

Biblioteca física
J. G. S.
A. G. S.
af. Oliveira
14

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA



"BIFURCAÇÕES SUCESSIVAS NO ESPAÇO DE PARÂMETROS
PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM RETARDAMENTO"

Clodoaldo Grotta Ragazzo



Tese de Doutorado
apresentada ao Insti-
tuto de Física da
Universidade de São
Paulo, Departamento
de Física Nuclear, sob
a orientação da Prof.^a
Coraci Pereira Malta

Defesa: 30/11/89

Novembro
1 9 8 9

530.15535

R1415

D

e.1



BIFURCAÇÕES SUCESSIVAS NO ESPAÇO DE PARÂMETROS
PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM RETARDAMENTO

Clodoaldo Grotta Ragazzo

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Ragazzo, Clodoaldo Grotta

Bifurcações sucessivas no espaço de parâmetros para
equações diferenciais com retardamento. São Paulo,
1989.

Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo. Insti-
tuto de Física. Departamento de Física Nuclear.

Área de Concentração: Física de Partículas Elementa-
res

Orientador: Profa. Dra. Coraci Pereira Malta

Unitermos: 1. Equações diferenciais (com retardamen-
to); 2. Oscilações não lineares; 3. Teoria das bifurca-
ções.

USP/IF/SBI - 54/89

Ao carinho e afeto de
Clodoaldo e Maria José,
meus queridos pais.

AGRADECIMENTOS

- Em especial, à professora Coraci, pela importância em minha formação, pela orientação e amizade.
- À minha mãe Maria José, e às minhas irmãs Andréa e Taísa, pela compreensão e carinho.
- Aos amigos do Instituto de Física, em particular aos meus companheiros de sala Suzana e Nelson.
- A todos os professores do Instituto de Física e do Instituto de Matemática, que de uma forma ou de outra me ajudaram nesta tese.
- A todos os funcionários do departamento de Física Nuclear, em particular ao Luís Marcos.
- À FAPESP pelo auxílio financeiro.

- Em especial, quero agradecer à Mônica, pela amizade, o seu carinho e o apoio.

ABSTRACT

Numerical analysis are made of the behaviour of the solutions of the equation $\dot{X}(t) + X(t) = f(X(t-\tau))$ for $f(X) = A X (1 - X)$, as function of the parameters τ , A . Period-doubling bifurcation curves are constructed in the parameter space for some particular initial conditions, that insures a certain asymptotic behaviour of the solutions (it belongs to "branch 1"). It is verified the conjecture that the "route to chaos" in the "branch 1" may be the Feigenbaum's route.

The organization of the global and bounded solutions of the above equation in branches (certain domains of solutions) is studied. An analysis is made of the relations between solutions belonging to different branches. It is verified that the existence of a full period-doubling cascade in the branch 1 implies the existence, at least partially, of period-doubling cascades in other branches. It is noted that, for some values of (τ, A) , the equation has many attractors.

Some series expansions of solutions of the above equation are presented. These series expantions may be partially computed on the set \mathbb{R} . An application of a result about the "stability" of branch 1 is made for the case $f(X) = A \sin(X-C)$, used to describe an optical system.

RESUMO

Analisa-se numericamente o comportamento das soluções da equação $\dot{X}(t) + X(t) = f(X(t-\tau))$ para $f(X) = A X (1-X)$, em função dos parâmetros τ , A . Constróem-se as curvas de duplicação de período no espaço de parâmetros para uma determinada condição inicial, que assegura um determinado tipo de solução assintótica (pertencente ao "ramo 1"). Verifica-se a conjectura de que a "rota para o caos" neste "ramo 1", possa ser a rota de Feigenbaum. Realça-se o fato de que esta equação, para alguns valores de τ , A , possui diversos atratores.

Estuda-se a organização das soluções globais e limitadas da equação acima em "ramos" (certos domínios de soluções), e faz-se uma análise das relações entre as soluções dos diversos "ramos". Constata-se que uma cascata de duplicação de período no ramo 1, implica em cascatas de duplicação, ao menos parciais, em outros "ramos".

Para a equação acima com $f(X) = A X (1-X)$, apresentam-se algumas soluções sob a forma de série, parcialmente computáveis sobre a reta, e faz-se uma aplicação de um resultado acerca da estabilidade do ramo 1 no caso $f(X) = A \text{sen}(X-C)$, que corresponde a uma equação da ótica.

ÍNDICE

Capítulo 1: Introdução	1
Capítulo 2: Considerações Gerais Acerca dos Sistemas Dinâmicos..	7
Capítulo 3: Dinâmica de Populações e o Modelo Estudado.....	19
Capítulo 4: Considerações sobre Equações com Retardamento.....	29
Capítulo 5: Análise Numérica das Duplicações de Período.....	52
Capítulo 6: Considerações Gerais sobre as Órbitas Globais de $\frac{1}{\tau} \dot{X}(t) + X(t) = A X(t-1) [1 - X(t-1)]$	120
Capítulo 7: Conclusão.....	145
Apêndice 1: Soluções em Série de Exponenciais.....	151
Apêndice 2: Uma Interpretação para os Fenômenos de Histerese em Sistemas Ópticos com Biestabilidade.....	165
Bibliografia.....	174

CAPITULO 1: INTRODUÇÃO

Nesta tese estudamos a equação diferencial com retardamento:

$$(1.1) \quad \frac{1}{\tau} \dot{X}(t) + X(t) = A X(t-1) [1 - X(t-1)].$$

Esta equação [Smith (1974)] é um caso particular de um modelo desenvolvido por Perez, Malta & Coutinho (1978) para descrever experiências realizadas com populações isoladas de moscas por Nicholson (1954) e Tadei (1975). Nessas experiências, populações de moscas são criadas em caixas isoladas, que são providas de um suprimento de alimento limitado para as adultas, e ilimitado para as larvas. Os dois ingredientes dinâmicos fundamentais dessas experiências, e reproduzidos em (1.1), são: - a dependência dinâmica do passado, devido ao intervalo de tempo entre os adultos colocarem os ovos, e estes darem origem a outros indivíduos adultos, e - a não linearidade da taxa de natalidade devido ao suprimento limitado de alimento.

Não é difícil perceber que, devido ao retardamento existente em (1.1), estamos em face a um problema cuja informação inicial requerida é uma função definida no intervalo unitário. Portanto, o espaço de fase natural deste sistema é o espaço de fase das funções definidas nesse mesmo intervalo.

Tentar construir uma teoria geométrica para o estudo de (1.1) não é uma coisa fácil, devido à dimensionalidade infinita do espaço de fase. Por outro lado, é extremamente conveniente o tratamento geométrico dos sistemas dinâmicos em dimensão finita. Nesta tese, levando em conta as duas últimas considerações, apresentamos, de maneira não rigorosa, alguns dos principais conceitos da teoria geométrica das equações diferenciais ordinárias e, em seguida, baseando-nos em argumentos de plausibilidade, fazemos uma extrapolação, de alguns destes resultados, para as equações diferenciais com retardamento. O que torna possível essa extrapolação é o grande número de resultados que são válidos em ambos os casos.

As equações do tipo (1.1) possuem um comportamento dinâmico bastante rico. No capítulo 4 apresentamos algumas propriedades das equações com retardamento [Hale (1977)], e fazemos uma breve descrição dos tipos de solução que (1.1) pode apresentar, a saber, soluções estacionárias, periódicas e caóticas.

Para aplicações práticas de equações do tipo da (1.1) é importante que saibamos algo acerca da estabilidade das suas soluções. A estabilidade local das soluções estacionárias é facilmente obtida a partir da linearização da equação em torno da solução estacionária. No caso da solução não ser estacionária, o máximo que conseguimos obter analiticamente são os limites inferior e superior, em torno do qual a solução deve oscilar. Quanto à estabilidade dessas soluções, as únicas informações que conseguimos obter são numéricas.

No caso em que (1.1) apresenta soluções caóticas, existe uma interessante, ainda que grosseira, analogia entre a dinâmica de (1.1), a dinâmica caótica da aplicação $X_{n+1} = A X_n (1 - X_n)$ associada a (1.1), e a dinâmica turbulenta de escoamento de fluidos [Ikeda & Matsumoto (1987)].

O fato de (1.1) apresentar uma dinâmica extremamente rica, já nos sugere que o estudo quantitativo de suas soluções deve ser, obrigatoriamente, de natureza numérica, e é esse o tipo de abordagem que utilizamos.

Existe uma conjectura acerca de sistemas do tipo (1.1), que afirma que uma das "rotas para o caos" que suas soluções apresentam, é a "rota de Feigenbaum" de duplicações de período [Feigenbaum (1980)]. Essa "rota" é caracterizada pela acumulação, aproximadamente geométrica, com razão assintótica $\delta = 4.6692\dots$, dos parâmetros em que ocorrem as duplicações de período. Um dos nossos principais objetivos neste trabalho é traçar as curvas de bifurcação das soluções estáveis de (1.1), no espaço de parâmetros (τ, A) , e uma vez traçadas essas curvas, verificar a veracidade da conjectura acima.

Usando um método numérico que consiste simplifadamente: - na integração de (1.1) para uma dada função inicial fixa, - em desprezar um certo intervalo assumido como transiente, e - fazer a análise de Fourier da parte "assintótica" da solução, fomos capazes de construir as curvas no espaço (τ, A) onde ocorrem as duplicações de período. Construímos somente as cinco primeiras curvas de duplicação, sendo que a quinta já nos dá, aproximadamente, a curva

de acumulação das duplicações de período.

Após a construção dessas curvas, foi necessário melhorar a precisão de alguns dos seus pontos para verificar a convergência geométrica dos pontos de duplicação de período. Confirmamos ser geométrica a convergência, com uma razão aproximadamente igual a $\delta = 4.6692\dots$. Com isso, concluímos que uma das "rotas para o caos" em (1.1) deve ser, de fato, a rota de "Feigenbaum".

Devemos ressaltar ser muito importante haver um certo controle sobre a condição inicial. A razão disso é que o sistema pode apresentar mais de um atrator e, dependendo da condição inicial que utilizamos, o sistema pode dirigir-se a um ou outro atrator.

A condição inicial que utilizamos, função constante próxima da solução estacionária, sempre nos levou a uma solução assintótica pertencente ao "ramo 1", que por sua vez acreditamos conter um único atrator. Dizemos que uma solução assintótica de (1.1) pertence ao ramo N se a mesma intercepta a solução estacionária, $X = \frac{A-1}{A}$, no máximo N vezes, no intervalo unitário.

Para certos valores de A, a equação (1.1) satisfaz certas condições, que permitem a utilização de um teorema de Mallet-Paret (1986) ; que assegura uma decomposição de Morse^(†) para (1.1). Nesta decomposição de Morse, os ramos que definimos acima são,

(†) Dizemos que o espaço de fase χ , de um dado sistema dinâmico, apresenta uma decomposição de Morse, se é possível definir uma coleção finita e ordenada s_1, s_2, s_3, \dots de conjuntos compactos invariantes, tal que, se $X \in \chi$, então existe $N \geq K$ tal que $\alpha(X) \subseteq s_N$ e $\omega(X) \subseteq s_K$, e mais, se $N = K$ então $X \in s_N$.

simplificadamente, os conjuntos de Morse . Entre outras coisas, este teorema nos garante que o ramo 1 é, de certo modo, o "mais estável" dos ramos. Isso explica, pelo menos para os valores de (τ, A) em que vale o teorema, a convergência das soluções que obtivemos para o ramo 1.

Existe uma série de relações entre as soluções e as dinâmicas nos diversos ramos. Por exemplo, o fato de existir cascata de duplicação de período completa no ramo 1, implica em no mínimo termos cascatas parciais de duplicação de período em ramos superiores. No capítulo 6, apresentamos e comentamos algumas características particulares da dinâmica dos ramos de ordem maior que 1 [Ikeda, Kondo & Akimoto (1982)], [Ikeda & Matsumoto (1987)]. Uma dessas características é a existência de muitas soluções simultaneamente estáveis dentro destes ramos, os chamados "isômeros". Devido a esse fato, a dinâmica no interior dos ramos superiores é bastante complexa, e a "rota para o caos" que neles ocorre deve apresentar maior complexidade do que aquela que ocorre no ramo 1.

Além disso, existem soluções de (1.1) que podem ser expressas por série de exponenciais. Estas séries são computáveis apenas em uma semi-reta negativa ($t < T$, onde T é uma constante), e são interessantes principalmente porque, para $t \rightarrow -\infty$, aproximam-se da solução estacionária, e para $t \rightarrow +\infty$, aproximam-se de soluções pertencentes a certos ramos, cuja ordens estão relacionadas à dimensão da variedade instável da solução estacionária. Esses resultados apresentamos no apêndice 1.

A aplicação do teorema de Mallet-Paret (1986) , a um resultado apresentado por Ikeda, Kondo & Akimoto (1982) , fornece um limite inferior para a ocorrência de instabilidade em uma solução do ramo 1, que nos conduz a uma solução do ramo 2 (fazemos tal aplicação no apêndice 2).

Concluindo, discutimos a possibilidade de um sistema com muitos atratores apresentar uma evolução de difícil previsão (ver, por exemplo, Grebogi et al. (1983)). Isso pode ocorrer principalmente no caso de sistemas realísticos, que sempre estão sujeitos a perturbações externas, ainda que pequenas. Essas perturbações podem fazer com que o estado do sistema mude de uma bacia de atração para outra, introduzindo dificuldades na previsibilidade de propriedades médias da solução. Por fim, fazemos breves comentários sobre implicações que esse fato teria no caso de sistemas biológicos mais complexos do que aquele que estudamos, sistemas esses que provavelmente devem, também, ter muitos atratores.

CAPITULO 2: CONSIDERAÇÕES GERAIS ACERCA DOS SISTEMAS DINÂMICOS

Sistemas Dinâmicos são palavras um tanto quanto gerais, e portanto difíceis de serem definidas. De maneira não rigorosa, eles se apresentam como relações entre variações, mas isto é vago, e é conveniente que apresentemos alguns exemplos. Um sistema dinâmico é dito resolvido, se conhecemos as relações, ou funções, entre suas diversas variáveis.

Típicos exemplos de sistemas dinâmicos são aqueles que aparecem em mecânica clássica. A fim de dar um exemplo de como se constrói um modelo matemático, que nos define um sistema dinâmico, a partir de um sistema físico, façamos uma breve análise do movimento de uma única partícula.

Dado uma partícula, conhecidas a sua posição e a sua velocidade num dado instante (t) , conheceremos a sua posição no instante $(t + \Delta t)$, onde Δt é infinitamente pequeno. Se o sistema for isolado, não há razão nenhuma para pensarmos que a velocidade no instante $(t + \Delta t)$ seja diferente da do instante (t) (isto implicaria em alguma anisotropia do espaço-tempo). Ou seja, para sistemas isolados a velocidade é constante (se esse raciocínio parecer estranho, pode se tomar isso por hipótese ou fato experimental).

Isso nos indica que essa partícula deve sentir a presença de

qualquer entidade externa através da variação da sua velocidade com o tempo. Denotando por \vec{F}/m o efeito conjunto da ação externa (suposta dependente da posição) e da sensibilidade do sistema, podemos escrever a lei que rege a dinâmica desse sistema como:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v} \\ \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}(\vec{x})}{m} \end{cases} .$$

Matematicamente, dado $\vec{F}(\vec{x})/m$, temos um sistema de equações diferenciais, que nos define um sistema dinâmico, e cuja solução nos dá a trajetória $\vec{x}=\vec{x}(t)$ da partícula.

Esse exemplo evidencia uma das maneiras mais comuns com que os sistemas dinâmicos aparecem, ou seja sistemas de equações diferenciais ordinárias (EDO). Dependendo do fenômeno natural que estamos estudando, e do tipo de hipóteses que fazemos para tentar "entendê-lo", chegamos a modelos matemáticos que dizem respeito a sistemas de equações integrais, equações funcionais, aplicações n-dimensionais com tempo discreto, etc..., e todos estes podem ser genericamente chamados de sistemas dinâmicos.

Neste capítulo, por motivo de clareza, restringiremos nossas considerações às equações diferenciais ordinárias. A exposição que faremos a seguir é não rigorosa, e tem por objetivo introduzir alguns conceitos utilizados no estudo das EDO de maneira bastante informal.

Matematicamente, um sistema de equações diferenciais

ordinárias, autônomo, em \mathbb{R}^n , pode ser definido pela relação:

$$(2.1) \quad \frac{dX}{dt} = \dot{X} = F(X),$$

onde: $X \in \mathbb{R}^n$,
 $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F \in C^1$ (*),
 n é natural e finito.

Sob essas condições em F , é possível provar [Arnold (1985)] que dada a condição inicial X_0 , existe uma única solução $X(t)$, para t em uma certa vizinhança de $t = 0$, tal que: (2.1) é uma identidade e $X(0) = X_0$. Quando quisermos explicitar a dependência da solução na condição inicial, escreveremos $X(t, X_0)$. Para uma grande classe de funções F é possível definir as soluções de (2.1) para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Daqui para frente consideraremos apenas F 's, que satisfaçam esta condição.

Resolver (2.1) é encontrar as suas soluções para qualquer $X_0 \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$.

Em geral não é difícil encontrar algumas soluções particulares de (2.1), mas resolver o problema, na quase totalidade dos casos, é impossível. Via de regra as funções que sabemos manipular não são suficientes para expressar o rico comportamento das soluções de

(*) C^1 é o conjunto das funções contínuas com primeira derivada também contínua.

(2.1).

Como uma tentativa de contornar o problema de se resolver explicitamente (2.1), foi criada a teoria qualitativa das EDO. Esta tem por objetivo resgatar características importantes das soluções de (2.1), usando para isso soluções particulares e propriedades geométricas gerais das EDO.

Na teoria geométrica das EDO, são de grande importância as soluções particulares de (2.1) que conseguimos explicitar. Em geral as únicas soluções que podem ser sistematicamente encontradas, são as chamadas estacionárias, ou seja aquelas que são constantes no tempo. A fim de encontrá-las, devemos resolver o sistema de equações algébricas:

$$F(X_e) = 0.$$

O espaço onde X está definido (no caso, \mathbb{R}^n) é denominado espaço de fase (χ). Nesse espaço, a cada ponto X , ao qual chamamos de estado do sistema, associamos um vetor dado por $F(X)$, ou seja, definimos um campo de vetores sobre χ . As soluções de (2.1) são definidas por curvas tangentes a $F(X)$, em cada ponto X .

Esse tratamento torna possível pensar no problema como o do escoamento n -dimensional de um fluido, onde dado o campo de velocidades, queremos encontrar suas linhas de corrente, ou seja a trajetória das partículas fluídas.

O simples fato de encarar o problema desta maneira, já nos sugere algumas perguntas acerca de (2.1), que podem nos ajudar a

classificar os sistemas de EDO.

Primeiramente, podemos calcular o n-divergente de $F(X)$, definido por:

$$\operatorname{div}(F(X)) = \sum_{i=1}^n dF_i(X)/dX_i.$$

Se $\operatorname{div}(F(X))=0$ teremos o análogo a escoamentos incompressíveis, que nesse caso definimos como sistemas conservativos (conservam volumes no espaço de fase). Caso não sejam conservados volumes, os definimos como dissipativos.

Em segundo lugar, podemos nos perguntar acerca da natureza dos pontos fixos de (2.1), ou seja, aqueles que são soluções estacionárias do sistema. Para isto, é conveniente linearizar o campo de vetores em torno dos pontos fixos. As propriedades de continuidade/diferenciabilidade do campo nos asseguram que, na maioria dos casos, esta é uma boa aproximação.

Definamos então a aplicação linear $D_p F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, associada ao ponto p do espaço de fase, e dada pela matriz:

$$(D_p F)_{ij} = dF_i(p)/dx_j,$$

que chamaremos de derivada de F em p .

Queremos agora estudar as propriedades do operador linear $D_p F$, e é conveniente que encontremos uma base, na qual este seja representado da maneira mais simples possível. Para isso devemos

resolver a equação característica $\det(D_p F - \lambda I) = 0$, e analisar a natureza dos λ 's (espectro de $D_p F$).

A seguir introduziremos algumas definições relacionando p e $D_p F$:

- O ponto p é dito hiperbólico, se $\det(D_p F - \lambda I) = 0$ não possui nenhuma raiz imaginária pura.

- O ponto p é localmente atrativo, se toda raiz de $\det(D_p F - \lambda I) = 0$ tem parte real menor que zero.

- O ponto p é dito localmente repulsivo, se pelo menos uma raiz de $\det(D_p F - \lambda I)$ tem parte real positiva.

- Se p não é repulsivo, dizemos então que a solução $X=p$ é estável.

Existe um importante teorema (Hartman & Grobman, [Palis & de Melo (1982)]) que assegura, no caso de pontos fixos hiperbólicos, que o campo vetorial F , em torno de p , e o campo linear $D_p F$, apresentam soluções localmente conjugadas (quer dizer existe um homeomorfismo em uma vizinhança de p , que associa às órbitas do sistema não linear as órbitas do sistema linearizado).

Esse teorema, mais o fato de que as matrizes com autovalores não imaginários puros formam um conjunto aberto e denso no espaço de matrizes (provido de uma métrica conveniente), nos permite dizer que os pontos fixos hiperbólicos são estáveis por pequenas perturbações em F . Ou, em outras palavras, existe uma vizinhança de F (definida no espaço dos campos vetoriais C^r em \mathbb{R}^n , com uma métrica conveniente) em que todos os outros campos vetoriais são topologicamente conjugados a F . Ou ainda, se fizermos uma pequena

perturbação em F , a dinâmica desse campo nas vizinhanças p não será qualitativamente alterada .

Muitas vezes estamos interessados em estudar as variações na dinâmica de um sistema, conforme alteramos algum de seus parâmetros característicos. Nesses casos, o resultado acima é extremamente importante pois, pelo menos localmente, ele garante que não ocorrerão alterações qualitativas na vizinhança do ponto fixo p , a menos que o espectro de $D_p F$ possua elementos sobre o eixo imaginário.

Outra característica interessante dos pontos fixos hiperbólicos, é que podemos decompor o espaço nas vizinhanças dos mesmos, na soma direta de dois subespaços euclídeos, o primeiro associado aos elementos do espectro com parte real negativa (E^s), e o segundo aos elementos do espectro com parte real positiva (E^u). Considerando a equação linear $\dot{Y} = (D_p F)Y$, onde $Y = X - p$, os pontos que pertencerem ao primeiro subespaço convergirão para $Y=0$, ou seja para $X=p$, e os que pertencerem ao segundo, divergirão de $Y=0$, ou seja de $X=p$. Feita essa observação, notamos que o teorema de Hartman & Grobman define localmente duas variedades associadas a p , uma conjugada a E^s chamada de variedade estável (W_{loc}^s), e outra conjugada a E^u chamada de variedade instável (W_{loc}^u).

Podemos agora estender a definição de variedade estável (W_p^s) e instável (W_p^u) associadas a p , simplesmente tomando o conjunto de todas as trajetórias que estão associadas às variedades W_{loc}^s e W_{loc}^u .

O conceito de variedades estável e instável associadas a um

determinado ponto fixo, é bastante importante no que diz respeito a qualidades globais do sistema. Da unicidade das soluções temos que por cada ponto do espaço de fase passa uma única trajetória. Isto implica que, ou uma trajetória qualquer está inteiramente contida nas variedades estável/instável de um certo ponto fixo p , ou não tem nenhum ponto em comum com as mesmas. Este fato tem muitas implicações geométricas, e grande parte da dinâmica do sistema pode ser obtida das características das variedades estável/instável dos diversos pontos fixos do sistema.

Note que tudo o que estamos falando está ligado a soluções estacionárias de (2.1). Além destas, existem outras soluções particulares de (2.1), muito importantes, mas muito mais difíceis de serem calculadas: as soluções periódicas. Em geral, com relação a estas, o máximo que se consegue fazer, com rigor matemático, é dar provas de existência.

Podemos generalizar, para as órbitas (ou trajetórias) periódicas, quase tudo o que foi dito para os pontos fixos. Para fazer isso é conveniente definir seção de Poincaré, ou seja, uma superfície (S) de codimensão 1 transversal à órbita periódica no ponto p . Sobre esta superfície, devido à continuidade de F , podemos definir, em uma vizinhança de p , uma aplicação $f: S \rightarrow S$ que a cada intersecção de uma dada órbita de (2.1), associa a próxima intersecção. Esquemáticamente, temos figura 2.1:

órbita periódica

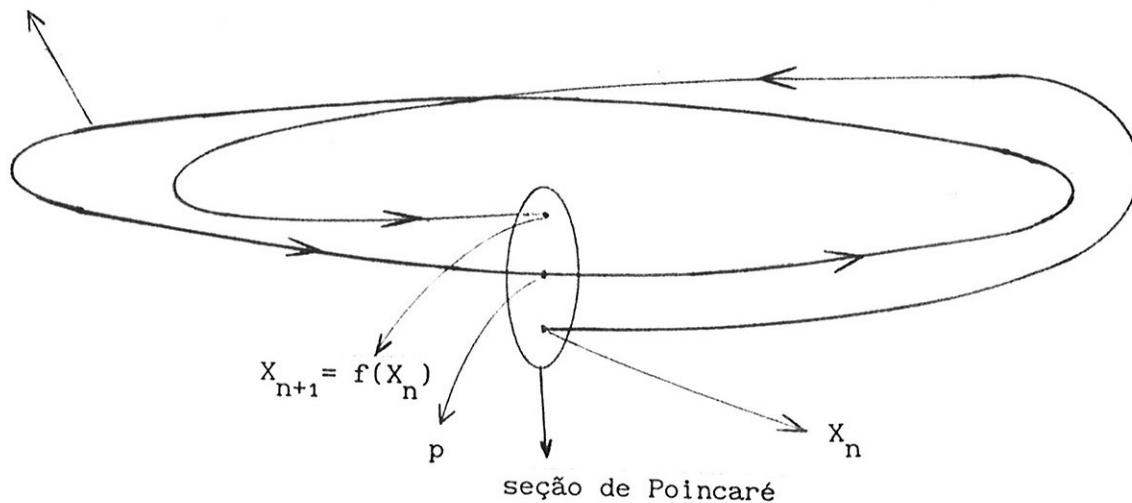


figura 2.1

Obviamente p será um ponto fixo da aplicação f , que por sua vez terá propriedades de continuidade e diferenciabilidade semelhantes às de F .

Podemos agora linearizar f em torno de p , definir a aplicação linear $D_p f$ e analisar o espectro de $D_p f$. Se esse espectro não contiver elementos sobre o círculo unitário, então dizemos que a órbita periódica é hiperbólica. Por um procedimento análogo ao utilizado para os pontos fixos de (2.1) é possível definir as variedades estável e instável associadas a p .

Dizemos que uma órbita periódica é localmente estável se a solução $p=f(p)$ é estável, ou seja, se todo λ pertencente ao espectro de $D_p f$ satisfaz $|\lambda| \leq 1$. Dizemos que ela é atrativa, se

$$|\lambda| < 1.$$

Note que tanto as órbitas periódicas, quanto os pontos fixos, podem ser atrativos. Na verdade objetos diferentes desses podem atrair as órbitas de uma determinada região do espaço de fase. Baseado nessa afirmação definimos um "atrator" \mathcal{B} [Guckenheimer & Holmes (1983)], como o conjunto no espaço de fase, que contenha, ao menos densamente uma órbita, e que possua uma vizinhança U , tal que para todo $s \in U$ temos $X(t,s) \in U$, $t > 0$, e $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t,s) \in \mathcal{B}$ (*). Ao conjunto de todos os pontos s que são atraídos por \mathcal{B} , damos o nome de bacia de atração de \mathcal{B} . Observe que a noção de atrator só é cabível no caso de sistemas dissipativos, uma vez que implica necessariamente na contração de volumes no espaço de fase.

Como no caso dos pontos fixos, ter conhecimento da existência de órbitas periódicas, e das características locais de F próximo as mesmas (p.ex. as dimensões das suas variedades estável e instável), é muito útil para a caracterização geométrica global do sistema.

(*) Paralelamente à definição de atrator é conveniente definir o conjunto limite- ω de um ponto s pertencente a uma órbita $X(t)$, $\omega(s)$, como o conjunto de todos os pontos b , tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} X(t_n) = b$ para alguma seqüência $t_n \rightarrow +\infty$. De maneira análoga, definimos o conjunto limite- α de um ponto s pertencente a uma órbita $X(t)$, $\alpha(s)$, como o conjunto de todos os pontos c , tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} X(t_n) = c$ para alguma seqüência $t_n \rightarrow -\infty$. Isso significa que uma trajetória $X(t)$ para t muito grande tende, ao seu conjunto limite- ω , quando $t > 0$, e ao seu conjunto limite- α , quando $t < 0$ [Hirsh & Smale (1974)].

Por exemplo, genericamente, é possível mostrar que bacias de atração de dois atratores disjuntos não se interceptam, e são separadas por variedades estáveis de conjuntos singulares não atrativos (como pontos fixos ou órbitas periódicas). Ver figura 2.2 [Guckenheimer & Holmes (1983)].

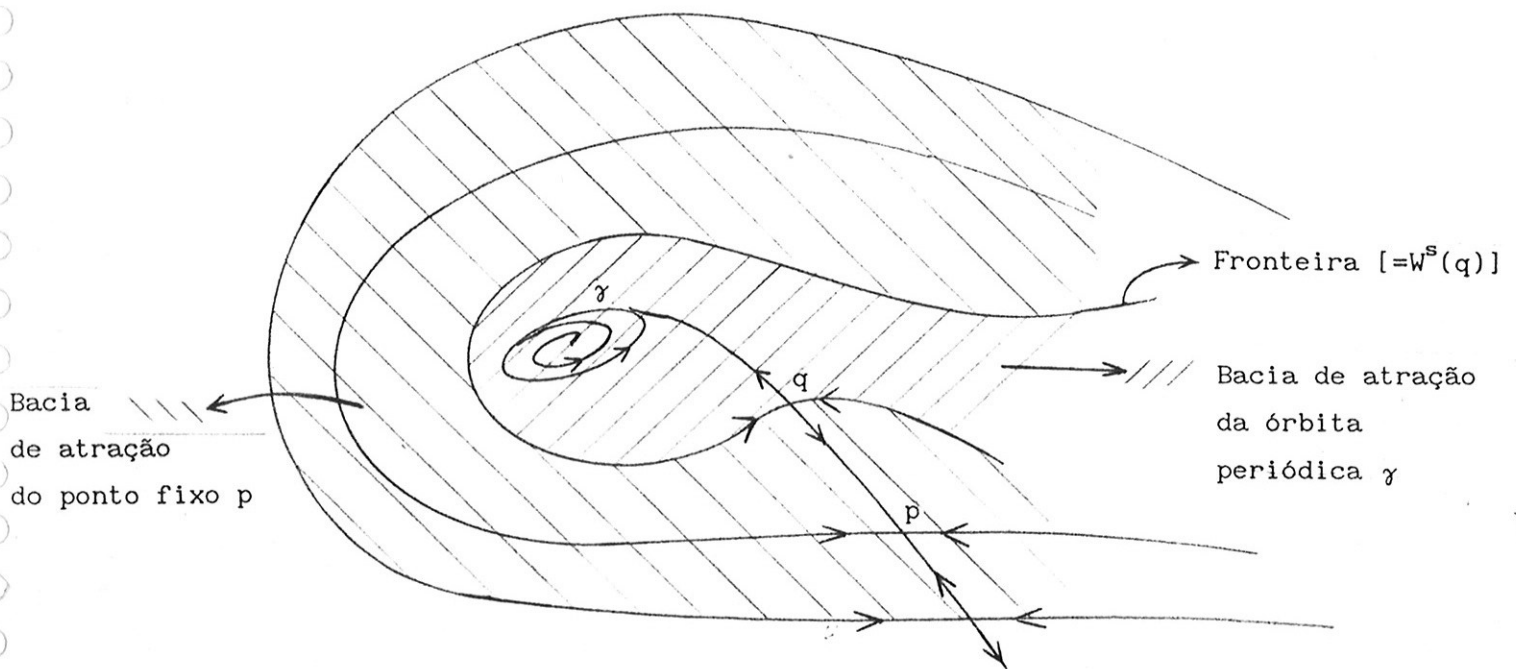


figura 2.2

Nesse ponto, é necessário que façamos uma observação acerca da aplicação prática da teoria geométrica das equações diferenciais.

Como citado acima, podemos ter uma idéia razoável de como se comporta um determinado sistema do tipo (2.1), se conhecermos algumas de suas propriedades, como por exemplo suas soluções estacionárias e periódicas. Portanto para cada F , que nos interesse, é necessário que determinemos pelo menos alguns destes

elementos, e isso nem sempre é fácil. Mesmo encontrar soluções estacionárias, ou seja, resolver o sistema de equações algébricas $F(X)=0$ é extremamente difícil, dependendo da dimensão e natureza de F . Com isto concluímos que, mesmo para realizar estudos qualitativos em sistemas dinâmicos, é quase sempre indispensável o uso de uma ferramenta de cálculo potente, e é aí que está o papel fundamental do computador. Sem dúvida a teoria dos sistemas dinâmicos sofreu um grande avanço nos últimos 30 anos, retomando o desenvolvimento que conheceu no fim do século passado e início desse século. Também, nestas últimas tres décadas, ocorreu um grande avanço na área da computação digital. Certamente o primeiro avanço está causalmente relacionado ao segundo.

Para finalizar este capítulo, gostaria de dizer que apesar de ter feito considerações apenas acerca de sistemas dinâmicos em dimensão finita, a maioria destas também se aplicam a certos sistemas em dimensão infinita. Estes sistemas também apresentam soluções estacionárias e periódicas, e em geral podemos fazer linearizações em torno destas, etc... A analogia entretanto não é completa. A teoria dos sistemas dinâmicos em dimensão infinita tem suas características próprias, que dependem da natureza do sistema tratado. O aumento no número de dimensões geralmente enriquece qualitativamente o problema.

Nos próximos capítulos, falaremos acerca de um específico sistema em dimensão infinita.

CAPITULO 3: DINÂMICA DE POPULAÇÕES E O MODELO ESTUDADO

Grande parte do desenvolvimento da teoria dos sistemas dinâmicos, foi motivada pelo estudo de sistemas físicos, em particular o movimento dos corpos celestes.

Nesse século, em ciências como a Biologia ou a Meteorologia, tentou-se construir modelos matemáticos relativamente simples para explicar fenômenos bastante complexos, objetos destas ciências.

Ao contrário do que acontece na Física, no entanto, esses modelos não conseguem, na grande maioria das vezes, dar-nos informação quantitativa precisa. Isso certamente se deve ao fato de que, para se construir esses modelos simples, é necessário desprezar uma série de fatores não desprezíveis.

Melhorar essas estimativas quantitativas não é fácil. Muitas vezes o que se faz é complicar parametricamente o modelo, mas na prática isso traz outros problemas. Quanto mais parâmetros tem um modelo, mais informações experimentais são requeridas, e muitas vezes, ou é impraticável obtê-las, ou é mais fácil fazer um ensaio do sistema.

Com isso, o objetivo de se estudar modelos quantitativos simples, em biologia e outras áreas, não é fazer previsões quantitativas precisas, mas tentar isolar fatores de um certo fenômeno, que de alguma maneira reproduzam as suas características

principais qualitativamente.

Neste trabalho estamos interessados em um problema originário da dinâmica de populações.

Simplificadamente, por população entendemos um conjunto de indivíduos de uma mesma espécie, associados a uma determinada região do espaço. A dinâmica de populações tem por objetivo estudar as leis que regem a variação do número de indivíduos de uma ou mais populações, em função do tempo.

Em geral, o que se observa na natureza é uma intrincada teia de relações entre: indivíduos de uma mesma espécie, indivíduos de espécies diferentes, e indivíduos e o meio ambiente. Uma vez que na maioria dos problemas, só estamos interessados no número de indivíduos de uma dada espécie, suprimimos o nível de interação individual, usando a definição de população, e reduzimos assim o problema a inter-relações entre populações e o meio ambiente.

Mesmo assim, o problema continua deveras complexo, e é necessário que se defina em quais das suas variáveis estamos interessados. Se estamos interessados em algumas (ou alguma) populações especificamente, devemos concentrar a influência de todos os demais fatores, em parâmetros ou excitações que, ao menos aproximadamente, independam das variáveis de interesse. Essa certamente, é a etapa da modelagem que mais requer critério e conhecimento da ecologia da população e do ambiente. A nosso ver, é também onde se perde grande parte da previsibilidade quantitativa.

Com essas simplificações, reduz-se o problema a umas poucas variáveis, e através de relações entre as variações das mesmas,

constrói-se um modelo matemático para o sistema.

O modelo que estudaremos nesta tese, trata do problema de uma única população isolada.

Na verdade a motivação para a construção desse modelo não foi a observação de uma determinada população natural, mas sim experimentos realizados por Nicholson (1954) e Tadei (1975).

De maneira simplificada, o experimento consiste em criar moscas (em Tadei (1975) utilizou-se mosca de fruta, "Drosophyla"), isoladas em certas caixas, limitando o fornecimento de alimento aos adultos e não às larvas.

O ciclo de vida das moscas é caracterizado por duas fases muito diferentes. A primeira chamada de fase larval, onde o animal é uma larva, e a segunda de fase adulta, onde o animal é uma mosca propriamente dita .

O ciclo de vida começa pela deposição de ovos, realizada por indivíduos adultos. Estes ovos após certo tempo eclodem dando origem a larvas, que se alimentam intensivamente. Após um certo tempo estas larvas iniciam um processo de metamorfose, conhecido por período de pupação. Passado um certo período, estas pupas transformam-se em adultos e estes reiniciam o processo de acasalamento e postura dos ovos. Note que a única fase fértil é a adulta. Neste trabalho o intervalo de tempo entre a postura dos ovos e o começo da fase adulta, será abreviado por τ .

A primeira observação a ser feita em direção à construção de um modelo para o experimento, é que N , o número de moscas que habitam uma dada caixa, é uma variável discreta. A segunda, que

talvez seja a principal origem das dificuldades dos modelos para populações, é que definimos uma variável que agrupa elementos que não se comportam exatamente da mesma maneira. Cada indivíduo é diferente (pense na espécie humana) e se comporta diferentemente. Isto causa problemas no que diz respeito à caracterização da população, pois suas características serão dadas por distribuições de probabilidade.

Nos casos em que trabalhamos com um número não muito grande de indivíduos, é necessário que construamos modelos discretos e, se possível, com componentes estocásticos [Svirezhev & Logofet (1983)], [Levins (1969)]. Devemos ter cuidado, entretanto, com modelos onde a matemática é complicada pois isto torna mais difícil o entendimento da dinâmica do problema.

Modelos relativamente simples são obtidos no caso de ser muito grande o número de indivíduos dentro das caixas. Nesta situação vale a aproximação do contínuo, e podemos considerar apenas as propriedades médias da população.

Sob essas hipóteses Perez, Malta & Coutinho (1977) (ver também Smith (1968), (1974)) desenvolveram um modelo para as experiências [Nicholson (1954)], [Tadei (1975)], que passamos a descrever.

Se $N(t)$ é a função que a cada instante (t) nos dá o número, ou a densidade, de moscas dentro da caixa, então a variação $N(t+\Delta t)-N(t)$, entre os instantes t e $t+\Delta t$, é dada pelo número de animais que passa para a fase adulta, menos o número de animais que morre neste mesmo intervalo de tempo. O ingrediente fundamental do modelo, é que o número de moscas que passa para a fase adulta no

instante t não é função do número de moscas no instante t , $N(t)$, mas do número do número destas no instante $t-\tau$, $N(t-\tau)$. O número de moscas que morre no instante t , é simplifadamente assumido como dependente somente de $N(t)$.

Com essas hipóteses, definimos as funções:

i) $b=b(N(t-\tau))$ que dá o número de indivíduos que passa para a fase adulta por unidade de tempo, "per capita", em função da população no instante $t-\tau$.

ii) $d=d(N(t))$ que dá o número de indivíduos que morre por unidade de tempo, "per capita", em função da população no instante t .

Fazendo-se o limite $\Delta t \rightarrow 0$ pode-se escrever a equação diferencial para $N(t)$:

$$(3.1) \quad \frac{dN(t)}{dt} = b(N(t-\tau)) N(t-\tau) - d(N(t)) N(t).$$

As curvas $b(N)$ e $d(N)$ não são facilmente obtidas na prática, mas conhecemos seus comportamentos.

A função $d(N)$ deve ser quase constante para N abaixo de um certo valor, e depois deve crescer cada vez mais rapidamente.

A função $b(N)$, conforme vamos crescendo N , deve partir de um máximo dado por características fisiológicas da mosca, permanecer quase constante para N abaixo de um certo valor, e depois decrescer, tendendo a zero para N grande, ou atingindo o zero e aí

permanecendo.

Essas formas estão obviamente relacionadas à competição por alimento.

O esboço dessas funções é apresentado abaixo, figura 3.1:

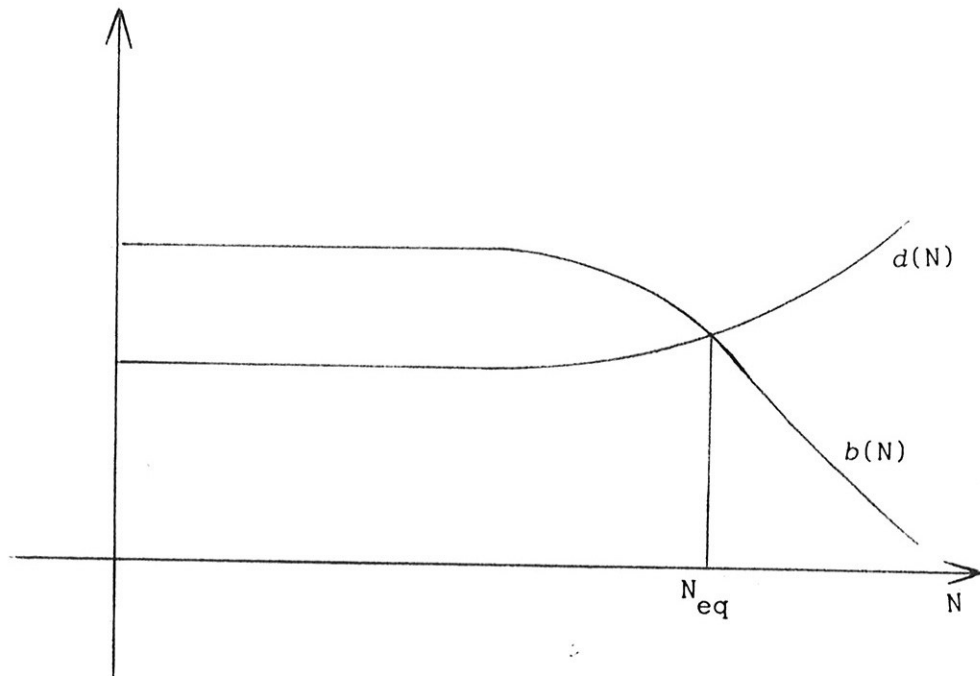


figura 3.1

Note que, apesar de o modelo ter sido desenvolvido tendo em vista as já citadas experiências, ele pode nos dar boas indicações qualitativas acerca de populações que vivem em condições naturais, desde que estas condições não sejam alteradas pelas variações de N , e nem variem muito por si só.

Em alguns casos existem duas modificações que podem melhorar bastante os resultados deste modelo. Primeiramente podemos admitir

que as taxas de natalidade e mortalidade não são funções da população apenas em determinados instantes como t ou $t-\tau$, mas em intervalos de tempo [Hadelar (1979)]. Em segundo lugar podemos adicionar uma excitação estocástica à equação (3.1), a fim de reproduzir as variações ambientais [Svirezhev & Logofet (1983)], [Lewotin & Cohen (1969)].

Uma vez que estamos interessados em propriedades qualitativas das soluções de (3.1), é conveniente escolher duas funções representativas $b(N)$ e $d(N)$, que serão utilizadas na análise numérica do sistema. Vamos fazer esta escolha da maneira mais simples possível, sem perder de vista as restrições sobre $b(N)$ e $d(N)$. Levando em conta estas observações, escolhemos as funções que Smith (1968) utilizou como modelo para esta mesma experiência, (ver figura 3.2).

$$\begin{cases} b(N) = C_1 N(t-\tau) + C_2 & \text{se } N < C_2/C_1, \\ b(N) = 0 & \text{se } N > C_2/C_1, \end{cases}$$

(3.2)

$$d(N) = C_3$$

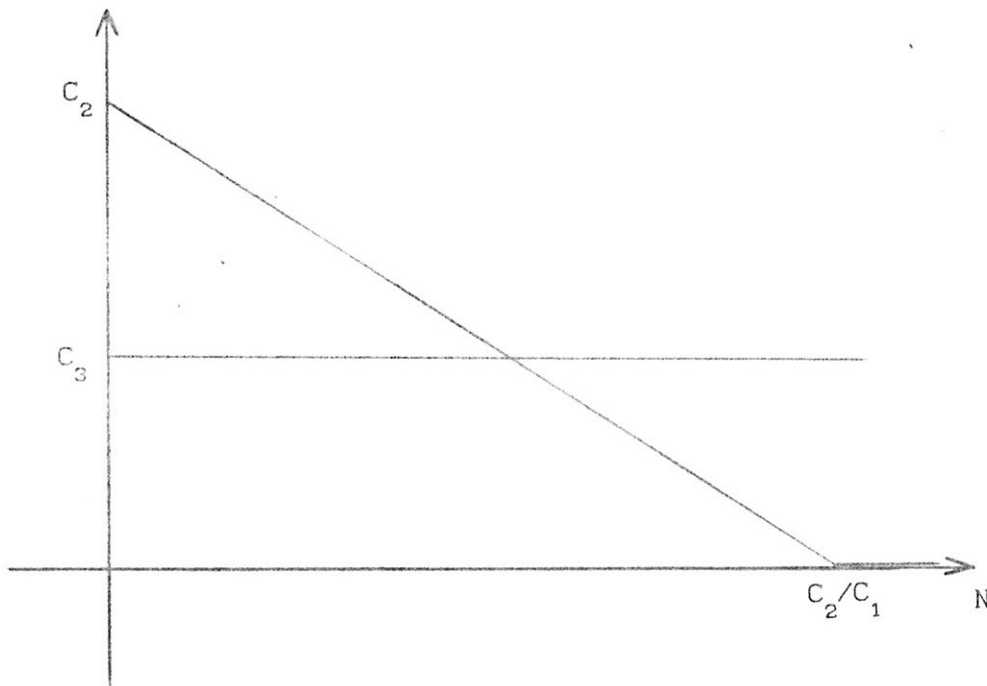


figura 3.2

Introduzindo (3.2) em (3.1), ficamos com:

$$(3.3) \quad \frac{dN(t)}{dt} = (-C_1 N(t-\tau) + C_2) N(t-\tau) - C_3 N(t).$$

Fazendo uma mudança de escala em t , redefinindo N e os parâmetros, como a seguir:

$$t' = t/\tau, \quad X(t) = (C_1/C_2) N(t\tau), \quad \tau' = C_3\tau, \quad A = C_2/C_3,$$

e introduzindo essas modificações em (3.3), omitindo ('), ficamos com:

$$(3.4) \quad \frac{\dot{X}}{\tau} = \frac{1}{\tau} \frac{dX(t)}{dt} = -X(t) + A X(t-1) [1-X(t-1)] .$$

Nota-se que (3.4) é caracterizada por dois parâmetros. Um que é essencialmente o retardamento τ , que por causa da mudança de escala de tempo está dividindo o lado esquerdo de (3.4), e outro o parâmetro A , que caracteriza geometricamente o sistema. Com isso nosso objetivo fica sendo caracterizar as soluções de (3.4) em função dos dois parâmetros τ e A .

Note que, quando τ é muito grande, podemos pensar que o lado esquerdo de (3.4) é muito pequeno (não levando em conta que $|\dot{X}|$ também pode ser bastante grande), e desprezando-o, obtemos:

$$X(t) = A X(t-1) [1 - X(t-1)],$$

ou seja a versão contínua da aplicação quadrática, que é certamente um dos sistemas dinâmicos, com comportamento irregular, mais bem estudado.

Na prática, esse limite ingênuo se mostra bastante útil, ainda que não tenha sido provado rigorosamente, e que seja dúbia a sua veracidade.

Como vemos, (3.4), por si só, possui um grande interesse matemático, pois é um sistema contínuo relativamente complicado, e possivelmente relacionado a um sistema discreto muito bem conhecido, de dinâmica não trivial.

No próximo capítulo veremos algumas características das equações do tipo (3.4).

CAPITULO 4: CONSIDERAÇÕES SOBRE EQUAÇÕES COM RETARDAMENTO

Existe uma grande diferença entre os sistemas dos quais falei no capítulo 2, e o que apresentei no capítulo 3.

Os sistemas do capítulo 2, dados por EDO, tem suas evoluções temporais determinadas apenas pelos valores das suas variáveis em algum instante. Note que esses sistemas possuem uma relação causal extremamente particular, nos quais a evolução futura só depende do instante inicial.

Vimos, no capítulo anterior, que o sistema que estamos interessados não satisfaz a relação causal acima pois, tem como ingrediente fundamental, uma dependência dinâmica no seu passado. Na verdade muitos modelos que se aplicam a problemas de engenharia (principalmente aos de controle), de biologia, de física, etc..., apresentam evolução dependente do passado. Dizemos que esses sistemas apresentam memória.

Em particular, nosso sistema apresenta um termo de memória formalmente simples, um retardamento no argumento da função incógnita, como mostrado abaixo:

$$(4.1) \quad \frac{\dot{X}}{\tau} = -X(t) + f(X(t-1)).$$

Tais equações são chamadas de equações diferenciais com retardamento (EDR).

Antes de mais nada, apresentaremos um método para resolver as EDR.

Suponha que seja dada uma função qualquer $\phi(t)$, $t \in [-1; 0]$, e que imponhamos que $X(t) = \phi(t)$ para t nesse intervalo. Substituindo essa condição em (4.1), ficamos com:

$$\dot{X} = -X(t) + f(\phi(t-1)), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Podemos agora integrar essa equação nesse intervalo obtendo:

$$(4.2) \quad X(t) = \phi(0) e^{-\tau t} + \tau \int_0^t e^{-\tau(t-s)} f(\phi(s-1)) ds ,$$

para $0 \leq t \leq 1$.

Note que ajustamos $X(t)$ de modo que $X(0) = \phi(0)$.

Se, de maneira análoga, considerarmos o intervalo $[1, 2]$, obteremos uma expressão semelhante a (4.2) para $X(t)$ neste mesmo intervalo.

De maneira geral, se definirmos $X_n(t) = X(t+n-1)$, onde $X_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ com $X_0(t) = \phi(t)$, teremos que a solução do problema será dada pela seguinte aplicação no espaço das funções:

$$(4.3) \quad X_{n+1}(t) = X_n(1) e^{-\tau t} + \tau \int_0^t e^{-\tau(t-s)} f(X_n(s)) ds,$$

para $0 \leq t \leq 1$.

A primeira característica que quero realçar nessa solução, é que ela requer, como informação inicial, uma função no intervalo $[0,1]$. Quando quisermos explicitar a dependência da solução na função inicial, escreveremos $X(t,\phi)$, onde fica subentendido que ϕ está definida no intervalo $[-1,0]$.

Na verdade pode se provar que se f e ϕ são razoavelmente bem comportadas, então é possível obter uma única solução de (4.1), definida para $t > 0$ (este resultado é decorrência direta dos teoremas para EDO). Além disso, as integrações sucessivas "alisam" cada vez mais a solução, de modo que para $t \rightarrow \infty$, $X(t) \rightarrow C^\infty$.

Como vimos no capítulo 2, a teoria qualitativa das EDO é fortemente baseada em argumentos geométricos e na noção de espaço de fase.

Gostaríamos também de construir uma teoria geométrica para as EDR mas, antes de mais nada, seria necessário que definíssemos algo análogo ao espaço de fase das EDO.

Devido ao fato de estarmos lidando com uma equação diferencial de primeira ordem e uma única variável, poderíamos pensar que talvez a reta fosse uma boa candidata a espaço de fase de (4.1). Esbarramos, entretanto, no problema de que a informação inicial requerida pela equação é uma função.

Mesmo eliminando o problema da função inicial, ou seja, levando em conta apenas as soluções globais de (4.1), definidas para qualquer t , $t \in \mathbb{R}$, veremos que a reta não é uma boa candidata a espaço de fase. Para isso consideremos o exemplo [Hale (1977)]:

$$(4.4) \quad \dot{X}(t) = -X(t - \pi/2),$$

que tem como soluções globais:

$$(4.5) \quad X(t) = \sin(t) \quad \text{e} \quad X(t) = \cos(t),$$

entre outras.

Note que essas soluções se interceptam infinitas vezes em $t \in \mathbb{R}$. Se considerarmos \mathbb{R} como espaço de fase, suas órbitas coincidirão, mesmo sendo diferentes em qualquer intervalo de \mathbb{R} . Essas órbitas ainda conterão outras órbitas como, por exemplo, a da solução trivial.

De outra maneira, consideremos como espaço de fase ζ , o espaço das funções contínuas, definidas em $[-\pi/2, 0]$. Se pensarmos que as soluções de (4.4) em cada instante t definem uma função em ζ , então podemos definir a órbita das soluções (4.5), como:

$$\gamma = \{ \psi: \psi(\theta) = \sin(t+\theta), \quad -\pi/2 \leq \theta \leq 0, \quad \psi \in \zeta, \quad \text{para } t \in [-\infty, +\infty] \}$$

Note que, por essa definição, $\sin(t)$ e $\cos(t)$ pertencem à mesma órbita pois, na verdade, são a mesma função, a menos de uma translação. Neste caso a órbita da solução trivial, um ponto em ζ , não está contida na órbita acima. A órbita de (4.5) tem ainda a conveniente propriedade de ser fechada, com período 2π , o que reproduz o fato de (4.5) ser periódica com o mesmo período. Como vemos, o espaço das funções ζ , é o espaço de fase natural de (4.4). De maneira análoga, define-se o espaço de fase χ de (4.1).

Nesse ponto, é oportuno apresentar algumas diferenças entre as órbitas definidas por (4.1) em χ , e as órbitas definidas pelas EDO (2.1) em \mathbb{R}^n .

Primeiramente, para (2.1), dado um estado X_0 , é possível obter, ao menos localmente, a órbita que passa por X_0 , tanto para $t > 0$ quanto para $t < 0$.

Para as EDR é, em geral, impossível estender em direção ao passado a órbita que se origina em ϕ . Por exemplo, se para (4.4) damos como função inicial $\phi = \text{cte} \neq 0$, para $t \in [-\pi/2, 0]$, temos que:

$$X(t - \pi/2) = \frac{d\phi}{dt} = 0, \quad \text{para } -\pi/2 \leq t \leq 0,$$

e não conseguimos impor a condição de continuidade em $-\pi/2$. Portanto, essa função inicial não admite uma extensão da solução no sentido de $t < 0$.

Outro fato curioso das EDR, é que, duas funções iniciais diferentes, podem dar origem a uma órbita que coincide após um

intervalo finito de tempo. Novamente suponhamos dadas as duas funções iniciais:

$$(4.6) \quad \phi_1(t) = \alpha_1 t, \quad \phi_2(t) = \alpha_2 t, \quad \text{com} \quad \alpha_1 \neq \alpha_2, \quad \alpha_1 < 0, \quad \alpha_2 < 0$$

$$\text{e } t \in [-\pi/2, 0],$$

e a equação:

$$\dot{X}(t) = X(t) X(t - \pi/2).$$

Obviamente, as duas funções iniciais (4.6) darão origem à solução trivial da equação acima, e portanto suas órbitas coincidirão para $t > 0$.

Apesar dessas diferenças, muitos dos resultados do capítulo 2 também são válidos para as EDR. Entre estes resultados, está o teorema de Hartman & Grobman que garante a existência das variedades instável e estável nas vizinhanças de pontos hiperbólicos. Também é possível associar variedades estáveis e instáveis às vizinhanças de órbitas periódicas hiperbólicas, assim como estender as definições dessas variedades, etc. Daqui para frente consideraremos muitos dos resultados mencionados para as EDO, válidos também para as EDR. Um tratamento rigoroso das EDR está fora dos nossos objetivos, e o leitor interessado deve dirigir-se a Hale (1977) e Bellman & Cooke (1963).

Neste trabalho, estamos especificamente interessados em saber como as soluções da equação (4.1) com $f(X) = AX(1-X)$ variam conforme

variamos os dois parâmetros τ e A . Como já dissemos, um tratamento quantitativo desse problema, com respeito a τ e A , só é possível numericamente. Entretanto, é possível fazer algumas afirmações acerca das soluções de (4.1), baseando-nos apenas nas propriedades desta e de $f(X)$.

A seguir expomos alguns resultados acerca das soluções de (4.1). A princípio consideramos, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1$, impondo-lhe as restrições necessárias conforme o resultado que queremos apresentar.

Primeiramente suponhamos que $f(X_{eq}) = X_{eq}$, de modo que (4.1) possua uma solução estacionária $X_{eq} = \text{cte}$.

Nesse caso podemos linearizar (4.1) em torno de X_{eq} , $Y = X - X_{eq}$, de modo a ficar com:

$$(4.7) \quad \frac{1}{\tau} \dot{Y}(t) = -Y(t) + f'(X_{eq}) Y(t-1),$$

$$\text{onde } f'(X_{eq}) = \left. \frac{df(X)}{dX} \right|_{X_{eq}}.$$

Essa equação pode ser analisada com o auxílio da transformação de Laplace [Bellman & Cooke (1963)], ou através de uma solução tentativa do tipo $Y(t) = e^{\lambda t}$. Substituindo essa solução tentativa em (4.7), e simplificando os termos em $e^{\lambda t}$, ficamos com:

$$(4.8) \quad \frac{\lambda}{\tau} + 1 - f'(X_{eq})e^{-\lambda} = 0,$$

conhecida por equação característica de (4.7) (Caso λ seja raiz de (4.8) com multiplicidade algébrica maior do que 1, as soluções de (4.7) podem vir a ser produtos de polinômios por exponenciais).

Note que, em geral, λ pode ser complexo, o que define o par de equações reais:

$$(4.9) \quad \begin{cases} \alpha/\tau + 1 = f'(X_{eq}) e^{-\alpha} \cos\beta \\ \beta/\tau = -f'(X_{eq}) e^{-\alpha} \sin\beta \end{cases}, \quad \text{onde } \lambda = \alpha + \beta i,$$

ou

$$(4.10) \quad \begin{cases} (\alpha/\tau + 1)^2 + (\beta/\tau)^2 = (f'(X_{eq}))^2 e^{-2\alpha} \\ \beta/(\alpha + \tau) = -\text{tg}\beta \end{cases},$$

Existe uma série de resultados acerca de equações desse tipo [Bellman & Cooke (1963)]. Um resultado importante, é que todas raízes de (4.9) satisfazem $\alpha < M$, para algum M real, ou seja, as raízes de (4.8) estão em um semi plano esquerdo do plano complexo. Se τ for suficientemente pequeno, é fácil notar, a partir de (4.10), que todas as raízes possuem $\alpha < 0$. Conforme vamos aumentando τ , as raízes vão se deslocando continuamente para a direita. Estamos particularmente interessados nos pontos em que $\alpha = 0$, o que implica nas equações:

$$(4.11) \quad \begin{cases} 1 = f'(X_{eq}) \cos\beta \\ \beta/\tau = -f'(X_{eq}) \sin\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \arccos \left[\frac{1}{f'(X_{eq})} \right] + 2\Pi(n-1) \\ 1/\tau = -f'(X_{eq}) (\sin\beta)/\beta \end{cases} .$$

Note que (4.11) define uma família de curvas, indexadas por n , no espaço $(\tau, f'(X_{eq}))$. Estas curvas representam o cruzamento do eixo imaginário por sucessivos pares de raízes, conforme aumentamos um dos parâmetros, e deixamos o outro fixo.

Note que se chamarmos de τ_1 o ponto em que o primeiro par ($n=1$) de raízes cruza o eixo imaginário, então de (4.11):

$$(4.12) \quad \tau_1 = \frac{1}{-f'(X_{eq})} \frac{\beta_1}{\sin\beta_1}, \quad \beta_1 = \arccos \left[\frac{1}{f'(X_{eq})} \right].$$

e substituindo (4.12) em (4.11):

$$(4.13) \quad \tau_n = \tau_1 \left(1 + \frac{2\Pi(n-1)}{\beta_1} \right),$$

$$(4.14) \quad \beta_n = \beta_1 + 2\Pi(n-1) ,$$

ou seja todos os τ 's e β 's em que raízes cruzam o eixo imaginário, estão relacionados a τ_1 e β_1 de maneira muito simples.

Outra propriedade facilmente obtida de (4.10), é que $|f'(X_{eq})| \geq 1$ é condição necessária para que suas raízes possuam parte real positiva.

Note que, se todas as raízes de (4.8) tem parte real negativa, então podemos dizer que a solução de (4.7), $Y=0$, é assintoticamente estável, e no mínimo a solução $X=X_{eq}$ satisfaz essa mesma propriedade em alguma vizinhança de X_{eq} para (4.1).

A curva associada à estabilidade local de $X=X_{eq}$, solução de (4.1) com $f(X)=AX(1-X)$, é dada na figura 5.44, e corresponde aos pontos onde essa solução sofre uma bifurcação de Hopf (isso pode ser rigorosamente provado quando variamos τ [Hale (1977)], [de Oliveira (1984)], ver também Marsden & McCracken (1976)).

Se continuarmos aumentando o parâmetro τ , ou o equivalente a $|f'(x_{eq})|$, de modo a $X = X_{eq}$ perder a estabilidade, observaremos que (4.1) apresentará uma solução periódica estável. Numa vizinhança do ponto de bifurcação, a existência dessa solução é assegurada pelo teorema de Hopf. Provas da existência de soluções periódicas, para parâmetros longe da bifurcação de Hopf, são fornecidas em inúmeras referências. Para o caso em que estamos interessados, o melhor dos resultados provavelmente é o de Mallet-Paret (1986), onde é provado um teorema que garante a existência de soluções periódicas em toda a região onde X_{eq} é instável, desde que $f(X)$ satisfaça a condição de "negative feedback", ou seja:

$$(4.15) \quad \begin{cases} f(X) > X_{eq} & \text{se } X < X_{eq} \\ f(X) < X_{eq} & \text{se } X > X_{eq} \\ \left. \frac{df(X)}{dX} \right|_{X_{eq}} < 0 \end{cases} .$$

À primeira vista a função $f(X)=AX(1-X)$, na qual estamos interessados, não satisfaz essas condições. Mais adiante apresentaremos um resultado acerca dos limites superior e inferior dessas soluções, que nos assegurará que, pelo menos para uma importante região do espaço (τ, A) , o teorema de existência acima é válido. Nas demais regiões, apesar de não termos encontrado prova de existência de soluções periódicas, nosso resultado numérico leva a afirmar que elas existem. Com essa observação, não mais nos referiremos à existência de soluções. Uma vez que elas são observadas numericamente, é assumido que elas existam.

O problema da estabilidade das soluções periódicas de (4.1) é bastante difícil, e quase não existem resultados rigorosos acerca do mesmo (um artigo interessante que se refere a esse assunto, é Kaplan & Yorke (1977)).

Sistemas do tipo (4.1), em geral apresentam um número crescente de órbitas periódicas conforme aumentamos o parâmetro τ , fato que também pode ocorrer para outros parâmetros embutidos em $f(X)$. O estudo de como essas soluções aparecem em função de τ , A , para $f(X)=AX(1-X)$, será apresentado no próximo capítulo.

Mesmo não conhecendo as soluções de (4.1), é muitas vezes possível fazer afirmações acerca dos seus limites superior e inferior. A seguir apresentamos um resultado nesse sentido.

Primeiramente fazemos a hipótese:

$$(4.16) \quad f: I \rightarrow I \quad \text{e} \quad f(I) \subseteq I,$$

onde I é um intervalo fechado da reta, $I=[D,C]$.

Suponhamos, também, que as funções iniciais $\phi(t)$, que utilizaremos, satisfaçam: $\phi: [-1,0] \rightarrow I$.

Sob essas condições, consideremos a equação (4.1) no intervalo $[0,1]$:

$$\frac{1}{\tau} \dot{X}(t) + X(t) = f(\phi(t-1)),$$

multiplicando-a por $e^{\tau s}$, obtemos:

$$e^{\tau s} (\dot{X}(s) + \tau X(s)) = \frac{d}{ds} (e^{\tau s} X(s)) = \tau e^{\tau s} f(\phi(s-1)) \leq \tau e^{\tau s} C.$$

Integrando em s :

$$e^{\tau t} X(t) - X(0) \leq C(e^{\tau t} - 1) \quad \Rightarrow \quad X(t) \leq C.$$

Raciocinando de maneira análoga obtemos o limite inferior: $X(t) \geq D$. Com isso temos que $X(t) \in I$, para $t \in [0,1]$. Mas essa condição é a satisfeita por ϕ no intervalo $[-1,0]$, e portanto podemos raciocinar indutivamente e afirmar que: $D \leq X(t) \leq C$, para $t \geq 0$.

Suponhamos agora que a solução oscile no intervalo $[D,C]$. Então das propriedades de diferenciabilidade da solução, segue que nos seus pontos de máximo e mínimo teremos $\dot{X}=0$, e então de (4.1)

temos que $X(t)$ satisfará:

$$X(t) = f(X(t-1)).$$

Se t_1 é o ponto onde ocorre o primeiro máximo após $t=0$, então:

$$X(t_1) = f(X(t_1-1)) \subseteq f(I) \quad \text{pois} \quad X(t) \subseteq I.$$

Para o primeiro mínimo algo análogo ocorrerá para o instante $t = t_2$:

$$X(t_2) \subseteq f(I).$$

Seja agora $t = t_3$ o primeiro máximo ou mínimo que ocorre após $t_1 + 1$ e $t_2 + 1$, esse ponto satisfará:

$$X(t_3) = f(X(t_3-1)) \subseteq f(f(I)),$$

pois, como visto acima, os máximos e mínimos do intervalo anterior estão contidos em $f(I)$.

Se aplicarmos esse mesmo raciocínio indutivamente, concluiremos que as soluções $X(t, \phi)$ estarão contidas no intervalo dado por $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(I)$.

Um resultado análogo pode ser encontrado em Mallet-Paret & Nussbaum² (1986) (a estimativa $X(t) \subset I$, que utilizamos, provém de [Mallet-Paret & Nussbaum² (1986)]).

Nos casos em que X_{eq} é um atrator global para a aplicação:

$$(4.17) \quad X_{n+1} = f(X_n),$$

onde, $X_n \in I$, então existe um teorema que assegura que, sob as hipóteses (4.16), $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(I) \rightarrow X_{eq}$ [Mallet-Paret & Nussbaum² (1986)]. Se isso ocorrer, fica assegurada a estabilidade global da solução de (4.1) $X=X_{eq}$.

Agora, se tomarmos $f(X)=AX(1-X)$ em (4.1) e fizermos τ e A suficientemente grandes, não mais detectaremos soluções periódicas estáveis, mas sim soluções aperiódicas extremamente irregulares.

Essas soluções apresentam uma série de características interessantes. Primeiramente, se computarmos uma dessas soluções durante um grande intervalo de tempo, e registrarmos as posições em que sua órbita intercepta uma conveniente seção de Poincaré, verificaremos a formação de um conjunto de pontos com dimensão

fractal^(†) [Farmer (1982)]. Devido ao carácter unidimensional dessa órbita, obtemos a dimensão fractal do conjunto formado pela mesma adicionando um à dimensão calculada na seção de Poincaré. Além disso, após um certo intervalo de tempo, diversas condições iniciais levam a esse mesmo conjunto, o que o caracteriza como um atrator. Este é, pois, um atrator de dimensão fractal.

Outra característica interessante desse atrator é que pontos vizinhos, no interior do mesmo, ao menos enquanto próximos, se distanciam com velocidade exponencial. O sistema, pelo menos dentro da bacia de atração deste atrator, apresenta sensibilidade às condições iniciais, e por isso dizemos que o sistema apresenta uma solução "caótica".

A noção de sensibilidade à condição inicial é matematicamente formalizada pela definição de expoentes de Liapunov [Farmer (1982)].

(†) A definição de dimensão fractal, é dada por:

$$D_F = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log n(\epsilon)}{|\log \epsilon|}$$

onde $n(\epsilon)$ é o número de esferas de dimensão N , e raio ϵ , que são necessárias para cobrir o conjunto que se deseja calcular a dimensão. N é a dimensão do espaço que está servindo de suporte para o cálculo da dimensão.

Dado um sistema de dimensão N , imaginemos uma esfera de raio $\varepsilon(0)$, centrada em uma particular órbita. Façamos o raio $\varepsilon(0)$ tender a zero e o sistema evoluir. Chamamos de expoente de Liapunov λ_1 à relação:

$$\lambda_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon(0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \log \frac{\varepsilon_1(t)}{\varepsilon(0)},$$

onde, $\varepsilon_1(t)$ é o i -ésimo semi-eixo do elipsóide proveniente da deformação da esfera inicial.

Com o auxílio dessa definição, dizemos que um atrator é caótico, se apresentar pelo menos um expoente de Liapunov maior que zero.

Devido à irregularidade dinâmica desses atratores, as ferramentas que usamos para estudá-los são baseadas em propriedades médias das soluções. Ou seja, estuda-se o sistema sob um outro enfoque, procurando o que chamamos de propriedades ergódicas do mesmo.

A pesquisa em sistemas com soluções caóticas tem sido bastante intensa na última década, principalmente no que diz respeito a sistemas com poucas dimensões. Nos casos de sistemas de dimensão infinita, esse estudo é bem mais difícil, sendo que os problemas técnicos aumentam muito. Devido a isso, o número de estudos nesse sentido é bem menor. Geralmente o que se faz é calcular dimensões e expoentes de Liapunov, e depois tentar entender a topologia do

atrator, assim como as relações entre as grandezas que o caracterizam. Procura-se, também, estabelecer relações entre as variações nos parâmetros que caracterizam o sistema, e nos parâmetros que caracterizam o atrator (para esse tipo de estudo em EDR, ver [Farmer (1982)], [Ikeda & Matsumoto (1987)], [Le Berre et al. (1988)], [Le Berre, Ressayre & Tallet (1989)], [de Oliveira (1984)]).

Nesta tese não nos preocupamos com a caracterização das soluções caóticas, devido à natureza diferente desse tipo de estudo. Nesta, o nosso objetivo foi o de tentar obter resultados precisos, naquilo que é conhecido como "rota para o caos", ou seja, na sequência de soluções periódicas que antecedem a solução caótica, quando variamos os parâmetros do sistema.

É oportuno aqui dizer que, para o estudo de atratores caóticos, é bastante relevante conhecer as soluções periódicas do sistema. Em geral os atratores caóticos possuem um suporte denso de órbitas periódicas, que são muito importantes na caracterização dos mesmos. Esse conjunto de órbitas periódicas funcionam como um esqueleto do atrator (para sistemas em dimensão finita, ver Cvitanovič (1988)).

Para terminar este capítulo, faremos algumas considerações sobre uma analogia grosseira entre o problema da turbulência na hidrodinâmica e as equações do tipo (4.1), no caso em que a aplicação (4.17), associada à (4.1), tiver solução caótica.

A importância desse tipo de analogia é que talvez ela nos ajude a entender um pouco melhor a difícil natureza do escoamento

turbulento. Antes de passarmos para a apresentação da analogia, discutiremos um pouco acerca do problema da turbulência no contexto da hidrodinâmica.

O sistema de equações que rege a dinâmica dos fluidos, as equações de Navier-Stokes (ENS), é não linear, dissipativo e muitíssimo complicado. Durante muito tempo, duvidou-se que os padrões observados no escoamento turbulento pudessem ser devidos unicamente à dinâmica prevista por essas equações. Ainda hoje essa é uma questão em aberto [Frisch & Orszag (1989)]. A descoberta de que sistemas não lineares, relativamente simples, podiam apresentar soluções caóticas de padrão extremamente irregular, estimulou a crença de que talvez nas ENS, de fato, estivessem contidos os principais ingredientes da dinâmica turbulenta.

O grande problema das ENS é que, mesmo numericamente, é difícil investigá-la. Com o advento dos computadores digitais fomos capazes de resolver confiavelmente muitos problemas não lineares razoavelmente simples. Entretanto, se quiséssemos, por exemplo, fazer uma simulação numérica do escoamento aerodinâmico (considerando o ar como incompressível), em torno de um carro, usando para isso os computadores mais potentes da atualidade e as ENS, a máxima velocidade que o carro poderia assumir, na simulação, seria 1 cm/s ou 36 m/h. O esforço computacional envolvido em uma simulação desse gênero é enorme [Frisch].

Fazer experiências hidrodinâmicas com escoamentos turbulentos também não é tarefa fácil, pois é necessário medir um campo de velocidades com precisão bastante grande, em um sistema com uma

escala de variação característica bastante pequena.

As soluções das ENS envolvem o que é conhecido por caos espaço temporal, ou seja, não só temos sensibilidade a condições iniciais, como também às condições de contorno. O padrão da solução é complexo em ambas as variáveis.

O fenômeno caótico espaço-temporal é relativamente mal conhecido quando comparado ao caos temporal (usualmente estudado), mesmo em sistemas mais simples.

Uma característica interessante da equação com retardamento é que, de uma maneira bastante simples, ela incorpora o fenômeno de caos espaço-temporal, e isso é refletido em sua dinâmica extremamente rica.

Toda a discussão já feita acerca da conveniência de se estudar as equações do tipo (4.1) em um espaço de fase de dimensão infinita, já nos dá a idéia de que uma nova "dimensão" está envolvida na dinâmica desse sistema (essa seria dada pelo "índice contínuo que rotula a base do nosso espaço").

Podemos, entretanto, colocar a equação (4.1) sob uma forma que torna geometricamente evidente essa afirmação. Suponhamos que queiramos estudar a equação :

$$(4.18) \quad \frac{\partial x(t, \theta)}{\partial t} = \frac{\partial x(t, \theta)}{\partial \theta},$$

em uma região retangular do espaço (t, θ) , figura 4.1:

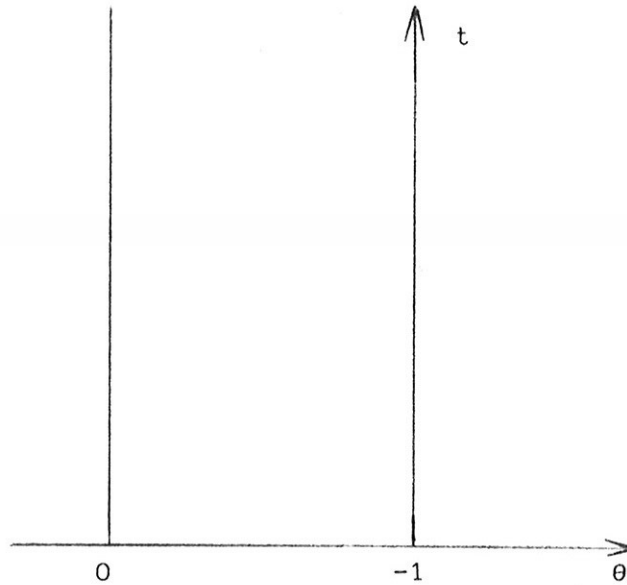


figura 4.1

com as condições de contorno:

$$(4.19) \quad \begin{cases} x(0, \theta) = \phi(\theta) , & -1 \leq \theta \leq 0 \\ f(x(t, -1)) = x(t, 0) + \frac{1}{\tau} \frac{\partial x(t, \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} \end{cases} ,$$

Primeiramente, verificamos que qualquer solução do tipo $x=x(t+\theta)$ resolve (4.18). Se substituirmos esta nas condições (4.19), ficamos com a própria (4.1), com a condição inicial ϕ . Ou seja, qualquer solução de (4.1), resolve (4.18), (4.19). Note que essa representação formal, explicita o carácter funcional de (4.1) [Hale (1977)].

Tendo mostrado que modelos do tipo (4.1) incorporam, de certa

forma, uma "dimensão espacial", passaremos a expor a analogia feita por Ikeda & Matsumoto (1987), que relaciona o parâmetro τ de (4.1) com a viscosidade de fluídos.

Primeiramente consideremos a equação (4.1), reescrita em uma forma semelhante a (4.3), onde o tempo, porém, não é reescalado pelo retardamento:

$$(4.20) \quad X_{n+1}(t) = X_n(\tau) e^{-t} + \int_0^t e^{-(t-s)} f(X_n(s)) ds,$$

para $0 \leq t \leq \tau$,

onde $X_n: [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$.

Suponhamos agora que $f(X) = \mu g(X)$, onde μ é um parâmetro que caracteriza $f(X)$ (como A no caso $f(X) = A X (1-X)$), e que μ e τ sejam grandes o suficiente para que (4.1) e (4.17) apresentem soluções caóticas.

Sabemos que soluções caóticas apresentam divergência exponencial para pequenos desvios ao longo de suas órbitas. Analisemos, portanto, como pequenas flutuações δX_n , em torno das soluções X_n , evoluem no tempo.

Substituindo $X_n + \delta X_n$ em (4.20) e desprezando termos de ordem superior em δX , ficamos com:

$$(4.21) \quad \delta X_{n+1}(t) = \delta X_n(\tau) e^{-t} + \mu \int_0^t e^{-(t-s)} g'(X_n(s)) \delta X_n(s) ds,$$

para $0 \leq t \leq \tau$.

Se, agora caracterizarmos as flutuações pelas frequências, $\delta X_n(t) \approx \delta X_n(\omega) e^{i\omega t}$ e substituirmos em (4.21); fizemos a hipótese de que $X(t)$ não varia muito em escalas de tempo da ordem de 1 (hipótese razoavelmente forte, mas válida em quase todos os intervalos $[t-1, t]$); supusermos τ bastante grande, e realizarmos a integração, simplificaremos a expressão (4.21) de modo a obter:

$$(4.22) \quad \frac{|\delta X_{n+1}(\omega)|^2}{|\delta X_n(\omega)|^2} \approx \frac{\mu^2 |g'(X_n)|^2}{1 + \omega^2}$$

De (4.22), se $\omega \ll 1$, então a flutuação $\delta X(\omega)$ sofre uma amplificação semelhante àquela que ocorre para as flutuações da solução de (4.17), para o mesmo parâmetro μ . Ainda, de (4.22), temos que flutuações de alta frequência, onde $\omega \gg 1$, são rapidamente atenuadas. Esse fenômeno é análogo ao que ocorre na hidrodinâmica, onde os efeitos viscosos tendem a atenuar as flutuações de alta frequência, e não as de baixa, fazendo com que as primeiras desapareçam rapidamente. O efeito de memória neste caso age de maneira análoga à viscosidade nas ENS.

Essa analogia é bastante interessante, e poderia ser levada mais longe. Seu ingrediente fundamental, entretanto, é o que foi

dados acima.

Devido a essa semelhança, é de se esperar que os padrões das soluções caóticas de (4.1) tenham algo a ver com os padrões caóticos espaço-temporais de escoamentos turbulentos. O quanto essa semelhança é significativa, é algo que só a pesquisa futura poderá dizer.

Agora, passemos a uma abordagem numérica de (4.1).

CAPÍTULO 5: ANÁLISE NUMÉRICA DAS DUPLICAÇÕES DE PERÍODO

Neste capítulo, restringiremos nossa atenção à equação (3.4), apresentada no capítulo 3, a saber:

$$(5.1) \quad \frac{1}{\tau} X(t) + X(t) = A X(t-1) (1-X(t-1)) \quad ,$$

Dos resultados do capítulo anterior acerca dos limites superior e inferior das equações do tipo (4.1), temos que, se escolhermos funções iniciais $\phi(t)$, $t \in [-1,0]$, com $0 \leq \phi(t) \leq 1$, então as soluções de (5.1) satisfarão $0 \leq X(t) \leq 1$, $t > 0$, para $0 \leq A \leq 4$. Como só estamos interessados em soluções positivas, restringiremos nossa atenção a esse intervalo do parâmetro A , e da função inicial $\phi(t)$. Adotaremos a convenção de que a solução $X_*(t)$ é globalmente estável se $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t, \phi) \rightarrow X_*(t)$, qualquer que seja $\phi(t)$, $0 \leq \phi \leq 1$.

Também, dos resultados do capítulo anterior, é fácil obter o comportamento das soluções de (5.1) para τ qualquer, e $0 \leq A \leq 3$:

- i) $0 < A < 1$, $X = 0$ é solução globalmente estável, pois
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(p) \rightarrow 0 \text{ para } p \in [0, 1[,$$

ii) $1 < A < 3$, $X = \frac{A-1}{A}$ é solução globalmente estável, pois

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(p) \rightarrow \frac{A-1}{A} \quad \text{para } p \in]0, 1[.$$

Com isso, restringiremos nossa análise à região $\tau > 0$,
 $3 < A \leq 4$.

Da análise linear, sabemos que, se:

$$(5.2) \quad \frac{1}{\tau} > \frac{(A-2) \sin [\arccos\{1/(A-2)\}]}{\arccos [1/(A-2)]},$$

então a solução $X = (A-1)/A$ de (5.1) é pelo menos localmente estável (numéricamente não tivemos qualquer evidência de que esta não fosse globalmente estável).

Se formos aumentando τ , A , além da região dada por (5.2), notaremos que a solução estável de (5.1) será oscilante e periódica. Essa solução variará continuamente e suavemente para variações nos parâmetros τ , A , para quase todos os pontos do plano (τ, A) ; a menos de alguns, onde outra solução estável aparece. Nesses pontos ocorre uma singularidade na variação da solução estável. A esses pontos damos o nome de pontos de bifurcação. No plano (τ, A) esses pontos pertencerão a curvas, que chamaremos de curvas de bifurcação. Se pensarmos apenas no período das soluções, podemos dizer que este variará continuamente em quase toda parte do plano (τ, A) , a menos de certos pontos (pontos de bifurcação) onde ele variará descontinuamente.

No contexto desta tese, é conveniente utilizar o seguinte conceito particular de bifurcação: - dada uma equação para x , dependente de um parâmetro λ , dizemos que uma dada solução $x(\lambda)$ sofre uma bifurcação em λ_0 , se existirem $x(\lambda_1)$ e $x(\lambda_2)$, qualitativamente diferentes para quaisquer λ_1, λ_2 , em uma vizinhança de λ_0 , com $\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$, tal que $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1} x(\lambda) \rightarrow x(\lambda_0)$ e $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_2} x(\lambda) \rightarrow x(\lambda_0)$. Uma definição matemática rigorosa pode ser encontrada em Arnold (1983), Hale (1981).

Em grande parte das vezes, as bifurcações (ao menos localmente) estão associadas à perda de estabilidade de uma dada solução que estamos seguindo. Como usualmente a análise de estabilidade é baseada na linearização em torno da solução de interesse, as bifurcações comumente estão associadas a cruzamentos do eixo imaginário por raízes de equações características ou coisas do gênero. Esse, por exemplo, é o caso da curva obtida de (5.2), que deriva da teoria linear das EDR com coeficientes constantes, e que está associada a uma bifurcação de Hopf.

Dadas essas definições, nosso objetivo nesse capítulo será: desenhar no espaço de parâmetros (τ, A) , com $\tau > 0$, $3 < A \leq 4$, as curvas de bifurcação associadas a variações descontínuas no período das soluções periódicas estáveis de (5.1). Em todas as simulações numéricas deste capítulo, foi utilizada a função inicial:

$$(5.3) \quad \phi = \frac{A - 1.1}{A},$$

onde $X = \frac{A - 1}{A}$ é uma solução estacionária de (5.1).

Como veremos no próximo capítulo, a escolha da função inicial é um ingrediente importantíssimo do problema. Isso porque nosso sistema poderá apresentar mais de uma solução estável para os mesmos parâmetros, e conforme a função inicial que escolhermos, poderemos cair na bacia de atração de uma ou de outra solução. A função inicial (5.3) é boa, pois pertence a uma grande bacia de atração. É importante dizer que fizemos diversas alterações na função inicial e o resultado final foi o mesmo. Resultados diferentes são obtidos com escolhas mais particulares de funções iniciais.

Para integrar a equação (5.1) utilizamos o método de Runge-Kutta de quarta ordem, de modo que, dado o lado direito de (5.1) no intervalo $[t-1, t]$, calculamos o lado esquerdo em $[t, t+1]$, reaplicando o mesmo procedimento sucessivamente.

Uma integração numérica de uma equação diferencial sempre requer uma discretização da variável independente. Nesse caso, a discretização temporal, também implica na discretização do espaço de fase, e na redução da sua dimensão de infinita para finita. Quer dizer, o estado de (5.1), $X(t+\theta)$, $\theta \in [-1, 0]$, passa a ser caracterizado apenas por um número finito de valores.

Do parágrafo anterior fica claro que a grandeza relevante, no que diz respeito à discretização, é o número de pontos em que o intervalo unitário é discretizado. Chama-lo-emos de NP.

Infelizmente, não existem meios de estimarmos o quanto alteramos o sistema (5.1) com a discretização. O que sabemos é que

uma discretização grosseira altera completamente a dinâmica do sistema original [Lorenz (1989)]. A fim de avaliar a satisfatoriedade da discretização, fizemos diversas simulações sob as mesmas condições, mas dobrando e até quintuplicando NP. Quando não era notada diferença devido ao aumento de NP, concluíamos que a discretização era boa. Uma observação prática, é que a discretização é sensível a τ . Se pensarmos que estamos usando uma unidade de tempo que foi normalizada pelo retardamento τ (ver cap.3), isso é bastante razoável.

Antes de expor o método de busca das curvas de bifurcação, é conveniente descrever um pouco da fenomenologia do que estávamos esperando encontrar.

Como já disse, se tomarmos (5.1) e fizermos $\tau \rightarrow \infty$, podemos dizer, ingenuamente, que (5.1) tenderá a:

$$(5.4) \quad X(t) = A X(t-1) [1-X(t-1)],$$

que é a versão contínua da bem conhecida aplicação quadrática:

$$(5.5) \quad X_n = A X_{n-1} (1-X_{n-1}) .$$

O comportamento de (5.5), em função de A ($3 < A \leq 4$), é sumarizado a seguir [Collet & Eckmann (1980)]:

i) $3 < A < 3.449..$, existe uma solução de período 2, globalmente estável.

ii) $3.449... < A < 3.55...$, existe uma solução de período 4, globalmente estável.

iii) Aumentando A , detectaremos infinitas bifurcações de duplicação de período, como a ocorrida para $A = 3.449...$ Essa seqüência de duplicações de período tem um ponto de acumulação em $A = A_\infty = 3.5698...$ Nesse ponto o sistema apresenta uma solução aperiódica, globalmente estável, e caótica.

iv) Para $A > A_\infty$, o sistema apresenta uma complicada, mas conhecida, sucessão de órbitas periódicas e caóticas.

É interessante que o intervalo entre duas duplicações de período sucessivas ($A < A_\infty$), reduz-se rapidamente, e se calcularmos a razão:

$$(5.6) \quad \frac{A_{1+1} - A_1}{A_{1+2} - A_{1+1}} = \delta_1, \quad \text{onde } A_1 \text{ é o ponto da } l\text{-ésima duplicação de período,}$$

verificaremos que, rapidamente, $\lim_{l \rightarrow \infty} \delta_1 \rightarrow 4.6692...$

Quando fazemos simulações numéricas com (5.1), com τ grande, percebemos que, de fato, muito do comportamento de (5.1) é explicado por (5.4). Por exemplo, em Mallet-Paret & Nussbaum² (1986), é provado que se $f(X)$ em (4.1) satisfaz as condições de "negative feedback" (4.15), então, sua solução de período aproximadamente 2 ($\tau \rightarrow \infty$), aproxima-se de uma onda quadrada de período 2, solução de (4.17).

Em contrapartida, os mesmos Mallet-Paret & Nussbaum¹ (1986)

apresentam uma equação do tipo (4.1) com $f(X)$ descontínua, na qual, no limite $\tau \rightarrow \infty$, suas soluções não tendem à solução onda quadrada, definida por (4.17). Essas soluções apresentam uns "bicos" próximos às "descontinuidades" da onda quadrada, algo análogo ao mostrado na figura 5.21 (página 84), para a equação (5.1). Estes "bicos", no caso citado, permanecem para $\tau \rightarrow \infty$.

Nesse mesmo artigo os autores argumentam, que esses "bicos", que de fato aparecem em muitas simulações numéricas de equações do tipo (4.1) [Derstine et al. (1983)], [Chow & Green (1985)], funcionariam como um ruído sobreposto às soluções tipo onda quadrada, e provocariam instabilidades de outra natureza, que não as duplicações de período. Essas instabilidades truncariam a cascata de duplicação, levando o sistema a apresentar soluções irregulares antes do ponto de acumulação das duplicações de período ("bifurcation gap").

O fato de que a adição de ruídos, a sistemas dinâmicos que apresentam cascata de duplicação completa, pode truncar a cascata, é bem conhecido e é relatado em Crutchfield & Huberman (1980). O problema é saber se os "bicos" das soluções de (5.1) realmente levam a um truncamento da cascata de duplicação.

Segundo Feigenbaum (1980), o fenômeno descrito para a aplicação quadrática ($\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n \rightarrow 4.6692\dots$) é extremamente geral no contexto das aplicações unimodais, estas devendo apenas satisfazer a condição de terem um máximo quadrático. Nessa mesma referência, ele estende essa idéia a aplicações n -dimensionais dissipativas,

que apresentam cascata de duplicação de período. Ele afirma que os processos dissipativos geralmente privilegiam uma direção (na qual a taxa de contração é menor), de modo ao sistema poder ser associado a um outro unidimensional, para o qual valem seus resultados. Ele também afirma que seus resultados são válidos para sistemas de equações diferenciais, desde que a aplicação definida por uma seção de Poincaré do sistema satisfaça as hipóteses acima. Segundo ele, mesmo em dimensão infinita, esse raciocínio seria válido.

O domínio de validade dos resultados de Feigenbaum é algo bastante discutível. Uma coisa mais ou menos estabelecida, é que sistemas dinâmicos, que apresentam cascata de duplicação de períodos completa, geralmente dão os resultados previstos por Feigenbaum [Cvitanović (1984)].

Certamente o maior êxito deste resultado é experimental, pois, existe uma série de experimentos reais e numéricos que, dentro de certos limites, o corroboram. Os limites práticos na verificação de $\delta_1 \rightarrow \delta$, para l grande, são: (i) dificilmente conseguimos um arranjo experimental, com ruído suficientemente baixo, a fim de não truncar prematuramente a cascata de duplicação, e (ii) a sequência de parâmetros, nos quais ocorrem as bifurcações, aproximam-se geometricamente, de modo que rapidamente estão mais próximos do que a resolução dos aparelhos de medida. Apesar desses problemas, é curioso que, com apenas poucas duplicações de período (as vezes $l = 1, 2$), seja comum, e surpreendente, que o valor de δ_1 seja bastante próximo de $\delta = 4.6692\dots!$

Com relação a sistemas análogos a (5.1), tudo indica que possuem uma cascata completa de duplicação de período, e que essa seja uma de suas "rotas para o caos" [Chow & Green (1985)], [Derstine et al. (1983)], [Gao et al. (1983)], [Gao, Yuan & Narducci (1983)], [Gao et al. (1984)], [Ikeda, Kondo & Akimoto (1982)], [de Oliveira (1984)], [de Oliveira & Malta (1987)]. No artigo de Hopf et al. (1982) é levantada uma dúvida com relação a isto, mas em um artigo posterior [Derstine et al. (1983)], da mesma equipe, essa posição foi reconsiderada, e o resultado negativo fora atribuído a ruídos no arranjo experimental.

Na verdade um dos nossos objetivos, com relação a obter as curvas de duplicação no espaço (τ, A) , é o de testar a veracidade da conjectura de que (5.1) possa apresentar cascata de duplicação completa nas duas direções, $\tau = \text{cte}$, e $A = \text{cte}$, para algum intervalo dos parâmetros.

Podemos adiantar que não tivemos nenhuma evidência da falsidade dessa conjectura. Muito pelo contrário, até onde o nosso esquema numérico pudesse ser confiável, obtivemos uma boa concordância com a mesma.

Passemos agora a descrever o método que foi utilizado para encontrar as curvas de bifurcação.

Primeiramente construímos uma grade grosseira na região $3 \leq A \leq 4$, $0 \leq \tau \leq 15$, onde sabíamos que as curvas de duplicação se encontravam. Integramos, então, a equação nos pontos dessa grade e desconsideramos um certo intervalo inicial da integração, para eliminar o transiente (daqui para frente chamaremos esse intervalo

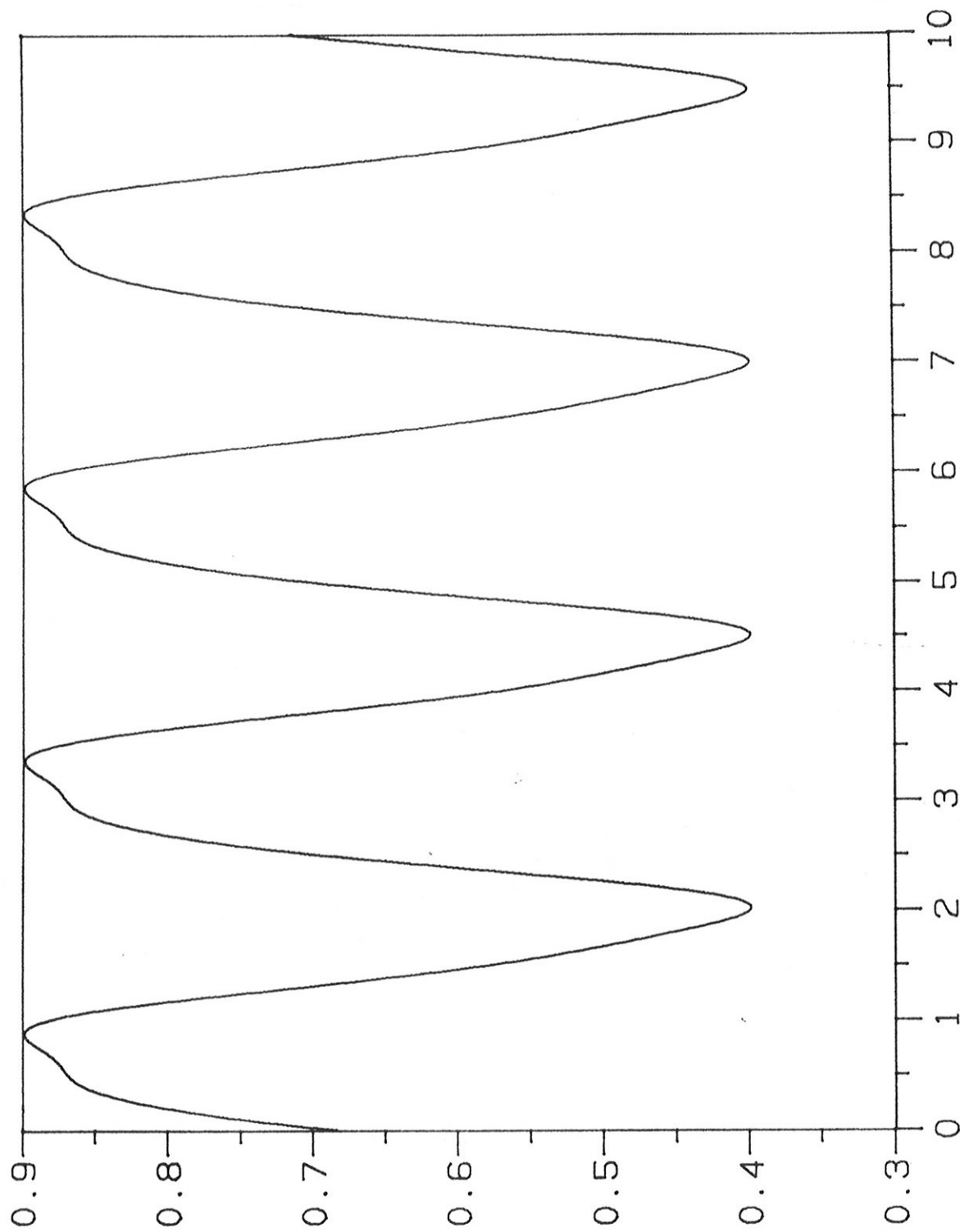
de TR). Com isso obtivemos um conhecimento grosseiro, de como a solução assintótica de (5.1), variava em função de (τ, A) .

Com essa informação, as informações das referências [Chow & Green (1985)], [Derstine et al. (1983)], [Gao et al. (1983)], [Gao, Yuan & Narducci (1983)], [Gao et al. (1984)], [Hopf et al. (1982)], [Ikeda, Kondo & Akimoto (1982)], [de Oliveira (1984)], [de Oliveira & Malta (1987)], mais o conhecimento das soluções de (5.5), construímos uma outra subgrade, mais fina, e que nos permitiu cercar melhor os pontos de bifurcação.

A partir dessa segunda grade, construímos outras subgrades, sempre através da biseção do intervalo que sabíamos conter o ponto de bifurcação. Por exemplo, fixado A, sabíamos que, para um dado τ , a solução tinha período próximo a 2, e que para τ' o período era próximo a 4. Então integrávamos a equação no ponto $(\tau + \tau')/2$. Se a solução nesse ponto apresentasse período próximo a 2, repetíamos a operação no primeiro intervalo, senão no segundo. O fato de usarmos a expressão "período próximo a 2", ou como adiante "próximo a potências de 2", decorre de que o período das soluções que estamos analisando serem do tipo $2^n + \epsilon$, onde ϵ é extritamente positivo e pequeno quando comparado a 2^n . Nas primeiras estimativas, o período da solução foi estimado visualmente em um terminal de vídeo, pois estávamos distinguindo soluções razoavelmente diferentes.

Nas figuras 5.1 a 5.11 mostramos gráficos das soluções típicas de (5.1), onde utilizamos $NP= 100$ e $TR= 10^4$.

Nas figuras 5.1 a 5.5 mantivemos o parâmetro $A= 3.7$ fixo, e variamos τ , e nas figuras 5.6 a 5.11 mantivemos $\tau= 7.0$ fixo e



62 x

t

figura 5.1 ($A = 3.7$, $\tau = 3.5$)

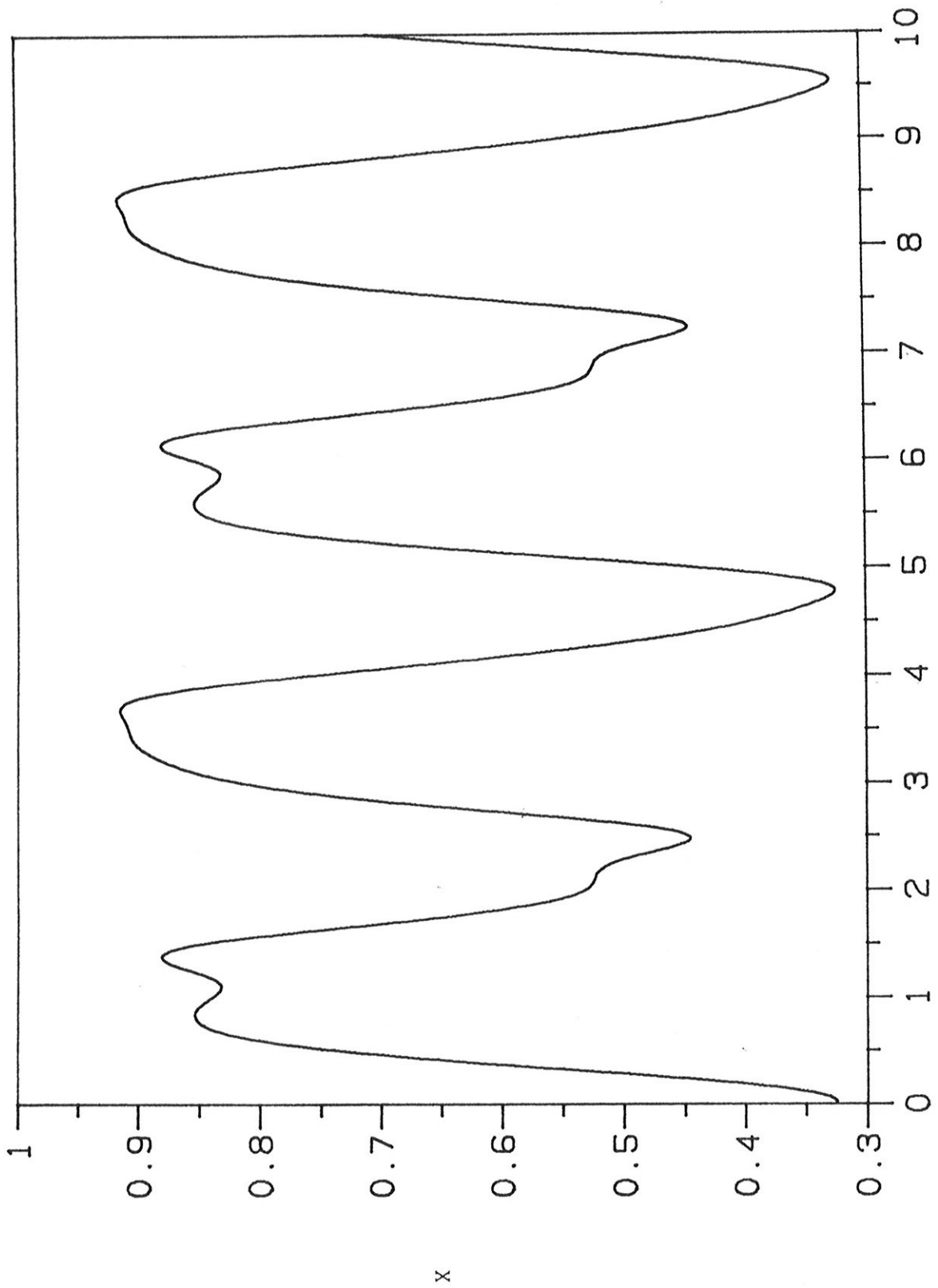


figura .5.2 ($A = 3.7$, $\tau = 4.5$)

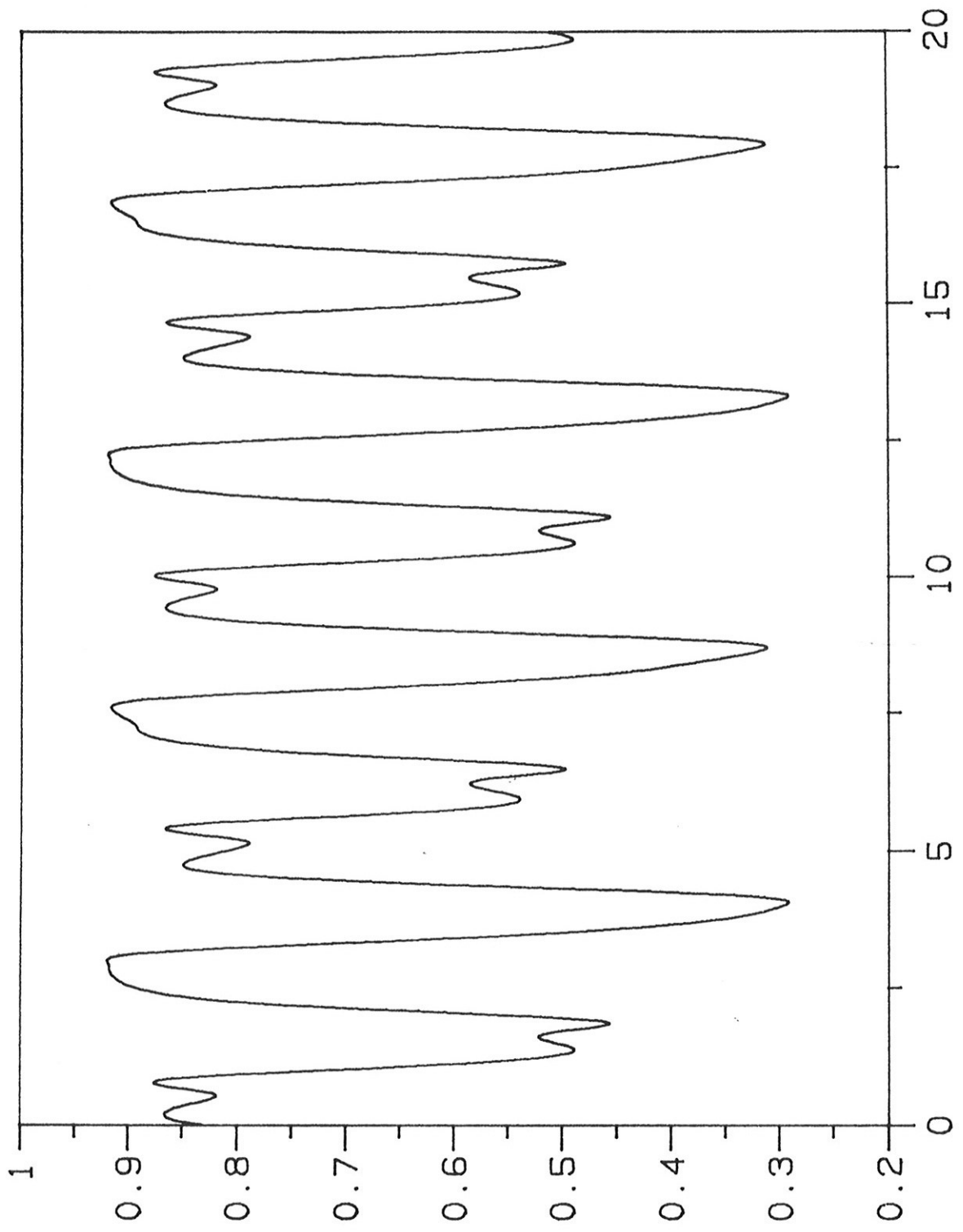


figura 5.3 ($A = 3.7$, $\tau = 5.5$)

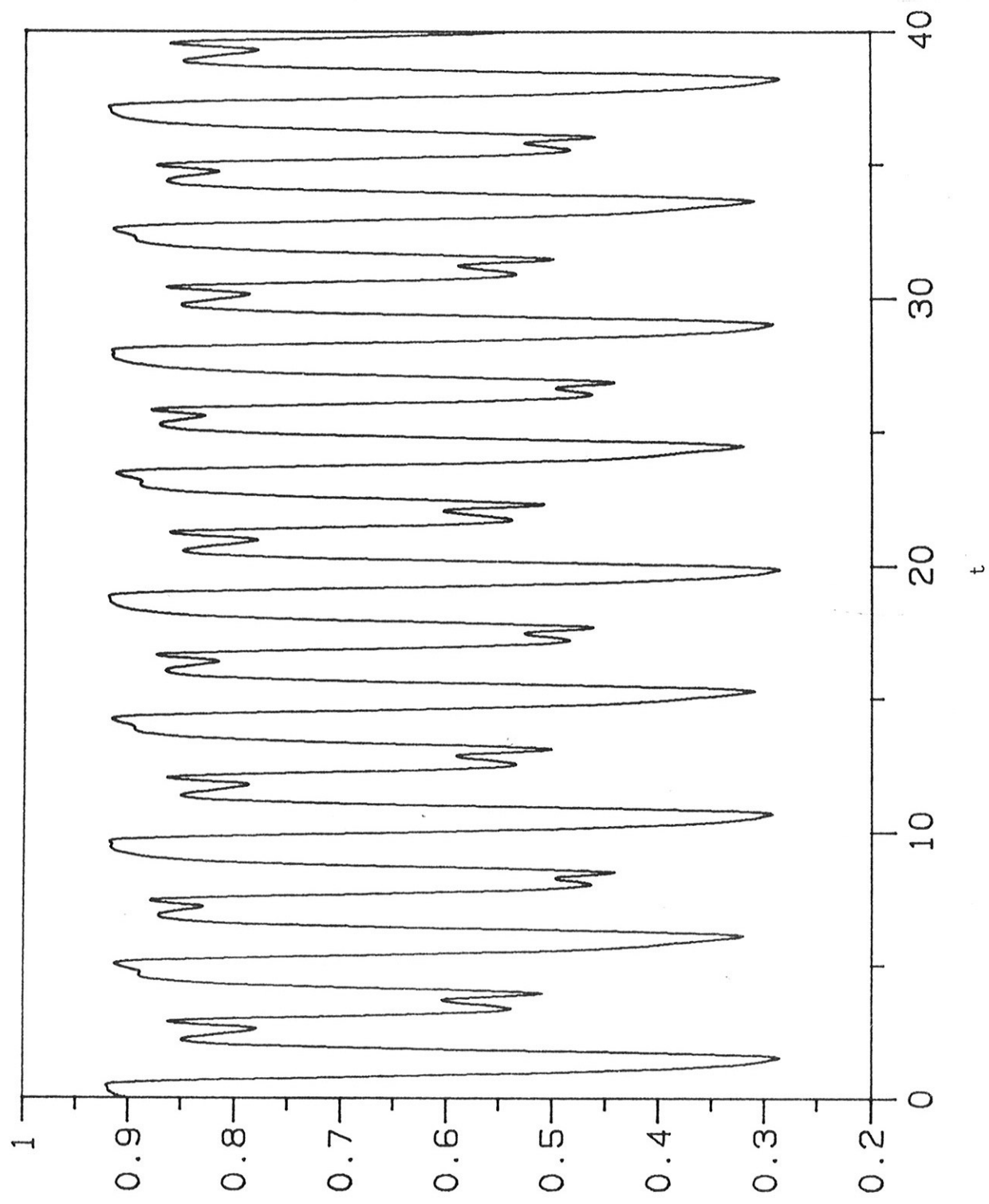


figura 5.4 ($A = 3.7$, $\tau = 5.8$)

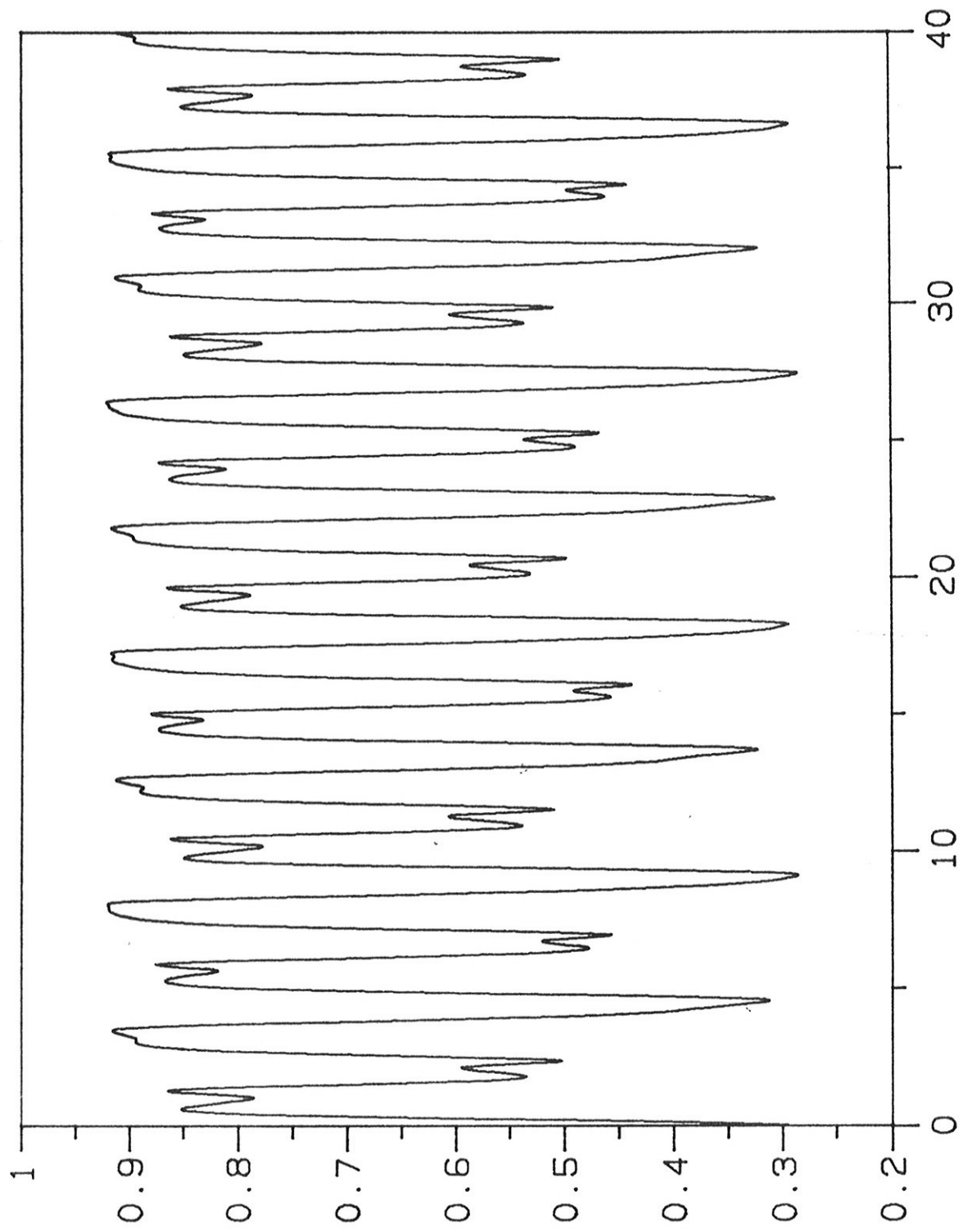


figura 5.5 ($A = 3.7$, $\tau = 5.87$)

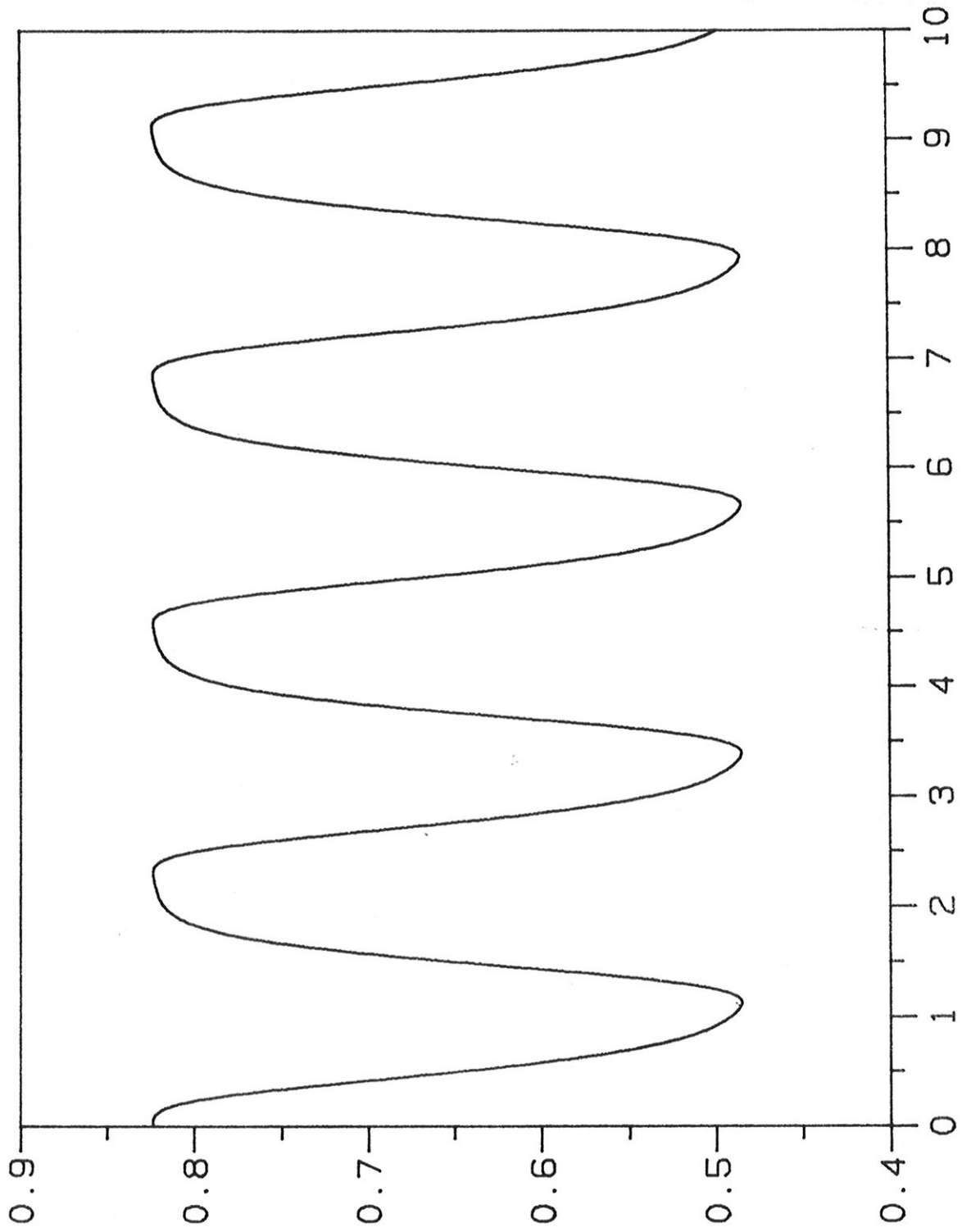


figura 5.6 ($A = 3.3$, $\tau = 7.0$)

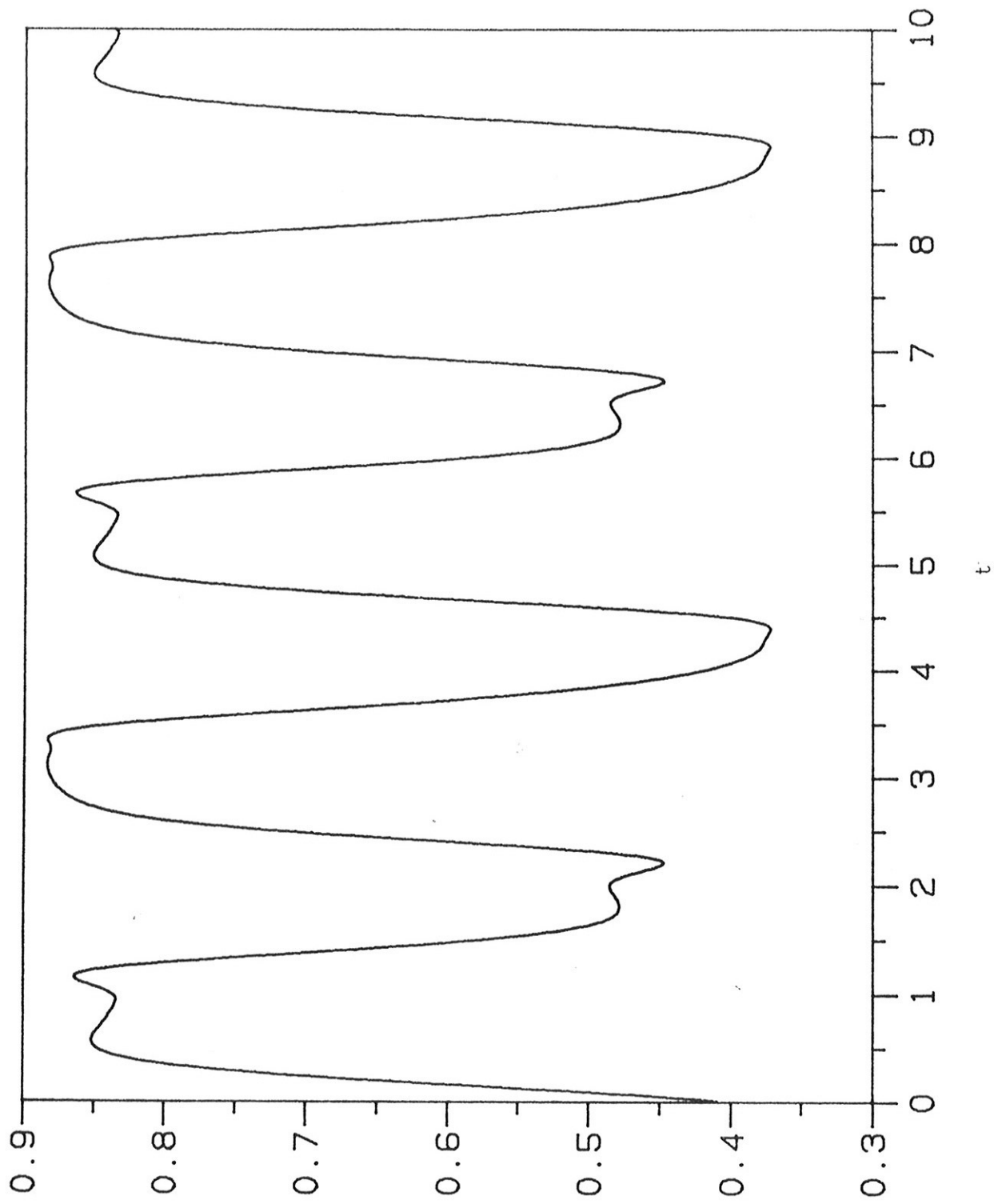


figura 5.7 ($A = 3.55$, $\tau = 7.0$)

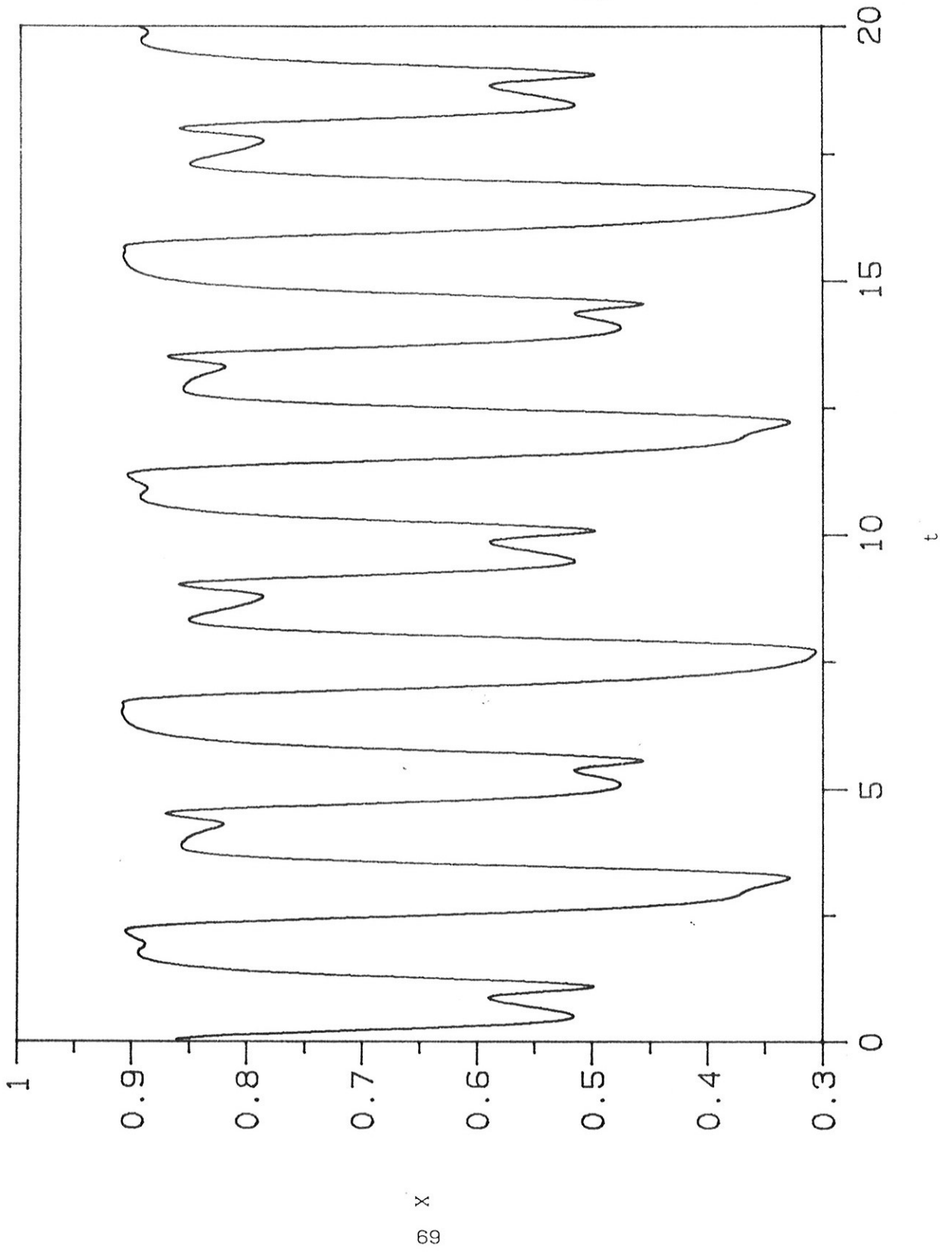


figura 5.8 ($A = 3.65$, $\tau = 7.0$)

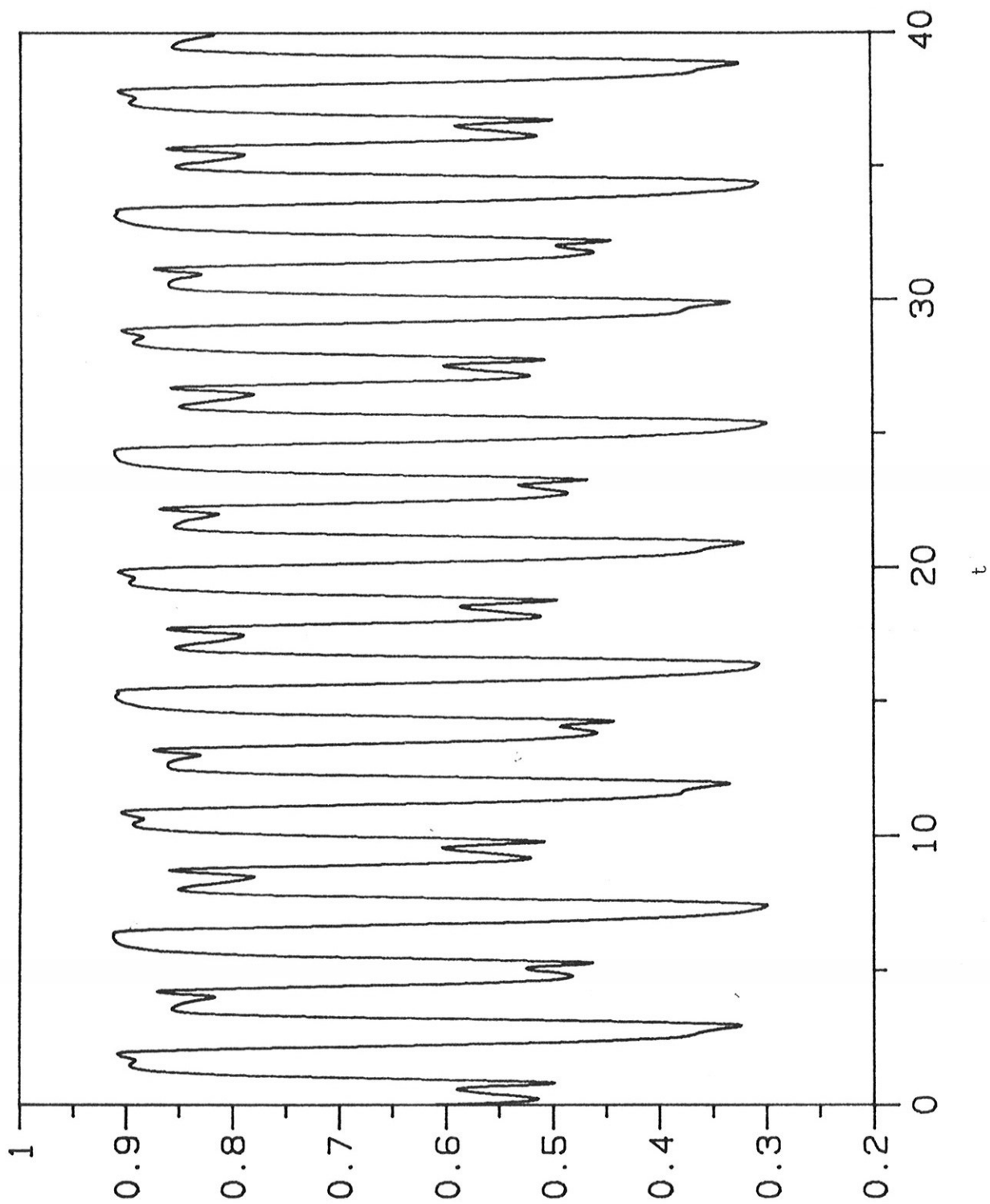


figura 5.10 ($A = 3.66$, $\tau = 7.0$)

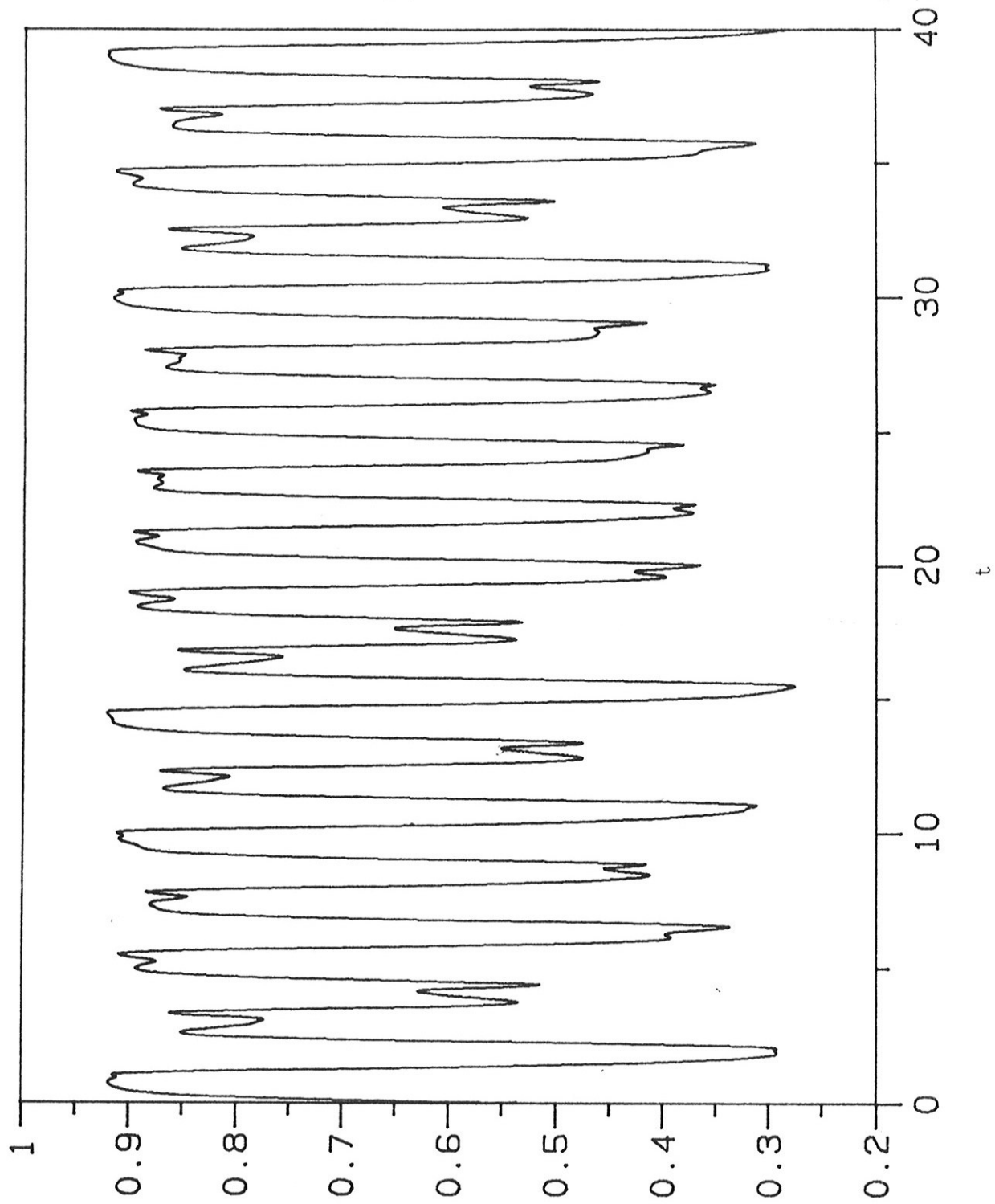


figura 5.11 ($A = 3.7$, $\tau = 7.0$)

variámos A.

Note que nas figuras 5.1, 5.2, 5.3, e 5.6, 5.7, 5.8, o reconhecimento visual do período é bastante fácil, em parte porque tratam-se de soluções com período curto. Já para as figuras 5.4, 5.5, 5.9, e 5.10, 5.11, essa tarefa não é tão fácil, pois os períodos são mais longos, e funções com períodos muito diferentes, não são bastante diferentes (as vezes é praticamente impossível distinguí-las apenas apreciando o gráfico da solução).

A fim de distinguirmos soluções com períodos longos, fizemos análises de Fourier (na verdade "FFTR- Fast Fourier Transformation", proveniente da biblioteca de programas IMSL) da parte assintótica das soluções, em intervalos da ordem de 2000 unidades de tempo. Como em geral trabalhamos com $50 \leq NP \leq 100$, obtivemos espectros que continham de 10^5 a $2 \cdot 10^5$ pontos. Estes espectros possuem resolução suficiente para distinguirmos as soluções das figuras 5.4, 5.5, e 5.11, por exemplo.

As figuras 5.12, 5.13, 5.14 nos dão diversas ampliações do espectro da solução da figura 5.10. Nota-se claramente nas figuras 5.13 e 5.14 que o pico de menor frequência, que caracteriza o período da solução, corresponde ao período 35.92.

As figuras 5.15, 5.16, 5.17 são análogas às descritas acima, mas, referem-se à solução da figura 5.5. Um detalhe interessante, é que as figuras 5.16 e 5.17 nos mostram que essa solução tem período 72.64, ou seja provém da quinta duplicação de período, da solução de período aproximadamente 2. Na verdade, essas soluções são dificilmente localizadas, pois os intervalos de parâmetros nas

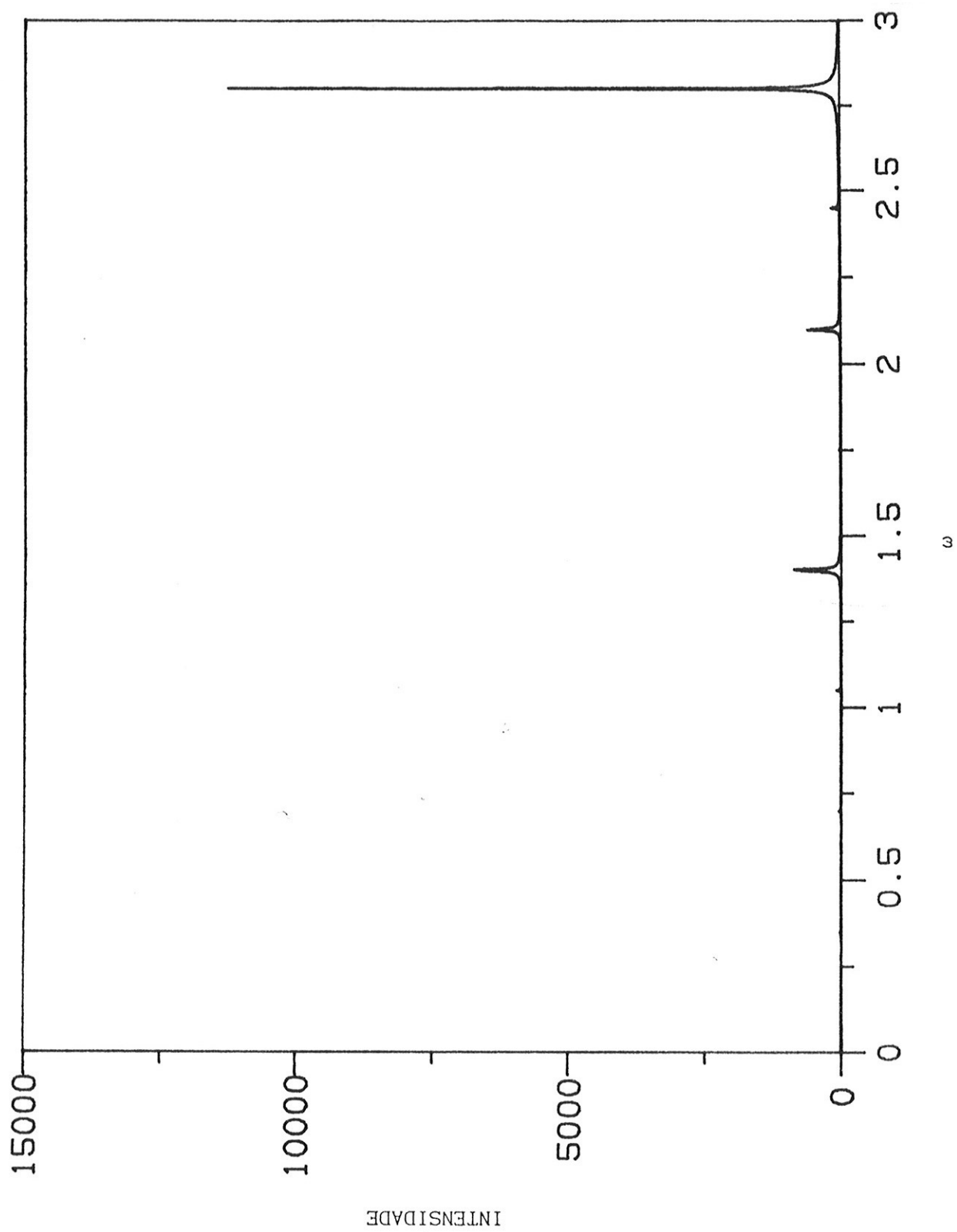


figura 5.12 ($A = 3.66$, $\tau = 7.0$)

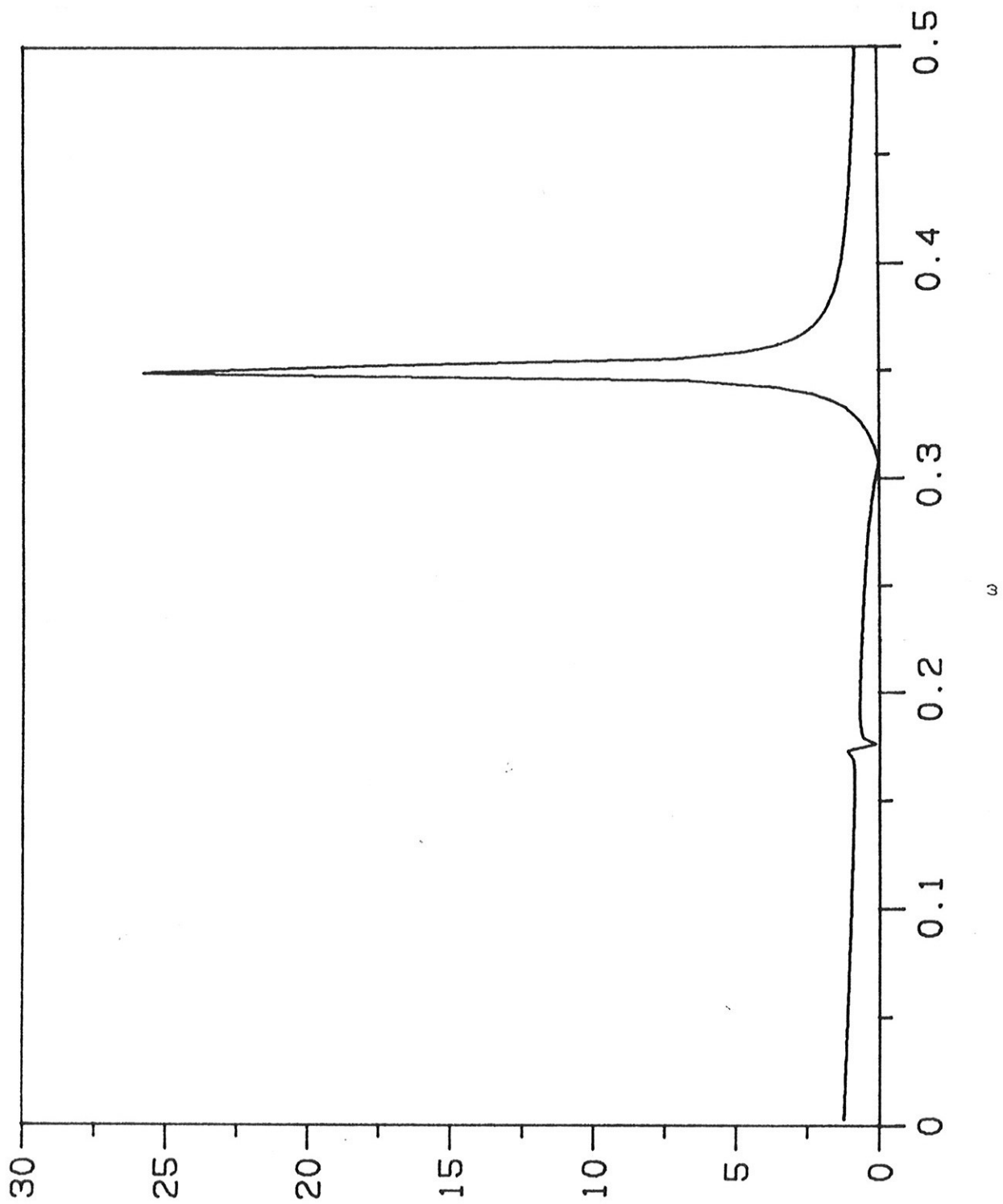


figura 5.13 ($A = 3.66$, $\tau = 7.0$)

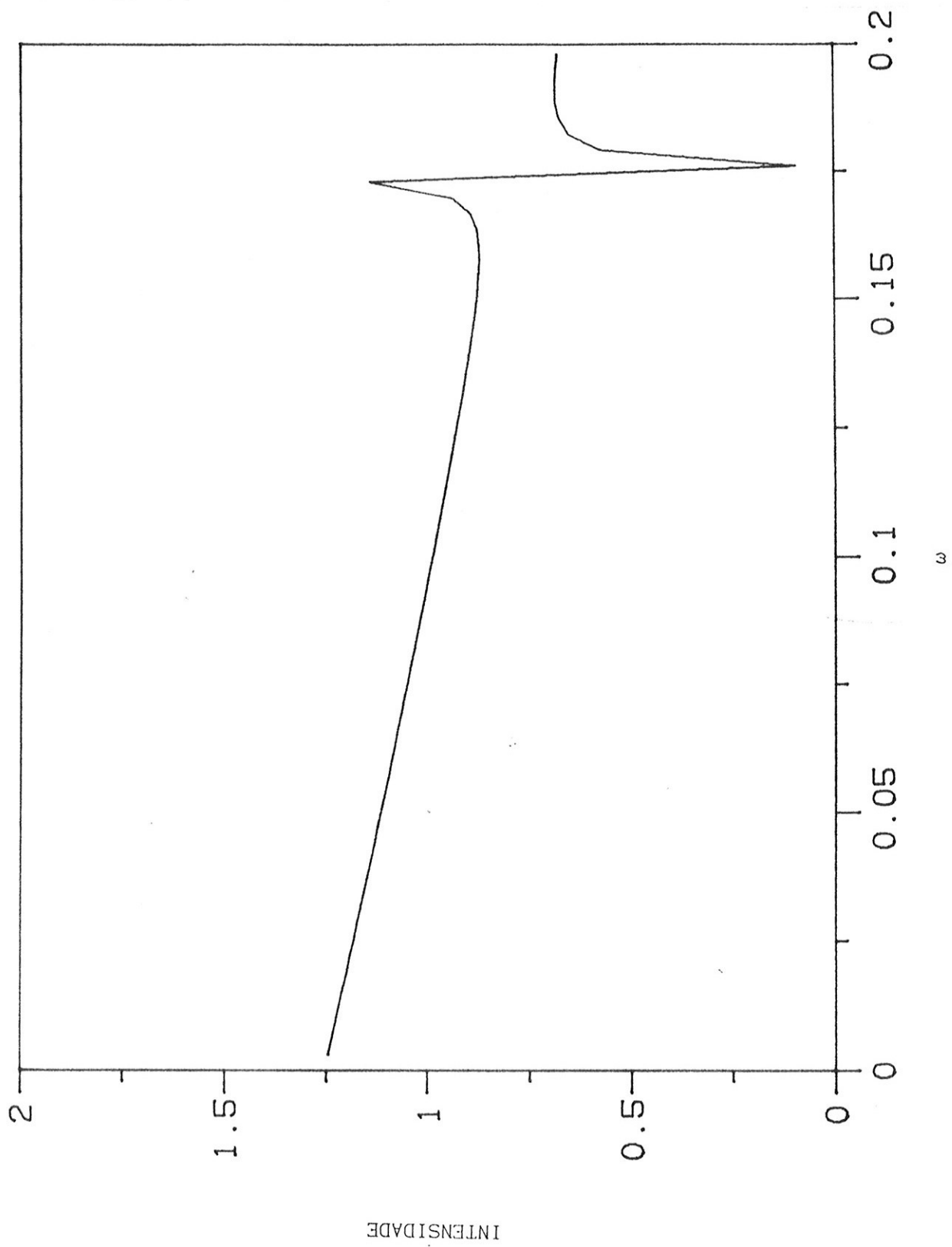


figura 5.14 ($A = 3.66$, $\tau = 7.0$)

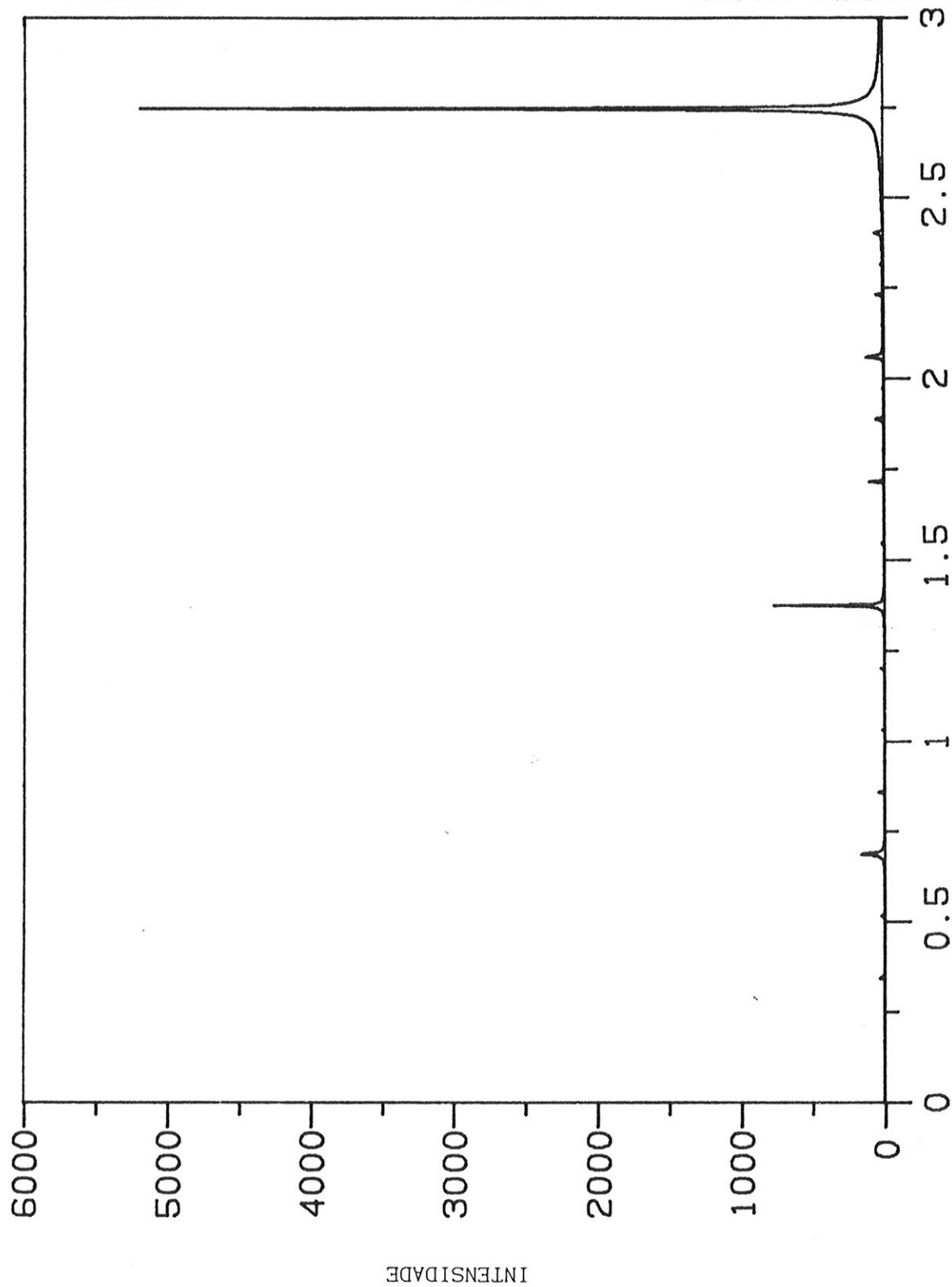


figura 5.15 ($A = 3.7$, $\tau = 5.87$)

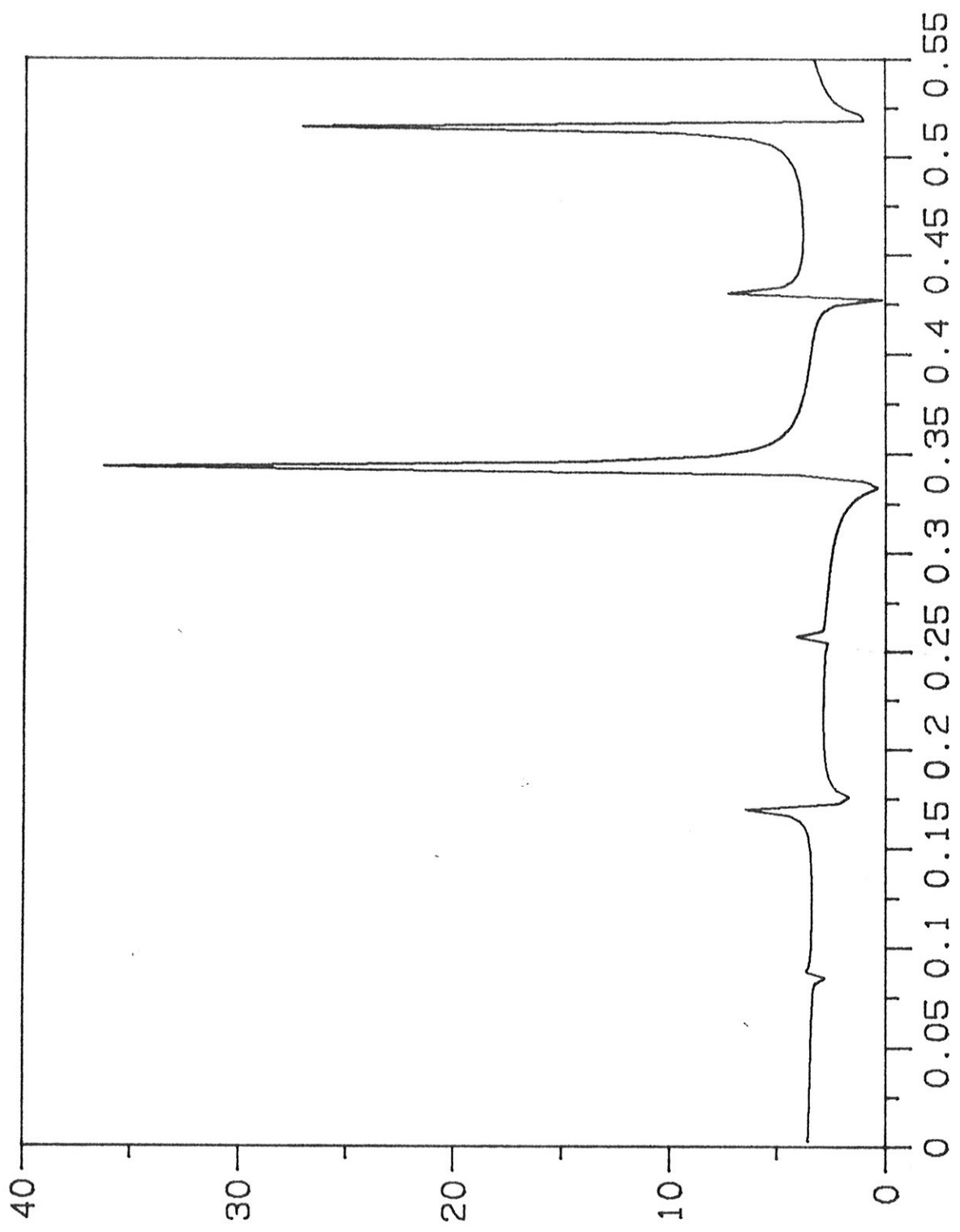


figura 5.16 ($A = 3.7$, $\tau = 5.87$)

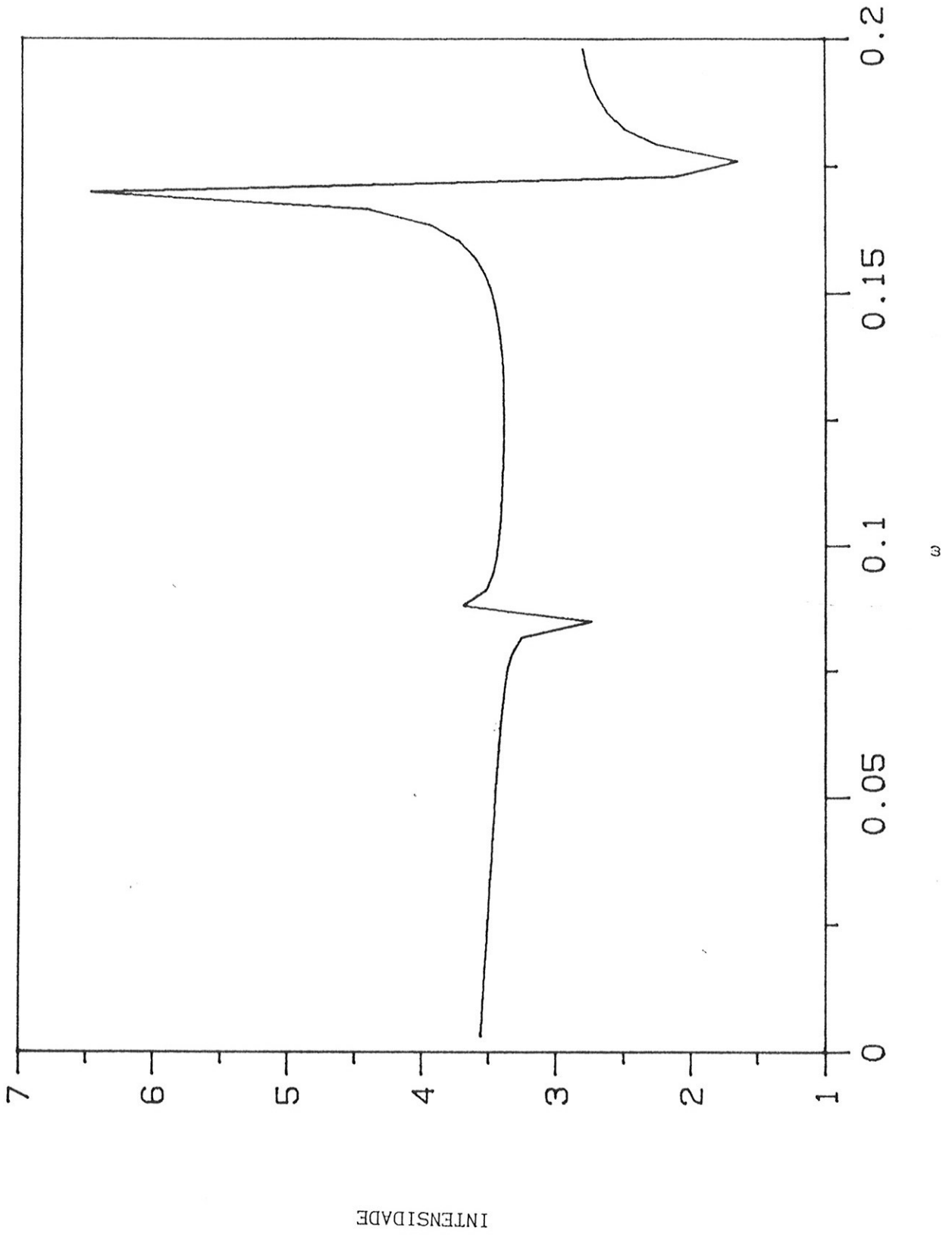


figura 5.17 ($A = 3.7$, $\tau = 5.87$)

quais elas são estáveis são muito pequenos.

Neste trabalho consideramos apenas as quatro primeiras duplicações de período, mais a bifurcação que leva o sistema a apresentar soluções irregulares, ou seja, o ponto de acumulação de Feigenbaum.

O critério para encontrar esse ponto, foi o de verificar quais eram os menores parâmetros (τ, A) para o qual a solução apresentava um espectro irregular. Na verdade esse ponto sempre esteve muito próximo a (τ_4, A_4) (parâmetros para os quais ocorre uma quarta duplicação de período).

As figuras 5.18 e 5.19 mostram o espectro correspondente à solução da figura 5.11. Podemos notar claramente a estrutura fina, bastante irregular do espectro, o que indica que a solução da figura 5.11 já pertence à "região caótica".

As figuras 5.20 a 5.24 ($NP=300$) mostram as soluções da equação (5.1) quando τ é bastante grande, $\tau=50.0$. Novamente, conforme vamos variando A , vamos encontrando soluções cujos períodos são do tipo $p=2^n + \varepsilon$, onde nesse caso ε é bem pequeno (segundo nossas, e outras observações [Ikeda & Matsumoto (1987)], ε tende a zero linearmente com $1/\tau$). É interessante notar que na figura 5.20 ($A=3.3$) encontramos uma solução que é aproximadamente uma onda quadrada, como o estabelecido pelo teorema do Mallet-Paret & Nussbaum^{1,2} (1986).

Já na figura 5.21 ($A=3.5$) encontramos uma solução de período aproximadamente 4, com nítidas características de onda quadrada, mas com aqueles "bicos", citados por Mallet-Paret & Nussbaum¹

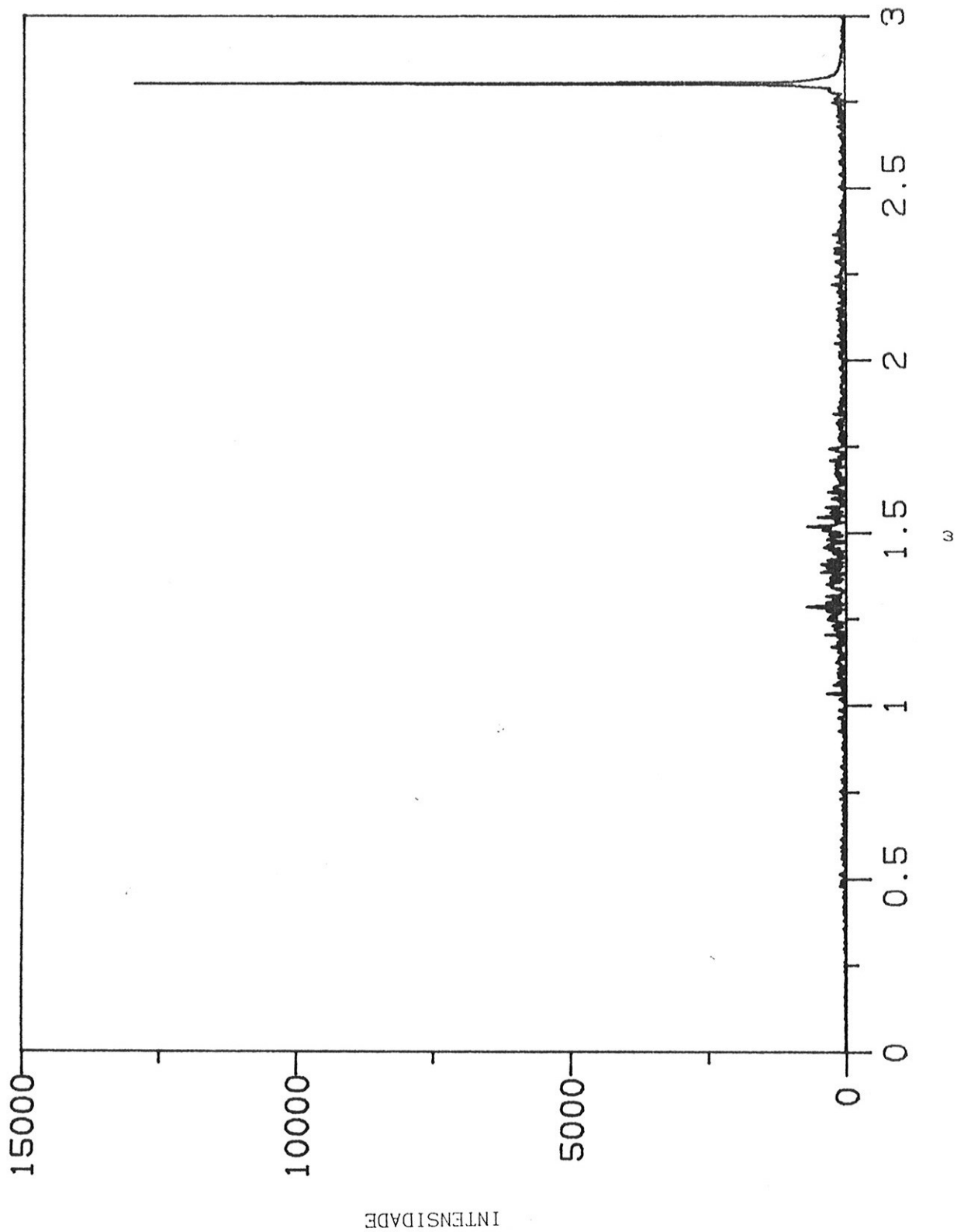


figura 5.18 ($A = 3.7$, $\tau = 7.0$)

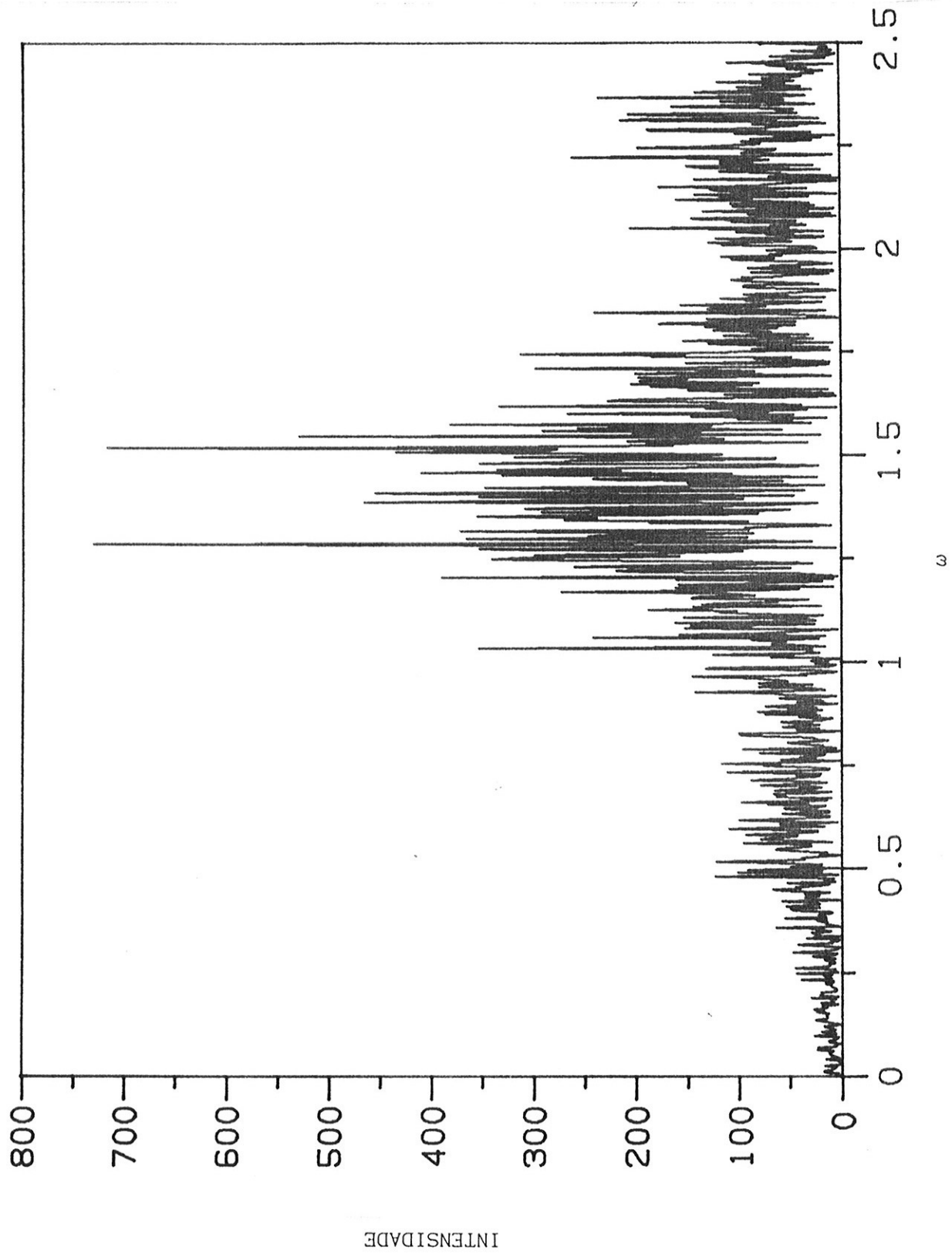


figura 5.19 ($A = 3.7$, $\tau = 7.0$)

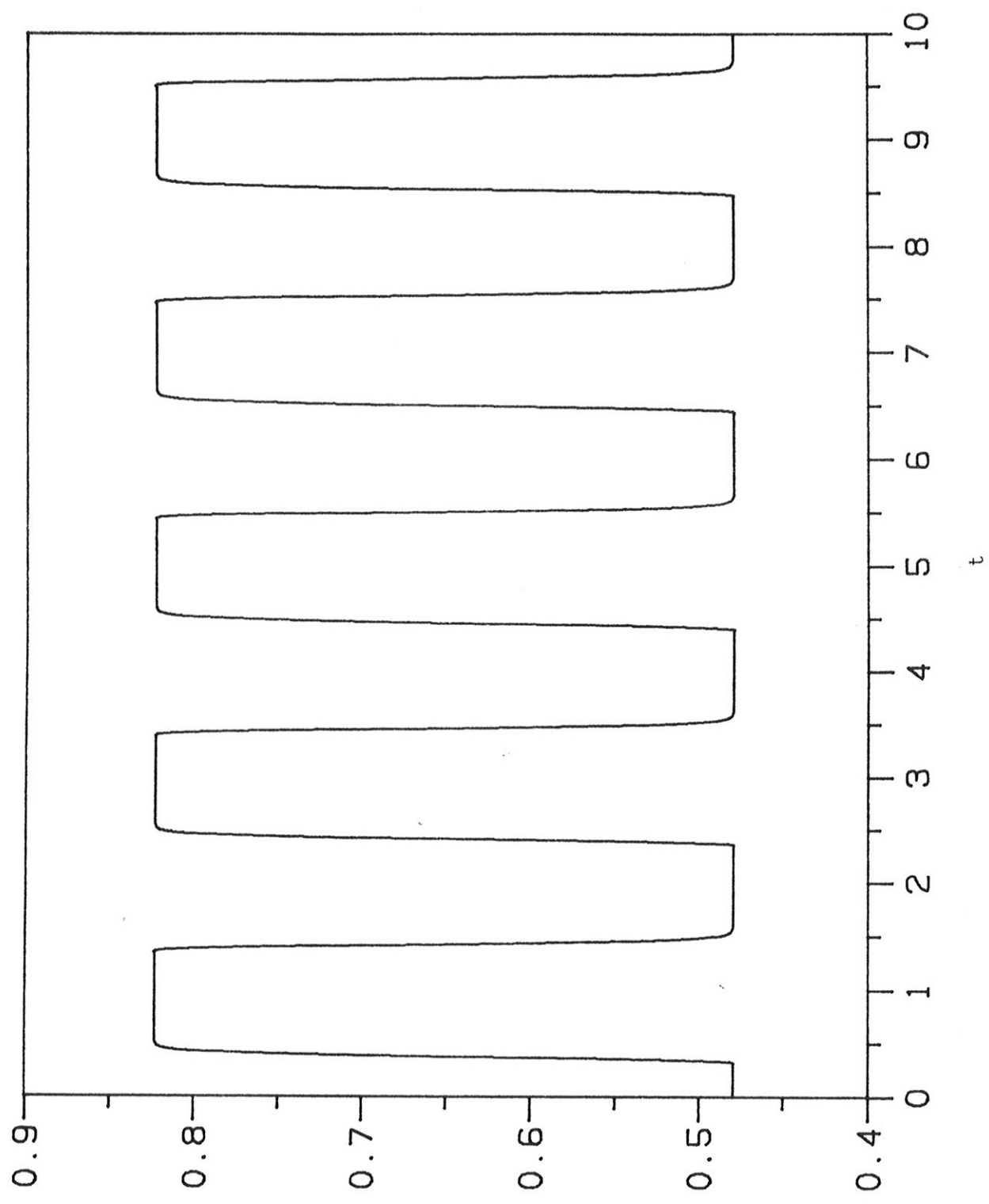


figura 5.20 ($A = 3.3$, $\tau = 50.0$)

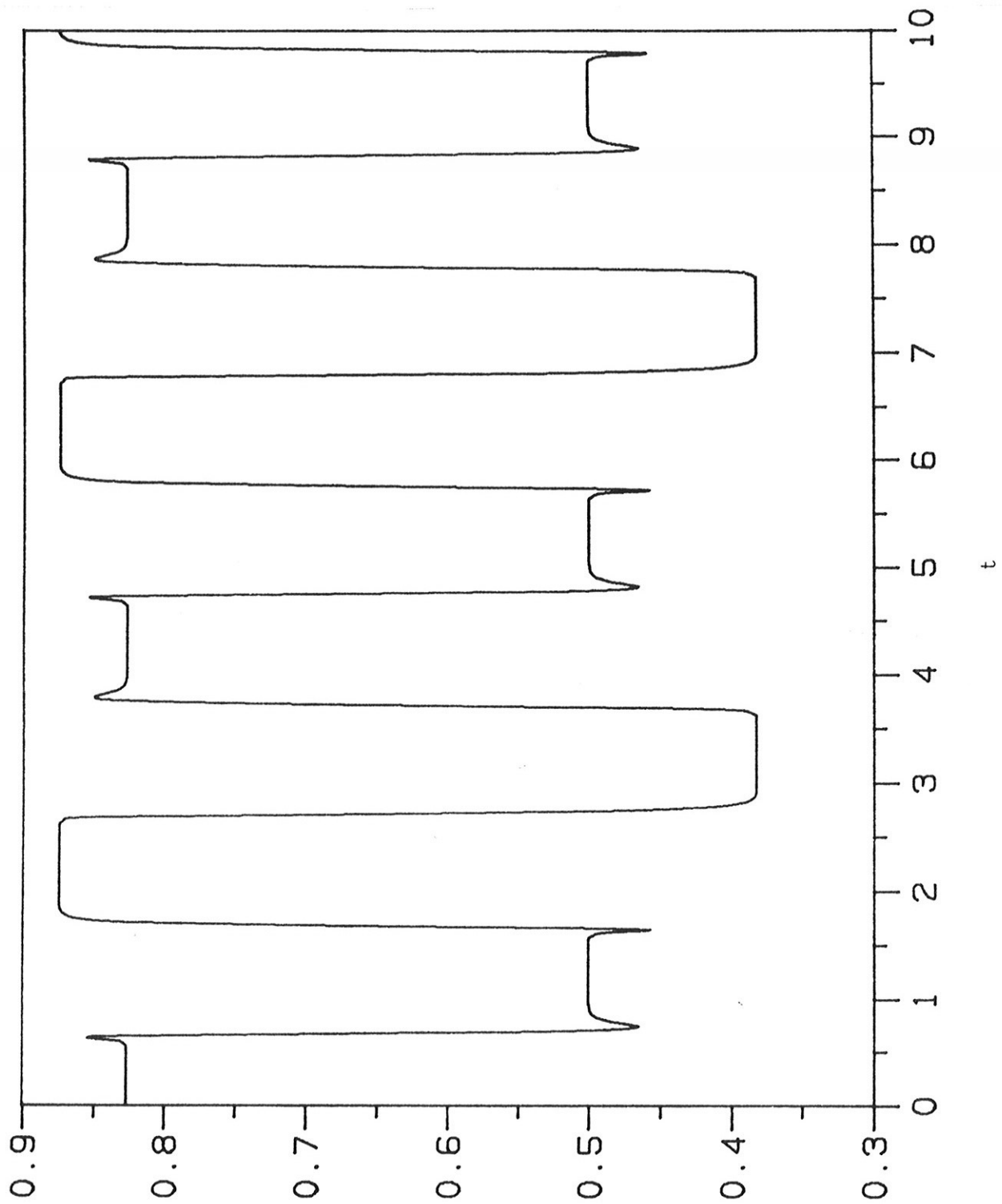


figura 5.21 ($A = 3.5$, $\tau = 50.0$)

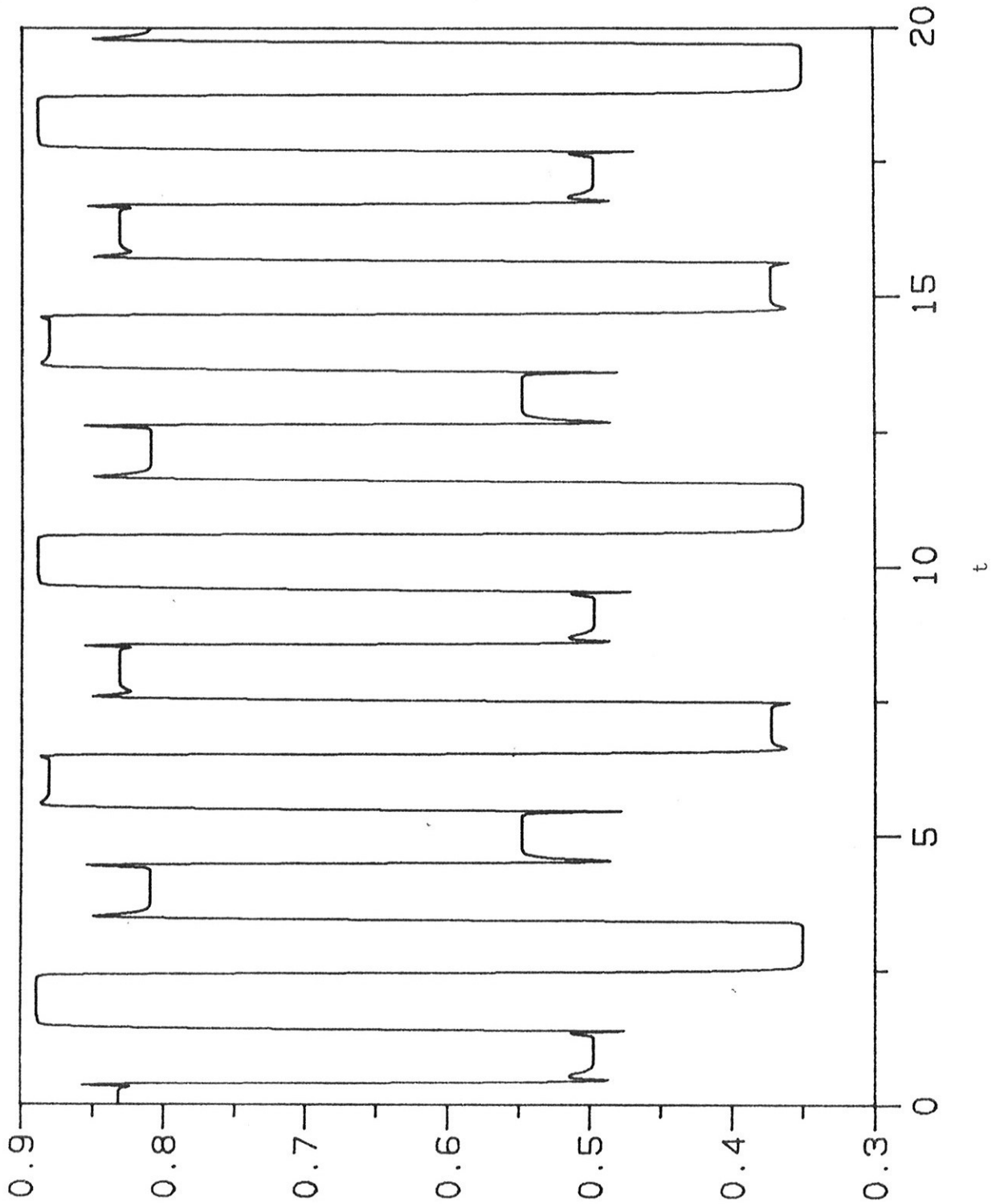


figura 5.22 ($A = 3.557$, $\tau = 50.0$)

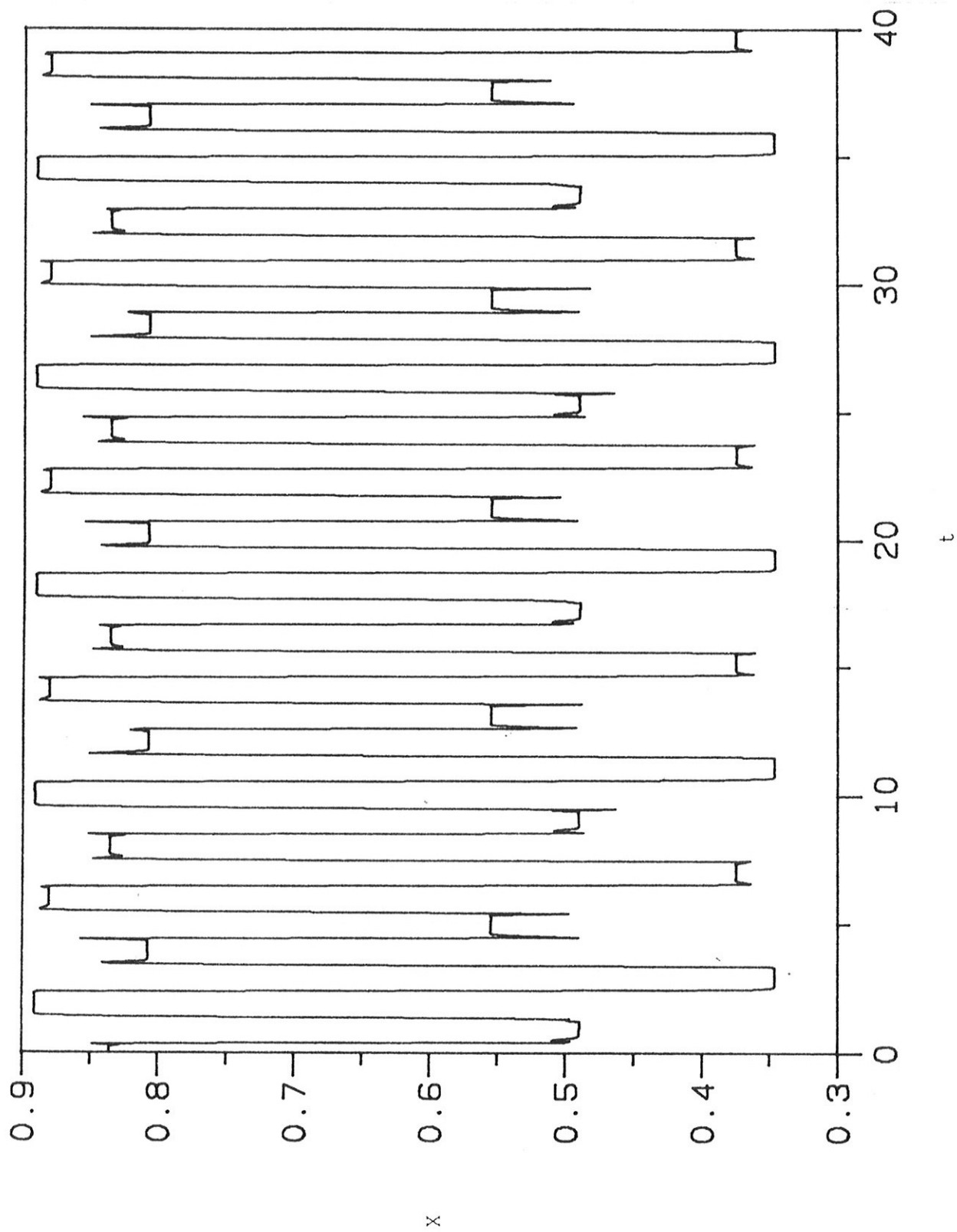


figura 5.23 ($A = 3.565$, $\tau = 50.0$)

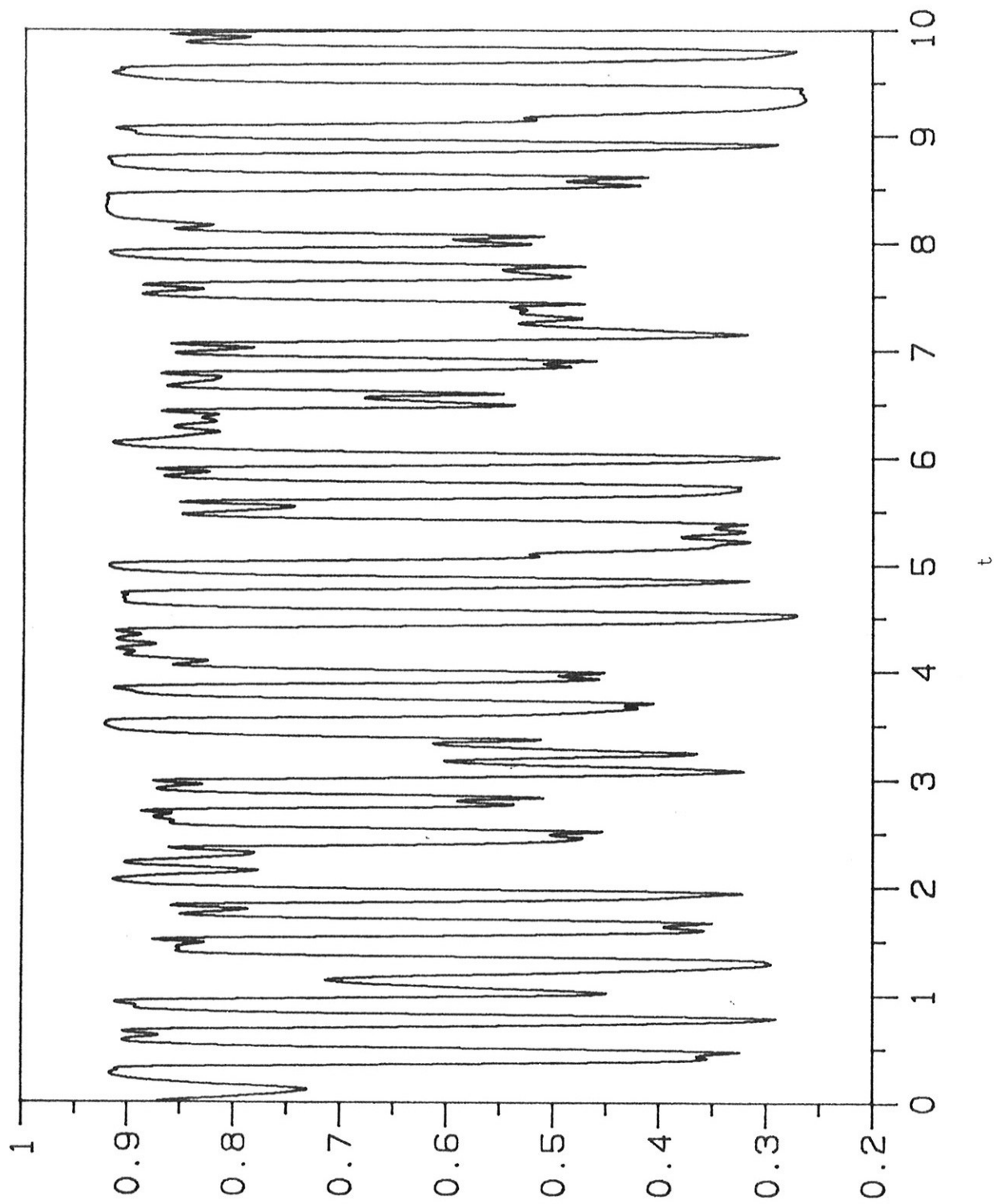


figura 5.24 ($A = 3.7$, $\tau = 50.0$)

(1986), e já comentados. As figuras 5.22 e 5.23 apresentam os mesmos "bicos" que a figura 5.21, só que com períodos aproximadamente 8 e 16, respectivamente.

A figura 5.24 ($A=3.7$) ilustra uma solução extremamente irregular, provavelmente caótica.

Esse primeiro conjunto de figuras mostram as soluções típicas de (5.1), e a importância da análise de Fourier como ferramenta para distinguir soluções de períodos longos.

Voltando ao problema da determinação das curvas de bifurcação, existe um momento no qual o ponto de bifurcação encontra-se em um intervalo razoavelmente pequeno, de modo surgirem alguns problemas.

Sem dúvida o maior desses problemas é o enorme transiente que as soluções apresentam próximo ao ponto de bifurcação. Isso não é difícil de entender, se lembrarmos da relação entre bifurcação e perda de estabilidade local da solução. Próximo à bifurcação, a solução da equação linearizada apresenta um enorme transiente, devido à pequena parte real das raízes da equação característica, ou dos coeficientes de Floquet. Obviamente tal propriedade é refletida na equação não linear.

As figuras 5.25 a 5.30 dão uma idéia de quão grande pode ser esse transiente. Elas mostram diversas parcelas da parte transitória de uma determinada solução, e se as analisarmos separadamente, nos darão a impressão de que a solução, em cada uma delas, já atingiu o seu comportamento assintótico.

Nesses gráficos $NP=100$, $\tau=4.535$ e $A=3.65$ (ambos os parâmetros

fixos). Para esse valor de A , o ponto considerado como o de bifurcação foi $\tau=4.5355$. Estamos, portanto, mais ou menos 0.0005 aquém da bifurcação.

A figura 5.25 mostra a solução para $TR=100$, sendo que esta apresenta um período tipicamente próximo a 4. Idem para as figuras 5.26, 5.27, 5.28, para $TR=210$, $TR=420$ e $TR=830$ respectivamente. Note que, em todos esses casos, continuamos a observar um período próximo a 4, mas claramente se percebe que a solução tende a uma de período aproximadamente 2. Para a figura 5.29, $TR=1640$, ainda é possível, mas não fácil, distinguir visualmente uma solução de período aproximadamente 4, mas na figura 5.30, $TR=3280$, isso já não é mais possível, e nesse ponto observamos uma solução com período aproximadamente 2, que de fato representa a parte assintótica dessa solução.

Tendo em vista esse exemplo, nota-se que não é nada difícil se enganar quanto ao período assintótico da solução. Uma maneira de tentar contornar esse problema é fazer TR o maior possível próximo às bifurcações, e o preço pago por isso é o aumento no tempo de computação. Essa é a razão de admitirmos um transiente da ordem de 10^4 na parte fina da análise (o fato de termos usado $TR=10^4$ na obtenção das soluções das figuras 5.1 a 5.24 foi um preciosismo).

Poderíamos descrever outros problemas técnicos da análise numérica, mas, sem dúvida, o transiente demasiadamente longo foi um dos maiores limitantes na determinação das curvas de bifurcação (a partir de uma certa precisão, os resultados perdem a coerência, e não mais sabemos se estamos à direita, ou à esquerda do ponto

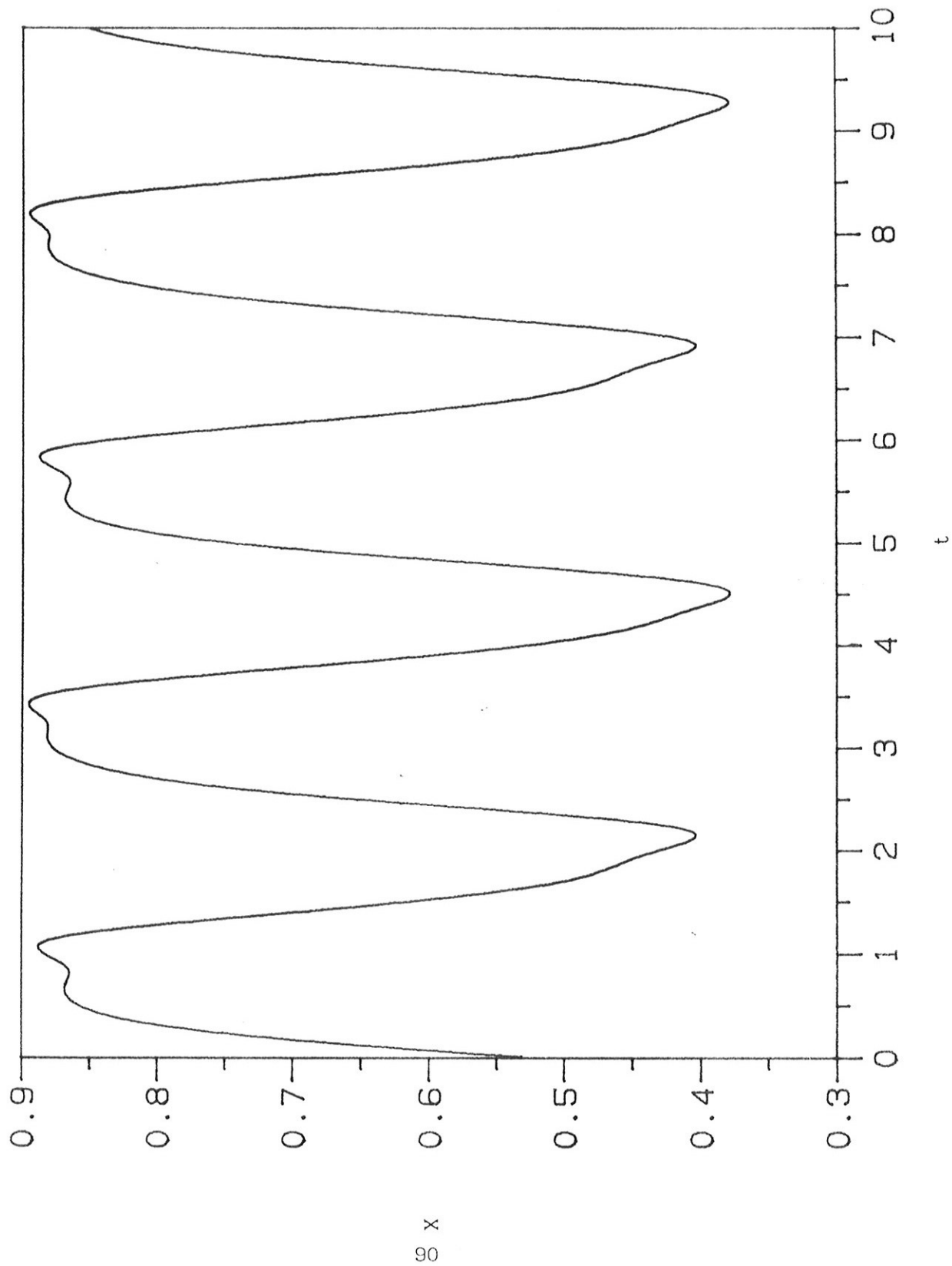


figura 5.25 ($A = 3.65$, $\tau = 4.535$, $TR = 100$)

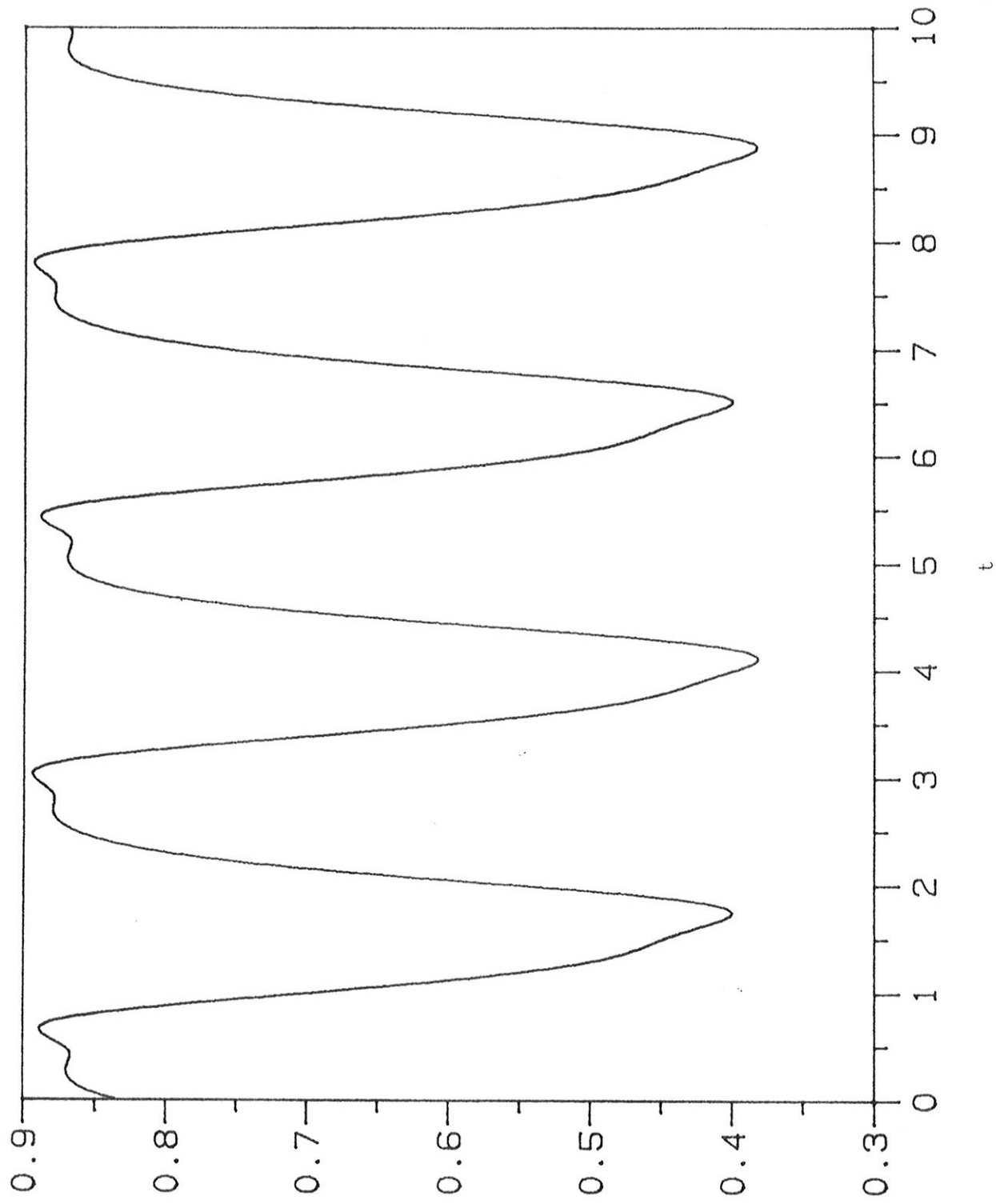


figura 5.26 ($A = 3.65$, $\tau = 4.535$, $TR = 210$)

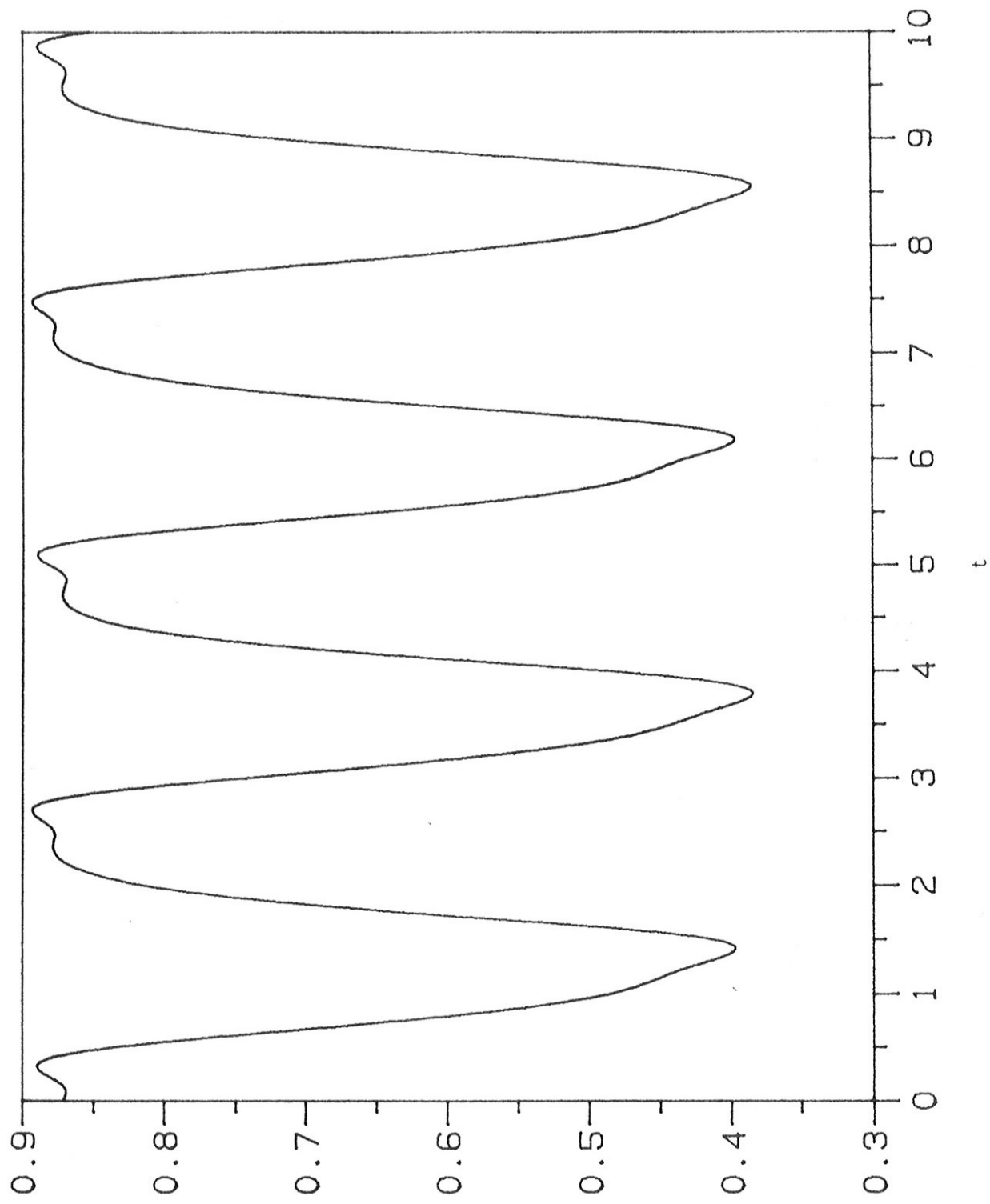


figura 5.27 ($A = 3.65$, $\tau = 4.535$, $TR = 420$)

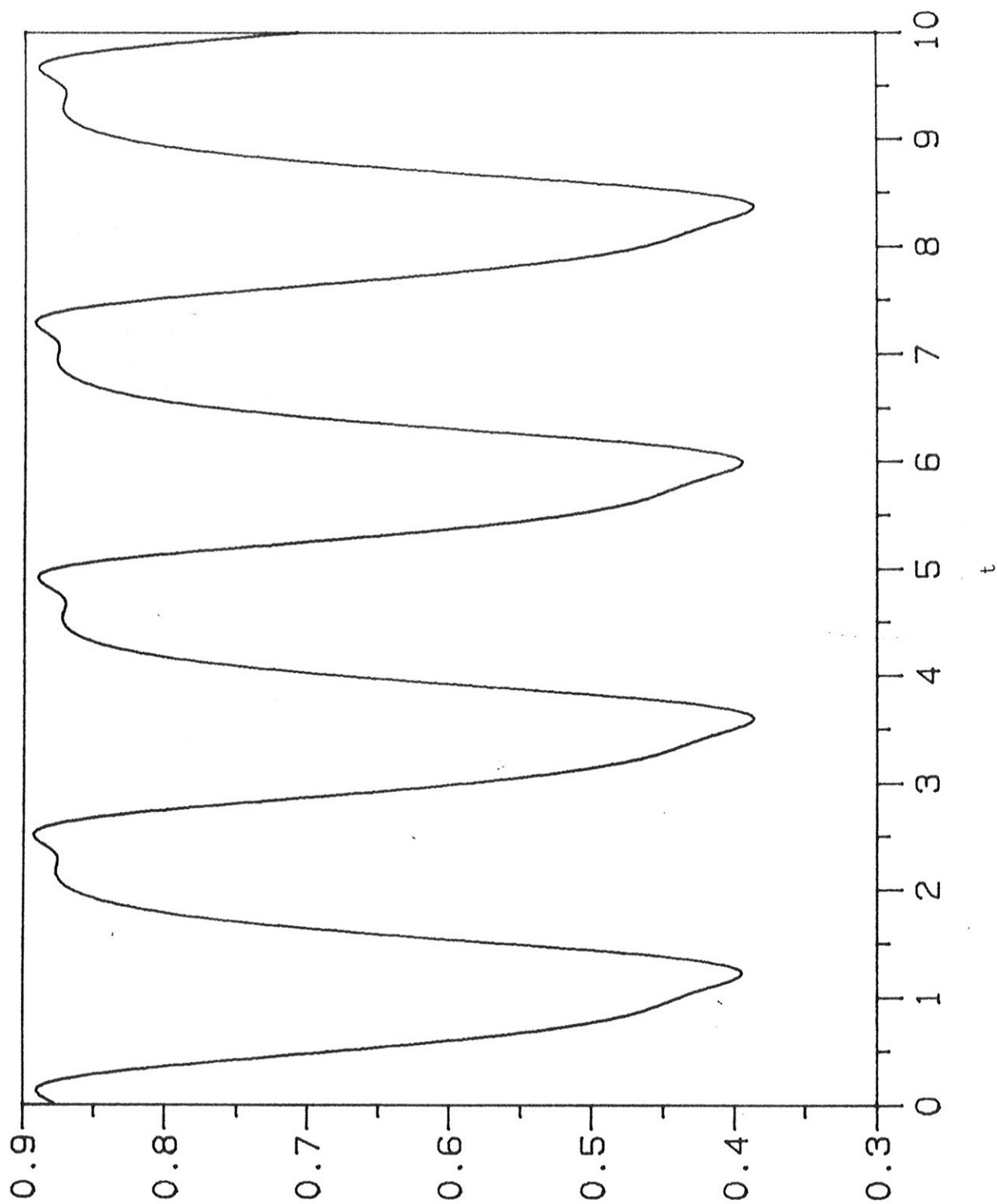


figura 5.28 ($A = 3.65$, $\tau = 4.535$, $TR = 830$)

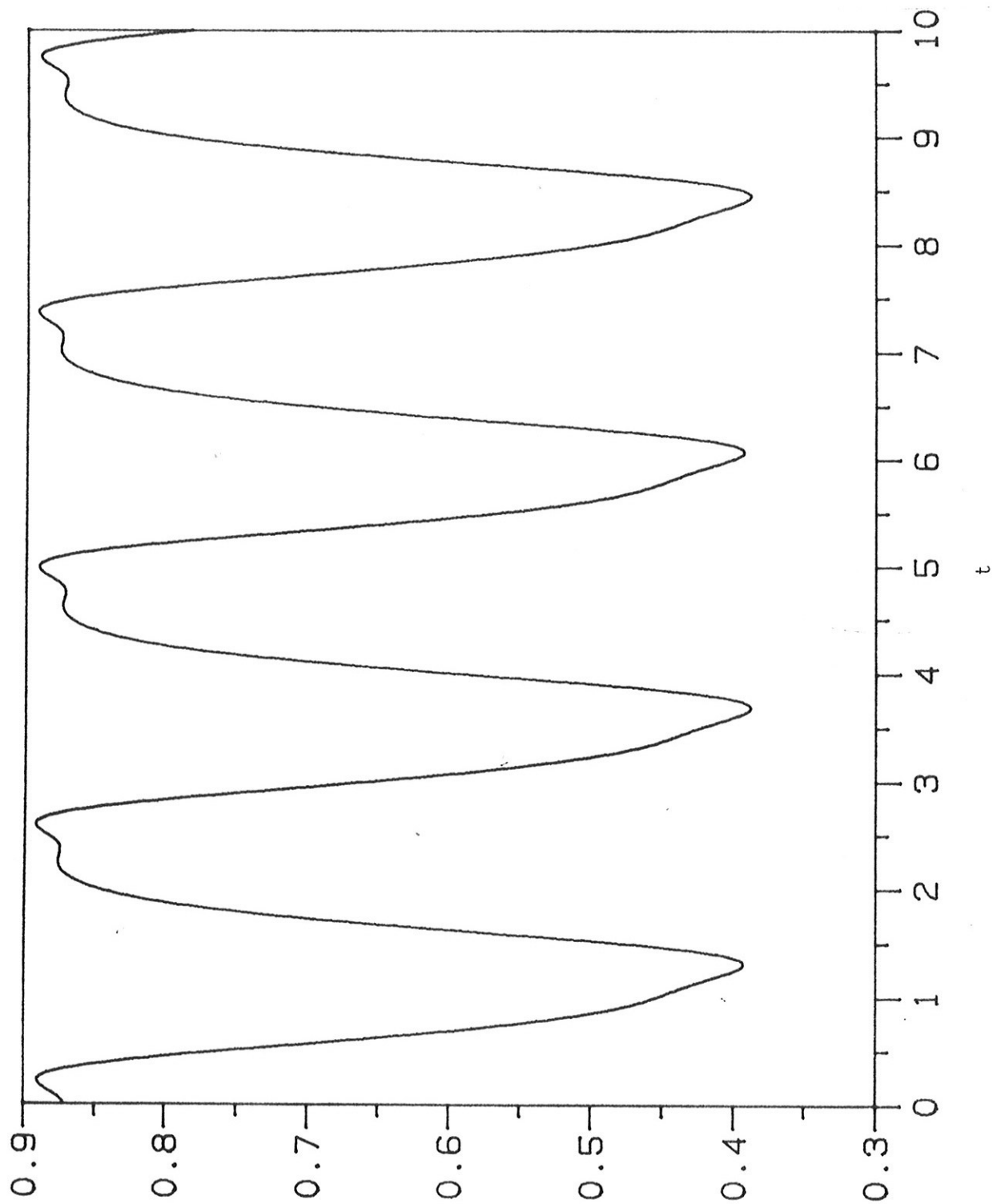


figura 5.29 ($A = 3.65$, $\tau = 4.535$, $TR = 1640$)

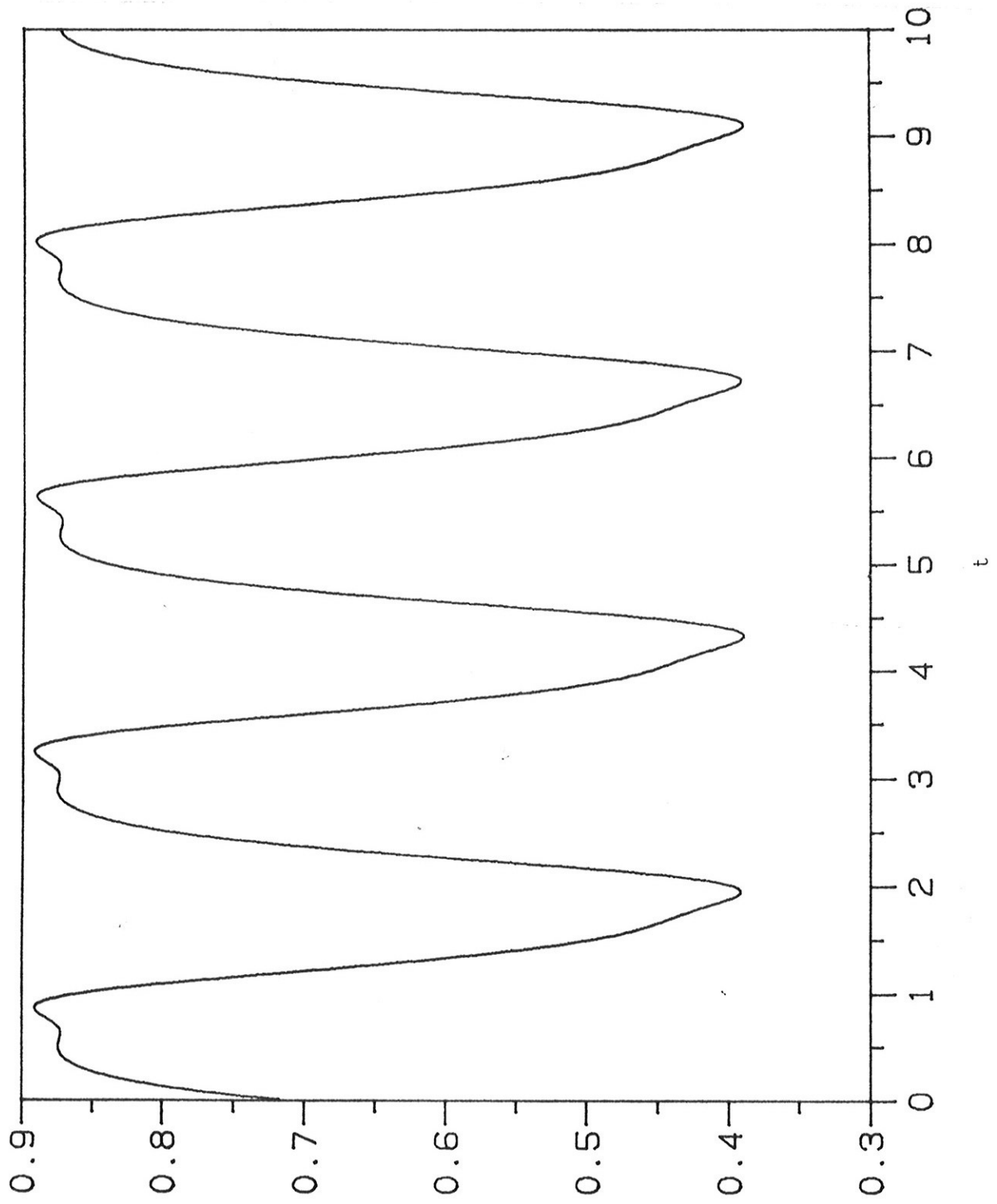


figura 5.30 ($A = 3.65$, $\tau = 4.535$, $TR = 3280$)

procurado).

Quando ainda não estamos no intervalo em que o transiente é fator limitante, mas estamos bastante próximos ao ponto de bifurcação, a análise visual das soluções é dispensável, e a ferramenta útil passa a ser a análise de Fourier.

As figuras 5.31 a 5.37 ilustram a localização fina de alguns pontos de bifurcação. Para obter essas figuras utilizamos $NP=50$, $TR=10^4$, $A=3.85$ (fixo), e a análise de Fourier foi realizada sobre um intervalo de 2000 unidades de tempo (10^5 pontos). A parte mostrada dos espectros concentra-se na região próxima à origem, que é a que nos interessa.

As figuras 5.31 a 5.34 ilustram o processo de busca do τ em que ocorre a quarta duplicação de período. A razão de termos escolhido esse ponto é que ele é o mais difícil de ser localizado, pois está "espremido" entre dois outros, também por nós determinados.

As figuras 5.31 e 5.32 mostram espectros com $0 < \omega < 3.0$ e $0 < \omega < 0.2$, ambos para o ponto $\tau=4.003$, um pouco antes da bifurcação.

A figura 5.33 mostra o espectro para $\tau = 4.0032$ na região $0 < \omega < 0.2$, evidenciando o aparecimento de uma pequena componente para o período 38.46. Compare as figuras 5.32 e 5.33. Isso mostra que o ponto de bifurcação está entre $\tau = 4.003$ e $\tau = 4.0032$.

A figura 5.34, $\tau = 4.012$, mostra o espectro típico de uma solução com período próximo a 38.0.

As figuras 5.35 a 5.37 mostram espectros de soluções irregulares.

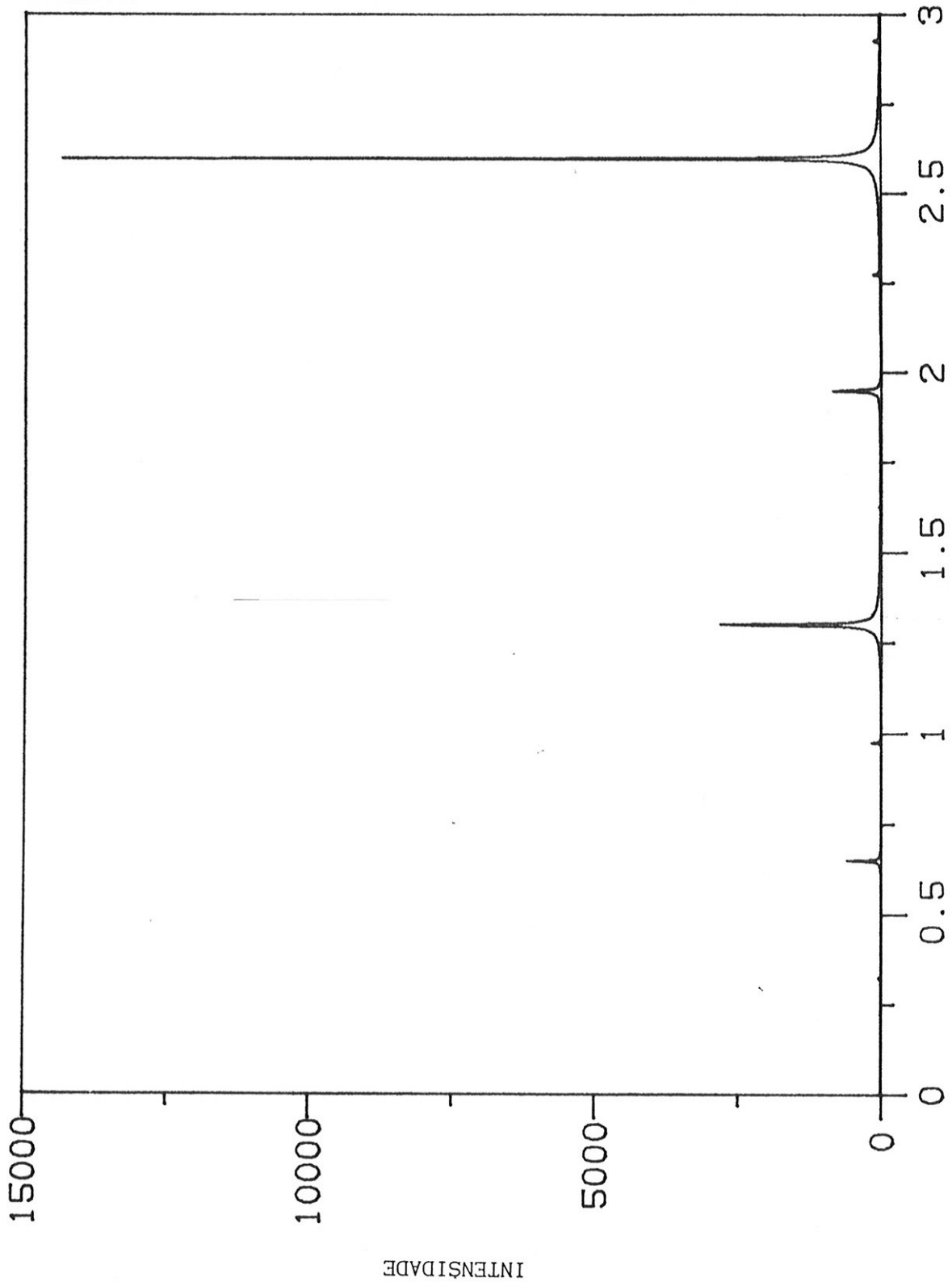


figura 5.31 ($A = 3.85$, $\tau = 4.003$)

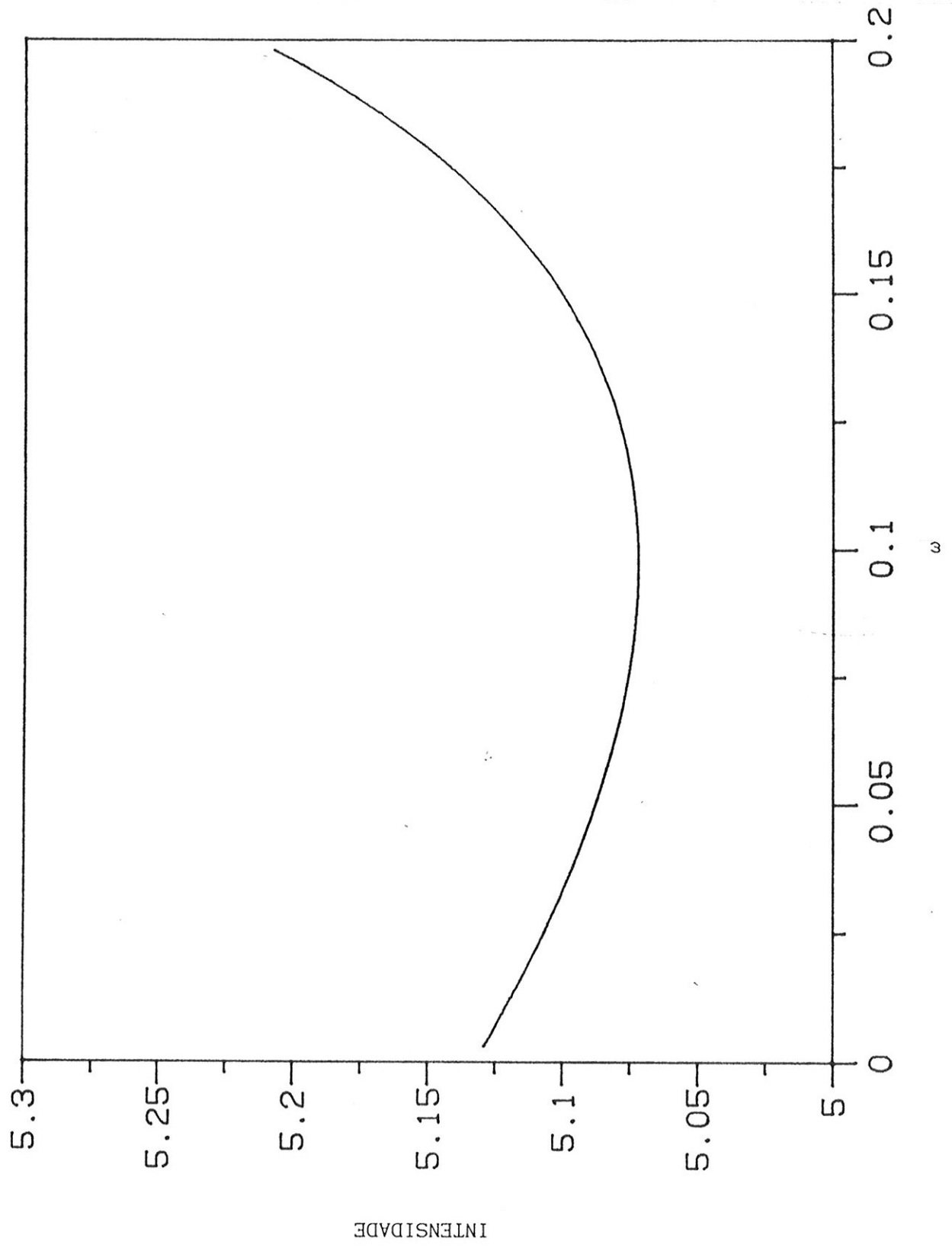


figura 5.32 ($A = 3.85$, $\tau = 4.003$)

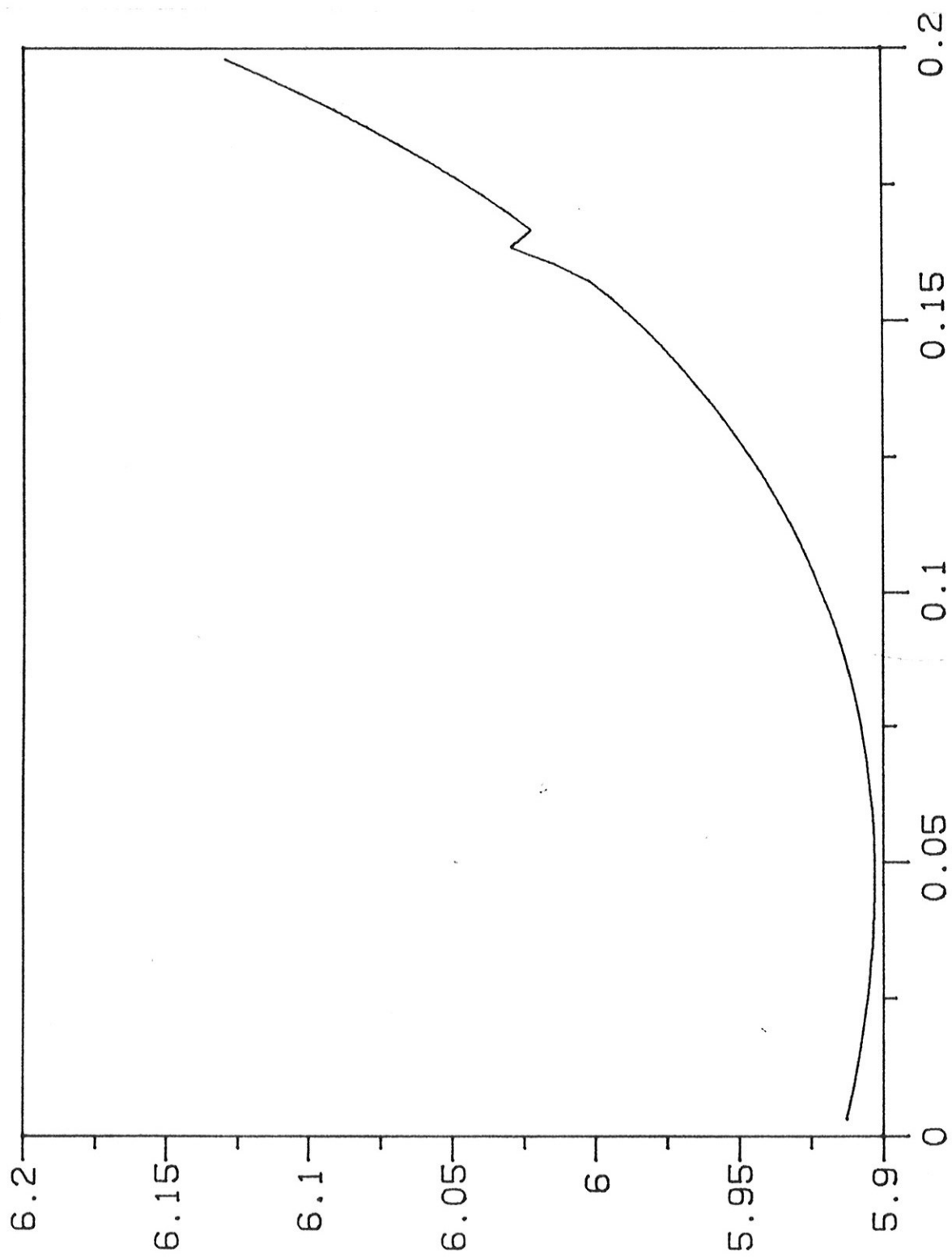
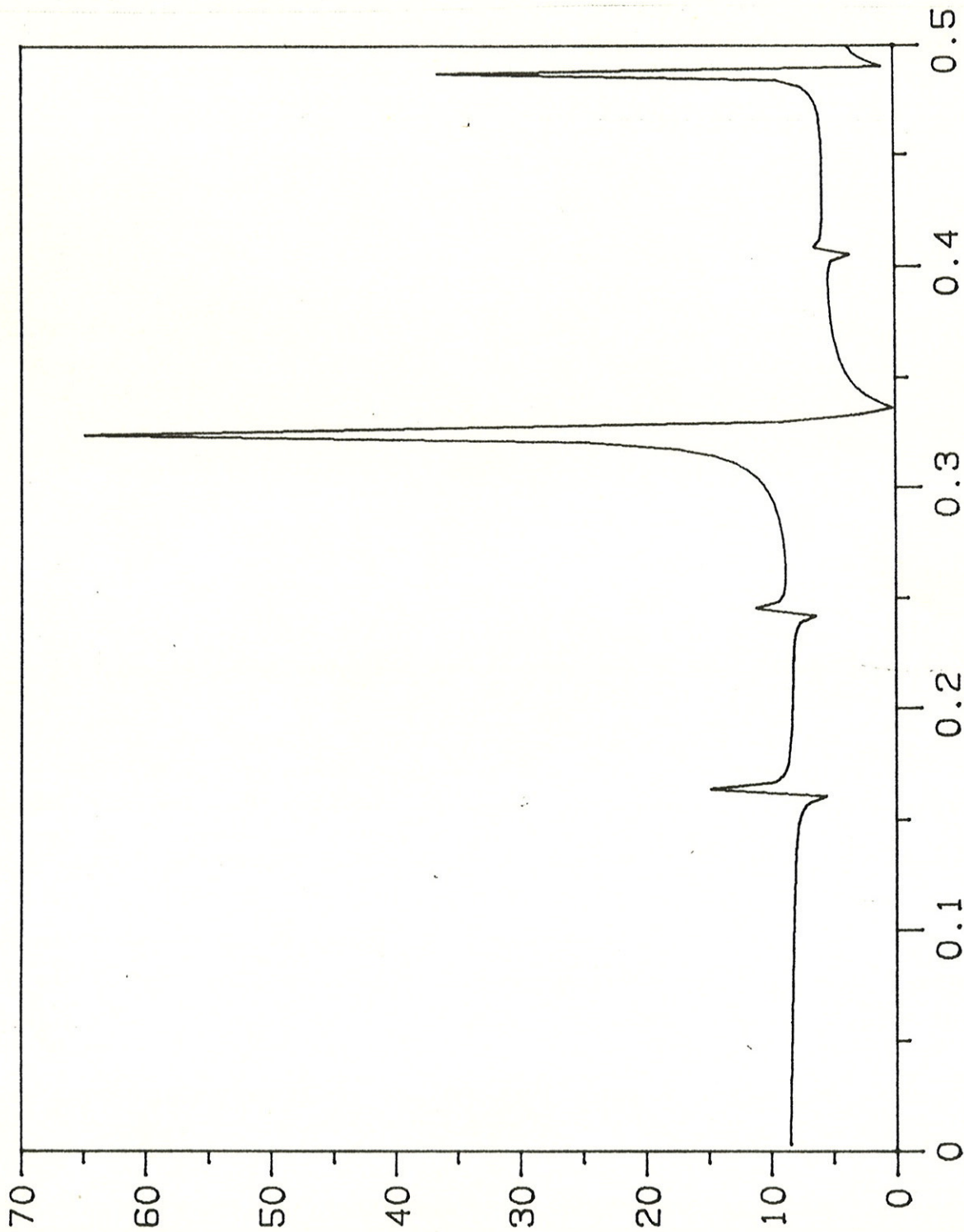


figura 5.33 ($A = 3.85$, $\tau = 4.0032$)



ω

figura 5.34 ($A = 3.85$, $\tau = 4.012$)

INTENSIDADE



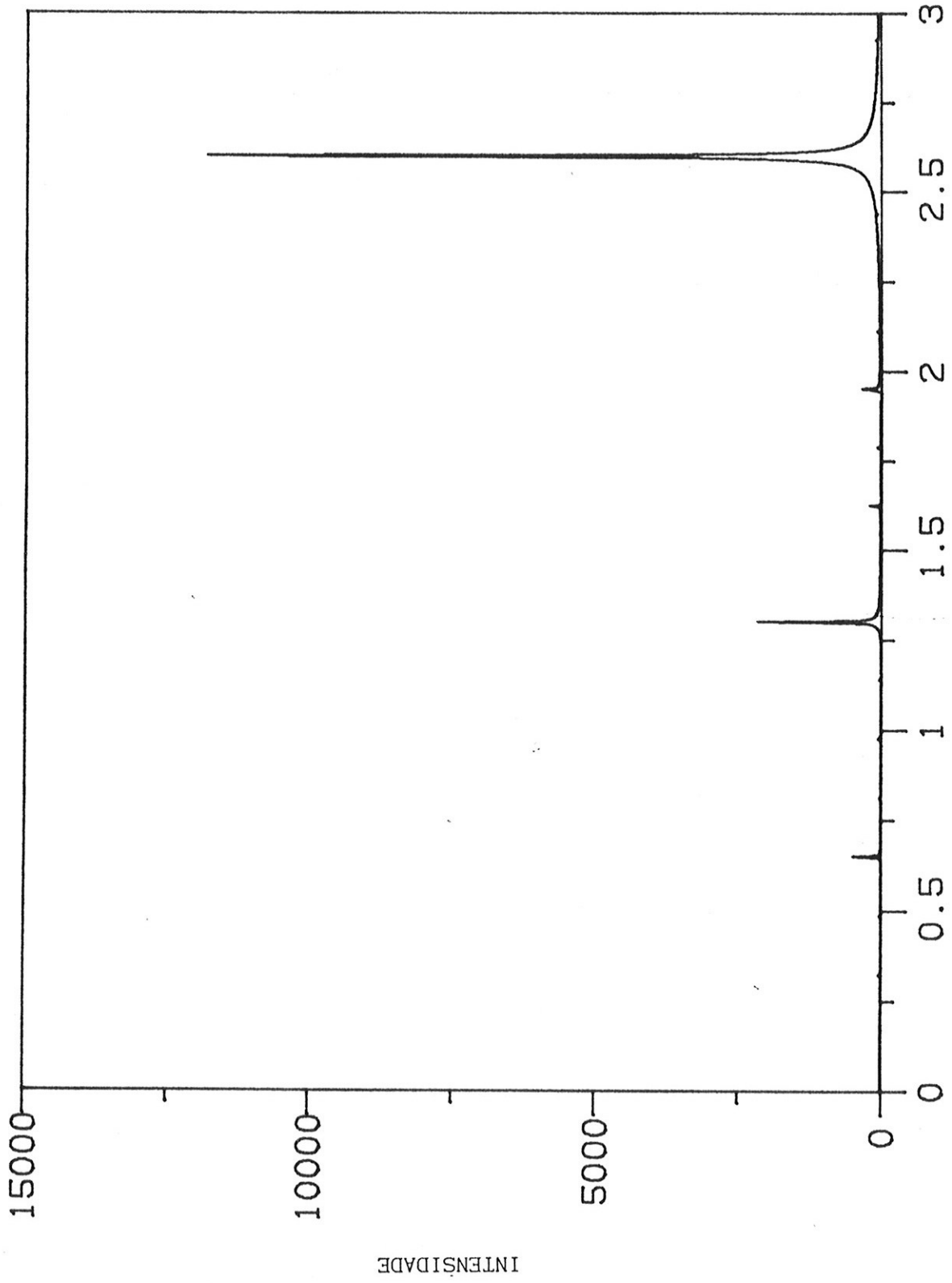
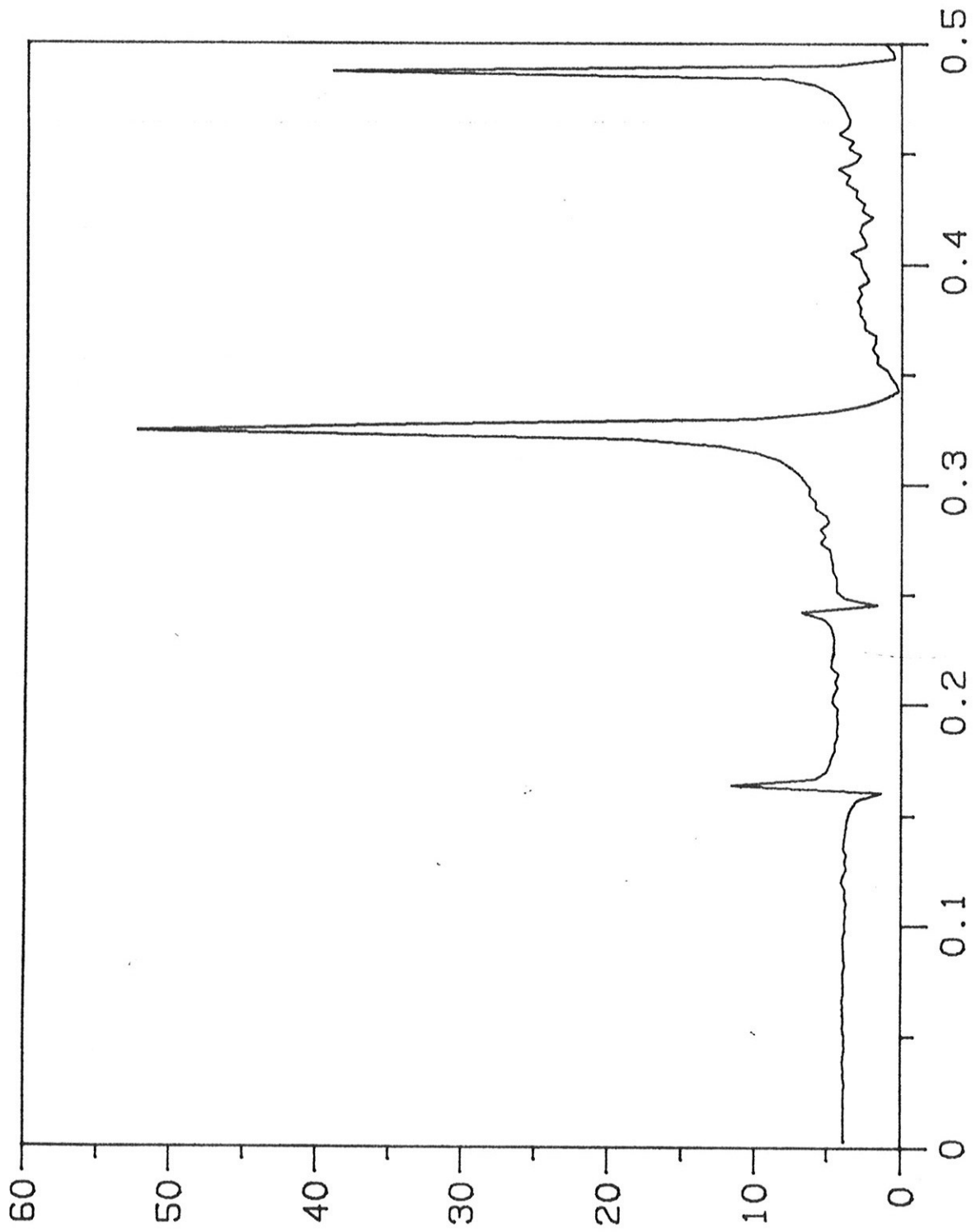


figura 5.35 ($A = 3.85$, $\tau = 4.0129$)



ω

figura 5.36 ($A = 3.85$, $\tau = 4.0129$)

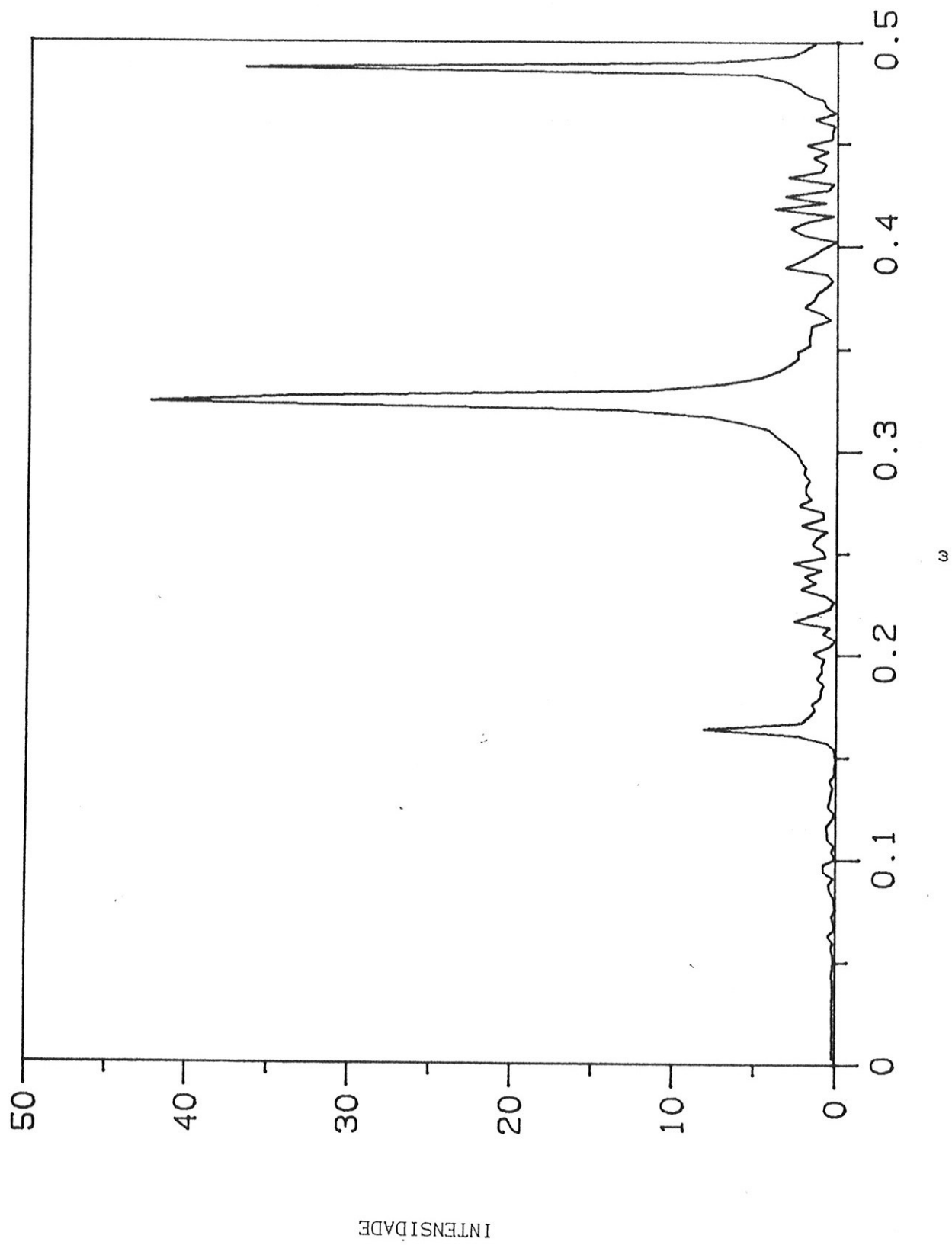


figura 5.37 ($A = 3.85$, $\tau = 4.0135$)

A figura 5.35, $\tau = 4.0129$, mostra um espectro no domínio $0 < \omega < 3.0$ de uma solução logo após o ponto de acumulação das duplicações de período, τ_{∞} . Note a semelhança, nessa escala, entre esta figura e a figura 5.31.

A figura 5.36 mostra um detalhe da figura 5.35, evidenciando que o espectro que estamos considerando já contém uma estrutura tenuamente irregular.

A figura 5.37, $\tau = 4.0135$, mostra um espectro mais tipicamente irregular. Compare as figuras 5.34, 5.36, e 5.37.

Seguindo a metodologia já descrita, gráficos como os mostrados acima, e variando τ ou A dependendo da conveniência (é sempre bom procurar os pontos de bifurcação em linhas ortogonais às curvas de bifurcação), fomos capazes de construir as curvas de bifurcação no espaço τ, A .

As figuras 5.38 a 5.42 apresentam as curvas correspondentes às quatro primeiras duplicações de período, mais a curva de acumulação das duplicações, respectivamente. Cada um desses gráficos consta de:

i) os pontos de bifurcação determinados pelo procedimento descrito,

ii) uma curva contínua que foi feita ajustando a função

$$A = \frac{E}{(\tau^H + F)} + G, \text{ com quatro parâmetros livres}$$

E, F, G, H,

iii) uma reta horizontal tracejada, no valor de A (chamaremos esse ponto de PBM) em que (5.5) apresenta uma duplicação de período, da mesma ordem da que estamos analisando.

Note que as curvas de bifurcação parecem tender assintoticamente às retas tracejadas.

É importante observar que o intervalo em que cercamos os pontos de bifurcação, sempre foram menores do que as "estrelinhas" que aparecem nos gráficos das figuras 5.38 a 5.42. Isso não quer dizer que asseguramos que o erro cometido esteja neste intervalo, pois é difícil controlar possíveis erros sistemáticos, como os introduzidos pelos transientes.

A seguir damos as características de cada uma das curvas de bifurcação:

Figura 5.38, primeira duplicação:

- 53 pontos
- $E = 9.902$ DP (desvio padrão) = 0.994
- $F = 7.921$ DP = 1.189
- $G = 3.452$ DP = $0.318 * 10^{-2}$
- $H = 2.474$ DP = $0.703 * 10^{-1}$
- DPR (desvio padrão residual) = $0.25 * 10^{-2}$
- PBM = 3.449 .

Figura 5.39, segunda duplicação:

- 46 pontos

- E = 5.522 DP = 0.800
- F = 0.869 DP = 0.688
- G = 3.539 DP = 0.324 * 10⁻²
- H = 2.106 DP = 0.911 * 10⁻¹
- DPR = 0.24 * 10⁻²
- PBM = 3.550.

Figura 5.40, terceira duplicação:

- 42 pontos
- E = 3.408 DP = 0.395
- F = -0.845 DP = 0.246
- G = 3.552 DP = 0.294 * 10⁻²
- H = 1.818 DP = 0.708 * 10⁻¹
- DPR = 0.14 * 10⁻²
- PBM = 3.564.

Figura 5.41, quarta duplicação:

- 42 pontos
- E = 3.105 DP = 0.288
- F = -1.024 DP = 0.168
- G = 3.554 DP = 0.231 * 10⁻²
- H = 1.761 DP = 0.558 * 10⁻¹
- DPR = 0.11 * 10⁻²
- PBM = 3.567.

Figura 5.42, curva de acumulação das duplicações de período:

- 42 pontos
- $E = 2.961$ $DP = 0.280$
- $F = -1.126$ $DP = 0.155$
- $G = 3.555$ $DP = 0.237 * 10^{-2}$
- $H = 1.735$ $DP = 0.567 * 10^{-1}$
- $DPR = 0.11 * 10^{-2}$
- $PBM = 3.5698$.

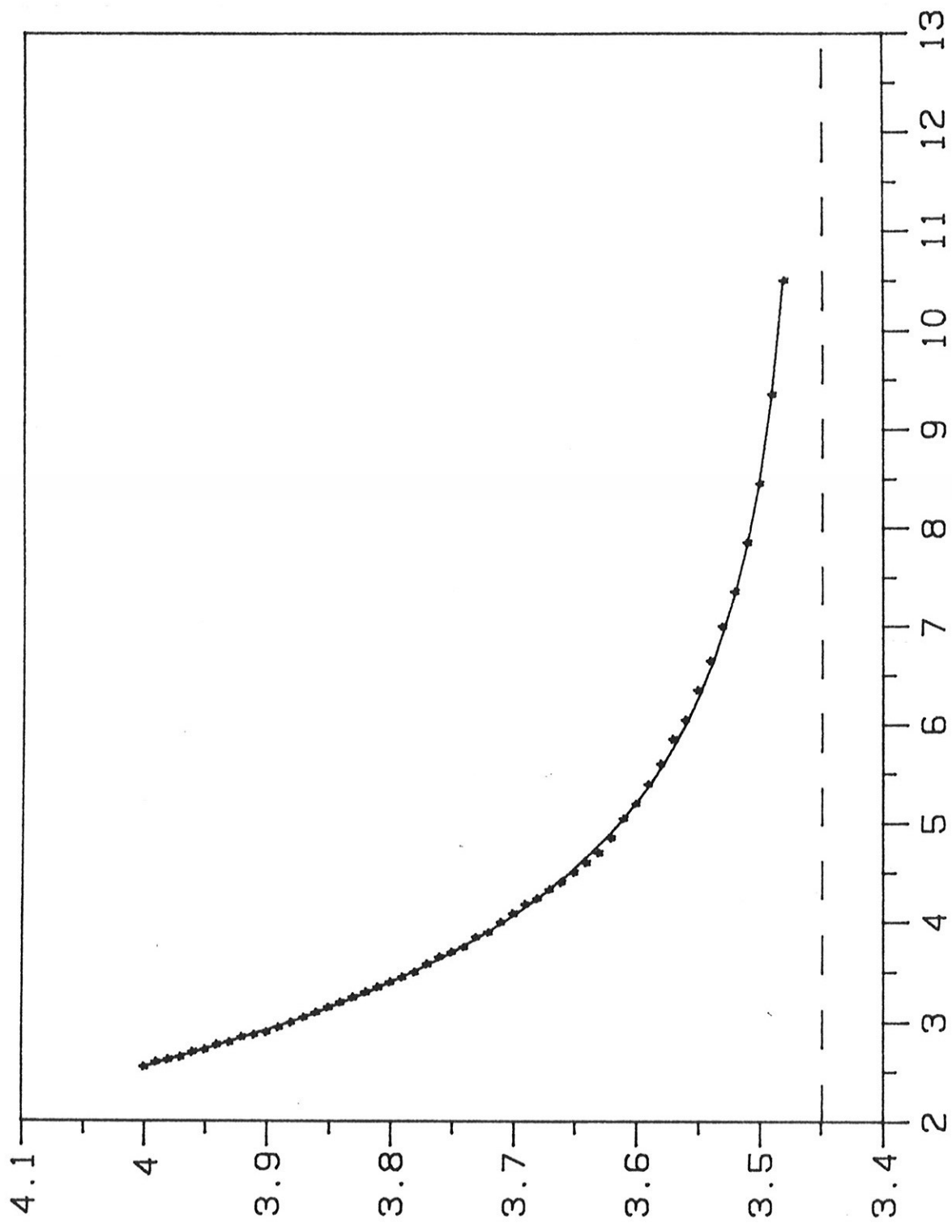
A figura 5.43 apresenta as tres primeiras curvas de duplicação, dispostas em ordem crescente de duplicação de baixo para cima, e mais a curva de acumulação das duplicações. Note que se tivéssemos colocado nesse gráfico a quarta curva de duplicação, esta quase quase coincidiria com a curva de acumulação, pois são muito próximas.

A figura 5.44 apresenta de baixo para cima, a curva da bifurcação de Hopf, dada pela igualdade em (5.2), as curvas das duas primeiras duplicações, e a curva de acumulação das duplicações.

Dos resultados apresentados, tudo indica que esse sistema, de fato, pode apresentar cascata de duplicação de período completa nas duas direções τ e A .

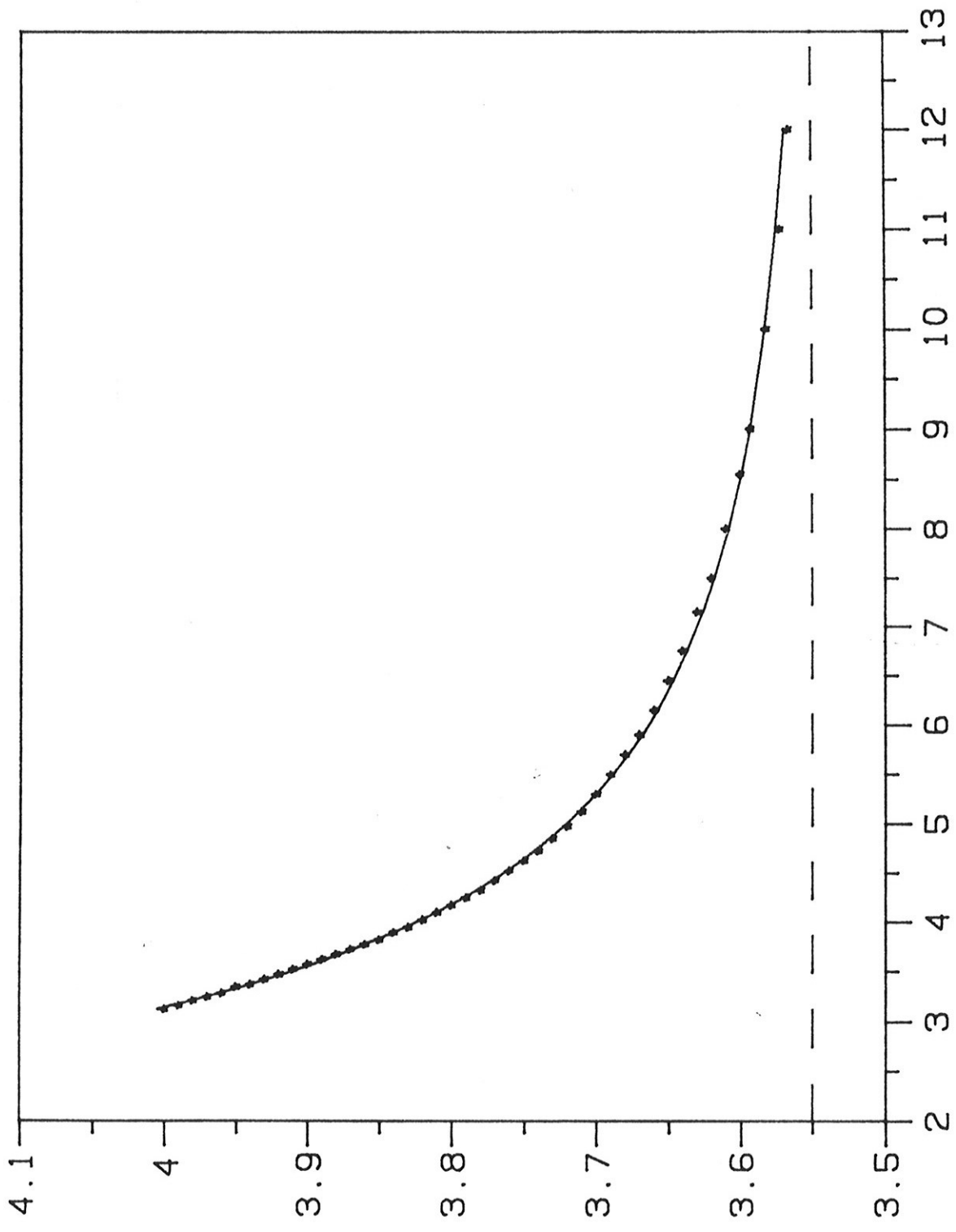
Sabendo isso, resolvemos calcular a relação:

$$(5.7) \quad \delta_1 = \frac{\lambda_{1+1} - \lambda_1}{\lambda_{1+2} - \lambda_{1+1}}, \quad \text{onde } \lambda \text{ ora é o parâmetro } A, \text{ ora } \tau.$$



tau

figura 5.38



tau
 figura 5.39

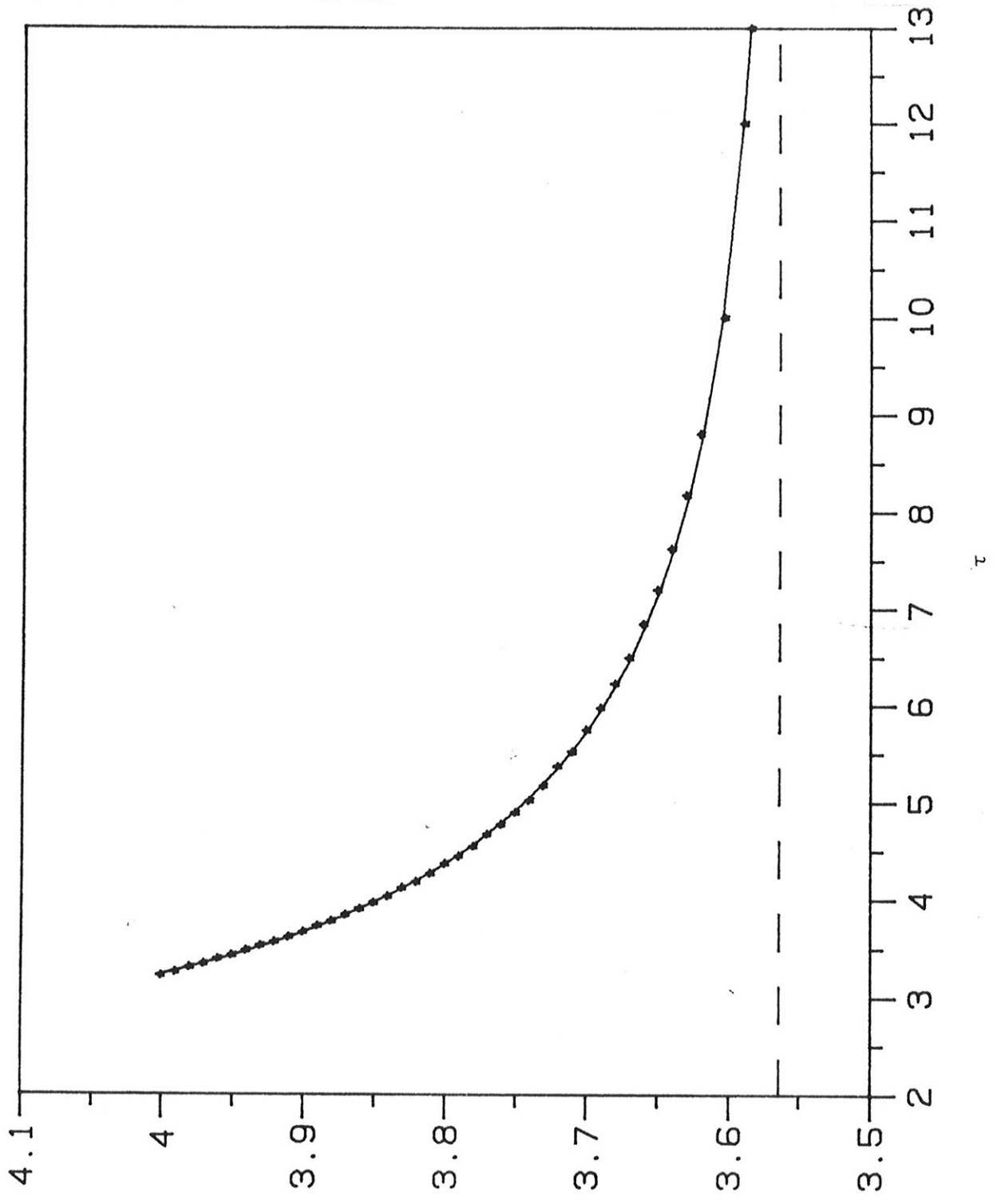


figura 5.40

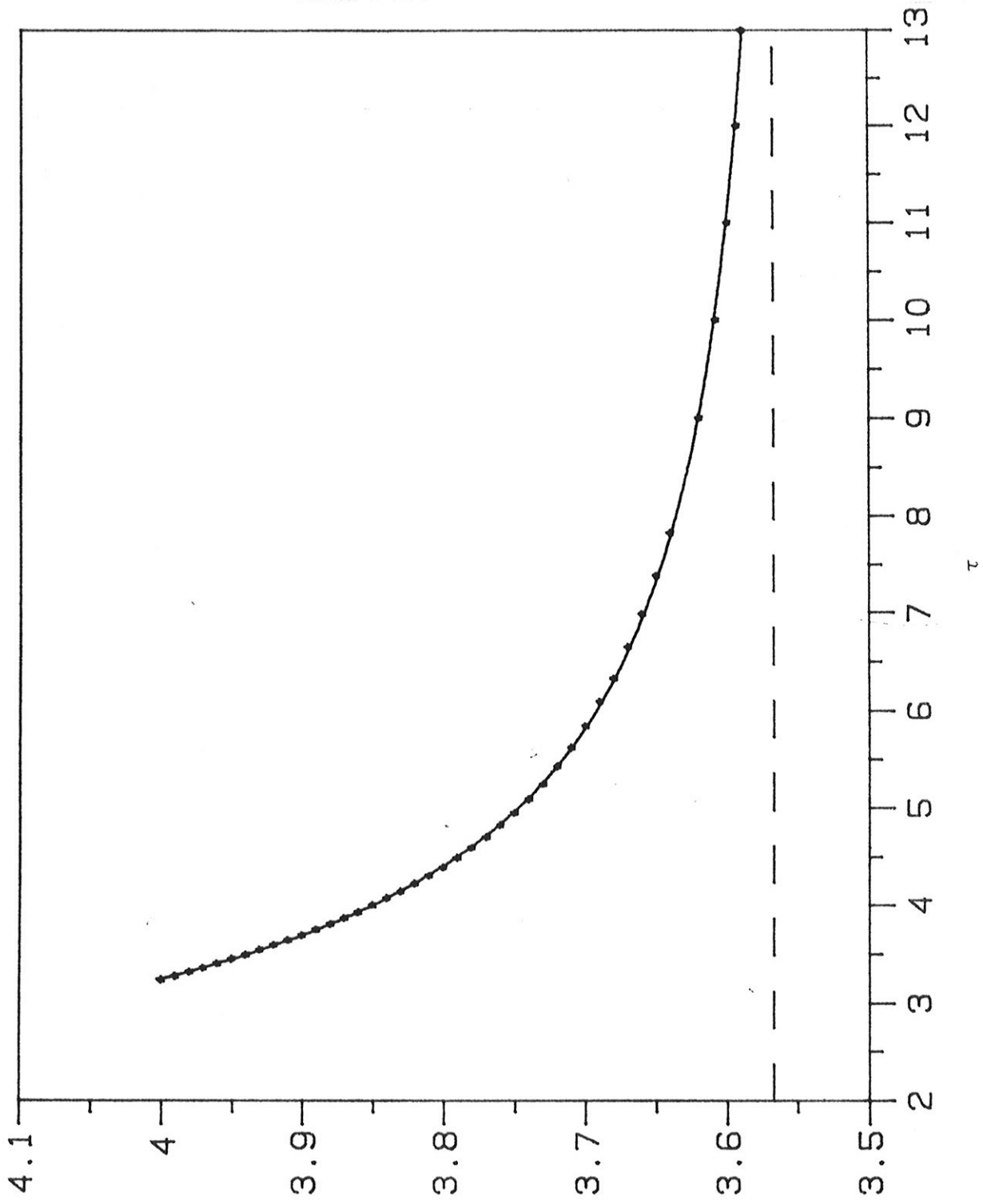
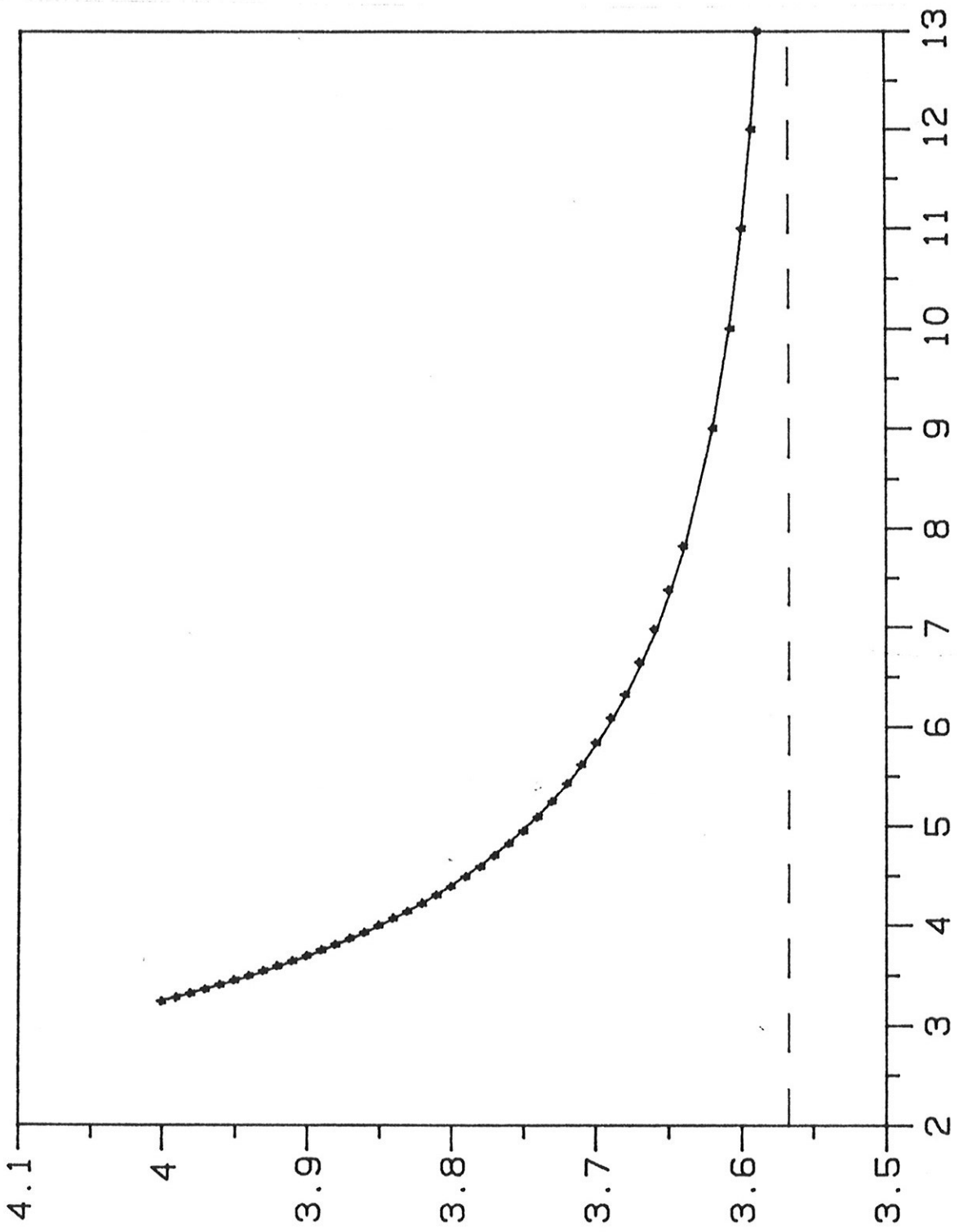


figura 5.41



tau

figura 5.42

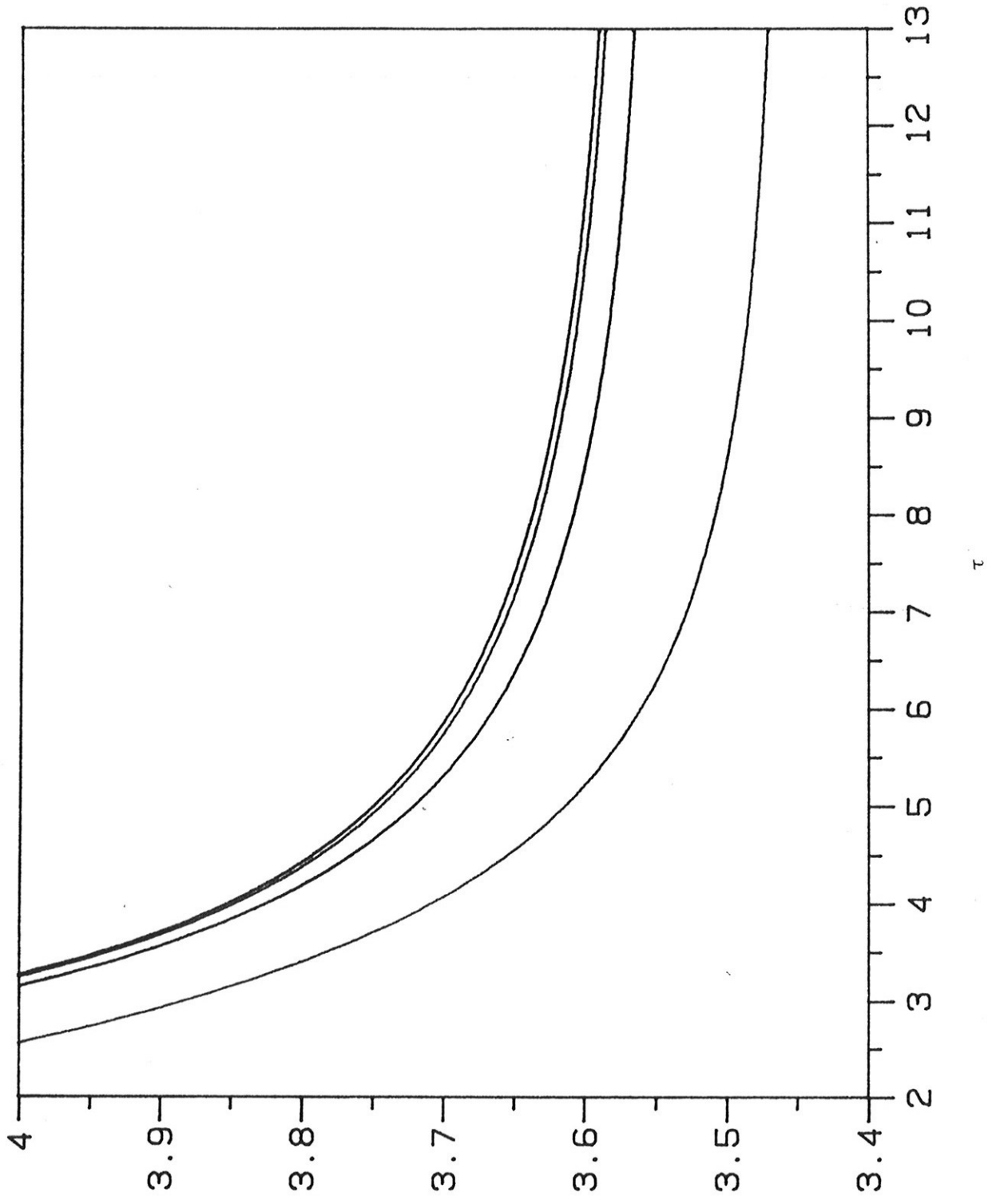


figura 5.43

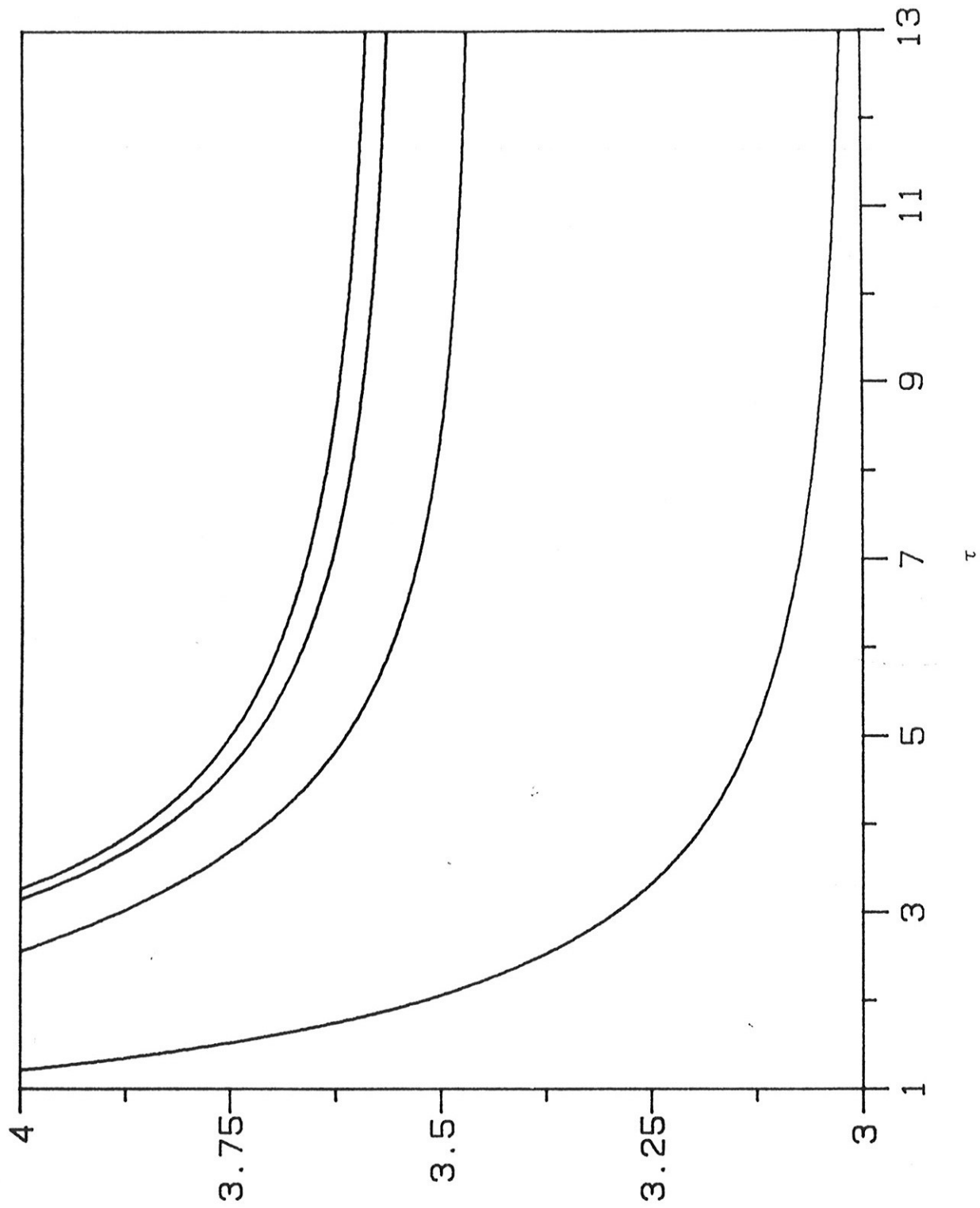


figura 5.44

Como só temos os parâmetros onde ocorrem as quatro primeiras duplicações, só nos foi possível calcular δ_1 e δ_2 .

Não é difícil estimar o máximo erro em δ , dados os erros nos λ 's.

Se supusermos que o erro nos λ 's seja o mesmo, $\Delta\lambda$, e que $\delta_1 \cong \delta$, então teremos uma amplificação do erro $\Delta\delta_1$, crescendo como:

$$\Delta\delta_1 \cong (1+\delta)^l \Delta\lambda,$$

ou seja, cresce geometricamente com l , com razão δ , o que explica a dificuldade experimental de se manter $\Delta\delta_1$ pequeno para l grande.

Se supusermos que os erros $\Delta\lambda$ são iguais, então o erro $\Delta\delta_1$, como função dos λ 's, fica:

$$\Delta\delta_1 \cong \left[\frac{\lambda_{1+2} - \lambda_1}{(\lambda_{1+2} - \lambda_{1+1})} \right]^2 \Delta\lambda.$$

Quando os $\Delta\lambda$'s são diferentes:

(5.8)

$$\Delta\delta_1 = \frac{1}{(\lambda_{1+2} - \lambda_{1+1})^2} [(\lambda_{1+2} - \lambda_{1+1})\Delta\lambda_1 + (\lambda_{1+2} - \lambda_1)\Delta\lambda_{1+1} + (\lambda_{1+1} - \lambda_1)\Delta\lambda_{1+2}]$$

Para estimar o erro que cometemos no nosso cálculo dos δ_1 's, supusemos que nosso $\Delta\lambda$ fosse o dobro do mínimo intervalo no qual cercamos a bifurcação.

Tentamos então calcular os δ 's com os dados com os quais construímos as curvas de duplicação. O resultado, entretanto, foi muito ruim, porque apesar da precisão destes pontos ser boa para fazer as curvas, não foi suficiente para o cálculo dos δ 's.

Resolvemos, então, eleger duas linhas na direção dos τ 's, e duas nas direções dos A's, e melhorar a precisão dos pontos de bifurcação sobre estas. Para isso, dobramos a resolução dos espectros e aumentamos o intervalo desprezado como transitório.

O melhor resultado que conseguimos encontra-se sumarizado abaixo, onde são apresentados: o valor de δ_1 e δ_2 , segundo (5.7), para cada uma das linhas $\tau = \text{cte}$, $A = \text{cte}$; o erro nessa estimativa, segundo (5.8); o ponto de acumulação das duplicações τ_∞ , obtido anteriormente; estimativas de τ_∞^e e A_∞^e , dos pontos τ_∞ e A_∞ , usando (5.7) com $\delta_1 = \delta = 4.6692\dots$ e λ_3, λ_4 ; as diferenças $(\tau_\infty - \tau_4)$, para os casos onde fixamos os A's.

i) Fixado $A = 3.65$, e variando τ :

$$\delta_1 = 2.315 \mp 3 * 10^{-3},$$

$$\delta_2 = 4.06 \mp 2 * 10^{-2},$$

$$\tau_\infty = 7.438 ,$$

$$\tau_\infty^e = 7.433 ,$$

$$(\tau_\infty - \tau_4) = 0.056 .$$

ii) Fixado $A = 3.85$, e variando τ :

$$\delta_1 = 4.46 \mp 8 * 10^{-2} ,$$

$$\delta_2 = 4.5 \mp 2 * 10^{-1} ,$$

$$\tau_\infty = 4.013 ,$$

$$\tau_{\infty}^e = 4.012 ,$$

$$(\tau_{\infty} - \tau_4) = 0.009 .$$

iii) Fixado $\tau = 7.438$, e variando A :

$$\delta_1 = 4.53 \mp 7 * 10^{-2} ,$$

$$\delta_2 = 4.6 \mp 2 * 10^{-1} ,$$

$$A_{\infty}^e = 3.6449 .$$

iv) Fixado $\tau = 4.013$, e variando A :

$$\delta_1 = 4.62 \mp 9 * 10^{-2} ,$$

$$\delta_2 = 4.8 \mp 2 * 10^{-1} ,$$

$$A_{\infty}^e = 3.8499 .$$

A estimativa numérica de A_{∞} não foi feita por um problema de precisão. Na verdade a diferença $(A_{\infty} - A_4)$ é muito pequena, e nossos resultados numéricos não possuem confiabilidade suficiente para comparações dessa ordem de grandeza. Mesmo os resultados para os τ_{∞} 's, apesar de bons, devem ser olhados criticamente, pois como pode se ver, as diferenças $(\tau_{\infty} - \tau_4)$ são pequenas, e qualquer estimativa próxima a τ_4 pode parecer boa.

Nota-se que os resultados para os δ_1 's, estão bastante próximos da constante de Feigenbaum $\delta = 4.6692\dots$, a menos de δ_1 calculado para $A=3.65$. A razão desta estimativa ter sido a mais distante de δ , deve estar relacionada ao fato de que é nesse caso que são maiores as diferenças $(\tau_2 - \tau_1)$ e $(\tau_3 - \tau_2)$, que entram em (5.7) (ver figura 5.43). Isto em nada contradiz as previsões de Feigenbaum que dizem respeito às propriedades assintóticas dos δ_1 's.

Com essas estimativas, mais aquelas apresentadas por de

Oliveira & Malta (1987), que concordam com as nossas, concluímos que, muito provavelmente, o sistema (5.1), em uma certa região do espaço (τ, A) , possui cascata de duplicação de período completa nas duas direções $\tau = \text{cte}$, $A = \text{cte}$. Também, muito provavelmente, os parâmetros onde as bifurcações ocorrem satisfazem assintoticamente a relação de Feigenbaum ($\delta_1 \rightarrow \delta$). Em suma, é muito provável que a "rota para o caos" nesse sistema, para a função inicial por nós utilizada, seja a descrita por Feigenbaum, em ambos os parâmetros τ , A .

Para concluir, devemos dizer que existem outros métodos numéricos para se estudar as soluções globais desse tipo de equação, e que não levam em conta o problema da função inicial. Basicamente eles se baseiam em expandir a solução em alguma base, substituir na equação, e achar sistemas de equações algébricas não lineares para os coeficientes e demais parâmetros da expansão. No caso de se estar interessado em soluções periódicas, utiliza-se a base de Fourier. O problema passa a ser, então, o de resolver equações algébricas complicadas, o que requer métodos numéricos sofisticados. Com essa metodologia, complica-se a análise numérica, mas ganha-se no fato de que a equação não necessita ser discretizada. Dois problemas desse método, são: (i) ele não nos informa nada acerca dos domínios de estabilidade das soluções, e (ii) é necessário que se trabalhe apenas com expansões truncadas, sendo que os efeitos do truncamento não são, a princípio, evidentes. Os leitores interessados neste assunto, devem consultar Saupe (1983), onde este método é aplicado para encontrar órbitas

periódicas de uma particular EDR.

CAPITULO 6: CONSIDERAÇÕES SOBRE AS ÓRBITAS GLOBAIS DE:

$$\frac{1}{\tau} \dot{X}(t) + X(t) = A X(t-1) [1 - X(t-1)]$$

Neste capítulo tentaremos fazer um esboço de como está organizado o espaço de fase da equação acima, e explorar melhor os resultados do capítulo anterior.

Primeiramente, é necessário descrever melhor o conjunto das órbitas periódicas da equação:

$$(6.1) \quad \frac{1}{\tau} \dot{X} + X = f(X(t-1)).$$

Suponha que a equação (6.1), para $\tau = \tau_0$, possua uma solução periódica X_0 com período p_0 :

$$(6.2) \quad X_0(t) = X_0(t - np_0) \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Substituindo (6.2) no lado direito de (6.1) obtém-se

$$\frac{1}{\tau} \dot{X}_0(t) + X_0(t) = f(X_0(t - 1 - np_0)).$$

Fazendo a transformação $t = t'(1 + np_0)$ e

$$(6.3) \quad X_n(t) = X_0(t(1+np_0)) \quad ,$$

ficamos com (omitindo ' por simplicidade):

$$(6.4) \quad \frac{1}{\tau_0(1+np_0)} \dot{X}_n(t) + X_n(t) = f(X_n(t-1)).$$

Ou seja, se $X_0(t)$ é solução de (6.1) com $\tau = \tau_0$ e $p = p_0$, então $X_n(t)$ é solução de (6.1) com:

$$(6.5) \quad \tau = \tau_0(1+np_0) \quad , \quad e \quad p = \frac{p_0}{1+np_0}.$$

Note que, quando $p_0 \cong 2$, temos que $p_n \cong \frac{p_0}{1+2n}$, que são exatamente os harmônicos de ordem ímpar encontrados por Ikeda, Kondo & Akimoto (1982).

A princípio não há resultado rigoroso que nos garanta a estabilidade das soluções X_n . Numericamente, entretanto, observa-se que elas são estáveis mas quanto maior n , menor são os seus domínios de estabilidade [Ikeda & Matsumoto (1987)]. Nós fizemos algumas simulações com relação a estas soluções, e percebemos a dificuldade de obtê-las quando n é grande.

Dos comentários do parágrafo anterior, fica evidente a importância de se ter controle sobre a função inicial, quando estamos investigando (6.1). Para τ suficientemente grande, temos muitas soluções simultaneamente estáveis, ou seja muitos atratores

e, dependendo da função inicial utilizada, resultarão diferentes comportamentos assintóticos. Essa foi a razão de, no capítulo anterior, não termos utilizado um esquema de integração com variação contínua dos parâmetros.

Importantes resultados na direção de se entender a organização do espaço de fase das soluções globais de (6.1), foram obtidos por Mallet-Paret (1983), (1986). Devido a relevância destes resultados, e do uso que faremos dos mesmos, passaremos a descrevê-los, brevemente.

Esses resultados dizem respeito a equações escalares do tipo:

$$(6.6) \quad \dot{X} = -g(X(t), X(t-1)),$$

onde g satisfaz a condição de "negative feedback", ou seja:

$$(6.7) \quad \begin{cases} \eta g(0, \eta) > 0, \text{ para todo } \eta \neq 0, \\ \left. \frac{\partial g(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{(0,0)} > 0. \end{cases}$$

Seja ψ o conjunto das soluções globais de (6.6) (conjunto este que atrai as soluções de todo problema com função inicial [Mallet-Paret (1986)]), e $\sigma \geq t$ o ponto onde ocorre o primeiro zero de $X(t+\theta) \equiv (X \cdot t)\theta$, onde $X \in (\psi - \{0\})$, $\theta \in]-\infty, +\infty[$. Definimos $V(X \cdot t)$ como o número de zeros (contando multiplicidade) de X , no semi-intervalo aberto $]\sigma-1, \sigma]$. Se σ não existe então $V(X \cdot t) = 1$. Com isso $V(X \cdot t)$ é 1, ou um inteiro positivo.

Por fim, dizemos que o espaço de fase χ , de um dado sistema

dinâmico, admite uma decomposição de Morse, se é possível definir uma coleção finita e ordenada s_1, s_2, s_3, \dots de conjuntos compactos invariantes, tal que, se $X \in \chi$, então existe $N \geq K$ tal que $\alpha(X) \subseteq s_N$ e $\omega(X) \subseteq s_K$, e mais, se $N = K$ então $X \in s_N$.

Os conjuntos de Morse s_N mais as órbitas de conexão $C_K^N = \{X \in \chi \mid \alpha(X) \subseteq s_N \text{ e } \omega(X) \subseteq s_K\}$ para $N > K$, esgotam o espaço de fase de χ .

Usando essas hipóteses e definições, é possível demonstrar que $V(X \cdot t)$ é estritamente decrescente com o tempo, ou seja:

$$(6.8) \quad t_1 \leq t_2 \Rightarrow V(X \cdot t_1) \geq V(X \cdot t_2) .$$

Temos ainda que:

$$V(X \cdot t): \psi - \{0\} \rightarrow \{1, 3, 5, 7, \dots, 2M+1\},$$

ou seja, $V(X \cdot t)$ é limitada e nunca será par.

Supondo a origem hiperbólica e definindo:

$$s_N = \{X \in \psi - \{0\} \mid V(X \cdot t) = N \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \text{ e } 0 \notin \alpha(X) \cup \omega(X)\},$$

mais $s_N^* = \{0\}$, onde N^* é a dimensão da variedade instável da origem (sempre par), é possível mostrar que ψ apresenta uma decomposição de Morse, onde os s_N são os conjuntos de Morse, e que se $N < N^*$ então s_N contém uma órbita periódica.

Esses resultados do Mallet-Paret (1986), impõem fortes

restrições à evolução das soluções globais de (6.6).

Agora, queremos aplicar estes resultados à equação:

$$(6.9) \quad \frac{1}{\tau} \dot{X}(t) = -X(t) + AX(t-1)(1-X(t-1)),$$

que pela transformação $Y(t) = X(t) - \frac{A-1}{A}$, resulta em:

$$(6.10) \quad \frac{1}{\tau} \dot{Y}(t) = -Y(t) - (A-2)Y(t-1) - AY^2(t-1).$$

A pergunta então é, para que valores de A (6.10) satisfaz as hipóteses (6.7)?

Para respondê-la, é necessário saber os limites superior e inferior das soluções globais de $Y(t)$. Para isso aplicaremos os resultados do capítulo 5.

Para o máximo e o mínimo da solução temos que $\dot{Y} = 0$ e, usando isso em (6.10), concluímos que deve ser satisfeita a relação:

$$(6.11) \quad Y(t) = -(A-2)Y(t-1) - AY^2(t-1) = f(Y(t-1)).$$

Do gráfico abaixo (figura 6.1), é fácil concluir que (6.11) implica em

$$(6.12) \quad \begin{cases} Y_{\max} \leq \frac{(A-2)^2}{4A}, \\ Y_{\min} \leq f(Y_{\max}). \end{cases}$$

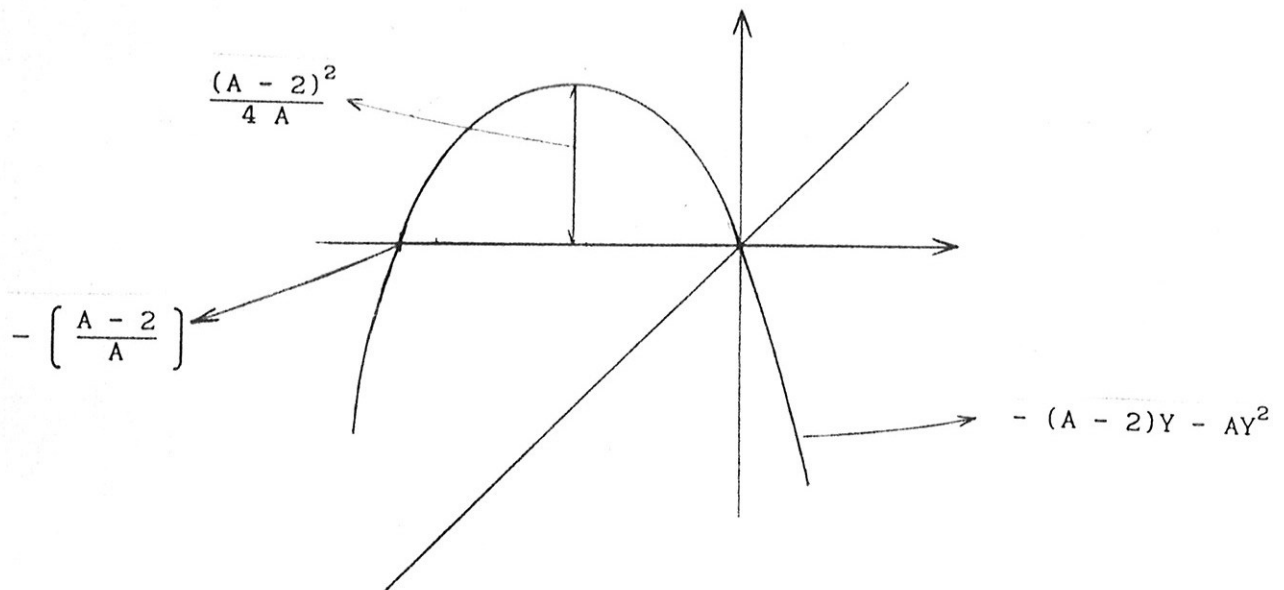


figura 6.1

A condição de "negative feedback", nesse caso, é dada por (4.15), e para que $f(X)$ a satisfaça, é suficiente que $A > 3$ e (ver figura 6.1):

$$(6.13) \quad Y_{\min} > -\frac{A-2}{A}$$

Usando (6.12) e (6.13) concluímos que $f(Y)$ satisfará a condição de "negative feedback" se, $-\frac{A-2}{A} < f(Y_{\max})$. Isso determina uma equação para A :

$$(6.14) \quad -\frac{A-2}{A} < -(A-2) \frac{(A-2)^2}{4A} - \frac{(A-2)^4}{16A}$$

De (6.14) tiramos que $A < 3.67857$.

Quer dizer, para:

$$(6.15) \quad 3 < A < 3.67857,$$

a equação (6.10) satisfaz as hipóteses (6.7).

Note que o intervalo (6.15) é muito interessante, pois nele a equação (6.10) apresenta um rico comportamento, com cascata de duplicação de período, caos, etc (ver figura 5.44, página 114). Restrinjamo-nos, por enquanto, a esse intervalo de A .

A primeira observação a fazer, é que a função inicial que escolhemos no capítulo 5, sempre foi atraída pelo conjunto s_1 (ou pelo ramo fundamental segundo Ikeda, Kondo & Akimoto (1982)), ou seja, assintoticamente não havia mais de um zero no intervalo unitário (no que diz respeito às soluções periódicas, este fato ocorreu mesmo para $A > 3.678\dots$). Isso quer dizer que escolhemos uma função inicial na bacia de atração de s_1 . Como todas as órbitas de conexão de ψ dirigem-se para s_1 , podemos pensar que, de certa maneira, s_1 é o mais estável dos s_N , o que justifica o resultado obtido.

A segunda observação, é que o resultado de Mallet-Paret, que nos diz que, se $N < N^*$ então s_N contém uma órbita periódica, reproduz dois fatos por nós já citados. O primeiro que, de (4.12), (4.13) e (4.14), fixado A , a dimensão da variedade instável da origem aumenta de dois para:

$$(6.16) \quad \begin{cases} \tau_n = \tau_1 (1 + np_1) \\ p_n = \frac{p_1}{1 + np_1} \end{cases} ,$$

onde τ_1 , p_1 são os valores do parâmetro τ e do período (relativos a $Y_1(t)$) respectivamente, para os quais o primeiro par de raízes, da equação, característica cruza o eixo imaginário. O segundo fato é que (6.5) e (6.16) são expressões análogas. Isso quer dizer que, a cada n -ésimo cruzamento (τ_n) do eixo imaginário por um par de raízes da equação característica de (6.1), aparece uma solução periódica em s_{2n-1} . Isso está diretamente relacionado ao resultado de Mallet-Paret enunciado no início do parágrafo.

O fato interessante provém de (6.4), e nos diz que essas soluções Y_n , que aparecem nos diversos s_n 's para $\tau = \tau_n$, são as mesmas, a menos de mudanças de escala no tempo.

Essa observação evidencia que há uma correlação muito forte, entre pelo menos algumas soluções dos diversos s_n 's. Evidencia também que, conforme vamos aumentando τ , vamos criando mais soluções periódicas. Por sua vez, resultados numéricos indicam que essas soluções são estáveis, de modo que o aumento de τ implica no aumento do número de atratores do sistema. Mais adiante tentaremos desenvolver mais essas idéias.

Neste ponto é necessário fazer algumas observações quanto à nomenclatura a ser utilizada. Considerando as soluções assintóticas não triviais de (6.10), podemos dizer que uma solução pertence ao ramo 1, se cruzar o zero no máximo uma única vez no intervalo

unitário, ao ramo 2 se cruzar o zero no máximo tres vezes neste intervalo, ao ramo 3 se cruzar cinco, e assim sucessivamente. Note que, no caso do sistema satisfazer a condição de "negative feedback" (6.7), então o ramo 1 é igual a s_1 , o ramo 2 é igual a s_3 , o ramo 3 é igual a s_5 , etc. Se essa condição não for satisfeita, não mais poderemos falar de conjuntos de Morse mas, pelo menos no caso por nós estudado, ainda pode ser aplicada a definição acima. Em Ikeda & Matsuamoto (1987), é utilizada a definição de que o ramo 1, é aquele cuja solução apresenta período próximo a 2 (se for caótica deverá possuir uma forte componente de período aproximadamente 2) ou provém de duplicações de período deste tipo de solução. Nesta mesma referência, os ramos superiores são dados pelos harmônicos de ordem ímpar (τ grande) do ramo 1 (para soluções periódicas, através de (6.3)). No caso que estudamos, essa definição também pode ser aplicada, e é equivalente à dada acima.

A fim de tornar nossa exposição mais abrangente, adotaremos a definição de ramo dada por Ikeda, ainda que esta seja menos precisa que aquela apresentada no início do parágrafo anterior. Entretanto, caso o interesse seja o sistema (6.10), ou algum outro que satisfaça (6.7), pode-se adotar a primeira definição.

O que faremos agora é analisar o efeito que os nossos resultados para o ramo 1, obtidos no capítulo 5, terão nos ramos superiores.

Fixado A , para $3 \leq A \leq 4$, verificamos que, aumentando τ , as soluções de (6.10) no ramo 1 percorrem uma cascata de duplicação de períodos, que suporemos completa.

Façamos uma bi-indexação das soluções periódicas $Y_{1,j}$ de (6.10), onde $Y_{1,j}$, com $l, j = 1, 2, 3, \dots$, representa uma solução no ramo l , originada da $(j-1)$ -ésima duplicação de período de $Y_{1,1}$, onde $Y_{1,1}$ é a solução que aparece da bifurcação de Hopf, ocorrida na solução $Y = 0$, para o ramo l .

Na verdade, do que expusemos no capítulo anterior, somente temos conhecimento das soluções do primeiro ramo, sendo que para $l \neq 1$ grande parte dos $Y_{1,j}$ não necessariamente existem.

O período $Y_{1,j}$ será denotado por $p_{1,j}$ e $\tau_{1,j}$ será o correspondente valor do parâmetro τ . O valor $\tau_{1,j}^*$ do parâmetro τ é onde ocorreu a bifurcação que deu origem à solução $Y_{1,j}$.

Com essas definições podemos reesprimir (6.3), e (6.5) como:

$$(6.17) \quad \begin{cases} Y_{1,1}(t) = Y_{1,1}((1 + (l-1)p_{1,1})t), \\ \tau_{1,1} = \tau_{1,1}(1 + (l-1)p_{1,1}), \\ p_{1,1} = \frac{p_{1,1}}{1 + (l-1)p_{1,1}} \end{cases}$$

Para nós, $\tau_{1,1}^*$ é o ponto no qual o ramo l torna-se interessante, ou seja, para $\tau < \tau_{1,1}^*$, não é relevante se tal ramo existe ou não (note que Mallet-Paret (1986) prova que existe um número finito de s_N 's, mas não diz quantos).

As expressões (6.17) evidenciam que uma solução periódica $X_{1,1}$ (de período próximo a 2) no ramo 1, implica na existência de soluções periódicas em todos os demais ramos.

Analisemos o que ocorre quando a solução $Y_{1,1}$ sofre a primeira

duplicação de período, para $\tau = \tau_{1,2}^*$. Neste ponto, ou infinitesimalmente à direita do mesmo, verifica-se o aparecimento de uma solução $Y_{1,2}$, que é praticamente igual a $Y_{1,1}$, com período $p_{1,2} = 2 p_{1,1}$. Seguindo um raciocínio análogo ao feito para obter (6.17), podemos obter:

$$(6.18) \quad \begin{cases} Z_{1,2}(t) = Z_{1,2}((1 + (l-1)p_{1,2})t), \\ \lambda_{1,2} = \tau_{1,2}^*(1 + (l-1)p_{1,2}), \\ q_{1,2} = \frac{p_{1,2}}{1 + (l-1)p_{1,2}}. \end{cases}$$

Note que usamos as letras Z, λ, q ao invés de Y, τ, p , pois ainda não está evidente a qual ramo pertence $Z_{1,2}$. A fim de determinar isto, reescrevamos $q_{1,2}$:

$$q_{1,2} = \frac{2p_{1,1}}{1 + (l-1)2p_{1,1}} = 2 \frac{p_{1,1}}{1 + ((2l-1) - 1)p_{1,1}}.$$

Ou seja, $q_{1,2}$ é o dobro do período de uma solução do tipo $Y_{(2l-1),1}$, dada por (6.17).

Isso significa que a primeira duplicação de período no ramo 1, implicará em duplicações de período nos ramos do tipo $(2l-1)$, $l = 2, 3, 4, \dots$, ou seja, nos ramos ímpares.

Com isso, concluímos que: - se existe $\tau = \tau_{1,2}^*$ tal que (6.10) apresenta uma duplicação de período, caracterizada por $Y_{1,1} \rightarrow Y_{1,2}$, e $p_{1,1} \rightarrow p_{1,2}$, com $p_{1,2} = 2p_{1,1}$, então, no ramo $(2l-1)$, $l = 1, 2, 3, \dots$, teremos:

$$(6.19) \quad \begin{cases} Y_{(2l-1),1}(t) = Y_{1,1} [(1 + (2l-1)p_{1,1})t], \\ \tau_{(2l-1),1} = \tau_{1,2}^* (1 + (2l-1)p_{1,1}) , \\ P_{(2l-1),1} = \frac{p_{1,1}}{1 + (2l-1)p_{1,1}} , \end{cases}$$

e

$$(6.20) \quad \begin{cases} Y_{(2l-1),2}(t) = Y_{1,2} [(1 + (l-1)p_{1,2})t], \\ \tau_{(2l-1),2} = \tau_{1,2}^* (1 + (l-1)p_{1,2}) , \\ P_{(2l-1),2} = \frac{p_{1,2}}{1 + (l-1)p_{1,2}} . \end{cases}$$

Fazendo um raciocínio análogo para as outras duplicações do ramo 1, podemos generalizar (6.20) de modo a obter:

$$(6.21) \quad \begin{cases} Y_{1+2^{(j-1)}(l-1),j}(t) = Y_{1,j} [(1 + (l-1)p_{1,j})t], \\ \tau_{1+2^{(j-1)}(l-1),j} = \tau_{1,j}^* (1 + (l-1)p_{1,j}) , \\ p_{1+2^{(j-1)}(l-1),j} = \frac{p_{1,j}}{1 + (l-1)p_{1,j}} , \end{cases}$$

para $j, l = 1, 2, 3, \dots$

Essas relações nos dizem que podemos relacionar a $(j-1)$ -ésima duplicação de período do ramo 1, à $(j-1)$ -ésima duplicação de período do ramo $(2^{(j-1)}l + 1)$, para $l = 1, 2, 3, \dots$

A fim de tornar mais clara esta afirmação, construímos o diagrama da figura 6.2:

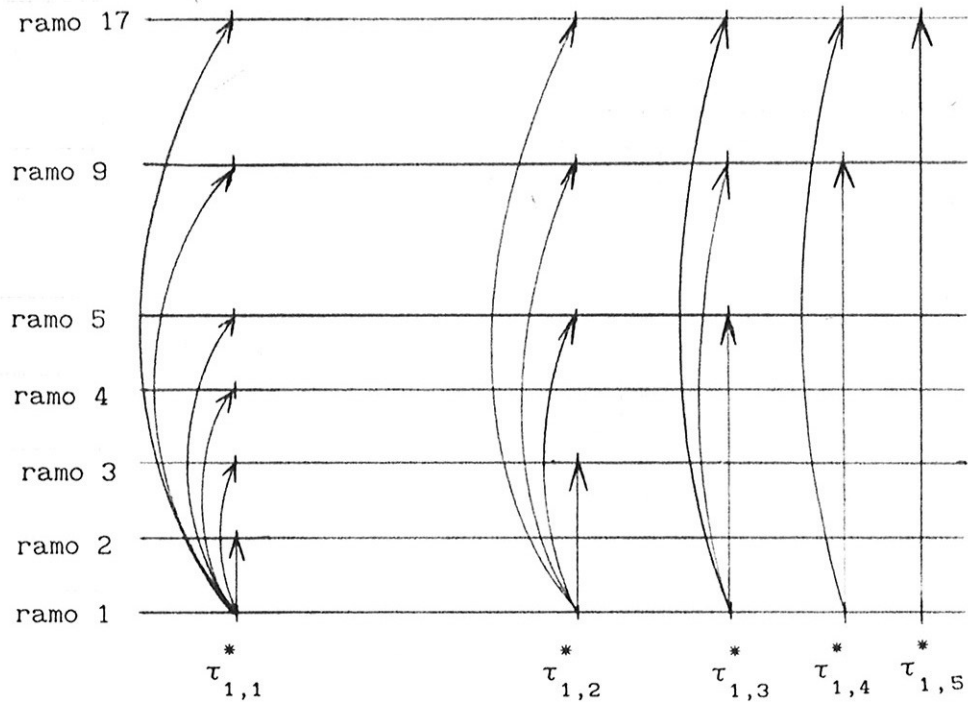


figura 6.2

As setas da figura 6.2 significam que uma duplicação de período no ramo 1, implica em uma duplicação no ramo para o qual a seta se dirige.

Note que no ramo $(2^{(j-1)} l + 1)$ temos $(j-1)$ duplicações de período, em correspondência direta com as $(j-1)$ primeiras duplicações do ramo 1.

Suponhamos agora que $j=M$ é um número bastante grande, de modo que o ramo L , $L = (1 + 2^{(M-1)})$, possua $\tau_{L,1}^*, \tau_{L,2}^*, \dots, \tau_{L,(M-1)}^*$, parâmetros estes relacionados a $\tau_{1,1}^*, \tau_{1,2}^*, \dots, \tau_{1,M-1}^*$ do ramo 1. Então, se $\tau_{1,1}^*, \tau_{1,2}^*, \dots$, satisfazem:

$$(6.22) \quad \frac{\tau_{1,j}^* - \tau_{1,(j-1)}^*}{\tau_{1,(j+1)}^* - \tau_{1,j}^*} \cong \delta, \quad \text{para } j \text{ grande,}$$

será que:

$$(6.23) \quad \frac{\tau_{L,j}^* - \tau_{L,(j-1)}^*}{\tau_{L,(j+1)}^* - \tau_{L,j}^*} \cong \delta$$

é verdadeira para j grande, com $j < (M-1)$?

De (6.21), temos que:

$$(6.24) \quad \begin{cases} \tau_{1+2}^{*(j-1)2^{(M-j)}},_{j-1} = \tau_{1,j-1} (1 + 2^{(M-j+1)} p_{1,j-1}), \\ \tau_{1+2}^{*(j-1)2^{(M-j)}},_j = \tau_{1,j} (1 + 2^{(M-j)} p_{1,j}), \\ \tau_{1+2}^{*(j-1)2^{(M-j)}},_{j+1} = \tau_{1,j+1} (1 + 2^{(M-j-1)} p_{1,j+1}). \end{cases}$$

Uma vez que $\tau_{1,j-1}$ está muito próximo de $\tau_{1,j+1}$, é razoável desprezar a parcela da variação contínua do período, devido a variação de τ , e assumir que:

$$(6.25) \quad p_{1,j-1} = 2^{-1} p_{1,j} \quad \text{e} \quad p_{1,j+1} = 2 p_{1,j}.$$

Substituindo (6.25) em (6.24), e usando (6.22), verificamos que (6.23) é verdadeira.

Com isso concluímos que, a relação de Feigenbaum, uma vez satisfeita no ramo 1, tende também a ser satisfeita nos ramos $(1+2^{(M-1)})$, pelo menos até a duplicação de período de ordem $(M-1)$. Ou seja, existe realmente uma forte relação, tanto entre algumas órbitas dos diversos ramos, quanto na maneira pela qual estas órbitas aparecem nestes ramos, conforme variamos τ .

Sabemos que podemos estudar as duplicações de período, investigando as soluções da equação linearizada em torno da solução periódica, na qual ocorrerá a bifurcação. Sendo assim, é interessante verificar o que ocorre com as soluções da equação (6.10), linearizada em torno das soluções $Y_{1,j}$ e $Y_{1,j}$, $l = 2, 3, 4, \dots$, quando ocorre a bifurcação de $Y_{1,j}$. As equações linearizadas, são:

$$(6.26) \quad \frac{1}{\tau_{1,j}} \dot{W}_{1,j}(t) = -W_{1,j}(t) - [(A-2) + 2A Y_{1,j}(t)] W_{1,j}(t-1),$$

$$(6.27) \quad \frac{1}{\tau_{1,j}} \dot{W}_{1,j}(t) = -W_{1,j}(t) - [(A-2) + 2A Y_{1,j}(t)] W_{1,j}(t-1).$$

A fim de tornar a exposição mais simples, consideremos apenas as equações para a primeira duplicação de período do ramo 1, ou seja, $j=1$. Com isso, (6.26) fica:

$$(6.28) \quad \frac{1}{\tau_{1,1}} \dot{W}_{1,1}(t) = -W_{1,1}(t) - [(A-2) + 2A Y_{1,1}(t)] W_{1,1}(t-1).$$

Além disso, se em (6.27) reescalarmos o tempo, redefinirmos convenientemente $W_{1,1}$, e usarmos (6.17), obteremos:

$$(6.29) \quad \frac{1}{\tau_{1,1}} \dot{W}'_{1,1}(t) = -W'_{1,1}(t) - [(A-2) + 2A Y_{1,1}(t)] \times \\ \times W'_{1,1}(t-1-(l-1)p_{1,1}).$$

Note que (6.28) e (6.29) só diferem no que diz respeito ao retardamento.

Sabemos da teoria de Floquet [Hale (1977)] (para sistemas de dimensão finita ver Jordan & Smith (1977)), que (6.28) e (6.29) possuem solução do tipo $e^{\lambda t} \Phi(t)$, onde $\Phi(t)$ tem período $p_{1,1}$. Se substituirmos este tipo de solução em (6.28) e (6.29), ficaremos com:

$$(6.30) \quad \frac{1}{\tau_{1,1}} \dot{\Phi}_{1,1}(t) + (\lambda_{1,1} + 1) \Phi_{1,1}(t) = \\ - [(A-2) + 2A Y_{1,1}(t)] e^{-\lambda_{1,1} t} \Phi_{1,1}(t-1),$$

$$(6.31) \quad \frac{1}{\tau_{1,1}} \dot{\Phi}_{1,1}(t) + (\lambda_{1,1} + 1) \Phi_{1,1}(t) = \\ - [(A-2) + 2A Y_{1,1}(t)] e^{-\lambda_{1,1} t} \Phi_{1,1}(t-1) e^{-\lambda_{1,1} (l-1)p_{1,1}}.$$

A solução $W_{1,1}$ será estável se $\text{Re } \lambda_{1,1} \leq 0$ para qualquer $\lambda_{1,1}, \Phi_{1,1}$, que satisfaça (6.30). Condição análoga vale para $W_{1,1}$.

Uma pergunta interessante que podemos fazer, é: - dado que $W_{1,1}$ seja estável, o que podemos dizer da estabilidade de $W_{1,1}$?

Esta não parece ser uma pergunta de fácil resposta. O que podemos afirmar é que (6.30) e (6.31) diferem pelo termo:

$$(6.32) \quad e^{-\lambda_{1,1}(l-1)p_{1,1}},$$

que aparece em (6.31).

Note que, se (6.30) tiver uma solução com $\lambda_{1,1}$ satisfazendo:

$$(6.33) \quad e^{-\lambda_{1,1}(l-1)p_{1,1}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_{1,1}}{p'_{1,1}} = \frac{n}{l-1}$$

onde n é um natural, e $p'_{1,1} = \frac{2\pi i}{\lambda_{1,1}}$, então, (6.30) e (6.31) terão uma solução comum, com $\lambda_{1,1} = \lambda_{1,1}$. Isso é verdade se $\lambda_{1,1} = 0$. Quando ocorre duplicação de período, a solução $W_{1,1}$ perde estabilidade, com o expoente de Floquet cruzando o eixo imaginário em $\lambda_{1,1} = \frac{\pi i}{p_{1,1}}$, ou seja:

$$(6.34) \quad \frac{1}{2} = \frac{n}{l-1} \quad \Rightarrow \quad l = 2n + 1,$$

que é exatamente o resultado obtido anteriormente, ou seja, a primeira duplicação de período do ramo 1, está diretamente associada às duplicações dos ramos ímpares.

Podemos desenvolver um raciocínio análogo para as outras duplicações que ocorrem no ramo 1 e, como acima, recuperaríamos os

resultados por nós já obtidos.

Concentramo-nos, até agora, em relacionar as soluções periódicas do ramo 1 com as dos demais ramos. Façamos, agora, algumas observações com respeito aos ramos superiores.

Durante este trabalho, fizemos poucas simulações numéricas cuja solução assintótica estivesse em ramos superiores. A fim de obtermos soluções desta natureza, fizemos exatamente o prescrito por (6.2), ou seja, mudamos adequadamente a escala temporal de uma solução do ramo 1.

Essas poucas simulações que fizemos foram suficientes para detectar os resultados numéricos apresentados em Ikeda & Matsumoto (1987). Esses resultados evidenciam a presença de muitas órbitas periódicas, simultaneamente estáveis, dentro de cada ramo de ordem maior do que 1. A dinâmica dentro desses ramos é riquíssima, e mais difícil de ser estudada do que no ramo 1, principalmente devido ao pequeno domínio de estabilidade das órbitas periódicas.

Nossa primeira observação com relação aos ramos superiores é que suas soluções periódicas, de período maior do que a unidade, não podem ter correspondência com soluções de ramos inferiores. Para fazer este tipo de relação, seria necessário utilizar $n < 0$ em (6.4), o que conduziria a $\tau < 0$, o que não nos interessa.

Por exemplo, suponha que a solução $Y_{2,1}$, com período $p_{2,1} = \frac{p_{1,1}}{1+p_{1,1}}$, sofra uma duplicação de período, originando uma solução com período $p_{2,2} = 2 p_{2,1} = 2 \frac{p_{1,1}}{1+p_{1,1}}$. Como $p_{1,1} > 1$, então $p_{2,2} > 1$ e, portanto, $Y_{2,2}$ não terá correspondente no ramo 1. Isso expressa novamente o fato que a primeira duplicação do ramo 1

possui correspondência apenas nos ramos ímpares.

Suponhamos que no ramo 2 exista uma cascata de duplicação de período, e apliquemos para esse ramo o mesmo raciocínio que foi aplicado para o ramo 1. Concluiremos que, se a primeira duplicação de período no ramo 1 implicava em primeiras duplicações de período nos ramos $2k+1$, $k = 1, 2, 3, \dots$, então, a primeira duplicação de período do ramo 2, terá implicações nos ramos $2k$, $k = 2, 3, \dots$. Quer dizer, se ocorrer uma primeira duplicação de período no ramo 1 e outra no ramo 2, então ocorrerão duplicações de período em todos os demais ramos.

De maneira análoga, é fácil concluir que, para ocorrer a k -ésima duplicação de período em todos os ramos, é suficiente que esta ocorra nos 2^k primeiros ramos. Mais ainda, a k -ésima duplicação no ramo n , $n < 2^k$, estará relacionada à k -ésima duplicação nos ramos m , $m = n + 2^k l$, $l = 1, 2, 3, \dots$.

Como vemos, se ocorrerem cascatas de duplicação completa nos primeiros ramos, então, por esse raciocínio, existirão muitos outros ramos superiores com cascata de duplicação, em correspondência direta com as cascatas de duplicação dos primeiros. Essa forte relação entre as soluções dos diversos ramos, é um fato muito curioso.

A ocorrência de duplicações de período nos ramos superiores, é algo já observado por Ikeda & Matsumoto (1987), e por nós mesmos. No entanto, a dinâmica nos ramos superiores é muito complicada, porque associadas às soluções oriundas das duplicações de período, análogas às que ocorrem no ramo 1, aparecem outras soluções, também

estáveis, os chamados "isômeros" [Ikeda & Matsumoto (1987)]. A fim de dar uma idéia de como, e porque, aparecem esses isômeros, passaremos a descrever os resultados de Ikeda & Matsumoto (1987).

Primeiramente, suponhamos que τ seja suficientemente grande, de modo que a dinâmica de (6.10), possa ser caracterizada pela dinâmica de :

$$(6.35) \quad Y(t) = - (A-2) Y(t-1) - A Y^2(t-1).$$

As soluções de (6.35) são determinadas pelas soluções da aplicação:

$$(6.36) \quad Y_{n+1} = - (A-2) Y_n - A Y_n^2 = f(Y_n).$$

Por exemplo, suponha que, para determinado A , a solução estável de (6.36) apresenta período 2, sendo dada por:

$$(6.37) \quad a = f(b) \quad \text{e} \quad b = f(a) .$$

Então, também as soluções de (6.35) serão caracterizadas pelos valores a e b .

No caso de estarmos interessados em estudar a dinâmica das soluções de (6.10), que possuam período aproximadamente $2/3$ (ramo 2), é necessário estudar a dinâmica de (6.35) em três sub-intervalos iguais da unidade. Desta maneira, se a solução de (6.36) for dada por (6.37), então a solução de (6.35), no "ramo 2",

será dada por (figura 6.3):

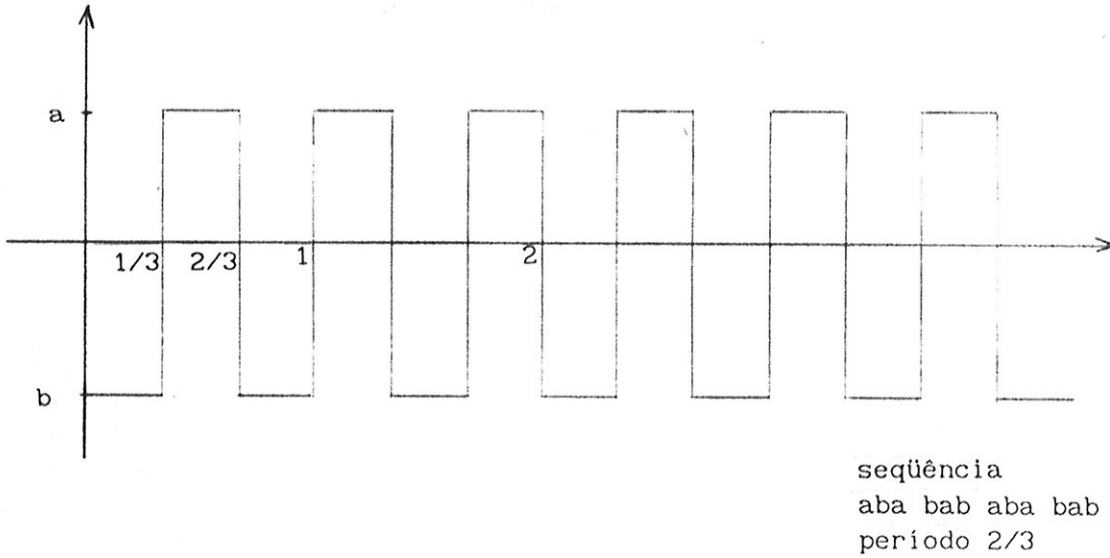
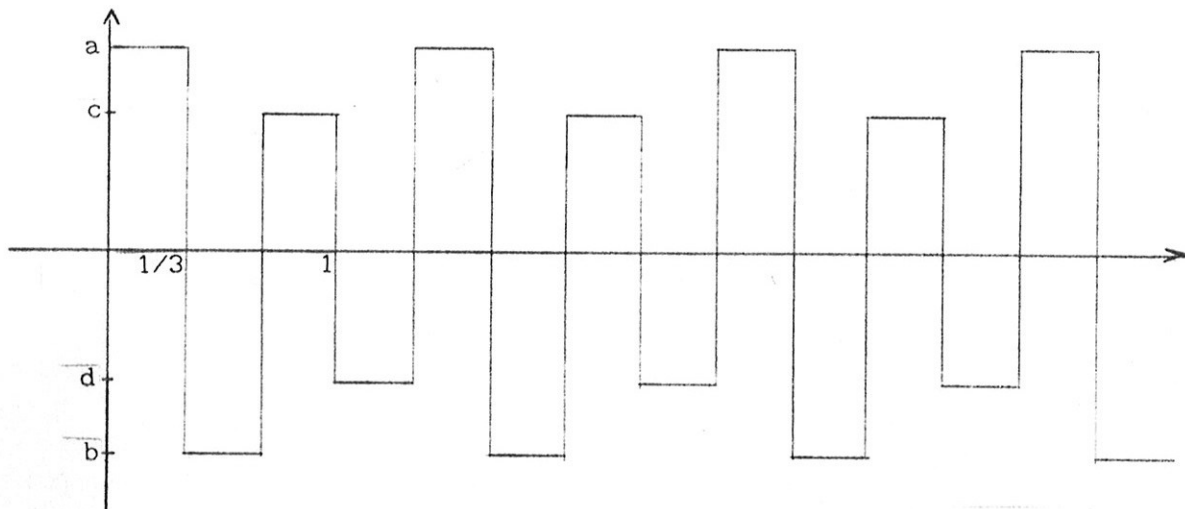


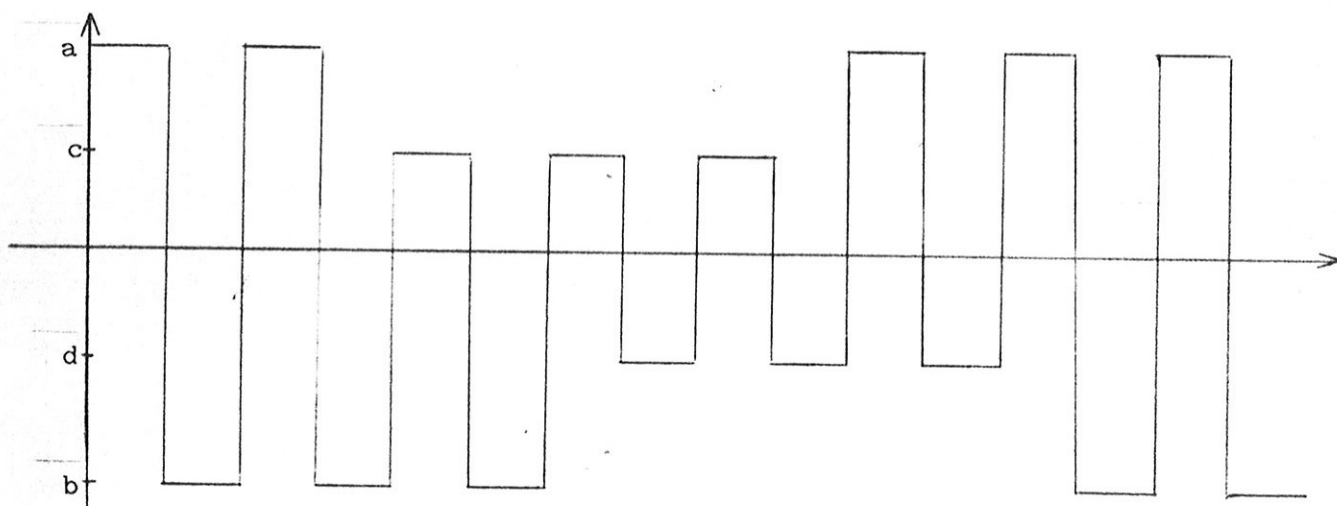
figura 6.3

Suponhamos agora que A seja variado de modo que a solução de (6.36) sofra uma duplicação de período, passando a ser caracterizada por a , b , c e d , de maneira análoga a (6.37). Então, as soluções de (6.35) no "ramo 2" poderão ser de dois tipos (figuras 6.4 e 6.5):



seqüência
abc dab cda
período $4/3$

figura 6.4



seqüência
aba bcb cdc dad dba
período 4

figura 6.5

Essas duas soluções constituem soluções isômeras. Note que a solução da figura 6.4 de período $4/3$, é análoga à originada na primeira duplicação de período do "ramo 1".

Na verdade, para construir essas soluções, poderíamos designar um dos dois elementos de um dos pares (a,c) ou (b,d), a cada um dos três sub-intervalos da unidade, o que daria 2^3 soluções diferentes. Destas entretanto, somente as duas acima são independentes, obtendo-se as demais por simples translação.

Se fizermos este mesmo tipo de análise em outros ramos, ou com soluções de (6.36) de maior período, detectaremos a existência de inúmeros destes isômeros.

O fato interessante é que, apesar deste raciocínio ter sido desenvolvido com base em (6.35), pelo menos numericamente, algo semelhante ocorre com as soluções de (6.10). Isso evidencia a validade deste raciocínio [Ikeda & Matsumoto (1987)], ou seja, a dinâmica de (6.10) está fortemente relacionada à de (6.35).

Esse fenômeno de isomeria, somado ao fato de que estes isômeros são simultaneamente estáveis, leva a crer que, bifurcações mais complicadas do que as duplicações de período, devam ocorrer nos ramos superiores.

No começo deste capítulo, apresentamos os resultados de Mallet-Paret (1986) acerca de sistemas que satisfazem a condição de "negative feedback". Nesses casos, ainda que a dinâmica no interior dos ramos, ou dos conjuntos de Morse, seja extremamente complicada, a dinâmica "entre os ramos" é razoavelmente bem conhecida, uma vez

que o sistema apresenta uma decomposição de Morse.

Com relação à "dinâmica entre ramos", Mallet-Paret (1986), e Fiedler & Mallet-Paret (1987), provaram a existência de algumas conexões entre os diversos conjuntos de Morse, s_N . Em particular, em Fiedler & Mallet-Paret (1987) prova-se a existência de conexões entre a origem, s_{N_*} e os demais s_N , se $N < N_*$. No apêndice 1, apresentamos uma maneira explícita de calcular essas conexões para (6.10), usando uma série de exponenciais, que é computável sobre um subconjunto significativo da reta, mas não sobre toda a reta.

Uma proposta interessante, na direção de se entender melhor a dinâmica entre ramos, para sistemas do tipo (4.1), que satisfazem à condição de "negative feedback", é estudar a estrutura topológica dos diversos conjuntos de Morse, s_N , e tentar entender como estes se organizam, para formar o espaço das soluções globais do sistema, ψ .

Existem muitas questões abertas no que diz respeito à dinâmica dentro dos ramos de (6.10). Por exemplo, seria interessante tentar estudar melhor a "rota para o caos", no caso do ramo apresentar fenômenos de isomeria. Conforme formos entendendo a dinâmica no interior dos ramos, certamente seremos capazes de entender as relações que existem entre elas, algo como o que foi feito neste capítulo com relação ao ramo 1.

Nos casos em que o sistema do tipo (4.1) não satisfaz à condição de "negative feedback", como por exemplo (6.10) quando $3.6785 \leq A \leq 4$, então, muito menos conhecemos acerca de sua dinâmica. Dos resultados do Ikeda Kondo & Akimoto (1982),

acreditamos que um pouco após a condição de "negative feedback" deixar de ser satisfeita, devido à variação de um parâmetro análogo ao A, ocorrem conexões, ou coisas mais complicadas, entre os ramos, de modo a termos soluções globais indo do ramo N para um ramo M, onde $N < M$. Com isso, acreditamos ser possível explicar o fenômeno de "histerese" observado por Ikeda, Kondo & Akimoto (1982) (ver apêndice 2). Isso também poderia explicar o fenômeno da fusão de atratores caóticos de diversos ramos diferentes, apresentado por Ikeda & Matsumoto (1987), novamente devido ao aumento de um parâmetro análogo ao A de (6.10). Em suma, quando o sistema não satisfaz à condição de "negative feedback", ainda não entendemos como os diversos ramos se organizam no espaço ψ , e não entendemos a sua "dinâmica entre ramos".

Para finalizar este capítulo, quero enfatizar que a complexidade dos sistemas dinâmicos semelhantes a (6.10) não está somente na complexidade dos seus atratores caóticos, mas também na maneira como seus diversos atratores se organizam.

No próximo capítulo exploraremos melhor essa idéia.

CAPITULO 7: CONCLUSÃO

Nesta tese estudamos um particular modelo (5.1) motivado por um problema de dinâmica de populações e análogo a alguns outros modelos que aparecem em física (ver capítulo 4 e apêndice 2) e biologia.

Como vimos nos capítulos anteriores, a dinâmica de (5.1) é riquíssima, apresentando não somente um atrator caracterizado por uma solução caótica mas, para certos intervalos de parâmetros, muitos atratores, uns caóticos e outros periódicos.

Dizer que um sistema apresenta soluções caóticas significa que é difícil fazer previsões precisas acerca de seu futuro a "longo prazo" (este "longo prazo" está relacionado aos expoentes de Liapunov da solução, e não necessariamente significa um grande intervalo de tempo). Isso não nos impede, entretanto, de caracterizar as propriedades médias do sistema de uma maneira mais ou menos satisfatória. Por outro lado, dizer que um sistema possui muitos atratores, alguns podendo ser caóticos, pode significar que, além de ser difícil fazer previsões a longo prazo, também é difícil fazer previsões médias a longo prazo.

Um exemplo do que pode ser um sistema desse último tipo, é fornecido pela meteorologia. Como se sabe, é possível fazer uma previsão do tempo razoavelmente confiável apenas para um futuro

bastante próximo, pois a dinâmica aí envolvida é certamente caótica, e portanto muito sensível a condições iniciais [Lorenz (1963)]. Isto não nos impede entretanto de caracterizar o clima das diversas regiões da Terra. Caracterizar o clima de uma dada região, significa fornecer as suas propriedades meteorológicas médias, como por exemplo: umidade média, distribuição média de temperatura e pluviosidade, etc... O interessante é que o clima também não é previsível a longo prazo. Note que a escala temporal das variações climáticas é enorme quando comparada à escala das previsões meteorológicas, mas é relativamente pequena quando comparada à escala da história geológica. Testemunho destas variações climáticas são as quatro pequenas glaciações que se acredita terem ocorrido no período quaternário. Uma evidência disso é que muito provavelmente [Ab'Saber], a aproximadamente 15000 anos atrás, época da última destas glaciações, a Amazônia era um domínio predominantemente de savanas devido a aridez climática!

Como já dissemos, uma das hipóteses para explicar essas variações (que algumas vezes parecem apresentar componentes periódicas) é dizer que o sistema dinâmico que governa os fenômenos meteorológicos apresenta diversos atratores caóticos diferentes, e devido a perturbações externas, o estado do sistema pode passar da bacia de um atrator para a de outro, o que representa a mudança climática.

Note que, neste último parágrafo, introduzimos uma excitação externa, cuja existência é inevitável em sistemas realísticos. Dependendo das dimensões e do arranjo das bacias de atração do

sistema, essa excitação externa necessita ser realmente pequena e esporádica para provocar as transições de uma bacia para outra.

Essas considerações refletem na importância de se estudar a dinâmica global de sistemas com muitos atratores, ou seja, estabelecer as relações e importância relativa das diversas bacias de atração do sistema. Um exemplo desse tipo de estudo é fornecido por Mallet-Paret (1986) (ver capítulo 6), e diz respeito à "dinâmica entre ramos" de sistemas do tipo (4.1), que satisfazem a condição de "negative feedback"(6.7).

Nos casos em que coexistem diversos atratores, é importante caracterizar topologicamente o arranjo das diversas bacias de atração no espaço de fase e, neste contexto, o estudo das fronteiras entre estas bacias é bastante importante. Em Grebogi e outros [Grebogi et al. (1983)], é apresentado um sistema cuja fronteira entre bacias de atração possui dimensão fractal. Esta característica introduz uma certa "sensibilidade" do estado final do sistema, em função do estado inicial, sem a necessidade de introdução de ruído externo!

No problema que estudamos nesta tese, é possível que as fronteiras entre as bacias de atração possuam codimensão 1, de modo a não ocorrer fenômenos semelhantes aos descritos no parágrafo anterior. Mesmo assim, essa idéia evidencia de maneira mais gritante, a dificuldade na previsibilidade das propriedades médias assintóticas do sistema, introduzida pela existência simultânea de mais de um atrator.

Como dito no capítulo 2, as fronteiras das bacias de atração

são usualmente dadas por variedades estáveis de algumas soluções instáveis (ver figura 2.2, página 17). Sendo assim, uma maneira de se estudar as fronteiras entre as bacias de atração de (5.1), é detectar quais são as soluções que pertencem a essas fronteiras e, então, analisar suas variedades instável e estável. Certamente o estudo numérico dessas fronteiras, assim como aquele feito em Battelino et al. (1988) para sistemas em dimensão finita, não deve ser fácil em espaços de fase com dimensão infinita e, portanto, qualquer informação que se possa obter através da aplicação rigorosa dos conceitos acima, deve ser bastante útil. Com relação a isso, as conexões das quais tratamos no apêndice 1, podem ser úteis.

No capítulo 3, apresentamos o modelo (3.4) que trata, de uma forma simplificada, um problema extremamente particular da dinâmica de populações. Este modelo formalmente simples apresenta, todavia, uma dinâmica muito rica. Se adicionarmos algum ruído estocástico ao modelo, é possível que sua solução sofra transições entre as bacias de seus diversos atratores. Como já dito, isso pode provocar a variação das propriedades médias das soluções, e tornar impossível as previsões médias a longo prazo.

Modelos realísticos de dinâmica de populações devem conter os seguintes componentes: - efeitos de memória das mais variadas formas, - profundas não linearidades, - e excitações externas imprevisíveis. Com isso, se um modelo simples como o que estudamos apresenta toda a complexidade mencionada acima, pode se imaginar a complexidade dinâmica que sistemas realísticos podem apresentar, uma

vez que estes últimos contém ingredientes semelhantes aos primeiros, mas arranjados de uma forma muito mais complexa. Isso nos leva a crer que, mesmo que tivéssemos um modelo confiável para os sistemas populacionais, seria difícil extrair informações do mesmo, devido a sua complexidade matemática. Para entender o que estamos querendo dizer, basta lembrar os comentários que fizemos no fim do capítulo 4, acerca das soluções numéricas das equações de Navier-Stokes.

Um exemplo de sistema biológico muito complexo, que envolve a dinâmica de muitas populações, são os ecossistemas. Uma consequência de nossas afirmações com relação a esses sistemas, é que o conceito de equilíbrio dos mesmos, deve necessariamente ser algo complexo e difícil de definir. A razão disso está na grande quantidade de "estados de equilíbrio" desses sistemas, e nas prováveis, e não raras (com relação ao tempo de resposta do sistema), transições que podem ocorrer entre eles. Estas nossas conclusões carecem de quantificações mas, pelo menos em alguns tipos de ecossistemas, devem ter grande correspondência com a realidade.

Para concluir, quero dizer que o nosso plano inicial nessa tese era o de responder algumas questões acerca de (5.1), entre as quais a que dizia respeito à "rota para o caos" neste tipo de sistema (capítulo 5). Conforme fomos nos envolvendo com o problema, uma série de outras questões nos apareceram e, apesar de termos avançado bastante, e de maneira satisfatória, na direção de responder nossa pergunta inicial, terminamos esta tese com um

número maior de perguntas, do que aquele com o qual iniciamos. Isto é bom, e de certo modo é reflexo da intimidade que ganhamos com o problema, e da grande quantidade de tópicos a serem estudados, no que diz respeito a sistemas dinâmicos em dimensão infinita. Esperamos no futuro continuar estudando este tipo de problema, principalmente no que diz respeito às questões que ficaram evidentes nesta tese.

APENDICE 1: SOLUÇÕES EM SÉRIE DE EXPONENCIAIS

Todos os resultados deste apêndice baseiam-se na tentativa de encontrar uma solução global para a equação (6.10) sob a forma de uma série de exponenciais.

Dada a equação:

$$(A1.1) \quad \frac{1}{\tau} \dot{X} + X = (-A + 2) X(t-1) - A X^2(t-1) ,$$

tentaremos a solução:

$$(A1.2) \quad X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{n\lambda t} .$$

Substituindo (A1.2) em (A1.1), e igualando os termos em $e^{n\lambda t}$, ficamos com:

$$C_n \left[\frac{\lambda n}{\tau} + 1 \right] = \left[(-A + 2) C_n - A \sum_{l=0}^{\infty} C_{n-l} C_l \right] e^{-n\lambda} .$$

Para $n = 0$ temos:

$$C_0 = (-A + 2) C_0 - A C_0^2 ,$$

de onde tiramos que C_0 é um dos dois pontos fixos de (A1.1), ou seja,

$$C_0 = 0 \quad \text{ou} \quad C_0 = -\frac{A-1}{A}.$$

Para $n = 1$ temos:

$$(A1.3) \quad \frac{\lambda}{\tau} + 1 + [(A-2) + 2AC_0] e^{-\lambda} = 0$$

A equação (A1.3) é a equação característica da equação (A1.1), linearizada em torno dos pontos fixos: $X = 0$ ($C_0 = 0$) ou $X = -\frac{A-1}{A}$ ($C_0 = -\frac{A-1}{A}$).

Neste ponto nos deparamos com um problema. Se escolhermos $C_0 = 0$, temos que (A1.3) não é satisfeita para nenhum λ real (pelo menos na região em que a solução $X = 0$ é instável). Com isso, utilizando $C_0 = 0$, não conseguimos construir uma solução real do tipo (A1.2).

Portanto, escolhendo $C_0 = -\frac{A-1}{A}$, temos que (A1.3) fica:

$$\frac{\lambda}{\tau} + 1 - A e^{-\lambda} = 0,$$

e, pelo gráfico abaixo (figura A1.1), é fácil notar que essa equação possui uma raiz real, positiva, para $A > 1$.

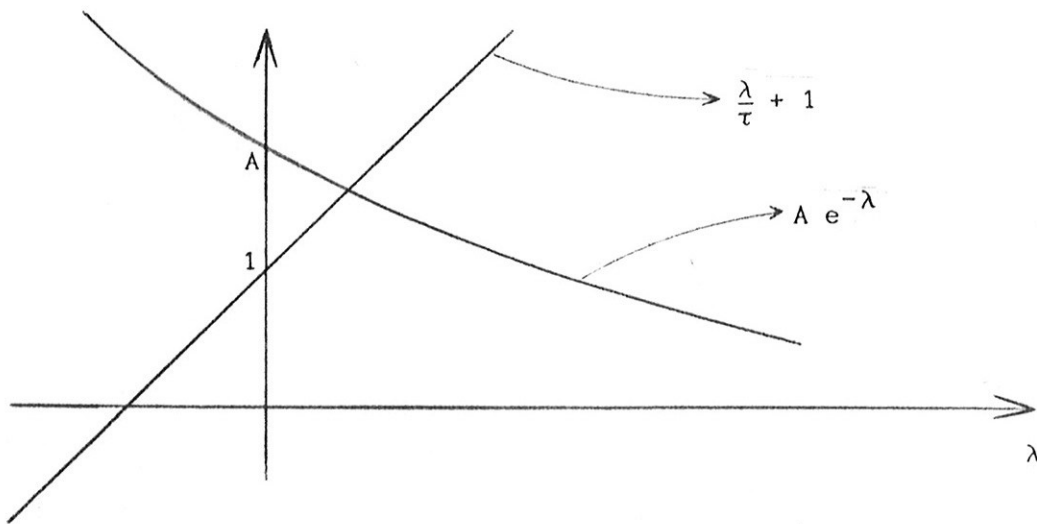


figura A1.1

A equação (A1.3) fixa λ , mas deixa uma arbitrariedade em C_1 . Essa arbitrariedade expressa a invariança, por translações, das soluções de (A1.1).

Para $n \geq 2$ temos a seguinte relação de recorrência para os C_n 's:

$$(A1.4) \quad C_n = - \frac{A e^{-n\lambda} * \sum_{l=1}^{n-1} C_{n-l} C_l}{\frac{\lambda}{\tau} n + 1 - A e^{-n\lambda}}$$

Agora, reescrevamos (A1.4) como:

$$C_n = - \xi_n(\lambda) \sum_{l=1}^{n-1} C_{n-l} C_l ,$$

e calculemos os primeiros C_n 's:

$$(A1.5) \quad \begin{cases} C_2 = - \xi_2(\lambda) C_1^2 , \\ C_3 = \xi_3(\lambda) [2 \xi_2(\lambda)] C_1^3 , \\ C_4 = - \xi_4(\lambda) [4 \xi_3(\lambda) \xi_2(\lambda) + \xi_2^2(\lambda)] C_1^4 . \end{cases}$$

De (A1.5), podemos afirmar que os coeficientes C_n são do tipo:

$$(A1.6) \quad C_n = (-1)^{-n+1} g_n(\lambda) C_1^n ,$$

onde $g_n(\lambda) > 0$.

Substituindo (A1.6) em (A1.2) temos que:

$$X(t) = - \left[\frac{A-1}{A} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} g_n(\lambda) C_1^n e^{n\lambda t} ;$$

e, fazendo $C_1 = e^{\lambda\delta}$, vem

$$(A1.7) \quad X(t) = - \left[\frac{A-1}{A} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} g_n(\lambda) e^{n\lambda(\delta+t)} .$$

Supondo que os $g_n(\lambda)$ convirjam, a primeira pergunta que se faz é: será que (A1.7) converge para qualquer $(t+\delta)$ finito ?

Se $(t+\delta) < 0$, a resposta é óbvia. Suponha agora que $(t+\delta) = T > 0$. Neste caso, a convergência ou não de (A1.7) é determinada pela velocidade de decaimento dos $g_n(\lambda)$ em função de n .

De (A1.4) temos que os $g_n(\lambda)$ são do tipo:

$$(A1.8) \quad g_n(\lambda) = e^{-n\lambda} [S(g_k(\lambda))] , \quad 2 \leq k < n,$$

onde $S(g_k(\lambda))$ representa uma soma de produtos dos $g_k(\lambda)$, que por sua vez também satisfazem relações do tipo (A1.8). Isso implica que $g_n(\lambda)$ pode realmente decair muito rapidamente.

Note que, se $g_n(\lambda)$ puder ser escrito como

$$(A1.9) \quad g_n(\lambda) = e^{-nh(n,\lambda)},$$

então, usando (A1.9) em (A1.7), temos que

$$X(T) = - \left[\frac{A-1}{A} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{n(\lambda T - h(n,\lambda))}$$

Dessa última relação temos que, se

$$(A1.10) \quad h(n,\lambda) - \lambda T > 0 ,$$

para qualquer n , tal que $n > N$ para algum N finito, então (A1.7) convergirá.

Infelizmente, não conseguimos mostrar que (A1.10) seja

satisfeita. Entretanto, se observarmos o comportamento dos $g_n(\lambda)$ para os primeiros n 's (ver (A1.5) para $n = 2, 3, 4$), detectaremos que (o símbolo \approx indica aproximadamente proporcional):

$$(A1.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} n = 2 \rightarrow g_2(\lambda) \approx e^{-2\lambda} , \\ n = 3 \rightarrow g_3(\lambda) \approx e^{-5\lambda} , \\ n = 4 \rightarrow g_4(\lambda) \approx e^{-8\lambda} , \\ n = 5 \rightarrow g_5(\lambda) \approx e^{-12\lambda} , \\ n = 6 \rightarrow g_6(\lambda) \approx e^{-16\lambda} . \end{array} \right.$$

Note que $g_n(\lambda)$ parece realmente decair segundo (A1.9) com $h(n,\lambda)$ extritamente crescente.

De (A1.11) fizemos uma estimativa grosseira de que $h(n,\lambda)$ deva ser do tipo $\log(n)$, ou seja cresce lentamente com n . Esse fato nos leva a conjecturar que (A1.7) convirja.

A fim de verificar o tipo de solução que nos fornece (A1.7), calculamo-la explicitamente para $A = 3.3$, $\tau = 10.0$, e $C_1 = 10$. O gráfico dessa solução é apresentado na figura A1.2 (note que nessa figura a escala temporal acha-se multiplicada por 10 e X somado a $\frac{A-1}{A}$).

Percebemos da figura A1.2 que conseguimos calcular a solução (A1.7), em um intervalo de tempo (t), no qual esta apresenta comportamento não trivial. Para valores de t grandes, entretanto, mesmo que (A1.7) seja convergente, provavelmente (A1.7) é não computável. A razão disso é que os $g_n(\lambda) e^{n\lambda t}$ só começam a decrescer para valores de n extremamente grandes. Com isso, (A1.7) apresenta uma enorme quantidade de termos positivos e negativos,

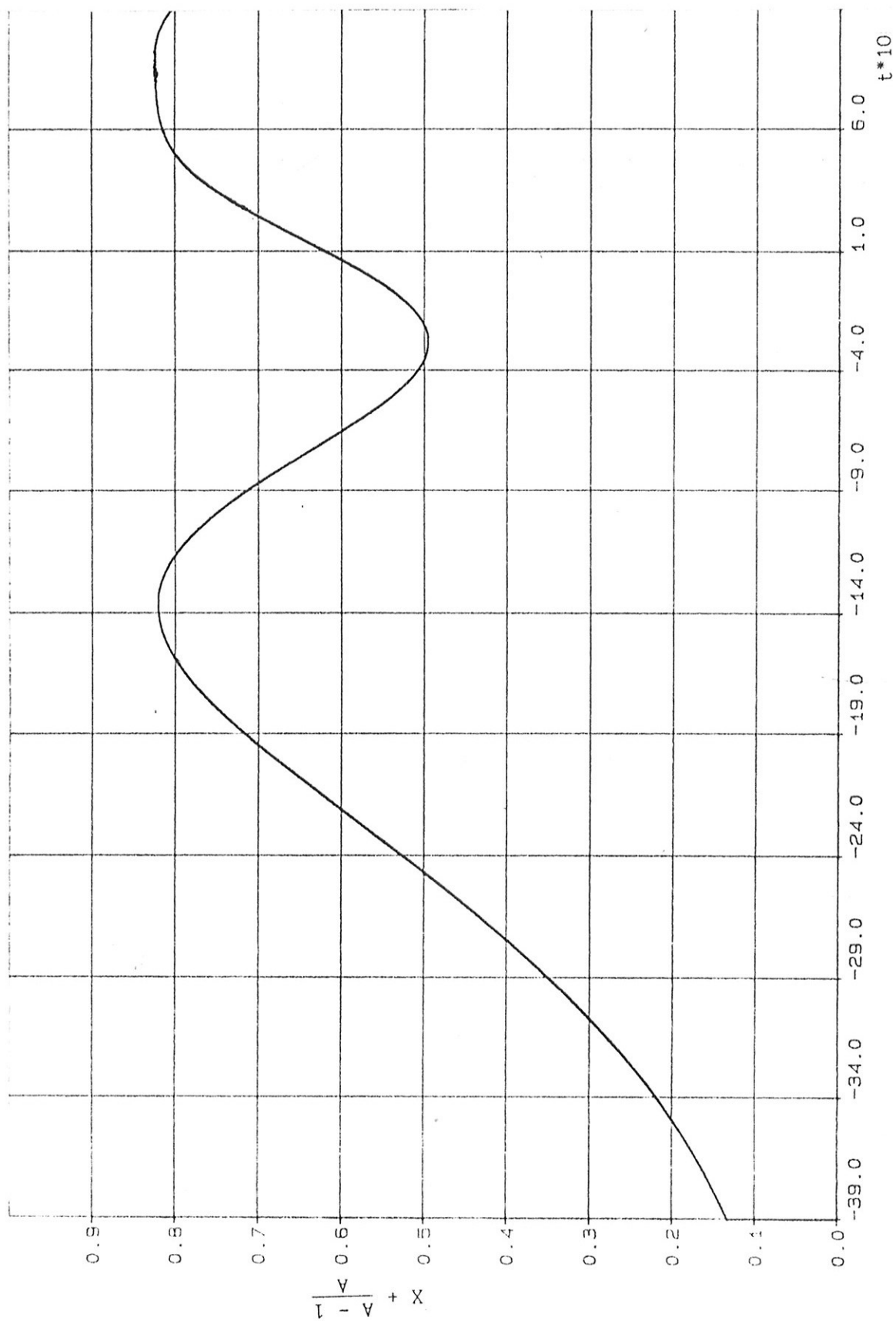


figura A1.2 (A = 3.3 , $\tau = 10.0$) Série de exponenciais

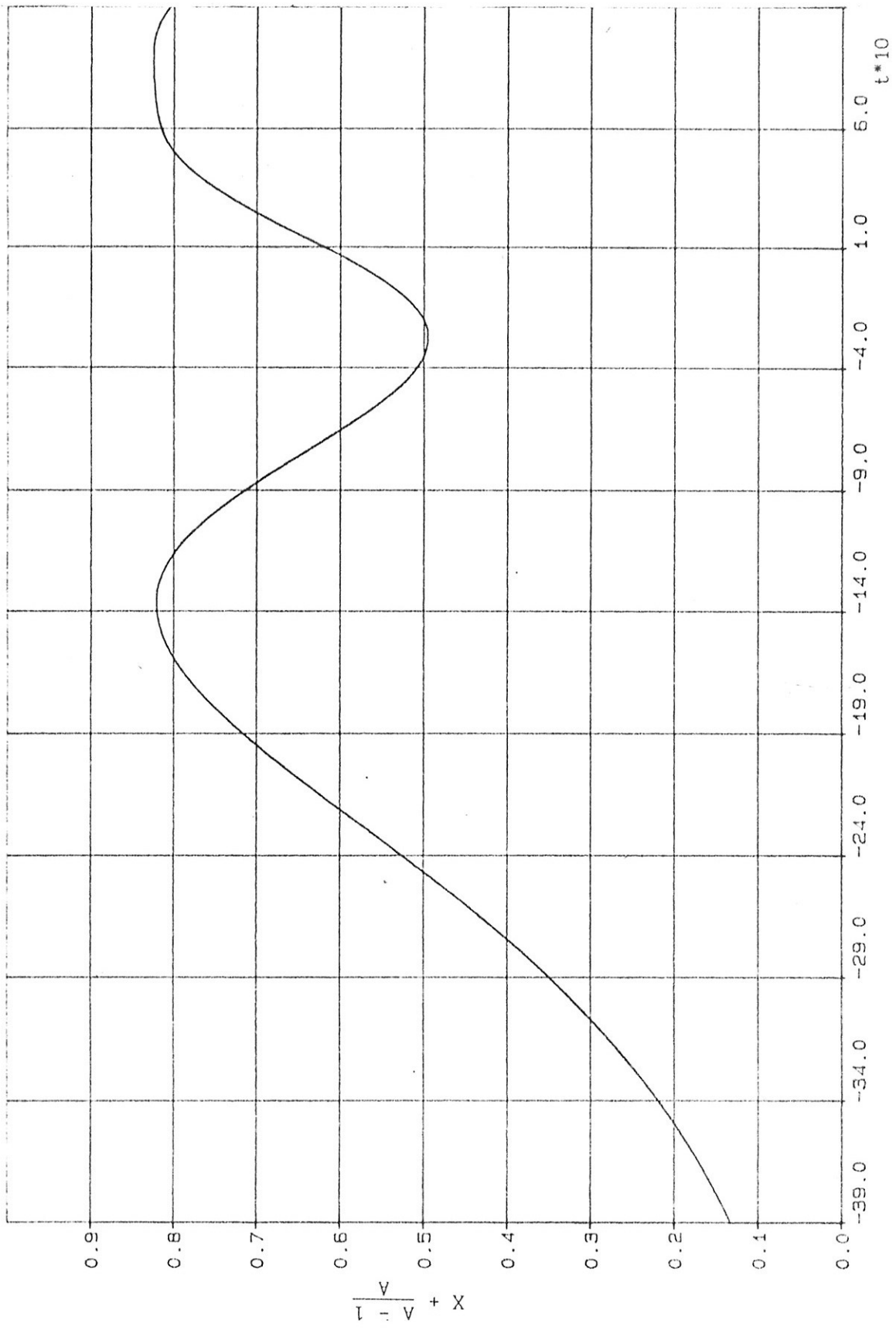


figura A1.3 (A = 3.3 , $\tau = 10.0$) Integração discretizada

por sua vez também grandes, sendo que a soma de todos eles é da ordem da unidade. Para ter uma idéia da ordem de grandeza dos números que podem estar envolvidos em (A1.7), se quisermos obter a solução dada na figura A1.2 no instante $t=30.0$, e assumirmos que $h(n) \approx \log(n)$, então, de (A1.10) (neste caso $\alpha \cong 1$), temos que:

$$\log(n) - 30 \approx 0 \quad \rightarrow \quad n \approx e^{30},$$

que é um número muitíssimo grande.

Lembrando que $C_1 = e^{\lambda\delta}$, onde δ representa uma translação no tempo, é fácil perceber que lidaremos com números exponencialmente maiores, conforme aumentamos δ (ou t).

Apesar desse problema, as soluções do tipo (A1.2) são bastante interessantes, devido à forma "relativamente simples" com a qual conseguimos explicitar os C_n 's.

Na figura A1.3 mostramos a mesma solução apresentada na figura A1.2, só que calculada através do nosso algoritmo discretizado, apresentado no capítulo 5. Podemos notar que as figuras A1.2 e A1.3 são idênticas, o que no mínimo mostra que a integração discretizada é excelente.

Tudo o que fizemos acima, referiu-se à solução com $C_0 = -\frac{A-1}{A}$. O mais interessante, entretanto, seria analisar soluções em torno de $X=0$, o que implicaria em tomar $C_0=0$. A fim de evitar o problema das soluções imaginárias, tentemos um outro tipo de solução, dado por:

$$(A1.12) \quad X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} C_{j,l} e^{(j\lambda + l\lambda^*)t},$$

onde λ^* é o complexo conjugado de λ (esta solução tentativa é usada por Bel (1982), com o intuito de obter soluções aproximadas para equações diferenciais com retardamento, e segundo esta mesma referência, foi usada por Liapunov em seu primeiro método de análise de estabilidade).

Como (A1.12) deve ser real, temos que $C_{j,l} = C_{l,j}^*$.

Se substituirmos (A1.12) em (A1.1) e raciocinarmos de maneira análoga ao que fizemos para (A1.2), chegaremos à expressão:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} C_{j,l} \left[\frac{\lambda j + \lambda^* l}{\tau} + 1 \right] e^{(j\lambda + l\lambda^*)t} = \\ & \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left[(-A + 2) C_{j,l} - A \sum_{m=0}^j \sum_{n=0}^l C_{j-m, l-n} C_{m,n} \right] \times \\ & \quad \times e^{-(j\lambda + l\lambda^*)t} e^{(j\lambda + l\lambda^*)t}. \end{aligned}$$

Se λ não for nem puramente real nem puramente imaginário, então, chegamos à seguinte relação entre os coeficientes:

$$(A1.13) \quad C_{j,l} \left[\frac{\lambda j + \lambda^* l}{\tau} + 1 \right] = e^{-(j\lambda + l\lambda^*)t} \times$$

$$\times \left[(-A + 2) C_{j,l} - A \sum_{m=0}^j \sum_{n=0}^l C_{j-m, l-n} C_{m,n} \right].$$

Para $j = l = 0$, temos $C_{0,0} = -\frac{A-1}{A}$ ou $C_{0,0} = 0$.

Escolheremos $C_{0,0} = 0$.

Para $j = 1, l = 0$ em (A1.13), ficaremos com a equação

$$(A1.14) \quad \frac{\lambda}{\tau} + 1 + (A - 2) e^{-\lambda} = 0,$$

que é a equação característica de (A1.1) linearizada em torno de $X = 0$. Novamente $C_{1,0}$ fica indeterminado, o que está associado à invariância por translações das soluções de (A1.1).

Para $j = 0$, obteremos uma equação idêntica para λ^* .

Uma vez escolhida uma raiz λ de (A1.14), os demais $C_{j,l}$ são determinados a partir de (A1.13) pela relação:

$$(A1.15) \quad C_{j,l} = \frac{-A e^{-(\lambda j + \lambda^* l)}}{\frac{\lambda j + \lambda^* l}{\tau} + 1 + (A - 2) e^{-(\lambda j + \lambda^* l)}} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^j \sum_{n=0}^l C_{j-m, l-n} C_{m,n}.$$

Analisando as soluções (A1.12) com (A1.15) para $A < 3.658$, notamos que, para $\text{Re} \lambda > 0$, $X(t)$ é uma solução que, no espaço das soluções globais, conecta a solução trivial $X = 0$, ou seja s_N^* , a conjuntos de Morse s_N , com $N < N^*$ (ver capítulo 6).

Essas conexões na verdade são aquelas cuja existência fora provada por Fiedler & Mallet-Paret (1987).

Note que, quanto maior a dimensão da variedade instável da origem, mais pares de raízes de (A1.14) com $\text{Re}\lambda > 0$ existirão e, portanto, um maior número de conexões podem ser construídas usando (A1.12).

Se denotarmos por (λ_1, λ_1^*) o primeiro par de raízes que cruza o eixo imaginário, (λ_2, λ_2^*) o segundo par, etc..., temos que (A1.12) com $\lambda = \lambda_1$ é uma conexão entre s_N^* e s_1 e, muito provavelmente, (A1.12) com $\lambda = \lambda_N$ é uma conexão entre s_N^* e s_N onde $N < N^*$.

Esse raciocínio pode ser levado mais longe. Por exemplo, podemos tentar uma solução do tipo:

$$(A1.16) \quad X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{j,l,m,n} e^{(j\lambda + l\lambda^* + m\omega + n\omega^*)t}$$

O fato de $X(t)$ ser real implica que $C_{j,l,m,n} = C_{l,j,n,m}^*$.

Novamente, $C_{0,0,0,0} = 0$ ou $C_{0,0,0,0} = \frac{A-1}{A}$ e, no caso de fazermos $C_{0,0,0,0} = 0$, ω e λ serão raízes da equação característica (A1.14).

No caso em que $\text{Re}\omega$ e $\text{Re}\lambda$ forem positivas, temos que $X(t)$ representa uma conexão entre o ramo da solução trivial e algum outro ramo.

Das propriedades de (A1.14) [Fiedler & Mallet-Paret (1987)],

temos que, se λ for uma raiz associada a s_N e ω a s_{N+1} , então $\text{Re}\lambda > \text{Re}\omega$. Portanto, com $\text{Re}\lambda > 0$ e $\text{Re}\omega > 0$, a solução (A1.16) para $t \rightarrow -\infty$, será:

$$(A1.17) \quad X(t) = C_{1,0,0,0} e^{\omega t} + C_{0,1,0,0} e^{\omega^* t}$$

Como já dissemos, em Fiedler & Mallet-Paret (1987) é provada a existência de conexões (no caso de (A1.1) satisfazer a condição de "negative feedback") entre s_N^* e s_N , $N < N^*$, e cujo comportamento para $t \rightarrow -\infty$ é semelhante ao dado por (A1.17). O interessante é que no comportamento assintótico determinado por Fiedler & Mallet-Paret (1987) a raiz ω que aparece em (A1.17), é aquela correspondente ao conjunto s_N para onde se dirige a conexão. Por outro lado, de (A1.16) esperamos que a conexão não se dirija ao s_N associado a ω , mas sim ao s_M associado a λ . A razão disso é que para t grande esperamos que os termos em $e^{\lambda t}$ dominem, pois estamos admitindo que $\text{Re}\lambda > \text{Re}\omega$. Este raciocínio nos leva a pensar que as conexões dadas por (A1.16) são diferentes daquelas cujo comportamento assintótico fora determinado por Fiedler & Mallet-Paret (1987), e que estas últimas estejam relacionadas somente às conexões dadas por (A1.12). Apesar deste raciocínio carecer de rigor matemático ele parece estar no caminho correto.

Este tipo de solução em série de exponenciais é interessante, mas falta analisar com mais profundidade diversos aspectos relacionados às mesmas, como por exemplo:- o significado das soluções (A1.12) e (A1.16), - o significado das liberdades nos

coeficientes cuja soma dos índices é 1, - o que acontece com essas conexões conforme (A1.1) deixa de satisfazer a condição de "negative-feedback", - o problema da convergência destas séries, - e muitas outras questões.

Como vemos há muita coisa a ser feita neste sentido, e esperamos em breve começar a atacar esses problemas.

APENDICE 2: UMA INTERPRETAÇÃO PARA OS FENÔMENOS DE HISTERESE
EM SISTEMAS COM BIESTABILIDADE ÓPTICA.

Neste apêndice, damos uma explicação e fazemos uma estimativa quantitativa para um fenômeno observado por Ikeda, Kondo & Akimoto (1982) em um modelo desenvolvido pelo próprio Ikeda para um sistema óptico que apresenta biestabilidade. A seguir fazemos uma breve apresentação do problema físico e do modelo.

O sistema físico no qual estamos interessados, é uma cavidade óptica preenchida por um meio não linear, esquematicamente mostrado na figura A2.1 [Milonni, Shih & Ackerhalt (1987)]:

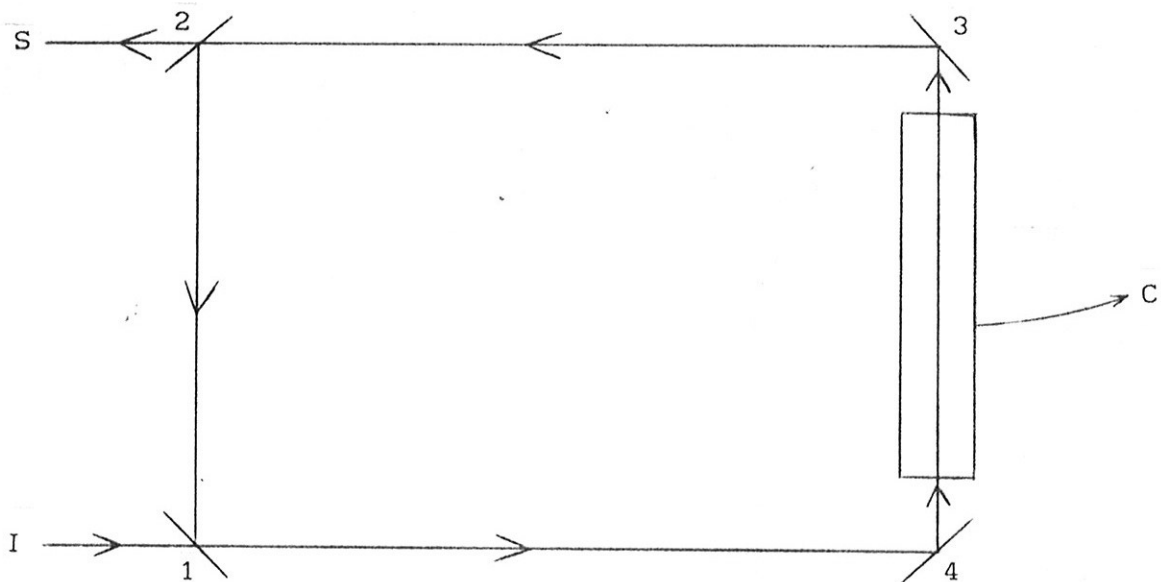


figura A2.1

Nessa figura A2.1 temos que:

- 1 e 2 são superfícies parcialmente espelhadas;
- 3 e 4 são superfícies totalmente refletoras;
- I é um feixe de laser que é injetado no sistema;
- S é um feixe de laser que sai do sistema;
- C é um dispositivo contendo um meio com índice de absorção não linear.

As equações físicas pertinentes a esse sistema são: (i) as equações de Maxwell para um meio polarizável, que descrevem o campo elétrico no interior do dispositivo em função da polarização do meio, e (ii) a equação de Schrödinger, que fornece a polarização do meio em função do campo elétrico.

Admitindo que o laser injetado no sistema seja quase monocromático, e fazendo a hipótese de que os átomos do dispositivo não linear possuem apenas dois níveis, chega-se a uma forma simplificada das equações acima, conhecida por equações de Maxwell-Bloch. Sendo assim, as equações que regem a dinâmica do sistema da figura A2.1, são as equações de Maxwell-Bloch com condições de contorno convenientes.

Chamemos de X a diferença entre as fases da onda injetada no sistema e da onda que sai do mesmo. Considerando que os parâmetros que caracterizam o sistema encontram-se dentro de certos limites, de maneira a ser possível a simplificação das equações de Maxwell-Bloch [Milonni, Shih & Ackerhalt (1987)], temos que a dinâmica de X pode ser descrita por [Ikeda, Kondo & Akimoto (1982)]:

$$(A2.1) \quad \dot{X}(t) + X(t) = \Pi \mu [1 + 2 B \cos(X(t-\tau) - X_0)] ,$$

onde B representa a dissipação do campo eletromagnético no interior da cavidade ($B < 1$), τ é o tempo que a luz gasta para percorrer a cavidade e μ é a intensidade do laser incidente.

A equação (A2.1) é do tipo da equação (4.1). A fenomenologia de suas soluções e o padrão das bifurcações dessas soluções no espaço (τ, μ) são semelhantes àqueles que descrevemos para (5.1).

Estamos interessados na dinâmica de (A2.1) em função de τ , μ , e é conveniente que fixemos seus demais parâmetros. Para isso, fixemos [Ikeda, Kondo & Akimoto (1982)] :

$$(A2.2) \quad X_0 = -\frac{\Pi}{2} \quad \text{e} \quad B = 0.5 .$$

Com isso, a aplicação associada a (A2.1) fica:

$$(A2.3) \quad X_{n+1} = \Pi \mu [1 - \text{sen}(X_n)] ,$$

ou, graficamente,

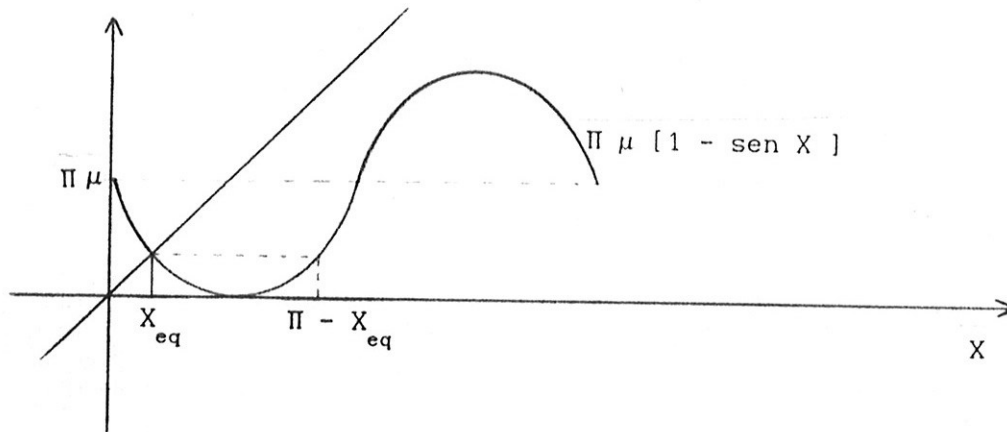


figura A2.2

Ikeda, Kondo & Akimoto (1982) fizeram simulações numéricas em (A2.1), fixando (A2.2) e $\tau = 40.0$, e variando o parâmetro μ . Uma diferença entre as simulações feitas por Ikeda, Kondo & Akimoto (1982), e a que nós fizemos, é que eles variaram μ continua e lentamente $\left[\frac{d\mu}{dt} < 5 \cdot 10^{-7} \right]$ durante a integração enquanto que, para nós, o parâmetro equivalente a μ permaneceu constante em cada integração. Com isso as simulações feitas em Ikeda, Kondo & Akimoto (1982) não levaram em conta uma padronização da função inicial, uma vez que a solução "assintótica" para um certo valor de μ , serviu de função inicial para o valor de μ imediatamente

posterior.

A simulação de Ikeda, Kondo & Akimoto (1982) foi uma das primeiras em que se percebeu a relevância dos harmônicos de ordem ímpar (ramos superiores) da solução fundamental (ramo 1). Juntamente com a observação desses harmônicos eles observaram um fenômeno de histerese, característico de "transições" de primeira ordem (ou seja quando a solução sofre uma mudança descontínua com a variação do parâmetro). A seguir, relatamos como isso é observado.

Primeiramente, começa-se a simulação com μ suficientemente pequeno, de modo que a solução estável de (A2.1) seja um ponto fixo. Para $\mu=0.376$ a solução estacionária torna-se instável e, nesse ponto, aparece uma solução periódica estável, tipo onda quadrada, de período aproximadamente dois. Mais adiante essa solução sofre uma seqüência de duplicações de período, semelhante àquela que descrevemos no capítulo 5; e, para $\mu \geq 0.696$ (ponto de acumulação das duplicações de período) a solução estável de (A2.1) passa a ser caótica. Se continuarmos aumentando μ , notaremos que, para $\mu = \mu_B = 0.775$, a solução que para $\mu < \mu_B$ tinha uma forte componente de período 2, passa bruscamente a ter uma forte componente de período 2/3. Isso caracteriza a passagem da solução do ramo 1 para o ramo 2, ou seja, ocorre uma transição de primeira ordem.

A partir do ponto $\mu = \mu_B$ começa-se, então, a diminuir o valor do parâmetro μ . Com isso, observa-se que a solução não volta a apresentar uma forte componente de período 2, mas continua com uma forte componente de período 2/3. Conforme μ decresce, a solução

deixa de ser caótica, passando a ser periódica, mas ainda com um período múltiplo de $2/3$, e não de 2. Somente quando μ decresce abaixo de um certo valor é que a solução sofre uma outra "transição" de primeira ordem, e volta a apresentar período próximo a 2, ou de alguma potência de 2. Com isso, fecha-se o ciclo de histerese, fenômeno este característico de "transições" de primeira ordem. É interessante que essa "transição" de volta ao ramo 1 ocorre para valores de μ que dependem da velocidade com que μ decresce [Ikeda, Kondo & Akimoto (1982)].

A justificativa para existência desse fenômeno de histerese está relacionada ao fato do sistema apresentar diversos atratores para um mesmo valor de μ [Ikeda, Kondo & Akimoto (1982)] .

O fenômeno de histerese encaixa-se na discussão que fizemos no capítulo 6 acerca da existência dos ramos de soluções de (6.1). No capítulo 6 apresentamos certos resultados de Mallet-Paret (1986) que dizem respeito ao sentido das órbitas globais que conectam dois ramos diferentes. Esse resultado se aplica naturalmente ao fenômeno de histerese descrito acima pois, afirma ser impossível a existência de uma solução conectando o ramo 1 e o ramo 2, indo no sentido $1 \rightarrow 2$, se (A2.1) satisfizer a condição de "negative feedback" (6.7).

A fim de aplicar o resultado do Mallet-Paret (1986) a (A2.1), é necessário determinar os valores de μ para os quais as soluções de (A2.1) tem uma amplitude tal que a condição de "negative feedback" seja satisfeita.

A fim de calcularmos os limites da solução de (A2.1), façamos

um raciocínio análogo ao que fizemos para (5.1) no capítulo 6.

Para os pontos máximo e mínimo das soluções oscilantes de (A2.1), com (A2.2), em torno da solução de equilíbrio $X = X_{eq}$ ($0 < X_{eq} < \Pi/2$, ver figura A2.2), temos que $\dot{X} = 0$. Nesses pontos X satisfaz (A2.3). É fácil ver da figura A2.2 que as soluções que nos interessam satisfazem $X(t) \geq 0$ e $X(t) \leq \Pi\mu$. Ainda, da figura A2.2, é fácil notar que o sistema deixará de satisfazer a condição de "negative feedback" quando:

$$(A2.4) \quad \Pi \mu > \Pi - X_{eq} ;$$

onde X_{eq} é dado, a partir de (A2.3), por:

$$(A2.5) \quad X_{eq} = \Pi \mu [1 - \text{sen}(X_{eq})] .$$

Considerando o limite de igualdade em (A2.4), e substituindo em (A2.5), encontramos a seguinte equação para μ :

$$(A2.6) \quad \frac{1}{\mu} - 2 = - \sin(\Pi\mu) .$$

Resolvendo (A2.6) encontramos $\mu = \mu_* = 0.760\dots$. Isso significa que, para $\mu < \mu_*$, o sistema considerado dentro dos limites das soluções que nos interessam, satisfaz à condição de "negative feedback", e deixará de satisfazê-la para $\mu \geq \mu_*$.

O resultado (A2.6) nos dá um limite inferior μ_* para o aparecimento de uma órbita conectando o ramo 1 e ramo 2, e concorda

bem com o resultado numérico. De fato, na simulação numérica feita por [Ikeda, Kondo & Akimoto (1982)] , essa órbita aparece para $\mu = \mu_B = 0.775$, ou seja, μ_B é um pouco maior do que μ_* (a fim de se ter uma idéia da ordem de grandeza dos parâmetros envolvidos na caracterização da dinâmica de (A2.1) com (A2.2), lembremos que: - para $\mu = 0.376$ a solução estacionária deixa de ser estável, e aparece uma solução periódica, e - para $\mu = 0.696$ ocorre a acumulação das duplicações de período).

Esse resultado, além de ser uma estimativa teórica razoável para um fenômeno observado através de "experiências numéricas", constitui uma evidência de que talvez uma condição suficiente para que exista uma órbita conectando o ramo 1 ao ramo 2, neste mesmo sentido, é que ele não satisfaça a condição de "negative feedback", ou alguma outra condição próxima a ela.

É interessante que, nas simulações numéricas que fizemos para (5.1) no capítulo 5, obtivemos soluções periódicas no ramo 1 que eram estáveis mesmo quando a condição de "negative feedback" não fosse satisfeita. Note que isso não está em contradição com o que afirmamos acima, mas quer dizer que o fato da solução ser caótica, "talvez" favoreça a aproximação do estado do sistema de uma órbita que conduza do ramo 1 ao ramo 2, e assim permita a transição.

Para finalizar, queremos dizer que as conexões entre os ramos 2 e 3, entre o ramos 3 e 4, etc..., ocorrem para valores de μ maiores que μ_B [Ikeda, Kondo & Akimoto (1982)] . Seria interessante, nesses casos, tentar entender melhor quais são as condições necessárias para o aparecimento destas conexões. Talvez

uma condição a ser satisfeita seja a mesma válida para a conexão ramo 1 \rightarrow ramo 2, ou seja, o sistema, considerado dentro dos limites das soluções do ramo em questão, deixa de satisfazer a condição de "negative feedback". A razão pela qual os ramos de ordem maior que 1 deixam de satisfazer a condição de "negative feedback", para μ 's cada vez maiores, talvez esteja associada ao fato de que a amplitude das soluções dos ramos superiores tenda a ser menor do que a amplitude das soluções dos ramos inferiores, para um mesmo valor de μ e τ . Usando um argumento desse tipo poder-se-ia tentar fazer uma estimativa do aparecimento dessas conexões, se tivéssemos limites superior e inferior diferentes para as soluções nos diversos ramos. Se estas estimativas seriam tão boas quanto a que obtivemos para a conexão ramo 1 \rightarrow ramo 2, é uma coisa difícil de ser respondida, pois dependem da veracidade das hipóteses que fizemos acima.

BIBLIOGRAFIA

- A. Ab'Saber, comunicação oral.
- V. I. Arnold, "Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations", Springer-Verlag USA, (1983).
- V. I. Arnold, "Equações Diferenciais Ordinárias", MIR-URSS, (1985).
- P. M. Battelino, C. Grebogi, E. Ott, J. A. Yorke & E. D. Yorke, "Multiple coexisting attractors, basin boundaries and basic sets", *Physica D* 32 (1988), 296-305.
- L. Bel, "Spontaneous predictivisation", *Lect. Notes in Phys.* 162 (1982), 21-49.
- R. Bellman & K. L. Cooke, "Differential-Difference Equations", Acad. Press-USA, (1963).
- M. Le Berre, E. Ressayre & A. Tallet, "Lyapunov analysis of the Ruelle-Takens route to chaos in an optical retarded differential system", *Opt. Comm.* 72 (1987), 123-128.

M. Le. Berre, Y. Pomeau, E. Ressayre, A Tallet, H. M. Gibbs, D. L. Kaplan & M. J. Rose, "From deterministic chaos to noise in retarded feedback systems", Lect. Notes in Phys. 319 (1988), 157-176.

S. N. Chow & D. Green Jr., "Some results on singular delay-differential equations", Chaos, Fractals and Dynamics, ed by P. Fischer & W. R. Smith, Marcel Dekker (1985), 161-182.

P. Collet & J. P. Eckmann, "Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems", Birkhäuser, (1980).

J. P. Crutfield & B. A. Huberman, "Fluctuations and the onset of chaos", Phys. Lett. 77A (1980), 407-410.

P. Cvitanovič, "Universality in chaos (or Feigenbaum for cyclists)", Acta Physica Polonica A65 (1984).

P. Cvitanovič, "Chaos for cyclists", Noise and Chaos in nonlinear systems, ed. by F. Moss, Cambridge Univ. Press - Cambridge (1988).

M. W. Derstine, H. M. Gibbs, F. A. Hopf & D. L. Kaplan, "Alternate paths to chaos in optical bistability", Phys. Rev. A27 (1983), 3200-3208.

J. D. Farmer, "Chaotic attractors of an infinite-dimension dynamical system", *Physica* 4D (1982), 366-395.

M. Feigenbaum, "Universal behaviour in nonlinear systems", Los Alamos Science, Summer (1980).

B. Fiedler & J. Mallet-Paret, "Connections between Morse sets for delay differential equations", Preprint - Lefschetz Center for Dynamical Systems, Brown Univ. R.I. (1987).

U. Frisch, Comunicação pessoal.

U. Frisch & S. A. Orszag, "Turbulence: challenges for theory and experiment", Preprint-to appear in *Phys. Today* (1989).

J. Y. Gao , L. M. Narducci, L. S. Schulman, M. Squicciarini & J. M. Yuan, "Route to chaos in a hybrid bistable system with delay", *Phys. Rev* A28 (1983), 2910-2914.

J. Y. Gao , J. M. Yuan & L. M. Narducci, "Instabilities and chaotic behavior in a hybrid bistable system with short delay", *Opt. Comm.* 44 (1983), 201-206.

J. Y. Gao, L. M. Narducci, H. Sadiky, M. Squicciarini & J. M. Yuan, "Higher-order bifurcations in a bistable system with delay", *Phys. Rev.* A30 (1984), 901-904.

C. Grebogi, S. W. Macdonald, E. Ott & J. A. Yorke, "Final state sensitivity: an obstruction to predictability", Phys. Lett. 99A (1983), 415-418.

J. Guckenheimer & P. Holmes, "Nonlinear Oscillations Dynamical Systems, and Bifurcations", Springer-Verlag USA, (1983).

K. P. Hadeler, "Delay equations in biology", Lec. Notes in Math. 730 (1979).

J. K. Hale, "Theory of Functional Differential Equations", Springer-Verlag USA, (1977).

J. K. Hale, "Topics in dynamic bifurcation theory", Reg. Conf. Ser. in Math., AMS, v.47, (1981).

M. W. Hirsch & S. Smale, "Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra", Academic Press USA (1974).

F. A. Hopf, D. L. Kaplan, H. M. Gibbs & R. L. Shoemaker, "Bifurcations to chaos in optical bistability", Phys. Rev. A25 (1982), 2172-2182.

K. Ikeda, K. Kondo & O. Akimoto, "Successive Higher harmonic bifurcations in systems with delayed feedback", Phys. Rev. Lett. 49

(1982), 1467-1470.

K. Ikeda & K. Matsumoto, "High dimensional chaotic behaviour in systems with time delay feedback", *Physica* 29D (1987), 223-235.

D. W. Jordam & P. Smith, "Nonlinear Ordinary Differential Equations", 2nd ed., Clarendon Press-Oxford, (1987).

J. L. Kaplan & J. A. Yorke, "On the nonlinear differential delay equation $X'(t) = -f(X(t), X(t-1))$ ", *Jour. Diff. Eq.* 23 (1977), 293-314.

R Levins, "The effect of random variations of different types on population growth", *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 62 (1969), 1061-1065.

R. C. Lewotin & D. Cohen, "On population growth in a randomly varying environment", *Proc. Nat. Aca. Sci. USA* 62, (1969), 1056-1060.

E. N. Lorenz, "Deterministic nonperiodic flow", *Jour. Atm. Sci.* 20 (1963), 365.

E. N. Lorenz, "Computational chaos - A prelude to computational instability", *Physica* 35D (1989), 299-317.

J. Mallet-Paret, "Morse decomposition and global continuation of periodic solutions for singularly perturbed delay equations", Systems of Nonlinear Partial Differential Equations, ed. by J. M. Ball & D. Reidel, Dordrecht (1983), 315-365.

J. Mallet-Paret, "Morse decompositions for delay differential equations", Preprint - Lefschetz Center for Dynamical Systems, Brown Univ. R.I., (1986).

J. Mallet-Paret & R. D. Nussbaum¹, "A bifurcation gap for a singularly perturbed delay equation", Chaotic Dynamics and Fractals, ed. by M. F. Barnsley & G. S. Denko, Academic Press-USA (1986), 263-286.

J. Mallet-Paret & R. D. Nussbaum², "Global continuation and asymptotic behaviour for periodic solutions of differential delay equation", Ann. Mat. Pura Appl. CXLV (1986), 33-129.

J. E. Marsden & M. Mc. Cracken, "The Hopf Bifurcation and Its Applications", Springer-Verlag USA, (1976).

P. W. Milonni, M. L. Shih, J. R. Ackerhalt, "Chaos in Laser Matter Interactions", World Scientific Lect. Notes in Phys. 6 (1987).

A. J. Nicholson, "An outline of the dynamics of animal

populations", Austr. Jour. Zool. 2 (1954), 9-65.

C. R. de Oliveira, "Bifurcações Sucessivas em Sistema de Dimensão Infinita", Dissertação de Mestrado, IFUSP (1982).

C. R. de Oliveira & C. P. Malta, "Bifurcations in a class of time delay equations", Phys. Rev. A36 (1987), 3997-4001.

J. Palis & W. de Melo, "Geometric Theory of Dynamical Systems - An Introduction", Springer-Verlag USA, (1982).

J. F. Perez, C. P. Malta & F. A. B. Coutinho, "Qualitative analysis of oscillations in isolated populations of flies", Jour. Theor. Biol. 71 (1978), 505-514.

D. Saupe, "Global bifurcation of periodic solutions to some autonomous differential delay equations", Appl. Math. Comp. 13 (1983), 185-211.

J. M. Smith, "Mathematical Ideas in Biology", Cambridge Press (1968).

J. M. Smith, "Models in Ecology", Cambridge Press (1974).

Yu. M. Svirezhev & Logofet, "Stability Of Biological Communities", MIR-URSS (1983).

W. J. Tadei, "Oscilações Cíclicas em Populações Experimentais de Drosophila", Tese de doutoramento - Fac. Medicina Rib. Preto, (1975).