UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

SOBRE OS LIMITES CLÁSSICO E SEMICLÁSSICO DO MODELO SPIN-BOSON

Valdecir Marvulle

SBI-IFUSP
305M810T1889

Tese de Doutorado submetida
ao Instituto de Física da
Universidade de São Paulo

ORIENTADOR: Prof. Dr. Walter Felipe Wreszinski
Defesa: 29/11/91

SÃO PAULO
1991

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
1889
R.L.
INSTITUTO DE FÍSICA

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Marvulle, Valdecir
Sobre os limites clássico e semiclássico do modelo spin-boson. São Paulo, 1991.

Tese (Doutorado) - Universidade de são Paulo. Instituto de Física. Departamento de Física Matemática.
Área de Concentração: Física de Partículas Elementares
Orientador: Prof. Dr. Wlater Felipe Wreszinski

Unitermos: 1. Limites clássico e semiclássico; 2. Modelo spin-boson; 3. Estatísticas quânticas de níveis de energia; 4. Dinâmica clássica: caos; 5. Laser

USP/IF/SBI - 50/91

Abstract

The spin-boson model, its classical (many atoms) and semiclassical (many fotons) limits are studied. The NND and Δ_3 statistics of the energy are showed in a quantum and semiclassical calculations. In the classical case, the chaotic behaviour of the system for low energies is related to the fact that, in the initial states, the atoms have zero polarization and no fotons are included.

Resumo

Estudamos o modelo spin-boson, principalmente no limite semiclássico (muitos fótons) e clássico (muitos átomos), e as estatísticas dos níveis de energia NND e Δ_3 a ele relacionadas. No caso clássico, encontramos que o comportamento caótico do sistema para baixas energias está fortemente relacionado com polarização nula e quase nenhum fóton presente no estado inicial.

Para Diogo e Jussara

Agradecimentos

Seria muita pretensão de minha parte listar aqui todos os nomes que me foram importantes na conclusão desta tese, pois todas as pessoas que passaram ao meu lado nestes últimos 3 anos deram, em maior ou menor grau, a sua contribuição para que este trabalho hoje estivesse pronto. Mas mesmo correndo o risco de cometer algum agravo devido a usual desculpa do esquecimento, ouso citar alguns poucos nomes que me foram essenciais para a realização deste.

Primeiramente, agradeço o Prof. Walter F. Wreszinski, o qual com seu profundo conhecimento e entendimento da Física, sempre me guiou pelos caminhos certos, sendo sempre muito dedicado e estando sempre pronto para esclarecer qualquer dúvida que ia surgindo no decorrer deste trabalho. A ele cabe as honras que porventura possam surgir desta tese, e se honras não houver, isto se deve única e exclusivamente a minha limitação como aprendiz. Foi uma experiência profissional das mais agradáveis trabalhar com ele durante este período.

A Jussara é uma pessoa a quem jamais terei como agradecer, pois dia após dia participou desta etapa como companheira, esposa, amante, sendo sempre uma razão a mais para tentar vencer os obstáculos que iam aparecendo. E ao Diogo, que, no meio da jornada, veio trazer brilho e renovar as forças para que os obstáculos continuassem a ser vencidos.

Agradeço ao pessoal da Física, que sempre proporcionou um ambiente agradável, tanto nos estudos como na convivência diária. Aqui não ouso citar nomes, pois seria muito desagradável se esquecesse alguém, e isto certamente aconteceria. Entretanto, todos sabem o quanto foram importantes, seja pelas discussões sobre Física, seja

pelas orientações no uso do computador, pelos favores prestados ou simplesmente pela amizade.

Ao pessoal de Itajubá, os quais sempre foram muito prestativos, estando sempre prontos a fazer favores que inúmeras vezes precisei.

Ao Caio e a Carolina, que gentilmente cederam o programa numérico para o cálculo das estatísticas NND e Δ_3. A Lígia pelos "toques" no Latex.

E aos amigos que comigo conviveram neste tempo, os quais foram responsáveis por agradáveis horas de lazer. Obrigado a vocês, Pé, Stela, Mário, Rubens, Agenor, Sueli, Mané, Denise, André, Wilson, Renatinho, Claudia, Demétrio, Newton, Farnésio, Mirta, Beth, Lucia, Walter, Suzana, Mônica, Mutsuko, Laís, Zé. E também aos meus pais e irmãos que sempre tiveram juntos comigo nesta caminhada.

E finalmente, a este povo brasileiro que, cada vez mais sofrido, insiste em viver, ou melhor, sobreviver, e que, mesmo sem saber, foi responsável pelo auxílio financeiro a mim repassado pela CAPES-PICD.

Índice

Introdução e Sumário 2

1 Sobre o modelo spin-boson 4

1.1 Obtenção e aplicações da hamiltoniana do modelo 4

1.2 Integrabilidade e diagonalização da hamiltoniana do modelo spin-boson 11

1.3 Estatística para os níveis de energia do modelo spin-boson 14

2 Sobre o limite semiclássico do modelo spin-boson 21

2.1 Introdução ao limite semiclássico do modelo spin-boson 21

2.2 Relação entre o operador de fase de Pegg-Barnett e o de Bialynicki-Birula 23

2.3 As equações de movimento na representação de fase de Bialynicki-Birula. O problema de Autler-Townnes. 28

2.4 Estatísticas de níveis de energia para o modelo spin-boson na aproximação de fase 31

2.5 Estados coerentes e a função de Husimi 41

3 Sobre o limite clássico do modelo spin-boson 46

3.1 Obtenção das equações clássicas e o caso integrável 46

3.2 O caso não integrável e polarização nula 55

A Demonstração da não unitariedade do operador $e\hat{x}p(\imath\Phi)$ 62

B Sobre as autofunções da hamiltoniana do modelo spin-boson na

representação de Bargmann-Segal 64

C Demonstração do Teorema 3.1 67

D Construção da função de Weierstrass para o modelo spin-boson e soluções para $\epsilon \simeq 0$ 70

E Sobre a construção das seções de Poincaré para o modelo spin-boson 74

Referências 76

Introdução e Sumário

Esta tese tem como objetivo apresentar algumas propriedades dinâmicas do modelo spin-boson — modelo quântico descrevendo a interação entre átomos de dois níveis e fótons — principalmente no limite semiclássico e clássico. Entendemos por limite semiclássico aquele em que muitos fótons interagem com um único átomo, e clássico aquele em que N átomos, $N \to \infty$, estão presentes (neste limite todos os operadores tendem a variáveis clássicas). Poderíamos também pensar num outro tipo de limite, aquele em que o número de níveis dos átomos se torna grande (chamaremos este caso de grandes valores de spin), conservando o campo eletromagnético quantizado. Porém, isto não conduz a uma dinâmica interessante, e sim a um modelo solúvel do tipo Curie-Weiss [48], e não trataremos aqui deste assunto.

No primeiro capítulo, apresentamos o modelo spin-boson, a sua dedução da eletrodinâmica quântica e algumas aplicações. Aqui, apresentamos como nossa contribuição a introdução de um operador unitário que permite tridiagonalizar a hamiltoniana do modelo, facilitando a obtenção das autoenergias numericamente. Com isto, nos foi possível estudar as estatísticas NND e Δ_3 [29] para este modelo, seja no caso da aproximação de "onda-girante", ou com o termo "contra-onda-girante".

No segundo capítulo estudamos o limite semiclássico, apresentando o operador de fase introduzido por Bialynicki-Birula [36] e tornando este formalismo rigoroso, através dos operadores introduzidos por Pegg e Barnett [39]. Também estudamos as estatísticas NND e Δ_3 neste caso, e uma discussão entre as semelhanças e diferenças deste limite e o caso original é feita.

No terceiro capítulo o caso clássico é estudado. A obtenção das equações clássicas

é feita de forma rigorosa, utilizando o método introduzido por Hepp e Lieb [50]. Aqui um resultado interessante é o fato de que o comportamento caótico no sistema se manifestará para polarização $\simeq 0$ e quase nenhum fóton presente no caso inicial mesmo para perturbações muito pequenas do caso integrável, mostrando que esta situação física e realizável experimentalmente é muito instável.

Os programas númericos utilizados nas integrações das equações e diagonalização das matrizes foram as rotinas do IMSL [60] e o programa para obtenção das estatísticas NND e Δ_3 foi gentilmente cedido por C.H. Lewenkopf e M.C. Nemes.

Uma discussão mais resumida deste trabalho, principalmente dos dois primeiros capítulos, pode ser encontrada nas referências [32,49,59]. Tentamos fazer um texto o mais completo possível. Entretanto, no caso de alguns conceitos aqui empregados remetemos às referências, as quais esperamos que venham a esclarecer melhor alguns pontos que nossa pretensão de sermos suscintos tenha deixado obscuros.

Capítulo 1

Sobre o modelo spin-boson

1.1 Obtenção e aplicações da hamiltoniana do modelo

O modelo spin-boson é um modelo quântico que descreve a interação de N átomos com o campo eletromagnético quantizado. Embora este último possa conter infinitos modos normais de vibração, vamos considerá-lo, por simplicidade, com um único modo apenas. Também consideraremos que apenas átomos com 2 níveis atômicos fazem parte deste sistema.

Este modelo teve sua origem no trabalho de Dicke [1], em que ele apresenta a hamiltoniana:

$$H_D = \omega a^\dagger a + \omega_o \sum_{j=1}^{N} S_j^z + \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} \left(S_j^+ a + S_j^- a^\dagger \right) \tag{1.1}$$

a qual descreve a emissão de radiação de um gás devido a transição entre dois níveis de energia dos átomos do mesmo. Aqui, definimos a hamiltoniana (1.1) sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}_N = \mathcal{H}_N^S \otimes \mathcal{F}$, onde

$$\mathcal{H}_N^S = \otimes_{j=1}^{N} \mathcal{C}_j^2$$

é o espaço de Hilbert para o conjunto dos N átomos de 2 níveis, e $\mathcal{F}$ é o espaço de Fock. Os operadores S_j^+ e S_j^- são definidos por:

$$S_j^{\pm} = \left(S_j^x \pm \imath S_j^y\right)/2 \tag{1.2}$$

onde S_j^x, S_j^y, S_j^z são operadores de spin agindo sobre $\mathcal{C}_j^2$, o espaço de Hilbert relativo ao j-ésimo átomo, os quais satisfazem as relações usuais de comutação:

$$\left[S_j^x, S_j^y\right] = \imath S_j^z \tag{1.3}$$

e permutações cíclicas. a e $a^\dagger$ são respectivamente os operadores de aniquilação e criação de fótons agindo sobre $\mathcal{F}$, com:

$$\left[a, a^\dagger\right] = 1. \tag{1.4}$$

As frequências ω e ω_o ($\hbar = 1$) e o acoplamento λ são constantes reais e positivas.

Entretanto, a hamiltoniana (1.1) não é a mais geral que pode ser obtida considerando a interação de átomos de 2 níveis e fótons. Nela está faltando termos como os chamados de "contra-ondas girantes" (counter rotating-waves), os quais são responsáveis pela presença de comportamento caótico no análogo clássico do modelo. Para calcularmos uma hamiltoniana mais geral análoga a (1.1), vamos partir da hamiltoniana fundamental não relativística que descreve o comportamento de N partículas de massa m e carga q na presença de um campo eletromagnético [2-3]:

$$H = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2m}\left(\vec{\mathbf{p}} - \frac{q}{c}\vec{\mathbf{A}}\right)^2 + H_C + H_{RAD} \tag{1.5}$$

onde H_C corresponde ao termo de interação coulombiana entre as partículas e H_{RAD} a energia do campo eletromagnético:

$$H_{RAD} = \frac{1}{2}\int \left(\vec{\mathbf{E}}_T^2 + \vec{\mathbf{B}}^2\right) d^3\mathbf{x} \tag{1.6}$$

(lembrando que apenas a componente transversal $\vec{\mathbf{E}}_T$ do campo elétrico contribue para a energia da radiação, sendo que a energia associada ao campo elétrico longitudinal $\vec{\mathbf{E}}_L$ já está representada por H_C, ou seja, é a energia da interação eletrostática instantânea entre as partículas). Temos também que $\vec{\mathbf{A}}_j = \vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}_j, t)$ denota o vetor potencial na posição $\vec{\mathbf{r}}_j$ da j-ésima partícula no instante t, e $\vec{\mathbf{p}}_j$ o momento canonicamente conjugado à coordenada $\vec{\mathbf{r}}_j$.

Assim sendo, podemos escrever (1.5) como:

$$H = H_{AT} + H_{RAD} + H_I \tag{1.7}$$

onde:

$$H_{AT} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\vec{\mathbf{p}}_j^2}{2m} + H_C \tag{1.8}$$

$$H_I = \sum_{j=1}^{N} \left\{ -\frac{q}{2mc} \left(\vec{\mathbf{p}}_j . \vec{\mathbf{A}}_j + \vec{\mathbf{A}}_j . \vec{\mathbf{p}}_j \right) + \frac{q^2}{2mc^2} \vec{\mathbf{A}}_j^2 \right\} \tag{1.9}$$

e H_{RAD} é dado por (1.6). Se usarmos o gauge de Coulomb ($\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{A}} = 0$) podemos escrever (1.9) como:

$$H_I = \sum_{j=1}^{N} \left\{ -\frac{q}{mc} \vec{\mathbf{p}}_j . \vec{\mathbf{A}}_j + \frac{q^2}{2mc^2} \vec{\mathbf{A}}_j^2 \right\} \tag{1.10}$$

Vamos então agora nos restringir especificamente ao caso de N átomos de 2 níveis interagindo com um único modo de um campo eletromagnético. Ainda as seguintes considerações serão feitas:

a) ausência de interação direta entre os átomos: eles apenas acoplarão com o campo de radiação, ou seja, $H_C \simeq 0$. No caso da teoria do laser, a qual é uma das principais aplicações da hamiltoniana em questão, isto pode ser justificado pelo fato de que a densidade de átomos ativos é da ordem da de um gás altamente rarefeito [4].

b) exclusão do termo $\vec{\mathbf{A}}^2$: van Hemmen [5] demonstrou que a exclusão deste termo de (1.10), embora cause modificações na termodinâmica do sistema, não acarreta absolutamente nenhuma alteração na dinâmica do mesmo.

c) aproximação de dipolo elétrico: isto é justificado pelo fato que o comprimento de onda do campo considerado é muito maior que a dimensão do átomo. Isto implicará que os termos do tipo $\exp(\pm \imath \vec{\mathbf{k}}.\vec{\mathbf{r}}_j)$ que aparecem nas expressões para os campos ou para o potencial vetor sejam substituidos por 1, ou seja, $\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{A}}(t)$ somente. Também, por simplicidade, consideraremos o campo elétrico linearmente polarizado numa direção x.

Explicitadas estas considerações, podemos calcular os 3 termos que compõem a hamiltoniana (1.7). Começaremos por H_{AT} (1.8). Como estamos considerando

átomos de 2 níveis, podemos definir uma base completa para um único átomo dada por:

$$\mathcal{C}^2 = \{|+\rangle, |-\rangle\}$$

com energias respectivamente iguais a E_+ e E_-. Portanto podemos escrever:

$$H_{AT_j} = \frac{\vec{\mathbf{p}}_j^2}{2m} =$$

$$= (|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|)\frac{\vec{\mathbf{p}}_j^2}{2m}(|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|) =$$

$$= E_+|+\rangle\langle+| + E_-|-\rangle\langle-| \tag{1.11}$$

Se deslocarmos a escala de energia, de tal modo que $E_+ = -E_- = \frac{1}{2}\omega_o$, teremos:

$$H_{AT_j} = \frac{1}{2}\omega_o(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|) = \frac{1}{2}\omega_o\sigma_j^z = \omega_o S_j^z \tag{1.12}$$

onde σ_j^x, σ_j^y, σ_j^z são as matrizes de Pauli.

Generalizando para N átomos, temos automaticamente:

$$H_{AT} = \omega_o \sum_{j=1}^{N} S_j^z \tag{1.13}$$

Considerando agora o termo H_{RAD} (1.6), escrevemos o campo elétrico transversal $\vec{\mathbf{E}}_T$ e o campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ em termos dos operadores de criação e aniquilação do único modo de vibração ω presente no campo e obtemos [2-3]:

$$H_{RAD} = \omega a^\dagger a \tag{1.14}$$

E finalmente, o último termo H_I (1.10) pode ser escrito como:

$$H_{I_j} = -\frac{q}{mc}p_{x_j}A_{x_j} =$$

$$= -\frac{q}{mc}(|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|)\,p_{x_j}\,(|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|)\,A_{x_j} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{V}}\left[a^\dagger(\mu|+\rangle\langle-| + \gamma|-\rangle\langle+|) + a(\lambda|+\rangle\langle-| + \epsilon|-\rangle\langle+|)\right] \tag{1.15}$$

sendo que na última passagem escrevemos o operador $\vec{\mathbf{A}}_{x_j}$ em termos dos operadores de criação e aniquilação $a^\dagger$, a e usamos o fato de que o operador $\vec{\mathbf{p}}$ aplicado a um auto-estado da energia muda a sua paridade, devendo então mapear $|+\rangle \rightarrow |-\rangle$ e vice-versa. μ, γ, λ e ϵ são constantes de proporcionalidade e V é o volume da cavidade na qual se encontram os átomos (o termo $\frac{1}{\sqrt{V}}$, que provém da expressão do vetor potencial, foi deixado explícito porque nos será útil mais tarde). E deveremos ter $\mu = \epsilon^*$ e $\gamma = \lambda^*$ devido ao fato de que H deve ser hermitiana. $()^*$ denota complexo conjugado.

Lembrando de que os operadores $|+\rangle\langle-|$ e $|-\rangle\langle+|$ podem ser identificados respectivamente com os operadores S_j^+ e S_j^- definidos por (1.2), podemos então reescrever H (1.7) como:

$$H = \omega a^\dagger a + \omega_o S^z + \frac{\lambda}{\sqrt{N}}\left(aS^+ + a^\dagger S^-\right) + \frac{\epsilon}{\sqrt{N}}\left(a^\dagger S^+ + aS^-\right) \tag{1.16}$$

onde definimos:

$$S^k = \sum_{j=1}^{N} S_j^k \tag{1.17}$$

com k denotando x, y, z, $+$, $-$. Também usamos em (1.16) o fato de que λ e ϵ são reais, e foi assumido que o volume da cavidade V é proporcional ao número de partícular N nela contidas. Devemos também lembrar que a hamiltoniana H dada por (1.16) pode ser vista como uma perturbação de Kato [54] do operador $N = a^\dagger a$, sendo então limitada inferiormente e com espectro discreto [55].

Observem que H (1.16) difere da hamiltoniana de Dicke (1.1) pelo termo conhecido como "contra-onda-girante" (counter-rotating-waves). Esta denominação tem sua origem nos trabalhos de Rabi [6] e Autler-Townes [7], os quais descrevem um átomo de dois níveis (spin) na presença de um campo elétrico (ou magnético) oscilante. No primeiro, apenas os termos de ondas girantes são obtidos na hamiltoniana de interação, e podemos pensar no campo "girando" no mesmo sentido do movimento de precessão da partícula. O trabalho de Autler-Townes, entretanto, leva

em conta o termo que descreve um campo "girando" no sentido oposto ao do movimento de precessão – o "contra-onda-girante". A sua contribuição para a energia do sistema é muito pequena quando o campo é fraco e com frequência ω próxima a ω_o. Porém, intensificando-se o campo, torna-se significativa e necessária a sua inclusão na hamiltoniana.

Cabe aqui ressaltar uma diferença fundamental entre os sistemas descritos em [6-7] e o modelo spin-boson dado por (1.16). Os primeiros não levam em consideração a reação da interação partícula-campo no campo, o que nos obriga a supor que um reservatório do mesmo está presente para suprir possíveis perdas de energia do campo interagente. O modelo spin-boson, entretanto, leva em consideração este efeito através do termo H_{RAD} (1.14), computando a energia da radiação como parte da energia total do sistema, fazendo com que o mesmo seja uma sistema fechado. Voltaremos à esta discussão nos capítulos seguintes.

Podemos encontrar na literatura uma grande variedade de aplicações da hamiltoniana H (1.16) do modelo spin-boson. Além dos trabalhos já citados, podemos encontrá-la em problemas relacionados à física da matéria condensada [8-10] nos quais H pode ser interpretada como descrevendo uma partícula (elétron ou impureza) acoplada a uma rede de fónons, ou descrevendo problemas relacionados a tunelamentos quânticos macroscópicos [11-12], onde os átomos de 2 níveis são relacionados a 2 mínimos de potencial separados por uma barreira. Ainda na ótica quântica, não podemos deixar de citar o trabalho de Jaynes e Cummings [13], os quais deram importantes resultados relativos a integrabilidade de (1.16) para $\epsilon = 0$. E mais recentemente, diversos trabalhos sobre propriedades dinâmicas deste sistema dentro de uma visão relacionada a caologia quântica vêm sendo feitos [14-16, e referências ali encontradas], e é dentro deste espírito que prosseguirá este trabalho, mostrando resultados que – esperamos – possam ajudar a compreender melhor a estrutura dinâmica desse sistema, tanto quântica como classicamente.

Ainda sobre o modelo spin-boson, vamo-nos reter ao fato de que muitos autores utilizam o seguinte termo para representar a interação entre o campo e os átomos de dois níveis [17-18,4]:

$$H_I' = g\vec{\mathrm{E}}.\vec{\mathrm{r}} \tag{1.18}$$

onde $\vec{\mathrm{E}}$ representa o campo elétrico e $\vec{\mathrm{r}}$ a posição da partícula. g é uma constante de proporcionalidade. O emprego desse termo gera algumas controvérsias, principalmente no que diz respeito às equações resultantes dos limites clássicos e semiclássicos do sistema, mas que fácilmente podem ser entendidas e resolvidas. Primeiramente, Power e Zienau [19] mostraram que H_I (1.10) está relacionada com uma hamiltoniana escrita em termos de expansões em multipolos dos campos pela transformação unitária:

$$U = \exp\left(\imath q\vec{\mathrm{r}}.\vec{\mathrm{A}}\right) \tag{1.19}$$

a qual na aproximação de dipolo elétrico corresponde exatamente a hamiltoniana H_I' dada por (1.18). Uma formulação elegante em termos de teorias de gauge pode ser encontrada no artigo de Schlicher et al [20], que nos revela o porquê de se ter encontrado resultados diferentes dos valores esperados de operadores para os dois tipos de interação, $\vec{\mathrm{p}}.\vec{\mathrm{A}}$ ou $\vec{\mathrm{E}}.\vec{\mathrm{r}}$, principalmente quando se empregava teoria de perturbação. O problema reside na escolha correta ou inconveniente da base de autofunções da energia. Mais ainda, Ackerhalt e Milonni [21] mostraram que para átomos de dois níveis, o campo elétrico $\vec{\mathrm{E}}$ em (1.18) representa na verdade o vetor deslocamento elétrico $\vec{\mathrm{D}}$, e devido ao fato de que o vetor polarização é uma função delta neste caso, a sua contribuição para a hamiltoniana não afetará a dinâmica do sistema. Isto vem mostrar que as equações clássicas resultantes deste sistema são aquelas apresentadas por Belobrov et al [22], as quais foram deduzidas precisamente do modelo spin-boson por Cibils et al [23], e não aquelas apresentadas por vários autores, inclusive os próprios Ackerhalt e Milonni [24]. Voltaremos a falar destas equações no capítulo 3.

1.2 Integrabilidade e diagonalização da hamiltoniana do modelo spin-boson

A definição do conceito de integrabilidade em sistemas quânticos ainda é uma questão muito controvertida, mostrando um dos principais exemplos de uma propriedade clássica que não pode ser transferida para a mecânica quântica sem ambiguidade.

Uma das mais interessantes formulações neste sentido é aquela que trata a mecânica quântica como um sistema clássico definido sobre um espaço de fase de dimensão infinita [25]. Neste formalismo encontramos que a definição clássica de integrabilidade implica na diagonalização da hamiltoniana quântica do sistema. Entretanto a formulação mais comum de integrabilidade quântica é aquela que transporta a formulação algébrica dos parênteses de Poisson da mecânica clássica para a álgebra de comutatores da mecânica quântica, ou seja, se o sistema clássico é integrável e possui N quantidades conservadas, o análogo quântico também o será se for possível encontrar N operadores que comutem entre si. O interessante é que esta formulação não conserva a correspondência entre sistemas integráveis clássicos e quânticos. Existem exemplos de sistemas clássicos integráveis cujos análogos quânticos não o são. Um exemplo famoso é o do peão assimétrico num campo gravitacional, resolvido classicamente por Sonia Kowalevskaja, e para o qual não se encontrou uma segunda integral quântica [26]. O inverso também é verdade, e como exemplo temos o modelo spin-boson, que para $\epsilon \neq 0$ possui dois operadores que comutam entre si, mas cujo análogo clássico é caótico, como veremos neste trabalho.

Tudo isto nos coloca diante da possibilidade de que o conceito de integrabilidade exista, ou melhor, seja útil, somente no limite clássico, não cabendo tal conceito dentro do contexto quântico, pelo menos as definições de integrabilidade quântica discutidas acima. Porém, para efeito de discussão, vamos continuar usando o formalismo dado pela álgebra de comutadores para definir um sistema quântico integrável no decorrer deste trabalho.

O modelo spin-boson para $\epsilon = 0$, ou seja, na aproximação de onda girante, é integrável tanto quântica [13] como classicamente [27]. Porém, quando o termo "contra-onda-girante" é incluído ($\epsilon \neq 0$), as quantidades que eram conservadas no caso clássico deixam de ser, acontecendo o análogo no caso quântico. Entretanto, Graham e Höhnerbach [14] introduziram um novo operador que comuta com H (1.16) para qualquer valor de ϵ. Isto faz com que o modelo spin-boson seja "integrável" quanticamente. A ánalise que se segue é uma descrição de como conseguir o espectro de H (1.16) de uma forma simples e elegante, apesar do cálculo númerico ainda ser necessário, usando o operador introduzido por Graham e Höhnerbach e adaptando uma transformação introduzida por Shore e Sander [28], o que permite obter uma hamiltoniana H' na forma tridiagonal e simétrica, trivialmente diagonalizável numericamente.

Primeiro, vamos reescrever (1.16) para $N = 1$, redefinindo o parâmetro ϵ:

$$H = \omega a^\dagger a + \omega_o S^z + \lambda \left[\left(S^+ a + S^- a^\dagger \right) + \epsilon \left(S^+ a^\dagger + S^- a \right) \right] \tag{1.20}$$

A seguir, definimos o operador R sobre o espaço de Fock $\mathcal{F}$, dado por:

$$R = (-1)^{a^\dagger a} \tag{1.21}$$

o qual satisfaz:

$$R^2 = 1 \tag{1.22}$$

$$\{R, a\} = \left\{R, a^\dagger\right\} = 0 \tag{1.23}$$

onde $\{,\}$ denota os usuais anticomutadores. Utilizando R, definimos um operador paridade dado por:

$$P = 2S^z R \tag{1.24}$$

definido sobre $\mathcal{C}^2 \otimes \mathcal{F}$, que, a menos de um fator, é o mesmo que foi introduzido em [14]. Através de um cálculo simples e direto, é fácil verificar que, para qualquer

valor dos parâmetros em (1.20), teremos:

$$[H, P] = 0 \tag{1.25}$$

Agora introduzimos o operador unitário U, definido sobre $\mathcal{C}^2 \otimes \mathcal{F}$, o qual será essencial no nosso objetivo de diagonalizar H:

$$U = S^z (1 + R) + \imath S^y (1 - R) \tag{1.26}$$

Fazendo uma transformação unitária sobre H, encontraremos H' dado por:

$$H' = UH'U^\dagger =$$

$$= \omega a^\dagger a + \omega_o S^z R + \frac{\lambda}{4}(1+\epsilon)\left(a + a^\dagger\right) + \frac{\lambda}{2}(1-\epsilon) S^z R \left(a - a^\dagger\right) \tag{1.27}$$

que comutará com o operador paridade transformado:

$$P' = UPU^\dagger = 2S^z \tag{1.28}$$

Observem a forma simples adquirida por P', o qual divide o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_1$ em dois subspaços com autovalores distintos para P', ou seja, os subespaços:

$$\mathcal{H}_1^+ = \{|+\rangle \otimes |n\rangle\} \tag{1.29}$$

$$\mathcal{H}_1^- = \{|-\rangle \otimes |n\rangle\} \tag{1.30}$$

os quais possuem autovalores de P' respectivamente iguais a $+1$ e -1. Podemos então obter a hamiltoniana H' em forma matricial escolhendo um dos subespaços acima, eliminando assim a degenerescência dos autovalores de energia, além de obter uma matriz muito simples para representar H'.

Assim procedendo, chegaremos a seguinte representação para H' no subespaço $\mathcal{H}_1^+$:

$$H'_{n,n} = \omega n + \frac{1}{2}\omega_o (-1)^n \tag{1.31}$$

$$H'_{n,n+1} = H'_{n+1,n} = \frac{\lambda}{4}(1+\epsilon)\sqrt{n+1} - \frac{\lambda}{4}(1-\epsilon)\sqrt{n+1}(-1)^{n+1} \tag{1.32}$$

onde $n \geq 0$.

Usando a matriz na forma tridiagonal e simétrica obtida acima, podemos numericamente diagonalizá-la truncando-a para uma valor de n_{MAX} finito. Devido a simplicidade de H', pudemos diagonalizar matrizes da ordem de 10^3, assegurando-nos sempre da convergência dos primeiros 1000 níveis de energia.

Para finalizar esta seção, duas observações devem ser feitas aqui: a primeira é que todo o procedimento descrito acima vale apenas para $N = 1$, ou seja, spin total $S = \frac{1}{2}$, pois usamos as propriedades das matrizes de Pauli na dedução de U. A segunda é que, embora tenhamos eliminado as degenerescências no cálculo das autoenergias escolhendo um subespaço de $\mathcal{H}$ com valor definido do único operador que comuta com H para $\epsilon \neq 0$, para $\epsilon = 0$ isto não é verdade. É sabido que um segundo operador comuta com H neste caso [27], podendo acontecer de $\mathcal{H}_1^+$ ou $\mathcal{H}_1^-$ não serem desprovidos de simetria. Entretanto, com os resultados obtidos no ítem seguinte, veremos que o procedimento acima também é correto para $\epsilon = 0$, já que há uma transição suave das estatísticas obtidas no limite $\epsilon \to 0$.

1.3 Estatística para os níveis de energia do modelo spin-boson

Nos últimos anos encontrou-se uma certa relação entre o conceito de integrabilidade clássica e certas estatísticas para os níveis de energia permitidos quanticamente. Entre elas, talvez a mais conhecida seja a de espaçamento de níveis vizinhos (NND – nearest-neighbour distribution) a qual se conjectura ser uma função do tipo Poisson para sistemas cujos análogos clássicos sejam integráveis ou do tipo Wigner ou GOE (Gaussian Orthogonal Ensemble) para os caóticos [29].

Graham [30] e Kús [31] calcularam a estatística NND para o modelo spin-boson para $\epsilon = 1$. O primeiro encontrou, usando $N = 9$, um comportamento para a

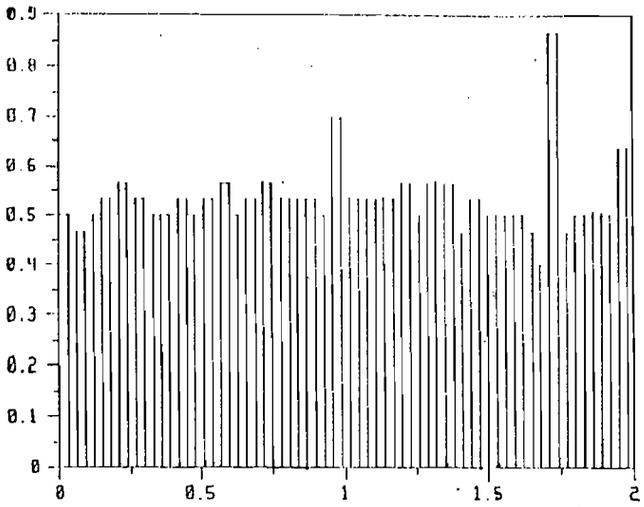

Fig. 1.1.a- Distribuição NND para o modelo spin-boson com $\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$ e $\epsilon = 0.0$ ($S = \frac{1}{2}$).

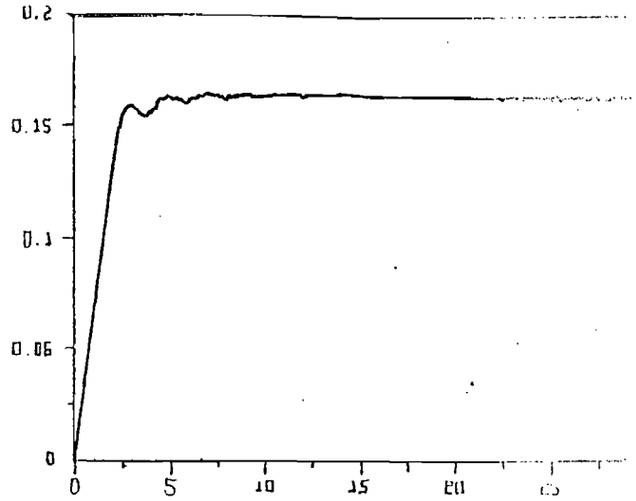

Fig. 1.1.b- Distribuição Δ_3 para o modelo spin-boson com $\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$ e $\epsilon = 0.0$ ($S = \frac{1}{2}$).

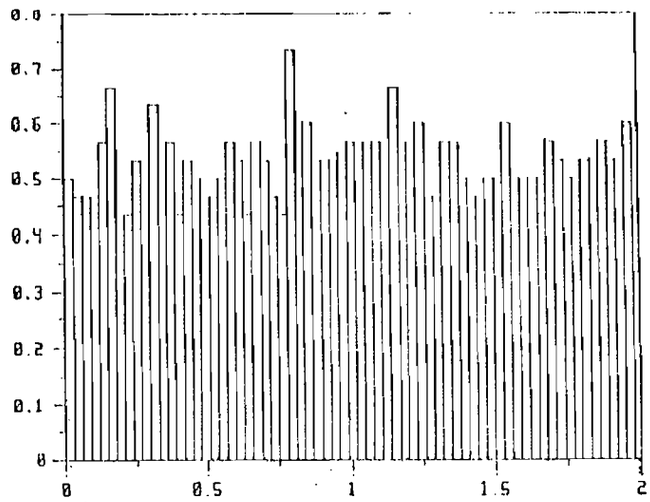

Fig. 1.2.a- Distribuição NND para o modelo spin-boson com $\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$ e $\epsilon = 0.1$ ($S = \frac{1}{2}$).

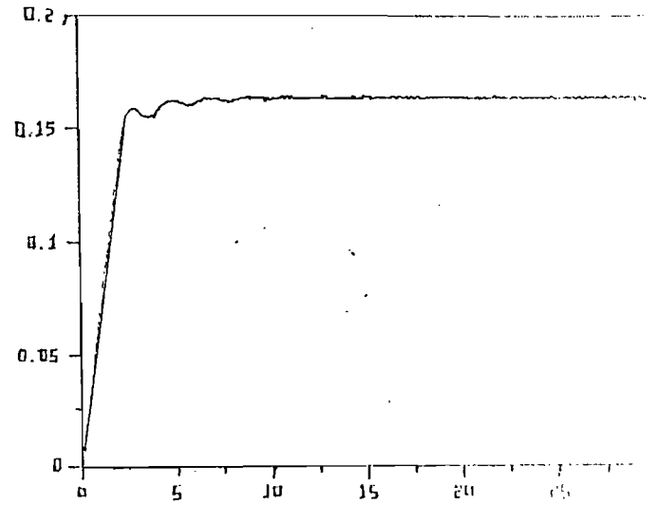

Fig. 1.2.b- Distribuição Δ_3 para o modelo spin-boson com $\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$ e $\epsilon = 0.1$ ($S = \frac{1}{2}$).

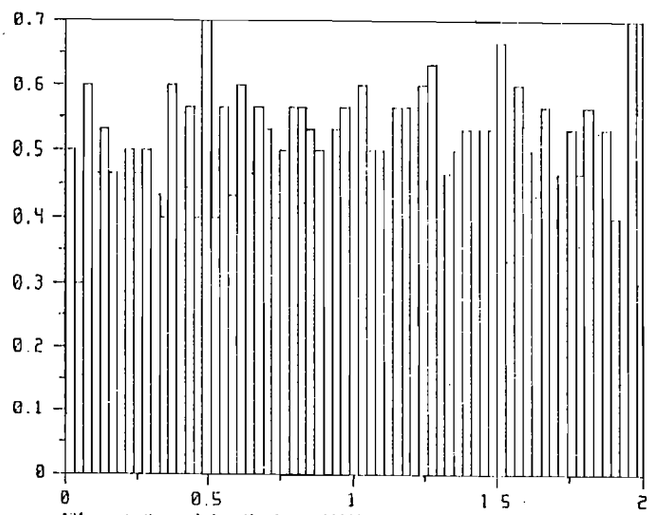

Fig. 1.3.a- Distribuição NND para o modelo spin-boson com $\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$ e $\epsilon = 0.2$ ($S = \frac{1}{2}$).

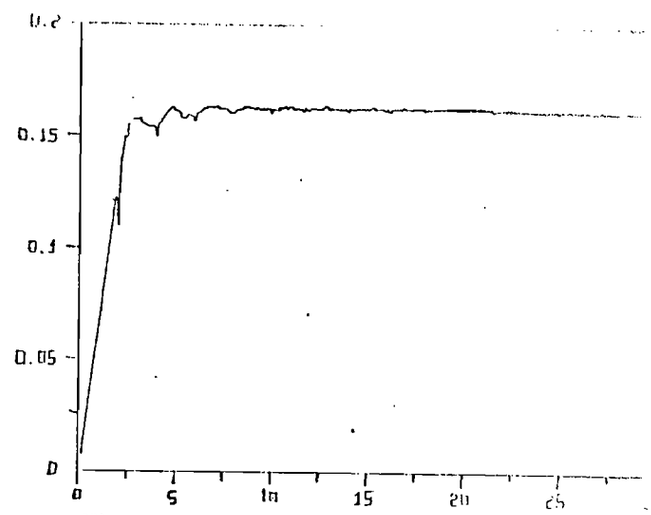

Fig. 1.3.b- Distribuição Δ_3 para o modelo spin-boson com $\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$ e $\epsilon = 0.2$ ($S = \frac{1}{2}$).

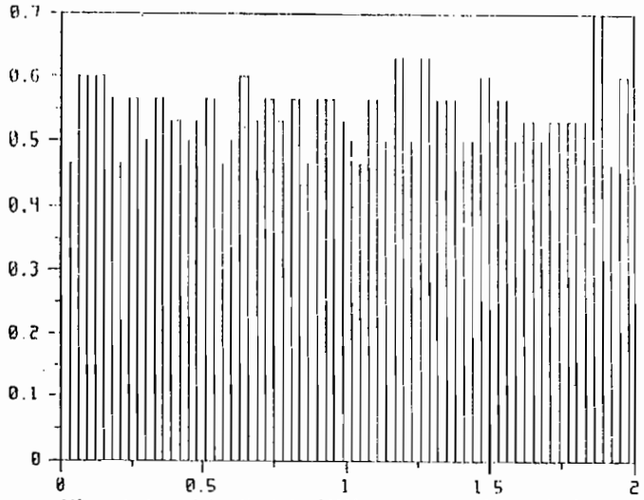

Fig. 1.4.a- Distribuição NND para o modelo spin-boson com $\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$ e $\epsilon = 0.3$ ($S = \frac{1}{2}$).

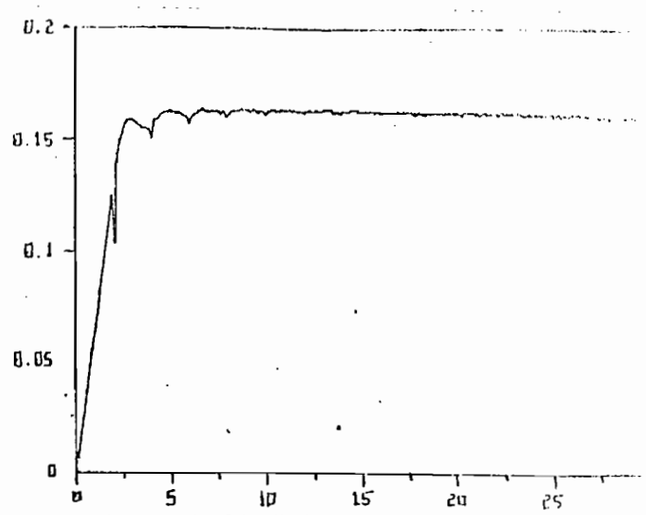

Fig. 1.4.b- Distribuição Δ_3 para o modelo spin-boson com $\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$ e $\epsilon = 0.3$ ($S = \frac{1}{2}$).

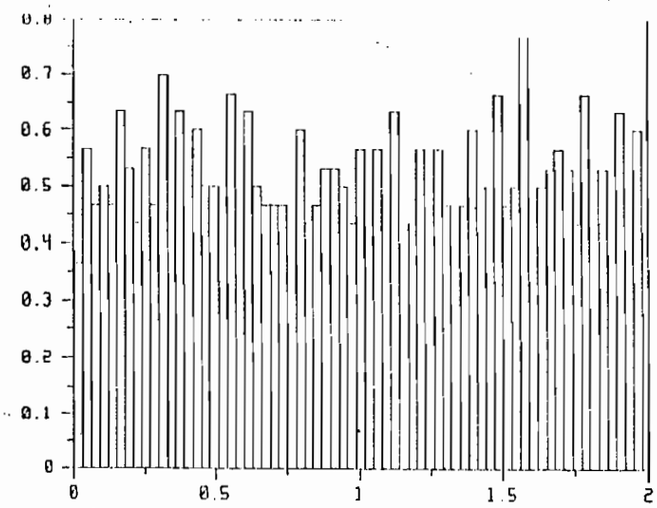

Fig. 1.5.a- Distribuição NND para o modelo spin-boson com $\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$ e $\epsilon = 0.4$ ($S = \frac{1}{2}$).

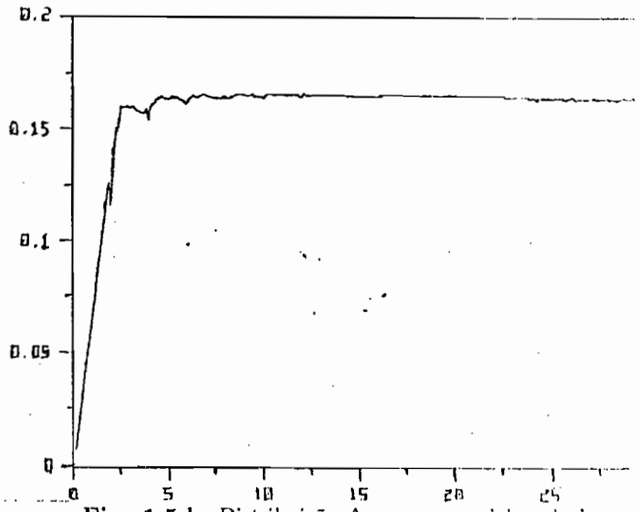

Fig. 1.5.b- Distribuição Δ_3 para o modelo spin-boson com $\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$ e $\epsilon = 0.4$ ($S = \frac{1}{2}$).

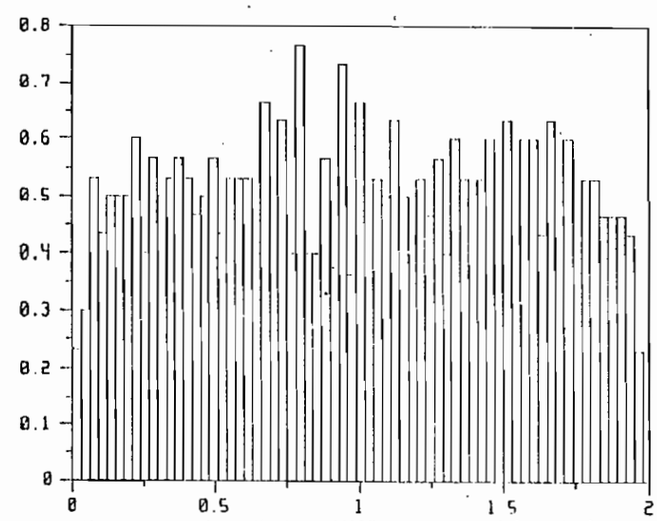

Fig. 1.6.a- Distribuição NND para o modelo spin-boson com $\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$ e $\epsilon = 0.5$ ($S = \frac{1}{2}$).

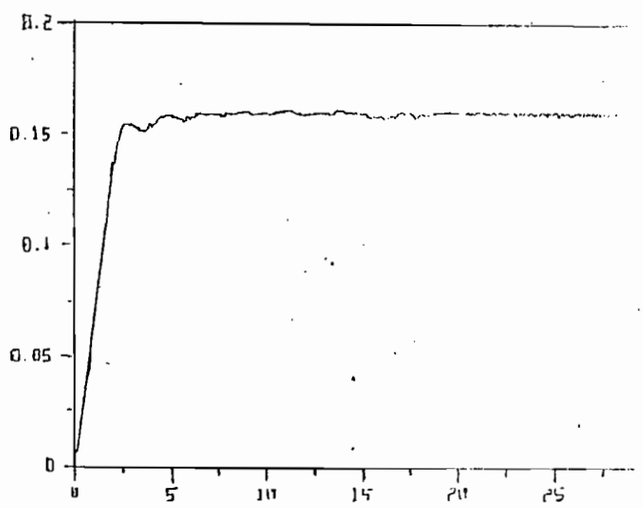

Fig. 1.6.b- Distribuição Δ_3 para o modelo spin-boson com $\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$ e $\epsilon = 0.5$ ($S = \frac{1}{2}$).

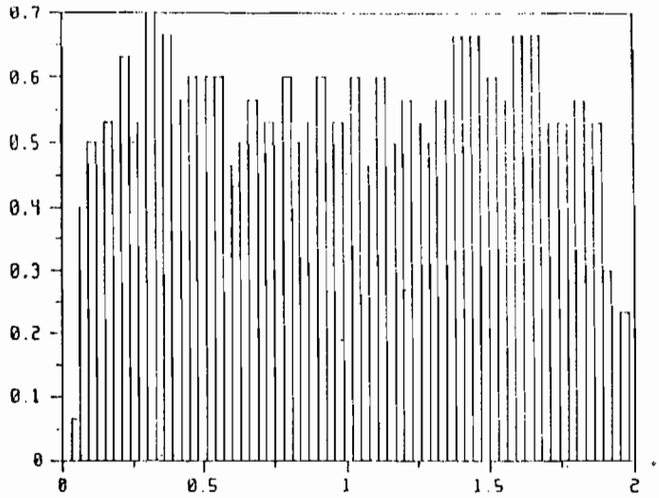

Fig. 1.7.a- Distribuição NND para o modelo spin-boson com $\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$ e $\epsilon = 0.6$ ($S = \frac{1}{2}$).

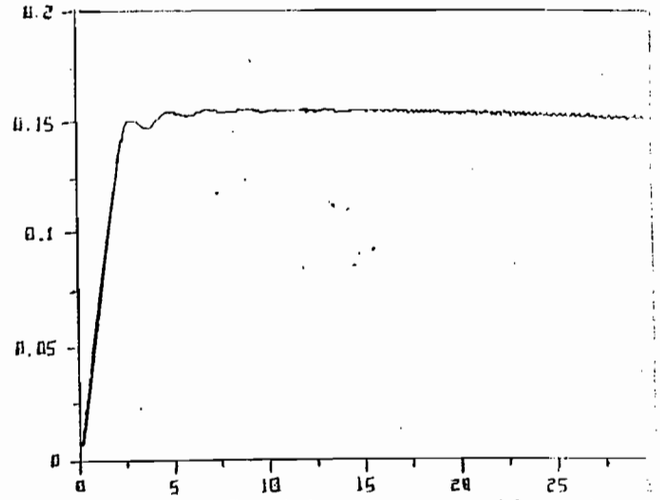

Fig. 1.7.b- Distribuição Δ_3 para o modelo spin-boson com $\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$ e $\epsilon = 0.6$ ($S = \frac{1}{2}$).

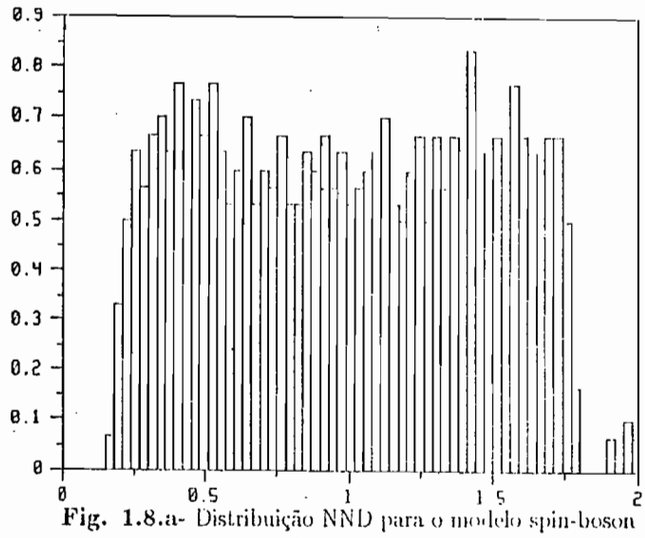

Fig. 1.8.a- Distribuição NND para o modelo spin-boson com $\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$ e $\epsilon = 0.7$ ($S = \frac{1}{2}$).

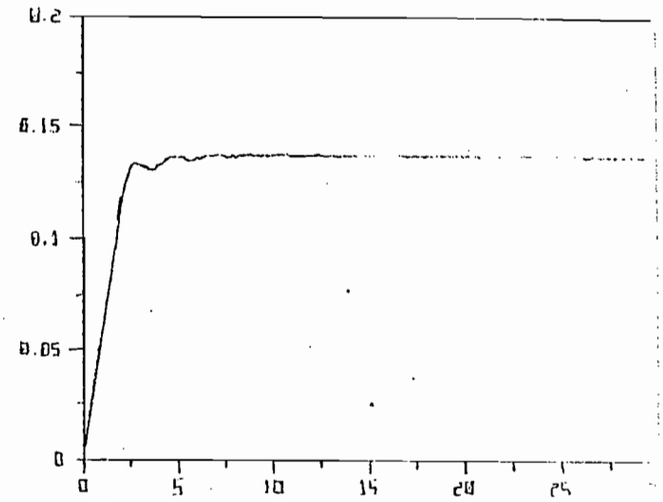

Fig. 1.8.b- Distribuição Δ_3 para o modelo spin-boson com $\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$ e $\epsilon = 0.7$ ($S = \frac{1}{2}$).

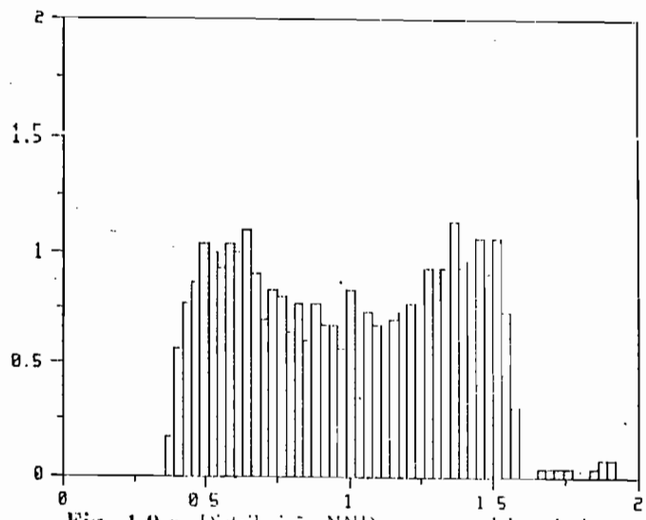

Fig. 1.9.a- Distribuição NND para o modelo spin-boson com $\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$ e $\epsilon = 0.8$ ($S = \frac{1}{2}$).

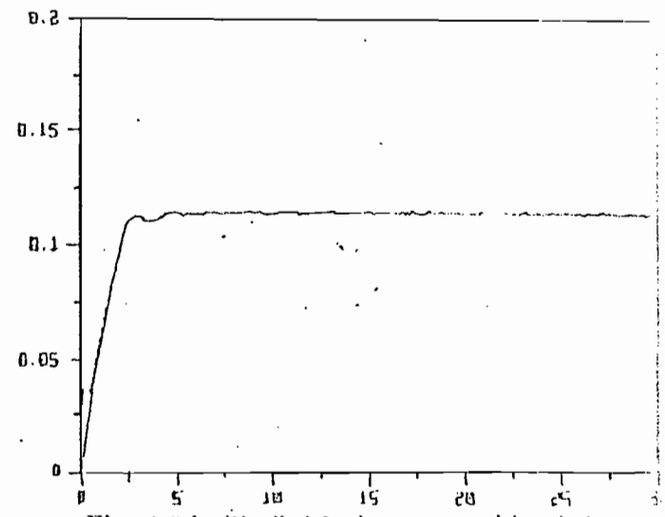

Fig. 1.9.b- Distribuição Δ_3 para o modelo spin-boson com $\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$ e $\epsilon = 0.8$ ($S = \frac{1}{2}$).

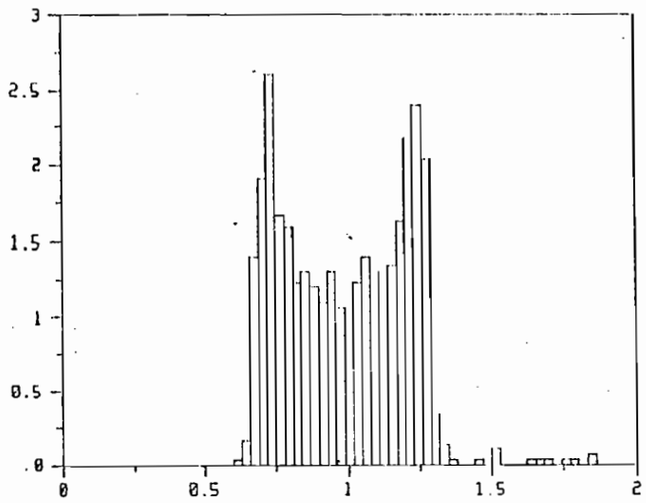

Fig. 1.10.a- Distribuição NND para o modelo spin-boson com $\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$ e $\epsilon = 0.9$ ($S = \frac{1}{2}$).

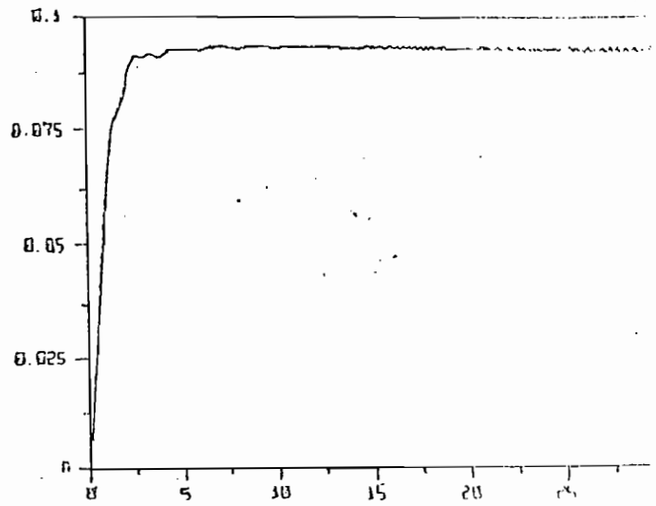

Fig. 1.10.b- Distribuição Δ_3 para o modelo spin-boson com $\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$ e $\epsilon = 0.9$ ($S = \frac{1}{2}$).

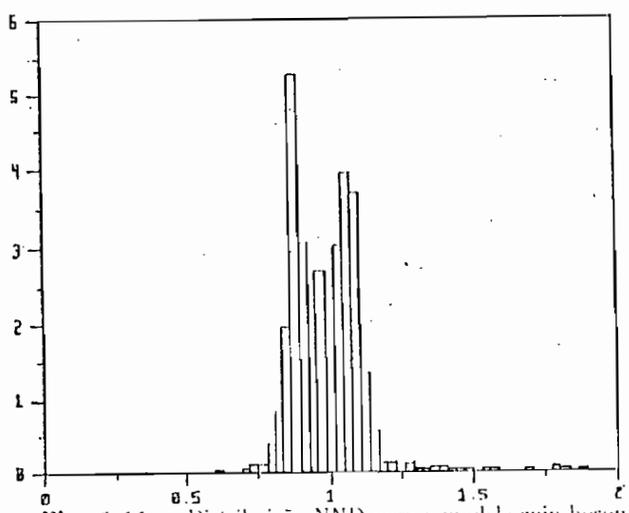

Fig. 1.11.a- Distribuição NND para o modelo spin-boson com $\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$ e $\epsilon = 1.0$ ($S = \frac{1}{2}$).

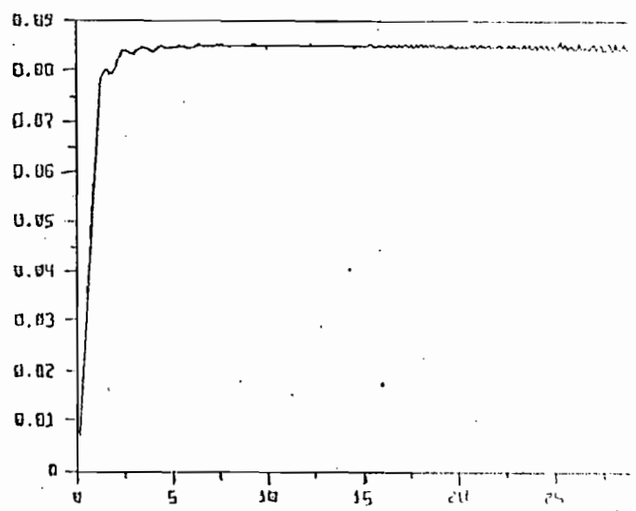

Fig. 1.11.b- Distribuição Δ_3 para o modelo spin-boson com $\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$ e $\epsilon = 1.0$ ($S = \frac{1}{2}$).

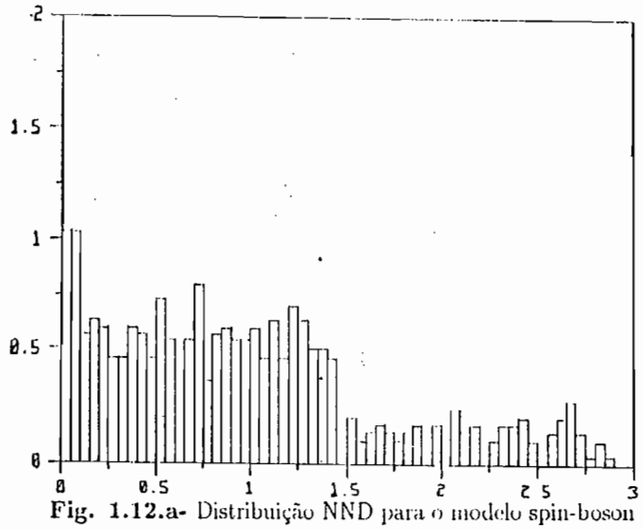

Fig. 1.12.a- Distribuição NND para o modelo spin-boson com spin $S = 1.0$ e $\epsilon = 0.0$ ($\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$).

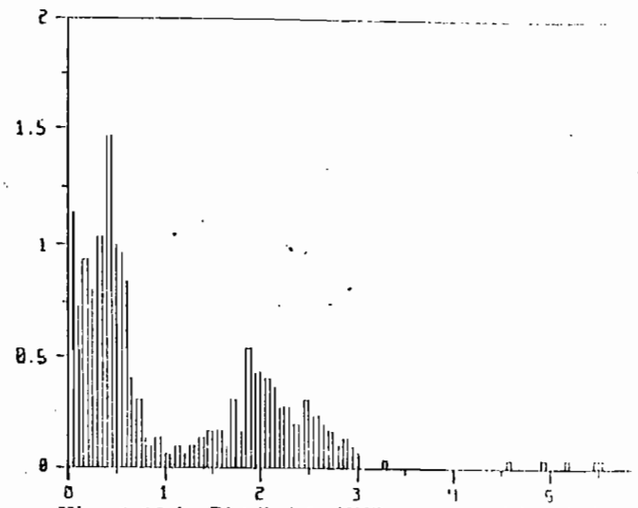

Fig. 1.12.b- Distribuição NND para o modelo spin-boson com spin $S = 1.0$ e $\epsilon = 1.0$ ($\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$).

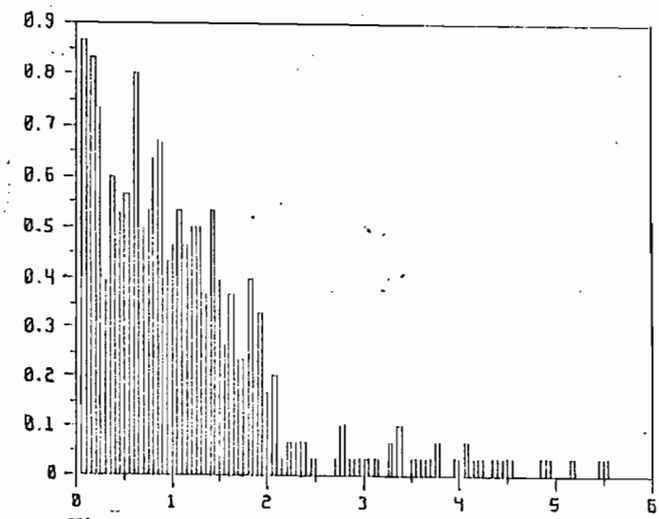

Fig. 1.13.a- Distribuição NND para o modelo spin-boson com spin $S = 2.0$ e $\epsilon = 0.0$ ($\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$).

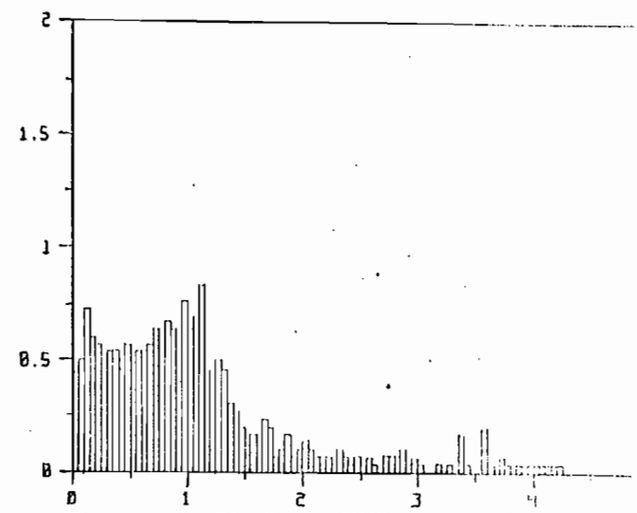

Fig. 1.13.b- Distribuição NND para o modelo spin-boson com spin $S = 2.0$ e $\epsilon = 1.0$ ($\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$).

distribuição NND do tipo GOE, compatível com o análogo clássico deste sistema para $\epsilon = 1$ segundo a conjectura de Bohigas [29]. No entanto, usando $N = 1$, Kús encontrou uma distribuição nada comum, nem Poisson nem GOE, mas do tipo "delta-peak", típica de um sistema de oscilador harmônico.

Para $N = 9$, ou equivalentemente, spin total $S = \frac{9}{2}$, foi encontrado [32] uma transição do tipo Poisson-Wigner(GOE) quando se varia ϵ na região $0 \leq \epsilon \leq 0.4$, mostrando que para spins grandes $\left(\geq \frac{9}{2}\right)$ a transição para a estatística NND é a esperada, já que o análogo clássico do modelo spin-boson é integravel para $\epsilon = 0$, deixando de ser para outros valores de ϵ.

Com os autovalores de H', calculados segundo a descrição dada em **1.2**, pudemos calcular as estatísticas NND e $\triangle_3$ [29] para $S = \frac{1}{2}$ $(\omega = \omega_o = \lambda = 1)$ e os resultados são aqui apresentados. Observem que para $\epsilon = 0$ (**Fig. 1.1.a**), a distribuição NND é aproximadamente uniforme, se concentrando lentamente em torno de 1 conforme varia o valor ϵ, até se tornar um "delta-peak" para $\epsilon = 1$ (**Fig 1.11.a**), em acordo com os resultados de Graham [30] e Kús [31]. Uma outra característica dos resultados é o fato de todas as estatísticas $\triangle_3$ (**Fig. 1.1.b→Fig. 1.11.b**) se saturarem num determinado ponto, comportamento típico de oscilador harmônico. Entretanto, o valor de $\triangle_3$ no ponto de saturação é diferente de $\frac{1}{12}$, como acontece para o oscilador harmônico, exceto para $\epsilon = 1$, concordando novamente com a análise feita por Kús [31] para este valor do parâmetro ϵ.

Apresentamos ainda algumas estatísticas NND para outros valores do spin S (**Fig. 1.12.a→Fig. 1 13.b**), mostrando realmente que estas estatísticas tendem a Poisson e GOE, respectivamente para $\epsilon = 0$ e $\epsilon = 1$, conforme S aumenta seu valor (usamos aqui aproximadamente 300 níveis de energia do sistema, já que o formalismo descrito na seção anterior não pode ser aplicado para $S \neq \frac{1}{2}$, dificultando assim a diagonalização numérica de H' para valores grandes de n_{MAX}).

Deixaremos para o capítulo seguinte uma discussão mais detalhada dos resultados aqui obtidos, pois lá apresentaremos estas mesmas estatísitcas, só que no limite semiclássico do modelo, podendo então fazer uma análise mais completa e comparativa destes resultados.

Capítulo 2

Sobre o limite semiclássico do modelo spin-boson

2.1 Introdução ao limite semiclássico do modelo spin-boson

Nos últimos anos, experiências têm sido realizadas envolvendo a interação de um ou poucos átomos com um campo eletromagnético, inclusive sobre o micromaser [33-34], o qual consiste de um único átomo de dois níveis interagindo com o campo eletromagnético de um único modo. Entretanto, nestas experiências o campo tem propriedades clássicas, sendo então de grande interesse conhecer com mais profundidade o comportamento da hamiltoniana do modelo spin-boson no limite em que, mantendo os operadores de spin quantizados, façamos o número de fótons tender a uma quantidade muito grande, porém finita. Este limite é o que chamaremos de limite semiclássico do modelo spin-boson.

Muitos trabalhos têm sido publicados neste campo usando os estados coerentes como forma de introduzir o limite acima (ver seção **2.5**), e importantes resultados têm sido obtidos. Um dos mais interessantes talvez seja os "revivals" do comportamento oscilatório da probabilidade de ocupação de um dos dois níveis de energia do átomo [14-15,35], os quais surgem quando $\epsilon = 0$, desaparecendo para outros valores desta constante.

Um outro instrumental para se estudar o limite semiclássico do modelo foi apresentado por Bialynicki-Birula e Bialynicka-Birula [36], os quais introduziram uma representação para os operadores a, $a^\dagger$ em termos da fase de um feixe de luz intenso. Esta representação permite uma expansão destes operadores em torno de um número n_o muito grande de fótons. Com isto, podemos obter uma hamiltoniana do modelo spin-boson semiclássica, por simples substituição dos referidos operadores pelas respectivas expansões.

Seguindo [36], introduzimos uma representação para os autoestados $|n\rangle$ do operador número $a^\dagger a$ em termos das funções de onda de uma variável auxiliar φ. Então fazemos um "shift" dos autovalores pela constante n_o, adotando a seguinte regra de correspondência entre os vetores de estado e as autofunções:

$$|n_o + m\rangle \rightarrow |m\rangle\,, \quad \langle\varphi|m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(\imath m\varphi) \tag{2.1}$$

A correspondente representação dos operadores de criação e aniquilação é dada por:

$$a = \exp(-\imath\varphi)\sqrt{n_o + p_\varphi} \tag{2.2}$$

$$a^\dagger = \sqrt{n_o + p_\varphi}\ \exp(\imath\varphi) \tag{2.3}$$

$$a^\dagger a = n_o + p_\varphi \tag{2.4}$$

onde $p_\varphi = -\imath\frac{d.}{d\varphi}$ age sobre o espaço de Hilbert $L^2(0, 2\pi)$.

Esta representação remonta-nos a descrição original do campo eletromagnético quantizado feita por Dirac [37], o qual postulou a existência de um operador de fase hermitiano. Entretanto, muitas dificuldades surgiram com este conceito, e em particular, Susskind e Glogower [38] mostraram que tal operador de fase $\hat{\Phi}$ não é auto-adjunto, ou, alternativamente, $\exp(\imath\hat{\Phi})$ não é unitário. Pegg e Barnett [39] resolveram este e outros problemas de uma maneira muito elegante. Na próxima

seção faremos uma discussão detalhada deste assunto, e mostraremos que a representação de Byalinicki-Birula pode ser formulada de maneira correta utilizando a teoria de Pegg e Barnett, justificando então o uso desta representação no decorrer deste capítulo.

2.2 Relação entre o operador de fase de Pegg-Barnett e o de Bialynicki-Birula

Um dos principais problemas dentro do formalismo da mecânica quântica reside na tentativa de construção de um operador de fase $\hat{\Phi}_{\vec{k},\alpha}$ associado a um dado vetor de onda $\vec{k}$ e polarização α, tal que o observável correspondente é a fase de uma onda plana. Espera-se que tal operador assuma um papel importante em teorias envolvendo o campo eletromagnético no limite semiclássico.

Uma definição natural do operador de fase [40] pode ser dada por:

$$a_{\vec{k},\alpha} = \exp\left(\imath\hat{\Phi}_{\vec{k},\alpha}\right)\hat{N}^{\frac{1}{2}}_{\vec{k},\alpha} \tag{2.5}$$

$$a^{\dagger}_{\vec{k},\alpha} = \hat{N}^{\frac{1}{2}}_{\vec{k},\alpha}\exp\left(-\imath\hat{\Phi}_{\vec{k},\alpha}\right) \tag{2.6}$$

onde $a_{\vec{k},\alpha}$ e $a^{\dagger}_{\vec{k},\alpha}$ denotam respectivamente os operadores de aniquilação e criação do $\vec{k}$-ésimo modo e polarização α do campo eletromagnético, e $\hat{N}_{\vec{k},\alpha}$ o operador número de fótons (omitiremos a partir de agora os subscritos $\vec{k}$ e α!).

Em termos de $\hat{\Phi}$ e $\hat{N}$, a relação de comutação para a e $a^{\dagger}$ pode ser escrita como:

$$\left[\exp\left(\imath\hat{\Phi}\right), \hat{N}\right] = \exp\left(\imath\hat{\Phi}\right) \tag{2.7}$$

a qual é satisfeita se:

$$\left[\hat{N}, \hat{\Phi}\right] = \imath \tag{2.8}$$

o que nos leva a "relação de incerteza":

$$\triangle \hat{N} \triangle \hat{\Phi} \geq 1 \tag{2.9}$$

equivalente a uma relação momento-coordenada para um feixe de luz.

Porém isto não é rigoroso e, como já comentamos, o operador de fase acima definido não é auto-adjunto [38]. O problema está relacionado ao fato de que o operador $\hat{N}$ é limitado inferiormente, e uma demonstração da não unitariedade de $\exp(\imath\hat{\Phi})$ pode ser encontrada no apêndice A, a qual é baseada em [40]. Numa linguagem matemática mais moderna (ver [41] para a notação), temos que se:

$$a = U\hat{N}^{\frac{1}{2}} \tag{2.10}$$

U não é unitário porque $Ker\, a = Ker\, \hat{N}^{\frac{1}{2}} = \{|\,0\rangle\} \neq 0$, onde $|\,0\rangle$ é o estado de vácuo.

Muitas soluções a este problema têm sido propostas [40], com diferentes definições dos operadores de fases, mas com propriedades físicas não naturais. Como exemplo, os valores esperados de $\cos^2\hat{\Phi}$ e $\sin^2\hat{\Phi}$ não são iguais a $\frac{1}{2}$, dificultando então a interpretação destes estados como sendo de fase randômica ou aleatória. Este problema foi resolvido recentemente por Pegg e Barnett [39] numa maneira elegante e fisicamente satisfatória. Em seu trabalho, eles definem operadores agindo sobre um espaço de Hilbert de dimensão $(s+1)$, com s tendendo a infinito depois que quantidades como valores médios e variâncias são calculadas como funções de s. A seguir, apresentamos um resumo desta teoria.

Seja $\mathcal{F}_{s+1}$ o subespaço de $\mathcal{F}$ gerado pelos autoestados do operador número $\hat{N}$ $\{|0\rangle, |1\rangle, ..., |s\rangle\}$. Define-se, então, os estados $|\theta\rangle$ por:

$$|\theta\rangle = (s+1)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{s} \exp(\imath n\theta)\, |n\rangle \tag{2.11}$$

Seja também:

$$\theta_m = \theta_o + \frac{2m\pi}{s+1}, \quad m = 0, ..., s \tag{2.12}$$

com $\theta_o \in [0, 2\pi)$ sendo um ângulo arbitrário. Então os estados $\{|\theta_m\rangle, m = 0, ..., s\}$ formam uma base ortonormal de $\mathcal{F}_{s+1}$, e o operador de fase $e\hat{x}p(\imath\Phi)$ é definido por [42]:

$$e\hat{x}p(\imath\Phi)\ |\theta_m\rangle = \exp(\imath\theta_m)\ |\theta_m\rangle, \quad m = 0, ..., s \tag{2.13}$$

Pode-se mostrar que, em $\mathcal{F}_{s+1}$, o operador de fase acima definido é dado por:

$$e\hat{x}p(\imath\Phi) = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 2| + ... + |s-1\rangle\langle s| + \exp[\imath(s+1)\theta_o]\ |s\rangle\langle 0| \tag{2.14}$$

no qual vemos claramente que a unitariedade do mesmo é dada pela imposição da condição de contorno cíclica:

$$e\hat{x}p(\imath\Phi)\ |0\rangle = \exp[\imath(s+1)\theta_o]\ |s\rangle \tag{2.15}$$

O operador acima tem todas as boas propriedades associadas com o operador de fase [39]. Em especial:

$$\left\langle n|c\hat{o}s^2\Phi|n\right\rangle = \left\langle n|s\hat{e}n^2\Phi|n\right\rangle = \frac{1}{2} \tag{2.16}$$

Também podemos definir operadores aproximados de aniquilação e criação neste subespaço, os quais denotaremos respectivamente por a_{PB} e $a^\dagger_{PB}$, dados por:

$$a_{PB} = e\hat{x}p(\imath\Phi)\,\hat{N}^{\frac{1}{2}} \tag{2.17}$$

$$a^\dagger_{PB} = \hat{N}^{\frac{1}{2}}\,e\hat{x}p(-\imath\Phi) \tag{2.18}$$

onde

$$e\hat{x}p(-\imath\Phi) = [e\hat{x}p(\imath\Phi)]^\dagger = [e\hat{x}p(\imath\Phi)]^{-1}. \tag{2.19}$$

Segue-se que $\left[a_{PB}, a^\dagger_{PB}\right] \neq 1$, mas:

$$\left[a_{PB}, a_{PB}^{\dagger}\right] = 1 - (s+1)\,|s\rangle\,\langle s| \tag{2.20}$$

ou, o que é equivalente:

$$\left[e\hat{x}p(\imath\Phi), \hat{N}\right] = e\hat{x}p(\imath\Phi) - (s+1)\exp\left[\imath(s+1)\theta_o\right]\,|s\rangle\,\langle 0| \tag{2.21}$$

Observem por (2.20) que a ação de a_{PB}, $a_{PB}^{\dagger}$ coincide com a dos operadores de aniquilação e criação convencionais se nosso estado de interesse é "fisicamente acessível" [39], isto é, ortogonal aos estados altamente excitados $|n\rangle$ com $n \simeq s$ ($n = s$ é suficiente). E para s suficientemente grande, estados semiclássicos do campo de radiação são incluídos, sendo que estados coerentes foram tratados usando o formalismo acima [42], e resultados de acordo com o princípio da correspondência foram obtidos.

A adaptação deste método ao contexto semiclássico usando os operadores de Bialynicki-Birula (2.2-3) é imediata. Definimos $\mathcal{F}_{2s+1}$ como um subespaço de $\mathcal{F}$ gerado por $\{|n_o - s\rangle, \ldots\ldots, |n_o + s\rangle\}$, $s \leq n_o$. Os estados de fase são agora definidos por:

$$|\gamma\rangle = (2s+1)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=n_o-s}^{n=n_o+s} \exp(\imath n\gamma)\,|n\rangle \tag{2.22}$$

e sendo:

$$\gamma_m = \gamma_o + \frac{2m\pi}{2s+1}, \quad m = -s, \ldots, s \tag{2.23}$$

então $\{|\gamma_m\rangle, m = -s, \ldots, s\}$ forma uma base ortonormal para $\mathcal{F}_{2s+1}$, e podemos definir o operador de fase "semiclássico" $e\hat{x}p(\imath\Phi_{SC})$ de maneira análoga a (2.13), só que utilizando agora os estados $|\gamma_m\rangle$. A unitariedade de $e\hat{x}p(\imath\Phi_{SC})$ é garantida pelas condições de contorno cíclicas definidas por:

$$a^{\dagger}\,|n_o + s\rangle = \sqrt{n_o - s}\,\exp\left[-\imath(2s+1)\gamma_o\right]\,|n_o - s\rangle \tag{2.24}$$

$$a\,|n_o - s\rangle = \sqrt{n_o - s}\,\exp\left[\imath(2s+1)\gamma_o\right]\,|n_o + s\rangle\,. \tag{2.25}$$

E analogamente a (2.21), teremos sobre $\mathcal{F}_{2s+1}$:

$$\left[e\hat{x}p(\imath\Phi_{SC}), \hat{N}\right] = e\hat{x}p(\imath\Phi_{SC}) - (2s+1)\exp\left[\imath(2s+1)\gamma_o\right] |n_o + s\rangle \langle n_o - s| \ . \quad (2.26)$$

Finalmente, usando a representação na variável φ dada em (2.1), fazemos a seguinte identificação:

$$e\hat{x}p(\imath\Phi_{SC}) \rightarrow \exp(-\imath\varphi) \quad (2.27)$$

de tal modo que toda a teoria acima é aplicada aos operadores de fase (2.2-3) introduzidos por Bialynicki-Birula quando definidos sobre $\mathcal{F}_{2s+1}$.

No limite semiclássico, quando n_o é muito grande mas finito, poderemos nos restringir a um subespaço $\mathcal{F}_{2s_o+1}$, com $s_o \ll n_o$, $s_o < s$, o qual chamaremos de subespaço dos estados "físicamente acessíveis", estados estes agora obtidos a partir de $|n_o\rangle$. Neste subespaço teremos válidas as relações:

$$\exp(-\imath\varphi)(n_o + p_\varphi)\exp(\imath\varphi) - (n_o + p_\varphi) = 1 \quad (2.28)$$

ou

$$\left[a, a^\dagger\right] = 1 \quad (2.29)$$

onde os a, $a^\dagger$ em (2.29) são aqueles definidos em (2.2-3). Isto vem do fato que o último termo de (2.26) projeta em um estado ortogonal a $\mathcal{F}_{2s_o+1}$. Também neste subespaço podemos utilizar as expansões dadas em [36] para a e $a^\dagger$:

$$a = \sqrt{n_o}\exp(-\imath\varphi)\left[1 + \frac{p_\varphi}{n_o} + ...\right] \quad (2.30)$$

$$a^\dagger = \sqrt{n_o}\left[1 + \frac{p_\varphi}{n_o} + ...\right]\exp(\imath\varphi) \quad (2.31)$$

pois elas convergem fortemente em $\mathcal{F}_{2s_o+1}$, isto é, agindo sobre qualquer $\Psi \in \mathcal{F}_{2s_o+1}$, pois se $\Psi \in \mathcal{F}_{2s_o+1}$ então $\|p_\varphi\Psi\| \leq s_o\|\Psi\|$ e (2.30-31) convergirá. E como última observação, lembramos que estaremos sempre trabalhando em um espaço de dimensão finita, mesmo que arbitrariamente grande. Devido a isto, teremos sempre o espectro

discreto e finito, e a precisão das energias obtidas estará relacionada com a dimensão do espaço considerado $(2s_o + 1)$.

Portanto, o formalismo introduzido por Pegg e Barnett permite uma formulação precisa para os operadores de fase de Bialynicki-Birula, e poderemos utilizá-los sem mais reservas no decorrer deste trabalho.

2.3 As equações de movimento na representação de fase de Bialynicki-Birula. O problema de Autler-Townnes.

Nesta seção vamos nos restringir, por simplicidade, ao modelo spin-boson com $\epsilon = 1$, para o qual a hamiltoniana se torna:

$$H = \omega a^\dagger a + \omega_o S^z + \lambda S^x (a + a^\dagger) \tag{2.32}$$

Usando a expressão dada por (2.30-31) podemos escrever H na representação de fase, e no "limite $n_o \to \infty$" (compreenda-se por este limite o uso apenas do primeiro termo na expansão de a e $a^\dagger$, mas preservando a relação $a^\dagger a = n_o + p_\varphi$), teremos:

$$\tilde{H} = \omega(n_o + p_\varphi) + \omega o S^z + 2\lambda\sqrt{n_o} S^x \cos\varphi \tag{2.33}$$

As equações de movimento de Heisenberg para esta hamiltoniana são:

$$\dot{S}^x = \imath \left[\tilde{H}, S^x\right] = -\omega_o S^y \tag{2.34}$$

$$\dot{S}^y = \imath \left[\tilde{H}, S^y\right] = \omega_o S^x - 2\lambda\sqrt{n_o} S^z \cos\varphi \tag{2.35}$$

$$\dot{S}^z = \imath \left[\tilde{H}, S^z\right] = 2\lambda\sqrt{n_o} S^y \cos\varphi \tag{2.36}$$

$$\dot{\varphi} = \imath \left[\tilde{H}, \varphi\right] = \omega \tag{2.37}$$

$$\dot{p}_\varphi = \imath \left[\tilde{H}, p_\varphi\right] = 2\lambda\sqrt{n_o}S^x \sin\varphi \tag{2.38}$$

Notem que a equação para p_φ (2.38) contém um efeito de reação do átomo sobre o campo. Entretanto, este efeito não aparece para os operadores de aniquilação e criação na aproximação em primeira ordem:

$$a_1 = \sqrt{n_o}\ \exp(-\imath\varphi) \tag{2.39}$$

$$a_1^\dagger = \sqrt{n_o}\ \exp(\imath\varphi) \tag{2.40}$$

(o número em subscrito denotará, nesta seção, a ordem de aproximação que está sendo considerada!) para os quais as seguintes equações de movimento de Heisenberg são válidas se usarmos $\tilde{H}$ como hamiltoniana:

$$\dot{a}_1 = \imath \left[\tilde{H}, a_1\right] = -\imath\omega a_1 \tag{2.41}$$

$$\dot{a}_1^\dagger = \imath \left[\tilde{H}, a_1^\dagger\right] = \imath\omega a_1^\dagger \tag{2.42}$$

As equações (2.34-36) e (2.41-42) são exatamente as equações de Autler-Townes [7] correspondentes a hamiltoniana não autônoma:

$$H_{AT} = \omega_o S^z + 2\lambda\sqrt{n_o}S^x \cos\omega t \tag{2.43}$$

Elas correspondem a uma situação física realizável na qual o campo não sente o efeito de reação do átomo, e por ser uma situação realizável, é de interesse obter estas equações como um limite apropriado de um átomo interagindo com um campo quantizado. Entretanto, as equações (2.41-42) não podem ser consideradas corretas, pois na sua obtenção é imprescindível o termo p_φ em $\tilde{H}$. Porém, usando a aproximação em primeira ordem para a e $a^\dagger$, a hamiltoniana correta será:

$$H_1 = n_o + \omega o S^z + 2\lambda\sqrt{n_o}S^x \cos\varphi \tag{2.44}$$

e usando-a nas equações de Heisenberg não mais obteremos as equações (2.41-42).

Observem, entretanto, que na aproximação em segunda ordem para a e $a^\dagger$, o termo p_φ aparece na hamiltoniana. Mas se quisermos, baseado neste fato, conservarmos $\tilde{H}$ como a hamiltoniana do sistema, e usarmos:

$$a_2 = \sqrt{n_o}\ \exp(-\imath\varphi) + \frac{1}{2\sqrt{n_o}} \exp(-\imath\varphi)\, p_\varphi \tag{2.45}$$

$$a_2^\dagger = \sqrt{n_o}\ \exp(\imath\varphi) + \frac{1}{2\sqrt{n_o}} p_\varphi \exp(\imath\varphi) \tag{2.46}$$

obteremos:

$$\dot{a}_2 = \imath\ \left[\tilde{H}, a_2\right] = -\imath\omega a_2 + \lambda S^x \exp(-\imath\varphi) \sin\varphi \tag{2.47}$$

ou seja, o acoplamento entre o campo e o átomo, ou o efeito de reação, aparece.

Portanto, usando a representação de Bialynicki-Birula não é possível obter a equações de Autler-Townes de uma maneira correta partindo da hamiltoniana do modelo spin-boson. Mais ainda, estes resultados sugerem que as equações de Autler-Townes só serão obtidas de um sistema descrevendo a interação de átomos com o campo eletromagnético quantizado se este for um sistema aberto ou dissipativo. Entretanto, são apenas conjecturas.

Voltando a equação (2.47) podemos compará-la com a equação de movimento para o operador a sem aproximação:

$$\dot{a} = \imath\ [H, a] = -\imath\omega a - \imath\lambda S^x \tag{2.48}$$

e observamos que elas não concordam entre si. Porém, substituindo $\tilde{H}$ em (2.47) pela hamiltoniana expandida até ordem $n_o^{-\frac{1}{2}}$:

$$H_2 = n_o\omega + \omega p_\varphi + \omega_o S^z + 2\lambda\sqrt{n_o} S^x \cos\varphi + \frac{\lambda}{2\sqrt{n_o}} S^x \left[\exp(-\imath\varphi)\, p_\varphi + p_\varphi \exp(\imath\varphi)\right] \tag{2.49}$$

teremos:

$$\dot{a}_2 = \imath\ [H_2, a_2] = -\imath\omega a_2 - \imath\lambda S^x + O\left(n_o^{-1}\right) \tag{2.50}$$

a qual concorda exatamente com (2.48). H_2 também leva as seguintes equações de movimento para os demais operadores:

$$\dot{S}^x = \imath\ [H_2, S^x] = -\omega_o S^y \tag{2.51}$$

$$\dot{S}^y = \imath\ [H_2, S^y] = \omega_o S^x - \lambda S^x \left(a_2 + a_2^\dagger\right) \tag{2.52}$$

$$\dot{S}^z = \lambda S^y \left(a_2 + a_2^\dagger\right) \tag{2.53}$$

que também estão em total concordância com as equações de movimento obtidas de H (2.32). Mais ainda, teremos para os operadores φ e p_φ:

$$\dot{\varphi} = \imath\ [H_2, \varphi] = \omega + \frac{\lambda}{\sqrt{n_o}} S^x \cos\varphi \tag{2.54}$$

$$\dot{p}_\varphi = \imath\ [H_2, p_\varphi] = 2\lambda\sqrt{n_o} S^x \sin\varphi + \frac{\imath\lambda}{2\sqrt{n_o}} S^x \left[\exp\left(-\imath\varphi\right) p_\varphi - p_\varphi \exp\left(\imath\varphi\right)\right] \tag{2.55}$$

os quais mostram que o efeito de reação está sempre presente.

Portanto, vimos que a expansão em segunda ordem para H, a e $a^\dagger$ resulta em uma dinâmica consistente com o modelo original. E é esta expansão semiclássica que usaremos na seção seguinte para obter as estatísticas de níveis de energia do modelo spin-boson no limite semiclássico.

2.4 Estatísticas de níveis de energia para o modelo spin-boson na aproximação de fase

Primeiramente, vamos reescrever H_2 para valores de ϵ quaisquer:

$$H_2 = \omega(n_o + p_\varphi) + \omega_o S^z +$$
$$+\lambda \left\{ \left[S^+ \left(\sqrt{n_o} \exp(-\imath\varphi) + \frac{1}{2\sqrt{n_o}} \exp(-\imath\varphi) p_\varphi \right) + \right.\right.$$
$$\left. + S^- \left(\sqrt{n_o} \exp(\imath\varphi) + \frac{1}{2\sqrt{n_o}} p_\varphi \exp(\imath\varphi) \right) \right] +$$
$$+\epsilon \left[S^+ \left(\sqrt{n_o} \exp(\imath\varphi) + \frac{1}{2\sqrt{n_o}} p_\varphi \exp(\imath\varphi) \right) + \right.$$
$$\left.\left. + S^- \left(\sqrt{n_o} \exp(-\imath\varphi) + \frac{1}{2\sqrt{n_o}} \exp(-\imath\varphi) p_\varphi \right) \right] \right\} \tag{2.56}$$

e usando o operador U dado por (1.26) (só que agora $R = (-1)^{n_o + p_\varphi}$) podemos novamente tridiagonalizar H_2 usando o mesmo procedimento da seção **1.2**. O resultado será:

$$H_2' = \omega(n_o + p_\varphi) + \omega_o S^z R +$$
$$+\frac{\lambda}{2}(1+\epsilon)\sqrt{n_o} \cos\varphi + \frac{\lambda}{8\sqrt{n_o}}(1+\epsilon) \left[\exp(-\imath\varphi) p_\varphi + p_\varphi \exp(\imath\varphi) \right] +$$
$$+ \imath\lambda(\epsilon - 1)\sqrt{n_o} S^z R \sin\varphi + \frac{\lambda}{4\sqrt{n_o}}(1-\epsilon) S^z R \left[\exp(-\imath\varphi) p_\varphi - p_\varphi \exp(\imath\varphi) \right]. \tag{2.57}$$

Ressaltamos que a mesma forma para H_2' pode ser obtida da substituição de (2.45-46) diretamente em (1.27).

Devemos aqui fazer uma observação. Devido às condicões de contorno cíclicas (2.24-25) impostas sobre $\mathcal{F}_{2s+1}$, a hamiltoniana H_2' terá termos extras que não comutam com P' quando aplicada aos estados $|n_o + s\rangle$ e $|n_o - s\rangle$. Entretanto, esperamos que as condições de contorno não tenham influência em quantidades globais como a densidade de estados e as estatísticas de níveis de energia. Por isso, assumimos, nos cálculos númericos para a obtenção das auto-energias, condições de contorno livres expressas na forma:

$$a^\dagger |n_o + s\rangle = 0 \tag{2.58}$$

$$a\,|n_o - s\rangle = 0 \tag{2.59}$$

e para evitar algum efeito de borda que possa ocorrer , diagonalizamos matrizes correspondentes a $s \simeq 700$ e nos restringimos a um subespaço $\mathcal{F}_{2s_o+1}$ com $s_o = 500$. Este procedimento é coerente com toda a teoria exposta na seção **2.2.**

Apresentamos a seguir os resultados obtidos para as estatísticas NND e Δ_3 [29] para o modelo spin-boson na aproximação de fase. Usamos $n_o = 10^6$ e variamos ϵ de 0 até 1 ($\omega = \omega_o = \lambda = 1$). Com isto, podemos fazer uma discussão mais detalhada sobre os gráficos de seção **1.3**, comparando-os com os que aqui são apresentados (**Fig. 2.1.a→Fig. 2.11.b**).

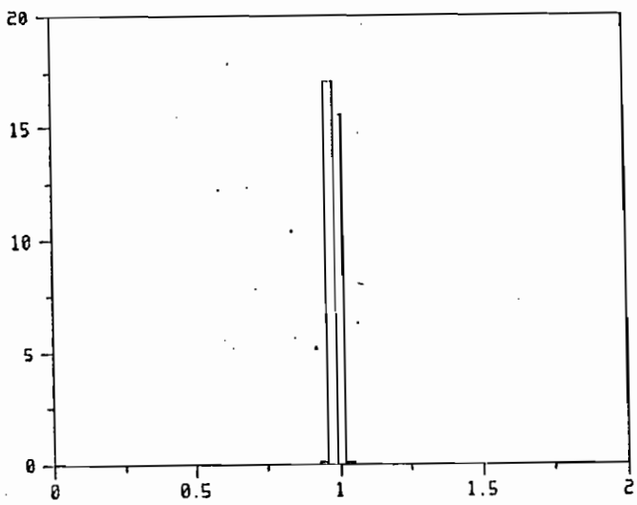

Fig. 2.1.a- Distribuição NND para o modelo spin-boson com aproximação de fase ($\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$) para $\epsilon = 0.0$ ($S = \frac{1}{2}$).

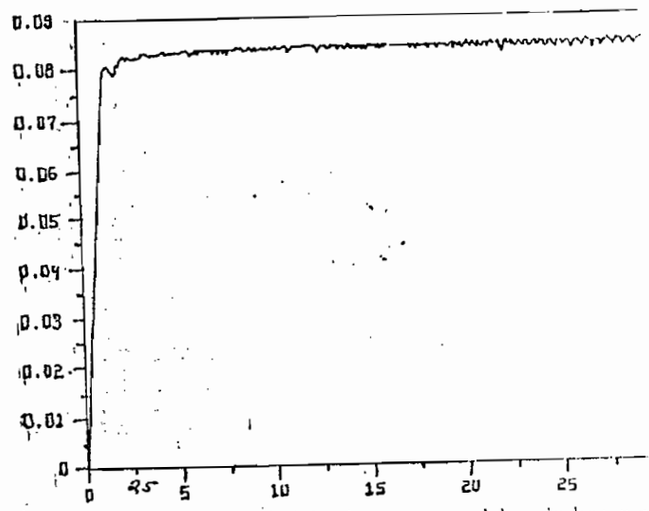

Fig. 2.1.b- Distribuição Δ_3 para o modelo spin-boson c aproximação de fase ($\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$) para $\epsilon = 0.0$ ($S = \frac{1}{2}$).

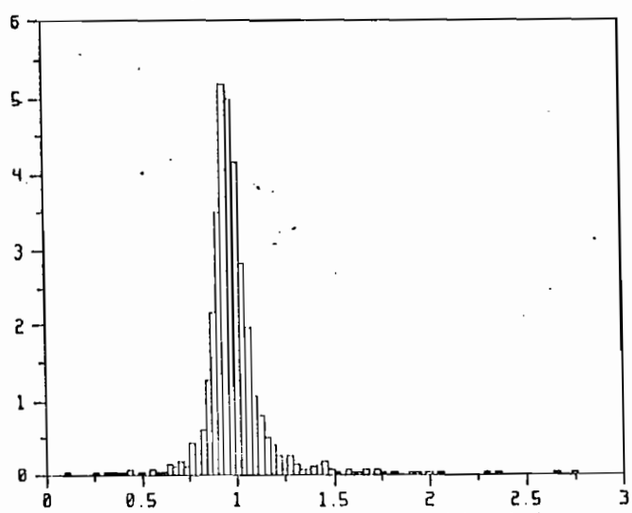

Fig. 2.2.a- Distribuição NND para o modelo spin-boson com aproximação de fase ($\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$) para $\epsilon = 0.1$ ($S = \frac{1}{2}$).

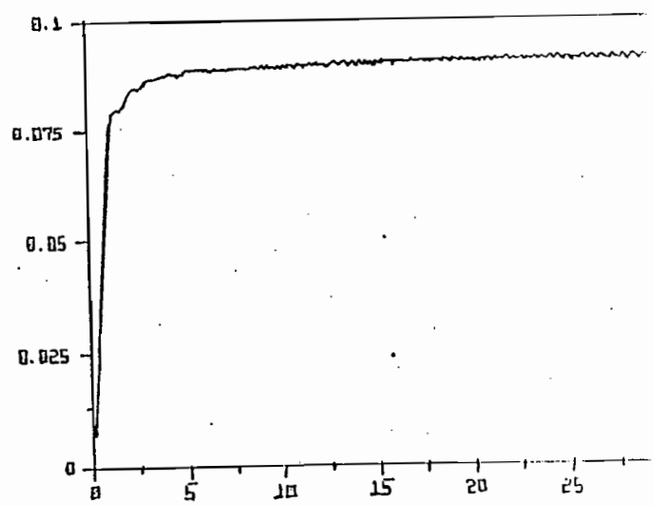

Fig. 2.2.b- Distribuição Δ_3 para o modelo spin-boson aproximação de fase ($\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$) para $\epsilon = 0.1$ ($S = \frac{1}{2}$).

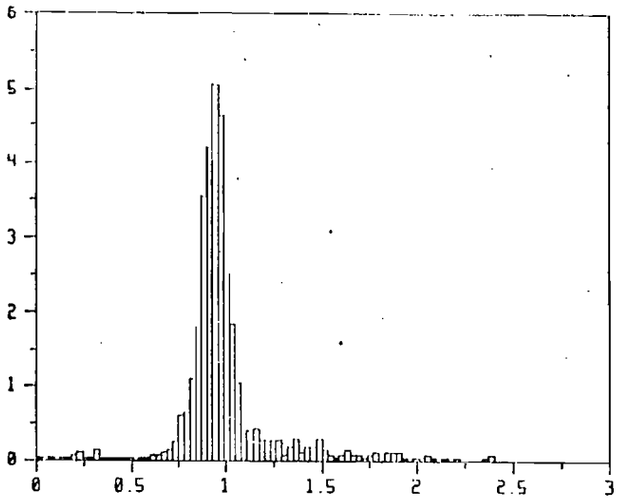

Fig. 2.3.a- Distribuição NND para o modelo spin-boson com aproximação de fase ($\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$) para $\epsilon = 0.2$ ($S = \frac{1}{2}$).

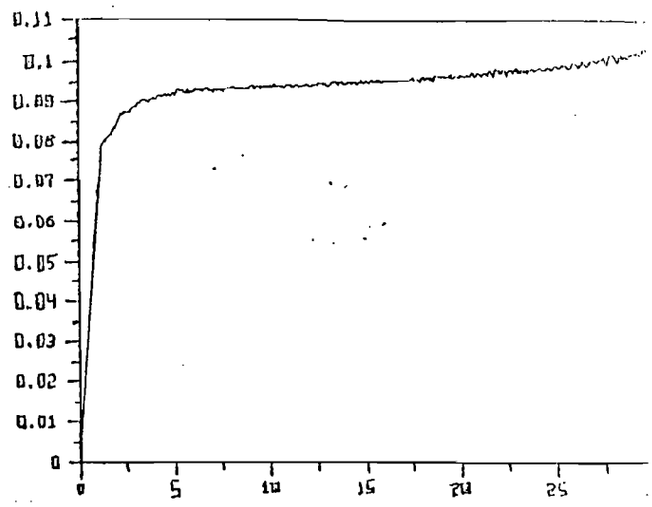

Fig. 2.3.b- Distribuição Δ_3 para o modelo spin-boson co aproximação de fase ($\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$) para $\epsilon = 0.2$ ($S = \frac{1}{2}$).

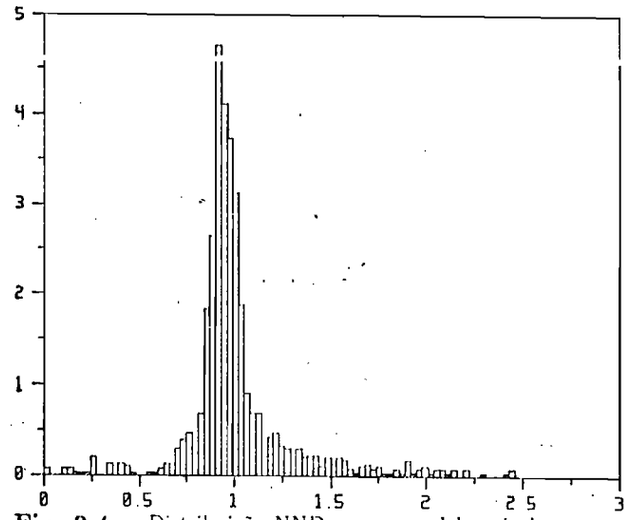

Fig. 2.4.a- Distribuição NND para o modelo spin-boson com aproximação de fase ($\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$) para $\epsilon = 0.3$ ($S = \frac{1}{2}$).

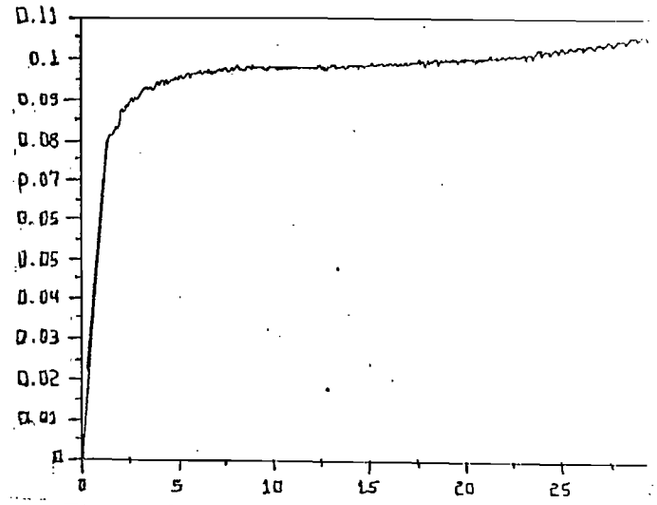

Fig. 2.4.b- Distribuição Δ_3 para o modelo spin-boson co aproximação de fase ($\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$) para $\epsilon = 0.3$ ($S = \frac{1}{2}$).

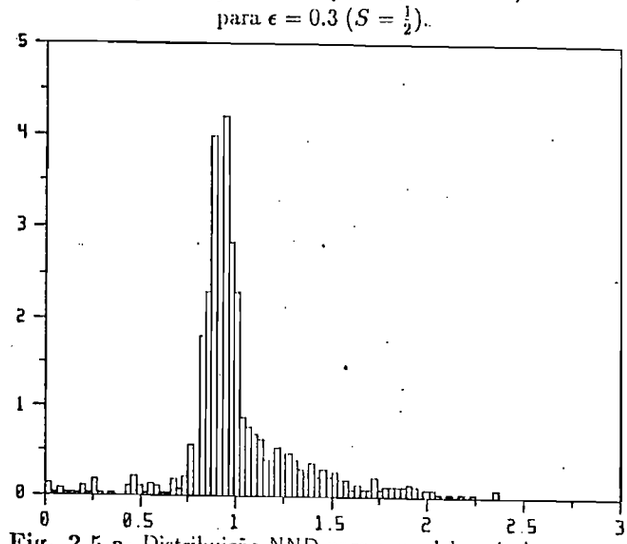

Fig. 2.5.a- Distribuição NND para o modelo spin-boson com aproximação de fase ($\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$) para $\epsilon = 0.4$ ($S = \frac{1}{2}$).

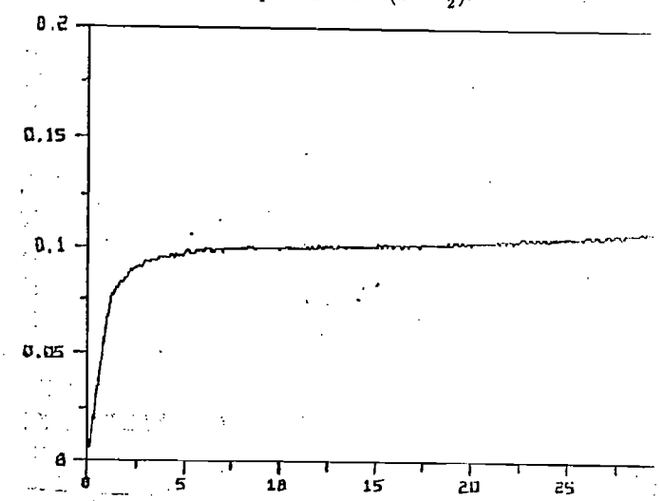

Fig. 2.5.b- Distribuição Δ_3 para o modelo spin-boson co aproximação de fase ($\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$) para $\epsilon = 0.4$ ($S = \frac{1}{2}$).

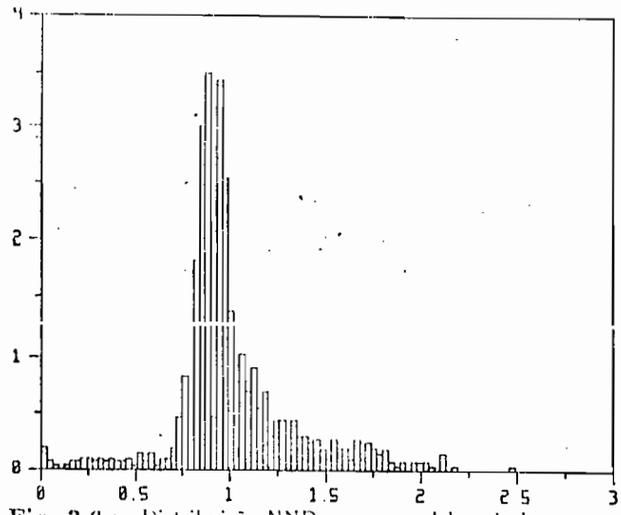

Fig. 2.6.a- Distribuição NND para o modelo spin-boson com aproximação de fase ($\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$) para $\epsilon = 0.5$ ($S = \frac{1}{2}$).

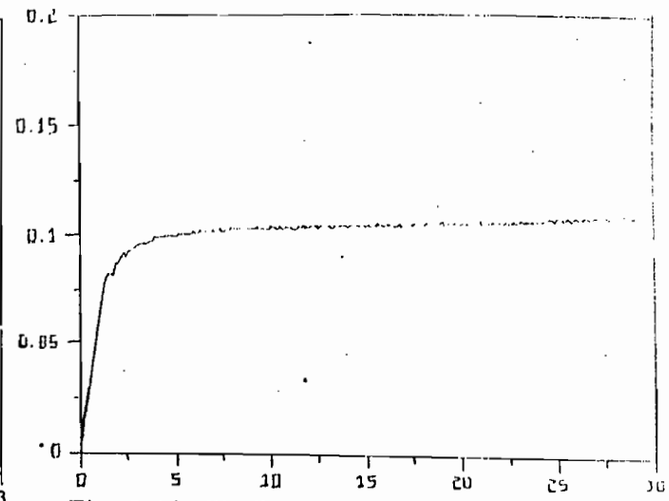

Fig. 2.6.b- Distribuição Δ_3 para o modelo spin-boson com aproximação de fase ($\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$) para $\epsilon = 0.5$ ($S = \frac{1}{2}$).

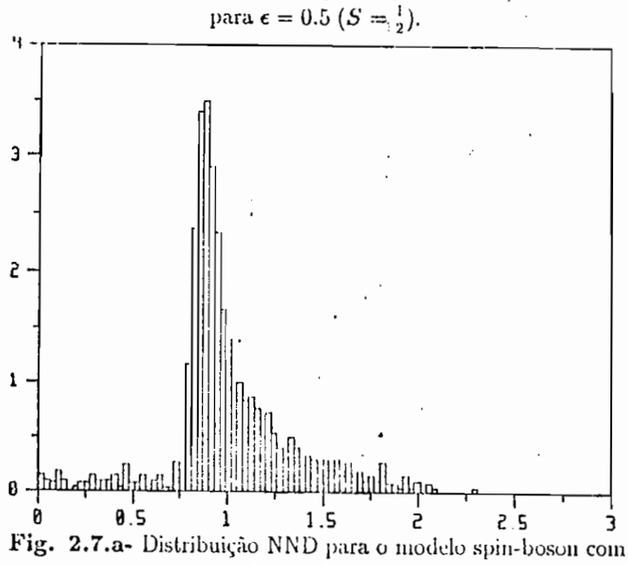

Fig. 2.7.a- Distribuição NND para o modelo spin-boson com aproximação de fase ($\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$) para $\epsilon = 0.6$ ($S = \frac{1}{2}$).

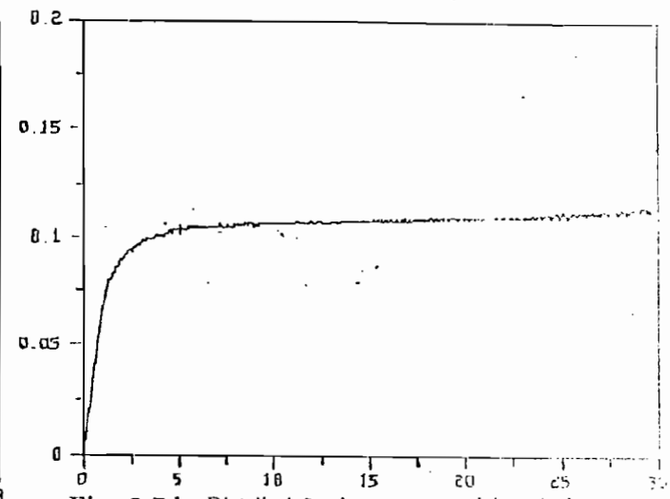

Fig. 2.7.b- Distribuição Δ_3 para o modelo spin-boson com aproximação de fase ($\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$) para $\epsilon = 0.6$ ($S = \frac{1}{2}$).

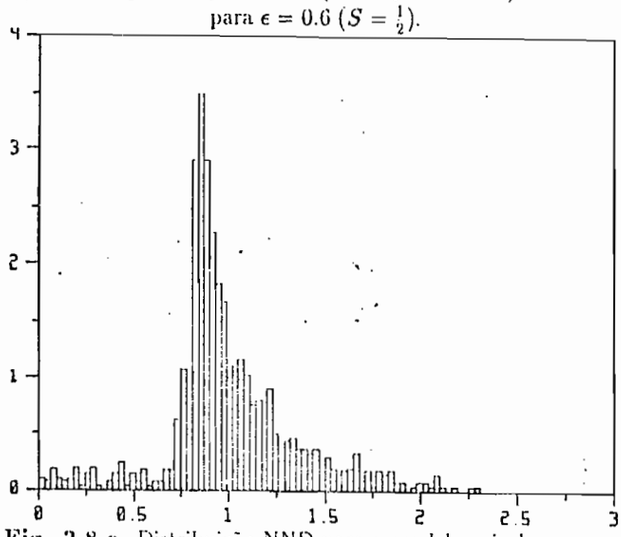

Fig. 2.8.a- Distribuição NND para o modelo spin-boson com aproximação de fase ($\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$) para $\epsilon = 0.7$ ($S = \frac{1}{2}$).

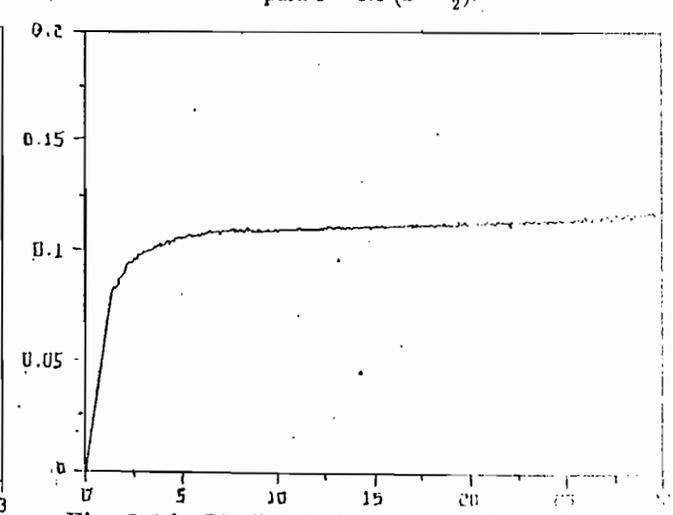

Fig. 2.8.b- Distribuição Δ_3 para o modelo spin-boson com aproximação de fase ($\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$) para $\epsilon = 0.7$ ($S = \frac{1}{2}$).

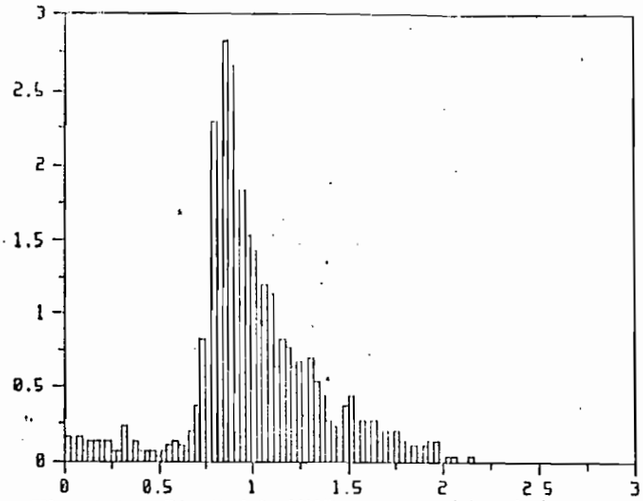

Fig. 2.9.a- Distribuição NND para o modelo spin-boson com aproximação de fase ($\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$) para $\epsilon = 0.8$ ($S = \frac{1}{2}$).

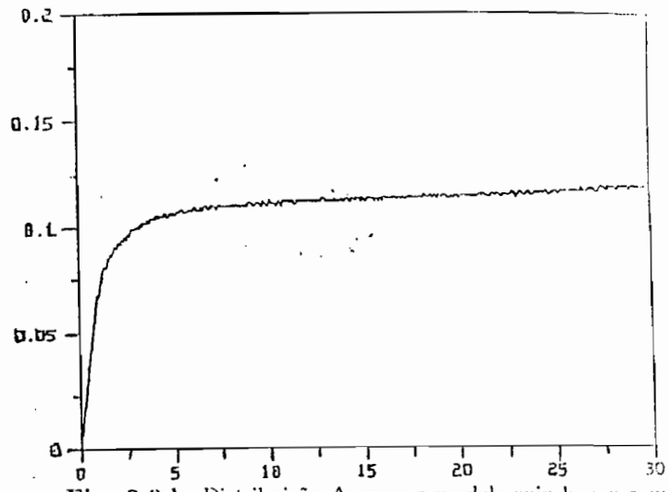

Fig. 2.9.b- Distribuição Δ_3 para o modelo spin-boson com aproximação de fase ($\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$) para $\epsilon = 0.8$ ($S = \frac{1}{2}$).

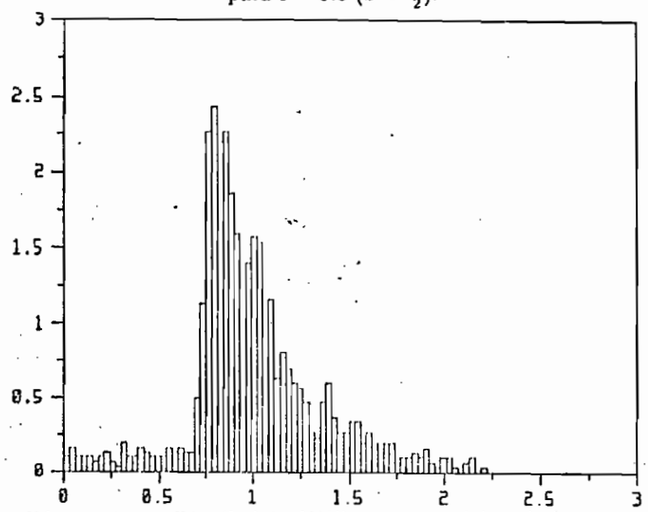

Fig. 2.10.a- Distribuição NND para o modelo spin-boson com aproximação de fase ($\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$) para $\epsilon = 0.9$ ($S = \frac{1}{2}$).

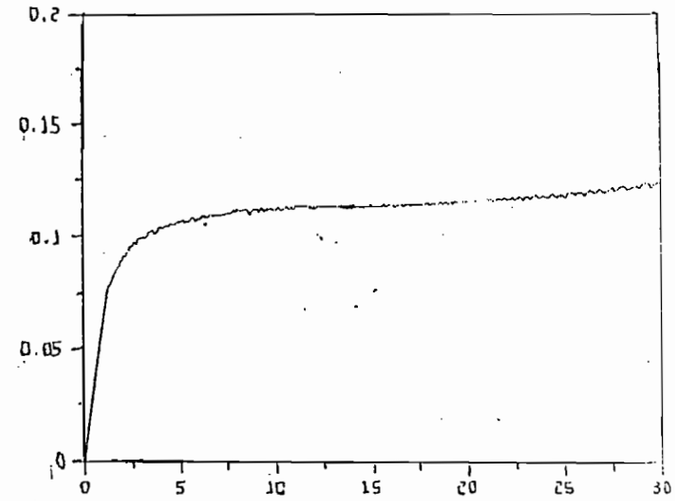

Fig. 2.10.b- Distribuição Δ_3 para o modelo spin-boson com aproximação de fase ($\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$) para $\epsilon = 0.9$ ($S = \frac{1}{2}$).

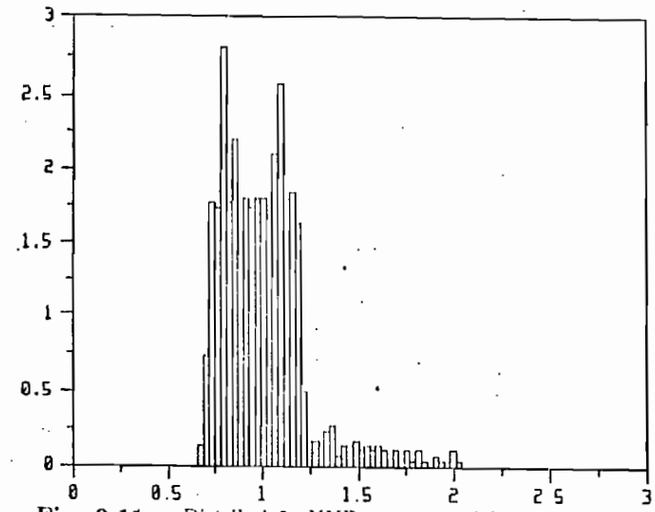

Fig. 2.11.a- Distribuição NND para o modelo spin-boson com aproximação de fase ($\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$) para $\epsilon = 1.0$ ($S = \frac{1}{2}$).

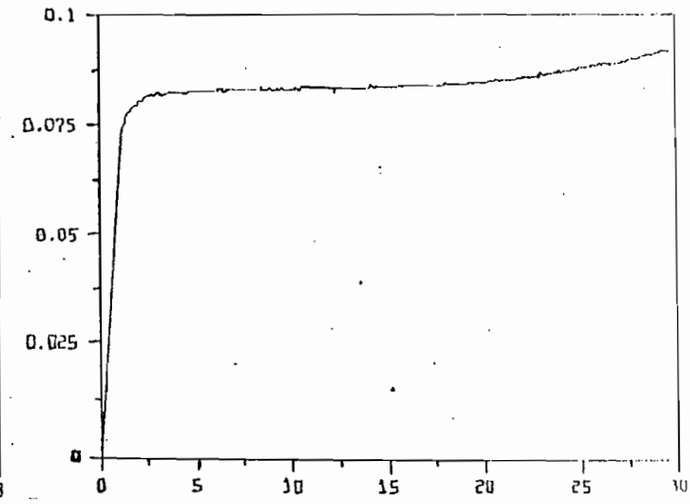

Fig. 2.11.b- Distribuição Δ_3 para o modelo spin-boson com aproximação de fase ($\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$) para $\epsilon = 1.0$ ($S = \frac{1}{2}$).

Primeiramente, ressaltamos a diferença entre as **Fig. 1.1.a** e **Fig. 2.1.a**, correspondentes a aproximação de onda-girante ($\epsilon = 0$). Para o modelo original (**Fig. 1.1.a**) a estatística NND é aproximadamente uniforme, enquanto que um "delta-peak" é obtido para o modelo com a aproximação de fase. Variando ϵ, o "delta-peak" se torna progressivamente mais suave (**Fig. 2.2.a→Fig. 2.10.a**), mas ainda muito diferente das distribuições correspondentes para o modelo original (Fig. **1.2.a→Fig. 1.10.a**). E para $\epsilon = 1$ ambas as distribuições são muito parecidas (Fig. **1.11.a** e **Fig. 2.11.a**).

A explicação do comportamento descrito acima é simples. Para n_o grande como o que foi usado, podemos, para efeitos de cálculo numérico, desprezar os termos proporcionais a $\frac{1}{\sqrt{n_o}}$ em (2.56) com $\epsilon = 0$ (isto foi verificado calculando-se a estatística NND sem estes termos (Fig. **2.12**)). A hamiltoniana obtida assim procedendo é igual a ($\omega = \omega_o = \lambda = 1$ e $\epsilon = 0.0$):

$$H' = n_o + p_\varphi + S^z + \sqrt{n_o}\left(S^+ \exp(-\imath\varphi) + S^- \exp(\imath\varphi)\right) \tag{2.60}$$

a qual possui a seguinte lei de conservação adicional:

$$C = n_o + p_\varphi + S^z \tag{2.61}$$

Um autovetor Ψ de C correspondente ao autovalor $n_o + m + \frac{1}{2}$ de C é da forma:

$$\Psi = c_1 \ |+\rangle \otimes |m\rangle + c_2 \ |-\rangle \otimes |m+1\rangle \tag{2.62}$$

e a equação de autovalores de energia para Ψ é dada por:

$$\left(n_o + m + \frac{1}{2}\right) c_1 + \sqrt{n_o} c_2 = E\, c_1 \tag{2.63}$$

$$\left(n_o + m + \frac{1}{2}\right) c_2 + \sqrt{n_o} c_1 = E\, c_2 \tag{2.64}$$

da qual segue que:

$$E_m = n_o + m + \frac{1}{2} \pm \sqrt{n_o} \tag{2.65}$$

Deste resultado, vemos que, no caso de n_o grande e $\epsilon = 0$, o espaçamento entre os níveis vizinhos é igual a 1, ou seja:

$$\triangle E = E_{m+1} - E_m = 1 \tag{2.66}$$

o que é coerente com a **Fig. 2.1.a.** Em contraste, para o modelo original, os fatores $\sqrt{n}$ e $\sqrt{n+1}$ provenientes dos operadores a e $a^\dagger$ são "uniformemente distribuídos", o que explica a distribuição uniforme na **Fig. 1.1.a.**

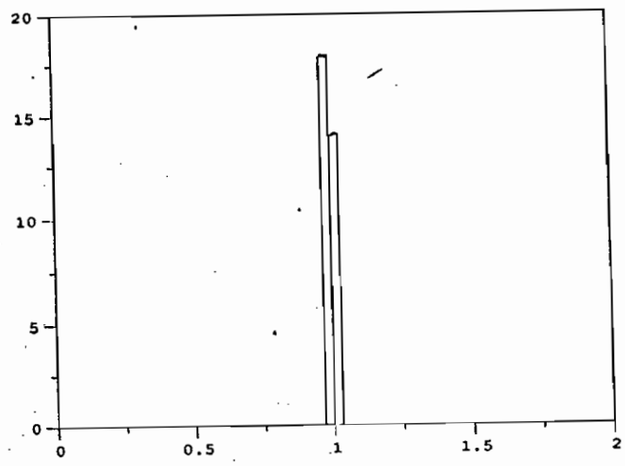

Fig. 2.12- Distribuição NND para o modelo spin-boson com aproximação de fase sem o termo $\frac{1}{\sqrt{n_o}}$ para $\epsilon = 0.0$ ($\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$).

Já para $\epsilon = 1$ (e somente neste caso), a análise de Kus [15-16] para o modelo original mostra que a estatística NND é "centrada em torno" da estatística deste modelo no limite $\lambda \to \infty$, que é integrável, explicando assim o resultado apresentado na **Fig. 1.11.a.** Mas olhando a expressão (2.57) observamos que o limite $n_o \to \infty$ é equivalente ao limite $\lambda \to \infty$. Isto explica a semelhança das **Fig. 1.11.a** e **Fig. 2.11.a.**

Para completar esta discussão, vamos analisar agora as estatísticas $\triangle_3$ de Dyson-Mehta [29] apresentadas nas **Fig.1.1.b→Fig.1.11.b** e **Fig. 2.1.b→Fig. 2.11.b.** O interesse neste tipo de estatística vem do fato de que a sua natureza é diferente

da estatística NND. Enquanto esta última é um efeito quântico não perturbativo, isto é, leva em consideração correlações de ordem infinita entre os níveis de energia na sua obtenção, as correlações envolvidas na obtenção das estatísticas $\triangle_3$ são de ordem mais baixa, além de depender de um parâmetro L relacionado ao tamanho do intervalo de energia considerado, e somente para L grande é que todo o espectro é considerado como um único todo (ver [29]). Observem que, tanto para o modelo original (**Fig. 1.1.b→Fig. 1.11.b**) como para o modelo com a aproximação de fase (**Fig. 2.1.b→Fig. 2.11.b**) nenhuma diferença qualitativa é vísivel. De fato, em ambos os modelos, depois de um valor $L \geq 1$, a estatística $\triangle_3$ assume um valor constante, típico das estatísticas de oscilador harmônico, correspondendo a um espectro consistindo de uma sequência de níveis igualmente espaçados. Entretanto, para o oscilador harmônico, o valor da constante assumida por $\triangle_3$ é igual a $\frac{1}{12} \simeq 0.083$, o qual concorda muito bem com a **Fig. 1.11.b**(modelo original) para $\epsilon = 1$ e com a **Fig. 2.1.b**(modelo com aproximação de fase) para $\epsilon = 0$, e não difere muito dos valores obtidos para os demais valores de ϵ no modelo com aproximação de fase (**Fig. 2.2.b→Fig. 2.11.b**). No entanto, os valores obtidos para esta constante para o modelo original para $\epsilon \neq 1$ (**Fig. 1.1.b→Fig. 1.10.b**) difere substancialmente daquele obtido para o oscilador harmônico. Estes fatos podem ser explicados como se segue: no caso semiclássico, o efeito dos spins quânticos é reduzido, e o sistema lembra um oscilador harmônico para qualquer valor de ϵ. Já para o modelo original, isto só é verdade para $\epsilon = 1$ (ver a análise de Kus [15-16]), enquanto que para outros valores de ϵ a presença dos spins quânticos é mais fortemente sentida.

Para valores maiores de S $\left(S = \frac{9}{2}\right)$, foi encontrado [32] um comportamento para a estatística $\triangle_3$ correspondendo a tipo Poisson para ϵ próximo a zero e GOE para ϵ próximo a 1, mas também com uma saturação em $L_{MAX} = 2S+1 = 10$. Entretanto, a interpretação do valor de L_{MAX} deve ser diferente nos dois casos: para S pequeno, L_{MAX} é justamente o valor 1 necessário para a estatística $\triangle_3$ se estabilizar no seu valor característico [29], enquanto que para S grande, este valor está relacionado com a contribuição das órbitas clássicas de pequenos períodos, como já é conhecido [43].

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
1089
e.1
INSTITUTO DE FÍSICA

Para finalizar esta seção, discutiremos uma outra maneira de se fazer o mesmo limite semiclássico utilizando a hamiltoniana (1.20). Se pensarmos que o limite clássico de um sistema corresponde ao limite $\hbar \to 0$, podemos conservar o valor de $\hbar$ relacionado aos operadores de spin igual a 1, mas fazer o valor de $\hbar$ relacionado aos operadores de aniquilação e criação a e $a^\dagger$ tender a zero. Utilizamos a seguinte hamiltoniana:

$$H = \hbar\omega a^\dagger a + 2\omega_o S^z + \sqrt{\frac{\hbar}{2}}\lambda\left[\left(S^+ a + S^- a^\dagger\right) + \epsilon\left(S^+ a^\dagger + S^- a\right)\right] \tag{2.67}$$

tridiagonalizando-a usando o mesmo procedimento descrito na seção **1.2**. Apresentamos as estatísticas NND (Fig. **2.13** e Fig. **2.14**) para $\hbar$ em (2.67) igual a 0.002, com $\epsilon = 0$ e $\epsilon = 1$. Os resultados concordam com aqueles obtidos para o modelo com aproximação de fase, sugerindo que a formulação na representação de fase é realmente equivalente ao limite $\hbar \to 0$ para os operadores a e $a^\dagger$, ou seja, ao limite em que o campo eletromagnético se torna clássico.

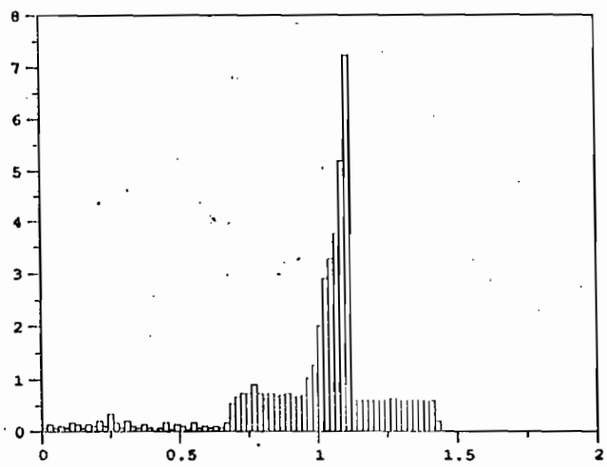

Fig. 2.13- Distribuição NND para o modelo spin-boson com $\hbar = 0.002$ e $\epsilon = 0.0$ ($\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$ e $S = \frac{1}{2}$).

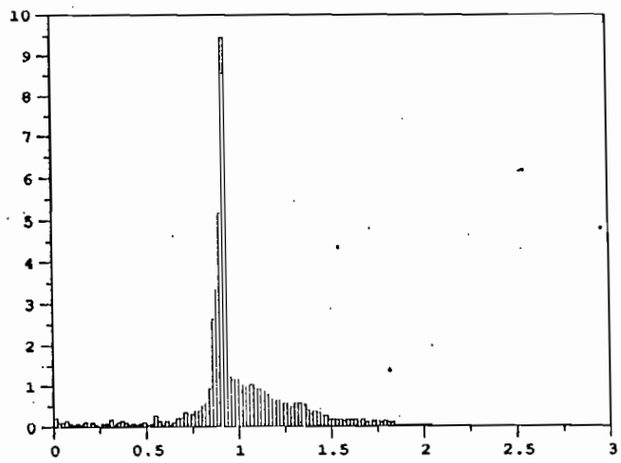

Fig. 2.14- Distribuição NND para o modelo spin-boson com $\hbar = 0.002$ e $\epsilon = 1.0$ ($\omega = \omega_o = \lambda = 1.0$ e $S = \frac{1}{2}$).

2.5 Estados coerentes e a função de Husimi

Como já dissemos, os estados coerentes [44] dão origem à todo um instrumental para a análise de limites semiclássicos de modelos quânticos [57]. Em especial, temos a função de Husimi [45], que além de permitir um estudo das funções de onda no espaço de fase clássico das variáveis canônicas (p, q), vem sendo objeto de análise do ponto de vista dos seus zeros. A idéia introduzida em [46] sugere que o conjunto dos zeros da função de Husimi encerra toda a informação quântica e oferece novas oportunidades para se estudar sistemas integráveis e caóticos. Nesta direção, foi encontrado que a distribuição dos zeros no espaço de fase da função de Husimi associada a autoestados de sistemas quânticos é de dimensão 1 (concentrada sobre curvas) para sistemas cujos análogos clássicos são integráveis, e altamente difusa para sistemas cujos análogos clássicos são caóticos. Portanto, dada a importância que vem assumindo a função de Husimi, apresentaremos aqui algumas propriedades destas funções para o modelo spin-boson.

Primeiramente vamos introduzir a definição de estados coerentes. Embora haja inúmeras definições equivalentes [44], definiremos um estado coerente $|z\rangle$ por:

$$|z\rangle = \exp\left(za^\dagger - z^* a\right)\ |0\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}zz^*\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle \tag{2.68}$$

onde z é um número complexo, e nesta representação uma função Ψ é dada por:

$$\langle z|\psi\rangle = \Psi(z) = \exp\left(-\frac{1}{2}zz^*\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{*^n}}{\sqrt{n!}}\,\langle n|\psi\rangle \tag{2.69}$$

Introduzindo a representação de Bargmann-Segal para estados coerentes [44], faremos $\xi = z^*$, e obteremos:

$$\Psi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\xi^n}{\sqrt{n!}}\,\langle n|\psi\rangle \tag{2.70}$$

O fator $\exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right)$ é absorvido na definição do produto interno nesta representação.

A função de Husimi Ψ_H relacionada a uma função Ψ pode ser dada na representação de estados coerentes por [45]:

$$\Psi_H = |\langle z|\psi\rangle|^2 = \exp\left(-|\xi|^2\right)\ |\Psi(\xi)|^2 \tag{2.71}$$

a qual é sempre não negativa e pode ser interpretada como uma função de densidade de probabilidade. A função de Husimi também pode ser obtida diretamente da função de Wigner [45], fazendo-se uma "média gaussiana" desta última.

Vamos agora obter algumas propriedades das funções de Husimi correspondentes as autofunções da hamiltoniana H' do modelo spin-boson para $\epsilon = 1$, lembrando que a tridiagonalização de H' é sempre feita num subespaço das autofunções de paridade definida do operador P'. Seja $|\psi_j\rangle$ a autofunção de H' correspondente a energia E_j. Vamos escrevê-la na forma:

$$|\psi_j\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^j\, |n\rangle \tag{2.72}$$

onde os coeficientes c_n^j podem ser obtidos usando-se dois procedimentos distintos: o primeiro corresponde a resolver a equação:

$$H'\ |\psi_j\rangle = E_j\ |\psi_j\rangle \tag{2.73}$$

obtendo uma relação de recorrência entre os c_n^j. O segundo procedimento é obtê-los através do càlculo numèrico dos autovetores de H'.

Usando (2.73) encontramos a seguinte relação de recorrência para os c_n^j (vamos a partir de agora omitir o índice j, mas tendo em mente que a relação abaixo vale para os diferentes valores de energia E):

$$c_{n+1} = \frac{2}{\lambda\sqrt{n+1}}\left\{\left[E - \frac{1}{2}\omega_o(-1)^n - \omega n\right] c_n - \frac{\lambda}{2}\sqrt{n}\, c_{n-1}\right\} \tag{2.74}$$

$$c_1 = \frac{2}{\lambda}\left(E - \frac{1}{2}\omega_o\right) c_o \tag{2.75}$$

Esta relação corresponde exatamente àquela encontrada no trabalho de Kus [16], onde ele encontra soluções exatas para o modelo spin-boson ($\epsilon = 1$) na representação de Bargmann.

Entretanto, ao tentarmos calcular os coeficientes c_n pelas relações (2.74-75), encontramos sérios problemas de convergência numérica destas séries. Isto nos deixou surpreendidos, e embora tenham sido feitas inùmeras tentativas usando frações contínuas no sentido de estudar a convergência de (2.74-75), nenhum resultado concreto foi encontrado. Acreditamos que a divergência encontrada seja de causa unicamente numérica.

Portanto, usamos o segundo procedimento para o cálculo dos coeficientes c_n. Uma vez obtidos, utilizamo-los para obter os coeficientes de Ψ_j na representação de Bargmann, ou seja:

$$\Psi_j(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^j \xi^n \tag{2.76}$$

onde

$$a_n^j = \frac{c_n^j}{\sqrt{n!}} \tag{2.77}$$

Como está demonstrado no apêndice B, o comportamento dos coeficientes de uma função do tipo (2.76) pode nos dar informações sobre os zeros desta função. Baseado em toda a teoria exposta no apêndice B, estudamos o comportamento dos coeficientes a_n a partir de um determindado $n = n_o$, comparando-os com as séries $\frac{1}{n!}$ e $\left(\frac{1}{n!}\right)^2$. Foram analisados os coeficientes de $\Psi_j(\xi)$ para $1 \leq j \leq 30$. Alguns resultados são apresentados nas **Fig. 2.15.a→Fig. 2.15.g**. Para todos os valores j analisados foi encontrado o mesmo comportamento para a_n:

$$\left(\frac{1}{n!}\right)^2 < a_n < \frac{1}{n!} \tag{2.78}$$

Acreditamos que este comportamento seja válido para qualquer valor de j.

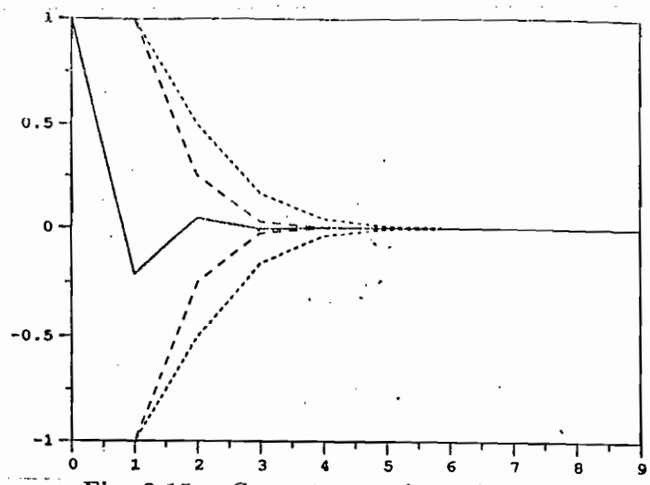

Fig. 2.15.a- Comportamento dos coeficientes a_n^j para $j = 1$, a partir de um $n = n_o = 2$
(..... $= \frac{1}{n!}$, – – – – – – $= \left(\frac{1}{n!}\right)^2$, —— = coeficientes)

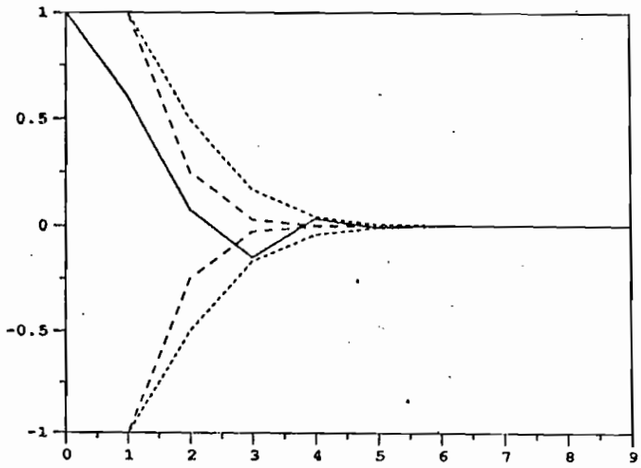

Fig. 2.15.b- Idem para $j = 5$ e $n_o = 3$.

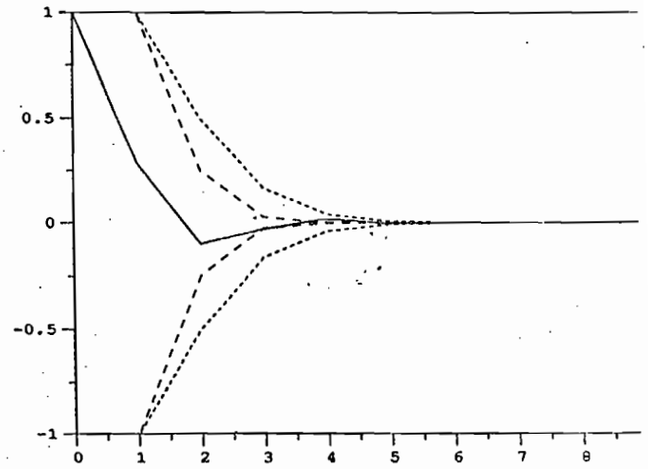

Fig. 2.15.c- Idem para $j = 10$ e $n_o = 7$.

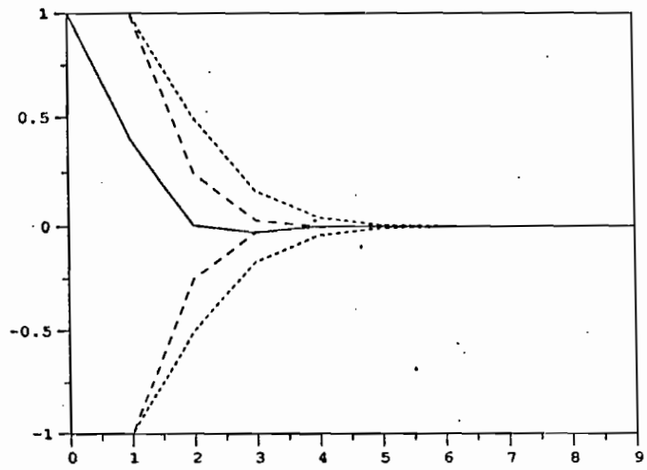

Fig. 2.15.d- Idem para $j = 15$ e $n_o = 11$.

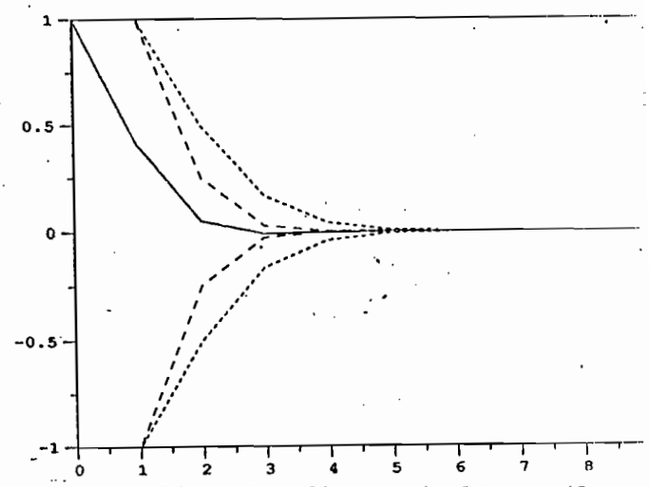

Fig. 2.15.e- Idem para $j = 20$ e $n_o = 15$.

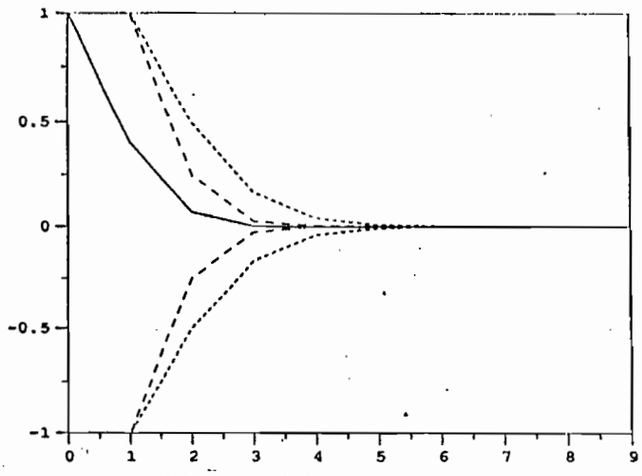

Fig. 2.15.f- Idem para $j = 25$ e $n_o = 19$.

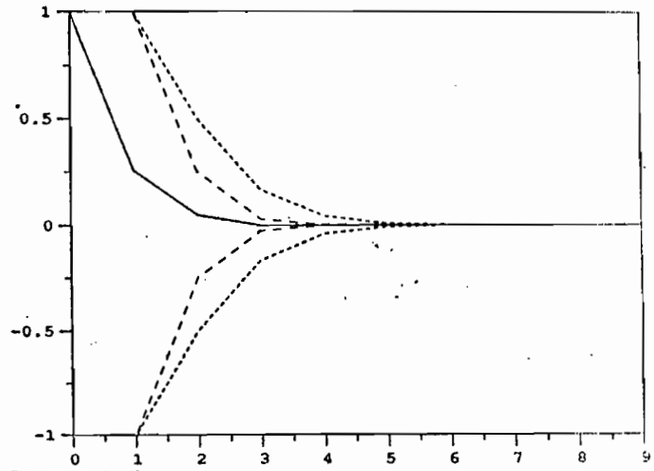

Fig. 2.15.g- Idem para $j = 30$ e $n_o = 24$.

Seguindo o apêndice B, concluímos que $\Psi_j(\xi)$ pode ser escrita na forma:

$$\Psi_j(\xi) = \xi^m P(\xi) \tag{2.79}$$

onde $P(\xi)$ é o produto canônico formado pelos zeros de $\Psi_j(\xi)$ (outros que não $\xi = 0$) e m é a ordem do zero $\xi = 0$. Além disso teremos que $\Psi_j(\xi)$ possui um conjunto infinito de zeros.

As mesmas conclusões são válidas para as funções de Husimi Ψ_{H_j} relacionadas as autofunções Ψ_j. Mais ainda, temos que neste caso do modelo spin boson, a função de Husimi determina também a função de onda a ela associada, pois de (2.79) temos que nenhuma "função fase" existe de tal modo que a relação entre Ψ_j e Ψ_{H_j} seja indeterminada. E o fato de que Ψ_{H_j} possui infinitos zeros incentiva-nos a procurá-los para testar as idéias de Voros e Leboeuf [46]. Isto está sendo feito [47] e espera-se resultados em breve.

Capítulo 3

Sobre o limite clássico do modelo spin-boson

3.1 Obtenção das equações clássicas e o caso integrável

O limite clássico do modelo spin-boson consiste na interação de N átomos com o campo eletromagnético no limite $N \to \infty$. Este limite, como será visto a seguir, permite a definição de operadores "intensivos", que darão origem as equações clássicas.

Portanto, vamos nos remeter a hamiltoniana do modelo com N átomos presentes, que pode ser escrita na forma:

$$H_N = \omega a^\dagger a + \omega_o S_z^{(N)} + \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \left[\left(S_-^{(N)} a^\dagger + S_+^{(N)} a \right) + \epsilon \left(S_+^{(N)} a^\dagger + S_-^{(N)} a \right) \right] \tag{3.1}$$

onde o superescrito (N) ressalta o fato de que os operadores de spins dependem de N na forma (1.17).

Os operadores "intensivos" [50] são definidos por:

$$x_N,\ y_N,\ z_N \equiv \frac{S_{x,y,z}^{(N)}}{N}, \quad \alpha_N = \frac{a}{\sqrt{N}}, \quad \alpha_N^+ = \frac{a^\dagger}{\sqrt{N}} \tag{3.2}$$

os quais satisfazem, usando as equações de Heisenberg e a hamiltoniana (3.1):

$$\dot{x}_N = -\omega_o y_N + \frac{\imath\lambda}{2} z_N (1-\epsilon)\left(\alpha_N - \alpha_N^+\right) \tag{3.3}$$

$$\dot{y}_N = \omega_o x_N - \frac{\lambda}{2} z_N (1+\epsilon)\left(\alpha_N + \alpha_N^+\right) \tag{3.4}$$

$$\dot{z}_N = -\frac{\imath\lambda}{2}\left[x_N (1-\epsilon)\left(\alpha_N - \alpha_N^+\right) + \imath y_N (1+\epsilon)\left(\alpha_N + \alpha_N^+\right)\right] \tag{3.5}$$

$$\dot{\alpha}_N = -\imath\omega\alpha_N - \frac{\imath\lambda}{2}\left[x_N (1+\epsilon) - \imath y_N (1-\epsilon)\right] \tag{3.6}$$

$$\dot{\alpha}_N^+ = \imath\omega\alpha^+ + \frac{\imath\lambda}{2}\left[x_N (1+\epsilon) + \imath y_N (1-\epsilon)\right] \tag{3.7}$$

Observem que o fator $\frac{1}{\sqrt{N}}$ em (3.1) é essencial para a obtenção destas equações.

No limite $N \to \infty$, os operadores x_N, y_N, z_N, α_N e α_N^+ tornam-se "clássicos" a medida que seus comutadores tendem a zero:

$$\begin{aligned} [x_N, y_N] &= \frac{1}{N} z_N \\ [y_N, z_N] &= \frac{1}{N} x_N \\ [z_N, x_N] &= \frac{1}{N} y_N \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\left[\alpha_N, \alpha_N^+\right] = \frac{1}{N} \tag{3.9}$$

ao mesmo tempo que as normas $\|x_N\|$, $\|y_N\|$ e $\|z_N\|$ são uniformemente limitadas (independentes de N) [23].

Entretanto, estes limites não existem no sentido da norma, e para defini-los vamos seguir um procedimento introduzido por Hepp e Lieb [50,23]. Considere um conjunto de matrizes densidade ω^N definidas sobre $\mathcal{H}_N$, tal que os limites:

$$x, y, z \equiv \lim_{N\to\infty} \omega^N (x_N, y_N, z_N) \tag{3.10}$$

$$\alpha \equiv \lim_{N\to\infty} \omega^N(\alpha_N) \qquad \alpha^+ \equiv \lim_{N\to\infty} \omega^N\left(\alpha_N^+\right) \tag{3.11}$$

existam. Por simplicidade, escreveremos:

$$\rho_N \equiv \left\{\rho_N^i\right\}_{i=1}^5 \equiv \left\{x_N,\, y_N,\, z_N,\, \alpha_N,\, \alpha_N^+\right\}$$

e

$$\rho \equiv \left\{\rho^i\right\}_{i=1}^5 \equiv \left\{x,\, y,\, z,\, \alpha,\, \alpha^+\right\}$$

e seja S^2 a esfera em $\mathbf{R}^3$ tal que $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4}$.

Definimos uma sequência de matrizes densidade $\left\{\omega^N\right\}$ como sendo 2-clássica [50] com respeito a ρ_N e com valor igual a $\rho \in (S^2 \times \mathbf{R}^2)$ se:

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{i\in[1,5]} \omega^N \left[\left(\rho_N^i - \rho^i\right)^\dagger \left(\rho_N^i - \rho^i\right)\right] = 0 \tag{3.12}$$

Consequentemente, pela inequaldade de Schwarz, teremos:

$$\lim_{N\to\infty} \omega^N\left(\rho_N^i\right) = \rho^i, \qquad i \in [1,5] \tag{3.13}$$

$$\lim_{N\to\infty} \omega^N\left(\rho_N^i \rho_N^j\right) = \rho^i \rho^j, \qquad i,j \in [1,5] \tag{3.14}$$

ou seja, se ω^N é 2-clássica, então temos garantido que ρ_N converge para ρ em termos da média e covariância.

Uma classe importante de estados satisfazendo (3.12) é dada por:

$$\omega^N(A) = \left(\Omega^N,\, A\Omega^N\right) \tag{3.15}$$

para qualquer observável A, com:

$$\Omega^N = \otimes_{j=1}^N \left(\delta\,|+\rangle_j + \beta\,|-\rangle_j\right) \otimes \left|f^N\right\rangle \tag{3.16}$$

onde δ, $\beta \in \mathbf{C}$ com $|\delta|^2 + |\beta|^2 = 1$ com $C_j^2 = \{|+\rangle\,,\, |-\rangle\}$ e $\left|f^N\right\rangle \in \mathcal{F}$, com $\left|f^N\right\rangle = |0\rangle$ ou $\left|f^N\right\rangle = |z\rangle$. Portanto, temos que o limite dado em (3.10-11) sempre existe para

qualquer estado inicial do sistema que escolhamos. O teorema abaixo garante a convergência de $\rho_N(t) \equiv \exp(\imath H_N t)\rho_N \exp(-\imath H_N t)$ para qualquer t. Uma demonstração do mesmo, seguindo [50], pode ser encontrada no apêndice C.

Teorema 3.1: Se ω^N é 2-clássica para ρ_N com valor igual a $\rho \in (S^2 \times \mathbf{R}^2)$, então ω^N é 2-clássica para todos os $\rho_N(t)$ com valor igual a

$$\rho(t) \equiv \left\{x(t),\, y(t),\, z(t),\, \alpha(t),\, \alpha^+(t)\right\}$$

que é a única solução de:

$$\dot{x} = -\omega o y + \frac{\imath\lambda}{2} z(1-\epsilon)(\alpha - \alpha^+) \tag{3.17}$$

$$\dot{y} = \omega_o x - \frac{\lambda}{2} z(1+\epsilon)(\alpha + \alpha^+) \tag{3.18}$$

$$\dot{z} = -\frac{\imath\lambda}{2}\left[x(1-\epsilon)(\alpha - \alpha^+) + \imath y(1+\epsilon)(\alpha + \alpha^+)\right] \tag{3.19}$$

$$\dot{\alpha} = -\imath\omega\alpha - \frac{\imath\lambda}{2}\left[x(1+\epsilon) - \imath y(1-\epsilon)\right] \tag{3.20}$$

$$\dot{\alpha}^+ = \imath\omega\alpha^+ + \frac{\imath\lambda}{2}\left[x(1+\epsilon) + \imath y(1-\epsilon)\right] \tag{3.21}$$

com $\rho(0) = \rho$.

Portanto, vimos que no limite $N \to \infty$, as equações para os operadores $S_x^{(N)}$, $S_y^{(N)}$, $S_z^{(N)}$, a e $a^\dagger$ se transformam em equações para as variáveis clássicas x, y, z, α e α^+ de uma maneira rigorosa, justificando assim o procedimento utilizado por outros autores [15].

Graham e Höhnerbach [15] introduziram a seguinte mudança de variáveis:

$$x = \sqrt{S^2 - I_1^2}\,\cos\varphi_1 \tag{3.22}$$

$$y = \sqrt{S^2 - I_1^2}\,\sin\varphi_1 \tag{3.23}$$

$$z = I_1 \tag{3.24}$$

$$\alpha = \sqrt{I_2}\,\exp\left(-\imath\varphi_2\right) \tag{3.25}$$

$$\alpha^+ = \sqrt{I_2}\,\exp\left(\imath\varphi_2\right) \tag{3.26}$$

com $-S \leq I_1 \leq S$, $I_2 \geq 0$, $0 \leq \varphi_1$, $\varphi_2 \leq 2\pi$ e S uma constante (no nosso caso $S = \frac{1}{2}$) relacionada com o operador de spin. As transformações (3.22-26) são um caso especial daquelas introduzidas por Cibils et al [23].

Nestas novas variáveis, as equações de movimento (3.17-21) são escritas na seguinte forma:

$$\dot{I}_1 = \lambda\sqrt{S^2 - I_1^2}\,\sqrt{I_2}\,[\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + \epsilon\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)] \tag{3.27}$$

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_o - \frac{\lambda I_1\sqrt{I_2}}{\sqrt{S^2 - I_1^2}}\,[\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + \epsilon\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)] \tag{3.28}$$

$$\dot{I}_2 = -\lambda\sqrt{S^2 - I_1^2}\,\sqrt{I_2}\,[\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) - \epsilon\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)] \tag{3.29}$$

$$\dot{\varphi}_2 = \omega + \frac{\lambda\sqrt{S^2 - I_1^2}}{2\sqrt{I_2}}\,[\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + \epsilon\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)] \tag{3.30}$$

É fácil verificar que estas equações podem ser obtidas do formalismo de Hamilton usando a seguinte hamiltoniana:

$$H = \omega I_2 + \omega_o I_1 + \lambda\sqrt{S^2 - I_1^2}\,\sqrt{I_2}\,[\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + \epsilon\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)] \tag{3.31}$$

com:

$$I_i = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_i}, \qquad \varphi_i = \frac{\partial H}{\partial I_i}, \quad i = 1, 2 \tag{3.32}$$

É conveniente ainda introduzir [15] uma transformação canônica, definindo as novas variáveis:

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \tag{3.33}$$

$$\psi = \varphi_2 \tag{3.34}$$

com os momentos canonicamente conjugados dados por:

$$I_\varphi = I_1 \tag{3.35}$$

$$I_\psi = I_1 + I_2 \tag{3.36}$$

Nestas novas variáveis, H é escrita na forma:

$$H = \omega I_\psi + \lambda\sqrt{S^2 - I_\varphi^2}\,\sqrt{I_\psi - I_\varphi}\,[\cos\varphi + \epsilon\cos(\varphi + 2\psi)] \tag{3.37}$$

onde nos restringimos ao caso $\omega = \omega_o$. As equações de movimento são dadas por:

$$\dot{I}_\varphi = \lambda\sqrt{S^2 - I_\varphi^2}\,\sqrt{I_\psi - I_\varphi}\,[\sin\varphi + \epsilon\sin(\varphi + 2\psi)] \tag{3.38}$$

$$\dot{\varphi} = -\lambda\left[\frac{1}{2}\frac{\sqrt{S^2 - I_\varphi^2}}{\sqrt{I_\psi - I_\varphi}} + \frac{\sqrt{I_\psi - I_\varphi}}{\sqrt{S^2 - I_\varphi^2}}I_\varphi\right][\cos\varphi + \epsilon\cos(2\psi + \varphi)] \tag{3.39}$$

$$\dot{I}_\psi = 2\lambda\epsilon\sqrt{I_\psi - I_\varphi}\,\sqrt{S^2 - I_\varphi^2}\sin(2\psi + \varphi) \tag{3.40}$$

$$\dot{\psi} = \omega + \frac{\lambda}{2}\frac{\sqrt{S^2 - I_\varphi^2}}{\sqrt{I_\psi - I_\varphi}}[\cos\varphi + \epsilon\cos(2\psi + \varphi)] \tag{3.41}$$

Graham e Höhnerbach [15] estudaram o sistema acima no limite $I_\psi \gg I_\varphi$, resolvendo o caso integrável ($\epsilon = 0$) e mostrando algumas propriedades importantes deste sistema, principalmente sobre o comportamento de algumas quantidades quando o regime caótico ($\epsilon \neq 0$) é considerado. Van Hemmen e Von Waldenfels [27] também

estudaram o sistema dado por (3.38-41), embora usando outras variáveis, no caso $\epsilon = 0$. Estes últimos deram uma nova interpretação a este sistema ao verificarem que I_φ pode ser obtido de uma função potencial. O que se seguirá nesta seção é baseado nestes dois trabalhos.

Vamos considerar o caso integrável com $\epsilon = 0$ [13]. Neste caso, as quantidades H, I_ψ, e K, dada por:

$$K = \lambda\sqrt{I_\psi - I_\varphi}\,\sqrt{S^2 - I_\varphi^2}\cos\varphi \tag{3.42}$$

são conservadas, e podemos reescrever a equação (3.38) na seguinte forma:

$$\dot{I}_\varphi^2 = 4I_\varphi^3 - 4I_\psi I_\varphi^2 - 4S^2 I_\varphi + 4I_\psi S^2 - \frac{4K^2}{\lambda^2} \tag{3.43}$$

onde agora a derivada no lado esquerdo desta equação é em relação a $t' = \frac{\lambda t}{4}$.

Definimos ainda a seguinte transformação de variáveis:

$$I_\varphi = \xi + \frac{I_\psi}{3} \tag{3.44}$$

e substituindo em (3.43) obtemos uma equação para ξ dada por:

$$\dot{\xi}^2 = 4\xi^3 - \left(\frac{4}{3}I_\psi^2 + 4S^2\right)\xi - \frac{8}{27}I_\psi^3 + \frac{8}{3}S^2 I_\psi - \frac{4K^2}{\lambda^2} \tag{3.45}$$

a qual é justamente a equação diferencial para a função de Weierstrass [51] (ver apêndice D):

$$\dot{\wp}^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 \tag{3.46}$$

com as constantes g_2 e g_3 dadas por:

$$g_2 = \frac{4}{3}I_\psi^2 + 4S^2 \qquad g_3 = \frac{8}{27}I_\psi^3 - \frac{8}{3}S^2 I_\psi + \frac{4K^2}{\lambda^2} \tag{3.47}$$

Portanto, a solução de (3.43) é dada por:

$$I_\varphi(t) = \wp_{g_2 g_3}\left(\frac{\lambda t}{4} + \alpha\right) + \frac{I_\psi}{3} \tag{3.48}$$

onde α é uma constante a ser determinada pelas condições iniciais:

$$\wp_{g_2g_3}(\alpha) = \frac{2I_\varphi(0) - I_2(0)}{3} \tag{3.49}$$

(lembrando que I_φ está relacionado com a projeção S_z do spin e I_2 com o número de fótons).

De (3.42) podemos obter a solução para φ, dada por:

$$\cos\varphi = \frac{K}{\sqrt{\left[\dot{\wp}_{g_2g_3}\left(\frac{\lambda t}{4} + \alpha\right)\right]^2 + K^2}} \tag{3.50}$$

Ainda de (3.42) vemos que K está limitada na região:

$$-\frac{\Omega}{2} \leq K \leq \frac{\Omega}{2} \tag{3.51}$$

com $\Omega = \frac{2\lambda}{3}\sqrt{2I_\psi + \sqrt{I_\psi^2 + 3S^2}}\sqrt{2I_\psi\sqrt{I_\psi^2 + 3S^2} - 2I_\psi^2}$, e de (3.50) obtemos que o espaço de fase está dividido em duas regiões incomunicáveis de acordo com o sinal da constante K: se $K > 0$, então o espaço de fase está limitado a região $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ e se $K < 0$, a região $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$. (Veremos na seção seguinte que esta separação é quebrada quando $\epsilon \neq 0$).

Seguindo [27], vamos agora analisar a equação (3.45) de um outro ponto de vista. Observamos que podemos escrevê-la na forma:

$$\ddot{\xi} = -\frac{dV(\xi)}{d\xi} \tag{3.52}$$

com

$$V(\xi) = -2\xi^3 + \left(\frac{2}{3}I_\psi^2 + 2S^2\right)\xi \tag{3.53}$$

Graficamente, $V(\xi)$ pode ser representado pela **Fig. 3.1**, com um mínimo em $\xi_{MIN} = -\frac{c}{\sqrt{6}}$ e um máximo em $\xi_{MAX} = \frac{c}{\sqrt{6}}$, com c dado por:

$$c = \sqrt{\frac{2}{3}I_\psi^2 + 2S^2} \tag{3.54}$$

Vemos que ξ_{MAX} é um ponto hiperbólico deste sistema. No entanto, no caso integrável, é fácil verificar que I_φ nunca atinge este ponto com a excessão de que I_ψ seja igual a $I_\varphi(0) = S$. E se I_ψ for muito maior que I_φ, o ponto hiperbólico se distancia de tal maneira que o "potencial" sentido pelo sistema é do tipo parabólico. Realmente, a equação encontrada por Graham e Höhnerbach [15] para I_φ no caso $I_\psi \gg I_\varphi$ pode ser escrita como:

$$\ddot{\xi} = -\frac{dV'}{d\xi} \tag{3.55}$$

com

$$V'(\xi) = 2I_\psi \xi^2 + \frac{4}{3} I_\psi^2 \xi \tag{3.56}$$

o qual graficamente é dado pela **Fig. 3.2.**

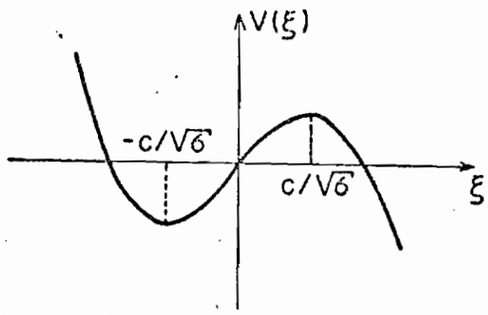

Fig. 3.1- Comportamento qualitativo para $V(\xi)$.

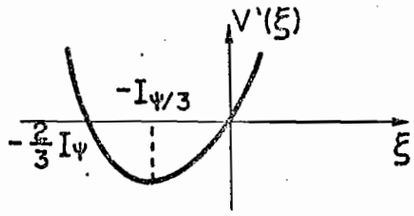

Fig. 3.2- Comportamento qualitativo para $V'(\xi)$

Portanto, a aproximação de Graham e Höhnerbach faz com que a estrutura original do modelo seja quebrada. Apesar disto, a sua análise é bastante rica conceitualmente e indica, mesmo para $I_\psi \gg I_\varphi$, a presença de caos quando o termo

contra-onda-girante é considerado.

Entretanto, um caso físico interessante, e realizável experimentalmente, é aquele em que nenhum ou quase nenhum fóton está presente no estado inicial. Este caso não pode ser considerado na análise feita em [15], pois aqui $I_\psi \simeq I_\varphi(t)$. E é sobre este assunto que falaremos na seção seguinte.

3.2 O caso não integrável e polarização nula

Vamos agora considerar o termo contra-onda-girante como parte integrante do nosso sistema, mas fazendo do parâmetro ϵ um medidor desta "perturbação". Observamos que para $I_\psi \simeq I_\varphi(0)$ no caso integrável, o ponto hiperbólico de $V(\xi)$ está muito próximo da região permitida a $I_\varphi(t)$. Ao perturbarmos o sistema, ou seja, fazendo $\epsilon \neq 0$, porém com $\epsilon \simeq 0$, espera-se que a variável $I_\varphi(t)$ passe por uma região de tamanho aproximadamente igual a ϵ que contenha o ponto hiperbólico, o qual sendo estruturalmente estável [56] permanecerá nesta região para pequenos valores de ϵ, dando origem ao aparecimento de caos no sistema [52]. Isto pode ser verificado numericamente. Usando pequenos valores para ϵ, integramos as equações de movimento dadas por (3.38-41) conforme procedimento descrito no apêndice D. O interessante deste procedimento é que estamos considerando os termos contra-onda-girante como uma perturbação, e não como parte integrante do sistema. As **Fig. 3.3**→**Fig. 3.4** mostram a variação de I_φ em função do tempo. Observem que para valores de $I_\psi \simeq I_\varphi(0)$, os valores de $I_\varphi(t)$, $t < \frac{1}{\epsilon}$ entram numa região de tamanho ϵ em torno do ponto hiperbólico não perturbado. Isto vem reforçar nossas conjecturas de que o caos, neste caso, deve se originar na vizinhança deste ponto.

Isto pode ser confirmado nas seções de Poincaré [52] apresentadas nas **Fig. 3.5.a**→**Fig. 3.5.g** e **Fig. 3.6.a**→**Fig. 3.6.h**. Estas seções foram construídas nas variáveis $I_\varphi \times \varphi$, fixando-se o valor de energia E e do ângulo ψ (este último sempre fixado igual a $0 \; mod \, \pi$, pois H (3.37) é periódica em ψ com período igual a π). As equações utilizadas para a obtenção das seções de Poincaré estão no apêndice

E.

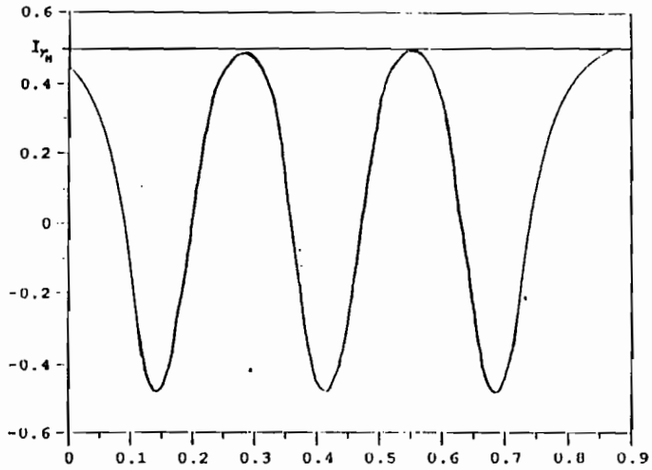

Fig. 3.3- Gráfico de $I_{\varphi PERT} \times t$ para $\epsilon = 0.001$, com $I_\psi = 0.49$, $I_\varphi(0) = 0.45$ e $I_{\varphi_H} = 0.495$.

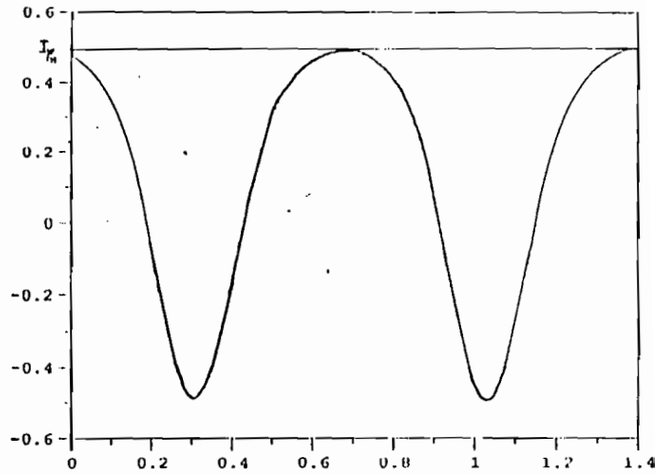

Fig. 3.4- Gráfico de $I_{\varphi PERT} \times t$ para $\epsilon = 0.001$, com $I_\psi = 0.51$, $I_\varphi(0) = 0.48$ e $I_{\varphi_H} = 0.505$.

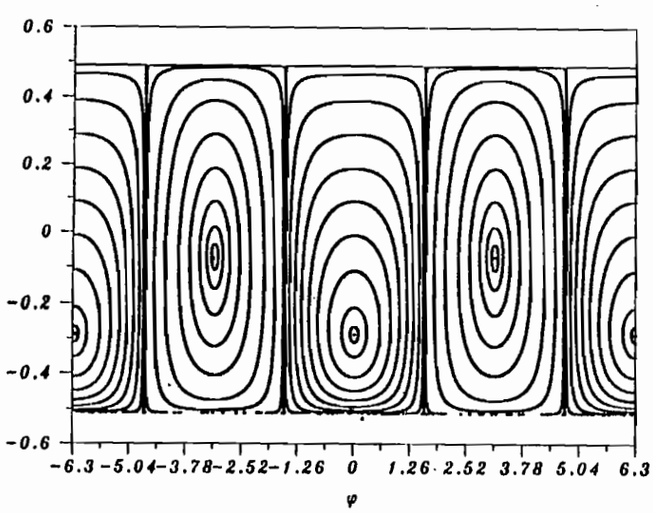

Fig. 3.5.a- Seção de Poincaré para o modelo spin-boson para $E = 0.5$ e $\epsilon = 0.0$.

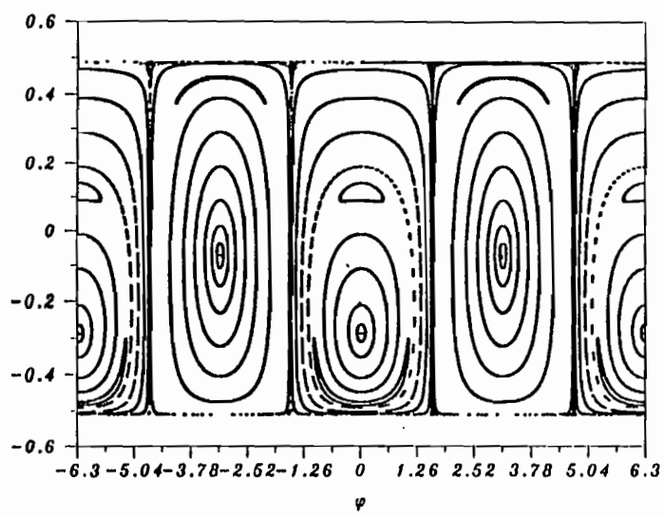

Fig. 3.5.b- Seção de Poincaré para o modelo spin-boson para $E = 0.5$ e $\epsilon = 0.001$.

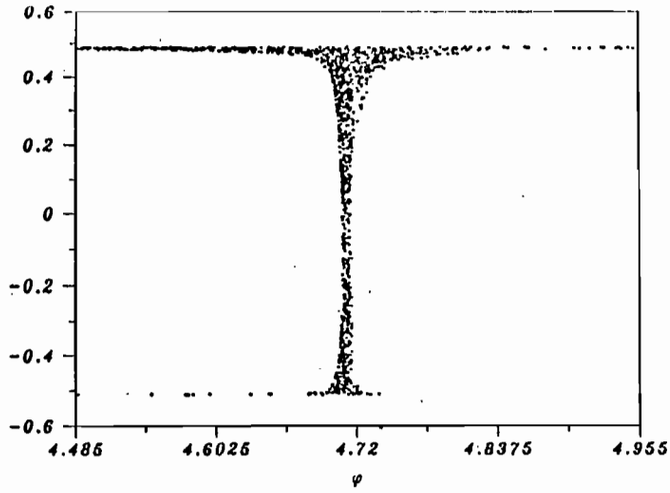

Fig. 3.5.c- Seção de Poincaré para o modelo spin-boson para $E = 0.5$ e $\epsilon = 0.001$, ampliando uma das regiões em que o comportamento caótico se manifesta.

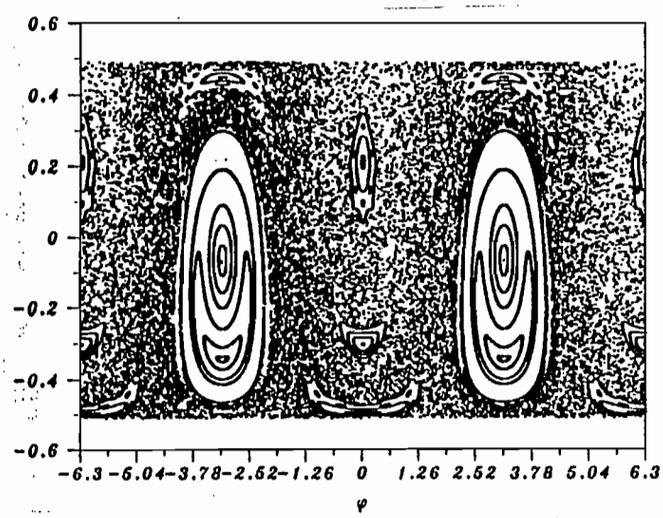

Fig. 3.5.d- Seção de Poincaré para o modelo spin-boson para $E = 0.5$ e $\epsilon = 0.1$.

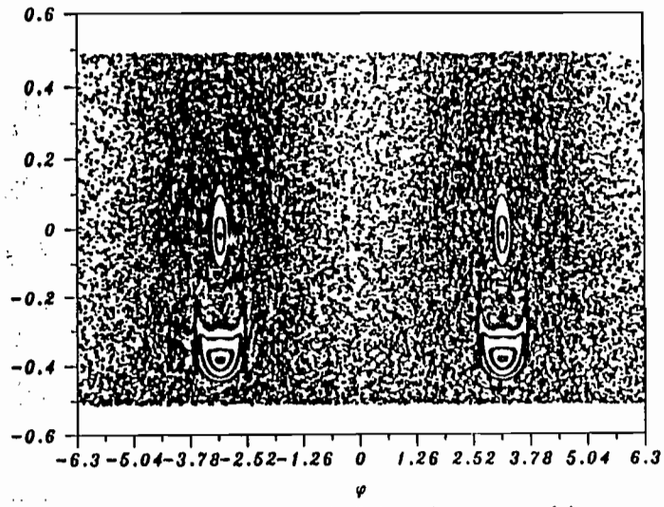

Fig. 3.5.e- Seção de Poincaré para o modelo spin-boson para $E = 0.5$ e $\epsilon = 0.2$.

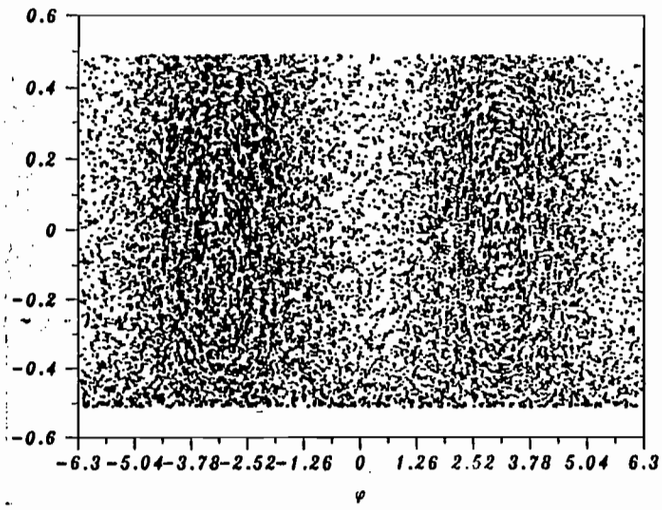

Fig. 3.5.f- Seção de Poincaré para o modelo spin-boson para $E = 0.5$ e $\epsilon = 0.3$.

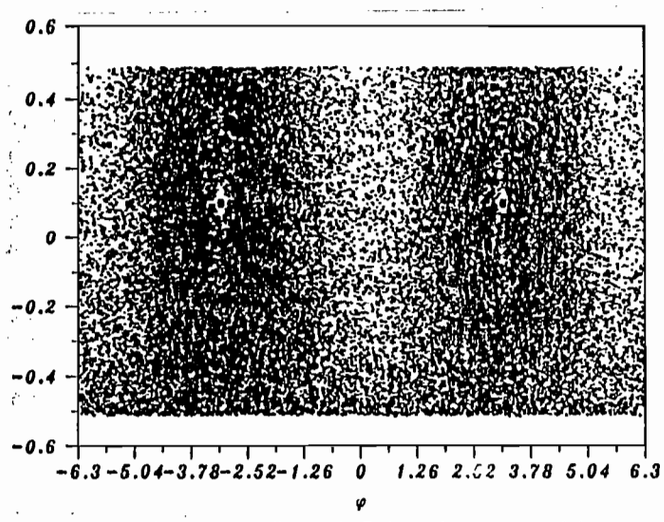

Fig. 3.5.g- Seção de Poincaré para o modelo spin-boson para $E = 0.5$ e $\epsilon = 0.4$.

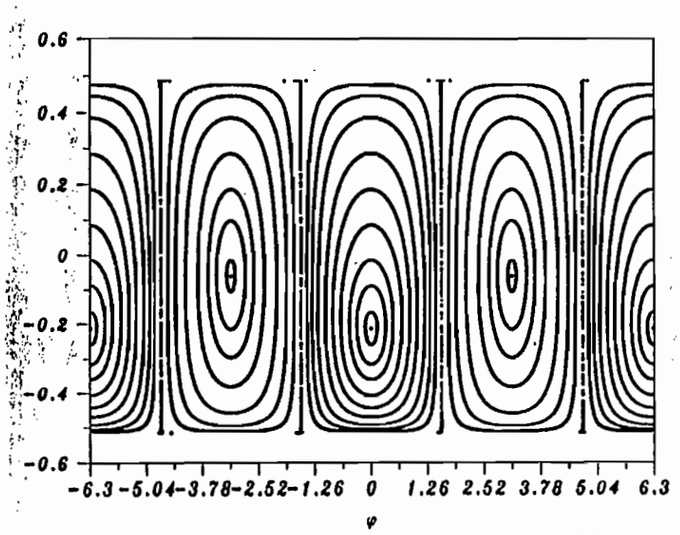

Fig. 3.6.a- Seção de Poincaré para o modelo spin-boson para $E = 1.0$ e $\epsilon = 0.0$.

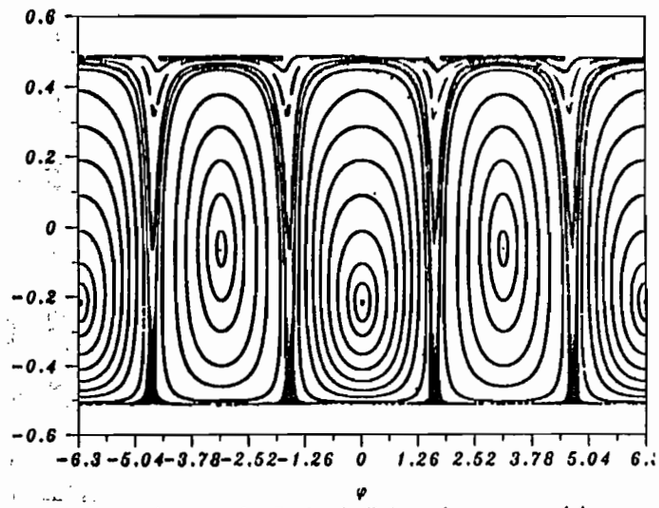

Fig. 3.6.b- Seção de Poincaré para o modelo spin-boson para $E = 1.0$ e $\epsilon = 0.03$.

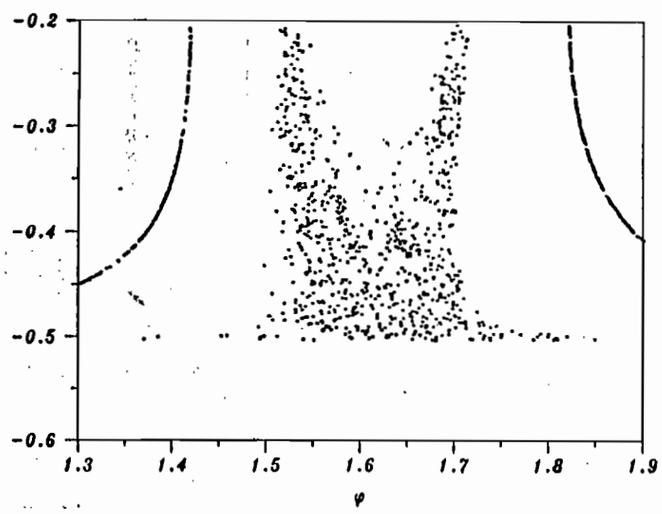

Fig. 3.6.c- Seção de Poincaré para o modelo spin-boson para $E = 1.0$ e $\epsilon = 0.03$, ampliando uma das regiões em que o comportamento caótico se manifesta.

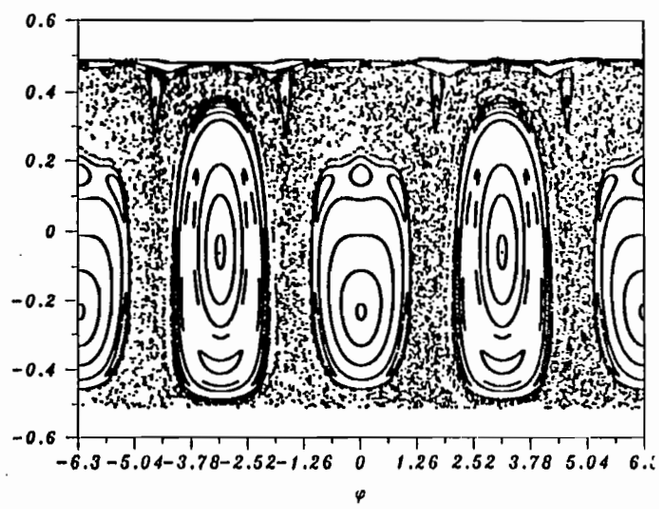

Fig. 3.6.d- Seção de Poincaré para o modelo spin-boson para $E = 1.0$ e $\epsilon = 0.1$.

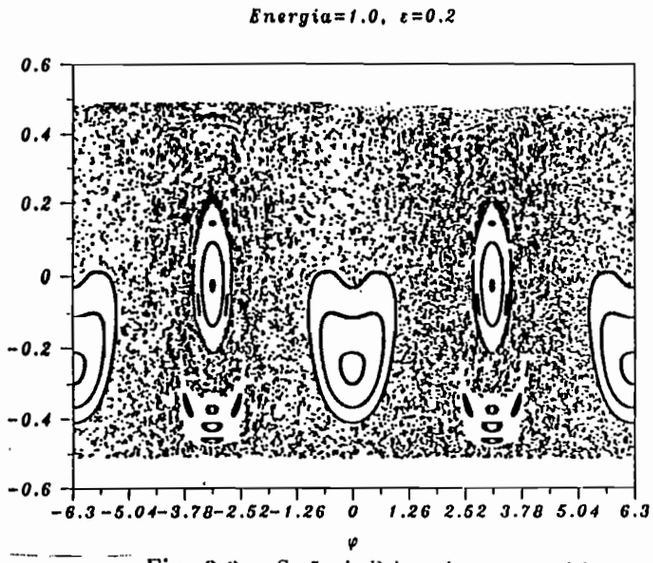

Fig. 3.6.e- Seção de Poincaré para o modelo spin-boson para $E = 1.0$ e $\epsilon = 0.2$.

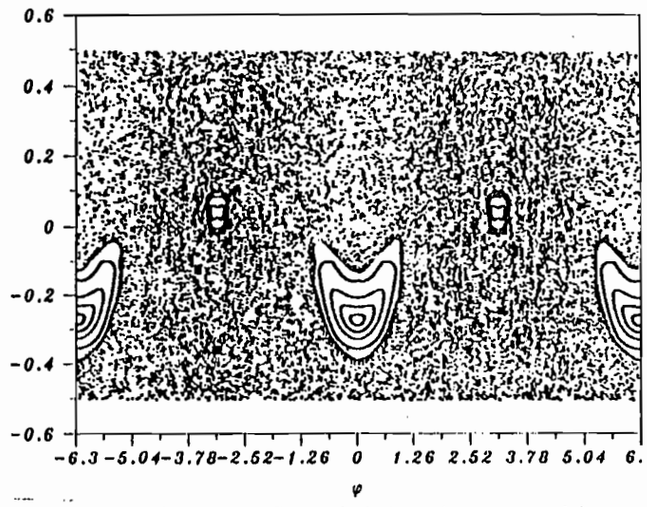

Fig. 3.6.f- Seção de Poincaré para o modelo spin-boson para $E = 1.0$ e $\epsilon = 0.3$.

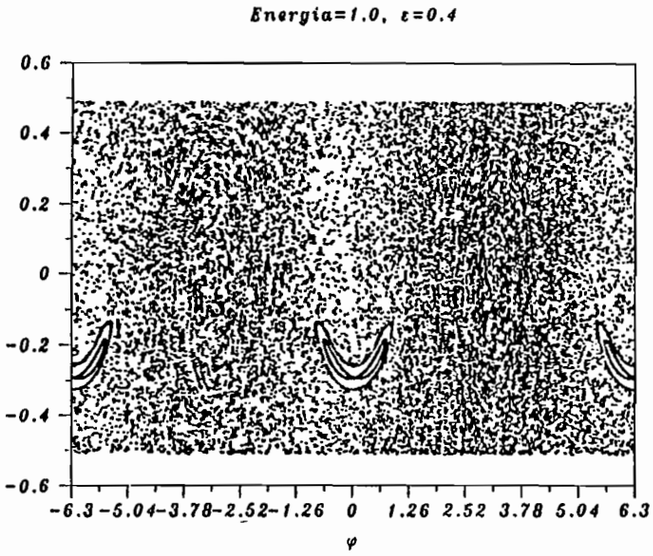

Fig. 3.6.g- Seção de Poincaré para o modelo spin-boson para $E = 1.0$ e $\epsilon = 0.4$.

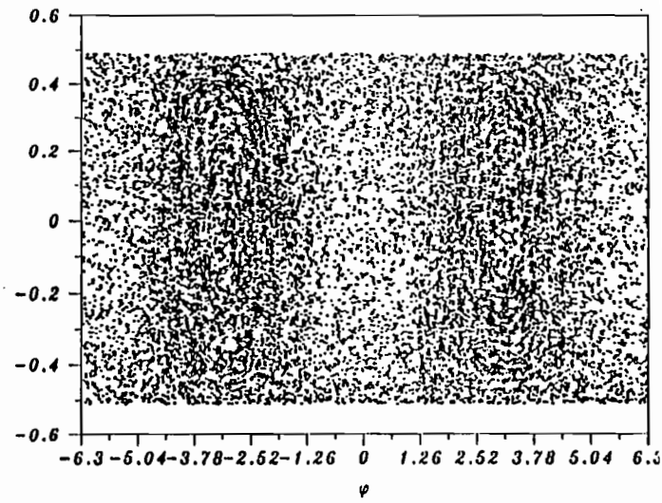

Fig. 3.6.h- Seção de Poincaré para o modelo spin-boson para $E = 1.0$ e $\epsilon = 0.5$.

Observem que para os dois valores de energia calculados ($E = 1.0$ e $E = 0.5$), verificamos que o espaço de fase é realmente separado em 2 regiões incomunicáveis para $\epsilon = 0$ (**Fig. 3.5.a** e **Fig. 3.6.a**), como já havíamos previsto. As retas que dividem estas regiões estão próximas do ponto hiperbólico (próximas no sentido que I_φ aproxima-se dos valores do ponto hiperbólico não perturbado nesta região), aumentando a proximidade quanto menor o valor da energia. Isto pode ser verificado olhando a **Tab. 3.1**, onde veremos que as condições iniciais que dão origem a estas retas (marcadas por *) estão bem mais próximas do ponto hiperbólico que qualquer outra condição inicial. Observem então que a primeira região em que percebemos a presença de um comportamento caótico é em torno destas retas, destruindo a incomunicabilidade que havia entre os dois subespaços distintos quando $\epsilon = 0$ (isto concorda também com a análise de Graham e Höhnerbach [15], o qual, mesmo para $I_\psi \gg I_\varphi(t)$, previa o comportamento caótico na vizinhança de $K = 0$. Estas retas correspondem exatamente a $K = 0$). E atentem ao fato de que quanto menor a energia, ou seja, quanto mais próximo o ponto hiperbólico está da região acessível a $I_\varphi(t)$ no caso integrável, mais cedo (em termos de ϵ) o comportamento caótico se manifesta (para $E = 1.0$ temos $\epsilon = 0.03$ (**Fig. 3.6.c**) e para $E = 0.5$ temos $\epsilon = 0.001$ (**Fig. 3.5.c**)).

TABELA 1

E	$I_\varphi(0)$	$\varphi(0)$	I_ψ	I_{φ_H}	$\Delta I_\varphi = I_{\varphi_H} - I_\varphi(0)$
1.0	0.46	π	1.3748	0.9999	0.5399
$*$1.0	0.4999	π	1.0014	0.7751	0.2751 $*$
$*$0.5	0.4999	2π	0.49991	0.49995	0.00005 $*$
0.5	0.4	2π	0.41846	0.46009	0.06009
$*$0.5	0.4999	π	0.50048	0.50024	0.0003 $*$
0.5	0.46	π	0.68653	0.59722	0.13722

Portanto, acreditamos que o ponto hiperbólico descrito na seção anterior enriquece a estrutura deste sistema, e é em torno do mesmo que surgem as primeiras manifestações de comportamento caótico, o qual preencherá todo o espaço de fase para valores de ϵ da ordem de 0.5 (**Fig. 3.5.g** e **Fig. 3.6.h**).

Vamos analisar agora o significado físico de todos estes resultados. Como já foi dito, uma situação física interessante é aquela em que temos uma polarização zero com nenhum (ou quase nenhum) fóton presente. Esta situação corresponde justamente àquela em que $I_\psi(0) \simeq I_\varphi(0)$, ou equivalentemente, $E \simeq \omega I_\psi$, com $I_\varphi(0) = S$, a qual, como foi visto, corresponde a um ponto muito próximo do ponto hiperbólico, numa região altamente sensível a perturbação e que primeiro apresentará um comportamento caótico (**Fig. 3.3**→**Fig. 3.4** e **Fig. 3.5.c**). Isto significa que este comportamento caótico, já encontrado no maser por outros autores [22], tem sua razão na estrutura dinâmica do sistema, ou seja, na existência deste ponto hiperbólico. E mais ainda, apesar do modelo spin-boson ser uma aproximação teórica (desprezamos perdas e reposições de energia) para o maser experimental, temos como importante resultado que, em experiências com átomos não polarizados interagindo inicialmente com pouco ou nenhum fóton, características caóticas sempre estarão presentes, mostrando mais uma vez o alto grau de complexidade com que a Natureza se apresenta a nós, mesmo em um de seus sistemas mais simples: a interação da luz com um único modo de vibração com a matéria na forma de átomos com apenas dois níveis de energia.

Apêndice A

Demonstração da não unitariedade do operador $\hat{exp}(\imath\Phi)$

Vamos supor que o operador de aniquilação a possa ser escrito na seguinte forma:

$$a = u\, N^{\frac{1}{2}} \tag{A.1}$$

com N sendo o operador número no espaço de Fock e U um operador unitário qualquer, ou seja:

$$UU^{\dagger} = U^{\dagger}U = 1 \tag{A.2}$$

Vamos então aplicar (A.1) em um estado $|\, n\rangle$ do espaço de Fock. Teremos:

$$a\,|\, n\rangle = n^{\frac{1}{2}}\,|\, n-1\rangle = UN^{\frac{1}{2}}\,|\, n\rangle = n^{\frac{1}{2}}U\,|\, n\rangle \tag{A.3}$$

Portanto:

$$U\,|\, n\rangle = |\, n-1\rangle\,, \quad n = 1, 2, ... \tag{A.4}$$

ou seja, temos que U é um operador que mapeia o estado $|\, n\rangle$ em $|\, n-1\rangle$ para $n = 1, 2, 3, ...$ Porém, para $n = 0$ nada podemos concluir de (A.3). Mas da completeza do espaço de Fock teremos que ter:

$$U\,|\,n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} d_n\,|\,n\rangle \tag{A.5}$$

Usando agora (A.4) e (A.5) vamos calcular o efeito do operador $U^\dagger$ sobre um estado $|\,n\rangle$:

$$U^\dagger\,|\,n\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \left\langle m|\,U^\dagger|\,n\right\rangle\,|\,m\rangle = d_n^*\,|\,0\rangle + |\,n+1\rangle \tag{A.6}$$

para $n = 0, 1, 2, 3, ...$

Com isto, podemos verificar o efeito de $U^\dagger U$ sobre um estado $|\,n\rangle$:

$$U^\dagger U\;|\,n\rangle = U^\dagger\,|\,n-1\rangle = d_{n-1}^*\,|\,0\rangle + |\,n\rangle\,, \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{A.7}$$

$$U^\dagger U\;|\,0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} d_n\,U_\dagger\;|\,n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} d_n\,(d_n^*\;|\,0\rangle + |\,n+1\rangle) \tag{A.8}$$

Vemos de (A.7) que $U^\dagger U$ é igual a identidade se e somente se $d_n^* = 0$ para $n = 0, 1, 2, 3, ...$, o que em (A.8) implicará em:

$$U^\dagger U\;|\,0\rangle = 0 \tag{A.9}$$

ou seja, U não pode ser unitário. (Observem que apesar de $U^\dagger U \neq \mathbf{1}$, temos, pelo mesmo raciocínio, que $UU^\dagger = \mathbf{1}$ para $\forall\, n$).

Portanto, como não existe U unitário satisfazendo (A.1), em especial temos que o operador $e\hat{x}p(\imath\Phi)$ não é unitário, ou equivalentemente, o operador $\hat{\Phi}$ não pode ser auto-adjunto.

Apêndice B

Sobre as autofunções da hamiltoniana do modelo spin-boson na representação de Bargmann-Segal

Usando a representação de Bargmann-Segal para uma função $\psi_j(\xi)$ dada por (2.76-77), como os c_n^j são normalizados ($\sup_n c_n^j = 1$), temos que $\psi_j(\xi)$ é uma função inteira sobre o plano complexo. Vamos então obter algumas propriedades sobre esta função.

Primeiramente, vamos definir alguns conceitos [58]:

i) uma função inteira $f(\xi)$ é de ordem ρ se:

$$\lim_{r\to\infty} \sup \frac{\log\log M(r)}{\log r} = \rho \tag{B.1}$$

onde $M(r)$ é o módulo máximo de $f(\xi)$ para $|\xi| = r$, ou seja, $M(r) = \max_{|\xi|=r} |f(\xi)|$.

ii)**Teorema B.1:** a função inteira $f(\xi)$ do tipo (2.76) é de ordem finita se e somente se:

$$\mu = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{n \log n}{\log \frac{1}{|a_n|}} \tag{B.2}$$

é finito; mais ainda, $\rho = \mu$.

Com estes conceitos em mente, vamos definir uma nova função inteira $g(\xi)$ dada por:

$$g(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \xi^n \tag{B.3}$$

onde os b_n são dados por:

$$b_n = \frac{a_{n+n_o}}{a_{n_o}} \tag{B.4}$$

No caso das autofunções do modelo spin-boson para $\epsilon = 1$, vemos das Fig. **2.15.a→Fig. 2.15.g** que os coeficientes b_n devem satisfazer:

$$b_n = b\left(\frac{1}{n!}\right)^{\alpha} \tag{B.5}$$

com $1 < \alpha < 2$.

Oras, temos que a ordem de $f(\xi)$ é dada por:

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n\to\infty} \sup \frac{n \log n}{\log\left(\frac{1}{|a_n|}\right)} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \sup \frac{n \log n}{\log\left(\frac{1}{|a_{n_o}||b_{n-n_o}|}\right)} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \sup \frac{(n+n_o)\log(n+n_o)}{\log\left(\frac{1}{|a_{n_o}|}\right) + \log\left(\frac{1}{|b_n|}\right)} \end{aligned} \tag{B.6}$$

Seja $k = \log\left(\frac{1}{|a_{n_o}|}\right) + \log\left(\frac{1}{|b|}\right)$. Então:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{(n+n_o)\log(n+n_o)}{k + \alpha \log(n!)} \tag{B.7}$$

Usando a fórmula de Stirling:

$$n! \simeq n^n \exp(-n)\sqrt{2\pi n} \tag{B.8}$$

teremos:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{(n+n_o)\log(n+n_o)}{k + \alpha n \log n + \frac{\alpha}{2}\log(2\pi n) - \alpha n} \tag{B.9}$$

Usando o teorema de L'Hopital, podemos calcular (B.9) e teremos:

$$\rho = \frac{1}{\alpha} \tag{B.10}$$

Portanto, a ordem de $f(\xi)$ é tal que:

$$\frac{1}{2} < \rho < 1 \tag{B.11}$$

Vamos agora lembrar de alguns teoremas sobre ordem de funções inteiras:

Teorema B.2 (Teorema de Hadamard): Se $f(\xi)$ é uma função inteira de ordem ρ com zero na origem de ordem m, teremos:

$$f(\xi) = \xi^m \exp\left[Q(\xi)\right] P(\xi) \tag{B.12}$$

onde $Q(\xi)$ é um polinômio de grau $q \leq \xi$ e $P(\xi)$ é o produto canônico com os zeros de $f(\xi)$ (outros que não $\xi = 0$).

Teorema B.3: Uma função inteira de ordem não inteira possui infinitos zeros.

De acordo com os teoremas B.2 e B.3, temos que, no caso das autofunções do modelo spin-boson, $Q(\xi)$ deve ser uma constante, pois $\rho < 1$, Portanto, neste caso, $\psi(\xi)$ é determinada pelos seus infinitos zeros.

Apêndice C

Demonstração do Teorema 3.1

Primeiramente, vamos demonstrar que, partindo das equações (3.3-7) e (3.17-21), podemos escrever:

$$\frac{d.}{dt}\left[\rho_N^k(t) - \rho^k(t)\right] = \sum_{j=1}^{5} A_N^{kj}(t)\left[\rho_N^j(t) - \rho^j(t)\right] \tag{C.1}$$

para $k = 1, 2, 3, 4, 5$, com:

$$\sup_{k,j,N,t} \|A_N^{kj}(t)\| = A < \infty \tag{C.2}$$

Teremos então:

i) $k = 1 \quad (\rho_N^1 = x_N)$

$$A_N^{11} = 0, \quad A_N^{12} = -\omega_o \quad A_N^{13} = \frac{\imath\lambda}{2}(1-\epsilon)(\alpha - \alpha^+)$$

$$A_N^{14} = \frac{\lambda}{2}(1-\epsilon)z_N \quad A_N^{15} = -\frac{\imath\lambda}{2}(1-\epsilon)z_N$$

ii) $k = 2 \quad (\rho_N^2 = y_N)$

$$A_N^{21} = \omega_o \quad A_N^{22} = 0 \quad A_N^{23} = -\frac{\lambda}{2}(1+\epsilon)(\alpha + \alpha^+)$$

$$A_N^{24} = -\frac{\lambda}{2}(1+\epsilon)z_N \quad A_N^{25} = -\frac{\lambda}{2}(1+\epsilon)z_N$$

iii) $k = 3 \quad (\rho_N^3 = z_N)$

$$A_N^{31} = -\frac{\imath\lambda}{2}(1-\epsilon)(\alpha-\alpha^+) \quad A_N^{32} = \frac{\lambda}{2}(1+\epsilon)(\alpha+\alpha^+) \quad A_N^{33} = 0$$

$$A_N^{34} = -\frac{\imath\lambda}{2}(1-\epsilon)x_N + \frac{\lambda}{2}(1+\epsilon)y_N \quad A_N^{35} = \frac{\imath\lambda}{2}(1-\epsilon)x_N + \frac{\lambda}{2}(1+\epsilon)y_N$$

iv) $k = 4 \quad (\rho_N^4 = \alpha_N)$

$$A_N^{41} = -\frac{\imath\lambda}{2}(1+\epsilon) \quad A_N^{42} = -\frac{\lambda}{2}(1-\epsilon) \quad A_N^{43} = 0 \quad A_N^{44} = -\imath\omega \quad A_N^{45} = 0$$

v) $k = 5 \quad (\rho_N^5 = \alpha^+)$

$$A_N^{51} = \frac{\imath\lambda}{2}(1+\epsilon) \quad A_N^{52} = -\frac{\lambda}{2}(1-\epsilon) \quad A_N^{53} = A_N^{54} = 0 \quad A_N^{55} = \imath\omega$$

Observem que todos os operadores A_N^{kj} são limitados, já que x_N, y_N e z_N são menores ou iguais a $\frac{1}{2}$ e α e α^+ são limitados pelo fato de serem variáveis clássicas de um sistema hamiltoniano. Portanto, a condição (C.2) é satisfeita.

Voltando então a (C.1), podemos escrever:

$$\rho_N(t) - \rho(t) = [\rho_N(0) - \rho(0)] + \int_0^t A_N(t_1)\,[\rho_N(t_1) - \rho(t_1)]\,dt_1 \tag{C.3}$$

onde ρ_N, ρ são vetores colunas e A_N um operador matricial. Interagindo (C.3) consigo mesma, chegamos a solução:

$$\rho_N(t) - \rho(t) =$$

$$= \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots\ldots \int_0^{t_{n-1}} dt_n\, A_N(t_1) \ldots\ldots A_N(t_n)\right] [\rho_N(0) - \rho(0)] =$$

$$= O_N(t)\,[\rho_N(0) - \rho(0)] \tag{C.4}$$

onde o operador $O_N(t)$ definido em (C.4) satisfaz:

$$\|O_N(t)\| \leq \exp(At), \qquad \|O_N(t)\| = \sup_{i,j} \|O_{N_{i,j}}(t)\| \tag{C.5}$$

Portanto teremos:

$$\sup_i \omega_N \left\{ \left[\rho_N^i(t) - \rho^i(t)\right]^\dagger \left[\rho_N^i(t) - \rho^i(t)\right] \right\} \leq$$

$$\leq \omega_N \left\{ [\rho_N(t) - \rho(t)]^\dagger \, [\rho_N(t) - \rho(t)] \right\} =$$

$$= \omega_N \left\{ [\rho_N(0) - \rho(0)]^\dagger \, O_N^\dagger(t) \, O_N(t) \, [\rho_N(0) - \rho(0)] \right\} \leq$$

$$\leq \| O_N^\dagger(t) \, O_N(t) \| \, \omega_N \left\{ [\rho_N(0) - \rho(0)]^\dagger \, [\rho_N(0) - \rho(0)] \right\} \tag{C.6}$$

onde a última passagem pode ser verificada facilmente se escrevermos

$$\omega_N(.) = tr(\exp(-\beta H_N) \, . \,)/Z$$

onde tr denota traço de um operador e Z a função de partição do sistema, e considerarmos um conjunto completo de autofunções de H_N.

Oras, mas temos que $\| O_N^\dagger(t) \, O_N(t) \| = \| O_N(t) \|^2$, e de (C.5) e (C.6) teremos:

$$\sup_i \omega_N \left\{ \left[\rho_N^i(t) - \rho^i(t) \right]^\dagger \left[\rho_N^i(t) - \rho^i(t) \right] \right\} \leq$$

$$\leq 5 \exp(2At) \sup_i \omega_N \left\{ \left[\rho_N^i(0) - \rho^i(0) \right]^\dagger \left[\rho_N^i(0) - \rho^i(0) \right] \right\} \tag{C.7}$$

Portanto, se (3.12) vale para $(\rho_N^k - \rho^k)$ no instante inicial, (3.12) valerá para qualquer $t > 0$, e de acordo com (3.13-14), teremos que:

$$\lim_{N \to \infty} \omega^N \left(\rho_N^j(t) \right) = \rho^j(t)$$

$$\lim_{N \to \infty} \omega^N \left(\rho_N^j(t) \rho_N^i(t) \right) = \rho^j(t) \rho^i(t)$$

para qualquer t.

Apêndice D

Construção da função de Weierstrass para o modelo spin-boson e soluções para $\epsilon \simeq 0$

Dados g_2 e g_3 tais que:

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3, \quad z, y(z) \in \mathbf{C} \tag{D.1}$$

achamos primeiramente as raízes da equação:

$$4y^3 - g_2 y - g_3 = 0 \tag{D.2}$$

as quais chamaremos e_1, e_2 e e_3.

No caso que $g_2^3 - 27\,g_3^2 > 0$, todas as raízes e_1, e_2 e e_3 são reais (ver [51], pag. 444), e os períodos da função de Weierstrass são $2\omega_1$ real e $2\omega_2$ imaginário puro. Em todos os casos testados para o modelo spin-boson, com g_2 e g_3 dados por (3.47), a condição acima foi verificada.

Portanto, definimos e_1, e_2 e e_3 de tal modo que:

$$0 < g = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} < 1, \quad e_1 > e_2 \tag{D.3}$$

o que é sempre possível fazer.

Das propriedades da função θ de Riemann [51], temos que:

$$y(z) = A^2 \frac{\theta_2^2(Az,q)}{\theta_1^2(Az,q)} \theta_3^2(0,q)\, \theta_4^2(0,q) + e_1 \tag{D.4}$$

onde q é a solução positiva da equação:

$$g = \frac{\theta_4^4(0,q)}{\theta_3^4(0,q)} \tag{D.5}$$

com módulo menor que 1 (se g satisfaz (D.3) isto é sempre verdade [51]). A^2 é solução da equação:

$$A^2 = \frac{e_1 - e_2}{\theta_4^4(0,q)} \tag{D.6}$$

e $\theta_1(z,q)$, $\theta_2(z,q)$, $\theta_3(z,q)$, $\theta_4(z,q)$ são as funções teta de Riemann segundo a notação dada em [51]. Os períodos da função de Weierstrass será então dado por:

$$2\omega_1 = \frac{\pi}{A} \quad (real) \tag{D.7}$$

$$2\omega_2 = \frac{\pi\tau}{A} \quad (imaginário\ puro), \quad q = \exp(\imath\pi\tau) \tag{D.8}$$

Usando as séries dadas em [51] para as funções teta de Riemann:

$$\theta_1(z,q) = 2q^{\frac{1}{2}} \sin z - 2q^{\frac{9}{4}} \sin 3z + 2q^{\frac{25}{4}} \sin 5z - .... \tag{D.9}$$

$$\theta_2(z,q) = 2q^{\frac{1}{4}} \cos z + 2q^{\frac{9}{4}} \cos 3z + 2q^{\frac{25}{4}} \cos 5z + ... \tag{D.10}$$

$$\theta_3(z,q) = 1 + 2q \cos 2z + 2q^4 \cos 4z + 2q^9 \cos 6z + 2q^{16} \cos 8z + ... \tag{D.11}$$

$$\theta_4(z,q) = 1 - 2q \cos 2z + 2q^4 \cos 4z - 2q^9 \cos 6z + 2q^{16} \cos 8z + ... \tag{D.12}$$

utilizamos o fato delas terem boas propriedades de convergência, e truncamo-las em potências de q da ordem de 10. Com isto, pudemos calcular todas as constantes definidas acima.

Como último passo, utilizamos o fato de que a função $y(z)$ é real sobre as retas $\Re(z) = m\omega_1$ ou $\Im(z) = n\omega_2$, mas divergindo nos pontos $z = 2m\omega_1 + 2n\omega_2$, $n, m \in \mathbf{I}$ [53], e obtemos a solução física para o modelo spin-boson fazendo:

$$\xi(t) = \wp\left(\frac{\lambda t}{4} + \alpha + \omega_2\right) \tag{D.13}$$

ou

$$I_\varphi(t) = \wp\left(\frac{\lambda t}{4} + \alpha + \omega_2\right) + \frac{I_\psi}{3} \tag{D.14}$$

Apresentamos nas **Fig. D.1** e **Fig. D.2** o comportamento da função de Weierstrass como solução para $I_\varphi(t)$, com determinados valores iniciais.

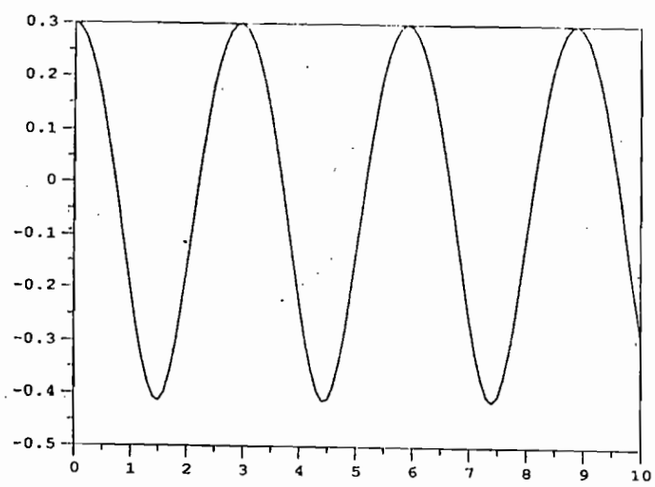

Fig. D.1- Gráfico de $I_\varphi \times t$ para $I_\psi = 1.0$ e $I_\varphi(0) = 0.3$.

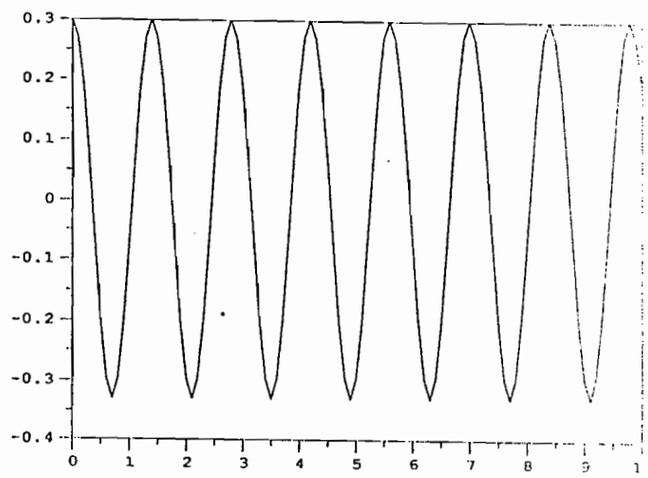

Fig. D.2- Gráfico de $I_\varphi \times t$ para $I_\psi = 5.0$ e $I_\varphi(0) = 0.3$

Utilizando a solução para $I_\varphi(t)$, podemos obter imediatamente as soluções para as outras variáveis, dadas por:

$$\varphi(t) = \arccos\left(\frac{K}{\lambda\sqrt{I_\psi - I_\varphi(t)}\sqrt{S^2 - I_\varphi^2(t)}}\right) \tag{D.15}$$

$$\psi(t) = \omega t + \int_0^t \frac{K}{2\left[I_\psi - I_\varphi(t')\right]}\, dt' + \psi(0) \tag{D.16}$$

Com estas soluções, as quais denotaremos a partir de agora com o índice "0", podemos calcular por teoria de perturbação, as soluções para ϵ pequenos, que são válidas até um tempo $T_{MAX} \simeq \frac{1}{\epsilon}$. Estas soluções são dadas por:

$$I_{\varphi PERT}(t) = I_{\varphi_o}(t) + \lambda\epsilon \int_0^t \sqrt{I_{\psi_o} - I_{\varphi_o}(t')}\sqrt{S^2 - I^2_{\varphi_o}(t')}\, \sin\left[2\psi_o(t') + \varphi_o(t')\right] dt' \tag{D.17}$$

$$\varphi_{PERT}(t) = \varphi_o(t) -$$

$$- \lambda\epsilon \int_0^t \left[\frac{1}{2}\frac{\sqrt{S^2 - I^2_{\varphi_o}(t')}}{\sqrt{I_{\psi_o} - I_{\varphi_o}(t')}} + \frac{\sqrt{I_{\psi_o} - I_{\varphi_o}(t')}}{\sqrt{S^2 - I^2_{\varphi_o}(t')}} I_{\varphi_o}(t')\right] \cos\left[2\psi_o(t') + \varphi_o(t')\right] dt' \tag{D.18}$$

$$I_{\psi PERT}(t) = I_{\psi_o} + 2\lambda\epsilon \int_0^t \sqrt{I_{\psi_o} - I_{\varphi_o}(t')}\sqrt{S^2 - I^2_{\varphi_o}(t')}\, \sin\left[2\psi_o(t') + \varphi_o(t')\right] dt' \tag{D.19}$$

$$\psi_{PERT}(t) = \psi_o(t) + \frac{\lambda\epsilon}{2} \int_0^t \frac{\sqrt{S^2 - I^2_{\varphi_o}(t')}}{\sqrt{I_{\psi_o} - I_{\varphi_o}(t')}} \cos\left[2\psi_o(t') + \varphi_o(t')\right] dt' \tag{D.20}$$

as quais foram utilizadas na seção **3.2**.

Apêndice E

Sobre a construção das seções de Poincaré para o modelo spin-boson

Utilizando a hamiltoniana (3.37), construimos a seção de Poincaré para as variáveis (I_φ, φ), fixando o valor da energia E e da variável ψ. Como H (3.37) é periódica em ψ com período igual a π, fixamos ψ sempre igual a 0 $mod\ \pi$. E fixando o valor da energia, obtemos para I_ψ os seguintes valores:

$$I_{\psi_o} = \frac{1}{\omega^2}\left[A - \sqrt{A^2 - \omega^2 B}\right], \quad se\ \cos\varphi_o > 0 \tag{E.1}$$

$$I_{\psi_o} = \frac{1}{\omega^2}\left[A + \sqrt{A^2 - \omega^2 B}\right], \quad se.\ \cos\varphi_o < 0 \tag{E.2}$$

com

$$A = E\omega + \frac{\lambda^2}{2}C^2\left(S^2 - I_{\varphi_o}^2\right) \tag{E.3}$$

$$B = E^2 + \lambda^2 C^2 I_{\varphi_o}\left(S^2 - I_{\varphi_o}^2\right) \tag{E.4}$$

$$C = \cos\varphi_o + \epsilon\cos\left(2\psi_o + \varphi_o\right) \tag{E.5}$$

onde aqui o índice "0" denota condições iniciais.

Portanto, dada uma condição inicial $(I_{\varphi_o}, \varphi_o)$ para uma determinada energia E, podemos calcular I_{ψ_o} pelas equações (E.1-2) (sempre $\psi_o = 0$), e evoluindo o sistema pelas equações (3.38-41), selecionamos todos os pontos cujas coordenadas (ψ, I_ψ) diferiam de (ψ_o, I_{ψ_o}) no máximo de δ (fizemos geralmente $\delta \simeq 10^{-3}$). Com estes pontos é que foram construídas as seções de Poincaré apresentadas no capítulo **3**.

Referências

[1] Dicke, R.H., Phys. Rev. **93**, 99 (1954)

[2] Sakurai, J.J., Advanced Quantum Mechanics (Reading, MA: Addison-Wesley) (1967)

[3] Mandl, F. and Shaw, G., Quantum Field Theory (A Wiley-Interscience publication) (1986)

[4] Nussenzveig, H.M., Introduction to Quantum Optics (Gordon and Breach, Science Publishers, Inc.) (1973)

[5] Hemmen, J.L. van, Z. Phys. B **38**, 279 (1980)

[6] Rabi, I.I., Phys. Rev. **51**, 652 (1937)

[7] Autler, S.H. and Townes, C.H., Phys. Rev. **100**, 703 (1955)

[8] Yuval, G. and Anderson, P.W., Phys. Rev. B **1**, 1522 (1970)

[9] Beck, R., Götze, W. and Prelovsek, P., Phys. Rev. A **20**, 1140 (1979)

[10] Solt, G. and Beck, H., Helv. Phys. Acta **60**, 560 (1987)

[11] Caldeira, A.O. and Leggett, A.J., Phys. Rev. Lett. **46**, 211 (1981)

[12] Spohn, H. and Dumcke, R., J. Stat. Phys. **41**, 389 (1985)

[13] Jaynes, E.T. and Cummings, F.W., Proc. IEEE **51**, 126 (1963)

[14] Graham, R. and Höhnerbach, M., Z. Phys. B **57**, 233 (1984)

[15] Graham, R. and Höhnerbach, M., Quantum Measurement and Chaos (NATO ASI Ser **161**) ed. Pike, E.R. and Sarkar, S. (New York: Plenum), 147 (1987)

[16] Kus, M., J. Math. Phys. **26**, 2792 (1985)

[17] Lamb, W.E.Jr. and Retherford, R.C., Phys. Rev. **79**, 549 (1950)

[18] Yariv, A., Quantum Electronics, 2nd. ed. (Wiley, New York) (1975)

[19] Power, E.A. and Zienau, S., Phil. Trans. R. Soc. **251**, 427 (1959)

[20] Schlicher, R.R., Becker, W., Bergou, J. and Scully, M.V., Interaction hamiltonian in Quantum Optics or:$\vec{\mathbf{p}}.\vec{\mathbf{A}}$ vs. $\vec{\mathbf{E}}.\vec{\mathbf{r}}$ revisited.

[21] Ackerhalt, J.R. and Milonni, P.W., J. Opt. Soc. Am. B **1**, 116 (1984)

[22] Belobrov, P.I., Zaslavski, G.M. and Tastakowski, G., JETP **44**, 945 (1976)

[23] Cibils, M.B., Cuche, Y., Wreszinski, W.F., Amiet, J-P. and Beck, H., J. Phys. A **23**, 545 (1990)

[24] Milonni, P.W., Ackerhalt, J.R. and Galbraith, H.W., Phys. Rev. Lett. **50**, 966 (1983)

[25] Eckhardt, B., Phys. Rep. **163**, 205 (1988)

[26] Ramani, A., Grammatricos, B. and Dorizzi, B., Phys. Lett. A **101**, 69 (1984)

[27] Hemmen, J.L. van and Waldenfels, W. von, Physica **100A**, 85 (1980)

[28] Shore, H.B. and Sander, L.M., Phys. Rev. B **7**, 4537 (1973)

[29] Bohigas, O. and Giannoni, M-J., Lect. Not. Phys. **209**, 1 (1984)

[30] Graham, R. and Höhnerbach, M., Phys. Rev. Lett. **57**, 1378 (1986)

[31] Kus, M., Phys. Rev. Lett. **54**, 1343 (1985)

[32] Lewenkopf, C.H., Nemes, M.C., Marvulle, V., Pato, M.P. and Wreszinski, W.F., Phys. Lett. A **155**, 113 (1991)

[33] Meschede, D., Walther, H. and Müller, G., Phys. Rev. Lett. **54**, 511 (1985)

[34] Meystre, P. and Wright, E.M., Chaos, Noise and Fractals, ed. Pyke, L.R. and Lugiato, L.A. (Bristol: Adam Helger) 102 (1988)

[35] Knight, P.L. and Radmore, P.M., Phys. Rev. A **26**, 676 (1981); Hioe, F.T., Yoo, H.I. and Eberly, J.H., Coupled nonlinear oscillators, ed. Chandra, J., Scott, A.C., **80**, Mathematical Studies (Amsterdam: North Holland) (1983)

[36] Bialynicki-Birula, I. and Bialynicka-Birula, Z., Phys. Rev. A **14**, 1101 (1976)

[37] Dirac, P.A.M., Proc. R. Soc. London Ser. A **114**, 243 (1927)

[38] Susskind, L. and Glogower, J., Physics **1**, 49 (1964)

[39] Pegg, D.T. and Barnett, S.M., Phys. Rev. A **39**, 1665 (1989); Pegg, D.T. and Barnett, S.M., Europhys. Lett. **6**, 483 (1988)

[40] Carruthers, P. and Nieto, M.M., Rev. Mod. Phys. **40**, 411 (1968)

[41] Reed, M. and Simon, B., Methods of Modern Mathematical Physics (Academic, New York) Vol. 1, 197 (1972)

[42] Barnett, S.M. and Pegg, D.T., J. Mod. Opt. **36**, 7 (1989)

[43] Berry, M.V., Some quantum-to-classical asymptotics, Les Houches, School on Chaos and Quantum Physics, **52** (North Holland, Amsterdam) (1989)

[44] Klauder, J.R. and Skagerstram, B., Coherent states, applications in physics and mathematical physics, (World Scientific, New York) (1985)

[45] Takahashi, K., J. Phys. Soc. Jpn. **55**, 762 (1986)

[46] Leboeuf, P. and Voros, A., J. Phys. A **23**, 1765 (1990)

[47] Cibils, M.B. et al, to be published

[48] Spohn, H., Stückl, R. And Wreszinski, W.F., Ann. Inst. Henri Poincaré **53**, 225 (1990)

[49] Cibils, M.B., Cuche, Y., Marvulle, V. and Wreszinski, W.F., Connection between the Pegg-Barnett and the Bialynicki-Birula phase operators, Phys. Rev. A, **43**, 4044 (1991)

[50] Hepp,K. and Lieb, E.H., Springer Lecture Notes in Physics **38**, 178 (1975)

[51] Whittaker, E.T. and Watson, G.N., A Course of Modern Analysis (Cambridge University Press) (1973)

[52] Almeida, A.M. O.de, Sistemas Hamiltonianos: caos e quantização (Ed. UNICAMP) (1987)

[53] Bateman Manuscript Project - Higher Transcendental Functions, **2** (McGraw Hill Book Company) (1953)

[54] Hunziker, W., Mathematical Theory of Multi-Particles Quantum Systems.

[55] Reed, M. and Symon, B., Methods of Modern Mathematical Physics, vol. **4** (New York, Academic) (1975)

[56] Guckenheimer, J. and Holmes, P., Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Applied Mathematical Sciences, vol. **42** (Springer-Verlag New York Inc.) (1983)

[57] Aguiar, M.A.M.de, Furuya, K., Lewenkopf, C.H. and Nemes, M.C., Chaos in a Spin-Boson Systems: I- Classical Analysis, to be published in Ann. Of Phys.

[58] Boas-Jr., R.P., Entire Functions, Pure and Applied Mathematics, vol. **5** (Academic Press, New York) (1954); Levin, B.Ya., Distribution of zeros of entire functions (Rhode Island) (1964)

[59] Cibils, M.B., Cuche, Y., Marvulle, V., Wreszinski, W.F., Amiet, J-P. and Beck, H., The semiclassical limit of the spin-boson model, J. Phys. A, **24**, 1661 (1991)

[60] IMSL – Problem-Solving Software Systems, Version 1.0 (April 1987)