

20

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE FÍSICA

*Alberto Villan  
José Walter  
Henrique Fleming*

*V.T. 217*

SBI-IFUSP



305M810T0217

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DAS  
TRAJETÓRIAS DE REGGE MESÔNICAS



DISSERTAÇÃO DE MESTRADO  
ANTONIO MONTES FILHO

Orientador : Dr. HENRIQUE FLEMING



JUNHO - 1973



À Noely

## AGRADECIMENTOS

Agradeço aos amigos:

- Henrique Fleming, pela orientação paciente, segura e estimulante.
- Milton Abramovich pelo incentivo e interesse constantes.
- Mário Abud pelas discussões e conversas iluminantes.
- E também, à Srta. Tamico Tsuda que datilografou esta tese, ao Sr. Bruno Manzon pela impressão e ao Sr. Atsushi Endo pelos desenhos .

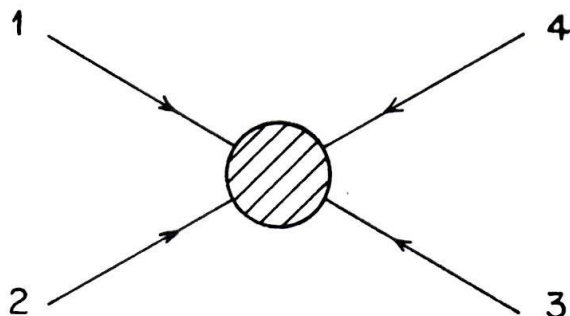
Agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo pelo apoio financeiro durante todo o período de realização desse trabalho.

## Í N D I C E

INTRODUÇÃO .....	1
I - PROPRIEDADES ANALÍTICAS DE $\alpha(s)$ ...	3
II - LIMITES PARA O COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO de $\alpha(s)$ .....	11
III - CONDIÇÕES PARA QUE NÃO EXISTAM ZEROS DE $\alpha(s)-N$ .....	20
APÊNDICE .....	24
REFERÊNCIAS .....	31

## INTRODUÇÃO

Consideremos o processo



onde 1,2,3,4 são partículas escalares de massas iguais,  $\mu$ . Esse processo e os derivados dele por "crossing" podem ser descritos por uma função  $F(s,t)^{(*)}$ , analítica nos planos  $s$  e  $t$  complexos, onde suas singularidades possuem um significado físico e que suporemos limitada por polinômios ao longo de direções complexas dos planos de cada uma das variáveis. Isto corresponde, basicamente, a admitir a validade de uma representação de Mandelstam<sup>(1)</sup>.

Como veremos no primeiro capítulo, fazendo-se as hipóteses acima para  $F(s,t)$ , podemos construir uma representação para a amplitude de onda parcial  $F_\ell(s)$  passível de ser continuada analiticamente no plano  $s$  complexo e no plano do momento angular complexo. Essa interpolação  $F(s,\lambda)^{(+)}$  terá polos  $\lambda = \alpha(s)$ , cujas localiza-

ções dependem da energia e que possuem um significado di  
nâmico: no contexto da equação de Schrödinger, o conheci  
mento do potencial determina a função  $\alpha(s)$ . Veremos que  
essa função está ligada ao comportamento assintótico da  
amplitude de espalhamento para grandes valores de  $t$  ou  $u$ .  
É nessa função  $\alpha(s)$ , chamada trajetória de Regge, que es  
tamos interessados.

No segundo capítulo serão obtidas restrições  
sobre os possíveis comportamentos assintóticos de  $\alpha(s)$ .  
Esse estudo se baseará num método que vem sendo desenvol  
vido já há algum tempo<sup>(2,3)</sup>: a partir das propriedades  
analíticas de  $\alpha(s)$  e de consequências da unitariedade da  
matriz  $S$ , construiremos uma função inteira (isto é, uma  
função que não tem singularidades no plano complexo fini  
to). As propriedades dessa função determinarão as res -  
trições que procuramos.

No segundo capítulo, eliminamos os zeros de  
 $\alpha(s)-N$  argumentando que esse seria o caso normal. No ter  
ceiro capítulo mostramos que existe uma generalização da  
hipótese de trajetória crescente que elimina automatica  
mente os zeros de  $\alpha(s)-N$ . Mostramos também uma hipótese  
mais fraca, isto é, supôr que  $\alpha(s)$  seja uma função de  
Herglotz, que tem o mesmo efeito.

---

(\*)  $s, t, u$  são as variáveis de Mandelstam definidas da  
maneira usual.

(†)  $\lambda$  é o momento angular complexo, isto é, os valores  
inteiros de  $Re\lambda$  coincidem com  $l$ , momento angular fí  
sico.

## CAPÍTULO I

### PROPRIEDADES ANALÍTICAS DE $\alpha(s)$

Como já mencionamos na introdução, o escopo desse trabalho é determinar o comportamento assintótico das trajetórias de Regge a partir de suas propriedades fundamentais. Veremos que as propriedades fundamentais que determinam o comportamento assintótico de  $\alpha(s)$  são as propriedades analíticas, derivadas da hipótese de analiticidade da amplitude de espalhamento  $F(s,t)$  nos planos  $s$  e  $t$  complexos, somadas a hipóteses de crescimento.

Vamos, então, passar a examinar a maneira pela qual são obtidas as propriedades analíticas de  $\alpha(s)$ . Para isso, temos que estudar as propriedades da amplitude de onda parcial. Esta é definida pela expressão

$$F_{\ell}(s) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dz P_{\ell}(z) F(s,t) \quad (1)$$

onde  $F(s,t)$  é a amplitude de espalhamento e

$$z = 1 + \frac{t}{2q^2} .$$

Procuraremos, agora, uma função  $F(s,\lambda)$  que interpole os valores físicos da amplitude de onda parcial, isto é,

$$F(s,\lambda=\ell) = F_{\ell}(s) . \quad (2)$$

A interpolação  $F(s,\lambda)$  só será útil se for única e refle-

tir as propriedades físicas de  $F_\ell(s)$ . Se a interpolação  $F(s, \lambda)$  existir e se

$$|F(s, \lambda)| < e^{(a|\operatorname{Im}\lambda| + b \operatorname{Re}\lambda)} \quad (3)$$

com  $a < \pi - \epsilon$ ,  $\epsilon > 0$  e  $b$  constantes reais, então o teorema de Carlson (4,5) nos garante que ela será única.

Levando-se em conta o teorema de Carlson, vemos que a equação (1) não é conveniente para a interpolação.  $P_\ell(z)$ , mesmo sendo uma função inteira de  $\lambda$ , não é suficientemente limitada para  $|\lambda| \rightarrow \infty$  com  $|z| \leq 1$  para satisfazer o teorema. Mesmo do ponto de vista da física, é plausível que (1) não dê uma interpolação significativa, porque ela não explicita nenhuma das propriedades físicas do sistema.

Uma maneira de obtermos uma expressão para  $F_\ell(s)$  suscetível de ser continuada analiticamente para o plano  $\lambda$  complexo é adotarmos uma relação de dispersão à  $s$  fixo para  $F(s, t)$  (6,7),

$$F(s, t) = \sum_{n=0}^{N-1} C_n(s) t^n + \frac{t^N}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} \frac{\Lambda_t(s, t') dt'}{t'^N (t' - t)} + \frac{u^N}{\pi} \int_{u_0}^{\infty} \frac{\Lambda_u(s, u') du'}{u'^N (u' - u)} \quad (4)$$

onde  $\Lambda_t$  e  $\Lambda_u$  são as partes absorptivas de  $F(s, t)$  no canal  $t$  e  $u$ , respectivamente, incluindo possíveis polos. O número  $N$  é suficientemente grande para garantir a convergência das integrais. Agora, se substituirmos (4) em (1), trocarmos a ordem de integração, o que é possível para  $N$



suficientemente grande, e se lembrarmos que

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dz P_{\ell}(z) \frac{z^N}{x^N(x-z)} = Q_{\ell}(x) \quad \text{para } \ell \geq N ,$$

$$Q_{\ell}(-x) = -(-1)^{\ell} Q_{\ell}(x)$$

obtemos (8)

$$F_{\ell}(s) = \frac{1}{\pi} \int_{v_0}^{\infty} dv \frac{1}{2q^2(s)} Q_{\ell}\left(1 + \frac{v}{2q^2(s)}\right) [A_t(s,v) + (-1)^{\ell} A_u(s,v)] \quad (5)$$

com  $\ell \geq N$  e  $v_0 \leq \min(t_0, u_0)$ .

A função de Legendre de segunda espécie  $Q_{\lambda}(z)$ , para  $\lambda$  complexo, é uma função meromórfica de  $\lambda$ , analítica no plano  $\lambda$  finito exceto para polos simples para valores inteiros negativos de  $\lambda$ . Para  $s \geq 4\mu^2$ , temos em (5)  $Q_{\lambda}(x)$  com  $x = 1 + v/2q^2 > 1$  e para esses valores do argumento, a função de Legendre é limitada para  $\lambda \rightarrow \pm i\infty$  (9)

Vemos que as funções

$$F_{t,u}(s, \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{v_0}^{\infty} dv \frac{1}{2q^2} Q_{\lambda}\left(1 + \frac{v}{2q^2}\right) A_{t,u}(s, v) \quad (6)$$

são regulares para  $\text{Re}\lambda > N$  e suficientemente limitadas para  $\lambda \rightarrow \pm i\infty$  de maneira que são unicamente determinadas por seus valores para  $\lambda = \ell > N$ . O mesmo, no entanto, não é verdade para a expressão completa (5) devido ao fator  $(-1)^{\ell}$ , o qual deve ser continuado como  $\exp(\pm i\pi\lambda)$  violando a limitação requerida pelo teorema de Carlson.

A amplitude de onda parcial  $F_{\ell}(s)$  determina

$F_t \pm F_u$  para  $\lambda = \ell$ ,  $\ell = \text{par}/\text{ímpar}$ . Assim, é conveniente introduzir as funções (10)

$$F_{\pm}(s, \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{v_0}^{\infty} dv \frac{1}{2q^2} Q_{\lambda} \left( 1 + \frac{v}{2q^2} \right) A_{\pm}(s, v) \quad (7)$$

onde

$$A_{\pm}(s, v) = A_t(s, v) \pm A_u(s, v) \quad (8)$$

Portanto nós temos para  $\ell > N$

$$F_{\pm}(s, \lambda = \ell) = F_{\ell}(s) \text{ para } \ell = \begin{pmatrix} \text{par} \\ \text{ímpar} \end{pmatrix} \quad (9)$$

e a função  $F(s, \lambda)$  é analítica para  $\text{Re} \lambda > N$  onde a representação (7) é válida. É importante notar que não existe uma função  $F(s, \lambda)$  que interpola univocamente todas as amplitudes físicas com  $\ell > N$  a menos que  $F_+ = F_-$  (isto é,  $F_u = 0$  ou  $A_u = 0$ , não há força de "exchange").

Até agora, consideramos a função  $F_{\pm}(s, \lambda)$  apenas para  $s$  real  $\geq 4\mu^2$ ; podemos usar a representação (7) para continuá-la para todo plano  $s$  complexo. Como  $Q_{\lambda}(z)$  é analítica em  $z$  exceto por pontos de ramificação para  $z = \pm 1$  e  $z = -\infty$  e  $A_{\pm}(s, v)$  é uma função regular de  $s$  no plano  $s$  com cortes,  $F_{\pm}(s, \lambda)$  é uma função analítica das duas variáveis complexas  $s$  e  $\lambda$ , regular para  $\text{Re} \lambda > N$  e  $s$  no plano com cortes. Além disso,  $F_{\pm}(s, \lambda)$  satisfaz a condição de realidade, isto é, (11)

$$F_{\pm}^*(s^*, \lambda^*) = F_{\pm}(s, \lambda) \quad (10)$$

As singularidades de  $F_{\pm}(s, \lambda)$  podem ser estuda

das por intermédio da representação (7). Vamos examinar, primeiro, as singularidades no plano  $s$  complexo.

A função  $A_{\pm}(s, v)$  pode ser escrita como (12)

$$A_{\pm}(s, v) = \frac{1}{\pi} \int_{s_0(v)}^{\infty} ds' \frac{\rho_{st}(s', v) \pm \rho_{su}(s', v)}{s' - s} + \frac{1}{\pi} \int_{s_0(v)}^{\infty} dv' \frac{\rho_{ut}(v', v) \pm \rho_{ut}(v, v')}{v' + s + v - 4\mu^2}$$

onde (13)

$$s_0(v) = 4\mu^2 + \frac{4\mu^4}{v - 4\mu^2} \quad (12)$$

(desde que estamos considerando o espalhamento de partículas escalares de massas iguais  $\mu$ ). Portanto,  $A_{\pm}(s, v)$  tem cortes para  $s \geq s_0(v)$  e

$$s \leq -v + 4\mu^2 - s_0(v) = -v - \frac{4\mu^4}{v - 4\mu^2} \quad (13)$$

que, para  $F_{\pm}(s, \lambda)$  correspondem aos cortes

$$s \geq 4\mu^2 \text{ e } s \leq -8\mu^2. \quad (14)$$

A função  $Q_{\lambda}(1+v/2q^2)$  não contribui com nenhum corte externo aos cortes (12) e (13). Assim, a função  $F_{\pm}(s, \lambda)$  tem, no plano  $s$ , apenas os cortes indicados em (14).

Vamos passar, agora, ao exame das singularidades de  $F_{\pm}(s, \lambda)$  no plano  $\lambda$ . Iremos observar que existe uma importante conexão entre suas singularidades no plano  $\lambda$  e as propriedades, em altas energias, da amplitude

$F(s,t)$  nos canais cruzados,  $u$  e  $t$ . Para tanto, vamos escrever a representação (7) na forma

$$F_{\pm}(s,\lambda) = E_{\pm}(s,\lambda) + D_{\pm}(s,\lambda) \quad (15)$$

onde

$$D_{\pm}(s,\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{a^2}^{\infty} dv \frac{1}{2q^2} Q_{\lambda} \left(1 + \frac{v}{2q^2}\right) A_{\pm}(s,v) \quad (16)$$

e  $E_{\pm}(s,\lambda)$  é a integral correspondente entre os extremos  $v_0$  e  $a^2$ .  $E_{\pm}(s,\lambda)$  é meromórfica em todo plano  $\lambda$ , exceto por polos para  $\lambda$  inteiro negativo. É fácil percebermos isso, se lembrarmos que a integral do produto de duas funções analíticas<sup>(15)</sup> num intervalo de integração finito é analítica. Tal apenas não acontecerá para valores de  $\lambda$  inteiros e negativos, para os quais  $Q_{\lambda}$  é singular. Portanto, vemos que as singularidades de  $F_{\pm}(s,\lambda)$ , se existirem, são geradas em  $D_{\pm}(s,\lambda)$ . O limite inferior da integral em (16) é  $a^2$ , mas  $a^2$  é arbitrário e pode ser escolhido muito grande, se bem que finito, de tal maneira que  $D_{\pm}(s,\lambda)$  passa a depender apenas da expansão assintótica de  $A_{\pm}(s,v)$  para  $v \rightarrow \infty$ . Dois tipos de expansões fisicamente aceitáveis são<sup>(16)</sup>

$$A_{\pm}(s,v) = 2b_{\pm}(s) v^{\alpha_{\pm}(s)} + 2d_{\pm}(s) v^{\delta_{\pm}(s)} + \dots \quad (17a)$$

e

$$A_{\pm}(s,v) = 2b_{\pm}(s) v^{\alpha_{\pm}(s)} (\ln v)^{\beta_{\pm}(s)} + \dots \quad (17b)$$

Quando substituimos (17a,b) em (16), notamos que  $D_{\pm}(s,\lambda)$  e portanto  $F_{\pm}(s,\lambda)$ , tem um polo para  $\lambda=\alpha(s)$ . Esse polo é conhecido como polo de Regge. O estudo da estrutura analítica de  $F_{\pm}(s,\lambda)$  já atingiu o grau de complexidade suficiente e podemos nos dedicar, especificamente, ao estudo das propriedades analíticas da trajetória de polos  $\alpha(s)$ , conhecida como trajetória de Regge.

As posições  $\alpha(s)$  do polo podem ser obtidas resolvendo-se a equação

$$D_{\pm}^{-1}(s, \alpha_{\pm}(s)) = 0 \quad (18)$$

Se  $D_{\pm}^{-1}(s,\lambda)$  é uma função regular na vizinhança de um ponto  $s, \lambda = \alpha_{\pm}(s)$  e se

$$\left. \frac{\partial D_{\pm}^{-1}(s, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\alpha_{\pm}(s)} \neq 0, \quad (19)$$

o teorema da função implícita mostra que  $\alpha_{\pm}(s)$  é também uma função regular de  $s$ . Da mesma maneira,  $\alpha_{\pm}(s)$  será singular nos pontos em que  $D_{\pm}^{-1}(s,\lambda)$  é singular ou em que a derivada se anula<sup>(17)</sup>.  $D_{\pm}^{-1}(s,\lambda)$  tem, no plano  $s$ , pontos de ramificação para  $s \geq 4\mu^2$  e para

$$s = -a^2 - \frac{4\mu^4}{a^2 - 4\mu^2} \quad (20)$$

(para partículas escalares de massa  $\mu$ ). Mas para  $a^2$

muito grande, o ponto de ramificação à esquerda tende a  $-\infty$  e pode ser ignorado. Isto é,  $\alpha_{\pm}(s)$  terá apenas um corte para  $s \geq 4\mu^2$  (no eixo real) e não tem o corte à esquerda que aparece em  $F_{\pm}(s, \lambda)$ .

Para  $s$  real abaixo de  $4\mu^2$ ,  $\alpha_{\pm}(s)$  é real<sup>(18)</sup>. Disso e do fato que temos um corte sobre o eixo real para  $s \geq 4\mu^2$ , concluimos que<sup>(19)</sup>

$$\alpha(s^*) = \alpha^*(s) . \quad (21)$$

E ainda, a exemplo do que concluimos na teoria de potencial (ref. 14), vamos supôr que

$$\text{Im } \alpha(s) > 0 \quad \text{para } s \geq 4\mu^2 . \quad (22)$$

Além disso, necessitamos das seguintes hipóteses de crescimento:

$$\left| \frac{\alpha(s)}{s^{\beta}} \right| \leq M \quad (23)$$

ao longo de qualquer direção no semi-plano superior e ao longo do eixo real.

## CAPÍTULO II

### LIMITES PARA O COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE $\alpha(s)$

Conhecidas as propriedades analíticas de  $\alpha(s)$  e feita a hipótese de crescimento (23), para determinar os limites do comportamento assintótico das trajetórias, podemos aplicar o seguinte método.

Seja  $N$  um número inteiro arbitrário que é par (ímpar) quando a "signature" de  $\alpha(s)$  é  $+(-)$ . Considere - mos a função

$$F(s) = |\alpha(s) - N| e^{-h(s)} \quad (24)$$

onde

$$h(s) = \frac{s}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds' \psi_+(s')}{s'(s'-s)} \quad (25)$$

com

$$\psi_+(s) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \psi(s+i\epsilon)$$

e

$$\alpha(s) - N = |\alpha(s) - N| e^{i\psi(s)} \quad (26)$$

Se supomos que  $\psi_+(s)$  tem limites finitos,  $\psi_+(\pm\infty)$ , quando  $s \rightarrow \pm\infty$ , a integral em (25) será convergente. Para  $s_0 < s < +\infty$ ,  $\exp[-h(s)]$  terá uma fase<sup>(20)</sup> que cancelará a fase de  $[\alpha(s) - N]$ , a discontinuidade desaparecerá e  $s_0$

não será mais um ponto de ramificação. Vamos ver qual é o caráter do ponto  $s_0$  para a função  $F(s)$ . Para isso devemos estudar  $h(s)$  nas vizinhanças de  $s_0$ . Supondo que  $\psi(s)$  satisfaz a condição de Hölder nas proximidades de  $s_0$ ,

$$|\psi(s) - \psi(s_0)| \leq K |s - s_0|^u \quad (27)$$

onde  $u > 0$ , teremos

$$\begin{aligned} h(s) &= \frac{s}{\pi} \int_{s_0}^{s_0+\epsilon} \frac{[\psi_+(s_0) + \psi_+(s') - \psi_+(s_0)]}{s'(s'-s)} ds' + \frac{s}{\pi} \int_{s_0+\epsilon}^{\infty} \frac{\psi_+(s') ds'}{s'(s'-s)} = \\ &= \psi_+(s_0) \frac{s}{\pi} \int_{s_0}^{s_0+\epsilon} \frac{ds'}{s'(s'-s)} + \frac{s}{\pi} \int_{s_0}^{s_0+\epsilon} \frac{\psi_+(s') - \psi_+(s_0)}{s'(s'-s)} ds' + \frac{s}{\pi} \int_{s_0+\epsilon}^{\infty} \frac{\psi_+(s') ds'}{s'(s'-s)} = \\ &= - \frac{\psi_+(s_0)}{\pi} \ln \frac{(s_0-s)(s_0+\epsilon)}{s_0(s_0+\epsilon-s)} + \frac{s}{\pi} \int_{s_0}^{s_0+\epsilon} \frac{\psi_+(s') - \psi_+(s_0)}{s'(s'-s)} ds' + \frac{s}{\pi} \int_{s_0+\epsilon}^{\infty} \frac{\psi_+(s') ds'}{s'(s'-s)} \quad (2) \end{aligned}$$

Para a segunda integral, usando (27), temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{s}{\pi} \int_{s_0}^{s_0+\epsilon} \frac{\psi_+(s') - \psi_+(s_0)}{s'(s'-s)} ds' \right| &\leq \frac{Ks}{s_0\pi} \int_{s_0}^{s_0+\epsilon} \frac{|s'-s_0|^u}{|s'-s|} ds' \\ &\leq \frac{Ks}{s_0\pi} \int_{s_0}^{s_0+\epsilon} |s'-s_0|^{u-1} ds' \leq \frac{Ks}{s_0\pi} \frac{\epsilon^u}{u} . \end{aligned}$$

Fica claro, então, que a segunda e terceira integrais em (26) são limitadas e que o primeiro termo não é limitado em  $s_0$ , de fato, tem uma singularidade logarítmica a menos



que  $\psi_+(s_0)$  se anule. Substituindo (28) em (24) obtemos

$$F(s) \underset{s \rightarrow s_0}{\sim} (s-s_0)^{\frac{\psi_+(s_0)}{\pi}} [\alpha(s_0)-N] \quad (29)$$

Como  $\text{Im}\alpha(s_0) = 0$ ,  $\psi_+(s_0)$  deve ser 0 ou  $\pi$ . Se escolhermos  $N > \alpha(s_0)$ , vemos que a equação (26) só é satisfeita para  $\psi_+(s_0) = \pi$ . Dessa maneira concluímos que  $F(s)$  tem um zero no limiar. Como  $F(s)$  não tem singularidades no plano  $s$  finito, ela é uma função inteira.

Sugawara e Tubis<sup>(21)</sup> mostraram que a condição  $\psi_+(\pm\infty)$  finito é equivalente à condição  $[\alpha(s)-N]$  tem um número finito de zeros. Como o termo  $\exp[-h(s)]$  só contribui com um zero,  $F(s)$  terá um número finito de zeros e portanto será uma função inteira de ordem finita  $\rho$ , onde  $\rho$  é um número inteiro.

Quanto ao comportamento assintótico de  $F(s)$ , Frye e Warnock<sup>(22)</sup> mostraram que, quando  $|s| \rightarrow \infty$ ,

$$|e^{-h(s)}| \rightarrow s^{\frac{\psi_+(\infty)}{\pi}} e^{\lambda(s)} \quad (30)$$

com  $|\lambda(s)| < \epsilon \ln r$  para todo  $\epsilon > 0$  e  $r = |s|$ . Assim, o crescimento de  $F(s)$  é o mesmo que de  $\alpha(s)$  (dado pela equação 23), isto é,

$$F(s) = O(r^\lambda) \quad (31)$$

quando  $r \rightarrow \infty$ .

Vamos examinar, agora, o que acontece com  $\psi_+(s)$  quando  $s$  se move para o infinito ao longo do eixo real. O número complexo  $\alpha(s)-N$  se move no plano do momento angular complexo como uma função de  $s$ . Como vimos, para  $N > \alpha(s_0)$ ,  $\psi_+(s_0) = \pi$ , isto é, o ponto que representa  $\alpha(s)-N$  para  $s=s_0$  se encontra no eixo real negativo. A medida que  $s$  cresce, esse ponto não pode cruzar o eixo real, pois

$$\text{Im} [\alpha(s)-N] = \text{Im} \alpha(s) \neq 0 \quad (32)$$

para  $s > s_0$ . Portanto

$$|\psi_+(s) - \pi| < \pi \quad (33)$$

e, em particular,

$$0 < \psi_+(\infty) < 2\pi. \quad (34)$$

Usando a condição  $\text{Im} \alpha(s) > 0$ , obtemos o resultado

$$0 < \psi_+(\infty) < \pi. \quad (35)$$

Existe uma estreita relação entre os zeros de uma função inteira e o seu comportamento assintótico. Portanto, é de nosso interesse estudar os zeros de  $F(s)$ . Ela não tem zeros no semi-plano  $\text{Re } s > s_0$ , desde que  $\alpha(s)$  seja uma trajetória crescente, pois sempre que

$$\alpha(m^2 - im \Gamma) = J \quad (36)$$

onde  $J$  é um número inteiro de paridade adequada e  $m^2 > s_0$ , teremos uma ressonância de massa  $m$ , spin  $J$  e largura  $\Gamma$ . Mas  $F(s)$  não tem ponto de ramificação, sendo totalmente definida na fôlha física, ao passo que ressonâncias são polos na segunda fôlha. Portanto, não poderemos ter algo como a igualdade (36). Como  $\alpha^*(s) = \alpha(s^*)$ ,  $\alpha(s)$  está proibido, também, de atingir valores  $J$  no quadrante conjugado complexo. Valores inteiros de  $\alpha(s)$  no eixo real são proibidos, para  $s > s_0$ , pela condição  $\text{Im } \alpha(s) > 0$ .

Abaixo do limiar ( $\text{Re } s < s_0$ ), não se pode excluir zeros de  $\alpha(s) - N$  com o argumento de que as trajetórias conhecidas são crescentes e  $N$  foi escolhido como sendo maior que  $\alpha(s_0)$ , pois estamos tratando com valores complexos de  $s$ , enquanto o que é observado crescer é a parte real da trajetória para  $s$  real. Valores inteiros da trajetória no semi-plano abaixo do limiar não representam ressonâncias e, em princípio, eles podem ocorrer em número finito. Esse número determina, essencialmente, o comportamento assintótico das trajetórias, isto é, quanto maior o número de zeros de  $\alpha(s) - N$ , maior o comportamento assintótico de  $\alpha(s)$  como potência de  $s$ .

Como  $F(s)$  é uma função inteira de ordem inteira, o teorema pequeno de Picard <sup>(23)</sup> nos diz que

$$F(s) = P(s) e^{Q(s)} \quad (37)$$

onde  $P(s)$  e  $Q(s)$  são polinômios . A condição (31) reduz  $Q(s)$  a uma constante e nós temos

$$F(s) = A(s-s_1)\dots (s-s_k) (s-s_0) \quad (38)$$

onde  $A$  é uma constante e  $s_1, \dots, s_k$  são números cuja parte real é menor que  $s_0$ . Nós contamos  $n$  vezes um zero  $n$ -uplo. Devido à condição de realidade, os zeros são reais ou agrupados em pares de conjugados complexos;  $F(s)$  é real para  $s$  real, portanto  $A$  deve ser real. Para  $s$  grande, podemos ver de (23) e (30) que  $A$  deve ser positivo. Então, recorrendo à expressão (24), podemos escrever

$$\alpha(s) = A(s-s_1)\dots (s-s_k)(s-s_0) e^{h(s)+N}. \quad (39)$$

A equação (29) mostra que o fator  $(s-s_0)$  é cancelado quando  $s$  se aproxima do limiar. Para  $s$  grande, o comportamento assintótico é dado por

$$\alpha(s) \sim A s^{k+1 - \frac{\psi_+(\infty)}{\pi}} e^{i\psi_+(\infty)}, \quad (40)$$

isto é, é da forma

$$\alpha(s) \sim s^n \quad (41)$$

e, devido a (35), com

$$k < n < k+1, \quad (42)$$

onde  $k$  é o número de zeros de  $F(s)$  abaixo do limiar.

É importante discutir o limite quando  $s$  tende a  $-\infty$ . Como todas as condições para a aplicação do teorema de Phragmén-Lindelöf<sup>(24)</sup> no semi-plano superior são satisfeitas, a função

$$\frac{\alpha(s)}{s^{k+1} - \frac{\psi_+(\infty)}{\pi}} \quad (43)$$

tende ao mesmo limite quando  $s \rightarrow \pm \infty$  ao longo do eixo real. É mais conveniente trabalhar com a função

$$\frac{\alpha(s)}{(-s)^{k+1} - \frac{\psi_+(\infty)}{\pi}} \quad (44)$$

Quando  $s \rightarrow +\infty$ , (44) tende ao limite

$$A e^{i\psi_+(\infty)} e^{i\pi(k+1) - \frac{\psi_+(\infty)}{\pi}} \quad (45)$$

Para  $s \rightarrow -\infty$ , o limite é o mesmo, portanto

$$\alpha(s) \underset{s \rightarrow -\infty}{\sim} A e^{i\pi(k+1)} (-s)^{k+1} - \frac{\psi_+(\infty)}{\pi} \quad (46)$$

Dados experimentais sobre trajetórias de Regge (veja apêndice) possuem uma característica universal: as trajetórias são aproximadamente lineares, sendo razoavelmente bem extrapoladas da região de espalhamento ( $s$  negativo) para a região de ressonâncias ( $s > s_0$ ). Não

se dispõe de dados entre a origem e o limiar, exceto para trajetórias que contêm uma partícula estável. De qualquer maneira, todas as trajetórias são bastante parecidas, crescendo praticamente linearmente de  $-\infty$  a  $+\infty$  enquanto  $s$  faz o mesmo ao longo do eixo real. Nós queremos, em consequência, que  $\alpha(s)$  tenda a  $-\infty$  com  $s$ . Da equação (46), segue que  $k$  deve ser par.

As equações (40) e (46) contêm o que se supõe seja o caso normal: um zero de  $F(s)$  ou, em outras palavras, nenhum valor inteiro de  $\alpha(s)$ , com a paridade correta, maior que  $\alpha(s_0)$ , abaixo do limiar. Nesse caso, os comportamentos assintóticos são

$$\alpha(s) \underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} B e^{i\pi(1-n)s^n} \quad (47)$$

$$\alpha(s) \underset{s \rightarrow -\infty}{\sim} B e^{i\pi(-s)^n} \quad (48)$$

e, da equação (47),

$$\operatorname{Re} \alpha(s) \underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} B \cos \pi(1-n)s^n \quad (49)$$

$$\operatorname{Im} \alpha(s) \underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} B \sin \pi(1-n)s^n \quad (50)$$

com a restrição  $0 < n < 1$ . Se, além disso, exigimos que as larguras sejam positivas, isto é,

$$\Gamma(s) = \frac{\operatorname{Im} \alpha(s)}{\sqrt{s} \frac{d \operatorname{Re} \alpha(s)}{ds}} > 0 \quad (51)$$

obtemos, substituindo (49) e (50) em (51) (25),

$$\frac{1}{2} < n < 1 . \quad (52)$$

### CAPÍTULO III

#### CONDIÇÕES PARA QUE NÃO EXISTAM ZEROS DE $\alpha(s)-N$

Como dissemos no capítulo anterior, consideramos caso normal a situação na qual  $F(s)$  tem apenas um zero. Examinemos as hipóteses devido as quais  $\alpha(s)-N$  não tem zeros, para  $\alpha(s_0) < N$ . Dizer, como se faz usualmente, que a trajetória é crescente não significa nada pois devemos excluir zeros devidos a valores complexos de  $s$  e, portanto, estaremos lidando com funções complexas, para as quais não existe o conceito de crescimento. Uma generalização adequada do fato observado que a parte real de  $\alpha(s)$  cresce quando  $s$  cresce ao longo do eixo real é a seguinte:

$$\alpha(s) = \alpha_R(s_R + i s_I) + i \alpha_I(s_R + i s_I) \quad (53)$$

Suponhamos que, para  $s_R < s_0$ ,

$$\frac{\partial \alpha_R(s_R + i s_I)}{\partial s_R} > 0 \quad (54)$$

para qualquer valor de  $s_I$ . Isso é uma generalização no sentido que ela requer que  $\alpha_R$  seja uma função crescente de  $s_R$  ao longo de qualquer paralela ao eixo real e não



apenas ao longo do eixo real. Como  $\alpha(s)$  é analítica nessa região, a condição de Cauchy-Riemann deve ser satisfeita e podemos escrever

$$\frac{\partial \alpha_I(s_R + i s_I)}{\partial s_I} > 0, \quad (55)$$

isto é,  $\alpha_I$  é uma função crescente de  $s_I$  ao longo de qualquer paralela ao eixo imaginário abaixo do limiar.

Quando  $\alpha(s)$  for igual a um número real, teremos  $\alpha(s) = \alpha^*(s)$ . Como, por outro lado,  $\alpha^*(s) = \alpha(s^*)$ , segue que  $\alpha(s) = \alpha(s^*)$ . Isto é, sempre que para  $s$  complexo  $\alpha(s)$  for igual a um número real,  $\alpha(s^*)$  será igual ao mesmo número real. Nesses pontos  $\alpha_I(s) = 0$  e podemos ir de  $s$  para  $s^*$  por meio de uma linha com  $s_R$  constante. Mas a condição (55) nos diz que ao longo de tal linha  $\alpha_I$  é sempre crescente e, como ele se anula no eixo real, não pode se anular em nenhum outro lugar. Finalmente, zeros reais de  $\alpha(s) - N$  são excluídos para  $s < s_0$  porque  $\alpha_R$  é crescente e  $\alpha(s_0) < N$ .

A condição (54) é muito forte pois ela exclui não só valores inteiros como também valores reais de  $\alpha(s)$ , para  $\text{Re } s < s_0$ .

Vamos mostrar, agora, que deve existir uma hipótese mais fraca que garante a não existência de zeros de  $\alpha(s) - N$ . Faremos isso provando que é possível se construir uma expressão para a trajetória que satisfaz (52) mas não satisfaz a desigualdade (55).

Examinemos um modelo devido a Fleming e Predazzi<sup>(26)</sup>. Suponhamos que  $\alpha(s)$ -N não tem zeros. Então, de (52), vemos que podemos escrever uma relação de dispersão com uma subtração para  $\alpha(s)$ ,

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) + \frac{s-s_0}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds' \alpha_I(s')}{(s'-s_0)(s'-s)} \quad (56)$$

fazendo, agora,

$$\sqrt{s} \Gamma(s) = \frac{\alpha_I(s)}{\alpha'_R(s)} = \gamma(s-s_0) \quad (57)$$

onde  $\gamma$  é uma constante positiva, obtemos

$$\alpha_I = \frac{\gamma s_I}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds' (s'-s_0) \alpha'_R(s')}{(s'-s_R)^2 + s_I^2} \quad (58)$$

e

$$\frac{\partial \alpha_I}{\partial s_I} = \frac{\gamma}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds' (s'-s_0) \alpha'_R(s')}{\{(s'-s_R)^2 + s_I^2\}^2} \{(s'-s_R)^2 - s_I^2\}. \quad (59)$$

Se desmembrarmos a integral em (59), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_I}{\partial s_I} = & \frac{\gamma(s_R^2 - s_I^2)}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds' (s'-s_0) \alpha'_R(s')}{\{(s'-s_R)^2 + s_I^2\}^2} - \frac{2\gamma s_R}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds' s' (s'-s_0) \alpha'_R(s')}{\{(s'-s_R)^2 + s_I^2\}^2} + \\ & + \frac{\gamma}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds' s'^2 (s'-s_0) \alpha'_R(s')}{\{(s'-s_R)^2 + s_I^2\}^2} \end{aligned} \quad (60)$$

Observando as integrais em (60), notamos que todos os integrandos são positivos definidos e que o sinal de  $\partial \alpha_I / \partial s_I$  depende dos fatores que multiplicam as integrais, donde se conclui que essa expressão pode ser negativa para valores convenientes de  $s_R$  e  $s_I$ .

Como esse modelo fornece soluções consistente com (52), isso é suficiente para mostrar que a hipótese (54) não é a mais fraca. De fato, uma hipótese mais fraca fica evidente de (58):  $\alpha_I$  deve ter o mesmo sinal que  $s_I$ , isto é, deve ser uma função de Herglotz<sup>(27)</sup>.

## APÊNDICE

As figuras 1,2 e 3 exibem algumas trajetórias de Regge mesônicas. Note-se que todas as trajetórias são praticamente lineares e possuem aproximadamente a mesma inclinação ( $\alpha' \sim 1.0 \text{ GeV}^{-2}$ ). O conhecimento de trajetórias mesônicas não é muito bom pois as ressonâncias mesônicas só podem ser investigadas em experiências de produção (devido à impossibilidade prática de se obter um alvo conveniente para experiências de formação), nas quais é muito difícil achar as ressonâncias e determinar spins e paridades.

Um exemplo clássico da obtenção de um gráfico de Chew-Frautschi ( $\text{Re } \alpha(t)$  versus  $t$ ) é visto para a trajetória do  $\rho$ :

Os dados de altas energias da distribuição angular numa direção próxima da dianteira para o processo  $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$  são mostrados na figura 4. Observamos que  $\frac{d\sigma}{dt}$  depende da energia como

$$\frac{d\sigma}{dt} = \phi(t) \left(\frac{s}{s_0}\right)^{2\alpha(t)-2} \quad (\text{A1})$$

onde  $s_0$  é um fator de escala arbitrário (usualmente se faz  $s_0 = 1 \text{ GeV}^2$ ). Da expressão (A1), obtemos

$$\alpha(t) = 1 + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\ln \left[ \frac{d\sigma}{dt}(s_2, t)}{d\sigma/dt(s_1, t)} \right]}{\ln \frac{s_2}{s_1}} \right\} \quad (A2)$$

Os valores obtidos, da figura 4, para  $\alpha(t)$  são mostrados na figura 5. Um ajuste para valores  $t > 0.28 \text{ GeV}^2$  da trajetória

$$\alpha = 0.58 + 1.00 t \quad (A3)$$

e quando extrapolamos para a região  $t > 0$  ela passa pelo valor físico do momento angular  $J = 1$  próximo da massa do  $\rho$ .

A parte imaginária da trajetória é obtida, por intermédio da largura das ressonâncias que ela interpola, como segue

$$\text{Im } \alpha(t) = \sqrt{t} \Gamma \frac{d\text{Re } \alpha(t)}{dt} \quad (A4)$$

As figuras abaixo foram tiradas de : An Introduction to Regge Theory, P. D. B. Collins, curso dado na British Universities Summer School in Theoretical Physics, R. H. E. L., setembro de 1972.



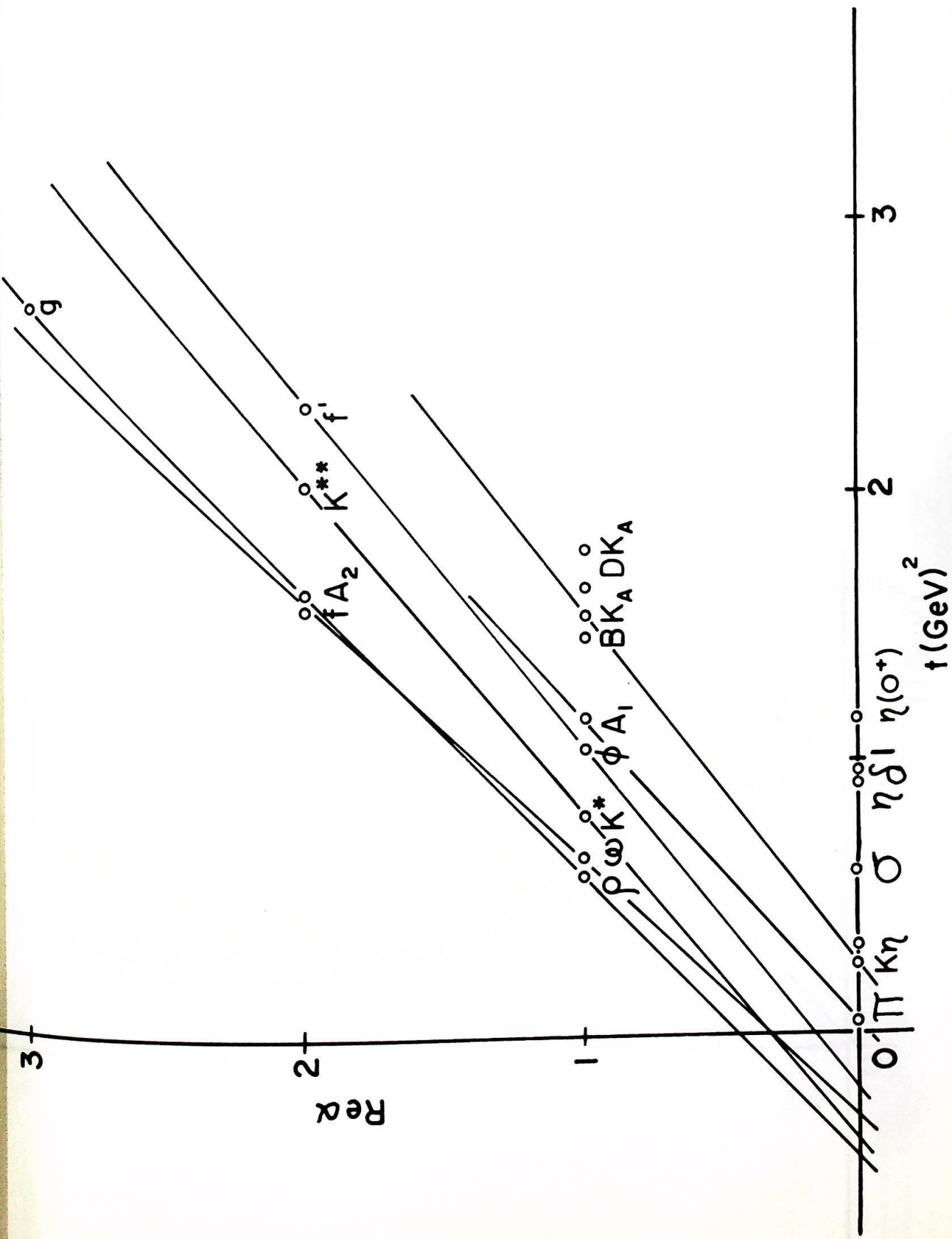


Fig. 1

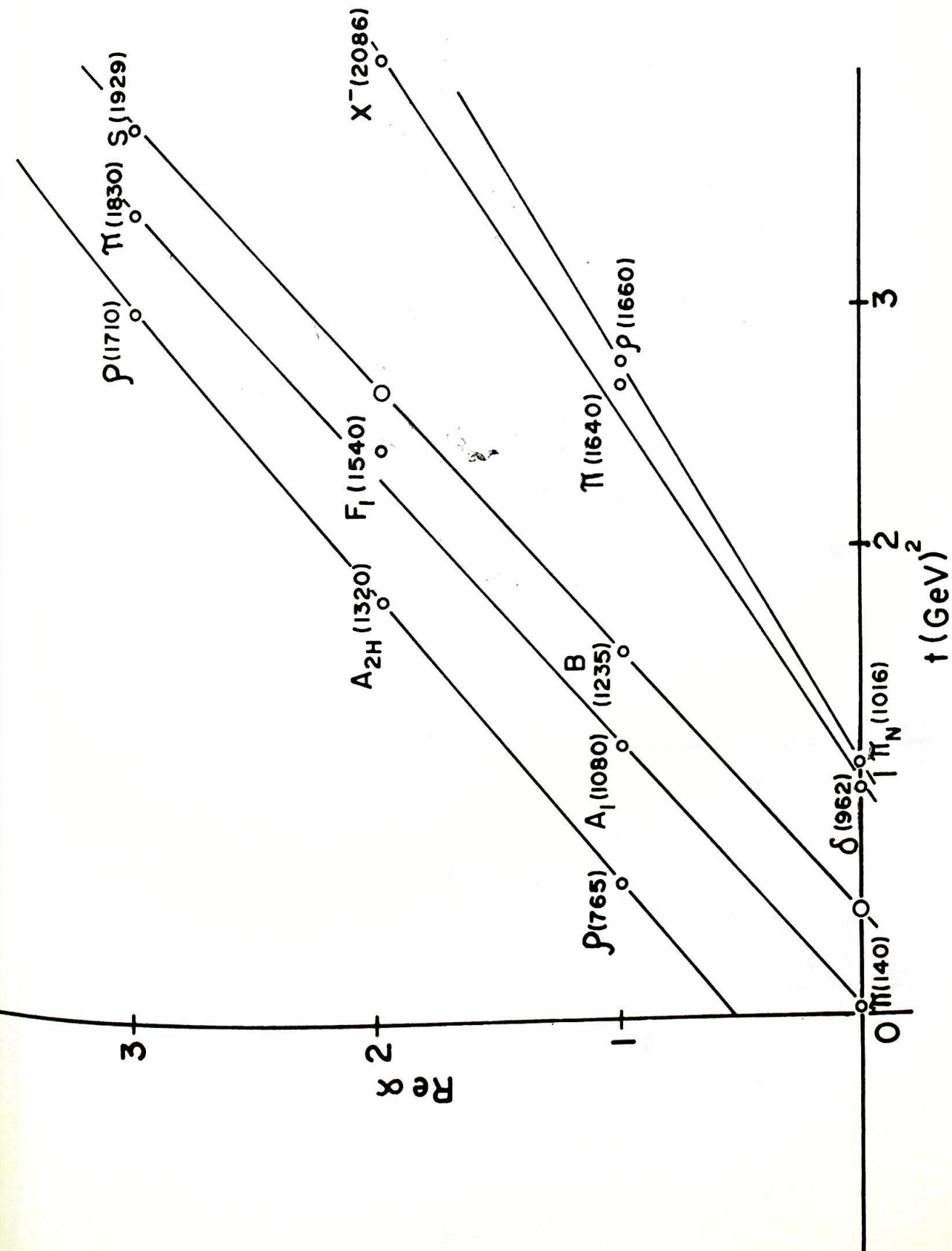


Fig. 2

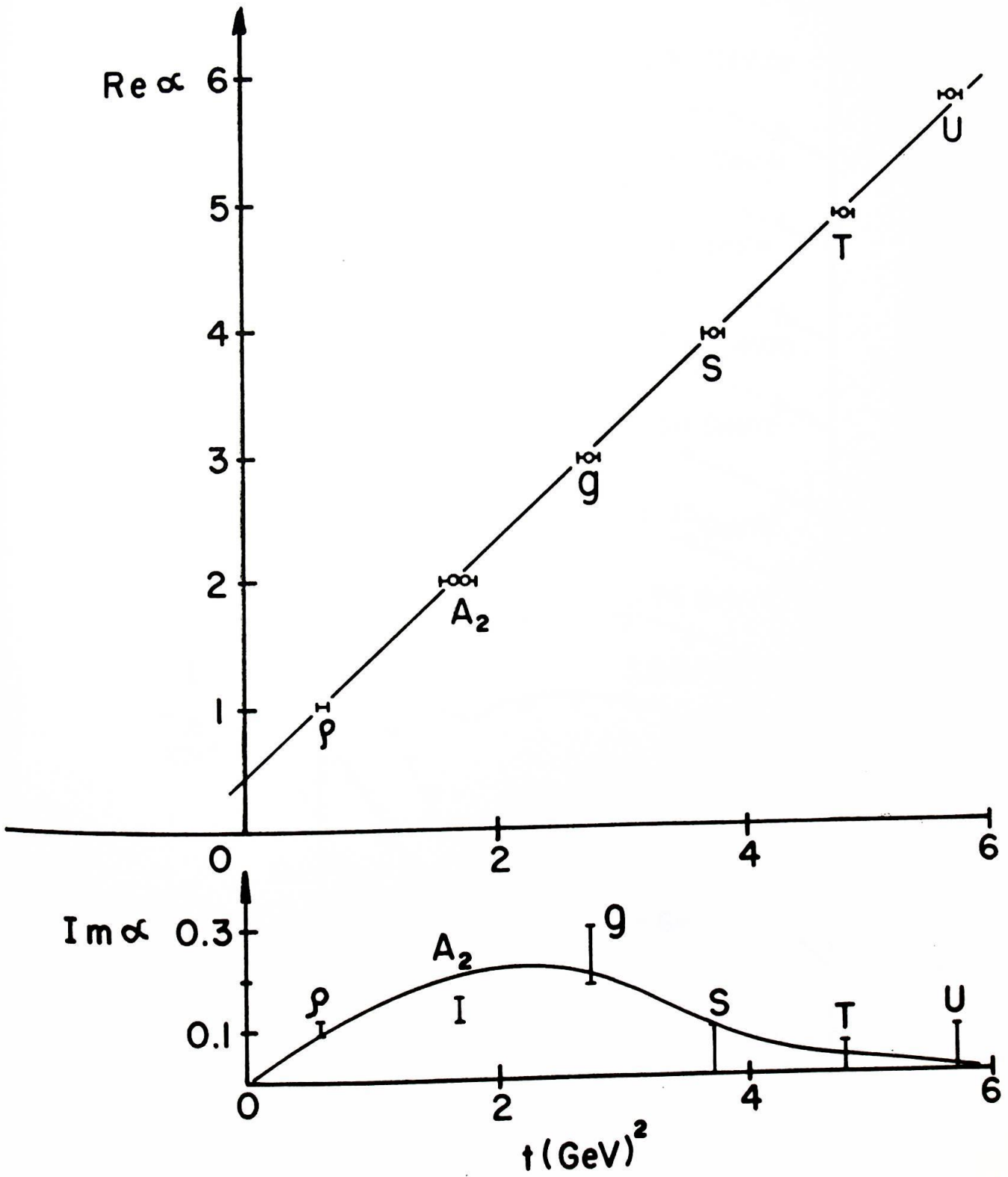


Fig.3



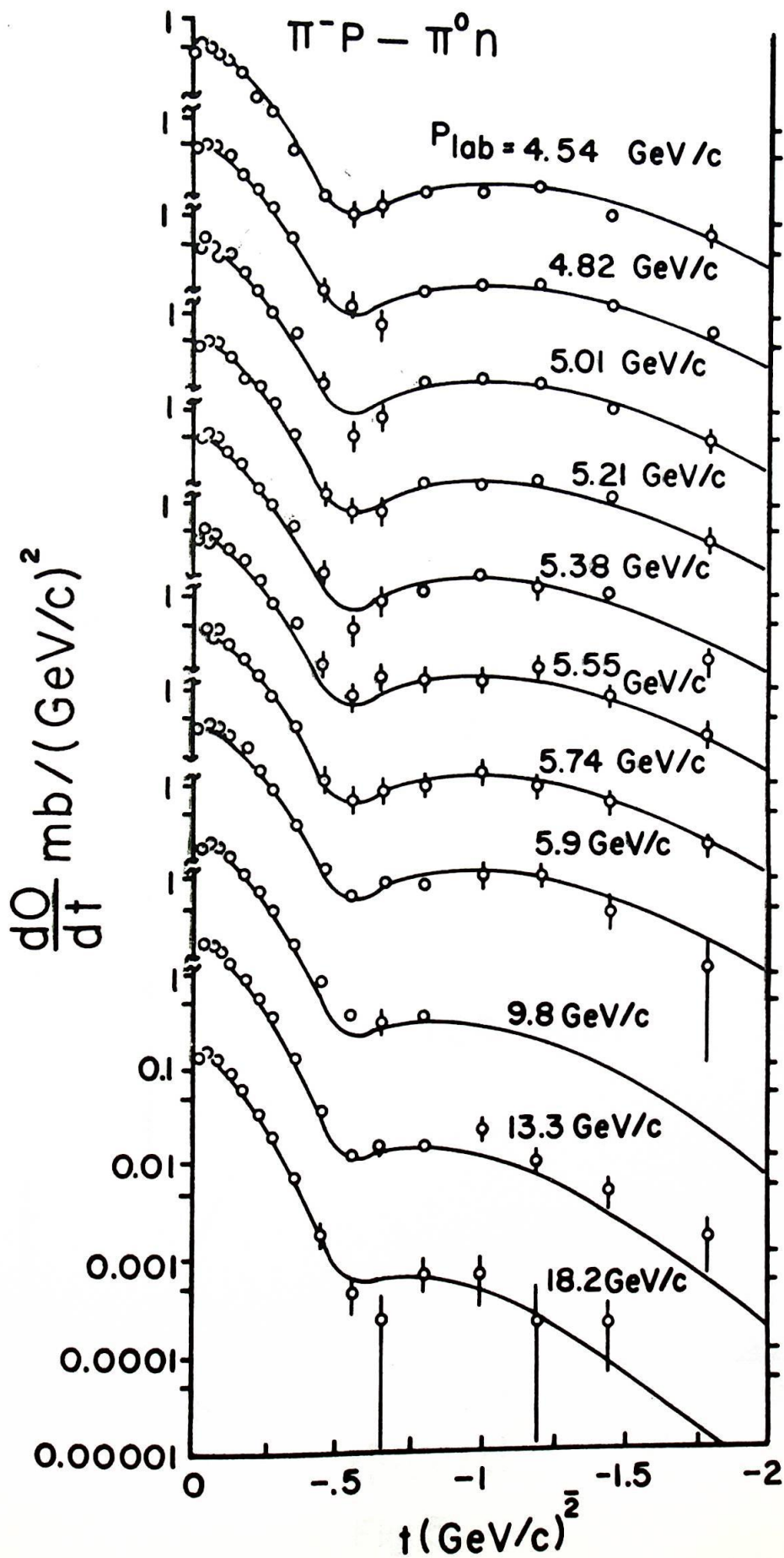


Fig. 4

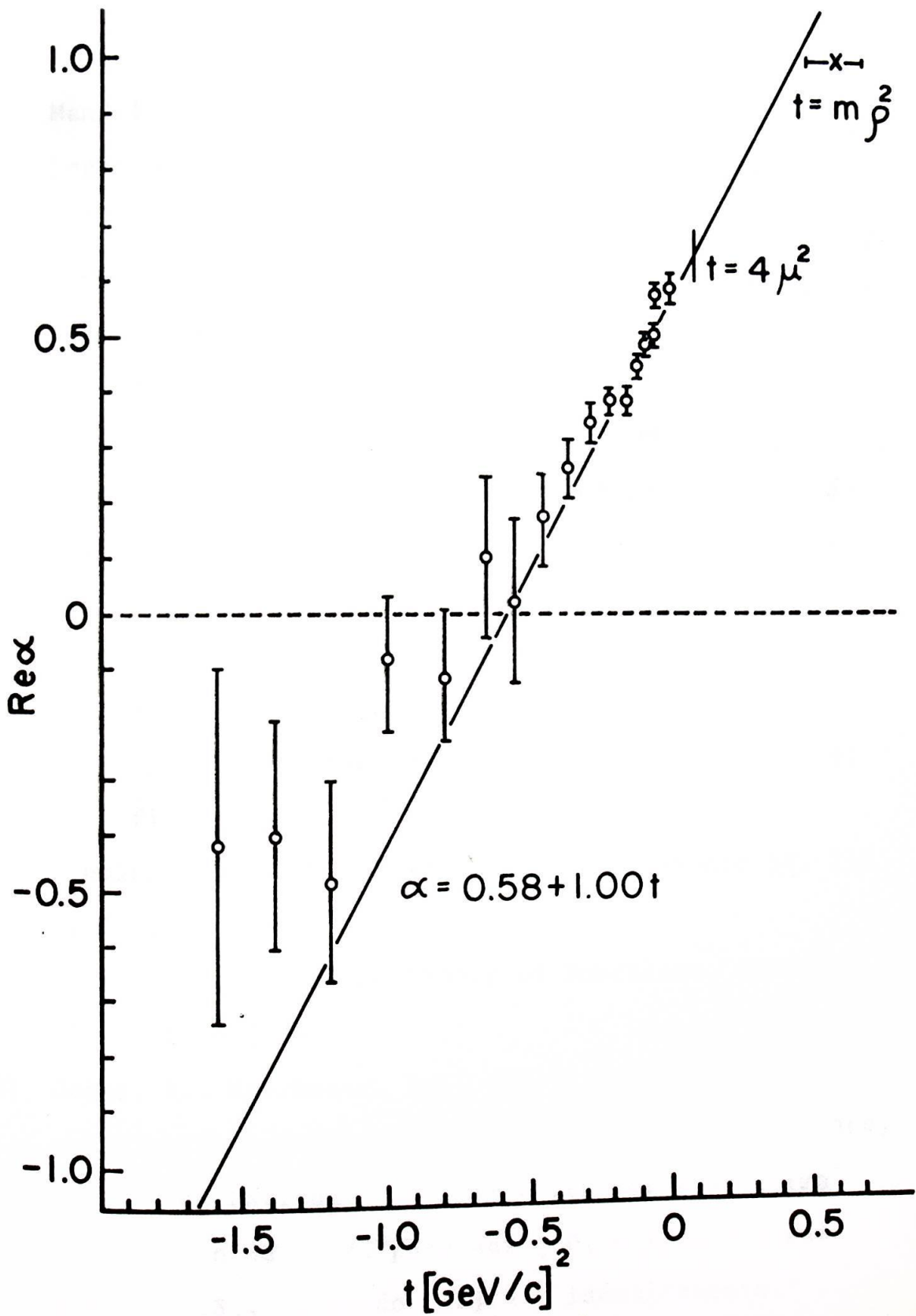


Fig. 5

## REFERÊNCIAS

- (1) Mandelstam, S., Phys. Rev. 112, 1344 (1958).
- (2) Degasperis, A., Predazzi, E., Nuovo Cimento 65A, 764 (1970);
- Fleming, H., Predazzi, E., Lett. Nuovo Cimento 1, 566 (1970);
- Fleming, H., Sawada, T., Lett. Nuovo Cimento 1, 1045 (1971);
- Fleming, H., Analiticidade e comportamento assintótico das trajetórias mesônicas, Tese de Livre Docência, I.F.U.S.P. (1971);
- Fleming, H., Lett. Nuovo Cimento 3, 363 (1972).
- (3) Childers, R. W., Phys. Rev. D2, 1178 (1970);
- Fleming, H., Maximum behavior of Regge trajectories at infinity, preprint do I.F.U.S.P. (1972);
- Fleming, H., Montes Filho, A., Nuovo Cimento 14, 215 (1973).
- (4) Titchmarsh, E.C., The Theory of Functions, Oxford, 2<sup>nd</sup> edition (1968).
- (5) Oehme, R., Moorhouse, R.G. (Ed.), Strong Interactions and High Energy Physics, London, Oliver & Boyd (1964);
- Teorema de Carlson: "Se  $f(z)$  é regular e da forma  $O(e^{k|z|})$ , onde  $k < \pi$ , para  $\text{Re } z \geq 0$ , e  $f(z) = 0$  para  $z = 0, 1, 2, 3, \dots$ , então  $f(z) = 0$  idênticamente."
- (6) Gribov, V.N., Soviet Physics JETP 14, 1395 (1962).

(7) Froissart, M., Phys. Rev. 123, 1053 (1961).

(8) Substituindo (4) em (1), temos

$$F_{\ell}(s) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} C_n(s) \int_{-1}^{+1} dz P_{\ell}(z) t^n + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dz P_{\ell}(z) \frac{t^N}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} \frac{A_t(s, t') dt'}{t'^N (t' - t)} +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dz P_{\ell}(z) \frac{u^N}{\pi} \int_{u_0}^{\infty} \frac{A_u(s, u') du'}{u'^N (u' - u)}$$

Trocando a ordem de integração vem

$$F_{\ell}(s) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} C_n(s) \int_{-1}^{+1} dz P_{\ell}(z) t^n + \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} dt' A_t(s, t') \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dz \frac{t^N P_{\ell}(z)}{t'^N (t' - t)} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{u_0}^{\infty} du' A_u(s, u') \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dz \frac{u^N P_{\ell}(z)}{u'^N (u' - u)}$$

Para  $\ell \geq N$ , o 1º termo se anula pela ortogonalidade dos  $P_{\ell}(z)$ ; usando

$$\frac{t^N}{t'^N (t' - t)} = \frac{1}{t' - t} - \frac{1}{t'^N} \sum_{r=1}^N t^{N-r} t'^{r-1}$$

$$\frac{u^N}{u'^N (u' - u)} = \frac{1}{u' - u} - \frac{1}{u'^N} \sum_{r=1}^N u^{N-r} u'^{r-1}$$

o 2º e 3º termo, pela mesma propriedade de ortogonalidade, se reduzem a

$$F_{\ell}(s) = \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} dt' A_t(s, t') \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dz \frac{P_{\ell}(z)}{t' - t} + \frac{1}{\pi} \int_{u_0}^{\infty} du' A_u(s, u') \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dz \frac{P_{\ell}(z)}{u' - u} \quad (\ell \geq N)$$

Fazendo-se a substituição  $t = -2q^2(1+z)$  e  $u = -2q^2(1-z)$ ,

$$(s) = \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt'}{2q^2} A_t(s, t') \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dz \frac{P_{\ell}(z)}{z'-z} - \frac{1}{\pi} \int_{u_0}^{\infty} \frac{du'}{2q^2} A_u(s, u') \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dz \frac{P_{\ell}(z)}{z'-z} \quad (\ell \geq N)$$

como

$$Q_{\ell}(z') = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dz \frac{P_{\ell}(z)}{z'-z}$$

chegamos à expressão

$$F_{\ell}(s) = \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt'}{2q^2} A_t(s, t') Q_{\ell}(z') - \frac{1}{\pi} \int_{u_0}^{\infty} \frac{du'}{2q^2} A_u(s, u') Q_{\ell}(z') \quad (\ell \geq N)$$

ou seja

$$(s) = \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt'}{2q^2} A_t(s, t') Q_{\ell}\left(1 + \frac{t'}{2q^2}\right) - \frac{1}{\pi} \int_{u_0}^{\infty} \frac{du'}{2q^2} A_u(s, u') Q_{\ell}\left(-1 - \frac{u'}{2q^2}\right). \quad (\ell \geq N)$$

Lembrando que  $Q_{\ell}(-z) = -(-1)^{\ell} Q_{\ell}(z)$ , obtemos, finalmente,

$$(s) = \frac{1}{\pi} \int_{v_0}^{\infty} \frac{dv}{2q^2} Q_{\ell}\left(1 + \frac{v}{2q^2}\right) [A_t(s, v) + (-1)^{\ell} A_u(s, v)]. \quad (\ell \geq N)$$

(9) Barut, A.O., Calogero, F., Phys. Rev. 128, 1383 (1962):

$$Q_{\lambda}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} \frac{e^{-(\lambda + \frac{1}{2})\zeta}}{\sqrt{\sinh \zeta}}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty$$

para  $|\arg(z \pm 1)| \leq \pi$ ,  $|\arg \lambda| \leq \pi - \delta$ ,  $\delta > 0$  e com

$$\zeta = \cosh^{-1} z = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}).$$

- (10) Essa expressão para  $F_{\pm}(s, \lambda)$  é conhecida como projeção de Froissart-Gribov.
- (11) Veja, p. ex., ref. (4)
- (12) Veja ref. (5).
- (13) Veja, p. ex., Eden, R.J., High Energy Collisions of Elementary Particles, Cambridge (1967).
- (14) O ponto de ramificação à esquerda é obtido fazendo-se

$$\frac{d}{dv} \left( -v - \frac{4\mu^4}{v-4\mu^2} \right) = 0$$

que dá

$$-1 + \frac{4\mu^4}{(v-4\mu^2)^2} = 0 \rightarrow v = 6\mu^2. \text{ Substituindo-se esse}$$

valor de  $v$  em (13), obtemos  $s \leq -8\mu^2$ .

(15)  $Q_{\lambda}(z)$  é analítica em todo plano  $z$  para  $z$  fora dos cortes sobre o eixo real  $z < -1$  e  $|z| < 1$ .  $A_{\pm}(s, v)$  é analítica pela própria estrutura da equação (4).

(16) Veja ref. (5).

(17) A derivada pode se anular, p. ex., num ponto onde as trajetórias se cruzem. Suponhamos que  $\alpha_1(s_0) = \alpha_2(s_0) = \alpha_0$  e que  $D^{-1}(s, \lambda)$  é regular na vizinhança do ponto  $(s_0, \alpha_0)$ . Como  $D^{-1}(s_0, \alpha_0) = 0$ , o teorema preparatório de Weierstrass (Markushevich, A., Teoria de las funciones analíticas, Vol. I, Editorial Mir, Moscou (1970)) nos permite afirmar que nas proximidades de  $s=s_0$ , a superfície  $\alpha(s)$  é

da forma geral

$$\alpha(s) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j (s-s_0)^{\frac{j}{n}} .$$

Para o caso particular  $n = 2$ , onde temos duas trajetórias se cruzando,

$$\alpha_{1,2}(s) = \alpha_0 \pm \text{const} (s-s_0)^{1/2} + \dots$$

Na verdade, as duas trajetórias são, simplesmente, ramos diferentes de uma mesma função analítica e, em consequência disso,  $\alpha(s)$  tem um ponto de ramificação para  $s = s_0$ . Se  $s_0$  é real, podemos fazer

$$z = (s-s_0)^{1/2}$$

e escrever

$$\alpha_1(s) = \alpha(z) \quad , \quad \alpha_2(s) = \alpha(-z) .$$

Um exemplo no qual surge um ponto de ramificação desse tipo são as trajetórias fermiônicas que possuem um ponto de ramificação para  $s = 0$ , devido à colisão de trajetórias na origem. Diga-se de passagem, esse é o motivo pelo qual nos restringiremos ao estudo das trajetórias mesônicas.

- (18) Tomamos essa afirmação da teoria de potencial (ver de Alfaro, V., Regge, T., Potential Scattering, North Holland, Amsterdam (1965)), pois para  $s$  real

abaixo de  $4\mu^2$ ,  $\alpha(s)$  interpola estado ligados e estados de espalhamento que possuem largura nula o que acarreta  $\text{Im}\alpha(s) = 0$ .

(19) Veja, p. ex., ref. (4) : Princípio de reflexão de Riemann-Schwarz.

$$(20) \quad h(s) = \frac{s}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds' \psi_+(s')}{s'(s'-s)}$$

Para  $s_0 < s < +\infty$ , teremos

$$h(s) = \frac{s}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds' \psi_+(s')}{s'(s'-s)} + i \psi_+(s) \quad (\text{o traço na integral significa valor principal}).$$

(21) Sugawara, M., Tubis, A., Phys. Rev. 130, 2127 (1963).

(22) Frye, G., Warnock, R.L., Phys. Rev. 130, 478 (1963).

No apêndice A do trabalho eles estudam o comportamento da integral no expoente quando  $|s| = r \rightarrow \infty$ .

Porém existe uma maneira bem mais simples de obter o comportamento assintótico de  $h(s)$ , que é usando

um teorema devido a Tricomi (Tricomi, F.G., Integral Equations, Interscience Publ., Inc., pg 182

(1957)). Para isso, devemos fazer a seguinte transformação de variáveis:

$$s = \frac{2s_0}{1-x}$$

Quando substituimos em  $h(s)$ , temos

$$h(s) \rightarrow f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\phi_+(y)}{y-x} dy \quad \text{onde } \phi_+(y) = \psi_+\left(\frac{2s_0}{1-x}\right)$$

Para  $y \rightarrow +1$  ( $s \rightarrow \infty$ ) obtemos, por intermédio do teorema



ma de Tricomi,

$$f(x) = \frac{A}{\pi} \ln(1-x) + o(1) \text{ onde } A = \lim_{x \rightarrow +1} \phi_+(x).$$

Portanto

$$h(s) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} \frac{\psi_+(\infty)}{\pi} \ln\left(\frac{2s_0}{s}\right) = - \frac{\psi_+(\infty)}{\pi} \ln s,$$

ou seja ,

$$e^{-h(s)} \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} s \frac{\psi_+(\infty)}{\pi}$$

(23) Markushevich, A., op. cit., Vol. II.

(24) Veja ref. (4) : Teorema de Phragmén-Lindelöf: "Seja  $f(z)$  uma função analítica de  $z = re^{i\theta}$ , regular na região  $D$  entre duas linhas retas, que formam um ângulo  $\frac{\pi}{\alpha}$  entre si na origem e nas linhas. Suponha que

$$|f(z)| \leq M \quad (*)$$

nas linhas e que, quando  $r \rightarrow \infty$ ,

$$f(z) = o(e^{r^\beta})$$

onde  $\beta < \alpha$ , uniformemente no ângulo. Então a desigualdade (\*) vale para toda região  $D''$ .

(25) De qualquer maneira que se calcule  $\frac{d\text{Re}\alpha(s)}{ds}$  em (51), isto é, derivando-se  $\text{Re}\alpha(s)$  e em seguida to-

mando o limite para  $s \rightarrow +\infty$  ou vice-versa, obtemos o mesmo resultado, como se pode verificar facilmente.

(26) Fleming, H., Predazzi, E., op. cit. .

(27) As funções de Herglotz são caracterizadas pela propriedade

$$\frac{f(z)}{z} \rightarrow A \quad \text{quando } |z| \rightarrow \infty$$

em todo setor

$$0 < \varepsilon \leq \arg z \leq \pi - \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}.$$