UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

TEORIA QUÂNTICA DAS EXCITAÇÕES TOPOLÓGICAS

RUDNEI DE OLIVEIRA RAMOS

SBI-IFUSP

305M810T1895

Tese de Doutorado
submetida ao Instituto de Física
da Universidade de São Paulo

Orientador: Prof. Dr. Gil da Costa Marques

Co-orientador: Prof. Dr. Eduardo C. Marino

Defesa : 12/03/92

São Paulo
Março 1992

530.12

R175+

D

ex.1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Ramos, Rudnei de Oliveira

Teoria quântica das excitações topológicas.
São Paulo, 1992.

Tese (Doutorado) - Universidade de São
Paulo. Instituto de Física. Departamento
Física Experimental.

Área de Concentração: Física de Partículas
Elementares

Orientador: Prof. Dr. Gil da Costa Marques

Unitermos: 1. Excitações topológicas; 2.
Variáveis ordem-desordem; 3. Vórtices quânticos.

USP/IF/SBI - 04/92

Agradecimentos

Meus agradecimentos ao prof. Gil pela orientação e confiança ,ao prof. Marino pelo trabalho de coorientação, aos colegas do IF-USP pela amizade e contribuição na elucidação de muitas de minhas dúvidas , aos departamentos de Física Matemática e Física Experimental do IF-USP ,pelas facilidades oferecidas e ao departamento de Física da PUC-RJ pela hospitalidade.

À Vithy ,pela ajuda no trabalho de redação no computador deste trabalho.

À Fundação de Amparo à Pesquisa no Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro.

Resumo

Descrevemos as propriedades dos chamados operadores desordem ou de criação de excitações topológicas no contexto da teoria quântica de campos no contínuo. No caso de excitações do tipo vórtice, no modelo de Higgs Abelian em $2+1D$, obtemos explicitamente as funções de correlação assim como o espectro de massa, em $T=0$ e $T \neq 0$, dessa excitação topológica. A generalização para campos não-locais de monopólos em $3+1D$ e para sólitons em dimensão arbitrária é discutida assim como aplicações do formalismo de operadores ordem-desordem em teorias de bosonização e Chern-Simons.

Abstract

The properties of the disorder or topological excitations creation operators in the context of continuum quantum field theory are described. In the Abelian Higgs Model in 2+1D, explicit expressions to the vortex correlation function and to the vortex mass spectrum at $T=0$ and $T \neq 0$ are obtained. Generalizations to nonlocal monopoles fields in 3+1D, solitons in arbitrary dimensions and applications of the order-disorder formalism to bosonization and Chern-Simons Theories are discussed.

Índice

1	Introdução	4
2	Sólitons em Teorias de Campo	9
2.1	Kinks no Modelo $\lambda\phi^4$ e sine-Gordon (1+1D)	10
2.2	Vórtices no Modelo de Higgs Abeliano em 2+1D	13
2.3	Monopólo Magnético no Modelo de Higgs não-Abeliano de Simetria $O(3)$ (Monopólo de 't Hooft-Polyakov) em 3+1D	16
2.4	Rumo à uma Teoria Quântica de Sólitons	19
3	Variáveis Ordem-Desordem em Mecânica Estatística e sua Generalização para Teorias de Campo no Contínuo	23
3.1	A Dualidade Ordem-Desordem	23
3.2	Funções de Correlação de Variáveis Desordem	28
3.3	Ordem-Desordem em Teorias de Campo no Contínuo (1+1D)	31
3.4	Ordem-Desordem em 2+1D - Operadores Quânticos não-Locais para Vórtices	37
4	O Espectro de Massa e Funções de Correlação de Vórtices Quânticos no Modelo de Higgs Abeliano	46
4.1	Introdução do Campo Externo - Regras de Feynman	46
4.2	A Função de Correlação de Vórtice e o correspondente Espectro de Massa .	51
4.3	Correções Quânticas de 1-loop para a Massa do Vórtice	57
4.4	Introdução de Temperatura na Função de Correlação de Vórtice	61

4.5	A Estrutura de Fase do Modelo de Higgs Abeliano em 2+1D via Estudo da Função de Correlação $\langle \mu \mu^* \rangle$	65
5	Resultados Adicionais e Futuras Aplicações para a Teoria Quântica das Excitações Topológicas	68
5.1	Operador Desordem para Monopólos Magnéticos em 3+1D	68
5.2	O Operador Desordem em Dimensão Arbitrária	71
5.3	Operadores Desordem e Bosonização	72
5.4	Vórtices em Teorias de Chern–Simons	75
6	Discussões e Conclusões	77
A	Gráficos de Feynman com mais de dois Campos Externos	80
B	Comportamento Assimptótico de $T_2(x, y)$, $T_{SL}(x, y)$ e $T_{LL}(x, y)$ em (4.30) e (4.32)	82
	Referências	85

Lista de Figuras

3.1	Rede bidimensional	24
3.2	Rede dual em 1-dimensão. $\circ$ = sítios da rede original, $\star$ = sítios da rede dual.	26
3.3	(a) um estado de vácuo em $T=0$, em que todos os spins são por exemplo “up”, representado por $ 0\rangle_{T=0}$. (b) $\mu_3(n^*)$ agindo nesse estado gira todos os spins à esquerda do sítio dual n^* , criando uma configuração do tipo <i>kink</i> . (c) representação analoga de um “ <i>antikink</i> ”. (d) O condensado <i>kink-antikink</i> em $\lambda = 1$ ($\langle \sigma_3 \rangle = 0$).	28
3.4	Representação dos sítios da rede original n e da rede dual n^* . $\hat{r}_\mu = (\hat{r}_z, \hat{r}_t)$ é o versor unitário da rede.	29
3.5	Curva c e c' unindo os sítios de rede dual n_1^* e n_2^* . Γ é a área limitada por c e c'	31
3.6	Figura esquemática das curvas c e c' e da área englobada Γ	33
3.7	Geometria para o operador de vórtice $\mu(x; c)$	41
3.8	Elementos geométricos envolvidos na especificação da função de correlação $\langle \mu(x; c_1) \mu^*(y; c_2) \rangle$	42
3.9	Superfície $S(c_1, c_2) = S_x \cup S_y$ onde $S_x = \mathfrak{R}_x^2 - T(c_1)$ e $S_y = \mathfrak{R}_y^2 - T(c_2)$. . .	44
4.1	Vértices envolvendo o campo externo $\tilde{A}_\mu$ (linha espiralada). As linhas onduladas representam o campo de fóton A_μ , enquanto que as linhas retas representam os campos escalares ϕ_1 e ϕ_2 . $\odot$ e $\otimes$ representam vértices não-derivativos e derivativos, respectivamente.	50
4.2	Contorno c nas integrações de momento à $T \neq 0$	62

Capítulo 1

Introdução

Um fato bem conhecido é que teorias de campo clássicas não-lineares podem possuir soluções extensas, normalmente conhecidas como sólitons. Um sólito clássico é uma solução topologicamente estável, de energia finita, das equações de movimento da Hamiltoniana de uma teoria de campo clássica.

A essas soluções topologicamente estáveis, que podemos igualmente denominá-las como as excitações topológicas do modelo teórico em estudo, podemos associar a existência de uma corrente, dita topológica, a qual é identicamente conservada e que igualmente está associada à uma carga topológica não-nula e que é quantizada mesmo classicamente. A conservação da corrente, assim como da carga topológica, é responsável pela estabilidade dessas soluções. Bem conhecidos exemplos de excitações topológicas são os kinks no modelo de sine-Gordon e no modelo $\lambda\phi^4$ (1+1D), vórtices no modelo de Higgs Abelian, os skyrmions no modelo sigma não-linear e os monopólos de 't Hooft-Polyakov em modelos de Yang-Mills com quebra espontânea de simetria^{[1],[2]}.

Teorias de campo com soluções de sólitons tem sido intensivamente estudadas. Um dos métodos mais utilizados é o método semiclássico onde as configurações de sólitons são tomadas como sendo mínimos locais para a expansão dos campos da ação efetiva no funcional gerador.

Apesar do método semiclássico ser intensivamente utilizado e produzir uma série de resultados interessantes, o mesmo sofre uma série de restrições. Entre elas podemos destacar o fato que as soluções clássicas de sólito nem sempre são dadas numa forma explícita, com

excessão do modelo de sine-Gordon bidimensional. Além disso muitos problemas envolvendo sólitons, como por exemplo, problemas envolvendo criação de pares, espalhamento, etc, não são tratáveis (com exceção novamente de alguns modelos bidimensionais). Em casos fisicamente mais interessantes é necessário recorrer a simulações numéricas ou trabalhar dentro de algum tipo de esquema aproximativo.

Esquemas alternativos de estudo de sólitons tem sido propostos. Como exemplo podemos citar as tentativas de construção de uma teoria de campo governando as interações de sólitons. Tal objetivo foi alcançado no modelo de sine-Gordon bidimensional, onde é conhecido que a teoria pode ser transformada no modelo de Thirring massivo^{[3],[4]}. Nesse caso os férmions da teoria de Thirring são os sólitons da teoria de sine-Gordon.

No caso de excitações topológicas em sistemas de dimensão espacial maior que 1, temos as tentativas de construção de uma teoria de campo local de sólitons via formalismo funcional^[5] e formalismo canônico^[6], considerando excitações topológicas tanto do tipo vórtice em $2+1D$ e monopólo magnético em $3+1D$.

Em teoria quântica de campos, sólitons aparecem como novos setores do espaço de Hilbert, dos estados físicos, superselecionados pela carga topológica e são ortogonais ao setor do vácuo. O campo quantizado de sólito sendo então definido como um operador que mapeia o setor do vácuo no setor de sólito ^[7].

Uma completa descrição das propriedades quânticas das então chamadas excitações topológicas de um dado sistema físico tornou-se um problema fundamental em teoria quântica de campos, a medida que tais excitações foram identificadas em uma grande variedade de fenômenos, em física de muitos corpos assim como em física de partículas elementares. Como exemplos desses fenômenos e sua evidente importância, podemos citar, entre muitos outros, as soluções de “partícula”, no modelo de Higgs Abelian em $2+1D$, que são estáveis uma vez que são topologicamente não-triviais. Em física da matéria condensada estes são os vórtices do modelo fenomenológico de Ginzburg-Landau de supercondutividade ^[8], os quais fazem um papel central no estudo da supercondutividade. Como observado por Nielsen e Olesen^[9], em 4 dimensões estas configurações se tornam “strings”. Em teorias de campos escalares complexos, as soluções de vórtice são de especial interesse com respeito a teoria do Hélio líquido^[10]. No caso de teorias de

campo não-Abelianas em 4 dimensões, a solução topologicamente não trivial relevante é a de monopólo magnético, que embora problemático, sua existência é crucial no entendimento da evolução do Universo primordial e a da própria validação das previsões dos modelos de grande unificação^[11].

Uma completa descrição das excitações topológicas,entretanto, deve incluir não só uma teoria quântica para as mesmas mas também poder extrair dessa teoria funções de correlação, amplitude de espalhamento, espectro de massa e assim por diante.

Com o sucesso obtido com a construção de um operador de interpolação entre os setores de vácuo e de sóliton, o operador quântico de sóliton de Mandelstam, no modelo de sine-Gordon em $1+1D$ ^[4], e a observação que o mesmo representava os férmions no modelo de Thirring, constituindo então um esquema de bosonização em $1+1D$, incentivou a tentativa de construção de operadores de sólitons em modelos de dimensão maior. Entretanto, com excessão de poucos trabalhos na literatura versando sobre a construção de operadores de campo locais para sólitons^{[5],[6]}, trabalhos dentro da teoria de campos na rede^{[7],[12]} e estudos mais recentes de operadores locais de vórtices dentro da Eletrodinâmica Escalar^[13], é difícil encontrar trabalhos em que se discuta esse tema e mesmo que delineie uma abordagem precisa para o mesmo.

Um avanço importante foi realizado utilizando os conceitos de dualidade ordem-desordem em sistemas de mecânica estatística. Num trabalho pioneiro, Kadanoff e Ceva^[14], introduziram as chamadas variáveis desordem no modelo de Ising 2d e mostrou como calcular funções de correlação envolvendo essas variáveis. Posteriormente Fradkin e Susskind^[15] obtiveram uma realização explícita para as variáveis desordem e mostrou que as mesmas representavam operadores de criação das excitações topológicas do modelo, no caso Kinks no modelo de Ising.

Baseando-se na noção de dualidade ordem-desordem da mecânica estatística, um método geral de quantização das excitações topológicas, na teoria quântica de campos, foi estabelecido nas ref. [17,18], inicialmente para o caso $1+1D$. Nesse procedimento os operadores de criação das excitações topológicas são introduzidos através de certas relações de comutação, com os campos lagrangeanos básicos, chamada álgebra dual, do mesmo modo como acontece com as variáveis desordem. Estes operadores aparecem, então, como os

análogos em teoria de campos, das variáveis desordem da Mecânica Estatística. Partindo-se de uma prescrição para a função de correlação dos operadores das excitações, pode-se então construir uma representação operatorial explícita para os mesmos.

A generalização dos resultados acima para $2+1D$ foi realizada para o caso de excitações topológicas do tipo vórtice no modelo de Higgs Abelian por Marino^[19]. Neste trabalho foi reconhecido que os campos naturais necessários para descrever excitações topológicas extensas como os vórtices, no espaço-tempo $2+1$ dimensional, são campos não-locais análogos ao operador loop de Wilson^[20].

Reconhecendo a necessidade da introdução de campos não-locais em dimensões espaço-tempo maiores que $1+1D$, para a descrição de objetos topológicos extensos, Marino e Ruiz^[21] do mesmo modo quantizaram o monopólio do modelo de Georgi-Glashow, com simetria $O(3)$, em $3+1D$.

Tanto em [19] como em [21] um procedimento geral para a obtenção de funções de correlação das excitações topológicas foi estabelecido e a realização operatorial explícita de campos de vórtice e de monopólio foi obtida. A principal virtude dessa formulação, a qual é uma generalização para $2+1D$ e $3+1D$ da técnica introduzida em [17] para o caso de Kinks (e sólitons em $1+1D$), é que a computação de funções de correlação de vórtices e monopólios (ou Kinks) são reduzidas a um cálculo padrão em teoria quântica de campos na presença de um campo externo.

Um dos propósitos do presente trabalho é exatamente tomar a formulação da ref. [19] e aplicá-la, pela primeira vez, na computação explícita da função de correlação de dois pontos para excitações do tipo vórtice, no modelo de Higgs Abelian em $2+1D$. Então, do comportamento à longas distâncias dessa função, obter uma expressão explícita para a massa do vórtice quântico. Efeitos de temperatura são introduzidos no procedimento de cálculo das funções de correlação de vórtices de modo que a estrutura de fase da teoria, via função de correlação, possa ser analisada explicitamente. Esses são um dos principais resultados dessa tese, tema de três trabalhos inéditos, sendo um já preparado^[22] e os outros dois em preparação^{[23],[24]}.

Além disso é explorado os aspectos teóricos da formulação proposta para análise das excitações topológicas em comparação com a formulação de campos locais de

sólitons, existente na literatura, além de uma breve exposição da ligação do tema desse trabalho com teorias que tem despertado grande interesse recentemente, notadamente teorias de Chern-Simons e bosonização em dimensões espaço-tempo $2+1D$ e $3+1D$.

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

No capítulo 2 fazemos uma revisão das propriedades clássicas dos sólitons (kinks, vórtice e monopólo) e uma breve introdução dos principais pontos no desenvolvimento de uma teoria quântica para sólitons.

No Capítulo 3 introduzimos a noção de dualidade ordem-desordem em Mecânica Estatística. A generalização dos resultados para teoria quântica de campos no contínuo, a prescrição para o cálculo de funções de correlação e a realização operatorial explícita para operadores de criação de sólitons são discutidas e enfatizadas principalmente para o caso de soluções do tipo vórtice.

No Capítulo 4 é estudado com detalhes o cálculo da função de correlação de dois pontos para vórtices, no modelo de Higgs Abelian em $2+1D$, e de seu comportamento à longas distâncias, obtemos explicitamente a massa do vórtice, ao nível da árvore e as correções quânticas de 1-loop para a mesma. Efeitos de temperatura também são introduzidos e a temperatura de transição de fase obtida.

No Capítulo 5 fazemos um relato de possíveis resultados adicionais pertinentes à teoria em estudo e discutimos brevemente tópicos de ponta relacionados com o tema desse trabalho, como bosonização e teoria de Chern-Simons.

O Capítulo 6 é reservado a discussões e conclusões sobre o tema.

Dois apêndices estão incluídos, em que demostramos resultados úteis.

Capítulo 2

Sólitons em Teorias de Campo

O estudo das equações de movimento de teorias de campo clássicas, mostrou que as mesmas possuem soluções (clássicas) estáveis, com energia finita e localizadas em uma região finita do espaço, tendo portanto uma fascinante estrutura do tipo partícula. Essas soluções são genericamente denominadas de “*sólitons*”^[25].

Considere um sistema cuja densidade de energia seja $\mathcal{H}(\vec{r})$. Uma configuração de campo com energia finita deve satisfazer $\mathcal{H} = 0$ quando $r \rightarrow \infty$, ou seja, esta configuração precisa aproximar, para cada direção do infinito espacial, à um dos zeros do potencial em $\mathcal{H}$ e portanto, à um dos valores da configuração de vácuo do sistema. Se existem muitos mínimos degenerados do potencial, então a configuração de campo pode tender a qualquer um dos mínimos no infinito espacial. A estabilidade desses sólitons surge do fato que é possível escolher uma condição de contorno no infinito espacial que não pode evoluir continuamente à condição de contorno de uma das soluções triviais, ou seja, o vácuo da teoria. Pode-se conseguir isto quando o grupo de simetria quebrado, isto é, o grupo quociente entre o grupo de simetria inicial e o grupo de simetria remanescente (ou equivalentemente, a variedade dos vácuos clássicos) é topologicamente equivalente à esfera $S_{D-2}(r \rightarrow \infty)$ onde é imposta as condições de contorno. Quando a condição acima é conseguida, o sistema possui uma corrente conservada, dita “*topológica*”. Ela é conservada identicamente de forma independente das equações de movimento^[26]. Equivalentemente podemos associar a essa corrente topológica uma “*carga topológica*”, igualmente conservada, que esta relacionada à existência de setores topologicamente distintos na teoria (do vácuo e do

sóliton), não tendo nada a ver com uma corrente conservada de Noether.

Abaixo resumimos a teoria de sólitons clássica para o caso de três configurações relevantes de campo, excitações do tipo kink no modelo $\lambda\phi^4$ em 1+1D, vórtices no modelo de Higgs Abeliano em 2+1D e por último monopólos magnéticos no modelo de Higgs não-Abeliano com simetria $O(3)$ em 3+1D.

2.1 Kinks no Modelo $\lambda\phi^4$ e sine-Gordon (1+1D)

Consideremos uma densidade de Lagrangeana para campos escalares no espaço 1+1D dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 - V(\phi) \quad (2.1)$$

que leva a uma ação S dada por

$$S = \int dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx \mathcal{L}(x, t) \quad (2.2)$$

A minimização da ação, $\delta S = 0$, fornece a equação de movimento

$$\square\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = -\frac{\partial V}{\partial\phi} \quad (2.3)$$

A expressão para a energia é dada pelo funcional

$$E(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + V(\phi) \right] \quad (2.4)$$

Se o potencial $V(\phi)$ tem uma série de mínimos discretos dados por $\phi_0^{(i)}$, $i=1,2,\dots,M$ e se $\phi(x, t) = \phi_0^{(i)}$, então teremos $E(\phi_0^{(i)}) = 0$ implicando em M soluções fundamentais degeneradas para a equação de movimento (2.3).

Procuremos agora configurações estáticas de energia finita que satisfazem (2.3). Com $\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$, $\phi(x, t) = \phi(x)$ e então

$$E(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + V(\phi) \right] \quad (2.5)$$

Configurações de energia finita tem que ser tais que para $x \rightarrow \pm\infty$, $\frac{\partial\phi}{\partial t} \rightarrow 0$, $V(\phi) \rightarrow 0$, implicando que $\phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \phi_0^{(i)}$, ou seja, deve ter como valores limites para $x \rightarrow \pm\infty$, um dos zeros do potencial. Portanto as soluções de energia finita são configurações de $\phi(x, t)$ com

$$\phi(x \rightarrow +\infty, t) \rightarrow \phi_0^{(i)} \quad (2.6)$$

$$\phi(x \rightarrow -\infty, t) \rightarrow \phi_0^{(j)}, j \neq i$$

sendo então uma função não-singular e portanto contínua em t , para todo x . Mas desde que $\phi_0^{(i)}$ é uma série discreta de zeros de $V(\phi)$, isto implica que

$$\partial_0\phi(\pm\infty, t) = 0 \quad (2.7)$$

O espaço das soluções pode então ser dividido em setores, identificados pelo par $\phi_0^{(i)}$ e $\phi_0^{(j)}$ e que não podem fazer de modo contínuo uma transição de um zero do potencial para outro zero^[26]. A estabilidade do sóliton surge então de razões topológicas.

Pode-se definir uma “carga topológica” conservada, por

$$Q(t) = c[\phi(+\infty, t) - \phi(-\infty, t)] \quad (2.8)$$

e uma corrente topológica conservada equivalente

$$J^\mu = c\epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\phi \quad (2.9)$$

onde c é uma constante definida convenientemente de modo a termos Q adimensional, $\epsilon^{\mu\nu}$, o tensor antisimétrico de Levi-Civita, assegura a conservação da corrente, $\partial_\mu J^\mu = 0$. A carga (2.8) é definida da forma usual

$$Q = \int J^0 dx \sim \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right) \equiv [\phi(+\infty) - \phi(-\infty)] \quad (2.10)$$

Consideremos como exemplos concretos, o kink no modelo $\lambda\phi^4$ e no modelo de sine-Gordon. No modelo $\lambda\phi^4$, $V(\phi)$ é dado por

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda})^2 \quad (2.11)$$

onde λ e m^2 são parâmetros do modelo.

A Lagrangeana em (2.1) com $V(\phi)$ dado por (2.11) é invariante sob o grupo de transformações de Lorentz e sob o grupo Z_2 de transformações discretas

$$\phi \rightarrow \phi, \phi \rightarrow -\phi \quad (2.12)$$

$V(\phi)$ em (2.11) possui como mínimos as soluções de vácuo $\phi_v = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}}$, que correspondem a estados degenerados do vácuo.

Uma configuração de campo de sóliton que tem como condição de contorno para $x \rightarrow \pm\infty$, $\phi(\pm\infty) \rightarrow \pm\phi_v$, que é estacionária e de energia finita, é dada de forma explícita por^{[2],[26]}

$$\phi_k(x) = \phi_v \tanh \left[\frac{m}{\sqrt{2}} x \right] \quad (2.13)$$

tal solução é conhecida como *Kink*, interpolando assintoticamente os dois valores de vácuo do sistema.

No modelo de sine-Gordon, $V(\phi)$ é dado por

$$V(\phi) = \frac{m^4}{\lambda} \left[1 - \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m}\phi\right) \right] \quad (2.14)$$

$V(\phi)$ possui agora zeros em $\phi = \phi^{(n)} = 2\pi n \frac{m}{\sqrt{\lambda}}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ que constituem uma série infinita de estados degenerados de vácuo.

A solução de sóliton neste caso (que interpola sucessivos zeros do potencial) é dado por^{[2],[26]}

$$\phi_s(x) = \frac{4m}{\sqrt{\lambda}} \arctan [e^{mx}] \quad (2.15)$$

Em ambos os casos podemos certificar que a energia das configurações (2.13) e (2.15) são finitas em relação ao vácuo. A corrente topológica e a correspondente carga topológica conservada, como definidas em (2.9) e (2.8), respectivamente, são dadas com $c = \frac{\sqrt{\lambda}}{2m}$, para o Kink do modelo $\lambda\phi^4$ e $c = \frac{\sqrt{\lambda}}{2m\pi}$, para o modelo de sine-Gordon.

O kink em ambos os casos pertence ao setor com $Q=1$ (setor do sóliton), enquanto que as soluções de vácuo pertencem ao setor com $Q=0$ (setor do vácuo).

2.2 Vórtices no Modelo de Higgs Abelian em 2+1D

Consideremos o modelo de Higgs Abelian dado pela Lagrangeana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - m^2\phi^*\phi - \frac{\lambda}{4}(\phi^*\phi)^2 \quad (2.16)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ e m, λ e e são parâmetros do modelo. $\phi(x)$ é um campo escalar complexo.

O potencial em (2.16) é dado por

$$V(\phi, \phi^*) = m^2\phi^*\phi + \frac{\lambda}{4}(\phi^*\phi)^2 \quad (2.17)$$

para $m^2 < 0$, o potencial assume mínimos em

$$\phi_v = \left(-2\frac{m^2}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\alpha(x)} \quad (2.18)$$

onde a fase $\alpha(x)$ é arbitrária.

Como no caso de kinks, as configurações estáticas de campo não-triviais são obtidas impondo a condição de contorno em ϕ

$$\phi(x) \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \phi_v \quad (2.19)$$

Como estamos agora num sistema de dimensão espacial $d=2$, $|\vec{x}|$ define uma esfera espacial unidimensional S^1 (um círculo) e (2.19) equivale então a um mapeamento de S^1 , tomado no infinito, $|\vec{x}| \rightarrow \infty$, na configuração de vácuo definida em (2.18), que igualmente esta definida na esfera S^1 (dos valores do vácuo).

O requerimento de energia finita impõe ainda a condição que, para que a parte eletromagnética da energia em (2.16)

$$\int d^2x (\vec{B} \cdot \vec{B} + \vec{E} \cdot \vec{E})$$

seja finita em $|\vec{x}| \rightarrow \infty$, o campo de gauge A_μ precisa tender à um gauge puro em $|\vec{x}| \rightarrow \infty$. Levando-se em conta a invariância de gauge de (2.16), requeamos que

$$A_\mu \rightarrow \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x) \quad ; \quad (|\vec{x}| \rightarrow \infty) \quad (2.20)$$

com $\alpha(x)$ sendo a mesma que em (2.18).

As condições de contorno (2.19) e (2.20) definem então uma configuração de energia finita que recebe o nome de vórtice^[9]. Como (2.19) é definida no círculo S^1 de raio $|\vec{x}| \rightarrow \infty$, $\phi(x)$ e $\alpha(x)$ dependem sómente da posição angular em volta de S^1 e desde que $\phi(x)$ satisfaz uma equação diferencial (a equação de movimento), a mesma precisa ser contínua : $\phi(2\pi) = \phi(0)$, o que implica em

$$\alpha(2\pi) - \alpha(0) = 2\pi n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2.21)$$

Consideremos agora o “fluxo magnético” em S_1

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_1} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{2\pi n}{e} \quad (2.22)$$

onde usamos (2.21) e A_μ dado por (2.20), no círculo S_1 no infinito. De (2.22), o fluxo resulta ser então quantizado em unidades de $\frac{2\pi}{e}$.

Se definimos uma corrente topológica dada por

$$J^\mu = \epsilon^{\mu\nu\gamma} \partial_\nu A_\gamma \quad (2.23)$$

então o fluxo definido em (2.22) é exatamente a carga topológica do vórtice.

De (2.22) podemos dividir em classes as configurações de campo de energia finita, para cada valor de n . n caracteriza o que se chama de classe de homotopia, tal que uma configuração só pode ser deformada continuamente em uma outra com o mesmo valor de n . Soluções pertencentes a classes de homotopia diferentes não podem ser deformadas continuamente uma na outra, o que vem caracterizar a lei de conservação topológica^[27].

Em coordenadas polares (r, θ) , podemos escrever uma solução estática para (2.19) e (2.20) da forma^[9]

$$\phi(r) = \rho(r)e^{in\theta} , \quad \rho(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} |\phi_v| \quad (2.24)$$

e

$$A_i(r) = \frac{1}{e} a(r) \partial_i(n\theta) , \quad a(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1 \quad (2.25)$$

inserindo esses *Ansätze* nas equações de movimento de (2.16), obtemos um par de equações diferenciais não-lineares acopladas cuja solução aproximada, Nielsen e Olesen^[9] mostrou serem

$$\rho(r) \cong |\phi_v| (1 - e^{-\sqrt{-m^2}r}) \quad (2.26)$$

e

$$a(r) \cong -\frac{n}{er} + |\phi_v| K_1(e |\phi_v| r) \quad (2.27)$$

onde K_1 é a função de Bessel modificada e $|\phi_v| = (-\frac{2m^2}{\lambda})^{\frac{1}{2}}$. De (2.27) obtemos a expressão para o campo magnético

$$|B| \cong e |\phi_v|^2 K_0(e |\phi_v| r) \quad (2.28)$$

A estabilidade dessas soluções, como no caso do Kink, é de natureza topológica. Como dissemos acima, soluções com classes de homotopia diferentes (n diferentes) não podem ser continuamente deformadas uma na outra. Transformações de gauge são transformações contínuas e então, de (2.19) e (2.20), $\alpha(x)$ precisa ser um invariante de gauge, caso contrário poderíamos deformar continuamente as configurações de vórtice para as triviais (as configurações de vácuo). Portanto em regiões do espaço onde existem configurações de sóliton, $\alpha(x)$ deve ser uma função singular. Por exemplo, $\alpha(x)$ dada por $\arg(\vec{x}) = \arctan(\frac{x_2}{x_1})$, x_1, x_2 sendo as coordenadas do plano espacial (2+1D), a singularidade de $\alpha(x)$ está na origem. Podemos dizer de maneira mais geral que é esta singularidade garante a estabilidade do vórtice.

No Capítulo 4 deste trabalho usaremos exatamente uma função $\arg(\vec{x})$ para $\alpha(x)$, garantindo assim que estamos trabalhando com uma solução adequada para o vórtice.

Além da solução aproximada para o vórtice (2.26) e (2.27), no caso particular em que as constantes e^2 e λ em (2.16) satisfazem

$$e^2 = 2\lambda \quad (2.29)$$

Vega e Schaposnik^[28] mostraram que é possível construir uma solução exata para as equações de movimento e obtiveram para este caso particular a massa do vórtice (a massa semiclássica) como sendo dada por

$$M_v^{sc} = n \frac{\pi M^2}{e^2} \quad (2.30)$$

onde $M^2 = e^2 |\phi_v|^2$.

Este é um resultado que salientamos pois o obteremos no Capítulo 4, dentro do formalismo quântico para vórtices, em ordem mais baixa de aproximação.

2.3 Monopólo Magnético no Modelo de Higgs não-Abeliano de Simetria O(3) (Monopólo de 't Hooft-Polyakov) em 3+1D

Quando a simetria de gauge é generalizada para um grupo não-Abeliano e quebra espontânea de simetria é introduzida, as equações de movimento da teoria podem admitir soluções estáticas de energia finita, ou configurações de sólitons. Um dos casos mais simples de teoria de gauge não-Abeliana que admite tais soluções, é o modelo de Higgs não-Abeliano de simetria O(3), que em 3+1D, pode-se mostrar que possui soluções que carregam uma “*carga magnética*”, ou seja, soluções do tipo monopólo magnético^[29].

Considere a Lagrangeana abaixo

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \frac{1}{2} (D_\mu \phi^a)(D^\mu \phi^a) - \frac{m^2}{2} \phi^a \phi^a - \frac{\lambda}{4} (\phi^a \phi^a)^2 \quad (2.31)$$

onde $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$ e $D_\mu \phi^a = \partial_\mu \phi^a + g\epsilon^{abc} A_\mu^b \phi^c$. ϕ^a é um isovetor de campos de Higgs ($a=1,2,3$) (a =índice do grupo). $\mathcal{L}$, como dada por (2.31), está na representação adjunta.

De (2.31) obtemos as equações de movimento

$$D_\mu F_{\mu\nu}^a = -g\epsilon^{abc}\phi^b D_\nu\phi^c \quad (2.32)$$

$$D_\mu D^\mu\phi^a = -m^2\phi^a - \lambda\phi^a(\phi^b\phi^b)$$

Estas equações possuem como solução trivial (com $m^2 < 0$)

$$F_{\mu\nu}^a = 0, \quad D_\mu\phi^a = 0, \quad |\phi^a|^2 = -\frac{m^2}{\lambda} \quad (2.33)$$

que correspondem ao mínimo absoluto do potencial em (2.31), representando um vácuo degenerado contínuo (a esfera S_2 de raio $|\phi_v| = \sqrt{-\frac{m^2}{\lambda}}$).

No caso de dimensão espacial $d=3$, a topologia à ser considerada é o mapeamento da esfera bidimensional espacial S_2 , tomada no infinito, na esfera bidimensional S_2 dos valores do vácuo. Como no caso de kinks e vórtices, aqui também devemos considerar, para a construção de configurações de campo estáticas e de energia finita, as condições de contorno para os campos de Higgs ϕ^a e para os potenciais de gauge A_μ^a :

$$\phi^a(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \phi_v \frac{r^a}{r} \quad (2.34)$$

e

$$A_0^a(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \quad A_i^a(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -\epsilon_{iab} \frac{r^b}{gr^2} \quad (2.35)$$

onde $\phi_v = \sqrt{-\frac{m^2}{\lambda}}$.

Da forma da solução assintótica (2.34), vemos que ela é radial e Polyakov^[29] denominou-la uma solução “*hedgehog*” ou ouriço. Como no caso de configurações do tipo vórtice, (2.35) representa da mesma forma um gauge puro.

De (2.34) e (2.35) podemos construir soluções do tipo

$$\phi^a(r) = \rho(r) \frac{r^a}{r}, \quad \rho(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \phi_v \quad (2.36)$$

$$A_i^a(r) = -\epsilon_{iab} \frac{r^b}{gr^2} A(r) , \quad A(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1$$

onde $\rho(r)$ e $A(r)$ são determinadas via equações de movimento. Entretanto somente soluções aproximadas são conhecidas para estas funções, obtidas de métodos numéricos. No limite $\lambda \rightarrow 0$, Prasad e Sommerfield^[30] encontraram soluções exatas para as equações diferenciais de $\rho(r)$ e $A(r)$, com soluções dadas por^[30]

$$\rho(r) = 1 - g^2 \phi_v r^2 \coth(g\phi_v r)$$

$$A(r) = \frac{g\phi_v r}{\sinh(g\phi_v r)} - 1$$

Para mostrar que as soluções (2.34) e (2.35) representam uma solução do tipo monopólo magnético (a carga magnética é um invariante topológico da configuração de campo), introduzimos o tensor de campo “eletromagnético” invariante de gauge^[29]

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \frac{1}{g|\phi|^3} \epsilon_{abc} \phi^a (\partial_\mu \phi^b) (\partial_\nu \phi^c) \quad (2.37)$$

onde

$$A_\mu = \frac{1}{|\phi|} \phi^a A_\mu^a \quad (2.38)$$

substituindo (2.34) e (2.35) em (2.37), obtemos

$$F_{0i} = 0 \quad e \quad F_{ij} = -\frac{1}{gr^3} \epsilon_{ijk} r^k \quad (2.39)$$

que corresponde à um campo magnético radial dado por

$$B_k = \frac{r^k}{gr^3} \quad (2.40)$$

O fluxo magnético ($4\pi r^2 B$) é dado por

$$\Phi = \frac{4\pi}{g} \quad (2.41)$$

o que pela lei de Gauss corresponde ao fluxo de uma “carga magnética” dada por $\frac{4\pi}{g}$.

Para melhor entender a origem dessa carga magnética, generalizamos a definição da corrente topológica (2.23), para vórtices, para o caso de dimensão espacial $d=3$:

$$J_\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} \quad (2.42)$$

com $F_{\rho\sigma}$ dado por (2.37), obtemos

$$J^\mu = -\frac{1}{2g} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{abc} \partial_\nu \bar{\phi}^a \partial_\rho \bar{\phi}^b \partial_\sigma \bar{\phi}^c \quad (2.43)$$

onde $\bar{\phi}^a = \frac{\phi^a}{|\phi|}$.

A carga topológica conservada, associada à essa corrente, é dada por

$$Q = \int d^3x J^0 = -\frac{1}{2g} \oint_{S_2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{abc} \bar{\phi}^a \partial_j \bar{\phi}^b \partial_k \bar{\phi}^c (d^2 S)_i \quad (2.44)$$

onde a integral é tomada sobre a esfera S_2 no infinito, que corresponde à condição de contorno da configuração de campo estática $\phi(r)$ em (2.34). A solução da integração em (2.44) pode ser mostrada ser^[27]

$$Q = \frac{4\pi}{g} n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.45)$$

onde n (inteiro), da mesma forma que na solução de vórtice, representa os setores de sóliton (monopólo). A origem de (2.45), e portanto da carga magnética, é topológica, associada ao grupo de simetria resultante ($H=U(1)$) após a quebra do grupo de simetria original ($G=O(3)$) da Lagrangeana, de cuja razão $\frac{G}{H}$ se define um grupo de isomorfismo dado exatamente pelo grupo dos inteiros.

Um tratamento mais completo para o monopólo magnético pode ser encontrado na ref. [31]. Em [32] é analisado com detalhes o papel desempenhado por esses objetos em Cosmologia e Astrofísica e possíveis meios para sua detecção.

2.4 Rumo à uma Teoria Quântica de Sólitons

Uma das características marcantes de configurações de sólitons, é elas exibirem, mesmo ao nível clássico, uma estrutura extensa do tipo partícula. Do mesmo

modo que partículas extensas, as soluções do tipo sóliton são objetos localizados e de energia finita. Quando tratados ao nível quântico, tais soluções não perdem suas características de partículas e passam a representar novos estados no espectro do correspondente campo quântico^[33].

O método mais tradicional de tratar a quantização de sólitons é através do método semiclássico, em que as configurações clássicas de sóliton são consideradas como campos de “background” e flutuações são então consideradas em torno dessas configurações clássicas. Por exemplo consideremos uma teoria de campo escalar ϕ , ação $S(\phi)$, que admite soluções clássicas de sóliton ϕ_s . Dentro da linguagem de integrais funcionais, o funcional gerador sera dado por

$$Z[\phi, J] = \int D\phi \exp \{iS(\phi) + J\phi\} \quad (2.46)$$

No método de campo de *background* fazemos $\phi \rightarrow \phi_s + \phi'$, onde ϕ' é considerado como sendo flutuações em torno da configuração clássica ϕ_s . Substituindo ϕ por $\phi_s + \phi'$ em (2.46) e fazendo a expansão em torno de ϕ_s , obtemos

$$Z[\phi_s, J] = e^{iS(\phi_s)} \left\{ \left[\det \frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \right]^{\frac{1}{2}} + \dots \right\} \quad (2.47)$$

De (2.47) podemos, por exemplo, identificando a ação efetiva $\Gamma(\phi_s)$ como a massa em repouso do sóliton^[2], calcular as correções quânticas (correções de loop) para a massa do sóliton, dadas pelos termos da expansão dentro da chave em (2.47). Um outro método de tratar a quantização de sólitons é o método da quantização canônica, tratado inicialmente nas refs.^[34,35], em que faz-se uso de coordenadas coletivas^[36], onde os vetores posição e momento do sóliton são promovidos à variáveis dinâmicas.

Apesar dos métodos citados acima produzirem uma série de resultados interessantes e proporcionarem um entendimento razoável do papel de estruturas do tipo sóliton dentro da teoria quântica, eles são essencialmente semiclássicos de natureza, envolvendo uma expansão em potências da constante de Planck, e necessitam um conhecimento detalhado das soluções clássicas de sóliton, o que nem sempre é possível, como vimos nas seções anteriores.

O problema principal então passa a ser a construção de uma teoria de campo para

sólitons,descrevendo-os em termos de campos quânticos. Pela estrutura não trivial do espaço de *Hilbert*,produzido pela presença de setores superselecionados pela carga topológica do sóliton,setores esses ortogonais aos setores de vácuo da teoria,os campos quânticos de sóliton são definidos como operadores de interpolação entre os setores de vácuo e de sóliton. Os setores de sóliton são definidos pelas seguintes propriedades^[7]:

(a)— é um covariante de translação espaço-temporal ,sendo então invariante sob transformações de Lorentz e ,em casos mais gerais,são mesmo invariantes pelo grupo de Poincaré,e (b)— é um autoestado da carga topológica, com autovalor não-nulo,ou seja,para um operador quântico de sóliton O_s e o correspondente operador de carga topológica Q_s ,a relação de comutação $[O_s, Q_s]$, é não-nula e deve ter autovalor correspondente ao valor da carga topológica do sóliton,quando aplicado à um estado de vácuo.

Um dos primeiros casos bem sucedidos de construção de um operador de sóliton é operador de Mandelstam^[4] para o soliton no modelo de sine-Gordon em 1+1D (kink), representando efetivamente um operador de interpolação entre o setor de sóliton e o setor de vácuo.

Um dos fatos mais marcantes relacionado à construção de Mandelstam foi a associação do operador de sóliton do modelo de sine-Gordon com os férmions do modelo de Thirring massivo^[3,4] ,estabelecendo um possível mecanismo de bosonização que possa eventualmente ser generalizado para teorias de dimensão maior que 1+1D e com outras soluções de sóliton.

Apesar do sucesso da realização operatorial para o sóliton de sine-Gordon , a generalização para outros casos mais realísticos,em dimensões 2+1D e 3+1D,se mostrou extremamente complicado,tal que na literatura encontramos somente alguns poucos trabalhos sobre o tema,dentre os quais podemos citar os trabalhos de Bardakci e Samuel^[5] na tentativa de construção de teorias de campo locais para o caso de vórtices no modelo de Higgs Abelian em 2+1D e de monopólos no modelo de Georgi-Glashow em 3+1D. O tratamento desenvolvido por eles faz uso da integração funcional e usando a liberdade de gauge, reescrevem o funcional gerador em termos de campos de topologia trivial e graus de liberdade relacionados com a trajetória dos sólitos,de modo a dar conta da carga

topológica. Como resultado final, obtem-se uma Lagrangeana para os sólitons que apresenta características semelhantes ao obtido no formalismo $1+1D$, mas que resulta ser não-renormalizável além de problemas com invariância de Lorentz para a Lagrangeana final. Tratamento semelhante foi utilizado por Mansfield^[37] para o caso de vórtices quânticos, obtendo conclusões a respeito das cordas de modelos duais, mas como no caso anterior, sem a construção de um campo descrevendo as excitações do modelo.

Um dos primeiros trabalhos em que um operador de sóliton, em dimensão maior que $1+1D$, é construído e um tratamento rigoroso do espaço de Hilbert é dado, é o realizado por Ezawa^[6] via formalismo canônico. Ezawa construiu um operador (local) de interpolação entre o setor de vácuo e o setor de sóliton, no caso, vórtices no modelo de Higgs Abelian em $2+1D$, e mostrou que esse setor é realmente invariante sob transformações de Lorentz.

Entretanto além desses desenvolvimentos, uma outra metodologia foi desenvolvida para o tratamento quântico das excitações topológicas. Aqui novamente o papel desempenhado pela realização operatorial de Mandelstam foi relevante. Junto com resultados obtidos da mecânica estatística, envolvendo as chamadas variáveis ordem-desordem em sistemas de spin de Ising^[14,15], Swieca e Marino^[17] perceberam que o operador de Mandelstam Ψ , poderia ser reescrito em termos de dois operadores, que como na mecânica estatística, possuíam as mesmas características das variáveis ordem-desordem. Identificando esses operadores e utilizando das propriedades das variáveis ordem-desordem, bem estudadas no caso de modelos bidimensionais de spin na rede, foi possível desenvolver toda uma metodologia de construção de operadores quânticos de excitações topológicas, denominando-os também de *operadores desordem*, de sua semelhança com as variáveis desordem, além da construção de funções de correlação envolvendo tais operadores^[17,18,19].

No capítulo seguinte fazemos uma revisão dos princípios envolvidos nesse tratamento de quantização de excitações topológicas, começando pelas principais ideias desenvolvidas para o modelo de Ising na rede, envolvendo a dualidade ordem-desordem e sua subsequente generalização para teorias de campo no contínuo.

Capítulo 3

Variáveis Ordem–Desordem em Mecânica Estatística e sua Generalização para Teorias de Campo no Contínuo

3.1 A Dualidade Ordem–Desordem

Consideremos a ação clássica do modelo de Ising anisotrópico em duas dimensões

$$S = -\beta_z \sum_n \sigma(n) \sigma(n + \hat{n}_z) - \beta_t \sum_n \sigma(n) \sigma(n + \hat{n}_t) \quad (3.1)$$

onde $\sigma(n) = \pm 1$, n são sítios de uma rede retangular e $\hat{n}_z, \hat{n}_t$ são vetores unitários nas direções z e t respectivamente (fig. 3.1). As constantes de acoplamento nas direções z e t são β_z e β_t respectivamente, não sendo necessariamente iguais.

Podemos achar um limite de tal modo à fazer com que a rede na direção t se torne contínua, deixando discreto o eixo z . Neste limite o modelo de Ising se torna equivalente à um sistema quântico Hamiltoniano^[16], consistindo de um sistema discreto 1-dimensional (z) de spins interagentes^[16].

Na formulação Hamiltoniana de um sistema quântico discretizado, uma direção do espaço-tempo é identificada como sendo o tempo e o espaçamento da rede naquela direção é feito ser zero.

Para uma rede D -dimensional, esta torna-se então uma rede $(D-1)$ -dimensional mais

um eixo “temporal” contínuo.

Figura 3.1: Rede bidimensional

Para poder reter a mesma física (à grandes distâncias) quando o espaçamento da rede na direção temporal é feito ser zero, é necessário permitir que a constante de acoplamento da rede na direção temporal (β_t) varie com o espaçamento da rede, tal que a interação efetiva, sobre alguma distância fixa, permaneça inalterada.

Pelo método da matriz de transfêrencia podemos construir o limite de tempo contínuo de uma forma precisa e obter o Hamiltoniano desse sistema quântico. Detalhes desse procedimento podem ser encontrados em Kogut^[16] e Fradkin e Susskind^[15].

Diferentemente da Lagrangeana ou Hamiltoniana da mecânica estatística clássica, esta Hamiltoniana quântica contém operadores que não comutam. Como exemplo, tomemos a Hamiltoniana obtida por esse método, do modelo de Ising bidimensional dado em (3.1)

$$\mathcal{H} = -\lambda \sum_n \sigma_3(n) \sigma_3(n+1) - \sum_n \sigma_1(n) \quad (3.2)$$

onde σ_3 e σ_1 são matrizes de Pauli

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e os pontos n são agora pontos da rede puramente espaciais. λ é um parâmetro de acoplamento que está relacionado com as constantes de acoplamento originais em (3.1) (e com a temperatura) do modelo de Ising bidimensional.

As matrizes σ agem sobre estados nos quais um spin "up" é representado por $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e um spin "down" por $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. A soma sobre n é uma soma sobre sítios de uma rede unidimensional e matrizes agindo sobre diferentes sítios comutam.

O primeiro termo na equação (3.2) é a representação por operador do termo original de interação spin-spin, de vizinhos mais próximos, na direção z ("espacial"), enquanto que o termo envolvendo $\sigma_1(n)$ resulta do processo de tomar o espaçamento da rede na direção t ("tempo") como sendo zero.

A constante de acoplamento em (3.2) está diretamente relacionada com a temperatura de tal modo que, dependendo de seu valor, podemos identificar as fases do sistema. Em particular^[15,16] $\lambda = 1$ dá o comportamento crítico de (3.2), $\lambda > 1$ corresponde a fase de baixas temperaturas e $\lambda < 1$ corresponde à outra fase, a de altas temperaturas.

A Hamiltoniana (3.2) pode ser reescrita por uma nova série de variáveis $\mu_i(n^*)$, definida como

$$\mu_1(n^*) = \sigma_3(n)\sigma_3(n+1)$$

(3.4)

$$\mu_3(n^*) = \prod_{n < n^*} \sigma_1(n)$$

onde os $\mu_i(n^*)$'s são definidos sobre sítios de uma nova rede, chamada de *rede dual*, cujos sítios estão sobre as ligações da rede normal (fig. 3.2).

O operador $\mu_1(n^*)$ descreve o estado mútuo de dois σ 's vizinhos, enquanto que $\mu_3(n^*)$ gira todos os spins à esquerda do sítio n .

Os operadores $\mu_i(n^*)$'s e $\sigma_i(n)$'s satisfazem a mesma álgebra de Pauli e em particular, $\mu_3(n^*)$ e $\sigma_3(n)$ satisfazem a seguinte álgebra, chamada de *álgebra dual*

$$\mu_3(n^*)\sigma_3(n) = \begin{cases} -\sigma_3(n)\mu_3(n^*) & , n \leq n^* \\ \sigma_3(n)\mu_3(n^*) & , n > n^* \end{cases} \quad (3.5)$$

Figura 3.2: Rede dual em 1-dimensão. $\circ$ = sítios da rede original, $\star$ = sítios da rede dual.

Usando a definição para os operadores μ_i 's (3.4), a Hamiltoniana dada em (3.2) pode ser reescrita completamente em termos das novas variáveis $\mu_i(n^*)$

$$H = \lambda \left[- \sum_{n^*} \mu_1(n^*) - \frac{1}{\lambda} \sum_{n^*} \mu_3(n^*)\mu_3(n^* - 1) \right] \quad (3.6)$$

que fora o fator λ em frente do parenteses, é idêntica à equação (3.2) com $\lambda \leftrightarrow \lambda - 1$, ou seja, podemos escrever

$$H(\sigma; \lambda) = \lambda H(\mu; \lambda^{-1}) \quad (3.7)$$

Com os μ 's e σ 's satisfazendo a mesma álgebra, a relação acima evidencia que o modelo de Ising em $d=2$ é *autodual*, ou seja, o comportamento à altas temperaturas ($\lambda < 1$) e o comportamento à baixas temperaturas ($\lambda > 1$) são em um certo sentido equivalentes.

Escrevendo λ em termos da formulação na rede bidimensional original da teoria, pode-se demonstrar facilmente que o ponto $\lambda = 1$ corresponde à correta temperatura dual (ponto crítico) do modelo de Ising bidimensional.

Um pouco de reflexão revela que os μ 's podem ser interpretados como sendo *operadores desordem*. Enquanto que um autoestado de $\sigma_3(n)$ é um estado no qual o spin em um sítio n tem uma orientação definida, um autoestado de $\mu_3(n^*)$ é uma superposição de estados em que todos os spins à esquerda da ligação (sítio dual) n^* tem orientação oposta. Pode-se então mostrar que^[15], na fase ordenada do sistema (baixas temperaturas, $\lambda > 1$)

$$\langle \sigma_3(n) \rangle \neq 0$$

(3.8)

$$\langle \mu_3(n^*) \rangle = 0$$

enquanto que na fase desordenada (altas temperaturas, $\lambda < 1$)

$$\langle \sigma_3(n) \rangle = 0$$

(3.9)

$$\langle \mu_3(n^*) \rangle \neq 0$$

$\sigma_3(n)$ representa então um parâmetro de ordem, medindo a quantidade de ordem do sistema, enquanto que $\mu_3(n^*)$ pode ser interpretado como sendo um parâmetro de desordem, medindo quão desordenado é o sistema.

Uma vez que $\mu_3(n^*)$ gira todos os spins à esquerda do sítio n , então $\mu_3(n^*)$ agindo sobre um estado ordenado, cria uma configuração de spin ortogonal a este, ou seja, cria uma configuração do tipo kink, ou parede de Bloch, que é nada mais que a excitação topológica do modelo de Ising. E das equações (3.8) e (3.9), podemos interpretar a transição de fase em $\lambda = 1$ ($\langle \sigma_3 \rangle_{\lambda > 1} \neq 0$ para $\langle \sigma_3 \rangle_{\lambda < 1} = 0$) como sendo resultado da condensação dessas excitações topológicas no sistema, desordenado-o (fig. 3.3).

Figura 3.3: (a) um estado de vácuo em $T=0$, em que todos os spins são por exemplo “up”, representado por $|0\rangle_{T=0}$. (b) $\mu_3(n^*)$ agindo nesse estado gira todos os spins à esquerda do sítio dual n^* , criando uma configuração do tipo *kink*. (c) representação analoga de um “*antikink*”. (d) O condensado kink-antikink em $\lambda = 1$ ($\langle \sigma_3 \rangle = 0$).

Da figura 3.3 (b) vemos que a configuração de spins criada por $\mu_3(n^*)$ num estado de vácuo é uma configuração estável, pois necessitamos de uma quantidade de energia infinita para restaurar a configuração inicial, fig. 3.3(a). Além disso a configuração representada na figura 3.3(b) é tal que interpola exatamente os dois vácuos da teoria (a de spin “up” e a de spin “down”). $\mu_3(n^*)$ representa então um operador de criação de excitações topológicas, que neste sistema são excitações do tipo kink, estabelecendo então uma profunda relação entre operadores desordem e as excitações topológicas de um dado sistema.

3.2 Funções de Correlação de Variáveis Desordem

O conceito de variáveis desordem foi primeiramente introduzido por Kadanoff e Ceva^[14]. Naquele trabalho eles prescreveram um método de calcular funções de correlações envolvendo variáveis desordem, o qual exporemos abaixo e cujas idéias serão básicas, posteriormente, na construção de funções de correlação envolvendo campos quânticos de sólitons.

Consideremos o modelo de Ising dado pela equação (3.1) com variáveis de spin $\sigma(n)$ definidas nos sítios n da rede bidimensional original, (fig. 3.1). Definindo agora uma rede dual de sítios n^* , tal que cada sítio n^* esteja localizado no centro de cada plaqueta da

rede original (fig.3.4).

Figura 3.4: Representação dos sítios da rede original n e da rede dual n^* . $\hat{r}_\mu = (\hat{r}_z, \hat{r}_t)$ é o versor unitário da rede.

Sobre os sítios da rede dual definimos então a variável desordem $\mu(n^*)$ com as propriedades descritas na seção anterior, ou seja, de girar um número infinito de spins, à esquerda do sítio dual n^* , que traduzida para nossa rede bidimensional, equivale a trocar o sinal da constante de acoplamento β_t ao longo de uma linha reta, na direção $\hat{n}_z$, do ponto n^* ao infinito.

Kadanoff e Ceva^[14], definem então a função de correlação desordem $\langle \mu \mu \rangle$ da seguinte forma

$$\langle \mu(n_1^*) \mu(n_2^*) \rangle = \sum_{\{\sigma\}} e^{-S'(\sigma)} \quad (3.10)$$

onde

$$S'(\sigma) = \begin{cases} S(\sigma; \beta_z, \beta_t) & ; \hat{r}_\mu \notin c \\ S(\sigma; -\beta_z, \beta_t) \text{ ou } S(\sigma; \beta_z, -\beta_t) & ; \hat{r}_\mu \in c \end{cases} \quad (3.11)$$

onde c é uma curva arbitrária ligando os pontos n_1^* e n_2^* , cortando as ligações da rede original, de tal modo que $S'(\sigma)$ em (3.10) é definido ser o mesmo que em (3.1) para ligações da rede não cortadas por essa curva c e para as ligações da rede cortadas por

c $S'(\sigma)$ é definida com a constante de acoplamento, da respectiva ligação, com o sinal trocado ($\beta_z \rightarrow -\beta_z$ ou $\beta_t \rightarrow -\beta_t$, dependendo da ligação cortada por c).

Nas ligações que não são cortadas por c, a constante de acoplamento é positiva e os spins conectados por estas ligações são energeticamente favoráveis à serem iguais. Nas ligações cortadas por c, a constante de acoplamento troca de sinal e os spins conectados por estas ligações são então energeticamente favoráveis à serem opostos. Portanto a reversão da constante de acoplamento tende a introduzir uma parede de Bloch ou Kink no sistema.

Podemos então escrever (3.10) como

$$\langle \mu(n_1^*) \mu(n_2^*) \rangle = \sum_{\{\sigma\}} e^{-S(\sigma) + 2S_c(\sigma)} \quad (3.12)$$

onde

$$S_c(\sigma) = \begin{cases} S(\sigma) & \text{com } \begin{cases} \beta_z \rightarrow -\beta_z \text{ ou} \\ \beta_t \rightarrow -\beta_t \end{cases} & ; \hat{r}_\mu \in c \\ 0 & ; \hat{r}_\mu \notin c \end{cases} \quad (3.13)$$

Uma vez que as variáveis sigma são variáveis muda ,e que $S(\sigma)$ possui a invariância de simetria

$$\sigma(n) \rightarrow -\sigma(n) \quad (3.14)$$

Se tomarmos uma segunda curva c' ligando n_1^* e n_2^* , e dentro da região limitada por $c - c' = \Gamma$ (Fig. 3.5), fazemos a mudança de variável (3.14). Uma vez que a soma $\sum_{\{\sigma\}}$ é invariante sob esta mudança, obteremos que

$$\langle \mu(n_1^*) \mu(n_2^*) \rangle_c = \langle \mu(n_1^*) \mu(n_2^*) \rangle_{c'} \quad (3.15)$$

ou seja, a função de correlação de variáveis desordem são independentes da escolha de caminho tomada.

Podemos igualmente definir funções de correlação mistas, como por exemplo

$$\langle \sigma(n_1) \mu(m_1^*) \sigma(n_2) \mu(m_2^*) \rangle = \sum_{\{\sigma\}} e^{-S(\sigma) + 2S_c(\sigma)} \sigma(n_1) \sigma(n_2) \quad (3.16)$$

Figura 3.5: Curva c e c' unindo os sítios de rede dual n_1^* e n_2^* . Γ é a área limitada por c e c' .

onde c é a curva que liga os pontos m_1^* e m_2^* da rede dual. Independência de caminho é obtida, desde que c não seja deformada sobre os pontos n_1 e n_2 (neste caso $\sigma(n_1)$ e $\sigma(n_2)$ não são variáveis mudas), podendo a função de correlação mudar de sinal cada vez que isso acontece.

3.3 Ordem-Desordem em Teorias de Campo no Contínuo (1+1D)

Vamos mostrar nessa seção como as propriedades das variáveis ordem-desordem, expostas acima, podem ser generalizadas para o caso de teorias de campo no contínuo e que admitem soluções não-triviais, relacionadas com setores superselecionados do espaço de Hilbert (ver Capítulo 2), ou seja, excitações topológicas. Essa generalização foi primeiro realizada por Marino e Swieca^[17], em que foi mostrado que o operador de Mandelstam poderia ser escrito como o produto de variáveis ordem e desordem do modelo de sine-Gordon e posteriormente generalizado para um sistema de 1+1D de campos escalares complexos de simetria $Z(N)$, partindo da analogia entre a representação com integrais de trajetória no espaço Euclidiano do funcional de vácuo e a função de partição de um sistema de Mecânica Estatística, construindo assim as funções de correlação de

variáveis desordem^{[17],[18]}.

Para começar, consideremos inicialmente o caso mais simples de uma teoria quântica de campo, no espaço-tempo contínuo 1+1D, dada pela densidade de Lagrangeana $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$, onde $\phi(x)$ é um campo escalar complexo e com a teoria possuindo uma simetria do tipo

$$\phi(x) \rightarrow g(\alpha)\phi(x) \quad (3.17)$$

para o caso de ser discreta (multiplicativa) ou

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \alpha \quad (3.18)$$

caso seja aditiva.

Por exemplo, no caso de $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ ser invariante por uma simetria $Z(N)$, a simetria será multiplicativa com $g(\alpha)$ em (3.17) dado por $e^{i\frac{2\pi}{N}}$. No caso do modelo de sine-Gordon, por exemplo

$$\mathcal{L}_{sG} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^4}{\lambda} \left(\cos \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \phi - 1 \right) \quad (3.19)$$

a simetria será do tipo (3.18), ou seja, $\phi(x) \rightarrow \phi(x) + 2\pi \frac{m}{\sqrt{\lambda}}$.

Se $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ possui uma estrutura de vácuo não-trivial, então podemos ter excitações topológicas na teoria. Se representarmos o operador dessas excitações topológicas por $\mu(x)$ e o interpretarmos com tendo as mesmas propriedades da variável desordem μ dada na seção 3.2, podemos então estabelecer uma álgebra dual analoga a dada em (3.5), na qual uma das operações de simetria (3.17) ou (3.18), é levada em conta :

$$\mu(x, t) \phi(y, t) = e^{i\alpha\theta(y-x)} \phi(y, t) \mu(x, t) \quad (3.20)$$

ou

$$\mu(x, t) \phi(y, t) = [\phi(y, t) + \alpha\theta(y-x)] \mu(x, t) \quad (3.21)$$

para os casos de simetria multiplicativa e aditiva respectivamente. $\theta(z)$ é a função de Heaviside.

Definindo as funções de correlação envolvendo os operadores $\mu(x, t)$ como

$$\langle \mu(x) \mu^*(y) \rangle = Z^{-1} [0] \int D\phi D\phi^* \exp \left\{ - \int d^2 z \left[\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) + \int_{x,c}^y \Psi_\mu \delta^2(z - \xi) \epsilon^{\mu\nu} d\xi_\nu + \mathcal{L}_c \right] \right\} \quad (3.22)$$

onde Ψ_μ é um funcional dos campos, $\mathcal{L}_c$ é um possível contratermo de renormalização e $Z[0]$ é o funcional do vácuo. c é uma curva arbitrária unindo os pontos x e y . Como no caso de funções de correlação de Kadanoff-Ceva, impomos que (3.22) é invariante de caminho, tal que, do mesmo modo como foi mostrado a invariância na seção anterior, podemos construir um segundo caminho c' unindo x e y e dentro da região limitada por c e c' , aplicamos a operação de simetria do problema.

Por exemplo supondo invariância do tipo (3.17), a operação de simetria sera dada por

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha\theta(\Gamma)} \phi(x) \quad (3.23)$$

onde $\Gamma = c - c'$ e $\theta(\Gamma)$ é a função de Heaviside com suporte em Γ (fig. 3.6).

A operação (3.23) deve modificar a Lagrangeana e o funcional Ψ_μ para

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \delta\mathcal{L} \quad (3.24)$$

$$\Psi_\mu \rightarrow \Psi_\mu + \delta\Psi_\mu$$

e supomos $\mathcal{L}_c$ invariante de caminho.

Figura 3.6: Figura esquemática das curvas c e c' e da área englobada Γ .

Neste processo a imposição de invariância de caminho da função de correlação permite obter as funções Ψ_μ e $\mathcal{L}_c$ e de (3.22), obter explicitamente o operador quântico de desordem

(ou de s3lton) $\mu(x)$ ^{[17],[18]}. Em particular permite mostrar que a fun33o de correla33o (3.22) pode ser descrita por um acoplamento m3nimo do campo escalar complexo ϕ , com um campo externo $\tilde{A}_\mu$, equivalente 3 um potencial tipo Bohm-Aharonov. Para o caso geral de fun33es de correla33o de v3rios pontos, esta pode ser descrita da forma (simetria multiplicativa):

$$\langle \mu(x_1) \dots \mu(x_n) \mu^*(y_1) \dots \mu^*(y_m) \rangle = Z^{-1} [0] \int D\phi D\phi^* e^{-S[\phi, \phi^*, \tilde{D}_\mu \phi, (\tilde{D}_\mu)^*]} \quad (3.25)$$

onde

$$\tilde{D}_\mu = \partial_\mu - i\alpha \tilde{A}_\mu(z; x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m) \quad (3.26)$$

e

$$\tilde{A}_\mu(z; x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m) = \sum_{i=1}^n \int_{x_i, c_i}^\infty \epsilon_{\mu\nu} \delta^2(z - \xi) d\xi^\nu - \sum_{j=1}^m \int_{y_j, c_j}^\infty \epsilon_{\mu\nu} \delta^2(z - \xi) d\xi^\nu \quad (3.27)$$

onde S 3 a a33o Euclideana. (3.26) representa o acoplamento m3nimo e os potenciais externos de Bohm-Aharonov est3o dados em (3.27). c_i, c_j s3o curvas arbitr3rias ligando os pontos x_i, ∞ e y_j, ∞ respectivamente.

Com a fun33o de correla33o colocada da forma acima, pode-se facilmente mostrar que a invari3ncia de caminho 3 nada mais que uma consequ3ncia de invari3ncia de gauge ^{[17],[18]}

Como exemplo do procedimento acima, vamos considerar o caso bem conhecido dos kinks do modelo de sine-Gordon, eq.(3.19), e obter o operador desordem $\mu(x)$ correspondente e obter ent3o o operador de Mandelstam.

Neste caso $L(\phi, \partial_\mu \phi)$ em (3.22) 3 dada pela Lagrangeana de sine-Gordon (3.19), que possui a simetria aditiva $\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \frac{2\pi m}{\sqrt{\lambda}}$. A fim de podermos aplicar o m3todo exposto acima, definimos a seguinte vari3vel ordem $\sigma(x)$ para o modelo de sine-Gordon

$$\sigma(x) = \frac{2m}{\sqrt{\lambda}} e^{i\frac{\sqrt{\lambda}}{2m}\phi(x)} \quad (3.28)$$

e a Lagrangeana (3.22) reescrita em termos de $\sigma(x)$ fica ent3o dada por

$$\mathcal{L}_{sG}(\sigma, \partial_\mu \sigma) = \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma^* - \frac{m^2}{8} (\sigma^2 + (\sigma^*)^2) + \frac{m^4}{\lambda} \quad (3.29)$$

com a simetria se tornando agora multiplicativa :

$$\sigma(x) \rightarrow e^{i\pi} \sigma(x) = -\sigma(x) \quad (3.30)$$

Podemos então construir uma variável dual $\mu(x)$, tal que $\mu(x)$ e $\sigma(x)$ satisfaçam uma algebra dual analoga à (3.20), com $\alpha = \pi$, e com função de correlação dada por (3.22).

De (3.22), as funções Ψ_μ e $\mathcal{L}_c$, são determinadas aplicando a operação de simetria (3.30) na região Γ representada na fig. 3.6 :

$$\sigma(x) \rightarrow e^{i\pi\theta(\Gamma)} \sigma(x) \quad (3.31)$$

A transformação acima modifica a Lagrangeana (3.29) para

$$\mathcal{L}_{sG} \rightarrow \mathcal{L}_{sG} + i\frac{\pi}{2}(\sigma\partial_\mu\sigma^* - \sigma^*\partial_\mu\sigma)\partial^\mu\theta(\Gamma) + \frac{\pi^2}{2}\partial_\mu\theta(\Gamma)\partial^\mu\theta(\Gamma) \quad (3.32)$$

onde

$$\partial_\mu\theta(\Gamma) = \oint_{\Gamma=c-c'} \delta^2(z - \xi) \epsilon_{\mu\nu} d\xi^\nu \quad (3.33)$$

e com (3.31) o funcional Ψ_μ é modificado para

$$\Psi \rightarrow \Psi + \delta\Psi_\mu$$

Reescrevendo $\int_{x,c}^y \Psi_\mu \delta^2(z - \xi) \epsilon^{\mu\nu} d\xi_\nu$ da forma $\left[\int_{x,c'}^y + \oint_\Gamma \right] \Psi_\mu \delta^2(z - \xi) \epsilon^{\mu\nu} d\xi_\nu$, impondo a invariancia de caminho, ou seja, $\langle \mu\mu^* \rangle_c = \langle \mu\mu^* \rangle_{c'}$ e o cancelamento de termos contendo uma integração do tipo $\oint_\Gamma$, obteremos para os funcionais Ψ_μ e $\mathcal{L}_c$, aparecendo em (3.22), as expressões

$$\Psi_\mu = -i\frac{\pi}{2}(\sigma\partial_\mu\sigma^* - \sigma^*\partial_\mu\sigma) \quad (3.35)$$

e

$$\mathcal{L}_c = \frac{1}{2}\pi^2\sigma^*\sigma \int_{x,c}^y d\xi^\mu \int_{x,c}^y d\eta_\mu \delta^2(z-\xi)\delta^2(z-\eta) \quad (3.36)$$

Substituindo (3.35) e (3.36) de volta em (3.22), encontramos a função de correlação invariante de caminho c :

$$\begin{aligned} \langle \mu(x)\mu^*(y) \rangle_c &= Z^{-1} [0] \int D\sigma D\sigma^* \exp \left\{ - \int d^2z \left[\mathcal{L}_{sG}(\sigma, \partial^\mu \sigma) - i\frac{\pi}{2}(\sigma \partial_\mu \sigma^* - \sigma^* \partial_\mu \sigma) \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. \int_{x,c}^y \delta^2(z-\xi) \epsilon^{\mu\nu} d\xi_\nu + \frac{1}{2}\pi^2\sigma\sigma^* \int_{x,c}^y d\xi^\mu \delta^2(z-\xi) \int_{x,c}^y d\eta_\mu \delta^2(z-\xi) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Introduzindo o campo externo $\tilde{A}_\mu$ dado por

$$\tilde{A}_\mu(z; x, y) = \int_{x,c}^y \epsilon_{\mu\nu} \delta^2(z-\xi) d\xi^\nu \quad (3.38)$$

podemos reescrever (3.37) na forma compacta, semelhante à (3.25),

$$\langle \mu(x)\mu^*(y) \rangle_c = Z^{-1} [0] \int D\sigma D\sigma^* \exp \left\{ - \int d^2z \left[\mathcal{L}_{sG}(\sigma, \tilde{D}^\mu \sigma) \right] \right\} \quad (3.39)$$

onde $\tilde{D}^\mu = \partial^\mu - i\pi \tilde{A}^\mu(z; x, y)$.

De $\langle \mu\mu^* \rangle_c$, podemos ainda obter a realização operatorial explícita para $\mu(x)$, tal que no espaço de Minkowski é dada por

$$\mu(x) = \exp \left[-\frac{\pi}{2} \int_{x,c}^\infty \epsilon^{\mu\nu} (\sigma \partial_\mu \sigma^* - \sigma^* \partial_\mu \sigma) d\xi_\nu \right] \quad (3.40)$$

Reescrevendo $\sigma(x)$ em termos do campo bosônico $\phi(x)$, dado em (3.28), e tomando a curva c como estando totalmente contida no eixo espacial x_1 , obteremos para $\mu(x)$:

$$\mu(x) = \exp \left[i \frac{2\pi m}{\sqrt{\lambda}} \int_x^\infty \dot{\phi}(z, t) dz \right] \quad (3.41)$$

Se consideramos os produtos entre os operadores ordem $\sigma(x)$ e desordem $\mu(x)$, $\Psi_1(x) = \sigma(x)\mu(x)$ e $\Psi_2(x) = \sigma^*(x)\mu(x)$,

$$\Psi_1(x, t) = \exp \left[2\pi i \beta^{-1} \int_x^\infty d\xi \dot{\phi}(\xi, t) + i \frac{1}{2} \beta \phi(x, t) \right] \quad (3.42)$$

$$\Psi_2(x,t) = \exp \left[2\pi i \beta^{-1} \int_x^\infty d\xi \dot{\phi}(\xi,t) - i \frac{1}{2} \beta \phi(x,t) \right]$$

onde $\beta^{-1} = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}$.

Se compararmos (3.42) com o operador fermiônico de Mandelstam $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$, vemos então que ambos possuem a mesma forma, à menos da normalização para a função Ψ .

3.4 Ordem-Desordem em 2+1D – Operadores Quânticos não-Locais para Vórtices

Como vimos acima, para a quantização de excitações topológicas em 1+1D, as ideias de dualidade ordem-desordem da Mecânica Estatística podem ser generalizadas de modo que os operadores de criação de tais excitações podem ser introduzidos através de certas relações de comutação destas com os campos lagrangeanos básicos, a qual chamamos de *algebra dual*. Estes operadores aparecem então como sendo os analogos, em teoria de campos no contínuo, das variáveis desordem da Mecânica Estatística.

No caso de kinks em 1+1D, a algebra dual (por exemplo (3.20) com $\alpha = \pi$) é tal que a comutação do campo de kink (operador desordem) $\mu(x,t)$ com o campo escalar lagrangeano $\phi(y,t)$, à tempos iguais, aplica a $\phi(y,t)$ o comportamento à longas distâncias da solução de kink clássica, ou seja, $\mu(x,t)$ aplica em $\phi(y,t)$ a operação de simetria do modelo, caso o ponto x esteja à esquerda ou à direita do ponto y :

$$\mu(x,t)\phi(y,t) = \begin{cases} e^{i\pi}\phi(y,t)\mu(x,t) & ; x < y \\ \phi(y,t)\mu(x,t) & ; x > y \end{cases} \quad (3.43)$$

Observe que a algebra dual acima baseia-se fortemente no conceito de y estar à esquerda ou à direita de x , que é um conceito perfeitamente bem definido em uma dimensão espacial.

Quando passamos a considerar sistemas de dimensão espacial maior que 1, o conceito de $\vec{y}$ estar à direita ou a esquerda de $\vec{x}$, não faz mais sentido. Para então sabermos que tipo de operador de sóliton devemos utilizar, lembremos de um fato importante à respeito da topologia dos sólitons, discutida no Capítulo 2. Lá havíamos mostrado que as configurações de campo não-triviais (de sóliton) eram construídas impondo uma condição

de contorno, à longas distâncias, para os campos lagrangeanos, de tal modo que equivalia à um mapeamento na esfera S_{D-2} (D é a dimensão do espaço-tempo), tomada no infinito.

Para podermos então definir uma algebra semelhante à (3.43) para sistemas de dimensão maior que $1+1D$, devemos passar a definir os operadores desordem em superfícies S_{D-2} dimensionais, de modo que a topologia das soluções de sóliton possam ser implementadas sem ambiguidades. Os operadores de criação de excitações topológicas passam então à serem operadores não-locais, em dimensões espaciais maior que 1.

Um exemplo em $2+1D$, de um operador não-local, é o caso do operador loop de Wilson^[20] $W(c)$ definido por

$$W(c) = Tr P \exp \left\{ ig \oint_c A_\mu(x) dx^\mu \right\} \quad (3.44)$$

onde P é um operador que ordena os campos de gauge A_μ ao longo da curva c .

Em 1978, 't Hooft mostrou que em uma teoria $SU(N)$, $W(c)$ satisfazia uma algebra dual ordem-desordem com o campo de Higgs ϕ , dada por^[37]

$$W(c)\phi(x) = \begin{cases} e^{i\frac{2\pi}{N}}\phi(x)W(c) & ; x \in S(c) \\ \phi(x)W(c) & ; x \notin S(c) \end{cases} \quad (3.45)$$

onde c é uma curva tipo espaço, $S(c)$ é a área limitada por c . x e c são tomados à tempos iguais. (3.45) pode então ser interpretada no contexto da teoria $Z(N)$, com campos fundamentais ϕ , e $W(c)$ como sendo o equivalente de um operador desordem, no caso é não-local, que aplica ou não a operação de simetria em $\phi(x)$, dependendo de x estar ou não contido em $S(c)$. Dentro desse contexto, a teoria acima foi analisada por Aragão et. al.^[38], no formalismo da teoria dual e utilizando o procedimento desenvolvido neste capítulo, na obtenção do operador desordem, ou seja, o operador loop de Wilson, em cálculo de valores esperados deste operador, tomado como sendo não-local, obtendo conclusões à respeito das fases (confinante e não-confinante) da teoria de Yang-Mills em $2+1D$.

Na ref.[19], uma descrição da teoria quântica de vórtices em $2+1D$ foi feita, baseando-se numa algebra que generaliza (3.43), introduzindo um operador quântico de criação de vórtices $\mu(c)$, não-local como o operador loop de Wilson, cujo método^[19] iremos descrever abaixo e que sera a base dos cálculos e resultados do próximo capítulo.

Consideremos então o modelo de Higgs Abeliano em 2+1D, dado por (2.16)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - m^2\phi\phi^* - \frac{\lambda}{4}(\phi\phi^*)^2 \quad (3.46)$$

onde $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$, A_μ sendo o campo “eletromagnético” e e , a carga elétrica. Para $m^2 > 0$ o sistema esta na fase simétrica (ou desordenada), onde $\langle\phi\rangle = 0$. Para $m^2 < 0$, o campo de Higgs desenvolve um valor esperado no vácuo não nulo e o fóton adquire uma massa M via mecanismo de Higgs ($M^2 = e^2\langle\phi\rangle^2$, $\langle\phi\rangle^2 = 4\frac{|m^2|}{\lambda}$). Nós iremos chamar esta fase de fase ordenada ou *fase “quebrada”*¹.

Como vimos no capítulo 2, seção 2.2, o modelo acima, para $m^2 < 0$, possui soluções clássicas com o comportamento à longas distâncias

$$\phi(\vec{x}, t) \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} |\phi_0| e^{i\arg(\vec{x})} \quad (3.47)$$

$$A_i(\vec{x}, t) \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} -\frac{1}{e}\partial_i \arg(\vec{x})$$

onde $\arg(\vec{x})$ é o ângulo que o vetor $\vec{x}$ faz com algum eixo arbitrário no plano (x_1, x_2) (por exemplo, o eixo x_1). À essas soluções, denominamos de *soluções de vórtices*.

Vimos também que o modelo de Higgs Abeliano possui a corrente topológica identicamente conservada

$$j^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \quad (3.48)$$

com a correspondente carga topológica

$$Q = \int d^2x j^0 = \int d^2x B = \oint_c A_i dx_i \quad (3.49)$$

que é nada mais que o fluxo magnético que atravessa o plano espacial (x_1, x_2) . Tomando c em (3.49) no infinito espacial e de (3.47) obtemos então que os vórtices possuem uma carga topológica não-nula.

¹note que apesar de comumente chamada deste modo, devemos lembrar que pelo teorema de Elitzur^[39], simetrias de gauge locais, no caso $U(1)$, nunca são realmente quebradas.

A definição do operador de vórtice, dentro do formalismo ordem-desordem, deve ser tal que leve em conta o comportamento assintótico (3.47), na construção da álgebra dual, de modo que o mesmo aplique aos campos lagrangeanos ϕ e $\vec{A}$, o comportamento à longas distâncias das soluções clássicas de vórtice (que garantem sua estabilidade).

Como havíamos introduzido no começo desta seção, os operadores de vórtice precisam então ser definidos sobre uma determinada curva plana c , uma vez que sómente neste caso existe um mapeamento equivalente, entre o comportamento assintótico das soluções clássicas e a álgebra resultante. Portanto a álgebra dual que generaliza (3.43) precisa envolver os campos lagrangeanos $\phi(\vec{x})$ e $A_i(\vec{x})$ e um operador não-local de vórtice $\mu(c)$, que é definido sobre uma certa curva plana c . Os conceitos de estar à direita ou à esquerda, são então trocados pelos de estar dentro ou fora de c .

A álgebra dual resultante, entre os campos lagrangeanos $\phi(\vec{x})$ e $A_i(\vec{x})$ e o operador de vórtice $\mu(c)$, que leva em consideração o comportamento assintótico (3.47), pode ser introduzida via as relações de comutação à tempos iguais^[19]

$$\mu(\vec{x}, t; c) \phi(\vec{y}, t) = \begin{cases} e^{i \arg(\vec{y} - \vec{x})} \phi(\vec{y}, t) \mu(\vec{x}, t; c) & ; \vec{y} \notin T_x(c) \\ \phi(\vec{y}, t) \mu(\vec{x}, t; c) & ; \vec{y} \in T_x(c) \end{cases} \quad (3.50)$$

$$\mu(\vec{x}, t; c) A_i(\vec{y}, t) = \begin{cases} [A_i(\vec{y}, t) - \frac{1}{e} \partial_i^y \arg(\vec{y} - \vec{x})] \mu(\vec{x}, t; c) & ; \vec{y} \notin T_x(c) \\ A_i(\vec{y}, t) \mu(\vec{x}, t; c) & ; \vec{y} \in T_x(c) \end{cases}$$

Nestas expressões, c é uma curva plana contida no plano $t = \text{constante}$. $T_x(c)$ é a superfície mínima limitada por c . $\vec{x}$ é um ponto pertencente a $T_x(c)$ e determina o centro do vórtice, isto é, é o ponto em relação ao qual o ângulo $\arg(\vec{y} - \vec{x})$ é definido. Este ângulo é medido com respeito à uma direção arbitrária $\hat{r}_0$ (ver fig. 3.7, abaixo). Sem perda de generalidade, nós podemos escolher $\hat{r}_0$ apontando na direção x_1 .

Devemos lembrar que a escolha da função $\arg(\vec{x})$ em (3.47) e (3.50) não é por acaso. Da discussão na seção 2.2, capítulo 2, a função $\arg(\vec{x})$ é exatamente uma função de gauge singular, que garante a estabilidade do vórtice e que possui classe de homotopia com índice topológico $n=1$.

Assim como foi possível definir uma função de correlação para operadores de kinks em 1+1D, podemos igualmente, seguindo as ideias de Kadanoff e Ceva^[14], definir a função de

Figura 3.7: Geometria para o operador de vórtice $\mu(x; c)$.

correlação de dois pontos em 2+1D, para os operadores de vórtice $\mu(x; c)$, que satisfazem a álgebra dual (3.50). Note que em 1+1D a geometria considerada na construção da ação efetiva em $\langle \mu(x) \mu^*(y) \rangle$ era apenas a de uma curva arbitrária ligando os pontos x e y . No caso de 2+1D, a função de correlação $\langle \mu(x; c_1) \mu^*(y; c_2) \rangle$, envolve não somente uma curva ligando os pontos x e y , mas também elementos geométricos envolvendo as curvas c_1 e c_2 , conforme especificado na (fig. 3.8).

Da figura 3.8, podemos generalizar a função de correlação (3.22) em 1+1D, para o caso de operadores desordem em 2+1D, da seguinte forma (modelo de Higgs Abelian)

$$\langle \mu(x; c_1) \mu^*(y; c_2) \rangle = Z^{-1} [0] \int D\phi D\phi^* DA_\mu \exp \left\{ - \int d^3z \mathcal{L}_{eff}^E \right\} \quad (3.51)$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff}^E &= \mathcal{L}_{Higgs}^{Eucl.} + \int_{S(c_1, c_2)} d^2\xi^\mu \Psi_\mu \delta^3(z - \xi) + \int_{x, L}^y d\eta^\mu \Phi_\mu(S) \delta^3(z - \eta) + \\ &+ \int_{T(c_1 \cup c_2)} d^2\xi^\mu \Xi_\mu \delta^3(z - \xi) + \mathcal{L}_c \end{aligned} \quad (3.52)$$

onde $\mathcal{L}_{Higgs}^{Eucl.}$ é a densidade de Lagrangeana Euclideana (3.46). $S(c_1, c_2)$ é uma superfície arbitrária ligando c_1 e c_2 ($\partial S = c_1 \cup c_2$), $T(c_1)$ e $T(c_2)$ são as superfícies mínimas limitadas por c_1 e c_2 respectivamente e L é uma curva conectando os pontos x e y (ver fig. 3.8). Ψ_μ, Φ_μ e Ξ_μ são, como antes, funcionais dos campos e $\mathcal{L}_c$ é o contratermo de renormalização, introduzido de modo a compensar eventuais singularidades que podem vir dos termos de superfície e de linha. $\Psi_\mu, \Phi_\mu, \Xi_\mu$ e $\mathcal{L}_c$ são determinados impondo agora

invariância de superfície S e caminho L , generalizando assim o procedimento realizado em 1+1D.

Figura 3.8: Elementos geométricos envolvidos na especificação da função de correlação $\langle \mu(x; c_1) \mu^*(y; c_2) \rangle$.

Como resultado final, obtemos que a Lagrangeana efetiva em (3.51) pode ser reescrita, como no caso de kinks em 1+1D, em termos de um campo externo $\tilde{A}_\mu$, na forma compacta^[19]

$$\mathcal{L}_{eff}^E = \mathcal{L}_{Higgs}^{Eucl.} [F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu} + \tilde{F}_{\mu\nu}(S)] = \frac{1}{4} (F_{\mu\nu} + \tilde{A}_{\mu\nu}(S))^2 + |D_\mu \phi|^2 + V(\phi) \quad (3.53)$$

onde $\tilde{F}_{\mu\nu}(S) = \partial_\mu \tilde{A}_\nu(S) - \partial_\nu \tilde{A}_\mu(S)$ com $\tilde{A}_\mu(S)$, o campo externo, sendo dado por

$$\tilde{A}_\mu(S) = -\frac{\alpha_L(z; x, y)}{e} \int_{S(c_1, c_2)} d^2 \xi_\mu \delta^3(z - \xi) + \frac{1}{e} [\Theta(V_S) - 1] \partial_\mu \alpha_L(z; x, y) \quad (3.54)$$

onde $\Theta(V_S)$ é a função de Heaviside com suporte em V_S , o volume limitado por $S(c_1, c_2)$, $T(c_1)$ e $T(c_2)$ e $\alpha_L(z; x, y)$ é uma função de gauge pertencente à classe de homotopia com $n=1$, que leva em consideração a topologia do vórtice:

$$\alpha_L(z; x, y) \equiv \Theta(x^0 - z^0) \arg(\vec{z} - \vec{x}) - \Theta(z^0 - y^0) \arg(\vec{z} - \vec{y}) \quad (3.55)$$

Fazendo o deslocamento $A_\mu \rightarrow A_\mu - \tilde{A}_\mu$ na variável de integração, na função de correlação (3.51) com (3.52), obtemos a expressão equivalente^[19]

$$\begin{aligned} \langle \mu(x; c_1) \mu^*(y; c_2) \rangle &= Z^{-1} [0] \int D\phi D\phi^* D A_\mu \exp \left\{ - \int d^3 z \left[\frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 + (\tilde{D}_\mu \phi)^* (\tilde{D}^\mu \phi) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + V(\phi) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.56)$$

onde $\tilde{D}_\mu = \partial_\mu + ie(A_\mu + \tilde{A}_\mu(S))$.

A invariância de superfície em (3.56) como em (3.51), com $\mathcal{L}_{eff}^E$ dado por (3.53), pode ser vista como uma consequência de uma transformação de gauge do tipo

$$A_\mu(z) \rightarrow A_\mu(z) + \frac{1}{e} \partial_\mu [\alpha_L(z; x, y) \Theta(\Delta V)] \quad (3.57)$$

$$\phi(z) \rightarrow e^{-i\alpha_L(z; x, y) \Theta(\Delta V)} \phi(z)$$

tal que

$$A_\mu + \tilde{A}_\mu(S) \rightarrow A_\mu + \tilde{A}_\mu(S') \quad (3.58)$$

$$F_{\mu\nu} + \tilde{F}_{\mu\nu}(S) \rightarrow F_{\mu\nu} + \tilde{F}_{\mu\nu}(S')$$

onde $\Theta(\Delta V)$ em (3.57) é a função de Heaviside 3D com suporte dentro do volume limitado por S e S' , sendo S' uma deformação de $S(c_1, c_2)$.

Através de uma escolha conveniente para a superfície S , que define o campo externo $\tilde{A}_\mu(S)$, podemos obter uma realização explícita para o operador de vórtice. Por exemplo, escolhendo $S(c_1, c_2)$ como sendo dada por $(\mathbb{R}_x^2 - T_x(c_1)) \cup (\mathbb{R}_y^2 - T_y(c_2))$, (fig. 3.9), obteremos para $\mu(x; c)$, via sua função de correlação, a expressão (espaço de Minkowski)^[19]

$$\begin{aligned}\mu(x; c) &= \exp \left\{ -i \int d^3 z F^{\mu\nu} \partial_\mu \tilde{A}_\nu(z; x) \right\} = \\ &= \exp \left\{ i \int d^3 z J^\mu \tilde{A}_\mu(z; x) \right\}\end{aligned}\quad (3.59)$$

onde $J^\mu = ie [\phi^* D^\mu \phi - (D^\mu \phi)^* \phi]$ e

$$\tilde{A}_\mu(z; x) = -\frac{1}{e} \int_{\mathbb{R}_x^2 - T_x(c)} d^2 \xi_\mu \arg(\vec{\xi} - \vec{x}) \delta^3(z - \xi) \quad (3.60)$$

Com a escolha de superfície dada pela (fig. 3.9), $\tilde{A}_\mu(S)$, eq. (3.54), aparecendo em (3.53) e (3.56), fica dado por

$$\tilde{A}_\mu(S) = \tilde{A}_\mu(z; x) - \tilde{A}_\mu(z; y) \quad (3.61)$$

Figura 3.9: Superfície $S(c_1, c_2) = S_x \cup S_y$ onde $S_x = \mathbb{R}_x^2 - T(c_1)$ e $S_y = \mathbb{R}_y^2 - T(c_2)$.

Como $\mathbb{R}_x^2 - T_x(c)$ é uma superfície plana espacial (fig. 3.9), substituindo (3.60) em (3.59), obtemos a realização operatorial para μ em termos dos campos lagrangeanos ϕ e A_μ

$$\mu(\vec{x}, t; c) = \exp \left\{ -\frac{i}{e} \int_{\mathbb{R}_x^2 - T_x(c)} d^2 z \arg(\vec{z} - \vec{x}) \partial_i F^{i0}(\vec{z}, t) \right\} \quad (3.62)$$

ou analogamente, usando a segunda expressão em (3.59)

$$\mu(\vec{x}, t; c) = \exp \left\{ \int_{\mathbb{R}_x^2 - T_x(c)} d^2 z [\phi^*(\vec{z}, t) \pi^*(\vec{z}, t) - \pi(\vec{z}, t) \phi(\vec{z}, t)] \arg(\vec{z} - \vec{x}) \right\} \quad (3.63)$$

onde $\pi = \dot{\phi}^* - ieA^0 \phi^* = (D^0 \phi)^*$ é o momento canonicamente conjugado à ϕ e $\phi^* \pi^* - \pi \phi = \frac{1}{ie} J^0 = [\phi^* D^0 \phi - (D^0 \phi)^* \phi]$. Que (3.62) e (3.63) são equivalentes, pode ser verificado usando a lei de Gauss $\partial_i F^{i0} = J^0$ ($\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$).

Que (3.62) ou (3.63) satisfazem realmente a álgebra dual (3.50), pode ser verificado através da expansão

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \dots$$

para $\mu(x; c)$ mais as relações de comutação canônica entre ϕ, π e A_μ .

Além disso, pode-se também verificar que $\mu(x; c)$ é um operador de interpolação entre setores do espaço de Hilbert, isto é, entre o setor do vácuo e do sóliton, tal que $\mu(x; c)$ e o operador de carga topológica (3.49) satisfazem

$$[\mu(x; c), Q] = \frac{2\pi}{e} \mu(x; c) \quad (3.64)$$

onde $\frac{2\pi}{e}$ é a carga topológica do vórtice ($n=1$).

Capítulo 4

O Espectro de Massa e Funções de Correlação de Vórtices Quânticos no Modelo de Higgs Abelianiano

Neste capítulo é estudado a introdução do campo externo $\tilde{A}_\mu$, necessário para o cálculo da função de correlação de vórtices, tanto na fase de simetria “quebrada” ($m^2 < 0$) como na fase simétrica ($m^2 > 0$), do modelo de Higgs Abelianiano em 2+1D, eq.(3.46), levando em consideração o procedimento de fixação de gauge. Em cada fase obtemos as regras de Feynman, envolvendo o campo externo, e os gráficos de Feynman até a ordem de 1-loop são explicitamente calculados. É obtido também o espectro de massa do vórtice em ambas as fases, fazendo uso do comportamento à longas distâncias da função de correlação de dois pontos de vórtices. Por final analisamos o efeito da introdução de temperatura finita nos cálculos realizados, obtendo o espectro de massa em função da temperatura.

4.1 Introdução do Campo Externo – Regras de Feynman

Consideremos a densidade de Lagrangeana Euclideana do modelo de Higgs Abelianiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) + m^2 \phi^* \phi + \frac{\lambda}{4} (\phi^* \phi)^2 \quad (4.1)$$

Na fase simétrica ($m^2 > 0$) desde que $\langle \phi \rangle = 0$, nós não necessitamos fazer qualquer deslocamento (shift), nos campos em (4.1).

Na fase “*quebrada*” ($m^2 < 0$), nós temos $\langle \phi \rangle \neq 0$. Tomemos para o campo de Higgs ϕ a parametrização $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$ e escolhemos $\langle \phi_1 \rangle = b$ e $\langle \phi_2 \rangle = 0$. Deslocando as componentes reais do campo de Higgs em (4.1) ao redor desses valores de vácuo, nós obtemos (no espaço euclideano)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^B = & \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}M^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}\partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \frac{1}{2}m_1^2 \phi_1^2 + \\ & + \frac{1}{2}\partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 + M A_\mu \partial^\mu \phi_2 + e A_\mu (\phi_1 \partial^\mu \phi_2 - \phi_2 \partial^\mu \phi_1) + \\ & + \frac{1}{2}e^2 A_\mu A^\mu (\phi_1^2 + \phi_2^2) + e M A_\mu A^\mu \phi_1 + \frac{M\lambda}{4e}(\phi_1^2 + \phi_2^2)\phi_1 + \\ & + \frac{\lambda}{16}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Na expressão acima, $M^2 = e^2 b^2$, $m_1^2 = 2|m^2|$ e $b^2 = 4|\frac{m^2}{\lambda}|$. ϕ_1 e ϕ_2 são os campos deslocados (com valor esperado no vácuo igual a zero).

Uma vez que a Lagrangeana (4.1) ou (4.2) apresentam invariância de gauge, devem então passar pelo processo de fixação de gauge para permitir a obtenção de resultados fisicamente relevantes. Iremos adicionar a $\mathcal{L}$ um termo de fixação de gauge $\mathcal{L}_{GF}$, além do correspondente termo de fantasma $\mathcal{L}_{gh}$. Para uma teoria $U(1)$, como é o caso em (4.1), esta complicação extra não é normalmente necessária. Nós o introduzimos com o intuito da possível extensão do procedimento deste capítulo, para o caso não-abeliano de monopólos magnéticos^[21].

Podemos escolher para ambas as fases, a simétrica e a “*quebrada*”, o gauge de Lorentz, tal que no espaço Euclideano temos

$$\mathcal{L}_{GF} = \frac{\xi}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_{gh} = i\bar{\eta}(-\square)\eta \quad (4.3)$$

onde ξ é um parâmetro arbitrário de gauge e η é o campo de fantasma^[40].

Os vários propagadores euclidianos podem ser calculados da parte quadrática de (4.2) junto com (4.3), de onde, levando-se em conta o termo misto $M A_\mu \partial^\mu \phi_2$ em (4.2), obtem-se

$$D_\xi^{\mu\nu}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ik \cdot x} \left[\frac{1}{k^2 + M^2} (\delta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}) + \frac{k^\mu k^\nu}{\xi k^4} \right] \quad (4.4)$$

$$\Delta_2(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ik \cdot x} \left[\frac{1}{k^2} + \frac{M^2}{\xi k^4} \right] \quad (4.5)$$

$$\Delta^\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ik \cdot x} \left[-i \frac{M k^\mu}{\xi k^4} \right] \quad (4.6)$$

$$\Delta_1(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ik \cdot x} \frac{1}{k^2 + M^2} \quad (4.7)$$

onde $D_\xi^{\mu\nu}(x)$ é o propagador do campo de gauge A_μ , $\Delta^\mu(x)$ é o propagador do termo misto $A_\mu \phi_2$, $\Delta_1(x)$ e $\Delta_2(x)$ são, respectivamente, os propagadores dos campos ϕ_1 e ϕ_2 . Na fase simétrica nós temos $M=0$ e $\Delta_1(x)$ e $\Delta_2(x)$ são os mesmos, com $m_1^2 = m_2^2 = m^2$.

Nós agora introduzimos o campo externo $\tilde{A}_\mu$, o qual, como foi visto no Capítulo anterior, é requerido para o cálculo da função de correlação de vórtice. De acordo com (3.53), a função $\langle \mu \mu^* \rangle$ pode ser obtida fazendo a substituição $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}(F_{\mu\nu} + \tilde{F}_{\mu\nu}(x, y))$ na integral funcional em (3.51), onde $\tilde{F}_{\mu\nu}(x, y) = \partial_\mu \tilde{A}_\nu(x, y) - \partial_\nu \tilde{A}_\mu(x, y)$ com $\tilde{A}_\mu(x, y)$ dado por (3.61) (estamos tomando em consideração a superfície S como dada pela (Fig. 3.9)).

Levando-se em consideração o termo de fixação de gauge $\mathcal{L}_{GF}$ e o termo de fantasma $\mathcal{L}_{gh}$, nós devemos então considerar a Lagrangeana $\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{gh}$. Pode-se mostrar que agora a invariância de gauge é mudada para invariância de BRST^[41]. Sob esta simetria, os campos ϕ e A_μ se transformam como

$$\phi(z) \rightarrow e^{-i\omega(z)} \phi(z) ; A_\mu(z) \rightarrow A_\mu(z) + \frac{1}{e} \partial_\mu \omega(z) \quad (4.8)$$

$$\omega(z) = \bar{\rho} \eta(z) + \bar{\eta}(z) \rho$$

Na expressão acima η é o campo de fantasma e ρ é um parâmetro constante de Grassmann^[41].

Escrevendo $\eta(z) = \eta'(z) + \frac{1}{2} f(z) \rho$, onde $f(z)$ é uma função arbitrária, nós podemos sempre expressar $\omega(z) = \omega'(z) + f(z)$ ($\omega' = \omega(\eta \rightarrow \eta')$ e escolhendo $\bar{\rho} \rho = 1$). Vamos escolher agora $f(z) = \alpha_L(z; x, y) \Theta(\Delta V)$, ou seja, o parâmetro da transformação (3.57), e aplicar (4.8) com a correspondente transformação do campo de fantasma^[41], à Lagrangeana

efetiva $\mathcal{L}_{eff}$. O termo $\mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{gh}$ é invariante sob a transformação de BRST (4.8) para todo $\omega^{[41]}$. Assumindo que $\omega'(z)$ é regular, vemos então que $\mathcal{L}$ é submetido as mesmas transformações não-triviais dadas em (3.57), as quais, como, já mencionado, tem o efeito de mudar a superfície na qual $\tilde{A}_\mu$ é definido. Pode-se concluir, portanto, que na presença dos termos $\mathcal{L}_{GF}$ e $\mathcal{L}_{gh}$, nós podemos, através da transformação de BRST acima, levar o campo externo $\tilde{F}_{\mu\nu}(S)$ para $\tilde{F}_{\mu\nu}(S')$ e novamente provar invariância de superfície.

Podemos então escrever a função de correlação $\langle \mu\mu^* \rangle$ como

$$\langle \mu\mu^* \rangle = Z^{-1}[0] \int D\phi D\phi^* DA_\mu D\eta D\bar{\eta} \exp \left\{ -\mathcal{S} [F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu} + \tilde{F}_{\mu\nu}(x, y)] + \mathcal{S}_{GF} + \mathcal{S}_{gh} \right\} \quad (4.9)$$

onde $\mathcal{S}[F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu} + \tilde{F}_{\mu\nu}(x, y)]$ é a ação obtida de (3.53) com $\tilde{F}_{\mu\nu}(S) = \tilde{F}_{\mu\nu}(x, y)$, e com a superfície S definida como na (Fig. 3.9).

Fazendo o deslocamento $A_\mu \rightarrow A_\mu - \tilde{A}_\mu(S)$, na variável de integração, obtemos como em (3.56), a expressão equivalente para a função de correlação:

$$\begin{aligned} \langle \mu\mu^* \rangle = & Z^{-1}[0] \int D\phi D\phi^* DA_\mu D\eta D\bar{\eta} \exp \left\{ -\mathcal{S} [D_\mu \phi \rightarrow \tilde{D}_\mu \phi] + \right. \\ & \left. + \mathcal{S}_{GF} [A_\mu \rightarrow A_\mu - \tilde{A}_\mu(x, y)] + \mathcal{S}_{gh} \right\} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Para o cálculo explícito da função de dois pontos de vórtice, iremos utilizar a forma expressa em (4.10). É importante, portanto, identificar os termos do expoente em (4.10) que envolvem o campo externo $\tilde{A}_\mu(x, y)$.

Vamos escrever o expoente em (4.10) como

$$\mathcal{S}_{eff} = \int d^3z [\mathcal{L}_{eff} + \tilde{\mathcal{L}}_{eff}] \quad (4.11)$$

onde $\tilde{\mathcal{L}}_{eff}$ contém toda a dependencia no campo externo $\tilde{A}_\mu(x, y)$. Então na fase simétrica, de (3.56) e (4.3), obtemos que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_{eff}^S = & ie\tilde{A}_\mu [\phi^* D^\mu \phi - \phi D^\mu \phi^*] + e^2 \tilde{A}_\mu \tilde{A}^\mu \phi^* \phi + \\ & + \frac{\xi}{2} [-2\partial_\mu \tilde{A}^\mu \partial_\nu A^\nu + (\partial_\mu \tilde{A}^\mu)^2] \end{aligned} \quad (4.12)$$

Figura 4.1: Vértices envolvendo o campo externo $\tilde{A}_\mu$ (linha espiralada). As linhas onduladas representam o campo de fóton A_μ , enquanto que as linhas retas representam os campos escalares ϕ_1 e ϕ_2 . $\odot$ e $\otimes$ representam vértices não-derivativos e derivativos, respectivamente.

Na fase de simetria “quebrada”, nós deslocamos o campo de Higgs ao redor do mínimo e introduzimos o campo externo em (4.2). Note que as operações de deslocar o campo ϕ ($\phi \rightarrow \phi + \langle \phi \rangle$) e fazer a mudança de variável $A_\mu \rightarrow A_\mu - \tilde{A}_\mu(x, y)$, comutam.

De (4.2) e (4.3) obtemos então que na fase de simetria quebrada, a dependencia com o campo externo em $\mathcal{L}_{eff}$ é dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_{eff}^B = & -e \tilde{A}_\mu (\phi_1 \partial^\mu \phi_2 - \phi_2 \partial^\mu \phi_1) + \frac{1}{2} [\tilde{A}_\mu \tilde{A}^\mu - 2A_\mu \tilde{A}^\mu] [e^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) + 2eM\phi_1 + M^2] + \\ & + \frac{\xi}{2} [(\partial_\mu \tilde{A}^\mu)^2 - 2\partial_\mu A^\mu \partial_\nu \tilde{A}^\nu] + M \partial_\mu \tilde{A}^\mu \phi_2 \end{aligned} \quad (4.13)$$

De (4.12) e (4.13) nós podemos extrair as regras de Feynman envolvendo o campo externo $\tilde{A}_\mu(x, y)$. Os vértices relevantes obtidos são os mostrados na (Fig. 4.1).

4.2 A Função de Correlação de Vórtice e o correspondente Espectro de Massa

Nesta seção calcularemos explicitamente a função de correlação de dois pontos para vórtices, tanto na fase “*simétrica*” como para a fase “*quebrada*” do modelo de Higgs Abelian. Do comportamento à longas distâncias desta função, nós esperamos então extrair uma expressão explícita para a massa do vórtice. Lembremos que isso é possível, uma vez que o teorema de Araki^[42] estabelece que a grandes distâncias espaciais a função de correlação de dois pontos decai exponencialmente com a distância, com uma rapidez determinada pela massa das partículas (se existirem).

Como o modelo de Higgs Abelian, na fase quebrada, admite classicamente a existência de estruturas topológicas tipo partículas, ou seja, o vórtice, esperamos que quanticamente tais excitações também estejam presentes no modelo, tal que o comportamento à longas distâncias da função de dois pontos para campos quânticos de vórtice, tenha o comportamento estabelecido pelo teorema acima.

O resultado da integração funcional em (4.10) pode ser expresso como uma expansão perturbativa padrão em teoria de campos, na presença de um campo externo, da forma

$$\langle \mu(x; c_1) \mu^*(y; c_2) \rangle = e^{\Lambda[x, c_1; y, c_2]} \quad (4.14)$$

onde $\Lambda[x, c_1; y, c_2]$ é a soma de todos os gráficos de Feynman com o campo externo $\tilde{A}_\mu(x, y)$ nas pernas externas.

O cálculo que faremos para determinar o valor de Λ , será igualmente da forma padrão de uma expansão em potências de $\hbar$. Os gráficos dominantes nessa expansão são portanto os gráficos na aproximação da árvore ($O(\hbar^{-1})$), ou seja, os gráficos de zero-loop.

No apêndice A é mostrado que o comportamento à longas distâncias de (4.14) é sómente determinado pelos gráficos com duas pernas externas. Uma vez que estamos interessados no comportamento assintótico de (4.14), de modo a obter a massa do vórtice,

nós iremos considerar sómente esta subsérie de gráficos de Feynman.

Consideremos (4.14) primeiramente na fase simétrica ($m^2 > 0$). Os gráficos dominantes contribuindo para Λ , neste caso, são os obtidos pelos vértices (a) e (b) da (Fig. 4.1), e são então dados por

$$\Lambda^S = \text{diagrama (a)} + \text{diagrama (b)} \quad (4.15)$$

Das regras de Feynman, (fig. 4.1(a) e (b)), (4.15) é dado por

$$\begin{aligned} \Lambda^S = & - \frac{\xi}{2} \int d^3z \partial_\mu \tilde{A}^\mu(z; x, y) \partial_\nu \tilde{A}^\nu(z; x, y) + \frac{\xi^2}{2} \int d^3z_1 d^3z_2 \times \\ & \times \left[\partial_\alpha \tilde{A}^\alpha(z_1; x, y) \partial_\mu^{z_1} \partial_\nu^{z_2} D_{E\xi}^{\mu\nu}(z_1 - z_2) \partial_\beta \tilde{A}^\beta(z_2; x, y) \right] \end{aligned} \quad (4.16)$$

Da expressão para o propagador de fóton $D_{E\xi}^{\mu\nu}$, eq.(4.4), desde que na fase simétrica $M = 0$, obtemos que

$$\partial_\mu^{z_1} \partial_\nu^{z_2} D_{E\xi}^{\mu\nu}(z_1 - z_2) = \frac{1}{\xi} \delta^3(z_1 - z_2) \quad (4.17)$$

e portanto obtemos imediatamente que $\Lambda^S = 0$, dentro da aproximação utilizada. Seque portanto que na fase simétrica:

$$\langle \mu \mu^* \rangle^S = 1 \quad (4.18)$$

indicando que o operador de vórtice é trivial nesta fase. Este resultado já era esperado, baseado no fato que os vórtices clássicos, eq.(3.47), os quais as excitações criadas por μ são os equivalentes quânticos, sómente existem na fase “quebrada” ($m^2 < 0$).

Nos concentramos agora no cálculo de (4.14) na fase “quebrada” ($m^2 < 0$). Nesta fase, o esquema de aproximação utilizado deve ser suplementado por uma expansão em potências de M , a massa do bóson de gauge, dentro de cada ordem na expansão em $\hbar$.

Esta expansão em M não é uma expansão arbitrária e seu motivo é exatamente de se levar em consideração que as excitações topológicas do tipo vórtice, possuem uma estrutura interna diferente da do resto do espaço onde o setor de vácuo, do espaço de Hilbert, é realizado (ver seção 2.2, Capítulo 2). Devemos lembrar que, das soluções de vórtice, (3.47),

o mecanismo de Higgs não deve operar completamente em todo o espaço. Na fase “*quebrada*” o fóton adquire massa M via mecanismo de Higgs. Entretanto a existência de estruturas do tipo vórtice no sistema, nos diz que devemos ter regiões do espaço onde as configurações de vácuo deve dar lugar a configurações não-triviais (as que descrevem o vórtice). Dentro do vórtice sobrevivem os campos originais do modelo, antes de processar a “*quebra*” de simetria. De fato o valor esperado do campo de Higgs ($\langle \phi \rangle$) se anula no centro do vórtice e aproxima exponencialmente do valor do vácuo, $\langle \phi \rangle = b \neq 0$, na direção perpendicular ao vórtice (ver soluções (2.26) e (2.27), seção 2.2). Fora do vórtice o mecanismo de Higgs se processa da forma usual e o campo vetorial A_μ adquire um valor de massa não nulo ($M^2 \sim b^2$), mas dentro do vórtice o campo de Higgs é pequeno e a massa do campo vetorial se anula no centro de vórtice. Portanto ao considerarmos soluções do tipo vórtice no sistema, devemos proceder da forma especificada acima, fazendo uso da expansão no parâmetro de massa M , caso contrário estaríamos considerando que em todo o espaço sobrevive somente as soluções triviais (de vácuo). De fato, de um cálculo explícito dos termos que iremos considerar, sem a expansão em M , obteríamos novamente o resultado trivial $\langle \mu\mu^* \rangle = 1$.

Os gráficos dominantes na fase “*quebrada*”, são novamente gráficos ao nível de árvore. Nos restringindo novamente aos gráficos de duas pernas externas, que contribuem para o comportamento à longas distâncias de (4.14) (ver apêndice A), obtemos que

$$\begin{aligned}
 \Lambda^B = & \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \\
 & \text{diagram 4} + \text{diagram 5} + \text{diagram 6}^{(2)} + \\
 & \text{diagram 7}^{(2)} + \text{diagram 8}^{(2)} \quad (4.19)
 \end{aligned}$$

Dos vértices mostrados na fig. 4.1 e das expressões (4.4) à (4.6), para os propagadores, é fácil mostrar que a soma dos primeiros quatro gráficos em (4.19) se anulam. Dentro da expansão proposta em potências de M , os quatro termos remanecentes, irão dar, em ordem

dominante ($O(M^2)$), a seguinte contribuição para Λ

$$\Lambda^B = -\frac{M^2}{2} \int d^3 z_1 d^3 z_2 \tilde{A}_\mu(z_1; x, y) \left[\delta^{\mu\nu} \delta^3(z_1 - z_2) - \partial_{(z_1)}^\mu \partial_{(z_2)}^\nu \Delta^E(z_1 - z_2) \right] \tilde{A}_\nu(z_2; x, y) \quad (4.20)$$

onde $\Delta^E(z_1 - z_2)$ na expressão acima, é dado por

$$\Delta^E(z_1 - z_2) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{ik(z_1 - z_2)} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4\pi |z_1 - z_2|} \quad (4.21)$$

De (4.21) obtem-se a seguinte identidade

$$-\square \Delta^E(z) = \delta^3(z) \quad (4.22)$$

Usando (4.22) em (4.20), obtemos para Λ^B :

$$\Lambda^B = -\frac{M^2}{2} \int d^3 z_1 d^3 z_2 \tilde{A}_\mu(z_1; x, y) \left[-\partial_{(z_1)}^2 \delta^{\mu\nu} + \partial_{(z_1)}^\mu \partial_{(z_1)}^\nu \right] \Delta^E(z_1 - z_2) \tilde{A}_\nu(z_2; x, y) \quad (4.23)$$

Substituindo a expressão para $\tilde{A}_\mu(z; x, y)$, eq.(3.60) e (3.61), $\tilde{A}_\mu(z; x, y) = \tilde{A}_\mu(z; x) - \tilde{A}_\mu(z; y)$, em (4.23), obtemos

$$\begin{aligned} \Lambda^B = & -\frac{M^2}{2e^2} \left[\int_{S_x} d^2 \xi_\mu \arg(\vec{\xi} - \vec{x}) - \int_{S_y} d^2 \xi_\mu \arg(\vec{\xi} - \vec{y}) \right] \left[\int_{S_x} d^2 \eta_\nu \arg(\vec{\eta} - \vec{x}) - \right. \\ & \left. - \int_{S_y} d^2 \eta_\nu \arg(\vec{\eta} - \vec{y}) \right] (-\partial_{(\xi)}^2 \delta^{\mu\nu} + \partial_{(\xi)}^\mu \partial_{(\xi)}^\nu) \Delta^E(\xi - \eta) \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde S_x e S_y são as superfícies planas mostradas na fig. 3.9 .

Em (4.24), $-\partial_{(\xi)}^2 \delta^{\mu\nu} + \partial_{(\xi)}^\mu \partial_{(\xi)}^\nu$, agindo em $\Delta^E(\xi - \eta)$, pode também ser escrito como

$$(-\partial_{(\xi)}^2 \delta^{\mu\nu} + \partial_{(\xi)}^\mu \partial_{(\xi)}^\nu) = \epsilon^{\mu\alpha\lambda} \partial_{(\xi)}^\alpha \epsilon^{\nu\beta\lambda} \partial_{(\xi)}^{(\eta)} \quad (4.25)$$

usando esta identidade e o teorema

$$\int_{S(c)} d^2 \xi_\mu \epsilon^{\mu\alpha\nu} \partial_\alpha \phi(\xi) = \oint_c d\xi_\nu \phi(\xi) \quad (4.26)$$

obtem-se a seguinte expressão para Λ^B

$$\Lambda^B = \Lambda_1^B(x) + \Lambda_1^B(y) + \Lambda_2^B(x, y) \quad (4.27)$$

com

$$\begin{aligned} \Lambda_1^B(x) = & - \frac{M^2}{2e^2} \left[\oint_{c_x} d\xi_\alpha \arg(\xi - x) - \int_{\mathbb{R}^2 - T_x} d^2\xi_\mu \epsilon^{\mu\lambda\alpha} \partial_\lambda \arg(\xi - x) \right] \times \\ & \times \left[\oint_{c_x} d\eta_\beta \arg(\eta - x) - \int_{\mathbb{R}^2 - T_x} d^2\eta_\nu \epsilon^{\nu\rho\beta} \partial_\rho \arg(\eta - x) \right] \frac{\delta^{\alpha\beta}}{4\pi |\xi - \eta|} \end{aligned} \quad (4.28)$$

com expressão analoga para $\Lambda_1^B(y)$ e

$$\begin{aligned} \Lambda_2^B(x, y) = & \frac{M^2}{2e^2} \left[\oint_{c_x} d\xi_\alpha \arg(\xi - x) - \int_{\mathbb{R}^2 - T_x} d^2\xi_\mu \epsilon^{\mu\lambda\alpha} \partial_\lambda \arg(\xi - x) \right] \times \\ & \times \left[\oint_{c_y} d\eta_\beta \arg(\eta - y) - \int_{\mathbb{R}^2 - T_y} d^2\eta_\nu \epsilon^{\nu\rho\beta} \partial_\rho \arg(\eta - y) \right] \frac{\delta^{\alpha\beta}}{4\pi |\xi - \eta|} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Da expressão (4.27), junto com (4.14), obtem-se a expressão explícita para a função de correlação de dois pontos para vórtice, na fase de simetria “quebrada”, dentro do esquema de aproximação utilizado e em ordem dominante.

Para extrair o valor da massa, nós devemos estudar o comportamento à longas distâncias ($|x - y| \rightarrow \infty$) de (4.27). Para este fim, devemos observar primeiramente que $\Lambda_1^B(x)$ e $\Lambda_1^B(y)$, quando introduzidos em (4.14), contribuem com um fator constante para a função de correlação, que modifica sómente a normalização do operador de vórtice.

O termo relevante é então $\Lambda_2^B(x, y)$, que pode ser escrito como

$$\Lambda_2^B(x, y) = T_{SS}(x, y) + T_{SL}(x, y) + T_{LL}(x, y) \quad (4.30)$$

onde $T_{SS}(x, y)$ corresponde à integral dupla de superfície em (4.29), $T_{LL}(x, y)$ à integral dupla de linha e $T_{SL}(x, y)$ à integral superfície-linha. No apêndice B é mostrado que $T_{SL}(x, y)$ e $T_{LL}(x, y)$ se anulam no limite $|x - y| \rightarrow \infty$.

Usando a identidade

$$\frac{\delta^{\alpha\beta}}{|x|} = \partial^\alpha \partial^\beta |x| + \frac{x^\alpha x^\beta}{|x|^3} \quad (4.31)$$

O termo $T_{SS}(x, y)$ pode ser escrito da forma

$$T_{SS}(x, y) = T_1(x, y) + T_2(x, y) \quad (4.32)$$

com

$$T_1(x, y) = \frac{M^2}{4\pi e^2} \int_{\mathbb{R}^2 - T_x} d^2 \xi_\mu \epsilon^{\mu\lambda\alpha} \partial_\lambda^{(\xi)} \arg(\xi - x) \int_{\mathbb{R}^2 - T_y} d^2 \eta_\nu \epsilon^{\nu\rho\beta} \partial_\rho^{(\eta)} \arg(\eta - y) \partial_\alpha^{(\xi)} \partial_\beta^{(\eta)} |\xi - \eta| \quad (4.33)$$

$$T_2(x, y) = \frac{M^2}{4\pi e^2} \int_{\mathbb{R}^2 - T_x} d^2 \xi_\mu \int_{\mathbb{R}^2 - T_y} d^2 \eta_\nu \epsilon^{\mu\lambda\alpha} \partial_\lambda^{(\xi)} \arg(\xi - x) \epsilon^{\nu\rho\beta} \partial_\rho^{(\eta)} \arg(\eta - y) \frac{(\xi - \eta)^\alpha (\xi - \eta)^\beta}{|\xi - \eta|^3}$$

É mostrado no apêndice B que $T_2(x, y)$ se anula para $|x - y| \rightarrow \infty$. Integrando por partes $T_1(x, y)$ e usando o teorema de Stokes (4.26), obtemos

$$T_1(x, y) = -\frac{M^2}{4\pi e^2} \oint_{c_x} d\xi^\mu \partial_\mu^{(\xi)} \arg(\xi - x) \oint_{c_y} d\eta^\nu \partial_\nu^{(\eta)} \arg(\eta - y) |\xi - \eta| \quad (4.34)$$

c_x e c_y são círculos de raio R , como mostrado na fig. 3.9. Tomando o limite $|x - y| \rightarrow \infty$ e mantendo os raios de c_x e c_y finitos, segue que as duas curvas c_x e c_y se tornam infinitamente separadas e portanto

$$|\xi - \eta| \rightarrow |x - y| \quad (4.35)$$

Usando que

$$\oint_{c_x} d\xi_\mu \partial_\mu^{(\xi)} \arg(\xi - x) = 2\pi \quad (4.36)$$

obtemos então para (4.34), no limite $|x - y| \rightarrow \infty$, a expressão

$$\lim_{|x-y| \rightarrow \infty} T_1(x, y) = -\pi \frac{M^2}{e^2} |x - y| \quad (4.37)$$

Portanto obtemos para a função de correlação de dois pontos do operador de vórtice, o comportamento à longas distâncias

$$\langle \mu(x) \mu^*(y) \rangle \xrightarrow{|x-y| \rightarrow \infty} e^{-\pi \frac{M^2}{e^2} |x-y|} \quad (4.38)$$

De (4.38), nós imediatamente vemos que a massa do vórtice quântico, dentro da ordem de aproximação utilizada, é dada por

$$M_v = \pi \frac{M^2}{e^2} \quad (4.39)$$

Este é precisamente o valor clássico obtido por Vega e Schaposnik^[28].

Na próxima seção levaremos em conta os termos de ordem de 1-loop contribuindo para (4.14) e obteremos então as correções de 1-loop para o resultado acima.

4.3 Correções Quânticas de 1-loop para a Massa do Vórtice

Calcularemos aqui as correções quânticas à nível de 1-loop para a massa do vórtice. De (4.13) obtemos os vértices relevantes para o cálculo em 1-loop. Estes vértices são os mostrados na fig. 4.1 (g)-(j).

Ao nível de 1-loop nós podemos mostrar também que o comportamento à longas distâncias de (4.14) é sómente determinado pelos gráficos com duas pernas externas (Apêndice A). Então dos vértices mostrados na fig. 4.1 (g)-(j), obtemos que os gráficos relevantes para o cálculo de (4.14), são os dados abaixo

$$\Lambda_{1-loop} =$$

$$(4.40)$$

Como foi feito no caso ao nível da árvore, aqui nós devemos também realizar uma expansão em potências de M (deve-se considerar não somente vértices contendo M , mas também a dependencia em M dos propagadores). Dentro dessa expansão, os termos de ordem dominante contribuindo ao nível de 1-loop são obtidos dos primeiros três gráficos em (4.40). Estes gráficos podem ser escritos da forma

$$\Lambda_{1-loop} = \int d^3 z_1 d^3 z_2 \Sigma^{\mu\nu}(z_1, z_2) \tilde{A}_\mu(z_1; x, y) \tilde{A}_\nu(z_2; x, y) \quad (4.41)$$

onde $\Sigma^{\mu\nu}(z_1, z_2)$ é dado pelos primeiros três gráficos em (4.40), excluindo a parte dependente em M do propagador do campo escalar ϕ_2 , eq.(4.6), de modo a satisfazer a expansão em M .

No espaço dos momentos, (4.41) pode ser escrito como

$$\Lambda_{1-loop} = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \Sigma^{\mu\nu}(q) \tilde{A}_\mu(q; x, y) \tilde{A}_\nu(-q; x, y) \quad (4.42)$$

onde $\tilde{A}_\mu(q; x, y)$ é a transformada de Fourier de $\tilde{A}_\mu(z; x, y)$ e $\tilde{A}_\mu(q; x, y) = \tilde{A}_\mu(q; x) - \tilde{A}_\mu(q; y)$, onde de (3.60)

$$\tilde{A}_\mu(q; x) = -\frac{1}{e} \int_{\mathbb{R}^2 - T_x} d^2 \xi_\mu e^{iq \cdot x} \arg(\vec{\xi} - \vec{x}) \quad (4.43)$$

Em (4.42), $\Sigma^{\mu\nu}(q)$ é dado por

$$\Sigma^{\mu\nu}(q) = -e^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\delta^{\mu\nu}}{k^2 + m_1^2} - e^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\delta^{\mu\nu}}{k^2} + e^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{(2k+q)^\mu (2k+q)^\nu}{(k^2 + m_1^2)(k+q)^2} \quad (4.44)$$

É importante observar que estes termos, assim como no caso ao nível da árvore, eq.(4.20), são independentes do parâmetro de gauge ξ em (4.3).

Um cálculo explícito de (4.44) foi realizado na ref.[38], juntamente com o processo de renormalização do mesmo. O resultado final é^[38]

$$\Sigma^{\mu\nu}(q) = e^2 [c(q) + \bar{c}] \left[\delta^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right] \quad (4.45)$$

onde

$$c(q) = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{m_1}{2} + \int_0^1 dx \left(m_1^2 x + q^2 x(1-x) \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (4.46)$$

e $\bar{c}$ é uma constante divergente. Esta parte divergente de Λ_{1-loop} pode ser eliminada por uma renormalização multiplicativa do campo de vórtice $\mu(z; c)$, da mesma forma como foi feito na ref.[38], onde uma regularização de Pauli-Villars foi usada para determinar $\Sigma^{\mu\nu}(q)$.

Depois desta renormalização, podemos escrever, usando (4.43) e (4.44) em (4.42),

$$\begin{aligned} \Lambda_{1-loop} = & \left\{ \int_{S_x} d^2 \xi_\mu \arg(\vec{\xi} - \vec{x}) - \int_{S_y} d^2 \xi_\mu \arg(\vec{\xi} - \vec{y}) \right\} \left\{ \int_{S_x} d^2 \eta_\nu \arg(\vec{\eta} - \vec{x}) - \right. \\ & \left. - \int_{S_y} d^2 \eta_\nu \arg(\vec{\eta} - \vec{y}) \right\} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{iq(\xi-\eta)} \frac{c(q)}{q^2} (q^2 \delta^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \end{aligned} \quad (4.47)$$

Na expressão acima $(q^2 \delta^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) e^{iq(\xi-\eta)}$ pode ser escrito como $\epsilon^{\mu\alpha\lambda} \partial_\alpha^{(\xi)} \epsilon^{\nu\beta\lambda} \partial_\beta^{(\eta)} e^{iq(\xi-\eta)}$ e realizando a integração angular em $d^3 q$, obtem-se

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{iq(\xi-\eta)} \frac{c(q)}{q^2} (q^2 \delta^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) = & \epsilon^{\mu\alpha\lambda} \partial_\alpha^{(\xi)} \epsilon^{\nu\beta\lambda} \partial_\beta^{(\eta)} \left[\frac{1}{2\pi^2 |\xi - \eta|} \times \right. \\ & \left. \times \int_0^\infty dq c(q) \frac{\sin(q |\xi - \eta|)}{q} \right] \end{aligned} \quad (4.48)$$

Introduzindo (4.48) em (4.47), nós obtemos então uma expressão similar à (4.24) e (4.27), mas com (4.21) trocado para o termo entre parenteses em (4.48).

Como estamos interessados no comportamento à longas distâncias ($|x - y| \rightarrow \infty$) de $\langle \mu\mu^* \rangle$, podemos novamente usar os mesmos argumentos que levam à (4.35) e concluir que sómente os pontos com $|\xi - \eta| \rightarrow \infty$ em (4.48) devem contribuir para o comportamento assintótico de $\langle \mu\mu^* \rangle$.

Usando o fato que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(qx)}{q} = \pi \delta(q) \quad (4.49)$$

podemos então realizar a integração em q de (4.48), obtendo a seguinte expressão para Λ_{1-loop}

$$\Lambda_{1-loop} = \frac{c(0)}{4\pi} \left[\int_{S_x} d^2 \xi_\mu \arg(\vec{\xi} - \vec{x}) - \int_{S_y} d^2 \xi_\mu \arg(\vec{\xi} - \vec{y}) \right] \left[\int_{S_x} d^2 \eta_\nu \arg(\vec{\eta} - \vec{x}) - \int_{S_y} d^2 \eta_\nu \arg(\vec{\eta} - \vec{y}) \right] \epsilon^{\mu\alpha\lambda} \partial_\alpha^{(\xi)} \epsilon^{\nu\beta\lambda} \partial_\beta^{(\eta)} \frac{1}{|\xi - \eta|} \quad (4.50)$$

Comparando esta expressão com (4.24) e (4.27), pode-se concluir que os mesmos passos levando à (4.37) podem ser realizados. Novamente os termos não relevantes do tipo $\Lambda_1^B(x)$, eq. (4.28), podem ser eliminados por uma normalização de $\mu(x; c)$.

A parte finita de Λ_{1-loop} , no limite $|x - y| \rightarrow \infty$, é dada então por

$$\Lambda_{1-loop} \xrightarrow{|x-y| \rightarrow \infty} 2\pi c(0) |x - y| \quad (4.51)$$

De (4.46) obtemos trivialmente que

$$c(0) = \frac{m_1}{12\pi} \quad (4.52)$$

e então a correção quântica para a massa do vórtice será $-\frac{m_1}{6}$ (m_1 sendo dado por $2|m|^2$, na fase “quebrada”).

Até o nível de 1-loop e dentro da expansão em M , a massa do vórtice é dada por

$$M_v = \pi \frac{M^2}{e^2} - \frac{m_1}{6} \quad (4.53)$$

Usando o fato que $M^2 = e^2 b^2 = 4e^2 \frac{|m|^2}{\lambda}$ e $m_1 = \sqrt{2} |m|$, obtemos que $M_v = 4\pi \frac{|m|^2}{\lambda} - \sqrt{2} \frac{|m|}{6}$. Imediatamente nota-se que o esquema aproximativo usado é válido para $\lambda \ll |m|$. Isto é compatível com a expansão na massa M , porque e^2 é um parâmetro independente e portanto nós podemos requerer $M^2 = e^2 b^2 \ll 1$. O sinal negativo em (4.53) claramente não implica em nenhuma instabilidade, uma vez que quando a magnitude dos dois termos em (4.53) se tornam comparáveis, nós perdemos completamente a validade da aproximação utilizada (o primeiro termo em (4.53) é obtido ao nível da árvore, enquanto que o segundo termo é ao nível de 1-loop).

Na fase simétrica pode-se usar as mesmas expressões levando à (4.51), mas ao invés de (4.52), deve-se considerar agora que as componentes do campo escalar, ϕ_1 e ϕ_2 , tem a mesma massa dada por $m_1^2 = m_2^2 = m^2$. $c(q)$ em (4.45) será dado agora por^[38]

$$c^S(q) = \frac{1}{2\pi} \left\{ -\frac{m_1 + m_2}{2} + \int_0^1 dx \left[m_1^2 x + m_2^2 (1-x) + q^2 x(1-x) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (4.54)$$

tal que

$$c^S(0) = \frac{(m_1 - m_2)^2}{12\pi(m_1 + m_2)} \quad (4.55)$$

seque então que, para $m_1 = m_2$, $c^S(0) = 0$ e como no caso ao nível de árvore, obtemos $\Lambda_{1-loop}^S = 0$ na fase simétrica.

4.4 Introdução de Temperatura na Função de Correlação de Vórtice

Consideraremos agora, como a introdução de temperatura finita modifica a função de correlação de dois pontos para vórtices.

Como visto nas seções anteriores, o argumento da exponencial em (4.14) pode ser escrito até a ordem de 1-loop da forma (na fase de simetria “quebrada”, em que o resultado não é o trivial)

$$\Lambda^B = \Lambda_{tree} + \Lambda_{1-loop} \quad (4.56)$$

onde Λ_{tree} é o termo ao nível de árvore (4.24) e Λ_{1-loop} o termo ao nível de 1-loop, dado por (4.42).

Ao considerarmos a temperatura finita ($T \neq 0$), as regras de Feynman são mudadas de modo que as integrações nos momentos em (4.23) e (4.42) passam à serem escritas na forma^[43]

$$\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} f(k_0) \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} f(\omega_n) \quad (4.57)$$

onde $k^2 = k_0^2 + \vec{k}^2$, com $k_0^2 = \omega_n^2 = \left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2$ para o caso de bósons^[43]. β é o inverso da temperatura, $\beta^{-1} = T$.

A somatória em (4.57) pode também ser escrita da forma^[44]

$$\frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(\omega_n) = \frac{1}{2\pi} \oint_c dk_0 \frac{1}{e^{i\beta k_0} - 1} \quad (4.58)$$

onde o contorno c é dado na fig. 4.2 .

Figura 4.2: Contorno c nas integrações de momento à $T \neq 0$.

Fechando o contorno c como semi-círculos de raio infinito, obtemos para (4.58)

$$\frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(\omega_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\epsilon}^{+\infty+i\epsilon} dk_0 \frac{f(k_0)}{e^{-i\beta k_0} - 1} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty-i\epsilon}^{+\infty-i\epsilon} dk_0 \frac{f(k_0)}{e^{i\beta k_0} - 1} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 f(k_0) \quad (4.59)$$

O último termo do lado direito em (4.59) representa a contribuição de $T = 0$, enquanto que os dois primeiros termos representam a contribuição de temperatura finita $T \neq 0$. Evidentemente para $T \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow \infty$, sómente o último termo em (4.59) sobrevive.

Voltemos agora a nossa atenção para a expressão (4.56). A contribuição de temperatura em Λ_{tree} , eq. (4.24), deve vir exatamente do termo $\Delta^E(\xi - \eta)$, dado em (4.21). Em $T \neq 0$, podemos escreve-lo como

$$\Delta_E^\beta(\xi - \eta) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{ik(\xi - \eta)} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{e^{i\omega_n(\xi - \eta)_0} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{\xi} - \vec{\eta})}}{\omega_n^2 + \vec{k}^2} \quad (4.60)$$

Reescrevendo a somatória em n , em (4.60), da forma dada em (4.59) e resolvendo as integrações complexas via o método de resíduos, por exemplo, obteremos

$$\Delta_E^\beta = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{\xi} - \vec{\eta})} \left[\frac{\cosh[k(\xi - \eta)_0]}{k(e^{\beta k} - 1)} + \frac{e^{-k(\xi - \eta)_0}}{2k} \right] \quad (4.61)$$

Sem perda de generalidade, ao tomarmos a função de correlação $\langle \mu \mu^* \rangle$ à tempos iguais, ou seja, $(\xi - \eta)_0 = 0$, e fazendo a integração angular implícita em $d^2 k$ em (4.61), obtemos

$$\Delta_E^\beta(\vec{\xi} - \vec{\eta}) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty dk J_0(k |\vec{\xi} - \vec{\eta}|) + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk \frac{J_0(k |\vec{\xi} - \vec{\eta}|)}{e^{\beta k} - 1} \quad (4.62)$$

No limite $|\vec{x} - \vec{y}| \rightarrow \infty$, temos como antes, eq. (4.35), $|\vec{\xi} - \vec{\eta}| \rightarrow |\vec{x} - \vec{y}|$ e portanto o primeiro termo do lado direito em (4.62) vai como $\frac{1}{4\pi|\vec{\xi} - \vec{\eta}|}$, reproduzindo então o resultado à $T=0$. O segundo termo em (4.62) pode ser mostrado facilmente que, via integração em dk e tomando o limite $|\vec{x} - \vec{y}| \rightarrow \infty$, vai com $\ln |\vec{\xi} - \vec{\eta}|$ e portanto não contribui para a massa do vórtice à temperatura finita (contribui sómente os termos lineares em $|x - y|$). Portanto ao nível da árvore, em $T \neq 0$, o resultado que se obtém para a massa do vórtice, via comportamento assintótico da função $\langle \mu \mu^* \rangle$, é exatamente o mesmo dado em (4.39).

Estudemos agora o termo Λ_{1-loop} , eq. (4.42), à $T \neq 0$. De (4.42), (4.43) e (4.44), podemos escrever Λ_{1-loop} , em $T \neq 0$, da forma

$$\begin{aligned} \Lambda_{1-loop}^\beta = & \left\{ \int_{S_x} d^2 \xi_0 \arg(\vec{\xi} - \vec{x}) - \int_{S_y} d^2 \xi_0 \arg(\vec{\xi} - \vec{y}) \right\} \left\{ \int_{S_x} d^2 \eta_0 \arg(\vec{\eta} - \vec{x}) - \right. \\ & \left. - \int_{S_y} d^2 \eta_0 \arg(\vec{\eta} - \vec{y}) \right\} \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} e^{i\vec{q} \cdot (\vec{\xi} - \vec{\eta})} \frac{1}{\beta} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \times \\ & \times \left[-\frac{1}{\omega_n^2 + \vec{k}^2 + m^2} - \frac{1}{\omega_m^2 + \vec{k}^2} + \frac{(2\omega_m + \omega_n)^2}{(\omega_m^2 + \vec{k}^2 + m^2)[(\omega_m + \omega_n)^2 + (\vec{k} + \vec{q})^2]} \right] \end{aligned} \quad (4.63)$$

Na expressão acima foi tomado efetivamente que as superfícies $S_x = \mathbb{R}^2 - T_x$ e $S_y = \mathbb{R}^2 - T_y$ estão completamente contidas no plano espacial, fig 3.9, e novamente tomamos $\langle \mu \mu^* \rangle$ à tempos iguais ($(\xi - \eta)_0 = 0$).

O cálculo em (4.63) pode ser simplificado se considerarmos que a integração em $d^2 q$ em (4.63) pode ser escrita da forma

$$\int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} e^{i\vec{q} \cdot (\vec{\xi} - \vec{\eta})} = \vec{\partial}_\xi \cdot \vec{\partial}_\eta \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dq \frac{J_0(q |\vec{\xi} - \vec{\eta}|)}{q} \quad (4.64)$$

e se restringirmos sómente aos termos lineares em q , que multiplicam (4.64) em (4.63), uma vez que são exatamente estes termos que de (4.64) devem dar o comportamento linear em $|\vec{\xi} - \vec{\eta}|$, como em (4.62), então as integrações em S_x e S_y podem ser tratadas da mesma forma que nas seções anteriores e o resultado final, para $|x - y| \rightarrow \infty$, será linear

em $|x - y|$, contribuindo então para a massa do vórtice. Os demais termos espúrios devem, como antes, sómente contribuir para a normalização do campo de vórtice $\mu(x; c)$.

Colocando as somatórias em n e m da forma dada em (4.59), resolvendo as integrações complexas em dq_0 e dk_0 via, por exemplo, o método de resíduos e nos restringindo aos termos lineares em q , como especificado acima, devem efetivamente contribuir para a massa do vórtice, obteremos para (4.63), no limite $|\vec{x} - \vec{y}| \rightarrow \infty$, a expressão

$$\Lambda_{1-loop}^\beta \xrightarrow{|\vec{x}-\vec{y}|\rightarrow\infty} \Lambda_{1-loop}^{T=0} + \Lambda_{1-loop}^{T\neq 0} \quad (4.65)$$

com $\Lambda_{1-loop}^{T=0}$ sendo a contribuição à $T=0$, dada por (4.51) e $\Lambda_{1-loop}^{T\neq 0}$ a parte dependente da temperatura, dada por

$$\begin{aligned} \Lambda_{1-loop}^{T\neq 0} = & \left\{ \int_{S_x} d^2\xi_0 \arg(\vec{\xi} - \vec{x}) - \int_{S_y} d^2\xi_0 \arg(\vec{\xi} - \vec{y}) \right\} \left\{ \int_{S_x} d^2\eta_0 \arg(\vec{\eta} - \vec{x}) - \right. \\ & \left. - \int_{S_y} d^2\eta_0 \arg(\vec{\eta} - \vec{y}) \right\} \Upsilon(T) \vec{\partial}_\xi \vec{\partial}_\eta \frac{1}{4\pi |\vec{\xi} - \vec{\eta}|} \end{aligned} \quad (4.66)$$

onde

$$\begin{aligned} \Upsilon(T) = & 2(2\pi) \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \left\{ - \frac{\left[e^{\beta(\sqrt{k^2+m_1^2}+k)} - 1 \right] + \left[e^{\beta(\sqrt{k^2+m_1^2}-k)} - 1 \right]}{k(e^{\beta k} - 1) \left[e^{\beta(\sqrt{k^2+m_1^2}-k)} - 1 \right] \left[e^{\beta(\sqrt{k^2+m_1^2}+k)} - 1 \right]} + \right. \\ & \left. + \frac{\left[e^{\beta(\sqrt{k^2+m_1^2}-k)} - 1 \right] \left[e^{\beta(\sqrt{k^2+m_1^2}+k)} - 1 \right] + \left[e^{\beta(\sqrt{k^2+m_1^2}+k)} - 1 \right] + \left[e^{\beta(\sqrt{k^2+m_1^2}-k)} - 1 \right]}{k \left(e^{\beta\sqrt{k^2+m_1^2}} - 1 \right) \left[e^{\beta(\sqrt{k^2+m_1^2}-k)} - 1 \right] \left[e^{\beta(\sqrt{k^2+m_1^2}+k)} - 1 \right]} \right\} \end{aligned} \quad (4.67)$$

Infelizmente só podemos obter uma expressão fechada para $\Upsilon(T)$ considerando, por exemplo, o limite de altas temperaturas, $\beta m_1 \ll 1$. Neste limite obtemos que $\Upsilon(T)$ é dado simplesmente por

$$\Upsilon(T) \xrightarrow{\beta m_1 \ll 1} \frac{1}{\beta\pi} \ln(1 - e^{-\beta m_1}) \quad (4.68)$$

Usando as identidades $\vec{\partial}_\xi \cdot \vec{\partial}_\eta = (\vec{\partial}_\xi \times \hat{\xi}_0) \cdot (\vec{\partial}_\eta \times \hat{\eta}_0)$ (à tempos iguais $\hat{\xi}_0 = \hat{\eta}_0$) e $\int_{S(c)} \vec{\nabla}_\eta \Phi(\eta) \times \hat{\eta} d^2\eta = \oint_c d\vec{\eta} \Phi(\eta)$, juntamente com a identidade (4.31) em (4.66), $\Lambda_{1-loop}^{T\neq 0}$ pode então ser tratado de forma analoga à da

seção 4.2 , obtendo como resultado final , no limite $|x - y| \rightarrow \infty$ e $\beta m_1 \ll 1$,

$$\Lambda_{1-loop}^{T \neq 0} \xrightarrow{|\vec{x}-\vec{y}| \rightarrow \infty; \beta m_1 \ll 1} 2T \ln \left(1 - e^{-\frac{m_1}{T}}\right) |x - y| \quad (4.69)$$

Este resultado, mais a contribuição de temperatura zero para a massa do vórtice, leva ao resultado final para (4.14) em $T \neq 0$:

$$\langle \mu(\vec{x}) \mu^*(\vec{y}) \rangle_{T \neq 0} \xrightarrow{|\vec{x}-\vec{y}| \rightarrow \infty; \beta m_1 \ll 1} \exp[-M_v(T) |\vec{x} - \vec{y}|] \quad (4.70)$$

onde $M_v(T)$ é a massa do vórtice dependente da temperatura, dada por

$$M_v(T) = \pi \frac{M^2}{e^2} - \frac{m_1}{6} - 2T \ln \left(1 - e^{-\frac{m_1}{T}}\right) \quad (4.71)$$

como $M^2 = 4e^2 \frac{|m|^2}{\lambda}$ e $m_1^2 = 2|m|^2$,podemos escrever (4.70) na forma equivalente

$$M_v(T) = 2\pi \frac{m_1^2}{\lambda} - \frac{m_1}{6} - 2T \ln \left(1 - e^{-\frac{m_1}{T}}\right) \quad (4.72)$$

De $M_v(T)$,podemos determinar uma temperatura T_c ,a temperatura de transição de fase, dada por $M_v(T_c) = 0$,com T_c dada por

$$T_c \ln \left(1 - e^{-\frac{m_1}{T_c}}\right) = \pi \frac{m_1^2}{\lambda} - \frac{m_1}{12} \quad (4.73)$$

sendo T_c então a temperatura na qual a função de correlação de dois pontos para vórtices se torna trivial, $\langle \mu \mu^* \rangle_{T=T_c} \rightarrow 1$.

4.5 A Estrutura de Fase do Modelo de Higgs Abeliano em 2+1D via Estudo da Função de Correlação $\langle \mu \mu^* \rangle$

Como havíamos comentado na seção 3.4 , a denominação de que na fase $m^2 < 0$, ou fase “quebrada ”, a simetria é espontaneamente quebrada, é um equívoco, se considerarmos esta simetria como a simetria de gauge local U(1). Sabemos pelo teorema de Elitzur^[39] que simetrias locais nunca são quebradas. De fato tanto as Lagrangeanas “simétrica ”

(4.1), sem o deslocamento no campo de Higgs ϕ , como a Lagrangeana “quebrada” (4.2), onde é realizado o deslocamento em ϕ , são invariantes pela transformação de gauge local usual

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\phi(x) \quad (4.74)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)$$

e este fato é importante em todo o procedimento adotado, se lembrarmos que na construção das funções de correlação envolvendo operadores desordem, a invariância de superfície (em 2+1D, ou de caminho em 1+1D) é um ingrediente fundamental e esta invariância de superfície (ou caminho) é implementada exatamente por uma transformação de gauge como a do tipo (4.73) ou (3.57).

A pergunta que se faz então é, qual simetria estamos distinguindo ao realizarmos os cálculos das funções de correlação desordem $\langle\mu\mu^*\rangle$, obtendo comportamentos distintos em ambas as fases ?

A resposta vem naturalmente se considerarmos que a simetria que esta sendo quebrada é a simetria relacionado com a corrente topologicamente conservada (3.48), que o modelo de Higgs Abelian admite:

$$j^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \quad (4.75)$$

esta corrente está relacionada com uma carga topológica Q , que é exatamente o fluxo magnético Φ que atravessa um determinado plano (x_1, x_2) , (3.49),

$$\Phi = \int d^2x j^0 = \int d^2x B(x) \quad (4.76)$$

Na fase simétrica, $(m^2 > 0)$, onde a função de correlação desordem é trivial $\langle\mu(x)\mu^*(y)\rangle_S = 1$ ou equivalentemente, em termos do valor esperado do campo desordem $\langle\mu(x)\rangle$, em $|x - y| \rightarrow \infty$, $\langle\mu(x)\rangle_S = 1$ e portanto a massa dos vórtices é nula, estes então, pelo mecanismo de Kosterlitz–Thouless^[45], uma vez que o custo energético para a introdução dessas excitações no sistema é nulo, dado pela sua massa, que é nula nesta fase, são então energeticamente favoráveis a se condensarem no sistema desordendo-o

completamente. Note entretanto que estes vórtices carregam fluxo magnético dado por (4.76) e portanto sua condensação leva naturalmente a quebra da simetria associada à j^μ , (4.75), ou seja, a quebra de simetria de fluxo magnético.

Por outro lado, na fase “quebrada” ($m^2 < 0$), onde a função de correlação desordem $\langle \mu(x) \mu^*(y) \rangle$ decai exponencialmente com a distância $|x - y|$ e portanto, em $|x - y| \rightarrow \infty$, o valor esperado do campo de desordem $\langle \mu(x) \rangle$ é nulo, $\langle \mu(x) \rangle = 0$, e os vórtices são massivos, com massa M_v , dada por (4.71), e portanto não condensam no sistema. Neste caso a simetria de fluxo magnético não é quebrada.

Esta transição de fase é caracterizada exatamente pelo anulamento da massa dos vórtices, resultando em sua condensação e a temperatura em que esta condensação ocorre é então a temperatura T_c , dada em (4.73). Podemos igualmente associar um parâmetro de “ordem” (no caso é um parâmetro de desordem), que caracteriza esta transição, que é dado pelo valor esperado do campo de vórtice $\mu(x; c)$, $\langle \mu(x; c) \rangle$. E a transição de fase que ocorre no sistema é uma transição de fase do tipo Kosterlitz–Thouless^[45], análoga à que ocorre em modelos bidimensionais na Mecânica Estatística.

Este modo de tratar a transição de fase no modelo de Higgs Abelian em 2+1D é análoga ao tratamento realizado por Kovner et. al.^[46], para justificar o fóton de massa nula do modelo, como um bóson de Goldstone^[47], onde tratando a simetria de fluxo magnético como uma simetria contínua, a quebra desta resultaria então num bóson de Goldstone, que seria exatamente o fóton, na fase $m^2 > 0$ ou como denominada pelos autores acima, a fase de Coulomb. Por outro lado na fase $m^2 < 0$, ou fase de Higgs, o fóton, via mecanismo de Higgs, se torna massivo. Nesta fase a simetria de fluxo magnético não é quebrada e portanto não existem partículas sem massa na teoria. O curioso é que os autores da ref.[46] usam exatamente um operador local de criação de vórtices, como parâmetro de ordem, para distinguir as duas fases do sistema.

Capítulo 5

Resultados Adicionais e Futuras Aplicações para a Teoria Quântica das Excitações Topológicas

Discutiremos neste capítulo as extensões possíveis do método de variáveis ordem-desordem, aplicada em teoria quântica de campo no contínuo, discutido anteriormente nos Capítulos 3 e 4.

5.1 Operador Desordem para Monopólos Magnéticos em 3+1D

Recentemente Marino e Ruiz^[21] estenderam o método discutido no Capítulo 3 deste trabalho, para o caso de teorias de gauge não-abelianas em dimensão 3+1D, obtendo explicitamente o operador quântico de monopólo do modelo de Georgi-Glashow, simetria $O(3)$, cujo caso clássico discutimos na seção 2.3, do Capítulo 2.

Como no caso do vórtice em 2+1D, em que o operador desordem correspondente $\mu(c)$, tinha a necessidade de ser definido de forma a depender de uma determinada curva c , e portanto não-local, para o caso de monopólos magnéticos em 3+1D, podemos igualmente definir um operador desordem $\mu(x; S)$, não-local, definido agora numa superfície bidimensional fechada S_2 , de modo que as condições de contorno, ou seja, a topologia das soluções do monopólo, possam ser implantadas da mesma forma como no caso de vórtices.

Novamente o campo de monopólo $\mu(x; S)$ é definido via uma álgebra dual, a tempos

iguais, com os campos Lagrangeanos $\phi_a(x)$, $A_i^a(x)$ levando-se em consideração o comportamento assintótico das soluções clássicas de monopólo, dadas pelas equações (2.34) e (2.35), ou seja^[21]

$$\mu(\vec{x}, t; S) \phi^a(\vec{y}, t) = \begin{cases} \frac{(y^a - x^a)}{|\vec{y} - \vec{x}|} \phi^a(\vec{y}, t) \mu(\vec{x}, t; S) & ; \vec{y} \notin T_x(S) \\ \phi^a(\vec{y}, t) \mu(\vec{x}, t; S) & ; \vec{y} \in T_x(S) \end{cases} \quad (5.1)$$

e

$$\mu(\vec{x}, t; S) A_i^a(\vec{y}, t) = \begin{cases} \left[A_i^a(\vec{y}, t) - \frac{1}{g} \epsilon^{iak} \frac{(y^k - x^k)}{|\vec{y} - \vec{x}|^2} \right] \mu(\vec{x}, t; S) & ; \vec{y} \notin T_x(S) \\ A_i^a(\vec{y}, t) \mu(\vec{x}, t; S) & ; \vec{y} \in T_x(S) \end{cases} \quad (5.2)$$

onde $T_x(S)$ é o volume mínimo limitado por S .

A função de correlação de dois pontos para $\mu(x; S)$ é definida via generalização da função (3.51), (3.52) para vórtices, para o caso em 3+1D

$$\langle \mu(x; S_1) \mu^*(y; S_2) \rangle = Z^{-1} [0] \int D\phi D A_\mu \exp \left\{ - \int d^4 z \mathcal{L}_{eff}^E \right\} \quad (5.3)$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff}^E &= \mathcal{L}_{Georgi-Glashow}^E + \int_{V(S_1, S_2)} d^3 \xi_\mu \Psi^\mu \delta^4(z - \xi) + \int_{T_1 \cup T_2} d^3 \eta_\mu \Xi^\mu \delta^4(z - \eta) + \\ &+ \int_{E(V)} d^4 \xi \Omega \delta^4(z - \xi) + \mathcal{L}_c \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde $V(S_1, S_2)$ é o volume no 4-espaço Euclidean, limitado pelas superfícies fechadas S_1 e S_2 , T_1 e T_2 são os volumes mínimos limitados por S_1 e S_2 respectivamente e $E(V)$ é um 4-volume limitado pelos volumes V , T_1 e T_2 . Ψ^μ , Ξ^μ e Ω , são funcionais dos campos, e $\mathcal{L}_c$, o contratermo de renormalização, são determinados impondo em (5.3) invariância de volume $V(S_1, S_2)$.

Como resultado obtém-se algo similar ao caso de vórtices, com (5.3) podendo ser escrita da forma

$$\langle \mu(x; S_1) \mu^*(y; S_2) \rangle = Z^{-1} [0] \int D\phi D A_\mu \exp \left\{ - \int d^4 z \left[F_{\mu\nu}^a \rightarrow F_{\mu\nu}^a (A_\mu^a + \tilde{A}_\mu^a(V)) \right] \right\} \quad (5.5)$$

onde

$$\tilde{A}_\mu^a(V) = -\frac{\alpha_L^a(z; x, y)}{g} \int_V d^3\xi_\mu \delta^4(z - \xi) + [\Theta(E(V)) - 1] C_\mu^a \quad (5.6)$$

onde $\alpha_L^a(z; x, y)$ é uma função de gauge que garante a topologia do monopólo^[21] e C_μ^a é dado por

$$C_\mu = \frac{i}{g} \left[\partial_\mu g^{-1}(\alpha_L) \right] g(\alpha_L) + A_\mu - g^{-1}(\alpha_L) A_\mu g(\alpha_L) \quad (5.7)$$

onde $g(\alpha_L) = e^{i\alpha_L^a(z; x, y)T^a}$ é o elemento de transformação de gauge $O(3)$ e T^a representa os geradores de $O(3)$.

Como no caso de vórtices, por uma escolha conveniente de volume $V(S_1, S_2)$, podemos extrair a forma operatorial explícita de $\mu(x; S)$ de (5.5). Esta escolha de volume é também uma generalização da escolha de superfície no caso de vórtices ($S(c_1, c_2) = (\mathfrak{R}_x^2 - T(c_1)) \cup (\mathfrak{R}_y^2 - T(c_2))$) e é dada por $V(S_1, S_2) = (\mathfrak{R}_x^3 - T_x) \cup (\mathfrak{R}_y^3 - T_y)$, onde $\mathfrak{R}_x^3$ é o 3-plano à $z_x = \text{constante}$ e $T_x = T(S_1)$ é o volume mínimo limitado por S_1 . Com esta escolha de V , pode-se obter $\mu(x; S)$ explicitamente, como sendo dado por (espaço de Minkowski)^[21]

$$\begin{aligned} \mu(x; S_1) &= \exp \left[-g \int d^4z (D^\mu \phi)^T \tilde{A}_\mu(x) \phi \right] = \\ &= \exp \left[ig \int d^4z J^{\mu a} \tilde{A}_\mu^a(x) \right] \end{aligned} \quad (5.8)$$

onde $J^{\mu a} = -i(D_\mu \phi)^a (T^A)_{ab} \phi^b$ é a corrente conservada do modelo de Georgi-Glashow. $\tilde{A}_\mu^a(x)$ é obtido de (5.6), na nova escolha de $V(S_1, S_2)$

$$\tilde{A}_\mu^a(V) = \tilde{A}_\mu^a(x) - \tilde{A}_\mu^a(y) \quad (5.9)$$

e

$$\tilde{A}_\mu^a(x) = -\frac{1}{g} \omega_{\vec{x}}^a(z) \int_{\mathfrak{R}_x^3 - T_x} d^3\xi_\mu \delta^4(z - \xi) |_{\xi^4 = x^4} \quad (5.10)$$

onde $\omega_{\vec{x}}(z) = (-\theta_x \sin \varphi_x, \theta_x \cos \varphi_x, 0)$, com θ_x, φ_x os ângulos polares medidos em relação um eixo cartesiano centrado em $\vec{x}$.

Cálculos de função de correlação $\langle \mu \mu^* \rangle$ para o caso de monopólos podem ser realizados então de forma análoga ao tratamento dispensado aos vórtices no Capítulo 4, com a

introdução do campo externo (5.9) na Lagrangeana (2.31) e subsequente análise da função $\langle \mu \mu^* \rangle$ em ambas as fases também, admitidas pelo modelo de Higgs não-abeliano em 3+1D, eq.(2.31), $m^2 > 0$ e $m^2 < 0$. Trabalho nesse sentido, nas mesmas bases do tratamento realizado no Capítulo 4, já se encontra sendo realizado^[23].

5.2 O Operador Desordem em Dimensão Arbitrária

Ao admitirmos um determinado sistema em D dimensões que possui soluções de sóliton, sistema esse de simetria abeliana ou não abeliana, podemos generalizar o método exposto nas seções acima, para o caso de dimensão arbitrária e obter um operador de criação de sóliton em D dimensões^[48], que representa exatamente um operador de interpolação entre os setores de vácuo e de sóliton do espaço de Hilbert.

Considere por exemplo que esses sólitons possam ter sua topologia não trivial implementada por uma classe de transformações singulares de simetria dada por

$$g(\alpha) = e^{i\alpha^a T^a} \quad (5.11)$$

onde, por exemplo, para vórtice $g = e^{i \arg(z)}$.

Os operadores desordem, tomados como sendo não-locais, são definidos então em superfícies S_{D-2} , de dimensão D-2, ou seja, $\mu(x; S_{D-2})$. Igualmente como no caso de vórtices e monopólos, essa superfície D-2 dimensional engloba um determinado volume V_{D-1} no espaço D-dimensional. As funções de correlação envolvendo os operadores $\mu(x; S_{D-2})$, são então definidas como sendo invariantes sob diferentes escolhas de V_{D-1} .

Por exemplo, consideremos um sistema composto de campos de gauge A_μ^a e campos de Higgs ϕ^a , que admite soluções de sóliton. Funções de correlação de operadores de criação dessas excitações podem então ser escritas da forma genérica (espaço Euclidiano)

$$\langle \mu(x; S_x^{D-2}) \mu^*(y; S_y^{D-2}) \rangle = \int DA_\mu D\phi \exp \left\{ - \int d^D z \mathcal{L}_{eff}^E \left[F_{\mu\nu}^a (A_\mu^a \rightarrow A_\mu^a + \tilde{A}_\mu^a(V_{D-1})) \right] \right\} \quad (5.12)$$

onde, de (5.6) e (3.54), obtemos a forma genérica para o campo externo $\tilde{A}_\mu^a(V_{D-1})$

$$\tilde{A}_\mu^a(V_{D-1}) = -\frac{\alpha^a T^a}{g} \int_{V_{D-1}} d^{D-1} \xi_\mu \delta^D(z - \xi) + [\Theta(E(V_{D-1})) - 1] C_\mu \quad (5.13)$$

onde C_μ é dado por (5.7) e $E(V_{D-1})$ é o volume D -dimensional englobado por V_{D-1} e os volumes $T(S_x^{D-2})$ e $T(S_y^{D-2})$, $(D-1)$ -dimensionais, limitados por S_1^{D-2} e S_2^{D-2} respectivamente. $\Theta(E(V_{D-1}))$ é a função de Heaviside, com suporte em $E(V_{D-1})$.

A realização operatorial explícita de $\mu(x; S_{D-2})$, é obtida da escolha do volume $(D-1)$ -dimensional : $V_{D-1} = (\mathfrak{R}_x^{D-1} - T(S_x^{D-2})) \cup (\mathfrak{R}_y^{D-1} - T(S_y^{D-2}))$, tal que o campo externo (5.13) passa à ser escrito simplesmente por

$$\tilde{A}_\mu^a(V_{D-1}) = \tilde{A}_\mu^a(x) - \tilde{A}_\mu^a(y) \quad (5.14)$$

com

$$\tilde{A}_\mu^a(x) = -\frac{\alpha^a(z; x) T^a}{g} \int_{\mathfrak{R}_x^{D-1} - T(S_x^{D-2})} d^{D-1} \xi_\mu \delta^D(z - \xi) \quad (5.15)$$

e $\mu(x; S_{D-2})$ é dado por (por analogia direta com (5.8) e (3.59))

$$\mu(x; S_{D-2}) = \exp \left\{ ig \int d^D z J_\alpha^\mu \tilde{A}_\mu^a(x) \right\} \quad (5.16)$$

com J_μ^a sendo a corrente conservada do sistema, obtida diretamente da densidade de Lagrangeana $\mathcal{L}$ do sistema em consideração.

Supondo regras de comutação canônica entre os campos Lagrangeanos, podemos então generalizar a algebra dual satisfeita por $\mu(x; S_{D-2})$, como sendo dada por

$$\mu(x; S_{D-2}) \phi(y) = \begin{cases} g(\alpha) \phi(y) \mu(x; S_{D-2}) & , y \notin T(S_{D-2}) \\ \phi(y) \mu(x; S_{D-2}) & , y \in T(S_{D-2}) \end{cases} \quad (5.17)$$

terminando então nossa generalização para dimensão arbitrária D .

5.3 Operadores Desordem e Bosonização

No começo de nossa discussão sobre a construção de operadores de sóliton, vimos que ao mesmo tempo que estes estavam profundamente ligados ao mecanismo de dualidade ordem-desordem, em 1+1D, estes operadores se mostraram intimamente ligados com o

processo de bosonização, isto é, a possibilidade de construção, de operadores fermiônicos diretamente de campos bosônicos, cujo exemplo mais marcante é a realização operatorial de Mandelstam, para o Kink do modelo de sine-Gordon (1+1D) e sua representação dos férmions no modelo de Thirring massivo^[4].

Na seção 3.3, Capítulo 3, no exemplo da aplicação do método de variáveis ordem-desordem para a obtenção explícita do operador de Mandelstam Ψ , vimos que este poderia ser escrito em termos de suas componentes Ψ_1 e Ψ_2 , como $\Psi_1 = \sigma\mu$, $\Psi_2 = \sigma^*\mu$ onde σ e μ , os operadores ordem e desordem respectivamente, são dados em termos do campo bosônico $\phi(x)$ por

$$\sigma(x) = \exp \{ia\phi(x)\} = \exp \left\{ ia \int d^2z J^\mu(z) \tilde{A}_\mu(z; x) \right\} \quad (5.18)$$

$$\mu(x) = \exp \left\{ ib \int_x^\infty dz \dot{\phi}(z, t) \right\} = \exp \left\{ ib \int d^2z \tilde{J}^\mu(z) \tilde{A}_\mu(z; x) \right\}$$

onde J^μ é a corrente topologicamente conservada do modelo de sine-Gordon, $J^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi$ e $\tilde{J}^\mu$ é sua dual, $\tilde{J}^\mu = \epsilon^{\mu\nu} J_\nu = \partial^\mu \phi$ e $\tilde{A}_\mu(z; x)$ é o campo externo obtido de (3.38):

$$\tilde{A}_\mu(z; x, y) = \tilde{A}_\mu(z; x) - \tilde{A}_\mu(z; y) \quad (5.19)$$

com

$$\tilde{A}_\mu(z; x) = \int_{x,c}^\infty \epsilon_{\mu\nu} \delta^2(z - \xi) d\xi^\nu \quad (5.20)$$

e em (5.18) está implícito que, da invariância de caminho da função de correlação $\langle \mu\mu^* \rangle$, podemos tomar a curva c em (5.20) como estando totalmente contida no eixo espacial. As constantes a e b em (5.18) satisfazem $ab = \pi$

Poderíamos então tentar construir uma teoria fermiônica, nos mesmos moldes da teoria de Mandelstam, em 2+1D usando, por exemplo, a forma para o operador de vórtice (3.59)

$$\mu(x; c) = \exp \left\{ ib \int d^3z j^\mu \tilde{A}_\mu(z; x) \right\} \quad (5.21)$$

com $\tilde{A}_\mu = \int_{S_x} d^2\xi_\mu \arg(\vec{\xi} - \vec{x}) \delta^3(z - \xi)$, eq.(3.60), e $j^\mu = \partial^\nu F_{\nu\mu}$.

De (5.18) poderíamos construir um análogo para o operador ordem $\sigma(x)$ em 2+1D, com J^μ em (5.18) sendo agora dado pela corrente topológica $J^\mu = \epsilon^{\mu\nu\alpha} \partial_\nu A_\alpha$:

$$\sigma(x) = \exp \left\{ ia \int d^3 z J^\mu \tilde{A}_\mu(z; x) \right\} \quad (5.22)$$

Usando a forma de $\tilde{A}_\mu(z; x)$ em (5.18) e (5.19), obtemos (considerando S_x como sendo uma superfície totalmente contida no plano espacial)

$$\sigma(x) = \exp \left\{ ia \int_{S_x} d^2 \xi \arg(\vec{\xi} - \vec{x}) \partial_{(\xi)}^i F_{i0}(\xi) \right\} \quad (5.23)$$

e

$$\mu(x) = \exp \left\{ ib \int_{S_x} d^2 \xi \arg(\vec{\xi} - \vec{x}) \epsilon^{ij} \partial_i^{(\xi)} A_j(\xi) \right\} \quad (5.24)$$

Os operadores ordem $\sigma(x)$ e desordem $\mu(x)$ satisfazem a algebra dual

$$\mu(x; S_x) \sigma(y; S_y) = \begin{cases} e^{i2\pi ab \arg(\vec{y} - \vec{x})} \sigma(y; S_y) \mu(x; S_x) & ; S_y \in S_x \\ \sigma(y; S_y) \mu(x; S_x) & ; S_y \notin S_x \end{cases} \quad (5.25)$$

a prova de (5.25) vem do uso das identidades

$$e^A e^B = e^{[A, B]} e^B e^A \quad (5.26)$$

$$\epsilon_{ij} \partial^i \partial^j \arg(\vec{x}) = 2\pi \delta^2(\vec{x})$$

onde a segunda equação em (5.26) vem diretamente da equação de Cauchy-Riemann para a função $\arg(\vec{x})$. De modo a (5.25) reproduzir a algebra dual (3.50), podemos escolher o produto ab como sendo $ab = \frac{1}{2\pi}$.

Definindo um novo operador $\Psi(x)$ com sendo dado pelo produto de (5.23) e (5.24),

$$\Psi(x) = \sigma(x) \mu(x) \quad (5.27)$$

as relações de comutação entre $\Psi(x)$ e $\Psi^*(x)$, de (5.25), devem satisfazer

$$\Psi(x)\Psi(y) - e^{i2\pi ab[\arg(\vec{y}-\vec{x})-\arg(\vec{x}-\vec{y})]}\Psi(y)\Psi(x) = 0 \quad (5.28)$$

$$\Psi(x)\Psi^*(y) - e^{i2\pi ab[\arg(\vec{x}-\vec{y})-\arg(\vec{y}-\vec{x})]}\Psi^*(y)\Psi(x) = 0$$

Usando que

$$\arg(\vec{z}) - \arg(-\vec{z}) = \pi \quad (5.29)$$

e com $ab = \frac{1}{2\pi}$, obtemos que os operadores $\Psi(x)$ anticomutam e portanto comportam-se, pelo menos à primeira vista, como operadores de férmions.

Uma descrição completa da construção de campos fermiônicos em termos de campos bosônicos deve, entretanto, incluir não só a prescrição para sua construção, mas também poder mostrar que os mesmos satisfazem uma determinada teoria envolvendo campos de férmions, com as corretas relações envolvendo funções de correlação do campo de férmion e da corrente fermiônica.

Dentro dos procedimentos acima, Marino^[49] usando como a corrente dual à topológica, uma corrente dada por $\tilde{J}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\alpha} J_\alpha (-\square)^{-\frac{1}{2}}$, onde J_α é a corrente topológica em (5.22), mostrou que apesar de $\Psi = \sigma\mu$ comportar-se como um campo fermiônico, sómente esta prescrição não era suficiente para a obtenção correta de funções de correlação envolvendo férmions, sendo necessário introduzir uma transformação nos campos, dada por uma matriz T , análoga à uma transformação do tipo Foldy-Wouthuysen^[49], obtendo então uma descrição completa de campo de férmion de Dirac em 2+1D.

5.4 Vórtices em Teorias de Chern-Simons

O interesse e estudo da física em 2+1 dimensões tem recebido nos últimos anos uma grande atenção. A riqueza de fenômenos que a teoria admite e a simplificação de estarmos trabalhando em uma dimensão inferior à do espaço-tempo real, são em grande parte responsáveis por essa atenção e o avanço alcançado recentemente, além do fato de uma série de fenômenos físicos poderem ser descritos por modelos bidimensionais.

Um desses interesses é a possibilidade de em duas dimensões espaciais o spin e a estatística de uma partícula não serem mais restritos à de bosons ou férmions, como em três dimensões espaciais, sendo permitida a existência de estatística fracionária, ou seja, as partículas podem possuir spin arbitrário, sendo denominadas de anyons^[50].

Em teorias de campo locais em 2+1D, a introdução da estatística fracionária pode ser implementada via a introdução na Lagrangeana de um termo do tipo

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{\theta}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha} A^\mu \partial^\nu A^\alpha \quad (5.30)$$

conhecido como *termo de Chern-Simons*.

A introdução do termo (5.30) na Lagrangeana (3.46) do modelo de Higgs, leva à uma série de novas propriedades para as excitações do tipo vórtice do modelo^[51]. Uma delas é que, ao contrário das soluções de Nielsen-Olesen, a componente A_0 do campo de gauge é diferente de zero, resultando que o vórtice passa a carregar uma carga elétrica dada por^[51]

$$q = \theta \Phi \quad (5.31)$$

onde Φ é o fluxo magnético carregado pelo vórtice, eq (2.22), $\Phi = \frac{2\pi n}{e}$. E diferentemente dos vórtices neutros, estes vórtices carregados também possuem momento angular, ou spin, dado por^[51]

$$J = \frac{\pi \theta n^2}{e^2} \quad (5.32)$$

O estudo desses vórtices peculiares tem recebido ultimamente crescente interesse pela possível ligação destes com as excitações que aparecem no efeito Hall quântico fracionário^[52] e em teorias de supercondutividade em altas temperaturas^[53].

Dentro do formalismo de construção de operadores de sóliton discutido nesse trabalho, a construção do operador quântico desses vórtices do modelo de Higgs-Chern-Simons, seria o correspondente à campos quânticos de anyons^[12] carregando portanto carga e estatística arbitrária e de cujo estudo, por exemplo nos moldes do realizado no Capítulo 4 para os vórtices de Nielsen-Olesen, poderíamos obter uma melhor compreensão dos fenômenos relacionados com esses novos objetos.

Capítulo 6

Discussões e Conclusões

Neste trabalho expomos os principais resultados obtidos com o método de operadores quânticos de sólitons, dentro da formulação de variáveis ordem-desordem, com origem na mecânica estatística clássica na rede, em duas dimensões espaciais, generalizada agora para teorias quânticas de campo no contínuo.

Nos concentramos principalmente nos resultados provenientes de operadores não-locais de vórtice, mostrando que o método representa um modo de cálculo para obter as propriedades quânticas de sólitons, tal que para as excitações solitônicas do tipo vórtice no modelo de Higgs Abelian em 2+1D, obtemos explicitamente as funções de correlação de dois pontos para vórtices e do comportamento assintótico desta, obtemos o espectro de massa de vórtices em ambas as fases do modelo. No nível de aproximação mais baixa não-trivial, o espectro de massa obtido resulta ser aquele do vórtice clássico. Ao considerarmos termos de ordem superior na expansão da função de correlação, obtemos as correções quânticas de 1-loop para a massa do vórtice, resultando num decréscimo em relação ao resultado clássico. A introdução de temperatura, $T \neq 0$, nos cálculos da função de correlação, nos permitiu obter (no limite de altas temperaturas) uma expressão para a temperatura de transição de fase e interpretar tal transição como sendo do tipo Kosterlitz-Thouless, análoga à que ocorre nos modelos XY bidimensionais de mecânica estatística na rede, sendo a transição de fase resultado da condensação das excitações do tipo vórtice no sistema. Identificamos igualmente esta transição como resultado da quebra de simetria de fluxo magnético, associada aos vórtices.

Um fato à respeito dos cálculos realizados para vórtices, é que dentro da ordem de aproximação utilizada, o resultado obtido para a massa do vórtice independe do raio da curva c , aparecendo em (3.60), a qual podemos associar à extensão do vórtice. Podemos associar esse resultado ao fato de estarmos simplesmente considerando o comportamento assintótico da função de correlação, fazendo a distância entre dois vórtices tender ao infinito e portanto podemos desprezar os raios desses objetos. Por outro lado é trivial mostrar que, na expressão para o operador de vórtice $\mu(x; c)$, eq.(3.62) ou (3.63), ao tomarmos o limite do raio da curva c , (fig.9), tendendo à zero, $R \rightarrow 0, T(c) \rightarrow 0$, obtemos uma expressão análoga à de um operador local de vórtice^[46], o qual é interpretado como sendo o operador que cria um vórtice pontual, num determinado ponto do espaço-tempo.

Dentro da formulação proposta, podemos destacar ainda a possibilidade de cálculo de funções de correlação de 4 pontos para campos de sólitons, das quais poderíamos obter por exemplo, a densidade de sóliton no sistema e também estudar a interação e espalhamento de sólitons, resultados esses de difícil obtenção pelos métodos usuais de estudo de sólitons^[54] e que são de grande interesse no estudo de sistemas que vão desde vórtices em materiais supercondutores à strings e monopólos em Cosmologia.

No capítulo 5 expomos uma série de resultados e possíveis extensões do método de operadores ordem-desordem, que incluem a realização operatorial explícita para monopólos em 3+1D no modelo de Higgs não-Abeliano, a extensão do método para dimensão arbitrária em teorias tanto abelianas como não abelianas, a conexão com a bosonização, abrindo a possibilidade na qual a estrutura dos operadores de vórtice e de monopólo podem ser utilizadas para a construção de campos fermiônicos em 2+1D e 3+1D, e a introdução do termo de Chern-Simons, em 2+1D, com a possibilidade da construção de operadores de vórtices portadores de carga e spin arbitrário (anyons), que se supõe atualmente serem relevantes no estudo de supercondutividade à altas temperaturas e no efeito Hall quântico fracionário.

Por fim, podemos dizer que o fato subsequente à este trabalho é a riqueza e variedade de fenômenos que podem ser estudados através do mecanismo de dualidade ordem-desordem, em que a associação de operadores desordem com os operadores de criação de excitações topológicas de um determinado sistema, leva à um caminho diferente

dos usuais para o tratamento físico dessas excitações, nos mais diversos modelos. Uma vez que a teoria de sólitons e suas aplicações assume um papel cada vez mais relevante no estudo dos fenômenos físicos, esperamos que esta formulação sirva de referência na aplicação e entendimento dos problemas propostos aqui.

Apêndice A

Gráficos de Feynman com mais de dois Campos Externos

Vamos demonstrar aqui que somente gráficos com duas pernas externas contribuem para o comportamento à longas distâncias da função de correlação $\langle \mu \mu^* \rangle$. Devemos primeiramente observar que gráficos de duas pernas externas (campo externo $\tilde{A}_\mu$) são sempre da forma (4.42), com

$$\Sigma^{\mu\nu}(q) = \frac{P^{\mu\nu}}{q^2} c(q) \quad (\text{A.1})$$

onde $P^{\mu\nu} = q^2 \delta^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu$. Ao nível da árvore $c(q) = 1$, como nas equações (4.24), (4.21), e ao nível de 1-loop $c(q)$ é dado por (4.46).

No capítulo 4 mostramos que os gráficos que contribuem para o comportamento assintótico de Λ , em (4.14), são proporcionais à (4.21),

$$\int d^3 q \frac{e^{iq \cdot (\xi - \eta)}}{q^2} \sim \frac{1}{|\xi - \eta|} \quad (\text{A.2})$$

O passo essencial na obtenção de um comportamento linear, para $|x - y| \rightarrow \infty$, para Λ , é o uso da identidade (4.31) nas expressões do tipo (A.2), escrevendo estas na forma geral $\partial \partial |\xi - \eta|$. As duas derivadas, quando combinadas com os dois campos externos em (4.42) (ou (4.24)), levam a expressões do tipo (4.30), que tem o comportamento linear em $|x - y|$, quando $|x - y| \rightarrow \infty$, ou seja, $\Lambda_{\tilde{A}_\mu, \tilde{A}_\mu} \stackrel{|x-y| \rightarrow \infty}{\sim} |x - y|$.

A próxima subsérie de gráficos de Feynman que podem surgir, são gráficos com quatro

$\tilde{A}_\mu$'s nas pernas externas, que no espaço dos momentos possuem a forma geral

$$\int d^3 q_1 d^3 q_2 d^3 q_3 \tilde{A}_\mu(q_1) \tilde{A}_\nu(q_2) \tilde{A}_\alpha(q_3) \tilde{A}_\beta(-q_1 - q_2 - q_3) \Sigma^{\mu\nu\alpha\beta}(q_1, q_2, q_3) \quad (A.3)$$

onde $\Sigma^{\mu\nu\alpha\beta}(q_1, q_2, q_3)$ é uma expressão da forma

$$\Sigma^{\mu\nu\alpha\beta}(q_1, q_2, q_3) = \sum_{\{q\}} \frac{P^{\mu\nu}(q_i, q_j) P^{\alpha\beta}(q_k, q_l)}{Q^4(q_n)} c(q_1, q_2, q_3) \quad (A.4)$$

onde $\{q\}$ representa todas as possíveis combinações de q_i , $P^{\mu\nu}(q_i, q_j) = q_i q_j \delta^{\mu\nu} - q_i^\mu q_j^\nu$ e $Q^4(q_n)$ é um escalar de quarta ordem nos momentos q_i , por exemplo $[(q_1 - q_2)(q_2 - q_3)]^2$.

Sequindo os mesmos passos como antes, pode-se concluir de (A.3) que os gráficos com quatro $\tilde{A}_\mu$'s, contribuem para o comportamento de Λ em $|x - y| \rightarrow \infty$, com termos do tipo

$$\int d^3 q_1 d^3 q_2 d^3 q_3 \frac{e^{iq_1(\xi_1 - \xi_2)} e^{iq_2(\xi_2 - \xi_3)} e^{iq_3(\xi_3 - \xi_4)}}{Q^4(q_n)} \sim \frac{1}{Q^5(\xi_i)} \quad (A.5)$$

(A.5) é análogo à (A.2). Mas desde que temos quatro $\tilde{A}_\mu$'s externos, como antes, gostaríamos de escrever (A.5) como uma derivada quartica, entretanto $\frac{1}{Q^5(\xi_i)} \sim \partial\partial\partial\partial(\frac{1}{Q^1(\xi_i)})$. Combinando as quatro derivadas com o campo externo, como realizado em (4.32) e (4.33), pode-se concluir então que os gráficos com quatro $\tilde{A}_\mu$'s contribuem com termos proporcionais à $\frac{1}{|x-y|}$, ou seja,

$$\Lambda_{(4\tilde{A}_\mu)} \underset{|x-y| \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{|x-y|} \quad (A.6)$$

Repetindo este procedimento, obtemos a forma geral para Λ com $2n$ $\tilde{A}_\mu$'s, quando $|x - y| \rightarrow \infty$,

$$\Lambda_{(2n\tilde{A}_\mu)} \underset{|x-y| \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{1}{|x-y|} \right)^{3(2n-1)-4n} \quad (A.7)$$

Demonstra-se então que somente gráficos com dois campos externos $\tilde{A}_\mu$, nas pernas externas, contribui para o comportamento assintótico de $\langle \mu\mu^* \rangle$, justificando o procedimento adotado no capítulo 4.

Apêndice B

Comportamento Assimptótico de $T_2(x, y)$, $T_{SL}(x, y)$ e $T_{LL}(x, y)$ em (4.30) e (4.32)

Vamos mostrar primeiramente que $T_2(x, y)$, na eq.(4.33), se anula para $|x - y| \rightarrow \infty$. Considerando que ambos $d^2\xi_\mu$ e $d^2\eta_\nu$, com a escolha de superfície como dada na fig. 3.9, são elementos de superfícies puramente espaciais, e usando a equação de Cauchy-Riemann para $\ln z$ ($\epsilon^{ij}\partial_i \arg(\xi - \vec{x}) = \partial^j \ln |\xi - \vec{x}|$), obtemos para $T_2(x, y)$ em (4.33),

$$T_2(x, y) = \frac{M^2}{4\pi e^2} \int_{\mathbb{R}^2 - T_x} d^2\xi \int_{\mathbb{R}^2 - T_y} d^2\eta \frac{(\vec{\xi} - \vec{x}) \cdot (\vec{\xi} - \vec{\eta})(\vec{\xi} - \vec{\eta}) \cdot (\vec{\eta} - \vec{y})}{|\vec{\xi} - \vec{x}|^2 |\vec{\xi} - \vec{\eta}|^3 |\vec{\eta} - \vec{y}|^2} \quad (\text{B.1})$$

Usando coordenadas polares, podemos escrever $\vec{\xi} - \vec{x} = \rho(\cos \varphi \hat{e}_1 + \sin \varphi \hat{e}_2)$ e $\vec{\eta} - \vec{y} = \rho'(\cos \varphi' \hat{e}_1 + \sin \varphi' \hat{e}_2)$, obtendo para (B.1)

$$T_2(x, y) = \frac{M^2}{4\pi e^2} \int_R^\infty d\rho \int_R^\infty d\rho' \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty d\varphi' \frac{\cos \alpha \cos \beta}{D(\rho, \rho', \varphi, \varphi')} \quad (\text{B.2})$$

onde R é o raio das curvas c_1 e c_2 (fig 3.9) e

$$D(\rho, \rho', \varphi, \varphi') = |\vec{\xi} - \vec{\eta}| = [\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi') + |x - y|(\rho \cos \varphi - \rho' \cos \varphi') + |\vec{x} - \vec{y}|^2]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.3})$$

$$\cos \alpha = [|\vec{x} - \vec{y}| \cos \varphi + \rho' \cos(\varphi - \varphi') - \rho'] \frac{1}{D(\rho, \rho', \varphi, \varphi')}$$

(B.4)

$$\cos \beta = [|\vec{x} - \vec{y}| \cos \varphi' - \rho \cos(\varphi - \varphi') + \rho] \frac{1}{D(\rho, \rho', \varphi, \varphi')}$$

Para $|\vec{x} - \vec{y}| \rightarrow \infty$, $D \rightarrow |\vec{x} - \vec{y}|$, $\cos \alpha \rightarrow \cos \varphi$ e $\cos \beta \rightarrow \cos \varphi'$. Então, claramente neste limite as integrações angulares em (B.2) se anulam, mostrando que $\lim_{|\vec{x} - \vec{y}| \rightarrow \infty} T_2(x, y) = 0$.

Para $T_{SL}(x, y)$ e $T_{LL}(x, y)$, usando a identidade (4.31), obtemos

$$T_{SL}(x, y) = T_{SL(1)}(x, y) + T_{SL(2)}(x, y)$$

(B.5)

$$T_{LL}(x, y) = T_{LL(1)}(x, y) + T_{LL(2)}(x, y)$$

onde

$$\begin{aligned} T_{SL(1)}(x, y) = & -\frac{M^2}{4\pi e^2} \left[\oint_{c_x} d\xi_\alpha \int_{\mathbb{R}^2 - T_y} d^2 \eta_\nu \arg(\xi - \eta) \epsilon^{\nu\rho\beta} \partial_\rho \arg(\eta - y) \partial_\alpha^{(\xi)} \partial_\beta^{(\eta)} |\xi - \eta| + \right. \\ & \left. + (x \leftrightarrow y) \right] \end{aligned}$$

(B.6)

$$\begin{aligned} T_{SL(2)}(x, y) = & -\frac{M^2}{4\pi e^2} \left[\oint_{c_x} d\xi_\alpha \int_{\mathbb{R}^2 - T_y} d^2 \eta_\nu \arg(\xi - \eta) \epsilon^{\nu\rho\beta} \partial_\rho \arg(\eta - y) \frac{(\xi - \eta)^\alpha (\xi - \eta)^\beta}{|\xi - \eta|^3} + \right. \\ & \left. + (x \leftrightarrow y) \right] \end{aligned}$$

$$T_{LL(1)}(x, y) = -\frac{M^2}{4\pi e^2} \left[\oint_{c_x} d\xi_\alpha \oint_{c_y} d\eta_\beta \arg(\xi - x) \arg(\eta - y) \partial_\alpha^{(\xi)} \partial_\beta^{(\eta)} |\xi - \eta| \right]$$

(B.7)

$$T_{LL(2)}(x, y) = -\frac{M^2}{4\pi e^2} \left[\oint_{c_x} d\xi_\alpha \oint_{c_y} d\eta_\beta \arg(\xi - x) \arg(\eta - y) \frac{(\xi - \eta)^\alpha (\xi - \eta)^\beta}{|\xi - \eta|^3} \right]$$

$T_{LL(1)}(x, y)$ pode ser facilmente mostrado que se anula no limite $|\vec{x} - \vec{y}| \rightarrow \infty$, fazendo a integração por partes e então mostrar que o termo de derivada total cancela o outro termo nesse limite.

$T_{SL(1)}(x, y)$ pode ser tratado do mesmo modo que $T_2(x, y)$, usando o teorema de Stockes (4.23) na parte dependente da superfície e integrando por partes na parte dependente das curvas c_x e c_y , obtem-se como no caso para $T_{LL(1)}$ que $\lim_{|x-y| \rightarrow \infty} T_{SL(1)}(x, y) = 0$.

$T_{SL(2)}$ pode ser tratado do mesmo modo que para $T_2(x, y)$, obtendo uma integral angular como em (B.2), com um integrando do mesmo tipo. Novamente, obtemos como resultado, $\lim_{|x-y| \rightarrow \infty} T_{SL(2)}(x, y) = 0$.

Para $T_{LL(2)}(x, y)$, podemos mostrar que

$$T_{LL(2)}(x, y) = -\frac{M^2}{4\pi e^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' \varphi \varphi' \frac{\sin \alpha \sin \beta}{D(R, \varphi, \varphi')} \quad (B.8)$$

tal que para $|\vec{x} - \vec{y}| \rightarrow \infty$, $D \rightarrow |\vec{x} - \vec{y}|$ e portanto $T_{LL(2)}(x, y) \xrightarrow{|x-y| \rightarrow \infty} \frac{const.}{|\vec{x} - \vec{y}|}$, não contribuindo para o comportamento assintótico de Λ .

Referências

- [1] S.Coleman, "*Classical lumps and their quantum descendants*",Ettore Majorana School,Erice (1975);
- [2] R.Rajaraman, "*Solitons and Instantons*",North Holland,Amsterdam (1982);
- [3] S.Coleman, *Phys.Rev.* **D11**,2088 (1975);
- [4] S. Mandelstam, *Phys.Rev.* **D11**, 3026 (1975);
- [5] K. Bardakci and S, Samuel, *Phys. Rev.* **D18**, 2849 (1978), *ibid.Phys. Rev.* **D19**,2357 (1979);
- [6] Z.F. Ezawa, *Phys. Rev.* **D18**,2091 (1978) and *Phys. Lett.* **82B**, 426 (1979);
- [7] J. Fröhlich, *Commun. Math. Phys.* **47**, 269 (1976); J. Fröhlich and P.A. Marchetti, *Commun Math. Phys.* **112**, 343 (1987);
- [8] V.L. Ginzburg and L.D. Landau, *ZHETF* **20**, 1064 (1950); A.A Abrikosov, *Sov. Phys.JETP* **5**, 1174 (1957);
- [9] H. B. Nielsen and P. Olesen, *Nucl.Phys.* **B61**,45 (1973);
- [10] A.L. Fetter and J.D. Walecka, "*Quantum Theory of Many Particle Systems*", McGraw-Hill, N.Y. (1971);
- [11] S. Coleman, "*The Magnetic Monopole fifty years later*" in "*The Unity of the Fundamentals Interactions*",A. Zichini, ed., Plenum, N.Y. (1983);
- [12] J. Fröhlich and P.A. Marchetti, *Commun. Math, Phys.* **121** 177 (1989);

- [13] A. Kovner, R. Rosenstern and D. Eliezer, *Nucl. Phys.* **250**, 320 (1991); *Ibid. Mod. Phys Lett.*, **A5**, 2733 (1991);
- [14] L.P.Kadanoff and H.Ceva, *Phys. Rev.* **B3**, 2637 (1971);
- [15] E. Fradkin and L. Susskind, *Phys Rev.* **D17** 2637 (1978);
- [16] J.B. Kogut, *Rev. Mod. Phys* **51**, 659 (1979);
- [17] E. C. Marino, B. Schroer and J.A Swieca, *Nucl. Phys.* **B200**, 473 (1982); E.C. Marino and J.A. Swieca, *Nucl. Phys.*, **B170**, 175 (1980);
- [18] E.C. Marino, *Nucl. Phys.* **B230**, 149 (1984); R. Köberle and E.C. Marino, *Phys. Lett.* **126B**, 475 (1983);
- [19] E.C Marino, *Phys. Rev.* **D38**, 3194 (1988);
- [20] K.G. Wilson, *Phys. Rev.* **D14**, 2455 (1974);
- [21] E.C. Marino and J. Stephany Ruiz, *Phys. Rev.* **D39**, 3690 (1989);
- [22] E.C. Marino, G.C. Marques, R.O Ramos and J.S. Ruiz "Mass Spectrun and Correlation Function of Quantum Vortices in the Abelian Higgs Model", PUC-RJ Preprint-41 (Dec. 1991), Submitted to Physical Review D;
- [23] E.C.Marino, G.C. Marques and R.O Ramos, "Mass Spectrun and Correlation Function of Quantum Monopoles in the $O(3)$ - Symmetric Georgi-Glashow Model", em preparação;
- [24] E.C. Marino, G.C. Marques and R.O.Ramos, "Temperature Effects in the Mass Spectrum of Quantum Vortices and Monopoles", em preparação;
- [25] N.J.Zabuski and M.D.Kruscal, *Phys.Rev.Lett.* **15**, 240 (1965);
- [26] S.Coleman in "New Phenomena in Sub-Nuclear Physics", Erice Lectures, ed. A.Zichichi, Plenum Press, NY (1975);

- [27] M.Chaichian, N.F.Nelipa, "*Introduction to Gauge Field Theories*", Springer-Verlag (1984);
- [28] H.J. Vega and F.A. Schaposnik, *Phys. Rev.* **D14**, 1100 (1976);
- [29] G.'t Hooft, *Nucl. phys*, **B79**, 276 (1974); A.M.Polyakov, *JETP Letters*, **20**, 194 (1974); *ibid. Sov.Phys.JETP*, **41**, 988 (1976);
- [30] M.K.Prasad and C.M.Sommerfield, *Phys.Rev.Lett* **35**, 760 (1975);
- [31] P.Goddard and D.I.Olive, *Rep.Prog.Phys.* **41**, 1357 (1978);
- [32] J.Preskill, *Ann.Rev.Nucl.Part.Sci.* **34**, 461 (1984);
- [33] R.F.Dashen, B.Hasslacher, and A.Nevev, *Phys.Rev.* **D10**, 4114 (1974); **D10**, 4130 (1974); **D11**, 3424 (1975); L.D.Faddeev and V.E.Korepin, *Phys.Rep.* **42C**, 1 (1978);
- [34] N.H.Crist and T.D.Lee, *Phys.Rev.* **D12**, 1606, (1975);
- [35] E.Tomboulis, *Phys.Rev.* **D12**, 1678 (1975); E.Tomboulis and G.Woo, *Nucl.Phys.* **B107**, 221 (1975);
- [36] J.L.Gervais and B.Sakita, *Phys.Rev.* **D11**, 1943 (1975);
- [37] G.'t Hooft, *Nucl.Phys.* **B138**, 1 (1978);
- [38] C.A.Aragão de Carvalho, E.C.Marino, G.C.Marques and M.Goldman de Castro, *Phys.Rev.* **D38**, 533 (1988); *ibid, Intern.Jour.Mod.Phys.* **A4**, 4827 (1989);
- [39] S.Elitzur, *Phys.Rev.* **D12**, 3978 (1975);
- [40] C.Itzykson and J.B.Zuber, "*Quantum Field Theory*". McGraw-Hill (1980);
- [41] C.Becchi, A.Rouet and R.Stora, *Phys.Lett.* **51B**, 344 (1974); I.V.Tyutin, Leveder preprint 39 (1975) (unpublished).
- [42] H.Araki, *Ann.of Phys.* **11**, 260 (1960); H.Araki, K.Hepp and D.Ruelle, *Helv.Phys.Acta* **35**, 164 (1962);

- [43] C.W.Bernard, *Phys.Rev.* **D9**,3312 (1974);
- [44] M.B.Kislinger and P.D.Morley, *Phys.Rev.* **D13**, 2771 (1976);
- [45] J.M.Kosterlitz and A.J.Thouless,*J.Phys.* **C6**, 1181 (1973);
- [46] A.Kovner.R.Rosenstein and D.Eliezer,*Nucl.Phys.* **B350**,576 (1991),*ibid*
Mod.Phys.Lett. **A5**,2733 (1990);
- [47] J.Goldstone,*Nuovo Cimento* **19**,154 (1961);
- [48] J.S.Ruiz, "*Tese de Doutorado* ", PUC/RJ (1989) (no publicado);
- [49] E.C.Marino,*Phys.Lett.* **263B**,63 (1991);
- [50] F.Wilczek, "*Lectures on Fractional Statistics and Anyon Superconductivity* ",Preprint
IAS-SNS-HEP-89/59 (1989)
- [51] H.J.de Vega and F.A.Schaposnik,*Phys.Rev.* **D34**, 3206 (1986); S.K.Paul and
A.Khare,*Phys.Lett.* **174B**,420 (1986); A.Khare,*Fortschr.Phys.* **38**,507 (1990);
- [52] R.B Laughlin,*Phys.Rev.Lett.* **50**,1395 (1983); B.I.Halperin,*Phys.Rev.Lett.* **52**,1583
(1984); D.A.Aurovas,R.Schrieffer and A.Zee, *Nucl.Phys.* **B251**,117 (1985);
- [53] P.B.Wiegman, *Phys.Rev.Lett.* **60**,821 (1988); A.M.Polyakov, *Mod.Phys.Lett.* **A3**,325
(1988); D.Boyanovsky, " *Vortices in Landau-Ginzburg Theories of Anyonic Super-*
conductivity ", Preprint PITT. 90-12 (Pittsburgh) (1990);
- [54] C.Rosenzweig and A.M.Srivastava, *Phys.Rev.* **D43**,4029 (1991).