Universidade de São Paulo

Instituto de Física

**Aspectos dos Fundamentos da Mecânica Quântica:
Processos Estocásticos e Analogia com Turbulência**

Léa Ferreira dos Santos

Orientador: Prof. Dr. Carlos O. Escobar

Tese apresentada ao Instituto de Física
da Universidade de São Paulo para a
obtenção do título de Doutora em Ciências.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Carlos Ourivio Escobar (UNICAMP - orientador)

Prof. Dr. Walter Felipe Wreszinski (IFUSP)

Prof. Dr. Miled Hassan Youssef Moussa (UFSCar)

Prof. Dr. Salomon Sylvain Mizrahi (UFSCar)

Prof. Dr. Vicente Pleitez (IFT/UNESP)

São Paulo
2000

2000 10/08

i

Armando Corbani Ferraz
Presidente da Comissão de Pós Graduação

530.12
S237a
D
ex. 1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Santos, Léa Ferreira dos

Aspectos dos Fundamentos da Mecânica Quântica:
Processos Estocásticos e Analogia com Turbulência.
São Paulo, 2000.

Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo.
Instituto de Física - Departamento de Física Nuclear.
Orientador: Prof. Dr. Carlos Ourívio Escobar

Área de Concentração: Física Clássica e Física Quântica:
Mecânica e Campos

Unitermos: 1. Fundamentos de Mecânica Quântica;
2. Processos Estocásticos; 3. Turbulência; 4. Modelos de
Redução Dinâmica.

USP/IF/SBI-030/2000

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador e amigo Professor Carlos O. Escobar pela ótima e dedicada orientação, aos Professores P. Pearle e G. Sotkov pelas interessantes discussões e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta tese apresentamos algumas possíveis interpretações para a descrição dos fenômenos quânticos. Fazemos uso da interpretação estocástica de Nelson para descrever uma corda bosônica aberta e mostramos que os resultados coincidem com aqueles obtidos via primeira quantização. Combinamos ainda esta interpretação, que lida com a posição da partícula, com um particular modelo de localização da função de onda conhecido como CSL, o que nos permite analisar a influência da evolução da função de onda sobre o movimento da partícula. A função de onda desses modelos de redução realiza um movimento estocástico no espaço de Hilbert devido à adição de um ruído multiplicativo na equação de Schrödinger. Mostramos que a partícula, por sua vez, sofre movimento turbulento, o que motiva uma analogia entre sistemas quânticos abertos e turbulência, de forma semelhante à que já havia sido realizada entre sistemas quânticos isolados e movimento browniano.

Abstract

In this thesis we present some possible interpretations for the description of quantum phenomena. We make use of Nelson's stochastic interpretation to describe an open bosonic string and show that the results coincide with those obtained from the first quantization. Moreover, we combine this interpretation, which deals with the particle position, with a particular localization model for the wave function known as CSL, which allows us to analyse the influence of the wave function evolution on the movement of the particle. The wave function of these reduction models performs a stochastic motion in Hilbert space due to the addition of a multiplicative noise in the Schrödinger equation. We show that the particle, on the other hand, suffers a turbulent motion, which motivates an analogy between open quantum systems and turbulence, similarly to what had already been done between isolated quantum systems and brownian motion.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	O Problema da Medida	4
2.1	Von Neumann	5
2.2	Decoerência	7
2.3	Interpretação causal	10
2.4	Convergências	12
3	Mecânica Estocástica	14
3.1	Modelo estocástico de Nelson	15
3.2	Colchete de Poisson estocástico e comutador quântico	17
3.3	Movimento estocástico de uma corda bosônica aberta	20
3.3.1	Corda bosônica aberta	20
3.3.2	Covariância de Lorentz	26
3.3.3	Função de correlação	26
4	Modelos de redução dinâmica da função de onda	28
4.1	Modelo de localização espontânea contínua	29
4.2	Interpretação de beables	31
4.3	Dinâmica microscópica do modelo CSL	35
4.3.1	Duas gaussianas	36
4.3.2	Uma única gaussiana	37
4.4	Distribuição de Wigner para sistemas quânticos abertos	40
5	Turbulência de Burgers e modelo CSL	44
5.1	Dicionário para KPZ, Burgers e CSL	49
5.2	Difusão acentuada	50

5.2.1	Equações diferenciais e equação de Fokker-Planck . . .	53
5.2.2	Correções de intermitência	54
5.2.3	Escalas de tempo	55
6	Críticas aos modelos de redução dinâmica	59
6.1	Críticas passadas aos DRM	61
6.2	Nossas críticas	63
6.2.1	O papel da massa nos DRM	63
6.2.2	Beables como elementos de realidade	64
6.2.3	A natureza do ruído	65
7	Conclusão	67
A	Condição de von Neumann e base de ponteiro	68
A.1	Condição de von Neumann	68
A.2	Base de ponteiro	69
B	Elementos da Teoria de Processos Estocásticos	72
B.1	Cálculo de Itô	73
B.1.1	Equação de Fokker-Planck e equação diferencial estocástica	74
B.2	Cálculo de Stratonovich	76
C	Cálculos do capítulo 4	77
C.1	Equação estocástica de Nelson via método de Vink	77
C.2	Probabilidade transição para a equação de Schrödinger modificada	78
C.2.1	Espaço de configuração	78
C.2.2	Espaço de momento	81
C.3	Distribuição de Wigner	82
D	Simulação numérica	84

Capítulo 1

Introdução

Há duas tendências básicas e opostas na teoria quântica moderna. Uma mais pragmática e para a qual o problema da medida não existe, pois defende que basta para uma teoria prever e descrever os resultados experimentais, no que de fato a mecânica quântica é extremamente bem sucedida; e outra mais realista e liderada principalmente por Einstein, Bohm e Bell, que deseja uma descrição completa da realidade física.

De acordo com a interpretação ortodoxa da mecânica quântica, a função de onda representa um conjunto de potencialidades (*potentialities*) e evolui de acordo com a equação de Schrödinger, que é reversível, linear e determinista. A potencialidade para uma propriedade física é muito mais que apenas uma indefinição dessa propriedade, pois inclui também as superposições (*entanglements*), o que constitui uma característica exclusiva da mecânica quântica e diferença fundamental entre a teoria quântica e a clássica. Entretanto, no ato de medida ocorre a perda das superposições quânticas e emergem os fatos (*actualities*). O problema da medida consiste na ausência de uma boa descrição para essa transição de potencialidades para fatos [1]. O mundo fica assim dividido em uma parte descrita pela evolução da função de onda (mundo quântico, microscópico) e outra descrita pela evolução de variáveis clássicas como posição (mundo clássico, macroscópico). É da interação desses dois mundos - a medida - que ocorre o colapso da função de onda, mas essa passagem é apenas ditada por regras e postulados. Onde está o corte micro/macro?, o que distingue o sistema do aparelho?, o que é medida e como descrevê-la matematicamente? são algumas das perguntas que perseguem os insatisfeitos com a interpretação ortodoxa.

Para Bell [2] a mecânica quântica ortodoxa é uma teoria que serve apenas para descrever resultados experimentais. Ele propunha o desenvolvimento de uma nova teoria que não fosse fundamentalmente sobre medida, o que eliminaria a necessidade de um corte, e que não fosse consequentemente sobre grandezas observadas (*observables*), mas sobre propriedades objetivas (*beables*), daí sua simpatia pela interpretação causal de de Broglie-Bohm [3] que trata posição como beable. Essa teoria deveria ser capaz também de explicar a não existência de superposições macroscópicas e de apresentar uma dinâmica para o colapso da função de onda e foi isso que o levou a propagandear [4] o modelo de colapso de Ghirardi, Rimini e Weber (GRW) [5].

Bohm foi talvez quem mais tenha se empenhado no sentido de tentar desenvolver melhores interpretações para a mecânica quântica e várias interpretações foram de alguma forma influenciadas pelo seu trabalho. Sua primeira e mais famosa interpretação, apresentada em 1952 e conhecida como interpretação causal [3], consiste numa elaboração da onda piloto de de Broglie [6]. Aqui a divisão de mundo é eliminada e tanto a função de onda quanto a posição passam a descrever juntas todo o mundo em todas as escalas. A dinâmica é dada pela equação de Schrödinger e pela equação da partícula, que é guiada pela função de onda. Dois anos mais tarde, numa tentativa de justificar a suposição anterior de Bohm, e criticada por Pauli, que a distribuição de um conjunto de partículas estivesse relacionada com o módulo quadrado da função de onda $|\psi|^2$, ele e Vigier propuseram a interpretação causal estocástica [7]. Nesta nova interpretação a partícula, imersa em um fluido descrito pela equação de Schrödinger, realiza um movimento estocástico e sua equação de movimento é a mesma da mecânica estocástica de Nelson [8]. Existe ainda uma terceira interpretação desenvolvida por Bohm juntamente com Bub [9]. Ao contrário das duas anteriores, não há nesta menção à posição, toda a descrição é feita em termos da função de onda. Eles sugerem uma equação para a função de onda que descreve o acoplamento do sistema observado com o aparelho (ou ambiente), que é assim incorporado na dinâmica da teoria, e explica o colapso da função de onda durante a medida de forma contínua e causal. Esta última interpretação influenciou fortemente o modelo de colapso desenvolvido por Pearle [10] e mais tarde usado no aperfeiçoamento do modelo de GRW [5], o que levou ao atual modelo de localização espontânea contínua (CSL) [11].

Um dos problemas das duas interpretações causais de Bohm reside no uso da equação de Schrödinger, que não consegue explicar o repentino desapare-

cimento da onda vazia durante o processo de medida (conforme discutimos no capítulo 2). Os modelos de dinâmica de redução, por outro lado, omitem por completo qualquer descrição do que ocorre com o movimento da partícula durante o colapso, mas claramente não têm nenhum problema com a função de onda vazia. Mesmo após o colapso, devido às caudas da função de onda, a posição da partícula permanece indefinida. O que propomos nesta tese é uma combinação dessas duas interpretações. Atribuímos realidade à partícula e à função de onda e lidamos conjuntamente com as equações que descrevem a evolução de cada uma delas. A equação para a função de onda não é mais linear e reversível, mas envolve um ruído multiplicativo que é responsável pelo colapso. Este ruído introduz um novo termo na equação de movimento da partícula, o qual a conduz para o local onde ocorre o colapso. Esse novo termo faz com que a partícula realize um movimento turbulento, o que nos permitiu desenvolver uma analogia entre o modelo de colapso e turbulência.

A tese está dividida da seguinte maneira. No capítulo 2 comentamos a interpretação ortodoxa da mecânica quântica e algumas semelhanças entre decoerência e interpretação causal de de Broglie-Bohm. No capítulo 3 apresentamos a interpretação de Nelson e mostramos que com ela podemos descrever o movimento de uma corda bosônica aberta obtendo os mesmos resultados da primeira quantização. Os capítulos 4 e 5 são dedicados à combinação a qual nos referimos anteriormente e à analogia com turbulência. O capítulo 6 trata das críticas as quais estão sujeitos os modelos de redução dinâmica como o CSL. Os detalhes técnicos de cálculos e simulação estão distribuídos pelos quatro apêndices.

Capítulo 2

O Problema da Medida

Embora incontestável que sistemas atômicos e subatômicos devam ser tratados quanticamente, o físico de partículas experimental por exemplo, em sua atividade diária no laboratório, raramente faz uso da mecânica quântica, determinando trajetórias e vidas médias via mecânica clássica relativística. Bohr sempre enfatizou a necessidade do uso de uma linguagem clássica na descrição de resultados experimentais, argumentando que essa necessidade era fruto da natureza clássica dos observadores e seus instrumentos de medida [12]. Com isso, ele estabeleceu uma distinção fundamental entre sistemas quânticos e clássicos e a inclusão de um corte separando os dois parecia inevitável [12]:

In the system to which the quantum mechanical formalism is applied, it is of course possible to include any intermediate auxiliary agency employed in the measuring process [but] some ultimate measuring instruments must always be described entirely on classical lines, and consequently kept outside the system subject to quantum mechanical treatment.

Essa divisão, tida como deveras arbitrária, tem sido um dos maiores focos de críticas à sua interpretação e levou a tentativas de eliminá-la, tal como feito por von Neumann [13] ou de Broglie e Bohm [3]. Em um artigo recente [14], argumentamos que essas duas interpretações e também o modelo de decoerência (uma versão moderna da descrição do processo de medida de von Neumann) precisam lidar com idéias obscuras que são evitadas ao se fixar um corte.

A posição de Bohr parece a de alguém que antecipa e evita os problemas que precisariam ser encarados ao tentar-se analisar em detalhe o processo de medida e limita-se a fornecer uma interpretação que proteja o já bem sucedido formalismo da mecânica quântica. Na sua separação quântico/clássico não há espaço, por exemplo, para o problema da medida, uma vez que corpos macroscópicos, ao contrário dos microscópicos, não são descritos por funções de onda e portanto, superposições de estados macroscópicos não existem.

2.1 Von Neumann

O problema da medida origina-se com a tentativa de von Neumann de remover a divisão entre mundo quântico e clássico, para tal, estende o uso da função de onda para qualquer sistema. Ele foi o primeiro a fazer uma análise formal do processo de medida e acabou por desenvolver uma nova interpretação da mecânica quântica, a qual é muitas vezes erroneamente identificada como as edificações filosóficas de Bohr. Conforme enfatizado por Feyerabend [15],

when dealing with von Neumann's investigation, we are not dealing with a refinement of Bohr - we are dealing with a completely different approach.

Von Neumann atribui uma função de onda única ao sistema composto (i.e. sistema e aparelho) e argumenta que existe um operador unitário de evolução que estabelece uma correlação entre os estados do sistema e do aparelho,

$$|\phi(0)\rangle_{SA} = \sum_n c_n |S_n(0)\rangle |A_n(0)\rangle, \quad (2.1)$$

de modo que qualquer resultado correspondendo ao primeiro é inferido da leitura do segundo.

Agora porém, os estados do aparelho também estão sujeitos ao princípio de superposição e não importa quantos aparelhos sejam adicionados as superposições permanecem presentes. Von Neumann faz então uma distinção entre dois tipos de processos em mecânica quântica. Isso é feito em termos do operador densidade, um conceito introduzido pelo próprio von Neumann [16]. O operador densidade é definido como

$$\rho \equiv \sum_i w_i |\phi^i\rangle\langle\phi^i|, \quad (2.2)$$

onde w_i é a probabilidade de encontrar no ensemble o estado $|\phi^i\rangle$.

Para um ensemble puro, $w_i = 1$ para um certo $|\phi^i\rangle$ e $w_i = 0$ para qualquer outro estado. O ensemble puro é uma coleção de sistemas físicos, tal que todo membro é caracterizado pelo mesmo estado e $\text{tr}\rho^2 = 1$. Já para um mistura, ou ensemble misto, uma fração dos membros está no estado $|\phi^1\rangle$ com probabilidade w_1 , outra em $|\phi^2\rangle$ com probabilidade w_2 e assim por diante.

Os dois tipos de processos são então: a evolução temporal unitária dada pela equação de Schrödinger, que é um processo reversível e mantém as indesejáveis superposições macroscópicas,

$$\rho_{\text{puro}}(t) = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} \rho(0) e^{\frac{iHt}{\hbar}} = \sum_{nm} c_n c_m^* |S_n(t)\rangle\langle A_n(t)| \langle A_m(t)| \langle S_m(t)| \quad (2.3)$$

e o processo de medida, que é irreversível e transforma a matriz de densidade pura acima em uma mistura,

$$\rho_{\text{mistura}}(t) = \sum_i |c_i|^2 |S_i(t)\rangle\langle A_i(t)| \langle A_i(t)| \langle S_i(t)| \quad (2.4)$$

O caráter irreversível do processo de medida, que já havia sido mencionado por Bohr [17],

it is also essential to remember that all unambiguous information concerning atomic object is derived from the permanent marks... left on the bodies which define the experimental conditions. Far from involving any special intricacy, the irreversible amplification effects on which the recording of the presence of atomic objects rests rather remind us of the essential irreversibility inherent in the very concept of observation,

foi formalizado por von Neumann através do postulado do colapso da função de onda ¹. Em uma tentativa de justificar fisicamente esse postulado,

¹Observe entretanto, que von Neumann lida com ensembles e portanto usa matrizes de densidade em seu formalismo.

o observador é introduzido e sua percepção subjetiva passa a ser fundamental. Um resultado só é realmente conhecido após a consciência de um observador tê-la registrado [13]. O corte continua presente, mas foi transferido para uma posição entre o sistema composto e o observador, o que claramente enfraquece a interpretação.

Além do problema epistemológico acima, esta interpretação também necessita de uma particular relação de comutação. O processo de medida, deve ser instantâneo, de modo que o estado do sistema não seja alterado devido a evolução unitária, ou seja

$$e^{\frac{iH\epsilon}{\hbar}}|S(t)\rangle = |S(t+\epsilon)\rangle \simeq \text{cte}|S(t)\rangle, \quad (2.5)$$

onde ϵ é o intervalo de tempo para a realização da medida. Desse modo a hamiltoniana total do sistema composto deve comutar com o observável que se deseja medir $[H, O_S] = 0$. Ora, o aparelho é um sistema de muitos graus de liberdade e assim, é improvável que possamos ter controle sobre essa hamiltoniana. Veja o apêndice A para uma breve discussão sobre esse tema.

2.2 Decoerência

Uma versão mais elaborada da interpretação de von Neumann é o modelo de decoerência [18, 19, 20], o qual alega que a interação do sistema composto com o ambiente não pode ser negligenciada. Seguindo a unificação de von Neumann, sistema, aparelho e ambiente são todos tratados quanticamente, acarretando as inevitáveis superposições macroscópicas. Entretanto, como o observador não tem acesso ao imenso número de graus de liberdade do ambiente, ignora-os fazendo o traço sobre eles. O traço torna a matriz de densidade diagonal, removendo as superposições macroscópicas.

$$\begin{aligned} \rho_r &= \text{Tr}_\epsilon \sum_{n,m} a_n a_m^* |S_n\rangle \langle A_n| \langle \epsilon_n| \langle \epsilon_m| \langle A_m| \langle S_m| \\ &= \sum_i |a_i|^2 |S_i\rangle \langle A_i| \langle A_i| \langle S_i|. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Note que o observador ainda exerce um papel crucial, já que é ele quem faz o traço e o corte também é mantido, agora entre os graus de liberdade que

são ignorados e aqueles que não o são, conforme afirma um dos proponentes desse modelo [21]:

[the resolution] of the measurement problem... through the appeal of decoherence require[s] a universe split into systems

Decoerência é a versão dinâmica do postulado de von Neumann, mas a subjetividade permanece, uma vez que não se sabe até onde vai o ambiente. Perceba que distinguir um sistema clássico do seu ambiente é trivial, vide a facilidade com que acompanhamos uma partícula browniana imersa em um banho térmico, mas distinguir um sistema quântico de seu ambiente não é simples, se é que é possível. Por exemplo, na interação de um elétron (constituindo o sistema) com fótons (que representam o ambiente) não podemos ignorar o fato do elétron estar cercado por uma nuvem de fótons. Como separar estes fótons do ambiente parece uma tarefa impossível. Conforme Prigogine [22]

we generally start using a Hamiltonian involving the 'bare' particles (electrons and photons) and an interaction. These 'bare' particles cannot be the 'physical' ones. Because of the electromagnetic interaction between electrons and photons, an electron is always surrounded by a cloud of photons. The bare electron (without photons) is only a formal concept.

Um outro problema é a condição de comutatividade. Além da relação já introduzida por von Neumann, agora é preciso que a hamiltoniana do aparelho e da sua interação com o ambiente comutem com um observável do aparelho, $[H_A + H_{Ac}, O_A] = 0$ (Veja mais sobre esse assunto no apêndice A). Só esse observável não é perturbado pelo ambiente [23], apenas a base consistindo dos auto-estados desse operador, chamada 'pointer basis', é estável e contém informações sobre o sistema quântico. A matriz de densidade diagonal é escrita nessa base particular. Veja porém que é essencial o conhecimento da interação entre o aparelho e o ambiente, o que é ilógico, uma vez que no mundo real não se tem controle sobre essa hamiltoniana. É como se ao decidir fazer a medida de um certo observável o experimental precisasse selecionar o instrumento certo a ser operado naquele particular ambiente. Veja o apêndice A para saber um pouco mais sobre 'pointer basis'.

Como esse critério nem sempre é obedecido, ainda podemos optar por um procedimento conhecido como 'predictability sieve' [24]. Segundo ele o experimental deve recorrer a uma lista para decidir quais observáveis podem ser medidos. Estes correspondem aos observáveis que já foram monitorados pelo ambiente e portanto não serão perturbados pela medida. A maneira para classificar os elementos na lista consiste em preparar o aparelho em todo estado puro concebível, deixá-lo evoluir por um tempo fixo e então determinar seu estado final. A entropia final da matriz de densidade do aparelho seria uma boa medida da perda de predictabilidade. Os observáveis que podem ser medidos com impunidade estariam no topo desta lista. De acordo com Zurek [21]

the observer can know beforehand what (limited) set of observables can be measured with impunity. He will be able to select measurement observables that are already monitored by the environment.

O modelo de decoerência introduz uma série de procedimentos que estão distantes da realidade dos experimentos em laboratório e é marcante a ambigüidade no tratamento do ambiente: nós o conhecemos bem o suficiente para decidir qual observável pode ser medido, mas ao mesmo tempo temos tão pouco controle sobre ele, que o traço sobre seus estados precisa ser realizado.

Mais um comentário relevante é o fato de tanto decoerência como von Neumann usarem matriz de densidade, o que reflete uma interpretação em termos de ensembles ². Esse consiste num outro ponto de crítica, como bem mostra a afirmação seguinte [2, 25]

If one were not actually on the look-out for the probabilities, I think the obvious interpretation of even [the butchered density matrix] would be that the system is in a state in which the various [wave functions] somewhat co-exist... This is not at all a probability interpretation, in which the different terms are seen not as co-existing, but as alternatives.

²Uma descrição de sistemas abertos em termos de funções de onda também existe e referimo-nos a ela no capítulo 4.

2.3 Interpretação causal

A interpretação causal de de Broglie e Bohm descreve eventos individuais e não ensembles. A função de onda ψ , que é solução da equação de Schrödinger, funciona como um campo que guia a partícula ³. A trajetória da partícula é obtida da equação,

$$\dot{x} = \frac{\nabla S(x, t)}{M}, \quad (2.7)$$

onde $S/\hbar$ é a fase da função de onda escrita na forma polar,

$$\psi(x, t) = R(x, t) \exp \left[\frac{iS(x, t)}{\hbar} \right] \quad (2.8)$$

e M é a massa da partícula ⁴.

Através da função de onda na forma polar, a equação de Schrödinger pode ser dividida em duas partes, a parte real

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2M} - \frac{\hbar^2}{2M} \frac{\nabla^2 R}{R} + V = 0 \quad (2.9)$$

e a imaginária

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{R^2 \nabla S}{M} \right) = 0. \quad (2.10)$$

A equação (2.10) é uma equação de continuidade e (2.9) é comumente chamada de equação de Madelung. Madelung [26] foi o primeiro a perceber a semelhança das equações (2.7), (2.9) e (2.10) com aquelas da hidrodinâmica clássica.

A equação (2.9) tem a forma da equação clássica de Hamilton-Jacobi a não ser pelo termo extra [27]

$$Q(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\nabla^2 R}{R}, \quad (2.11)$$

³Uma outra interpretação que lida com trajetórias de partículas é a mecânica estocástica de Nelson, que apresentamos no capítulo seguinte.

⁴Embora trabalhemos em uma dimensão, escolhemos usar a notação ∇ para a derivada parcial $\partial/\partial x$ apenas para manter a semelhança com as equações de Bohm e, no capítulo seguinte, de Nelson.

chamado de potencial quântico. É fácil verificar que a equação (2.7) leva a

$$M\ddot{x} = -\nabla(V + Q). \quad (2.12)$$

A partícula agora está sujeita não só à força clássica, mas também à uma força quântica.

Esta teoria parece corresponder à dualidade de Bohr - uso de conceitos quânticos numa escala e clássicos em outra - levada ao extremo. A função de onda ψ e a posição da partícula são agora usadas sempre e em todas as escalas. Isso elimina a divisão quântico/clássico e aparentemente resolve o problema da medida, já que a partícula tem sempre uma posição bem definida. Entretanto, há vários problemas com essa teoria, entre eles citamos o fato de ser matematicamente mais complexa; ser não-local; tratar de maneira assimétrica posição e momento; prever resultados estranhos como o elétron parado no átomo de hidrogênio; ter a função de onda influenciando o movimento da partícula, enquanto que a partícula não tem nenhum efeito sobre ela e vários outros tratados em detalhe na referência [27]. Uma crítica mais recente foi levantada por Englert *et al* [28]. Na experiência de duas fendas com detectores de um bit, os quais são capazes de determinar o caminho do átomo sem perturbar o movimento do centro de massa, eles mostraram que há trajetórias de Bohm indo por uma fenda, enquanto que o átomo passa de fato pela outra, daí referirem-se às trajetórias de Bohm como trajetórias surrealistas. Existe uma grande discussão em torno deste tema [29, 30, 31, 32, 33], mas nosso interesse aqui é outro: limitamo-nos apenas a analisar o ato de medida.

Sempre que a função de onda divide-se em partes que não se sobrepõem espacialmente, tal como no experimento de duas fendas, uma parte da onda acompanha a partícula e a outra fica vazia, embora ainda possa influenciar a partícula. A onda vazia carrega informação sobre os estados de superposição, mas logo que uma medida é realizada essa informação perde qualquer efeito sobre a partícula. Segundo Hiley [34],

[p]erhaps we shouldn't talk about it actually disappearing from the universe. Rather the information in the 'empty' wave packet no longer has any effect, because during the act of measurement the irreversible process introduces a stochastic or random disturbance which destroys the information of quantum potential of the wave packet

Graças ao ato de medida, que identifica qual ramificação corresponde a onda vazia, as superposições são repentinamente destruídas. Hiley menciona a idéia de informação passiva,

we've tried to introduce a distinction between active information and inactive information. That is, when an apparatus has undergone this irreversible change, one wave packet becomes inactive.

Como isso acontece, para onde vai a informação carregada pela onda vazia, quais são os efeitos de seu desaparecimento nos arredores são questões que não ficam claras.

2.4 Convergências

Perceba a convergência dessas duas interpretações aparentemente distintas: tanto em decoerência como na interpretação causal, o ato de medida implica na perda de informação, seja na dissipação no ambiente ou na esterilização da onda vazia. Essa vaga noção de informação é central para ambas as interpretações e é realçada pela passagem de Bell [2]

I don't have a concept of disembodied information - it must be located and represented in the material world, and I don't know how to formulate the concept of how much information there is in an arbitrary space region - I think the concept of information is again a very useful one in practice but not in principle.

Um outro fator de convergência parece ser o caráter privilegiado da posição. A interpretação causal é toda formulada em termos de posição. Segundo seus defensores, esse é um mérito, pois traz à tona o fato de todas as observações reduzirem-se sempre a observações de posição [35]. Em decoerência posição também tem um papel especial. As interações entre sistemas no universo quase sempre dependem de posição, de modo que suas hamiltonianas comutam com x . Auto-estados de posição correspondem assim ao 'pointer basis' e suas superposições são rapidamente suprimidas na presença da interação com o ambiente.

Os pontos problemáticos das interpretações apresentadas acima parecem emergir da tentativa de definir quantitativamente o que ocorre na interface

quântico/clássico, análise esta cuidadosamente evitada por Bohr ao assumir uma separação radical. Ao contrário do que se poderia esperar após tantos anos de discussões, o problema da medida em mecânica quântica continua em aberto. As novas interpretações sugerem apenas regras de procedimento e não explicações físicas para o que ocorre no ato de medida, como bem expressa Bell na afirmação [35]

The 'Problem' then is this: how exactly is the world to be divided into speakable apparatus... that we can talk about... and unspeakable quantum system that we can not talk about? How many electrons, or atoms, or molecules, make an 'apparatus'? The mathematics of the ordinary theory requires such a division, but says nothing about how it is made. In practice the question is resolved by pragmatic recipes which have stood the test of time, applied with discretion and good taste born of experience. But should not fundamental theory permit exact mathematical formulation?

Capítulo 3

Mecânica Estocástica

Assim como a interpretação causal, a mecânica estocástica também lida com trajetórias, mas trajetórias estocásticas. A motivação para essa interpretação parece basear-se na forte semelhança entre a equação de Schrödinger para partícula livre,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2M} \nabla^2 \psi \quad (3.1)$$

e a equação clássica de difusão,

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \nu \nabla^2 \varrho, \quad (3.2)$$

onde ν corresponde a uma constante de difusão e ϱ é a densidade de probabilidade do processo.

A natureza probabilística da mecânica quântica seria assim fruto do seu caráter estocástico. Schrödinger foi o primeiro a estudar esta analogia [36], sendo seguido por vários físicos e matemáticos [7, 8, 37, 38].

A mecânica estocástica desenvolvida por Nelson [8, 39] é uma ferramenta matemática poderosa, mas não está imune à críticas. O meio que causa esse movimento aleatório não é geralmente identificado e o caráter não local da interpretação chega a ser aceito por vários teóricos, mas já a necessidade de uma condição de quantização colocada a mão parece mais grave. Wallstrom [40] mostrou que as equações hidrodinâmicas de Madelung, as quais são obtidas da equação estocástica para a partícula, só são equivalentes à equação de

Schrödinger se uma condição de quantização, como a existente para a antiga teoria quântica, for imposta.

Em um artigo recente [41], fizemos uso de tal interpretação e mostramos que o movimento estocástico de uma corda bosônica aberta leva aos mesmos resultados obtidos via primeira quantização do sistema. Nosso objetivo era obter uma interpretação clássica na escala de Planck, conforme explicamos na última seção deste capítulo. Nas outras duas seções apresentamos um pouco do formalismo da mecânica estocástica.

3.1 Modelo estocástico de Nelson

No modelo estocástico de Nelson a partícula está sujeita a um movimento estocástico dado por [8, 39]

$$dx(t) = v_+(x, t)dt + \sqrt{2\nu} \eta(t)dt, \quad (3.3)$$

Na equação acima, $\eta(t)$ é um ruído branco

$$\langle \eta(t) \rangle = 0, \quad (3.4)$$

$$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = \delta(t - t') \quad (3.5)$$

e ν é uma constante de difusão que especificaremos adiante. O primeiro termo no lado direito corresponde a um campo de velocidade para propagação para frente ($dt > 0$) e está relacionado com uma função escalar S_+ da seguinte forma,

$$v_+(x, t) = \frac{\nabla S_+(x, t)}{M} \quad (3.6)$$

Dada a natureza não diferenciável da equação (3.3), Nelson introduz as derivadas de transporte para frente e para trás

$$D_+x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \left\langle \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right\rangle = v_+ \quad (3.7)$$

$$D_-x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \left\langle \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t} \right\rangle = v_- \quad (3.8)$$

Analogamente às duas equações acima, com a média, obtemos que para uma função geral F , as derivadas de transporte são escritas como [42]

$$(D_{\pm}F)(x, t) = (\partial_t F)(x, t) + v_{\pm}(x, t)(\nabla F)(x, t) \pm \nu(\nabla^2 F)(x, t) . \quad (3.9)$$

As equações (3.3), (3.4) e (3.5) implicam na equação de Fokker-Planck (veja apêndice B, subseção B.1.1)

$$\partial_t p(x, t; x_0, t_0) = -\nabla(v_+(x, t)p(x, t; x_0, t_0)) + \nu\nabla^2 p(x, t; x_0, t_0) , \quad (3.10)$$

onde p é a probabilidade de transição, que, por definição, propaga a densidade de probabilidade de um ensemble de partículas

$$\rho(x, t) = \int p(x, t; x_0, t_0)\rho(x_0, t_0)dx_0 . \quad (3.11)$$

A densidade de probabilidade satisfaz portanto uma equação com a mesma forma da equação (3.10).

Nelson define ainda as velocidades de corrente e osmótica

$$v = \frac{1}{2}(v_+ + v_-) = \frac{\nabla S}{M} \quad (3.12)$$

$$u = \frac{1}{2}(v_+ - v_-) = \nu \frac{\nabla \rho}{\rho} \quad (3.13)$$

e obtém assim a equação de continuidade [42]

$$\partial_t \rho(x, t) = -\nabla(\rho(x, t)v(x, t)) . \quad (3.14)$$

Das equações (3.12) e (3.13) e definindo $\rho(x, t) = R^2(x, t)$ podemos escrever a equação de movimento da partícula na seguinte forma

$$dx = \left[2\nu \frac{\nabla R(x, t)}{R(x, t)} + \frac{\nabla S(x, t)}{M} \right] dt + \sqrt{2\nu}\eta(t)dt, \quad (3.15)$$

a qual será útil no próximo capítulo.

A segunda lei de Newton é formulada neste modelo da seguinte forma

$$\frac{1}{2}[(D_+D_- + D_-D_+)x] = -\frac{1}{M}(\nabla V)(x) . \quad (3.16)$$

da qual segue a equação de Madelung [42]

$$\partial_t S + \frac{(\nabla S)^2}{2M} - 2M\nu^2 \frac{\nabla^2 R}{R} = -V(x) . \quad (3.17)$$

A equação de Madelung e a equação de continuidade correspondem respectivamente à parte real e à parte imaginária da equação de Schrödinger quando a função de onda é escrita na forma polar, desde que a constante de difusão ν seja dada por $\frac{\hbar}{2M}$ ¹.

Conforme já mencionamos, Wallstrom mostrou que as equações hidrodinâmicas de Madelung não são equivalentes à equação de Schrödinger [40]. Isso porque ao assumirmos que a velocidade é um gradiente da função S , não percebemos que S pode ser uma função multivaluada, de maneira que v é um gradiente apenas localmente. Poderíamos fazer com que S tivesse um único valor, desde que se tornasse descontínua num certo ponto, mas então $\nabla\psi = \psi \cdot (\nabla R)/R + i\psi \cdot \nabla S/\hbar$ teria uma singularidade. Sendo S multivaluada, não há nada na equação de Madelung que imponha que a função de onda tenha apenas um valor. Para que a função de onda tenha um único valor, os valores de S devem diferir por um múltiplo integral de 2π , ou seja $\oint_L v \cdot dl = 2\pi j$, onde j é um inteiro e L uma curva fechada. Assim, uma condição de quantização precisou ser postulada para que a equação de Schrödinger pudesse ser reobtida da equação de Madelung.

Note porém que esse problema só aparece em duas ou mais dimensões e quando tentamos derivar a equação de Schrödinger a partir da equação de difusão. Se considerarmos a equação de Schrödinger juntamente com a equação de difusão, como em uma interpretação de variáveis ocultas, não há motivos para preocupação [44, 45].

3.2 Colchete de Poisson estocástico e comutador quântico

Guerra e Morato [46] formularam a mecânica estocástica em termos de um princípio variacional. Introduziram uma ação estocástica em termos de uma densidade de lagrangiana estocástica

¹De acordo com a definição de aceleração, outras relações para a constante de difusão são possíveis [43].

$$\mathcal{L}_{st}(x, t) = \frac{1}{2} M v_+(x, t) v_-(x, t) - V(x) \quad (3.18)$$

$$A_{st}(t_0, t; \rho_0; v_+) = \int_{t_0}^t \int \mathcal{L}_{st}(x, t) \rho(x, t) dx dt, \quad (3.19)$$

onde ρ_0 é a distribuição inicial. Com essa ação mostraram que, via princípio variacional, deve existir uma função S , tal que

$$v(x, t) = \nabla S / M \quad (3.20)$$

$$\partial_t S + \frac{(\nabla S)^2}{2M} - 2M\nu^2 \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} = -V(x), \quad (3.21)$$

que juntamente com a equação de continuidade, levam a equação de Schrödinger (cabe aqui as críticas de Wallstrom).

Através das definições (3.12) e (3.13), a média estocástica da lagrangiana em um tempo fixo pode ser escrita da seguinte forma

$$L_{st}(\rho, S) = \int \left(\frac{1}{2} M v^2 - \frac{1}{2} M u^2 - V \right) \rho(x) dx. \quad (3.22)$$

Guerra e Marra [47] introduziram assim uma hamiltoniana como função do espaço de fase especificado pelos campos ρ e S

$$H_{st}(\rho, S) = \int \left(\frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} M u^2 + V \right) \rho(x) dx \quad (3.23)$$

e concluíram que ρ e S são as variáveis canônicas e as equações canônicas são obtidas de

$$\begin{aligned} \partial_t \rho(x, t) &= \{ \rho(x, t), H_{st} \}_{st} = \frac{\delta H_{st}}{\delta S(x, t)} \\ \partial_t S(x, t) &= \{ S(x, t), H_{st} \}_{st} = - \frac{\delta H_{st}}{\delta \rho(x, t)}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde $\{, \}$ é o colchete de Poisson. Para duas variáveis dinâmicas B e C , funcionais de ρ e S , escrevem

$$\{B, C\}_{st} = \int \left(\frac{\delta B}{\delta \rho(x)} \frac{\delta C}{\delta S(x)} - \frac{\delta B}{\delta S(x)} \frac{\delta C}{\delta \rho(x)} \right) dx. \quad (3.25)$$

Uma representação equivalente pode ser introduzida através da função de onda

$$\psi = \sqrt{\rho} \exp(iS/\hbar) \quad (3.26)$$

de modo que o colchete de Poisson passa a ser escrito como

$$\{B, C\}_{st} = \frac{1}{i\hbar} \int \left(\frac{\delta B}{\delta \psi(x)} \frac{\delta C}{\delta \psi^*(x)} - \frac{\delta B}{\delta \psi^*(x)} \frac{\delta C}{\delta \psi(x)} \right) dx. \quad (3.27)$$

A vantagem dessa representação é que podemos introduzir um operador hamiltoniano

$$H_q = -(\hbar^2/2M)\Delta + V \quad (3.28)$$

e mostrar que a hamiltoniana hidrodinâmica H_{st} é dada como uma média quântica da hamiltoniana quântica H_q

$$H_{st} = H_{st}(\psi, \psi^*) = \langle \psi, H_q \psi \rangle = \int \psi^*(x) H_q \psi(x) dx. \quad (3.29)$$

Assim as equações hamiltonianas para ψ e ψ^* são lineares e coincidem com a equação de Schrödinger

$$\partial_t \psi = \{ \psi, H_{st} \}_{st} = \frac{1}{i\hbar} \left[\frac{\delta H_{st}}{\delta \psi^*(x)} \right] = \frac{1}{i\hbar} H_q \psi \quad (3.30)$$

De maneira semelhante podemos definir observáveis B funcionais de (ρ, S) como

$$B(\rho, S) = \langle \psi, B_q \psi \rangle = \int \psi^*(x) B_q \psi(x) dx \quad (3.31)$$

e usando (3.27) obter a correspondência entre os colchetes de Poisson e os comutadores quânticos

$$\{B, C\}_{st} = i \langle [B_q, C_q] \rangle, \quad (3.32)$$

onde B_q and C_q são operadores quânticos e B e C são variáveis clássicas.

O valor médio do lado direito da equação acima é definido como

$$\langle [B_q, C_q] \rangle = \int \psi^* [B_q, C_q] \psi dx . \quad (3.33)$$

Note que apresentamos o modelo estocástico para uma partícula não relativística, mas na seção seguinte, ao lidarmos com uma corda, uma generalização relativística do processo de Markov é necessário, o que foi feito por Dohrn, Guerra e Ruggiero [48].

3.3 Movimento estocástico de uma corda bosônica aberta

A teoria de cordas, forte candidata a fornecer uma teoria de unificação de todas as forças, descreve a física na escala de Planck. Não temos ainda uma visão clara dos fenômenos em escalas tão diminutas, apesar dos esforços recentes de vários autores [49, 50, 51, 52], que chegam a afirmar que a unificação da relatividade geral com a mecânica quântica só será possível se o determinismo for restaurado nesta última. Smolin[52] acredita que nesta escala as flutuações quânticas e térmicas sejam indistinguíveis e t' Hooft especula que os graus fundamentais de liberdade da natureza não devam ser quânticos, mas clássicos. Devido a perda de informação estes graus de liberdade primários evoluiriam para um conjunto de classes de equivalência, as quais formariam o espaço de Hilbert [53, 54].

Motivados por estas considerações, tentamos desenvolver uma formulação objetiva da física na escala de Planck. Assim examinamos uma corda clássica sujeita ao movimento estocástico de maneira semelhante ao que havia sido feito por Nelson para uma partícula. Consideramos uma corda bosônica aberta por ser o caso mais simples.

3.3.1 Corda bosônica aberta

A ação de Nambu-Goto para uma corda [55, 56]

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \int_0^\pi d\sigma \sqrt{-\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma}\right)^2 \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x_\mu}{\partial \tau}\right)^2} , \quad (3.34)$$

é proporcional a área da superfície de duas dimensões (embebida no espaço-tempo de D dimensões) varrida por ela. Os parâmetros σ e τ são adimensionais e caracterizam os pontos $x^\mu(\sigma, \tau)$ na superfície e α' é a constante de Regge, que na teoria de cordas está relacionada com um comprimento fundamental [57]. Tomamos τ como um parâmetro de evolução e σ como um parâmetro cinético.

O movimento da corda é determinado pelo princípio de Hamilton $\delta S = 0$, o que nos leva às equações para o movimento clássico da corda [58]

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\mu} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'_\mu} = 0 \quad (3.35)$$

e à condição de contorno

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'_\mu} = 0 \text{ em } \sigma = 0, \pi \quad (3.36)$$

onde

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \sqrt{-\dot{x}^2 x'^2 + (\dot{x}x')^2}, \quad (3.37)$$

e $\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial \tau}$ e $x' = \frac{\partial x}{\partial \sigma}$.

O quadri-momento total da corda é dado por

$$p^\mu = \int_C (\mathcal{P}^\mu d\sigma + \Pi^\mu d\tau) = \int_{\tau_{fixo}} \mathcal{P}^\mu d\sigma \quad (3.38)$$

onde C é qualquer curva que corta a superfície de evolução e

$$\mathcal{P}^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{\dot{x}^\mu x'^2 - x'^\mu (\dot{x}x')}{\sqrt{-\dot{x}^2 x'^2 + (\dot{x}x')^2}} \quad (3.39)$$

$$\Pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'_\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{x'^\mu \dot{x}^2 - \dot{x}^\mu (\dot{x}x')}{\sqrt{-\dot{x}^2 x'^2 + (\dot{x}x')^2}}. \quad (3.40)$$

A condição de contorno (3.36) implica que $\partial \mathcal{L} / \partial x'_\mu \cdot \dot{x}_\mu = 0$ em $\sigma = 0, \pi$, ou seja nos extremos a corda move-se com velocidade da luz $\dot{x}^2 = c^2$.

A ação é invariante sob as transformações

$$x^\mu(\sigma, \tau) \rightarrow \tilde{x}^\mu(\sigma, \tau) = x^\mu(\tilde{\sigma}(\sigma, \tau), \tilde{\tau}(\sigma, \tau)) \quad (3.41)$$

induzidas pelas reparametrizações da superfície: $\tilde{\sigma} \rightarrow \sigma = \sigma(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau})$, $\tilde{\tau} \rightarrow \tau = \tau(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau})$. Essas transformações formam um grupo contínuo, chamado grupo de gauge da corda. O objetivo final é quantizar as equações de movimento da corda e para isso precisamos estabelecer um formalismo canônico. Porém a liberdade de gauge na teoria gera dificuldades já a nível clássico, pois existe uma dependência entre momentos e coordenadas. O momento conjugado à coordenada $x^\mu(\sigma)$ é

$$\mathcal{P}^\mu(\sigma) = \frac{\delta}{\delta \dot{x}_\mu(\sigma)} \int d\sigma \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\mu}(\sigma) \quad (3.42)$$

É fácil verificar que de (3.39) obtemos os vínculos primários

$$x'_\mu \mathcal{P}^\mu = 0 \quad (3.43)$$

$$2\alpha'(\pi \mathcal{P})^2 + x'^2/(2\alpha') = 0. \quad (3.44)$$

Para podermos prosseguir precisamos reduzir os graus de liberdade do sistema eliminando as variáveis redundantes. As variáveis dinâmicas que sobram formam um conjunto completo de variáveis independentes e é para elas que fazemos a quantização substituindo o colchete de Poisson pelo comutador. Assim, é preciso escolher um gauge para o sistema, ou seja, devemos fixar uma parametrização para a superfície de evolução da corda. Note que abdicamos portanto da covariância de Lorentz explícita. Mais adiante verificaremos como a covariância pode ser restabelecida. Escolhemos um parâmetro τ tal que

$$\tau = n_\mu x^\mu / (2\alpha' n_\mu p^\mu), \quad (3.45)$$

onde n é um vetor tipo luz $n^2 = 0$. Uma vez fixo τ , temos liberdade na escolha de σ . Nomeamos os pontos da corda para um parâmetro τ fixo de modo que a densidade de momento na direção n_μ seja constante

$$n_\mu \mathcal{P}^\mu(\sigma) = \text{cte} = n_\mu p^\mu / \pi. \quad (3.46)$$

O gauge definido através de (3.45) e (3.46) é chamado gauge transverso. Usamos agora essas duas equações juntamente com (3.43) e (3.44) para reduzir o número de variáveis independentes. É conveniente usar $n = (1, -1, 0, 0)$ e trabalhar no cone de luz

$$x^\pm = \frac{x^0 \pm x^{D-1}}{\sqrt{2}} \quad (3.47)$$

$$x_\perp = \{x^i\} = \{x^1 \dots x^{D-2}\}. \quad (3.48)$$

(3.45) e (3.46) podem agora ser escritas como

$$dx^+(\sigma)/d\sigma = 0 \quad (3.49)$$

$$\mathcal{P}^+(\sigma) = p^+/\pi, \quad (3.50)$$

as quais inseridas nas equações de vínculo implicam que as componentes '+' das coordenadas e momentos são variáveis dependentes. As variáveis dinâmicas independentes no gauge transverso são $x^i(\sigma)$, $\mathcal{P}^i(\sigma)$, p^+ e x_σ^- , onde

$$x_\sigma^- = \frac{1}{\pi} \int_\sigma^\pi d\sigma' x^-(\sigma'). \quad (3.51)$$

A necessidade de adicionar a coordenada x_σ^- à lista de variáveis independentes vem do fato das equações de vínculo conterem apenas $\partial x^-(\sigma)/\partial\sigma$.

A hamiltoniana passa a ser escrita como

$$H = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\sigma \left[2\alpha' (\pi \mathcal{P}_i)^2 + \frac{(x_i')^2}{2\alpha'} \right], \quad (3.52)$$

que leva à seguinte equação de movimento

$$\ddot{x}_i - x_i'' = 0 \quad (i = 1, \dots, D-2) \quad (3.53)$$

Ao invés de prosseguirmos agora com o método de quantização, iniciamos o tratamento estocástico do sistema descrito por (3.53). Para isso expandimos $x_i(\sigma, \tau)$ em modos normais

$$x_i = \sum_{n=0}^{\infty} x_{ni} \cos n\sigma \quad (3.54)$$

e obtemos

$$\ddot{x}_{ni} + n^2 x_{ni} = 0. \quad (3.55)$$

Os modos normais são agora promovidos a um processo estocástico, semelhante ao que foi feito por Guerra e Ruggiero no tratamento estocástico de campos [59]. A equação diferencial estocástica que cada modo $x_n(\tau)$ satisfaz é

$$dx_n^i(\tau) = v_{+n}^i d\tau + \eta_n^i d\tau, \quad (3.56)$$

onde η_n^i é o ruído branco,

$$\langle \eta_n^i(\tau) \rangle = 0 \quad (3.57)$$

$$\langle \eta_n^i(\tau) \eta_{n'}^j(\tau') \rangle = 2 \nu_n \delta_{ij} \delta_{nn'} \delta(\tau - \tau'). \quad (3.58)$$

e τ é o parâmetro de evolução.

Seguindo os passos da seção anterior, derivamos a equação de continuidade

$$\partial_\tau \rho[x_m^i, \tau] = - \sum_n \nabla_n^i (\rho[x_m^j, \tau] v_n^i[x_m^j, \tau]) \quad (3.59)$$

onde

$$v_n^i[x_m^j, \tau] = 4\alpha' \nabla_n^i S[x_m^j, \tau] \quad (3.60)$$

e para o modo zero

$$v_0^j[x_m^j, \tau] = 2\alpha' \nabla_0^j S[x_m^j, \tau]. \quad (3.61)$$

De acordo com a mecânica estocástica de Nelson a segunda derivada na equação (3.55) deve agora ser escrita como

$$\frac{1}{2} (D_+ D_- + D_- D_+) x_n^i = -n^2 x_n^i. \quad (3.62)$$

onde as derivadas de transporte são

$$D_\pm = \partial_\tau + \sum_n v_{\pm n}^i \nabla_n^i \pm \sum_n (\nabla_n^i)^2 \quad (3.63)$$

Obtemos assim a equação de Madelung

$$\begin{aligned}
\partial_\tau S &= -\alpha'(\nabla_0^i S)^2 + \frac{\nu_0 \nu_n}{2\alpha'} \frac{(\nabla_0^i)^2 R}{R} + \\
&- \sum_{m \neq 0} 2\alpha'(\nabla_m^i S)^2 + \frac{\nu_n \nu_n}{2\alpha'} \sum_{m \neq 0} \frac{(\nabla_m^i)^2 R}{R} + \\
&- \frac{1}{4\alpha'} \sum_m \frac{m^2 (x_m^i)^2}{2} = 0 .
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Esta, juntamente com a equação de continuidade, leva a equação funcional de onda para a corda [60],

$$i\partial_\tau \psi = \left[-\alpha'(\nabla_0^i)^2 + \sum_{n \neq 0} \left(-2\alpha'(\nabla_n^i)^2 + \frac{n^2 (x_n^i)^2}{8\alpha'} \right) \right] \psi , \tag{3.65}$$

desde que as constantes de difusão sejam

$$\nu_n = 2\alpha' \quad n \neq 0 \tag{3.66}$$

$$\nu_0 = \alpha' . \tag{3.67}$$

Obtivemos assim o espectro padrão de uma corda bosônica aberta, dado por um conjunto infinito de osciladores harmônicos, conforme esperado.

A diferença entre ν_n and ν_0 vem da convenção usada para separar o modo zero dos demais.

Por razões de consistência, obtivemos que a constante de difusão é proporcional a α' . Isso está de acordo com a posição defendida por Veneziano de que na escala de Planck apenas as constantes c e λ são relevantes, e a última relacionada a α' segundo a relação $\lambda^2 = 2\alpha'$ [57]. Se, induzidos pela constante de difusão de Nelson, que depende da massa, esperássemos que ν estivesse relacionada com a energia dos sistema, ela variaria de acordo com o estado da corda. Cada partícula, e portanto cada estado da corda, teria uma constante de difusão diferente. O valor fixo da constante de difusão parece encorajar as especulações de indistinguibilidade entre as flutuações quânticas e clássicas na escala de Planck.

3.3.2 Covariância de Lorentz

Voltamos agora a questão da covariância de Lorentz. Para isso usamos a correspondência entre os colchetes de Poisson e os comutadores quânticos [47].

$$\{B, C\}_{st} = i \langle [B_q, C_q] \rangle = i \int \psi^* [B_q, C_q] \psi dx . \quad (3.68)$$

Substituindo dx por $\prod_{i,m} dx_m^i$ podemos estender este resultado para o nosso caso, de modo que examinamos o problema da covariância de Lorentz através de uma linguagem estocástica, calculando os colchetes de Poisson para os geradores do grupo de Lorentz. Com

$$M^{\mu\nu} = \int d\sigma (x^\mu P^\nu - x^\nu P^\mu) \quad (3.69)$$

o elemento crítico da álgebra é

$$\{M^{i-}, M^{j-}\} = i \langle [M_q^{i-}, M_q^{j-}] \rangle . \quad (3.70)$$

Para fechar a álgebra a nível clássico, porém estocástico, é preciso que $D = 26$, o que está de acordo com os resultados conhecidos da teoria de corda [55].

3.3.3 Função de correlação

Podemos calcular também a função de correlação de dois pontos usando o método estocástico. Excluimos o modo zero dos cálculos para evitar a divergência infravermelha [55]. Para o estado fundamental

$$\langle x^i(\tau) x^i(\tau') \rangle = \int x^i p(x^i, \tau, x^i, \tau') x^i \rho_0(x^i) dx^i , \quad (3.71)$$

o que leva a

$$\langle x^i(\tau) x^i(\tau') \rangle = (D-2) 2\alpha' \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \frac{\exp(n\tau')}{\exp(n\tau)} \quad (3.72)$$

Este é o mesmo resultado obtido da primeira quantização da corda [55], se estendemos τ ao domínio euclidiano.

Em resumo, mostramos que o movimento estocástico clássico de uma corda bosônica aberta leva a mesma equação funcional de onda obtida através da primeira quantização da corda e que a corda estocástica clássica também vive em 26 dimensões. A concordância da função de correlação calculada pelo método estocástico com aquela calculada pelo tratamento padrão, reforça nossa formulação.

A idéia de que flutuações estocásticas possam se manifestar na escala de Planck fortalece-se com a relação entre a constante da corda e a constante de difusão do processo estocástico.

Capítulo 4

Modelos de redução dinâmica da função de onda

Conforme já visto no capítulo 2, a interação do sistema com o ambiente via decoerência consegue eliminar os termos de superposição, mas lida com matriz de densidade e portanto pressupõe um ensemble. Para descrever um sistema individual a decoerência precisa recorrer a uma interpretação de mundos paralelos, os quais não se comunicam entre eles [18, 61].

Uma outra maneira para descrever o colapso da função de onda consiste em modificar a equação de Schrödinger, adicionando a ela um termo estocástico [11, 62, 63, 64]. Qualquer evolução temporal para o operador densidade pode ser obtida através da média no ensemble da equação de difusão para a função de onda correspondente, porém a vantagem desses modelos é lidar com a função de onda, que deixa de ser apenas uma entidade matemática e passa a ter realidade. Com a função de onda descrevemos sistemas individuais. Ser capaz de lidar com sistemas individuais e não ensembles em mecânica quântica, é semelhante a poder descrever a trajetória de uma única partícula browniana clássica através de sua equação de Langevin-Itô ao invés de limitar-se a distribuição de probabilidade gaussiana de um conjunto dessas partículas.

Bohm e Bub [9], figuram entre os primeiros a questionar a imposição do uso de ensembles na mecânica quântica e a tentar descrever o colapso da função de onda através de uma modificação da equação de Schrödinger, associando assim a função de onda a um sistema individual. Uma boa justificativa para a necessidade de descrição para os elementos de um ensemble

provém da difração de um único fóton por duas fendas, por exemplo. Ao ser absorvido, o fóton está localizado em uma pequena região do aparelho e portanto a função de onda deve ser negligenciável em qualquer outra região que não essa [65].

A localização espacial da função de onda para um sistema individual é descrita através dos modelos de redução dinâmica. Um modelo particular, que apresentamos neste capítulo, é conhecido como localização espontânea contínua (CSL) [11, 66, 67] e corresponde a um aperfeiçoamento do modelo de colapso desenvolvido por Ghirardi, Rimini e Weber (GRW) [5] em associação com Pearle [10], este fortemente influenciado pelo trabalho de Bohm e Bub.

Porém, os modelos de redução dinâmica não estão livres de críticas. No capítulo 6 mencionamos algumas que geraram polêmicas e apresentamos críticas novas. Já as discussões entre defensores dos modelos de redução da função de onda e dos defensores de decoerência aparecem nas referências [61, 68, 69].

4.1 Modelo de localização espontânea contínua

O modelo de localização espontânea contínua (CSL) corresponde a um possível modelo de redução da função de onda e foi desenvolvido por Ghirardi, Pearle e Rimini (GPR). Nele a função de onda está sujeita a um processo estocástico no espaço de Hilbert. Em uma dimensão a equação de evolução para uma única partícula livre na forma de Stratonovich é dada por [11, 66]

$$d\psi(x, t) = \left\{ -iH'\psi(x, t) - \frac{1}{4\gamma} \int dz [\sqrt{\gamma}\zeta(z, t) - 2\gamma G(x - z)]^2 \psi(x, t) \right\} dt, \quad (4.1)$$

a qual não preserva a norma da função de onda e onde $H' = p^2/2M\hbar$. Para preservar a norma a equação precisa ser escrita da seguinte forma [11, 65]

$$d\phi(x, t) = \left\{ -iH' - \gamma \int dz K(x, z) + \sqrt{\gamma} \left[\int dz \zeta(z, t) L(x, z) \right] \right\} \phi(x, t) dt, \quad (4.2)$$

onde

$$K(x, z) = 2 \left[\int dy G(y - z) P(y, t) \int dy' G(y' - z) P(y', t) \right. \\ \left. - G(x - z) \int dy G(y - z) P(y, t) \right], \quad (4.3)$$

$$L(x, z) = G(x - z) - \int dy G(y - z) P(y, t), \quad (4.4)$$

e

$$P(x, t) = |\phi(x, t)|^2. \quad (4.5)$$

Nas equações acima ζ é um ruído branco ($\langle \zeta(z, t) \rangle = 0$ e $\langle \zeta(z, t) \zeta(z', t') \rangle = \delta(z - z') \delta(t - t')$) e

$$G(x - z) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \exp \left[-\alpha \frac{(x - z)^2}{2} \right] \quad (4.6)$$

caracteriza a localização da função de onda. O parâmetro de comprimento $1/\sqrt{\alpha}$ e o parâmetro de frequência λ estão relacionados com γ de acordo com $\gamma = \lambda(4\pi/\alpha)^{1/2}$. Eles são escolhidos de tal forma que a nova equação de evolução leva aos mesmos resultados obtidos através da evolução unitária de Schrödinger quando tratamos sistemas microscópicos com poucos graus de liberdade, porém, quando o sistema tratado é macroscópico, a nova equação descreve o rápido decaimento das superposições macroscópicas, que são transformadas em misturas estatísticas [5, 11]¹.

Um problema com essa interpretação já bastante discutido, e que mencionamos no capítulo 6, corresponde às caudas (*tails*) da função de onda colapsada. O processo de localização não pode levar a pacotes de onda infinitamente estreitos, pois isso causaria um ganho infinito de energia no sistema. A gaussiana $G(x - z)$ é introduzida para evitar esse problema, mas acaba causando o aparecimento de caudas. Por causa delas, argumentamos que a função de onda não deve ser capaz de determinar exatamente a posição da partícula e por isso, além da equação de Schrödinger modificada precisamos também da equação de movimento da partícula, obviamente influenciada

¹Uma crítica a esse particular modelo é que os efeitos da interação com um banho térmico (como em decoerência) são muito maiores do que os efeitos causados por este ruído e estes seriam portanto impossíveis de ser observados [70, 71]

Outro problema é a arbitrariedade na escolha dos parâmetros λ e α , maiores comentários sobre isso aparecem no capítulo 6.

pela evolução da função de onda. Queremos assim examinar o modelo de redução sob o ponto de vista microscópico [72], semelhante ao que foi feito pela interpretação causal de Bohm, mas dessa vez sem sofrer constrangimentos com a função de onda vazia. Um método sistemático para a obtenção das trajetórias de Bohm e Nelson a partir da equação de Schrödinger, bem como trajetórias para quaisquer observáveis, foi desenvolvido por Vink. O método de Vink difere da proposta de Nelson, pois este pretendia derivar a equação de Schrödinger das equações de difusão para a partícula, mas Vink obtém as equações diferenciais estocásticas partindo da equação de Schrödinger, de forma que as críticas de Wallstrom não são válidas aqui [44]. Apresentamos este método na seção seguinte.

4.2 Interpretação de beables

Bell figura entre aqueles que nunca estiveram satisfeitos apenas com a perfeita capacidade operativa da mecânica quântica, mas que queriam uma descrição completa da realidade física, do que acontece durante o processo de medida. Incomodava-se com a arbitrariedade do corte de mundo de Bohr e a prescrição de von Neumann para unir as teorias quântica e clássica. Simpatizante da interpretação causal de Bohm, que atribui sempre uma posição bem definida para a partícula, propôs uma interpretação em termos de 'beables' em oposição a observáveis [73]. 'Beables' correspondem a quantidades que existem independentemente da observação, de modo que lhes são atribuídos valores bem definidos.

Vink [74] mostrou que tanto a interpretação de Bohm quanto a de Nelson são na verdade casos particulares da interpretação de 'beables'. Propôs ainda que todos os observáveis, mesmo aqueles que não comutam, podem assumir o caráter de 'beable' simultaneamente.

Ao contrário da aproximação de Bell, que lida com número de férmions - uma quantidade discreta - Vink mostrou que o conceito de 'beable' pode ser estendido a qualquer observável, desde que assumam valores discretos em escalas diminutas.

Para encontrar as trajetórias de um conjunto de variáveis dinâmicas que comutam O^i , cada uma com m autovalores discretos, escrevemos a equação de continuidade na representação O como

$$\partial_t P_m = \sum_n J_{mn}, \quad (4.7)$$

onde a densidade de probabilidade P_m e a matriz de fonte J_{mn} são definidas da seguinte maneira

$$P_m(t) = | \langle O_m | \psi(t) \rangle |^2, \quad (4.8)$$

$$J_{mn}(t) = 2Im \{ \langle \psi(t) | O_m \rangle \langle O_m | H' | O_n \rangle \langle O_n | \psi(t) \rangle \}. \quad (4.9)$$

Nas equações a notação de GPR está sendo usada: $H' = p^2/2M\hbar + V(x)/\hbar$.

Note que (4.7) vem da equação de Schrödinger

$$i\partial_t |\psi(t)\rangle = H' |\psi(t)\rangle, \quad (4.10)$$

pois

$$\begin{aligned} \partial_t P_m(t) &= (\partial_t \langle \psi(t) | O_m \rangle) \langle O_m | \psi(t) \rangle + \langle \psi(t) | O_m \rangle (\partial_t \langle O_m | \psi(t) \rangle) \\ &= i \langle \psi(t) | H' | O_m \rangle \langle O_m | \psi(t) \rangle - i \langle \psi(t) | O_m \rangle \langle O_m | H' | \psi(t) \rangle \\ &= i \sum_n \langle \psi(t) | O_n \rangle \langle O_n | H' | O_m \rangle \langle O_m | \psi(t) \rangle + \\ &\quad - i \sum_n \langle \psi(t) | O_m \rangle \langle O_m | H' | O_n \rangle \langle O_n | \psi(t) \rangle \\ &= 2Im \{ \sum_n \langle \psi(t) | O_m \rangle \langle O_m | H' | O_n \rangle \langle O_n | \psi(t) \rangle \} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Queremos interpretar esse sistema em termos de 'beables', i.e. em cada instante de tempo o observável tem de fato o valor O_m . Como a trajetória para uma quantidade discreta não pode ser contínua, é natural esperar uma dinâmica estocástica. Seguindo Bell, a distribuição de probabilidade $P_m(t)$ dos valores O_m deve satisfazer a equação mestre

$$\partial_t P_m = \sum_n (T_{mn} P_n - T_{nm} P_m), \quad (4.12)$$

onde $T_{mn}dt$ é a probabilidade de transição e expressa matematicamente a probabilidade para saltos do estado n para o estado m . Para conciliar as visões quântica e estocástica, igualamos (4.7) e (4.12):

$$J_{mn} = (T_{mn}P_n - T_{nm}P_m), \quad (4.13)$$

onde $T_{mn} \geq 0$ e $J_{mn} = -J_{nm}$.

Há grande liberdade na busca de soluções para a equação (4.13). Bell escolhe uma particular para $n \neq m$,

$$T_{mn} = \begin{cases} J_{mn}/P_n & J_{mn} > 0 \\ 0 & J_{mn} \leq 0. \end{cases}$$

Restringindo a posição da partícula em uma dimensão para os sítios de uma rede $x = an$, onde $n = 1, \dots, N$ e a é a distância da rede a , a versão discreta da equação de Schrödinger é

$$i\partial_t \psi(x, t) = H' \psi(x, t) = -\frac{\hbar}{2Ma^2} [\psi(x+a, t) + \psi(x-a, t) - 2\psi(x, t)]. \quad (4.14)$$

Dessa forma J_{mn} é

$$\begin{aligned} J_{mn} &= 2Im\{[\psi(an)]^* H'_{mn} \psi(an)\} \\ &= -\frac{\hbar}{Ma^2} Im\{[\psi(an+a)]^* \psi(an) \delta_{n,m-1} + [\psi(an-a)]^* \psi(an) \delta_{n,m+1}\}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Note que o termo $[\psi(an)]^* \psi(an) \delta_{n,n}$ não aparece pois é real.

Usando a forma polar da função de onda $\psi(x, t) = R(x, t) \exp \left[\frac{iS(x, t)}{\hbar} \right]$ e fazendo a expansão

$$\psi(x+a) = \psi(x) + a\{[R(x)]' e^{i\frac{S(x)}{\hbar}} + \frac{i}{\hbar} R(x)[S(x)]' e^{i\frac{S(x)}{\hbar}}\} + \mathcal{O}(a^2) \quad (4.16)$$

temos [74]

$$J_{mn} = \frac{1}{Ma} \{[S(an)]' P_n \delta_{n,m-1} - [S(an)]' P_n \delta_{n,m+1}\}, \quad (4.17)$$

Para o movimento para frente a escolha de Bell torna-se

$$T_{mn} = \frac{[S(an)]'}{Ma} \delta_{n,m-1}. \quad (4.18)$$

Isso mostra que a H' leva a transições apenas entre sítios vizinhos. A partícula pode saltar do sítio n para o sítio $n+1$ com probabilidade $[S(an)]'dt/Ma$. Como cada salto é sobre uma distância a , o deslocamento médio num intervalo de tempo dt é $dx = S(x)'dt/M$. No limite do contínuo, como $a \rightarrow 0$, a partícula tem uma velocidade dada por

$$\dot{x} = \frac{\nabla S(x)}{M}, \quad (4.19)$$

que corresponde ao resultado da interpretação causal (veja equação 2.7).

Poderíamos entretanto, adicionar a T_{mn} a solução da equação homogênea, T_{mn}^o

$$T_{mn}^o P_n - T_{nm}^o P_m = 0, \quad (4.20)$$

para a qual podemos escolher uma gaussiana com largura σ

$$T_{mn}^o \propto \exp \left\{ - \left[m - n - \frac{2\sigma \ln(P_m/P_n)}{4(m-n)} \right]^2 / 2\sigma \right\}, \quad (4.21)$$

o que leva a saltos entre sítios distantes.

Assumindo que σ seja suficientemente pequena, aproximamos

$$[\ln(P_m/P_n)]/(m-n) \sim 2a[R(an)]'/R(an), \quad (4.22)$$

o que nos leva a seguinte equação de Langevin para a posição da partícula no limite do contínuo [74]

$$dx = \left[(\beta\sigma a^2) \frac{\nabla R(x)}{R(x)} + \frac{\nabla S(x)}{M} \right] dt + \sqrt{\beta\sigma a^2} \eta(t) dt, \quad (4.23)$$

onde β é um parâmetro livre. (Veja os cálculos no apêndice C).

Esta equação coincide com a equação estocástica de Nelson se tomarmos $\beta\sigma a^2 = 2\nu$. A constante de difusão é novamente $\nu = \hbar/2M$ e $\eta(t)$ é um ruído branco: $\langle \eta(t) \rangle = 0$ e $\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = \delta(t-t')$. Note que quando $\nu = 0$ recuperamos a interpretação causal.

4.3 Dinâmica microscópica do modelo CSL

Formulamos agora o modelo CSL em termos de ‘beables’. A equação (4.13) para o modelo CSL é

$$T_{mn}^x dt = \frac{J_{mn}^x}{P_n} dt + \beta T_{mn}^{ox} dt. \quad (4.24)$$

Para a equação de Schrödinger modificada (4.2) e movimento para frente, J_{mn}^x ² é dado por (os cálculos aparecem no apêndice C, subseção C.2.1)

$$\begin{aligned} J_{mn}^x = & \frac{1}{Ma} [S(an)]' P_n \delta_{n,m-1} \\ & + 4\gamma \left[\sum_p G'(an - ap) P_p - \sum_{pp'} G'(ap - ap') P_p P_{p'} \right] P_n \delta_{m,n} + \\ & + 2 \sum_q \left[G(aq - an) - \sum_p G(aq - ap) P_p \right] \zeta_q(t) P_n \delta_{m,n}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Observe que tendo discretizado o espaço, identificamos $\zeta_q(t)$ com o ruído $\zeta(z, t)$, onde $z = qa$. A equação seguinte também é usada

$$G'(x - y) = \int dz G(z - x) G(z - y). \quad (4.26)$$

Os dois últimos termos na equação (4.25) vêm da parte não unitária da evolução da função de onda (4.2), mas, devido a $\delta_{m,n}$, não contribuem para o deslocamento dx e conseqüentemente dx obedece uma equação com a mesma forma da equação (4.23).

Para calcular os gradientes na equação (4.23), precisamos da função de onda normalizada $\phi(x, t)$. Entretanto, é mais fácil resolver a equação (4.1) do que a equação não linear eq.(4.2) e depois usar [11, 75]: $\phi(x, t) = \psi(x, t)/\|\psi\|$. Ignorando a Hamiltoniana na evolução como feito em [66, 76], a solução para a equação de Schrödinger modificada é

$$\phi(x, t) = \frac{1}{\|\psi\|} \exp \left\{ -\frac{1}{4\gamma} \int_0^t dt' \int dz [\sqrt{\gamma} \zeta(z, t') - 2\gamma G(z - x)]^2 \right\} \psi(x, 0). \quad (4.27)$$

²O expoente x é usado para lembrar que posição é o ‘beable’ aqui.

Consideramos agora dois casos particulares para a função de onda inicial - uma superposição de duas gaussianas bem separadas e uma única gaussiana - e interpretamos estes dois casos sob o ponto de vista de 'beable'.

4.3.1 Duas gaussianas

Vamos supor que a função de onda inicial corresponda a uma superposição de duas gaussianas localizadas em torno de x_1 e x_2 respectivamente e assumir que elas estejam tão distantes uma da outra, i.e. $x_2 - x_1 \gg 0$, que os dois estados sejam praticamente ortogonais

$$\psi(x, 0) = \left(\frac{A}{2\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \left\{ \exp[-A(x - x_1)^2] + \exp[-A(x - x_2)^2] \right\}. \quad (4.28)$$

A é a largura de cada gaussiana. Em um certo instante de tempo t , a função de onda é dada por

$$\begin{aligned} \phi(x, t) = & \frac{A^{\frac{1}{4}}}{\|\psi\|(2\pi)^{\frac{1}{4}}} e^{\left\{ -\frac{1}{4\gamma t} \int dz [\sqrt{\gamma} B(z, t) - 2\gamma t G(z - x_1)]^2 \right\}} e^{[-A(x - x_1)^2]} + \\ & + \frac{A^{\frac{1}{4}}}{\|\psi\|(2\pi)^{\frac{1}{4}}} e^{\left\{ -\frac{1}{4\gamma t} \int dz [\sqrt{\gamma} B(z, t) - 2\gamma t G(z - x_2)]^2 \right\}} e^{[-A(x - x_2)^2]}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

onde

$$B(z, t) = \int_0^t dt' \zeta(z, t'). \quad (4.30)$$

No primeiro termo acima a posição da partícula encontra-se em algum lugar bem próxima de x_1 e no segundo termo ela está bem próxima de x_2 .

Da analogia de Pearle entre o jogo conhecido como 'Gambler's Ruin' e o colapso da função de onda [77], sabe-se que os valores prováveis do ruído são, com um pequeno desvio, $2\gamma t G(z - x_1)$ ou $2\gamma t G(z - x_2)$. No primeiro caso a função de onda aproxima-se assintoticamente do primeiro pico, enquanto que o segundo pico rapidamente desaparece,

$$\phi(x, t) = \frac{A^{\frac{1}{4}}}{\|\psi\|(2\pi)^{\frac{1}{4}}} \left\{ \exp[-A(x - x_1)^2] + e^{-2\lambda t} \exp[-A(x - x_2)^2] \right\}. \quad (4.31)$$

No segundo caso a função de onda aproxima-se assintoticamente da gaussiana centrada em x_2 .

Suponha que o colapso ocorra em torno de x_1 , em outras palavras, que o ruído escolhido seja $2\gamma t G(z - x_1)$. Gostaríamos de analisar os efeitos deste colapso no movimento da partícula e portanto precisamos da equação diferencial estocástica no espaço de configuração. Das equações (4.23) e (4.29) obtemos

$$\begin{aligned} dx = & -4\nu(x - x_1) \frac{\exp[-A(x - x_1)^2] dt}{\exp[-A(x - x_1)^2] + \exp[-2\lambda t] \exp[-A(x - x_2)^2]} + \\ & -4\nu(x - x_2) \frac{\exp[-2\lambda t] \exp[-A(x - x_2)^2] dt}{\exp[-A(x - x_1)^2] + \exp[-2\lambda t] \exp[-A(x - x_2)^2]} + \\ & + \sqrt{2\nu\eta(t)} dt. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Observe que (não esquecendo que $x_2 - x_1 \gg 0$) as contribuições do segundo termo são negligenciáveis, esteja a partícula inicialmente próxima de x_1 ($x \sim x_1$) ou em torno de x_2 ($x \sim x_2$). É o primeiro termo que indica que a partícula segue os passos da função de onda. Se a partícula estiver inicialmente em torno de x_1 , ela tenderá a permanecer aí já que não há contribuição para o seu deslocamento. Ao contrário, se estiver inicialmente próxima de x_2 , este primeiro termo irá empurrá-la na direção de x_1 , como pode ser visto da contribuição negativa para o deslocamento.

4.3.2 Uma única gaussiana

Escolhemos agora como função de onda inicial uma única gaussiana parametrizada da mesma maneira feita por GRW [5]

$$\psi(x, 0) = \frac{e^{[-(x - \langle x \rangle)^2 / (4\Delta x)]}}{(2\pi\Delta x)^{1/4}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\frac{(\frac{x^2}{2} - x\langle x \rangle) \sqrt{\Delta x \Delta p - \hbar^2/4}}{\Delta x} + \langle p \rangle x \right] \right\}, \quad (4.33)$$

onde $\Delta x = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ e $\langle x \rangle$ é o valor médio de x (o mesmo é válido para p).

Aqui não estamos tão interessados nos efeitos do colapso da função de onda sobre a partícula, mas nos efeitos que tem o ruído introduzido na equação

de Schrödinger sobre esta partícula. Como veremos no próximo capítulo, esta análise é muito útil na analogia entre a dinâmica microscópica do modelo de CSL e turbulência.

A equação diferencial estocástica para a partícula livre é agora

$$dx = D_S dt + 2\nu \left\{ \int_0^t dt' \left[\sqrt{\gamma} \int dz \zeta(z, t') \frac{\partial G(x-z)}{\partial x} \right] \right\} dt + (2\nu)^{\frac{1}{2}} \eta(t) dt. \quad (4.34)$$

Na equação acima, o primeiro termo do lado direito descreve a evolução determinista da partícula livre e escolhemos D_S como uma notação abreviada para o termo derivado da função de onda inicial $D_S = [2\nu \nabla R_S(x, 0)/R_S(x, 0) + \nabla S_S(x, 0)/M] = [\langle x \rangle - x][\nu/\Delta x - \sqrt{\Delta x \Delta p - \hbar^2/4/M \Delta x}] + \langle p \rangle/M$. Os dois outros termos descrevem os processos estocásticos, onde η e ζ são ruídos brancos independentes. O último termo corresponde a difusão padrão e vem da solução da equação homogênea para a probabilidade de transição, como feito para obter a equação de Nelson. O segundo termo é uma difusão não padrão, que vem da parte real dos novos termos na função de onda e tem um papel importante na nossa futura analogia com turbulência.

Considerando agora momento como 'beable', repetimos o procedimento feito para posição e restringimo-lo aos sítios de uma rede $p = \hbar n$, onde $n = 1, \dots, N$ e b é a distância da rede.

A equação de evolução que preserva a norma na representação de momento

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\phi}(p, t)}{\partial t} &= -iH'(p)\bar{\phi}(p, t) + \\ &- \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp' dx dz \gamma K(x, z) \exp \left[-i \frac{(p-p')x}{\hbar} \right] \bar{\phi}(p', t) + \\ &+ \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp' dx dz \frac{\partial B(z, t)}{\partial t} L(x, z) \exp \left[-i \frac{(p-p')x}{\hbar} \right] \bar{\phi}(p', t), \end{aligned} \quad (4.35)$$

após ser discretizada, leva a (cálculos no apêndice C, subseção C.2.2)

$$J_{mn}^p = \frac{1}{2\pi\hbar} \sum_{m'} \int dx dz [-\gamma K(x, z) + \zeta(z, t) L(x, z)] \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} & \{ e^{\left[-i b \frac{(m-m')x}{n} \right]} \langle O_n | O_{m'} \rangle \langle \tilde{\phi}(p, t) | O_m \rangle + \\ & + e^{\left[i b \frac{(m-m')x}{n} \right]} \langle O_m | \tilde{\phi}(p, t) \rangle \langle O_{m'} | O_n \rangle \} \delta_{m,n}. \end{aligned}$$

A probabilidade de transição para saltos em momento é

$$T_{mn}^p dt = \frac{J_{mn}^p}{P_n} dt + \xi T_{mn}^{op} dt. \quad (4.37)$$

Como $\delta_{m,n}$ não contribui para os saltos, a solução homogênea

$$T_{mn}^{op} \propto \exp \left\{ - \left[m - n - \frac{2\Omega \ln(P_m/P_n)}{4(m-n)} \right]^2 / 2\Omega \right\}, \quad (4.38)$$

dará a variação para o momento.

Assumindo que Ω seja pequeno, aproximamos $[\ln(P_m/P_n)]/(m-n)$ por $2b[\tilde{\phi}^*(bn)\tilde{\phi}(bn)]'/[\tilde{\phi}^*(bn)\tilde{\phi}(bn)]$ e obtemos para dp

$$dp = \left[(\xi \Omega b^2) \frac{\nabla_p [\tilde{\phi}^*(p)\tilde{\phi}(p)]}{\tilde{\phi}^*(p)\tilde{\phi}(p)} \right] dt + (\xi \Omega b^2)^{\frac{1}{2}} \eta(t) dt. \quad (4.39)$$

O processo de localização no espaço de configuração espalha o pacote de onda no espaço de momento, o que remove a dependência do momento em $|\tilde{\phi}(p)|^2$ e elimina assim o primeiro termo na equação (4.39).

Para obtermos os mesmos valores médios e dispersões para posição e momento do modelo de Ghirardi, Rimini e Weber (GRW) [5], precisamos ter $\xi \Omega b^2 = \hbar^2 \alpha \lambda / 2$, o que implica em

$$dp = \sqrt{\hbar^2 \frac{\alpha \lambda}{2}} \eta(t) dt. \quad (4.40)$$

Observe que o processo estocástico para momento é uma consequência do colapso da função de onda. Ele desaparece quando os parâmetros de GRW (α, λ) tendem a zero.

As duas equações estocásticas para posição e momento (4.34) e (4.40) levam a mesma equação de Fokker-Planck para a densidade no espaço de fase obtida por GRW,

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(x, p, t)}{\partial t} = & -\frac{\langle p \rangle}{M} \frac{\partial W(x, p, t)}{\partial x} \\ & + \left[\frac{\hbar}{2M} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sqrt{\frac{\hbar^3 \alpha \lambda}{2M}} \frac{\partial^2}{\partial x \partial p} + \frac{\hbar^2 \alpha \lambda}{4} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right] W(x, p, t), \end{aligned} \quad (4.41)$$

o que discutimos melhor na seção seguinte.

4.4 Distribuição de Wigner para sistemas quânticos abertos

A evolução da distribuição de Wigner para um sistema quântico aberto descrito por uma equação de Schrödinger estocástica enfatiza a necessidade de uma equação estocástica não só para posição como também para momento. Conforme mostramos abaixo, a equação de Fokker-Planck obtida através das equações diferenciais para posição e também momento coincide com a equação de evolução para a distribuição de Wigner, desde que usemos uma nova definição para a velocidade para frente da partícula [78].

O operador densidade de um sistema é expresso como a média sobre uma distribuição de operadores projeção de estados puros [11, 62]

$$\rho = \langle |\psi\rangle \langle \psi| \rangle_{\zeta} \quad (4.42)$$

Para obter a evolução da matriz de densidade para um sistema aberto como o descrito pelo modelo de GPR, partimos da equação de Schrödinger modificada na notação de Itô, onde ignoramos o termo quadrático do ruído conforme feito em [66]

$$d\psi(x, t) = \left[-iH' - \frac{\lambda}{2} + \int dz \zeta(z, t) G(x, z) \right] \psi(x, t) dt. \quad (4.43)$$

Como estamos na forma de Itô (veja apêndice B, seção B.2), temos

$$d \langle y | \rho | x \rangle = \langle \langle y | \psi \rangle \langle d\psi | x \rangle + \langle y | d\psi \rangle \langle \psi | x \rangle + \langle y | d\psi \rangle \langle d\psi | x \rangle \rangle_{\zeta}, \quad (4.44)$$

o que leva a

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle y|\rho|x \rangle = \frac{i\hbar}{2M} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \langle y|\rho|x \rangle - \lambda \left[1 - e^{-\frac{\alpha(y-x)^2}{4}} \right] \langle y|\rho|x \rangle, \quad (4.45)$$

Note que o termo novo é o último, que representa a interação com o ambiente e que causa o rápido decaimento dos termos fora da diagonal da matriz de densidade, com isso as superposições macroscópicas são eliminadas e obtemos uma mistura estatística.

Calculamos agora a distribuição de Wigner no espaço de fase [79]

$$W'(x, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int dy \langle x + y|\rho|x - y \rangle \exp\left(\frac{-2ipy}{\hbar}\right). \quad (4.46)$$

Após expandir o termo de interação e mantendo apenas o termo de primeira ordem, a equação de evolução para a função de Wigner pode ser escrita como (veja apêndice C, seção C.3)

$$\frac{\partial W'(x, p, t)}{\partial t} = -\frac{p}{M} \frac{\partial W'(x, p, t)}{\partial x} + \frac{\hbar^2 \alpha \lambda}{4} \frac{\partial^2 W'(x, p, t)}{\partial p^2}. \quad (4.47)$$

Dada uma função de distribuição de Wigner para um sistema, sabemos que a média de um operador $\hat{A}(\hat{x}, \hat{p})$ é

$$\langle \hat{A} \rangle_q = \text{Tr}(\hat{A}\rho) = \int dx dp A(x, p) W'(x, p) \quad (4.48)$$

Mostramos agora que os mesmos resultados podem ser obtidos através de uma aproximação estocástica, onde posição e momento satisfazem equações diferenciais estocásticas.

Considere

$$dx = v_+^{CSL} dt + \sqrt{\frac{\hbar}{M}} \eta(t) dt, \quad (4.49)$$

$$dp = \sqrt{\frac{\hbar^2 \alpha \lambda}{2}} \eta(t) dt. \quad (4.50)$$

Através de um ruído branco para posição Nelson foi capaz de reproduzir a equação de Schrödinger para um sistema isolado. O processo estocástico

para momento é motivado pela existência de um termo de difusão no espaço de momento na equação (4.47).

Introduzindo uma função clássica geral no espaço de fase $A(x, p)$ e definindo valores médios através de uma função de densidade $W(x, p)$ como

$$\langle A(x, p) \rangle_{st} = \int dx dp A(x, p) W(x, p), \quad (4.51)$$

obtemos, seguindo [80, 81, 82] (veja também apêndice B, subseção B.1.1), a equação de Fokker-Planck para $W(x, p)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(x, p, t)}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial x} [v_+^{CSL} W(x, p, t)] \\ & + \left[\frac{\hbar}{2M} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sqrt{\frac{\hbar^3 \alpha \lambda}{2M}} \frac{\partial^2}{\partial x \partial p} + \frac{\hbar^2 \alpha \lambda}{4} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right] W(x, p, t). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Se escrevermos

$$v_+^{CSL} = \frac{p}{M} + \frac{\hbar}{2MW} \frac{\partial W}{\partial x} + \sqrt{\frac{\hbar^3 \alpha \lambda}{2M}} \frac{1}{W} \frac{\partial W}{\partial p}, \quad (4.53)$$

a equação (4.52) torna-se idêntica a equação para a função de Wigner (4.47). Note que essa relação para a velocidade para frente, que nos permite obter a evolução para a distribuição de Wigner através da equação de Fokker-Planck, é semelhante à definição usada por Nelson ($v_+ = v + \nu \nabla \rho / \rho$), que lhe permite obter a equação de continuidade a partir da equação de Fokker-Planck no espaço de configuração, só que ao lidarmos com sistemas quânticos abertos precisamos considerar também a derivada em momento.

Além disso, desligando a interação com o ambiente ($\alpha, \lambda \rightarrow 0$) obtemos, como esperado, a equação de Wigner para uma partícula livre isolada.

Comparando as equações (4.51) e (4.48) fazemos a identificação

$$\langle \hat{A}(\hat{x}, \hat{p}) \rangle_q = \langle A(x, p) \rangle_{st}. \quad (4.54)$$

Assim, os valores médios dos observáveis no espaço de fase obtidos usando a distribuição de Wigner são equivalentes as médias feitas sobre os processos estocásticos nos espaços de coordenada e momento.

Note que as equações estocásticas obtidas nesta seção correspondem ao caso geral, enquanto que aquelas obtidas na seção anterior correspondem a

casos particulares. Compare por exemplo as equações (4.34) com (4.49) e (4.40) com (4.50), a identidade das duas primeiras equações é válida quando $v_+^{CSL} = D_S + 2\nu \left\{ \int_0^t dt' \left[\sqrt{\gamma} \int dz \zeta(z, t') \frac{\partial G(x-z)}{\partial x} \right] \right\}$.

Capítulo 5

Turbulência de Burgers e modelo CSL

Antes de iniciar nossa analogia entre turbulência de Burgers e o modelo CSL, vamos fazer uma rápida introdução sobre a turbulência hidrodinâmica. Embora este ainda seja um problema não bem resolvido da física clássica, sua equação básica, a equação de Navier-Stokes, já era conhecida desde 1823 [83, 84]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f} \quad (5.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (5.2)$$

O movimento de vários fluidos comuns pode ser descrito através dessas duas equações. A equação (5.2) vem da equação de continuidade e do fato de estarmos lidando com um fluido incompressível, ou seja, sua densidade permanece constante. A equação (5.1) nada mais é do que a segunda lei de Newton aplicada a um fluido contínuo. Ela é obtida igualando-se a taxa de variação do momento de uma porção selecionada do fluido com todas as forças agindo nesta porção [85]. Supondo V o volume do fluido, ρ a densidade do fluido e $\mathbf{v}$ sua velocidade, temos

- taxa de variação do momento:

$$\int \frac{dv_i}{dt} \rho V = \int \frac{\partial v_i}{\partial t} \rho dV + \int \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t} \rho dV, \quad (5.3)$$

onde o segundo termo da aceleração corresponde a um elemento convectivo.

- qualquer força externa

$$\int f_i \rho dV, \quad (5.4)$$

onde f_i é a força de volume por unidade de massa do fluido

- força total na porção seleccionada exercida pela matéria ao redor

$$\int \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV, \quad (5.5)$$

pois a força de contato ou superfície é $\sigma_{ij} \eta_j \delta S$

A parte normal de σ_{ij} é a pressão $-\rho \delta_{ij}$ e a parte tangencial ou cisalhamento, quando $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, é proporcional à taxa de variação espacial da velocidade: $\nu \rho \partial v_i / \partial x_j$, onde ν é a viscosidade do fluido. Juntando tudo isso obtemos a equação (5.1).

Uma boa maneira para compreender a força tangencial é imaginar um fluido num tanque fechado, onde a tampa superior move-se a uma certa velocidade v_0 e a tampa inferior permanece fechada. É um fato experimental que a camada de fluido em contato com o sólido permanece em repouso em relação à superfície de contato. Assim, a camada superior do fluido possui uma certa velocidade v_0 , enquanto que a camada inferior permanece parada e portanto, a velocidade varia linearmente entre esses dois extremos. Devido à resistência do fluido, para que a tampa superior do tanque mantenha sua velocidade constante, é preciso exercer sobre ela uma força tangencial proporcional à viscosidade e à variação espacial da velocidade do fluido.

De maneira semelhante podemos compreender o escoamento de um fluido que possui um cilindro parado como obstáculo em seu trajeto. A velocidade do fluido varia rapidamente de um valor nulo junto à parede do cilindro até o valor característico do escoamento. Quando a velocidade de escoamento do fluido é pequena, fora dessa região de variação de velocidade (que quanto menor a viscosidade, mais delgada), o escoamento é praticamente idêntico ao de um fluido perfeito e a hidrodinâmica clássica pode ser aplicada. Entretanto, conforme a velocidade de escoamento vai aumentando há um refluxo de fluido em direção ao obstáculo e vão aparecendo cada vez mais vórtices

atrás do cilindro, até um ponto em que o escoamento nessa região torna-se turbulento: o movimento é extremamente irregular e aparentemente caótico.

O critério para determinar a transição de um fluido quase perfeito para um turbulento é dado pelo número de Reynolds, um parâmetro adimensional derivado puramente de análise dimensional

$$Re = \frac{vL}{\nu}, \quad (5.6)$$

onde v e L são respectivamente escalas de velocidade e de comprimento. Num fluido em movimento através de um cano por exemplo, v é a velocidade média do volume e L é o diâmetro do cano.

Conforme o número de Reynolds vai crescendo todas as simetrias permitidas pela equação de Navier-Stokes vão sendo sucessivamente quebradas. Quando ele se torna muito grande, aparece então uma tendência a restaurar as simetrias, mas apenas no sentido estatístico. Neste limite estamos com a chamada turbulência completamente desenvolvida (*fully developed turbulence*).

Até hoje não há nenhuma teoria que, partindo da equação de Navier-Stokes, obtenha, entre outras, as seguintes leis experimentais:

i) quando o número de Reynolds é muito grande, o incremento da velocidade quadrática média $\langle(\delta v(l))^2\rangle$ entre dois pontos separados pela distância l cresce com $l^{2/3}$;

ii) se todos os parâmetros de controle são mantidos constantes, exceto a viscosidade, que obtém valores tão pequenos quanto possíveis, a energia de dissipação média por unidade de tempo e por unidade de massa $\langle\mathcal{E}\rangle$ tem um limite finito e positivo.

Porém em 1941, Kolmogorov [86] formulou hipóteses compatíveis com essas leis, o que levou a novas previsões. Esta teoria é conhecida como K41. Sua hipótese fundamental é a lei dos quatro quintos. Os detalhes dessa derivação estão na referência [83], mas o resultado pode ser enunciado da seguinte forma: no limite $Re \rightarrow \infty$, a variação cúbica média da velocidade longitudinal por um incremento l é dada em termos da energia média dissipada por unidade de tempo e unidade de massa,

$$S_3(l) = \langle(\delta v_{\parallel}(\mathbf{r}, l))^3\rangle = -\frac{4}{5}\langle\mathcal{E}\rangle l. \quad (5.7)$$

Segundo a K41, a energia é injetada no sistema na escala l_0 na taxa de $\langle \mathcal{E} \rangle$ e é dissipada numa escala muito menor, a escala de dissipação de Kolmogorov

$$l_d = (\nu^3 / \langle \mathcal{E} \rangle)^{\frac{1}{4}}. \quad (5.8)$$

Na escala intermediária l (que corresponde ao regime inercial: $l_d \ll l \ll l_0$), energia é apenas transferida para escalas cada vez menores. Este fenômeno é conhecido como cascata de Richardson.

Definindo $v_l \sim \sqrt{\langle \delta v_{\parallel}^2 \rangle}$, e $l \sim \sqrt{\langle x^2 \rangle}$ temos que no regime inercial o campo de velocidade é

$$v_l \sim \langle \mathcal{E} \rangle^{\frac{1}{3}} l^{\frac{1}{3}} \quad (5.9)$$

ou ainda

$$t_l \sim \langle \mathcal{E} \rangle^{-\frac{1}{3}} l^{\frac{2}{3}}. \quad (5.10)$$

Como consequência, duas partículas lançadas num fluido turbulento separadas uma distância l têm o quadrado de sua distância aumentando com t ao cubo

$$\langle x^2(t) \rangle \sim \langle \mathcal{E} \rangle t_l^3 \quad (5.11)$$

A descoberta experimental desta lei foi feita por Richardson em 1926 [87].

Bem no começo do regime inercial $l \sim l_0$, usando a equação para o campo de velocidade (5.9) em termos de l_0 e a escala de dissipação de Kolmogorov, obtemos uma nova relação para o número de Reynolds,

$$Re \sim \frac{l_0 v_0}{\nu} \sim \left(\frac{\mathcal{E} l_0^3}{\nu^3} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (5.12)$$

Um outro tópico importante no estudo de turbulência é o problema das correções de intermitência [88]. Da teoria K41 seria natural esperar que para qualquer potência $p > 3$ o mesmo tipo de relação obtida por Kolmogorov devesse valer

$$S_p(l) = \langle (\delta v_{\parallel}(l))^p \rangle \propto l^{\frac{p}{3}}. \quad (5.13)$$

Porém, há discrepâncias entre os resultados experimentais e as previsões da K41, o expoente de l obtido é menor que $p/3$, fenômeno conhecido como intermitência.

Além da equação hidrodinâmica de Navier-Stokes, uma outra equação comum no estudo de turbulência é a equação de Burgers. Esta equação não é usada para descrever fluidos turbulentos reais, mas serve apenas para testar idéias teóricas. Ela é uma equação de difusão não linear para o campo de velocidade do fluido em N dimensões,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t). \quad (5.14)$$

A correlação da força externa é [89],

$$\langle \mathbf{f}^\mu(\mathbf{x}, t) \mathbf{f}^\nu(\mathbf{x}', t') \rangle = \langle \mathcal{E} \rangle \delta(t - t') \left[\delta^{\mu\nu} - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^\mu (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^\nu}{N l_0^2} \right] \exp \left[-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2}{2N l_0^2} \right]. \quad (5.15)$$

Vale mencionar que através da relação $\mathbf{v} = -\nabla h$, a equação de Burgers pode ser transformada em uma outra, conhecida como equação de Khadar Parisi e Zhang, ou simplesmente equação de KPZ. A equação de KPZ, originalmente criada para descrever o crescimento de cristais [90], tem tido desde então uma ampla gama de aplicações: de crescimento de bactérias [91, 92, 93] a polímeros direcionados [94]. Uma de suas características essenciais é seu termo não linear introduzido para explicar o crescimento lateral da superfície do objeto estudado [95]. Ela é dada por

$$\frac{\partial h(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \nu \nabla^2 h(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} (\nabla h(\mathbf{x}, t))^2 + \phi(\mathbf{x}, t), \quad (5.16)$$

onde $h(\mathbf{x}, t)$ é a posição da superfície, ν é a viscosidade e $\phi(\mathbf{x}, t)$ é um potencial aleatório que depende do espaço e do tempo e cuja função de correlação é

$$\langle \phi(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{x}', t') \rangle = \langle \mathcal{E} \rangle l_0^2 N \delta(t - t') \exp \left[-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2}{2N l_0^2} \right]. \quad (5.17)$$

Podemos também colocar a equação de Burgers em uma forma linear com um ruído multiplicativo. Para isso fazemos a transformação de Hopf-Cole [94], $\mathbf{v} = -2\nu [\nabla Z(\mathbf{x}, t)] / Z(\mathbf{x}, t)$,

$$\frac{\partial Z(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \nu \nabla^2 Z(\mathbf{x}, t) + \frac{\phi(\mathbf{x}, t)}{2\nu} Z(\mathbf{x}, t). \quad (5.18)$$

A equação acima é uma equação de Schrödinger no tempo imaginário, mas modificada através da adição de um termo estocástico, assim como feito

na descrição de sistemas quânticos abertos do capítulo anterior. Acreditamos que esse tipo de analogia possa levar a contribuições importantes em ambas as áreas, conforme mencionamos na referência [96].

Na primeira seção abaixo vamos introduzir uma espécie de dicionário entre o modelo CSL e a equação de Burgers, o que nos permite introduzir um número de Reynolds para o modelo CSL. Na seção seguinte conectamos a nossa visão microscópica do modelo CSL, apresentada no capítulo anterior, com a equação de Burgers e assim introduzimos as correções de intermitência e uma equação de Fokker-Planck [FPE]. A análise dessas equações nos permite introduzir uma escala de tempo que caracteriza o domínio da difusão acentuada sobre a difusão de Wiener padrão.

5.1 Dicionário para KPZ, Burgers e CSL

Conforme já foi visto no capítulo anterior, o modelo CSL modifica a equação de Schrödinger introduzindo um ruído multiplicativo na evolução da função de onda. Podemos escrever a equação (4.1) em uma dimensão na forma de Stratonovich ignorando o termo quadrático no ruído, como feito em [66, 67].

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \left\{ i\nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \lambda + \sqrt{\gamma} \int dz \zeta(z, t) G(x - z) \right\} \psi(x, t), \quad (5.19)$$

A equação modificada de Schrödinger acima é equivalente à equação (5.18) na continuação analítica. Desta analogia o termo de ruído deve ser escrito como $\phi(x, t) = 2\nu\sqrt{\gamma} \int dz \zeta(z, t) G(x - z)$, o que leva a seguinte função de correlação

$$\langle \phi(x, t) \phi(x', t') \rangle = 4\nu^2 \lambda \delta(t - t') \exp\left[-\alpha \frac{(x - x')^2}{4}\right]. \quad (5.20)$$

Comparando esta equação com (5.17), identificamos a escala de comprimento de injeção de energia l_0 com $\sqrt{2/\alpha}$ e a energia injetada por unidade de tempo e por unidade de massa $\langle \mathcal{E} \rangle$ com $2\nu^2 \alpha \lambda$. Através da relação (5.12), podemos calcular o número de Reynolds para o modelo CSL $Re = (8\lambda/\alpha\nu)^{1/3}$. Quando o número de Reynolds é grande estamos no domínio da turbulência completamente desenvolvida, o que corresponde no caso CSL a um sistema sofrendo freqüentes colapsos já que λ é grande.

Essa analogia também permite um esclarecimento a respeito da questão de não conservação de energia levantada no modelo original do colapso da função de onda proposto por Ghirardi, Rimini e Weber [GRW] [5]. Por analogia com o efeito cascata, deduzimos que no modelo de colapso a energia deve ser injetada na escala de localização $1/\sqrt{\alpha}$, que é muito maior do que a escala sub-atômica. O sistema não deve portanto ganhar energia indefinidamente, mas ela deve ser dissipada na escala sub-atômica ou talvez na escala de Planck. A disparidade entre as escalas fez com que esse fato passasse despercebido pelos proponentes do modelo de colapso, que discutem a não conservação de energia devido ao colapso em termos da magnitude do efeito e escolhem as constantes de modo a fazer com que essa não conservação seja praticamente não observada.

Note que podemos ainda estender essa conexão. Do método de Vink no capítulo anterior, mostramos que a equação da nossa análise microscópica do modelo CSL tem a mesma forma da equação de Nelson

$$dx = v(x, t)dt + \sqrt{2\nu}\eta(t)dt, \quad (5.21)$$

onde

$$v(x, t) = \left[2\nu \frac{\nabla R(x, t)}{R(x, t)} + \frac{\nabla S(x, t)}{M} \right]. \quad (5.22)$$

No tempo imaginário $S(x, t) = 0$ e transformando x em $-x$ temos que $v = -2\nu(\nabla R)/R$, o que corresponde a transformação de Hopf-Cole. A conexão entre a equação de beable do CSL e a equação de Burgers é agora direta. A velocidade satisfaz assim a equação de Burgers se assumirmos a relação entre a força aleatória e o potencial aleatório sem sinal negativo $f = \nabla\phi$ (um ponto que já havia sido percebido por Garbaczewski *et al* [97]).

5.2 Difusão acentuada

Conforme visto no apêndice B, no movimento browniano a partícula segue uma trajetória aleatória, cuja média e variância são bem definidas e obtidas através de uma distribuição de probabilidade gaussiana

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \exp\left(\frac{-x^2}{4\nu t}\right) \quad (5.23)$$

e portanto $\langle x \rangle = 0$ e $\langle x^2 \rangle = 2\nu t$.

Entretanto, existem distribuições de probabilidades, chamadas distribuições de Lévy, que levam a variâncias infinitas e às vezes até médias infinitas [98]. Estas distribuições estão relacionadas com as trajetórias aleatórias fractais, que são trajetórias compostas por saltos auto-similares, i.e. em escalas diferentes, embora seus detalhes possam diferir, elas têm as mesmas características e são assim estatisticamente idênticas. Essas trajetórias são denominadas vôos de Lévy.

Lévy considerou a soma $X = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ de N variáveis aleatórias X_i , todas elas com a mesma distribuição de probabilidade $p(x)$. Cada uma dessas variáveis corresponde a um passo em um passeio aleatório para X , cuja distribuição de probabilidade é $p_N(x)$. Ele queria saber quando $p_N(x)$ seria igual à distribuição $p(x)$ a menos de um fator de escala, o que corresponde a pergunta básica de fractais: 'quando o todo parece com suas partes?' A resposta mais simples é que $p(x)$ deveria ser uma gaussiana $p(x) = 1/\sqrt{2\pi} \exp(-x^2/2)$ e $p_N(x)$ seria obviamente $1/\sqrt{2\pi N} \exp(-x^2/2N)$. Mas Lévy mostrou que existiam várias outras soluções e todas essas outras envolvem variâncias infinitas. Considere a transformação de Fourier

$$p_N(k) = \int_{-\infty}^{\infty} p_N(x) \exp(ikx) dx, \quad (5.24)$$

$p(x)$ e $p_N(x)$ são as mesmas distribuições quando

$$p_N(k) = \exp(-cN|k|^\beta), \quad (5.25)$$

onde c é uma constante $0 < \beta \leq 2$. Quando $\beta = 2$ temos a gaussiana e quando $\beta < 2$,

$$\langle x^2 \rangle = -\frac{\partial^2 p_N}{\partial k^2} \Big|_{k=0} = \infty \quad (5.26)$$

e portanto a variância é infinita.

O estudo dos processos aleatórios desenvolvido por Lévy nas décadas de 20 e 30 não teve aplicação imediata, pois não parecia dirigir-se aos problemas reais de difusão, onde

$$\langle x(t)^2 \rangle \sim t^\alpha, \quad (5.27)$$

Acima $\alpha = 1$ corresponde ao movimento browniano e $\alpha > 1$ corresponde a chamada difusão acentuada.

O processo original de Lévy além de ter $\langle x^2 \rangle = \infty$ não possui dependência no tempo. Para que o voo de Lévy possa descrever processos dinâmicos reais o tempo para completar cada salto precisa ser considerado. Isso foi feito por Shlesinger *et al* [99, 100, 101], que mantiveram as propriedades de escalonamento dos vãos de Lévy, mas introduziram o tempo, de modo que longos passos possuem menor probabilidade de ocorrer e assim o problema da divergência fica resolvido. Esse novo tipo de processo é denominado passeio de Lévy. O passeio é caracterizado por uma distribuição de probabilidade $\Phi(r, t)$ dada por

$$\Phi(r, t) = \phi(t|r)p(r). \quad (5.28)$$

O fator $p(r)$ é a função de probabilidade discutida acima para um único salto e é portanto responsável pela natureza auto-similar das trajetórias. Quando r é muito grande ele é aproximado por $p(r) \sim |r|^{-1-\beta}$. O fator $\phi(t|r)$ é a densidade de probabilidade para que o salto leve um tempo t dado que seu comprimento é r . O caso mais simples é dado pela função delta $\phi(t|r) = \delta(t - |r|/v(r))$. É este acoplamento entre espaço e tempo que evita as divergências do voo de Lévy. O passeio de Lévy visita todos os pontos do salto no trecho entre 0 e r , enquanto que o voo visita apenas os dois extremos, assim no passeio os saltos não ocorrem instantaneamente, mas existe um atraso no tempo antes do próximo salto.

Turbulência é um exemplo de difusão acentuada e alguns de seus aspectos podem ser descritos pelo passeio de Lévy. Nesse caso a velocidade v em $\phi(t|r)$ claramente não é constante, mas depende do tamanho do salto (veja 5.9). Porém, conforme mencionado anteriormente, as correções de intermitência precisam ser consideradas. Após o efeito cascata, a turbulência termina em dissipação, ou seja a energia de movimento é transformada em calor. Mas essa dissipação não é uniforme no espaço, em algumas regiões ela é elevada e em outras, quase inexistente, daí a necessidade das correções de intermitência. Mesmo a lei de Richardson necessita de uma pequena correção e isso também é feito na referência [99] através de uma modificação na relação (5.9).

É sabido que a dependência com t ao cubo para o deslocamento quadrático médio também é obtido no contexto do modelo de colapso tal como introduzido por Ghirardi, Rimini e Weber [5]. Na nossa análise microscópica do modelo CSL também obtemos essa dependência para $\langle x^2 \rangle$, conforme discutimos abaixo. Ainda sob este ponto de vista, derivamos a energia média

injetada no meio turbulento, uma equação de Fokker-Planck para a densidade de probabilidade no espaço de fase e as correções de intermitência através da introdução de um ruído afim.

5.2.1 Equações diferenciais e equação de Fokker-Planck

Conforme obtivemos no capítulo anterior, a equação diferencial estocástica para posição é

$$dx = D_S dt + 2\nu \left\{ \int_0^t dt' \left[\sqrt{\gamma} \int dz \zeta(z, t') \frac{\partial G(x-z)}{\partial x} \right] \right\} dt + (2\nu)^{\frac{1}{2}} \eta(t) dt. \quad (5.29)$$

Note que o segundo termo do lado direito corresponde a um ruído colorido, pois definindo

$$\epsilon(t) = 2\nu \sqrt{\gamma} \int_0^t dt' \int dz \zeta(z, t') \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \{ -\alpha [x(t') - z] \} e^{-\frac{\alpha [x(t') - z]^2}{2}}, \quad (5.30)$$

temos

$$\langle \epsilon(t) \epsilon(t') \rangle = 2\nu^2 \lambda \alpha t \text{ para } t > t'. \quad (5.31)$$

Para calcularmos a equação de Fokker-Planck precisamos de equações envolvendo ruídos brancos, conseqüentemente, além da equação para dx , precisamos também de uma equação de evolução para ϵ que leve à mesma função de correlação obtida acima [81]. Como ϵ tem dimensão de velocidade, a equação para ϵ corresponde à equação diferencial estocástica para momento

$$dp = \hbar \sqrt{\frac{\alpha \lambda}{2}} \eta(t) dt, \quad (5.32)$$

onde usamos o mesmo ruído branco $\eta(t)$ que em dx equação (5.29), o que será importante para a obtenção de uma equação de Fokker-Planck mais geral possível, como foi visto na seção 4.4.

De (5.29) e (5.32) temos a equação de Fokker-Planck do capítulo anterior (4.41). Uma boa característica do nosso modelo é poder obter a equação de evolução no espaço de fase. Ao contrário de Richardson [99], nós partimos de argumentos puramente teóricos e pudemos explicar a natureza descontínua da

velocidade da partícula. O processo estocástico para momento deriva, como já discutido, da introdução do potencial aleatório na equação de Schrödinger modificada, o qual é também responsável pela localização da função de onda.

O ruído colorido na equação (5.29) é responsável pelo comportamento t^3 do deslocamento quadrático médio [102] (veja o cálculo no apêndice D)

$$\langle x^2(t) \rangle = \langle x^2(t) \rangle_s + \frac{\alpha \lambda \hbar^2}{6M^2} t^3. \quad (5.33)$$

$\langle x^2(t) \rangle_s$ é o deslocamento quadrático médio da evolução livre de Schrödinger e o último termo corresponde a difusão acentuada, típica de turbulência.

Já a difusão para momento é dada por [102]

$$\langle p^2(t) \rangle = \langle p^2(t) \rangle_s + \frac{\hbar^2 \alpha \lambda}{2} t. \quad (5.34)$$

$\langle p^2(t) \rangle_s$ é o deslocamento quadrático médio de momento para a evolução de Schrödinger.

Trabalhos recentes de Kusnezov e colaboradores [103, 104] obtêm a mesma dependência para $\langle x^2 \rangle$ e $\langle p^2 \rangle$ para a partícula quântica interagindo com um ambiente caótico descrito pela teoria de matrizes aleatórias.

Comparamos agora a energia média injetada no meio turbulento com a quantidade equivalente no modelo de Ghirardi, Rimini e Weber [5]. De (5.11) e (5.33) identificamos

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{\alpha \lambda \hbar^2}{6M^2}, \quad (5.35)$$

que coincide com o termo de não conservação de energia do modelo de GRW ([5], eqs. 7.1 e 7.2). Daí temos fortes razões para acreditar que o efeito cascata também seja válido aqui. Embora haja energia sendo injetada no sistema, isso não se dá de maneira indefinida, uma vez que ela é dissipada em uma escala bem menor.

5.2.2 Correções de intermitência

Até aqui $\zeta(z, t)$ (onde $\zeta(z, t) = \partial B(z, t)/\partial t$) era apenas um ruído branco. Para prosseguir com as analogias com turbulência devemos ainda tratar as correções de intermitência. Para isso, consideramos um ruído afin [108] chamado ruído browniano fracional

$$\langle dB(z, t) dB(z', 0) \rangle = t^{A-1} dt \delta(z - z'). \quad (5.36)$$

Quando este ruído dB é usado na equação (5.29), o termo de difusão anômala torna-se

$$\langle x^2(t) \rangle \sim t^{A-1+3}. \quad (5.37)$$

Isto corresponde a uma das correções de intermitência obtidas por Shlesinger *et al* [99] desde que identifiquemos $A - 1$ com $3\mu/(4 - \mu)$, onde $\mu = E - df$, E é a dimensão euclidiana e df , a dimensão fractal.

Para a variável momento o ruído colorido fornece

$$\langle p^2 \rangle \sim t^A, \quad (5.38)$$

o que leva à relação de escalonamento obtida por Shlesinger *et al* [99] para a raiz da velocidade quadrática média. Observe que ao contrário do que feito por eles, obtivemos a correção de intermitência na posição sem usar a de momento.

5.2.3 Escalas de tempo

Ignorando o termo determinístico na equação (5.29), obtemos o deslocamento quadrático médio $\langle x^2 \rangle$

$$\langle x^2 \rangle = 2\nu t + \frac{2}{3}\alpha\lambda\nu^2 t^3, \quad (5.39)$$

que tem duas contribuições: o browniano usual, vindo do termo com $\eta(t)$ e a difusão acentuada, vindo do ruído multiplicativo da equação de Schrödinger. Na figura 5.1 ilustramos, através das trajetórias calculadas da equação (5.29), a difusão acentuada vis-à-vis com a difusão browniana. Vemos que a simulação numérica exhibe o comportamento de difusão acentuada, como esperado.

Da comparação dos dois termos na equação (5.39) podemos determinar uma escala de tempo além da qual a difusão acentuada domina sobre a browniana.

$$t_{enh} > \sqrt{\frac{3}{\alpha\lambda\nu}} \quad (5.40)$$

Usando os parâmetros de GRW [5]: $\alpha = 10^{10}\text{cm}^{-2}$, $\lambda(\text{micro}) = 10^{-16}\text{s}^{-1}$, $\lambda(\text{macro}) = 10^7\text{s}^{-1}$, $M(\text{micro}) = 10^{-23}\text{g}$, $M(\text{macro}) = 1\text{g}$, estimamos essa escala de tempo, que é aproximadamente $2.4 \times 10^5\text{s}$, independentemente da natureza macroscópica ou microscópica do sistema.

Figura 5.1: As curvas foram obtidas usando o algoritmo para integração numérica de equações estocásticas com ruído colorido desenvolvido por Fox [109] (veja apêndice D). O eixo horizontal corresponde ao tempo em segundos. A linha cheia representa o valor médio de x , o qual foi obtido após 5000 realizações e as linhas pontilhadas correspondem a quatro trajetórias escolhidas. Os parâmetros são aqueles para uma partícula macroscópica e os intervalos de tempo são $\Delta t = 10^4\text{s}$.

Uma segunda escala de tempo é dada pelo tempo característico de colapso t_c , que é da ordem de λ^{-1} . A figura 5.2 mostra as duas escalas de tempo. A linha pontilhada indica a evolução livre de Schrödinger não perturbada pelo termo de colapso. Para o sistema microscópico a difusão acentuada manifesta-se antes mesmo do colapso ocorrer, o que abre uma interessante janela para testes experimentais deste cenário e poderia fornecer dados para limitar de maneira clara os parâmetros dos modelos GRW/CSL [110].

Figura 5.2: As duas linhas dão o tempo em segundos para a evolução de um sistema microscópico e um sistema macroscópico. As linhas pontilhadas correspondem à evolução da função de onda não perturbada pelo termo de colapso. A linha grossa, que só aparece para o sistema microscópico, corresponde a um intervalo de tempo no qual o modelo CSL pode ser testado.

Em resumo, verificamos que o movimento de uma partícula subjacente à evolução da função de onda para um sistema quântico aberto tem todas as características de um corpo movendo-se em um ambiente turbulento. Isso nos permite compreender a nível corpuscular o significado da localização da função de onda e conseqüente perda das características quânticas do sistema. A analogia com turbulência, permitiu-nos ainda especular sobre o que seria para o modelo de CSL o efeito cascata, calcular seu número de Reynolds e apresentar até mesmo um intervalo de tempo onde estaria sujeito a verificações experimentais; por outro lado possibilitou-nos obter também uma equação de Fokker-Planck e as correções de intermitência para turbulência. Esse tipo de analogia pode ser portanto bastante útil no estudo tanto de

sistemas quânticos abertos como em turbulência, dois assuntos ainda em aberto.

Capítulo 6

Críticas aos modelos de redução dinâmica

A evolução unitária de Schrödinger não é capaz de eliminar as superposições da mecânica quântica. Há duas maneiras para descrever dinamicamente o colapso da função de onda, lidando assim com evoluções não unitárias: através da decoerência, que considera a interação entre o sistema e o ambiente, mas realiza o traço dos diversos graus de liberdade aos quais não temos acesso, e os modelos de redução dinâmica (DRM), que lidam com sistemas individuais e modificam a equação de Schrödinger. A origem do ruído adicionado nos modelos de redução não é identificada e poderia ser, como em decoerência, o banho térmico, porém, no decorrer da evolução desses modelos, tem havido uma tendência cada vez maior a associá-la com gravitação. O fenômeno de redução do estado quântico seria assim um fenômeno gravitacional [50] e só poderia ser observado em sistemas extremamente isolados.

Uma linha de aperfeiçoamento para o modelo de redução inicia-se com o modelo proposto por Ghirardi, Rimini e Weber [5]. Segundo esta proposta, o estado de um sistema de N partículas evolui normalmente de acordo com a equação de Schrödinger, mas de vez em quando uma partícula i do sistema sofre uma pancada e toda a função de onda colapsa. Esse salto espontâneo e aleatório da função de onda é descrito pela equação

$$\psi'(t, \mathbf{r}) = \frac{G(\mathbf{x} - \mathbf{r}_i)\psi(t, \mathbf{r})}{R_i(\mathbf{x})}, \quad (6.1)$$

onde G é uma gaussiana normalizada de largura 10^{-5} cm, $R_i(\mathbf{x})$ é um fator

de re-normalização e o centro $\mathbf{x}$ da pancada é escolhido aleatoriamente com a seguinte distribuição de probabilidade: $|R_i(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$. A frequência de golpes em uma partícula qualquer é $10^{-15}/s$, de modo que um sistema microscópico tem pouca chance de sofrer colapso, enquanto que um sistema macroscópico, com, por exemplo, 10^{23} partículas, sofre 10^7 colapsos por segundo. Nenhuma justificativa para a escolha desses parâmetros é dada além da necessidade de coincidência, para sistemas microscópicos, dos resultados com a mecânica quântica padrão.

Mas esse modelo só é consistente para casos de sistemas de partículas distinguíveis, pois o colapso descrito pela equação acima não preserva as propriedades de simetria da função de onda. Este problema é resolvido com um outro modelo, o de localização espontânea contínua (CSL), do qual fizemos uso no capítulo 4. O modelo de CSL usa um conjunto de densidades em torno de todos os pontos do espaço discriminando assim as diferentes configurações. Um operador densidade é definido

$$N(\mathbf{z}) = \sum_s \int d\mathbf{y} G(\mathbf{y} - \mathbf{z}) a^+(\mathbf{y}, s) a(\mathbf{y}, s), \quad (6.2)$$

onde a^+ e a são os operadores de criação e aniquilação de uma partícula no ponto $\mathbf{y}$ com componente de spin s e $G(\mathbf{y} - \mathbf{z})$ é a gaussiana

$$G(\mathbf{y} - \mathbf{z}) = (\alpha/2\pi)^{\frac{3}{2}} \exp \left[-\frac{\alpha(\mathbf{y} - \mathbf{z})^2}{2} \right]. \quad (6.3)$$

A equação de Schrödinger modificada na forma de Stratonovich é escrita como [11]

$$d\psi(\mathbf{x}, t) = \left\{ -iH'\psi(\mathbf{x}, t) + \left[\sqrt{\gamma} \int d\mathbf{z} N(\mathbf{z}) \zeta(\mathbf{z}, t) - \gamma \int d\mathbf{z} N^2(\mathbf{z}) \right] \psi(\mathbf{x}, t) \right\} dt \quad (6.4)$$

onde γ tem a mesma definição do capítulo 4, mas em três dimensões ¹.

¹Note que, em uma dimensão, para uma única partícula na posição x e sem considerarmos spin, obtemos:

$$N(z) = \int dy G(y - z) \delta(y - x) = G(x - z) \quad (6.5)$$

o que nos leva à equação (4.1) a menos do termo quadrático no ruído, o qual foi introduzido mais tarde por Pearle [67] para a sua analogia com o 'Gambler's Ruin game' e que não

Recentemente este modelo foi ainda mais elaborado numa tentativa de incorporar em sua dinâmica os efeitos da gravitação [75]. Para tal, ao invés de lidar com o operador densidade, o operador densidade de massa é introduzido

$$M(\mathbf{r}) = \sum_k m_k N^k(\mathbf{r}), \quad (6.6)$$

onde $N^k(\mathbf{r})$ é o operador número e m_k é a massa de cada partícula do tipo k .

Dessa forma, a equação modificada de Schrödinger na forma de Stratonovich passa a ser dada por

$$\frac{d|\psi_\zeta(t)\rangle}{dt} = \left[-\frac{i}{\hbar} H + \int \frac{\sqrt{\gamma}}{m_0} d\mathbf{r} M(\mathbf{r}) \zeta(\mathbf{r}, t) - \frac{\gamma}{m_0^2} \int d\mathbf{r} M^2(\mathbf{r}) \right] |\psi_\zeta(t)\rangle, \quad (6.7)$$

onde, m_0 é uma massa de referência, a qual pode ser identificada com a massa do núcleon e, seguindo a notação do capítulo 4, $H = \hbar H'$.

A equação acima, conforme já discutido no capítulo 4, não preserva a norma. Para que os resultados desse modelo estejam de acordo com os resultados da mecânica quântica padrão, podemos usar a versão normalizada da equação, ou adicionar à equação não normalizada uma distribuição de probabilidade para o ruído dada por

$$P_{cook}[\zeta(\mathbf{r}, t)] = P_{rw}[\zeta(\mathbf{r}, t)] < \psi_\zeta(t) | \psi_\zeta(t) \rangle \quad (6.8)$$

onde P_{rw} é a distribuição de probabilidade para um ruído branco.

Há várias críticas a esses modelos [111, 112, 113, 114, 115], algumas das quais mencionamos na seção seguinte, bem como as respostas a elas [75, 116, 117, 118] e na seção posterior apresentamos nossas próprias críticas [119].

6.1 Críticas passadas aos DRM

A primeira crítica corresponde ao problema das caudas [112], já mencionado no capítulo 4. O processo de localização não pode levar a um pacote de onda

tem, de qualquer forma, nenhuma importância no desenvolvimento da nossa subseção 4.4, pois não apresenta dependência em x , variável na qual as derivadas são realizadas.

infinitamente estreito, o que causaria um ganho infinito de energia pelo sistema, por isso GRW introduziram a gaussiana a fim de limitar o estreitamento do pacote. Assim, a função de onda após o colapso possui caudas e portanto o colapso não é total. Ghirardi e colaboradores argumentam que os fenômenos associados às caudas [114, 115] têm probabilidades tão pequenas que para fins práticos não ocorrem [118]. A falta de precisão desta resposta remove a principal característica desses modelos que havia levado Bell a defendê-los, ou seja, a indicação de que eram capazes de substituir o caráter vago da interpretação ortodoxa da mecânica quântica pela precisão matemática.

Além das caudas no espaço de configuração, há também caudas no tempo, uma característica compartilhada pelos modelos de decoerência e veementemente criticada por Bell [120, 121] (embora ele não pareça ter percebido que tal crítica aplicava-se também aos DRM). Vários defensores desses modelos apegam-se a um axioma de Borel [122] para resolver o problema,

one should consider that an event with too small a probability will never occur,

e esquecem-se da visão mais moderna, que substitui o uso de pequenas probabilidades para explicar fenômenos irreversíveis por dinâmicas intrinsecamente irreversíveis [123].

Um outro problema, está relacionado com o conceito de percepção definida e foi primeiramente analisado por Albert e Vaidman [111]. A crítica baseia-se em sistemas de poucas partículas, para os quais a frequência de colapso do modelo GRW não seria capaz de explicar o colapso, embora um observador seria capaz de identificar um estado único para o sistema só de olhá-lo. Para Ghirardi *et al* [117] este é um caso especial, onde a localização ocorre durante a transmissão do sinal dentro do sistema visual do observador, mas antes dele atingir o sistema nervoso e daí a percepção do observador ser definida. Claro que este é um caso bastante particular e em geral o sistema macroscópico responsável pela amplificação não é necessariamente um ser vivo. Mas ainda assim, vale ressaltar o aspecto indesejável de trazer de volta a subjetividade da presença do observador.

6.2 Nossas críticas

6.2.1 O papel da massa nos DRM

No modelo de Ghirardi, Grassi e Benatti (GGB) [75], que incorpora a massa na equação de Schrödinger modificada, um sistema macroscópico equivale a um sistema com um grande número de constituintes e portanto, de acordo com a equação (6.6), grande massa e o processo de redução ocorre com a mesma frequência alta da versão anterior do modelo. Entretanto, ao trazer o conceito de massa, mas ainda distinguindo um sistema microscópico de um macroscópico através do número de constituintes, esse modelo torna-se vulnerável à seguinte crítica: podemos substituir uma grande massa distribuída entre vários componentes por um único componente com uma massa muito grande, tal como os objetos pesados - partículas elementares - que foram propostos em modelos de corda, teorias de grande unificação ou matéria escura [124, 125], que chegam a ter 10^{16} massas de próton. Como, estando o mecanismo de redução associado a gravitação [50, 126, 127], podemos explicar que uma partícula elementar pesada tenha ainda um comportamento microscópico, enquanto que um sistema com a mesma massa, mas vários constituintes, tenha comportamento macroscópico? Dessa maneira, o velho problema de como distinguir partículas elementares de partículas compostas [128], o qual desafiou gerações de investigadores de teoria quântica de campos, estaria resolvido.

O mecanismo de redução dos DRM consegue contar os constituintes, o que desperta outra crítica: a que escala chega a capacidade de resolução? Será que os quarks podem ser contados também? Ghirardi e colaboradores [129] tentam escapar desse problema recorrendo à frequência de colapso. Quando o constituinte fundamental for o núcleon, a frequência de colapso λ_N é três vezes maior que a frequência de colapso λ_q usada quando o constituinte fundamental for o quark. Observando a equação (6.7), verificamos, porém, que essa argumentação não parece satisfatória, uma vez que trocar a massa de referência pela massa do quark não significa apenas trocar m_0 por $m_0/3$, pois as contribuições para a massa do núcleon não são apenas as massas dos quarks, é preciso considerar também os efeitos não-perturbativos que ocorrem no seu interior [130].

Além disso, o mecanismo de resolução consegue distinguir constituintes separados por apenas 10^{-8} cm, como os átomos numa rede cristalina, mas a

localização ocorre numa escala três vezes maior. Seria mais natural esperar que o mecanismo pudesse distinguir os constituintes na mesma escala em que os localiza, ou seja 10^{-5} cm, ou que o parâmetro de redução pudesse ser diminuído, o que não é possível devido aos problemas de localização do centro de massa que isso acarretaria. Uma localização mais precisa que 10^{-8} cm causaria alterações na estrutura interna de um corpo rígido [5]. Isto torna evidente a natureza teleológica deste modelo, que parte de fatos conhecidos sobre a estrutura da matéria e os incorpora no formalismo. Note também que essa escala de localização é escolhida de modo a garantir que um observador humano não seja capaz de ver superposições macroscópicas, já que ela é menor que o comprimento de onda da luz visível, 10^{-4} cm. Mas o que dizer de um dispositivo que usa comprimentos de onda menores que o visível, como os detectores de raios X?

6.2.2 Beables como elementos de realidade

Ao tentar relacionar o colapso da função de onda com gravitação, GGB promovem a massa a uma posição privilegiada e introduzem no modelo o conceito de beables. Para Bell, beables correspondem a coisas objetivas, que existem independentemente da observação, a elementos de realidade [131]. Mas, em certas situações, Bell tratou também a função de onda como um beable [73], claro que um beable não local, posição esta compartilhada por GGB. É difícil compreender a que tipo de beable a função de onda corresponde, uma vez que, para um sistema individual, ela não é passível de determinação.

Um problema ainda maior é considerar a função densidade de massa,

$$\mathcal{M}(\mathbf{r}, t) = \langle \psi(t) | M(\mathbf{r}) | \psi(t) \rangle, \quad (6.9)$$

como um beable local para um sistema que já tenha sofrido colapso. Não há nenhum motivo para enfatizar o caráter de beable para uma grandeza associada a um sistema já colapsado, pois este é um atributo de qualquer corpo macroscópico. Além disso, esse beable só é local porque o colapso já ocorreu. O conceito de beable usado por GGB parece assim distante do objetivo original de Bell.

É também conflitante identificar tanto a função de densidade de massa como a função de onda com beables, pois como $\mathcal{M}(\mathbf{r}, t)$ é um valor esperado ele remove elementos de realidade da função de onda, já que suas fases

desaparecem no cálculo da média.

6.2.3 A natureza do ruído

O ruído adicionado na equação de Schrödinger modificada é um campo *clássico* aleatório. É no mínimo frustrante que uma tentativa de ir além da teoria quântica padrão precise invocar uma fonte clássica para justificar o colapso, é como se os proponentes desses modelos rendessem-se ao princípio básico de Bohr, que diz que o aparelho (fonte de redução) precisa ser clássico. Não exigimos que os proponentes dos DRM saibam a origem e natureza desse ruído, mas fica claro que suas características clássicas não derivam da dinâmica quântica unificada que eles apregoam.

É realmente difícil compreender a origem desse ruído, pois, da maneira como é introduzido na equação de Schrödinger, ele corresponde a um potencial imaginário, um operador não hermitiano e as interações de gauge - universalmente aceitas nas descrições das interações na física - não dão origem a potenciais imaginários. A esta altura é inevitável a comparação entre este termo não hermitiano nos DRM e a hamiltoniana efetiva obtida na aproximação de Wigner-Weisskopf para sistemas instáveis na mecânica quântica [132]. Ambos estão sujeitos ao tipo de crítica formulada de maneira incisiva por Prigogine [22].

O uso de potenciais imaginários em mecânica quântica está associado à criação ou aniquilação de partículas [133], mas nos DRM não há criação ou aniquilação de partículas e somos levados assim a associar o ruído ao desaparecimento das superposições quânticas e devemos também re-normalizar a função de onda após o processo de localização. A necessidade de manter a normalização é responsável pelo caráter não linear da equação de Schrödinger modificada, o que é outra característica artificial do modelo e contrasta com as tentativas genuínas de introduzir a não linearidade em mecânica quântica por Kibble e Weinberg [134], as quais mantêm a unitariedade da evolução.

O potencial imaginário dos DRM quebra a evolução unitária da função de onda. Esta evolução não unitária é obtida nos modelos de decoerência através de interações hermitianas padrões entre o sistema e o ambiente, mas fazendo o traço nos graus de liberdade a que não temos acesso. Talvez seja o traço (nos graus de liberdade de gauge aos quais não temos acesso) que dê origem ao termo de ruído, ou quem sabe ainda, haja uma nova forma de interação envolvida no colapso, talvez com origem na gravitação.

O pior aspecto do ruído é sua dependência na distribuição de probabilidade dada pela função de onda. Isto implica que ao prepararmos o sistema preparamos também o ruído e que, a todo instante, os infinitos elementos do universo estejam ajustando seus ruídos particulares. Os efeitos não locais, sempre presentes na mecânica quântica, assumem um novo caráter nos DRM, o ruído em torno de um componente de um sistema 'entangled' também sofre as correlações de EPR.

As constantes controversias que os DRM incitam só poderão ser de fato resolvidas quando a origem do ruído for finalmente explicada e os parâmetros justificados e fixados.

Capítulo 7

Conclusão

Nesta tese apresentamos uma interpretação que cumpre bem duas tarefas, a de fornecer uma dinâmica para o colapso da função de onda e a de descrever o movimento de uma partícula subjacente ao colapso. Também mostramos uma analogia com turbulência, a qual pode ser bastante útil no futuro desenvolvimento das duas áreas.

No processo de formulação dessa interpretação, estudamos várias outras, inclusive a ortodoxa, e discutimos seus problemas. Uma delas, a interpretação estocástica de Nelson, foi usada para descrever uma corda bosônica aberta numa tentativa de formular classicamente os fenômenos na escala de Planck.

Concluimos que nenhuma interpretação da mecânica quântica está livre de críticas e quem sabe não resida em seus problemas os passos para a elaboração de uma nova teoria mais completa, menos subjetiva e que possa finalmente englobar a gravitação. É notável o rejuvenescido interesse pela mecânica quântica e não só por aqueles que lidam com suas aplicações (é marcante o número de trabalhos em temas como teleportação, computadores quânticos, etc) ou seus fundamentos, mas também por indivíduos que trabalham em áreas bastante distintas como gravitação (Penrose, Isham, 't Hooft), cordas e membranas (Susskind, Smolin), sistemas complexos (Kusnezov). O grande número de trabalhos recentes em mecânica quântica parece indicar a proximidade de um avanço no sentido de completar esta teoria.

Apêndice A

Condição de von Neumann e base de ponteiro

A.1 Condição de von Neumann

Vamos dar um exemplo concreto da relação de comutação introduzida por von Neumann (final da seção 2.1) para garantir que o estado do sistema não mude durante o processo de medida. Fazemos o tratamento na representação de Heisenberg e portanto queremos que o operador não mude durante o processo de medida. Seguimos a explicação de Peres [135].

Considere um sistema cuja hamiltoniana é $H_S(x, p)$ e suponha que queremos medir um observável $O_S(x, p)$ no tempo t_o . Para realizar uma medida ideal, acoplamos o sistema a um aparelho, que é uma partícula livre (um ponteiro) de massa M , coordenada Q e momento P . A hamiltoniana total é assim:

$$H = H_o(x, p) + \frac{P^2}{2M} + g(t - t_o)O_S(x, p)P, \quad (\text{A.1})$$

onde $g(t - t_o)$, o acoplamento, é muito grande no intervalo $t_o < t < t_o + \epsilon$ e negligenciável em qualquer outro tempo.

Definimos ainda

$$G = \int g(t - t_o)dt \quad (\text{A.2})$$

As equações de movimento para o ponteiro são assim

$$\dot{P} = \frac{1}{i\hbar}[P, H] = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$\dot{Q} = \frac{1}{i\hbar}[Q, H] = \frac{P}{M} + g(t - t_0)O_S. \quad (\text{A.4})$$

E a equação de movimento para o observável do sistema é

$$\dot{O}_S = \frac{1}{i\hbar}[O_S, H_0]. \quad (\text{A.5})$$

Note portanto que a mudança de O_S durante a medida é da ordem de ϵ e pode ser negligenciada desde que a medida seja praticamente instantânea.

Em relação ao observável Q do aparelho, que é ao que temos acesso, obtemos

$$Q(t_0 + \epsilon) = Q_0 + GO_S(t_0) + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (\text{A.6})$$

Da medida de Q inferimos o valor de O_S .

Claro que tudo isso representa uma idealização extrema e bastante distante da realidade do laboratório. As medidas não são instantâneas e o aparelho é um sistema complexo, de maneira que nem a sua hamiltoniana e nem a sua hamiltoniana de interação com o sistema são triviais.

A.2 Base de ponteiro

Um outro problema com o sistema composto de von Neumann é que a correlação entre o sistema e o aparelho não é suficiente para que possamos inferir, da medida feita no aparelho, o valor do observável do sistema que se deseja medir. O sistema composto isolado não pode determinar qual observável do sistema é medido.

Note que tanto podemos partir da correlação

$$\sum_s c_s |s\rangle |A_s\rangle \quad (\text{A.7})$$

e dizer que medimos no sistema o observável $S = \sum_s e_s |s\rangle \langle s|$, como podemos expressar o estado do aparelho em termos de outra base ortonormal $|A_r\rangle$

$$\sum_s c_s |s\rangle |A_s\rangle = \sum_r |A_r\rangle \sum_s c_s \langle A_r | A_s \rangle |s\rangle = \sum_r d_r |A_r\rangle |r\rangle \quad (\text{A.8})$$

e dizer que medimos o observável $R = \sum_r f_r |r\rangle \langle r|$.

O aparelho, devido à correlação com o sistema, contém informação sobre o observável S , mas também sobre o observável R , que pode até mesmo não comutar com S - o que estaria em contradição com a mecânica quântica. Como determinar então a base de ponteiro (ou 'pointer basis') única, a base do aparelho que contém o observável medido do sistema? O modelo de decoerência [23] recorre à interação do aparelho com o ambiente para responder essa pergunta.

Quando a hamiltoniana do aparelho H_A e a hamiltoniana de interação do aparelho com o ambiente $H_{A\epsilon}$ comutam com o observável O_A do aparelho, este particular observável não é perturbado. Apenas a base consistindo dos auto-estados de O_A - o 'pointer basis' - conterá nada mais além de informação sobre o sistema. E após fazer o traço sobre o ambiente, a matriz de densidade diagonal do sistema composto será escrita na base consistindo do 'pointer basis' do aparelho e os estados correspondentes do sistema. Segundo Zurek [23]

It is this basis which contains a reliable record of the state of the system.

O comutador $[H_A + H_{A\epsilon}, O_A] = 0$ permite que os termos da diagonal da matriz de densidade sejam invariantes e que o estado $|A_p\rangle$ do observável $O_A = \sum_p o_p |A_p\rangle \langle A_p|$ permaneça correlacionado com o estado relativo do sistema.

Além do curioso fato, já mencionado no capítulo 2, que ignoramos completamente o ambiente através do traço sobre ele, mas ao mesmo tempo sabemos como interage com o aparelho, várias outras hipóteses são assumidas. Entre elas citamos o fato que tanto a hamiltoniana de interação entre sistema, aparelho e ambiente $H_{SA\epsilon}$ como a hamiltoniana de interação entre o sistema e o ambiente $H_{S\epsilon}$ são consideradas nulas. Além disso, a hamiltoniana de interação entre o sistema e o aparelho H_{SA} age apenas em um curto intervalo de tempo (como von Neumann já havia introduzido) para que a correlação sistema/aparelho seja estabelecida e durante esse intervalo, a interação entre

o aparelho e o ambiente é negligenciada, $H_{SA} \gg H_{Ac}$. Porém tão logo é estabelecida a correlação a situação inverte-se e a hamiltoniana de interação do aparelho com o ambiente passa a dominar a evolução, $H_{Ac} \gg H_{SA}$. Uma vez mais enfatizamos a extrema idealização desses procedimentos.

Apêndice B

Elementos da Teoria de Processos Estocásticos

Algum tempo após a derivação de Einstein do movimento browniano usando tempo discreto [136], Langevin apresentou um novo método baseado numa equação diferencial com um termo aleatório flutuando rapidamente no tempo, $\eta(t)$, como dado abaixo (ver também capítulo 3, equação (3.3))

$$\frac{dx}{dt} = a(x, t) + b(x, t)\eta(t). \quad (\text{B.1})$$

Cada solução da equação de Langevin representa uma trajetória aleatória diferente. Porém essa equação precisa ser vista sob os preceitos do cálculo estocástico. Da maneira como escrita acima ela não existe matematicamente, uma vez que $\int \eta(t')dt'$ não é diferenciável. Porém, a integral dessa equação pode ser interpretada de maneira consistente.

Escrevemos

$$\int_0^t \eta(t')dt' = w(t), \quad (\text{B.2})$$

onde $w(t)$ corresponde ao processo de Wiener, cujas propriedades estatísticas [80, 82]

$$\langle w(t) \rangle = w_0 \quad (\text{B.3})$$

$$\langle [w(t) - w_0]^2 \rangle = t - t_0, \quad (\text{B.4})$$

são obtidas da seguinte distribuição gaussiana

$$p(w, t|w_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}} \exp[-(w-w_0)^2/2(t-t_0)]. \quad (\text{B.5})$$

O que temos então é uma equação diferencial estocástica escrita como

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dw(t). \quad (\text{B.6})$$

Para calcular $x(t)$ precisamos saber como resolver integrais do tipo

$$\int_{t_0}^t G(t')dw(t'), \quad (\text{B.7})$$

onde $G(t)$ é uma função arbitrária do tempo.

Há duas maneiras para resolver essa integral estocástica: via cálculo de Itô ou via cálculo de Stratonovich.

B.1 Cálculo de Itô

Dividimos o intervalo $[t_0, t]$ em n sub intervalos de maneira que

$$t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t, \quad (\text{B.8})$$

a integral estocástica de Itô da função $G(t)$ é definida como

$$\int_{t_0}^t G(t')dw(t') = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{i=1}^n G(t_{i-1})[w(t_i) - w(t_{i-1})] \right\rangle. \quad (\text{B.9})$$

Assim, podemos verificar que [80], partindo de

$$\int_{t_0}^t w(t')dw(t') = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle S_n \rangle, \quad (\text{B.10})$$

onde (usamos a notação w_i para indicar $w(t_i)$),

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n w_{i-1}(w_i - w_{i-1}) = \sum_{i=1}^n w_{i-1} \Delta w_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [(w_{i-1} + \Delta w_i)^2 - (w_{i-1})^2 - (\Delta w_i)^2] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}[w(t)^2 - w(t_0)^2] - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\Delta w_i)^2 \quad (\text{B.11})$$

e

$$\langle \sum_{i=1}^n (\Delta w_i)^2 \rangle = \sum_i \langle (w_i - w_{i-1})^2 \rangle = \sum_i (t_i - t_{i-1}) = t - t_0, \quad (\text{B.12})$$

chegamos a

$$\int_{t_0}^t w(t') dw(t') = \frac{1}{2} [w(t)^2 - w(t_0)^2 - (t - t_0)]. \quad (\text{B.13})$$

Note que no cálculo integral convencional o último termo do lado direito não aparece.

Vale mencionar que como $dw(t)$ só aparece em integrais, se restringirmo-nos a funções 'não antecipantes' (ou seja, funções $G(t)$ que são independentes do comportamento do processo de Wiener no futuro de t), podemos simplesmente escrever

$$\begin{aligned} dw(t)^2 &= dt \\ dw(t)^{2+N} &= 0 \quad (N > 0). \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

B.1.1 Equação de Fokker-Planck e equação diferencial estocástica

A equação de Fokker-Planck fornece a evolução temporal da densidade de probabilidade de um sistema e através dela todos os momentos do sistema podem ser calculados. É fácil obtê-la da equação estocástica na forma de Itô.

Considere uma função arbitrária de $x(t)$, $f[x(t)]$. Sua equação diferencial estocástica na forma de Itô pode ser obtida da expansão

$$\begin{aligned} df[x(t)] &= f[x(t) + dx(t)] - f[x(t)] \\ &= f'[x(t)]dx(t) + \frac{1}{2}f''[x(t)]dx(t)^2 + \dots \\ &= f'[x(t)]\{a[x(t), t]dt + b[x(t), t]dw(t)\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} f''[x(t)] b[x(t), t]^2 [dw(t)]^2 + \dots \\
= & \{a[x(t), t] f'[x(t)] + \frac{1}{2} b[x(t), t]^2 f''[x(t)]\} dt + \\
& + b[x(t), t] f'[x(t)] dw(t). \tag{B.15}
\end{aligned}$$

Para uma função de um vetor $\mathbf{x}(t)$ de n dimensões satisfazendo a equação

$$d\mathbf{x} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)dt + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)d\mathbf{w}(t) \tag{B.16}$$

a fórmula de Itô para $f(\mathbf{x})$ é obtida de maneira semelhante e é dada por

$$\begin{aligned}
df(\mathbf{x}) = & \left\{ \sum_i a_i(\mathbf{x}, t) \partial_i f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} [b(\mathbf{x}, t) b^T(\mathbf{x}, t)]_{ij} \partial_i \partial_j f(\mathbf{x}) \right\} dt + \\
& + \sum_{i,j} b_{i,j}(\mathbf{x}, t) \partial_i f(\mathbf{x}) dw_j(t), \tag{B.17}
\end{aligned}$$

desde que os processos de Wiener $dw_i(t)$ e $dw_j(t)$ sejam independentes.

Mas voltando para o caso de uma dimensão, vamos agora encontrar a evolução temporal da função $f[x(t)]$. Usamos a fórmula de Itô

$$\begin{aligned}
\langle df[x(t)] \rangle / dt &= \frac{d}{dt} \langle f[x(t)] \rangle \\
&= \langle a[x(t), t] \partial_x f + \frac{1}{2} b(x, t)^2 \partial_x^2 f \rangle. \tag{B.18}
\end{aligned}$$

e escrevemos a equação acima com a densidade de probabilidade $\rho(x, t)$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \langle f[x(t)] \rangle &= \int dx f(x) \partial_t \rho(x, t) \\
&= \int dx [a(x, t) \partial_x f + \frac{1}{2} b(x, t)^2 \partial_x^2 f] \rho(x, t). \tag{B.19}
\end{aligned}$$

Integrando por partes e descartando os termos de superfície obtemos

$$\int dx f(x) \partial_t \rho = \int dx f(x) \left\{ -\partial_x [a(x, t) \rho] + \frac{1}{2} \partial_x^2 [b(x, t)^2 \rho] \right\}, \tag{B.20}$$

que, como $f(x)$ é uma função arbitrária, nada mais é que a equação de Fokker-Planck

$$\partial_t \rho(x, t) = -\partial_x [a(x, t) \rho(x, t)] + \frac{1}{2} \partial_x^2 [b(x, t)^2 \rho(x, t)], \quad (\text{B.21})$$

B.2 Cálculo de Stratonovich

Na integral estocástica de Stratonovich, o termo anômalo $(t - t_0)$ não aparece, pois ela é definida como

$$\int_{t_0}^t G(t') \circ dw(t') = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{i=1}^n \frac{G(t_i) + G(t_{i-1})}{2} [w(t_i) - w(t_{i-1})] \right\rangle. \quad (\text{B.22})$$

Usamos o para diferenciar o cálculo de Stratonovich do de Itô.

A integral de Stratonovich é uma escolha natural para interpretações que assumem $\eta(t)$ como ruído real (e não branco) com tempo de correlação finito. Outra vantagem do cálculo de Stratonovich é que usamos o cálculo ordinário.

A conexão entre a integral de Itô e a de Stratonovich é facilmente obtida da relação

$$G(t) \circ dw(t) = G(t) dw(t) + \frac{1}{2} dG(t) dw(t). \quad (\text{B.23})$$

Assim, a variação de um produto de funções na forma de Stratonovich é apenas

$$d(AB) = A \circ dB + dA \circ B, \quad (\text{B.24})$$

mas em Itô a relação é

$$d(AB) = A dB + dA B + dA dB, \quad (\text{B.25})$$

a qual usamos para escrever a equação (4.44).

Apêndice C

Cálculos do capítulo 4

C.1 Equação estocástica de Nelson via método de Vink

Partindo da equação (4.21)

$$T_{mn}^a \propto \exp \left\{ - \left[m - n - \frac{2\sigma \ln(P_m/P_n)}{4(m-n)} \right]^2 / 2\sigma \right\} \quad (C.1)$$

assumimos a largura σ pequena, ou seja $am \rightarrow an$, e fazemos a aproximação

$$\begin{aligned} \frac{\ln(P_m/P_n)}{m-n} &= \frac{\ln(P_n/P_m)}{n-m} = -\frac{2}{n-m} \ln \left[\frac{R(am)}{R(an)} \right] \\ &\simeq -\frac{2}{n-m} \ln \left[\frac{R(an) + R'(an)a(m-n)}{R(an)} \right] \\ &= -\frac{2}{n-m} \ln \left[1 + \frac{R'(an)a(m-n)}{R(an)} \right] \simeq -\frac{2a(m-n)}{n-m} \frac{[R(an)]'}{R(an)} \\ &= 2a \frac{[R(an)]'}{R(an)}. \end{aligned} \quad (C.2)$$

T_{mn}^a normalizado é portanto

$$T_{mn}^o = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left[- \left(am - an - \frac{\sigma a^2 [R(an)]'}{R(an)} \right)^2 / 2\sigma a^2 \right] \quad (\text{C.3})$$

e a probabilidade de transição nesse caso é

$$T_{mn} dt \simeq \left\{ \frac{[S(an)]'}{Ma} \delta_{m,n+1} + \frac{\beta}{\sqrt{2\pi\sigma}} e \left[- \left(am - an - \frac{\sigma a^2 [R(an)]'}{R(an)} \right)^2 / 2\sigma a^2 \right] \right\} dt. \quad (\text{C.4})$$

O deslocamento médio agora é escrito como

$$dx = \frac{\nabla S}{M} dt + \langle am - an \rangle dt + \sqrt{\langle (am - an - \langle am - an \rangle)^2 \rangle} \eta(t) dt + \mathcal{O}(a^2), \quad (\text{C.5})$$

onde

$$\langle am - an \rangle \rightarrow \langle az \rangle = \int az \beta \frac{\beta}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(z - \sigma a \nabla R/R)^2 / 2\sigma} dz = \beta \sigma a^2 \frac{\nabla R}{R} \quad (\text{C.6})$$

e

$$\sqrt{\langle (am - an - \langle am - an \rangle)^2 \rangle} \rightarrow \sqrt{a^2 \langle z^2 \rangle - a^2 \langle z \rangle^2} = \sqrt{\beta \sigma a^2} + \mathcal{O}(a^2). \quad (\text{C.7})$$

Obtemos então a equação estocástica de Nelson

$$dx = \left[(\beta \sigma a^2) \frac{\nabla R(x)}{R(x)} + \frac{\nabla S(x)}{M} \right] dt + \sqrt{\beta \sigma a^2} \eta(t) dt, \quad (\text{C.8})$$

onde β é um parâmetro livre.

C.2 Probabilidade transição para a equação de Schrödinger modificada

C.2.1 Espaço de configuração

Na forma de Itô, a equação de Schrödinger modificada e normalizada mais geral é [62]

$$d\phi = -iH\phi dt + \sum_m (2\langle L_m^+ \rangle L_m - L_m^+ L_m - \langle L_m^+ \rangle \langle L_m \rangle) \phi dt + \sum_m (L_m - \langle L_m \rangle) \phi dB_m \quad (\text{C.9})$$

que, da escolha correta para L leva a qualquer equação de evolução para a matriz de densidade, até mesmo aquela usada no modelo de decoerência.

No caso particular do modelo de CSL temos [11]

$$d\phi = -iH\phi dt - \frac{\gamma}{2} \int dz [G(x-z) - \int dy G(y-z) P(y,t)]^2 \phi(x,t) dt + \int dz \{ [G(x-z) - \int dy G(y-z) P(y,t)] \sqrt{\gamma} \zeta(z,t) \} \phi(x,t) dt, \quad (\text{C.10})$$

onde $dB(z,t) = \zeta(z,t)dt$ e $P(y,t) = |\phi(y,t)|^2$.

Podemos passar da forma de Itô para Stratonovich através da relação $AdB = A \circ dB - \frac{1}{2}dAdB$ do apêndice B e escrever

$$d\phi(x,t) = \left\{ -iH - \gamma \int dz K(x,z) + \sqrt{\gamma} \left[\int dz \zeta(z,t) L(x,z) \right] \right\} \phi(x,t) dt, \quad (\text{C.11})$$

onde

$$K(x,z) = 2 \left[\int dy G(y-z) P(y,t) \int dy' G(y'-z) P(y',t) - G(x-z) \int dy G(y-z) P(y,t) \right], \quad (\text{C.12})$$

$$L(x,z) = G(x-z) - \int dy G(y-z) P(y,t). \quad (\text{C.13})$$

Estamos na forma de Stratonovich e portanto usamos a relação

$$dP(x,t) = d\phi^*(x,t)\phi(x,t) + \phi^*(x,t)d\phi(x,t) \quad (\text{C.14})$$

Como já sabemos o resultado para a parte determinista que vem da equação de Schrödinger não perturbada (seção 4.2), para simplificar as equações abaixo, chamamos este termo de *p.d.*, assim

$$\begin{aligned}
dP(x, t) = & p.d. - 4\gamma \left[\int dy dy' G'(y - y') P(y, t) P(y', t) + \right. \\
& - \left. \int dy G'(x - y) P(y, t) \right] P(x, t) dt + \\
& + 2 \int dz \{ [G(x - z) - \int dy G(y - z) P(y, t)] \zeta(z, t) \} P(x, t) dt.
\end{aligned} \tag{C.15}$$

Como no capítulo 4

$$G'(x - y) = \int dz G(x - z) G(y - z) \tag{C.16}$$

e

$$G'(y - y') = \int dz G(y - z) G(y' - z). \tag{C.17}$$

Discretizando a equação (C.15) e usando a relação de Bell, chegamos a

$$\begin{aligned}
d_t P_m = & \sum_n J_{mn} = p.d. + \\
& + \sum_n \langle \phi | O_m \rangle \langle O_m | 4\gamma \left[\sum_p G'(an - ap) P_p + \right. \\
& - \left. \sum_{pp'} G'(ap - ap') P_p P_{p'} \right] | O_n \rangle \langle O_n | \phi \rangle + \\
& + \sum_n \langle \phi | O_m \rangle \langle O_m | 2 \sum_q q \{ [G(aq - an) + \\
& - \sum_p G(aq - ap) P_p] \zeta_q(t) \} | O_n \rangle \langle O_n | \phi \rangle \\
= & \sum_n \frac{1}{Ma} [S(an)]' P_n \delta_{n,m-1} \\
& + \sum_n 4\gamma \left[\sum_p G'(an - ap) P_p - \sum_{pp'} G'(ap - ap') P_p P_{p'} \right] P_n \delta_{m,n} + \\
& + \sum_n 2 \sum_q \left[G(aq - an) - \sum_p G(aq - ap) P_p \right] \zeta_q(t) P_n \delta_{m,n},
\end{aligned} \tag{C.18}$$

que leva ao J_{mn}^z usado no capítulo 4.

C.2.2 Espaço de momento

Para passar para o espaço de momento usamos a transformação de Fourier

$$\tilde{\phi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \phi(x) \exp(-ipx/\hbar) dx \quad (C.19)$$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \tilde{\phi}(p') \exp(ip'x/\hbar) dp' \quad (C.20)$$

e assim

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\phi}(p)}{\partial t} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{\partial \phi(x)}{\partial t} \exp(-ipx/\hbar) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx e^{-ipx/\hbar} \left\{ -iH - \gamma \int dz K(x, z) + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\gamma} \left[\int dz \zeta(z, t) L(x, z) \right] \right\} \phi(x, t) \\ &= -iH(p) \tilde{\phi}(p, t) + \\ &\quad - \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp' dx dz \gamma K(x, z) \exp \left[-i \frac{(p-p')x}{\hbar} \right] \tilde{\phi}(p', t) + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp' dx dz \frac{\partial B(z, t)}{\partial t} L(x, z) \exp \left[-i \frac{(p-p')x}{\hbar} \right] \tilde{\phi}(p', t), \end{aligned} \quad (C.21)$$

Discretizando a equação acima, obtemos a seguinte equação de continuidade no espaço de momento

$$\begin{aligned} \partial_t P_m(p) &= \partial_t [\langle O_m | \tilde{\phi}(p) \rangle \langle \tilde{\phi}(p) | O_m \rangle] \\ &= 2Im \sum_n \langle \tilde{\phi} | O_m \rangle \langle O_m | H | O_n \rangle \langle O_n | \tilde{\phi} \rangle + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi\hbar} \int dx dz \{ [-\gamma K(x, z) + \zeta(z, t) L(x, z)] \\ &\quad \sum_n \{ \langle O_m | \sum_{m'} e^{-ib \frac{(m-m')x}{\hbar}} | O_n \rangle \langle O_n | O_{m'} \rangle \langle \tilde{\phi}(p, t) | O_m \rangle \\ &\quad + \langle O_m | \tilde{\phi}(p, t) \rangle \langle O_{m'} | O_n \rangle \langle O_n | e^{-ib \frac{(m-m')x}{\hbar}} | O_m \rangle \} \} \end{aligned} \quad (C.22)$$

O primeiro termo do lado direito é real e portanto não existe. Chegamos assim a

$$J_{mn}^p = \frac{1}{2\pi\hbar} \sum_{m'} \int dx dz [-\gamma K(x, z) + \zeta(z, t) L(x, z)] \quad (C.23)$$

$$\left\{ e^{\left[-i\hbar \frac{(m-m')z}{\hbar} \right]} \langle O_n | O_{m'} \rangle \langle \tilde{\phi}(p, t) | O_m \rangle + \right.$$

$$\left. + e^{\left[i\hbar \frac{(m-m')z}{\hbar} \right]} \langle O_m | \tilde{\phi}(p, t) \rangle \langle O_{m'} | O_n \rangle \right\} \delta_{m,n}.$$

C.3 Distribuição de Wigner

Para obter a evolução temporal da função de Wigner, usamos a equação (4.45)

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle y | \rho | x \rangle = \frac{i\hbar}{2M} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \langle y | \rho | x \rangle - \lambda \left[1 - e^{\frac{-\alpha(y-x)^2}{4}} \right] \langle y | \rho | x \rangle, \quad (C.24)$$

a relação entre a função de Wigner e a matriz de densidade

$$W'(x, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int dy \langle x + y | \rho | x - y \rangle \exp\left(\frac{-2ipy}{\hbar}\right). \quad (C.25)$$

e fazemos a separação

$$\frac{\partial W'}{\partial t} = \frac{\partial_K W'}{\partial t} + \frac{\partial_V W'}{\partial t}. \quad (C.26)$$

O primeiro termo vem da parte cinética da equação de Schrödinger e o segundo vem da parte potencial, que no nosso caso é imaginária e estocástica.

O primeiro termo é

$$\frac{\partial_K W'}{\partial t} = \frac{i}{2\pi M} \int dy \left[\frac{\partial^2 \psi^*(x+y)}{\partial y^2} \psi(x-y) - \psi^*(x+y) \frac{\partial^2 \psi(x-y)}{\partial y^2} \right] e^{-2ipy/\hbar}, \quad (C.27)$$

onde substituímos $\partial^2/\partial x^2$ por $\partial^2/\partial y^2$.

A seguir integramos por partes e desprezamos os termos de superfície

$$\frac{\partial_K W'}{\partial t} = \frac{-p}{\pi \hbar M} \int dy \left[\frac{\partial \psi^*(x+y)}{\partial y} \psi(x-y) - \psi^*(x+y) \frac{\partial \psi(x-y)}{\partial y} \right] e^{-2ipy/\hbar}. \quad (C.28)$$

Trocando novamente $\partial/\partial y$ por $\partial/\partial x$, obtemos

$$\frac{\partial_K W'}{\partial t} = \frac{-p}{M} \frac{\partial W'}{\partial x}. \quad (C.29)$$

Vamos agora para o segundo termo

$$\frac{\partial_V W'}{\partial t} = -\frac{\lambda}{\pi \hbar} \int dy [1 - e^{-\alpha y^2}] \psi^*(x+y) \psi(x-y) e^{-2ipy/\hbar}. \quad (C.30)$$

Expandimos a exponencial em y^2 e mantemos apenas o termo de primeira ordem

$$\frac{\partial_V W'}{\partial t} = -\frac{\lambda}{\pi \hbar} \int dy \alpha y^2 \psi^*(x+y) \psi(x-y) e^{-2ipy/\hbar}, \quad (C.31)$$

o qual também pode ser escrito como

$$\frac{\partial_V W'}{\partial t} = -\frac{\hbar^2 \alpha \lambda}{4} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \int dy \psi^*(x+y) \psi(x-y) e^{-2ipy/\hbar}. \quad (C.32)$$

Juntando (C.29) e (C.32) obtemos (4.47)

$$\frac{\partial W'(x, p, t)}{\partial t} = -\frac{p}{M} \frac{\partial W'(x, p, t)}{\partial x} + \frac{\hbar^2 \alpha \lambda}{4} \frac{\partial^2 W'(x, p, t)}{\partial p^2}. \quad (C.33)$$

Apêndice D

Simulação numérica

Ignorando o termo determinístico na equação (5.29), temos

$$dx = \epsilon(t)dt + \sqrt{2\nu\eta(t)}dt, \quad (\text{D.1})$$

e

$$\epsilon(t) = 2\nu\sqrt{\gamma} \int_0^t dt' \int dz \zeta(z, t') \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \{-\alpha[x(t') - z]\} e^{-\frac{\alpha[x(t') - z]^2}{2}} \quad (\text{D.2})$$

Para fazer a simulação numérica e assim obter a figura 1, seguimos as referências [109, 137, 138] e expandimos o ruído colorido

$$\epsilon(t + \Delta t) = \epsilon(t) + \gamma_0(\Delta t), \quad (\text{D.3})$$

onde

$$\gamma_0 = 2\nu\sqrt{\gamma} \int_t^{t+\Delta t} dt' \int dz \zeta(z, t') \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \{-\alpha[x(t') - z]\} e^{-\frac{\alpha[x(t') - z]^2}{2}}. \quad (\text{D.4})$$

A equação para posição é assim

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \epsilon(t)\Delta t + \gamma_1(\Delta t) + \Gamma_0(\Delta t), \quad (\text{D.5})$$

onde

$$\gamma_1(\Delta t) = \int_t^{t+\Delta t} \gamma_0(t')dt' \quad (\text{D.6})$$

e

$$\Gamma_0(\Delta t) = \sqrt{2\nu} \int_t^{t+\Delta t} \eta(t') dt' \quad (D.7)$$

As funções de correlação são mais fáceis de calcular através da relação de Honeycutt [137] do que resolvendo as integrais

$$\langle \gamma_m(t) \gamma_n(s) \rangle = 2\nu^2 \lambda \alpha \frac{t^{m+1}}{m!} \sum_i \frac{(s-t)^{n-i} t^i}{i!(n-i)!(m+i+1)!} \quad (t < s). \quad (D.8)$$

Com isso temos

$$\langle \gamma_0^2(\Delta t) \rangle = 2\nu^2 \lambda \alpha \Delta t \quad (D.9)$$

$$\langle \gamma_0(\Delta t) \gamma_1(\Delta t) \rangle = \nu^2 \lambda \alpha (\Delta t)^2 \quad (D.10)$$

$$\langle \gamma_1^2(\Delta t) \rangle = \frac{2}{3} \nu^2 \lambda \alpha (\Delta t)^3. \quad (D.11)$$

Note que esta última equação é responsável pela dependência cúbica de $\langle x^2(t) \rangle$ conforme mencionamos no capítulo 5.

Com essas funções de correlação, seguimos [109] e escrevemos

$$\gamma_0 = a\sqrt{\langle \gamma_0^2 \rangle} \xi_1 + b\sqrt{\langle \gamma_0^2 \rangle} \xi_2 \quad (D.12)$$

$$\gamma_1 = c\sqrt{\langle \gamma_1^2 \rangle} \xi_1 + d\sqrt{\langle \gamma_1^2 \rangle} \xi_2, \quad (D.13)$$

onde ξ_1 e ξ_2 são variáveis aleatórias gaussianas e independentes, i.e. $\langle \xi_1^2 \rangle = \langle \xi_2^2 \rangle = 1$ e $\langle \xi_1 \rangle = \langle \xi_2 \rangle = \langle \xi_1 \xi_2 \rangle = 0$ e também $a^2 + b^2 = 1$ e $c^2 + d^2 = 1$.

Posso escolher $a = 1$ e $b = 0$, o que leva a

$$c = \frac{\langle \gamma_0 \gamma_1 \rangle}{\sqrt{\langle \gamma_0^2 \rangle} \sqrt{\langle \gamma_1^2 \rangle}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (D.14)$$

e $d = 1/2$.

Resumindo, fazemos a simulação numérica usando as seguintes equações

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \epsilon(t)\Delta t + \gamma_1(\Delta t) + \Gamma_0(\Delta t), \quad (D.15)$$

$$\epsilon(t + \Delta t) = \epsilon(t) + \gamma_0(\Delta t), \quad (\text{D.16})$$

$$\gamma_0(\Delta t) = \sqrt{2\nu^2\lambda\alpha(\Delta t)}\xi_1, \quad (\text{D.17})$$

$$\gamma_1(\Delta t) = \frac{\sqrt{\nu^2\lambda\alpha(\Delta t)^3}}{2}\xi_2. \quad (\text{D.18})$$

$$\Gamma_0(\Delta t) = \sqrt{2\nu(\Delta t)}\xi_3 \quad (\text{D.19})$$

Para a simulação escolhemos $x(0) = \epsilon(0) = 0$, $\Delta t = 10000\text{s}$ e os demais parâmetros são aqueles do final do capítulo 5 para um sistema macroscópico. Cada simulação numérica tem 40 passos, i.e. partimos de $x(0)$ e vamos até $x(4.10^5)$. Escolhemos apenas quatro dessas simulações, que correspondem a quatro possíveis trajetórias da partícula, para apresentar no gráfico. Para calcular as médias em cada instante de tempo $\langle x(t) \rangle$, fizemos 5000 simulações, e fica nítido pelo gráfico que a média é aproximadamente zero, como esperado devido ao ruído. Note que foram portanto necessárias 20000 variáveis gaussianas ξ_1 , 20000 ξ_2 e 20000 ξ_3 .

Bibliografia

- [1] J. Christian, *Potentiality, Entanglement and Passion-at-a-Distance*, quant-ph/9901008.
- [2] J. S. Bell, Phys. World. **3**, (8) 33 (1990), ou em *Sixty two Years of Uncertainty*, 17, ed. A. I. Miller, (Plenum Press, New York, 1990).
- [3] D. Bohm, Phys. Rev. **85**, 166 (1952); **85**, 180 (1952).
D. Bohm e B. J. Hiley, *The Undivided Universe*, (Routledge, London, 1995).
- [4] J. S. Bell, 'Towards An Exact Quantum Mechanics,' em *Themes in Contemporary Physics II, Essays in honor of Julian Schwinger's 70th birthday*, 1 ed. S. Deser e R. J. Finkelstein (World Scientific, 1990).
- [5] G. C. Ghirardi, A. Rimini e T. Weber, *Phys. Rev. D* **34**, 470 (1986).
- [6] L. de Broglie, Compt. Rend. **183**, 447 (1926); **184**, 273 (1927); **185**, 380 (1927).
- [7] D. Bohm e J. P. Vigier, Phys. Rev. **96**, 208 (1954).
- [8] E. Nelson, Phys. Rev. **150**, 1079 (1966).
- [9] D. Bohm e J. Bub, Rev. of Mod. Phys. **38**, 453 (1966).
- [10] P. Pearle, Phys. Rev. D **13**, 857 (1976).
- [11] G. C. Ghirardi, P. Pearle e A. Rimini, Phys. Rev. A **42**, 78 (1990).
- [12] N. Bohr, *New Theories in Physics*, (International Institute of International Cooperation, Paris, 1939).

- [13] J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, (Princeton University Press, Princeton, 1955).
- [14] L. F. Santos e C. O. Escobar, *Convergences in the Measurement Problem in Quantum Mechanics*, quant-ph/9912005.
- [15] P. Feyerabend, 'Problems in Microphysics', em *Frontiers of Science and Philosophy*, R. G. Colodny, (University of Pittsburgh Press, 1962).
- [16] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics* (Addison-Wesley Publishing Company, 1985).
- [17] N. Bohr, *Essays 1958-62 on Atomic Physics and Human Knowledge*, (Wiley, New York, 1964).
- [18] W. H. Zurek, *Phys. Today* **44** (10), 36 (1991).
- [19] L. F. Santos, Tese de mestrado *Limites Quânticos para Detectores de Sinais Clássicos Fracos* - IFUSP (1994).
- [20] C. O. Escobar, L. F. Santos e P. C. Marques, *Phys. Rev. A* **50**, 1913 (1994).
- [21] W. H. Zurek, *Phil. Trans. R. Soc. of Lond. A* **356**, 1793 (1998).
- [22] I. Prigogine, *From Being to Becoming*, (W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1980).
- [23] W. H. Zurek, *Phys. Rev. D* **24**, 1516 (1981).
- [24] W. H. Zurek, *Progr. of Theor. Phys.* **89**, 281 (1993).
- [25] A. Whitaker, *Einstein, Bohr and the Quantum Dilemma*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1996).
- [26] E. Madelung, *Z. Phys.* **40**, 322 (1926).
- [27] P. R. Holland, *The Quantum Theory of Motion. An account of the de Broglie - Bohm causal interpretation of quantum mechanics*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).

- [28] B.-G. Englert, M. O. Scully, G. Süssmann e H. Walther, *Z. Naturforsch* **47a**, 1175 (1992).
- [29] D. Dürr, W. Füsseder, S. Goldstein e N. Zanghi, *Z. Naturforsch* **48a**, 1261 (1993).
- [30] B.-G. Englert, M. O. Scully, G. Süssmann e H. Walther, *Z. Naturforsch* **48a**, 1263 (1993).
- [31] C. Dewdney, L. Hardy e E. J. Squires, *Phys. Lett. A* **184**, 6 (1993).
- [32] R. B. Griffiths, *Phys. Lett. A* **261**, 227 (1999).
- [33] Y. Aharonov, B.-G. Englert e M. O. Scully, *Phys. Lett. A* **263**, 137 (1999).
- [34] Entrevista com B. J. Hiley em *The Ghost in the Atom*, ed. P. C. W. Davies e J. R. Brown, (Cambridge University Press, Cambridge, 1986).
- [35] J. S. Bell, 'Six possible worlds of quantum mechanics', em *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
- [36] E. Schrödinger, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **2**, 269 (1932).
- [37] I. Fényes, *Z. Phys.* **132**, 81 (1952).
- [38] S. Lundqvist, A. Ranfagni, V. Sa-yakanit e L. S. Schulman, *Proceedings of the Adriatico Research Conference on 'Path Integral Method with Applications'* (World Scientific, Trieste, 1987).
- [39] E. Nelson, *Quantum Fluctuations*, (Princeton University Press, Princeton, 1985).
- [40] T. C. Wallstrom, *Phys. Rev. A* **49**, 1613 (1994).
- [41] L. F. Santos e C. O. Escobar, *Phys. Lett. A* **256**, 89 (1999).
- [42] F. Guerra, *Phys. Rep.* **77**, 263 (1981).
- [43] M. Davidson, *Lett. Math. Phys.* **3**, 271 (1979).

- [44] G. Bacciagalupi, *Found. Phys. Lett.* **12**, 1 (1999).
- [45] G. Peruzzi e A. Rimini, *Found. Phys. Lett.* **9**, 505 (1996).
- [46] F. Guerra e L. Morato, *Phys. Rev. D* **27**, 1774 (1983).
- [47] F. Guerra e R. Marra, *Phys. Rev. D* **28**, 1916 (1983).
- [48] D. Dohrn e F. Guerra, *Lett. Nuovo Cimento* **22**, 121 (1978).
D. Dohrn, F. Guerra e P. Ruggiero em *Lectures Notes in Physics* **106**, 165 (1978).
- [49] L. Susskind, *J. Math. Phys.* **36**, 6377 (1995).
G. 't Hooft, *Dimensional Reduction in Quantum Gravity*, gr-qc/9310026.
- [50] R. Penrose, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **356**, 1927 (1998).
- [51] G. t'Hooft, *Determinism and Dissipation in Quantum Gravity*, hep-th/0003005.
G. t'Hooft, *The Holographic Principle*, hep-th/0003004.
- [52] *Int. J. Theor. Phys.*, **25**, 215 (1986).
L. Smolin, *Phys. Lett.*, **113A**, 408 (1986).
- [53] G. t' Hooft, *Class. Quant. Grav.* **16**, 3263 (1999).
- [54] C. van de Bruck, *On Gravity, Holography and Quantum*, gr-qc/0001048.
- [55] M. B. Green, J. H. Schwarz e E. Witten, *Superstring Theory*, (Cambridge University Press, 1987).
- [56] Y. Nambu, *Proc. Intl. Conf. on Symmetries and Quark Models*, (Wayne State University, 1969).
- [57] G. Veneziano, *Europhys. Lett.* **2**, 199 (1986).
- [58] C. Rebbi, *Phys. Rep.* **12**, 1 (1974).
- [59] F. Guerra e P. Ruggiero, *Phys. Rev. Lett.* **31**, 1022 (1973).
- [60] T. Takabayasi, *Prog. Th. Phys.* **46** (5), 1528 (1971).

- [61] N. Gisin e I. C. Percival, Phys. Lett. A **175**, 144 (1993) e referências aí citadas.
- [62] N. Gisin e I. C. Percival, J. Phys. A: Math. Gen. **25**, 5677 (1992).
- [63] A. Sudbery, J. Phys. A: Math. Gen. **20**, 1743 (1987).
- [64] L. Diósi, Phys. Lett. A **105**, 199 (1984).
- [65] N. Gisin, Helv. Phys. Acta **62**, 363 (1989).
- [66] P. Pearle, *Tales and Tails and Stuff and Nonsense* quant-ph/9805050 ou em *Experimental Metaphysics*, 143 ed. R. S. Cohen (Kluwer Academic Publishers in Great Britain, 1997).
- [67] P. Pearle, Phys. Rev. A **48**, 913 (1993).
- [68] Cartas no Phys. Today **46** (4), 13-15, 81-90 (1993).
- [69] M. R. Gallis e G. N. Fleming, Phys. Rev A **42**, 38 (1990) e **43**, 5778 (1991).
- [70] M. H. Y. Moussa e A. O. Caldeira, Found. Phys. Lett. **9**, 521 (1996).
- [71] M. Tegmark, Found. Phys. Lett. **6**, 571 (1993).
- [72] L. F. Santos e C. O. Escobar, *A beable interpretation of the continuous localization model*, quant-ph/9810019.
- [73] J. S. Bell, Phys. Rep. **137**, 49 (1986), ou 'Beables for quantum field theory', em *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*, 173 (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
- [74] J. C. Vink, Phys. Rev. A **48**, 1808 (1993).
- [75] G. C. Ghirardi, R. Grassi e F. Benatti, Found. Phys. **25**, 5 (1995).
- [76] E. J. Squires, Phys. Lett. A **157**, 453 (1991).
- [77] P. Pearle, 'True Collapse and False Collapse', em *Quantum Classical Correspondence: Proceedings of the 4th Drexel Symposium on Quantum Non-Integrability*, 69 (Drexel University, Philadelphia, 1994).

- [78] L. F. Santos e C. O. Escobar *The Wigner distribution of an open quantum system*, (submetido ao Physics Letters A).
- [79] M. Hillery, R. F. O'Connell, M. O. Scully e E. P. Wigner, Phys. Rep. **106**, 121 (1984).
- [80] C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and Natural Sciences* (Springer-Verlag, Berlin 1985).
- [81] H. Risken, *The Fokker-Planck equation. Methods of Solution and Applications* (Springer-Verlag, Berlin 1984).
- [82] M. Namiki, *Stochastic Quantization em Lecture Notes in Physics m9* (Springer-Verlag, Berlin 1992)
- [83] U. Frisch, *Turbulence* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [84] W. D. McComb, Rep. Prog. Phys. **58**, 1117 (1995).
- [85] G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1967).
- [86] A. Kolmogorov, C. R. Acad. Sci. USSR **30**, 301 (1941).
- [87] L. F. Richardson, Proc. Roy. Soc. London, Ser A **110**, 709 (1926).
- [88] B. B. Mandelbrot, J. Fluid Mech. **62**, 331 (1974).
- [89] J. P. Bouchaud, M. Mézard e G. Parisi, Phys. Rev. E **52**, 3656 (1995).
- [90] M. Kardar, G. Parisi e Y.C. Zhang, Phys. Rev. Lett. **56**, 889 (1986).
- [91] D. Forster, D. R. Nelson e M. J. Stephen, Phys. Rev. A **16**, 732 (1977).
- [92] D. R. Nelson e N. M. Schnerb, Phys. Rev. E **58**, 1383 (1998).
- [93] T. Vicsek, M. Cserző e V. K. Horváth, Physica A **167**, 315 (1990).
- [94] M. Mézard, J. Phys. IV France **8**, Pr6-27, (1998).
- [95] T. Halpin-Healy, Y.C. Zhang, Phys. Rep. **254**, 215 (1995).

- [96] L. F. Santos e C. O. Escobar, *Burgers turbulence and the continuous spontaneous localization model* quant-ph/9912007.
- [97] P. Garbaczewski, G. Kondrat e R. Olkiewicz, Phys. Rev. E **55**, 1401 (1997).
- [98] P. Lévy, *Théorie de l'Addition des Variables Aléatoires* (Gauthier-Villiers, 1937).
- [99] M. F. Shlesinger, B. J. West e J. Klafter, Phys. Rev. Lett. **58**, 1100 (1987).
- [100] M. F. Shlesinger, G. M. Zaslavsky e J. Klafter, Nature **363** (5), 31 (1993).
- [101] J. Klafter, M. F. Shlesinger e G. Zumofen, Phys. Today **49** (2), 33 (1996).
- [102] L. F. Santos e C. O. Escobar, Phys. Rev. A **60**, 2712 (1999).
- [103] D. Kusnezov, A. Bulgac e G. D. Dang, Phys. Lett. A **234**, 103 (1997).
- [104] D. Kusnezov, A. Bulgac e G. D. Dang, Phys. Rev. Lett. **82**, 1136 (1999).
- [105] H. G. E. Hentschel e I. Procaccia, Phys. Rev. A **27**, 1266 (1993).
- [106] P. Zoller, G. Alber e R. Salvador, Phys. Rev. A **24**, 398 (1981).
- [107] A. Larkin e Yu. N. Ovchinnikov, J. Low Temp. Phys. **34**, 409 (1979).
- [108] B. B. Mandelbrot, *Fractals Form, Chance, and Dimension* (W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1977).
- [109] R. F. Fox, Phys. Rev. A **43**, 2649 (1991).
- [110] P. Pearle, J. Ring, J. I. Collar e F. T. Avignone III, Found. Phys. **29**, 465 (1999).
- [111] D. Z. Albert e L. Vaidman, Phys. Lett. A **139**, 1 (1989).

- [112] A. Shimony, 'Desiderata for a Modified Quantum Dynamics', em *PSA 1990* (vol. 2), 49, ed. A. Fine, M. Forbes and L. Wessel, (East Lansing, MI: Philosophy of Science Association, 1990).
A. Shimony, 'Search for a Worldview which can accommodate our knowledge of microphysics', em *Philosophical Consequences of Quantum Field*, ed. J. T. Cushing e E. McMullin, (University of Notre Dame, Paris, 1989).
- [113] D. Albert e B. Loewer, 'Tails of Schrödinger's Cat', em *Perspectives on Quantum Reality*, 8, ed. R. Clifton (Dordrecht: Kluwer, 1996).
- [114] P. Lewis, *Brit. J. Phil. Sc.* **48**, 313 (1997).
- [115] R. Clifton e B. Monton, *Brit. J. Phil. Sc.* **50**, 697 (1999).
- [116] G. C. Ghirardi e A. Bassi, *Brit. J. Phil. Sc.* **50**, 705 (1999).
- [117] F. Aicardi, A. Borsellino, G. C. Ghirardi e R. Grassi, *Found. of Phys. Lett.* **4**, pp. 109 (1991).
- [118] G. C. Ghirardi e A. Bassi, *More about Dynamical Reduction and the Enumeration Principle*, quant-ph/9907050.
- [119] L. F. Santos e C. O. Escobar, *Another round of criticisms to the dynamical reduction models in quantum mechanics*, quant-ph/
- [120] J. S. Bell, 'On wave packet reduction in the Coleman-Hepp model', em *Speckable and Unspeakable in Quantum Mechanics*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
- [121] B. d'Espagnat, *Veiled Reality*, (Addyson-Wesley, 1995).
- [122] R. Omnès, *Understanding Quantum Mechanics*, (Princeton University Press, Princeton, 1998).
- [123] D. Ruelle *Chance and Chaos*, (Princeton University Press, Princeton, 1993).
- [124] E. W. Kolb e M. S. Turner, *The Early Universe*, (Addison-Wesley, 1990).
P. J. E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology*, (Princeton University Press, Princeton, 1993).

- [125] G. C. Ross, *Grand Unified Theories* (Addison-Wesley, 1984).
- [126] F. Károlyházy, *Nuovo Cimento A* **42**, 390 (1966).
- [127] L. Diosi, *Phys. Rev. A* **40**, 1165 (1989).
- [128] D. Lurié, *Particles and Fields*, (Wiley, 1968).
- [129] G. C. Ghirardi, R. Grassi e F. Benatti, *Phys. Rev. A* **42**, 1057 (1990).
- [130] *Lectures on QCD: Foundations, Lecture Notes in Physics*, vol. 481 ed. F. Lens, H. Griesshammer e D. Stoll, (Springer-Verlag, 1997).
- [131] J. S. Bell, 'The theory of local beables', em *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*, 52 (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).
- [132] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Quantum Mechanics*, vol.2, 1344, (Wiley-Interscience, 1977).
- [133] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3ed. (McGraw-Hill, 1968).
- [134] T. W. B. Kibble, *Commun. Math. Phys.* **64**, 73 (1978).
S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 485 (1989).
- [135] A. Peres, *Quantum Theory: Concepts and Methods* (Kluwer Academic Publishers, 1993).
- [136] A. Einstein, *Ann. Phys. (Leipzig)* **17**, 549 (1905).
- [137] R. L. Honeycutt, *Phys. Rev. A* **45**, 600 (1992).
- [138] R. L. Honeycutt, *Phys. Rev. A* **45**, 604 (1992).