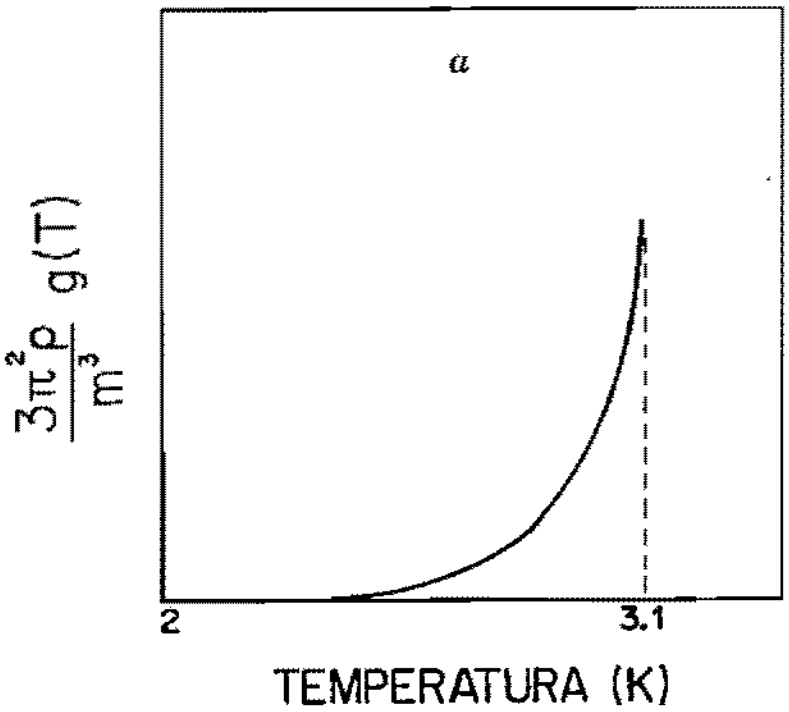
Para regiões de altas temperaturas, onde $g(T)\,h_{máx} > 1$, o radicando torna-se negativo. Essa região é a que denominamos de região de saturação. Nela, como χ se torna imaginário, não há soluções fisicamente aceitáveis para o parâmetro γ. Para esses valores do *gap*, a nuvem térmica "transbordaria". O sóliton ficaria tão cheio de quase-partículas termicamente excitadas, que as expresões que determinam γ e χ não poderiam ser satisfeitas simultaneamente!

As fronteiras da região de saturação são determinadas a partir das soluções da equação

$$g(T)\ h(\Delta_{sat}(T)/T) = 1 \qquad (III.26)$$

para cada valor de temperatura. Assim é possível determinar, numericamente, a função $\Delta_{sat}(T)$ que a figura $(III.2)$ exibe. Registramos que a região de saturação é uma nota distintiva e marcante da presença de sóliton no sistema. Como veremos na próxima seção e no capítulo IV o começo dessa região é muito próximo da região crítica.

É notável que todos os fenômenos importantes, relativos à transição de fase que passaremos a descrever, ocorram para pontos muito próximos da região de saturação. Em particular, a transição de fase superfluido/fluido normal ocorre por causa dessa região e muito próxima do seu início. Só para ilustrar, neste cálculo a região começa em $T_{\lambda'} = 2.056\ K$ e a temperatura de transição(ponto λ) é $T_\lambda = 2.093\ K$. Um pouco mais de 6% acima. Remetemos o leitor ao Apêndice Numérico, mais uma vez, se estiver interessado nos detalhes da minimização da energia livre e, de pronto, passamos à análise das fases do líquido.



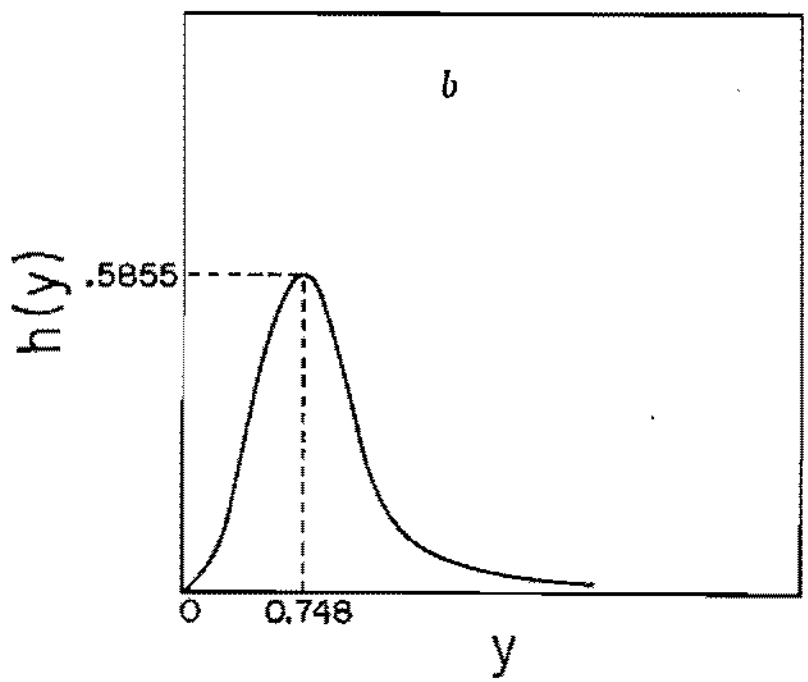


Figura III.1 - O radicando do índice de profundidade χ.

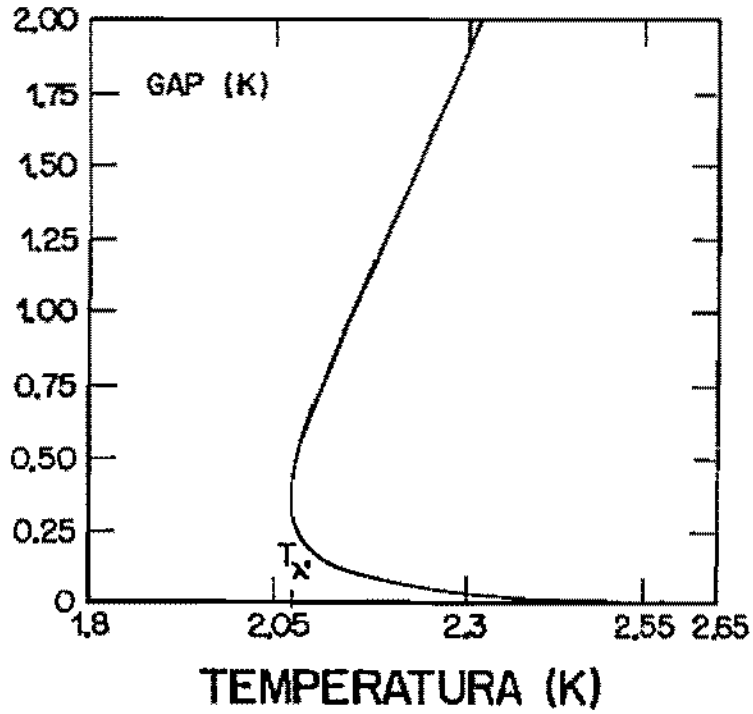


Figura III.2 - Região de saturação no plano $\Delta \times T$.

II. AS FASES DO LÍQUIDO

Estudamos as fases de equilíbrio do sistema a partir da es colha de uma das raízes $\chi_\pm$ da equação $(III.21)$. Comecemos com a raiz χ_-.

Encontramos uma linha de mínimos $\Delta_S(T)$ para o *gap* que começa no zero absoluto e sobe, mais ou menos a uma taxa constante, até a uma temperatura da ordem de 1.8 K. Depois daí, passando por seu valor máximo ($\Delta_S(T) \simeq 1.3\ K$) a curva sofre uma inflexão e cai, violentamente, até o ponto $\Delta \simeq 0.9\ K$, a uma temperatura de 2.093 K onde, então, o mínimo deixa de existir.

A situação descrita está ilustrada na figura $(III.3)$ como a fase A que nós identificaremos com a *fase superfluida* do líquido. O ponto assinalado com a seta é o ponto crítico (ponto λ) desta teoria.

Para ilustrar o sergimento desse ponto crítico, exibimos na seqüência $(a - e)$ da figura $(III.4)$ a evolução do ponto de mínimo da fase A com a temperatura.

As figuras (a) e (b) exibem pontos de mínimos usuais e característicos

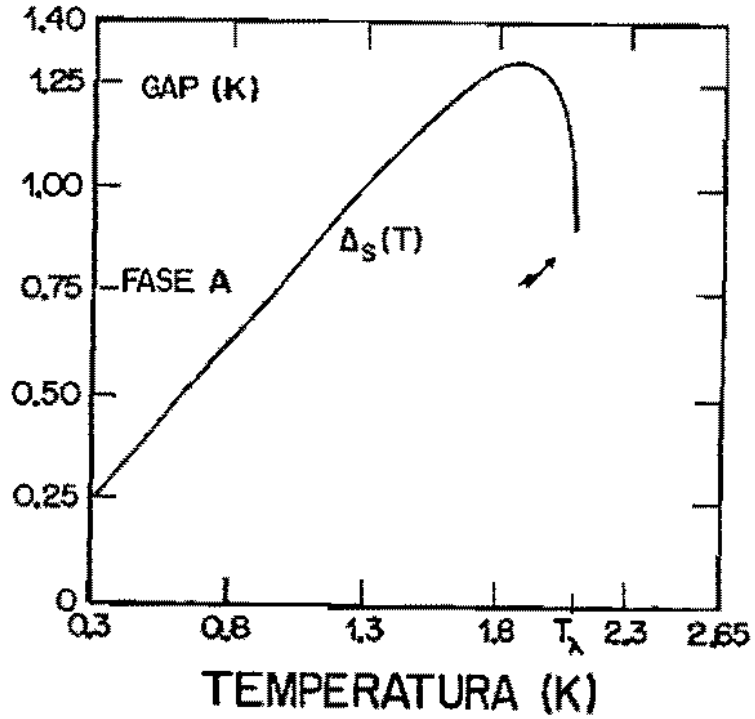


Figura III.3 - Trajetória do *gap*, $\Delta_S(T)$ na fase superfluida (fase A).

de quase toda a fase A. Já as figuras (c) e (d) mostram como a curva começa a apresentar uma mudança de tendência. Em particular a curva (d) exibe um ponto de mínimo ainda existente para uma temperatura ligeiramente menor que a do ponto crítico ($T = 2.0926\ K$, 0.019% abaixo). Na figura (e) o mínimo já desapareceu($T = 2.0966\ K$, 0.017% acima). Logo que esse mínimo desaparece com o aumento da temperatura, surgirá uma nova linha de mínimos $\Delta_\ell(T)$, agora decorrente da raiz χ_+ da equação $(III.21)$.

Esta nova linha de mínimos começa a ficar destacada em torno de $T_\ell = 2.073\ K$, muito próxima da região de saturação. Na verdade, até onde vai a precisão dos nossos cálculos, começa para o mesmo valor do *gap* e da temperatura da região de saturação. Daí por diante, vai progressivamente diminuindo e afastando-se da fronteira inferior da região de saturação. A figura $(III.5)$ e a figura $(III.7)$ exibem esse comportamento. Nós identificaremos a fase B com a *fase do fluido normal.*

Vemos que o mínimo que desapareceu na seqüência da figura $(III.4)$, caracterizando o ponto crítico, reapareceu na fase B, para fazer a linha de mínimos ir a zero continuamente, nessa fase. Fazemos uso de uma seqüência

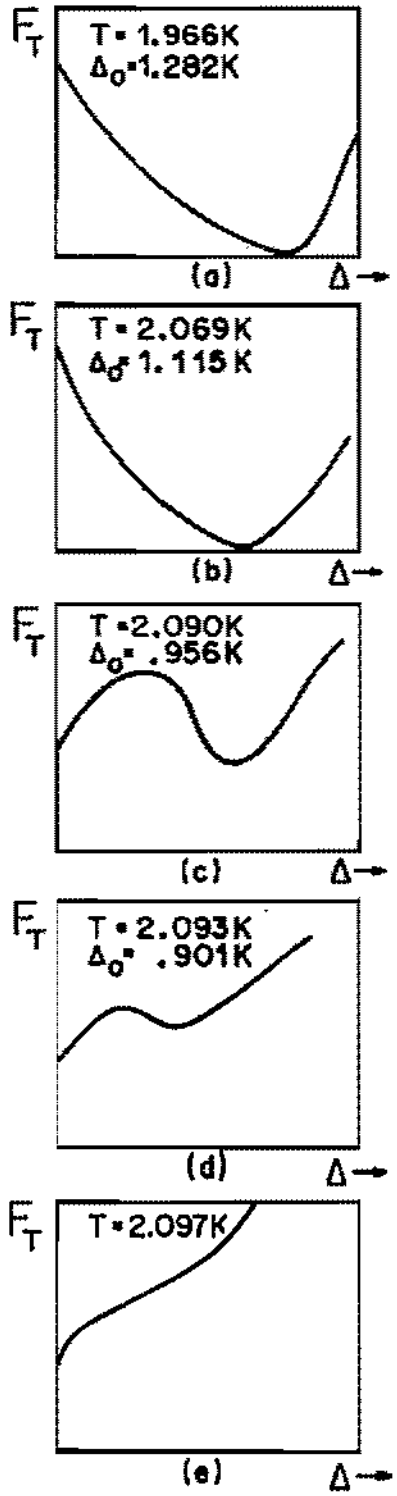


Figura III.4 - Deslocamento do mínimo na fase A (ver explicações no texto).

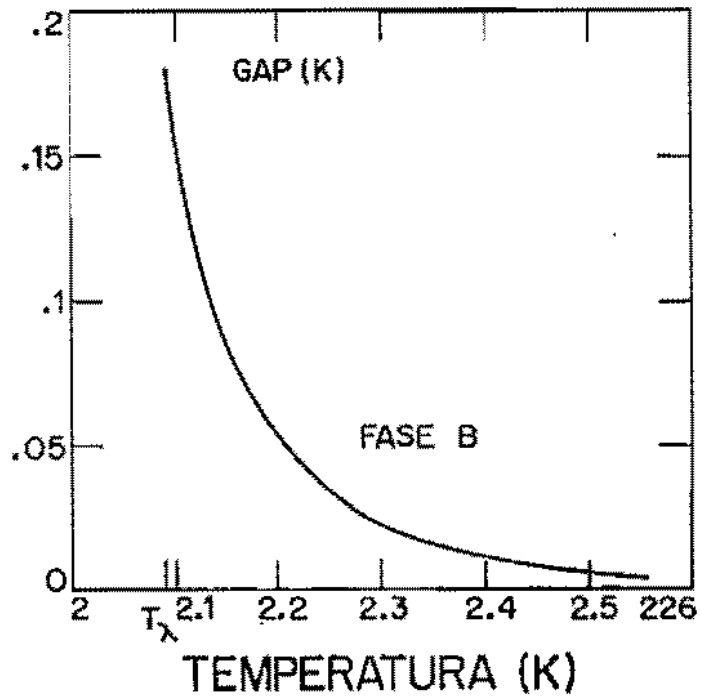


Figura III.5 - Trajetória do *gap*, $\Delta_\ell(T)$ na fase líquida normal (fase B).

semelhante a da figura($III.4$) para ilustrar — agora na figura ($III.6$) — o surgimento dessa nova linha de mínimos.

O maior valor de Δ_ℓ na figura ($III.6$) está próximo do valor de Δ que define a fronteira da região de saturação na temperatura considerada. Quanto T está muito próximo de $T_{\lambda'}$, o mínimo está literalmente "encostado" nessa fronteira e, com o aumento da temperatura (b) e (c), vai se afastando dela. Vai a zero mais rapidamente que a fronteira inferior da região de saturação.

Na figura ($III.4$) a situação é a oposta. A fronteira superior da região de saturação está à esquerda dos pontos de mínimo. À medida em que T aumenta, o ponto de mínimo se aproxima dessa região, até desaparecer nas suas proximidades. Esse fato caracteriza a transição de fase superfluido/fluido normal em nosso modelo. A pequena diferença entre essas temperaturas ($\sim 1\%$), é devida às aproximações que fizemos, ao exigir que $\chi << 1$. A figura ($III.7$) exibe o comportamento do *gap* nas duas fases, juntamente com a região de saturação.

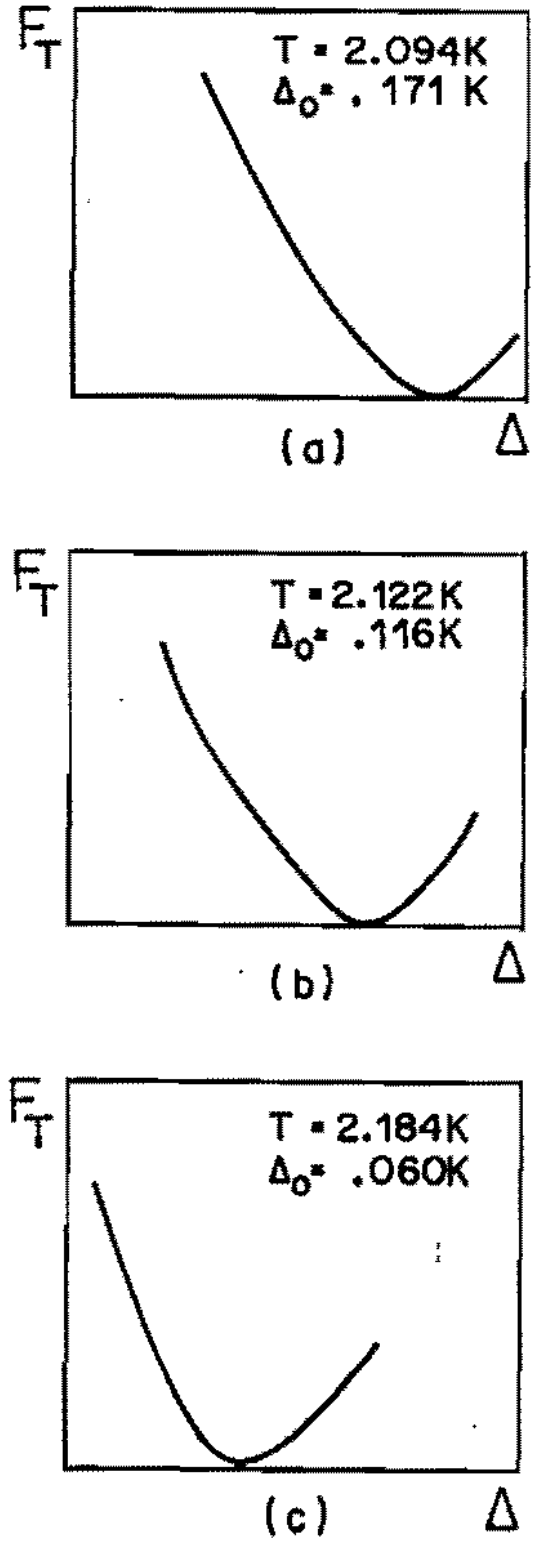


Figura III.6 - Deslocamento do mínimo na fase B (ver explicações no texto.

De posse dessas linhas de mínimos $\Delta_S(T)$ e $\Delta_\ell(T)$ para as duas fases, calculamos o calor específico a densidade constante $C_\rho(T)$, efetuando nu-

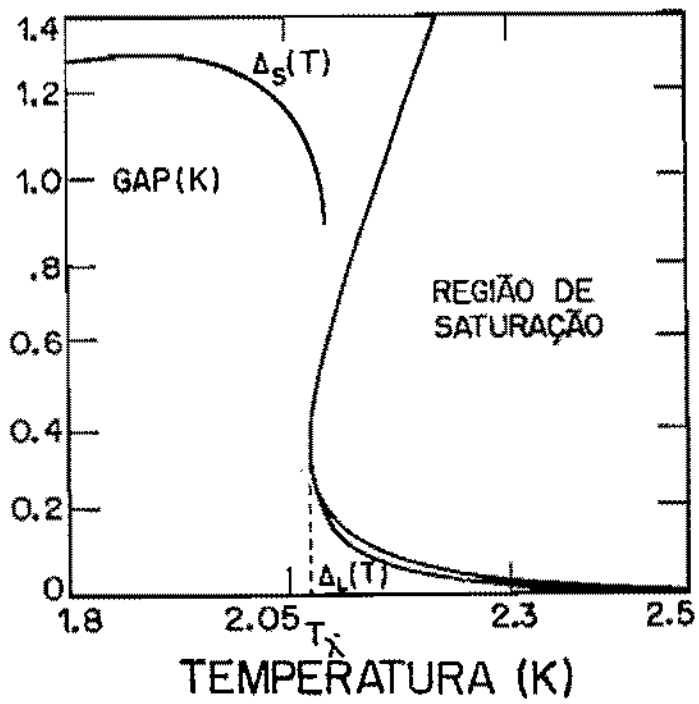


Figura III.7 - Trajetórias do *gap* (fase A e B) e região de saturação.

mericamente a segunda derivada da energia livre com a temperatura:

$$C_p(T) = -T\,\frac{d^2}{dT^2}\,F_T^{(0)} \qquad (III.27)$$

onde $F_T^{(0)}(T, \Delta(T))$ é o valor da energia livre, no ponto de equilíbrio. A figura $(III.8)$ mostra o calor específico associado aos sólitons do sistema e, cremos, justifica nossa denominação de T_λ para a temperatura crítica aqui obtida.

No ponto λ o calor específico diverge completamente. A temperatura onde isso ocorre ($T_\lambda = 2.093\ K$) é muito próxima$(3,5\%)$ da temperatura experimental da transição superfluido/líquido normal, à pressão normal, conhecida desde os trabalhos de Keesom. A maior parte das referências gerais discute e apresenta resultados experimentais sobre o calor específico do hélio líquido (veja, por exemplo, as referências [59], [60] e [61].

Na figura $(III.9)$ mostramos o calor específico total do líquido. Ele é obtido pela adição aos valores exibidos na figura $(III.8)$, do calor específico

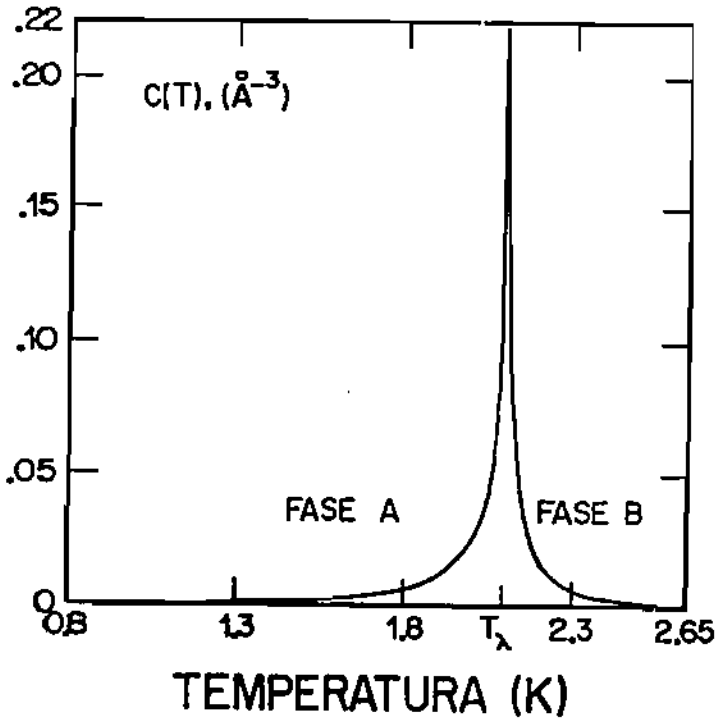


Figura III.8 - Calor específico do sistema de sólitons.

do fluido normal do gás de Bose-Einstein[11].

$$C_{BE}(T) = 1.926\, R\, (T/T_c)^{3/2} \qquad (III.28)$$

O calor específico do hélio superfluido, na região de Landau (0.6–1.8 K) pode ser parametrizado por:

$$C \simeq K\, \mathrm{e}^{-\Delta_0/T} \qquad (III.29)$$

onde K é uma constante e o *gap* térmico, Δ_0 situa-se em torno de 8 K[20]. Podemos escrever a expressão acima como:

$$\ln(C/K) \cong -\Delta_0/T \qquad (III.30)$$

Usando os nossos dados disponíveis para o calor específico, apresentamos na figura ($III.10$) o seu logarítmo como função do inverso da temperatura. Fazendo isso podemos ver que a mesma parametrização funciona com os nossos dados, indicando um *gap* térmico de 6.2 K, que está em bom

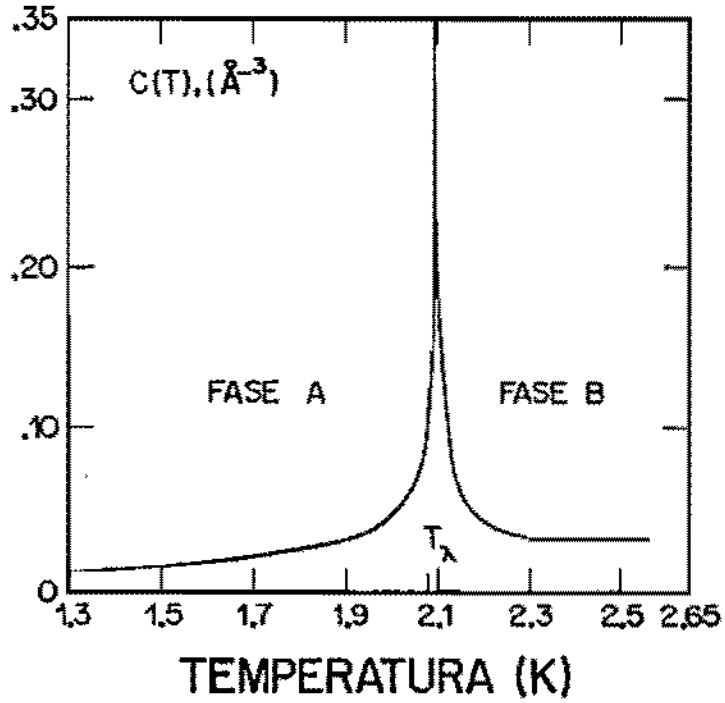


Figura III.9 - O calor específico total.

acordo com os resultados experimentais. Se a região de temperatura escolhida para a parametrização fosse o intervalo $1.2 - 1.5\ K$, o *gap* térmico seria $\Delta_0 \simeq 8.5\ K$.

Analisemos, agora, o comportamento das outras grandezas (γ, χ, $\underline{a}$ etc.). Muitas informações importantes podem advir dessa análise.

Comecemos com o número de sólitons, $\underline{a}$. A figura ($III.11$) mostra que ele é nulo no zero absoluto e muito pequeno até $T \approx 0.8\ K$, quando começa a crescer. De $T \approx 1.8\ K$ até T_λ esse número cresce muito rapidamente, atinge um máximo $T \approx 2.09\ K$ e cai abruptamente nas vizinhanças de T_λ. Logo acima da transição, a tendência ao decrescimento é ainda mais acentudada. Ao longo da fase B ele vai rapidamente a zero.

Portanto a transição é acompanhada de um crescimento muito acentuado no número de sólitons. Mas atentemos para um fato importante.

No intervalo de temperatura de aproximadamente $0.3\ K$ $(1.8 - T_\lambda)$ o número de sólitons $(\underline{a}/mc)$ passa de 6×10^{-3} para 1.4×10^{-2} (em números aproximados, dobra!). Contudo, nunca é maior do que ~ 0.015. Assim sendo, a aproximação que fizemos e discutimos na seção III do capítulo I

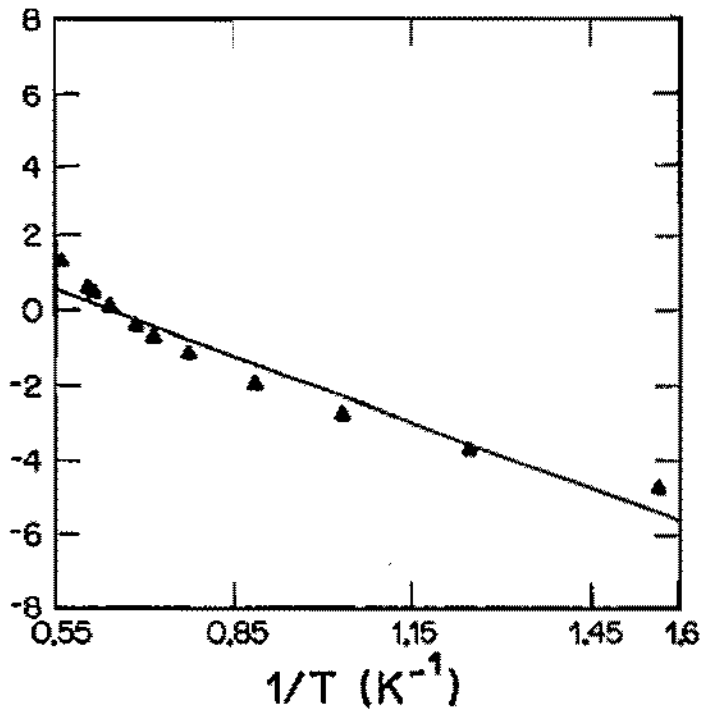


Figura III.10 - Logarítmo do calor específico (Δ) vs. o inverso da temperatura, no intervalo de $0.6 - 1.8\ K$. A reta contínua dá a derivada média, ou *gap* médio ($\approx 6.2K$).

é muito boa. Em particular, a aproximação $(I.50)$ é corroborada integralmente, pois o valor de γ que ali comparece é sempre $(0\ K - T_\lambda)$ ao menos uma ou duas ordens de grandeza maior do que $\underline{a}/mc$!

Consideremos, agora, o parâmetro γ, cujo comportamento se manifesta na figura $(III.12)$.

Trata-se de um número que cresce sempre com a temperatura. O crescimento é muito acentuado nas vizinhanças de T_λ. Contudo, em quase toda a extensão da fase A, ele é um número relativamente pequeno. Por exemplo, ainda em $T \sim 2.07\ K$, já crescendo rapidamente, seu valor é tal que $\gamma < 0.6$. Depois de transpor o ponto λ ele continua a crescer até a unidade (seu valor máximo permitido). Um pouco acima de $T \approx 2.25\ K$, já na fase B, o número γ torna-se ligeiramente maior do que 1 (nunca mais do que 10%). Embora esse comportamento seja anômalo, aqui ele já era esperado. Isso ocorre por que a equação $(II.76)$ "não sabe" que $\gamma < 1$! Quando introduzirmos, no capítulo IV, a nuvem térmica através do campo clássico ψ_c, a nova fórmula

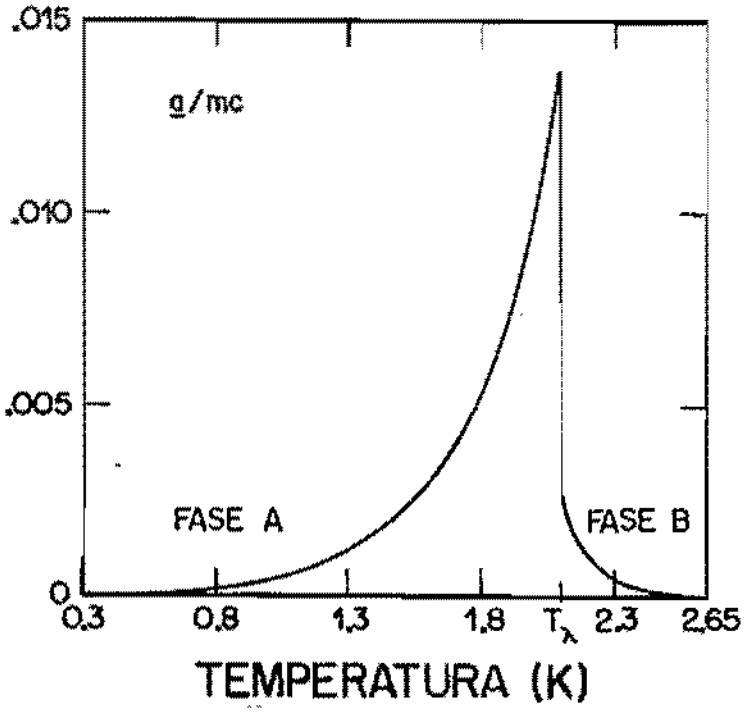


Figura III.11 - Número de sólitons.

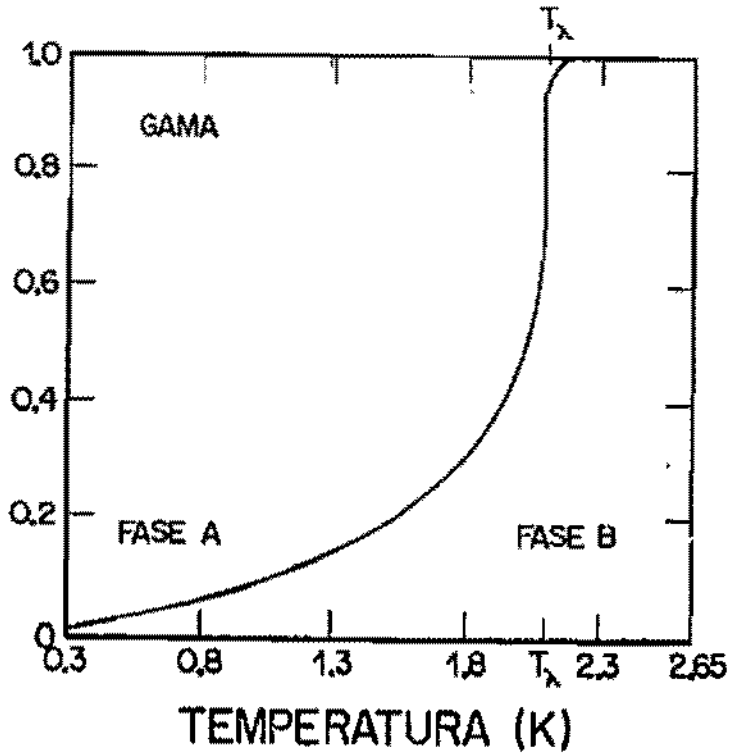


Figura III.12 - O número γ.

do *gap* já conterá a restrição de que $\gamma < 1$ ao assegurar a positividade do *gap*.

Aproveitando as informações retiradas do número γ, podemos ver na figura (III.13) o gráfico da velocidade dos sólitons, $\tilde{c}V$ com a temperatura.

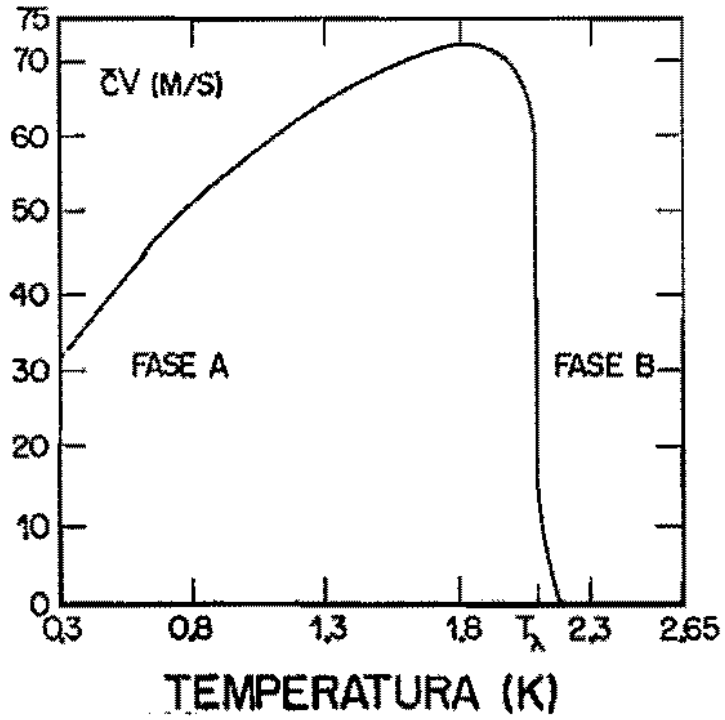


Figura III.13 - Velocidade dos sólitons em m/s.

O fato de γ ser relativamente pequeno em quase toda a extensão da fase A está também ilustrado na figura (III.13). Os sólitons "rasos" (γ pequeno) são muito velozes. Na fase B, como os sólitons são muito "profundos" eles também são muito lentos.

Para completar o quadro, mostramos na figura (III.14) o comportamento do índice de profundidade, χ, com a temperatura.

Ao longo do trabalho temos feito sempre a suposição de que $b \simeq 1$ (ou $\chi << 1$). Na figura (III.14) observamos que χ nunca ultrapassa o seu valor máximo de ≈ 0.21, atingido nas imediações do ponto λ, onde ele também cai violentamente. Em toda a extensão da fase B ele é um número muito pequeno. As nuvens térmicas enchem, quase que completamente, os sólitons.

Com as informações de que dispomos, podemos formar um panorama

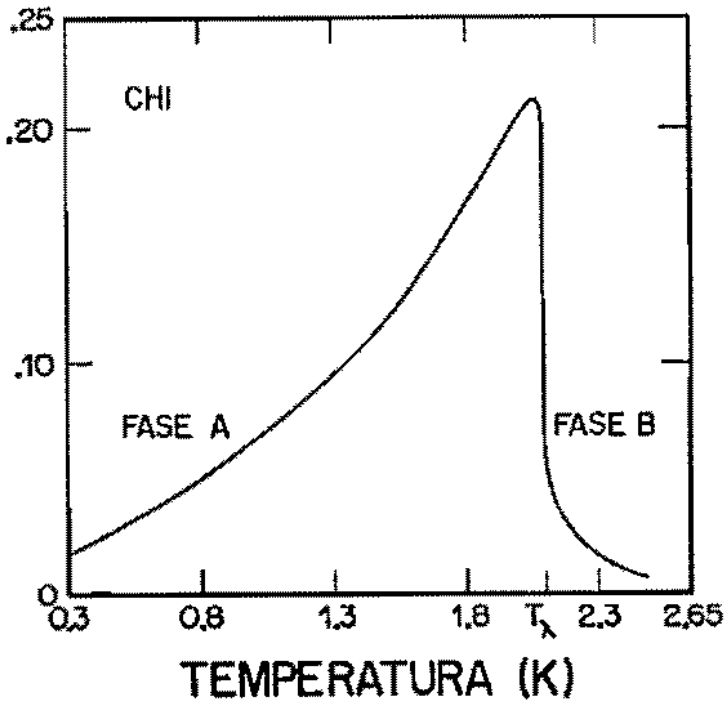


Figura III.14 - O índice de profundidade.

geral das duas fases do líquido. No capítulo IV esta mesma imagem será confirmada, acrescida de algumas informações adicionais importantes, advindas da introdução do novo campo ψ_c.

Todos os parâmetros, γ, χ, $\underline{a}$, $\tilde{c}V$ e $C_p(T)$ são nulos no zero absoluto. Todos eles sofrem uma mudança repentina em comportamento, nas vizinhanças de T_λ; a mais violenta sendo, obviamente, a do calor específico, que diverge.

Olhando para as duas fases, longe do ponto λ, o que temos é uma fase A, superfluida, com um número relativamente grande de sólitons rasos e muito velozes. A ocupação da nuvem térmica no buraco do sóliton é, em geral, pequena. Na fase B o número de sólitons é menor. Em compensação, esses sólitons são muito profundos e lentos, com uma forte ocupação da nuvem térmica no buraco do sóliton. Isso faz com que, na fase B os sólitons carreguem uma entropia muito maior por unidade de área, o que está em concordância com o que conhecemos a respeito dessa fase do líquido. No capítulo VI nós discutiremos com maiores detalhes, as implicações e a abrangência desta visão do hélio líquido com paredes, que acabamos de apresentar.

CAPÍTULO IV

O SEGUNDO CAMPO

Nos capítulos e seções precedentes, a nuvem térmica foi representada por uma densidade, ρ_{nt}. Sua principal característica era a proporcionalidade com o buraco do sóliton, assumida num primeiro momento e, em seguida, determinada "a posteriori" por auto-consistência.

No capítulo II, a nuvem térmica foi incorporada à energia clássica do sistema (cf. a equação $(II.22)$). Acabou por renormalizar o sóliton, vestindo-o com essas excitações e influindo, decisivamente, no nivelamento de cotas energéticas. Desse nivelamento resultou a determinação, precisa, do espectro de excitações no referencial de laboratório. Esses resultados, através da compatibilização das duas dinâmicas, permitiram a construção da mecânica estatística do problema.

A partir daí descortinou-se um panorama novo e bastante amplo do hélio líquido e suas fases, na presença de paredes de domínio, e desde uma perspectiva estritamente microscópica.

O objetivo deste capítulo e do seguinte, é mostrar que a dinâmica da nuvem térmica pode ser formulada de maneira mais precisa e mais rigorosa, a partir da introdução de um campo auxiliar, de saída, na lagrangiana do problema.

A dinâmica da nuvem será, então, ditada pela presença desse campo, ψ_c, cujo módulo quadrado deverá igualar-se à densidade da nuvem. O campo ψ_c é, na realidade, um campo de flutuação do campo do condensado original ϕ_c e, portanto, não é independente dele.

Contudo, e por razões que hão de tornar-se claras com a apresentação dos resultados, estudaremos a interdependência entre esses dois campos desde uma nova perspectiva. Pela introdução de dois outros campos clássicos, Φ e Ψ veremos que é possível reproduzir a interação sóliton/nuvem térmica, e seus desdobramentos, chegando a uma teoria bastante geral para a dinâmica do hélio líquido.

I. A FORMULAÇÃO LAGRANGIANA INDEPENDENTE

Consideremos a lagrangiana:

$$L[\Phi;\Psi] = \int d\vec{x}^{\,3}\left\{ i\Phi^*\partial_t\Phi - \frac{1}{2m}\,\vec{\nabla}\Phi^*\cdot\vec{\nabla}\Phi + \lambda\,\rho_c\,\Phi^*\Phi \right.$$

$$\left. -\frac{\lambda}{2}\,(\Phi^*\Phi)^2 \right\} + \int d\vec{x}^{\,3}\left\{ i\Psi^*\partial_t\Psi - \frac{1}{2m}\,\vec{\nabla}\Psi^*\cdot\vec{\nabla}\Psi + \lambda\,\rho_c\,\Psi^*\Psi \right.$$

$$\left. -\frac{\lambda}{2}\,(\Psi^*\Psi)^2 \right\} + \int d\vec{x}^{\,3}\left\{ -\lambda\,\Phi^*\Phi\,\Psi^*\Psi + i\vec{v}\,\Psi^*\vec{\nabla}\Psi \right\} \qquad (IV.1)$$

ou:

$$L[\Phi;\Psi] = L[\Phi] + L[\Psi] + L_{int}[\Phi;\Psi] \qquad (IV.2)$$

Antes de prosseguir, é importante que esclareçamos a origem dessa lagrangiana. Trata-se de uma lagrangiana efetiva. Só foi possível construí-la neste estágio do trabalho, em virtude de todos os cálculos que desenvolvemos até o capítulo **II**.

Essa lagrangiana representa um estágio mais avançado no desenvolvimento da teoria, pois é onde culminam os cálculos precedentes.

Assim sendo, a lagrangiana foi construída "a posteriori" e tem por função reproduzir a envolvente relação dinâmica sóliton/nuvem térmica e, como já salientamos, todos os seus desdobramentos. Portanto, no capítulo **IV** discutimos uma maneira mais elegante e aperfeiçoada de tratar essa dinâmica. Como veremos, na formulação deste capítulo e do próximo, seremos conduzidos, essencialmente, aos mesmos resultados obtidos até aqui(cf. cap. **III**) e a uma análise mais detalhada de todas as fases do fluido.

As equações de movimento, para os dois campos, são:

$$i\,\partial_t\Phi = -\frac{1}{2m}\,\vec{\nabla}^2\Phi - \lambda\,\rho_c\,\Phi + \lambda\,\Phi^*\Phi^2 + \lambda\,\Psi^*\Psi\,\Phi \qquad (IV.3)$$

e

$$i\,\partial_t\Psi = -\frac{1}{2m}\,\vec{\nabla}^2\Psi - iv\,\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \lambda\,\rho_c\,\Psi + \lambda\,\Psi^*\Psi^2 + \lambda\,\Phi^*\Phi\,\Psi \qquad (IV.4)$$

onde, em $(IV.4)$ já supusemos $\vec{v} = v_x\,x$.

Notamos que a equação $(IV.3)$ difere de uma equação de Gross-Pitaevskii apenas pelo termo $\lambda\,\Psi^*\Psi\,\Phi$ e a equação $(IV.4)$ pelos termos $-i\,v\,\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\lambda\,\Phi^*\Phi\,\Psi$. Somos levados, assim, a investigar a existência de um sóliton renormalizado como solução de $(IV.3)$, na forma:

$$\phi_c=\sqrt{\rho_c}\,\{V-i\gamma\,\mathrm{tgh}\,\gamma m\widetilde{c}(x-\widetilde{c}Vt)\} \qquad (IV.5)$$

e de uma solução semelhante à ψ_0 da equação $(II.54)$,

$$\Psi_c=\sqrt{b\,\rho_c}\,\frac{\gamma}{\cosh\gamma m\widetilde{c}(x-\widetilde{c}Vt)}\,\mathrm{e}^{-i\Omega t} \qquad (IV.6)$$

De fato, as duas expressões anteriores resolvem o sistema de equações $(IV.3)-(IV.4)$, quando substituídas no lugar de Φ e Ψ, respectivamente, com:

$$\begin{aligned} v&=\widetilde{c}V\\ \Omega&=-\frac{1}{2}\gamma^2 m\widetilde{c}^2 \end{aligned} \qquad (IV.7)$$

E isto é ótimo. De saída temos o sóliton, já renormalizado pela nuvem térmica, como em $(II.31)$. Temos também o campo ψ_c, que é, simultaneamente, proporcional ao buraco do sóliton e proporcional ao pacote $f_0(\vec{x},t)$ que apareceu no capítulo II. Em outras palavras, o interrelacionamento sóliton/nuvem térmica está determinado, e precisamente, pela dinâmica dos dois campos Φ e Ψ. Passemos a explorar, mais detidamente, todas as conseqüências dessa nova abordagem.

Comecemos por escrever a energia clássica do sistema, em função das soluções $(IV.5)$ e $(IV.6)$ (cf. a equação $(II.22)$):

$$\begin{aligned} E_c[\,\phi_c;\psi_c\,]=&\int d\vec{x}^{\,3}\left\{\frac{1}{2m}\,\vec{\nabla}\phi_c^*\cdot\vec{\nabla}\phi_c-\lambda\,\rho_c\,\phi_c^*\phi_c+\frac{\lambda}{2}\,(\phi_c^*\phi_c)^2\right\}\\ &+\int d\vec{x}^{\,3}\left\{\frac{1}{2m}\,\vec{\nabla}\psi_c^*\cdot\vec{\nabla}\psi_c-\lambda\,\rho_c\,\psi_c^*\psi_c+\frac{\lambda}{2}\,(\psi_c^*\psi_c)^2\right\}\\ &+\int d\vec{x}^{\,3}\left\{\lambda\,\phi_c^*\phi_c\,\psi_c^*\psi_c-i\widetilde{c}V\,\psi_c^*\partial_x\psi_c\right\} \end{aligned} \qquad (IV.8)$$

Como a integração em $(IV.8)$ se estende sobre todo o espaço, o último termo, que é ímpar, anula-se.

Chamamos, novamente, a atenção para a semelhança formal entre a equação $(II.22)$ e a equação $(IV.8)$. Como o termo $\psi_c^*\psi_c$ é o equivalente formal de ρ_{nt}, a única diferença entre as duas expressões é o termo cinético do campo clássico, ψ_c, a saber:

$$K(\psi_c) = \int d\vec{x}^{\,3} \left\{ \frac{1}{2m} \vec{\nabla}\psi_c^* \cdot \vec{\nabla}\psi_c \right\} \qquad (IV.9)$$

Para calculá-lo, explicitamente, usando $(IV.5)$, sabemos que:

$$\int d\vec{x}^{\,3} \frac{1}{2m} \left| \vec{\nabla}\psi_c \right|^2 = \frac{\mathcal{A}}{2} \frac{b\,\rho_c\,\gamma^4\,m\,\tilde{c}^2}{\gamma\,m\,\tilde{c}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz\,\mathrm{sech}^2\,z$$

$$= \frac{1}{3}\mathcal{A}\,\rho_c\,\gamma^3\,\tilde{c}\,b$$

onde $\mathcal{A}$ é a área transversa do sóliton. Como $b = 1 + \chi$ e $\tilde{c} = \bar{c}\sqrt{\chi}$, o termo cinético $(IV.9)$, por unidade de área, será:

$$K(\psi_c) = \frac{1}{3}\,\bar{c}\,\rho_c\,\sqrt{\chi}\,\gamma^3 + O(\chi^{3/2}) \qquad (IV.10)$$

Para obter a nova tensão superficial clássica do sóliton/nuvem térmica, basta adicionar o termo cinético acima (equação $(IV.9)$) ao resultado anteriormente obtido (equação $(III.7)$) e escrever:

$$\sigma(\gamma,\chi) = \bar{c}\,\rho_c\,\sqrt{\chi}\,\gamma^3 + O(\chi^{3/2}) \qquad (IV.11)$$

Vamos deduzir agora, de acordo com os procedimentos anteriormente firmados, qual deve ser a "nova" hamiltoniana das quase-partículas da nuvem térmica. Para isso, na energia clássica $(IV.8)$ introduzimos $\phi_c = \phi_c + \eta$ no lugar de ϕ_c. Isto nos dá — mantendo até termos quadráticos na flutuação — a seguinte expressão:

$$E_c[\,\phi_c, \psi_c; \eta\,] = E[\,\phi_c; \psi_c\,] + H^0\{\eta\} \qquad (IV.12)$$

sendo:

$$E[\,\phi_c; \psi_c\,] = \int d\vec{x}^{\,3} \left\{ \frac{1}{2m} \left| \vec{\nabla}\phi_c \right|^2 - \lambda\,\rho_c\,\phi_c^*\phi_c + \frac{\lambda}{2}(\phi_c^*\phi_c)^2 \right.$$

$$\left. + \lambda(\phi_c^*\phi_c - \rho_c)\,\psi_c^*\psi_c + \frac{1}{2m} \left| \vec{\nabla}\psi_c \right|^2 + \frac{\lambda}{2}(\psi_c^*\psi_c)^2 \right\} \qquad (IV.13)$$

e

$$H^0\{\eta\} = \int d\vec{x}^{\,3} \left\{ \frac{1}{2m} \left| \vec{\nabla}\eta \right|^2 + \lambda \left(2\,\phi_c^* \phi_c + \psi_c^* \psi_c - \rho_c \right) \eta^* \eta \right\} \qquad (IV.14)$$

Novamente, devemos promover a subtração de contra-termos. Dois desses contra-termos são os mesmos que anteriormente subtraímos (cf. equação $(II.40)$). Portanto, num primeiro momento, teremos:

$$H_1\{\eta\} = H^0\{\eta\} - \int d\vec{x}^{\,3} \left\{ \lambda \left(\phi_c^* \phi_c - \rho_c \right) \eta^* \eta \right\} \qquad (IV.15)$$

Mas, agora, além desses dois contra-termos, devemos subtrair também a energia cinética do pacote $f_0(\vec{x}, t)$, pois ela já está incorporada no termo cinético do segundo campo da equação $(IV.13)$ e aparece, portanto, computada na equação $(IV.11)$. Assim, devemos ter:

$$H_2\{\eta\} = H_1\{\eta\} - \frac{1}{6}\gamma^2 m \tilde{c}^2 \int d\vec{x}^{\,3}\, \eta^* \eta \qquad (IV.16)$$

ou:

$$H_2\{\eta\} = \int d\vec{x}^{\,3} \left\{ \frac{1}{2m} \vec{\nabla}\eta^* \cdot \vec{\nabla}\eta + \lambda \left(\phi_c^* \phi_c + \psi_c^* \psi_c \right) \eta^* \eta \right\} - \int d\vec{x}^{\,3} \left\{ \frac{1}{6}\gamma^2 m \tilde{c}^2\, \eta^* \eta \right\} \qquad (IV.17)$$

Desse modo, a expressão $(IV.17)$ é a nova hamiltoniana das quase-partículas ligadas da nuvem térmica. Sugerimos ao leitor que a compare à expressão $(II.41)$ do capítulo **(II)**.

De fato, as duas expressões diferem, formalmente, pelo termo cinético subtraído nesta última. Essa diferença é, no entanto, de grande importância. Desejamos extrair, de imediato, as conseqüências mais expressivas desta abordagem. Por isso reservamos a próxima seção, entre outras coisas, para uma discussão melhor elaborada acerca da natureza desse termo cinético.

Voltemos à equação $(IV.17)$. Em estrita analogia com o que fizemos na seção II-c do capítulo II, vemos que a equação de movimento a ela associada, será:

$$i\,\partial_t \eta = -\frac{1}{2m} \vec{\nabla}^2 \eta + U_2(x)\,\eta \qquad (IV.18)$$

onde

$$U_2(x) = \lambda\,(\phi_c^*\phi_c + \psi_c^*\psi_c) - \frac{1}{6}\,\gamma^2 m\widetilde{c}^2 \qquad (IV.19)$$

Como o termo $\lambda\,(\phi_c^*\phi_c+\psi_c^*\psi_c)$ é equivalente a $U(x)$ na expressão $(II.44)$, o problema associado às flutuações é o mesmo. Basta, pois, subtrair esse novo termo cinético de maneira conveniente. Isso quer dizer que a energia do pacote, $E_N\{f_0\}$, na equação $(II.68)$, perde o termo cinético, tornando-se:

$$\widetilde{E}_N\{f_0\} = \lambda\,\rho_c\left\{1 - \frac{2\gamma a}{m\widetilde{c}}\right\} \qquad (IV.20)$$

e, em contrapartida, a energia média do pacote, na dinâmica da nuvem térmica, $E_{NT}\{f_0\}$, da equação $(II.70)$, passa a ser dada por:

$$\widetilde{E}_{NT}\{f_0; t=0\} = \lambda\,\rho_c - \frac{1}{2}\,\gamma^2 m\widetilde{c}^2 - \frac{1}{6}\,\gamma^2 m\widetilde{c}^2$$

ou:

$$\widetilde{E}_{NT}\{f_0; t=0\} = \lambda\,\rho_c - \frac{2}{3}\,\gamma^2 m\widetilde{c}^2 \qquad (IV.21)$$

Da condição de compatibilização imposta no capítulo **II** (cf. equação $(II.71)$) resulta a seguinte expressão para o número de sólitons no sistema:

$$\frac{a}{m\widetilde{c}} = \frac{1}{3}\,\gamma\,\chi^{3/2} \qquad (IV.22)$$

que é exatamente a mesma expressão que $(II.73)$. Isso deveria ocorrer porque, na prática, o que se fez foi simplesmente mudar o lado do termo cinético na ccompatibilização da dinâmica (eq. $(II.73)$). No entanto, o significado físico desse procedimento reveste-se de uma importância fundamental. Trata-se de uma maneira diferente de abordar e entender as duas dinâmicas do problema. Dedicamos a próxima seção a esclarecer e a aprofundar esses fatos.

II. O FENÔMENO DA CONDENSAÇÃO DO NOVO CAMPO

Iniciaremos esta seção revendo um argumento apresentado na referência [45] para explicar a compatibilização das dinâmicas, via produção de sólitons.

No equilíbrio, o número de sólitons está determinado pela expressão ($IV.22$). Consideremos, no entanto, um sistema diluído em que o número de sólitons, $\underline{a}'$ é menor do que o de uma configuração de equilíbrio.

Como vimos na seção II-c do capítulo II (veja discussão na seqüência, abaixo da equação ($II.64$) o fato de o sistema possuir muitos sólitons, faz surgir uma "banda" de estados instantâneos. Uma primeira (e boa) estimativa para o piso energético dessa banda é, justamente, a energia do pacote:

$$f_0(\vec{x},t) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{A}}}\sqrt{\frac{\gamma\, m\,\widetilde{c}}{2}}\,\frac{1}{\cosh\gamma m\widetilde{c}(x-\widetilde{c}Vt)} \qquad (IV.23)$$

que descreve os estados de menor energia. Essa energia é dada por (cf. eq.($II.69$)):

$$E_{NT}\{f_0\} = \lambda\,\rho_c - \frac{1}{2}\gamma^2 m\widetilde{c}^2 \qquad (IV.24)$$

Já o nível do campo médio para o fluido normal, na configuração descrita por $\underline{a}'$ (cf. eq. ($II.72$)) será dado por:

$$\widetilde{V}_1(\underline{a}') = \lambda\,\rho_c\left\{1 - \frac{2\gamma\underline{a}'}{m\widetilde{c}}\right\} \qquad (IV.25)$$

Como $\underline{a}'$, por hipótese, é pequeno, a energia ($IV.25$) é muito maior que o piso dessa banda.

Por outro lado, o potencial químico deve igualar-se à menor energia do sistema, que é $E_{NT}\{f_0\}$. Portanto, será diferente do potencial no campo médio ($IV.25$). Essa diferença é um *gap* residual, na forma:

$$\begin{aligned}\Delta' &= \widetilde{V}_1(\underline{a}') - \mu \\ &= \lambda\,\rho_c - \frac{2\gamma\underline{a}'}{m\widetilde{c}}\,\lambda\,\rho_c - \lambda\,\rho_c + \frac{1}{2}\gamma^2 m\widetilde{c}^2\end{aligned} \qquad (IV.26)$$

ou:

$$\Delta' = \frac{1}{2}\gamma^2 m\widetilde{c}^2 - \frac{2\gamma\underline{a}'}{m\widetilde{c}}\,\lambda\,\rho_c \qquad (IV.27)$$

Com isto a energia livre do fluido normal deve ser um termo do tipo (Ω é o volume):

$$F_N = \Omega\,\frac{T}{(2\pi)^3}\int_0^\infty d^3\vec{p}\;\ln\left(1 - \mathrm{e}^{-(\vec{p}^2/2m+\Delta')/T}\right) \qquad (IV.28)$$

Já a energia livre dos sólitons é um termo proporcional a $\underline{a}'$, que é pequeno. Para minimizar a energia livre, cujo termo mais importante é o termo de volume acima, o sistema deve ter a tendência a minimizar o gap residual, Δ'. Isto é, em vista da expressão $(IV.25)$, o sistema terá de produzir muitos sólitons para, baixando o campo médio, baixar Δ' e tornar mais negativa a energia livre $(IV.28)$.

A situação de equilíbrio deve ocorrer quando Δ' for nulo (ou desprezivelmente pequeno), de modo que a partir de $(IV.27)$:

$$\frac{2\gamma\underline{a}'}{m\tilde{c}}\,\lambda\,\rho_c = \frac{1}{2}\,\gamma^2 m\tilde{c}^2$$

ou:

$$\frac{\underline{a}'}{m\,c} = \frac{1}{4}\sqrt{1-\tau^{3/2}}\,\gamma\,\chi^{3/2} \qquad (IV.29)$$

Assim a expressão $(IV.29)$, obtida por argumentos heurísticos, difere de $(II.73)$ e $(IV.22)$ justamente porque o contra-termo cinético ainda não foi subtraído.

Essa análise intuitiva revela ainda um outro fato da maior importância. Quando o potencial químico se iguala à energia do pacote instantâneo, tem lugar a condensação de um campo clássico que é proporcional à função de onda desse estado. Da mesma forma na teoria de London , onde o estado de energia zero, cuja função de onda é constante e uniforme, condensa para formar o condensado uniforme daquele sistema. Esse campo clássico que condensa é exatamente o nosso campo $\psi_c(\vec{x},t)$. Ele representará a condensação do pacote instantâneo $f_0(\vec{x},t)$.

Olhando para a expressão $(IV.5)$ é fácil ver que:

$$\psi_c(\vec{x},t) \sim f_0(\vec{x},t)$$

onde, como já dissemos, o novo campo é proporcional ao pacote instantâneo e também é proporcional ao buraco do sóliton! De fato,

$$\left|\,\psi_c(\vec{x},t)\,\right|^2 = \rho_{nt}(\vec{x},t) = b\,Z(\vec{x},t) \qquad (IV.30)$$

(cf. a equação $(II.26)$).

Essas proporcionalidades do novo campo vêm, mais uma vez, reforçar o caráter fundamental daquela primeira hipótese do capítulo **II** (eq. $(II.26)$). Detenhamo-nos um pouco mais sobre esse campo $\psi_c(\vec{x},t)$.

Na seção **(II-c)** do capítulo **II**, as funções de onda das quase-partículas ligadas no referencial de laboratório, eram (eq. $(II.58)$):

$$\psi_{\vec{k}}^{(Lab)}(\vec{x},t) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{A}}}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{z}+m\tilde{c}Vx)}\, \psi_0(x-\tilde{c}Vt) \qquad (IV.31)$$

Devido à proporcionalidade estabelecida entre $\psi_c(\vec{x},t)$ e ψ_0 podemos interpretar o novo campo como um envelope que modula todas as funções de onda ligadas. Enquanto o pacote instantâneo $f_0(\vec{x},t)$ evolui complicadamente com o tempo, o campo clássico ψ_c é estável. Mesmo sendo, a cada instante, proporcional ao referido pacote.

Acontece que essa tendência dispersiva é contrabalançada pela não linearidade com que o campo ψ_c comparece nas equações de movimento. Lembremos que, além da auto-interação de ψ_c há também uma interação, não linear, entre o campo ψ_c e o campo do condensado ϕ_c. A não linearidade representa uma tendência à aglutinação, contrapondo-se, então, à dispersão típica do pacote $f_0(\vec{x},t)$. A estabilidade deve decorrer, portanto, do equilíbrio entre essas duas tendências[62].

Agora, talvez, possamos entender melhor a natureza do termo cinético, $1/6\,\gamma^2\, m\tilde{c}^2$. Na análise que fizemos no cap. **II**, o pacote instantâneo $f_0(\vec{x},t)$ não possuía a mesma energia do piso do fluido normal. Agora, porém, ele tem a mesma energia. O que ocorre é que, quando uma quase-partícula do fluido normal se acopla à nuvem térmica, o campo ψ_c sofre uma modificação infinitesimal. Isso implica num gasto extra de energia, devido ao termo cinético desse campo, que é, precisamente, $1/6\,\gamma^2\, m\tilde{c}^2$.

No capítulo **II** essa era exatamente a diferença entre a energia de $f_0(\vec{x},t)$ e o piso do potencial químico do sistema (ver a figura $(II.2)$).

CAPÍTULO V

A MECÂNICA ESTATÍSTICA E AS FASES DO SISTEMA. (II)

I. PRELIMINARES

A mecânica estatística do sistema, na presença do novo campo clássico $\psi_c(\vec{x},t)$ desenvolve-se de maneira inteiramente análoga ao que fizemos no capítulo **III**. A expressão formal para a energia livre é exatamente a mesma (cf. eq. $(III.9)$). A introdução do campo implicou numa redefinição para o *gap* (que mostraremos) e, em decorrência disso, a fórmula para o índice de profundidade, $\chi_\pm$ (eq. $(III.21)$) deve ser revista.

O *gap* era dado por:

$$\Delta = \frac{1}{2}m\tilde{c}^2\Big(1-\frac{2}{3}\gamma^2\Big)$$

ou, como, $\gamma^2 = 1 - V^2$, na forma:

$$\Delta = \frac{1}{6}m\tilde{c}^2 + \frac{1}{3}m\tilde{c}^2\,V^2 \qquad (V.1)$$

Com a subtração do contra-termo cinético, $\frac{1}{6}m\tilde{c}^2\,(1-V^2)$, o novo *gap* passa a ser dado por:

$$\tilde{\Delta} = \Delta - \textit{contra termo cinético}$$

portanto:

$$\tilde{\Delta} = \frac{1}{2}m\tilde{c}^2\,V^2 = \frac{1}{2}m\tilde{c}^2\Big(1-\gamma^2\Big) \qquad (V.2)$$

O novo *gap* das quase-partículas constituintes da nuvem térmica representa a energia da excitação devida ao movimento longitudinal do sóliton (de velocidade $\tilde{c}V$). Esta expressão já contém a garantia de que $\gamma < 1$, para assegurar a positividade do *gap*. Aquela pequena anomalia numérica apontada por γ, logo depois da figura $(III.12)$, decorrente das aproximações que fizemos, não mais ocorrerá. Se o leitor quiser se antecipar, poderá observar que na figura $(V.5)$, na fase B, o número γ, depois de efetuada a minimização, tende à unidade da maneira esperada.

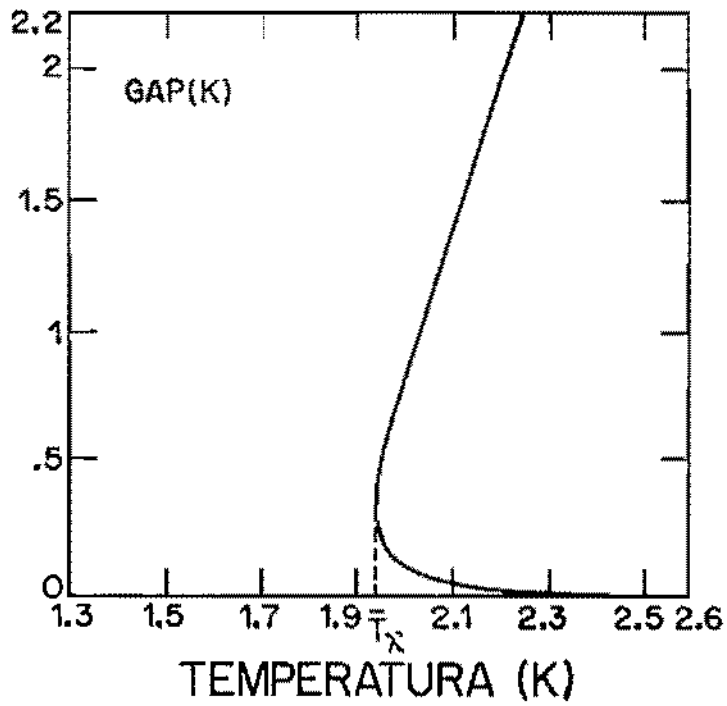


Figura V.1 - Região de saturação no plano $\widetilde{\Delta}_{sat} \times T$.

Na expressão de $\widetilde{\Delta}$, substituímos γ dado por $(III, 19)$ e teremos:

$$\widetilde{\Delta} = \frac{1}{2} m\bar{c}^2 \widetilde{\chi}(1 - \widetilde{\chi} S^2) \qquad (V.3)$$

ou uma nova equação quadrática para o novo índice de profundidade, $\widetilde{\chi}$:

$$\widetilde{\chi}^2 S^2 - \widetilde{\chi} + \frac{2\widetilde{\Delta}}{m\bar{c}^2} = 0 \qquad (V.4)$$

cujas raízes serão:

$$\widetilde{\chi}_{\pm}(\Delta, T) = \frac{1}{2S^2(\widetilde{\Delta}, T)} \left[1 \pm \sqrt{1. - \frac{8\Delta S^2}{m\bar{c}^2}} \right] \qquad (V.5)$$

Todas as análises relativas à região de saturação que fizemos, são as mesmas. Mudam apenas os valores de $\widetilde{\Delta}_{sat}$ que determinam a fronteira da região de saturação. Agora eles são a solução, a cada temperatura, da equação auto-consistente:

$$\widetilde{\Delta}_{sat} = \frac{m\bar{c}^2}{8S^2(\widetilde{\Delta}_{sat}, T)} \qquad (V.6)$$

A figura $(V.1)$ mostra a região de saturação no plano $\Delta_{sat} \times T$.

A temperatura onde se inicia a região de saturação é um pouco menor que a obtida no capítulo **III**: $\widetilde{T}_{\lambda'} = 1.943\ K$. A região crítica dar-se-á a temperaturas um pouco menores que as do capítulo **III**. A temperatura de transição, $\widetilde{T}_\lambda$ é aproximadamente, 6% menor (consulte a tabela (V.1)).

II. AS FASES DO LÍQUIDO (II)

Tendo introduzido as modificações necessárias na seção anterior, o processo de minimização é absolutamente idêntico ao empregado no capítulo **III**. Nossa análise dos resultados seguirá, portanto, um caminho semelhante ao descrito nesse capítulo.

A *fase superfluida* — fase A — inicia-se no zero absoluto e termina no novo ponto crítico, agora $\widetilde{T}_\lambda = 1.962\ K$ que é o nosso novo ponto λ. Obviamente ela também ocorre para a raiz negativa, $\widetilde{\chi}_-$, da equação (V.5).

A *fase do líquido normal* — fase B — inicia-se agora em $\widetilde{T}_\ell = 1.945\ K$, que é cerca de 0.1% maior do que $\widetilde{T}_{\lambda'}$.

A evolução dessas linhas de mínimos $\widetilde{\Delta}_s(T)$ e $\widetilde{\Delta}_\ell(T)$é muito semelhante às da figura (III.7) e são mostradas na figura (V.2), juntamente com a região de saturação.

Na figura (V.3) nós mostramos as linhas de mínimo das fases superfluida e normal para as duas abordagens. As linhas superiores são do primeiro cálculo (cap.**III**).

Pode-se ver que os valores típicos de $\widetilde{\Delta}$ estão sempre abaixo dos valores típicos de Δ.

O calor específico, também, apresenta o mesmo tipo de comportamento: uma divergência no ponto crítico. Veja a figura (V.4).

Descontando as pequenas diferenças decorrentes da mudança na região crítica, o panorama geral da fase líquida normal e da fase superfluida é idêntico àquele que descrevemos no capítulo **III**. As demais grandezas, γ, χ e $\underline{a}$ são mostradas nas figuras (V.5), (V.6)e(V.7) respectivamente. Chamamos novamente a atenção para o fato de o valor de γ apresentar o comportamento correto.

Mas há ainda duas outras linhas de mínimos, $\Delta_c(T)$ e $\Delta_\alpha(T)$ associadas,

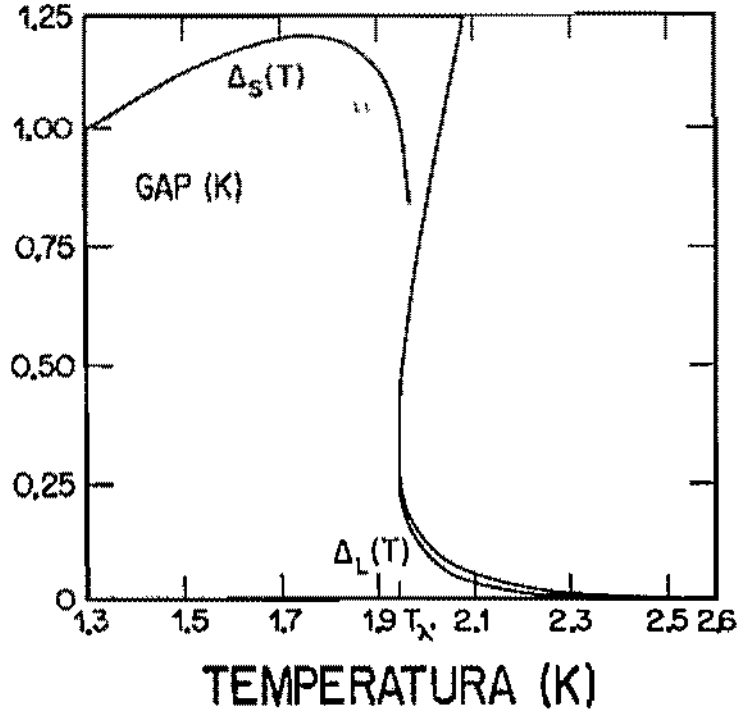


Figura V.2 - Trajetória do gap (fases A e B) e região de saturação.

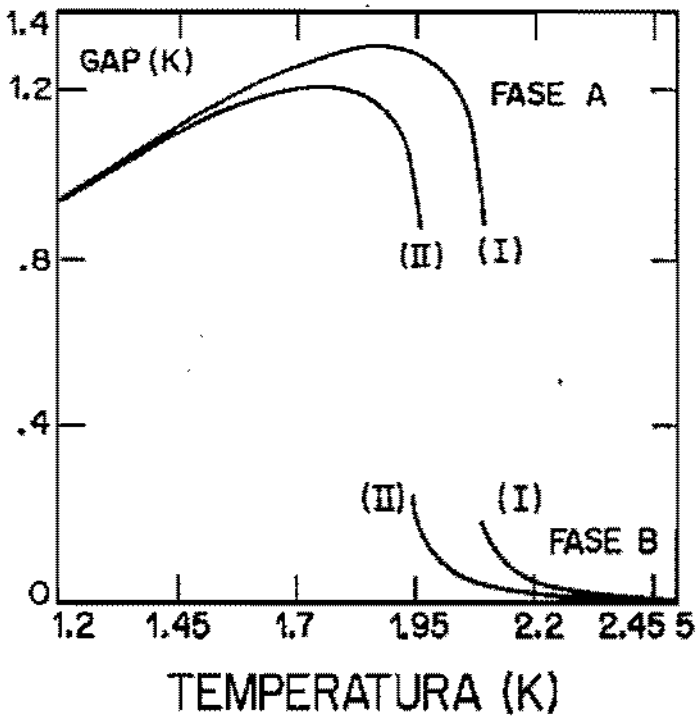


Figura V.3 - Trajetória do gap (fases A e B) nas duas abordagens.

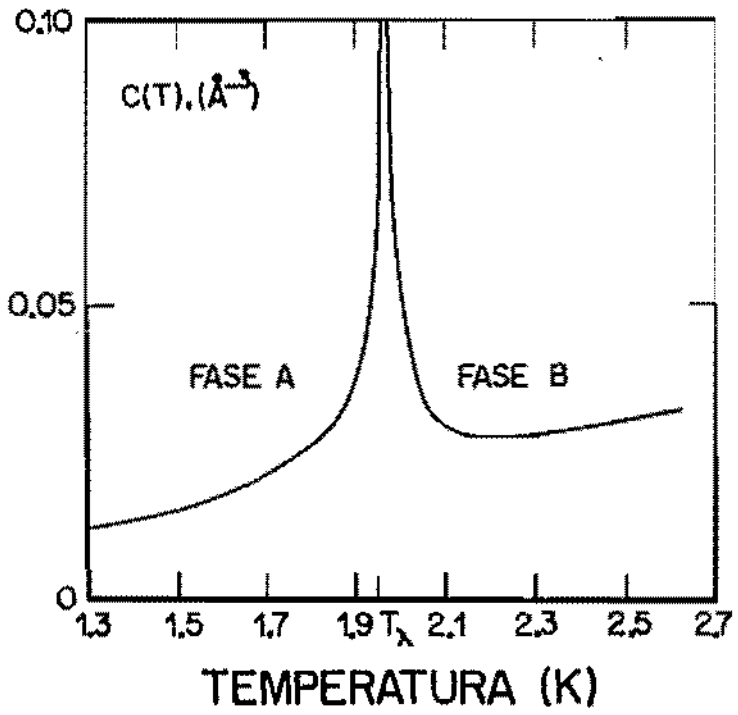


Figura V.4 - O calor específico do sistema de sólitons.

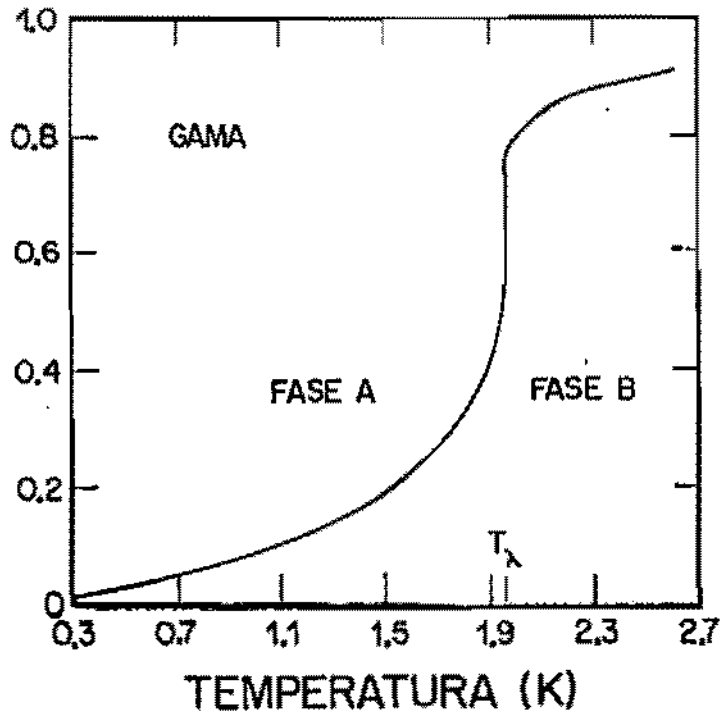


Figura V.5 - Número γ.

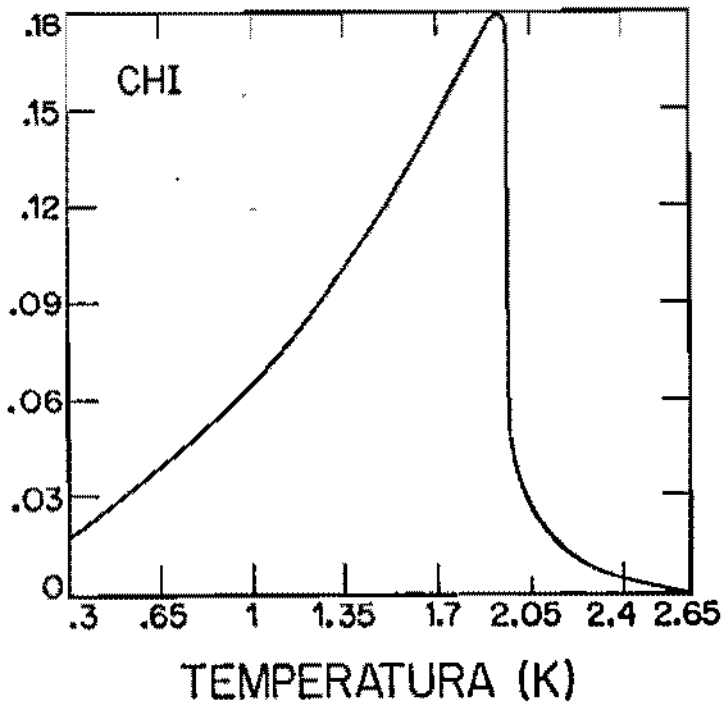


Figura V.6 - Índice de profundidade.

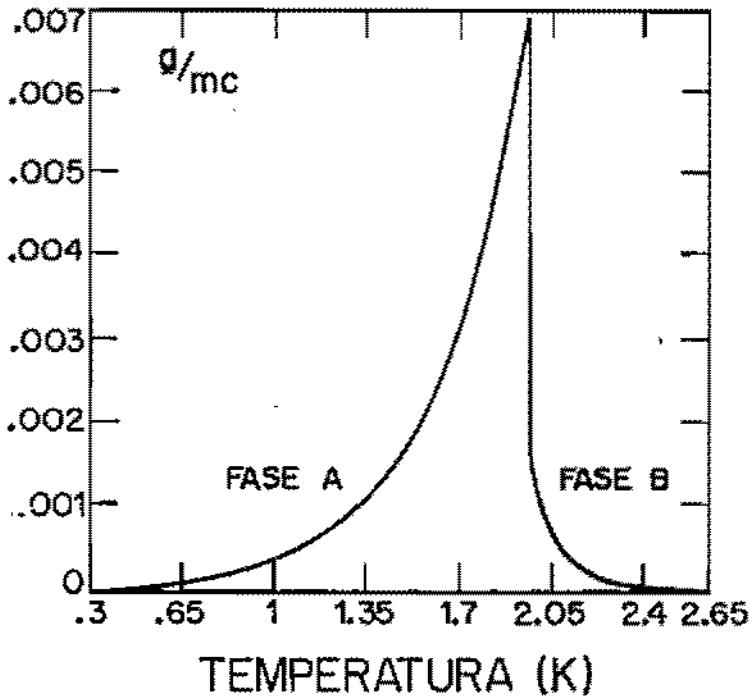


Figura V.7 - Número de sólitons: $\underline{a}/mc$.

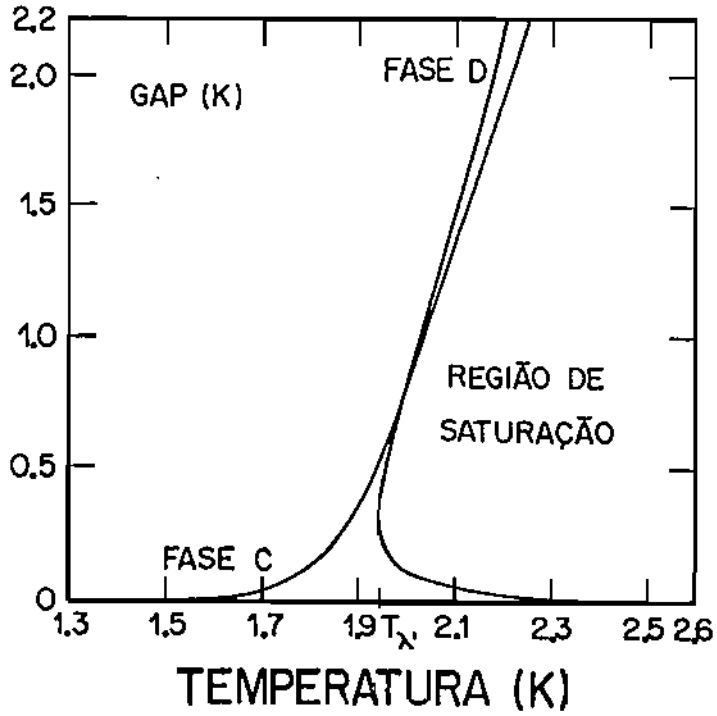


Figura V.8 - Trajetórias do gap na fases C e D e região de saturação.

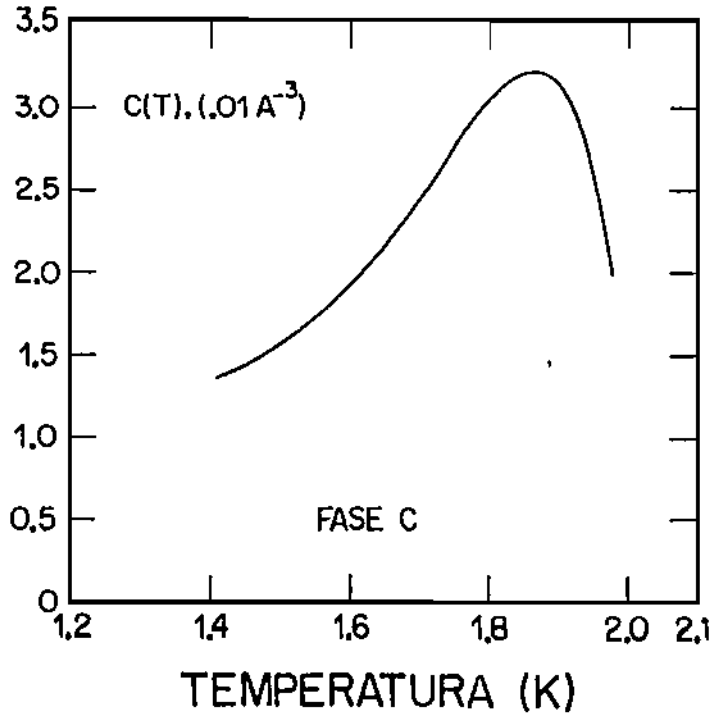


Figura V.9 - O calor específico na face C.

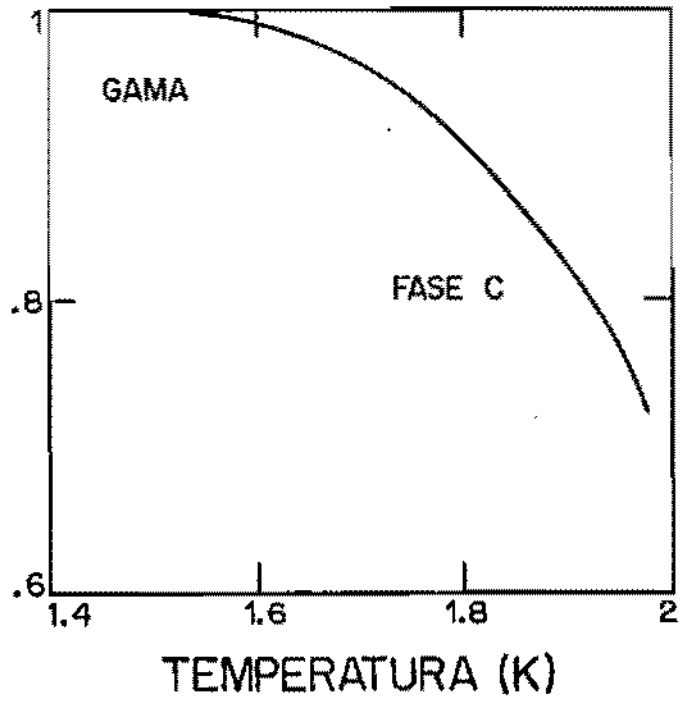


Figura V.10 - Número γ na fase C.

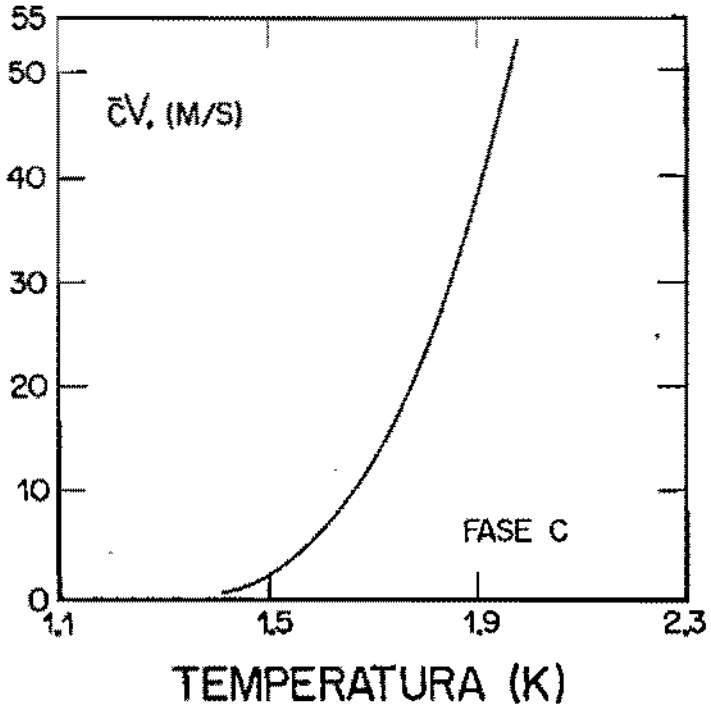


Figura V.11 - Velocidade dos sólitons, cV na face C.

respectivamente, às raízes $\widetilde{\chi}_+$ e $\widetilde{\chi}_-$ da equação (V.5).

A fase C, com $\widetilde{\Delta}_c(T)$ como mínimos, começa no zero absoluto e mantém-se muito próxima de $\widetilde{\Delta} = 0$ até a temperatura aproximada de 1.6 K. Depois disso ela começa a subir muito rapidamente e vai terminar nas vizinhanças da região de saturação, para $T = 1.98\ K$ (um pouco acima de $\widetilde{T}_\lambda$).

A fase D, com $\widetilde{\Delta}_\alpha(T)$ como linha de mínimos, começa muito próxima à região de saturação e um pouco acima do ponto onde desaparece a fase C. Mas nesta fase, os valores de χ crescem muito rapidamente e invalidam a suposição de que $\chi << 1$. Em todo caso, o método de cálculo pode ser implementado para, futuramente, explorar com maior detalhe as eventuais implicações dessa fase.

Na figura (V.8) nós mostramos essas duas fases, juntamente com a região de saturação, para termos um quadro comparativo.

Pelas características de que se reveste a fase C ela requer uma análise mais detalhada.

O calor específico da fase C (figura (V.9)) não apresenta qualquer divergência, mas mostra um crescimento acentuado (por exemplo, seu valor dobra, no intervalo $1.4 - 1.8\ K$) até aproximadamente a temperatura de $0.9\ K$, quando começa a decair rapidamente, até o desaparecimento da fase.

Os sólitons favorecidos nessa fase são bastante lentos (figura (V.10) e (V.11)). De fato, em torno de $1.4\ K$ o valor de $\gamma \simeq 0.999$ e nas proximidades do ponto onde a fase termina ele é, ainda, aproximadamente, $\gamma \simeq 0.72$.

Para se ter uma idéia comparativa, na fase A, praticamente no mesmo intervalo de temperatura, o número γ varia de ~ 0.16 para ~ 0.56, uma variação três vezes maior do que na fase C. Mais. Abaixo de $T \simeq 1.4\ K$, a fase C existe (com mínimos tais que $\widetilde{\Delta}_c \simeq 0$) e os valores de γ estão muitíssimo próximos de 1!

Esta fase nos faz lembrar da fase sólida do Hélio!

Como é sabido[63] o hélio cristalino exibe efeitos não lineares significativos. O seu movimento de ponto zero é muito intenso. Estima-se que os átomos possam excursionar pelo sólido com uma amplitude tal, que a troca de posição, entre vizinhos mais próximos, ocorre à freqüência de 10^8/seg.

Pode ser que a fase C, repleta de sólitons quase-estáticos, embora não sendo cristalina, seja um indício da existência de uma fase sólida. Embora nossa teoria não esteja equipada convenientemente para tratar do hélio sólido (o núcleo da força de Van der Walls foi aproximado pelo potencial delta) ela poderia ser trabalhada para fazê-lo.

A existência da fase C, certamente não é fortuita. Ela se estende aproximadamente pelo mesmo intervalo de temperatura em que, nas vizinhanças da pressão de liquefação, existe a fase sólida. Ela poderia, *talvez*, ser um indício das potencialidades desta teoria para a fase cristalina.

Para finalizar esta seção, mostramos uma tabela comparativa (tab. (V.1)) envolvendo algumas temperaturas relevantes e valores do *gap* nas duas abordagens. Por comodidade, designaremos por (I) a abordagem que introduz a nuvem térmica através da densidade ρ_{nt}; por (II) entenderemos a abordagem centrada no campo $\psi_c(\vec{x},t)$, do capítulo (IV). As grandezas com o índice (o) e(f) indicam, respectivamente, início e final de fase.

III. ANÁLISE COMPLEMENTAR DAS FASES

a)- O Mecanismo da Superfluidez

Desde que o escoamento superfluido foi verificado experimentalmente por Kapitza[12] e por Allen e Misener[13], a questão do mecanismo responsável pela superfluidez tornou-se uma aguda questão a ser respondida. Numa série de experimentos importantes, a questão das correntes persistentes também assumiu um papel de destaque nessa problemática[64].

Aqui, a existência de paredes movendo-se no líquido, pode nos fornecer uma idéia qualitativa de um mecanismo de superfluidez. Com um pouco de ousadia podemos apresentar um índice quantitativo aproximado (porque idealizado) da superfluidez a cada temperatura. Para esse fim, introduzimos o índice de superfluidez $s(T)$ que passamos a definir com um pouco mais de detalhe.

A figura (V.12) exibe um sóliton carregando sua nuvem térmica (novamente!). O índice de profundidade, $\tilde{\chi}$, ali mostrado, indica o quanto está "vazio" o buraco do sóliton. Já a grandeza $R(\gamma,T)$, também ali mostrada,

	(I)	(II)	%
REGIÃO DE SATURAÇÃO (K)	$T_\lambda' = 2.056$	$\tilde{T}_\lambda' = 1.943$	6 %
FASE A (K)	$T_S^{(0)} = 0$ $T_S^{(f)} = T_\lambda = 2.093$	$\tilde{T}_S^{(0)} = 0$ $\tilde{T}_S^{(f)} = \tilde{T}_\lambda = 1.962$	— 6.7
FASE B (K)	$T_L^{(0)} = 2.092$	$\tilde{T}_L^{(0)} = 1.945$	7.8
VALOR MÁXIMO DO Gap (K)- FASE A	$\Delta_m = 1.304$ $T = 1.87K$	$\tilde{\Delta}_m = 1.208$ $\tilde{T} = 1.732$	8

Tabela V.1 - Quadro comparativo sintético das duas abordagens (veja explicação no texto).

dá conta do quanto ele poderia estar ocupado, depois que fizemos a aproximação de campo médio.

A "massa faltante", em um único sóliton, $\Delta M^{(1)}$ é dada, então, pela expressão:

$$\Delta M^{(1)} = \tilde{\chi}(T)\, R(\gamma, T)$$

e $R(\gamma, T)$ é definido como a integral do buraco do sóliton:

$$\begin{aligned} R(\gamma, T) &= \int dx\, Z(x,t) \\ &= \int dx\, \frac{\rho_c(T)\,\gamma^2}{\cosh^2 \gamma m \tilde{c}\, x} \end{aligned}$$

ou:

$$R(\gamma, T) = \frac{2\,\gamma\,\rho_c(T)}{mc} \qquad (V.7)$$

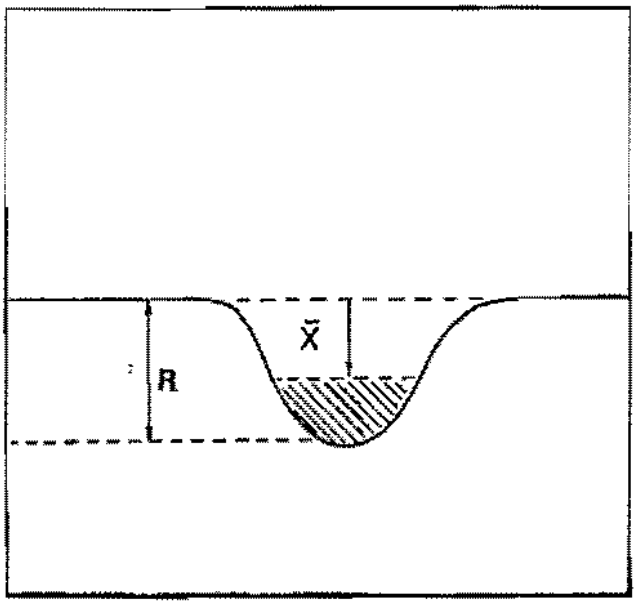


Figura V.12 - Ilustração para o cálculo da "massa faltante" no sóliton.

Assim, a"massa faltante" em um único sóliton será:

$$\Delta M^{(1)} = \frac{2\gamma\,\tilde{\chi}\,\rho_c(T)}{m\tilde{c}} \qquad (V.8)$$

Por outro lado, se considerarmos o escoamento do hélio superfluido — agora com as paredes! — num capilar, o transporte de matéria (ou de calor) na direção do eixo do capilar será feito pelos sólitons. No caso ideal de transporte, todos os sólitons estarão se movendo num mesmo sentido. Esse transporte utilizará cerca de 1/3 da área total dos sólitons. A corrente de matéria, neste caso idealizado, pode servir como uma estimativa sobre a capacidade do líquido em realizar transporte superfluido.

O índice de superfluidez será o produto da fração da área empregada, pela "matéria faltante" e ainda pelo número de sólitons. Tudo isso multiplicado pela velocidade desses sólitons. Ou seja:

$$s(T) = \frac{1}{3}\,\underline{a}\,\Delta M^{(1)}(\tilde{c}V) \qquad (V.9)$$

ou:

$$s(T) = \frac{2}{3}\,c\,\rho_c(T)\,\frac{\underline{a}}{mc}\,V\gamma\chi \qquad (V.10)$$

Como todas essas grandezas já foram calculadas a cada temperatura, é possível exibir, na figura (V.13) o índice $s(T)$, também a cada temperatura.

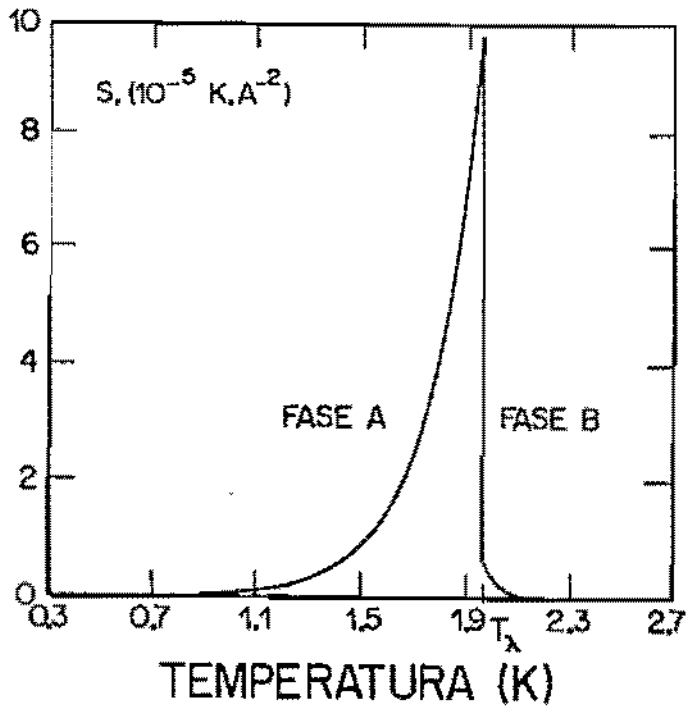


Figura V.13 - O índice de superfluidez.

A figura mostra que a superfluidez é significativa (e muito) apenas no intervalo de 1.4 $K \leq T \leq \tilde{T}_\lambda$ e que não deve ocorrer nem no líquido normal, nem tampouco nas baixas temperaturas. Esses fatos concordam, ao menos qualitativamente, com o que se conhece experimentalmente acerca do transporte de matéria, ou de calor, no hélio líquido (superfluido)[4,21,60].

Apesar de o índice $s(T)$ aqui introduzido ser idealizado, ele pode nos ajudar a entender muitas coisas.

Por que não poderia ser o movimento desses sólitons (atente para a grandeza de sua velocidade) o responsável pela existência de correntes persistentes no hélio líquido?

Por que não poderia ser o sóliton o ingrediente natural para o mecanismo da superfluidez proposto por Anderson[32] *?*

Devemos lembrar que no mecanismo de Anderson o escoamento superfluido deve ocorrer conjugado a uma defasagem entre as extremidades do

tubo onde o transporte é realizado. Em nosso modelo, mesmo que a corrente no tubo seja menor do que o índice $s(T)$ (num caso um pouco mais realístico), sempre pode haver um excesso de sólitons se movendo num certo sentido. Então dar-se-á o escoamento superfluido. Quando isso acontece, a existência de sólitons de velocidades opostas, introduz uma defasagem no condensado, ou uma diferença de fase nas extremidades do tubo.

Demos a essas questões um caráter mais ou menos conjectural, pois não é objetivo deste trabalho estender-se demasiado nesse assunto. Mas é importante ressaltar que dispomos de muitas informações pertinentes que, aliadas a uma interpretação correta, certamente serão úteis na investigação dos mecanismos de transporte no hélio líquido.

b)- Outras Densidades

Reservamos esta seção, para uma análise simplificada da dependência que esse panorama para o líquido pode manter para com a densidade. Em particular, desejamos olhar com um certo detalhe, de que maneira o *gap* varia com a densidade (ou com a pressão).

Nosso procedimento foi o seguinte. Nas expressões que encontramos no desenvolvimento da mecânica estatística (caps. **III** e **V**) introduzimos um parâmetro α (adimensional) como um fator de escala para a densidade ρ. Nas expressões apropriadas, trocamos ρ por $\alpha\rho$ e estudamos algumas situações particulares.

Na figura (V.14) nós mostramos o *gap* na situação original (fase A da figura (V.2)) e mais quatro situações distintas, para $\alpha = 0.8$, 0.9, 1.1, 1.2 representando uma faixa de cerca de 40% de varição na densidade.

O que percebemos é que todas as curvas são muito semelhantes e que os seus máximos tornam-se maiores à medida em que a densidade aumenta. Por outro lado, todas as curvas apresentam, basicamente, o mesmo comportamento para temperaturas $T < 1.2\ K$. Ou seja, nas fases de baixas temperaturas, o *gap* não varia apreciavelmente com a densidade. Como registro, vale lembrar que essa é a região onde os efeitos do róton sobre o espectro já não são tão importantes.

Na figura (V.15) estão mostradas algumas temperaturas relevantes

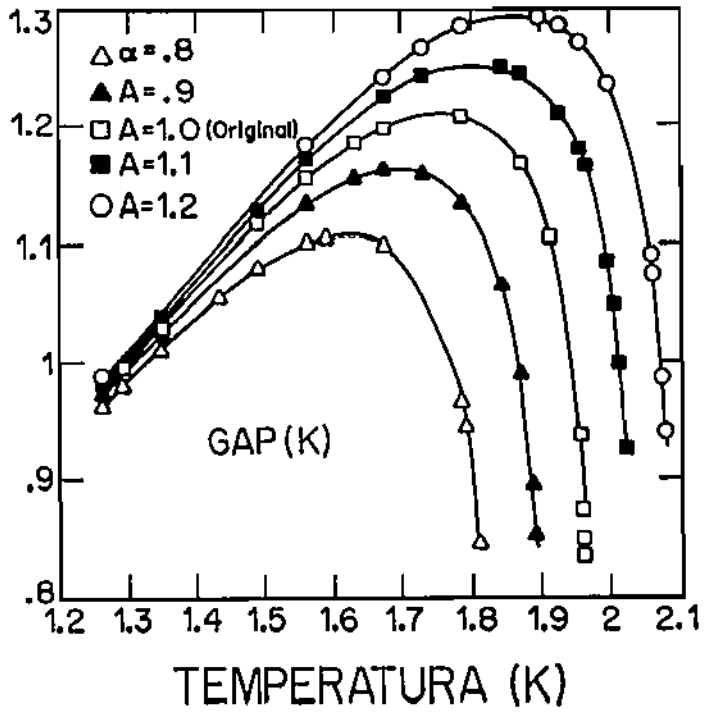


Figura V.14 - Trajetórias do *gap* na fase A para diferentes densidades.

(ponto λ, início e final das fases). Os valores de α são os mesmos da figura anterior. O que se vê é um deslocamento no mesmo sentido de α.

Tudo isso indica que o quadro genérico apresentado na figura (V.16) (sem escalas, exagerada, só para ilustrar...) é bastante rígido. O efeito da dilatação α na densidade, sobre o panorama discutido nos capítulos precedentes é, basicamente, o de uma translação uniforme na situação esboçada na figura (V.16), numa ou noutra direção.

Ainda uma tabela, (V.2), onde mostramos as temperaturas das fases para diferentes valores de α. Como observação final, chamamos a atenção (mais uma vez!) para a proximidade da temperatura crítica e da região de saturação, preservada nessas últimas informações.

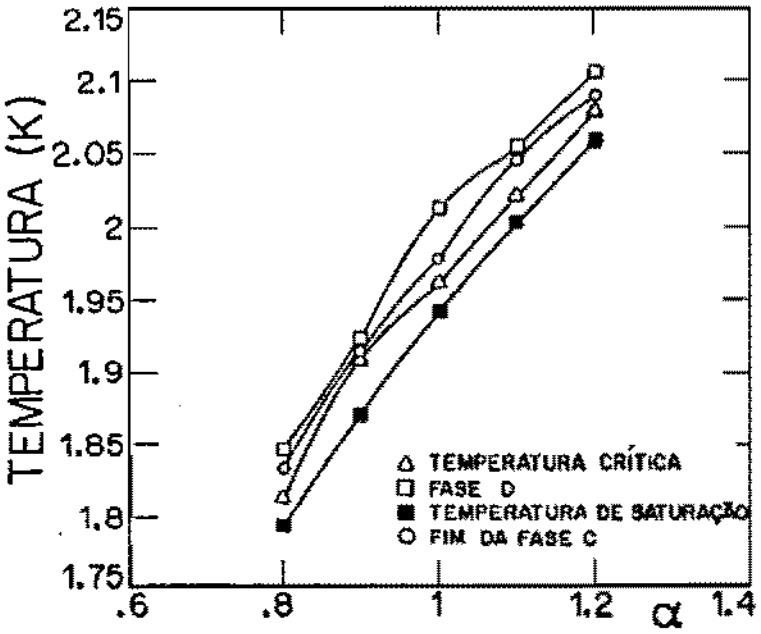


Figura V.15 - Variação das temperaturas relevantes com a densidade.

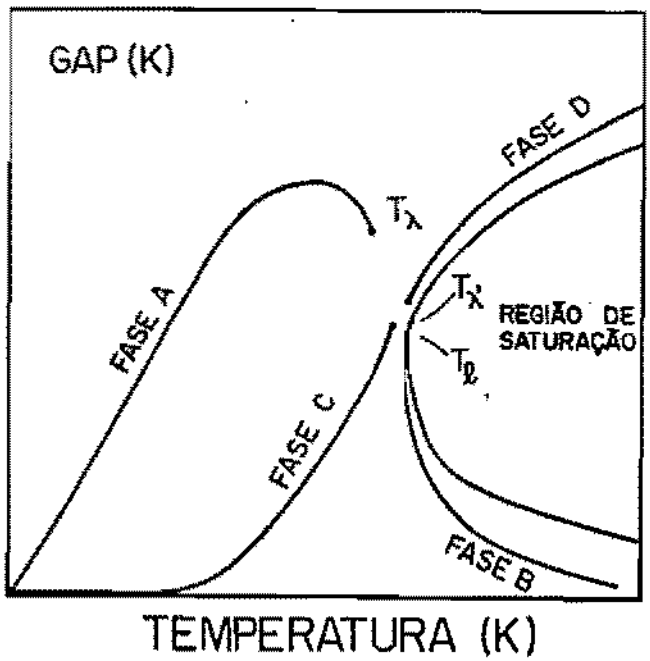


Figura V.16 - Panorama geral de todas as fases, com a região de saturação (sem escalas).

TEMPERATURAS (K) / α	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
$\tilde{T}_{\lambda}$	1.812	1.909	1.962	2.022	2.078
$\tilde{T}_{\lambda}'$	1.793	1.871	1.942	2.004	2.060
$\tilde{T}_{b}$	1.793	1.872	1.945	2.004	2.060
$^{*}\tilde{T}_{c}^{(0)}$	1.154	1.217	1.29	1.373	1.56
$\tilde{T}_{c}^{(f)}$	1.835	1.916	1.980	2.047	2.090
$\tilde{T}_{d}^{(0)}$	1.847	1.925	2.013	2.056	2.106

Tabela V.2 - Temperaturas relevantes para valores diversos da densidade. * $\tilde{T}_c^{(0)}$ é o ponto onde a fase C começa a ter mínimos já afastados de $\tilde{\Delta}_c = 0$.

CAPITULO VI

CONCLUSÕES

Julgamos, com este trabalho, ter discutido e esclarecido pontos importantes que ainda eram obscuros no problema do hélio líquido. Para isso, partimos da teoria de Bogoliubov e lançamos mão do método e da interpretação de London[11] a respeito do gás de Bose-Einstein. Agora, contudo, enfocando condensados não uniformes e sistemas interagentes.

Isso tudo foi possível graças ao tratamento inaugurado na referência [34] que foi estendido e continuado nas referências [35, 40, 42] .

É nessa linha de abordagem que este trabalho se insere, já que uma das propostas dos trabalhos citados era exatamente a do desenvolvimento da mecânica estatística dos sólitons no hélio líquido. Se realizado, esse programa poderia confirmar muitas das previsões ali aventadas e, com isso, enriquecer a compreensão desse problema desde a perspectiva do sóliton como ingrediente principal. Por esse motivo, ao longo destas linhas, também procuraremos reportar-nos às principais idéias desses trabalhos[34] e confrontá-las com os nossos resultados.

Já na introdução deste trabalho, mencionávamos as duas abordagens: a do *gap* e a do condensado, como rivais, num primeiro momento. Começamos estas linhas conclusivas destacando o aspecto unificador desta teoria que apresentamos, atentando para um ponto de particular interesse. A um só tempo, temos aqui a condensação de Bose-Einstein, característica das propostas de London e Tisza e temos também o *gap*, característico da linha de abordagem iniciada por Fröhlich e Landau (as referências estão citadas na Introdução).

Essas duas facetas do problema encontram-se, aqui, perfeitamente imbricadas e decorrem de uma teoria microscópica de primeiros princípios. Reforça-se, assim, o caráter unificador desta abordagem, que tem no sóliton a sua pedra angular. A presença dos sólitons no fluido é a responsável direta por, pelo menos, três pontos da maior importância na teoria do hélio líquido. A saber,

(i) A natureza mais abangente do espectro de excitações do líquido, nas

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
1445
R. 1
INSTITUTO DE FÍSICA

duas fases;

(*ii*) A transição fluido normal/superfluido (ponto λ)

(*iii*) O mecanismo da superfluidez.

Esses são, a nosso ver, alguns dos pontos a que quaisquer teorias microscópicas para o hélio líquido devem abordar e, se possível, esclarecer.

Um fato novo e decisivo foi introduzido neste trabalho: a nuvem térmica e o segundo campo condensado. A compreensão do papel desse segundo campo, passa também pelo método da expansão em torno da carga, que foi elaborado na referência [50], ao qual aludiremos mais adiante.

As quase-partículas acabam por interagir com os sólitons e com as suas nuvens térmicas. O espectro, então, incorpora uma contribuição dessas energias e deve ser calculado depois de um nivelamento de cotas energéticas, que realizamos no capítulo II e no capítulo IV. Mas esse nivelamento resulta da minimização da energia livre do fluido normal.

Então, um quadro bastante completo, de todas as fases do fluido, permitiu-nos visualizar o seu comportamento numa ampla faixa de temperatura (e densidade). Vale dizer que só a exploração desse quadro, em seus aspectos qualitativos, seria de grande utilidade para a compreensão do intrincado comportamento do fluido. No entanto, pudemos também obter informações quantitativas e pictóricas bastante detalhadas.

Desejávamos compreender o comportamento global do líquido e os mecanismos característicos de suas fases e fornecer certas "chaves" para a interpretação de pontos importantes, como os que citamos anteriormente.

Nossos resultados mostram uma perspectiva extremamente animadora e um acordo que são, no mínimo, muito bem-vindos! É com esse espírito que algumas palavras serão ditas, relativamente à transição λ.

Embora seja, entre todas as transições cooperativas, provavelmente a

mais acessível do ponto de vista experimental, os detalhes finos desse fenômeno são muito complexos. O que vimos aqui é que esse ponto λ ocorre precisamente nas vizinhanças da região de saturação (em torno de $2K$) e que essa região é marca distintiva do sóliton e de sua nuvem térmica.

Essa transição é, aqui, marcada por alguns indícios notáveis. Atente-se para o acentuado crescimento no número de sólitons $\underline{a}$ (figs. (III.11) e (V.6)); uma nítida diferença na ocupação do buraco do sóliton pela nuvem térmica (figs. III.14 e V.6); o favorecimento de sóliton com características diferentes (velozes e pouco ocupados, abaixo da temperatura crítica; lentos e adensados, acima). Note-se , também, um índice de superfluidez significativo nas vizinhanças desse ponto (fig. V.13), entre outras coisas.

Além disso, os resultados são extremamente isensíveis a mudanças drásticas no espectro. Para se ter uma idéia dessa estabilidade, nós promovemos uma dilatação no espectro, do seguinte tipo:

$$\varepsilon_{Lab}(\vec{k}) - \tilde{\mu} = \Delta + \alpha^2 \frac{\vec{k}^2}{2m}$$

escolhendo α^2 arbitrariamente. Quando $\alpha^2 = 4$, a temperatura onde se inicia a região de saturação cresce de 35 %, apenas. Igualmente se escolhermos $\alpha^2 = 1/4$ essa temperatura diminui de apenas 45 %. Isso confirma a incrível estabilidade dos resultados frente a mudanças extremas no espectro de quase- partículas Também no capítulo V promovemos mudanças pronunciadas na densidade. Mesmo assim, o quadro genérico não se alterou apreciavelmente.

Temos, portanto, uma transição muito bem caracterizada, numa região de temperatura muito próxima da conhecida e com o calor específico comportando-se da maneira prevista.

A questão do mecanismo de superfluidez parece encontrar, no sóliton, um elemento natural[34] . É bastante evidente que o sóliton é um mecanismo de transporte privilegiado. Inclusive a conexão do sóliton com o mecanismo de Anderson[32,78], já discutida anteriormente[40] foi retomada na seção $III - a$ do capítulo V.

Por outro lado, a propagação do som no hélio líquido , como sabemos,

é um fenômeno bastante rico e multifacetado. Em particular, também a propagação do primeiro som, devido aos efeitos de atenuação e dispersão, manifesta-se como um fenômeno complexo[65] . Essas e muitas outras questões envolvendo mecanismos de transporte poderão, talvez, ser melhor esclarecidas quando calcularmos outros efeitos, tais como segundo som, quinto som, viscosidade, etc, fazendo uso do método que aqui apresentamos. Todavia, este é um novo progrma, que deverá ser desenvolvido num futuro próximo. É, também, uma das conseqüências naturais deste trabalho.

Outro ponto importante na descrição teórica (e experimental) do fluido, refere-se à natureza do róton. Não há, ao que nos consta, uma imagem do róton que seja satisfatória e decisiva[66] . Isso porque o róton pode manifestar-se tanto na dinâmica das quase-partículas, quanto no espalhamento de nêutrons ou no calor específico. Em todo caso, a teoria que ora apresentamos, pode ser confrontada com qualquer uma das situações mencionadas.

Já na referência [40], onde se fez a aproximação de considerar quase-partículas puntiformes, verificou-se que as funções de estrutura associadas a condensados recheados de sólitons são semelhantes às funções de estrutura medidas através do espalhamento de nêutrons. Assim também aqui, em princípio, pode-se implementar uma descrição teórica desse espalhamento. A criação de uma quase-partícula poderia ser descrita por um termo interativo do tipo $\phi_c \eta \psi_n^* \psi_n$ se ψ_n for o campo do nêutron. Com isto poderíamos calcular a seção de choque de produção, no plano energia/ momento das quase-partículas.

Além disso obtivemos uma parametrização para o *gap* do calor específico, muito próxima daquela originalmente proposta por Landau (veja a seção II, do cap. (III)). Portanto, nosso trabalho envolve dois *gaps*: um relativo às quase-partículas (cf. eqs. $(II.76)$ e $(V.2)$) e o *gap* térmico efetivo do calor específico. A existência do segundo, decorre dos efeitos introduzidos pelo primeiro no espectro das quase-partículas e, conseqüentemente, na mecânica estatística do sistema. *Nenhum deles é fenomenológico.* Ambos têm origem microscópica.

Então, se olharmos atentamente para o pacote instantâneo que surge no capítulo II e também no IV, e cuja energia difere do limiar da energia das

quase-partículas exatamente pelo *gap* (cf. eq. ($II.74$)) poderemos pensá-lo como o análogo do estado fundamental isolado, proposto por Fröhlich[10].

E o que dizer da condensação do segundo campo clássico?

Como vimos, é a sua existência a responsável por uma formulação mais precisa da dinâmica da nuvem térmica. E o papel do pacote instantâneo $f_0(\vec{x},t)$ e do segundo campo ψ_c pode ser visualizado no contexto do Método da Expansão em Torno da Carga (ETC), no esquema da representação flutuante[50].

Nesse método, ao se quantizar a carga Q, em teorias bosônicas não relativísticas, com invariância de gauge global, também um campo clássico $\sqrt{Q}\,\psi_0(\vec{x})$ é introduzido. Essa função $\psi_0(\vec{x})$ podia ser escolhida sem restrições (excetuando-se a normalização) e era tal que sua dinâmica era regida por uma equação não linear. Os objetos correspondentes aos sólitons seriam descritos por funções do tipo $\psi_0(\vec{x})$, localizadas numa dada região do espaço. Naquela análise, $\psi_0(\vec{x})$ faria o papel do pacote $f_0(\vec{x})$ e o campo $\sqrt{Q}\,\psi_0(\vec{x})$, o papel do segundo campo clássico, ψ_c.

Com esse método por pano de fundo, recordamos que a condensação de ψ_c ocorre devido ao nivelamento do potencial químico com a energia do pacote instantâneo, $f_0(\vec{x})$. A conservação de matéria (carga) e a estabilidade da nuvem térmica são garantidas pela invariância de gauge global da lagrangiana dos dois campos (eq. ($IV.1$)) e porque o pacote instantâneo, $f_0(\vec{x})$, tem energia zero.

Outra das previsões feitas na referência[34]tem aqui mais um argumento favorável. Trata-se da existência de um condensado, ou de um resquício dele, acima da temperatura crítica. Ali se previa, acima de T_λ, a existência de dois fluidos, nenhum deles sendo mais o superfluido.

Pelos argumentos que apresentamos na seção II do capítulo IV, observamos que o *gap*, Δ' deveria ir a zero, porque estava associado à energia livre do fluido normal, que é um termo de volume.

Poderíamos, no entanto, minimizar as duas energias livres (fluido normal e sólitons) simultaneamente. Poderia, então, ocorrer que um pequeno *gap* residual, Δ', subsistisse. Isso é provável, porque um pequeno *gap*, positivo, implicaria num aumento (também pequeno) na densidade do condensado. Mas esse aumento na densidade poderia se fazer notar, mais aguda-

mente, se lembrássemos que ela multiplica a energia livre dos sólitons (um termo negativo!). Daí o favorecimento poderia ocorrer até temperaturas um pouco maiores.

Devemos lembrar que a questão das frações do condensado continua sendo objeto de pesquisas experimentais recentes[30]. Essas pesquisas tratam diretamente da relação entre a função de correlação $g(r)$ e a fração de átomos no estado de momento zero, n_0.

Para avizinhar-se um pouco mais dessa problemática, podem ser úteis as referências [67-71]. Informações mais detalhadas sobre esse conjunto de experimentos podem ser encontradas na referência [29] e no recente artigo de revisão de Svensson[30].

O que podemos notar, em todo caso, é que os resultados apresentados não estão isentos de objeções[72] e nada impede que, num futuro próximo devam ser revistos[29]. Portanto, essas experiências não excluem a possibilidade de se ter um condensado acima da temperatura !

Esse fenômeno já fora previsto na referência [34] e nosso trabalho mostra que o líquido normal também tem um condensado, já que o campo clássico ϕ_c, que o representa, continua a existir na fase de alta temperatura.

Na teoria que aqui desenvolvemos, o condensado não é uniforme. Portanto devemos ter $n(0) = 0$.

Uma das outras potencialidades de nosso método sóliton/nuvem térmica é o tratamento de teorias com quebra espontânea de simetria. Recordamos que a condensação de Bose-Einstein é uma manifestação desse fenômeno[73–76], que pode ocorrer nas teorias de campos, a temperatura finita[74–76] ou não[73–76].

Acreditamos, pois, que o método seja particularmente útil em sistemas dinâmicos de muitos corpos do tipo bóson a temperatura finita. Pelo fato de tratarmos de um sistema *com tempo*, formulado diretamente no contínuo (ao contrário dos modelos estáticos tratados na rede), nosso método pode ser visto como um progresso significativo para a descrição de transições de fase, de uma maneira geral.

APÊNDICE

CÁLCULO NUMÉRICO

I. Introdução

O emprego de métodos numéricos na obtenção dos mínimos da energia livre (eq. $(III.22)$) nas circunstâncias em que o índice de profundidade χ é expresso por $(III.21)$ e por $(V.5)$ resulta de sua dependências assaz envolvente com relação ao gap, Δ e $\widetilde{\Delta}$.

Na forma em que está expressa, a energia livre depende, também, da temperatura reescalada τ. O que fizemos então, basicamente, foi fixar a temperatura τ e procurar o valor de Δ que minimizava a energia livre. Esse cálculo, varrendo temperaturas que vão de 0.1 K a 2.7 K (aproximadamente), forneceu as famílias de curvas $\Delta(\tau)$ que caracterizam as fases de equilíbrio do fluido.

O objetivo deste apêndice é detalhar de que forma procedemos e apresentar a estrutura geral dos programas utilizados, bem como suas listagens.

Esses programas foram desenvolvidos de acordo com as necessidades e as circunstâncias do problema que se apresentava. Não são programas sofisticados nem, tampouco, programas "otimizados" no sentido técnico do termo. Contudo, são programas simples, funcionais e bem precisos. Todos eles foram processados nos microcomputadores PC XT 2002 da Microtec, nas dependências do IFUSP.

II. A minimização da energia livre

Começamos por escrever a energia livre na seguinte forma (cf. eq. $III.22$):

$$F_T(\Delta,\tau) = \frac{1}{3}\, m\bar{c}\left\{\frac{2}{3}\,\bar{c}\rho_c\,\chi^4\,S^4 - \chi^2\,S\,R(\Delta,\tau)\right\} \qquad (A.1)$$

onde:

$$R(\Delta,\tau) = \frac{m\,T_{BE}^2}{2\pi}\,\tau^2\,F_2(\Delta/\tau\,T_{BE}) \qquad (A.2)$$

Para o cálculo numérico adotamos o sistema de unidades em que $\hbar =$

$k_B = 1$. Desse modo, o gap, Δ é medido diretamente em unidades de temperatura (K); a energia livre, F_T em $K/\text{Å}^3$ e o calor específico em Å^{-3}. As constantes numéricas utilizadas para o cálculo, são:

$$m_{He} \simeq 8.24 \times 10^{18}\, K^{-1} m^{-2}$$
$$c \simeq 1.89 \times 10^{-9}\, m\, K$$
$$\rho \simeq 0.0217\, \text{Å}^{-3}$$
$$T_{BE} \simeq 3.12\, K$$

Na expressão ($A.2$) o termo F_2 é dado por:

$$-\int_0^\infty du \ln\left(1 - e^{-\mu - \Delta/\tau T_{BE}}\right) = F_2(\Delta/T_{BE}\,\tau)$$

ou:

$$F_2(\Delta/T_{BE}\,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \exp\frac{(-n\,\Delta)}{(T_{BE}\,\tau)} \qquad (A.3)$$

(cf. o apêndice I do livro de London[11]).

Uma expressão alternativa para F_2 é:

$$F_2(\alpha) = -\alpha\,(1 - \ln\alpha) + \sum_{n\neq 1}^{\infty} (-\alpha)^n\, \zeta\,(2-n)\,/n!$$

com $\alpha \equiv \Delta/T_{BE}\,\tau$. Para efeitos computacionais, aproximaremos a expressão acima por:

$$F_2(\alpha) \simeq \frac{\pi^2}{6} - \alpha + \alpha\,\ln\alpha - \frac{1}{4}\,\alpha^2 + \frac{1}{72}\,\alpha^3 - \frac{1}{(120)^2}\,\alpha^5 + \cdots \qquad (A.4)$$

se $\alpha \leq 3$.

Esta última restrição sobre α decorre da seguinte comparação. Somamos 1000 termos da série ($A.3$) e calculamos F_2 diretamente através de ($A.4$). Enquanto $\alpha \leq 3$ a diferença entre as duas expressões jamais excedeu a margem de 2%. Quando $\alpha \geq 3$, por segurança, usamos um desvio nos programas e somamos a série:

$$F_2(\alpha) \simeq \sum_{n=1}^{100} \frac{e^{-n\,\alpha}}{n^2} \qquad (A.5)$$

que é, certamente, um exagero, já que a série converge muito rapidamente.

a)- Os programas

Efetuadas as aproximações e delimitadas as regiões de validade, empregamos dois métodos numéricos distintos para localizar os mínimos: o *método gráfico* e um método de *divisões sucessivas* do intervalo. O método gráfico consiste dos seguintes passos:

(1) Fixa-se a temperatura, τ ;

(2) Escolhe-se um amplo intervalo para o gap, Δ ;

(3) Traça-se o gráfico de $F_{T_{fixo}}(\Delta)$ por Δ;

(4) Se um ou mais mínimos são encontrados, escolhe-se um novo intervalo para Δ — uma região pequena em torno desse ponto — a fim de localizá-los cada vez melhor;

(5) Isso se processa até que a curva com o mínimo seja traçada com a maior precisão possível.

(6) Os valores da função, no ponto de mínimo, e o valor mínimo de Δ são obtidos no final do processo.

Apresentamos um exemplo de uma dessas curvas na figura ($A.1$):

O método gráfico é seguro e eficaz. Porém, como estamos interessados em um grande número de pontos, esse método revela-se lento e por demais laborioso. Por isso nós o empregamos com dupla finalidade.

Em primeiro lugar realizamos um mapeamento detalhado de todas as fases, com um número menor de pontos (cerca de 100 valores distintos para a temperatura, em cada uma das fases A,B,C e D). Depois, usamo-lo como um teste para aferir os valores encontrados pelo método das divisões sucessivas no intervalo. Um programa típico para o desenvolvimento do método gráfico está listado como *(I)*, no final do Apêndice.

Exporemos, agora, um método mais rápido e geral para a determinação dos mínimos. Este método foi aplicado depois que o mapeamento gráfico já nos havia indicado as principais facetas de todas as fases.

Em linhas gerais, o método funciona da seguinte forma:

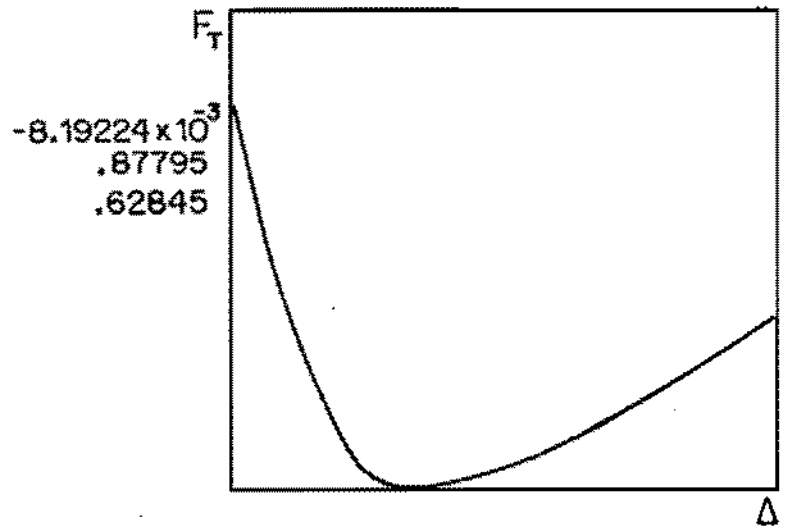


Figura A.1 - Um gráfico típico de $F_T(\Delta)$ por Δ com a localização do ponto de mínimo. Os números mostrados à esquerda são $F_T(\Delta^0)$, Δ^0 e τ.

(1) Fixa-se a temperatura, τ;

(2) Considera-se a função num intervalo bastante amplo do argumento, desde x_0 até x_1 (veja a figura $(A.2)$);

(3) O intervalo $x_1 - x_0$ é dividido 100 vezes (ou quantas se desejar) e a função é calculada nesses 100 pontos distintos. Introduzimos a quantidade $h = (x_1 - x_0)/100$;

(4) Assume-se, de saída, que x_0 é um ponto de mínimo;

(5) Para cada valor claculado, efetua-se o seguinte teste:

$$F(x_0 + h) < F(x_0) \quad ?$$

Se não for, $F(x_0)$ continua sendo o menor valor para a energia livre e x_0 o ponto de mínimo. Se for, então o ponto de mínimo passa a ser no ponto $x_0 + h$. Mudamos o teste para:

$$F(x_0 + 2h) < F(x_0 + h) \quad ?$$

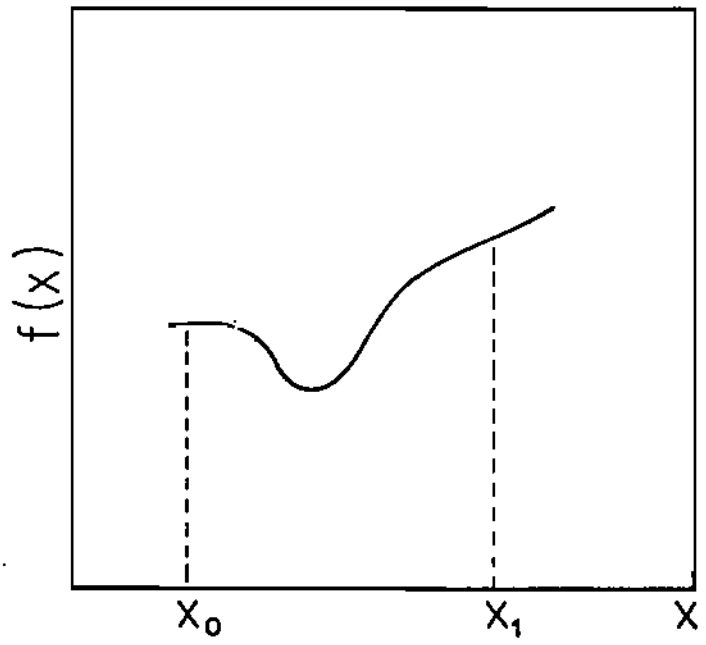


Figura A.2 - Ilustração genérica da divisão dos intervalos.

E o processo segue dessa forma até a primeira varredura dos 100 pontos.

(6) Tendo localizado um ponto de mínimo após varrer todo o intervalo, digamos $x_0^{(1)}$, o processo é repetido em um novo intervalo, agora dado por:

$$x_0^{(1)} - h \leq x_0^{(1)} \leq x_0^{(1)} + h$$

(7) Os mesmos testes são realizados, agora tomando $x_0^{(1)}$ como ponto de mínimo;

(8) Encontra-se, então, uma segunda estimativa para o mínimo: $x_0^{(2)}$

(9) O mesmo procedimento é repetido até que se atinja uma precisão previamente prescrita. Em nosso caso, essa precisão era dada por:

$$\left| x_0^{(n+1)} - x_0^{(n)} \right| \leq 10^{-8}$$

Esses nove passos determinam uma estimativa para o valor mínimo do *gap* e da energia livre naquela temperatura inicialmente fixada.

O passo seguinte é incrementar a temperatura. Trocamos o valor anterior por:

$$\tau = \tau + 0.0005$$

Uma maneira de implementar o passo (2) para este novo valor da temperatura, é considerar o novo x_0 como o sendo o mínimo encontrado anteriormente e então repetir todos os passos.

Contudo, é preciso muita cautela com esse procedimento, quando a curva tiver a forma genérica mostrada na figura ($A.3$).

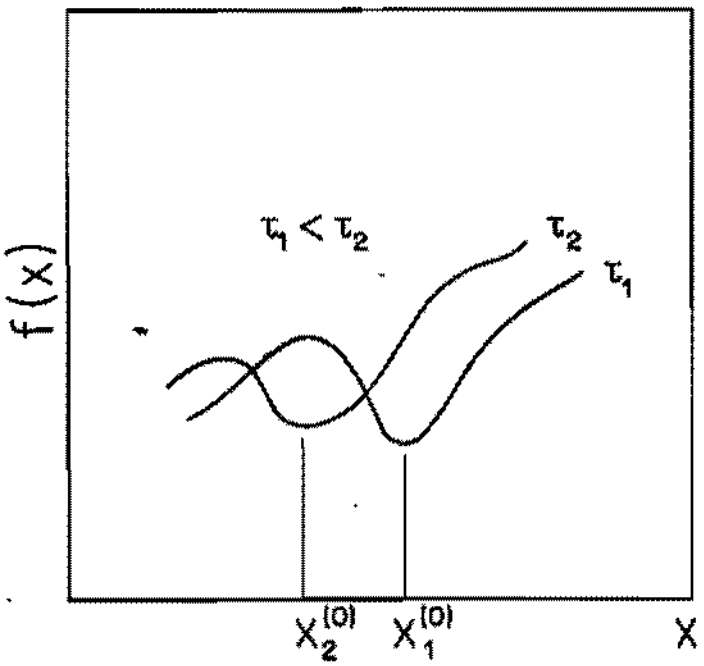


Figura A.3 - Ilustração genérica: existência de um mínimo para um valor menor de argumento, a uma temperatura maior: $\tau_1 < \tau_2$; $x_2^{(0)} < x_1^{(0)}$.

Se tomarmos como primeiro intervalo aquele que começa tendo por x_0 o valor de $x_1^{(0)}$ acima, o mínimo $x_2^{(0)}$ jamais será encontrado, pois já estaremos fora do intervalo em que ele se localiza. Mas o problema pode ser facilmente evitado se tomarmos por limite inferior do intervalo o ponto de mínimo encontrado para τ_1, diminuído de uma certa quantidade δ:

$$x_0 = x_0 - \delta$$

Esta quantidade δ não precisa ser muito grande, porque o incremento de temperatura é suficientemente pequeno para que a função não varie apreciavelmente nesse intervalo. Isso ocorre com as nossas funções, que já

conhecíamos parcialmente pelo método gráfico. No caso geral, outras escolhas podem ser feitas, porque o método é de rápida convergência.

A situação anteriormente descrita ocorre em nossos cálculos das fases A. Observe-se a seqüência da figura ($III.4$) e as linhas de mínimos das figuras($III.3$) e ($V.2$). Essas linhas apresentam uma mudança de comportamento quando nas vizinhanças da região de saturação.

Outro cuidado que tivemos de tomar refere-se exatamente às vizinhanças dessa região. Ali, escolhemos os intervalos de modo tal que, ou o ponto inicial, x_0, era escolhido na fronteira superior da região de saturação, ou o ponto final, x_1 escolhia-se na fronteira inferior dessa região (cf. figuras $III.2$ e $V.1$).

Como o leitor pode constatar, consultando as listagens no final deste apêndice, o primeiro cálculo que fazemos é justamente aquele que delimita a região de saturação. Exatamente para evitar eventuais interrupções no processamento, que poderiam advir da introdução dos números imaginários dessa região.

As listagens $(II)-a$,b, c ,d exibem os programas utilizados diretamente para a construção das linhas de mínimos das referidas fases.

III. A Região de Saturação

Como vimos no capítulo III a região de saturação ocorre conjugada ao fato de o radicando da equação ($III.21$) tornar-se negativo. Isso implica que temos de resolver a equação (cf. eq. $III.26$)

$$g(T)\, h(\Delta^*/T) = 1$$

ou

$$\frac{16}{3}\,\frac{\Delta^*\, S^2(\Delta^*, \tau)}{m\,\bar{c}^2} = 1 \qquad (A.6)$$

com,

$$S(\Delta^*, T) = -\frac{m^2\,\bar{c}\,T}{4\pi\,\rho_c}\,\ln(1 - \mathrm{e}^{-\Delta/T})$$

para encontrar as fronteiras da região.

Portanto, temos de resolver, auto-consistentemente, a equação:

$$\Delta^* = f(\Delta^*, \tau) \tag{A.7}$$

com

$$f(\Delta^*, \tau) = \frac{3}{16} \frac{m\,\bar{c}^2(\tau)}{S^2(\Delta^*, \tau)}$$

O procedimento é, novamente, muito simples, e pode ser resumido nos seguintes passos:

(1) Fixa-se o valor da temperatura, τ;

(2) Fornece-se uma estimativa bastante baixa (em nosso caso 0.000001) para Δ^* e calcula-se $f(\Delta^*, \tau)$.

(3) Exige-se que $\left|\Delta^* - f(\Delta^*, \tau)\right| \leq \epsilon$ onde ϵ, em nossos cálculos, foi escolhido como $\epsilon = 10^{-10}$ ou $\epsilon = 10^{-8}$, dependendo da precisão que requeríamos;

(4) Se a desigualdade não for satisfeita, o valor inicial é incrementado e o passo é repetido até se obter o valor de Δ^* com a precisão requerida;

(5) Uma vez obtido Δ^* para aquela temperatura, incrementa-se a temperatura e repete-se o processo. A convergência do processo é bastante rápida ao longo de quase toda a curva. É mais lenta, certamente, nas vizinhanças do início da região de saturação.

Os cinco passos anteriores fornecem a fronteira inferior da região de saturação. Para obter a fronteira superior, o cálculo é o mesmo, mas é melhor implementado se eliminarmos Δ^* da função $S(\Delta^*, T)$ e invertermos novamente a relação $(A.7)$. A mesma equação acaba por exprimir-se como:

$$\Delta^* = f'(\Delta^*, \tau) \tag{A.8}$$

onde

$$f'(\Delta^*, \tau) = -\frac{\tau}{0.32} \ln\left(1 - \exp\left(-\frac{1 - \tau^{3/2}}{1.47\,\tau\,\sqrt{1.81\,\Delta^*}}\right)\right)$$

pois já usamos os valores numéricos de ρ_c, T_{BE}, etc..

A única diferença é que a estimativa inicial deve ser agora bastante alta, porque queremos a parte superior das curvas referidas. Na figura $(A.4)$

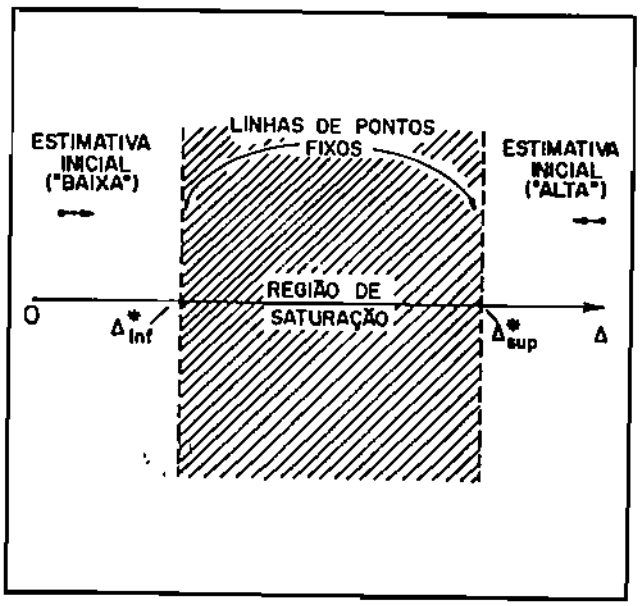


Figura A.4 - Esboço ilustrativo dos pontos fixos da região de saturação.

ilustramos, sinteticamente, os dois procedimentos. De resto, os passos são exatamente os mesmos.

IV. Calor Específico

O calor específico está dado na equação $(III.27)$ como:

$$C_\rho(T) = -T\frac{d^2F_T^{(0)}(\Delta,\tau)}{dT^2} \qquad (A.9)$$

Quando da minimização da energia livre, encontramos os valores de $F_T^{(0)}$ para cada valor da temperatura. Assim, pudemos avaliar a quantidade:

$$f''_T(x_k) \simeq \frac{f(x_k+h) - 2\,f(x_k) + f(x_k-h)}{h^2} \qquad (A.10)$$

que da a derivada segunda da energia livre com relação à temperatura, no ponto $x_k = \tau_k$.

Dessa forma, o calor específico, C_ρ foi reescrito como:

$$C_\rho \simeq -\frac{\tau}{T_{BE}}\,f''_T(\tau) \qquad (A.11)$$

Sabemos que a expressão $(A.10)$ é tanto melhor quanto menor for h. Por isso empregamos, ao longo de todos os cálculos, o valor $h = 5 \times 10^{-4}$ para o incremento de temperatura. Esse número foi escolhido levando-se em conta o seguinte critério. Fizemos parte da conta com incrementos ainda menores, e com incrementos maiores. Essa escolha foi a que, permitindo trabalhar com um grande número de pontos, não apresentava diferenças numéricas apreciáveis, quando confrontada com intervalos menores (um número ainda maior de pontos !). Esse fato permitiu que os programas fossem relativamente rápidos e suficientemente precisos.

V. Outras Grandezas

O cálculo de grandezas como γ, χ, $\underline{a}$ e as demais grandezas que dependem desses números, pôde ser facilmente implementado, a partir da determinação das linhas de mínimos de $\Delta(\tau)$ e $\tilde{\Delta}(\tau)$. O leitor deve lembrar-se que, no capítulo III, essas grandezas foram eliminadas da energia livre, em favor do *gap*, Δ por meio das equações $(III.19), (III.21)$ e $(II.73)$. Basta, então, retornar a essas expressões com os valores obtidos e graficá-las.

VI. Observações

(1) Em todo o processo de cálculo, sempre iniciamos a baixas temperaturas ($\tau = 0.0005$) e fomos progressivamente aumentando-a;

(2) O procedimento numérico foi, basicamente, o mesmo para todas as fases, tanto as que se referem aos resultados do capítulo III quanto do capítulo V ;

(3) Outros pequenos detalhes são explicados diretamente no texto.

VII. Listagens

Prog. I - MÉTODO GRÁFICO

```
10 DEFDBL A-H,L,M,O-Z
20        CLS
30 INPUT"TEMPERATURA";TAL
40 BE=1-TAL*SQR(TAL)
50        DIM M(1000,2),X(1000),C(1000)
60        CLS:LOCATE 10,10
70        DIR =639:ESQ=139:ALT= 180
80        INPUT"SE NAO QUER LISTAGEM DE PONTOS TECLE ENTER";XX
90        CLS
100        LOCATE 7,10
110        INPUT"LIMITE INFERIOR DE X";XI
120        LOCATE 8,10:INPUT"LIMITE SUPERIOR DE X";XS
130        LOCATE 9,10:INPUT"QUAL O NUMERO DE PONTOS A PLOTAR";P
140       SCREEN 2
150       PA = INT(636/(P) +1)
160       SX = (XS-XI)/(639)
170       X = SX*PA +XI
180       GOSUB 760
190       YS=Y:YI=Y
200       CLS
210       NN = 0
220       FOR I = 0 TO 639 STEP PA
230       NN = NN + 1
240       X(I) = SX*I + XI: X = X(I)
250       GOSUB 760
260       M(I,1) = Y
270       M(I,2) = Y
280       IF M(I,1)>YS THEN YS = M(I,1)
290       IF M(I,1)<YI THEN YI = M(I,1): QC=X(I)
300       IF XX = 0 THEN GOTO 320
310        LPRINT"GAP=";X(I),"F=";M(1,1)
311        LPRINT"GAMA=";GAMA,"CHI=";CHI,"TEMPERATURA=";TAL
320       NEXT I
330       FOR I = 0 TO 639 STEP PA
340       M(I,1)=M(I,2)
350       M(I,1)= -(ALT/(YS-YI))*(M(I,1)-YI) + ALT
360       NEXT I
370       CLS
380       WW = ESQ
390       IF XI < 0 AND XS > 0 THEN WW = -(XI/(XS-XI))*(DIR-ESQ) + ESQ
400       LINE (WW,0) - (WW,ALT)
410       IF YI < 0 AND YS > 0 THEN GOTO 430
420       GOTO 450
430       O = -(ALT/(YS-YI))*(-YI) + ALT
440       GOTO 460
450       O = ALT
460       LINE (DIR,O)-(ESQ,O)
470       PSET(ESQ,0):LINE-(ESQ,ALT):LINE-(DIR,ALT):LINE-(DIR,0):LINE-(ESQ,0)
480       FOR I = 1 TO 10
490       LINE (ESQ,ALT*(I/10))-(ESQ+4,ALT*(I/10))
500       L = ((DIR-ESQ)/10)*I + ESQ -(DIR-ESQ)/10
```

Continua

```
500        L = ((DIR-ESQ)/10)*I + ESQ -(DIR-ESQ)/10
510        LINE(L,ALT)-(L,ALT-4)
520        LINE(L,0)-(L,0+4)
530        LINE(DIR,ALT*(I/10))-(DIR-4,ALT*(I/10))
540        NEXT I
550        FOR I = 0 TO 639 STEP PA
560        C(I) = ((X(I)-XI)/(XS-XI))*(DIR -ESQ) + ESQ
570        PSET(C(I),M(I,1))
580        LOCATE 10,1:PRINT YI
590        LOCATE 11,1:PRINT QC
600        LOCATE 12,1:PRINT TAL
610        NEXT I
620        INPUT XX
630        PSET(C(0),M(0,1))
640        FOR I = 0 TO 639 STEP PA
650        LINE -(C(I),M(I,1))
660        NEXT I
670       INPUT XXX
680        CLS: INPUT"QUAL A ESCALA (X,Y)";X,Y
690       PROP = X/Y
700       IF PROP > 1 THEN X = 500: Y = (8/17)*500/PROP
710       IF PROP < 1 THEN Y = 180: X = (17/8)*180*PROP
720       IF PROP = 1 THEN X = 500: Y =(8/20)*500
730       DIR =639:ESQ = 639-X: ALT = Y
740        GOTO 330
750        RETURN
760 REM NOVAS INFORMACOES
770 REM CALCULO DE S
780 A1=LOG(1-EXP(-.32*X/TAL))
790 S=1.47*TAL*ABS(A1)/SQR(BE)
800 REM CALCULO DE R
810 C1=1.28
820 AA=.32*X/TAL
830 IF AA>3 THEN GOTO 880
840 I1=(3.1415926535#12)/6 -AA+AA*LOG(AA)
850 I2=(1/72)*AA*AA*AA-.25*AA*AA-(1/120)*(1/120)*AA*AA*AA*AA*AA
860 IA=I1+I2
870 R=C1*TAL*TAL*IA:GOTO 940
880 SS=0!
890 FOR K=1 TO 100
900 S1=EXP(-K*AA)/(K*K)
910 SS=SS+S1
920 NEXT K
930 R=C1*TAL*TAL*SS
940 REM CALCULO DE CHI
950 X1=.272*X*S*S/BE
960 X2=1/(2*S*S)
970 CHI=X2*(1+SQR(1-X1))
990 CHI2=CHI*CHI:CHI4=CHI*CHI*CHI*CHI
1000 REM CALCULO DE GAMA
1010 GAMA=S*SQR(CHI)
1070 REM CALCULO DA ENERGIA LIVRE EM FUNCAO DE DELTA
1080 F1=4.095*CHI4*S*S*S*S*BE*BE
1090 F2=CHI2*S*R*SQR(BE)
1100 Y=F1-F2
1110 RETURN
```

```
10 CLS
20 DEFDBL A-H,L,M,O-Z
30 DIM F(500),U(500)
40 INPUT"XMIN=";XMIN:INPUT"XMAX=";XM:INPUT"N=";N
50 INPUT"QUAL E A PRECISAO DESEJADA=";PC
60 INPUT"QUAL A TEMPERATURA INICIAL=";T0
70 TAL=T0
80 M=1
90 HH=.0005
100 SD=3.1*HH
110 XB=XMIN
120 DELTA=(XM-XMIN)/N
130 X=XMIN:GOSUB 370
140 T=Y
150 FOR I=1 TO N
160 XI=XMIN+I*DELTA:X=XI
170 GOSUB 370: T1=Y
180 IF T>T1 THEN T=T1:XB=XI:GOTO 190
190 NEXT I
200 XMIN=XB-DELTA
210 XM=XB+DELTA
220 ABB1=ABS(XM-XMIN)
230 IF ABB1>PC THEN GOTO 120
240 LPRINT"ENERGIA LIVRE=";T,"GAP MINIMO=";XB:F(M)=T:U(M)=TAL
250 LPRINT"TEMPERATURA=";TAL
260 TAL=TAL+.0005 :XMIN=XB-.01:XM=XB+.2
270 IF TAL>.6223 THEN GOSUB 690:GOTO 280
280 IF M<3 THEN GOTO 340
290 V=F(M)+F(M-2)-2*F(M-1)
300 V=V/(HH*HH)
310 CVTT=-.32*U(M-1)*V
320 LPRINT"***************=";0
330 LPRINT"derivacao com tres pontos=";CVTT,"temperatura=";U(M-1)
340 M=M+1
350 GOTO 110
360 END
370 GOTO 380
380 BE=1-TAL*SQR(TAL)
390 REM NOVAS INFORMACOES
400 REM CALCULO DE S
410 A1=LOG(1-EXP(-.32*X/TAL))
420 S=1.47*TAL*ABS(A1)/SQR(BE)
430 REM CALCULO DE R
440 C1=1.28
450 AA=.32*X/TAL
460 IF AA>3 THEN GOTO 510
470 I1=(3.1415926535#↑2)/6 -AA+AA*LOG(AA)
480 I2=(1/72)*AA*AA*AA-.25*AA*AA-(1/120)*(1/120)*AA*AA*AA*AA*AA
490 IA=I1+I2
500 R=C1*TAL*TAL*IA:GOTO 570
```

Continua...

```
500 R=C1*TAL*TAL*IA:GOTO 570
510 SS=0!
520 FOR K=1 TO 100
530 S1=EXP(-K*AA)/(K*K)
540 SS=SS+S1
550 NEXT K
560 R=C1*TAL*TAL*SS
570 REM CALCULO DE CHI
580 X1=.272*X*S*S/BE
590 X2=1/(2*S*S)
600 CHI=X2*(1-SQR(1-X1))
610 CHI2=CHI*CHI:CHI4=CHI*CHI*CHI*CHI
620 REM CALCULO DE GAMA
630 GAMA=S*SQR(CHI)
640 REM CALCULO DA ENERGIA LIVRE EM FUNCAO DE DELTA
650 F1=4.095*CHI4*S*S*S*S*BE*BE
660 F2=CHI2*S*R*SQR(BE)
670 Y=F1-F2
680 RETURN
690 REM FRONTEIRA SUPERIOR DA REGIAO DE SATURACAO
700 X=5!
710 A=1-TAL*SQR(TAL)
720 B=1.47*TAL*SQR(.272*X)
730 ALFA=A/B
740 BETA=EXP(-ALFA)
750 SS=LOG(1-BETA)
760 DD=TAL/(.32)
770 G=-DD*SS
780 IF ABS(G-X)>=.00000001# THEN GOTO 810
790 LPRINT"d*=";X, "TEMPERATURA=";TAL
800 XMIN=X+.0001: RETURN
810 X=G:GOTO 720
```

```
10 CLS
20 DEFDBL A-H,L,M,O-Z
30 DIM F(500),U(500)
40 INPUT"temperatura=";TAL
50 GOSUB 680
60 M=1
70 HH=.0005
80 INPUT"XMIN=";XMIN:INPUT"XMAX=";XM:INPUT"N=";N
90 INPUT"QUAL E A PRECISAO DESEJADA=";PC
100 XB=XMIN
110 DELTA=(XM-XMIN)/N
120 X=XMIN:GOSUB 360
130 T=Y
140 FOR I=1 TO N
150 XI=XMIN+I*DELTA:X=XI
160 GOSUB 360: T1=Y
170 IF T>T1 THEN T=T1:XB=XI:GOTO 180
180 NEXT I
190 XMIN=XB-DELTA
200 XM=XB+DELTA
210 ABB1=ABS(XM-XMIN)
220 IF ABB1>PC THEN GOTO 110
230 LPRINT"ENERGIA LIVRE=";T,"GAP MINIMO=";XB:F(M)=T:U(M)=TAL
240 LPRINT"temperatura=";TAL
250 TAL=TAL+.0005 :XMIN=.000001:XM=XB
260 IF TAL>.62229 THEN GOSUB 680:GOTO 270
270 IF M<3 THEN GOTO 330
280 V=F(M)+F(M-2)-2*F(M-1)
290 V=V/(HH*HH)
300 CVTT=-.32*U(M-1)*V
310 LPRINT"*****************************************=";0
320 LPRINT"DERIVACAO COM TRES PONTOS=";CVTT,"TEMPERATURA=";U(M-1)
330 M=M+1
340 GOTO 100
350 END
360 GOTO 370
370 BE=1-TAL*SQR(TAL)
380 REM NOVAS INFORMACOES
390 REM CALCULO DE S
400 A1=LOG(1-EXP(-.32*X/TAL))
410 S=1.47*TAL*ABS(A1)/SQR(BE)
420 REM CALCULO DE R
430 C1=1.28
440 AA=.32*X/TAL
450 IF AA>3 THEN GOTO 500
460 I1=(3.1415926535#↑2)/6 -AA+AA*LOG(AA)
470 I2=(1/72)*AA*AA*AA-.25*AA*AA-(1/120)*(1/120)*AA*AA*AA*AA*AA
480 IA=I1+I2
490 R=C1*TAL*TAL*IA:GOTO 560
500 SS=0!
```

Continua...

```
500 SS=0!
510 FOR K=1 TO 100
520 S1=EXP(-K*AA)/(K*K)
530 SS=SS+S1
540 NEXT K
550 R=C1*TAL*TAL*SS
560 REM CALCULO DE CHI
570 X1=.272*X*S*S/BE
580 X2=1/(2*S*S)
590 CHI=X2*(1+SQR(1-X1))
600 CHI2=CHI*CHI:CHI4=CHI*CHI*CHI*CHI
610 REM CALCULO DE GAMA
620 GAMA=S*SQR(CHI)
630 REM CALCULO DA ENERGIA LIVRE EM FUNCAO DE DELTA
640 F1=4.095*CHI4*S*S*S*S*BE*BE
650 F2=CHI2*S*R*SQR(BE)
660 Y=F1-F2
670 RETURN
680 REM FRONTEIRA INFERIOR DA REGIAO DE SATURACAO
690 X=.01
700 AA=.32*X/TAL
710 A1=LOG(1-EXP(-AA))
720 BB=SQR(1-TAL*SQR(TAL))
730 S=-1.47*TAL*A1/BB
740 YY=(1-TAL*SQR(TAL))/(.272*S*S)
750 AD=ABS(YY-X)
760 IF AD>.00000001# THEN X=YY:GOTO 700
770 LPRINT "d#=";X,"temperatura=";TAL
780 XM=X-.00001#
790 RETURN
```

REFERÊNCIAS

[1] H. Kammerling-Onnes, *Commun. Phys. Lab. Univ. Leiden* **108**, (1908).

[2] W. H. Keesom, *Helium*, Elsevier, Amsterdam (1942).

[3] K. Mendelssohn, *The Quest for Absolute Zero*, World Univ. Library, McGraw-Hill, N. Y. (1966).

[4] K. Mendelssohn, *Liquid Helium*, in Handbuch der Physik, ed. S. Flügge, vol. XV, S. Verlag, pp.370-461, (1956).

[5] S. Brush, *Statistical Physics and the Atomic Theory of Matter*, Princeton Univ. Press, New Jersey, sec. IV.9, (1983).

[6] L. I. Dana & H. Kammerling-Onnes, *Commun. Phys. Lab. Univ. Leiden* **179**, (1926).

[7] M. Wolfke & W. H. Keesom, *Commun. Phys. Lab. Univ. Leiden* **190a**, (1928).

[8] W. H. Keesom & K. Clusius, *Commun. Phys. Lab. Univ. Leiden* **219e**, (1932).

[9] W. H. Keesom & A. P. Keesom, *Physica* **Haag3**, 359(1936).

[10] H. Fröhlich, na Conferencia *The Properties of Liquid Helium*, Int. Institute of Refrigeration, 12 de julho de 1938, Burlington House, Londres; citado na referência 2.

[11] F. London, Superfluids, Vol II, John Wiley, N. Y. (1954); Veja, sobretudo, *Nature* **141**, 643(1938); *Phys. Rev.* **54**, 947(1938); *J. Phys. Chem.* **43**, (1939).

[12] P. Kapitza, *Nature* **141**, 74(1938).

[13] J. F. Allen and A. D. Misener, *Nature* **141**, 75(1938).

[14] L. Tisza, *Nature* **141**, 913(1983); *Compt. rend.* **207**, 1035, 1186(1938); *J. Phys. et radium* **8**, 1, 164, 350(1940); *Phys. Rev* **72**, 838(1947).

[15] C. J. Gorter & H. B. G. Casimir, *Physica* **1**, 306(1933).

[16] C. J. Gorter, in *Progress in Low Temp. Phys.*, vol.I, ed. C. J. Gorter, North-Holland, Amsterdam (1957).

[17] L. Tisza, *Phase Transformations in Solids*, J. Wiley, N. Y. (1951).

[18] A. Bijl, *Physica* **7**, 869(1940).

[19] A. Michels, A. Bijl e J. de Boer, *Nature* **144**, 594(1939); *Physica* **8**, 655(1941).

[20] L. D. Landau, *J.Phys.USSR* **5**, 71(1941); *ib.* **11**, 91(1947).

[21] L. D. Landau & I. M. Khalatnikov, *Zh. Eksperim. i Teor. Fiz.* **19**, 637(1949); E. M. Lifshitz & E. L. Andronikashvili, *A Supplement to Helium*, Consultants Bureau, N. Y. (1959); L. D. Landau & E. M. Lifshitz, *Physique Statistique*, Editions Mir, Moscou (1967); I. M. Khalatnikov, *An Introduction to the Theory of Superfluidity*, W. A. Benjamin, N. Y. (1965).

[22] N. N. Bogoliubov, *J. Phys. USSR* **11**, 23(1947).

[23] S. T. Beliaev, *Sov. Phys. JETP* **7**, 289(1958); **ibid.**, 299(1958).

[24] N. M. Hugenholtz & D. Pines, *Phys.Rev.* **116**, 489(1959).

[25] T. D. Lee, K.Huang e C.N.Yang, *Phys.Rev.* **106**, 1135(1957).

[26] R. P. Feynman, *Phys.Rev.* **94**, 262(1954); *Progress in Low Temp. Phys.*, vol. I.,p.17, ed. C. J. Gorter, North-Holland, Amsterdam (1955).

[27] R. P. Feynman & M. Cohen, *Phys.Rev.* **102**, 1189(1956); *ib.* **107**, 13(1957).

[28] L. Goldstein, H. S. Sommers,Jr., L. D. P. King, C. J. Hoffman, in *Proc. Int. Conf. on Low Temp. Phys.* ed. R.Bowers, p.88 (1951).

[29] D. R. Tilley & J. Tilley, *Superfluidity and Superconductivity*, Adam Hilger Ltd, Bristol, 2nd edition (1986).

[30] E. C. Svensson & V. F. Sears, *Progress in Low Temp. Phys.*, vol. XI, ed. D. F. Brewer, North-Holland, Amsterdam, p.189, (1987).

[31] R. Jastrow, *Phys.Rev.* **98**, 1479(1955); E. Feenberg, *Amer. J. of Phys.* **38**, 684(1970); *Theory of Quantum Fluids*, Academic Press, N. Y (1969); H. W. Jackson & E. Feenberg, *Rev. Mod. Phys* **34**, 686(1962); E. Feenberg & C.W. Woo, *Phys.Rev.* **137a**, 391(1965); C. W. Woo, Microscopic Calculations for Condensed Phases of Helium, na referência 61.

[32] P. W. Anderson, *Rev. Mod. Phys.* **38**, 298(1966).

[33] V. L. Ginzburg & A. A. Sobaynin, *Sov. Phys. Usp.* **19**, 773(1976).

[34] I. Ventura, *Rev. Bras. Fis.* **9**, 375(1979).

[35] I. Ventura, *Theory of Superfluidity —Macroscopic Quantum Waves*, Univ. S. Paulo, preprint (1978); F. M. P. Chaves, J. W. Maluf e I.Ventura, *Rev. Bras. Fis.* **10**, 561(1980); I. Ventura, *Proc. I Encontro Nac. Fis. Part. Campos*, ed. Soc. Bras. Fis., Cambuquira (1979); I. Ventura, Sólitons, em *Proc. Escola J.A. Swieca*, ed. G.C. Marques e outros, SBF, S. Paulo (1983); I. Ventura, *Macroscopic Quantum Waves in Boson Systems I*, Univ. S. Paulo, preprint (1979); E. Lopes, *Sólitons da Equação de Gross-Pitaevskii*, Tese, Univ. S. Paulo (1985).

[36] E. P. Gross, *Nuovo Cimento* **20**, 454(1961); L. P. Pitaevskii, *Sov. Phys. JETP* **13**, 451(1961).

[37] R. F. Dashen, B. Hasslacher e A. Neveu, *Phys.Rev.*, **D10**, 4130,4144,(1974).

[38] R. Friedberg, T. D. Lee e A. Sirlin, *Phys. Rev.* **D13**, 2739(1976); *Nucl. Phys.* **B115**, 32(1976); T. D. Lee, *Particle Physics and Introduction to Field Theory*, Harwood Academic Publishers (1981).

[39] I. Ventura & G.C. Marques, *J. Math. Phys.* , 19(1978).

[40] I. Ventura & S. Vitiello, *Sólitons as Liquid ^{4}He Domain Walls: Quasi-particle Spectrum*, Univ. S. Paulo preprint (1986), submetido a Rev. Bras. Fis; S. Vitiello, Tese, Univ. S. Paulo (1986).

[41] A. D. B. Woods & R.A. Cowley, *Rep. Prog. in Phys.* **36**, 1135(1973); R.A. Cowley & A. D. B. Woods, *Can. J. Phys.* **49**, 177(1971); R. A. Cowley em *Quantum Liquids*, ed. J. Ruvalds & T. Regge, North-Holland, Amsterdam (1978); H. Palevsk, K. Otnes & K. E. Larsson, *Phys. Rev.* **112**, 11(1959); E. C. Svensson, V. F. Sears, A. D. B. Woods e P. Martel, *Phys. Rev.* **B21**, 3638(1980); e outras referências citadas nestas.

[42] I. Ventura, *Phys.Rev.* **B24**, 2812(1981).

[43] D. Bazeia, G. C. Marques e I. Ventura, *Rev. Bras. Fis.* **13**, 253(1983); C.A. de Carvalho, G. C. Marques, A. J. da Silva e I. Ventura, *Nucl. Phys. B* **265**, 45(1985); C.A. de Carvalho, D. Bazeia, O. P. Éboli, G. C. Marques, A. J. da Silva e I. Ventura, *Phys. Rev.* **D31**, 1411(1985).

[44] A. Einstein, *Sitzber. kgl. preuss. Akad. Wiss.* , 261(1924); *ibid.* , 3(1925).

[45] L. R. Evangelista & I. Ventura, *Mecânica Estatística dos Sólitons do Hélio líquido I* e *Mecânica Estatística dos Sólitons do Hélio Líquido II. O Segundo Campo Condensado*, a serem publicados na Rev. Bras. de Física.

[46] W. F. Vinen, A Comparision of the Properties of Superconductors and Superfluid Helium, in *Superconductivity*, vol. 2, ed. R. D. Parks, M. Dekker, N. Y. (1969).

[47] J. C. Slater & J. G. Kirkwood, *Phys.* **37**, 682(1931).

[48] P. Nozieres, in *Quantum Fluids*, ed. D. F. Brewer, North-Holland, Amsterdam (1966).

[49] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons*, North-Holland, Amsterdam (1982).

[50] I. Ventura, *Métodos Semi-Clássicos em Teoria de Campos*, Tese de Doutoramento, Univ. S. Paulo (1977).

[51] J. F. Allen & H. Jones, *Nature* **141**, 243(1938).

[52] T. Tsuzuki, *J. Low Temp. Phys.* **4**, 441(1971).

[53] V. E. Zakharov, *Sov. Phys.JETP* **26**, 994(1968).

[54] V. E. Zakharov & A. B. Shabat, *Sov. Phys. JETP* **37**, 823(1973).

[55] P. Kulish, S. Manakov e L. Fadeev, *Theor. Mat. Fiz.* **28**, 38(1976).

[56] A. Hasegawa & F. Tappert, *Appl. Phys. Lett.* **23**, 142;173(1973).

[57] V. G. Makhankov & V. K. Fedyanin, *Phys. Rep.* **104**, (1984) e referências ali citadas; V. G. Makhankov, N. V. Makhaldiani, O. P. Pashaev, *Phys. Lett.* **81**, 3(1981).

[58] J. A. Krumhansl & J. R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **B11**, 3535(1975).

[59] K. R. Atkins, *Liquid Helium*, At the University Press, Cambridge (1959).

[60] J. Wilks, *An Introduction to Liquid Helium*, Clarendon Press, Oxford (1970).

[61] *The Physics of Liquid and Solid Helium*, ed. K. H. Bennemann & J. B. Ketterson, J.Wiley, N. Y. (1976).

[62] A. C. Scott, F. Y. F. Chu e D. W. McLaughlin, *Proc. IEEE* **61**, 1443(1973).

[63] C. M. Varma & N. R. Werthamer, *Solid Helium* na ref. 61.

[64] H. E. Hall, *Phil. Trans. Roy. Soc. London* **A250**, 359(1957); W. F. Winen, *Phil. Trans. Roy. Soc. London* **A260**, 218(1961); P. J. Bendt, *Phys. Rev.* **127**, 1441(1962); J. D. Reppy & D. Depatie, *Phys. Rev. Lett.* **12**, 20,187(1964); J. B. Mehl & W. Zimmermann,Jr.,

Phys. Rev. Lett. **14**, 20,815(1965); J. S. Langer & J. D. Reppy, *Prog. in Low Temp. Phys.* , Vol. VI, ed. C. J. Gorter, North-Holland, Amsterdam, (1955); veja, também, I. Rudnick, *Proc. Int. School of Phys.* " Enrico Fermi",LXIII, pp. 112-164 (1976).

[65] H. J. Maris, *Rev. Mod. Phys.* **49**, 341(1979).

[66] T. J. Greytak, in *Quantum Liquids*, veja ref. 41.

[67] G. J. Hyland, G. Rowlands e F. W. Cummings, *Phys. Lett.* **31A**, 465(1970).

[68] H. N. Robkoff, D. A. Ewen e R. B. Hallock, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 2006(1979).

[69] V. F. Sears & E. C. Svensson, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 2009(1979).

[70] V. F. Sears, E. C. Svensson, P. Martel e A. D. B. Woods, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 279(1982).

[71] F. W. Wirth, D. A. Ewen e R. b. Hallock, *Phys. Rev.* **B27**, 5530(1983).

[72] A. L. Fetter, *Phys. Rev.* **B23**, 2425(1981) ; A. Griffin, *Phys. Rev.* **B22**, 5193(1980).

[73] J. Goldstone, *Nuovo Cimento* **19**, 15(1961); Y. Nambu & G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **122**, 345(1961); J. Goldstone, A. Salam e S. Weinberg, *Phys. Rev.* **127**, 965(1962); E. S. Abers & A. N. Lee, *Phys. Lett.* **C9**, 1(1973).

[74] A. E. Glassgold, A. N. Kaufman e K. M. Watson, *Phys. Rev.* **120**, 660(1960).

[75] H. E. Haber & H. A. Weldon, *Phys. Rev.* **D25**, 502(1982).

[76] S. Weinberg, *Phys. Rev.* **D9**, 3357(1974); A. D. Linde, *Rep.Prog. Phys.* **42**, 389(1979); C. Itzykson & J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, N. Y. (1980); T. D. Lee *op. cit.* ref.38.

[77] cf. a ref. 34 e as referências ali citadas.

[78] Veja também E.Varoquaux & O.Avenel, *Phys. Scripta* **T19**, 445(1987), onde evidências experimentais são discutidas.