14/3/95

Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Fenomenologia Hadrônica no Modelo de Skyrme

Orildo Luis Battistel

Tese de doutorado submetida
ao Instituto de Física da
Universidade de São Paulo

Prof. Iberê Luiz Caldas
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Manoel Roberto Robilotta (IFUSP-Orientador)
Prof. Dr. Erasmo Ferreira (UFRJ)
Profa. Dra. Marina Nielsen (IFUSP)
Prof. Dr. Tobias Frederico (CTA)
Profa. Dra. Victoria Herscovitz (UFRGS)

São Paulo

1994

SBI-IFUSP

305M810T2241

FICHA CATALOGRÁFICA

**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Battistel, Orildo Luís

**Fenomenologia hadrônica no modelo de Skyrme. São
Paulo, 1994.**

**Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo. Instituto
de Física. Departamento de Física Experimental**

Área de Concentração: Física de Partículas Elementares

Orientador: Prof. Dr. Manoel Roberto Robilotta

**Unitermos: 1. Modelo de Skyrme; 2. Skyrmions; 3. Sóli-
tons quirais; 4. Fenomenologia dos hadrons.**

USP/IF/SBI - 50/94

À Assunção, por tantas coisas
compartilhadas neste período;
pelo carinho, pela compreensão
e pelo grande apoio!

Agradecimentos

Ao Mané, por estes anos de orientação sempre precisa e amiga, pela paciência e pelas experiências transmitidas.

Ao Carocha, companheiro "macanudo", por estes anos de convivência leal e sincera, pela ajuda importantíssima na editoração do trabalho e, é claro, pela parceria ao chamarão amigo.

Ao Orimar, pelas discussões sempre elucidativas, pelo apoio permanente e pelo caminho das pedras.

Aos neomateadores Joel e Edilson, pela amizade e pelo apoio.

A todas as pessoas do FINPE pela convivência e amizade.

À SandraLy e à Lia pelo colaboração sempre imediata e pela amizade sincera. À Ellen, à Luzia e à Cláudia pela ajuda.

Ao João Carlos pelos desenhos sempre pontuais e competentes.

Ao pessoal do xerox: Edson, Josué e Cida.

À minha família pela compreensão e pelo apoio, em especial aos meus pais que sempre me estimularam e me ensinaram a ser mais humano.

A todos os amigos com quem convivi neste período, pela paciência e pelo auxílio dado por cada um.

À FAPESP, ao CNPq e a CAPES pelo apoio financeiro.

Índice

1	INTRODUÇÃO	1
2	Conceitos Gerais	5
2.1	Introdução	5
2.2	Os Grupos SU(2) E SU(3)	6
2.3	Isospin, Quarks e Simetria Quiral	10
2.4	Cargas e Correntes	15
2.5	A Quebra Espontânea da Simetria Quiral	20
2.6	A Cromodinâmica Quântica	28
3	O Modelo de Skyrme	37
3.1	Introdução	37
3.2	A Lagrangiana de Skyrme	38
3.3	A Corrente Topológica	41
3.4	A Equação de Movimento	45
3.5	A Estabilidade do Sóliton Clássico	49
3.6	O Méson ω	52
3.7	O Termo $B_\mu B^\mu$	57
3.8	O Modelo Alternativo	59
3.9	Resultados Numéricos I	66
4	Fatores de Forma Eletromagnéticos do Núcleon	77
4.1	Introdução	77
4.2	Definições	79
4.3	Modelo Clássico: As Fontes	84
4.4	Modelo Clássico: Os Campos	88

4.5	A Região Tipo-Tempo: $q^2 < 0$	93
4.6	O Modelo de Skyrme	95
4.7	O Méson ω	100
4.8	O Termo $B^\mu B_\mu$ e o Modelo Alternativo	105
4.9	Resultados Numéricos II	106
5	As Propriedades Axiais do Núcleon	113
5.1	Introdução	113
5.2	O Fator de Forma Axial	114
5.3	O Fator de Forma πN	118
5.4	A Relação de Goldberger-Treinman	126
5.5	O Fator de Forma πN na Interação NN	127
5.6	O OPEP e o Fator de Forma πN no Modelo de Skyrme	132
5.7	Resultados Numéricos III	137
6	Conclusões	145
7	Apêndices	153
A	Unidades e Notação	153
A.1	Unidades Naturais	153
A.2	Notação	154
A.3	Os Tensores De Levi-Civita	156
A.4	As Matrizes de Pauli	156
B	O Skyrmion	159
B.1	Campos e Lagrangianas	159
B.2	A Corrente Bariônica	163
B.3	O Ouriço	164
C	A Quantização do Sóliton de Skyrme	167
C.1	O Sóliton Rodado	167
C.2	A Lagrangiana Rodada	171
C.3	Spin, Isospin e a Hamiltoniana Quântica	173
C.4	Os Autoestados	177

<i>ÍNDICE</i>	III
D As Correntes - B^μ, V^μ e A^μ	181
D.1 A Corrente Bariônica	181
D.2 As Correntes de Noether	182
E As Funções de Bessel	187
8 Referências	191

Lista de Figuras

1.1	<i>A Árvore do skyrmion.</i>	3
2.1	<i>Representação gráfica de um multiplete de $SU(2)$. Os pontos denotam os estados que são conectados pelos operadores $T_{\pm}$.</i>	8
2.2	<i>Um multiplete de $SU(3)$: Uma malha de pontos no plano $T_3 - Y$; cada ponto define um estado.</i>	10
2.3	<i>Ação dos operadores de $SU(3)$.</i>	11
2.4	<i>Os supermultipletos de $SU(3)$. Octetos para: (a) mésons 0^-, (b) mésons 1^-, (c) bárions $\frac{1}{2}^+$ e (d) decuplete dos bárions $\frac{3}{2}^+$.</i>	13
2.5	<i>A forma do potencial (2.60) para $\alpha^2 < 0$. O mínimo ocorre para $\pi = \sigma = 0$.</i>	22
2.6	<i>A forma do potencial (2.60) com $\alpha^2 > 0$: O mínimo é degenerado ocorrendo nos pontos $\pi^2 + \sigma^2 = \alpha^2$.</i>	22
2.7	<i>A forma do potencial (2.74) com $\alpha^2 > 0$. O termo de quebra de simetria inclina a curva determinando um vácuo único.</i>	25
3.1	<i>O mapeamento do eixo real x no círculo S^1.</i>	42
3.2	<i>Mapeamentos do eixo x no círculo S^1 pela função $\theta(x)$.</i>	43
3.3	<i>Formas da função de perfil $F(r)$ para os conjuntos de parâmetros $(f_{\pi}, e) = (54 \text{ MeV}, 4.84)$, $(93 \text{ MeV}, 4.0)$.</i>	49
3.4	<i>Forma das funções de perfil $F(r)$ e $\bar{\omega}(r) = \frac{\omega(r)}{2f_{\pi}}$, para os conjuntos de parâmetros $(f_{\pi}, \gamma) = (93, 11.2)$ e $(62, 15.64)$.</i>	56
3.5	<i>Forma da função de perfil $F(r)$ com termo $B_{\mu}B^{\mu}$. $(f_{\pi}, \beta) = (65.1, 0.019)$.</i>	59
3.6	<i>Forma das funções de perfil $F^N(r)$. Estas soluções se referem às condições de contorno da tabela 3.1.</i>	67
4.1	<i>Espalhamento elétron-próton com ambas as partículas sendo consideradas pontuais.</i>	77

4.2	<i>Espalhamento elétron-próton com uma bolha no vértice fóton-núcleon que leva em conta o tamanho do hádron.</i>	79
4.3	<i>Espalhamento $\gamma - N$ no referencial de Breit.</i>	80
4.4	<i>Fatores de forma eletromagnéticos dos núcleons. Os dados são das ref.[Höh+ 76, BZ 74]. Para comparação também estão incluídos os ajustes dipolares (4.14).</i>	83
4.5	<i>Processo $\gamma N \rightarrow \pi N$.</i>	93
4.6	<i>Processo de aniquilação elétron-pósitron. O fóton virtual tipo-tempo converte-se em um méson omega antes do acoplamento com os píons.</i>	94
4.7	<i>Fatores de Forma Eletromagnéticos no modelo de Skyrme tradicional.</i>	100
4.8	<i>As densidades de carga isoescalar. Estão incluídos fatores $4\pi r^2$ como é usual.</i>	103
4.9	<i>Correlação eletromagnética: $\langle r_E^2 \rangle_B / A \propto \mu^V / A^{\frac{3}{2}}$.</i>	110
5.1	<i>Reação fraca induzida por neutrinos com troca de um bóson W^+. No vértice hadrônico temos um fator de forma.</i>	114
5.2	<i>O fator de forma axial.</i>	115
5.3	<i>O fator de forma axial do núcleon. Os dados são das referências [Gue+ 75, 76]. A linha continua representa o ajuste dipolar (5.5).</i>	116
5.4	<i>O fator de forma axial do núcleon no modelo de Skyrme.</i>	117
5.5	<i>O fator de forma pión-núcleon.</i>	119
5.6	<i>A forma da fonte radial $J_\pi(r)$.</i>	121
5.7	<i>O fator de forma pión-núcleon no modelo de Skyrme. A linha tracejada representa o ajuste monopolar (5.46) com $\Lambda_\pi=615$ MeV no primeiro caso e $\Lambda_\pi=808$ MeV no segundo.</i>	126
5.8	<i>As componentes V_0^- e V_2^- dos potenciais, obtidas a partir: da eq.(5.86) com $\mathcal{M} = 1$ (curva traço-ponto), com $\mathcal{M}$ dada por (5.51) (curva tracejada) e da eq.(5.98) com e sem o termo de curto alcance ϕ_1 (curva contínua).</i>	135
5.9	<i>A componente V_0^- dos potenciais, obtidas da eq.(5.86) a partir do fator de forma calculado em (5.87) com $l=2$. Convenção igual a da fig.(5.8).</i>	136
5.10	<i>Os fatores de forma πN calculados a partir da eq.(5.51) com e sem a matriz de métrica $\mathcal{M}$ e do potencial NN no modelo de Skyrme com $l=2$. Convenção da fig.(5.8).</i>	137
5.11	<i>Contribuições não devidas ao OPEP na parte central do potencial (5.98) (linha contínua). A linha tracejada representa um ajuste com o méson π', como na ref.[HHT 92].</i>	138

5.12	<i>Razões entre as várias predições para o potencial tensor e a correspondente componente do OPEP. Convenções da fig.(5.8).</i>	139
6.1	<i>Correlação I: $g_{\pi NN} \times g_A$.</i>	147
6.2	<i>Correlação II: $M \times \lambda$.</i>	148
6.3	<i>Correlação III: $M \times \langle r_E^2 \rangle_B$.</i>	149
6.4	<i>Teste da correlação I. O ponto escuro representa o resultado experimental.</i>	150
6.5	<i>Teste da correlação II. O ponto escuro representa o resultado experimental.</i>	150
6.6	<i>Teste da correlação III. O ponto escuro representa o resultado experimental.</i>	151

Resumo

Neste trabalho estudamos aspectos estruturais de modelos onde os bárions são tratados como sólitons quirais, tais como o proposto por Skyrme e variantes, contendo um termo estabilizador de sexta ordem, proporcional à corrente bariônica. Modelos deste tipo têm sido bastante estudados na literatura e suas previsões para as propriedades estáticas do núcleon, sistematicamente, se mantêm por volta de 2/3 dos respectivos valores experimentais.

Em geral, uma dada versão do modelo envolve apenas dois ou três parâmetros, mas pode dar origem a mais de uma dezena de previsões, e esta proliferação de números torna difícil a sua avaliação. Por isso, neste trabalho investigamos os vínculos estruturais ou numéricos entre as previsões do modelo, de modo a tornar mais objetiva a sua comparação com a experimentação.

Todos os modelos considerados têm a mesma parte de longo alcance. Assim, a busca de padrões é feita considerando-se tanto versões diferentes das lagrangianas de curto alcance, vários valores para os parâmetros, e campos do pión que se transformam segundo representações não usuais de $SU(2) \times SU(2)$. Dessas várias possibilidades emerge um número muito grande de resultados numéricos que, depois de organizados, mostram regularidades. Dessas regularidades decorre uma proposta para a análise dos dados experimentais.

Finalmente, este trabalho também inclui um cálculo alternativo do fator de forma pión-núcleon, a partir da interação NN do modelo de Skyrme.

Abstract

In this work we study structural features of models where baryons are treated as chiral solitons, such as that proposed by Skyrme and variants, containing a sixth order stabilizing term, proportional to the baryonic current. Models of this kind have been widely considered in the literature and their predictions for nucleon static properties are systematically around 2/3 of the corresponding experimental values.

In general, a given version of the model contains only two or three parameters, but may yield more than ten observable predictions. This makes its assessment rather difficult. Therefore, in this work we investigate structural and numerical constraints between the predictions of the model, so as to render the comparison with experimental more objective.

All the models considered here contain the same long range part. Hence, the search of patterns is done by considering different versions for the short range lagrangian, various values for the free parameters and pion fields which transform according to unusual representations of $SU(2) \times SU(2)$. A rather large amount of numerical results emerge from these various possibilities, which display regularities after being organized. These patterns motivate a proposal for the analysis of experimental information.

Finally, this work also includes an alternative calculation for the pion-nucleon form factor, starting from the NN interaction in the Skyrme model.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A busca de uma teoria abrangente para os hádrons, principalmente do ponto de vista quantitativo, é um dos grandes desafios da física teórica. A construção desta “hadrodinâmica” passa, hoje, necessariamente, pela Cromodinâmica Quântica, aceita como a teoria fundamental das interações fortes. Entretanto, o tratamento de processos envolvendo graus de liberdade de quarks e gluons encontra ainda problemas muito sérios associados ao caráter não abeliano da teoria. Por isso, modelos efetivos, inspirados na QCD e que incorporem ao máximo suas características e simetrias, são muito importantes para o estudo da fenomenologia hadrônica a baixas energias.

O modelo de Skyrme, objeto do estudo deste trabalho, é um desses modelos efetivos. Ele foi desenvolvido por T. H. R. Skyrme no início dos anos 60 e é baseado na idéia que configurações do tipo sóliton em uma teoria mesônica podem ser apropriadas para se descrever bárions a baixas energias. A proposta de Skyrme ficou esquecida até 1979, quando foi revivida por Witten e colaboradores. Eles quantizaram o sóliton, exploraram as consequências fenomenológicas do modelo e enfatizaram a sua relação com a QCD, com base em idéias de t’Hooft de 1974, de que no limite $N_c \rightarrow \infty$ essa teoria torna-se equivalente a uma teoria de mésons que interagem fracamente.

Um dos objetivos principais deste trabalho é entender em detalhes como o modelo constrói os seus resultados. Em particular, estamos interessados em compreender por que estes resultados ficam somente em torno de 2/3 dos respectivos valores experimentais, não importando se a estabilização é feita pelo termo de Skyrme de quarta ordem, pelo termo de sexta ordem associado à corrente bariônica ou por mésons vetoriais.

Os problemas do modelo manifestam-se também no fato de que ao se melhorar o ajuste de um observável, tal como f_π , por exemplo, as previsões para $g_{\pi NN}$, g_A e para os raios

pioram. Qual a característica intrínseca do modelo que promove este tipo de incoerência?

Para tentar entender estas e outras questões envolvendo o modelo nós estudamos neste a dependência de várias quantidades dos sólitons topológicos com a dinâmica de curto alcance. Nos modelos considerados, essa dinâmica está associada a três entidades: a forma da lagrangiana de curto alcance $\mathcal{L}_{ca}$, o valor do parâmetro p_{ca} que caracteriza a sua intensidade e o comportamento do campo do pión próximo à origem, representado por $\pi(r_{ca})$. Para definir com maior clareza o papel da dinâmica de curto alcance, mantivemos fixas as partes de longo alcance do modelo, representadas pelas componentes $\mathcal{L}_\sigma$ e $\mathcal{L}_{qs}$ da lagrangiana e pelos parâmetros f_π e m_π . Este último determina a quebra de simetria quiral.

A seguir, apresentamos a organização do trabalho.

No capítulo 2 discutimos conceitos gerais que englobam elementos de teoria de grupos, realizações da simetria quiral, a obtenção das correntes, e propriedades importantes da Cromodinâmica Quântica. Estas questões são fundamentais para o estudo do modelo, tanto do ponto de vista do seu suporte matemático como para situá-lo no contexto da teoria fundamental, a QCD.

No capítulo 3 abordamos o modelo propriamente dito. Após um breve histórico, discutimos questões como a corrente bariônica, a equação de movimento e a estabilidade do sóliton clássico. Neste capítulo também apresentamos as várias versões do modelo, com destaque para uma proposta alternativa. Nesta parte do trabalho apresentamos os resultados numéricos para massas e momentos de inércia.

Os aspectos relacionados à estrutura eletromagnética dos núcleons estão contidos no capítulo 4. Lá nós apresentamos os fatores de forma e discutimos como eles fornecem informações a respeito da estrutura observável das partículas. Também formulamos um modelo para o núcleon clássico e verificamos de que forma seus resultados se comparam aos ajustes empíricos. Estas questões são muito pertinentes ao modelo de Skyrme, em virtude da aproximação do rotor rígido inerente a ele. Este capítulo é encerrado com a discussão dos resultados numéricos para raios elétricos, magnéticos e momentos magnéticos.

No capítulo 5 apresentamos as propriedades axiais do núcleon. Os fatores de forma axial e pión-núcleon são discutidos de maneira geral e à luz do modelo de Skyrme. Este capítulo também contém uma previsão original do fator de forma pión-núcleon a partir da parte piônica do potencial núcleon-núcleon deduzido a partir do ansatz produto. Observáveis como raios e constantes de acoplamento, são calculados numericamente e comparados entre diferentes formulações e várias versões.

As conclusões do trabalho são apresentadas no capítulo 6.

Finalmente, incluímos cinco apêndices em que mostramos as unidades utilizadas e fixamos a notação (A), complementamos com fórmulas e deduções os aspectos básicos do modelo (B, C e D) e compilamos várias relações entre as funções de Bessel que são bastante utilizadas no decorrer do trabalho (E).

Para destacar a abrangência deste trabalho reproduzimos abaixo a “Árvore do Skyrmion” apresentada por Keh-Fei Liu num simpósio de energias intermediárias [Keh 87]. Como se poderá verificar no decorrer da leitura, cada uma das facetas do problema foi abordada, exceto as relativas ao espalhamento.

Figura 1.1: A Árvore do skyrmion.

Capítulo 2

CONCEITOS GERAIS

2.1 Introdução

Acredita-se hoje, amplamente, que a Cromodinâmica Quântica seja a teoria fundamental das interações fortes. Apesar disso, ainda não é possível obter todas as informações de que necessitamos diretamente dela, principalmente em processos de baixas energias. Por isso, as teorias efetivas se apresentam como alternativas viáveis enquanto os problemas relativos à teoria fundamental não são solucionados. O modelo de Skyrme se insere neste contexto; ele está baseado na descoberta [’t Ho 74, ’tHo 74b, Wit 79, Wit 84] de que no limite de grande número de cores, a QCD é equivalente a uma teoria de mésons, e que neste limite os bárions se comportam como sólitons.

As simetrias têm papel muito importante na física de partículas; a construção de modelos e o entendimento das interações fundamentais requerem a identificação de invariâncias e do modo como elas são realizadas, aproximadas ou até mesmo violadas. Esta postura é respaldada pelos sucessos da simetria unitária, álgebra de correntes e invariância quiral no estudo da estrutura interna dos hádrons envolvendo quarks.

Neste capítulo discutimos, de modo conciso, a base teórica do modelo de Skyrme, apresentando as simetrias da teoria fundamental e mostrando que a teoria efetiva as respeita. Iniciamos discutindo algumas idéias a respeito da física dos hádrons, tais como multipletos, simetria quiral, quebra espontânea etc. que têm origem na QCD. A abordagem que usaremos aqui é baseada nas referências [Bad 88, CL 84, IZ 80, Mut 87, AFF+ 73, Rob 89].

2.2 Os Grupos SU(2) E SU(3)

A teoria de grupos é a linguagem matemática natural para o estudo das simetrias. Por isso, antes de passarmos à discussão deste tema, comentamos algumas propriedades importantes dos grupos, inserindo-as no contexto geral a ser abordado. Uma discussão da teoria de grupos pode ser encontrada na literatura [Geo 92].

Os grupos contínuos com representações de operadores unitários, são denominados grupos de Lie. Seus elementos $a(\epsilon) = a(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$ dependem de n parâmetros contínuos reais e podem ser escritos como

$$a(\epsilon) = e^{i\epsilon \cdot X} = a(0) + i\epsilon_k X_k + \dots \quad (2.1)$$

Os operadores

$$X_k = -i \left. \frac{\partial a}{\partial \epsilon_k} \right|_{\epsilon=0} \quad (2.2)$$

são os chamados geradores do grupo. Eles satisfazem a álgebra de Lie:

$$[X_j, X_k] = iC_{jk}^l X_l \quad (2.3)$$

onde os C_{jk}^l são um conjunto de números reais, as “constantes de estrutura” do grupo, tais que

$$C_{jk}^l = -C_{kj}^l \quad (2.4)$$

Uma representação de um grupo é um mapeamento dos elementos abstratos $(a, b, \dots)$ em um conjunto de matrizes $(D(a), D(b), \dots)$, que têm as mesmas propriedades dos elementos desse grupo.

De (2.2) temos que as representações matriciais dos geradores $T(X_j) \equiv T_j$, são tais que

$$D(a(\epsilon)) = e^{i\epsilon \cdot T} \quad (2.5)$$

com

$$[T_j, T_k] = iC_{jk}^l T_l \quad (2.6)$$

Dentre os grupos de Lie que destacamos nesta introdução, o mais simples é o grupo $U(1)$. Ele faz parte do grupo unitário $U(n)$, formado pelo conjunto das matrizes unitárias $n \times n$, tais que $UU^\dagger = U^\dagger U = 1$. Para $n > 1$ $U(n)$ é não-abeliano (para seus elementos não vale a propriedade comutativa $ab = ba$). O grupo abeliano $U(1)$ consiste das matrizes unitárias 1×1 , isto é, são as transformações de fase da forma $e^{i\theta}$.

Além do grupo $U(1)$, estamos também interessados nos grupos especiais unitários $SU(n)$, formados por matrizes $n \times n$ unitárias e com determinante igual a 1.

Qualquer matriz unitária U pode ser escrita em termos de uma matriz hermitiana H , como $U = e^{iH}$. Da identidade $\det(e^A) = e^{\text{tr}A}$ e $\det U = 1$ temos que $\text{tr}H = 0$. Uma vez que há $n^2 - 1$ matrizes $n \times n$ hermitianas de traço nulo, um elemento de $SU(n)$ pode ser escrito como

$$U = \exp \left(i \sum_{a=1}^{n^2-1} \epsilon_a T_a \right), \quad (2.7)$$

onde os ϵ_a são parâmetros reais do grupo e os T_a são seus geradores. Somente $n - 1$ dos $n^2 - 1$ geradores são diagonais, de modo que convencionamos dizer que o $SU(n)$ é um grupo de ordem $n - 1$.

O grupo de Lie $SU(2)$ é não abeliano, e sua representação básica emprega matrizes unitárias 2×2 , que podem ser escritas em função de três parâmetros

$$U(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = e^{i\epsilon_a \tau_a}. \quad (2.8)$$

Os geradores, definidos por $T_i = \tau_i/2$, são dados em termos das matrizes de Pauli

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Ele é um grupo de ordem 1, pois apenas τ_3 é diagonal. Os geradores T_i satisfazem a álgebra de Lie

$$[T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk} T_k, \quad (2.10)$$

de modo que as constantes de estrutura assumem os valores dados pelo símbolo de Levi-Civita ϵ_{ijk} , com $\epsilon_{123} = 1$.

O operador dado por

$$T^2 = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 \quad (2.11)$$

é um operador invariante ou de Casimir, que comuta com todos os geradores do grupo.

O resultado (2.10) é muito importante, uma vez que ele revela que a álgebra do $SU(2)$ é a mesma que a do grupo das rotações em 3 dimensões, o $SO(3)$. No caso deste último, os geradores são simplesmente os operadores de momento angular J_1 , J_2 e J_3 , que dão origem a um grupo que representa rotações espaciais.

A identidade entre as álgebras de $SU(2)$ e $SO(3)$, decorrente do isomorfismo desses grupos, permite que o método padrão utilizado para se determinar os autoestados do

momento angular possa ser seguido para obtermos todas as representações irredutíveis do $SU(2)$ de isospin. Essas representações são rotuladas por dois números quânticos, os autovalores de T^2 e T_3 .

Em mecânica quântica pode-se mostrar que todos os estados conectados por uma transformação de rotação formam uma base de vetores para as representações irredutíveis j do grupo, com $(2j + 1)$ elementos. Analogamente, no caso de $SU(2)$, estados com diferentes autovalores de T_3 são conectados pelos operadores de abaixamento e levantamento, dados por

$$T_{\pm} = T_1 \pm iT_2 \quad (2.12)$$

Estas operações podem ser mostradas em diagramas, com cada família irredutível de estados sendo dada por um gráfico unidimensional, como na fig.(2.1), onde os pontos igualmente espaçados representam os $(2j + 1)$ estados.

Figura 2.1: Representação gráfica de um multipletto de $SU(2)$. Os pontos denotam os estados que são conectados pelos operadores $T_{\pm}$.

Da mesma forma que o $SU(2)$, o grupo $SU(3)$ também é um grupo de Lie não-abeliano, cuja representação básica emprega matrizes 3×3 unitárias e envolve 8 parâmetros

$$U(\epsilon_1, \dots, \epsilon_8) = e^{i\epsilon_a \lambda_a} \quad a = 1 \dots 8. \quad (2.13)$$

λ_a são matrizes hermitianas de traço nulo, conhecidas como matrizes de Gell-Mann [Gel 62], que podem ser dadas na seguinte forma.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Elas possuem a seguinte normalização

$$\text{tr}(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab} \quad (2.15)$$

e satisfazem as relações de comutação

$$\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2} \right] = if_{abc} \frac{\lambda_c}{2} \quad (2.16)$$

onde as constantes de estrutura do grupo f_{abc} são totalmente antissimétricas e dadas por

$$\begin{aligned} f_{123} &= 1, & f_{147} &= \frac{1}{2}, & f_{156} &= -\frac{1}{2}, & f_{246} &= -\frac{1}{2}, & f_{257} &= \frac{1}{2}, \\ f_{345} &= \frac{1}{2}, & f_{367} &= -\frac{1}{2}, & f_{458} &= \frac{\sqrt{3}}{2}, & f_{678} &= \sqrt{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

sendo as demais nulas.

Os geradores $F_a = \lambda_a/2$ de $SU(3)$ satisfazem a álgebra de Lie

$$[F_a, F_b] = if_{abc} F_c \quad (2.18)$$

e o operador de Casimir, neste caso, é dado por

$$F^2 = \frac{\lambda_i}{2} \frac{\lambda_i}{2} \quad (2.19)$$

Uma vez que λ_3 e λ_8 são diagonais, o $SU(3)$ é um grupo de ordem 2. A partir de (2.14) temos que

$$[F_3, F_8] = 0 \quad (2.20)$$

de modo que F_3 e F_8 podem ser diagonalizados simultaneamente. Isso significa que os estados em uma representação irredutível de $SU(3)$ devem ser rotulados pelos autovalores de F^2 , F_3 e F_8 .

Por inspeção em (2.14) vemos que as matrizes λ_1 , λ_2 e λ_3 são simplesmente as matrizes de Pauli com uma coluna e uma linha de zeros a mais. Isto reflete o fato de que o grupo $SU(2)$ é um subgrupo de $SU(3)$, e que os três primeiros operadores F_i são idênticos aos operadores T_i . Por isso, é conveniente definir-se operadores diagonais, na seguinte forma

$$T_3 = F_3 \quad , \quad Y = \frac{2}{\sqrt{3}} F_8 \quad (2.21)$$

com os seguintes operadores de levantamento e abaixamento:

$$T_{\pm} = F_1 \pm iF_2 \quad , \quad U_{\pm} = F_6 \pm iF_7 \quad , \quad V_{\pm} = F_4 \pm iF_5 \quad . \quad (2.22)$$

Uma família de estados $SU(3)$ pode ser representada como uma figura no plano $T_3 - Y$ (fig.(2.2)), assim como uma representação de $SU(2)$ o foi por uma figura unidimensional. Das relações de comutação entre os operadores (2.22) pode-se calcular a sua ação sobre os estados.

Figura 2.2: Um multiplete de $SU(3)$. Uma malha de pontos no plano $T_3 - Y$; cada ponto define um estado.

Os deslocamentos na fig.(2.2) são obtidos por meio das seguintes operações:

T_+ acresce 1 unidade a T_3 deixando Y inalterado;

U_+ decresce T_3 de 1/2 unidade e acresce 1 unidade a Y ;

V_+ acresce 1/2 unidade a T_3 e acresce 1 unidade a Y . Os operadores T_- , U_- e V_- têm ação oposta, como mostrado na fig.(2.3).

2.3 Isospin, Quarks e Simetria Quiral

No estudo das forças nucleares percebeu-se que, em uma certa aproximação, as interações fortes são independentes da carga transportada pelos constituintes básicos, sugerindo que estas interações são invariantes por uma transformação que troque o próton pelo nêutron. Isso levou à idéia de que as interações fortes têm uma simetria $SU(2)$ de isospin, na qual o próton e o nêutron formam um dublete. Com isso, o grupo matemático ganha significado físico.

Figura 2.3: Ação dos operadores de $SU(3)$.

No caso do dubleto (p, n) podemos escrever

$$\begin{aligned} |p\rangle &= |1/2, 1/2\rangle, \\ |n\rangle &= |1/2, -1/2\rangle, \end{aligned} \quad (2.23)$$

de modo que:

$$\begin{aligned} T^2 |p\rangle &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) |p\rangle \\ T^2 |n\rangle &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) |n\rangle \\ T_3 |p\rangle &= \frac{1}{2} |p\rangle \\ T_3 |n\rangle &= -\frac{1}{2} |n\rangle \\ T_- |p\rangle &= |n\rangle \\ T_+ |n\rangle &= |p\rangle \\ T_- |n\rangle &= T_+ |p\rangle = 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

O conceito de isospin pode ser estendido para os outros hádrons, como por exemplo:

$$\begin{aligned} (\pi^+, \pi^0, \pi^-) &\rightarrow T = 1 \quad \text{isotripleto} \\ (K^+, K^0) &\rightarrow T = 1/2 \quad \text{isodoubleto} \\ (\Lambda) &\rightarrow T = 0 \quad \text{isosingleto} \end{aligned}$$

O isospin, por meio de transformações do grupo $SU(2)$, relaciona partículas com diferentes cargas, que exibem o mesmo tipo de interação forte e, por isso, são agrupadas juntas.

Isto significa que a lagrangiana forte é invariante frente às transformações de $SU(2)$ e que $[T_i, H^F] = 0$ onde H^F é a parte forte da Hamiltoniana total do sistema H . O fato de que membros do multipletto de isospin têm cargas elétricas diferentes mostra que a interação eletromagnética não respeita esta simetria e, por isso, ela não é exata na natureza, isto é $[T_i, H] \neq 0$. Caso a simetria fosse exata teríamos, como consequência, que todos os membros de um dado multipletto de $SU(2)$, com diferentes valores de T_3 , teriam os mesmos valores para os demais números quânticos e suas massas seriam estritamente iguais. Como isso não acontece, a diferença de massa dentro do multipletto torna-se um bom parâmetro para se analisar o quanto a simetria de isospin é quebrada. No caso (p, n) temos

$$\frac{m_n - m_p}{m_n + m_p} \simeq 0,7 \times 10^{-3}$$

sendo um pouco maior nos outros casos, sem passar, no entanto, de uns poucos por cento. Isto nos leva a concluir que $[T_i, H] \simeq 0$ e que o isospin é uma simetria aproximada na natureza.

A descoberta de uma nova classe de hádrons permitiu a introdução de um novo número quântico denominado estranheza (S). O fato dessas partículas poderem ser agrupadas em famílias com elementos de massas aproximadamente iguais indicou a existência de dois números quânticos aditivos para os hádrons e motivou a extensão do isospin para um grupo de simetria interna maior que o $SU(2)$, de ordem 2. Neste caso as famílias contêm elementos com carga e estranheza diferentes.

O isospin e a estranheza são conservados apenas nas interações fortes. Uma certa combinação destes, a carga elétrica, é conservada em todas as interações:

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} \quad (2.25)$$

com

$$Y = B + S \quad .$$

onde B é o número bariônico e Y é denominada hipercarga. A relação (2.25) é conhecida como Relação de Gell-Mann-Nishijima [Gel 53, NN 53].

A classificação dos hádrons de acordo com as representações de $SU(3)$ põe num único supermultipletto vários multiplétos de $SU(2)$, de diferentes estranhezas (ou hipercargas).

Neste esquema, conhecido como teoria das oito configurações (Eightfold Way) de Gell-Mann [Gel 61] e Ne'eman [Ne'e 61] os píons são colocados no mesmo octeto que $K, \bar{K}$ e η , os mésons vetoriais ρ, K^*, ω e ϕ preenchem outro octeto, e famílias análogas existem também para os bárions, como se pode ver na fig.(2.4).

Figura 2.4: Os supermultipletos de $SU(3)$. Octetos para: (a) mésons 0^- , (b) mésons 1^- , (c) bárions $\frac{1}{2}^+$ e (d) decupletto dos bárions $\frac{3}{2}^+$.

Da mesma forma que no caso do isospin, a invariância das interações fortes frente às transformações de $SU(3)$, representada pela relação $[F_i, H^F] = 0$, implicaria na existência de multipletos degenerados em massa. A medida da violação de tal simetria na natureza ($[F_i, H] \neq 0$) pode ser estimada pela diferença de massa entre elementos de um multipletto de $SU(3)$, por exemplo

$$\frac{m_\Sigma - m_n}{m_\Sigma + m_n} \simeq 0.12$$

de onde se conclui que a simetria $SU(3)$ não é tão boa como a simetria $SU(2)$.

O sucesso da simetria $SU(3)$ em explicar e classificar as propriedades internas dos hádrons levou muitos físicos a se perguntarem se partículas correspondendo à representação fundamental mais simples desse grupo (tripletos) poderiam existir. Neste caso, os hádrons seriam constituídos por um triplete fundamental de partículas de spin $1/2$ e

carga elétrica fracionária. Assim, Gell-Mann [Gel 64] e Zweig [Zwe 64] propuseram o modelo de quarks, segundo o qual o tripleto fundamental seria constituído por três partículas, denominadas quarks, com “sabores” diferentes: u (up), d (down) e s (strange)

$$q_i = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

com os seguintes números quânticos:

	Q	T	T_3	Y	S	B
u	2/3	1/2	1/2	1/3	0	1/3
d	-1/3	1/2	-1/2	1/3	0	1/3
s	-1/3	0	0	-2/3	-1	1/3

(2.27)

Segundo este modelo os mésons são estados ligados de um quark e um antiquark (antipartículas daquelas dadas em (2.27)) e os bárions estados ligados de três quarks. O grupo de simetria em questão é então o $SU(3)$ ¹ de sabor que seria exato se as massas dos três quarks fossem iguais: $m_u = m_d = m_s$.

O grande sucesso deste modelo de quarks constituintes, desenvolvido no início dos anos 60, foi produzir supermultipletos que explicavam as regularidades observadas no espectro dos hádrons conhecidos e previam outros ainda então desconhecidos. Entretanto, este modelo simples não explicava questões como o confinamento e trazia alguns problemas de estatística. Alguns desses problemas foram resolvidos quando se postulou [Gre 64, HN 65] a existência de um outro grau de liberdade, um novo número quântico, chamado cor. Segundo este modelo estendido, cada sabor de quark poderia existir em três cores diferentes e formariam um tripleto do grupo $SU(3)$ de cor.

Antes de encerrar esta seção vamos mencionar uma questão levantada primeiramente no contexto das interações fracas, mas que tem profundas implicações também nas interações fortes. A corrente fraca transportada por um férmion tem a famosa estrutura $(V - A)$, onde V representa uma corrente vetorial relacionada à corrente eletromagnética e A , uma corrente axial, implicando que somente correntes “esquerdas” participam destes processos. Por exemplo, consideremos a corrente leptônica, que participa das interações fracas, entre um spinor de um elétron e o spinor de seu respectivo neutrino:

$$J_\mu^W(x) = \bar{\psi}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_e}.$$

¹Não estão incluídos os quarks pesados c (charm), b (bottom) e t (top). Com eles o grupo de sabor deveria ser alargado para o $SU(6)$.

Ela expressa o fato de que a lagrangiana depende somente de neutrinos com helicidade esquerda $\psi_{\nu_e}^E(x) = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi_{\nu_e}(x)$, o que está de acordo com a fenomenologia, uma vez que experimentalmente só são detectados neutrinos deste tipo. Assim, a lagrangiana que descreve os neutrinos, tanto livres como em interação, é invariante frente à transformação $\psi_{\nu_e}(x) \rightarrow -\gamma_5\psi_{\nu_e}(x)$. Esta propriedade só pode ser válida se a massa dos neutrinos for estritamente nula, já que neste limite tanto ψ como $\gamma_5\psi$ são autoestados da Hamiltoniana de Dirac.

No estudo das interações fracas aprendeu-se que os hádrons também apresentam aproximadamente esta simetria, denominada simetria quiral. No nível de quarks esta questão se reflete nas massas dos quarks, que seriam nulas no limite de simetria exata. Neste caso, a QCD seria invariante tanto sob o grupo $SU(3)$ devido à degenerescência das massas como também sob o grupo $SU(3)_E \times SU(3)_D$, associado aos estados de helicidade esquerda e direita dos quarks. Estes estados são definidos por

$$\begin{aligned} q_E &= \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)q \\ q_D &= \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)q \end{aligned} \quad (2.28)$$

nos quais os spins são anti-paralelo e paralelo ao momento respectivamente. Deste modo definem-se dois setores diferentes, o direito e o esquerdo que não se comunicam, uma vez que $(1 - \gamma_5)(1 + \gamma_5) = 0$. A simetria quiral será discutida mais detalhadamente nas próximas seções.

2.4 Cargas e Correntes

Em muitos problemas de interações fortes, a descrição de fenômenos pode ser formulada por meio de correntes associadas às propriedades de transformação da teoria [AD 68, AFF+ 73]. Mesmo que uma simetria não seja exata, as correntes e suas cargas geram uma álgebra, isto é, satisfazem um conjunto de relações de comutação, que são válidas mesmo na presença de termos de quebra da simetria.

Por isso é importante relacionar os conceitos de simetria e leis de conservação em teoria de campos. Para tanto empregamos o teorema de Noether, mostrando as relações de comutação entre cargas.

Supomos inicialmente que o sistema é descrito pela lagrangiana

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi_r(x), \partial_\mu \phi_r(x)) \quad (2.29)$$

cujos campos satisfazem as equações de Euler-Lagrange

$$\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_r)} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_r} = 0 . \quad (2.30)$$

Os momentos canonicamente conjugados são definidos da maneira usual

$$\pi_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_r)} . \quad (2.31)$$

Eles e os campos satisfazem as relações de comutação ²

$$\begin{aligned} [\phi_r(\mathbf{x}, t), \phi_s(\mathbf{x}', t)] &= 0 \\ [\pi_r(\mathbf{x}, t), \phi_s(\mathbf{x}', t)] &= -i\delta_{rs}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ [\pi_r(\mathbf{x}, t), \pi_s(\mathbf{x}', t)] &= 0 . \end{aligned} \quad (2.32)$$

Uma transformação local para os campos, da forma:

$$\phi_r(x) \rightarrow \phi'_r(x) = \phi_r(x) - i\epsilon^a(x)t_{rs}^a\phi_s(x) \quad (2.33)$$

onde ϵ^a s são parâmetros pequenos e t^a s são matrizes que satisfazem a álgebra de Lie do grupo de simetria, induz na lagrangiana a seguinte variação:

$$\delta \mathcal{L} = \epsilon^a(x)\partial_\mu \left\{ -i\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_r)}t_{rs}^a\phi_s \right\} - i\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_r)}t_{rs}^a\phi_s\partial_\mu \epsilon^a(x) , \quad (2.34)$$

cujas formas sugerem a introdução de um conjunto de correntes

$$j_\mu^a = -i\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial^\mu \phi_r)}t_{rs}^a\phi_s \quad (2.35)$$

com divergências dadas por

$$\partial^\mu j_\mu^a = \frac{\partial \delta \mathcal{L}}{\partial \epsilon^a(x)} . \quad (2.36)$$

De (2.34) e (2.36) segue que, se a densidade de lagrangiana é invariante com respeito a um conjunto de transformações globais (isto é, com ϵ^a independente de x), a cada ϵ^a está associada uma corrente $j_\mu^a(x)$ conservada já que

$$\partial^\mu j_\mu^a = 0 . \quad (2.37)$$

²Estas relações são válidas para bósons; no caso de férmions os comutadores devem ser trocados por anticomutadores.

Como consequência, as cargas

$$Q^a(t) = \int j_0^a(x) d^3x \quad (2.38)$$

são independentes do tempo e seus autovalores são números quânticos do sistema.

De (2.31) e (2.35) podemos escrever também:

$$Q^a(t) = -it_{rs}^a \int \pi_r(x) \phi_s(x) d^3x. \quad (2.39)$$

Usando as relações de comutação (2.32), obtemos:

$$[Q^a(t), \phi_r(\mathbf{x}, t)] = -t_{rs}^a \phi_s(\mathbf{x}, t). \quad (2.40)$$

Esta relação mostra que $Q^a(t)$ é o gerador da transformação (2.33) com ϵ constante. Além disso, uma vez que a álgebra das matrizes t^a é dada por (2.3) podemos mostrar que

$$[Q^a(t), Q^b(t)] = iC^{abc} Q^c(t). \quad (2.41)$$

isto é, as cargas Q^a formam uma álgebra de Lie fechada.

Assim, o comportamento da lagrangiana sob transformações associadas a um grupo leva à definição de um conjunto de cargas, as quais são os geradores da álgebra de Lie do grupo. É importante notar que mesmo que as cargas não sejam constantes de movimento, a relação (2.41) é válida, ou seja ela é independente da presença de termos de quebra de simetria na lagrangiana. Em outras palavras a álgebra gerada pelas cargas $Q^a(t)$ vale independentemente de serem conservadas e das equações de continuidade (2.37) para as correntes.

Para estudar o grupo $SU(3)$ de sabor tomamos o modelo de quarks da seção 2.2, com campos dados pelo vetor de 3 componentes (2.26), cada uma das quais é um spinor quadridimensional sob o grupo de Lorentz. A densidade de lagrangiana dos quarks livres é escrita como³

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} [\bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)q + h.c.] \quad (2.42)$$

onde M é uma matriz de massa no espaço tri-dimensional de quarks $M_{ik} = m_i \delta_{ik}$. Os campos $q_{\alpha i}$ satisfazem as relações de anticomutação características de férmions

$$\{q_{\alpha i}(\mathbf{x}, t), q_{\beta j}^\dagger(\mathbf{x}', t)\} = \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.43)$$

³Desenvolvimento válido para campos livres; no entanto os resultados também valem para algumas formas de interação que não contenham acoplamentos derivativos

onde i, j são índices de sabor e α, β índices de Dirac.

Usando o formalismo desenvolvido anteriormente obtemos que, no caso de todos os quarks terem a mesma massa, a densidade de lagrangiana $\mathcal{L}_0$ é invariante frente às transformações gerais de $SU(3)$

$$q_i \rightarrow q'_i = q_i - i\alpha^a (\lambda^a/2)_{ij} q_j, \quad (2.44)$$

onde os λ^a s são as matrizes de Gell-Mann dadas em (2.14). Neste caso há 8 correntes vetoriais conservadas, dadas por

$$V_\mu^a(x) = \frac{\partial \delta \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \epsilon_a)} = \bar{q} \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} q, \quad (2.45)$$

com cargas independentes do tempo

$$Q^a = \int V_0^a(x) d^3x. \quad (2.46)$$

que satisfazem a álgebra $SU(3)$

$$[Q^a, Q^b] = i f^{abc} Q^c. \quad (2.47)$$

Se as massas dos quarks forem diferentes, o termo de massa em $\mathcal{L}_0$ quebra a simetria, e a divergência da corrente passa a ser dada por

$$\partial^\mu V_\mu^a = i \bar{q}(x) \left[M, \frac{\lambda^a}{2} \right] q(x). \quad (2.48)$$

Usando $M_{ik} = m_i \delta_{ik}$ obtemos

$$\partial^\mu V_\mu^a = i \bar{q}_i (m_i - m_k) \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)_{ik} q_k. \quad (2.49)$$

A eq.(2.49) mostra que a não conservação da corrente vetorial é uma consequência direta da diferença de massa dos quarks. $\mathcal{L}_0$ somente é invariante frente às transformações (2.44) se as massas forem iguais, isto é, o sistema só tem simetria $SU(3)$ exata se $m_u = m_d = m_s$. Porém as cargas $Q^a(t)$, mesmo não sendo constantes de movimento, satisfazem relações de comutação a tempos iguais análogas à eq.(2.47)

$$[Q^a(t), Q^b(t)] = i f^{abc} Q^c(t). \quad (2.50)$$

Consideremos agora o efeito de transformações axiais que, no modelo de quarks, correspondem a

$$q_i \rightarrow q'_i = q_i - i\beta^a \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)_{ij} \gamma_5 q_j. \quad (2.51)$$

Neste caso temos a introdução de 8 correntes axiais

$$A_\mu^a(x) = \bar{q}(x) \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\lambda^a}{2} q(x) \quad (2.52)$$

e as respectivas cargas

$$\bar{Q}^a(t) = \int d^3x A_0^a(x). \quad (2.53)$$

A divergência da corrente (2.52) é dada por

$$\partial^\mu A_\mu^a(x) = i\bar{q}(x) \left\{ M, \frac{\lambda^a}{2} \right\} \gamma_5 q(x) = i\bar{q}_i(x)(m_i + m_j) \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)_{ij} q_j(x). \quad (2.54)$$

A eq.(2.54) mostra que a densidade de lagrangiana $\mathcal{L}_0$ só é invariante frente às transformações axiais (2.51) no limite em que $m_u = m_d = m_s = 0$. Isto é, a corrente axial $A_\mu^a(x)$ só é conservada se os quarks não têm massa. No entanto as relações de comutação das cargas $\bar{Q}^a(t)$ podem ser calculadas a partir de (2.53) e (2.43) e fornecem

$$[\bar{Q}^a(t), \bar{Q}^b(t)] = if^{abc} \bar{Q}^c(t), \quad (2.55)$$

o que mostra que as cargas axiais não formam uma álgebra fechada. Juntas, porém, as cargas $Q^a(t)$ e $\bar{Q}^b(t)$ formam uma álgebra fechada uma vez que

$$\begin{aligned} [Q^a(t), Q^b(t)] &= if^{abc} Q^c(t) \\ [Q^a(t), \bar{Q}^b(t)] &= if^{abc} \bar{Q}^c(t) \\ [\bar{Q}^a(t), \bar{Q}^b(t)] &= if^{abc} Q^c(t). \end{aligned} \quad (2.56)$$

A álgebra definida pelas eqs.(2.56) é isomórfica a uma álgebra $SU(3) \times SU(3)$, já que ao definirmos as cargas quirais direita e esquerda da seguinte forma

$$\begin{aligned} Q_D^a &= \frac{1}{2}(Q^a + \bar{Q}^a), \\ Q_E^a &= \frac{1}{2}(Q^a - \bar{Q}^a), \end{aligned} \quad (2.57)$$

obtemos as relações de comutação de dois grupos $SU(3)$ que comutam:

$$\begin{aligned} [Q_D^a, Q_D^b] &= if^{abc} Q_D^c \\ [Q_E^a, Q_E^b] &= if^{abc} Q_E^c \\ [Q_E^a, Q_D^b] &= 0. \end{aligned} \quad (2.58)$$

As cargas Q_D^a geram uma álgebra $SU(3)_D$ e as cargas Q_E^a geram uma álgebra $SU(3)_E$. Isso define as transformações quirais. Assim, quando os quarks são tomados com massa nula na densidade de lagrangiana (2.42), dizemos que a teoria possui simetria quiral $SU(3)_E \times SU(3)_D$ exata.

2.5 A Quebra Espontânea da Simetria Quiral

Vimos, na seção anterior como o termo de massa na lagrangiana da QCD quebra a simetria quiral, fazendo com que a divergência da corrente seja não nula e a carga associada não seja uma constante de movimento. Este é um exemplo de quebra explícita de simetria. Existe, ainda, um outro tipo de quebra de simetria de bastante interesse para o estudo das teorias de campos, denominado quebra espontânea da simetria, que ocorre quando a lagrangiana é invariante frente a um grupo de transformações, mas o vácuo da teoria não o é.

As propriedades de simetria de um sistema dependem fortemente do comportamento do seu estado fundamental. Como mostrado por Coleman [Col 66] na forma de um teorema, se o vácuo é aniquilado por um conjunto de cargas, as correntes correspondentes são conservadas e geram um grupo de simetria. Inversamente, se há conservação da corrente mas o vácuo não é invariante, a simetria é espontaneamente quebrada.

Em teorias com quebra espontânea da simetria, como aquela que vamos estudar aqui, o vácuo é degenerado. Para podermos operar com ela sem ambigüidades precisamos redefinir os campos de tal maneira a termos um estado fundamental único. Ao fazermos esta escolha, aparecem na teoria bósons sem massa, os denominados bósons de Goldstone [Gol 61], em número igual à diferença entre o número de geradores (cargas) do grupo de simetria da densidade de lagrangiana e aqueles do vácuo, ou seja os geradores quebrados.

Para discutir estas questões relacionadas à quebra espontânea da simetria quiral, tomamos o modelo sigma linear, de Gell-Mann e Levy [GL 60], levando em conta somente o setor mesônico, e analisando suas soluções clássicas. Neste caso, os campos do modelo são um isotripleto de píons pseudoescalares $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ e um isoescalar σ . A densidade de lagrangiana correspondente é a seguinte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \partial_\mu \pi \cdot \partial^\mu \pi) - V(\sigma^2 + \pi^2) . \quad (2.59)$$

onde $V(\sigma^2 + \pi^2)$ é um termo de energia potencial dado por

$$V(\sigma^2 + \pi^2) = \frac{\mu^2}{2} (\sigma^2 + \pi^2) - \frac{\lambda^2}{4} (\sigma^2 + \pi^2)^2 = \frac{\lambda^2}{4} (\sigma^2 + \pi^2 - \alpha^2)^2 - \frac{\lambda^2}{4} \alpha^4 , \quad (2.60)$$

com $\alpha^2 = \frac{\mu^2}{\lambda^2}$.

A densidade de lagrangiana (2.59) é invariante frente ao grupo quiral $SU(2) \times SU(2)$, determinado pelas transformações $SU(2)$ de isospin

$$\sigma \rightarrow \sigma' = \sigma ,$$

$$\pi \rightarrow \pi' = \pi + \alpha \times \pi, \quad (2.61)$$

e axiais

$$\begin{aligned} \sigma &\rightarrow \sigma' = \sigma + \beta \cdot \pi, \\ \pi &\rightarrow \pi' = \pi - \beta \sigma. \end{aligned} \quad (2.62)$$

As correntes conservadas são dadas por

$$V_\mu^a = -\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial^\mu \alpha^a)} = (\pi \times \partial_\mu \pi)^a = \varepsilon^{abc} \pi^b \partial_\mu \pi^c \quad (2.63)$$

e

$$A_\mu^a = -\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial^\mu \beta^a)} = (\pi \partial_\mu \sigma - \sigma \partial_\mu \pi)^a = (\partial_\mu \sigma) \pi^a - \sigma \partial_\mu \pi^a \quad (2.64)$$

e as suas respectivas cargas.

$$\begin{aligned} Q^a &= \int V_0^a(x) d^3x, \\ \bar{Q}^a &= \int A_0^a(x) d^3x, \end{aligned} \quad (2.65)$$

satisfazem uma álgebra análoga às eqs.(2.56) com constantes de estrutura características de $SU(2)$ (eq.(2.10)).

O Hamiltoniano fica dado por

$$H = \frac{1}{2} (\dot{\pi}^2 + \dot{\sigma}^2) + \frac{1}{2} ((\nabla \pi)^2 + (\nabla \sigma)^2) + \frac{\lambda^2}{4} (\sigma^2 + \pi^2 - \alpha^2)^2 - \frac{\lambda^2 \alpha^4}{4}, \quad (2.66)$$

sendo o estado de menor energia obtido minimizando-se o termo de energia potencial. uma vez que neste estado fundamental clássico, sem flutuações quânticas, os campos não têm dependência espaço-temporal. O mínimo da energia potencial é obtido fazendo-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \sigma} &= \lambda^2 \sigma (\sigma^2 + \pi^2 - \alpha^2) = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \pi} &= \lambda^2 \pi (\sigma^2 + \pi^2 - \alpha^2) = 0. \end{aligned} \quad (2.67)$$

A forma da configuração mínima deve ser analisada para duas situações diferentes: $\alpha^2 < 0$ e $\alpha^2 > 0$.

Para $\alpha^2 < 0$, o mínimo de V ocorre no ponto $\sigma = \pi = 0$. Como mostrado na fig.(2.5) temos um vácuo univocamente determinado. Neste caso os coeficientes dos termos quadráticos dos campos na densidade de lagrangiana podem ser interpretados como sendo as suas massas. Como $m_\pi = m_\sigma$ esta situação corresponde ao modo de Wigner-Weyl de

Figura 2.5: A forma do potencial (2.60) para $\alpha^2 < 0$. O mínimo ocorre para $\pi = \sigma = 0$.

realização da simetria, pois ela se manifesta na forma de um multiplete (π, σ) com mesma massa.

Para $\alpha^2 > 0$ a situação é mais interessante uma vez que o mínimo é degenerado, ocorrendo em qualquer ponto da circunferência de raio

$$\sigma^2 + \pi^2 = \alpha^2 \quad (2.68)$$

como se pode ver na fig.(2.6). Portanto, ao nível clássico, o estado fundamental não é aquele cujo valor esperado dos campos se anula, uma vez que o mínimo de V ocorre para valores não nulos dos mesmos.

Figura 2.6: A forma do potencial (2.60) com $\alpha^2 > 0$: O mínimo é degenerado ocorrendo nos pontos $\pi^2 + \sigma^2 = \alpha^2$.

No caso de campos quânticos, por outro lado, o vácuo tem, por definição, valor esperado nulo. O fato de se ter um vácuo clássico não nulo implica que a expansão quântica

deve ser feita levando-se em conta as flutuações do campo em torno deste valor e não do zero. Quando o vácuo é degenerado, a teoria é levada a uma ambiguidade já que existirão várias maneiras de se definir os campos quânticos, cada uma delas produzindo um espaço de Hilbert não equivalente.

Para construir a teoria devemos, então, proceder a uma escolha de modo que o estado fundamental seja único. Por conveniência, no modelo sigma linear satisfazendo a eq.(2.68), tomamos

$$\begin{aligned} \langle 0|\pi|0 \rangle &= 0, \\ \langle 0|\sigma|0 \rangle &= \alpha, \end{aligned} \quad (2.69)$$

e definimos um campo σ' modificado tal que o seu valor esperado no vácuo seja nulo, isto é

$$\sigma' = \sigma - \alpha. \quad (2.70)$$

O campo σ tem, portanto, uma parte clássica, α , e uma parte quântica, σ' .

Reexpressando a densidade de lagrangiana em termos de σ' temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \partial_\mu \pi \cdot \partial^\mu \pi + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma' \partial^\mu \sigma' - \frac{1}{2} (\mu^2 + 3\lambda^2 \alpha^2) \sigma'^2 \\ & - \lambda^2 \alpha \sigma' (\sigma'^2 + \pi^2) - \frac{\lambda^2}{4} (\pi^2 + \sigma'^2)^2 + \sigma' (-\mu^2 \alpha - \lambda^2 \alpha^3) \end{aligned} \quad (2.71)$$

Esta densidade de lagrangiana descreve uma situação onde o campo σ' possui massa $(\mu^2 + 3\lambda^2 \alpha^2)$ e o campo π não tem massa. É interessante notar que apesar de a lagrangiana ser simétrica frente ao grupo $SU(2)_E \times SU(2)_D$ os campos σ' e π não formam um multipletto com massas iguais. Este modo de realização da simetria é denominado modo de Nambu-Goldstone ou modo de simetria quebrada dinamicamente e, como vimos, ela é acompanhada pela presença de píons de massa nula que são os bósons de Goldstone da teoria.

Consideramos, agora, o modelo sigma linear com quebra da simetria quiral, adicionando à densidade de lagrangiana (2.59) um termo $c\sigma$, onde c é um parâmetro pequeno. As expressões das correntes vetorial e axial, dadas por (2.63) e (2.64), não se alteram com a inclusão deste termo. As divergências das mesmas, no entanto, passam a ser dadas por

$$\partial^\mu V_\mu^a = 0. \quad (2.72)$$

$$\partial^\mu A_\mu^a = -c\pi^a. \quad (2.73)$$

de modo que a corrente vetorial ainda é conservada, mas o mesmo não acontece com a corrente axial, o que indica que a simetria é quebrada explicitamente.

O efeito do termo $c\sigma$ para o estado fundamental clássico pode ser avaliado, como anteriormente, minimizando-se o potencial, que agora é dado por

$$V = \frac{\lambda^2}{4}(\sigma^2 + \pi^2 - \alpha^2)^2 - \frac{\lambda^2 \alpha^4}{4} - c\sigma. \quad (2.74)$$

Então temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \sigma} &= \lambda^2 \sigma (\sigma^2 + \pi^2 - \alpha^2) - c = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \pi} &= \lambda^2 \pi (\sigma^2 + \pi^2 - \alpha^2) = 0 \end{aligned} \quad (2.75)$$

cujas soluções são

$$\pi = 0, \quad \lambda^2 \sigma (\sigma^2 - \alpha^2) = c. \quad (2.76)$$

Analizamos somente o caso mais interessante, $\alpha^2 > 0$. A solução da eq.(2.76) fornece a parte clássica de σ , que determina o vácuo, e pode ser obtida pelos métodos tradicionais. No entanto, podemos ter uma solução aproximada, utilizando o fato de que o parâmetro c é pequeno. Como vimos anteriormente, quando c é nulo temos $\sigma = \pm \alpha$, de modo que tentamos soluções do tipo $\sigma_+ = \alpha + \beta c$ e $\sigma_- = -\alpha - \gamma c$. Assim, mantendo apenas os termos lineares em c na eq.(2.76), temos:

$$\begin{aligned} \sigma_+ &= \alpha + \frac{c}{2\alpha^2\lambda^2} \\ \sigma_- &= -\alpha - \frac{c}{2\alpha^2\lambda^2} \end{aligned} \quad (2.77)$$

os quais determinam as posições dos mínimos do potencial. Nestes pontos as energias potenciais do sistema são dadas por

$$\begin{aligned} V^- &= -\frac{\lambda^2 \alpha^4}{4} - c\alpha \\ V^+ &= -\frac{\lambda^2 \alpha^4}{4} + c\alpha \end{aligned}$$

O efeito do termo $c\sigma$ é inclinar a fig.(2.6) determinando agora um vácuo único, como mostra a fig.(2.7).

Identificando o valor médio de σ no estado fundamental por

$$\langle 0 | \sigma | 0 \rangle \equiv v \quad (2.78)$$

e inserindo-o na eq.(2.76), temos:

$$v^2 - \alpha^2 = \frac{c}{\lambda^2 v}. \quad (2.79)$$

Figura 2.7: A forma do potencial (2.74) com $\alpha^2 > 0$. O termo de quebra de simetria inclina a curva determinando um vácuo único.

Subtraindo como na eq.(2.70) a parte clássica de σ

$$\sigma' = \sigma - v \quad (2.80)$$

o potencial (2.74) fica dado por:

$$V = \frac{\lambda^2}{4} \left((\sigma' + v)^2 + \pi^2 - \alpha^2 \right)^2 - \frac{\lambda^2 \alpha^4}{4} - c(\sigma' + v). \quad (2.81)$$

Usando a eq.(2.79), obtemos que o coeficiente de π^2 fica dado por $c/2v$ de modo que o pión adquire massa igual a

$$m_\pi^2 = \frac{c}{v}. \quad (2.82)$$

o que mostra que a massa do pión é proporcional ao parâmetro que determina a quebra de simetria e que esta torna-se exata quando $m_\pi^2 \rightarrow 0$.

Para avaliarmos as implicações do resultado (2.82), tomemos o elemento de matriz do decaimento do pión. Por considerações de paridade podemos escrever

$$\langle 0 | A_\mu^a(x) | \pi^j(k) \rangle = i k_\mu \delta^{aj} f_\pi e^{-ik \cdot x} \quad (2.83)$$

onde f_π é a constante de decaimento do pión cujo valor medido na reação $\pi \rightarrow \mu + \nu$ é $f_\pi = 93$ MeV. De (2.83) obtemos

$$\langle 0 | \partial^\mu A_\mu^a(0) | \pi^j(k) \rangle = m_\pi^2 f_\pi \delta^{aj}. \quad (2.84)$$

Comparando este resultado com as equações do modelo sigma linear (2.73) e (2.82), nós vemos que

$$v = -f_\pi \quad (2.85)$$

e

$$\partial^\mu A_\mu^a = m_\pi^2 f_\pi \pi^a. \quad (2.86)$$

A eq.(2.86) é normalmente referida como a hipótese da corrente axial parcialmente conservada (PCAC) [Nam 60. GL 60], assim denominada por que, sendo a massa do pión pequena (na escala de massas hadrônicas), a corrente axial é quase conservada. Isto sugere, em outras palavras, que estamos diante de uma simetria aproximada.

A eq.(2.86) evidencia a existência dos dois modos de realização da simetria, relacionados às duas possibilidades para a conservação da corrente: $f_\pi = 0$ ou $m_\pi^2 = 0$, ambas em contradição com os resultados experimentais. A primeira, implementada por um vácuo invariante ($v = 0$), corresponde ao modo de Wigner-Weyl, com multipletos degenerados e píons que não decaem. A realização no modo de Nambu-Goldstone ($m_\pi = 0$), por outro lado, está de acordo com o fato de que a massa dos píons é pequena na escala hadrônica.

Como vimos, no modelo sigma linear, os campos σ e π são tratados como graus de liberdade independentes, sem vínculos. No entanto, para muitos resultados que se podem extrair desses modelos com quebra espontânea de simetria, é indiferente se o campo σ é ou não uma variável dinâmica independente. Além disso, não existe evidência experimental para o méson σ . A eliminação desse grau de liberdade pode ser feita restringindo-se o modelo a campos que se encontrem sobre uma esfera tri-dimensional, o "circulo quiral" definido por

$$\sigma^2(\mathbf{r}, t) + \pi^2(\mathbf{r}, t) = f_\pi^2, \quad (2.87)$$

para todo $\mathbf{r}$ e t . Então o campo σ passa a ser uma função simples mas não linear de π . Isto, além de estar de acordo com o fato de que a partícula σ parece não existir, simplifica consideravelmente a lagrangiana (2.59), já que o potencial $V(\sigma^2 + \pi^2)$ passa a ser uma constante que pode ser omitida. Modelos deste tipo são chamados modelos sigma não-lineares.

O fato de agora termos apenas um campo isovetorial independente na teoria pode ser convenientemente levado em conta combinando π e σ numa matriz unitária $U \in SU(2)$

$$U = \exp(i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}(\mathbf{r}, t)) = \cos \phi + i\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}} \sin \phi \quad (2.88)$$

Fazendo-se as identificações,

$$\begin{aligned}\sigma &= f_\pi \cos \phi \\ \boldsymbol{\pi} &= f_\pi \hat{\boldsymbol{\pi}} \sin \phi ,\end{aligned}\tag{2.89}$$

reproduzimos automaticamente o vínculo (2.87). A matriz U pode também ser escrita como

$$U = \frac{1}{f_\pi}(\sigma + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}) ,\tag{2.90}$$

fazendo com que o vínculo agora corresponda à condição $UU^\dagger = 1$. Nessa notação o vácuo corresponde a $U = 1$, já que $\sigma = f_\pi$ e $\boldsymbol{\pi} = 0$.

A densidade de lagrangiana (2.59) assume a seguinte forma:

$$\mathcal{L}_\sigma = \frac{f_\pi^2}{4} \text{tr} [\partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U] .\tag{2.91}$$

Para dotar o pión de uma massa não nula de modo a ser consistente com a idéia de PCAC, adicionamos a $\mathcal{L}$ um termo de quebra de simetria

$$\mathcal{L}_{qs} = \frac{1}{2} m_\pi^2 f_\pi^2 (\text{tr} U - 2) ,\tag{2.92}$$

que é proporcional a σ , como no modelo sigma linear.

De acordo com (2.61) e (2.62), o campo U se transforma frente ao grupo quiral $SU(2)_E \times SU(2)_D$ como

$$U \rightarrow U' = L U R^\dagger = e^{iQ_E} U e^{-iQ_D}\tag{2.93}$$

onde Q_E e Q_D são as cargas quirais direita e esquerda dadas, em função dos parâmetros $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ das transformações vetoriais e axiais, por:

$$\begin{aligned}Q_E &= \frac{1}{2}(-\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{\tau} \\ Q_D &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{\tau} .\end{aligned}\tag{2.94}$$

Elas podem ser reescritas em termos das cargas vetoriais e axiais usando-se

$$\begin{aligned}Q_E &= \frac{1}{2}(Q_V - Q_A) \\ Q_D &= \frac{1}{2}(Q_V + Q_A) .\end{aligned}\tag{2.95}$$

A densidade de lagrangiana (2.91) é invariante frente a tais transformações. O vácuo, $U = 1$, por outro lado, só é invariante para o subgrupo de isospin, de modo que a simetria é quebrada espontaneamente para o $SU(2)_V$.

Expandindo U dado pela eq.(2.88) em torno deste vácuo, obtemos

$$U = 1 + i\tau \cdot \pi + \dots \quad (2.96)$$

Nesse caso, as eqs.(2.91) e (2.92) nos fornecem, em primeira ordem, a densidade de lagrangiana livre de Klein-Gordon para um campo isovetorial pseudoescalar que pode ser identificado ao campo do pión.

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial^\mu \pi \cdot \partial_\mu \pi - \frac{m_\pi^2}{2} \pi^2 \quad (2.97)$$

Em linguagem de teoria de campos podemos dizer que os píons são flutuações do campo U em torno do vácuo.

2.6 A Cromodinâmica Quântica

Estudos realizados no início dos anos 60 sugeriam fortemente que os hádrons tinham estrutura interna, que eles seriam constituídos de partículas elementares chamadas quarks. A formulação mais primitiva dessas idéias correspondeu ao modelo de quarks constituintes que, como vimos, conseguia explicar certas regularidades do espectro dos hádrons através dos multipletos de $SU(3)$ de sabor. Neste modelo, bárions e mésons eram considerados como estados ligados de quarks de massas relativamente grandes e interações não muito intensas. Posteriormente, o número quântico de cor foi incorporado, para resolver alguns problemas de estatística. Paralelamente, experiências realizadas em Stanford falharam em produzir quarks isolados. Esse confinamento dos quarks e dos glúons ao interior dos hádrons pode ser explicado admitindo-se que a teoria seja simétrica frente às transformações do grupo $SU(3)$ de cor e que estas partículas se transformem como representações fundamentais deste grupo. Deste modo, no modelo de quarks com simetria de cor, somente estados “brancos” (singletos) como os hádrons são observáveis, enquanto que quarks e glúons, “coloridos”, não podem ser observados isoladamente.

As informações experimentais a respeito da dinâmica dos quarks foram obtidas através de medidas de espalhamento utilizando feixes de partículas sem estrutura (léptons) atirados sobre prótons. Estas experiências, realizadas no SLAC (Stanford Linear Accelerator Center) foram chamadas de espalhamento inelástico profundo elétron-próton e baseava-se essencialmente no mesmo método utilizado por Rutherford para estudar a estrutura dos átomos. Estas experiências demonstraram [Bre+ 69] que as funções de estrutura do espalhamento $\epsilon - p$ dependiam somente da razão do quadrado do momento transferido

(q^2) pela energia transferida (ν) pelo elétron, e não das duas independentemente. Este fenômeno foi denominado Scaling de Bjorken [Bjo 69] e podia ser entendido supondo-se que, a altas energias, os elétrons fossem espalhados por partículas pontuais de spin $1/2$ quase livres no interior do próton, as quais foram denominadas pártons. Os pártons foram mais tarde identificados aos quarks, uma vez que os experimentos sugeriam que seus números quânticos eram os mesmos.

Uma teoria que descrevesse a dinâmica dos quarks e estivesse de acordo com o fato de que a interação entre estes torna-se fraca a pequenas distâncias deveria passar necessariamente pelas teorias de calibre, que já haviam obtido sucesso na Eletrodinâmica Quântica. Nestas teorias, as transformações de simetria são dependentes do espaço-tempo, isto é, $\epsilon^a = \epsilon^a(x)$, e são chamadas simetrias locais ou de calibre, ao contrário das simetrias globais abordadas na seção 2.4.

A QED é um bom exemplo destas teorias. Ela é uma teoria de calibre abeliana com simetria $U(1)$ local. O elétron, por exemplo, é descrito pela lagrangiana de Dirac:

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(x)(i\gamma_\mu\partial_\mu - m)\psi(x) , \quad (2.98)$$

que possui simetria frente ao grupo $U(1)$ global. Ao tornar a simetria local:

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = e^{-i\epsilon(x)}\psi(x) , \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{i\epsilon(x)}\bar{\psi}(x) , \end{aligned} \quad (2.99)$$

nós precisamos incluir na teoria um novo campo vetorial $A_\mu(x)$, o campo de calibre. Ele se transforma como

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\epsilon(x) , \quad (2.100)$$

onde e é a carga do próton e deve ser acoplado ao elétron através de uma derivada covariante D_μ dada por

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu(x) . \quad (2.101)$$

Assim a densidade de lagrangiana da QED invariante de calibre tem a seguinte forma

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(x)i\gamma^\mu D_\mu\psi(x) - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (2.102)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \quad (2.103)$$

A lagrangiana (2.102) mostra que o fóton (bóson de calibre da QED) não tem massa, já que o termo $A_\mu A^\mu$ não é invariante de calibre. Além disso, a ausência de termos de autoacoplamento do campo de calibre mostra que os fótons não interagem entre si.

Uma teoria como a QED não apresenta o quesito requerido no caso forte, de que a interação entre as partículas se torne fraca a pequenas distâncias. Em teorias de calibre não abelianas, denominadas teorias de Yang-Mills [YM 54], ao contrário das outras, a constante de acoplamento decresce a pequenas distâncias. A descoberta desta propriedade, denominada liberdade assintótica, mostrou que as interações fortes deveriam ser descritas por uma teoria de Yang-Mills com uma simetria $SU(3)$ de cor, com cada sabor de quark se transformando como representações fundamentais (tripletos) deste grupo. Esta teoria foi chamada por Gell-Mann de Cromodinâmica Quântica [GW 73, Wei 73, FGL 73], e sua densidade de lagrangiana clássica é dada por

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \sum_{k=1}^{N_s} \bar{q}_k (i\gamma^\mu D_\mu - m_k) q_k \quad (2.104)$$

onde a soma em k se estende por todos os sabores de quarks (u, d, s, c, b, t),

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\nu^b A_\mu^c. \quad (2.105)$$

$$D_\mu = \partial_\mu - ig \frac{\lambda^a}{2} A_\mu^a \quad (2.106)$$

onde $a = 1, 2, \dots, 8$, f^{abc} são as constantes de estrutura de $SU(3)$ e λ^a as matrizes de Gell-Mann.

Uma característica importante da lagrangiana (2.104) é que ela inclui autointerações entre os campos de calibre A_μ^a através do termo $gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$. Esta é uma novidade em relação à eletrodinâmica, consequência do caráter não-abeliano da teoria. A presença deste termo indica que os glúons transportam carga de cor (o número quântico de $SU(3)_c$) e interagem entre si.

A lagrangiana $\mathcal{L}_{QCD}$ possui todas as simetrias conhecidas das interações fortes. Ela é invariante por conjugação de carga, paridade, estranheza etc. Ela também possui todas as simetrias de sabor do modelo de quarks, particularmente a simetria quiral $SU(3) \times SU(3)$, quebrada explicitamente pelo termo de massa. Em outras palavras, no limite $m_u = m_d = m_s = 0$ a $\mathcal{L}_{QCD}$ é invariante frente às transformações (2.44) e (2.51). Na verdade, no limite de massa zero, a lagrangiana clássica $\mathcal{L}_{QCD}$ é invariante, no espaço dos sabores, por transformações do grupo [Wei 91]

$$\begin{aligned} U(N_s)_E \times U(N_s)_D &\equiv SU(N_s)_D \times SU(N_s)_E \times U(1)_E \times U(1)_D \\ &= SU(N_s)_D \times SU(N_s)_E \times U(1)_V \times U(1)_A \end{aligned} \quad (2.107)$$

onde usamos a eq.(2.95). Ao nível quântico, porém, a invariância da teoria é frente às transformações $SU(N_s)_E \times SU(N_s)_D \times U(1)_V$. A corrente $J_\mu^A = i\bar{q}\gamma_\mu\gamma_5 q$, associada à transformação $U(1)_A$, $q \rightarrow e^{i\gamma_5\epsilon} q$, é conservada no caso clássico, mas na teoria quântica satisfaz

$$\partial^\mu J_\mu^A = -i \frac{N_s}{16\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu}^a F_{\alpha\beta}^a. \quad (2.108)$$

Este resultado indica que a simetria $U(1)_A$ é quebrada espontaneamente por uma "anomalia" [Adl 69, BJ 69]. A expressão anomalia é usada em casos, como este, onde uma corrente clássica é conservada mas o mesmo não ocorre na teoria quantizada. A quebra da simetria quiral na teoria de calibre quantizada é denominada anomalia quiral.

No caso da simetria $U(1)_V$ não existe qualquer alteração quando a teoria é quantizada, pois a corrente $B_\mu = \bar{q}\gamma_\mu q$ (corrente bariônica), associada à transformação $q \rightarrow e^{i\epsilon} q$, é conservada em ambos os casos.

Quanto ao grupo $SU(N_s)_E \times SU(N_s)_D$, existem indicações que na teoria quântica a simetria é espontaneamente quebrada para o sub-grupo $SU(N_s)_V$. No caso da teoria com dois sabores, $N_s = 2$, em que tomam parte apenas os quarks u e d , o grupo de simetria é o $SU(2)$ de isospin e, de acordo com o teorema de Goldstone, os bósons de massa nula são os três píons. Para três sabores, com os quarks u , d , e s , o grupo de simetria é o $SU(3)$ e os bósons de Goldstone são os oito mésons que compõem o octeto dos mésons pseudoescalares.

No caso de teorias de calibre como a QCD, o procedimento de quantização requer a inclusão de termos para fixar o calibre e levar em conta os fantasmas de Faddeev-Popov [FP 67]. Assim, a lagrangiana para a teoria quântica completa é a seguinte

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_C + \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_{FC} + \mathcal{L}_{FP}, \quad (2.109)$$

onde os subscritos se estendem para os termos de calibre, de férmions, de fixação do calibre e Faddeev-Popov, respectivamente.

Apesar de a QCD ser aceita como a teoria das interações fortes e se ter uma crença muito grande na sua lagrangiana, não é possível extrair, ainda, suas implicações para a dinâmica hadrônica. Na região de altas energias, devido à liberdade assintótica, são possíveis cálculos perturbativos; porém, a baixas energias (distâncias grandes) a constante de acoplamento deixa de ser pequena e inviabiliza estes cálculos. Além disso, o mecanismo do confinamento de cor e a quebra da simetria quiral são problemas ainda não solucionados convenientemente. Por isso a construção de modelos efetivos, inspirados na QCD, que incorporem suas características e simetrias, é atualmente necessária para a descrição da

fenomenologia. É neste contexto que se insere o modelo de Skyrme, que corresponde ao limite $N_c \rightarrow \infty$ da QCD, no qual ela apresenta algumas simplificações.

Foi a impossibilidade de usar a constante de acoplamento como parâmetro da expansão perturbativa que levou t'Hooft [t'Ho 74, t'Ho 74b] a generalizar a QCD a partir de três cores e o grupo $SU(3)$ de calibre para N_c cores e um grupo de calibre $SU(N_c)$. Sua expectativa era poder resolver a teoria no limite de grandes valores de N_c e que, ao recobrar o valor $N_c = 3$, a teoria fosse “qualitativa e quantitativamente” semelhante a esta. Em seu estudo, t'Hooft concluiu que a QCD simplifica-se muito quando N_c se torna grande e que existe uma expansão sistemática em potências de $1/N_c$. Nesta expansão a constante de decaimento do pión f_π é obtida como sendo proporcional a $(N_c)^{\frac{1}{2}}$, a massa do méson como independente de N_c e a interação méson-méson proporcional a $1/N_c$.

Witten [Wit 79], elaborando o trabalho de t'Hooft, concluiu que “In various ways this expansion is reminiscent of known phenomenology of hadron physics, indicating that an expansion in powers of $1/N_c$ may be a good approximation at $1/N_c = 1/3$ ” e que, a baixas energias, o limite $N_c \rightarrow \infty$ a QCD é equivalente a uma teoria de mésons fracamente interagentes e que estes, dependendo de propriedades topológicas e condições de estabilidade, poderiam possuir estados tipo sóliton, com massas divergentes com N_c . A conjectura de Witten era que os bárions poderiam ser estes estados.

A partir dessas considerações conclui-se que uma teoria efetiva, inspirada na QCD, deve ser baseada em mésons fracamente acoplados, com uma dinâmica descrita por uma lagrangiana que possua as simetrias da teoria fundamental e que preserve os resultados do limite N_c grande, particularmente as soluções tipo sóliton que são identificadas aos bárions. Esta é a fundamentação das idéias de Skyrme que, bem antes dos desenvolvimentos da QCD, propôs uma teoria efetiva que permitia a obtenção de bárions como sólitons topológicos a partir de uma lagrangiana mesônica.

A lagrangiana efetiva da QCD, no limite de massa nula, deve descrever a dinâmica dos $N_s^2 - 1$ bósons de Goldstone de uma teoria com simetria quiral $SU(N_s)_E \times SU(N_s)_D$ espontaneamente quebrada. Como vimos anteriormente, uma lagrangiana com estas características é aquela do modelo sigma não-linear eq.(2.91). Exploremos esta teoria para o caso específico de três sabores, $N_s = 3$. Neste caso o campo $U \in SU(3)$ assume a seguinte forma

$$U(\mathbf{r}, t) = \exp(i\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\phi}(\mathbf{r}, t)) = \exp(i\lambda^a \phi^a(\mathbf{r}, t)) , \quad (2.110)$$

onde o campo $\boldsymbol{\phi}$ tem oito graus de liberdade e representa o octeto dos mésons pseu-

doescalares cuja forma explícita é

$$\lambda^a \phi^a(\mathbf{r}, t) = \frac{\sqrt{2}}{f_\pi} \begin{bmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}\eta \end{bmatrix}. \quad (2.111)$$

Frente ao grupo $SU(3)_E \times SU(3)_D$, $U(\mathbf{r}, t)$ se transforma como (2.93), com Q_E e Q_D dados em (2.57). A lagrangiana (2.91) em termos da forma esquerda L_μ definida em (B.11) fica dada por

$$\mathcal{L}_\sigma = \frac{f_\pi^2}{4} \text{tr}[L_\mu L^\mu] \quad (2.112)$$

e é invariante frente às transformações (2.107) e diante da conjugação de carga⁴. Witten [Wit 83b] observou que $\mathcal{L}_\sigma$ exhibe duas simetrias discretas que não estão presentes nem na QCD e nem na natureza: ela é invariante frente às transformações

$$U(\mathbf{r}, t) \rightarrow U^\dagger(\mathbf{r}, t) \quad (2.113)$$

$$U(\mathbf{r}, t) \rightarrow U(-\mathbf{r}, t) \quad (2.114)$$

separadamente, enquanto que a operação de paridade da QCD corresponde a

$$U(\mathbf{r}, t) \rightarrow U^\dagger(-\mathbf{r}, t). \quad (2.115)$$

Com U dado por (2.110) a transformação (2.113) equivale a $\phi^a(\mathbf{r}, t) \rightarrow -\phi^a(\mathbf{r}, t)$, enquanto que (2.115) indica $\phi^a(\mathbf{r}, t) \rightarrow -\phi^a(-\mathbf{r}, t)$. A simetria (2.113) de $\mathcal{L}_\sigma$ implica que são proibidos processos nos quais um número par de mésons se transformam num número ímpar destes, tais como nas reações

$$\begin{aligned} k^+ k^- &\rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0 \\ \pi^0 \eta &\rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0, \end{aligned} \quad (2.116)$$

observadas experimentalmente.

Para resolver este problema de excesso de simetria na teoria efetiva, Witten propôs que se modificassem as equações de movimento clássicas do modelo sigma não-linear, incluindo um termo invariante frente às transformações (2.107) que quebrasse as simetrias (2.113) e (2.114) separadamente, mas que preservasse a sua combinação (2.115). Esta nova

⁴Estas considerações e as que se seguem continuam válidas na presença do termo de Skyrme que introduziremos em (2.120).

contribuição corresponde precisamente ao termo de Wess-Zumino [WZ 71], que altera a ação efetiva da seguinte forma

$$S_{ef} = -\frac{f_\pi^2}{4} \int d^4x \text{tr}[L_\mu L^\mu] + n\Gamma_{WZ} \quad (2.117)$$

onde n é um número inteiro. O cálculo da ação efetiva $n\Gamma_{WZ}$ em $SU(3) \times SU(3)$, que será referido daqui por diante como termo de Wess-Zumino-Witten $\mathcal{L}_{WZW}$, fornece

$$n\Gamma_{WZ} \equiv \mathcal{L}_{WZW} = \frac{N_c}{240\pi^2 f_\pi^5} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr}[\phi(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi)(\partial_\alpha\phi)(\partial_\beta\phi)] \dots \quad (2.118)$$

onde N_c é o número de cores da QCD, e as reticências indicam correções de ordem elevada em ϕ dadas pela expansão da eq.(2.110) em torno do vácuo

$$U(x) = 1 + i\frac{\lambda^a \phi^a}{f_\pi} + \dots = 1 + i\frac{\phi}{f_\pi} + \dots \quad (2.119)$$

Os processos dados em (2.116), assim como o decaimento $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ na QED, são ditos “controlados por anomalias”. Em teorias efetivas, eles só se tornam possíveis com a inclusão de um termo extra na lagrangiana, como é o caso de $\mathcal{L}_{WZW}$, que representa a anomalia quiral. Na teoria quantizada a corrente axial, mesmo na ausência de termos de massa, não é conservada. A origem do termo de Wess-Zumino-Witten está, portanto, ligada à anomalia quiral $SU(3) \times SU(3)$.

Os termos $\mathcal{L}_\sigma$ e $\mathcal{L}_{WZW}$ não completam a discussão a respeito da lagrangiana efetiva do modelo para os bárions. Como veremos mais detalhadamente no capítulo seguinte, a estabilidade do sóliton requer a inclusão de um termo de ordem quatro nas derivadas do campo mesônico. Este termo, introduzido por Skyrme [Sky 61], tem a seguinte forma

$$\mathcal{L}_{Sk} = \frac{1}{32e^2} \text{tr} \{ [L_\mu, L_\nu]^2 \} , \quad (2.120)$$

de modo que a lagrangiana efetiva para os bárions é composta dos seguintes termos

$$\mathcal{L}_{ef} = \mathcal{L}_\sigma + \mathcal{L}_{Sk} + \mathcal{L}_{WZW} . \quad (2.121)$$

Estas considerações são válidas para a teoria a três sabores. No desenvolvimento deste trabalho, porém, só estudaremos o modelo de Skyrme, como na versão original, no caso de dois sabores, onde o grupo de simetria é o $SU(2) \times SU(2)$ e os bósons de Goldstone são os três píons. Neste caso $\phi = \tau^a \phi^a$ em (2.119) e o termo $\mathcal{L}_{WZW}$ se anula, pois a eq.(2.118) fica dada por

$$\mathcal{L}_{WZW} = \frac{N_c}{240\pi^2 f_\pi^5} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \phi^a (\partial_\mu \phi^b) (\partial_\nu \phi^c) (\partial_\alpha \phi^d) (\partial_\beta \phi^e) \text{tr} [\tau^a \tau^b \tau^c \tau^d \tau^e] . \quad (2.122)$$

Esta expressão é anti-simétrica nos índices de Lorentz, de modo que ela precisaria ser também anti-simétrica nos índices de isospin. No entanto isto é impossível uma vez que só há três geradores de $SU(2)$ independentes. Logo $\mathcal{L}_{WZW}$ se anula em $SU(2)$.

A conjectura de Skyrme e Witten de que os bárions podem ser obtidos como sólitons numa teoria efetiva de mésons pode ser levada adiante calculando-se a corrente bariônica anômala através da calibração do termo de Wess-Zumino-Witten. Ela é obtida como a corrente de Noether associada à transformação de calibre $U(1)_V$, de modo totalmente análogo ao cálculo da corrente eletromagnética.

As interações eletromagnéticas do octeto dos mésons pseudoescalares eq.(2.111) são descritas por uma versão de (2.121) invariante frente ao grupo de calibre $U(1)_V$. Perante este grupo o campo $U(\mathbf{r}, t)$ se transforma como

$$U(\mathbf{r}, t) \rightarrow U'(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}, t) + i\epsilon(x)[Q, U(\mathbf{r}, t)] \quad (2.123)$$

onde Q é a matriz de carga elétrica dos quarks, dada por

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}. \quad (2.124)$$

Ela representa o gerador das transformações do grupo $U(1)_V$ do eletromagnetismo que precisa ser calibrado. Para tanto introduz-se o campo do fóton A_μ que se transforma como (2.100), e a substituição mínima (2.101). Quando isto é feito percebe-se que $\mathcal{L}_{WZW}$ não se mostra invariante. Num caso assim pode-se recorrer ao método de Noether de tentativas e erros, que consiste em adicionar um termo na forma $-\epsilon J^\mu A_\mu$ a $\mathcal{L}_{WZW}$ de modo a obter a invariância desejada. Por esse método J^μ fica dado por [Wit 83b]

$$J^\mu = \frac{N_c}{48\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr} [Q (L_\nu L_\alpha L_\beta - R_\nu R_\alpha R_\beta)] \quad (2.125)$$

onde R_μ é dado por (B.11).

No caso do $U(1)_V$ bariônico definimos um campo de calibre b_μ que possua as mesmas propriedades de transformação que A_μ em (2.100) e (2.101). Agora $Q = Q_b$ é interpretado como o número bariônico carregado pelos quarks. Supondo que cada quark transporte uma mesma fração do número bariônico total do bárion, tomamos a matriz Q_b na forma

$$Q_b = \frac{1}{N_c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.126)$$

Utilizando esta expressão em (2.125) obtemos a corrente bariônica anômala na forma [Wit 83b]

$$B^\mu = \frac{1}{24\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr}[L_\nu L_\alpha L_\beta] . \quad (2.127)$$

No próximo capítulo os conceitos desenvolvidos nesta seção serão aplicados ao estudo de núcleons e deltas.

Capítulo 3

O Modelo de Skyrme

3.1 Introdução

Discutimos, no capítulo anterior, as características principais de uma lagrangiana efetiva que descreve mésons pseudoescalares, cuja construção foi inspirada na QCD, a teoria fundamental de quarks e glúons. Vimos que a conexão entre as duas abordagens é devida ao fato de as simetrias serem as mesmas nos dois níveis, especialmente a simetria quiral aproximada $SU(3) \times SU(3)$. Também a ação efetiva de Wess-Zumino, como enfatizado por Witten, desempenha um papel decisivo para tornar consistentes as simetrias ao nível mesônico e de quarks. Neste trabalho, no entanto, não necessitamos do termo de Wess-Zumino-Witten, pois consideramos apenas a estrutura dos bárions em $SU(2)$, em cujo caso $\mathcal{L}_{WZW} \equiv 0$. Genericamente, denominamos “modelo de Skyrme” o contexto onde tais bárions são produzidos, abrangendo também aqueles casos onde o termo de Skyrme não está presente e a estabilização do sóliton é devida a termos de ordens mais altas ou a mésons vetoriais.

Em parte deste capítulo abordamos o modelo de Skyrme convencional, seguindo artigos de revisão sobre o assunto. Apresentamos várias facetas do problema, tais como as propriedades topológicas das soluções “localizadas” denominadas sólitons, suas condições de estabilidade, e características da corrente bariônica. Discutimos, também questões de cálculo envolvidas no modelo, com destaque especial para as soluções das equações diferenciais para a função ângulo quiral, que determinam as previsões do modelo para as propriedades estáticas dos bárions.

A apresentação feita aqui é complementada com os apêndices B e C, onde são manipuladas e deduzidas várias expressões utilizadas neste capítulo. As relações provenientes do

ourço estão contidas no apêndice B, enquanto que a quantização semi-clássica do sóliton, introduzida por Adkins, Nappi e Witten, foi deixada para o apêndice C, onde também apresentamos os auto-estados e os elementos de matriz. Para aqueles que já estudaram o modelo de Skyrme e que estão acostumados com a sua notação, este capítulo pode ser considerado auto-contido e os apêndices mencionados, bem como o apêndice D são dispensáveis.

Iniciamos o capítulo analisando o encadeamento de idéias que motivou Skyrme a formular o modelo que leva o seu nome, realizado em termos de uma lagrangiana quirial não-linear. Na sequência várias lagrangianas são estudadas, cada uma delas correspondendo a um modo diferente de se estabilizar o sóliton. Este estudo culmina com uma forma alternativa, que difere das demais quanto à representação do grupo $SU(2) \times SU(2)$ a que pertence o campo do pión.

3.2 A Lagrangiana de Skyrme

As idéias iniciais de Skyrme, que levaram ao chamado modelo de Skyrme, estão contidas em trabalhos de 1954 [Sky 54] e 1955 [Sky 55], nos quais ele propôs um modelo fenomenológico para a matéria nuclear em que os mésons formavam um fluido onde os núcleons podiam se mover livremente. Neste modelo, os campos piônicos ϕ , pseudo-escalares isovetoriais e massivos, estão acoplados a núcleons ψ , spinoriais, que adquirem massa através deste acoplamento.

Em trabalho subsequente [Sky 58], num contexto envolvendo partículas estranhas e violação de paridade, influenciado pelos trabalhos de Salam & Polkinghorne [SP 55] e Schwinger [Sch 57] que sugeriam que a simetria de isospin deveria ser a quatro dimensões ao invés de três, Skyrme estende o modelo inicial, juntando um campo mesônico, φ_4 , aos outros três. Ele, então, parte da seguinte lagrangiana

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\cdot\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}k_0^2\phi^2 - \bar{\psi}(\gamma^\mu\partial_\mu + M_0 + ig\gamma_5\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\phi})\psi, \quad (3.1)$$

da teoria usual com acoplamento pseudoescalar, e propõe as seguintes modificações:

- i) trocar a massa do núcleon M_0 por $g\varphi_4$, de modo a introduzir a simetria quadri-dimensional de isospin;
- ii) introduzir um vínculo entre os quatro campos mesônicos, tal que

$$\phi^\rho(x)\phi_\rho(x) = Q^2, \text{ para todo } x. \quad (3.2)$$

onde Q é uma constante com dimensão de massa. Segundo ele esta é uma maneira possível de se introduzir uma escala dimensional no sistema, agora que M_0 foi eliminado;

iii) adicionar a (3.1) um termo de quarta ordem nos campos ϕ_ρ da forma

$$\frac{1}{4}\gamma^2\phi_\rho^4 \quad (3.3)$$

que, entre outras razões, é a possibilidade mais simples para um termo “tipo massa” que não introduz uma nova constante dimensional. Um termo de massa na forma tradicional $\frac{1}{2}m\phi_\rho^2$ perde o sentido devido ao vínculo (3.2).

A teoria proposta é, assim, dada em termos da seguinte densidade de lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_\rho)^2 + \frac{1}{4}\gamma^2\phi_\rho^4 - \bar{\psi}(\gamma^\mu\partial_\mu + g(\phi_4 + i\gamma_5\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\phi}))\psi. \quad (3.4)$$

No entanto, segundo aponta Skyrme, esta teoria não podia ser desenvolvida quantitativamente em muito detalhe sem um claro conhecimento da natureza dos estados descritos pela lagrangiana. Para remover algumas complicações, ele propõe um modelo simplificado onde as coordenadas são apenas x e t ((1+1) dimensões) e duas direções de isospin, de modo que o campo mesônico fica restrito a ϕ_3 e ϕ_4 . Para manter o vínculo (3.2), esses campos são escritos em termos de uma variável angular θ na seguinte forma

$$\phi_3 = Q \sin \theta, \quad \phi_4 = Q \cos \theta. \quad (3.5)$$

Uma investigação cuidadosa da estrutura não-linear dos campos mesônicos, nesta teoria, indicava que eles também descreviam entidades tipo-partícula, partilhando algumas das propriedades do campo ψ . A parte mesônica da lagrangiana clássica (3.4), com os ϕ_ρ dados em (3.5), obedece uma equação clássica de campos do tipo

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + k^2 \sin \theta = 0, \quad (3.6)$$

que é conhecida como equação de sine-Gordon [Rub 70]. A energia para um sistema clássico deste tipo é dada por [PS 62, Sky 71]

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial\theta}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right)^2 + \frac{k^2}{4\pi} (1 - \cos \theta) \right). \quad (3.7)$$

Para energias finitas, todas as soluções estáticas satisfazem

$$\cos \theta \rightarrow 1 \quad \text{para} \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

Esta condição, associada à forma das soluções de (3.6) [Sky 61b]

$$\theta(x) = 4 \tan^{-1} e^{\pm k(x-x_0)} , \quad (3.9)$$

sugeriram a Skyrme que elas poderiam ser identificadas com “uma partícula em x_0 ”: ela representa uma perturbação localizada capaz de se mover: ela existe em formas complementares de partícula e anti-partícula, correspondentes aos sinais $+$ e $-$ em (3.9); existe uma lei de conservação para o número de partículas menos anti-partículas, dado pelo número n , que é uma constante de movimento dada por

$$\theta(\infty) - \theta(-\infty) = 2\pi n . \quad (3.10)$$

A solução (3.9) está centrada em $x = x_0$ e a densidade de energia está concentrada em torno deste ponto. Este tipo de solução é chamado sóliton.

Inspirado por esses resultados, Skyrme estende este modelo para (3+1) dimensões [Sky 61, Sky 62, Sky 71]. Neste caso os campos ϕ_ρ são tomados na forma

$$\begin{aligned} \phi &= \hat{\phi} \sin \phi \\ \phi_4 &= \cos \phi , \end{aligned} \quad (3.11)$$

que satisfazem

$$\dot{\phi}_\rho \phi^\rho = 1 \quad (3.12)$$

e podem ser combinados num campo U dado por

$$U = \phi_4 + i\tau \cdot \phi . \quad (3.13)$$

A condição (3.12) traduz-se, então, na unitariedade de U . As derivadas do campo U são expressas convenientemente na forma

$$U^\dagger \partial_\mu U = i\tau_a B_{\mu a} . \quad (3.14)$$

em termos da qual o primeiro termo da lagrangiana (3.4) fica dado por

$$\frac{1}{2} Q^2 (\partial_\mu \phi_\rho)^2 = \frac{1}{2} Q^2 (B_{\mu a})^2 . \quad (3.15)$$

Skyrme [Sky 61] reconhecia a necessidade de um termo com quatro derivadas e utilizou o seguinte argumento para a sua escolha: ele identificou o campo $B_{\mu a}$ como um campo

vetorial e, por conseguinte, (3.15) como o seu termo de massa. Deste modo, o termo cinético correspondente seria dado por

$$\frac{1}{4}(\partial_\mu B_{\nu a} - \partial_\nu B_{\mu a})(\partial^\mu B_a^\nu - \partial^\nu B_a^\mu) = \frac{1}{4}C_{\mu\nu a}C_a^{\mu\nu} \quad (3.16)$$

onde $C_{\mu\nu a}$ é o rotacional covariante de $B_{\mu a}$

$$C_{\mu\nu a} = \partial_\mu B_{\nu a} - \partial_\nu B_{\mu a} = -2\varepsilon_{abc}B_{\mu b}B_{\nu c} . \quad (3.17)$$

Assim, a lagrangiana utilizada por Skyrme tem a seguinte forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}Q^2(B_{\mu a})^2 - \frac{\epsilon}{8\pi^2}(C_{\mu\nu a})^2 , \quad (3.18)$$

onde ϵ é uma constante. A eq.(3.18) pode ser reescrita num modo mais conveniente, notando-se que a função definida em (3.14) tem a mesma forma que L_μ dada em (B.11). Temos, portanto,

$$\mathcal{L} = -\frac{Q^2}{4}\text{tr}[L_\mu L^\mu] + \frac{\epsilon}{16\pi^2}\text{tr}\{[L_\mu, L_\nu]^2\} , \quad (3.19)$$

que possui a forma familiar da lagrangiana de Skyrme quando fazemos as substituições $Q = f_\pi$ e $\frac{\epsilon}{\pi^2} = \frac{1}{2e^2}$.

3.3 A Corrente Topológica

Um dos aspectos mais notáveis das idéias de Skyrme é que a sua lagrangiana admite soluções topologicamente estáveis, os sólitons, que podem ser identificados aos bárions. Estes possuem uma grandeza conservada que pode ser quantificada em termos de uma corrente topológica. O tratamento desta corrente envolve alguns conceitos de topologia, tais como classes homotópicas e grupos de homotopia. Uma abordagem bastante extensa sobre este tema pode ser encontrada em [Wul 92].

Para fixar idéias, tomemos o sistema clássico descrito pela lagrangiana de sine-Gordon, que corresponde ao modelo simplificado de Skyrme. Consideremos, então, que a energia do sistema seja dada pela eq.(3.7), onde o campo $\theta(x, t)$ é uma variável angular adimensional e k tem dimensão de energia. As configurações estáticas de energia finita correspondem à condição (3.8), de modo que devemos ter $\theta(+\infty) = n_+2\pi$ e $\theta(-\infty) = n_-2\pi$, onde n_+ e n_- são números inteiros.

A condição de contorno (3.8) significa que os dois infinitos de R^1 são mapeados no mesmo ponto do círculo S^1 , como indicado na fig.(3.1). Em geral, todas as funções $\theta(x)$

Figura 3.1: O mapeamento do eixo real x no círculo S^1 .

contínuas e diferenciáveis que satisfazem $\theta(\pm\infty) = n_{\pm}2\pi$ definem mapeamentos do eixo x no círculo S^1 . Cada uma destas soluções $\theta(x)$ pode ser classificada por um número topológico $n = n_+ - n_-$ (winding number), que conta o número de voltas que θ efetua no círculo S^1 e que define uma classe de homotopia. Uma dada classe homotópica não pode se deformada continuamente em uma classe diferente, indicando a conservação do número topológico. Algumas destas classes estão mostradas na fig.(3.2).

Estes mapeamentos são, então, caracterizados por um número inteiro ou, em linguagem de topologia, o grupo de homotopia é o grupo dos números inteiros

$$\Pi_1(S^1) = \mathbb{Z} . \quad (3.20)$$

A formulação quantitativa da conservação do número topológico, neste modelo a duas dimensões, pode ser feita em termos de uma corrente, definida por [HS 86]

$$B^\mu = \frac{1}{2\pi} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \theta(x, t) , \quad (3.21)$$

onde os índices μ e ν assumem os valores 0,1 e $\varepsilon^{\mu\nu}$ é um tensor antissimétrico tal que $\varepsilon^{01} = -\varepsilon^{10} = 1$. A divergência desta corrente é dada por

$$\partial_\mu B^\mu = \frac{1}{2\pi} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \theta(x, t) = 0 , \quad (3.22)$$

e a carga correspondente é o número topológico n

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} B^0 dx = \frac{1}{2\pi} (\theta(\infty, t) - \theta(-\infty, t)) = n . \quad (3.23)$$

A extensão deste desenvolvimento para (3+1) dimensões, utiliza como variável dinâmica o campo $U(\mathbf{r}, t) \in SU(2)$, dado por

$$U(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{f_\pi} (\sigma + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}) , \quad (3.24)$$

Figura 3.2: Mapeamentos do eixo x no círculo S^1 pela função $\theta(x)$.

em termos do qual a lagrangiana do sistema tem a forma (B.23)

$$\mathcal{L} = \frac{f_\pi^2}{4} \text{tr} [\partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U] + \frac{1}{32e^2} \text{tr} \left\{ [U^\dagger \partial_\mu U, U^\dagger \partial_\nu U]^2 \right\} + \frac{1}{2} m_\pi^2 f_\pi^2 (\text{tr} U - 2) . \quad (3.25)$$

Para configurações de energia finita o campo do pión deve anular-se a grandes distâncias, o que corresponde à condição $U(\mathbf{r}, t) \rightarrow 1$ para $r \rightarrow \infty$. Consideremos, como anteriormente, a situação estática. Neste caso $U(\mathbf{r})$ faz o mapeamento do espaço tridimensional R^3 na tri-esfera S^3 de simetria interna. É então possível fazer uma classificação topológica das configurações $U(\mathbf{r})$, isto é, dividir os mapeamentos em diferentes classes homotópicas de acordo com o número n de vezes que a esfera S^3 é coberta enquanto r assume todos os valores de $-\infty$ a $+\infty$, e rotulá-los por esse número inteiro. Uma vez que o grupo de homotopia $\Pi_3(S^3)$ é Z , este modelo tem um número infinito de setores topológicos caracterizados por este número de voltas.

A expressão da corrente, análoga a (3.21), para o caso (3+1) dimensões foi obtida por Skyrme [Sky 61] na forma

$$B^\mu = \frac{1}{24\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr} [(U^\dagger \partial_\nu U)(U^\dagger \partial_\alpha U)(U^\dagger \partial_\beta U)] . \quad (3.26)$$

cuja divergência anula-se identicamente (ver eq.(B.33)), de modo que a carga associada

$$B = \int B^0 d^3r \quad (3.27)$$

é uma constante de movimento. A conservação de B^μ , como vimos na eq.(B.33), ocorre devido a uma razão geométrica, pois esta corrente não é do tipo Noether. Ela não está associada a alguma simetria da lagrangiana, sendo conservada independentemente da forma desta. Skyrme identificou a corrente B^μ à corrente bariônica e a carga B ao número bariônico conservado. Segundo ele o sólito com $B = 1$ é um bárion. Estas conjecturas foram confirmadas por vários trabalhos posteriores [FR 68, Wil 70, BNR+ 82, BNR+ 83, Wit 83].

A idéia de relacionar a corrente topológica à corrente bariônica implica que a configuração de campo $U(\mathbf{r}, t)$ pode transportar número bariônico, desde que o mapeamento definido por ele pertença a uma classe de homotopia com $n \neq 0$. Isto pode ocorrer quando o mapeamento $U(\mathbf{r}, t)$ cobrir a tri-esfera interna S^3 pelo menos uma vez. No caso do núcleon o número bariônico é $B = 1$ e, portanto, corresponde a um mapeamento topológico com número de voltas $n = 1$.

O skyrmion é um mapeamento independente do tempo $U(\mathbf{r})$, que satisfaz as equações de campo obtidas minimizando-se a energia. A sugestão de Skyrme [Sky 61] para esta configuração de energia mínima, utilizando a situação de máxima simetria, é a seguinte

$$U(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{r}} F(r)} \quad (3.28)$$

Esta configuração de campo, baseada na hipótese “ouriço” (hedgehog ansatz), equivale a associar a cada ponto do espaço tri-dimensional um isovetor que aponta na direção radial com respeito à origem espacial onde o objeto está localizado.

A forma esfericamente simétrica (3.28), juntamente com o requisito de que o sólito U represente um bárion, implica que os pontos $r = 0$ e $r = \infty$ devem ser mapeados no mesmo ponto de S^3 ($U = 1$). Isto limita as condições de contorno da função ângulo quiral ou função de perfil $F(r)$, às formas

$$\begin{aligned} F(r \rightarrow \infty) &= m\pi \\ F(r \rightarrow 0) &= n\pi \end{aligned} \quad (3.29)$$

Inserindo a eq.(3.28) em (3.26) obtemos (ver seção B.3)

$$B^0 = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{s\epsilon n^2 F}{r^2} F' \quad (3.30)$$

onde $F' = \frac{dF}{dr}$. Assim, a eq.(3.27) fornece o número bariônico

$$B = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty dr \operatorname{sen}^2 F F' = -\frac{2}{\pi} \int_{F(0)}^{F(\infty)} dF \frac{1}{2} (1 + \cos 2F) = n - m, \quad (3.31)$$

dado pela diferença das condições de contorno de $F(r)$ na origem e no infinito. É costume tomar, por convenção, $m = 0$.

Um bárion pode, então, ser associado ao sólito U se existir uma solução com energia finita para as equações de campo com condições de contorno na forma

$$\begin{aligned} F(0) &= \pi \\ F(\infty) &= 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

3.4 A Equação de Movimento

As equações de campo que devem ser satisfeitas pelo sólito são as equações de Euler-Lagrange, obtidas minimizando-se a energia. Elas determinam a forma da parte intermediária da função $F(r)$ satisfazendo (3.32). A massa clássica, que corresponde à energia de repouso do sólito, é dada por

$$M = \int T^{00} d^3r = - \int g^{00} \mathcal{L} d^3r, \quad (3.33)$$

onde $T^{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento dado por (C.55). Utilizando a expressão da densidade lagrangiana em termos do ouriço, eq.(B.49), temos:

$$M = 4\pi \int dr r^2 \left\{ \frac{f_\pi^2}{2} \left[F'^2 + \frac{2s^2}{r^2} \right] + \frac{1}{4e^2} \left[4 \frac{s^2}{r^2} F'^2 + \frac{2s^4}{r^4} \right] + m_\pi^2 f_\pi^2 (1 - c) \right\}, \quad (3.34)$$

onde $s = \operatorname{sen} F$ e $c = \cos F$.

A função $F(r)$ é obtida minimizando-se M através da equação de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\partial M}{\partial F'} \right) - \frac{\partial M}{\partial F} = 0, \quad (3.35)$$

que fornece

$$F'' \left(\frac{\dot{r}^2}{4} + 2 \frac{s \operatorname{sen}^2 F}{\epsilon^2} \right) + \frac{\dot{r}}{2} F' - \frac{1}{4} s \operatorname{sen} 2F + \frac{s \operatorname{sen} 2F}{\epsilon^2} F'^2 - 2 \frac{s \operatorname{sen}^3 F}{\dot{r}^2 \epsilon^2} \cos F - \frac{\dot{r}^2 m_\pi^2}{16 f_\pi^2} \operatorname{sen} F = 0. \quad (3.36)$$

onde definimos, por conveniência, a variável adimensional $\dot{r} = (2f_\pi)r$, tal que $F' = \frac{dF}{d\dot{r}}$ etc.

A equação diferencial (3.36) é altamente não-linear, e até o presente não se conhece nenhuma solução analítica para ela. As soluções usuais são obtidas basicamente de dois modos distintos: por integração numérica e por construções analíticas aproximadas.

A motivação para a obtenção de representações aproximadas para a função de perfil é que elas permitem uma razoável simplificação nos cálculos de grandezas que dependem de $F(r)$, tais como as propriedades estáticas dos bárions. Existem várias soluções deste tipo na literatura [HST 90, AF 91, AGF 91, IKO+ 87].

As primeiras soluções utilizando o método numérico, o qual será usado neste trabalho, foram obtidas por [JR 83, ANW 83, AN 84]. Em geral, os métodos de integração numérica, como os de Euler, Runge-Kutta e Burlish-Stoer, se aplicam a problemas de valor inicial, onde se conhece o valor da função ($F(0)$, por exemplo) e de sua derivada no mesmo ponto ($F'(0)$). As condições de contorno que dispomos são, no entanto, $F(0)$ e $F(\infty)$ dadas em (3.32). Neste caso específico, pode-se recorrer ao método das tentativas (shooting), no qual se atribuem, de modo consistente com as condições de contorno, valores para as variáveis dependentes num dos extremos, e efetua-se a integração numérica regulando-se o valor destes parâmetros, de modo que a solução satisfaça a condição de contorno no extremo oposto.

Nesta abordagem é necessário conhecer os comportamentos de F para valores grandes de r e também próximo à origem. No primeiro caso, apenas os termos lineares em F em (3.36) precisam ser retidos, de modo que temos a equação simplificada:

$$r^2 F'' + 2r F' - 2F - m_\pi^2 r^2 F = 0. \quad (3.37)$$

Sua solução fornece o seguinte comportamento assintótico para $r \rightarrow \infty$:

$$F(r) \sim \frac{A}{r^2} (1 + m_\pi r) e^{-m_\pi r}. \quad (3.38)$$

A amplitude A depende da condição de contorno na origem e será usada mais adiante para definir a constante de acoplamento $g_{\pi NN}$.

Finalmente, nas proximidades do ponto $r = 0$, nós usamos o comportamento linear de F na forma

$$F(r \rightarrow 0) = \pi + \alpha r \quad (3.39)$$

obtido expandindo $F(r)$ em série de Taylor [Adk 87]. Isso permite-nos iniciar o processo de integração num ponto δ bastante próximo à origem usando

$$\begin{aligned} F(\delta) &= \pi + \alpha \delta, \\ F'(\delta) &= \alpha. \end{aligned}$$

atribuindo valores a α , e exigindo que na região de r suficientemente grande a solução tenha o comportamento dado por (3.38).

A solução da equação diferencial (3.36) e o cálculo da massa clássica do sóliton dependem do valor da constante de Skyrme, ao menos no caso de píons massivos. Quando usamos o modelo no limite exato da simetria quiral, é possível escrever a eq.(3.36) em termos de uma variável adimensional $x = 2\epsilon f_\pi r$, de modo que F não dependa explicitamente de f_π e ϵ . Entretanto, a massa M , e as demais propriedades estáticas do Skyrmion, mesmo neste caso, dependem de ϵ .

A questão da determinação dos parâmetros do modelo pode ser tratada de dois modos diferentes: Jackson e Rho [JR 83] utilizaram o valor empírico de f_π e obtiveram ϵ exigindo que o cálculo da constante de acoplamento axial g_A fornecesse também o seu valor experimental. Alternativamente, Adkins *et al* [ANW 83, AN 84] usaram o valor das massas do nêutron e do delta como parâmetros de entrada e calcularam f_π e ϵ a partir deles. Este último método é o que usaremos para determinar algumas das nossas soluções.

Deixamos para o apêndice C o estudo da quantização do modelo, efetuada segundo o método semi-clássico, usando coordenadas coletivas, descrito por Adkins, Nappi e Witten [ANW 83]. Neste trabalho nos limitaremos, seguindo os artigos originais, aos graus de liberdade rotacionais. A quantização de graus de liberdade de translação e dos modos de vibração podem ser encontrados em vários trabalhos sobre o modelo (ver, por exemplo, [HS 86] e as referências lá citadas).

No apêndice C mostramos como a rotação da solução clássica por meio de uma matriz $A(t)$, tal que

$$U(\mathbf{r}, t) = A(t)U(\mathbf{r})A^\dagger(t) . \quad (3.40)$$

introduz as coordenadas coletivas do skyrmion. Esse procedimento fornece uma hamiltoniana quântica, que é aquela do rotor rígido,

$$H = M + \frac{\mathbf{J}^2}{2\lambda} , \quad (3.41)$$

onde λ é o momento de inércia. Os auto-valores da energia definem um espectro de rotação na forma

$$E_J = M + \frac{J(J+1)}{2\lambda} . \quad (3.42)$$

Neste trabalho consideramos apenas os auto-estados fermiônicos com $J = 1/2$, núcleons, e $J = 3/2$, deltas, cujas massas são dadas por (C.89) e (C.90)

$$M_N = M + \frac{3}{8\lambda} \quad (3.43)$$

$$M_{\Delta} = M + \frac{15}{8\lambda}. \quad (3.44)$$

A expressão da massa, dada por (3.34), em termos da variável adimensional $\tilde{r}$ tem a forma

$$M = f_{\pi} I_1 + \frac{f_{\pi}}{e^2} I_2 + \frac{I_3}{f_{\pi}} \quad (3.45)$$

onde I_1 , I_2 e I_3 são integrais adimensionais dadas por

$$I_1 = \pi \int_0^{\infty} d\tilde{r} \tilde{r}^2 \left(F'^2 + \frac{2s^2}{\tilde{r}^2} \right) \quad (3.46)$$

$$I_2 = 4\pi \int_0^{\infty} d\tilde{r} s^2 \left(2F'^2 + \frac{s^2}{\tilde{r}^2} \right) \quad (3.47)$$

$$I_3 = \frac{\pi m_{\pi}^2}{2} \int_0^{\infty} d\tilde{r} \tilde{r}^2 (1 - c). \quad (3.48)$$

O momento de inércia (C.45) também pode ser escrito como

$$\lambda = \frac{I_4}{f_{\pi}} + \frac{I_5}{f_{\pi} e^2}. \quad (3.49)$$

com

$$I_4 = \frac{\pi}{3} \int_0^{\infty} d\tilde{r} \tilde{r}^2 s^2 \quad (3.50)$$

$$I_5 = \frac{4\pi}{3} \int_0^{\infty} d\tilde{r} \tilde{r}^2 s^2 \left(F'^2 + \frac{s^2}{\tilde{r}^2} \right). \quad (3.51)$$

O método proposto por Adkins *et al* para encontrar uma solução autoconsistente do problema é iterativo. A idéia é usar valores de entrada para e e f_{π} na eq.(3.36) a fim de determinar a forma de $F(r)$; com este $F(r)$, são calculadas as integrais $I_1 - I_5$. Adotando-se para M e λ os valores

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{4}(5M_N - M_{\Delta}) = 865.6 \text{ MeV} \\ \lambda &= \frac{3}{2}(M_{\Delta} - M_N)^{-1} = (195.4 \text{ MeV})^{-1} \end{aligned} \quad (3.52)$$

e utilizando-se as equações (3.45) e (3.49), obtemos novos valores de f_{π} e e , com os quais se repete o processo até se obter a convergência. Este procedimento fornece os valores obtidos por Adkins e Nappi: $f_{\pi} = 54 \text{ MeV}$ e $e = 4.84$. Paralelamente a este conjunto de parâmetros, nós também analisaremos algumas predições do modelo para os valores utilizados por Holzwarth *et al* [HPJ 90] nos cálculos de espalhamento πN : $f_{\pi} = 93 \text{ MeV}$ e $e = 4.0$. Nestas formulações onde se toma f_{π} com o seu valor empírico, como em Jackson

e Rho [JR 83], as massas do nuleon e do delta resultantes são consideravelmente maiores do que os valores medidos. No caso específico destes parâmetros, obtm-se

$$\begin{cases} M = 1756.5 \text{ MeV} \\ \lambda = (166.2 \text{ MeV})^{-1} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} M_N = 1818.9 \text{ MeV} \\ M_\Delta = 2068.3 \text{ MeV} \end{cases} \quad (3.53)$$

As formas da solução $F(r)$ para esses dois conjuntos de parâmetros são mostradas na fig.(3.3).

Figura 3.3: Formas da função de perfil $F(r)$ para os conjuntos de parâmetros $(f_\pi, \epsilon) = (54 \text{ MeV}, 4.84)$, $(93 \text{ MeV}, 4.0)$.

3.5 A Estabilidade do Sóliton Clássico

Mencionamos, anteriormente, que o termo de quarta ordem na lagrangiana de Skyrme tem o papel de estabilizar o sóliton. Nada foi dito, no entanto, para provar esta afirmação. Nem mesmo o critério utilizado por Skyrme na escolha deste termo justifica o seu papel de estabilizador. Mostraremos, nesta seção, que existe um teorema, proposto por Derrick [Der 64], que mostra que o termo quártico realmente é capaz de dar estabilidade às soluções clássicas.

Pode-se mostrar que os critérios utilizados na seção 3.3 não excluem a possibilidade de se ter sólitons no modelo sigma não-linear. Se tomarmos apenas o termo quadrático na lagrangiana (3.25), os campos obedecendo as condições de contorno topológicas podem ser definidos, e a energia estática se reduz a

$$E_\sigma = \frac{f_\pi^2}{4} \text{tr} \int (\nabla U)^2 d^3r. \quad (3.54)$$

O problema pode possuir soluções de energia finita localizadas, os sólitons topológicos, desde que as integrais convirjam quando as integrações são tomadas em todo o espaço, inclusive os pontos correspondentes ao infinito, que devem ser mapeados no elemento identidade de $SU(2)$. Isto, porém, não equivale a dizer que sólitons topológicos estáveis existem. Para esclarecer estas questões é que Derrick escreveu um importante artigo, alguns anos após os primeiros trabalhos de Skyrme. Baseado em um trabalho de Enz [Enz 63], que havia considerado uma extensão da lagrangiana de sine-Gordon em três dimensões, e que sugeria que as simetrias e as propriedades topológicas da solução do problema unidimensional estariam presentes também neste caso, Derrick perguntou-se se uma equação não-linear semelhante a (3.6) poderia possuir soluções localizadas estáveis em três dimensões. A resposta que ele obteve foi negativa.

Para provar a sua resposta, dada sob a forma de um teorema, ele utilizou um argumento que tomaremos emprestado para mostrar que a lagrangiana do modelo sigma não-linear não possui soluções solitônicas estáveis, necessitando de um termo tipo Skyrme para que isso ocorra. Tomemos um sistema com energia estática dada na forma

$$E = \frac{f_\pi^2}{4} \text{tr} \int (\nabla U)^2 d^3r + \int f(U) d^3r, \quad (3.55)$$

que equivale a tomar $\mathcal{L}_\sigma$ com um termo de potencial $f(U)$. Seja então U uma solução com energia finita que minimiza a energia tal que $\delta E = 0$. Ela será uma solução estável do problema se a variação de segunda ordem $\delta^2 E \geq 0$. Consideremos então uma transformação de escala

$$U(\mathbf{r}) \rightarrow U(\lambda \mathbf{r}) \quad (3.56)$$

onde λ é uma constante arbitrária, de modo que a energia pode ser escrita da seguinte forma

$$E_\lambda = \frac{1}{\lambda} E_\sigma + \frac{1}{\lambda^3} V. \quad (3.57)$$

onde E_σ e V são as integrais dadas em (3.55). Uma vez que $U(\mathbf{r})$ minimiza a energia,

quando $\lambda = 1$ devemos ter

$$\left. \frac{dE_\lambda}{d\lambda} \right|_{\lambda=1} = -E_\sigma - 3V = 0. \quad (3.58)$$

Por outro lado a segunda derivada fornece:

$$\left. \frac{d^2 E_\lambda}{d\lambda^2} \right|_{\lambda=1} = 2E_\sigma + 12V. \quad (3.59)$$

Substituindo (3.58) em (3.59) temos

$$\left. \frac{d^2 E_\lambda}{d\lambda^2} \right|_{\lambda=1} = -2E_\sigma. \quad (3.60)$$

O integrando em (3.54) é sempre positivo, o que garante que $E_\sigma > 0$. Conseqüentemente, $\delta^2 E < 0$, comprovando o teorema, ao indicar que a solução $U(\mathbf{r})$ é instável. Voltando ao modelo sigma não-linear, isto é, tomando $f(U) = 0$ em (3.55), temos

$$E_\lambda = \frac{1}{\lambda} E_\sigma, \quad (3.61)$$

o que mostra que não existem soluções estáveis, pois através de uma transformação de escala ($\lambda = \infty$) podemos obter $E_\sigma = 0$. O mínimo da energia tende então a colapsar o sóliton, sendo $1/\lambda$ uma medida do tamanho deste. Este resultado também pode ser obtido, como em [Bad 88], através de um procedimento que envolve explicitamente a dimensão do espaço, e que permite mostrar que com $d = 1$, isto é, em (1+1) dimensões, pode-se obter soluções estáveis para a combinação $\mathcal{L}_\sigma + V$, como na eq.(3.55).

A inexistência de soluções topológicas estáveis no modelo sigma não-linear pode também ser mostrada ao nível das equações de movimento; Iwasaki e Ohyama [IO 89] comprovaram, resolvendo numericamente a equação diferencial (3.36) apenas com o termo quadrático, que a solução com condições de contorno (3.32) não existe matematicamente. Estes argumentos são válidos no caso clássico. É possível, no entanto, obter soluções estáveis frente ao colapso quando o modelo é quantizado através das coordenadas coletivas, como argumentam Jain *et al* [JSS 89] e Mignaco e Wolck [MW 89].

Utilizando agora o mesmo raciocínio para o modelo de Skyrme, vemos que, frente à transformação de escala (3.56), a energia fica dada por¹

$$E_\lambda = \frac{1}{\lambda} E_\sigma + \lambda E_{Sk} \quad (3.62)$$

¹O termo de massa não afeta a estabilidade de sóliton, ele se comporta como $\lambda^3 E_{qs}$.

e as condições de energia mínima (3.58) e de estabilidade (3.59) fornecem

$$\begin{aligned}\frac{dE_\lambda}{d\lambda}\Big|_{\lambda=1} &= -E_\sigma + E_{Sk} = 0 \\ \frac{d^2E_\lambda}{d\lambda^2}\Big|_{\lambda=1} &= 2E_\sigma > 0.\end{aligned}\tag{3.63}$$

indicando a existência de um mínimo estável, no qual cada termo contribui igualmente.

3.6 O Méson ω

Bem antes do advento da QCD, Sakurai [Sak 60] desenvolveu um modelo para as interações fortes na forma de uma teoria de calibre, onde os mésons vetoriais ρ , ω e ϕ faziam o papel de bósons de calibre. Este modelo, normalmente referido como dominância do méson vetorial (VMD) produziu, ao nível da fenomenologia dos hádrons, alguns bons resultados. No contexto da QCD, essas idéias voltaram a despertar interesse com a descoberta de simetrias de calibre “escondidas” (hidden symmetries) em teorias de supergravidade [CJ 78, CJ 79]. A partir de então, difundiu-se a idéia de que um modelo sigma não-linear baseado no grupo de simetria G , quebrado espontaneamente para o subgrupo H , é equivalente a outro modelo com simetria $G_{global} \times H_{local}$ onde os bósons de calibre correspondentes à simetria escondida H são campos compostos [CJ 78, CJ 79, GP 78, DVL 79].

Vimos, anteriormente, que a baixas energias e no limite de grande número de cores, a QCD é equivalente a uma teoria efetiva com graus de liberdade mesônicos. No caso de dois sabores, o modelo sigma não-linear é uma teoria efetiva da QCD, com simetria global $G = SU(2)_E \times SU(2)_D$ quebrada espontaneamente para o subgrupo $H = SU(2)_V$ de isospin. Nesse cenário de geração dinâmica de bósons de calibre Bando *et al* [BKU+ 85] sugeriram que o méson ρ fosse o bóson de calibre da simetria escondida $SU(2)_V$ em uma lagrangiana quirial não-linear.

A partir disso, Igarashi *et al* [IJK+ 85] mostraram que, com a introdução do méson ρ numa lagrangiana quirial $SU(2)_E \times SU(2)_D$, é possível obter sólitons topológicos estáveis sem a necessidade de termos de ordem mais altas nas derivadas. Mostraram, além disso, que no limite $m_\rho \rightarrow \infty$, com a constante de acoplamento mantida fixa, essa lagrangiana se reduz à lagrangiana de Skyrme.

Motivados por estes aspectos intrigantes do modelo de Skyrme, estudamos o papel dos mésons vetoriais na estrutura dos bárions. A discussão apresentada aqui não contém ingredientes novos. Entretanto, alguns resultados provenientes desta abordagem serão bastante úteis no capítulo seguinte, quando discutiremos os fatores de forma eletromagnéticos

do núcleon. Em particular, os mésons vetoriais desempenham um papel importante na determinação dos raios associados a esses fatores de forma.

Para discutir as implicações fenomenológicas de uma lagrangiana quiral contendo mésons vetoriais, consideramos o caso em que a estabilização do sóliton é obtida com a inclusão do méson ω . Nosso estudo será baseado no modelo de Adkins e Nappi [AN 84b], onde o méson ω emerge na teoria como o bóson de calibre da simetria local “escondida” $U(1)_V$ (isoescalar) no modelo sigma não-linear. Neste caso a densidade de lagrangiana é tomada na seguinte forma

$$\mathcal{L} = \frac{f_\pi^2}{4} \text{tr}[\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger] - \frac{1}{4} \omega^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} + \gamma \omega_\mu B^\mu + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu + \frac{m_\pi^2 f_\pi^2}{2} (\text{tr} U - 2) , \quad (3.64)$$

onde m_ω é a massa do méson ω .

$$\omega_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu , \quad (3.65)$$

e B^μ é a corrente bariônica (isoescalar). Uma vez que B^μ é de terceira ordem nas derivadas do campo do pión, Adkins e Nappi relacionaram o termo de interação como um acoplamento de ω com três píons e calcularam γ a partir do decaimento $\omega \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$, obtendo o valor $\gamma = 25.4$. Este resultado constitui apenas um limite superior, já que este decaimento é dominado pelo processo $\omega \rightarrow \rho \pi$. Se, por outro, lado γ for identificado à constante de acoplamento ωNN , g_ω , ele pode ser determinado a partir da interação núcleon-núcleon. Deste procedimento se obtém $g_\omega^2/4\pi = 10-12$ [VR 74, Gre 77], que fornece $\gamma = 11.2-12.3$. Nas abordagens feitas em outras referências [KRS 84, MZ 86, MKW+ 86, MKW 87], o termo de acoplamento é tomado na forma $\frac{N_c g}{2} \omega_\mu B^\mu$, que é aquela a que se reduz o termo de Wess-Zumino no referido “modelo mínimo”. Com $N_c = 3$ as constantes de acoplamento estão relacionadas por

$$\frac{3}{2} g = \gamma .$$

Na descrição que faremos aqui, γ será mantido como um parâmetro livre, a ser determinado a partir das propriedades dos bárions.

Para o campo do pión tomamos a configuração ouriço na forma usual

$$U(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{r}} F(r)} , \quad (3.66)$$

e procuramos soluções solitônicas compatíveis com número bariônico unitário, associadas às condições $F(0) = \pi$ e $F(\infty) = 0$. Ao nível clássico, somente a componente B^0 da

corrente bariônica é não-nula, a componente espacial do campo ω^μ não possui termo de fonte, de modo que podemos tomar

$$\omega^\mu(\mathbf{r}) = \omega(\mathbf{r})\delta^{\mu 0}. \quad (3.67)$$

Substituindo (3.66) e (3.67) em (3.64), com B^0 dado por (3.30), obtemos o funcional da energia estática, que é identificado à massa do skyrmion, na forma

$$M = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \left\{ \frac{f_\pi^2}{2} \left[F'^2 + \frac{2s^2}{r^2} \right] - \frac{1}{2}\omega'^2 - \frac{m_\pi^2}{2}\omega^2 + \frac{\gamma}{2\pi^2 r^2} \omega s^2 F' + m_\pi^2 f_\pi^2 (1 - c) \right\}. \quad (3.68)$$

As configurações de energia finita existem se $\omega(0)$ for finito e se as seguintes condições de contorno forem satisfeitas

$$\begin{aligned} \omega'(0) &= 0 \\ \omega(\infty) &= 0. \end{aligned} \quad (3.69)$$

As formas das funções de perfil $F(r)$ e $\omega(r)$ são obtidas minimizando a energia (3.68). As equações de Euler-Lagrange fornecem neste caso duas equações acopladas

$$r^2 \omega'' + 2r \omega' - r^2 m_\pi^2 \omega + \frac{\gamma}{2\pi^2} \sin^2 F F' = 0 \quad (3.70)$$

$$r^2 F'' + 2r F' - \sin 2F + \frac{\gamma}{2\pi^2 f_\pi^2} \omega' \sin^2 F - m_\pi^2 r^2 \sin F = 0. \quad (3.71)$$

A solução numérica destas equações é classificada por Eisenberg *et al* [EES 86] como “delicada”. Segundo eles, estas equações são macias (soft), no sentido de que muitos pares de valores $\omega(0)$ e $F'(0)$ parecem fornecer soluções com mesma qualidade. Um estudo destas equações feito por Igarashi *et al* [IJK+ 85], usando o teorema de Derrick, mostra que a solução para número bariônico $B = 1$, bem como para os demais valores ímpares de B , é estável. Para valores pares, entretanto, existe a possibilidade destas soluções se tornarem instáveis para certos valores dos parâmetros.

Ainda segundo Eisenberg *et al*, uma das técnicas numéricas que podem ser usadas para resolver as equações (3.70) e (3.71) é o método de Runge-Kutta a partir da origem com uma “tediosa e não automatizada” busca dos parâmetros $\omega(0)$ e $F'(0)$. Nós optamos por uma técnica semelhante a esta, procurando automatizar a busca destes parâmetros.

Partimos das formas de $F(r)$ no infinito e na origem, dadas por (3.38) e (3.39), e das análogas para $\omega(r)$. No caso deste campo, as condições de contorno $\omega(0) = C$ (finito) e $\omega'(0) = 0$ sugerem uma forma [Kla 84]

$$\omega(r \rightarrow 0) = C + Dr^2. \quad (3.72)$$

Usando a eq.(3.72) juntamente com (3.38) e (3.39) em (3.70) obtemos

$$D = \frac{1}{6} \left(m_\omega^2 C - \frac{\alpha^3 \gamma}{2\pi^2} \right) . \quad (3.73)$$

de modo que as condições de contorno na origem são as seguintes

$$\begin{aligned} F(r \rightarrow 0) &= \pi + \alpha r \\ F'(r \rightarrow 0) &= \alpha \\ \omega(r \rightarrow 0) &= C + \frac{1}{6} \left(m_\omega^2 C - \frac{\alpha^3 \gamma}{2\pi^2} \right) r^2 \\ \omega'(r \rightarrow 0) &= 0 . \end{aligned} \quad (3.74)$$

Isto significa que existem dois parâmetros que devem ser ajustados simultaneamente para que as funções de perfil sejam dadas, na região de grandes valores de r , por

$$\begin{aligned} F(r \rightarrow \infty) &= \frac{A}{r^2} (1 + m_\pi r) e^{-m_\pi r} \\ \omega(r \rightarrow \infty) &= \frac{E}{(m_\pi r)^5} e^{-3m_\pi r} . \end{aligned} \quad (3.75)$$

A forma das soluções $F(r)$ e $\omega(r)$ resultantes deste procedimento são mostradas na fig.(3.4). Elas foram obtidas usando-se os seguintes valores: $f_\pi = 62.0$ MeV e $\gamma = 15.64$, que são os valores dos melhores ajustes da ref.[AN 84b].

A equação de movimento do campo $\omega(r)$ (eq.(3.70)) pode ser posta na seguinte forma

$$(-\nabla^2 + m_\omega^2)\omega(r) = -\gamma B^0(r) , \quad (3.76)$$

cujas solução geral pode ser obtida usando-se a função de Green livre

$$(-\nabla^2 + m_\omega^2)G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') , \quad (3.77)$$

em termos da qual temos

$$\omega(r) = \int_0^\infty dr' G(r, r') \left(-\gamma r'^2 B^0(r') \right) , \quad (3.78)$$

onde

$$G(r, r') = \frac{1}{2m_\omega r r'} \left\{ e^{-m_\omega |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - e^{-m_\omega (r + r')} \right\} . \quad (3.79)$$

A partir dessas expressões a massa (3.68) pode ser reescrita como

$$M = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \left\{ \frac{f_\pi^2}{2} \left[F'^2 + \frac{2s^2}{r^2} \right] + m_\pi^2 f_\pi^2 (1 - c) - \frac{\gamma^2}{2} \int_0^\infty dr' B^0(r) G(r, r') r'^2 B^0(r') \right\} . \quad (3.80)$$

Figura 3.4: Forma das funções de perfil $F(r)$ e $\bar{\omega}(r) = \frac{\omega(r)}{2f_\pi}$, para os conjuntos de parâmetros $(f_\pi, \gamma) = (93, 11.2)$ e $(62, 15.64)$.

A quantização do sóliton neste caso é efetuada do modo usual. A dependência temporal associada à rotação da solução clássica produz componentes espaciais para a corrente bariônica, que têm o papel de fonte para as componentes ω^i . Elas obedecem uma equação análoga a (3.78), com B^0 sendo substituída por B^i :

$$\omega^i(r) = \int_0^\infty dr' A(r, r') \left(-\gamma r'^2 B^i(r') \right), \quad (3.81)$$

onde $B^i(r)$ é dado em (D.11) e

$$A(r, r') = \frac{1}{m_\omega r r'} \left\{ \epsilon^{-m_\omega |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left(r r' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{m_\omega} - \frac{1}{m_\omega^2} \right) + \epsilon^{-m_\omega (r + r')} \left(r r' + \frac{(r + r')}{m_\omega} + \frac{1}{m_\omega^2} \right) \right\}. \quad (3.82)$$

A lagrangiana quântica é então dada por (C.43)

$$L^i = -M + 2\lambda K_a K_a, \quad (3.83)$$

com o momento de inércia λ dado por

$$\lambda = \frac{8\pi f_\pi^2}{3} \int_0^\infty dr r^2 s^2 + \frac{\gamma^2}{3\pi^3} \int \int_0^\infty dr dr' \sin^2 F(r) F'(r) \sin^2 F(r') F'(r') A(r, r'). \quad (3.84)$$

Adkins e Nappi reescreveram as eqs.(3.80) e (3.84) em termos de integrais adimensionais $\tilde{M}$ e $\tilde{\lambda}$, nas formas

$$M = \frac{16\pi f_\pi^2}{m_\omega} \tilde{M} \quad \text{e} \quad \lambda = \frac{8\pi f_\pi^2}{3m_\omega^3} \tilde{\lambda}. \quad (3.85)$$

dadas em função do parâmetro

$$\tilde{\beta} = \frac{\gamma m_\omega}{4f_\pi \pi^2}. \quad (3.86)$$

Eles, então, usaram as fórmulas para as massas (eqs.(3.43) e (3.44)), que fornecem

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}(m_\Delta - m_N) &= \frac{1}{\tilde{\lambda}} = \frac{3m_\omega^3}{8\pi f_\pi^2 \tilde{\lambda}} \\ \frac{1}{4}(5m_N - m_\Delta) &= M = \frac{16\pi f_\pi^2 \tilde{M}}{m_\omega} \end{aligned} \quad (3.87)$$

e calcularam $\tilde{\beta}$ de modo que, usando os valores empíricos das massas m_N , m_π e m_ω como parâmetros de entrada, a razão

$$\frac{\tilde{M}}{\tilde{\lambda}} = \frac{(5m_N - m_\Delta)(m_\Delta - m_N)}{36m_\omega^2} \quad (3.88)$$

fornece o valor experimental da massa do delta m_Δ . O valor adequado para este ajuste é $\tilde{\beta} = 5.0$, com o qual as eqs.(3.87) e (3.86) fornecem $f_\pi = 62.0$ MeV e $\gamma = 15.64$, respectivamente.

3.7 O Termo $B_\mu B^\mu$

Vimos, na seção anterior, que a inclusão explícita de mésons vetoriais na lagrangiana do modelo sigma não-linear é capaz de produzir sólitons topológicos estáveis. Nesta seção vamos discutir uma outra modificação na lagrangiana de Skyrme que também leva a esses resultados. Trata-se da substituição do termo de quarta ordem (termo de Skyrme) pelo termo de sexta ordem $B_\mu B^\mu$ introduzido por Jackson *et al* [JJG+ 85].

Várias são as motivações para se considerar um termo deste tipo. Em primeiro lugar esta é a única forma com mais de quatro derivadas que é compatível com as simetrias e que não introduz mais do que duas derivadas temporais. Ela também satisfaz a exigência de Derrick quanto à estabilidade do sólito e, além disso, como mostrado por Riska e Schwesinger [RS 89], um termo deste tipo é necessário para se obter o sinal correto da componente spin-órbita (independente do isospin) da interação núcleon-núcleon. Para nós ainda há uma motivação adicional, já que o termo de sexta ordem será adotado num

modelo alternativo, no qual o campo do pión se transforma como representações diferentes de $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ do grupo $SU(2) \times SU(2)$.

Um termo na forma $B_\mu B^\mu$ emerge naturalmente na descrição baseada no méson ω : no limite $m_\omega \rightarrow \infty$, com $\gamma/m_\omega = c\epsilon$, o termo de interação assume a forma $\frac{\gamma^2}{m_\omega^2} B_\mu B^\mu$. Consideremos, então, a densidade de lagrangiana na forma

$$\mathcal{L} = \frac{f_\pi^2}{4} \text{tr}[\partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U] - b B_\mu B^\mu + \frac{m_\pi^2 f_\pi^2}{2} (\text{tr} U - 2). \quad (3.89)$$

O parâmetro b , como nos desenvolvimentos anteriores, será determinado pelas propriedades dos bárions. A razão γ^2/m_ω^2 , pela conexão com o méson ω , será uma boa referência para o parâmetro b . No caso estático, utilizando o ouriço, obtemos a massa clássica do sóliton na forma

$$M = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \left\{ \frac{f_\pi^2}{2} \left(F'^2 + \frac{2s^2}{r^2} \right) + \frac{b}{4\pi^4} \frac{s^4 F'^2}{r^4} + m_\pi^2 f_\pi^2 (1 - c) \right\} \quad (3.90)$$

A minimização de M fornece a equação diferencial de $F(r)$

$$F'' \left(\frac{\hat{r}^2}{4} + \frac{\beta \sin^4 F}{2 \hat{r}^2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \beta \frac{\sin^4 F}{\hat{r}^4} \right) \hat{r} F' - \frac{\sin 2F}{4} + \frac{\beta}{2\hat{r}^2} \sin^2 F \sin 2F F'^2 - \frac{m_\pi^2}{16f_\pi^2} \hat{r}^2 \sin F = 0 \quad (3.91)$$

onde $\beta = \frac{4f_\pi^2}{\pi^4} b$ e $\hat{r}$ é definido por $\hat{r} = (2f_\pi)r$. Para integrar numericamente a eq.(3.91) nós usamos as condições de contorno para $F(r)$ compatíveis com número bariônico unitário, eq.(3.32), e as expressões assintóticas (3.38) e (3.39). A forma da solução $F(r)$ para este caso é mostrada na fig.(3.5). Os parâmetros $f_\pi = 65.1$ MeV e $\beta = 0.019$ utilizados foram obtidos seguindo o procedimento iterativo adotado na seção 3.4.

Neste caso a massa (3.90) é escrita como

$$M = f_\pi I_1 + \beta f_\pi I'_2 + \frac{I_3}{f_\pi} \quad (3.92)$$

onde I_1 e I_3 são dadas em (3.46) e (3.48) e a integral I'_2 tem a forma

$$I'_2 = 2\pi \int_0^\infty d\hat{r} \frac{s^4 F'^2}{\hat{r}^2} \quad (3.93)$$

O processo usual de quantização nos fornece as fórmulas das massas (3.43) e (3.44) com o momento de inércia dado por

$$\lambda = \frac{1}{f_\pi} I_4 + \frac{\beta}{f_\pi} I'_5 \quad (3.94)$$

Figura 3.5: Forma da função de perfil $F(r)$ com termo $B_\mu B^\mu$. $(f_\pi, \beta) = (65.1, 0.019)$.

com

$$I'_5 = \frac{2\pi}{3} \int_0^\infty d\tilde{r} s^4 F'^2. \quad (3.95)$$

Os parâmetros autoconsistentes, compatíveis com os valores empíricos das massas do núcleon e do delta eq.(3.52) são aqueles citados anteriormente: $f_\pi = 65.1$ MeV e $\beta = 0.019$. Este valor de β fornece $\frac{g_\omega^2}{4\pi} = 5.31$, que corresponde a metade do valor 10 – 12 obtido nas refs.[VR 74, Gre 77].

3.8 O Modelo Alternativo

Nas seções precedentes deste capítulo exploramos a liberdade na física dos skyrmions associada à construção das lagrangianas. Nas versões consideradas, as soluções autoconsistentes do método iterativo, em que se ajustam as massas do núcleon e do delta, fornecem valores para a constante de decaimento do pión que variam entre 54 e 65 Mev. Estes valores ficam, como veremos nos outros capítulos, em torno de 2/3 dos respectivos resultados experimentais, qualquer que seja o termo usado como estabilizador.

Neste seção exploramos uma outra liberdade na descrição destes bárions, qual seja, a definição específica do campo do méson. Nosso objetivo é investigar quais as implicações numéricas de uma dada definição particular e quais resultados podem ser considerados

independentes da mesma. Nesta análise mostraremos também como uma mudança na representação do campo do pión é equivalente a uma alteração nas condições de contorno consideradas anteriormente

Weinberg mostrou que o modelo sigma não-linear, correspondendo à representação $(1/2, 1/2)$ de $SU(2) \times SU(2)$, é apenas uma entre muitas outras possíveis realizações da simetria quiral: "We are free to use any pseudoscalar isovector object as the pion field." [Wei 68]. Em sua formulação, em termos de derivadas covariantes, ele constrói lagrangianas invariantes-quirais que não dependem da representação a que pertence o campo do pión π . Esta liberdade é expressa pela dependência dos resultados de uma função $f(\pi^2)$, arbitrária exceto pela condição $f(0) = f_\pi$.

O modelo sigma não-linear corresponde à escolha $f(\pi^2) \equiv \sigma = \sqrt{f_\pi^2 + \pi^2}$, sendo a lagrangiana invariante frente a transformações axiais que mudam o campo do pión na função σ e vice-versa. Este campo corresponde à representação $(1/2, 1/2)$ de $SU(2) \times SU(2)$ [GG 69]. Em trabalho recente [NNR 93], foi considerado o caso em que o sóliton quiral é construído com base em um campo piônico que se transforma de acordo com a representação (1.1) de $SU(2) \times SU(2)$. Neste trabalho estendemos os resultados lá apresentados e obtemos uma grande variedade de representações.

Segundo Weinberg, a transformação mais geral do campo do pión é dada por [Wei 68]:

$$[\bar{Q}_a, \pi_b] = i(f\delta_{ab} + g\pi_a\pi_b) \quad (3.96)$$

onde $\bar{Q}_a$ é a carga axial, f é uma função arbitrária de π^2 tal que $f(0) = f_\pi$, e

$$g = \frac{1 + 2ff'}{f - 2\pi^2 f'} \quad (3.97)$$

onde $f' = \frac{df}{d\pi^2}$.

A derivada covariante do pión é escrita na forma

$$D^\mu \pi = f_\pi \left\{ \frac{\partial^\mu \pi}{\sqrt{f^2 + \pi^2}} - \frac{2f'(f + \sqrt{f^2 + \pi^2}) + 1}{2(f^2 + \pi^2)(f + \sqrt{f^2 + \pi^2})} \pi \partial^\mu \pi^2 \right\}, \quad (3.98)$$

e uma lagrangiana quiral pode ser construída formando-se funções de $D^\mu \pi$ que sejam simultaneamente invariantes de Lorentz e isoescalares.

No caso específico do modelo sigma não-linear temos $f \equiv \sigma$, o que leva às propriedades de transformação usuais:

$$[\bar{Q}_a, \pi_b] = i\delta_{ab}\sigma, \quad (3.99)$$

$$[\bar{Q}_a, \sigma] = -i\pi_b, \quad (3.100)$$

A derivada covariante assume a forma

$$D^\mu \pi = \partial^\mu \pi + \frac{\pi \pi \cdot \partial^\mu \pi}{\sigma(f_\pi + \sigma)} = \partial^\mu \pi - \frac{\pi \partial^\mu \sigma}{f_\pi + \sigma} \quad (3.101)$$

e o termo cinético $\mathcal{L}_\sigma$ pode ser expresso por

$$\mathcal{L}_\sigma = \frac{1}{2} D^\mu \pi \cdot D_\mu \pi = \frac{1}{2} \{ \partial^\mu \pi \cdot \partial_\mu \pi + \partial^\mu \sigma \partial_\mu \sigma \} . \quad (3.102)$$

Escrevendo-se

$$U = \frac{1}{f_\pi} (\sigma + i \tau \cdot \pi) , \quad (3.103)$$

como na eq.(2.90), podemos colocar $\mathcal{L}_\sigma$ na forma utilizada na eq.(3.25)

$$\mathcal{L}_\sigma = \frac{f_\pi^2}{4} \text{tr} (\partial^\mu U \partial_\mu U^\dagger) . \quad (3.104)$$

O vínculo entre os campos σ e π sugere uma parametrização em termos de um ângulo θ :

$$\sigma = f_\pi \cos \theta , \quad (3.105)$$

$$\pi = f_\pi \hat{\pi} \sin \theta . \quad (3.106)$$

Neste trabalho estamos interessados em formas alternativas do campo do pión. Para restringir o número de possibilidades, vamos caracterizá-las pelas suas propriedades de transformação por $SU(2) \times SU(2)$, considerando apenas representações da forma $(N/2, N/2)$.

As propriedades de transformação de um campo ψ com isospin t e pertencendo à representação $(N/2, N/2)$ de $SU(2) \times SU(2)$ podem ser obtidas seguindo Gasiorowicz e Geffen [GG 69]. Tal campo obedece a equação

$$\sum_a [\bar{Q}_a, [\bar{Q}_a, \psi]] = (N(N+2) - t(t+1)) \psi . \quad (3.107)$$

Usando este resultado para o campo do pión, temos

$$\sum_a [\bar{Q}_a, [\bar{Q}_a, \pi_b^N]] = (N(N+2) - 2) \pi_b^N . \quad (3.108)$$

Juntamente com o campo π^N procuramos por termos de quebra de simetria que produzam PCAC canônico. É então natural caracterizar também $\mathcal{L}_{qs}$ em termos de suas

propriedades de transformação. Assim, a função, $\mathcal{L}_{qs}^N$ que se transforma de acordo com a representação $(N/2, N/2)$ de $SU(2) \times SU(2)$, obedece a equação [Wei 68]:

$$\sum_a [\bar{Q}_a, [\bar{Q}_a, \mathcal{L}_{qs}^N]] = N(N+2)\mathcal{L}_{qs}^N. \quad (3.109)$$

A solução desta equação foi obtida por Turner e Olsson [TO 72] na seguinte forma

$$\mathcal{L}_{qs}^N = \frac{c \operatorname{sen} \nu \theta}{\nu \operatorname{sen} \theta} \quad (3.110)$$

onde θ é o ângulo quirar definido nas eqs.(3.105) e (3.106), ν é um número inteiro relacionado a N por

$$\nu^2 - 1 = N(N+2). \quad (3.111)$$

A constante c é obtida supondo-se que $\mathcal{L}_{qs}^N$ seja o responsável pela massa do pión na lagrangiana, o que nos leva ao resultado

$$c = \frac{3}{\nu^2 - 1} f_\pi^2 m_\pi^2. \quad (3.112)$$

A forma do campo do pión pode ser obtida da condição de PCAC canônico, que se escreve

$$\partial_\mu A_a^\mu = i[\bar{Q}_a, \mathcal{L}_{qs}^N] = f_\pi m_\pi^2 \pi_a^N, \quad (3.113)$$

de forma que

$$\pi^N = -\frac{1}{f_\pi m_\pi^2} \frac{d\mathcal{L}_{qs}^N}{d\theta} \hat{\pi} = f_\pi \frac{3}{\nu^2 - 1} \left(\frac{\cos \theta \operatorname{sen} \nu \theta}{\nu \operatorname{sen}^2 \theta} - \frac{\cos \nu \theta}{\operatorname{sen} \theta} \right) \hat{\pi}. \quad (3.114)$$

Nesta expressão π^N corresponde ao campo do pión para a representação $(N/2, N/2)$ de $SU(2) \times SU(2)$, que é usado para construir famílias de sólitons quirais. É fácil estabelecer contato com o modelo sigma não-linear, lembrando que este caso pertence à representação $(1/2, 1/2)$ o que corresponde a tomar $\nu=2$ em (3.114). Deste modo, temos

$$\pi^1 = f_\pi \operatorname{sen} \theta \hat{\pi}, \quad (3.115)$$

que é a forma usual do campo do pión parametrizada em termos do ângulo quirar. Analogamente, para $N=2$ ($\nu=3$) temos

$$\pi^2 = \frac{f_\pi}{2} \operatorname{sen} 2\theta \hat{\pi} \quad (3.116)$$

e assim sucessivamente.

A função f^N definida na eq.(3.96) pode ser obtida através do cálculo explícito do comutador da carga axial com o campo do pión:

$$f^N = f_\pi \frac{3}{\nu^2 - 1} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \left(\frac{\cos \theta \sin \nu \theta}{\nu \sin^2 \theta} - \frac{\cos \nu \theta}{\sin \theta} \right) . \quad (3.117)$$

Assim,

$$f^1 = f_\pi \cos \theta = \sqrt{f_\pi^2 - \pi^2} , \quad (3.118)$$

$$f^2 = f_\pi \cos^2 \theta = \frac{1}{2} \left(f_\pi + \sqrt{f_\pi^2 - 4\pi^2} \right) . \quad (3.119)$$

O caso $N=1$ corresponde, como antes, ao modelo sigma não-linear. Pode-se verificar também que a restrição $f^N(0) = f_\pi$ é satisfeita em todos os casos. Usando (3.117) e (3.114) em (3.98) pode-se mostrar que a derivada covariante pode ser escrita como

$$D^\mu \pi^N = \partial^\mu \pi - \frac{\pi \partial^\mu \sigma}{f_\pi + \sigma} . \quad (3.120)$$

que é o mesmo resultado que no modelo sigma não-linear e está de acordo com Weinberg que mostrou que é sempre possível relacionar uma realização geral da simetria quiral aos campos π e σ por

$$\pi = \frac{f_\pi}{\sqrt{(f^N)^2 + (\pi^N)^2}} \pi^N \quad (3.121)$$

$$\sigma = \frac{f_\pi}{\sqrt{(f^N)^2 + (\pi^N)^2}} f^N . \quad (3.122)$$

Podemos construir sólitons quirais a partir do campo π^N (3.114) , que suporemos serem da forma ouriço

$$\pi^N(\mathbf{r}) = f_\pi \phi(r) \hat{\mathbf{r}} \quad (3.123)$$

onde $\phi(r)$ é dado por

$$\phi(r) = \frac{3}{\nu^2 - 1} \left(\frac{\cos \theta \sin \nu \theta}{\nu \sin^2 \theta} - \frac{\cos \nu \theta}{\sin \theta} \right) \quad (3.124)$$

com o ângulo θ dependendo apenas da distância radial.

Procuramos sólitons na forma de campos que se anulem tanto na origem como no infinito, tendo uma região intermediária não trivial. Em todos os casos, a solução $B=1$ é identificada à configuração não possuindo nós fora da origem. Esta exigência determina

ν	2	3	4	5	6	7
N	1	2	3	4	5	6
$\theta_i^{(\sigma)}$	180	90	65.91	52.24	43.33	37.04

Tabela 3.1: As soluções θ_i .

a condição de contorno correspondendo a $B=1$ para uma representação geral do campo do pión, como a solução da equação $\phi(0) = 0$ que seja mais próxima a $\theta = 0$ e que será designada por θ_i . Na tabela 3.1 nós mostramos algumas destas soluções.

Em todos os casos a corrente bariônica conservada pode ser escrita como

$$B^\mu = \frac{K^N}{f_\pi^3} \varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} D_\alpha \pi^N \cdot D_\beta \pi^N \times D_\gamma \pi^N. \quad (3.125)$$

Esta definição é equivalente à usual, eq.(3.26), para a representação $(1/2, 1/2)$ e possui uma característica especial, que é a de produzir uma corrente B^μ que é explicitamente ímpar frente à paridade G. Usando o ouriço para o campo do pión juntamente com as equações (3.105), (3.106) e (3.120), nós obtemos, após o procedimento usual de quantização (ver eqs.(C.23)-(C.25)):

$$D_i \pi_a^N = D_{aj}(t) f_\pi \left[\frac{\sin F^N}{r} \delta_{ij} + \left(F'^N - \frac{\sin F^N}{r} \right) \hat{r}_j \hat{r}_i \right] \quad (3.126)$$

e

$$D_0 \pi_a^N = f_\pi \sin F^N (\partial_0 D_{aj}(t)) \hat{r}_j, \quad (3.127)$$

onde F^N é o ângulo quiral na representação $(N/2, N/2)$ de $SU(2) \times SU(2)$ e D_{aj} é a matriz, definida no apêndice C, contendo as coordenadas coletivas usadas para quantizar o sóliton.

Usando estes resultados na eq.(3.125) obtemos as componentes da corrente bariônica na seguinte forma:

$$B^0 = 6K^N \frac{\sin^2 F^N F'^N}{r^2}, \quad (3.128)$$

$$B^i = -6K^N \frac{\sin^2 F^N F'^N}{r} D_{ai} (\partial_0 D_{aj}) \hat{r}_j, \quad (3.129)$$

onde K^N é uma constante de normalização escolhida de modo a fazer com que o número bariônico da primeira solução solitônica da família seja 1. Deste modo temos

$$B = \int d^3r B^0 = -24\pi K^N \left[\frac{1}{2} \left(F^N(0) - \frac{\sin 2F^N(0)}{2} \right) \right], \quad (3.130)$$

que fornece

$$K^N = \frac{-1}{12\pi \left(F^N(0) - \frac{\text{sen } 2F^N(0)}{2} \right)}, \quad (3.131)$$

onde $F^N(0)$ é identificado a θ_i na tabela 3.1.

Adotaremos como termo estabilizador a função de sexta ordem $B^\mu B_\mu$, definida na seção anterior. A lagrangiana do problema tem então uma forma análoga à eq.(3.89):

$$\mathcal{L}^N = \frac{1}{2} D^\mu \pi^N \cdot D_\mu \pi^N - b B^\mu B_\mu + \mathcal{L}_{qs}^N. \quad (3.132)$$

Usando o ouriço e as eqs.(3.125)-(3.131) a massa clássica do sóliton fica dada por

$$M^N = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \left\{ \frac{f_\pi^2}{2} \left((F'^N)^2 + \frac{2\text{sen}^2 F^N}{r^2} \right) + b (6K^N)^2 \frac{s^4 (F'^N)^2}{r^4} + m_\pi^2 f_\pi^2 \frac{3}{\nu^2 - 1} \left(1 - \frac{\text{sen } \nu F^N}{\nu \text{sen } F^N} \right) \right\}. \quad (3.133)$$

cuja minimização fornece a equação diferencial de $F^N(r)$, que tem a seguinte forma

$$F''''^N \left(\frac{\hat{r}^2}{4} + \frac{\beta^N \text{sen}^4 F^N}{2 \hat{r}^2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \beta^N \frac{\text{sen}^4 F^N}{\hat{r}^4} \right) \hat{r} F'^N - \frac{\text{sen } 2F^N}{4} + \frac{\beta^N}{2\hat{r}^2} \text{sen}^2 F^N \text{sen } 2F^N F'^N - \frac{m_\pi^2 \hat{r}^2}{16f_\pi^2} \frac{3}{\nu^2 - 1} \left(\frac{\text{sen } \nu F^N \cos F^N}{\nu \text{sen}^2 F^N} - \frac{\cos \nu F^N}{\text{sen } F^N} \right) = 0 \quad (3.134)$$

onde $\hat{r} = 2f_\pi r$ e $\beta^N = 16f_\pi^2 b (6K^N)^2$.

Esta equação pode ser integrada numericamente com condições de contorno dadas pela tabela 3.1 e pela eq.(3.131) em cada caso. As soluções autoconsistentes são encontradas da mesma forma que na seção anterior, escrevendo a massa como

$$M^N = f_\pi I'_1 + \beta f_\pi I''_2 + \frac{I'_3}{f_\pi} \quad (3.135)$$

onde I'_1 e I''_2 são obtidas a partir de I_1 e I_2 fazendo-se a substituição $F \rightarrow F^N$, e I'_3 é dada por

$$I'_3 = \frac{\pi m_\pi^2}{2} \frac{3}{\nu^2 - 1} \int_0^\infty d\hat{r} \hat{r}^2 \left(1 - \frac{\text{sen } \nu F^N}{\nu \text{sen } F^N} \right). \quad (3.136)$$

Analogamente o momento de inércia é obtido na forma

$$\lambda^N = \frac{1}{f_\pi} I'_4 + \frac{\beta^N}{f_\pi} I''_5 \quad (3.137)$$

com I'_4 e I''_5 também obtidos de I_4 e I_5 por $F \rightarrow F^N$.

N	f_π (MeV)	β
1	65.1	0.019
2	77.8	0.103
3	94.65	0.628
4	113.44	3.008
5	132.85	11.474
6	152.62	36.475

Tabela 3.2: Os valores autoconsistentes de f_π e β nas representações $(N/2, N/2)$ de $SU(2) \times SU(2)$.

Ajustamos então os parâmetros f_π e β , em cada caso, de modo a reproduzir as massas empíricas do núcleon e do delta. As formas das funções $F^N(r)$ obtidas deste modo são mostradas na fig.(3.6). Os respectivos valores autoconsistentes dos parâmetros f_π e β para cada caso são dados na tabela 3.2. Um estudo dos resultados numéricos correspondentes a esses vários modelos é apresentado na próxima seção.

3.9 Resultados Numéricos I

Nesta seção comparamos os resultados numéricos decorrentes das várias versões do sóliton discutidas anteriormente. Para facilitar a leitura, rerepresentamos algumas das equações relevantes. As equações diferenciais consideradas são:

$$F'' \left(\frac{x^2}{4} + 2\sin^2 F \right) + \frac{x}{2} F' - \frac{1}{4} \sin 2F + \sin 2F F'^2 - \frac{2\sin^3 F \cos F}{x^2} - \frac{m_\pi^2 x^2}{16f_\pi^2 e^2} \sin F = 0, \quad (3.138)$$

para o modelo de Skyrme tradicional, com $x = (2ef_\pi)r$, e

$$F'' \left(\frac{u^2}{4} + \frac{1}{2} \frac{\sin^2 F}{u^2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sin^4 F}{u^2} \right) u F' - \frac{\sin 2F}{4} + \frac{1}{2u^2} \sin^2 F \sin 2F F'^2 - \frac{m_\pi^2 u^2 \sqrt{\beta}}{16f_\pi^2} \sin F = 0, \quad (3.139)$$

para os modelos com termo de sexta ordem, com² $u = (2f_\pi/\beta^{\frac{1}{4}})r$.

²O rótulo N usado anteriormente foi suprimido a bem da simplicidade.

Figura 3.6: Forma das funções de perfil $F^N(r)$. Estas soluções se referem às condições de contorno da tabela 3.1.

Esses dois modelos têm em (3.138) e (3.139) as mesmas partes de longo alcance, devidas a $\mathcal{L}_\sigma$ e $\mathcal{L}_{qs}$. Por isso, o comportamento assintótico de F é dado, em ambos os casos, pela eq.(3.38)

$$F(r) \sim \frac{A}{r^2} (1 + m_\pi r) e^{-m_\pi r}. \quad (3.140)$$

No limite da simetria quiral exata, onde $m_\pi = 0$, os parâmetros de curto alcance ϵ e β , assim como f_π , se reduzem a fatores de escala do problema, já que não aparecem explicitamente nas equações diferenciais. As soluções, em termos das variáveis adimensionais, são, portanto, independentes dos mesmos. O comportamento assintótico de F fica dado por

$$F_A)_{m_\pi=0} = \frac{A}{r^2}, \quad (3.141)$$

que pode ser escrito, dependendo do caso, como

$$F_A)_{m_\pi=0} = \frac{A(2\epsilon f_\pi)^2}{x^2} \equiv \frac{c_\epsilon}{x^2} \quad (3.142)$$

ou

$$F_A)_{m_\pi=0} = \frac{A(2f_\pi)^2}{u^2 \sqrt{\beta}} \equiv \frac{c_\beta}{u^2}. \quad (3.143)$$

As constantes c_e e c_β são adimensionais e relacionadas aos demais parâmetros por

$$A = \frac{c_e}{e^2(2f_\pi)^2} \longrightarrow e = \sqrt{\frac{c_e}{A(2f_\pi)^2}} \quad (3.144)$$

ou

$$A = \frac{c_\beta \sqrt{\beta}}{(2f_\pi)^2} \longrightarrow \beta = \left(\frac{(2f_\pi)^2 A}{c_\beta} \right)^2. \quad (3.145)$$

A massa e o momento de inércia do sólito são dados por

$$M = \frac{2\pi f_\pi}{\epsilon} \int_0^\infty dx x^2 \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(F'^2 + \frac{2s^2}{x^2} \right) \right]_\sigma + \left[\frac{2s^2}{x^2} \left(2F'^2 + \frac{s^2}{x^2} \right) \right]_{ca} + \left[\frac{m_\pi^2}{(2\epsilon f_\pi)^2} (1 - \cos F) \right]_{qs} \right\}. \quad (3.146)$$

$$\lambda = \frac{\pi}{3\epsilon^3 f_\pi} \int_0^\infty dx x^2 \left\{ [s^2]_\sigma + \left[4s^2 \left(F'^2 + \frac{s^2}{x^2} \right) \right]_{ca} \right\}. \quad (3.147)$$

no modelo de Skyrme e

$$M = 2\pi f_\pi \beta^{\frac{1}{4}} \int_0^\infty du u^2 \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(F'^2 + \frac{2s^2}{u^2} \right) \right]_\sigma + \left[\frac{s^4 F'^2}{u^4} \right]_{ca} + \left[\frac{m_\pi^2 \sqrt{\beta}}{(2f_\pi)^2} (1 - \cos F) \right]_{qs} \right\}. \quad (3.148)$$

$$\lambda = \frac{\pi}{3f_\pi} \beta^{\frac{3}{4}} \int_0^\infty du u^2 \left([s^2]_\sigma + \left[\frac{2s^4 F'^2}{u^2} \right]_{ca} \right). \quad (3.149)$$

no outro modelo. Nos dois casos, as massas e momentos de inércia dependem explicitamente dos parâmetros do termo que estabiliza o sólito. O fato de esses parâmetros ocorrerem em modelos diferentes torna difícil a interpretação dos números provenientes das eqs.(3.146)-(3.149). Por isso, neste trabalho, propomos que esses parâmetros sejam eliminados em função do coeficiente assintótico A , que, por constituir uma característica comum dos dois modelos, permite a comparação entre eles.

Os resultados numéricos para massas e momentos de inércia que obtivemos neste estudo estão apresentados nas tabelas 3.3 a 3.16. Em todos eles nós mantivemos f_π fixo em seu valor empírico 93 MeV.

Para estudar o comportamento das massas, consideramos separadamente as contribuições dos termos de segunda ordem (σ), estabilizador de curto alcance (ca) e de quebra de simetria (qs) das eqs.(3.146)-(3.149). Nas tabelas os resultados são apresentados divididos por potências apropriadas dos fatores $(2f_\pi)$ para torna-los adimensionais e do fator A , eq.(3.144) ou eq.(3.145), para eliminar as dependências explícitas dos parâmetros de curto alcance.

e	c_e	$A(2f_\pi)^2$	$\frac{M}{(2f_\pi)^2\sqrt{A}}$	$\frac{M_\sigma}{(2f_\pi)^2\sqrt{A}}$	$\frac{M_{ca}}{(2f_\pi)^2\sqrt{A}}$	$\frac{M_{qs}}{(2f_\pi)^4 A^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{M_\sigma}{M}$	$\frac{M_{ca}}{M}$	$\frac{M_{qs}}{M}$
$m_\pi = 0$	8.638	-	12.406	6.204	6.203	-	0.500	0.500	-
4.5	8.042	0.397	13.239	5.992	6.933	0.792	0.453	0.523	0.024
4.0	7.920	0.495	13.416	5.959	7.082	0.757	0.444	0.528	0.028
3.5	7.840	0.640	13.597	5.892	7.251	0.709	0.433	0.533	0.033
3.0	7.713	0.857	13.872	5.815	7.495	0.655	0.419	0.540	0.040
2.5	7.550	1.208	14.249	5.703	7.835	0.590	0.400	0.549	0.050
2.0	7.366	1.841	14.797	5.535	8.329	0.507	0.374	0.563	0.063

Tabela 3.3: As massas em função dos parâmetros no modelo de Skyrme tradicional.

β	c_β	$A(2f_\pi)^2$	$\frac{M}{(2f_\pi)^2\sqrt{A}}$	$\frac{M_\sigma}{(2f_\pi)^2\sqrt{A}}$	$\frac{M_{ca}}{(2f_\pi)^2\sqrt{A}}$	$\frac{M_{qs}}{(2f_\pi)^4 A^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{M_\sigma}{M}$	$\frac{M_{ca}}{M}$	$\frac{M_{qs}}{M}$
$m_\pi = 0$	3.136	-	9.338	7.003	2.335	-	0.750	0.250	-
0.0190	3.056	0.421	9.891	6.861	2.656	0.888	0.693	0.268	0.038
0.0360	3.045	0.577	10.047	6.818	2.749	0.831	0.678	0.273	0.048
0.0729	3.036	0.819	10.256	6.756	2.876	0.765	0.668	0.280	0.061
0.1093	3.033	1.003	10.401	6.712	2.962	0.725	0.645	0.285	0.069
0.1419	3.033	1.142	10.501	6.679	3.023	0.698	0.636	0.288	0.076

Tabela 3.4: As massas em função dos parâmetros no modelo com termo de sexta ordem $N=1$.

Nos casos onde a simetria quiral é exata, indicados nas tabelas por $m_\pi = 0$, os resultados estão de acordo com o teorema de Derrick, discutido na seção 3.5. No caso do modelo tradicional, com termo quártico, a condição de energia mínima (3.63) indica que as contribuições para a massa estática do sóliton devidas a M_σ e M_{ca} devem ser iguais, como de fato se verifica. No caso dos modelos com termo de sexta ordem, o mesmo raciocínio mostra que $M_\sigma = 3M_{ca}$, de modo que $M_\sigma/M=0.75$ e $M_{ca}/M=0.25$, em todos os casos. Os pequenos desvios mostrados nas tabelas 3.5 - 3.7 são devidos a problemas de precisão numérica.

Uma característica importante do caso simétrico é que as eqs.(3.138) e (3.139) não dependem explicitamente dos parâmetros e e β , o que também acontece com os integran-

β	c_β	$A(2f_\pi)^2$	$\frac{M}{(2f_\pi)^2\sqrt{A}}$	$\frac{M_\sigma}{(2f_\pi)^2\sqrt{A}}$	$\frac{M_{ca}}{(2f_\pi)^2\sqrt{A}}$	$\frac{M_{qs}}{(2f_\pi)^4 A^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{M_\sigma}{M}$	$\frac{M_{ca}}{M}$	$\frac{M_{qs}}{M}$
$m_\pi = 0$	1.325	-	8.091	6.041	2.050	-	0.746	0.253	-
0.0760	1.351	0.372	8.174	5.733	2.209	0.622	0.701	0.270	0.028
0.1440	1.362	0.517	8.260	5.708	2.255	0.573	0.691	0.273	0.036
0.2916	1.378	0.744	8.358	5.656	2.318	0.516	0.676	0.277	0.046
0.4372	1.391	0.920	8.417	5.614	2.359	0.483	0.667	0.280	0.053
0.5676	1.401	1.055	8.457	5.582	2.388	0.461	0.660	0.282	0.057

Tabela 3.5: As massas em função dos parâmetros no modelo com termo de sexta ordem $N=2$.

β	c_β	$A(2f_\pi)^2$	$\frac{M}{(2f_\pi)^2\sqrt{A}}$	$\frac{M_\sigma}{(2f_\pi)^2\sqrt{A}}$	$\frac{M_{ca}}{(2f_\pi)^2\sqrt{A}}$	$\frac{M_{qs}}{(2f_\pi)^4 A^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{M_\sigma}{M}$	$\frac{M_{ca}}{M}$	$\frac{M_{qs}}{M}$
$m_\pi = 0$	0.612	-	6.230	4.639	1.592	-	0.744	0.255	-
0.3080	0.636	0.353	6.268	4.396	1.698	0.494	0.701	0.271	0.028
1.1815	0.658	0.715	6.365	4.313	1.766	0.400	0.677	0.277	0.045
2.2300	0.675	1.007	6.407	2.244	1.807	0.354	0.662	0.282	0.056

Tabela 3.6: As massas em função dos parâmetros no modelo com termo de sexta ordem $N=3$.

dos (3.146) e (3.148). Isso significa que $M/\sqrt{A}$ é independente dos parâmetros, o mesmo acontecendo com as contribuições isoladas M_σ e M_{ca} .

A comparação dos resultados das várias tabelas para o caso $m_\pi = 0$ indica que eles dependem significativamente tanto da forma da lagrangiana empregada para estabilizar o sóliton (tabelas 3.3 e 3.4, por exemplo) como da representação segundo a qual o campo do pión se transforma (tabelas 3.4 e 3.6, por exemplo). Em particular, isso vale para o coeficiente assintótico adimensional c . Por isso, antes de avançar conclusões a respeito das massas, é útil reformular o problema em termos de uma nova variável t , definida por

$$t \equiv \frac{x}{\sqrt{c_s}} \quad (3.150)$$

ou

$$t \equiv \frac{u}{\sqrt{c_s}} \quad (3.151)$$

β	c_β	$A(2f_\pi)^2$	$\frac{M}{(2f_\pi)^2\sqrt{A}}$	$\frac{M_\sigma}{(2f_\pi)^2\sqrt{A}}$	$\frac{M_{ca}}{(2f_\pi)^2\sqrt{A}}$	$\frac{M_{qs}}{(2f_\pi)^4 A^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{M_\sigma}{M}$	$\frac{M_{ca}}{M}$	$\frac{M_{qs}}{M}$
$m_\pi = 0$	0.323	-	4.804	3.568	1.236	-	0.743	0.257	-
1.0466	0.342	0.349	4.836	3.394	1.316	0.412	0.698	0.272	0.029
4.0156	0.357	0.716	4.897	3.299	1.365	0.326	0.673	0.278	0.047
7.8163	0.369	1.033	4.918	3.231	1.395	0.283	0.657	0.283	0.059

Tabela 3.7: As massas em função dos parâmetros no modelo com termo de sexta ordem $N=4$.

β	c_β	$A(2f_\pi)^2$	$\frac{M}{(2f_\pi)^2\sqrt{A}}$	$\frac{M_\sigma}{(2f_\pi)^2\sqrt{A}}$	$\frac{M_{ca}}{(2f_\pi)^2\sqrt{A}}$	$\frac{M_{qs}}{(2f_\pi)^4 A^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{M_\sigma}{M}$	$\frac{M_{ca}}{M}$	$\frac{M_{qs}}{M}$
$m_\pi = 0$	0.190	-	3.794	2.812	0.982	-	0.741	0.258	-
2.8369	0.204	0.343	3.846	2.675	1.048	0.356	0.695	0.272	0.032
10.8848	0.215	0.710	3.876	2.595	1.085	0.276	0.669	0.280	0.051
21.1873	0.224	1.030	3.886	2.533	1.108	0.237	0.652	0.285	0.063

Tabela 3.8: As massas em função dos parâmetros no modelo com termo de sexta ordem $N=5$.

Em termos dessa nova variável, as massas passam a ser escritas como

$$\frac{M}{(2f_\pi)^2\sqrt{A}} = \pi \int_0^\infty dt t^2 \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(F'^2 + \frac{2s^2}{t^2} \right) \right]_\sigma + \frac{1}{c} \left[\frac{2s^2}{t^2} \left(2F'^2 + \frac{s^2}{t^2} \right) \right]_{ca} \right\} \quad (3.152)$$

ou

$$\frac{M}{(2f_\pi)^2\sqrt{A}} = \pi \int_0^\infty dt t^2 \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(F'^2 + \frac{2s^2}{t^2} \right) \right]_\sigma + \frac{1}{c^2} \left[\frac{s^4}{t^4} F'^2 \right]_{ca} \right\} \quad (3.153)$$

O uso da variável t é interessante por que ela tem, para todos os modelos, o mesmo valor na origem e o mesmo comportamento assintótico. Por isso, as expressões são as mais apropriadas para o estudo dos efeitos das diferenças dinâmicas entre os vários modelos.

A inspeção dos valores de $M_\sigma/(2f_\pi)^2\sqrt{A}$ para $m_\pi = 0$ nas várias tabelas indica uma clara influência da dinâmica de curto alcance. Esse tipo de dependência não é estranho, já que massa é uma forma de energia e a energia de um sistema é uma propriedade volumétrica, que costuma depender da forma da interação como um todo.

Os resultados mostram que as razões $M_\sigma/\sqrt{A}$ e $M_{ca}/\sqrt{A}$ variam bastante de modelo para modelo. O objeto descrito pelo modelo tradicional é mais massivo que os demais e,

β	c_β	$A(2f_\pi)^2$	$\frac{M}{(2f_\pi)^2\sqrt{A}}$	$\frac{M_\sigma}{(2f_\pi)^2\sqrt{A}}$	$\frac{M_{ca}}{(2f_\pi)^2\sqrt{A}}$	$\frac{M_{qs}}{(2f_\pi)^4 A^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{M_\sigma}{M}$	$\frac{M_{ca}}{M}$	$\frac{M_{qs}}{M}$
$m_\pi = 0$	0.121	-	3.074	2.273	0.802	-	0.739	0.261	-
6.8341	0.131	0.344	3.132	2.168	0.856	0.313	0.692	0.273	0.034
26.2216	0.140	0.716	3.149	2.092	0.886	0.239	0.664	0.281	0.054
51.0404	0.146	1.044	3.152	2.036	0.905	0.203	0.646	0.287	0.067

Tabela 3.9: As massas em função dos parâmetros no modelo com termo de sexta ordem $N=6$.

entre as versões com termos de sexta ordem, a massa do skyrmion torna-se menor com o aumento de N . Essa diminuição gradual da massa é equitativa entre as partes: ambas diminuem a uma mesma proporção.

As tabelas das massas permitem também estudar os efeitos da quebra de simetria quiral devidos à massa do pión. Ao “ligarmos” a massa do pión verificamos uma transferência na contribuição de M_σ para M_{ca} e M_{qs} .

As tabelas mostram que, em acordo com as eqs.(3.146) e (3.148), a contribuição do termo de quebra de simetria é inversamente proporcional a e ($1/e^2$) e proporcional a β ($\sqrt{\beta}$). Nos limites $e \rightarrow \infty$ e $\beta \rightarrow 0$ os casos sem massa são recobrados.

Em todos os casos nota-se que a nova escala introduzida pela massa do pión influi nos resultados. Essa influência é mais acentuada no termo de curto alcance do que no proveniente de $\mathcal{L}_\sigma$. Por exemplo, a tabela 3.3 mostra, no intervalo $2.0 \leq e \leq \infty$, uma variação de 12% para $M_\sigma/(2f_\pi)^2\sqrt{A}$ e de 34% para $M_{ca}/(2f_\pi)^2\sqrt{A}$. Este padrão repete-se também para os demais modelos. Esse comportamento é explicado pelo fato de que o efeito líquido de diminuirmos e ou aumentarmos β é o de aumentar a massa efetiva do pión, e que isto tende a tornar mais importante a física de curto alcance do skyrmion, já que “encurta” a função $F(r)$, isto é, faz com que a região assintótica seja atingida antes.

Um aspecto interessante da quebra de simetria é que ela produz efeitos visíveis, mas relativamente pouco importantes, indicando que, de fato, m_π é um parâmetro pequeno na escala de energias consideradas.

A inspeção das tabelas mostra algumas estruturas quantitativas. Uma delas é a validade, com grande aproximação, das relações

$$\frac{M_\sigma}{M} = 0.5 - 2\frac{M_{qs}}{M} \quad (3.154)$$

e

$$\frac{M_{ca}}{M} = 0.5 + \frac{M_{qs}}{M} \quad (3.155)$$

Uma outra regularidade dos resultados é que $M_\sigma/(2f_\pi)^2\sqrt{A}$ varia linearmente com c , também com grande precisão. Assim,

$$\frac{1}{c} \frac{M_\sigma}{(2f_\pi)^2\sqrt{A}} = \text{constante} \epsilon. \quad (3.156)$$

O valor dessa constante não é universal, mas varia de tabela para tabela. Por exemplo, ela vale 0.750 e 2.66 para as tabelas 3.3 e 3.4 respectivamente.

As tabelas referentes aos momentos de inércia apresentam um padrão semelhante ao das massas. No caso $m_\pi = 0$, novamente, observamos que os resultados são sensíveis à forma da estrutura de curto alcance. Entretanto, para o fator $\lambda_\sigma/A^{\frac{3}{2}}$, os modelos de Skyrme e de sexta ordem com $N=1$ e $N=2$ produzem resultados bastante próximos. Já para as contribuições de curto alcance, os vários resultados divergem significativamente.

Um outro aspecto interessante dessas tabelas é que elas mostram que, nos modelos massivos, $\lambda_\sigma/A^{\frac{3}{2}}$ é bastante sensível aos parâmetros adotados, já que o momento de inércia, devido ao fator x^2 no integrando, é mais sensível à parte externa da função de perfil do que a massa.

ϵ	c_ϵ	$A(2f_\pi)^2$	$\frac{\lambda}{(2f_\pi)^2 A^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{\lambda_\sigma}{(2f_\pi)^2 A^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{\lambda_{ca}}{(2f_\pi)^2 A^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{\lambda_\sigma}{\lambda}$	$\frac{\lambda_{ca}}{\lambda}$
$m_\pi = 0$	8.638	-	4.159	2.415	1.744	0.581	0.419
4.5	8.042	0.397	3.262	1.433	1.829	0.439	0.561
4.0	7.920	0.495	3.207	1.359	1.848	0.421	0.576
3.5	7.840	0.640	3.110	1.259	1.850	0.405	0.595
3.0	7.713	0.857	3.012	1.150	1.861	0.382	0.618
2.5	7.550	1.208	2.889	1.023	1.869	0.354	0.648
2.0	7.364	1.841	2.728	0.862	1.866	0.316	0.684

Tabela 3.10: Os momentos de inércia em função dos parâmetros no modelo de Skyrme tradicional.

β	c_β	$A(2f_\pi)^2$	$\frac{\lambda}{(2f_\pi)^2 A^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{\lambda_\sigma}{(2f_\pi)^2 A^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{\lambda_{ca}}{(2f_\pi)^2 A^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{\lambda_\sigma}{\lambda}$	$\frac{\lambda_{ca}}{\lambda}$
$m_\pi = 0$	3.136	-	3.406	2.320	1.085	0.681	0.318
0.0190	3.056	0.421	2.668	1.464	1.203	0.549	0.451
0.0360	3.045	0.577	2.580	1.349	1.232	0.523	0.477
0.0729	3.036	0.819	2.483	1.216	1.267	0.489	0.510
0.1093	3.033	1.003	2.427	1.138	1.289	0.469	0.531
0.1419	3.033	1.144	2.391	1.088	1.303	0.455	0.545

Tabela 3.11: Os momentos de inércia em função dos parâmetros no modelo com termo de sexta ordem N=1.

β	c_β	$A(2f_\pi)^2$	$\frac{\lambda}{(2f_\pi)^2 A^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{\lambda_\sigma}{(2f_\pi)^2 A^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{\lambda_{ca}}{(2f_\pi)^2 A^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{\lambda_\sigma}{\lambda}$	$\frac{\lambda_{ca}}{\lambda}$
$m_\pi = 0$	1.325	-	3.838	2.462	1.377	0.641	0.359
0.0760	1.351	0.372	2.906	1.506	1.399	0.518	0.482
0.1440	1.362	0.517	2.793	1.388	1.405	0.497	0.503
0.2916	1.378	0.744	2.659	1.251	1.408	0.470	0.528
0.4372	1.391	0.920	2.577	1.169	1.408	0.454	0.546
0.5676	1.401	1.055	2.522	1.116	1.406	0.443	0.557

Tabela 3.12: Os momentos de inércia em função dos parâmetros no modelo com termo de sexta ordem N=2.

β	c_β	$A(2f_\pi)^2$	$\frac{\lambda}{(2f_\pi)^2 A^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{\lambda_\sigma}{(2f_\pi)^2 A^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{\lambda_{ca}}{(2f_\pi)^2 A^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{\lambda_\sigma}{\lambda}$	$\frac{\lambda_{ca}}{\lambda}$
$m_\pi = 0$	0.612	-	3.706	2.297	1.409	0.619	0.380
0.3080	0.636	0.353	2.796	1.399	1.397	0.500	0.499
1.1815	0.658	0.715	2.524	1.148	1.376	0.455	0.545
2.2300	0.675	1.007	2.377	1.022	1.355	0.429	0.570

Tabela 3.13: Os momentos de inércia em função dos parâmetros no modelo com termo de sexta ordem N=3.

β	c_β	$A(2f_\pi)^2$	$\frac{\lambda}{(2f_\pi)^2 A^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{\lambda_\sigma}{(2f_\pi)^2 A^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{\lambda_{ca}}{(2f_\pi)^2 A^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{\lambda_\sigma}{\lambda}$	$\frac{\lambda_{ca}}{\lambda}$
$m_\pi = 0$	0.323	-	3.532	2.165	1.366	0.613	0.387
1.0466	0.342	0.349	2.591	1.260	1.331	0.486	0.514
4.0156	0.357	0.716	2.307	1.017	1.290	0.441	0.559
7.8163	0.369	1.033	2.148	0.891	1.256	0.415	0.585

Tabela 3.14: Os momentos de inércia em função dos parâmetros no modelo com termo de sexta ordem $N=4$.

β	c_β	$A(2f_\pi)^2$	$\frac{\lambda}{(2f_\pi)^2 A^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{\lambda_\sigma}{(2f_\pi)^2 A^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{\lambda_{ca}}{(2f_\pi)^2 A^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{\lambda_\sigma}{\lambda}$	$\frac{\lambda_{ca}}{\lambda}$
$m_\pi = 0$	0.190	-	3.334	2.035	1.299	0.610	0.389
2.8369	0.204	0.343	2.391	1.139	1.252	0.476	0.524
10.8848	0.215	0.710	2.106	0.906	1.199	0.430	0.569
21.1873	0.224	1.030	1.947	0.787	1.160	0.404	0.596

Tabela 3.15: Os momentos de inércia em função dos parâmetros no modelo com termo de sexta ordem $N=5$.

β	c_β	$A(2f_\pi)^2$	$\frac{\lambda}{(2f_\pi)^2 A^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{\lambda_\sigma}{(2f_\pi)^2 A^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{\lambda_{ca}}{(2f_\pi)^2 A^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{\lambda_\sigma}{\lambda}$	$\frac{\lambda_{ca}}{\lambda}$
$m_\pi = 0$	0.121	-	3.155	1.920	1.235	0.609	0.391
6.8341	0.131	0.344	2.206	1.031	1.175	0.467	0.533
26.2216	0.139	0.716	1.924	0.809	1.115	0.420	0.579
51.0404	0.146	1.044	1.768	0.696	1.072	0.394	0.606

Tabela 3.16: Os momentos de inércia em função dos parâmetros no modelo com termo de sexta ordem $N=6$.

Capítulo 4

Fatores de Forma Eletromagnéticos do Núcleon

4.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos os fatores de forma dos hádrons, que constituem uma importante fonte de informação sobre a estrutura interna dessas partículas que interagem fortemente.

Consideremos o espalhamento elétron-próton. Se o próton fosse puntiforme, ou seja, apenas um “pósitron pesado”, este processo poderia ser representado, na aproximação de troca de um fóton, pelo diagrama de Feynman da fig.(4.1).

Figura 4.1: *Espalhamento elétron-próton com ambas as partículas sendo consideradas pontuais.*

Este processo envolve a interação das correntes eletromagnéticas do elétron e do próton por meio de um fóton e, por isso, a amplitude é dada por:

$$T = \langle e^{\sigma'}(k') | J^\mu(0) | e^\sigma(k) \rangle \left(\frac{-g_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \right) \langle N^{s'}(p') | J^\mu(0) | N^s(p) \rangle . \quad (4.1)$$

O fator entre parênteses representa o propagador do fóton e J^μ é o operador corrente eletromagnética. No caso do elétron, o elemento de matriz de J^μ é dado por

$$\langle e^{\sigma'}(k') | J^\mu(0) | e^\sigma(k) \rangle = -e \left[\bar{u}^{\sigma'}(k') \gamma^\mu u^\sigma(k) \right]^{(e)} . \quad (4.2)$$

Se o próton fosse puntiforme, o elemento de matriz de J^μ seria totalmente análogo, diferindo do caso do elétron apenas no que diz respeito ao sinal da carga:

$$\langle N^{s'}(p') | J^\mu(0) | N^s(p) \rangle = +e \left[\bar{u}^{s'}(p') \gamma^\mu u^s(p) \right]^{(p)} . \quad (4.3)$$

Assim, para partículas sem estrutura, a amplitude T é dada por:

$$T = [\bar{u}(k')(-e\gamma^\mu)u(k)]^{(e)} \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} [\bar{u}(p')e\gamma^\nu u(p)]^{(p)} . \quad (4.4)$$

Quando não se observam os spins, a seção de choque para esta amplitude tem a seguinte forma no referencial de laboratório [MS 86]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}} , \quad (4.5)$$

onde E é a energia do elétron incidente, θ o ângulo de espalhamento, $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ a constante de estrutura fina e M a massa do próton. Esta expressão é denominada seção de choque de Mott e descreve o espalhamento de um elétron por um próton sem estrutura.

Entretanto, este resultado não reproduz bem medições feitas no espalhamento elétron-núcleon. De fato, as evidências experimentais são que os léptons podem ser considerados como partículas puntiformes, mas o mesmo não é válido para os hádrons. Isso significa que, formalmente, o diagrama para o espalhamento elétron-próton deve ser representado como na fig.(4.2), onde a bolha indica todas as contribuições possíveis ao vértice fóton-núcleon. Essas contribuições são devidas às interações fortes dos núcleons com outras partículas, como os mésons carregados que estão em volta dele e que também interagem eletromagneticamente. Por isso o elemento de matriz da corrente do próton é mais complicado que a expressão (4.3). As suas propriedades gerais serão discutidas na próxima seção.

Figura 4.2: *Espalhamento elétron-próton com uma bolha no vértice fóton-núcleon que leva em conta o tamanho do hádron.*

No restante deste capítulo estudaremos a estrutura eletromagnética dos núcleons. Abordaremos primeiramente os conceitos básicos das correntes e fatores de forma e de que modo eles nos fornecem informações mensuráveis experimentalmente, a seguir discutiremos um modelo clássico para tratar esses observáveis e, finalmente, estudaremos como essas questões são tratadas do ponto de vista do modelo de Skyrme.

4.2 Definições

Nesta seção discutimos alguns aspectos básicos das definições das correntes eletromagnéticas e fatores de forma dos núcleons. Para uma partícula de spin $\frac{1}{2}$, a forma mais geral do elemento de matriz do operador corrente eletromagnética é [Gas 66]:

$$\langle N_f(p') | J^\mu(0) | N_i(p) \rangle = e \bar{u}(p') \left[F_1(q^2) \gamma^\mu + \frac{i F_2(q^2)}{2M} \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right] u(p), \quad (4.6)$$

onde p e p' são os quadrimomentos inicial e final e $q = p' - p$ é o quadrimomento transferido pelo fóton virtual.

Os fatores de forma F_1 (Pauli) e F_2 (Dirac) são funções reais do invariante de Lorentz $q^2 = q_\mu q^\mu$ e carregam toda a nossa “ignorância” a respeito do “tamanho” da região de interação fóton-partícula.

O conteúdo da eq.(4.6) fica mais claro quando usamos o seguinte resultado, obtido por manipulação da equação de Dirac:

$$\bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) = \frac{1}{2M} \{ \bar{u}(p') [(p + p')^\mu + i \sigma^{\mu\nu} (p' - p)_\nu] u(p) \}.$$

Quando esta expressão é inserida na eq.(4.6) obtemos:

$$\langle N_f(p') | J^\mu(0) | N_i(p) \rangle = e \bar{u}(p') \left[F_1(q^2) \frac{(p+p')^\mu}{2M} + (F_1(q^2) + F_2(q^2)) \frac{i\sigma^{\mu\nu}}{2M} q_\nu \right] u(p) . \quad (4.7)$$

A eq. (4.7) mostra que o elemento de matriz de J^μ é composto por dois tipos de termos: o primeiro, proporcional a $e \frac{(p'+p)}{2M}$, representa a corrente elétrica associada ao movimento das partículas, enquanto que o segundo representa o efeito magnético associado ao seu spin.

A discussão das propriedades dos fatores de forma fica particularmente simples no chamado referencial de Breit, ilustrado na fig.(4.3).

Figura 4.3: Espalhamento $\gamma - N$ no referencial de Breit.

Neste referencial nenhuma energia é transferida pelo fóton, e os quadrimomentos dos núcleons são dados por:

$$p = \left(E, -\frac{\mathbf{q}}{2} \right) , \quad p' = \left(E, \frac{\mathbf{q}}{2} \right) ,$$

onde

$$E = \left(M^2 + \frac{\mathbf{q}^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Assim, no referencial de Breit temos:

$$q = (0, \mathbf{q}) ,$$

$$\frac{1}{2}(p + p') = (E, 0) ,$$

o que faz com que as partes elétrica e magnética de $J^\mu = (\rho, \mathbf{j})$ fiquem associadas respectivamente aos elementos de matriz de ρ e $\mathbf{j}$. Em termos dos spinores de Pauli χ , podemos escrever

$$\langle N_f(\frac{\mathbf{q}}{2}) | \rho(0) | N_i(-\frac{\mathbf{q}}{2}) \rangle = e G_E(\mathbf{q}^2) \chi_f^\dagger \chi_i , \quad (4.8)$$

$$\langle N_f(\frac{\mathbf{q}}{2}) | \mathbf{j}(0) | N_i(-\frac{\mathbf{q}}{2}) \rangle = e G_M(\mathbf{q}^2) \chi_f^\dagger \frac{i\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{q}}{2M} \chi_i . \quad (4.9)$$

onde os fatores de forma de carga G_E e magnético G_M , denominados fatores de forma de Sachs [Sac 62], são relacionados aos da eq.(4.7) por:

$$G_E(\mathbf{q}^2) = F_1(\mathbf{q}^2) + F_2(\mathbf{q}^2) \frac{\mathbf{q}^2}{4M^2}$$

e

$$G_M(\mathbf{q}^2) = F_1(\mathbf{q}^2) + F_2(\mathbf{q}^2) . \quad (4.10)$$

As eqs.(4.8) e (4.9) mostram que, no referencial de Breit, os fatores de forma elétrico e magnético podem ser diretamente relacionados à transformada de Fourier das densidades correspondentes [BTW 86], o que não é possível em nenhum outro referencial.

Os fatores de forma G_E e G_M são convenientes do ponto de vista fenomenológico, já que podem ser diretamente relacionados à experiência. De fato, a seção de choque diferencial para o espalhamento elástico elétron-próton obtida a partir da amplitude (4.4) com o vértice fóton-núcleon corrigido pela eq.(4.6) ou seja:

$$T = \bar{u}_e(k') (-e\gamma^\mu) u_e(k) \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \langle N(p') | J^\nu(0) | N(p) \rangle . \quad (4.11)$$

é dada pela fórmula de Rosenbluth [Ros 50], que pode ser escrita como:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} \left\{ \frac{(G_E(\mathbf{q}^2))^2 - \frac{\mathbf{q}^2}{4M^2} (G_M(\mathbf{q}^2))^2}{1 - \frac{\mathbf{q}^2}{4M^2}} - \frac{\mathbf{q}^2}{2M^2} (G_M(\mathbf{q}^2))^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \right\} . \quad (4.12)$$

Medidas de $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ em função de θ permitem, portanto, a determinação experimental bastante precisa dos fatores de forma G_E e G_M , já que cada um deles está relacionado de forma diferente ao ângulo de espalhamento.

A fórmula de Rosenbluth, baseada na troca de um fóton, funciona bastante bem tanto para o próton como para o nêutron, com os fatores de forma definidos apropriadamente

para cada caso e normalizados no ponto $q^2 = 0$, correspondente a fótons reais, às respectivas cargas e momentos magnéticos:

$$G_E^p(0) = 1 \quad , \quad G_E^n(0) = 0 \quad ,$$

$$G_M^p(0) = \mu_p = 2.79\mu_N \quad , \quad G_M^n(0) = \mu_n = -1.91\mu_N \quad , \quad (4.13)$$

onde $\mu_N = \frac{e\hbar}{2M_p}$.

Os fatores de forma do próton e do nêutron podem ser ajustados muito bem pelas formas dipolares [Gal+ 71]:

$$\begin{aligned} G_E^p(q^2) &= \left(1 + \frac{q^2}{M_D^2}\right)^{-2} , \\ G_M^p(q^2) &= \mu_p \left(1 + \frac{q^2}{M_D^2}\right)^{-2} , \\ G_M^n(q^2) &= \mu_n \left(1 + \frac{q^2}{M_D^2}\right)^{-2} , \\ G_E^n(q^2) &= \frac{0.20q^2}{M_D^2} \left(1 + \frac{1.13q^2}{M_D^2}\right)^{-1} |G_M^n(q^2)| . \end{aligned} \quad (4.14)$$

com $M_D^2 = 0.71 \text{ GeV}^2$.

Resultados experimentais para os fatores de forma são mostrados na fig.(4.4). Para comparação também estão incluídos os ajustes dipolares (4.14).

Em muitas aplicações é conveniente relacionar os elementos de matriz da corrente eletromagnética nos espaços de momento e configuração, o que pode ser feito a partir das eqs.(4.8) e (4.9).

$$\begin{aligned} \lambda_f^\dagger \rho(\mathbf{r}) \lambda_i &= \lambda_f^\dagger \left[\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} G_E(q^2) \right] \lambda_i \\ &= \lambda_f^\dagger \left[\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dq q^2 j_0(qr) G_E(q^2) \right] \lambda_i , \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \lambda_f^\dagger \mathbf{j}(\mathbf{r}) \lambda_i &= \lambda_f^\dagger \left[\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2M} \times \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{q} G_M(q^2) \right] \lambda_i \\ &= \lambda_f^\dagger \left[\frac{\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{r}}{2M} \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dq q^3 j_1(qr) G_M(q^2) \right] \lambda_i . \end{aligned} \quad (4.16)$$

As eqs.(4.15) e (4.16) podem ser invertidas usando-se a relação de ortogonalidade das funções de Bessel eq.(E.8). Multiplicando-se a eq.(4.15) por $r^2 j_0(qr)$ e integrando,

Figura 4.4: Fatores de forma eletromagnéticos dos núcleons. Os dados são das ref. [Höh+76, BZ 74]. Para comparação também estão incluídos os ajustes dipolares (4.14).

obtemos

$$\chi_f^\dagger G_E(\mathbf{q}^2) \chi_i = \chi_f^\dagger \left[4\pi \int_0^\infty dr r^2 j_0(qr) \rho(r) \right] \chi_i. \quad (4.17)$$

A eq.(4.16), por outro lado sugere que $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ pode ser escrito como

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{r}}{2M} \eta(r). \quad (4.18)$$

onde η é dado por:

$$\eta(r) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{r} \int_0^\infty dq q^3 j_1(qr) G_M(\mathbf{q}^2). \quad (4.19)$$

Multiplicando essa equação por $r^2 j_1(qr)$ e integrando sobre r temos:

$$G_M(\mathbf{q}^2) = \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty dr r^3 j_1(qr) \eta(r) . \quad (4.20)$$

O raio quadrático médio de uma distribuição pode ser calculado a partir da inclinação do seu fator de forma na origem pela seguinte expressão:

$$\langle r^2 \rangle = \frac{-6}{G(\mathbf{q}^2 = 0)} \left. \frac{\partial G(\mathbf{q}^2)}{\partial \mathbf{q}^2} \right|_{\mathbf{q}^2=0} . \quad (4.21)$$

No caso especial do raio de carga do nêutron, onde $G_E(\mathbf{q}^2 = 0) = 0$, tomamos:

$$\langle r_E^2 \rangle_n \equiv -6 \left. \frac{\partial G_E^n(\mathbf{q}^2)}{\partial \mathbf{q}^2} \right|_{\mathbf{q}^2=0} .$$

Desse modo podemos obter os raios elétricos e magnéticos a partir dos seus respectivos fatores de forma, definidos anteriormente.

Para um hádron, a corrente eletromagnética é composta por dois termos: uma parte isoescalar, proporcional à corrente bariônica B^μ , e uma parte igual à terceira componente da corrente isovetorial V^μ . Assim:

$$J^\mu = \frac{1}{2} B^\mu + V_3^\mu . \quad (4.22)$$

O operador carga elétrica pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} Q &= \int d^3r J^0 = \int_0^\infty dr r^2 d\Omega \left(\frac{1}{2} B^0 + V_3^0 \right) \\ &= \frac{1}{2} B + I_3 , \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde B é o número bariônico e $I_3 = +\frac{1}{2}$ para o próton e $I_3 = -\frac{1}{2}$ para o nêutron. Estas relações permitem a definição dos fatores de forma bariônico e isovetorial:

$$\begin{aligned} G_{E,M}^B(\mathbf{q}^2) &= \frac{1}{2} \left(G_{E,M}^p(\mathbf{q}^2) + G_{E,M}^n(\mathbf{q}^2) \right) , \\ G_{E,M}^V(\mathbf{q}^2) &= \frac{1}{2} \left(G_{E,M}^p(\mathbf{q}^2) - G_{E,M}^n(\mathbf{q}^2) \right) . \end{aligned} \quad (4.24)$$

4.3 Modelo Clássico: As Fontes

Nesta seção discutimos algumas questões relacionadas aos fatores de forma eletromagnéticos do ponto de vista de um modelo clássico simples, onde o hádron é tomado como

um corpo rígido em rotação. Supomos, assim, que uma certa distribuição de carga possa girar ao redor de um eixo fixo produzindo como resultado uma densidade de corrente, que produz efeitos magnéticos. A motivação para este estudo reside no fato de que a hamiltoniana de Skyrme quantizada representa um rotor rígido com um espectro $J(J+1)$. Algumas das inadequações do modelo de Skyrme podem ser atribuídas à aproximação do rotor rígido [NR 90, HS 86].

Nosso objetivo é verificar quais relações entre os fatores de forma, raios e momentos magnéticos podem ser atribuídas exclusivamente à aproximação do rotor rígido e quais são resultados específicos do modelo de Skyrme.

No caso de uma distribuição esférica de carga $\rho(r)$ em rotação com velocidade angular ω a corrente $\mathbf{j}$ é dada por

$$\mathbf{j} = \rho \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \frac{\rho}{\lambda} \mathbf{L} \times \mathbf{r} . \quad (4.25)$$

onde λ é o momento de inércia da distribuição e $\mathbf{L}$ o momento angular. Usando $\mathbf{L} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}$, temos:

$$\mathbf{j} = \frac{\rho}{2\lambda} \boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{r} . \quad (4.26)$$

Definindo $\eta(r) \equiv \frac{\rho M}{\lambda}$, onde M é a massa total do objeto, obtemos uma expressão análoga à eq.(4.18):

$$\mathbf{j} = \frac{\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{r}}{2M} \eta(r) . \quad (4.27)$$

Podemos, então, calcular os fatores de forma elétrico e magnético para esta distribuição como

$$G_E(q^2) = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 j_0(qr) \rho(r) , \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} G_M(q^2) &= \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty dr r^3 j_1(qr) \eta(r) \\ &= \frac{4\pi M}{\lambda q} \int_0^\infty dr r^3 j_1(qr) \rho(r) . \end{aligned} \quad (4.29)$$

Utilizando o comportamento das funções de Bessel para $q \rightarrow 0$, eqs.(A.15)-(A.17), encontramos as normalizações de G_E e G_M :

$$G_E(q^2 = 0) = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \rho(r) = Q , \quad (4.30)$$

$$G_M(q^2 = 0) = \frac{4\pi M}{3\lambda} \int_0^\infty dr r^4 \rho(r) = \mu , \quad (4.31)$$

onde Q é a carga e μ é o momento magnético desta "partícula".

Para verificar a consistência da eq.(4.31) calculamos o momento magnético da distribuição de carga em movimento, usando a definição [Jac 75]:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2} \int d^3r \, \mathbf{r} \times \mathbf{j} . \quad (4.32)$$

Com $\mathbf{j}$ dado pela eq.(4.27), obtemos

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{4\pi}{6\lambda} \int_0^\infty dr \, r^4 \, \rho(r) \, \boldsymbol{\sigma} . \quad (4.33)$$

Se a nossa “partícula” tem spin $\frac{1}{2}$ seu momento magnético é dado por

$$\mu = 2M < \frac{1}{2} |\mu_3| \frac{1}{2} > . \quad (4.34)$$

Com $< \frac{1}{2} |\sigma_3| \frac{1}{2} > = 1$ obtemos:

$$\mu = \frac{4\pi M}{3\lambda} \int_0^\infty dr \, r^4 \, \rho(r) , \quad (4.35)$$

que é idêntica à eq.(4.31).

Estudamos, agora, as relações que o modelo do rotor rígido impõe sobre os fatores de forma. Derivando a eq(4.28) em relação a $\mathbf{q}^2$ e utilizando as relações entre as derivadas das funções de Bessel obtemos¹:

$$G_M(\mathbf{q}^2) = -\frac{2M}{\lambda} \frac{\partial G_E(\mathbf{q}^2)}{\partial \mathbf{q}^2} , \quad (4.36)$$

que relaciona os fatores de forma elétrico e magnético.

Esta expressão tem especial interesse no caso $\mathbf{q}^2 = 0$. Neste ponto o fator de forma de carga pode ser escrito, usando a eq.(E.15), como :

$$\begin{aligned} G_E(\mathbf{q}^2 \approx 0) &= 4\pi \int_0^\infty dr \, r^2 \, \rho(r) - \frac{\mathbf{q}^2}{6} 4\pi \int_0^\infty dr \, r^4 \, \rho(r) + \dots \\ &= Q - \frac{\mathbf{q}^2}{6} \langle r_E^2 \rangle + \dots \end{aligned} \quad (4.37)$$

onde:

$$\langle r_E^2 \rangle = 4\pi \int_0^\infty dr \, r^4 \, \rho(r) . \quad (4.38)$$

¹Esta relação foi derivada inicialmente por Nyman & Riska [NR 87] no contexto do modelo de Skyrme. e, como vimos, é devida somente a aproximação do rotor rígido

comparando-se esse resultado com a eq.(4.31) temos:

$$G_M(\mathbf{q}^2 = 0) = \mu = \frac{M}{3\lambda} \langle r_E^2 \rangle . \quad (4.39)$$

É conveniente ressaltar que as relações (4.36) e (4.37) são baseadas exclusivamente na idéia de que o hádron constitui um rotor rígido.

Para fixar idéias, vamos levar o modelo clássico um passo adiante, supondo que as distribuições de carga dos núcleons tenham formas exponenciais. Para o próton supomos que a densidade de cargas seja dada por

$$\rho^p(r) = \frac{e\Lambda_p^3}{8\pi} e^{-\Lambda_p r} , \quad (4.40)$$

que obedece a condição de normalização

$$\int \rho^p(r) d^3r = e .$$

Para o nêutron tomamos

$$\rho^n(r) = \frac{e}{8\pi} \left[\Lambda_+^3 e^{-\Lambda_+ r} - \Lambda_-^3 e^{-\Lambda_- r} \right] . \quad (4.41)$$

que corresponde a

$$\int \rho^n(r) d^3r = 0 .$$

O fator de forma elétrico $G_E(\mathbf{q}^2)$ é obtido a partir da densidade de carga por meio da eq.(4.28). No caso do próton, temos:

$$\begin{aligned} G_E^p(\mathbf{q}^2) &= 4\pi \int_0^\infty \rho^p(r) r^2 j_0(qr) dr \\ &= e \left(\frac{\Lambda_p^2}{\Lambda_p^2 + \mathbf{q}^2} \right)^2 = e \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{\Lambda_p^2} \right)^{-2} . \end{aligned} \quad (4.42)$$

Analogamente para o nêutron obtemos:

$$\begin{aligned} G_E^n(\mathbf{q}^2) &= 4\pi \int_0^\infty \rho^n(r) r^2 j_0(qr) dr \\ &= e \left[\left(\frac{\Lambda_+^2}{\Lambda_+^2 + \mathbf{q}^2} \right)^2 - \left(\frac{\Lambda_-^2}{\Lambda_-^2 + \mathbf{q}^2} \right)^2 \right] = e \left[\left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{\Lambda_+^2} \right)^{-2} - \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{\Lambda_-^2} \right)^{-2} \right] . \end{aligned} \quad (4.43)$$

No caso clássico o fator de forma magnético está associado à distribuição de carga pela eq.(4.29), que fornece para o próton:

$$G_M^p(\mathbf{q}^2) = \frac{4\pi M}{\lambda q} \int_0^\infty dr r^3 j_1(qr) \rho^p(r) . \quad (4.44)$$

Utilizando a eq.(A.25) obtemos:

$$G_M^p(\mathbf{q}^2) = \frac{4Me}{\lambda} \frac{\Lambda_p^4}{(\Lambda_p^2 + \mathbf{q}^2)^3} = \frac{4Me}{\lambda \Lambda_p^2} \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{\Lambda_p^2}\right)^{-3}. \quad (4.45)$$

No caso do nêutron obtemos:

$$G_M^n(\mathbf{q}^2) = \frac{4Me}{\lambda} \left[\frac{\Lambda_+^4}{(\Lambda_+^2 + \mathbf{q}^2)^3} - \frac{\Lambda_-^4}{(\Lambda_-^2 + \mathbf{q}^2)^3} \right]. \quad (4.46)$$

As expressões acima nos fornecem os valores dos momentos magnéticos do próton e do nêutron neste modelo clássico :

$$G_M^p(\mathbf{q}^2 = 0) = \mu_p = \frac{4Me}{\lambda \Lambda_p^2}, \quad (4.47)$$

$$G_M^n(\mathbf{q}^2 = 0) = \mu_n = \frac{4Me}{\lambda} \left(\frac{1}{\Lambda_+^2} - \frac{1}{\Lambda_-^2} \right). \quad (4.48)$$

As eqs.(4.42)-(4.46) indicam que os fatores de forma obtidos através da aproximação do rotor rígido não estão de acordo com os resultados experimentais. Como o estabelece a eq.(4.36), G_E e G_M não podem ter formas dipolares simultaneamente, como requer a fenomenologia.

O fato de G_M ser não dipolar indica de forma clara um sério inconveniente do uso desta aproximação na descrição dos núcleons.

4.4 Modelo Clássico: Os Campos

As equações de movimento para o campo eletromagnético clássico são as equações de Maxwell, que, no sistema Gaussiano de unidades, tem as seguintes formas diferenciais:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (4.49)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (4.50)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (4.51)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (4.52)$$

As equações homogêneas (4.50) e (4.51) permitem expressar os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ em termos dos potenciais escalar e vetorial, respectivamente. Assim,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (4.53)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (4.54)$$

As equações de movimento para os potenciais são obtidas substituindo-se (4.53) e (4.54) em (4.49) e (4.52), e são dadas por:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = - \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} . \quad (4.55)$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = - 4\pi \rho . \quad (4.56)$$

As eqs.(4.53) e (4.54) não determinam univocamente os potenciais ϕ e $\mathbf{A}$, uma vez que as formas alternativas ϕ' e $\mathbf{A}'$, definidas por:

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \phi' \equiv \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} , \\ \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A}' \equiv \mathbf{A} - \nabla f , \end{aligned} \quad (4.57)$$

onde $f(x,t)$ é uma função arbitrária, resultam nos mesmos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$. A transformação (4.57) é conhecida como transformação de calibre e expressa o fato de que a teoria do eletromagnetismo formulada em termos dos potenciais deve independender da forma de f .

Esta arbitrariedade na definição dos potenciais permite-nos impor uma condição suplementar sobre eles, ou seja, podemos escolher um calibre. Uma escolha normalmente utilizada é o calibre de Lorentz, onde os potenciais se relacionam por:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 . \quad (4.58)$$

Neste caso, as equações de movimento para os potenciais podem ser escritas como:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = - 4\pi \rho , \quad (4.59)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = - \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} . \quad (4.60)$$

No presente trabalho estamos interessados principalmente nas propriedades estáticas dos bárions e, por isso, é interessante considerar as propriedades de campos independentes do tempo. Neste caso, as eqs.(4.59) e (4.60) tornam-se:

$$\nabla^2 \phi = - 4\pi \rho . \quad (4.61)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = - \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} . \quad (4.62)$$

As soluções formais destas equações são dadas por:

$$\phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}') d^3r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} . \quad (4.63)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} . \quad (4.64)$$

Os potenciais ϕ e $\mathbf{A}$ podem ser diretamente relacionados aos fatores de forma G_E e G_M , usando-se as eqs.(4.28), (4.29), (4.61) e (4.62), que nos permitem escrever:

$$G_E(\mathbf{q}^2) = - \int_0^\infty \nabla^2 \phi r^2 j_0(qr) dr , \quad (4.65)$$

$$G_M(\mathbf{q}^2) = - \frac{M}{\lambda q} \int_0^\infty \nabla^2 \phi r^3 j_1(qr) dr . \quad (4.66)$$

Discutimos, inicialmente, o caso elétrico. Usando:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(r) &= \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \phi \right) \\ &= \phi'' + \frac{2}{r} \phi' . \end{aligned} \quad (4.67)$$

obtemos:

$$G_E(\mathbf{q}^2) = - \int_0^\infty \left(\phi'' + \frac{2}{r} \phi' \right) r^2 j_0(qr) dr . \quad (4.68)$$

Esta expressão pode ser integrada por partes, usando a eq.(E.4):

$$\int_0^\infty \phi'' r^2 j_0(qr) dr = \phi' r^2 j_0(qr) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{2}{r} \phi' r^2 j_0(qr) dr + q \int_0^\infty \phi' r^2 j_1(qr) dr . \quad (4.69)$$

Substituindo este resultado na expressão (4.68) obtemos:

$$G_E(\mathbf{q}^2) = - \phi' r^2 j_0(qr) \Big|_0^\infty - q \int_0^\infty \phi' r^2 j_1(qr) dr . \quad (4.70)$$

A integração por partes do segundo termo do membro direito produz, usando a eq.(E.3):

$$\int_0^\infty \phi' r^2 j_1(qr) dr = \phi r^2 j_1(qr) \Big|_0^\infty - q \int_0^\infty \phi r^2 j_0(qr) dr . \quad (4.71)$$

Assim a expressão genérica para o fator de forma em função do potencial escalar é dada por:

$$G_E(\mathbf{q}^2) = - \left\{ r^2 (\phi' j_0(qr) + q \phi j_1(qr)) \right\} \Big|_0^\infty + q^2 \int_0^\infty \phi r^2 j_0(qr) dr . \quad (4.72)$$

onde notamos a presença de um termo de superfície que depende da forma explícita do potencial.

Para o fator de forma magnético temos:

$$G_M(\mathbf{q}^2) = -\frac{M}{\lambda q} \int_0^\infty \left(\phi'' + \frac{2}{r} \phi' \right) r^3 j_1(qr) dr. \quad (4.73)$$

Integrando por partes como anteriormente obtemos:

$$\begin{aligned} G_M(\mathbf{q}^2) = & -\frac{M}{\lambda} \left\{ r^2 \left(\phi' r \frac{j_1(qr)}{q} - \phi r j_0(qr) + \phi \frac{j_1(qr)}{q} \right) \right\}_0^\infty \\ & + 2 \int_0^\infty \phi r^2 j_0(qr) dr - q \int_0^\infty \phi r^3 j_1(qr) dr \}. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Para completar a discussão desta seção vamos aplicar as expressões obtidas anteriormente ao caso do próton, cuja distribuição de carga é dada pela eq.(4.40). Para se obter o potencial $\phi(r)$ associado a essa distribuição, é conveniente calcular inicialmente o campo elétrico $\mathbf{E}$ por meio da lei de Gauss.

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi \int \rho dV. \quad (4.75)$$

Usando a expressão de $\rho(r)$ do próton, obtemos:

$$\mathbf{E} = \frac{e}{r^2} \left[1 - \left(1 + \Lambda_p r + \frac{\Lambda_p^2 r^2}{2} \right) e^{-\Lambda_p r} \right] \hat{\mathbf{r}}. \quad (4.76)$$

É interessante notar que, no limite $r \rightarrow \infty$, recuperamos o campo coulombiano:

$$\mathbf{E} = \frac{e}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

O potencial é dado por:

$$\phi(r) = - \int_\infty^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}.$$

Usando-se a eq.(4.76), obtemos:

$$\phi(r) = \frac{e}{r} \left[1 - \left(1 + \frac{\Lambda_p r}{2} \right) e^{-\Lambda_p r} \right]. \quad (4.77)$$

Neste caso particular o termo de superfície, entre chaves, na eq.(4.72) é dado por:

$$\begin{aligned} r^2 \left\{ \phi' j_0(qr) + q \phi j_0(qr) \right\} \Big|_0^\infty &= e r^2 \left\{ -\frac{1}{r^2} \left[1 - \left(1 + \Lambda_p r + \frac{\Lambda_p^2 r^2}{2} \right) e^{-\Lambda_p r} \right] \frac{\sin qr}{qr} \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{r} \left[1 - \left(1 + \frac{\Lambda_p r}{2} \right) e^{-\Lambda_p r} \right] \left[\frac{\sin qr}{(qr)^2} - \frac{\cos qr}{qr} \right] \right\} \Big|_0^\infty \\ &= -e \cos qr \Big|_{r=\infty} = -e \lim_{R \rightarrow \infty} \cos qR. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Logo, a eq.(4.72) pode ser escrita como:

$$G_E(\mathbf{q}^2) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[e \cos qR + q^2 \int_0^R \phi r^2 j_0(qr) dr \right]. \quad (4.79)$$

Esta equação mostra que o fator de forma envolve um termo de superfície. Como veremos em seguida, este termo cancela uma divergência presente no integrando da eq.(4.79), associada ao termo $\frac{1}{r}$ no potencial.

Para calcular explicitamente a expressão (4.79) notamos que o termo de superfície pode ser escrito na forma de uma integral:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \cos qR = 1 - q \int_0^\infty \sin qr dr = 1 - q^2 \int_0^\infty \left(\frac{1}{r} \right) r^2 j_0(qr) dr.$$

Assim, o fator de forma é dado por:

$$\begin{aligned} G_E(\mathbf{q}^2) &= e \left\{ 1 - q^2 \int_0^\infty \left(\frac{1}{r} \right) r^2 j_0(qr) dr + q^2 \int_0^\infty \left(\frac{1}{r} - \frac{\Lambda_p}{2} e^{-\Lambda_p r} - \frac{1}{r} e^{-\Lambda_p r} \right) r^2 j_0(qr) dr \right\} \\ &= e \left\{ 1 - q^2 \int_0^\infty \left(\frac{\Lambda_p}{2} + \frac{1}{r} \right) e^{-\Lambda_p r} r^2 j_0(qr) dr \right\}. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Usando os resultados (E.22) e (E.23), obtemos:

$$G_E(\mathbf{q}^2) = e \left(\frac{\Lambda_p^2}{\Lambda_p^2 + \mathbf{q}^2} \right)^2 = e \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{\Lambda_p^2} \right)^{-2}. \quad (4.81)$$

No caso do fator de forma magnético, o termo de superfície na eq.(4.74) pode ser escrito como:

$$r^2 \{ r \phi' j_1(qr) - q \phi r j_0(qr) + \phi j_1(qr) \} \Big|_0^\infty = - \frac{er}{q} \sin qr \Big|_{r=0}^{r=\infty} = -er^2 j_0(qr) \Big|_{r=0}^{r=\infty}. \quad (4.82)$$

Logo:

$$\begin{aligned} G_M(\mathbf{q}^2) &= -\frac{Me}{\lambda q} \left\{ -r^2 j_0(qr) \Big|_{r=0}^{r=\infty} + \right. \\ &\quad 2 \int_0^\infty r j_0(qr) dr - 2 \int_0^\infty r j_0(qr) e^{-\Lambda_p r} dr - \Lambda_p \int_0^\infty r^2 j_0(qr) e^{-\Lambda_p r} dr + \\ &\quad \left. -q \int_0^\infty r^2 j_1(qr) dr + q \int_0^\infty r^2 j_1(qr) e^{-\Lambda_p r} dr + \frac{q \Lambda_p}{2} \int_0^\infty r^3 j_1(qr) e^{-\Lambda_p r} dr \right\}. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Usando a relação (E.3):

$$-q \int_0^\infty r^2 j_1(qr) dr = r^2 j_0(qr) \Big|_0^\infty - 2 \int_0^\infty r j_0(qr) dr.$$

vemos que as divergências na eq.(4.83) se cancelam. Usando os resultados (E.22) - (E.25) chegamos finalmente a:

$$G_M(q^2) = \frac{4M\epsilon}{\lambda} \frac{\Lambda_p^4}{(\Lambda_p^2 + q^2)^3} = \frac{4Me}{\lambda\Lambda_p^2} \left(1 + \frac{q^2}{\Lambda_p^2}\right)^{-3}. \quad (4.84)$$

Este procedimento mostra a importância e o cuidado com que devemos tratar os termos de superfície. O uso inadequado de propriedades das transformadas de Fourier neste caso nos leva a inconsistências, como o aparecimento de divergências não solucionáveis.

4.5 A Região Tipo-Tempo: $q^2 < 0$

Até agora consideramos apenas os fatores de forma eletromagnéticos na região onde $q^2 < 0$ denominada região tipo-espço, e que corresponde a fótons trocados no espalhamento elétron-núcleon, como nas figs. (4.1) e (4.2). Convém notar, entretanto, que outras regiões também são interessantes. O ponto $q^2 = 0$, por exemplo, corresponde a fótons reais e pode ser investigado no processo $\gamma N \rightarrow \pi N$, mostrado na fig.(4.5).

Figura 4.5: Processo $\gamma N \rightarrow \pi N$.

Por outro lado, a região $q^2 > 0$, denominada tipo-tempo, é acessível na aniquilação e^-e^+ em $\pi^+\pi^-\pi^0$, mostrada na fig.(4.6).

A região $q^2 > 0$ possui também grande interesse físico no caso de processos mediados por partículas intermediárias massivas, como o píon. Como veremos no capítulo seguinte, é nesta região que se define a constante de acoplamento πN .

Com o propósito de ilustrar os procedimentos envolvidos, apresentamos aqui os fatores de forma eletromagnéticos na região tipo-tempo.

Figura 4.6: *Processo de aniquilação elétron-pósitron. O fóton virtual tipo-tempo converte-se em um méson omega antes do acoplamento com os píons.*

Para estudarmos esta região é conveniente fazermos a substituição formal

$$q \rightarrow i\bar{q} \ , \ \bar{q} = \sqrt{\bar{q}^2} \ , \quad (4.85)$$

nas eqs.(4.28) e (4.29), de modo que os fatores de forma elétrico e magnético ficam dados por:

$$G_E(\bar{q}^2) = 4\pi \int_0^\infty dr \ r^2 \ i_0(\bar{q}r) \rho(r) \ , \quad (4.86)$$

$$G_M(\bar{q}^2) = \frac{4\pi M}{\lambda \bar{q}} \int_0^\infty dr \ r^3 \ i_1(\bar{q}r) \rho(r) \ , \quad (4.87)$$

onde usamos a eq.(E.18) que define as funções de Bessel esféricas de argumento imaginário. Tomando a densidade de carga (4.40) temos para o próton as seguintes expressões:

$$G_E^p(\bar{q}^2) = \epsilon \left(\frac{\Lambda_p^2}{\Lambda_p^2 - \bar{q}^2} \right)^2 = \epsilon \left(1 - \frac{\bar{q}^2}{\Lambda_p^2} \right)^{-2} \ . \quad (4.88)$$

$$G_M^p(\bar{q}^2) = \frac{4M\epsilon}{\lambda} \frac{\Lambda_p^4}{(\Lambda_p^2 - \bar{q}^2)^3} = \frac{4M\epsilon}{\lambda \Lambda_p^2} \left(1 - \frac{\bar{q}^2}{\Lambda_p^2} \right)^{-3} \ , \quad (4.89)$$

que se relacionam aos resultados (4.42) e (4.45) pela substituição (4.85). Resultados análogos são obtidos para o nêutron.

Continuando, adaptamos o procedimento realizado após a eq.(4.64) e obtemos os fatores de forma a partir do potencial $\phi(r)$. Neste caso as equações análogas às eqs.(4.72) e (4.74) são as seguintes:

$$G_E(\bar{q}^2) = - \left\{ r^2 (\phi' i_0(\bar{q}r) - \bar{q} \phi i_1(\bar{q}r)) \right\} \Big|_0^\infty - \bar{q}^2 \int_0^\infty \phi r^2 i_0(\bar{q}r) dr \ , \quad (4.90)$$

e

$$G_M(\bar{q}^2) = - \frac{M}{\lambda} \left\{ r^2 \left(\phi' r \frac{i_1(\bar{q}r)}{\bar{q}} - \phi r i_0(\bar{q}r) + \phi \frac{i_1(\bar{q}r)}{\bar{q}} \right) \right\} \Big|_0^\infty \\ + 2 \int_0^\infty \phi r^2 i_0(\bar{q}r) dr + \bar{q} \int_0^\infty \phi r^3 i_1(\bar{q}r) dr \Big\} , \quad (4.91)$$

cujos termos de superfície cancelam, como antes, as divergências provenientes do termo $\frac{1}{r}$ do potencial e fornecem finalmente:

$$G_E^p(\bar{q}^2) = e \left(\frac{\Lambda_p^2}{\Lambda_p^2 - \bar{q}^2} \right)^2 = e \left(1 - \frac{\bar{q}^2}{\Lambda_p^2} \right)^{-2} , \quad (4.92)$$

$$G_M^p(\bar{q}^2) = \frac{4M\epsilon}{\lambda} \frac{\Lambda_p^4}{(\Lambda_p^2 - \bar{q}^2)^3} = \frac{4M\epsilon}{\lambda \Lambda_p^2} \left(1 - \frac{\bar{q}^2}{\Lambda_p^2} \right)^{-3} . \quad (4.93)$$

idênticas às eqs.(4.88) e (4.89).

Os resultados obtidos nesta seção são simples, mas nós os incluímos aqui por serem semelhantes aos do caso πN que estudaremos no capítulo seguinte, onde aparecem algumas dificuldades adicionais que podem ser resolvidas tomando-se o caso eletromagnético como referência.

4.6 O Modelo de Skyrme

Depois de havermos estudado amplamente as definições dos fatores de forma eletromagnéticos e de formularmos o modelo clássico do núcleon para verificar os desvios desse modelo com os ajustes dipolares, utilizamos, agora, as relações já desenvolvidas para calcular esses fatores de forma no modelo de Skyrme. Um aspecto positivo desse modelo é que ele nos fornece expressões analíticas e renormalizadas para as correntes, o que não ocorre em outros modelos de núcleons.

Na eq.(4.22) escrevemos a corrente eletromagnética como:

$$J^\mu = \frac{1}{2} B^\mu + V_3^\mu . \quad (4.94)$$

Este resultado nos permite estudar separadamente as partes isoescalar e isovetorial da estrutura eletromagnética dos núcleons. No modelo de Skyrme, a corrente isoescalar tem origem topológica, já que é a própria corrente bariônica. A corrente isovetorial, por sua

vez, é uma corrente de Noether e pode ser calculada a partir da lagrangiana pela forma usual, como mostramos no apêndice D.

Os fatores de forma são dados pelas transformadas de Fourier da seção 4.2. Simbolicamente:

$$G_E(\mathbf{q}^2) = \int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}) , \quad (4.95)$$

$$G_M(\mathbf{q}^2) = M \int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} (\mathbf{r} \times \mathbf{j}) . \quad (4.96)$$

Utilizando as expressões das correntes dadas no apêndice D podemos escrever as densidades na seguinte forma:

$$\rho^B(r) \equiv \frac{B^0(r)}{2} = -\frac{1}{4\pi^2 r^2} s^2 F' , \quad (4.97)$$

$$\mathbf{j}^B(r) \equiv \frac{\mathbf{B}}{2} = \frac{1}{2\lambda} \rho^B(r) \boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{r} , \quad (4.98)$$

$$\rho^V(r) \equiv V^{0,3} = \frac{1}{3\lambda} V(r) \tau_3 . \quad (4.99)$$

$$\mathbf{j}^V(r) \equiv \mathbf{V}^3 = \frac{1}{3r^2} V(r) \boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{r} \tau_3 . \quad (4.100)$$

Onde

$$V(r) = s^2 \left(f_\pi^2 + \frac{1}{e^2} \left(F'^2 + \frac{s^2}{r^2} \right) \right) . \quad (4.101)$$

Obtemos então inserindo as expressões acima nas eqs.(4.17) e (4.20) os seguintes resultados:

$$G_E^B(\mathbf{q}^2) = 4\pi \int_0^\infty r^2 j_0(qr) \frac{B^0(r)}{2} dr , \quad (4.102)$$

$$G_E^V(\mathbf{q}^2) = \frac{4\pi}{3\lambda} \int_0^\infty r^2 j_0(qr) V(r) dr , \quad (4.103)$$

$$G_M^B(\mathbf{q}^2) = \frac{4\pi M}{\lambda q} \int_0^\infty r^3 j_1(qr) \frac{B^0(r)}{2} dr , \quad (4.104)$$

$$G_M^V(\mathbf{q}^2) = \frac{8\pi M}{3q} \int_0^\infty r j_1(qr) V(r) dr . \quad (4.105)$$

Esses fatores de forma bariônico e vetorial estão relacionados aos do próton e do nêutron pela eq.(4.24).

As normalizações desses fatores de forma são obtidas lembrando que:

$$4\pi \int_0^\infty r^2 B^0(r) dr = 1 \quad (4.106)$$

e

$$\frac{8\pi}{3} \int_0^\infty r^2 V(r) dr = \lambda . \quad (4.107)$$

Assim, para os fatores elétricos, temos

$$G_E^B(\mathbf{q}^2 = 0) = \frac{1}{2} , \quad (4.108)$$

e

$$G_E^V(\mathbf{q}^2 = 0) = \frac{1}{2} . \quad (4.109)$$

Os fatores magnéticos são obtidos usando-se a eq.(E.16)

$$G_M^B(\mathbf{q}^2 = 0) = \frac{4\pi M}{3\lambda} \int_0^\infty r^4 \frac{B^0(r)}{2} dr = \mu^B , \quad (4.110)$$

e

$$G_M^V(\mathbf{q}^2 = 0) = \frac{8\pi M}{9} \int_0^\infty r^2 V(r) dr = \mu^V . \quad (4.111)$$

onde μ^B e μ^V se relacionam aos momentos magnéticos do próton e do nêutron por:

$$\mu^B = \frac{1}{2} (\mu_p + \mu_n) , \quad (4.112)$$

e

$$\mu^V = \frac{1}{2} (\mu_p - \mu_n) . \quad (4.113)$$

Desse modo as normalizações concordam com a eq.(4.13), uma vez que

$$G_E^p(0) = G_E^B(0) + G_E^V(0) = 1 , \quad (4.114)$$

$$G_E^n(0) = G_E^B(0) - G_E^V(0) = 0 , \quad (4.115)$$

$$G_M^p(0) = \mu^B + \mu^V = \mu_p , \quad (4.116)$$

$$G_M^n(0) = \mu^B - \mu^V = \mu_n . \quad (4.117)$$

As expressões (4.102)-(4.105) implicam as seguintes relações entre os fatores de forma:

$$G_M^B(\mathbf{q}^2) = -\frac{2M}{\lambda} \frac{\partial G_E^B(\mathbf{q}^2)}{\partial \mathbf{q}^2} \quad (4.118)$$

e

$$G_E^V(\mathbf{q}^2) = \frac{1}{M\lambda} \left(\frac{3}{2} + \mathbf{q}^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}^2} \right) G_M^V(\mathbf{q}^2) . \quad (4.119)$$

A eq.(4.118) é idêntica à eq.(4.36) obtida no caso clássico. Destas equações decorrem também relações entre os raios eletromagnéticos quando estes são calculados usando-se a eq.(4.21), que pode ser escrita como

$$\langle r_a^2 \rangle_i = \frac{-6}{G_a^i(\mathbf{q}^2 = 0)} \left. \frac{\partial G_a^i(\mathbf{q}^2)}{\partial \mathbf{q}^2} \right|_{\mathbf{q}^2=0}, \quad (4.120)$$

onde a se estende para elétrico (E) e magnético (M) e i para bariônico (B) e vetorial (V). Usando-se as expressões dos fatores de forma (4.102)- (4.105), as normalizações (4.106) e (4.107) e as equações (E.15) e (E.16), temos

$$\langle r_E^2 \rangle_B = 4\pi \int_0^\infty dr r^4 B^0(r) \quad (4.121)$$

$$\langle r_E^2 \rangle_V = \frac{8\pi}{3\lambda} \int_0^\infty dr r^4 V(r) \quad (4.122)$$

$$\langle r_M^2 \rangle_B = \frac{3 \int_0^\infty dr r^6 B^0(r)}{5 \int_0^\infty dr r^4 B^0(r)} \quad (4.123)$$

$$\langle r_M^2 \rangle_V = \frac{8\pi}{5\lambda} \int_0^\infty dr r^4 V(r). \quad (4.124)$$

Estas relações diferem daquelas de Adkins, Nappi e Witten [ANW 83] que são calculadas em termos das densidades:

$$\rho_{E,I=0} = 4\pi r^2 B^0(r) \quad (4.125)$$

$$\rho_{E,I=1} = \frac{8\pi}{3\lambda} r^2 V(r) \quad (4.126)$$

$$\rho_{M,I=0} = \frac{r^2 \rho_{E,I=0}}{\int_0^\infty dr r^2 \rho_{E,I=0}} \quad (4.127)$$

$$\rho_{M,I=1} = \rho_{E,I=1} \quad (4.128)$$

de modo que

$$\langle r_E^2 \rangle_B = \langle r^2 \rangle_{E,I=0} \quad (4.129)$$

$$\langle r_E^2 \rangle_V = \langle r^2 \rangle_{E,I=1} \quad (4.130)$$

$$\langle r_M^2 \rangle_B = \frac{3}{5} \langle r^2 \rangle_{M,I=0} \quad (4.131)$$

$$\langle r_M^2 \rangle_V = \frac{3}{5} \langle r^2 \rangle_{M,I=1}. \quad (4.132)$$

As relações (4.118) e (4.119) no limite $q^2 \rightarrow 0$ juntamente com as expressões dos raios produzem as seguintes relações entre estes e os momentos magnéticos:

$$\mu_p + \mu_n = \frac{2}{9} M_N (M_\Delta - M_N) \left(\langle r_E^2 \rangle_p + \langle r_E^2 \rangle_n \right) , \quad (4.133)$$

$$\mu_p - \mu_n = \frac{M_N}{M_\Delta - M_N} , \quad (4.134)$$

$$\langle r_E^2 \rangle_p - \langle r_E^2 \rangle_n = \frac{5}{3} \frac{(M_\Delta - M_N)}{M_N} \left(\langle r_M^2 \rangle_p - \langle r_M^2 \rangle_n \right) , \quad (4.135)$$

onde usamos também as expressões para λ e M (3.52). Os raios elétricos e magnéticos do próton e do nêutron são dados por

$$\langle r_E^2 \rangle_p = \frac{1}{2} \left(\langle r_E^2 \rangle_B + \langle r_E^2 \rangle_V \right) . \quad (4.136)$$

$$\langle r_E^2 \rangle_n = \frac{1}{2} \left(\langle r_E^2 \rangle_B - \langle r_E^2 \rangle_V \right) , \quad (4.137)$$

$$\langle r_M^2 \rangle_p = \frac{\mu^B}{\mu^B + \mu^V} \langle r_M^2 \rangle_B + \frac{\mu^V}{\mu^B + \mu^V} \langle r_M^2 \rangle_V , \quad (4.138)$$

$$\langle r_M^2 \rangle_n = \frac{\mu^B}{\mu^B - \mu^V} \langle r_M^2 \rangle_B - \frac{\mu^V}{\mu^B - \mu^V} \langle r_M^2 \rangle_V . \quad (4.139)$$

Outros resultados que podem ser facilmente obtidos são os seguintes

$$\mu_{\Delta^{++}} = 2M_N \left(\frac{\langle r_E^2 \rangle_B}{4\lambda} + \frac{3\lambda}{10} \right) \quad (4.140)$$

$$\mu_{N\Delta} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mu_p - \mu_n) . \quad (4.141)$$

Os resultados fornecidos pelo modelo de Skyrme para os fatores de forma do próton e do nêutron, calculados a partir das eqs.(4.102)-(4.105), estão mostrados na fig.(4.7). Eles foram obtidos usando-se dois conjuntos de parâmetros: $f_\pi = 93.0$ MeV e $e = 4.0$; $f_\pi = 54.0$ MeV e $e = 4.84$.

As figuras mostram uma discrepância entre os resultados experimentais e aqueles previstos pelo modelo de Skyrme. Essas discrepâncias se manifestam nos valores obtidos para os raios e momentos magnéticos que ficam distantes em torno de 30% dos valores experimentais correspondentes, como podemos ver na tabela 4.1.

Figura 4.7: Fatores de Forma Eletromagnéticos no modelo de Skyrme tradicional.

4.7 O Méson ω

Consideramos, até aqui, os fatores de forma eletromagnéticos do ponto de vista do modelo de Skyrme tradicional. Discutimos, agora, a contribuição do méson ω , introduzido no capítulo 3. Para calcularmos os fatores de forma G_E e G_M é preciso obter as correntes isoescalar e isovetorial pertinentes a esse caso.

A corrente isoescalar, papel desempenhado anteriormente pela corrente bariônica, está associada à simetria isoescalar, a qual envolve o campo $\omega(x)$ como campo $U(1)_V$ de calibre. Efetuando uma transformação de calibre isoescalar $e^{-\frac{i\alpha(x)}{2}}$ obtemos a corrente dos termos proporcionais a $\partial_\mu \alpha(x)$ na lagrangiana (3.64). Por este procedimento, poderíamos esperar uma contribuição para a corrente devida ao termo $\omega_\mu B^\mu$, mas esta contribuição é

GRANDEZA	eq.	$f_\pi=54$ e=4.84	$f_\pi=93$ e=4.0	exp.
$\langle r_E^2 \rangle_{\frac{1}{2}B}^{\frac{1}{2}} \text{ (fm)}$	(4.121)	0.6833	0.5083	0.72
$\langle r_E^2 \rangle_{\frac{1}{2}V}^{\frac{1}{2}} \text{ (fm)}$	(4.122)	1.0405	0.8665	0.88
$\langle r_M^2 \rangle_{\frac{1}{2}B}^{\frac{1}{2}} \text{ (fm)}$	(4.123)	0.7402	0.5631	0.82
$\langle r_M^2 \rangle_{\frac{1}{2}V}^{\frac{1}{2}} \text{ (fm)}$	(4.124)	0.8059	0.6712	0.80
$\mu^B \text{ (magn.)}$	(4.110)	0.3655	0.1726	0.44
$\mu^V \text{ (magn.)}$	(4.111)	1.6067	1.8824	2.35
$\mu_p \text{ (magn.)}$	(4.116)	1.9722	2.0551	2.79
$\mu_n \text{ (magn.)}$	(4.117)	-1.2412	-1.7097	-1.91
$\mu_{\Delta^{++}} \text{ (magn.)}$	(4.140)	3.9885	3.9064	4.7 - 6.7
$\mu_{N\Delta} \text{ (magn.)}$	(4.141)	2.2722	2.6621	3.3
$\langle r_E^2 \rangle_p^{\frac{1}{2}} \text{ (fm)}$	(4.136)	0.8821	0.7124	0.86 ± 0.01
$\langle r_E^2 \rangle_n^{\frac{1}{2}} \text{ (fm)}$	(4.137)	-0.3079	-0.2462	-0.119 ± 0.004
$\langle r_M^2 \rangle_p^{\frac{1}{2}} \text{ (fm)}$	(4.138)	0.7942	0.6628	0.86 ± 0.06
$\langle r_M^2 \rangle_n^{\frac{1}{2}} \text{ (fm)}$	(4.139)	0.8243	0.6811	0.88 ± 0.07

Tabela 4.1: As propriedades estáticas dos bárions calculadas no modelo de Skyrme tradicional. Os parâmetros $f_\pi=54$ MeV e $e=4.84$ representam o caso autoconsistente. Também estão indicadas as equações que definem estas grandezas.

cancelada pelo termo de Wess-Zumino não calibrado, fazendo com que a corrente eletromagnética isoescalar seja inteiramente determinada pelo termo de massa de ω . Após a projeção sobre o operador de carga $Q = I_3 + \frac{B}{2}$ temos²

$$J^{\mu S}(x) = - \left(\frac{m_\omega^2}{2\gamma} \right) \omega^\mu(x) . \quad (4.142)$$

onde γ é a constante de acoplamento. Esta expressão corresponde à densidade de carga isoescalar

$$\rho_S(r) = - \frac{m_\omega^2}{2\gamma} \omega(r) , \quad (4.143)$$

²Para maiores detalhes veja, por exemplo, [MKW+ 89, MKW 87, Mei 88].

que deve ser comparada à obtida na seção anterior, eq.(4.97)

$$\rho_B(r) = \frac{B^0(r)}{2} . \quad (4.144)$$

Se a lagrangiana contiver, além do méson ω , também o méson ρ , de modo análogo podemos encontrar $J^{\mu V}$ através das transformações de isospin. No entanto, não trataremos dessa questão aqui, restringindo-nos ao méson ω , isto é, às correntes isoescalares.

Da eq.(4.142) combinada com a eq.(4.17) vemos que o fator de forma isoescalar é dado, neste caso, por

$$G_E^S(\mathbf{q}^2) = -\frac{4\pi m_\omega^2}{2\gamma} \int_0^\infty r^2 j_0(qr) \omega(r) dr , \quad (4.145)$$

enquanto que na seção anterior obtivemos (eq.(4.102))

$$G_E^B(\mathbf{q}^2) = 4\pi \int_0^\infty r^2 j_0(qr) \frac{B^0(r)}{2} dr . \quad (4.146)$$

As eqs.(4.145) e (4.146) fornecem duas expressões para o fator de forma isoescalar do núcleon, com conteúdos diferentes: enquanto G_E^B mede a distribuição do número bariônico dentro do núcleon, a eq.(4.145) mostra que G_E^S nos informa a respeito do conteúdo mesônico (isoescalar) do núcleon ou, de outro modo, indica que o vértice fóton-núcleon pode ser mediado pelo méson vetorial, como afirma a teoria da dominância do méson vetorial [Sak 60]. Entretanto, essas duas abordagens estão relacionadas entre si. Isso fica claro se partimos da equação de movimento do campo ω , eq.(3.76):

$$(-\nabla^2 + m_\omega^2) \omega(r) = -\gamma B^0(r) \quad (4.147)$$

e tomamos a transformada de Fourier em ambos os lados, tendo

$$4\pi (m_\omega^2 + \mathbf{q}^2) \int_0^\infty r^2 j_0(qr) \omega(r) dr = -4\pi\gamma \int_0^\infty r^2 j_0(qr) B^0(r) dr . \quad (4.148)$$

Usando este resultado nas eqs.(4.145) e (4.146), obtemos

$$\begin{aligned} G_E^S(\mathbf{q}^2) &= \frac{4\pi m_\omega^2}{m_\omega^2 + \mathbf{q}^2} \int_0^\infty r^2 j_0(qr) \frac{B^0(r)}{2} dr \\ &= \frac{m_\omega^2}{m_\omega^2 + \mathbf{q}^2} G_E^B(\mathbf{q}^2) . \end{aligned} \quad (4.149)$$

Este resultado deixa claro que as normalizações, definidas em $\mathbf{q}^2 = 0$, são iguais nos dois casos:

$$G_E^S(0) = G_E^B(0) = \frac{1}{2} . \quad (4.150)$$

O raio quadrático médio elétrico é dado pela eq.(4.21):

$$\langle r_E^2 \rangle_S = - \frac{6}{G_E^S(0)} \frac{\partial G_E^S(\mathbf{q}^2)}{\partial \mathbf{q}^2} \Big|_{\mathbf{q}^2=0} . \quad (4.151)$$

O uso da eq.(4.149) fornece

$$\langle r_E^2 \rangle_S = \frac{6}{m_\omega^2} + \langle r_E^2 \rangle_B , \quad (4.152)$$

o que mostra que o raio isoescalar do núcleon é maior que o respectivo raio bariônico por uma parcela $\frac{6}{m_\omega^2}$.

Fixando-se f_π em seu valor fenomenológico 93.0 MeV obtemos $\langle r_B^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = 0.49$ fm, de modo que a eq.(4.152) fornece: $\langle r_E^2 \rangle_S^{\frac{1}{2}} = 0.78$ fm que é mais próximo do resultado experimental 0.72 fm, sendo a diferença devida à propagação do méson ω . No limite de $m_\omega \rightarrow \infty$ a lagrangiana com o méson ω se reduz àquela com o termo de sexta ordem $B_\mu B^\mu$ em cujo vértice fóton-núcleon o fóton se acopla diretamente à corrente bariônica.

Este resultado é coerente com os obtidos para as densidades, eqs.(4.143) e (4.144), que são comparadas na fig.(4.8).

Figura 4.8: As densidades de carga isoescalar. Estão incluídos fatores $4\pi r^2$ como é usual.

A fig.(4.8) mostra que o raio elétrico isoescalar calculado a partir de $\rho_S(r)$ é maior que $\langle r_E^2 \rangle_B$, eq.(4.121) que mede o raio bariônico do núcleon. Essa diferença se deve ao

fato de que, no caso de $\rho_S(r)$, o fóton se acopla ao méson ω e não diretamente a $B_0(r)$, tornando a região de interação maior.

Em resumo, no caso do méson ω temos as seguintes densidades:

$$\rho^S(r) \equiv J^{0S} = -\frac{m_\omega^2}{2\gamma}\omega(r), \quad (4.153)$$

$$\rho^B(r) \equiv \frac{B^0(r)}{2} = -\frac{1}{4\pi^2 r^2} s^2 F', \quad (4.154)$$

$$\mathbf{j}^B(r) \equiv \frac{\mathbf{B}}{2} = \frac{1}{2\lambda} \rho^B(r) \boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{r}, \quad (4.155)$$

$$\rho_\omega^V(r) \equiv V_\omega^{0,3} = \frac{1}{3\lambda} V_\omega(r) \tau_3, \quad (4.156)$$

$$\mathbf{j}_\omega^V(r) \equiv \mathbf{V}_\omega^3 = \frac{1}{3r^2} V_\omega(r) \boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{r} \tau_3, \quad (4.157)$$

onde

$$V_\omega(r) = s^2 \left\{ f_\pi^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{2\pi^2} \right)^2 \frac{F'}{r^2} \int_0^\infty dr' s^2 F' A(r, r') \right\}, \quad (4.158)$$

e a função $A(r, r')$ é dada por

$$A(r, r') = \frac{1}{m_\omega r r'} \left\{ e^{-m_\omega |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left(r r' - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{m_\omega} - \frac{1}{m_\omega^2} \right) + e^{-m_\omega (r+r')} \left(r r' + \frac{(r+r')}{m_\omega} + \frac{1}{m_\omega^2} \right) \right\}. \quad (4.159)$$

Os fatores de forma elétricos e magnéticos são dados por

$$G_E^S(\mathbf{q}^2) = 4\pi \int_0^\infty r^2 j_0(qr) \rho^S(r) dr, \quad (4.160)$$

$$G_E^B(\mathbf{q}^2) = 4\pi \int_0^\infty r^2 j_0(qr) \frac{B^0(r)}{2} dr, \quad (4.161)$$

$$G_E^V(\mathbf{q}^2) = \frac{4\pi}{3\lambda} \int_0^\infty r^2 j_0(qr) V_\omega(r) dr, \quad (4.162)$$

$$G_M^B(\mathbf{q}^2) = \frac{4\pi M}{\lambda q} \int_0^\infty r^3 j_1(qr) \frac{B^0(r)}{2} dr, \quad (4.163)$$

$$G_M^V(\mathbf{q}^2) = \frac{8\pi M}{3q} \int_0^\infty r j_1(qr) V_\omega(r) dr. \quad (4.164)$$

Suas normalizações são obtidas usando

$$\frac{8\pi}{3} \int_0^\infty r^2 V_\omega(r) dr = \lambda. \quad (4.165)$$

e a eq.(4.106), e estão de acordo com (4.108)-(4.111). com os momentos magnéticos dados por

$$\mu^B = G_M^B(q^2 = 0) = \frac{4\pi M}{3\lambda} \int_0^\infty r^4 \frac{B^0(r)}{2} dr \quad (4.166)$$

e

$$\mu^V = G_M^V(q^2 = 0) = \frac{8\pi M}{9} \int_0^\infty r^2 V_\omega(r) dr. \quad (4.167)$$

Os raios podem ser calculados a partir dos fatores de forma (4.160)-(4.164), usando-se a eq.(4.120). Eles ficam dados por

$$\langle r_E^2 \rangle_S = \frac{-4\pi m_\omega^2}{\gamma} \int_0^\infty dr r^4 \omega(r) \quad (4.168)$$

$$\langle r_E^2 \rangle_B = 4\pi \int_0^\infty dr r^4 B^0(r) \quad (4.169)$$

$$\langle r_E^2 \rangle_V = \frac{8\pi}{3\lambda} \int_0^\infty dr r^4 V_\omega(r) \quad (4.170)$$

$$\langle r_M^2 \rangle_B = \frac{3 \int_0^\infty dr r^6 B^0(r)}{5 \int_0^\infty dr r^4 B^0(r)} \quad (4.171)$$

$$\langle r_M^2 \rangle_V = \frac{8\pi}{5\lambda} \int_0^\infty dr r^4 V_\omega(r). \quad (4.172)$$

Os resultados numéricos para essas grandezas são mostrados na tabela 4.2.

4.8 O Termo $B^\mu B_\mu$ e o Modelo Alternativo

O tratamento do méson ω apresentado na seção anterior pode ser facilmente adaptado ao modelo contendo o termo de sexta ordem em uma representação (N/2,N/2) de $SU(2) \times SU(2)$, descrito na seção 3.8. Naquele caso, a componente temporal da corrente bariônica é dada pela expressão (3.127)

$$B^0(r) = \frac{6K^N \text{sen}^2 F^N F'^N}{r^2} \quad (4.173)$$

com K^N dado em (3.130). O análogo da função $V(r)$ dada em (4.101) tem a seguinte forma:

$$V(r) = \text{sen}^2 F^N \left(f_\tau^2 + \frac{\beta^N \text{sen}^2 F^N (F'^N)^2}{8f_\tau^2 r^2} \right). \quad (4.174)$$

GRANDEZA	$f_\pi=62 \ \gamma=15.64$	$f_\pi=93 \ \gamma=11.2$	exp.
$\langle r_E^2 \rangle_S^{\frac{1}{2}} \text{ (fm)}$	0.9715	0.7898	0.72
$\langle r_E^2 \rangle_B^{\frac{1}{2}} \text{ (fm)}$	0.7482	0.4910	0.72
$\langle r_E^2 \rangle_V^{\frac{1}{2}} \text{ (fm)}$	1.0851	0.8710	0.88
$\langle r_M^2 \rangle_B^{\frac{1}{2}} \text{ (fm)}$	0.7371	0.5015	0.82
$\langle r_M^2 \rangle_V^{\frac{1}{2}} \text{ (fm)}$	0.8405	0.6747	0.80
$\mu^B \text{ (magn.)}$	0.4295	0.2966	0.44
$\mu^V \text{ (magn.)}$	1.6446	1.0257	2.35
$\mu_p \text{ (magn.)}$	2.0742	1.3223	2.79
$\mu_n \text{ (magn.)}$	-1.2151	-0.7291	-1.91
$\mu_{\Delta^{++}} \text{ (magn.)}$	4.2489	2.7362	4.7 - 6.7
$\mu_{N\Delta} \text{ (magn.)}$	2.3259	1.4506	3.3
$\langle r_E^2 \rangle_p^{\frac{1}{2}} \text{ (fm)}$	0.9320	0.7070	0.86 ± 0.01
$\langle r_E^2 \rangle_n \text{ (fm}^2\text{)}$	-0.3088	-0.2588	-0.119 ± 0.004
$\langle r_M^2 \rangle_p^{\frac{1}{2}} \text{ (fm)}$	0.9432	0.7969	0.86 ± 0.06
$\langle r_M^2 \rangle_n^{\frac{1}{2}} \text{ (fm)}$	0.6274	0.3590	0.88 ± 0.07

Tabela 4.2: As propriedades estáticas dos bárions calculadas com méson ω . A primeira coluna de resultados é obtida com os parâmetros autoconsistentes $f_\pi=62$ e $\gamma=15.64$.

Com estas expressões para $B^0(r)$ e $V(r)$ podemos usar as equações para os fatores de forma, raios e momentos magnéticos apresentadas na seção 4.6, a partir das quais obtemos os resultados mostrados na tabela 4.3. Estes resultados se referem ao caso autoconsistente discutido na seção 3.8.

4.9 Resultados Numéricos II

Nas seções anteriores calculamos as propriedades estáticas eletromagnéticas dos núcleons para as várias formas da lagrangiana consideradas neste trabalho. Podemos perceber que todas estas grandezas são dadas a partir de quatro integrais

$$S_1 = \int_0^\infty dr r^2 V(r) \quad (4.175)$$

GRANDEZA	N=1	N=2	N=3	N=4	N=5	N=6	exp.
f_π (MeV)	65.1	77.8	94.65	113.44	132.85	152.62	93.0
β	0.019	0.103	0.628	3.008	11.437	36.475	-
$\langle r_E^2 \rangle_{\frac{1}{2}B}^{\frac{1}{2}} (fm)$	0.7175	0.7084	0.7129	0.7141	0.7155	0.7167	0.72
$\langle r_E^2 \rangle_{\frac{1}{2}V}^{\frac{1}{2}} (fm)$	1.0396	0.9687	0.9464	0.9357	0.9303	0.9277	0.88
$\langle r_M^2 \rangle_{\frac{1}{2}B}^{\frac{1}{2}} (fm)$	0.7085	0.6895	0.6894	0.6888	0.6889	0.6895	0.82
$\langle r_M^2 \rangle_{\frac{1}{2}V}^{\frac{1}{2}} (fm)$	0.8053	0.7503	0.7331	0.7248	0.7206	0.7186	0.80
μ^B (magn.)	0.4029	0.3954	0.3954	0.3971	0.3983	0.3994	0.44
μ^V (magn.)	1.6072	1.5965	1.6167	1.6251	1.6166	1.6173	2.35
μ_p (magn.)	2.0102	1.9920	2.0122	2.0123	2.0150	2.0168	2.79
μ_n (magn.)	-1.2043	-1.2011	-1.2212	-1.2180	-1.2183	-1.2178	-1.91
$\mu_{\Delta^{++}}$ (magn.)	4.1018	4.0601	4.0965	4.0988	4.1051	4.1096	4.7 - 6.7
$\mu_{N\Delta}$ (magn.)	2.2730	2.2579	2.2863	2.2842	2.2863	2.2872	3.3
$\langle r_E^2 \rangle_{\frac{1}{2}p}^{\frac{1}{2}} (fm)$	0.8932	0.8486	0.8378	0.8323	0.8299	0.8289	0.86
$\langle r_E^2 \rangle_n (fm^2)$	-0.2830	-0.2182	-0.1937	-0.1828	-0.1767	-0.1735	-0.119
$\langle r_M^2 \rangle_{\frac{1}{2}p}^{\frac{1}{2}} (fm)$	0.7869	0.7386	0.7247	0.7179	0.7144	0.7129	0.86
$\langle r_M^2 \rangle_{\frac{1}{2}n}^{\frac{1}{2}} (fm)$	0.8352	0.7693	0.7467	0.7362	0.7307	0.7279	0.88

Tabela 4.3: As propriedades estáticas dos bárions calculadas nos modelos com termo de sexta ordem discutidos na seção 3.8.

$$S_2 = \int_0^\infty dr r^4 V(r) \quad (4.176)$$

$$S_3 = \int_0^\infty dr r^4 B^0(r) \quad (4.177)$$

$$S_4 = \int_0^\infty dr r^6 B^0(r) \quad (4.178)$$

onde

$$B^0(r) = -\frac{1}{2\pi^2 r^2} s^2 F', \quad (4.179)$$

e

$$V(r) = s^2 \left(f_\pi^2 + \frac{1}{\epsilon^2} \left(F'^2 + \frac{s^2}{r^2} \right) \right) \quad (4.180)$$

ou

$$V(r) = s^2 \left(f_\pi^2 + \frac{\beta}{8f_\pi^2} \frac{s^2 F'^2}{r^2} \right) . \quad (4.181)$$

As expressões que definem os observáveis em termos das quatro integrais são:

$$\lambda = \frac{8\pi}{3} S_1 \quad (4.182)$$

$$\mu^V = \frac{8\pi M_N}{9} S_1 \quad (4.183)$$

$$\mu^B = \frac{M_N}{4} \frac{S_3}{S_1} \quad (4.184)$$

$$\langle r_E^2 \rangle_B = 4\pi S_3 \quad (4.185)$$

$$\langle r_E^2 \rangle_V = \frac{S_2}{S_1} \quad (4.186)$$

$$\langle r_M^2 \rangle_B = \frac{3}{5} \frac{S_4}{S_3} \quad (4.187)$$

$$\langle r_M^2 \rangle_V = \frac{3}{5} \frac{S_2}{S_1} \quad (4.188)$$

$$\mu_p = \frac{M_N (9S_3 + 32\pi S_1^2)}{36S_1} \quad (4.189)$$

$$\mu_n = \frac{M_N (9S_3 - 32\pi S_1^2)}{36S_1} \quad (4.190)$$

$$\langle r_E^2 \rangle_p = \frac{4\pi S_3 S_1 + S_2}{2S_1} \quad (4.191)$$

$$\langle r_E^2 \rangle_n = \frac{4\pi S_3 S_1 - S_2}{2S_1} \quad (4.192)$$

$$\langle r_M^2 \rangle_p = \frac{27S_4 + 96\pi S_1 S_2}{45S_3 + 160\pi S_1^2} \quad (4.193)$$

$$\langle r_M^2 \rangle_n = \frac{27S_4 - 96\pi S_1 S_2}{45S_3 - 160\pi S_1^2} . \quad (4.194)$$

Estas equações implicam vínculos entre estes observáveis como as eqs.(4.133)-(4.135), apresentadas anteriormente. Algumas destas relações "estruturais" preditas pelo modelo

podem ser escritas na seguinte forma

$$\mu^V = \frac{M_N}{3} \lambda \quad (4.195)$$

$$\langle r_M^2 \rangle_V = \frac{3}{5} \langle r_E^2 \rangle_V \quad (4.196)$$

$$\mu^B = \frac{M_N}{6\lambda} \langle r_E^2 \rangle_B \quad (4.197)$$

$$= \frac{M_N^2}{18\mu^V} \langle r_E^2 \rangle_B . \quad (4.198)$$

Usando os valores experimentais para raios e momentos magnéticos e, para λ o valor obtido a partir da diferença das massas do núcleon e do delta, eq.(3.52) temos os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} 2.35(=)1.60 & \longrightarrow \text{para a eq.(4.195)} , \\ 0.5184(=)0.46464 & \longrightarrow \text{para a eq.(4.196)} , \\ 0.44(=)0.407 & \longrightarrow \text{para a eq.(4.197)} , \\ 0.44(=)0.277 & \longrightarrow \text{para a eq.(4.198)} , \end{aligned}$$

que mostram desacordos de 68%, 10.4%, 7.5% e 37% dos resultados experimentais. Estes vínculos inerentes ao modelo de Skyrme são responsáveis por alguns dos maus resultados fornecidos por ele, como enfatizado por Nyman e Riska [NR 90]. A relação (4.197), por exemplo, é uma consequência direta da aproximação do rotor rígido. Descontado o fator 2 usado na definição de $\rho^B(r)$, esta equação é a mesma que deduzimos em (4.39) no caso clássico. Além disso, as eqs.(4.118) e (4.119), que indicam relações derivativas entre os fatores de forma, a partir dos quais são calculados raios e momentos magnéticos, não são consistentes com os ajustes dipolares. Outros vínculos entre certas propriedades dos skyrmions serão discutidos mais adiante.

A inspeção das tabelas 4.4 - 4.10 mostra que, mesmo no caso $m_\pi = 0$ não existem resultados independentes da forma de $\mathcal{L}_{ca}$ ou da condição de contorno do campo do pión.

Um aspecto interessante dos resultados, entretanto, é que o valor de $\mu^B \sqrt{A}$ é extremamente estável em todas as tabelas. Isto indica, através da eq.(4.198), que $\langle r_E^2 \rangle_B / A$ e $\mu^V / A^{\frac{3}{2}}$ são numericamente correlacionados pelo modelo. Esta nova correlação é mostrada na fig.(4.9) para as várias versões consideradas.

 Figura 4.9: Correlação eletromagnética: $\langle r_E^2 \rangle_B / A \times \mu^V / A^{3/2}$.

e	c_e	$A(2f_\pi)^2$	$\mu^B(2f_\pi)^2\sqrt{A}$	$\frac{\mu^V}{(2f_\pi)^3 A^{3/2}}$	$\frac{\langle r_E^2 \rangle_B}{A}$	$\frac{\langle r_E^2 \rangle_V}{A}$	$\frac{\langle r_M^2 \rangle_V}{A}$	$\frac{\langle r_M^2 \rangle_B}{A}$
$m_\pi = 0$	8.638	-	0.1049	6.998	0.518	-	-	0.750
4.5	8.042	0.397	0.1046	5.489	0.471	1.488	0.893	0.586
4.0	7.920	0.495	0.1215	5.397	0.463	1.347	0.808	0.569
3.5	7.840	0.640	0.1218	5.233	0.450	1.196	0.718	0.544
3.0	7.713	0.857	0.1216	5.068	0.435	1.049	0.629	0.515
2.5	7.550	1.208	0.1206	4.481	0.414	0.899	0.540	0.479
2.0	7.366	1.841	0.1185	4.590	0.384	0.747	0.448	0.432

Tabela 4.4: As propriedades eletromagnéticas em função dos parâmetros no modelo de Skyrme tradicional.

β	c_β	$A(2f_\pi)^2$	$\mu^B(2f_\pi)^2\sqrt{A}$	$\frac{\mu^V}{(2f_\pi)^3 A^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{\langle r_E^2 \rangle_B}{A}$	$\frac{\langle r_E^2 \rangle_V}{A}$	$\frac{\langle r_M^2 \rangle_V}{A}$	$\frac{\langle r_M^2 \rangle_B}{A}$
$m_\pi = 0$	3.136	-	0.1569	5.731	0.619	-	-	0.725
0.0190	3.056	0.421	0.1798	4.489	0.570	1.595	0.957	0.582
0.0360	3.045	0.577	0.1815	4.342	0.557	1.364	0.818	0.557
0.0729	3.036	0.819	0.1824	4.179	0.538	1.147	0.688	0.526
0.1093	3.033	1.003	0.1823	4.084	0.526	1.039	0.623	0.507
0.1419	3.033	1.142	0.1858	4.023	0.518	0.975	0.584	0.494

Tabela 4.5: As propriedades eletromagnéticas em função dos parâmetros no modelo com termo de sexta ordem $N=1$.

β	c_β	$A(2f_\pi)^2$	$\mu^B(2f_\pi)^2\sqrt{A}$	$\frac{\mu^V}{(2f_\pi)^3 A^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{\langle r_E^2 \rangle_B}{A}$	$\frac{\langle r_E^2 \rangle_V}{A}$	$\frac{\langle r_M^2 \rangle_V}{A}$	$\frac{\langle r_M^2 \rangle_B}{A}$
$m_\pi = 0$	1.325	-	0.1801	6.459	0.828	-	-	0.923
0.0760	1.351	0.372	0.2157	4.890	0.745	1.678	1.007	0.728
0.1440	1.362	0.517	0.2182	4.700	0.724	1.447	0.868	0.694
0.2916	1.378	0.744	0.2201	4.475	0.696	1.230	0.738	0.652
0.4372	1.391	0.920	0.2209	4.336	0.677	1.121	0.673	0.626
0.5676	1.401	1.055	0.2217	4.244	0.663	1.056	0.634	0.609

Tabela 4.6: As propriedades eletromagnéticas em função dos parâmetros no modelo com termo de sexta ordem $N=2$.

β	c_β	$A(2f_\pi)^2$	$\mu^B(2f_\pi)^2\sqrt{A}$	$\frac{\mu^V}{(2f_\pi)^3 A^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{\langle r_E^2 \rangle_B}{A}$	$\frac{\langle r_E^2 \rangle_V}{A}$	$\frac{\langle r_M^2 \rangle_V}{A}$	$\frac{\langle r_M^2 \rangle_B}{A}$
$m_\pi = 0$	0.612	-	0.243	6.236	1.070	-	-	1.167
0.3080	0.636	0.353	0.285	4.705	0.947	1.862	1.117	0.903
1.1815	0.658	0.715	0.291	4.247	0.872	1.380	0.828	0.799
2.2300	0.675	1.007	0.292	4.000	0.853	1.199	0.719	0.743

Tabela 4.7: As propriedades eletromagnéticas em função dos parâmetros no modelo com termo de sexta ordem $N=3$.

β	c_β	$A(2f_\pi)^2$	$\mu^B(2f_\pi)^2\sqrt{A}$	$\frac{\mu^V}{(2f_\pi)^3 A^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{\langle r_E^2 \rangle_B}{A}$	$\frac{\langle r_E^2 \rangle_V}{A}$	$\frac{\langle r_M^2 \rangle_V}{A}$	$\frac{\langle r_M^2 \rangle_B}{A}$
$m_\pi = 0$	0.323	-	0.316	5.943	1.326	-	-	1.432
1.0466	0.342	0.349	0.378	4.355	1.148	2.054	1.233	1.075
4.0156	0.357	0.716	0.380	3.882	1.043	1.533	0.919	0.940
7.8163	0.369	1.033	0.383	3.614	0.978	1.325	0.795	0.865

Tabela 4.8: As propriedades eletromagnéticas em função dos parâmetros no modelo com termo de sexta ordem $N=4$.

β	c_β	$A(2f_\pi)^2$	$\mu^B(2f_\pi)^2\sqrt{A}$	$\frac{\mu^V}{(2f_\pi)^3 A^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{\langle r_E^2 \rangle_B}{A}$	$\frac{\langle r_E^2 \rangle_V}{A}$	$\frac{\langle r_M^2 \rangle_V}{A}$	$\frac{\langle r_M^2 \rangle_B}{A}$
$m_\pi = 0$	0.190	-	0.399	5.610	1.580	-	-	1.701
2.8369	0.204	0.343	0.473	4.023	1.344	2.262	1.357	1.245
10.8848	0.215	0.710	0.483	3.544	1.209	1.693	1.016	1.078
21.1873	0.224	1.030	0.486	3.277	1.226	1.464	0.878	0.985

Tabela 4.9: As propriedades eletromagnéticas em função dos parâmetros no modelo com termo de sexta ordem $N=5$.

β	c_β	$A(2f_\pi)^2$	$\mu^B(2f_\pi)^2\sqrt{A}$	$\frac{\mu^V}{(2f_\pi)^3 A^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{\langle r_E^2 \rangle_B}{A}$	$\frac{\langle r_E^2 \rangle_V}{A}$	$\frac{\langle r_M^2 \rangle_V}{A}$	$\frac{\langle r_M^2 \rangle_B}{A}$
$m_\pi = 0$	0.121	-	0.490	5.309	1.838	-	-	1.974
6.8341	0.131	0.344	0.585	3.711	1.533	2.480	1.473	1.407
26.2216	0.140	0.716	0.596	3.238	1.364	1.839	1.103	1.205
51.0404	0.146	1.044	0.601	2.975	1.263	1.589	0.953	1.094

Tabela 4.10: As propriedades eletromagnéticas em função dos parâmetros no modelo com termo de sexta ordem $N=6$.

Capítulo 5

As Propriedades Axiais do Núcleon

5.1 Introdução

Neste capítulo completamos o estudo das propriedades estáticas do núcleon. Tratamos, agora, dos fatores de forma axial e pión-núcleon.

Analogamente ao que foi feito no caso eletromagnético, nós estudamos os observáveis relacionados a esses fatores de forma, como raios e constantes de acoplamento. Como no capítulo 4, abordamos inicialmente os conceitos gerais e, em seguida, fazemos um tratamento especializado para o modelo de Skyrme.

O “tamanho” da região de interação pión-núcleon costuma ser parametrizado em termos de um fator de forma do tipo monopolo $(\Lambda_\pi^2 - m_\pi^2)/(\Lambda_\pi^2 - q^2)$, introduzido *ad hoc*, com o “cutoff” Λ_π sendo tratado como um parâmetro fenomenológico. A determinação do valor de Λ_π é ainda uma questão aberta. Os ajustes dos dados do espalhamento núcleon-núcleon e das propriedades do deuteron, em modelos de troca de um bóson fornecem fatores de forma “duros”, $\Lambda_\pi \sim 1.3$ GeV [MHE 87], enquanto que, as reações $np \rightarrow pn$ e $\bar{p}p \rightarrow \bar{n}n$ [DV 80, Dom 81], produzem $\Lambda_\pi \sim 890$ MeV. Outros resultados sugerem que, para o caso de um núcleon livre, ele seja ainda mais “mole”, $\Lambda_\pi = 500-800$ MeV [TH 89].

Neste contexto, nós estudamos, na parte final deste capítulo, a consistência entre as previsões do modelo de Skyrme para o potencial de troca de um pión entre dois núcleons (OPEP) e o fator de forma πN calculado considerando o skyrmion como fonte estática do campo do pión. Estas investigações estão contidas em um trabalho recente [BR 93].

5.2 O Fator de Forma Axial

Os processos de interação fraca envolvendo núcleons, contêm fatores de forma devidos às correções causadas pela interação forte. A situação é totalmente análoga aos processos envolvendo fótons considerados na seção 4.1, onde os efeitos de estrutura determinam os fatores de forma $G_{E,M}$. Num processo fraco, tal como a reação induzida por neutrinos

$$n + \nu_\mu \rightarrow p + \mu^- , \quad (5.1)$$

mostrado na fig.(5.1), a bolha representa o fator de forma do núcleon associado às correntes fracas.

Figura 5.1: *Reação fraca induzida por neutrinos com troca de um bóson W^+ . No vértice hadrônico temos um fator de forma.*

Para examinar em maior detalhe o fator de forma axial das correntes hadrônicas fracas, mostrado na fig.(5.2), tomamos o elemento de matriz da corrente axial entre estados de núcleons. Usando as propriedades de invariância das interações fortes, pode-se mostrar que a forma mais geral desse elemento de matriz é ¹ [AFF+ 73, BD 65]:

$$\langle N_f(p') | A^{\mu,a}(0) | N_i(p) \rangle = \bar{u}(p') \left[G_A(q^2) \gamma^\mu + G_P(q^2) q^\mu \right] \gamma^5 \frac{\tau^a}{2} u(p) , \quad (5.2)$$

onde $G_A(q^2)$ é o fator de forma axial. O seu valor em $q^2 = 0$ fornece a constante de acoplamento axial $g_A = 1.25 \pm 0.01$, determinada no decaimento beta [Str+ 78]. A função

¹Não incluímos o chamado fator de forma pseudotensor induzido $G_T(q^2)$, que está associado às correntes de segunda classe, isto é, com paridade G oposta àquelas definidas pelos operadores $\gamma^\mu \gamma^5$ e $q^\mu \gamma^5$. Estas correntes, como mostrado por Meissner [Mei 88], não estão presentes em modelos de sólitons quirais.

Figura 5.2: O fator de forma axial.

$G_P(q^2)$ representa fator de forma pseudoescalar induzido, que não é muito conhecido experimentalmente. Sua contribuição a processos tais como o decaimento beta pode ser ignorada, uma vez que o momento transferido q^μ envolvido é muito pequeno. Nesta discussão damos ênfase ao cálculo de G_A .

No referencial de Breit, definido na seção 4.2, o elemento de matriz (5.2) da componente espacial de $A^{\mu,a}$ fornece o fator de forma $G_A(q^2)$ em termos dos spinors de Pauli: ²

$$\langle N_f(\frac{\mathbf{q}}{2}) | A^{i,a}(0) | N_i(-\frac{\mathbf{q}}{2}) \rangle = \frac{E}{M_N} G_A(q^2) \chi_f^\dagger \sigma^i \frac{\tau^a}{2} \chi_i, \quad (5.3)$$

sendo que

$$E = \left(M_N + \frac{\mathbf{q}^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.4)$$

A eq.(5.3) mostra que o fator de forma axial está relacionado à transformada de Fourier da corrente $A^{i,a}(\mathbf{r})$.

A função $G_A(q^2)$ pode ser extraída de experimentos como a reação (5.1) ou outros, envolvendo eletroprodução de píons. Ela pode ser ajustada muito bem pela forma dipolar [Kit+ 83]

$$G_A(q^2) = g_A \left(1 + \frac{q^2}{M_A^2} \right)^{-2} \quad (5.5)$$

com $M_A = 1.05_{-0.16}^{+0.12} \text{ GeV}$. Resultados experimentais para o fator de forma normalizado $G_A(q^2)/G_A(0)$ são mostrados na fig.(5.3), juntamente com o ajuste dipolar (5.5).

²A componente temporal A^{0a} fica inteiramente dada em termos do fator de forma $G_T(q^2)$ [MKW 87].

Figura 5.3: O fator de forma axial do núcleon. Os dados são das referências [Gue+ 75, 76]. A linha continua representa o ajuste dipolar (5.5).

No modelo de Skyrme, $G_A(\mathbf{q}^2)$ é calculado a partir da eq.(D.35), que permite que a componente espacial da corrente axial seja escrita na forma

$$A^{i,a}(\mathbf{r}) = \left(A_1(r)\delta^{ib} + A_2(r)\hat{r}^i\hat{r}^b \right) D_{ab} , \quad (5.6)$$

com $A_1(r)$ e $A_2(r)$ dados por

$$A_1(r) = \frac{\sin 2F}{2r} \left[f_\pi^2 + \frac{1}{e^2} \left(F'^2 + \frac{s^2}{r^2} \right) \right] , \quad (5.7)$$

$$A_2(r) = -\frac{\sin 2F}{2r} \left[f_\pi^2 + \frac{1}{e^2} \left(F'^2 + \frac{s^2}{r^2} \right) \right] + F' \left(f_\pi^2 + \frac{2s^2}{e^2 r^2} \right) . \quad (5.8)$$

Usando (5.3), obtemos:

$$\frac{E}{M_N} G_A(\mathbf{q}^2) \chi_f^\dagger \sigma^i \frac{\tau^a}{2} \chi_i = \chi_f^\dagger \left[\int d^3r \epsilon^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} A^{i,a}(\mathbf{r}) \right] \chi_i , \quad (5.9)$$

que, usando (C.103), fornece

$$G_A(\mathbf{q}^2) = -\frac{8\pi}{3} \frac{M_N}{E} \int_0^\infty dr r^2 \left(j_0(qr) A_1(r) + \frac{1}{qr} j_1(qr) A_2(r) \right) . \quad (5.10)$$

Figura 5.4: O fator de forma axial do núcleon no modelo de Skyrme.

Na fig.(5.4) mostramos o fator de forma normalizado $G_A(\mathbf{q}^2)/G_A(0)$ obtido de (5.10) para os conjuntos de parâmetros $(f_\pi, e) = (54, 4.84)$ e $(93, 4.0)$.

O limite $\mathbf{q}^2 = 0$ da eq.(5.10) fornece g_A :

$$g_A \equiv G_A(\mathbf{q}^2 = 0) = -\frac{8\pi}{3} \int_0^\infty dr r^2 \left(A_1(r) + \frac{1}{3} A_2(r) \right), \quad (5.11)$$

onde usamos (E.15) e (E.16). Explicitamente em termos da função de perfil $F(r)$, (5.11) assume a forma

$$g_A = -\frac{8\pi}{9} \int_0^\infty dr r^2 \left\{ \frac{\sin 2F}{r} \left[f_\pi^2 + \frac{1}{e^2} \left(F'^2 + \frac{s^2}{r^2} \right) \right] + F' \left(f_\pi^2 + \frac{2s^2}{e^2 r^2} \right) \right\}. \quad (5.12)$$

Para os parâmetros considerados, esta expressão fornece os seguintes resultados

$$\begin{cases} f_\pi = 54 \\ e = 4.84 \end{cases} \longrightarrow g_A = 0.65$$

$$\begin{cases} f_\pi = 93 \\ e = 4.0 \end{cases} \longrightarrow g_A = 1.01.$$

A partir do fator de forma G_A podemos determinar o raio axial do núcleon $\langle r_A^2 \rangle$, dado por

$$\langle r_A^2 \rangle = -\frac{6}{g_A} \left. \frac{dG_A(\mathbf{q}^2)}{d\mathbf{q}^2} \right|_{\mathbf{q}^2=0}. \quad (5.13)$$

Usando (5.10), temos

$$\langle r_A^2 \rangle = \frac{3}{4M_N^2} - \frac{8\pi}{3g_A} \int_0^\infty dr r^4 \left(A_1(r) + \frac{1}{5} A_2(r) \right), \quad (5.14)$$

de onde obtemos

$$\begin{cases} f_\pi = 54 \\ e = 4.84 \end{cases} \longrightarrow \langle r_A^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = 0.33 fm$$

$$\begin{cases} f_\pi = 93 \\ e = 4.0 \end{cases} \longrightarrow \langle r_A^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = 0.31 fm.$$

Estes resultados devem ser comparados com o valor experimental $\langle r_A^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = 0.68 \pm 0.03$ fm [Gue+ 76].

Para as formas alternativas da lagrangiana, discutidas na seção 3.8, podemos calcular estas grandezas. Usando (D.46), para estes casos, obtemos

$$A'_1(r) = \frac{\text{sen } 2F^N}{2r} \left[f_\pi^2 + \frac{\beta^N \text{sen}^2 F^N F'^N}{8f_\pi^2 r^2} \right], \quad (5.15)$$

$$A'_2(r) = -\frac{\text{sen } 2F^N}{r^2} \left[f_\pi^2 + \frac{\beta^N \text{sen}^2 (F'^N)^2}{8f_\pi^2 r^2} \right] + F' \left(f_\pi^2 + \frac{\beta^N \text{sen}^4 F^N}{8f_\pi^2 r^4} \right). \quad (5.16)$$

Usando estas expressões em (5.11) e (5.14) obtemos, nos casos autoconsistentes, os seguintes resultados ³:

	N=1	N=2	N=3	N=4	N=5	N=6
g_A	0.84	0.82	0.93	1.08	1.25	1.43
$\langle r_A^2 \rangle^{\frac{1}{2}} (\text{fm})$	0.59	0.37	-	-	-	-

Tabela 5.1: Constante de acoplamento axial e raio axial calculados nas versões alternativas da seção 3.8.

5.3 O Fator de Forma πN

O fator de forma pión-núcleon, $G_{\pi NN}(q^2)$, está associado ao diagrama da fig.(5.5). O seu valor para píons reais, isto é, na camada de massa, determina a constante de acoplamento $g_{\pi NN}$.

³Os valores não incluídos na tabela 5.1 são imaginários.

Figura 5.5: O fator de forma pión-núcleon.

Para ilustrar o procedimento utilizado no cálculo de $G_{\pi NN}$ tomemos como referência o caso dos fatores de forma isoescares G_E^S e G_E^B para o méson ω na seção 4.7. A expressão de G_E^S (4.145) foi obtida como a transformada de Fourier da corrente $J^{\mu S}$, associada à transformação isoescalar na lagrangiana $\mathcal{L}_{\omega N}$, eq.(3.64). Este modo de calcular o fator de forma corresponde àquele utilizado na seção anterior para a obtenção de G_A . Por outro lado, a expressão de G_E^B (4.146) é dada em termos da transformada de Fourier da componente temporal da corrente bariônica B^0 , a fonte do campo $\omega(r)$, como mostra a eq.(3.76). No cálculo do fator de forma $G_{\pi NN}$ nos utilizamos deste segundo método, que consiste em estudar a fonte do campo do pión, definida pela sua equação de movimento. A lagrangiana de interação entre píons e núcleons puntiformes é dada por

$$\mathcal{L}_{\pi N} = \frac{1}{2} \partial_\mu \pi \cdot \partial^\mu \pi - \frac{1}{2} m_\pi^2 \pi^2 - g_{\pi NN} \bar{\psi} i \gamma^5 \tau^a \psi \pi^a + \mathcal{L}_0(\bar{\psi}, \psi) . \quad (5.17)$$

Ela corresponde à seguinte equação de movimento estática para o campo do pión

$$(\nabla^2 - m_\pi^2) \pi^a(\mathbf{r}) = J_\pi^a(\mathbf{r}) , \quad (5.18)$$

onde a fonte $J_\pi^a(r)$, tem a forma

$$J_\pi^a(\mathbf{r}) = g_{\pi NN} \bar{\psi} i \gamma^5 \tau^a \psi . \quad (5.19)$$

Isto sugere que o fator de forma πN seja definido, no referencial de Breit, como

$$\langle N_f(\frac{\mathbf{q}}{2}) | J_\pi^a(0) | N_i(-\frac{\mathbf{q}}{2}) \rangle = G_{\pi NN}(\mathbf{q}^2) \frac{i}{2M_N} \chi_f^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q} \tau^a \chi_i , \quad (5.20)$$

onde usamos

$$\bar{u}(p')\gamma^5\tau^a u(p) = \frac{i}{2M_N}\chi^\dagger\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{q}\tau^a\chi. \quad (5.21)$$

No modelo de Skyrme, entretanto, o cálculo de $G_{\pi NN}$ não é tão direto, por que na lagrangiana do modelo não temos um termo de acoplamento linear entre os píons e o skyrmion. Este problema pode ser contornado comparando-se esta formulação com aquela baseada na lagrangiana (5.17).

Utilizando a expressão para o campo do pión em termos do ouriço rodado

$$\pi^a(\mathbf{r}) = f_\pi \sin F(r) \hat{r}_j D_{aj}(t), \quad (5.22)$$

podemos escrever o seu elemento de matriz entre estados de núcleons, usando (C.103), da seguinte forma

$$\langle N' | \pi^a(\mathbf{r}) | N \rangle = -\frac{f_\pi}{3} \sin F \langle N' | \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}} \tau^a | N \rangle. \quad (5.23)$$

De (5.20) temos, então, que o fator de forma $G_{\pi NN}$ é dado pela transformada de Fourier

$$G_{\pi NN}(\mathbf{q}^2) \frac{i}{2M_N} \chi_f^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q} \tau^a \chi_i = \chi_f^\dagger \left[\int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} J_\pi^a(\mathbf{r}) \right] \chi_i \quad (5.24)$$

que fornece

$$G_{\pi NN}(\mathbf{q}^2) = \frac{8\pi M_N}{q} \int_0^\infty dr r^2 j_1(qr) J_\pi(r) \quad (5.25)$$

onde usamos a definição

$$J_\pi^a(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}} \tau^a J_\pi(r). \quad (5.26)$$

A fonte radial $J_\pi(r)$ é dada em termos do ângulo quiral por

$$J_\pi(r) = -\frac{f_\pi}{3} \left(-\frac{2}{r^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \frac{d^2}{dr^2} - m_\pi^2 \right) \sin F(r). \quad (5.27)$$

A forma da função $J_\pi(r)$, calculada para os dois conjuntos de parâmetros $(f_\pi, e) = (54, 4.84)$ e $(93, 4.0)$ é mostrada na fig.(5.6). A expressão (5.25) foi obtida primeiramente por Cohen [Coh 86] (ver também Kaiser *et al* [KMW 87]).

Para estudar a região tipo-tempo convém fazermos a substituição (4.85) $\mathbf{q} \rightarrow i\bar{\mathbf{q}}$ que, usada na eq.(5.25), juntamente com a eq.(E.18), fornece

$$G_{\pi NN}(\bar{\mathbf{q}}^2) = \frac{8\pi M_N}{\bar{q}} \int_0^\infty dr r^2 i_1(\bar{q}r) J_\pi(r). \quad (5.28)$$

Figura 5.6: A forma da fonte radial $J_\pi(r)$.

Esta equação apresenta especial interesse, pois o valor da constante de acoplamento $g_{\pi NN}$ está associado a $G_{\pi NN}(\bar{\mathbf{q}}^2 = m_\pi^2)$. Desse modo obtemos

$$\begin{cases} f_\pi = 54 \\ e = 4.84 \end{cases} \longrightarrow g_{\pi NN} = 11.91$$

$$\begin{cases} f_\pi = 93 \\ e = 4.0 \end{cases} \longrightarrow g_{\pi NN} = 10.52$$

ambos abaixo do valor empírico 13.5 [KP 80]⁴.

As expressões (5.25) e (5.28) fornecem então o fator de forma, separadas de maneira apenas didática, nas regiões tipo-espaco e tipo-tempo, respectivamente. No ponto $\mathbf{q}^2 = 0$ é fácil verificar, usando as eqs.(E.16) e (E.18), que ambas fornecem o mesmo resultado

$$G_{\pi NN}(\mathbf{q}^2 = 0) = \frac{8\pi M_N}{3} \int_0^\infty dr r^3 J_\pi(r). \quad (5.29)$$

Este resultado também é especial, uma vez que o valor de $G_{\pi NN}(0)$ é usado na relação de

⁴Mais recentemente Arndt *et al* [AZR+90] redeterminaram a constante de acoplamento pión- núcleon. Eles encontraram $g^2/4\pi = 13.31 \pm 0.27$ que fornece $g_{\pi NN} \sim 13.0$

Goldberger—Treiman, como veremos mais adiante. De (5.29) temos

$$\begin{cases} f_\pi = 54 \\ e = 4.84 \end{cases} \longrightarrow G_{\pi NN}(0) = 11.29$$

$$\begin{cases} f_\pi = 93 \\ e = 4.0 \end{cases} \longrightarrow G_{\pi NN}(0) = 10.20 .$$

Ao fator de forma $G_{\pi NN}$ podemos associar o raio “pseudoescalar” do núcleon, definido por

$$\langle r_\pi^2 \rangle = -\frac{6}{G_{\pi NN}(0)} \left. \frac{dG_{\pi NN}(q^2)}{dq^2} \right|_{q^2=0}, \quad (5.30)$$

que fornece

$$\langle r_\pi^2 \rangle = \frac{3}{5} \frac{\int_0^\infty dr r^5 J_\pi(r)}{\int_0^\infty dr r^3 J_\pi(r)}. \quad (5.31)$$

Numericamente obtemos:

$$\begin{cases} f_\pi = 54 \\ e = 4.84 \end{cases} \longrightarrow \langle r_\pi^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = 0.80 fm$$

$$\begin{cases} f_\pi = 93 \\ e = 4.0 \end{cases} \longrightarrow \langle r_\pi^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = 0.60 fm .$$

Enquanto que o valor experimental é $\langle r_\pi^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = 0.54 fm$ [DV 80].

Em relação ao modelo alternativo, um tratamento análogo fornece os resultados mostrados na tabela 5.2.

	N=1	N=2	N=3	N=4	N=5	N=6
$g_{\pi NN}$	12.64	11.12	10.62	10.34	10.20	10.12
$G(0)$	12.09	10.59	10.09	9.81	9.67	9.59
$\langle r_\pi^2 \rangle^{\frac{1}{2}} (fm)$	0.733	0.649	0.609	0.587	0.575	0.567

Tabela 5.2: A constante de acoplamento $g_{\pi NN}$, $G(0)$ e o raio $\langle r_\pi^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$ calculados nas versões alternativas da seção 3.8.

É interessante notar que a eq.(5.28) fornece valores divergentes para $G_{\pi NN}$ quando $\bar{q}^2 > 9m_\pi^2$. Para verificar matematicamente por que isso acontece, analisemos o comportamento

assintótico da fonte do pión na região $r \rightarrow \infty$. Da eq.(5.27) e da expressão assintótica de $F(r)$, eq.(3.39), temos que

$$J_\pi(r) \sim F^3 \sim e^{-3m_\pi r} . \quad (5.32)$$

Como $i_1(\bar{q}r) \sim e^{\bar{q}r}$ para grandes r , vemos que a integral em (5.28) diverge exponencialmente com r . Fisicamente este comportamento não analítico de $G_{\pi NN}$ está associado ao limiar de criação de três pions.

Adaptamos, agora, a discussão dos fatores de forma eletromagnéticos, feita nas seções 4.4 e 4.5 para o caso pión—núcleon. Deste procedimento resultam expressões modificadas para o fator de forma e a conexão com o método usado por Adkins *et al* para calcular $g_{\pi NN}$. A eq.(5.25) pode ser escrita na forma

$$G_{\pi NN}(\mathbf{q}^2) = \frac{8\pi M_N f_\pi}{3q} \int_0^\infty dr r^2 \left(\frac{2}{r^2} s - \frac{2}{r} s' - s'' + m_\pi^2 s \right) j_1(qr) . \quad (5.33)$$

Integrando por partes e usando (E.3), temos

$$\int_0^\infty dr r^2 s'' j_1(qr) = s' r^2 j_1(qr) \Big|_0^\infty - q \int_0^\infty dr s' r^2 j_0(qr) , \quad (5.34)$$

$$\int_0^\infty dr s' r^2 j_0(qr) = s r^2 j_0(qr) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty dr \frac{2}{r} r^2 j_0(qr) + q \int_0^\infty dr s r^2 j_1(qr) , \quad (5.35)$$

$$\int_0^\infty dr s' r j_1(qr) = s r j_1(qr) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty dr s j_1(qr) - q \int_0^\infty dr s r j_0(qr) . \quad (5.36)$$

Substituindo estes resultados em (5.33), obtemos

$$G_{\pi NN}(\mathbf{q}^2) = \frac{8\pi M_N f_\pi}{3} \left[\frac{1}{q} \{ -s' r^2 j_1(qr) + q s r^2 j_0(qr) - 2 s r j_0(qr) \} \Big|_0^\infty + \frac{(q^2 + m_\pi^2)}{q} \int_0^\infty dr r^2 s j_1(qr) \right] . \quad (5.37)$$

Usando as expressões assintóticas de $F(r)$, (3.39) e (3.40), e das funções de Bessel, (E.12) e (E.13), vemos que o termo de superfície se anula, de modo que o fator de forma pode ser escrito como

$$G_{\pi NN}(\mathbf{q}^2) = \frac{8\pi M_N f_\pi}{3} \frac{(q^2 + m_\pi^2)}{q} \int_0^\infty dr r^2 \text{sen } F j_1(qr) . \quad (5.38)$$

Procedendo da mesma forma em relação à eq.(5.28), válida para a região tipo-tempo, chegamos a

$$G_{\pi NN}(\bar{\mathbf{q}}^2) = \frac{8\pi M_N f_\pi}{3} \left[\frac{1}{\bar{q}} \{ -s' r^2 i_1(\bar{q}r) - \bar{q} s r^2 i_0(\bar{q}r) - 2 s r i_1(\bar{q}r) \} \Big|_0^\infty + \frac{(m_\pi^2 - \bar{q}^2)}{\bar{q}} \int_0^\infty dr s r^2 i_1(\bar{q}r) \right] . \quad (5.39)$$

O termo de superfície neste caso fica dado por

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\bar{q}} \left\{ -s' r^2 i_1(\bar{q}r) - \bar{q} s r^2 i_0(\bar{q}r) - 2 s r i_1(\bar{q}r) \right\} \Big|_0^\infty \\
 &= A \frac{e^{-m_\pi r}}{\bar{q}} \left\{ m_\pi^2 r i_1(\bar{q}r) + \bar{q} (m_\pi r + 1) i_0(\bar{q}r) \right\} \Big|_0^\infty \\
 &= A - \frac{(m_\pi^2 - \bar{q}^2)}{\bar{q}} \int_0^\infty dr r^2 F_A i_1(\bar{q}r),
 \end{aligned} \tag{5.40}$$

onde

$$F_A = \frac{A}{r^2} (1 + m_\pi r) e^{-m_\pi r}. \tag{5.41}$$

Assim, o fator de forma é dado por

$$G_{\pi NN}(\bar{q}^2) = \frac{8\pi M_N f_\pi}{3} \left[A + \frac{(m_\pi^2 - \bar{q}^2)}{\bar{q}} \int_0^\infty dr r^2 (\text{sen } F - F_A) i_1(\bar{q}r) \right] \tag{5.42}$$

que, para píons na camada de massa, resulta

$$G_{\pi NN}(\bar{q}^2 = m_\pi^2) \equiv g_{\pi NN} = \frac{8\pi M_N f_\pi}{3} A. \tag{5.43}$$

Usando a eq.(5.41) em (5.23) obtemos a expressão assintótica do campo do pión na forma

$$\langle N' | \pi^a(\mathbf{r}) | N \rangle \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -\frac{f_\pi}{3} A (1 + m_\pi r) \frac{e^{-m_\pi r}}{r^2} \langle N' | \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}} \tau^a | N \rangle. \tag{5.44}$$

Esta expressão pode ser comparada com a expressão obtida por Zahed e Brown [ZB 86]

$$\langle N' | \pi^a(\mathbf{r}) | N \rangle = -\frac{g_{\pi NN}}{8\pi M_N} (1 + m_\pi r) \frac{e^{-m_\pi r}}{r^2} \langle N' | \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}} \tau^a | N \rangle \tag{5.45}$$

que fornece

$$A = \frac{3g_{\pi NN}}{8\pi M_N f_\pi}, \tag{5.46}$$

em acordo com (5.43). A eq.(5.46) é utilizada por Adkins *et al* [AN 84] para calcular $g_{\pi NN}$ a partir da amplitude de F_A .

A eq.(5.42) mostra que o efeito do termo de superfície é semelhante ao do caso eletromagnético, onde ele cancela a parte de longo alcance do potencial. No presente caso, este termo subtrai a parte assintótica da função de perfil, fazendo com que a integral de Fourier do termo $\text{sen } F - F_A$ seja convergente.

Como já mencionamos anteriormente, o fator de forma πN costuma ser parametrizado na forma monopolar

$$G_{\pi NN}(\mathbf{q}^2) = g_{\pi NN} f_{\pi NN}(\mathbf{q}^2) \tag{5.47}$$

com

$$f_{\pi NN}(q^2) = \frac{\Lambda_\pi^2 - m_\pi^2}{\Lambda_\pi^2 + q^2}. \quad (5.48)$$

Usando $g_{\pi NN}=13.5$, os melhores ajustes para a interação NN nos potenciais modernos fornecem $\Lambda \sim 1.3$ GeV [MHE 87]. Para quantificar os seus resultados em termos de um “cutoff”, Cohen [Coh 86] definiu Λ_π através da relação (5.48) do seguinte modo ⁵:

$$\Lambda_\pi^2 = m_\pi^2 - \left[\frac{df_{\pi NN}}{dq^2} \Big|_{q^2=-m_\pi^2} \right]^{-1}. \quad (5.49)$$

A partir desta expressão, com os conjuntos de parâmetros abaixo obtém-se ⁶

$$\begin{cases} f_\pi = 54 \\ e = 4.84 \end{cases} \longrightarrow \Lambda_\pi = 615 \text{ MeV}$$

$$\begin{cases} f_\pi = 93 \\ e = 4.0 \end{cases} \longrightarrow \Lambda_\pi = 808 \text{ MeV},$$

o que indica que o modelo de Skyrme fornece fatores de forma “moles”.

Na fig.(5.7) mostramos o fator de forma obtido das eqs.(5.25) e (5.28) para os dois conjuntos de parâmetros (f_π, e) . Também incluímos os ajustes monopolares, com Λ_π dados por (5.49) em cada caso.

Recentemente, Holzwarth, Pari e Jennings [HPJ 90] estenderam o desenvolvimento mostrado anteriormente para incluir correções ao propagador do pión devidas ao sóliton clássico. Eles sugeriram uma modificação da eq.(5.38), introduzindo uma matriz de métrica $\mathcal{M}$ dada por

$$\mathcal{M} = 1 + \frac{1}{e^2 f_\pi^2} \left(F'^2 + \frac{\text{sen}^2 F}{r^2} \right), \quad (5.50)$$

tal que

$$G_{\pi NN}(q^2) = \frac{8\pi M_N f_\pi}{3} \frac{(q^2 + m_\pi^2)}{q} \int_0^\infty dr r^2 \text{sen } F \sqrt{\mathcal{M}} j_1(qr). \quad (5.51)$$

Vê-se facilmente que esta expressão se reduz à eq.(5.38) quando $\mathcal{M}=1$. Mais adiante analisaremos quais são as implicações desta modificação no fator de forma.

⁵No artigo original o sinal de m_π^2 está erroneamente grafado com sinal $-$.

⁶Com o sinal trocado o resultado no artigo de Cohen, obtido com os parâmetros $(f_\pi, e) = (54, 4.84)$, é $\Lambda_\pi=582$ MeV.

Figura 5.7: O fator de forma pión-núcleon no modelo de Skyrme. A linha tracejada representa o ajuste monopolar (5.46) com $\Lambda_\pi = 615$ MeV no primeiro caso e $\Lambda_\pi = 808$ MeV no segundo.

5.4 A Relação de Goldberger-Treinman

Para complementar o estudo das propriedades axiais do núcleon, vamos verificar a validade da relação de Goldberger–Treiman no modelo de Skyrme.

O resultado (5.2) e a equação de Dirac permitem-nos escrever o elemento de matriz da divergência da corrente axial como

$$\langle N_f(p') | \partial_\mu A^{\mu,a}(0) | N_i(p) \rangle = i\bar{u}(p') \left[2M_N G_A(q^2) + q^2 G_P(q^2) \right] \gamma^5 \frac{\tau^a}{2} u(p). \quad (5.52)$$

Da relação de PCAC eq.(2.86), por outro lado, temos

$$\langle N_f(p') | \partial_\mu A^{\mu,a}(0) | N_i(p) \rangle = m_\pi^2 f_\pi \langle N_f(p') | \pi^a(0) | N_i(p) \rangle. \quad (5.53)$$

Para calcular o elemento de matriz em (5.53) utilizamos a equação de movimento de π^a . Das eqs.(5.17)-(5.19) temos

$$(\Box^2 + m_\pi^2)\pi^a = -J_\pi^a, \quad (5.54)$$

que nos permite escrever

$$(-q^2 + m_\pi^2) \langle N_f(p') | \pi^a | N_i(p) \rangle = - \langle N_f(p') | J_\pi^a | N_i(p) \rangle. \quad (5.55)$$

ou ainda

$$\langle N_f(p') | \pi^a | N_i(p) \rangle = \frac{1}{q^2 - m_\pi^2} \langle N_f(p') | J_\pi^a | N_i(p) \rangle . \quad (5.56)$$

O elemento de matriz do lado direito fica dado por

$$\langle N_f(p') | J_\pi^a | N_i(p) \rangle = G_{\pi NN}(q^2) \bar{u}(p') i \gamma^5 \tau^a u(p) , \quad (5.57)$$

e, usando (5.53), temos

$$\langle N_f(p') | \partial_\mu A^{\mu,a}(0) | N_i(p) \rangle = \frac{i f_\pi m_\pi^2 G_{\pi NN}(q^2)}{q^2 - m_\pi^2} \bar{\psi}(p') \gamma^5 \tau^a u(p) . \quad (5.58)$$

Comparando esta expressão com (5.52), temos

$$-\frac{1}{2} \left(2M_N G_A(q^2) + q^2 G_P(q^2) \right) = f_\pi G_{\pi NN}(q^2) \frac{m_\pi^2}{q^2 - m_\pi^2} . \quad (5.59)$$

No limite $q^2 \rightarrow 0$ obtemos a relação de Goldberger–Treiman [GT 58], dada por

$$M_N g_A = f_\pi G_{\pi NN}(0) . \quad (5.60)$$

Com os resultados obtidos nas seções anteriores temos:

$$\begin{cases} f_\pi = 54 \\ e = 4.84 \end{cases} \longrightarrow 610.285(=)609.66$$

$$\begin{cases} f_\pi = 93 \\ e = 4.0 \end{cases} \longrightarrow 948.29(=)948.6$$

tal que

$$\frac{M_N g_A}{f_\pi G_{\pi NN}(0)} \begin{cases} = 1.00102 \\ = 0.99967 \end{cases} . \quad (5.61)$$

Para o caso das versões alternativas, combinando-se os resultados das tabelas 5.1, 5.2 e os valores autoconsistentes de f_π dados na tabela 3.2, obtemos a tabela 5.3.

5.5 O Fator de Forma πN na Interação NN

Os fatores de forma foram inicialmente introduzidos na teoria mesônica com um propósito pragmático, uma vez que eles colaboram para a regularização do potencial nuclear na

	N=1	N=2	N=3	N=4	N=5	N=6
$\frac{M_{Ng\Delta}}{f_{\pi}G_{\pi NN}(0)}$	0.9998	0.9296	0.9140	0.9123	0.9141	0.9195

Tabela 5.3: Teste da relação de Goldberger-Treinman para o modelo alternativo.

origem, o que é indispensável para o cálculo de defasagens e outros observáveis. No caso do potencial NN, os fatores de forma podem ser introduzidos fazendo-se as constantes de acoplamento dependentes do quadrimomento do méson. Assim, em cada vértice, tomamos

$$g \rightarrow g(q^2) = gf(q^2). \quad (5.62)$$

Esse procedimento corresponde, no espaço de configuração, a atribuir um volume ao núcleon. No caso específico do vértice πNN que trataremos aqui, o fator f pode ser parametrizado na forma monopolar que, no referencial de Breit, é dada por (5.48).

Para estudar as conseqüências da introdução do fator de forma na interação NN tomemos o potencial núcleon-núcleon devido à troca de um pión (OPEP), cuja expressão pode ser obtida na forma [Rob 87]:

$$V_{\pi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{3} \left(\frac{gm_{\pi}}{2M_N} \right)^2 \frac{m_{\pi}}{4\pi} \boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)} \left\{ \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \left[U(r) - \frac{4\pi}{m_{\pi}^3} \delta^3(\mathbf{r}) \right] + S_{12}(\hat{\mathbf{r}}) U_2(r) \right\} \quad (5.63)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\tau}$ são os operadores de spin e isospin dos núcleons e $U(r)$ e $U_2(r)$ são funções de Yukawa, dadas por

$$U(r) = \frac{e^{-m_{\pi}r}}{m_{\pi}r}, \quad (5.64)$$

$$U_2(r) = \left(1 + \frac{3}{m_{\pi}r} + \frac{3}{m_{\pi}^2 r^2} \right) \frac{e^{-m_{\pi}r}}{m_{\pi}r}. \quad (5.65)$$

e S_{12} é o operador tensorial

$$S_{12} = 3\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \hat{\mathbf{r}} \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot \hat{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)}. \quad (5.66)$$

O OPEP está associado à parte de longo alcance do potencial NN, já que o pión é a partícula mais leve que pode ser trocada neste sistema. Ele foi o primeiro “pedaço” da interação a ser calculado sem ambiguidades e, por isso, é a sua parte mais bem estudada.

O potencial V_{π} diverge para distâncias pequenas. Assim, para que ele possa ser utilizado em cálculos de propriedades nucleares, o comportamento das funções $U(r)$ e $U_2(r)$

precisa ser corrigido, removendo-se as divergências para r pequeno. Para tanto recorre-se fator de forma no espaço dos momentos.

O resultado

$$\frac{\partial^2 U(r)}{\partial r_i \partial r_j} = \frac{m_\pi^2}{3} \left\{ \delta_{ij} \left[U(r) - \frac{4\pi}{m_\pi^3} \delta^3(\mathbf{r}) \right] + \left(\frac{3r_i r_j}{r^2} - \delta_{ij} \right) U_2(r) \right\}, \quad (5.67)$$

permite-nos escrever o potencial V_π como

$$V_\pi(\mathbf{r}) = \frac{1}{3} \left(\frac{gm_\pi}{2M_N} \right)^2 \frac{m_\pi}{4\pi} \boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)} \frac{3}{m_\pi^2} \sigma_i^{(1)} \sigma_j^{(2)} \frac{\partial^2 U(r)}{\partial r_i \partial r_j}, \quad (5.68)$$

onde a função $U(r)$ pode ser expressa como a transformada de Fourier do propagador do pión

$$U(r) = \frac{4\pi}{m_\pi} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}}{\mathbf{q}^2 + m_\pi^2}. \quad (5.69)$$

Efetuada-se a operação (5.62) na constante de acoplamento da eq.(5.68), obtemos a expressão de U modificada pelo fator de forma. No caso do fator de forma monopolar, temos

$$U(r, \Lambda_\pi) = \frac{4\pi}{m_\pi} \int_0^\infty \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}}{\mathbf{q}^2 + m_\pi^2} \left(\frac{\Lambda_\pi^2 - m_\pi^2}{\Lambda_\pi^2 + \mathbf{q}^2} \right)^2. \quad (5.70)$$

Substituindo-se este resultado na eq.(5.68), obtemos o potencial corrigido pelo fator de forma, que pode ser expresso por

$$V_\pi(\mathbf{r}, \Lambda_\pi) = \frac{1}{3} \left(\frac{gm_\pi}{2M_N} \right)^2 \frac{m_\pi}{4\pi} \boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)} \left\{ \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)} [U(r, \Lambda_\pi) - D(r, \Lambda_\pi)] + S_{12} U_2(r, \Lambda_\pi) \right\}, \quad (5.71)$$

onde

$$D(r, \Lambda_\pi) = \frac{4\pi}{m_\pi^3} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \left(\frac{\Lambda_\pi^2 - m_\pi^2}{\Lambda_\pi^2 + \mathbf{q}^2} \right)^2, \quad (5.72)$$

$$U_2(r, \Lambda_\pi) = \frac{1}{2m_\pi^2} \left(\frac{3r_i r_j}{r^2} - \delta_{ij} \right) \frac{4\pi}{m_\pi} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}}{\mathbf{q}^2 + m_\pi^2} (-q_i q_j) \left(\frac{\Lambda_\pi^2 - m_\pi^2}{\Lambda_\pi^2 + \mathbf{q}^2} \right)^2 \quad (5.73)$$

O cálculo explícito das integrais (5.70), (5.72) e (5.73) produz:

$$U(r, \Lambda_\pi) = \frac{e^{-m_\pi r}}{m_\pi r} - \frac{\Lambda_\pi}{m_\pi} \frac{e^{-\Lambda_\pi r}}{\Lambda_\pi r} - \frac{m_\pi}{2\Lambda_\pi} \left(\frac{\Lambda_\pi^2}{m_\pi^2} - 1 \right) e^{-\Lambda_\pi r}, \quad (5.74)$$

$$U_2(r, \Lambda_\pi) = \left(1 + \frac{3}{m_\pi r} + \frac{3}{m_\pi^2 r^2} \right) \frac{e^{-m_\pi r}}{m_\pi r} - \frac{\Lambda_\pi^3}{m_\pi^3} \left(1 + \frac{3}{\Lambda_\pi r} + \frac{3}{\Lambda_\pi^2 r^2} \right) \frac{e^{-\Lambda_\pi r}}{\Lambda_\pi r}$$

$$-\frac{\Lambda_\pi}{2m_\pi} \left(\frac{\Lambda_\pi^2}{m_\pi^2} - 1 \right) \left(1 + \frac{1}{\Lambda_\pi r} \right) e^{-\Lambda_\pi r}, \quad (5.75)$$

$$D(r, \Lambda_\pi) = \frac{m_\pi}{2\Lambda_\pi} \left(\frac{\Lambda_\pi^2}{m_\pi^2} - 1 \right) e^{-\Lambda_\pi r}. \quad (5.76)$$

Estes resultados indicam que a presença de $f(\mathbf{q}^2)$ nas expressões de U e U_2 tende a torná-las finitas na origem, como esperávamos. Por outro lado, a inclusão do fator de forma modifica muito pouco os integrandos para pequenos valores de q , fazendo com que $U(r, \Lambda_\pi)$ e $U_2(r, \Lambda_\pi)$ sejam muito pouco diferentes de $U(r)$ e $U_2(r)$ para grandes valores de r . Isso significa que ele só modifica o potencial para valores pequenos de r .

No limite $\Lambda_\pi \rightarrow \infty$ recobramos as funções originais, isto é

$$\begin{aligned} U(r, \infty) &= U(r), \\ U_2(r, \infty) &= U_2(r), \\ D(\mathbf{r}, \infty) &= \frac{4\pi}{m_\pi^3} \delta^3(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (5.77)$$

Esta última relação indica que a função D tem alcance curto e sua influência está restrita ao interior do núcleon. Por isso costuma-se desconsiderar este termo no potencial.

O caso de um fator de forma genérico $f(\mathbf{q}^2)$ é totalmente análogo ao exemplo apresentado acima. As funções de perfil do potencial são obtidas fazendo-se nas eqs.(5.70)-(5.73) a substituição

$$\left(\frac{\Lambda_\pi^2 - m_\pi^2}{\Lambda_\pi^2 + \mathbf{q}^2} \right) \rightarrow f(\mathbf{q}^2). \quad (5.78)$$

Este procedimento e o cálculo explícito das integrais angulares produzem resultados que são funções de r e funcionais de f :

$$D([f], r) = \frac{2}{\pi m_\pi^3} \int_0^\infty dq q^2 f^2(\mathbf{q}^2) j_0(qr), \quad (5.79)$$

$$U([f], r) = \frac{2}{\pi m_\pi} \int_0^\infty dq q^2 \frac{f^2(\mathbf{q}^2)}{q^2 + m_\pi^2} j_0(qr), \quad (5.80)$$

$$U_2([f], r) = \frac{2}{\pi m_\pi^3} \int_0^\infty dq q^4 \frac{f^2(\mathbf{q}^2)}{q^2 + m_\pi^2} j_2(qr). \quad (5.81)$$

Os dois últimos resultados podem ser resumidos na expressão

$$U_l([f], r) = \frac{2}{\pi m_\pi^{(l+1)}} \int_0^\infty dq q^{(l+2)} \frac{f^2(\mathbf{q}^2)}{q^2 + m_\pi^2} j_l(qr). \quad (5.82)$$

O interesse dessas expressões é que elas podem ser invertidas, permitindo que se extraia o fator de forma πN a partir da componente piônica de um dado potencial. Esta inversão produz os resultados

$$f^2(\mathbf{q}^2) = m_\pi^3 \int_0^\infty dr r^2 D([f], r) j_0(qr), \quad (5.83)$$

$$f^2(\mathbf{q}^2) = \frac{m_\pi^{(l+1)}}{q^l} (q^2 + m_\pi^2) \int_0^\infty dr r^2 U_l([f], r) j_l(qr). \quad (5.84)$$

No caso mais geral, o potencial no canal do pión pode ser representado pela expressão

$$V_\pi(r) = \boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)} \left[-\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)} V_0^-([f], r) + S_{12}(\hat{\mathbf{r}}) V_2^-([f], r) \right], \quad (5.85)$$

onde as funções $V_l^-([f], r)$ são dadas por

$$V_l^-([f], r) = \frac{1}{6\pi^2} \left(\frac{gm_\pi}{2M_N} \right)^2 \frac{1}{m_\pi^2} \int_0^\infty dq q^4 \frac{f^2(\mathbf{q}^2)}{q^2 + m_\pi^2} j_l(qr). \quad (5.86)$$

Assim, obtemos a expressão do fator de forma em função das componentes do potencial:

$$f^2(\mathbf{q}^2) = 3 \left(\frac{2M_N}{gm_\pi} \right)^2 \frac{m_\pi^2 (q^2 + m_\pi^2)}{q^2} 4\pi \int_0^\infty dr r^2 V_l^-([f], r) j_l(qr). \quad (5.87)$$

Esta expressão nos permite extrair o fator de forma pión-núcleon a partir da parte piônica de um dado potencial. Antes de fazer isso, porém, vamos testar a consistência deste desenvolvimento na região tipo-tempo, calculando $f(\mathbf{q}^2 = -m_\pi^2)$.

A região tipo-tempo é estudada por meio da substituição $\mathbf{q} \rightarrow i\bar{\mathbf{q}}$. Fazendo isto na eq.(5.87) e tomando $l = 2$, por exemplo, obtemos:

$$f^2(\bar{\mathbf{q}}^2) = 3 \left(\frac{2M_N}{gm_\pi} \right)^2 \frac{m_\pi^2 (m_\pi^2 - \bar{q}^2)}{\bar{q}^2} 4\pi \int_0^\infty dr r^2 V_2^-([f], r) i_2(\bar{q}r). \quad (5.88)$$

Como na seção 5.3 resolvemos esta integral subtraindo a parte de longo alcance do potencial. Uma vez que o fator de forma só modifica o potencial perto da origem não alterando-o para grandes valores de r , temos que a parte assintótica de $V_2^-([f], r)$ tem a forma

$$V_2^-([f], r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} c U_2(r). \quad (5.89)$$

onde, pela eq.(5.63),

$$c = \frac{1}{3} \left(\frac{gm_\pi}{2M_N} \right)^2 \frac{m_\pi}{4\pi}. \quad (5.90)$$

Desse modo temos:

$$f^2(\bar{q}^2) = 3 \left(\frac{2M_N}{gm_\pi} \right)^2 m_\pi^2 \frac{(m_\pi^2 - \bar{q}^2)}{\bar{q}^2} 4\pi \left\{ \int_0^\infty dr r^2 c U_2(r) i_2(\bar{q}r) + \int_0^\infty dr r^2 (V_2^-(r) - c U_2(r)) i_2(\bar{q}r) \right\} \quad (5.91)$$

A primeira integral fornece:

$$\int_0^\infty dr r^2 U_2(r) i_2(\bar{q}r) = \frac{1}{m_\pi} \frac{\bar{q}^2}{m_\pi^2 (m_\pi^2 - \bar{q}^2)}, \quad (5.92)$$

e o fator de forma na região tipo-tempo fica dado por

$$f^2(\bar{q}^2) = 1 + \frac{(m_\pi^2 - \bar{q}^2)}{\bar{q}^2} \left[3 \left(\frac{2M_N}{gm_\pi} \right)^2 m_\pi^2 4\pi \right] \left\{ \int_0^\infty dr r^2 (V_2^-(r) - c U_2(r)) i_2(\bar{q}r) \right\}. \quad (5.93)$$

Para píons na camada de massa, esta expressão fornece,

$$f(\bar{q}^2 = m_\pi^2) = 1. \quad (5.94)$$

mostrando que ele está corretamente normalizado.

5.6 O OPEP e o Fator de Forma πN no Modelo de Skyrme

Nesta seção apresentamos a obtenção do fator de forma πN a partir da interação NN, como em trabalho publicado recentemente [BR 93].

Os primeiros estudos a respeito da interação NN no modelo de Skyrme foram feitos pelo próprio Skyrme no idos de 1962 [Sky 62]. Para tanto ele introduziu uma aproximação, chamada “ansatz produto”, segundo a qual o campo solitônico para o sistema skyrmion-skyrmion é dado simplesmente pelo produto dos campos individuais,

$$U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = U^{(1)}(\mathbf{x}) U^{(2)}(\mathbf{y}) \quad (5.95)$$

onde $U^{(i)}(\mathbf{r})$ é o campo do sóliton centrado na posição $\mathbf{r}$.

O ansatz produto incorpora corretamente a aditividade do número bariônico. Na eq.(5.95) usamos, como anteriormente, os campos $U^{(1)}$ e $U^{(2)}$ na forma “ouriço”.

O uso da aproximação (5.95) na densidade de lagrangiana do modelo de Skyrme gera, além de termos característicos de sólitons isolados, um termo de interação $\mathcal{L}_{int}$, que permite a construção do potencial de interação núcleon-núcleon na forma

$$V_{NN}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = - \int d^3r \mathcal{L}_{int}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) . \quad (5.96)$$

Vários potenciais NN foram calculados a partir desta prescrição tanto para o modelo de Skyrme [JJP 85, VLL+ 85, YA 85] como para outros em que o termo quártico é substituído por termos de sexta ordem [JJG+ 85, RS 89] ou por mésons vetoriais [Kla 84]. Alguns problemas são encontrados nestas formulações do potencial, a maioria dos quais relacionados à região de curto alcance da interação e às partes central e spin-órbita, independentes do isospin [NR 90].

Em relação às partes de médio e longo alcance dos canais dependentes do isospin, que serão estudadas neste trabalho, não existem estas ambiguidades e elas podem ser calculadas com razoável confiança. O ansatz produto dá origem a termos com a forma geral

$$V(r) = V_c(r) + \boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)} \left[-\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \left(V_0^-(r) + V_0^+(r) \right) + S_{12}(\hat{\mathbf{r}}) \left(V_2^-(r) + V_2^+(r) \right) \right] . \quad (5.97)$$

onde V_c é um termo puramente central e os superescritos (-) e (+) em V_l indicam que estes termos são ímpares ou pares na troca do sinal do campo do pión associado a cada um dos skyrmions. Isso permite que estas componentes sejam associadas com trocas de números ímpares ou pares de píons entre os núcleons.

As nuvens piônicas dos dois skyrmions localizados nos pontos $\mathbf{R}/2$ e $-\mathbf{R}/2$ são descritas por vetores $\mathbf{x} = \mathbf{r} + \mathbf{R}/2$ e $\mathbf{y} = \mathbf{r} - \mathbf{R}/2$, os quais também são usados para rotular as correspondentes funções de perfil. Com estas convenções e o uso de coordenadas cilíndricas, integradas sobre o ângulo azimutal, temos as componentes ímpares de V , que podem ser escritas como [YA 85]:

$$\begin{aligned} V_l^- = \frac{2f_\pi}{9\epsilon} \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty dz \int_0^\infty \rho d\rho \Bigg\{ & \alpha_l \left[\frac{1}{4} + F_x'^2 + \frac{s_x^2}{x^2} + F_y'^2 + \frac{s_y^2}{y^2} \right] \frac{s_x}{x} c_x \frac{s_y}{y} c_y \\ & + \beta_l \left[\frac{1}{4} + 2\frac{s_x^2}{x^2} + F_y'^2 + \frac{s_y^2}{y^2} \right] F_x' \frac{s_y}{y} c_y \\ & + \gamma_l \left[\frac{1}{4} + F_x'^2 + \frac{s_x^2}{x^2} + 2\frac{s_y^2}{y^2} \right] \frac{s_x}{x} c_x F_y' \\ & + \delta_l \left[\frac{1}{4} + 2\frac{s_x^2}{x^2} + 2\frac{s_y^2}{y^2} \right] F_x' F_y' \end{aligned}$$

$$+ \varepsilon_l \frac{m_\pi^2}{16e^2 f_\pi^2} s_x s_y + \phi_l \frac{s_x^2}{x} F'_x \frac{s_y^2}{y} F'_y \Big\} \quad (5.98)$$

onde $s_i = \sin F_i$ e $c_i = \cos F_i$. Os coeficientes $\alpha_l, \dots, \phi_l$ são expressos em termos das variáveis $p \equiv \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}}$ e $q \equiv 3\rho^2/2xy$ como segue: $\alpha_0 = -(1+p^2)$, $\beta_0 = \gamma_0 = -(1-p^2)$, $\delta_0 = -p^2$, $\varepsilon_0 = -p$, $\phi_0 = -3p$,

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \left[-2 + p^2 + q \left[\frac{y}{x} + \frac{x}{y} - p \right] \right], \\ \beta_2 &= \left[1 - p^2 + q \left[-\frac{y}{x} + p \right] \right], \\ \gamma_2 &= \left[1 - p^2 + q \left[-\frac{x}{y} + p \right] \right], \\ \delta_2 &= (p^2 - pq), \quad \varepsilon_2 = (p - q), \quad \phi_2 = \frac{3}{2}(-p + q). \end{aligned}$$

Comparando-se a eq.(5.97) com a eq.(5.85) vemos que as componentes V_l^- na eq.(5.98) podem ser associadas ao potencial de troca de um pión no modelo de Skyrme e que, por conseguinte, representam a parte de longo alcance da interação NN. Há no entanto um termo, proporcional a ϕ_l , que é de alcance muito menor que os demais e que, por isso, não é claro se ele está ou não associado à propagação de um pión. Para verificar o papel deste termo nós vamos considerar nas nossas discussões duas versões do potencial, com e sem o mesmo. Ao último, que chamaremos versão alternativa, rotularemos com uma letra A.

A partir das expressões desenvolvidas na seção anterior podemos obter as previsões do modelo de Skyrme para o fator de forma πN através da interação NN baseada no ansatz produto. Primeiramente comparamos as componentes central e tensorial do OPEP obtidas através das diferentes formulações. Na fig.(5.8) mostramos as componentes V_0^- e V_2^- resultantes; 1) da eq.(5.86) com os fatores de forma provindos da eq.(5.51) com e sem a matriz de métrica $\mathcal{M}$, obtidos respectivamente por Cohen [Coh 86] e Holzwarth *et al* [HPJ 90] e, 2) fornecidas pela eq.(5.98). No detalhe vemos as partes de longo alcance, que coincidem, para distâncias maiores que 2 fm, com o OPEP calculado com partículas pontuais, dado pela eq.(5.63), sem fator de forma.

Para distâncias pequenas, menores que 1 fm, as previsões para o potencial central V_0^- discordam radicalmente, chegando a um fator 100 na origem. Esta diferença está associada à dinâmica de curto alcance presente no potencial completo, que inclui muitas outras contribuições além do OPEP regularizado. Estas contribuições são constituídas por trocas de muitos mésons e superposição de sacolas, dependendo da abordagem. Em

Figura 5.8: As componentes V_0^- e V_2^- dos potenciais, obtidas a partir: da eq.(5.86) com $\mathcal{M} = 1$ (curva traço-ponto), com $\mathcal{M}$ dada por (5.51) (curva tracejada) e da eq.(5.98) com e sem o termo de curto alcance ϕ_1 (curva contínua).

trabalho recente, por exemplo, Haidenbauer, Holinde e Thomas [HHT 92] mostraram que um bom ajuste dos dados da interação NN requer a inclusão de uma dinâmica extra de curto alcance, a qual, no seu caso é associada à propagação de um méson massivo, denominado π' , com massa de 1.2 GeV, $\Lambda'_\pi = 2.0$ GeV e constante de acoplamento que varia entre 22 e 25.

No caso do potencial tensor todas as curvas têm formas semelhantes, uma vez que a função $j_2(qr)$ na eq.(5.87) força-as a se anularem na origem. Isso mostra que a física de curtas distâncias é suprimida, removendo assim os problemas presentes no potencial central. Por isso o potencial tensor é mais indicado para se estudar os efeitos de médio alcance como o fator de forma πN . Uma inspeção na fig.(5.8) mostra que o potencial obtido por Holzwarth *et al* é bastante semelhante àquele proveniente de V_2^- na eq.(5.98).

Se por outro lado calculamos o fator de forma associado a V_2^- , pela eq.(5.87) e a partir deste calculamos V_0^- usando a eq.(5.86) os resultados são aqueles mostrados na fig.(5.9) que indica que este procedimento “filtra” a parte não-OPEP do potencial.

Na fig.(5.10) comparamos o fator de forma πN obtido da eq.(5.87) a partir do potencial com $l=2$ na eq.(5.98) e aqueles provenientes da eq.(5.51) com e sem a matriz de métrica $\mathcal{M}$. Também aqui notamos que o fator de forma incluindo $\mathcal{M}$ é muito semelhante àquele extraído do potencial NN.

Figura 5.9: A componente V_0^- dos potenciais, obtidas da eq.(5.86) a partir do fator de forma calculado em (5.87) com $l=2$. Convenção igual a da fig.(5.8).

Retornemos agora ao problema das contribuições de curto alcance da componente central do potencial NN. Para entender a estrutura desta região do potencial vamos separar a contribuição do OPEP das demais. Assim vamos chamar o potencial central da fig.(5.9) obtido a partir do fator de forma de V_2^- , de $V^{OPEP}(r)$. As contribuições não devidas ao OPEP na parte central do potencial podem ser então representadas por

$$\bar{V}_0^-(r) = V_0^-(r) - V^{OPEP}(r), \quad (5.99)$$

onde $V_0^-(r)$ é dado por (5.98).

Na fig.(5.11) mostramos a forma das curvas $\bar{V}_0^-$, juntamente com ajustes para o “méson π' ” como na ref.[HHT 92], com os parâmetros $\Lambda_{\pi'}=1326$ MeV, $m_{\pi'}=552$ MeV e $g_{\pi'}=21.62$. Nossos resultados são consistentes, dentro da limitação da nossa descrição, com aqueles obtidos por estes autores.

Como se pode verificar na fig.(5.10) o fator de forma obtido do potencial NN e aquele considerando o skyrmion como fonte estática do campo do pión com a matriz de métrica $\mathcal{M}$ são relativamente consistentes. Esta consistência também se manifesta nos resultados para o potencial tensor onde a fig.(5.8) indica que, na região entre 1 e 2 fm, onde o fator de forma começa a influenciar o OPEP, essas curvas são bastante parecidas. Isto pode

Figura 5.10: Os fatores de forma πN calculados a partir da eq.(5.51) com e sem a matriz de métrica $\mathcal{M}$ e do potencial NN no modelo de Skyrme com $l=2$. Convenção da fig.(5.8).

também ser verificado dividindo-se os potenciais V_2^- da fig.(5.8) pela sua correspondente componente do OPEP. Quando isto é feito obtemos a fig.(5.12).

5.7 Resultados Numéricos III

Da mesma forma que nos capítulos anteriores, nesta seção analisamos a dependência de g_A com os parâmetros de curto alcance das lagrangianas consideradas. Nestes casos g_A pode ser escrito como ⁷

$$g_A = -\frac{2\pi}{9e^2} \int_0^\infty dx x^2 \left\{ \left[\frac{\sin 2F}{x} + F' \right]_\sigma + \left[4 \frac{\sin 2F}{x} \left(F' + \frac{s^2}{x^2} \right) + 8 \frac{F' s^2}{x^2} \right]_{ca} \right\}, \quad (5.100)$$

no modelo de Skyrme, e

$$g_A = -\frac{2\pi}{9} \sqrt{\beta} \int_0^\infty du u^2 \left\{ \left[\frac{\sin 2F}{u} + F' \right]_\sigma + \left[2 \left(\frac{s}{u} + 2 \cos F F' \right) \frac{s^3 F'}{u^3} \right]_{ca} \right\}, \quad (5.101)$$

nos demais.

Os resultados numéricos para a constante de acoplamento axial obtidas deste estudo estão apresentados nas tabelas 5.4 - 5.10.

⁷Estas relações são válidas para $m_\pi \neq 0$, para o caso de píons sem massa temos um fator $3/2$.

Figura 5.11: Contribuições não devidas ao OPEP na parte central do potencial (5.98) (linha contínua). A linha tracejada representa um ajuste com o méson π' , como na ref.[HHT 92].

Para o caso da simetria quiral exata, estão dados os resultados apenas no modelo tradicional e nos modelos com termo de sexta ordem com $N=1$ e $N=2$, pois nos outros casos os resultados possuem problemas de estabilidade numérica ainda não solucionados adequadamente. Nas tabelas 5.4 a 5.6, onde estes valores estão incluídos, podemos perceber que a transição de $m_\pi = 0$ para $m_\pi \neq 0$ é sentida mais por g_A^σ/A e g_A^{ca}/A do que por g_A/A . Percebe-se também que a introdução da massa do pión altera substancialmente as proporções g_A^σ/g_A e g_A^{ca}/g_A . No modelo tradicional, por exemplo, $g_A^\sigma \sim \frac{2}{3}g_A$ quando $m_\pi = 0$, sendo aproximadamente $\frac{2A}{2}$ nos demais casos. Entretanto g_A/A permanece bastante estável em todos os casos.

As tabelas 5.4 e 5.5 mostram que os valores de g_A/A são muito próximos nestes dois casos. Esta independência de modelo não foi verificada em nenhuma das outras grandezas analisadas anteriormente. Em relação aos demais modelos vemos que estes valores não são substancialmente diferentes.

Em relação às tabelas 5.11 - 5.17 vemos que o comportamento de $G(0)/A$ é da mesma forma que g_A/A efeito que podemos associar a relação de Goldberger-Treinman.

Figura 5.12: Razões entre as várias previsões para o potencial tensor e a correspondente componente do OPEP. Convenções da fig.(5.8).

ϵ	c_e	$A(2f_\pi)^2$	$\frac{g_A}{(2f_\pi)^2 A}$	$\frac{g_A^\sigma}{(2f_\pi)^2 A}$	$\frac{g_A^{c\alpha}}{(2f_\pi)^2 A}$	$\frac{g_A^\sigma}{g_A}$	$\frac{g_A^{c\alpha}}{g_A}$
$m_\pi = 0$	8.638	-	2.095	0.658	1.436	0.304	0.686
4.5	8.042	0.397	2.044	1.035	1.011	0.505	0.495
4.0	7.920	0.495	2.039	1.016	1.023	0.498	0.502
3.5	7.840	0.640	2.018	0.988	1.030	0.489	0.510
3.0	7.713	0.857	1.997	0.954	1.043	0.478	0.522
2.5	7.550	1.208	1.966	0.908	1.058	0.462	0.538
2.0	7.364	1.841	1.918	0.843	1.075	0.439	0.560

Tabela 5.4: A constante de acoplamento g_A em função dos parâmetros no modelo de Skyrme tradicional.

β	c_β	$A(2f_\pi)^2$	$\frac{g_A}{(2f_\pi)^2 A}$	$\frac{g_A^\sigma}{(2f_\pi)^2 A}$	$\frac{g_A^{c\alpha}}{(2f_\pi)^2 A}$	$\frac{g_A^\sigma}{g_A}$	$\frac{g_A^{c\alpha}}{g_A}$
$m_\pi = 0$	3.136	-	2.096	0.992	1.104	0.473	0.527
0.0190	3.056	0.421	2.044	1.250	1.794	0.611	0.388
0.0360	3.045	0.577	2.029	1.220	1.808	0.601	0.398
0.0729	3.036	0.819	2.007	1.180	1.826	0.588	0.412
0.1093	3.033	1.003	1.992	1.154	1.838	0.579	0.420
0.1419	3.033	1.144	1.981	1.135	1.845	0.573	0.427

Tabela 5.5: A constante de acoplamento g_A em função dos parâmetros no modelo com termo de sexta ordem $N=1$.

β	c_β	$A(2f_\pi)^2$	$\frac{g_A}{(2f_\pi)^2 A}$	$\frac{g_A^\sigma}{(2f_\pi)^2 A}$	$\frac{g_A^{c\alpha}}{(2f_\pi)^2 A}$	$\frac{g_A^\sigma}{g_A}$	$\frac{g_A^{c\alpha}}{g_A}$
$m_\pi = 0$	1.325	-	2.012	0.315	1.697	0.156	0.843
0.0760	1.351	0.372	1.894	0.817	1.076	0.431	0.568
0.1440	1.362	0.517	1.885	0.794	1.091	0.421	0.578
0.2916	1.378	0.744	1.865	0.763	1.102	0.409	0.591
0.4372	1.391	0.920	1.848	0.742	1.106	0.401	0.598
0.5676	1.401	1.055	1.835	0.727	1.108	0.396	0.603

Tabela 5.6: A constante de acoplamento axial g_A em função dos parâmetros no modelo com termo de sexta ordem $N=2$.

β	c_β	$A(2f_\pi)^2$	$\frac{g_A}{(2f_\pi)^2 A}$	$\frac{g_A^\sigma}{(2f_\pi)^2 A}$	$\frac{g_A^{c\alpha}}{(2f_\pi)^2 A}$	$\frac{g_A^\sigma}{g_A}$	$\frac{g_A^{c\alpha}}{g_A}$
$m_\pi = 0$	0.612	-	-	-	-	-	-
0.3080	0.636	0.353	1.824	0.517	1.307	0.283	0.716
1.1815	0.658	0.715	1.794	0.476	1.318	0.265	0.735
2.2300	0.675	1.007	1.761	0.451	1.311	0.256	0.744

Tabela 5.7: A constante de acoplamento axial g_A em função dos parâmetros no modelo com termo de sexta ordem $N=3$.

β	c_β	$A(2f_\pi)^2$	$\frac{g_A}{(2f_\pi)^2 A}$	$\frac{g_A^\sigma}{(2f_\pi)^2 A}$	$\frac{g_A^{c\alpha}}{(2f_\pi)^2 A}$	$\frac{g_A^\sigma}{g_A}$	$\frac{g_A^{c\alpha}}{g_A}$
$m_\pi = 0$	0.323	-	-	-	-	-	-
1.0466	0.342	0.349	1.786	0.344	1.442	0.192	0.807
4.0156	0.357	0.716	1.740	0.312	1.437	0.178	0.821
7.8163	0.369	1.033	1.708	0.292	1.415	0.171	0.828

Tabela 5.8: A constante de acoplamento axial g_A em função dos parâmetros no modelo com termo de sexta ordem $N=4$.

β	c_β	$A(2f_\pi)^2$	$\frac{g_A}{(2f_\pi)^2 A}$	$\frac{g_A^\sigma}{(2f_\pi)^2 A}$	$\frac{g_A^{c\alpha}}{(2f_\pi)^2 A}$	$\frac{g_A^\sigma}{g_A}$	$\frac{g_A^{c\alpha}}{g_A}$
$m_\pi = 0$	0.190	-	-	-	-	-	-
2.8369	0.204	0.343	1.765	0.242	1.522	0.137	0.862
10.8848	0.215	0.710	1.717	0.217	1.500	0.127	0.873
21.1873	0.224	1.030	1.670	0.203	1.467	0.121	0.878

Tabela 5.9: A cosntante de acoplamento axial g_A em função dos parâmetros no modelo com termo de sexta ordem $N=5$.

β	c_β	$A(2f_\pi)^2$	$\frac{g_A}{(2f_\pi)^2 A}$	$\frac{g_A^\sigma}{(2f_\pi)^2 A}$	$\frac{g_A^{c\alpha}}{(2f_\pi)^2 A}$	$\frac{g_A^\sigma}{g_A}$	$\frac{g_A^{c\alpha}}{g_A}$
$m_\pi = 0$	0.121	-	-	-	-	-	-
6.8341	0.131	0.344	1.749	0.178	1.571	0.102	0.898
26.2216	0.139	0.716	1.691	0.158	1.532	0.093	0.906
51.0404	0.146	1.044	1.635	0.146	1.489	0.089	0.910

Tabela 5.10: A constante de acoplamento axial g_A em função dos parâmetros no modelo com termo de sexta ordem $N=6$.

ϵ	c_e	$A(2f_\pi)^2$	$G(0)$	$\frac{G(0)}{(2f_\pi)^2 A}$	$g_{\pi NN}$
4.5	8.042	0.397	8.196	20.644	8.397
4.0	7.920	0.495	10.204	20.614	10.520
3.5	7.840	0.640	13.047	20.386	13.539
3.0	7.713	0.857	17.280	20.164	18.117
2.5	7.550	1.208	23.987	19.857	25.578
2.0	7.364	1.841	35.649	19.364	38.923

Tabela 5.11: $G(0)$ e $g_{\pi NN}$ em função dos parâmetros no modelo de Skyrme tradicional.

β	c_β	$A(2f_\pi)^2$	$G(0)$	$\frac{G(0)}{(2f_\pi)^2 A}$	$g_{\pi NN}$
0.0190	3.056	0.421	8.699	20.663	8.907
0.0360	3.045	0.577	11.839	20.518	12.216
0.0729	3.036	0.819	16.617	20.289	17.332
0.1093	3.033	1.003	20.171	20.111	21.204
0.1419	3.033	1.144	22.848	20.008	24.158

Tabela 5.12: $G(0)$ e $g_{\pi NN}$ em função dos parâmetros no modelo com termo de sexta ordem $N=1$.

β	c_β	$A(2f_\pi)^2$	$G(0)$	$\frac{G(0)}{(2f_\pi)^2 A}$	$g_{\pi NN}$
0.0760	1.351	0.372	7.625	20.497	7.879
0.1440	1.362	0.517	10.488	20.286	10.930
0.2916	1.378	0.744	14.906	20.035	15.744
0.4372	1.391	0.920	18.244	19.831	19.455
0.5676	1.401	1.055	20.789	19.705	23.321

Tabela 5.13: $G(0)$ e $g_{\pi NN}$ em função dos parâmetros no modelo com termo de sexta ordem $N=2$.

β	c_β	$A(2f_\pi)^2$	$G(0)$	$\frac{G(0)}{(2f_\pi)^2 A}$	$g_{\pi NN}$
0.3080	0.636	0.353	7.165	20.292	7.465
1.1815	0.658	0.715	14.144	19.766	15.132
2.2300	0.675	1.007	19.543	19.401	21.299

Tabela 5.14: $G(0)$ e $g_{\pi NN}$ em função dos parâmetros no modelo com termo de sexta ordem $N=3$.

β	c_β	$A(2f_\pi)^2$	$G(0)$	$\frac{G(0)}{(2f_\pi)^2 A}$	$g_{\pi NN}$
1.0466	0.342	0.349	7.052	20.177	7.391
4.0156	0.357	0.716	13.984	19.523	15.146
7.8163	0.369	1.033	19.702	19.074	21.840

Tabela 5.15: $G(0)$ e $g_{\pi NN}$ em função dos parâmetros no modelo com termo de sexta ordem $N=4$.

β	c_β	$A(2f_\pi)^2$	$G(0)$	$\frac{G(0)}{(2f_\pi)^2 A}$	$g_{\pi NN}$
2.8369	0.204	0.343	6.878	20.023	7.264
10.8848	0.215	0.710	13.708	19.305	15.014
21.1873	0.224	1.030	19.396	18.834	21.774

Tabela 5.16: $G(0)$ e $g_{\pi NN}$ em função dos parâmetros no modelo com termo de sexta ordem $N=5$.

β	c_β	$A(2f_\pi)^2$	$G(0)$	$\frac{G(0)}{(2f_\pi)^2 A}$	$g_{\pi NN}$
6.8341	0.131	0.344	6.837	19.898	7.265
26.2216	0.139	0.716	13.670	19.098	15.136
51.0404	0.146	1.044	19.375	18.566	22.068

Tabela 5.17: A constante de acoplamento axial g_A em função dos parâmetros no modelo com termo de sexta ordem $N=6$.

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho estudamos a dependência de várias quantidades dos sólitons topológicos com a dinâmica de curto alcance. Nos modelos considerados, essa dinâmica está associada a três entidades: a forma da lagrangiana de curto alcance $\mathcal{L}_{ca}$, o valor do parâmetro p_{ca} que caracteriza a sua intensidade e o comportamento do campo do pión próximo à origem, representado por $\pi(r_{ca})$. Para definir com maior clareza o papel da dinâmica de curto alcance, mantivemos fixas as partes de longo alcance do modelo, representadas pelas componentes $\mathcal{L}_\sigma$ e $\mathcal{L}_{qs}$ da lagrangiana e pelos parâmetros f_π e m_π . Este último determina a quebra de simetria quiral.

Deste modo, uma quantidade genérica Q pode ser representada por

$$Q = Q[\mathcal{L}_\sigma, f_\pi, m_\pi, \mathcal{L}_{qs}; p_{ca}, \mathcal{L}_{ca}; \pi(r_{ca})]. \quad (6.1)$$

Explicitando apenas as dependências consideradas neste trabalho, escrevemos

$$Q = Q[m_\pi; p_{ca}, \mathcal{L}_{ca}, \pi(r_{ca})]. \quad (6.2)$$

Uma característica importante dos modelos considerados é que a dependência da quantidade Q com o parâmetro p_{ca} assume duas formas distintas. Em uma delas, essa dependência é completamente explícita, já que muitas expressões são proporcionais a potências α de p_{ca} , e o parâmetro assume o papel de um fator de escala. O outro tipo de dependência é determinado pela razão entre m_π e p_{ca} . Para representar estas idéias, escrevemos

$$Q = p_{ca}^\alpha Q \left[\frac{m_\pi}{p_{ca}}, \mathcal{L}_{ca}, \pi_{ca} \right]. \quad (6.3)$$

O significado do parâmetro p_{ca} é, em geral, muito dependente do modelo considerado, e o mesmo acontece com a quantidade Q na forma mostrada acima. Por isso é conveniente

a eliminação deste parâmetro em função de outros de validade mais geral. Para tanto usamos o fato de a constante assintótica A , da função de perfil escrita em termos da coordenada r , depender de modo simples tanto de p_{ca} como da constante assintótica adimensional c :

$$A = A(p_{ca}, c) . \quad (6.4)$$

Em todos os casos a inversão desta equação é muito simples, o que permite escrever

$$p_{ca} = p_{ca} \left(\frac{A}{c} \right)^\eta . \quad (6.5)$$

O interessante nesta expressão é que A é um observável do modelo e c é uma quantidade com a mesma estrutura de Q :

$$c = c \left(\frac{m_\pi}{p_{ca}}, \mathcal{L}_{ca}, \pi(r_{ca}) \right) . \quad (6.6)$$

Assim, podemos obter quantidades que dependem apenas de modo implícito dos parâmetros do modelo, na forma

$$\frac{Q}{A^\gamma} = \frac{Q \left(\frac{m_\pi}{p_{ca}}, \mathcal{L}_{ca}, \pi(r_{ca}) \right)}{\left[c \left(\frac{m_\pi}{p_{ca}}, \mathcal{L}_{ca}, \pi(r_{ca}) \right) \right]^\gamma} , \quad (6.7)$$

onde $\gamma = \alpha + \eta$.

Esta forma de escrever as quantidades estudadas exhibe do modo mais claro possível as propriedades estruturais das quantidades consideradas no modelo. A expressão acima indica também que existem duas maneiras de se eliminar a dependência implícita de p_{ca} : ou tomando-se o caso da simetria quiral exata, onde $m_\pi = 0$ ou o limite onde p_{ca} é muito grande.

No capítulo 4 estudamos os aspectos eletromagnéticos do modelo e mostramos que apenas quatro grandezas, associadas a quatro integrais S_1 , S_2 , S_3 e S_4 , determinam todas as propriedades estáticas mostradas nas tabelas 4.1 a 4.3. Além disso, notamos uma correlação numérica entre as integrais S_1 e S_3 , indicando a existência de um outro vínculo entre os observáveis eletromagnéticos. A existência de relações estruturais deste tipo indica que apenas alguns dos observáveis eletromagnéticos são independentes.

No nosso estudo determinamos, além das correlações eletromagnéticas mostradas no capítulo 4, que outras grandezas estão correlacionadas numericamente.

Um desses casos diz respeito às constantes de acoplamento $g_{\pi NN}$ e g_A . Esta correlação não deve ser confundida com a relação de Goldberger- Treinman, pois, neste caso, é

$G_{\pi NN}(0)$ e não $g_{\pi NN}$ que está envolvido. Os resultados numéricos para as várias formas da lagrangiana consideradas são mostradas na fig.(6.1), que indica haver uma relação linear, independente da forma da lagrangiana, entre g_A e $g_{\pi NN}$. Assim, mesmo não estando ligadas por expressões analíticas, os vários modelos promovem uma equivalência entre estas grandezas que não podem, por isso, ser consideradas independentes.

Figura 6.1: *Correlação I: $g_{\pi NN}$ X g_A .*

No capítulo 4 já havíamos indicado a existência de uma correlação entre $\lambda/A^{\frac{3}{2}}$ e $\langle r_E^2 \rangle_B / A$, associados às integrais S_1 e S_3 , respectivamente. O nosso estudo mostrou que essas grandezas também estão correlacionadas à massa clássica do bárion, como mostram as figs.(6.2) e (6.3).

As correlações eletromagnéticas mencionadas por Nyman e Riska [NR 90] e Meier [Mei 92], em conjunto com as obtidas neste trabalho, indicam que o número de objetos realmente independentes nos modelos considerados são apenas quatro. Isso acontece por que existem correlações explícitas ou numéricas, inerentes à estrutura desses modelos. Estas correlações determinam quatro blocos de grandezas cujo comportamento é uniforme:

Figura 6.2: Correlação II: $M \times \lambda$.

$\frac{\lambda < r_E^2 >_V}{A^{\frac{5}{2}}}$ $\frac{\mu^V < r_E^2 >_V}{A^{\frac{5}{2}}}$ $\frac{\lambda < r_M^2 >_V}{A^{\frac{5}{2}}}$ $\frac{\mu^V < r_M^2 >_V}{A^{\frac{5}{2}}}$	$\frac{< r_M^2 >_B \mu^B \mu^V}{A^2}$ $\frac{< r_M^2 >_B < r_E^2 >_B}{A^2}$ $\frac{< r_M^2 >_B \lambda \mu^B}{A^2}$	$\frac{M}{\sqrt{A}}$ $\frac{\lambda}{A^{\frac{3}{2}}}$ $\frac{< r_E^2 >_B}{A}$	$g_{\pi NN}$ $G(0)$ g_A
---	---	--	---------------------------

A existência de quatro grandes blocos de grandezas interdependentes constitui uma das principais previsões dos modelos considerados. É importante notar que, dentro de cada bloco, as correlações dependem apenas da estrutura de cada modelo, e não de particulares escolhas de parâmetros. Por isso, os testes da validade experimental das correlações constitui o desafio maior de um dado modelo.

Os dois primeiros destes quatro blocos representam correlações analíticas, já que as grandezas em cada um deles depende apenas de uma integral. O teste das correlações numéricas é feito comparando-se as previsões numéricas do modelo com os valores medi-

Figura 6.3: *Correlação III: $M X < r_E^2 >_B$.*

dos desses observáveis. Nas figs.(6.4)-(6.6) apresentamos alguns exemplos deste tipo de comparação.

A inspeção dessas figuras mostra que as correlações envolvendo a massa clássica ficam distantes dos valores experimentais. Isso, provavelmente, é devido ao fato de seu valor depender da aproximação do rotor rígido.

O método de análise desenvolvido neste trabalho permite várias extensões interessantes. Uma delas é a busca de lagrangianas de curto alcance mais flexíveis, tais como as envolvendo combinações lineares de termos estabilizadores de quarta e sexta ordens. Uma outra consiste no estudo mais detalhado das causas matemáticas das correlações numéricas observadas. Por fim, será interessante investigar se as correlações obtidas aqui permanecem válidas no caso de modelos híbridos, onde os bárions são concebidos parte como sólitons parte como sacolas de quarks.

Figura 6.4: Teste da correlação I. O ponto escuro representa o resultado experimental.

Figura 6.5: Teste da correlação II. O ponto escuro representa o resultado experimental.

Figura 6.6: *Teste da correlação III. O ponto escuro representa o resultado experimental.*

Apêndice A

Unidades e Notação

A.1 Unidades Naturais

Normalmente, em problemas de física, utilizamos os sistemas de unidades c.g.s. e S.I., nos quais as dimensões fundamentais, em termos das quais as outras unidades são expressas, são massa (M), comprimento (L) e o tempo (T). Em teoria de campos relativística, entretanto, as expressões e os cálculos ficam muito simplificados se usarmos as “unidades naturais”. Com essas unidades as dimensões fundamentais são a massa, a ação (A) e a velocidade (V) e tomam $\hbar$ e c como unidades de ação e velocidade respectivamente. Então, as unidades do S.I. e c.g.s. são transformadas em unidades naturais fazendo-se $\hbar = c = 1$. Neste sistema todas as grandezas têm dimensão de potências de M.

Como L e T são dados por

$$L = \frac{A}{MV} \quad e \quad T = \frac{A}{MV^2} . \quad (\text{A.1})$$

um resultado geral expresso no S.I. vale

$$M^p L^q T^r = M^{p-q-r} A^{q+r} V^{-q-2r} , \quad (\text{A.2})$$

e, desta forma, em unidades naturais ele tem dimensão M^{p-q-r} . Nessas unidades muitas grandezas têm a mesma dimensão. Por exemplo, a relação entre momento e energia para uma partícula, em unidades naturais se torna

$$E^2 = m^2 + p^2 . \quad (\text{A.3})$$

deixando claro que massa, momento e energia têm todos a mesma dimensão natural M.

GRANDEZA	S.I.			UNIDADES NATURAIS (M) ⁿ
	p	q	r	
Ação	1	2	-1	0
Velocidade	0	1	-1	0
Massa	0	0	0	1
Comprimento	0	1	0	-1
Tempo	0	0	1	-1
Densidade lagrangiana ou Hamiltoniana	1	-1	-2	4
Constante de estrutura fina (α)	0	0	0	0
Carga elétrica	1/2	3/2	-1	0
Campo bosônico $\phi(x)$	1/2	1/2	-1	1
Campo eletromagnético $A^\mu(x)$	1/2	1/2	-1	1
Campo fermiônico $\psi(x)$	0	-3/2	0	3/2
Seção de choque σ	0	2	0	-2

Tabela A.1: Algumas grandezas físicas e suas unidades naturais [MS 86]

A partir da relação geral (A.2) podemos gerar todas as grandezas em unidades naturais, sendo que algumas das mais importantes estão listadas na tabela A.1.

Para se converter um resultado em unidades naturais para outro sistema qualquer de unidades basta multiplicar o resultado por $\hbar^a c^b$ e calcular a e b de modo a termos a dimensão correta.

A.2 Notação

Neste trabalho os índices de Lorentz, usados nas componentes de um quadrivetor, serão rotulados por letras gregas $\alpha, \beta, \mu, \nu \dots$ e os índices espaciais, empregados nas componentes de um trivetor, por letras latinas $i, j, k, l, m, n \dots$. Os vetores no espaço tridimensional serão sempre escritos em negrito, bem como os vetores no isoespaço.

Um trivetor com chapéu ($\hat{}$) é um vetor unitário ou versor

$$\hat{r}_i = \frac{r_i}{r}, \quad (\text{A.4})$$

onde $r = \sqrt{r_j r_j}$.

Sob a ação da derivada temos

$$\partial_i r = \hat{r}_i \quad (\text{A.5})$$

e

$$\partial_i \hat{r}_a = \frac{1}{r} (\delta_{ia} - \hat{r}_i \hat{r}_a) , \quad (\text{A.6})$$

onde $\partial_i = \frac{\partial}{\partial r_i}$.

Representamos um quadrivetor qualquer por

$$a^\mu = \{a_0, \mathbf{a}\} . \quad (\text{A.7})$$

No caso específico do quadrivetor espaço-tempo usamos

$$x^\mu = (t, \mathbf{x}) , \quad (\text{A.8})$$

pois empregamos sempre as unidades naturais.

O tensor métrico $g^{\mu\nu}$ é usado na seguinte convenção

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad (\text{A.9})$$

sendo que as grandezas covariantes são obtidas na forma usual

$$a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu = \{a_0, -\mathbf{a}\} , \quad (\text{A.10})$$

onde usamos a convenção de soma de Einstein. A relação entre $g_{\mu\nu}$ e $g^{\lambda\mu}$ se obtém da contração

$$g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} = g^\lambda_\nu = \delta^\lambda_\nu = \delta_{\lambda\nu} , \quad (\text{A.11})$$

onde $\delta_{\lambda\nu}$ é o delta de Kronecker que vale 1 para $\lambda = \nu$ e é nulo para $\lambda \neq \nu$.

De (A.9) e (A.11) temos que:

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} . \quad (\text{A.12})$$

O produto escalar de dois quadrivetores é dado por

$$a \cdot b = a^\mu g_{\mu\nu} b^\nu = a^\mu b_\mu = (a_0 b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) , \quad (\text{A.13})$$

e é invariante por transformações de Lorentz.

As derivadas covariantes e contravariantes são

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \text{e} \quad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} . \quad (\text{A.14})$$

O quadridivergente de um quadrivetor V^μ é o escalar

$$\partial_\mu V^\mu = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\mu}, \quad (\text{A.15})$$

enquanto que o quadridivergente de uma função escalar ϕ transforma-se como um quadri-
vetor

$$\partial_\mu \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}. \quad (\text{A.16})$$

A ação de ∂^μ sobre (A.16) produz o operador d'Alembertiano

$$\square \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\mu \partial x^\mu} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi. \quad (\text{A.17})$$

A.3 Os Tensores De Levi-Civita

Nós definimos $\varepsilon_{ijk} = +1(-1)$ para (i, j, k) sendo permutações pares (ímpares) de $(1, 2, 3)$ e $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\kappa} = -\varepsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} = +1(-1)$ para $(\mu, \nu, \lambda, \kappa)$ sendo permutações pares (ímpares) de $(0, 1, 2, 3)$. Algumas identidades envolvendo os símbolos de Levi-Civita são

$$\varepsilon_{0ijk} = \varepsilon_{ijk} \quad (\text{A.18})$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk} = \delta_{mn}^i = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm} \quad (\text{A.19})$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mjk} = 2\delta_{im} \quad (\text{A.20})$$

A.4 As Matrizes de Pauli

As matrizes τ_i são as matrizes de Pauli 2×2 , dadas por

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.21})$$

que são hermitianas, $\tau_i^\dagger = \tau_i$, e satisfazem a álgebra

$$\tau_i \tau_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk} \tau_k, \quad (\text{A.22})$$

que corresponde às seguintes relações de comutação e anticomutação

$$[\tau_i, \tau_j] = 2i\varepsilon_{ijk} \tau_k, \quad (\text{A.23})$$

$$\{\tau_i, \tau_j\} = 2\delta_{ij}, \quad (\text{A.24})$$

Os produtos contraídos dessas matrizes tem a forma

$$\tau_i \tau_i = 3, \quad (\text{A.25})$$

$$\tau_i \tau_a \tau_i = -\tau_a, \quad (\text{A.26})$$

$$\tau_i \tau_a \tau_b \tau_i = -\tau_a \tau_b + 4\delta_{ab}, \quad (\text{A.27})$$

$$\tau_i \tau_a \tau_b \tau_c \tau_i = 3\tau_a \tau_b \tau_c - 4(\tau_a \delta_{bc} - \tau_b \delta_{ca} + \tau_c \delta_{ab}). \quad (\text{A.28})$$

Os traços sobre elas fornecem

$$\text{tr}[1] = 2, \quad (\text{A.29})$$

$$\text{tr}[\tau_a] = 0, \quad (\text{A.30})$$

$$\text{tr}[\tau_a \tau_b] = 2\delta_{ab}. \quad (\text{A.31})$$

$$\text{tr}[\tau_a \tau_b \tau_c] = 2i\varepsilon_{abc}. \quad (\text{A.32})$$

$$\text{tr}[\tau_a \tau_b \tau_c \tau_d] = 2\{\delta_{ab}\delta_{cd} - \delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc}\}. \quad (\text{A.33})$$

Outra relação importante é a identidade de Fierz

$$\sum_{n=1}^3 (\tau_n)_{ab} (\tau_n)_{cd} = 2\delta_{ad}\delta_{cb} - \delta_{ab}\delta_{cd}. \quad (\text{A.34})$$

Apêndice B

O Skyrmion

Com o objetivo de não sobrecarregar a texto principal com muitas equações, reservamos este apêndice para definir algumas quantidades, apresentar a notação normalmente utilizada ao se tratar o modelo e também desenvolver um pouco da álgebra envolvida, principalmente para aqueles não familiarizados com ela. O texto que apresentamos neste e nos dois próximos apêndices foi baseado em vários artigos de revisão sobre o modelo [ZB 86, HS 86, NR 90, Adk 87, Mei 88, MZ 86b].

B.1 Campos e Lagrangianas

O modelo é formulado em termos de lagrangianas clássicas do tipo sigma não-linear, cujo termo cinético é dado por

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} \left[(\partial_\mu \pi)^2 + (\partial_\mu \sigma)^2 \right] , \quad (\text{B.1})$$

onde o campo escalar σ não representa um grau de liberdade independente, mas apenas uma função de π^2

$$\sigma = \sqrt{f_\pi^2 - \pi^2} . \quad (\text{B.2})$$

A derivada dessa função fornece

$$\partial_\mu \sigma = - \frac{\pi_a \partial_\mu \pi_a}{\sigma} . \quad (\text{B.3})$$

Substituindo em (B.1), temos

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} X_{ab} \partial_\mu \pi_a \partial^\mu \pi_b . \quad (\text{B.4})$$

onde X_{ab} é uma forma definida em termos desses campos

$$X_{ab} = \delta_{ab} + \frac{\pi_a \pi_b}{\sigma^2} . \quad (\text{B.5})$$

A eq.(B.2) é às vezes denominada vínculo quiral e torna conveniente o uso da parametrização

$$\begin{aligned} \sigma &= f_\pi \cos F \\ \boldsymbol{\pi} &= f_\pi \sin F \hat{\boldsymbol{\pi}} . \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Estas duas variáveis podem ser agrupadas na chamada “forma de Sugawara”, definida por

$$U = e^{i\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}} F} = \cos F + i\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}} \sin F . \quad (\text{B.7})$$

O vínculo quiral faz com que o campo U satisfaça a condição de unitariedade

$$U^\dagger U = U U^\dagger = 1 . \quad (\text{B.8})$$

Usando (B.6) e (B.7), podemos reescrever

$$U = \frac{1}{f_\pi} (\sigma + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}) . \quad (\text{B.9})$$

Em termos de U , $\mathcal{L}_2$ pode ser reexpresso como

$$\mathcal{L}_2 = \frac{f_\pi^2}{4} \text{tr} [\partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U] . \quad (\text{B.10})$$

Em algumas aplicações, é conveniente empregarmos as formas direita (R^μ) e esquerda (L^μ), definidas por

$$\begin{aligned} L_\mu &= U^\dagger \partial_\mu U \\ R_\mu &= U \partial_\mu U^\dagger . \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

A derivada da eq.(B.8)

$$\begin{aligned} (\partial_\mu U) U^\dagger + U \partial_\mu U^\dagger &= 0 \\ (\partial_\mu U^\dagger) U + U^\dagger \partial_\mu U &= 0 . \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

permite-nos concluir que

$$\begin{aligned} L_\mu^\dagger &= \partial_\mu U^\dagger U = -L_\mu \\ R_\mu^\dagger &= \partial_\mu U U^\dagger = -R_\mu . \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

A densidade $\mathcal{L}_2$ pode ser reescrita em termos de L^μ ou R^μ

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 &= -\frac{f_\pi^2}{4} \text{tr}\{L_\mu L^\mu\} \\ &= -\frac{f_\pi^2}{4} \text{tr}\{R_\mu R^\mu\} .\end{aligned}\quad (\text{B.14})$$

Usando (B.9) podemos escrever L_μ e R_μ em termos de σ e π

$$L_\mu = \frac{1}{f_\pi^2} i\tau \cdot [\pi \times \partial_\mu \pi + \sigma \partial_\mu \pi - \pi \partial_\mu \sigma] \equiv i\tau \cdot \mathbf{L}_\mu , \quad (\text{B.15})$$

onde o isovetor $\mathbf{L}_\mu$, no espaço de isospin, tem as componentes

$$L_{a\mu} = \frac{1}{f_\pi^2} [\varepsilon_{abc} \pi_b \partial_\mu \pi_c + \sigma \partial_\mu \pi_a - \pi_a \partial_\mu \sigma] . \quad (\text{B.16})$$

A expressão de R_μ pode ser obtida a partir de L_μ trocando-se U por $U^\dagger$, o que é equivalente a trocar π por $-\pi$. Então

$$R_\mu = \frac{1}{f_\pi^2} i\tau \cdot [\pi \times \partial_\mu \pi - \sigma \partial_\mu \pi + \pi \partial_\mu \sigma] \equiv i\tau \cdot \mathbf{R}_\mu , \quad (\text{B.17})$$

e

$$R_{a\mu} = \frac{1}{f_\pi^2} [\varepsilon_{abc} \pi_b \partial_\mu \pi_c - \sigma \partial_\mu \pi_a + \pi_a \partial_\mu \sigma] . \quad (\text{B.18})$$

A vantagem das forma L_μ e R_μ reside no fato de que elas se modificam de modo simples por transformações vetoriais (isospin) e axiais. Lembrando que

$$\begin{aligned}\delta^V \pi &= \alpha \times \pi & \delta^A \pi &= -\beta \sigma \\ \delta^V \sigma &= 0 & \delta^A \sigma &= \beta \cdot \pi ,\end{aligned}\quad (\text{B.19})$$

obtemos

$$\begin{aligned}\delta^V \mathbf{L}_\mu &= \alpha \times \mathbf{L}_\mu \\ \delta^A \mathbf{L}_\mu &= -\beta \times \mathbf{L}_\mu \\ \delta^V \mathbf{R}_\mu &= \alpha \times \mathbf{R}_\mu \\ \delta^A \mathbf{R}_\mu &= \beta \times \mathbf{R}_\mu .\end{aligned}\quad (\text{B.20})$$

Estes resultados mostram que tanto δ^V como δ^A produzem isorotações em $\mathbf{L}_\mu$ e $\mathbf{R}_\mu$, de modo que qualquer isoescalar construído a partir de cada um deles é um invariante quiral.

Assim, ao escrevermos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 &= \frac{f_\pi^2}{2} \{ \mathbf{L}_\mu \cdot \mathbf{L}^\mu \} \\ &= \frac{f_\pi^2}{2} \{ \mathbf{R}_\mu \cdot \mathbf{R}^\mu \} ,\end{aligned}\tag{B.21}$$

fica evidente que esses termos da lagrangiana são invariantes quirais.

As equações de movimento correspondentes à densidade de lagrangiana (B.10) não tem soluções solitônicas estáveis (ver capítulo 3), o que levou Skyrme [Sky 61] a adicionar a $\mathcal{L}_2$ um termo da forma:

$$\mathcal{L}_4 = \frac{1}{32e^2} \text{tr} \left\{ [U^\dagger \partial_\mu U, U^\dagger \partial_\nu U]^2 \right\} .\tag{B.22}$$

Assim a densidade de lagrangiana do modelo de Skyrme original é

$$\mathcal{L}_{SK} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_{qs} .\tag{B.23}$$

onde $\mathcal{L}_{qs}$ é um termo de quebra explícita da simetria quiral, incluído quando se quer dotar o pión de uma massa não nula, como requer a fenomenologia. A forma usualmente utilizada é

$$\mathcal{L}_{qs} = \frac{1}{2} m_\pi^2 f_\pi^2 (\text{tr} U - 2) .\tag{B.24}$$

As expressões apresentadas até aqui definem a linguagem utilizadas na grande maioria dos trabalhos sobre o modelo de Skyrme. Relacionamos abaixo os vários modos de se escrever os termos da lagrangiana nessas diferentes notações:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 &= \frac{f_\pi^2}{4} \text{tr} [\partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U] \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \boldsymbol{\pi} \partial^\mu \boldsymbol{\pi} + \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma) = \frac{1}{2} X_{ab} \partial_\mu \pi_a \partial^\mu \pi_b \\ &= -\frac{f_\pi^2}{4} \text{tr} [L_\mu L^\mu] = \frac{f_\pi^2}{2} L_{\mu a} L_a^\mu \\ &= \frac{f_\pi^2}{4} \text{tr} [R_\mu R^\mu] = -\frac{f_\pi^2}{2} R_{\mu a} R_a^\mu .\end{aligned}\tag{B.25}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_4 &= \frac{1}{32e^2} \text{tr} \{ [U^\dagger \partial_\mu U, U^\dagger \partial_\nu U]^2 \} \\ &= \frac{1}{8e^2 f_\pi^4} \text{tr} \{ (\partial_\mu \pi_a \partial_\nu \pi_a + \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma) (\partial^\mu \pi_a \partial^\nu \pi_a + \partial^\mu \sigma \partial^\nu \sigma) \\ &\quad - (\partial_\mu \pi_a \partial^\mu \pi_a + \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma) (\partial_\nu \pi_a \partial^\nu \pi_a + \partial_\nu \sigma \partial^\nu \sigma) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4e^2 f_\pi^4} (X_{ac}X_{bd} - X_{ad}X_{bc}) \partial_\mu \pi_a \partial_\nu \pi_b \partial^\mu \pi_c \partial^\nu \pi_d \\
&= \frac{1}{32e^2} \text{tr} \{ [L_\mu, L_\nu]^2 \} = \frac{1}{4e^2} \{ L_{\mu a} L_{\nu a} L_b^\mu L_b^\nu - L_{\mu a} L_a^\mu L_{\nu b} L_b^\nu \} . \quad (\text{B.26})
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{qs} = \frac{1}{2} m_\pi^2 f_\pi^2 (\text{tr}[U] - 2) = m_\pi^2 f_\pi (\sigma - f_\pi) . \quad (\text{B.27})$$

B.2 A Corrente Bariônica

A existência de uma corrente topológica B^μ conservada é uma das características fundamentais do modelo. Skyrme identificou esta corrente com a corrente bariônica e associou a carga topológica ao número bariônico. A corrente B^μ não é do tipo Noether, uma vez que ela não está associada a nenhuma simetria da lagrangiana, e sua conservação se dá independentemente da forma dessa lagrangiana.

A corrente bariônica tem a forma

$$\begin{aligned}
B^\mu &= \frac{1}{24\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr} [(U^\dagger \partial_\nu U)(U^\dagger \partial_\alpha U)(U^\dagger \partial_\beta U)] \\
&= \frac{1}{24\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr} [L_\nu L_\alpha L_\beta] . \quad (\text{B.28})
\end{aligned}$$

A “carga” associada ao número bariônico é dada por:

$$B = \int B^0 d^3r , \quad (\text{B.29})$$

onde a densidade bariônica B^0 é

$$B^0 = \frac{1}{24\pi^2} \varepsilon^{0ijk} \text{tr} [L_i L_j L_k] = \frac{-1}{24\pi^2} \varepsilon_{ijk} 2\varepsilon_{abc} L_{ia} L_{jb} L_{kc} . \quad (\text{B.30})$$

A conservação de B^μ pode ser mostrada matematicamente calculando-se a sua divergência

$$\partial_\mu B^\mu = \frac{1}{24\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr} \{ \partial_\mu (L_\nu L_\alpha L_\beta) \} . \quad (\text{B.31})$$

Efetuando-se os traços sobre as matrizes τ , usando-se as eqs.(B.15) e (B.16) e as relações entre os símbolos de Levi-Civita dadas no apêndice A, chegamos a

$$\partial_\mu B^\mu = \frac{12}{3\pi^2 f_\pi^4} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{abc} \partial_\mu \sigma \partial_\nu \pi_a \partial_\alpha \pi_b \partial_\beta \pi_c . \quad (\text{B.32})$$

Usando o vínculo quiral, eq.(B.3), temos

$$\partial_\mu B^\mu = \frac{12}{3\pi^2 f_\pi^4} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{abc} \frac{\pi_d}{\sigma} [\partial_\mu \pi_d \partial_\nu \pi_a \partial_\alpha \pi_b \partial_\beta \pi_c] = 0 . \quad (\text{B.33})$$

pois existem apenas três píons diferentes, o que faz com que o índice d seja necessariamente igual a a, b ou c , anulando a divergência devido a antissimetria de $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$.

Assim, a corrente bariônica é conservada por uma razão geométrica, qual seja, por que existem quatro graus de liberdade no espaço-tempo e apenas três graus de liberdade no espaço de isospin (isoespaço).

B.3 O Ouriço

Um outro elemento importante do modelo de Skyrme é a configuração do campo, para o qual se faz a seguinte hipótese

$$\hat{\pi} = \hat{r} , \quad (B.34)$$

ou seja, a cada ponto do espaço associa-se um isovetor que aponta numa direção radial com respeito à origem espacial onde o objeto está localizado.

Para se obter o sóliton de Skyrme usa-se (B.34) na densidade de lagrangiana, com a seguinte condição de contorno sobre U

$$U(\mathbf{r} \rightarrow \infty) = 1 , \quad (B.35)$$

uma vez que a energia deve estar confinada em uma região limitada do sistema. A condição (B.35) corresponde a

$$F(r \rightarrow \infty) = m\pi , \quad m = 0, 1, 2, 3 \dots , \quad (B.36)$$

já que U é dado por

$$U(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{r}} F(r)} , \quad (B.37)$$

a partir das eqs.(B.7) e (B.34).

Além das condições (B.35) e (B.36), para que o campo seja definido de modo único na origem, devemos ter

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r} \rightarrow 0) &= 1 \\ F(r \rightarrow 0) &= n\pi , \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots \end{aligned} \quad (B.38)$$

Para calcular o número bariônico B , expressamos B^0 em termos do ouriço, usando as eqs.(B.15),(B.16) e (B.30). Do ouriço temos:

$$\begin{aligned} \sigma &= f_\pi c \\ \pi_a &= f_\pi s \hat{r}_a . \end{aligned} \quad (B.39)$$

onde

$$\begin{aligned} c &\equiv \cos F(r) \\ s &\equiv \sin F(r) . \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

As derivadas dos campos são obtidas com o auxílio das eqs.(A.5) e (A.6):

$$\partial_i \sigma = -f_\pi s F' \hat{r}_i \quad (\text{B.41})$$

$$\partial_i \pi_a = f_\pi \left[\frac{s}{r} \delta_{ia} + \left(c F' - \frac{s}{r} \right) \hat{r}_i \hat{r}_a \right] , \quad (\text{B.42})$$

onde $F' = \frac{d}{dr} F(r)$.

Substituindo (B.41) e (B.42) em (B.16) obtemos

$$L_{ia} = \frac{sc}{r} \delta_{ia} + \left(F' - \frac{sc}{r} \right) \hat{r}_i \hat{r}_a + \frac{s^2}{r} \varepsilon_{ian} \hat{r}_n . \quad (\text{B.43})$$

Inserindo (B.43) em (B.30) e usando as eqs.(A.19) e (A.20), encontramos

$$B^0 = \frac{-1}{2\pi^2} \frac{s^2}{r^2} F' . \quad (\text{B.44})$$

O número bariônico é dado pela eq.(B.29)

$$B = \int B^0 d^3r = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty dr s^2 F' = -\frac{2}{\pi} \int_{n\pi}^{m\pi} dF \frac{1}{2} (1 + \cos 2F) = n - m . \quad (\text{B.45})$$

Assim, o número bariônico do sistema é a diferença das condições de contorno na origem e no infinito. Como é apenas a diferença que está em questão, podemos tomar, por convenção, $m = 0$. Logo

$$\begin{aligned} B &= 0 \text{ se } F(0) = 0 , \\ B &= 1 \text{ se } F(0) = \pi , \\ B &= 2 \text{ se } F(0) = 2\pi \text{ etc...} \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

Um sóliton poderá ser associado a essas condições de contorno se existir uma solução com energia finita para as equações de Euler-Lagrange no setor topológico $B = n$. A variável destas equações é a função $F(r)$, denominada ângulo quiral. As condições de contorno determinam de antemão os comportamentos na origem e no infinito. A forma da parte intermediária é obtida a partir da lagrangiana, que também determina, entre

outras coisas, a massa e o tamanho do sólito. Para reescrevê-la em termos do ouriço, usamos (B.43) para obter

$$L_{ai}L_{aj} = \frac{s^2}{r^2}\delta_{ij} + \left(F'^2 - \frac{s^2}{r^2}\right)\hat{r}_i\hat{r}_j \quad (\text{B.47})$$

e, quando $i = j$,

$$L_{ai}L_{ai} = \frac{2s^2}{r^2} + F'^2. \quad (\text{B.48})$$

Usando esses resultados nas eqs.(B.25)-(B.27) obtemos a densidade de lagrangiana estática do modelo de Skyrme tradicional, cuja expressão é:

$$\mathcal{L} = -\frac{f_\pi^2}{2} \left\{ F'^2 + \frac{2s^2}{r^2} \right\} - \frac{1}{4e^2} \left\{ 4\frac{s^2}{r^2}F'^2 + 2\frac{s^4}{r^4} \right\} + m_\pi^2 f_\pi^2 (c - 1). \quad (\text{B.49})$$

A determinação das equações de Euler-Lagrange, que correspondem a uma equação diferencial para F , é feita no capítulo 3.æ

Apêndice C

A Quantização do Sóliton de Skyrme

O sóliton obtido por meio da lagrangiana de Skyrme é um objeto clássico, representa uma pelota de energia concentrada numa região do espaço. Entretanto, um objeto clássico não tem valores definidos para o spin e o isospin, requisito que qualquer modelo razoável de núcleons deve cumprir. A introdução de spin e isospin no modelo foi feita por Adkins, Nappi e Witten [ANW 83, AN 84]. Para tanto, efetua-se uma transformação unitária dependente do tempo nas coordenadas do sóliton, permitindo a definição de momentos canônicos e, em seguida, impõe-se que esses momentos não comutem com as coordenadas correspondentes, o que significa quantizar o sóliton clássico. Assim, os estados de spin e isospin aparecem juntos, como estados quantizados de coordenadas coletivas.

No modelo de Skyrme rotações de isospin e rotações espaciais são equivalentes. De maneira mais formal isso significa que o ouriço força a igualdade entre os operadores de spin e isospin $\mathbf{J}^2 = \mathbf{I}^2$, fazendo com que os estados como o núcleon, que têm spin 1/2, tenham também isospin 1/2 e estados como o delta, que têm spin 3/2 tenham isospin igual a 3/2.

C.1 O Sóliton Rodado

Uma rotação de isospin do sóliton clássico tem a forma

$$U(\mathbf{r}, t) = A(t)U(\mathbf{r})A^\dagger(t) . \quad (\text{C.1})$$

onde $A(t) \in SU(2)$ e $AA^\dagger = A^\dagger A = 1$. O sóliton estático $U(\mathbf{r})$ costuma ser representado por $U_0(\mathbf{r})$ ou $U_c(\mathbf{r})$ em casos onde pode haver alguma confusão com a solução dependente do tempo $U(\mathbf{r}, t)$.

A matriz A é arbitrária, desde que pertença a $SU(2)$, e como tal pode ser parametrizada da seguinte forma:

$$A(t) = a_0(t) + i\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{a}(t), \quad (\text{C.2})$$

onde $a_0(t)$ e $\mathbf{a}(t)$ são quatro parâmetros reais, identificados como as coordenadas coletivas do skyrmion.

A condição de unitariedade de A fornece

$$A^\dagger A = (a_0 - i\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{a})(a_0 + i\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{a}) = a_0^2 + \mathbf{a}^2 = 1, \quad (\text{C.3})$$

de modo que estas coordenadas estão vinculadas à superfície de uma esfera em quatro dimensões.

Com $A(t)$ dada por (C.2), podemos expressar várias quantidades em termos das variáveis a_n . A forma do sóliton rodado, por exemplo, pode ser calculada como segue:

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}, t) &= A(t)U_c(\mathbf{r})A^\dagger(t) = (a_0 + i\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{a})(c + i\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{r}}s)(a_0 - i\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{a}) \\ &= c + i\boldsymbol{\tau} \cdot [2a_0(\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{a}) + 2\mathbf{a}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{a}) + (a_0^2 - \mathbf{a}^2)\hat{\mathbf{r}}]s \\ &= c + i\tau_a D_{aj}(t)\hat{r}_j s. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

onde

$$D_{aj} = 2 \left[\varepsilon_{ajk} a_0 a_k + a_j a_k + \frac{1}{2}(a_0^2 - \mathbf{a}^2)\delta_{aj} \right]. \quad (\text{C.5})$$

Nestas expressões, D_{aj} representa a matriz de rotação, que tem um papel muito importante na física dos Skyrmions, pois é nela que estão contidas as coordenadas coletivas e, assim, a dependência temporal do sóliton.

Alternativamente, da transformação (C.1) podemos obter

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}, t) = A(t)U_c(\mathbf{r})A^\dagger(t) &= A(t)\epsilon^{i\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{r}F(r)}A^\dagger(t) \\ &= \epsilon^{iA\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{r}A^\dagger F(r)} \\ &= \epsilon^{i\tau_a D_{aj}(t)\hat{r}_j F(r)}, \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

onde

$$A\tau_j A^\dagger = \tau_a D_{aj}, \quad (\text{C.7})$$

com

$$D_{aj} = \frac{1}{2} \text{tr}[\tau_a A \tau_j A^\dagger] \quad (\text{C.8})$$

Em seguida, listamos algumas propriedades das matrizes D_{aj} que serão bastante utilizadas neste trabalho.

A matriz D_{aj} é real:

$$D_{aj}^* = \frac{1}{2} \text{tr}[(\tau_a A \tau_j A^\dagger)^*] = \frac{1}{2} \text{tr}[A \tau_j A^\dagger \tau_a] = D_{aj} \quad (\text{C.9})$$

onde usamos a propriedade do traço: $\text{tr}[AB] = \text{tr}[BA]$.

D_{aj} é ortogonal:

$$\begin{aligned} D_{aj} D_{bj} &= \frac{1}{2} \text{tr}[\tau_a A \tau_j A^\dagger] \frac{1}{2} \text{tr}[\tau_b A \tau_j A^\dagger] \\ &= \frac{1}{4} (A^\dagger \tau_a A)_{cd} (\tau_j)_{dc} (A^\dagger \tau_b A)_{eg} (\tau_j)_{ge} , \end{aligned}$$

usando (A.34) temos

$$D_{aj} D_{bj} = \delta_{ab} , \quad (\text{C.10})$$

que é equivalente a $D^T = D^{-1}$. Da relação acima podemos obter outra propriedade importante

$$1 = \det(D^T D) = \det(D^T) \det(D) = (\det D)^2 , \quad (\text{C.11})$$

de modo que as possibilidades são $\det D = \pm 1$, no entanto, como qualquer matriz $A \in SU(2)$ pode ser obtida da matriz unidade 2×2 por deformações contínuas, o determinante de D deve ser continuamente relacionado ao valor $+1$, de modo que $\det D = +1$. No jargão da teoria de grupo, essas relações são devidas ao isomorfismo entre o grupo $SO(3)$ das matrizes de rotação e o grupo $SU(2)$.

É conveniente definir-se uma quantidade relacionada à velocidade angular do sóliton na forma

$$K = A^\dagger \partial_0 A = i \tau_a K_a . \quad (\text{C.12})$$

As componentes K_a podem ser escritas como

$$K_a = -\frac{i}{2} \text{tr}(\tau_a A^\dagger \partial_0 A) . \quad (\text{C.13})$$

e para elas vale a relação

$$K_a K_a = \frac{1}{2} \text{tr}(\partial_0 A^\dagger \partial_0 A) . \quad (\text{C.14})$$

Combinando as expressões acima com (C.8) obtemos as seguintes relações:

$$K_a D_{ab} = \frac{i}{2} \text{tr} [\tau_a A \partial_0 A^\dagger] \quad (\text{C.15})$$

e

$$D_{aj} \partial_0 D_{ai} = -i \varepsilon_{jib} \text{tr} [\tau_b A^\dagger \partial_0 A] = 2 \varepsilon_{jib} K_b, \quad (\text{C.16})$$

onde usamos (A.23) e (A.34), além da unitariedade de A . De grande importância é expressar a quantidade $K_a K_a$ em termos dos a_n . Usando (C.14) temos

$$\begin{aligned} K_a K_a &= \frac{1}{2} \text{tr} [\partial_0 (a_0 - i \tau_i a_i) \partial_0 (a_0 + i \tau_j a_j)] \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} [(\partial_0 a_0)^2 + \tau_i \tau_j \partial_0 a_i \partial_0 a_j] \\ &= (\partial_0 a_0)^2 + (\partial_0 a_i)^2. \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Em (B.7) vimos que o campo $U(\mathbf{r})$ pode ser escrito como:

$$U_c(\mathbf{r}) = \cos F + i \boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}} \sin F. \quad (\text{C.18})$$

Usando (C.4) é possível escrever os análogos rodados dos campos σ e $\boldsymbol{\pi}$ como

$$\sigma = \sigma_c(\mathbf{r}) = c, \quad (\text{C.19})$$

$$\pi_a = D_{aj}(t) \pi_j^c(\mathbf{r}) = D_{aj}(t) f_\pi \hat{r}_j, \quad (\text{C.20})$$

$$X_{ab} = D_{an} D_{bm} \left(\delta_{nm}^T + \frac{\hat{r}_n \hat{r}_m}{c^2} \right) = D_{an} D_{bm} X_{nm}^c, \quad (\text{C.21})$$

onde

$$\delta_{nm}^T = \delta_{nm} - \hat{r}_n \hat{r}_m, \quad (\text{C.22})$$

As derivadas dos campos são dadas por:

$$\begin{aligned} \partial_0 \pi_a &= (\partial_0 D_{aj}(t)) \pi_j^c \\ &= D_{ab} 2 \varepsilon_{bjd} \pi_j^c \dot{K}_d, \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

$$\begin{aligned} \partial_i \pi_a &= D_{aj}(t) (\partial_i \pi_j^c) \\ &= D_{aj}(t) f_\pi \left[\frac{s}{r} \delta_{ij}^T + c F' \hat{r}_i \hat{r}_j \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

e

$$\partial_i \sigma = -f_\pi s F' \hat{r}_i. \quad (\text{C.25})$$

Onde usamos (B.41) e (B.42). Outras relações que podem ser obtidas através das quantidades dadas nesta seção são:

$$\varepsilon_{nia}\varepsilon_{mjb}\hat{r}_i\hat{r}_jX_{nm}^c = \delta_{ab}^T, \quad (C.26)$$

$$(\partial_j\pi_a^c)X_{ia}^c = f_\pi \left(\frac{s}{r}\delta_{ij} + \frac{cF'}{c^2}\hat{r}_i\hat{r}_j \right), \quad (C.27)$$

$$(\partial_j\pi_m^c)X_{am}^c(\partial_j\pi_i^c)X_{bi}^c = f_\pi^2 \left(\frac{s^2}{r^2}\delta_{ab} + \frac{F'^2}{c^2}\hat{r}_a\hat{r}_b \right). \quad (C.28)$$

C.2 A Lagrangiana Rodada

A dinâmica da rotação é descrita pela densidade de lagrangiana de Skyrme construída por meio dos campos rodados ao invés dos estáticos, ou seja, trocando-se $U(\mathbf{r})$ por $U(\mathbf{r}, t)$. A nova densidade de lagrangiana é composta por dois termos: o termo estático, explicitado no apêndice B, que só contém derivadas espaciais e dá origem a massa clássica do sóliton, e um outro, que envolve derivadas temporais e é responsável pelo espectro de rotação do skyrmion.

Para chegarmos à densidade de lagrangiana numa forma conveniente para definirmos os momentos canonicamente conjugados, podemos proceder de duas maneiras. A primeira é partir das expressões (B.25)-(B.27) com $\mathcal{L}^q$ na forma

$$\mathcal{L}^q = -\frac{f_\pi^2}{4}\text{tr}[L_\mu L^\mu] + \frac{1}{16e^2}\text{tr}[L_\mu L_\nu L^\mu L^\nu - L_\mu L^\mu L_\nu L^\nu] + m_\pi^2 f_\pi \sigma \quad (C.29)$$

e usar as novas versões das funções L_μ definidas em (B.11)

$$L_\mu = U^\dagger(\mathbf{r}, t)\partial_\mu U(\mathbf{r}, t). \quad (C.30)$$

Nesse caso, as componentes temporais e espaciais ficam dadas por

$$L_0 = U^\dagger(\mathbf{r}, t)\partial_0 U(\mathbf{r}, t) = (c - i\tau_a D_{aj}(t)\hat{r}_j s)\partial_t(c + i\tau_b D_{bk}(t)\hat{r}_k s) \quad (C.31)$$

e

$$\begin{aligned} L_j &= U^\dagger(\mathbf{r}, t)\partial_j U(\mathbf{r}, t) = [A(t)U_c(\mathbf{r})A^\dagger(t)]^\dagger \partial_j [A(t)U_c(\mathbf{r})A^\dagger(t)] \\ &= A(t)U_c^\dagger(\mathbf{r})A^\dagger(t)A(t)\partial_j U_c(\mathbf{r})A^\dagger(t) \\ &= A(t)U_c^\dagger(\mathbf{r})\partial_j U_c(\mathbf{r})A^\dagger(t) = A(t)L_{cj}(\mathbf{r})A^\dagger(t), \end{aligned} \quad (C.32)$$

onde $L_{cj}(\mathbf{r})$ é a função definida em (B.11).

Para obter a lagrangiana quantizada $\mathcal{L}^q$, substituímos as expressões (C.31) e (C.32) em (C.29) e, usamos algumas propriedades das matrizes D_{aj} dadas anteriormente, repetindo o procedimento adotado no apêndice B para a obtenção da lagrangiana clássica.

A outra maneira de se obter $\mathcal{L}^q$ consiste em utilizar as expressões dos campos rodados (C.19)-(C.21) em termos dos quais a densidade (C.29) fornece

$$\mathcal{L}^q = \frac{1}{2} X_{ab} \partial_\mu \pi_a \partial^\mu \pi_b - \frac{1}{4e^2 f_\pi^4} (X_{ac} X_{bd} - X_{ad} X_{bc}) \partial_\mu \pi_a \partial_\nu \pi_b \partial^\mu \pi_c \partial^\nu \pi_d + m_\pi^2 f_\pi (\sigma - f_\pi) ; \quad (C.33)$$

Podemos então expressar a densidade de lagrangiana (C.33) em termos do ouriço rodado. Começando com o termo quadrático temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2^q &= \frac{1}{2} X_{ab} \partial_\mu \pi_a \partial^\mu \pi_b = \frac{1}{2} D_{an} D_{bm} X_{nm}^c \{ (\partial_0 \pi_a) (\partial_0 \pi_b) - (\partial_j \pi_a) (\partial_j \pi_b) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ D_{an} (\partial_0 D_{ac}) \pi_\epsilon^c D_{bm} (\partial_0 D_{bf}) \pi_f^c - (\partial_j \pi_n^c) (\partial_j \pi_m^c) \} X_{nm}^c \end{aligned} \quad (C.34)$$

que, usando (C.16) e (C.24), fornece

$$\mathcal{L}_2^q = \frac{f_\pi^2}{2} \left\{ 4s^2 \delta_{ab}^T K_a K_b - \mathcal{L}_2^c \right\} . \quad (C.35)$$

O caso de $\mathcal{L}_4^q$ é um pouco mais complexo; ele é composto por uma parte estática, que possui apenas derivadas espaciais, um termo de quatro derivadas temporais e um termo mixto, com duas derivadas temporais e duas espaciais. O termo com quatro derivadas temporais se anula, pois pode ser posto na seguinte forma:

$$\mathcal{L}_4^{0000} = \frac{-1}{4e^2 f_\pi^4} \left(\delta_{ac}^T \delta_{bd}^T - \delta_{ad}^T \delta_{bc}^T \right) K_a K_b K_c K_d = 0 . \quad (C.36)$$

O termo com quatro derivadas espaciais fica dado por

$$\mathcal{L}_4^{jjkk} = \frac{-1}{4e^2 f_\pi^4} (X_{ab}^c X_{cd}^c - X_{cb}^c X_{ad}^c) (\partial_k \pi_a^c) (\partial_k \pi_b^c) (\partial_j \pi_c^c) (\partial_j \pi_d^c) , \quad (C.37)$$

que fornece a contribuição quártica estática dada na eq.(B.49)

$$\mathcal{L}_4 = \frac{-1}{4e^2} \frac{s^2}{r^2} \left(4F'^2 + \frac{2s^2}{r^2} \right) . \quad (C.38)$$

O termo mixto, por sua vez, tem a forma

$$\mathcal{L}_4^{00jj} = \frac{8}{4e^2 f_\pi^2} \left\{ \delta_{ab}^T K_a K_b s^2 (\partial_j \pi_c^c) (\partial_j \pi_d^c) X_{bc}^c - s^2 \varepsilon_{cba} K_a \hat{r}_b (\partial_j \pi_d^c) X_{bc}^c \varepsilon_{fgh} K_h \hat{r}_g (\partial_j \pi_i^c) X_{if}^c \right\} . \quad (C.39)$$

que corresponde à contribuição da rotação $\mathcal{L}_4^R$

$$\mathcal{L}_4^R = \frac{8}{4e^2} \left\{ s^2 \left(F'^2 + \frac{s^2}{r^2} \right) K_a \delta_{ab}^T K_b \right\} . \quad (C.40)$$

Assim, a densidade de lagrangiana para o sóliton em rotação assume a seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^q = & \frac{f_\pi^2}{2} \left\{ - \left(F'^2 + \frac{2s^2}{r^2} \right) + 4s^2 K_a \delta_{ab}^T K_b \right\} \\ & - \frac{1}{4e^2} \left\{ \frac{2s^2}{r^2} \left(2F'^2 + \frac{s^2}{r^2} \right) - 8s^2 \left(F'^2 + \frac{s^2}{r^2} \right) K_a \delta_{ab}^T K_b \right\} + m_\pi^2 f_\pi^2 (c - 1) \end{aligned} \quad (C.41)$$

A lagrangiana é dada por

$$L = \int d^3r \mathcal{L} , \quad (C.42)$$

fazendo com que tenhamos o seguinte resultado

$$L^q = -M + 2\lambda K_a K_a , \quad (C.43)$$

onde M é a massa clássica dada por

$$M = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \left\{ \frac{f_\pi^2}{2} \left(F'^2 + \frac{2s^2}{r^2} \right) + \frac{1}{2e^2} \frac{s^2}{r^2} \left(2F'^2 + \frac{s^2}{r^2} \right) + m_\pi^2 f_\pi^2 (1 - c) \right\} \quad (C.44)$$

e λ é o momento de inércia

$$\lambda = \frac{8\pi}{3} \int_0^\infty dr r^2 s^2 \left(f_\pi^2 + \frac{1}{e^2} \left(F'^2 + \frac{s^2}{r^2} \right) \right) , \quad (C.45)$$

onde usamos a fórmula de integração angular

$$\int d\Omega \hat{r}_a \hat{r}_b = \int d\Omega \frac{\delta_{ab}}{3} . \quad (C.46)$$

A expressão (C.43) representa a lagrangiana de um objeto clássico em rotação. Na seção seguinte encontraremos a Hamiltoniana do problema e expressaremos os momentos canonicamente conjugados em termos das coordenadas coletivas deste objeto.

C.3 Spin, Isospin e a Hamiltoniana Quântica

Na seção C.1 vimos que a rotação (C.1) introduz no problema a dependência temporal necessária para que os momentos canônicos possam ser definidos e, desse modo o processo

de quantização possa ser aplicado. Essa dependência temporal é transportada pelas matrizes D_{aj} que representam as rotações em torno do centro do sóliton e são expressas em termos de um conjunto de variáveis que denotam as coordenadas coletivas do skyrmion. Como veremos agora, é em termos dessas coordenadas que escreveremos as condições de quantização e os autoestados de spin e isospin.

Usando (C.17), a lagrangiana (C.43) pode ser escrita como

$$L = -M + 2\lambda \sum_{n=0}^3 (\dot{a}_n)^2 . \quad (C.47)$$

O momento canonicamente conjugado é dado por

$$\pi_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_n} = 4\lambda \dot{a}_n . \quad (C.48)$$

De acordo com o procedimento de quantização canônica devemos ter

$$[\pi_n, a_m] = -i\delta_{nm} \quad , \quad [\pi_n, \pi_m] = [a_n, a_m] = 0 , \quad (C.49)$$

de modo que podemos fazer a seguinte identificação

$$\pi_n = -i \frac{\partial}{\partial a_n} . \quad (C.50)$$

A Hamiltoniana pode ser obtida a partir da lagrangiana

$$H = \pi_n \dot{a}_n - L . \quad (C.51)$$

Usando a expressão (C.43), obtemos:

$$H = M + \frac{1}{8\lambda} \sum_{n=0}^3 (\pi_n)^2 . \quad (C.52)$$

e reescrevemos a Hamiltoniana como

$$H = M - \frac{1}{8\lambda} \sum_{n=0}^3 \left(\frac{\partial}{\partial a_n} \right)^2 , \quad (C.53)$$

onde o operador

$$\sum_{n=0}^3 \pi_n^2 = - \sum_{n=0}^3 \left(\frac{\partial}{\partial a_n} \right)^2 . \quad (C.54)$$

devido à existência do vínculo (C.3) é interpretado como o laplaciano em uma esfera tri-dimensional.

Uma vez que os autoestados da Hamiltoniana serão rotulados pelos números quânticos de spin e isospin vamos calcular as expressões desses operadores. Para isso partimos do tensor energia-momento que é dado por

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \partial^\nu \phi_a - g^{\mu\nu} \mathcal{L} , \quad (\text{C.55})$$

em termos do qual a corrente de momento angular é

$$J^{\mu i} = \varepsilon_{ijk} r^j T^{\mu k} , \quad (\text{C.56})$$

de modo que a “carga”

$$J^i = \int d^3r J^{0i} = \varepsilon_{ijk} \int d^3r r^j T^{0k} . \quad (\text{C.57})$$

define o operador momento angular, que, no modelo de Skyrme é associado diretamente ao spin. Substituindo (C.33) em (C.55) temos

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} = & X_{ab} \left\{ \partial^\mu \pi_a \partial^\nu \pi_b - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial^\alpha \pi_a \partial_\alpha \pi_b \right\} \\ & - \frac{1}{e^2 f_\pi^4} (X_{ac} X_{bd} - X_{ad} X_{bc}) \left\{ \partial^\mu \pi_c \partial^\nu \pi_a - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \partial^\alpha \pi_c \partial_\alpha \pi_a \right\} \partial^\beta \pi_d \partial_\beta \pi_b \\ & + g^{\mu\nu} m_\pi^2 f_\pi (f_\pi - \sigma) . \end{aligned} \quad (\text{C.58})$$

Fazendo as substituições (C.19)-(C.21) e usando (C.16) e (C.23)-(C.28) obtemos em (C.57)

$$J_i = \int d^3r 2s^2 \left(f_\pi^2 + \frac{1}{e^2} \left(F'^2 + \frac{s^2}{r^2} \right) \right) \delta_{ia}^T K_a , \quad (\text{C.59})$$

que, usando (C.46), fornece

$$J_i = 2\lambda K_i = -i\lambda \text{tr}[\tau_i A^\dagger \partial_0 A] . \quad (\text{C.60})$$

De maneira análoga, o operador de isospin é expresso em termos da corrente vetorial, calculada no apêndice D, da seguinte forma

$$I^i = \int d^3r V^{0i} . \quad (\text{C.61})$$

Usando a expressão (D.28) temos

$$\begin{aligned} I^i &= -\frac{8\pi}{3} \int_0^\infty dr r^2 s^2 \left(f_\pi^2 + \frac{1}{e^2} \left(F'^2 + \frac{s^2}{r^2} \right) \right) K_a D_{ia} \\ &= -2\lambda K_a D_{ia} = -i\lambda \text{tr}[\tau_i A \partial_0 A^\dagger] , \end{aligned} \quad (\text{C.62})$$

onde usamos (C.15).

Das expressões (C.60) e (C.62) vemos que os operadores de spin e isospin diferem por (-) uma rotação:

$$J_i = -D_{ai} I_a . \quad (C.63)$$

Para o operador de spin dado em (C.60) temos

$$\begin{aligned} J_i &= -i\lambda \text{tr}[\tau_i A^\dagger \partial_0 A] \\ &= -i\lambda \text{tr}[\tau_i (a_0 - i\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{a})(\dot{a}_0 + i\boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{a}})] \\ &= 2\lambda[a_0 \dot{a}_i - a_i \dot{a}_0 + \varepsilon_{ijk} a_j \dot{a}_k] \\ &= \frac{i}{2} \left\{ a_i \frac{\partial}{\partial a_0} - a_0 \frac{\partial}{\partial a_i} - \varepsilon_{ijk} a_j \frac{\partial}{\partial a_k} \right\} . \end{aligned} \quad (C.64)$$

Onde usamos a relação

$$\dot{a}_i = \frac{\pi_i}{4\lambda} = \frac{-i}{4\lambda} \frac{\partial}{\partial a_i} , \quad (C.65)$$

(ver eqs.(C.48) e (C.50)).

De modo análogo, a partir de (C.62) obtemos

$$I_i = \frac{i}{2} \left\{ a_0 \frac{\partial}{\partial a_i} - a_i \frac{\partial}{\partial a_0} - \varepsilon_{ijk} a_j \frac{\partial}{\partial a_k} \right\} \quad (C.66)$$

Usando (C.17), (C.60) e (C.62) temos

$$\mathbf{J}^2 = \mathbf{I}^2 = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 \left(\frac{\partial}{\partial a_n} \right)^2 , \quad (C.67)$$

de modo que a Hamiltoniana (C.53) fica dada por

$$H = M + \frac{\mathbf{J}^2}{2\lambda} = M + \frac{\mathbf{I}^2}{2\lambda} , \quad (C.68)$$

que é a Hamiltoniana do rotor rígido, cuja quantização é um exercício familiar em mecânica quântica [Edm 57]. Os estados são autofunções simultâneas de $H, \mathbf{J}, J_z, \mathbf{I}$ e I_z . Como $\mathbf{J}^2 = \mathbf{I}^2$, com autovalores $I(I+1) = J(J+1)$, para cada autovalor I temos $(2I+1)$ estados possíveis de isospin e $(2I+1)$ estados de spin, de modo que temos um total de $(2I+1)^2$ estados degenerados para cada autovalor da Hamiltoniana.

Apesar de a Hamiltoniana (C.68) não fazer restrições quanto à quantização como bósons ou como férmions, nós queremos identificar os skyrmions aos bárions, de modo que para as nossas soluções os valores permitidos são $I = 1/2$ (núcleons) e $I = 3/2$ (deltas), sendo que os estados com $I \geq 5/2$, que não correspondem a partículas conhecidas, são considerados espúrios [ZB 86].

C.4 Os Autoestados

A Hamiltoniana do sistema, dada por (C.53) envolve o operador $\sum \left(\frac{\partial}{\partial a_n}\right)^2$, interpretado como o laplaciano em S^3 . Assim, por analogia com os harmônicos esféricos, os seus autoestados são construídos a partir de polinômios simétricos e sem traço nas variáveis a_n [ANW 83]. Para os núcleons, por exemplo, devemos ter polinômios na forma $(a_n + ia_m)^l$. Da eq.(C.67) temos:

$$-\frac{1}{4}\nabla^2(a_n + ia_m)^l = \mathbf{I}^2(a_n + ia_m)^l = \frac{l}{2}\left(\frac{l}{2} + 1\right)(a_n + ia_m)^l. \quad (\text{C.69})$$

Assim, núcleons correspondem a $l = 1$ e deltas a $l = 3$.

As funções de onda normalizadas para os núcleons e alguns estados delta são as seguintes:

$$|p \uparrow\rangle = -\frac{i}{\pi}(a_1 + ia_2) \quad (\text{C.70})$$

$$|p \downarrow\rangle = -\frac{1}{\pi}(a_0 - ia_3) \quad (\text{C.71})$$

$$|n \uparrow\rangle = \frac{1}{\pi}(a_0 + ia_3) \quad (\text{C.72})$$

$$|n \downarrow\rangle = \frac{i}{\pi}(a_1 - ia_2) \quad (\text{C.73})$$

$$|\Delta^{++}, 3/2\rangle = \frac{\sqrt{2}i}{\pi}(a_1 + ia_2)^3 \quad (\text{C.74})$$

O cálculo de elementos de matriz e as normalizações desses estados são mais facilmente efetuados se parametrizamos as coordenadas a_n em termos de três variáveis angulares independentes da seguinte forma [ZB 86]

$$\begin{aligned} a_0 &= \cos \alpha, \\ a_3 &= \text{sen} \alpha \cos \theta, \\ a_2 &= \text{sen} \alpha \text{sen} \theta \text{sen} \phi, \\ a_1 &= \text{sen} \alpha \text{sen} \theta \cos \phi, \end{aligned} \quad (\text{C.75})$$

com $0 \leq \alpha \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

Essa parametrização é uma generalização das coordenadas esféricas usuais. O vínculo define o raio da esfera (no caso, unitário). O elemento de ângulo sólido passa a ser dado por

$$d\Omega = \text{sen}^2 \alpha d\alpha \text{sen} \theta d\theta d\phi \quad (\text{C.76})$$

e é tal que

$$\int d\Omega = 2\pi^2. \quad (C.77)$$

Usando as eqs.(C.75) e (C.76) podemos obter as seguintes relações

$$\int a_i a_j d\Omega = 2\pi^2 \frac{1}{4} \delta_{ij}, \quad (C.78)$$

$$\int a_i a_j a_k a_l d\Omega = 2\pi^2 \frac{1}{24} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (C.79)$$

sendo que as integrais de potências ímpares dos a_i se anulam.

Os estados de spin e isospin bem definidos possuem a seguinte normalização

$$\int d\Omega \langle I, I_3, S_3 | I', I'_3, S'_3 \rangle = \delta_{II'} \delta_{I_3 I'_3} \delta_{S_3 S'_3}. \quad (C.80)$$

Nesta linguagem os estados definidos anteriormente ficam dados por

$$|p \uparrow\rangle = -\frac{i}{\pi} \sin \alpha \sin \theta e^{i\phi}, \quad (C.81)$$

$$|p \downarrow\rangle = -\frac{1}{\pi} (\cos \alpha - i \sin \alpha \cos \theta). \quad (C.82)$$

$$|n \uparrow\rangle = \frac{1}{\pi} (\cos \alpha + i \sin \alpha \cos \theta). \quad (C.83)$$

$$|n \downarrow\rangle = \frac{i}{\pi} (\sin \alpha \sin \theta e^{-i\phi}), \quad (C.84)$$

$$|\Delta^{++}, 3/2\rangle = \frac{\sqrt{2}i}{\pi} (\sin^3 \alpha \sin^3 \theta e^{i3\phi}), \quad (C.85)$$

Esses resultados permitem-nos calcular quantidades como as abaixo:

$$\int \langle p \uparrow | p \uparrow \rangle d\Omega = \int_0^\pi \sin^2 \alpha d\alpha \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{\pi^2} \sin^2 \alpha \sin^2 \theta = 1 \quad (C.86)$$

$$\int \langle p \uparrow | p \downarrow \rangle d\Omega = 0 \quad (C.87)$$

$$\int \langle p \uparrow | n \downarrow \rangle d\Omega = 0 \quad (C.88)$$

etc...

e também aqueles elementos de matriz que fornecem a massa dos estados

$$\begin{aligned} M_N &= \int \langle p \uparrow | H | p \uparrow \rangle d\Omega = M + \frac{1}{2\lambda} \int \langle p \uparrow | \mathbf{S}^2 | p \uparrow \rangle d\Omega \\ &= M + \frac{3}{8\lambda} \end{aligned} \quad (C.89)$$

$$\begin{aligned} M_\Delta &= \int \langle \Delta^{++}, 3/2 | H | \Delta^{++}, 3/2 \rangle d\Omega = M + \frac{1}{2\lambda} \int \langle \Delta^{++}, 3/2 | \mathbf{S}^2 | \Delta^{++}, 3/2 \rangle d\Omega \\ &= M + \frac{15}{8\lambda} \end{aligned} \quad (C.90)$$

onde a ação dos operadores é dada na forma usual

$$\mathbf{I}^2 |p \uparrow\rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) |p \uparrow\rangle \quad (\text{C.91})$$

$$I_3 |p \downarrow\rangle = \frac{1}{2} |p \downarrow\rangle \quad (\text{C.92})$$

$$I_3 |n \uparrow\rangle = -\frac{1}{2} |n \uparrow\rangle \quad (\text{C.93})$$

$$I_+ |p \uparrow\rangle = 0 \quad (\text{C.94})$$

$$J_3 |n \uparrow\rangle = \frac{1}{2} |n \uparrow\rangle \quad (\text{C.95})$$

$$J_3 |p \downarrow\rangle = -\frac{1}{2} |p \downarrow\rangle \quad (\text{C.96})$$

$$J_- |p \uparrow\rangle = \sqrt{1/2} |p \uparrow\rangle \quad (\text{C.97})$$

com

$$I_{\pm} = I_1 \pm iI_2 \quad (\text{C.98})$$

$$J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2 \quad (\text{C.99})$$

Essas relações podem ser verificadas se expressamos estes operadores em termos das variáveis α, θ e ϕ , quando isto é feito temos [Rob 89]:

$$J_3(I_3) = \frac{i}{2} \left[-(+) \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \quad (\text{C.100})$$

$$\mathbf{J}^2 = \mathbf{I}^2 = -\frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sin^2 \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \right\} \quad (\text{C.101})$$

Antes de encerrarmos este apêndice convém mencionar um outro resultado importante que será útil para o cálculo das propriedades estáticas dos núcleons. Trata-se do elemento de matriz de D_{aj} entre estados de núcleons, a saber [Adk 87]:

$$\langle N' | D_{aj} | N \rangle = \langle N' | \frac{1}{2} \text{tr} \{ \tau_a A \tau_j A^\dagger \} | N \rangle = -\frac{4}{3} \langle N' | S_a I_j | N \rangle \quad (\text{C.102})$$

ou, com as matrizes σ e τ para os operadores de spin e isospin respectivamente, tal que $J_a = \frac{\sigma_a}{2}$ e $I_j = \frac{\tau_j}{2}$

$$\langle N' | D_{aj} | N \rangle = -\frac{1}{3} \langle N' | \sigma_a \tau_j | N \rangle . \quad (\text{C.103})$$

Como exemplos podemos tomar:

$$\langle p \uparrow | D_{33} | p \uparrow \rangle = -\frac{1}{3} \langle p \uparrow | \sigma_3 \tau_3 | p \uparrow \rangle = -\frac{1}{3} \quad (\text{C.104})$$

$$\langle n \uparrow | D_{33} | n \uparrow \rangle = -\frac{1}{3} \langle n \uparrow | \sigma_3 \tau_3 | n \uparrow \rangle = \frac{1}{3} . \quad (\text{C.105})$$

æ

Apêndice D

As Correntes - B^μ , V^μ e A^μ

Na primeira parte deste apêndice expressamos as componentes temporal e espacial da corrente bariônica em termos do ouriço. Em seguida calculamos as correntes vetorial e axial, obtendo expressões numa forma conveniente para serem usadas nos cálculos das propriedades estáticas dos núcleons no modelo de Skyrme.

D.1 A Corrente Bariônica

No capítulo 3 discutimos o papel que a corrente B^μ desempenha no modelo de Skyrme. Também no apêndice B abordamos alguns aspectos a ela relacionados e mostramos como obter a expressão da componente temporal B^0 associada à densidade de número bariônico do sóliton estático. A expressão (B.44) lá obtida não sofre nenhuma alteração no caso do sóliton rodado, uma vez que as derivadas em relação à coordenada $\mathbf{r}$ não afetam a matriz $A(t)$. Desse modo ainda temos

$$B^0 = \frac{-1}{2\pi^2} \frac{s^2}{r^2} F' . \quad (\text{D.1})$$

No caso da componente espacial a eq.(B.28) fica dada por

$$B^i = \frac{3}{24\pi^2} \varepsilon^{i0jk} \text{tr} \left[(U^\dagger \partial_0 U) (U^\dagger \partial_j U) (U^\dagger \partial_k U) \right] , \quad (\text{D.2})$$

com

$$\begin{aligned} U^\dagger \partial_0 U &= (AU_c A^\dagger)^\dagger \partial_0 (AU_c A^\dagger) \\ &= AU_c^\dagger A^\dagger \left[\partial_0 AU_c A^\dagger + AU_c \partial_0 A^\dagger \right] \\ &= A \left[U_c^\dagger K U_c - K \right] A^\dagger , \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

onde usamos (C.12) e

$$(\partial_0 A^\dagger)A = -A^\dagger(\partial_0 A) ; \quad (D.4)$$

No caso espacial temos

$$U^\dagger \partial_j U = A(U_c^\dagger \partial_j U_c)A^\dagger = AL_j^c A^\dagger \quad (D.5)$$

onde L_j^c é a função definida em (B.11), que, com a ajuda de (B.43) fornece

$$L_{ja}^c = \frac{sc}{r} \delta_{ja}^T + F' \hat{r}_j \hat{r}_a + \varepsilon_{jab} \frac{s^2}{r} \hat{r}_b . \quad (D.6)$$

Analogamente, para R_j^c temos

$$R_j^c = U_c \partial_j U_c^\dagger = i R_{ja}^c \tau_a , \quad (D.7)$$

com

$$R_{ja}^c = -\frac{sc}{r} \delta_{ja}^T - F' \hat{r}_j \hat{r}_a + \varepsilon_{jab} \frac{s^2}{r} \hat{r}_b . \quad (D.8)$$

De modo que a eq.(D.2) pode ser escrita como

$$B^i = \frac{1}{8\pi^2} \varepsilon_{ijk} 2\varepsilon_{abc} K_a \left[R_{jb}^c R_{kc}^c - L_{jb}^c L_{kc}^c \right] . \quad (D.9)$$

Inserindo (D.6) e (D.8) em (D.9) obtemos finalmente

$$B^i = \frac{1}{\pi^2} \frac{s^2}{r} F' \varepsilon_{iba} \hat{r}_b K_a \quad (D.10)$$

que, usando (C.60), pode ser posto na seguinte forma:

$$B^i = \frac{-1}{2\lambda\pi^2} \frac{s^2 F'}{r^2} (\mathbf{J} \times \mathbf{r})_i . \quad (D.11)$$

D.2 As Correntes de Noether

Vimos no capítulo 2 que existem duas correntes associadas às simetrias internas do grupo $SU(2) \times SU(2)$; a corrente vetorial (rotação no isoespaço) e a corrente axial (transformação quiral). Vimos também que frente a essas transformações o campo U se transforma da seguinte forma

$$\begin{aligned} \delta^V U &= -\frac{i}{2} [\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}, U] \\ \delta^A U &= -\frac{i}{2} [\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\beta}, U] , \end{aligned} \quad (D.12)$$

e induz nos campos π_a e σ as seguintes variações

$$\begin{aligned}\delta^{I'} \sigma &= 0 \\ \delta^{I'} \pi_a &= \varepsilon_{abc} \alpha_b(r) \pi_c\end{aligned}\quad (D.13)$$

e

$$\begin{aligned}\delta^A \sigma &= \beta_a(r) \pi_a \\ \delta^A \pi_a &= -\beta_a(r) \sigma.\end{aligned}\quad (D.14)$$

A transformação na lagrangiana fica escrita da seguinte forma

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \partial_\mu \epsilon_a(r) J^{\mu a}, \quad (D.15)$$

onde $J^{\mu a}$ é a corrente vetorial ou axial e $\epsilon_a = \alpha_a$ ou β_a .

A corrente é então dada por:

$$J^{\mu a} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta [\partial_\mu \epsilon_a(r)]}. \quad (D.16)$$

Assim, o termo quadrático da lagrangiana de Skyrme

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} X_{ab} \partial_\mu \pi_a \partial^\mu \pi_b \quad (D.17)$$

frente à transformação vetorial (D.13) se transforma como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 &\xrightarrow{V} \frac{1}{2} X_{ab} \partial_\mu (\pi_a + \varepsilon_{acd} \alpha_c(r) \pi_d) \partial^\mu (\pi_b + \varepsilon_{bef} \alpha_e(r) \pi_f) \\ &= \mathcal{L}_2 + X_{ab} \varepsilon_{acd} (\partial_\mu \alpha_c) \pi_d \partial^\mu \pi_d + \dots\end{aligned}\quad (D.18)$$

De modo que, de acordo com a eq.(D.16) a contribuição de $\mathcal{L}_2$ para a corrente vetorial $J_V^{\mu a} \equiv V^{\mu a}$ tem a seguinte forma

$$V_2^{\mu a} = \varepsilon_{abc} \pi_b X_{cd} \partial^\mu \pi_d. \quad (D.19)$$

Da mesma forma o termo quártico $\mathcal{L}_4$ fica transformado por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_4 &\xrightarrow{V} \frac{-1}{4e^2 f_\pi^4} (X_{ac} X_{bd} - X_{ad} X_{bc}) \quad \partial_\mu (\pi_a + \varepsilon_{aef} \alpha_e \pi_f) \partial_\nu (\pi_b + \varepsilon_{bgh} \alpha_g \pi_h) \\ &\quad \times \partial^\mu (\pi_c + \varepsilon_{cij} \alpha_i \pi_j) \partial^\nu (\pi_d + \varepsilon_{dkl} \alpha_k \pi_l)\end{aligned}\quad (D.20)$$

tal que

$$\mathcal{L}_4 \xrightarrow{V} \mathcal{L}_4 - \frac{1}{e^2 f_\pi^4} (X_{ac} X_{bd} - X_{ad} X_{bc}) \varepsilon_{aef} (\partial_\mu \alpha_e) \pi_f \partial_\nu \pi_b \partial^\mu \pi_c \partial^\nu \pi_d + \dots \quad (D.21)$$

Logo:

$$V_4^{\mu a} = \frac{-1}{e^2 f_\pi^4} (X_{mc} X_{bd} - X_{md} X_{bc}) \varepsilon_{anm} \pi_n \partial_\nu \pi_b \partial^\mu \pi_c \partial^\nu \pi_d . \quad (D.22)$$

O termo $\mathcal{L}_{qs}$ por não possuir derivadas não contribui para a corrente. A partir das eqs.(D.19) e (D.22) podemos encontrar as expressões das componentes temporal e espacial da corrente vetorial em termos do ouriço. Assim:

$$V^{0,a} = \varepsilon_{abc} \pi_b X_{cd} \partial_0 \pi_d - \frac{1}{e^2 f_\pi^4} (X_{mc} X_{bd} - X_{md} X_{bc}) \varepsilon_{anm} \pi_n (\partial_\nu \pi_b) \partial_0 \pi_c (\partial^\nu \pi_d) . \quad (D.23)$$

As relações (C.19)-(C.25) permitem-nos escrever

$$\begin{aligned} V^{0,a} = & (\varepsilon_{abc} D_{be} D_{cg}) \pi_e^c X_{gh}^c (D_{dh} \partial_0 D_{df}) \pi_f^c \\ & - \frac{1}{e^2 f_\pi^2} \left\{ -s^2 \varepsilon_{uqz} X_{ut}^c \hat{r}_z \hat{r}_g D_{aq} \left\{ (\partial_j \pi_f^c) X_{fe}^c (\partial_j \pi_e^c) \right\} (D_{ct} \partial_0 D_{cg}) \right. \\ & \left. + s^2 \varepsilon_{qzu} \hat{r}_z \hat{r}_g D_{aq} \left\{ (\partial_j \pi_h^c) X_{hf}^c (\partial_j \pi_p^c) X_{up}^c \right\} (D_{cf} \partial_0 D_{cg}) \right\} . \end{aligned} \quad (D.24)$$

Onde empregamos o resultado

$$\varepsilon_{anm} D_{nz} D_{mu} = D_{aq} \varepsilon_{qzu} . \quad (D.25)$$

Usando agora as eqs.(C.25)-(C.27), (C.16) e também

$$(\partial_j \pi_f^c) X_{fe}^c (\partial_j \pi_e^c) = f_\pi^2 \left(\frac{2s^2}{r^2} + F'^2 \right) , \quad (D.26)$$

temos:

$$V^{0,a} = -2s^2 f_\pi^2 D_{an} K_e \delta_{ne}^T - \frac{1}{e^2} \left\{ 2s^2 \left(\frac{2s^2}{r^2} + F'^2 \right) - 2s^2 \left(\frac{s^2}{r^2} + F'^2 \right) \right\} D_{aq} K_m \delta_{qm}^T . \quad (D.27)$$

que fornece

$$V^{0,a} = -2s^2 \left\{ f_\pi^2 + \frac{1}{e^2} \left(F'^2 + \frac{s^2}{r^2} \right) \right\} D_{ab} K_c \delta_{cb}^T \quad (D.28)$$

Do mesmo modo, para a componente espacial temos

$$V^{i,a} = \varepsilon_{abc} \pi_b X_{cd} \partial^i \pi_d - \frac{1}{e^2 f_\pi^4} (X_{mc} X_{bd} - X_{md} X_{bc}) \varepsilon_{anm} \pi_n (\partial_\nu \pi_b) \partial^i \pi_c (\partial^\nu \pi_d) . \quad (D.29)$$

Usando as relações citadas anteriormente chegamos a

$$V^{i,a} = \frac{s^2}{r} \left\{ f_\pi^2 + \frac{1}{e^2} \left(F'^2 + \frac{s^2}{r^2} \right) \right\} \varepsilon_{icb} \hat{r}_c D_{ab} , \quad (D.30)$$

onde o termo com duas derivadas temporais é ignorado por ser muito menor do que este [Adk 87].

No caso da transformação axial (D.13) temos:

$$\mathcal{L}_2 \xrightarrow{A} \mathcal{L}_2 - X_{ab} (\partial_\mu \beta_a) \sigma \partial^\mu \pi_b \quad (D.31)$$

$$\mathcal{L}_4 \xrightarrow{A} \mathcal{L}_4 + \frac{1}{e^2 f_\pi^4} (X_{ac} X_{bd} - X_{ad} X_{bc}) (\partial_\mu \beta_a) \sigma \partial_\nu \pi_b \partial^\mu \pi_c \partial^\nu \pi_d \quad (D.32)$$

e a corrente axial fica dada por

$$A^{\mu,a} = -\sigma X_{ab} \partial^\mu \pi_b + \frac{1}{e^2 f_\pi^4} (X_{ac} X_{bd} - X_{ad} X_{bc}) \sigma \partial_\nu \pi_b \partial^\mu \pi_c \partial^\nu \pi_d \quad (D.33)$$

que fornece

$$A^{0,a} = -2sc \left\{ f_\pi^2 + \frac{1}{e^2} \left(F'^2 + \frac{s^2}{r^2} \right) \right\} \varepsilon_{dcb} \hat{r}_d K_c D_{ab} \quad (D.34)$$

e

$$A^{i,a} = \left\{ \frac{sc}{r} \left[f_\pi^2 + \frac{1}{e^2} \left(F'^2 + \frac{s^2}{r^2} \right) \right] \delta_{ib}^T + F' \left[f_\pi^2 + \frac{2s^2}{e^2 r^2} \right] \hat{r}_i \hat{r}_b \right\} D_{ab} . \quad (D.35)$$

Em muitos cálculos usamos as expressões das correntes integradas em $d\Omega$ e também elementos de matriz dessas entre estados de núcleons. Por isso, alguns desses resultados são listados a seguir:

$$\int d\Omega V^{0,a} = \frac{8\pi}{3\lambda} s^2 \left(f_\pi^2 + \frac{1}{e^2} \left(F'^2 + \frac{s^2}{r^2} \right) \right) I_a \quad (D.36)$$

onde usamos (C.46) e (C.62). Analogamente

$$\int d\Omega A^{i,a} = \frac{8\pi}{3} \left\{ \frac{sc}{r} \left[f_\pi^2 + \frac{1}{e^2} \left(F'^2 + \frac{s^2}{r^2} \right) \right] + \frac{F'}{2} \left(f_\pi^2 + \frac{2s^2}{e^2 r^2} \right) \right\} D_{ai} . \quad (D.37)$$

Para os elementos de matriz temos:

$$\langle N' | \int d\Omega V^{0,3} | N \rangle = \frac{4\pi}{3\lambda} s^2 \left(f_\pi^2 + \frac{1}{e^2} \left(F'^2 + \frac{s^2}{r^2} \right) \right) \langle N' | \tau_3 | N \rangle : \quad (D.38)$$

$$\begin{aligned}
\langle N' | \int d\Omega V^{i,3} | N \rangle &= 4\pi \frac{s^2}{r} \left(f_\pi^2 + \frac{1}{e^2} \left(F'^2 + \frac{s^2}{r^2} \right) \right) \varepsilon_{icb} \hat{r}_c \langle N' | D_{3b} | N \rangle \\
&= \frac{4\pi s^2}{3 r^2} \left(f_\pi^2 + \frac{1}{e^2} \left(F'^2 + \frac{s^2}{r^2} \right) \right) \langle N' | (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{r})_i \tau_3 | N \rangle, \quad (D.39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle N' | \int d\Omega A^{i,a} | N \rangle &= -\frac{8\pi}{9} \left\{ \frac{2sc}{r} \left[f_\pi^2 + \frac{1}{e^2} \left(F'^2 + \frac{s^2}{r^2} \right) \right] + F' \left(f_\pi^2 + \frac{2s^2}{e^2 r^2} \right) \right\} \\
&\quad \langle N' | \sigma_i \tau_a | N \rangle \quad (D.40)
\end{aligned}$$

Expressões análogas em relação as outras lagrangianas tratadas no capítulo 3 podem ser encontradas do mesmo modo. Para o caso do méson ω essas expressões são as seguintes:

$$\langle N' | \int d\Omega V^{0,3} | N \rangle = \frac{4\pi}{3\lambda} s^2 \left\{ f_\pi^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{2\pi^2} \right)^2 \frac{F'}{r^2} \int_0^\infty dr' s^2 F' A(r, r') \right\} \langle N' | \tau_3 | N \rangle ; \quad (D.41)$$

$$\langle N' | \int d\Omega V^{i,3} | N \rangle = \frac{4\pi}{3\lambda} s^2 \left\{ f_\pi^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{2\pi^2} \right)^2 \frac{F'}{r^2} \int_0^\infty dr' s^2 F' A(r, r') \right\} \langle N' | (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{r})_i \tau_3 | N \rangle ; \quad (D.42)$$

$$\langle N' | \int d\Omega A^{i,a} | N \rangle = -\frac{8\pi}{9} \left\{ f_\pi^2 \left(\frac{2sc}{r} + F' \right) + \frac{\gamma}{2\pi^2} \left(\frac{2sc}{r} F' + \frac{s^2}{r^2} \right) \right\} \langle N' | \sigma_i \tau_a | N \rangle . \quad (D.43)$$

No caso da lagrangiana com termo de sexta ordem $B_\mu B^\mu$ as expressões ficam dadas por:

$$\langle N' | \int d\Omega V^{0,3} | N \rangle = \frac{4\pi}{3\lambda} s^2 \left\{ f_\pi^2 + \frac{\beta}{8f_\pi^2} \frac{s^2 F'^2}{r^2} \right\} \langle N' | \tau_3 | N \rangle ; \quad (D.44)$$

$$\langle N' | \int d\Omega V^{i,3} | N \rangle = \frac{4\pi}{3\lambda} s^2 \left\{ f_\pi^2 + \frac{\beta}{8f_\pi^2} \frac{s^2 F'^2}{r^2} \right\} \langle N' | (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{r})_i \tau_3 | N \rangle ; \quad (D.45)$$

$$\langle N' | \int d\Omega A^{i,a} | N \rangle = -\frac{8\pi}{9} \left\{ f_\pi^2 \left(\frac{2sc}{r} + F' \right) + \frac{\beta}{8f_\pi^2} \left(\frac{s}{r} + 2cF' \right) \frac{s^3 F'}{r^3} \right\} \langle N' | \sigma_i \tau_a | N \rangle . \quad (D.46)$$

Apêndice E

As Funções de Bessel

A equação diferencial de Bessel tem a seguinte forma [Arf 85, Spi 73]:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 . \quad (\text{E.1})$$

Suas soluções são denominadas funções de Bessel de ordem n , e podem ser representadas pela seguinte série:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k! \Gamma(n+k+1)} . \quad (\text{E.2})$$

Algumas fórmulas de recorrência para as Funções de Bessel são as seguintes:

$$x J'_n(x) = x J_{n-1}(x) - n J_n(x) , \quad (\text{E.3})$$

$$x J'_n(x) = n J_n(x) - x J_{n+1}(x) , \quad (\text{E.4})$$

$$x I'_n(x) = x I_{n-1}(x) - n I_n(x) , \quad (\text{E.5})$$

$$x I'_n(x) = x I_{n+1}(x) + n I_n(x) , \quad (\text{E.6})$$

onde $I_n(x)$ são as Funções de Bessel modificadas ou de argumento imaginário, definidas por:

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) = e^{\frac{-n\pi i}{2}} J_n(ix) . \quad (\text{E.7})$$

Uma fórmula importante é a relação de ortogonalidade:

$$\int_0^{\infty} x J_n(kx) J_n(k'x) dx = \frac{1}{k} \delta(k' - k) . \quad (\text{E.8})$$

Quando a eq.(E.1) possui a seguinte forma:

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right) y = 0, \quad (\text{E.9})$$

as soluções são as funções de Bessel de ordem $n + \frac{1}{2}$, $J_{n+\frac{1}{2}}$, que podem ser expressas em termos de seno e cosseno. Se nós substituirmos $y(x) \equiv \sqrt{x}R(x)$ na eq.(A.9), obtemos

$$x^2 R'' + 2xR' + (x^2 - n(n+1))R = 0, \quad (\text{E.10})$$

cujas soluções são as funções de Bessel esféricas, $j_n(x)$, que costumam ser definidas pela seguinte equação:

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x). \quad (\text{E.11})$$

Algumas das primeiras funções de Bessel, que usaremos neste trabalho, são dadas por:

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad (\text{E.12})$$

$$j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}, \quad (\text{E.13})$$

$$j_2(x) = \left(\frac{3}{x^2} - 1\right) \frac{\sin x}{x} - \frac{3}{x^2} \cos x. \quad (\text{E.14})$$

O comportamento das funções de Bessel esféricas quando $x \rightarrow 0$ é o seguinte:

$$j_0(x) \rightarrow 1 - \frac{x^2}{6} + \dots \quad (\text{E.15})$$

$$j_1(x) \rightarrow \frac{x}{3} - \frac{x^3}{30} + \dots \quad (\text{E.16})$$

$$j_2(x) \rightarrow \frac{x^2}{15} - \frac{x^4}{210} + \dots \quad (\text{E.17})$$

Para as funções de Bessel esféricas de argumento imaginário temos

$$i_n(x) = i^{-n} j_n(ix), \quad (\text{E.18})$$

cujas expressões são as seguintes:

$$i_0(x) = \frac{\sinh x}{x}, \quad (\text{E.19})$$

$$i_1(x) = \frac{\cosh x}{x} - \frac{\sinh x}{x^2}, \quad (\text{E.20})$$

$$i_2(x) = \left(\frac{3}{x^2} + 1 \right) \frac{\sinh x}{x} - \frac{3 \cosh x}{x^2} . \quad (\text{E.21})$$

Apresentamos, finalmente, algumas integrais envolvendo Funções de Bessel e que são empregadas no texto principal.

$$\int_0^\infty r j_0(qr) e^{-\Lambda r} dr = \frac{1}{\Lambda^2 + q^2} , \quad (\text{E.22})$$

$$\int_0^\infty r^2 j_0(qr) e^{-\Lambda r} dr = \frac{2\Lambda}{(\Lambda^2 + q^2)^2} , \quad (\text{E.23})$$

$$\int_0^\infty r^2 j_1(qr) e^{-\Lambda r} dr = \frac{2q}{(\Lambda^2 + q^2)^2} , \quad (\text{E.24})$$

$$\int_0^\infty r^3 j_1(qr) e^{-\Lambda r} dr = \frac{8\Lambda q}{(\Lambda^2 + q^2)^3} , \quad (\text{E.25})$$

$$\int x^n J_1(x) dx = -x^n J_0(x) + n \int x^{n-1} J_0(x) dx . \quad (\text{E.26})$$

Referências

- [AD 68] S.L. Adler e R.F. Dashen, *Current Algebra and Applications to Particle Physics*, Benjamin, New York (1968).
- [AN 84] G.S. Adkins e C.R. Nappi, *Nucl. Phys.* **B223**, 109 (1984).
- [Adk 87] G.S. Adkins, *Chiral Solitons*, K.F.Liu, p.99, World Scientific, Singapore(1987).
- [Adl 69] S. Adler, *Phys. Rev.* **117**, 2426 (1969).
- [AF 91] J. Ananias e E. Ferreira, *J. Math. Phys.* **32**, 1942 (1991).
- [AGF 91] J. Ananias, R. Mendez Galain e E. Ferreira, *J. Math. Phys.* **32**, 1949 (1991).
- [AFF+ 73] V. de Alfaro, S. Fubini, G. Furlan e C. Rossetti, *Currents in Hadrons Physics*, North-Holland, Amsterdam (1973).
- [AN 84] G.S. Adkins e C.R. Nappi, *Nucl. Phys.* **B233**, 109 (1984).
- [AN 84b] G.S. Adkins e C.R. Nappi, *Phys. Lett.* **B137**, 251 (1984).
- [ANW 83] G.S. Adkins, C.R. Nappi e E. Witten, *Nucl. Phys.* **B228**, 552 (1983).
- [Arf 85] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, San Diego (1985).
- [AZR+ 90] R.A. Arndt, Zhujun Li, L.D. Roper e R.L. Workman, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 157 (1990).
- [Bad 88] R.K. Bhaduri, *Models of the Nucleon, From Quarks to Solitons*, Addison-Wesley (1988).
- [BD 65] J.D. Bjorken e S.D. Drell, *Relativistic Quantum Fields*, Macgraw Hill (1965).
- [BJ 69] J. Bell e R. Jackiw, *Nuovo Cimento* **60A**, 47 (1969).
- [Bjo 69] J.D. Bjorken, *Phys.Rev.* **179**,1 547 (1969).
- [BKÜ+ 85] M. Bando, T. Kugo, S. Uehara, K. Yamawaki e T. Yanagida. *Phys. Rev. Lett.* **54**, 1215 (1985).
- [BNR+ 83] A.P. Balachandran, V.P. Nair, S.G. Rajeev e A. Stern, *Phys. Rev.* **D27**, 1153 (1983).

- [BNR+ 82] A.P. Balachandran, V.P. Nair, S.G. Rajeev e A. Stern, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1124 (1982).
- [BR 93] O.L. Battistel e M.R. Robilotta, *Phys. Rev.* **C48**, 920 (1993).
- [Bre+ 69] M. Breidenbach *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 935 (1969).
- [BTW 86] E. Braaten, S.M. Tse e C. Willcox, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 2008 (1986).
- [BZ 74] S. Blatnik e N.Zovko, *Acta Physica Austriaca* **39**, 62 (1974).
- [Cho 61] K.-C. Chou, *Soviet Phys. JETP* **12**, 492 (1961).
- [CJ 78] E. Cremmer e B. Julia, *Phys. Lett.* **B80**, 48 (1978).
- [CJ 79] E. Cremmer e B. Julia, *Nucl. Phys.* **B159**, 141 (1979).
- [CL 84] T.-P. Cheng e L.-F. Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Oxford University Press, New York (1984).
- [Coh 86] T.D. Cohen, *Phys. Rev.* **D34**, 2187 (1986).
- [Col 66] S. Coleman, *J. Math. Phys.* **7**, 787 (1966).
- [Der 64] G.H.Derrick, *J.Math.Phys.* **5**,1252(1964)
- [Dom 81] C.A. Domingues, *Phys. Rev.* **C24**, 2611 (1981).
- [DV 80] C.A. Domingues e B.J. Verwest, *Phys. Lett.* **B89**, 333 (1980).
- [DVL 79] A. D'Adda, P. di Vecchia e M. Lüscher, *Nucl. Phys.* **B152**, 125 (1979).
- [Edm 57] A.R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, Princeton University Press, New Jersey (1957).
- [EES 86] J.M. Eisemberg, A. Errell e R.R. Silbar, *Phys. Rev.* **C33**, 1531 (1986).
- [Enz 63] U. Enz, *Phys. Rev.* **131**, 1392 (1963).
- [FGL 73] H. Fritzsch, M. Gell-Mann e H. Leutwyler, *Phys. Lett.* **47B**, 365 (1973).
- [FP 67] L.D. Fadeev e V.N. Popov, *Phys. Lett.* **25B**, 29 (1967).
- [FR 68] D. Finkelstein e J. Rubinstein, *J. Math. Phys.* **9**, 1762 (1968).
- [Gal+ 71] S. Galster *et al*, *Nucl. Phys.* **B32**, 221 (1971).
- [Gas 66] S. Gasiorowics, *Elementary Particle Physics*, John Wiley and Sons, New York (1966).
- [Gel 53] M. Gell-Mann, *Phys. Rev.* **92**, 833 (1953).

- [Gel 61] M. Gell-Mann, *California Inst. of Tech. Synchrotron Lab. Report no. CTSL-20* (1961).
- [Gel 62] M. Gell-Mann, *Phys. Rev.* **125**, 1067 (1962).
- [Gel 64] M. Gell-Mann, *Phys. Lett.* **8**, 214 (1964).
- [Geo 92] H. Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics*, Addison-Wesley (1992).
- [GG 69] S. Gasiorowicz e D.A. Geffen, *Rev. Mod. Phys.* **41**, 531 (1969).
- [GL 60] M. Gell-Mann e M. Levy, *Nuovo Cimento* **16**, 705 (1960).
- [Gol 61] J. Goldstone, *Nuovo Cimento* **19**, 154 (1961).
- [GP 78] V. Golo e A.M. Perelomov, *Phys. Lett.* **B79**, 112 (1978).
- [Gre 64] O.W. Greenberg, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 598 (1964).
- [Gre 77] W. Grein, *Nucl. Phys.* **B131**, 255 (1977).
- [GT 58] M.L. Goldberger e S.B. Treinman, *Phys. Rev.* **111**, 354 (1958).
- [Gue+ 75] del Guerra *et al.*, *Nucl. Phys.* **B99**, 253 (1975).
- [Gue+ 76] del Guerra *et al.*, *Nucl. Phys.* **B107**, 65 (1976).
- [GW 73] D. Gross e F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1343 (1973).
- [HHT 92] J. Haidenbauer, K. Holinde e A.W. Thomas, *Phys. Rev.* **C45**, 952 (1992).
- [HN 65] M.H. Han e Y. Nambu, *Phys. Rev.* **138B**, 1006 (1965).
- [Hoh+ 76] G. Höhler *et al.*, *Nucl. Phys.* **B114**, 505 (1976).
- [HPJ 90] G. Holzwarth, G. Pari e B.K. Jennings, *Nucl. Phys.* **A515**, 665 (1990).
- [HS 86] G. Holzwarth e B. Schwesinger, *Rep. Prog. Phys.* **49**, 825 (1986).
- [HST 90] V.E. Herscovitz, F.M. Steffens e G.L. Thomas, *anais do XI Enc. Nac. Física de Part. e campos, Caxambu* (1990).
- [IJK+ 85] Y. Igarashi, M. Johmura, A. Kobayashi, H. Otsu, T. Sato e S. Sawada, *Nucl. Phys.* **B259**, 721 (1985).
- [IKO+ 87] Y. Igarashi, A. Kobayashi, H. Otsu e S. Sawada, *Phys. Lett.* **B195**, 479 (1987).
- [IO 89] M. Iwasaki e H. Oyama, *Phys. Rev.* **D40**, 3125 (1989).
- [IZ 80] C. Itzikson e J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, Singapore (1987).

- [Jac 75] J.D. Jackson, *Classical Eletrodynamics*, Jonh Willey and Sons, New York (1975).
- [JJG+ 85] A. Jackson, A.D. Jackson, A.S. Goldhaber e G.E. Brown, *Phys. Lett.* **B154**, 101 (1985).
- [JJP 85] A. Jackson, A.D. Jackson e V. Pasquier, *Nucl. Phys.* **A432**, 567 (1985).
- [JR 83] A.D. Jackson e M. Rho, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 751 (1983).
- [JSS 89] P. Jain, J. Schechter e R. Sorkin, *Phys. Rev.* **D39**, 998 (1989).
- [Keh 87] Ken-Fei Liu, *Proceedings of the International Symposium On Medium Energy Physics*, pg. 135, K.-L. Liu, World Scientific, Singapore (1987).
- [Kit+ 83] T. Kitagaki *et al*, *Phys. Rev.* **D28**, 436 (1983).
- [Kla 84] D. Klabucar, *Phys. Lett.* **B149**, 31 (1984).
- [KP 80] R. Koch e E. Pietarinem, *Nucl. Phys.* **A336**, 331 (1980).
- [KMW 87] N. Kayser, U. Meissner e W. Weise, *Phys. Lett.* **B198**, 319 (1987).
- [KRS 84] Ö. Kaymakcalan, S. Rajeev e J. Schechter, *Phys. Rev.* **D30**, 594 (1984).
- [Mei 88] U. Meissner, *Phys. Rep.* **161**, 213 (1988).
- [Mei 92] F. Meier, *Proceedings of the International Workshop on Baryons As Skyrme Solitons*, pg. 159, G. Holzwarth, World Scientific, Singapore (1992).
- [MHE 87] R. Machleidt, K. Holinde e C. Elster, *Phys. Rep.* **149**, 1 (1987).
- [MKW+ 86] U.-G. Meissner, N. Kayser, A. Wirzba e W. Weise, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1676 (1986).
- [MKW 87] U.-G. Meissner, N. Kayser e W. Weise, *Nucl. Phys.* **A466**, 685 (1987).
- [MKW+ 89] U.-G. Meissner, N. Kayser, H. Weigel e J. Schechter, *Phys. Rev.* **D39**, 1956 (1989).
- [MS 86] F. Mandl e G. Shaw, *Quantum Field Theory*, John Wiley and Sons. New York (1986).
- [Mut 87] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics*, World Scientific, Singapore (1987).
- [MW 89] J.A. Mignaco e S. Wulck, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 1449 (1989).
- [MZ 86] U.-G. Meissner e I. Zahed, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 1035 (1986).
- [MZ 86b] U.G. Meissner e I. Zahed, *Adv. Nucl. Phys.* **17**, 143 (1986).
- [Nam 60] Y. Nambu, *Phys. Rev. Lett.* **4**, 380 (1960).
- [Ne'e 61] Y. Ne'eman, *Nucl. Phys.* **26**, 222 (1961).

- [NN 53] K. Nishijima e T. Nakano, *Prog. Theor. Phys.* **10**, 581 (1953).
- [NNR 93] F.S. Navarra, M. Nielsen e M.R. Robilotta, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **19**, 685 (1993).
- [NR 87] E.M. Nyman e D.O. Riska, *Nucl. Phys.* **A468**, 473 (1987).
- [NR 90] E.M. Nyman e D.O. Riska, *Rep. Prog. Phys.* **53**, 1137 (1990).
- [PS 62] J.K. Perring e T.H.R. Skyrme, *Nucl. Phys.* **31**, 550 (1962).
- [Rob 87] M.R. Robilotta, em *Processos Mesônicos em Física Nuclear*, III Escola de Verão "Jorge André Swieca", editado pela SBF (1987).
- [Rob 89] M.R. Robilotta, em *Apostila do curso de Física de Hádrons*, IFUSP (1989).
- [Ros 50] M.N. Rosenbluth, *Phys. Rev.* **79**, 615 (1950).
- [RS 89] D.O. Riska e B. Schwesinger, *Phys. Lett.* **B229**, 339 (1989).
- [Rub 70] J. Rubinstein, *J. Math. Phys.* **11**, 258 (1970).
- [Sac 62] R.G. Sachs, *Phys. Rev.* **126**, 2256 (1962).
- [Sak 60] J.J. Sakurai, *Ann. of Phys.* **11**, 1 (1960).
- [Sch 57] J. Schwinger, *Ann. Phys.* **2**, 407 (1957).
- [Sky 54] T.H.R. Skyrme, *Proc. Roy. Soc.* **A226**, 521 (1954).
- [Sky 55] T.H.R. Skyrme, *Proc. Roy. Soc.* **A230**, 277 (1955).
- [Sky 58] T.H.R. Skyrme, *Proc. Roy. Soc.* **A247**, 260 (1958).
- [Sky 61] T.H.R. Skyrme, *Proc. Roy. Soc.* **A260**, 127 (1961).
- [Sky 61b] T.H.R. Skyrme, *Proc. Roy. Soc.* **A262**, 237 (1961).
- [Sky 62] T.H.R. Skyrme, *Nucl. Phys.* **31**, 556 (1962).
- [Sky 71] T.H.R. Skyrme, *J. Math. Phys.* **12**, 1735 (1971).
- [SP 55] A. Salam e J.C. Polkinghorne, *Nuovo Cimento* **2**, 685 (1955).
- [Spi 73] M.R. Spiegel, *Manual de fórmulas e tabelas matemáticas*, Coleção Cshaum. Mcgraw-Hill do Brasil (1973).
- [Str+ 78] C. Stratowa *et al.* *Phys. Rev.* **D18**, 3970 (1978).
- [TH 89] A.W. Thomas e K. Holinde, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 2025 (1989).

- [*t Ho 74*] G.'t Hooft, *Nucl. Phys.* **B72**, 461 (1974).
- [*t Ho 74b*] G.'t Hooft, *Nucl. Phys.* **B75**, 461 (1974).
- [*TO 72*] L. Turner e M.G. Olsson, *Phys. Rev.* **D6**, 3522 (1972).
- [*VR 74*] B. Verwest e D.O. Riska, *Phys. Lett.* **B48**, 17 (1974).
- [*VLL+ 85*] R. Vinh Mau, M. Lacombe, B. Loiseau, W.N. Cottingham e P. Lisboa, *Phys. Lett.* **B105**, 259 (1985).
- [*Wei 68*] S. Weinberg, *Phys. Rev.* **166**, 1568 (1968).
- [*Wei 73*] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **31**, 494 (1973).
- [*Wei 91*] W. Weise, in *Models of the Nucleon*, V Escola de verão Jorge André Swieca, Campos do Jordão (1991).
- [*Wil 70*] J.G. Williams, *J. Math. Phys.* **11**, 2611 (1970).
- [*Wit 79*] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B160**, 57 (1979).
- [*Wit 83*] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B223**, 443 (1983).
- [*Wit 83b*] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B223**, 422 (1983).
- [*Wit 84*] E. Witten, *Workshop on Solitons in Nucl. and Part. Phys.*, A. Chodos, E. Hadjimichel e C.Tze, World Scientific (1984).
- [*Wul 92*] Stenio Wulk A. Melo, *tese de doutorado*, UFRJ (1992).
- [*WZ 71*] J. Wess e B. Zumino, *Phys. Lett.* **37B**, 95 (1971).
- [*YA 85*] H. Yabu e K. Ando, *Prog. Theor. Phys.* **74**, 750 (1985).
- [*YM 54*] C.N. Yang e R.L. Mills, *Phys. Rev.* **96**, 191 (1954).
- [*ZB 86*] I. Zahed e G.E. Brown, *Phys. Rep.* **142**, 1 (1986).
- [*Zwe 64*] G. Zweig, CERN Report no. 8182/TH401 (1964).