UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

O MODELO DE BOSONS INTERAGENTES E SUA RELAÇÃO
COM O BCS

SBI-IFUSP

305M810T1665

[Handwritten signature]
[Handwritten signature]
Bert Carlson

R I C A R D O D I N I Z

Dissertação submetida ao Instituto
de Física da Universidade de São
Paulo para obtenção do título de
Mestre em Ciências.

Orientador:

Prof.Dr. Celso Luiz Lima

SÃO PAULO

1990

Defesa: 04/07/90

502.82
D585m
m
e.1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Diniz, Ricardo

O modelo de bosons interagentes e sua
relação com o BCS. São Paulo, 1990.

Dissertação (Mestrado) - Universidade
de São Paulo. Instituto de Física. Depar-
tamento de Física Nuclear.

Área de Concentração: Física Nuclear
Orientador: Prof^o Dr. Celso Luiz Lima

Unitermos: 1.IBM; 2.BCS; 3.Microscopia.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer aqui à:

- Celso, pela orientação e amizade;
- M. R. Robillota, pela ajuda na compreensão dos diagramas;
- M. C. Nemes, pela ajuda em vários pontos deste trabalho;
- CNPq, pelo apoio financeiro
- Pessoal da secretaria e demais amigos do Departamento
- Todos aqueles que tiveram a paciência de ouvir as minhas reclamações quando as coisas não iam bem.

Em especial desejo agradecer à Tuca pela força e carinho.

R E S U M O

Através de um hamiltoniano efetivo baseado no tratamento de Nambu ⁹⁾ para o BCS, no qual incluimos além do emparelhamento monopolar o emparelhamento quadrupolar, discutimos a relação entre esse modelo e o Modelo de Bosons Interagentes. Uma aplicação é feita à cadeia O(6) do IBM, que corresponde ao limite χ -instável do modelo de Bohr.

As dificuldades encontradas e uma possível generalização para o modelo são discutidas.

A B S T R A C T

The Nambu mechanism for BCS theory is extended with inclusion of quadrupole pairing in addition to the usual monopole pairing. An effective hamiltonian is constructed and its relation to the IBM is discussed.

We discussed the faced difficulties and a possible generalization of this model.

Í N D I C E

INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO 1	
- O Modelo de Bosons Interagentes.....	7
CAPÍTULO 2	
- Introdução à Quebra Espontânea de Simetria.....	18
CAPÍTULO 3	
- A Teoria BCS(Emparelhamento Monopolar e Quadrupolar).24	
- Emparelhamento Monopolar e Quadrupolar.....	27
- Tratamento Via Campo Médio.....	31
CAPÍTULO 4	
- BCS e IBM.....	49
CONCLUSÃO.....	60
APÊNDICE 1	
Dificuldade com os Diagramas.....	63
APÊNDICE 2	
Uma possível generalização do modelo.....	66
REFERÊNCIAS.....	71

I N T R O D U Ç Ã O

Quando tentamos descrever o núcleo a partir de seus constituintes fundamentais e suas interações, nos defrontamos com um problema de ordem técnica: o núcleo é um sistema de muitos corpos e obter uma descrição exata é um problema muito complicado, senão impossível, pois além de o sistema possuir um número muito grande de graus de liberdade, a interação entre nucleons não é totalmente conhecida. No entanto, existem métodos aproximados que foram desenvolvidos para resolver parcialmente essas dificuldades; entre outros destaca-se a teoria do campo médio, que consiste em absorver uma parte da interação entre os nucleons em um potencial médio, no qual as partículas se movem independentemente umas das outras; a interação entre as partículas, não contida nesse campo médio, pode, eventualmente, ser tratada como uma perturbação, ou através de sua diagonalização no espaço de Hilbert gerado pelas partículas independentes, ou ainda com o uso de técnicas mais sofisticadas como a RPA (Random Phase Approximation). O tratamento adequado dessas interações residuais se revelou de vital importância na descrição de inúmeras propriedades nucleares como o espectro de energia e probabilidades de decaimento.

Da grande quantidade de dados experimentais disponíveis, vale ressaltar a existência de estados nucleares coletivos, caracterizados por altas taxas de decaimento entre si, quando comparadas com as previsões do modelo de camadas, e por uma marcante regularidade em seu espectro de energia. Para descrever esses movimentos nucleares coletivos, vários modelos não microscópicos foram propostos baseados na geometria do núcleo. Dentre esses modelos destaca-se o trabalho de Bohr e Mottelson ¹⁸⁾, onde o núcleo é tratado como um fluido carregado, incompressível e irrotacional; nesse trabalho considera-se o modo quadrupolar como responsável pelo comportamento do espectro coletivo nuclear a baixas energias, apresentando o movimento nuclear associado características rotacionais, vibracionais e γ -instáveis.

Um outro modelo de grande importância na descrição de movimentos nucleares coletivos é o modelo de bosons interagentes, IBM ¹³⁾. Aqui, ao contrário do modelo de Bohr, não é feita nenhuma associação geométrica, sendo o sistema nuclear descrito como constituído de bosons (interpretados em primeira aproximação como pares de fermions) de momento angular zero e dois. No capítulo 1 apresentamos, a nível introdutório, as principais características do IBM.

Apesar de seu inegável sucesso, o IBM é um modelo essencialmente fenomenológico que precisa de uma fundamentação microscópica adequada. Nos últimos anos várias abordagens distintas foram tentadas ¹⁷⁾ e nesse contexto se insere o trabalho de Nambu ⁹⁻¹¹⁾. A idéia desse último trabalho é que tanto o IBM quanto o BCS possuem pares de férmions acoplados a momento angular total zero e descrevem movimentos coletivos. No entanto, o IBM também possui bosons (pares de férmions) de momento angular 2 e que devem ser levados em conta em um tratamento do tipo BCS. Sendo assim, neste trabalho incluimos explicitamente o emparelhamento quadrupolar no tratamento de Nambu do BCS e dessa forma mostramos mais claramente a ligação entre os dois modelos.

Diferentemente do IBM, o modelo BCS é microscópico no sentido de que trata das interações entre os constituintes fundamentais do sistema e cujo mérito consiste em dar uma descrição quantitativa do fenômeno de emparelhamento tanto em física nuclear como em física do estado sólido. Talvez a característica mais importante do fenômeno de emparelhamento, e que é explicada pelo modelo BCS, seja o surgimento de um "gap" de energia entre o estado fundamental e os primeiros estados excitados de um sistema nuclear ou eletrônico. No caso de física nuclear, o estado fundamental de um núcleo par-par é preenchido com pares de prótons e pares de neutrons e os estados excitados não

coletivos são devidos a excitações de partícula, enquanto as excitações dos pares originam movimentos coletivos. Em núcleos par-ímpar, onde há uma partícula a mais ou a menos, não há gap de energia mesmo ocorrendo o emparelhamento entre os nucleons do caroço par-par pois devemos considerar a interação entre a partícula ímpar e o caroço. Trataremos aqui apenas com núcleos par-par.

O BCS, entretanto, é também uma teoria de campo médio e como tal viola alguma(s) simetria(s) do hamiltoniano de partida; no caso de emparelhamento a momento angular total zero é o número de partículas que deixa de ser uma quantidade conservada. O tratamento proposto por Nambu para o BCS, feito no contexto de quebra espontânea de simetria, fornece duas espécies de excitações bosônicas, que denotaremos por π e σ , além das excitações fermiônicas que são obtidas quando fornecemos energia suficiente para quebrar um "par de Cooper". Os modos coletivos são gerados a partir da própria interação de emparelhamento cuja contribuição é incorporada ao novo campo médio.

A quebra de simetria gera massas das excitações bosônicas e fermiônicas obedecendo à relação $m_\pi : m_f : m_\sigma = 0 : 1 : 2$. Alternativamente, essa mesma relação de massa pode ser obtida através de um hamiltoniano efetivo onde se leva em conta as interações boson-boson e boson-fermion com constantes de acoplamento

apropriadas. Em outras palavras, o que Nambu faz (ver cap. 4) é escrever um hamiltoniano efetivo onde os bosons, que são interpretados como pares de fermions, encontram-se degenerados em um estado condensado. A escolha de um desses estados bosônicos degenerados para representar o estado fundamental (do sistema bosônico) é feita permitindo que o respectivo boson desenvolva um valor esperado do vácuo diferente de zero. Novamente temos uma quebra de simetria que gera a relação de massa $0 : 1 : 2$ e assim uma das características do BCS é bem reproduzida por esse hamiltoniano efetivo.

Convém notar ainda que, em um tratamento de campo médio de pares de nucleons que se acoplam a $J=0$, a única simetria quebrada é o número de partículas, que em linguagem de teoria de grupos é representada pelo grupo das transformações unitárias a 1 dimensão, $U(1)$. No caso de pares acoplados a $J=0$, $M=0$ e $J=2$, $M = -2, -1, 0, 1, 2$, além da violação do número de partículas há a violação da simetria sob o grupo $O(6)$, que é o grupo das transformações ortogonais em 6 dimensões.

No presente trabalho estamos interessados apenas em sistemas γ -instáveis (que correspondem à cadeia $U(6) \supset O(6) \supset O(5) \supset O(3)$ do IBM) (ver cap. 1) pois estes sistemas são mais simples de serem descritos do ponto de vista do BCS. Consideraremos então que os nucleons de valência estejam ocupando estados com $j=3/2$ de modo que podem se acoplar somente a $J=0$ e $J=2$ ($M = -2, -1, 0, 1, 2$) implicando em uma simetria de partida $U(6) \supset O(6)$ no subespaço bosônico.

1 - O MODELO DE BOSONS INTERAGENTES (IBM)

O IBM¹³⁾ é um modelo essencialmente fenomenológico que descreve movimentos nucleares coletivos em baixas energias. Esse modelo na sua versão mais singela não faz distinção entre prótons e nêutrons e utiliza dois tipos de bosons na construção dos estados nucleares coletivos: o boson de momento angular 0 (boson s) e o boson de momento angular 2 (boson d). Microscopicamente esses bosons podem ser interpretados como pares de fermions correlacionados. Somente nucleons de valência são importantes na formação desses pares coletivos, de modo que o número de bosons é igual ao número de pares de partículas (ou buracos) fora da camada fechada mais próxima. Esses 6 bosons formam um espaço de Hilbert com simetria $U(6)$ sendo que o número quântico associado às operações de simetria sob $U(6)$ fornece o número total de bosons, o qual é uma quantidade conservada.

Uma indicação da existência dos bosons s e d pode ser obtida através da análise dos elementos de matriz de uma interação efetiva entre nucleons idênticos ocupando níveis de partícula independente. Como exemplo mostramos o elemento de matriz para o nível $g_{9/2}$ (prótons) na figura 1¹⁴⁾.

Figura 1- Elemento de matriz para a configuração $(\pi g_{9/2})^2$.

Podemos ver da figura que esses elementos de matriz são bastante atrativos quando os nucleons se acoplam a $J=0$. Para $J=2$ e $J=4$ a interação permanece atrativa mas no caso de $J=4$ ela é muito fraca. Embora existam versões do IBM que incluem os bosons com momento angular 4 (boson g), trataremos aqui o IBM em sua versão original com bosons $\underline{s}$ e $\underline{d}$.

O hamiltoniano mais geral que contém termos de 1 e 2 corpos nos bosons $\underline{s}$ e $\underline{d}$, que conserva o número total de bosons e é invariante por rotações, pode ser escrito como (13,16)

$$\begin{aligned}
 H = & \epsilon_s (s^\dagger s) + \epsilon_d (d^\dagger \tilde{d}) + \sum_{L=0,2,4} 1/2 (2L+1)^{1/2} \cdot C_L \\
 & \{ [d^\dagger d^\dagger]^L [\tilde{d} \tilde{d}]^L \}^0 + (1/\sqrt{2}) \tilde{V}_2 \{ [d^\dagger d^\dagger]^2 [\tilde{d} \tilde{s}]^2 + \\
 & [d^\dagger \tilde{s}]^2 [d^\dagger d^\dagger]^2 \}^0 + (1/2) \tilde{V}_0 \{ [d^\dagger d^\dagger]^0 [\tilde{s} \tilde{s}]^0 + [s^\dagger s^\dagger]^0 [\tilde{d} \tilde{d}]^0 \}^0 + \\
 & U_2 \{ [d^\dagger s^\dagger]^2 [\tilde{d} \tilde{s}]^2 \}^0 + (1/2) U_0 \{ [s^\dagger s^\dagger]^0 [\tilde{s} \tilde{s}]^0 \}^0 \quad (1)
 \end{aligned}$$

Se considerarmos que o número total de bosons, $N = n_s + n_d$, é conservado, podemos substituir n_s por $N - n_d$ e reescrever (1) como

$$H = \epsilon_s N + (1/2) U_0 N(N+1) + \epsilon' (d^\dagger \tilde{d}) + \sum_{L=0,2,4} 1/2 (2L+1)^{1/2} \\ c_L \left\{ [d^\dagger d^\dagger]^L [\tilde{d} \tilde{d}]^L \right\}^0 + (1/\sqrt{2}) \tilde{V}_2 \left\{ [d^\dagger d^\dagger]^2 [\tilde{d} \tilde{s}]^2 \right\}^0 + [d^\dagger s^\dagger]^2 \\ [\tilde{d} \tilde{d}]^2 \right\}^0 + (1/2) \tilde{V}_0 \left\{ [d^\dagger d^\dagger]^0 [\tilde{s} \tilde{s}]^0 + [s^\dagger s^\dagger]^0 [\tilde{d} \tilde{d}]^0 \right\}^0 \quad (2)$$

onde $\epsilon' = \epsilon_d - \epsilon_s$, $\tilde{d}_\mu = (-1)^\mu d_\mu$ ($\mu = -2, -1, 0, 1, 2$) comporta-se como um tensor esférico de momento angular 2 e projeção μ , $d_\mu^\dagger$ (d_μ) é o operador de criação (destruição) de bosons d e $s^\dagger$ (s) é o operador de criação (destruição) de bosons s . N é o número total de bosons. A equação (2) possui 8 coeficientes independentes mas, já que os dois primeiros termos contribuem da mesma forma para a energia dos estados com um dado N , eles não precisam ser considerados se estivermos interessados apenas nas energias de excitação do sistema. Assim os espaçamentos em energia dos níveis são determinados por apenas 6 coeficientes, que são, em geral, ajustados aos dados experimentais.

O hamiltoniano do IBM, é escrito em termos dos 36 geradores do $U(6)$ que são:

$$\begin{aligned} (s^\dagger s)_0^0 ; (d^\dagger s)_\mu^2 ; (s^\dagger \tilde{d})_\mu^2 ; (d^\dagger \tilde{d})_0^0 ; (d^\dagger \tilde{d})_\mu^1 \\ (d^\dagger \tilde{d})_\mu^2 ; (d^\dagger \tilde{d})_\mu^3 ; (d^\dagger \tilde{d})_\mu^4 \end{aligned} \quad (3)$$

O conjunto dos geradores que são fechados sob a operação de comutação, isto é, o comutador de dois geradores é uma combinação linear de todos os geradores desse conjunto, define um subgrupo do $U(6)$. O conhecimento dos subgrupos é importante pois nos fornecem números quânticos adequados para rotular as funções de onda. Se assumirmos que o momento angular é um bom número quântico, o grupo de rotações, $O(3)$, deve fazer parte da cadeia de subgrupos e, nesse caso, são obtidas apenas três cadeias para a decomposição do $U(6)$ 15,16) :

$$U(6) \supset U(5) \supset O(5) \supset O(3) \quad (4-a)$$

$$U(6) \supset U(3) \supset O(3) \quad (4-b)$$

$$U(6) \supset O(6) \supset O(5) \supset O(3) \quad (4-c)$$

A cadeia (4-a) corresponde ao chamado limite $U(5)$ cujo espectro é tipicamente vibracional, a cadeia (4-b) é o limite $U(3)$ onde o espectro é rotacional e a cadeia (4-c) é o limite $O(6)$ sendo que o espectro de energia comporta-se como o de um rotor γ -instável.

Quanto aos estados do IBM, estes podem ser rotulados através dos números quânticos de qualquer uma das três cadeias de subgrupos do $U(6)$. Os números quânticos associados são obtidos através das representações irredutíveis de cada subgrupo. Não entraremos nos detalhes de como encontrar esses números quânticos fornecendo aqui apenas os resultados. Indicamos a referência 16 que trata o assunto de modo bastante completo.

i- $U(6) \supset U(5) \supset O(5) \supset O(3)$

N = número total de bosons.

n_d = número de bosons d .

ν = senioridade ($\nu = n_d, n_d-2, \dots, 1$ ou 0 para n_d par ou ímpar). Fisicamente ν é o número de bosons d não acoplados a zero.

n_Δ = número quântico adicional. É necessário pois para $n_d > 6$ começam a aparecer 2 estados com os mesmos números quânticos. n_Δ é o número de tripletos de bosons acoplados a zero.

L = momento angular. ($L = \lambda, \lambda+1, \lambda+2, \dots, 2\lambda-2, 2\lambda$) onde $\lambda = \nu - 3n_\Delta$ representa o número de bosons que não estão acoplados a zero em pares ou trincas.

M = projeção de L sobre o eixo z do laboratório.

ii- $U(6) \supset U(3) \supset O(3)$

(λ, μ) = representação irredutível do $U(3)$.

K = número quântico adicional que é introduzido pois pode haver muitos estados com o mesmo valor de L na mesma representação (λ, μ) . $0 \leq K \leq \min(\lambda, \mu)$, par.

L = momento angular. $K \leq L \leq K + \max(\lambda, \mu)$

$$\text{iii- } U(6) \supset O(6) \supset O(5) \supset O(3)$$

$\sigma = N, N-2, N-4, \dots, 0$ ou 1 para N par ou N ímpar.

$\nu =$ senioridade. $0 \ll \nu \ll \sigma$.

$\lambda = \nu - 3\eta_{\Delta} \gg 0$.

$L =$ momento angular. $2\lambda \gg L \gg \lambda$ com $2\lambda-1$ excluído.

Para todo grupo, é possível construir um operador que comute com todos os geradores desse grupo. Esse operador é chamado operador de Casimir, e os seus autovalores são rotulados pelos próprios números quânticos associados a esse grupo. O hamiltoniano pode ser escrito em termos dos operadores de Casimir dos vários subgrupos que constituem as três possíveis cadeias do IBM.

Os operadores de Casimir e seus autovalores para os vários grupos do IBM são conhecidos (13,16). Apresentamos os resultados na tabela 1.

OPERADORES DE CASIMIR	AUTOVALORES
$\mathbb{C}_{U(6)} = \hat{N}$	N
$\mathbb{C}_{U(6)}^2 = \hat{N}(\hat{N}+5)$	$N(N+5)$
$\mathbb{C}_{U(5)} = \eta_d$	η_d
$\mathbb{C}_{U(5)}^2 = 5\hat{\eta}_d + \sum_{L=0,2,4} \hat{L} \{ [d^\dagger d^\dagger]^L [\tilde{d} \tilde{d}]^L \}^0$	$\eta_d (\eta_d + 4)$
$\mathbb{C}_{O(6)}^2 = \hat{N}(\hat{N}+4) - [s^\dagger s^\dagger + d^\dagger d^\dagger] [\tilde{s} \tilde{s} + \tilde{d} \tilde{d}]$	$2\sigma(\sigma+4)$
$\mathbb{C}_{O(5)}^2 = 2 \sum_{L=1,3} [d^\dagger \tilde{d}]^L [d^\dagger \tilde{d}]^L$	$2\nu(\nu+3)$
$\mathbb{C}_{U(3)}^2 = 2 \hat{Q} \cdot \hat{Q} + 3/4 \hat{L} \cdot \hat{L}$	$2/3 (\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3\lambda + 3\mu)$
$\mathbb{C}_{O(3)}^2 = \hat{L} \cdot \hat{L}$	$2L(L+1)$

Tabela 1- Operadores de Casimir e autovalores para os grupos do IBM.

Aqui, $\hat{Q} = \hat{Q}_\mu^2 = (d^\dagger \tilde{s} + s^\dagger \tilde{d})_\mu^2 - (7/4)^{1/2} (d^\dagger \tilde{d})_\mu^2$;

$$\hat{L} = \sqrt{10} (d^\dagger \tilde{d})_\mu^2$$

Em termos desses operadores o hamiltoniano do IBM é escrito como

$$H = A C_{U(5)}^2 + B C_{U(5)}^2 + D C_{O(5)}^2 + E C_{O(3)}^2 + F C_{U(3)}^2 + G C_{O(6)}^2 \quad (5)$$

Dependendo da cadeia de subgrupos que se deseja estudar, (4-a), (4-b) ou (4-c), podemos anular alguns coeficientes do hamiltoniano (5) de modo que ele seja diagonal na base formada pelos números quânticos correspondentes à cadeia escolhida. Assim, somente com os autovalores dos operadores de Casimir é construído todo o espectro e, além disso, podem ser obtidas expressões analíticas para as probabilidades de transição em cada um desses limites. Nesses casos limites diz-se que há uma simetria dinâmica.

Quando F e G são nulos, o hamiltoniano é diagonal na base U(5) e os autovalores são

$$E_{U(5)} = B n_d(n_d + 4) + 2D \nu(\nu + 3) + 2EL(L + 1) \quad (6)$$

A figura 2 mostra o espectro experimental do C_d^{110} e aquele obtido pelo IBM nesse limite.

Figura 2- Espectro experimental e teórico do $^{110}\text{Cd}_{62}$ com simetria dinâmica $U(5)$. Os números entre parênteses indicam os números quânticos ν e η_{Δ} . $N = \eta_{\pi} + \eta_{\nu} = 1_b + 6_p$ é o número total de bosons.

O espectro teórico mostrado nessa figura é muito parecido com o espectro vibracional obtido do modelo geométrico coletivo (18-20). Por isso dizemos que quando F e G são nulos há o limite vibracional do IBM.

Quando A, B, D e G se anulam, o hamiltoniano é diagonal na base $U(3)$ e seus autovalores são,

$$\mathcal{E}_{U(3)} = \left(\frac{2}{3}\right) F(\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu + 3\lambda + 3\mu) + 2EL(L+1) \quad (7)$$

O espectro experimental e teórico para o Gd^{156} é mostrado na figura 3.

Figura 3- Comparação do espectro experimental do Gd^{156} com o espectro teórico gerado pelo IBM no limite $U(3)$. Os números entre parênteses são os números quânticos λ e μ . $N = n_\pi + n_\nu = 7_b + 5_p = 12$ bosons.

Aqui também o espectro teórico tem uma correspondência com o modelo coletivo geométrico 18-20). Esse é o limite rotacional do IBM.

Se A , B e F se anularem, o hamiltoniano será diagonal na base $O(6)$ e os autovalores serão dados por,

$$\mathcal{E}_{O(6)} = 2G\sigma(\sigma+4) + 2D\nu(\nu+3) + 2EL(L+1) \quad (8)$$

A comparação com os dados experimentais é mostrada na figura 4.

Figura 4- Espectro experimental da Pt^{196} e aquele gerado por um hamiltoniano com simetria $O(6)$. Os valores de σ e n_d estão entre parênteses. $N = n_\pi + n_\nu = 2_b + 4_b = 6$ é o número total de bosons.

Novamente há uma correspondência com o modelo geométrico onde agora o limite é conhecido como γ -instável.

2- INTRODUÇÃO A QUEBRA ESPONTÂNEA DE SIMETRIA

O ferromagnetismo é um dos exemplos mais familiares de quebra espontânea de simetria. Vamos discutir, qualitativamente, o fenômeno do ferromagnetismo no contexto do modelo de Heisenberg ¹⁾. Nesse modelo, o sistema é um arranjo cristalino constituído de dipolos magnéticos de spin $1/2$ com uma interação spin-spin, de modo que os dipolos vizinhos mais próximos tendem a se alinhar. Essa interação é rotacionalmente invariante e, assim, o hamiltoniano. No entanto, abaixo de uma temperatura crítica, o estado fundamental apresenta os spins alinhados em alguma direção definida resultando uma magnetização não nula. A direção dessa magnetização é arbitrária sendo o estado fundamental, portanto, degenerado. Uma característica importante desse estado fundamental assimétrico é que os estados excitados obtidos dele através de pequenas perturbações também apresentam essa mesma assimetria. O mesmo raciocínio pode ser aplicado ao núcleo. As forças nucleares são invariantes por rotações mas isso não significa que o estado fundamental do sistema nuclear o seja. De fato, certos núcleos podem possuir uma deformação total diferente de zero, o que implica em uma direção preferencial no espaço.

Convém mencionar que o exemplo do ferromagnetismo acima é apenas um dentre muitos. As teorias da supercondutividade e das interações eletrofracas, por exemplo, também utilizam intensamente o conceito de quebra espontânea de simetria.

A fim de esclarecer mais quantitativamente a idéia de quebra espontânea de simetria, consideremos um sistema cuja Lagrangeana (ou hamiltoniano) possua uma determinada simetria, isto é, que seja invariante sob as correspondentes transformações de simetria. Por exemplo, $\mathcal{L}$ pode ser esfericamente simétrica ou seja, invariante sob rotações em três dimensões. Quanto à obtenção dos níveis de energia desse sistema, duas situações podem ocorrer:

- 1) se um dado nível de energia for não degenerado, o correspondente auto estado é único e invariante sob as transformações de simetria de $\mathcal{L}$;
- 2) o nível de energia pode ser degenerado e nesse caso os auto estados correspondentes não são invariantes.

Consideremos, em particular, o nível de energia mais baixo do sistema ou estado fundamental. Se ele for não degenerado, o estado fundamental é único e possui a simetria de $\mathcal{L}$. No caso de degenerescência, não há um estado único para representar o estado fundamental mas uma combinação linear de estados com a mesma energia que se transformam

juntos sob as operações de simetria de $\mathcal{L}$. Se escolhermos arbitrariamente um desses estados degenerados como o estado fundamental, então esse estado não mais possuirá a simetria de $\mathcal{L}$, e dizemos que ocorreu uma quebra espontânea de simetria.

O exemplo mais simples de uma teoria exibindo quebra espontânea de simetria é o modelo de Goldstone. Faremos um tratamento clássico mostrando explicitamente a transição para o caso quântico, mesmo que sem muito rigor, acreditando que essa atitude ingênua não trará prejuízo para o leitor. A lagrangeana do modelo de Goldstone é ²⁾

$$\mathcal{L} = [\partial_\mu \phi^*(x)][\partial^\mu \phi(x)] - \mu^2 |\phi(x)|^2 - \lambda |\phi(x)|^4 \quad (9)$$

onde $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1(x) + i\phi_2(x))$ é um campo escalar complexo e μ^2 e λ são parâmetros reais arbitrários.

O hamiltoniano correspondente a (9) é

$$H = [\partial_0 \phi^*(x)][\partial^0 \phi(x)] + [\vec{\nabla} \phi^*(x)][\vec{\nabla} \phi(x)] + \mu^2 |\phi(x)|^2 + \lambda |\phi(x)|^4$$

sendo que $\lambda > 0$ para que o sistema seja estável.

A lagrangeana (9) é invariante sob transformações de fase globais,

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) e^{i\alpha} ; \quad \phi^*(x) \rightarrow \phi'^*(x) = \phi^*(x) e^{-i\alpha} \quad (10)$$

mas o estado fundamental (ou vácuo, em linguagem quântica) do sistema pode ou não ser invariante dependendo do sinal de μ^2 .

O mínimo de $V(\phi)$ é dado por

$$\partial V(\phi)/\partial \phi = 0 \Rightarrow \begin{cases} \phi = 0 & (11-a) \\ \phi = (-\mu^2/2\lambda)^{1/2} & (11-b) \end{cases}$$

Se $\mu^2 > 0$ somente a primeira solução é aceitável e a correspondente superfície de energia potencial em função de ϕ_1 e ϕ_2 é apresentada na figura 5.

Figura 5- Superfície de energia potencial para $\mu^2 > 0$.

Neste caso o potencial $V(\phi)$ tem um mínimo absoluto para o único valor $\phi(x) = 0$, o estado fundamental é único, $\langle 0|\phi(x)|0\rangle = 0$ e quebra espontânea de simetria não pode ocorrer.

Quando $\mu^2 < 0$, a solução $\phi = 0$ nos dá um máximo local enquanto que a segunda solução corresponde a todo um círculo de mínimo absoluto em

$$\phi(x) = (-\mu^2/2\lambda)^{1/2} e^{i\theta} = \phi_0 \quad (0 \leq \theta < 2\pi) \quad (12)$$

A superfície de energia está representada na figura 6.

Figura 6- Superfície de energia potencial para $\mu^2 < 0$.

Agora não há um estado único que descreva o estado fundamental mas uma combinação linear de estados correspondendo ao círculo de potencial mínimo. A quebra espontânea de simetria ocorrerá quando escolhermos uma "direção" particular de θ para representar o estado fundamental. Devido a simetria da lagrangeana (9) sob transformações de fase globais (10), o valor de θ não é importante e podemos escolher $\theta = 0$ de modo que

$$\phi_0 = (-\mu^2/2\lambda)^{1/2} = (1/\sqrt{2})v > 0 \quad (13)$$

seja real. Vemos então que $\langle 0|\phi(x)|0\rangle = \phi_0 \neq 0$, ou seja, o estado fundamental desenvolveu um valor esperado do vácuo (VEV) diferente de zero.

Em teorias de quebra espontânea de simetria sempre aparecem os chamados bosons de Goldstone e de Higgs que correspondem, respectivamente, a oscilações de fase e radiais ao longo do vale de potencial mínimo da figura 6. Para entendermos isso, consideremos pequenos deslocamentos em torno da configuração de equilíbrio $\phi(x) = \phi_0$, introduzindo dois campos reais $\sigma(x)$ e $\pi(x)$ através da equação

$$\phi(x) = 1/\sqrt{2} [\nu + \sigma(x) + i\pi(x)] \quad , \quad (14)$$

onde $\sigma(x)$ e $\pi(x)$ medem os desvios do campo $\phi(x)$ em relação à configuração de equilíbrio $\phi(x) = \phi_0$. Em termos desses campos a lagrangeana (9) torna-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & 1/2 [\partial^\mu \sigma(x)] [\partial_\mu \sigma(x)] - 1/2 (2\lambda \nu^2) \sigma^2(x) + \\ & 1/2 [\partial^\mu \pi(x)] [\partial_\mu \pi(x)] - \lambda \nu \sigma(x) [\sigma(x)^2 + \pi(x)^2] - \\ & (1/4) \lambda [\sigma(x)^2 + \pi(x)^2]^2 + (\lambda/4) \nu^4 \end{aligned} \quad (15)$$

Vemos da lagrangeana (15) que o campo $\sigma(x)$ (agora falando quanticamente) possui associado a ele um boson de massa $m_\sigma = (2\lambda \nu^2)^{1/2}$ enquanto que o boson associado ao campo $\pi(x)$ tem massa zero pois não há termos em $\pi(x)^2$. Esses são os bosons de Higgs e de Goldstone respectivamente. Além disso, segue das equações (13) e (14) que $\langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle = \phi_0$ e esta é a condição para a quebra espontânea de simetria em teoria quântica, em analogia com as equações (12) ou (13) da teoria clássica.

3 - A TEORIA BCS - EMPARELHAMENTO MONOPOLAR E QUADROPOLAR

Neste capítulo apresentaremos um tratamento de emparelhamento monopolar (pares de férmions acoplados a momento angular total $J=0$, $M=0$) e quadrupolar (pares de férmions acoplados a $J=2$, $M=0$) mostrando que ambos podem ser tratados em pé de igualdade. Os férmions (nucleons) possuem momento angular total $j = 3/2$ de modo que dois nucleons podem se acoplar somente a $J=0$, $M=0$ e $J=2$, $M=-2, -1, 0, 1, 2$. No caso de emparelhamento quadrupolar, consideraremos apenas a projeção $M=0$ para simplificar os cálculos sendo que a inclusão das outras projeções em nada alteraria o tratamento do problema.

Trataremos o modelo BCS no contexto de uma teoria de quebra espontânea de simetria de modo que surgem excitações bosônicas (modos coletivos) massivas e sem massa. Para cada simetria quebrada aparece um boson correspondente. No caso de emparelhamento a $J=0$, $M=0$, o número de partículas é violado enquanto que com emparelhamento a $J=2$, $M=0$, além da violação do número de partículas, há a violação do momento angular, isto é, o estado bosônico constituído de pares de partículas acopladas a $J=2$ e $J=0$ não é um escalar sob rotações. Além das excitações bosônicas existem as excitações fermiônicas do sistema que surgem quando fornecemos energia suficiente para quebrar um "par de Cooper". Veremos que essa energia é no mínimo igual

a $\frac{1}{2}\Delta$ onde Δ é o gap de energia entre o estado fundamental e os primeiros estados excitados.

Utilizando técnicas de teoria quântica de campos mostraremos que o espectro de massa entre as excitações bosônicas e fermiônicas está na proporção bem conhecida ^{6,8)}

$m_\pi : m_f : m_\sigma = 0 : 1 : 2$ onde m_π é a massa (energia) do boson de massa zero (boson de Goldstone), m_f é a massa do férmion e m_σ é a massa do boson massivo (boson de Higgs). Mostraremos também que a constante de acoplamento entre os dois modos coletivos e os férmions é a mesma no limite de momento zero. O fato de a constante de acoplamento ser a mesma para os modos π e σ é importante quando se deseja escrever um hamiltoniano efetivo descrevendo interações boson-boson e boson-férmion que satisfaça a relação de massa $0 : 1 : 2$. Caso contrário isso não seria possível.

Uma observação se faz necessária. Quando tratamos de emparelhamento monopolar ($J=0$, $M=0$) e quadrupolar ($J=2$, $M=0$), tanto o número de partículas quanto o momento angular são violados localmente. No entanto, para tentarmos reproduzir a cadeia do IBM correspondendo ao limite

γ -instável, precisamos de uma simetria de partida maior, a saber, a simetria $O(6)$ ou grupo das transformações ortogonais em 6 dimensões. Conseguimos isso levando em conta as outras 5 projeções do par acoplado a $J=2$ além da única projeção do par acoplado a $J=0$. Assim, as simetrias

quebradas são $O(6)$ além de $U(1)$, que é o grupo das transformações unitárias a uma dimensão ou número de partículas. Como já mencionamos anteriormente, os cálculos serão feitos apenas no caso de projeção $M=0$ unicamente por simplicidade, sem que essa restrição prejudique as conclusões obtidas.

A finalidade desse capítulo, afinal, é a de justificar o hamiltoniano de partida do capítulo 4 o qual leva em conta as interações boson-boson e boson-fermion e que após quebra de simetria fornece o espectro de massa das excitações bosônicas e fermiônicas, isto é, a relação de massa $0 : 1 : 2$.

3.1 - EMPARELHAMENTO MONOPOLAR E QUADRUPOULAR

Utilizando a notação da referência 12, o hamiltoniano descrevendo a interação de emparelhamento de dois nucleons com momento angular total $j_1 = j_2 = 3/2$ acoplados a $J=0$, $M=0$ e $J=2$, $M=0$ é dado por

$$H_J = \frac{-\pi G_J}{2J+1} \sum_M P_{JM}^+ P_{J-M} (-1)^{J-M} \quad (16)$$

com

$$P_{JM}^+ = \sum_{j_1 j_2} \langle j_1 \parallel Y_J \parallel j_2 \rangle \left[\psi_{j_1}^+ \psi_{j_2}^+ \right]_M^J \quad (17)$$

sendo P_{JM}^+ o operador de criação de um par de partículas acopladas a momento angular total J e projeção M .

1º caso: $J=0$, $M=0$.

$$\langle j \| Y_0 \| j \rangle = \frac{(2j+1)^{1/2}}{(4\pi)^{1/2}} = \frac{2}{(4\pi)^{1/2}} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} P_{00}^+ &= \sum_j \frac{2}{(4\pi)^{1/2}} [\psi_j^+ \psi_j^+]^0 = \\ &= \sum_{jm} \frac{2}{(4\pi)^{1/2}} \langle jm j-m | 00 \rangle \psi_{jm}^+ \psi_{j-m}^+ \\ &= \sum_{jm} \frac{2}{(4\pi)^{1/2}} \cdot \frac{1}{2} (-1)^{j-m} \psi_{jm}^+ \psi_{j-m}^+ \\ &\stackrel{j=3/2}{=} \sum_m \frac{2}{(4\pi)^{1/2}} (-1)^{3/2-m} \psi_{\frac{3}{2}m}^+ \psi_{\frac{3}{2}-m}^+ \quad (19) \end{aligned}$$

$$P_{00} = (P_{00}^+)^+ = \sum_{m'} \frac{2}{(4\pi)^{1/2}} (-1)^{3/2-m'} \psi_{\frac{3}{2}-m'} \psi_{\frac{3}{2}m} \quad (20)$$

Descartando o índice 3/2 podemos escrever

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{-\pi G_0}{4\pi} \sum_{m m'} (-1)^{3/2-m} (-1)^{3/2-m'} \psi_m^+ \psi_{-m}^+ \psi_{-m} \psi_m \\ &= \frac{-G_0}{4} \sum_{m m'} (-1)^{m-m'} \psi_m^+ \psi_{-m}^+ \psi_{-m} \psi_m \quad (21) \end{aligned}$$

2º caso: J=2, M=0.

$$\langle j \| Y_2 \| j \rangle = \frac{-1}{(\pi)^{1/2}} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} P_{20}^{\dagger} &= \sum_j \frac{-1}{(\pi)^{1/2}} [\psi_j^{\dagger} \psi_j]_0^2 \\ &= - \sum_{jm} \frac{1}{(\pi)^{1/2}} \langle jm j-m | 20 \rangle \psi_{jm}^{\dagger} \psi_{j-m}^{\dagger} \\ &= - \sum_{jm} \frac{1}{2(\pi)^{1/2}} \text{sign}(m) \psi_{jm}^{\dagger} \psi_{j-m}^{\dagger} \\ &= - \sum_m \frac{1}{(4\pi)^{1/2}} \text{sign}(m) \psi_m^{\dagger} \psi_{-m}^{\dagger} \quad (23) \end{aligned}$$

$$P_{20} = - \sum_{m'} \frac{1}{(4\pi)^{1/2}} \text{sign}(m') \psi_{-m'} \psi_{m'} \quad (24)$$

Temos então

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{-\pi G_2}{20\pi} \sum_{mm'} \Delta(m) \Delta(m') \psi_m^{\dagger} \psi_{-m}^{\dagger} \psi_{-m'} \psi_{m'} \\ &= \frac{-G_2}{20} \sum_{mm'} \text{sign}(m \cdot m') \psi_m^{\dagger} \psi_{-m}^{\dagger} \psi_{-m'} \psi_{m'} \quad (25) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
H_0 + H_2 &= \frac{-1}{4} (G_0 + G_2/5) \sum_{m'm} [(-1)^{m-m'} + \text{sign}(m \cdot m')] \cdot \\
&\quad \cdot \psi_m^+ \psi_{-m}^+ \psi_{-m'} \psi_{m'} \\
&= -(1/4) G' \sum_{m'm'} 2(\delta_{mm'} - \delta_{m-m'}) \psi_m^+ \psi_{-m}^+ \psi_{-m'} \psi_{m'} \\
&= -2 G' \sum_{m>0} \psi_m^+ \psi_{-m}^+ \psi_{-m} \psi_m \quad (26)
\end{aligned}$$

Vemos dessa última equação que no caso particular de emparelhamento quadrupolar axialmente simétrico, ambos os emparelhamentos (monopolar e quadrupolar) são descritos por hamiltonianos semelhantes. Essa propriedade será importante quando escrevermos o termo de emparelhamento da próxima seção.

3.2 - TRATAMENTO VIA CAMPO MÉDIO DO EMPARELHAMENTO MONOPOLAR E QUADROPOLAR

Nessa seção seguiremos de perto o tratamento de Schrieffer (ref. 5) e Mukerjee e Nambu (ref. 9).

Consideraremos um sistema infinito contendo férmions com momento angular total $j = 3/2$ interagindo via um potencial de dois corpos com elementos de matriz constantes e iguais a g . A constante g vai a zero fora de uma camada de espessura λ em torno da superfície de Fermi. (Apesar da seção 3.1 ter sido feita em um sistema finito, aqui trabalharemos com um sistema infinito de modo que as funções de onda sejam ondas planas). Na representação dos momentos, que é o espaço mais adequado aos nossos cálculos, (poderíamos ter usado o espaço de configurações e posteriormente realizado uma transformação de Fourier) o hamiltoniano para o sistema é

$$\begin{aligned}
 H &= \sum_{mk} \epsilon_k \psi_{km}^\dagger \psi_{km} + (g/2) \sum_{\substack{k, k', q \\ m, m'}} \psi_{k+q, m}^\dagger \psi_{k'-q, m'}^\dagger \psi_{k', m'} \psi_{k, m} \\
 &= H_0 + H_I
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

onde m é a projeção do momento angular j e assume os valores $3/2, 1/2, -1/2, -3/2$ e k, q são quadrimomentos; $k = (\vec{k}, k_0)$.

Para criarmos um campo médio (aproximação de Hartree - Fock) incluindo correlações de emparelhamento, podemos linearizar H_I com respeito a um dado estado $|0\rangle$ que por sua vez é determinado autoconsistentemente em termos do hamiltoniano linearizado. Na linearização passamos de um produto do tipo $\psi_1^\dagger \psi_2^\dagger \psi_3 \psi_4$ para

$$\begin{aligned} \psi_1^\dagger \psi_2^\dagger \psi_3 \psi_4 \longrightarrow & \langle 0 | \psi_1^\dagger \psi_4 | 0 \rangle \psi_2^\dagger \psi_3 - \langle 0 | \psi_1^\dagger \psi_3 | 0 \rangle \psi_2^\dagger \psi_4 \\ & + \langle 0 | \psi_2^\dagger \psi_3 | 0 \rangle \psi_1^\dagger \psi_4 - \langle 0 | \psi_2^\dagger \psi_4 | 0 \rangle \psi_1^\dagger \psi_3 \\ & + \langle 0 | \psi_1^\dagger \psi_2^\dagger | 0 \rangle \psi_3 \psi_4 + \langle 0 | \psi_3 \psi_4 | 0 \rangle \psi_1^\dagger \psi_2^\dagger \quad (28) \end{aligned}$$

No entanto, para nossos propósitos, é mais conveniente utilizarmos um processo equivalente (e mais prático) ao de linearização ^{5,6}). Escrevemos

$$H_0' = H_0 + (H_\chi + H_\phi) - \mu N \quad (29)$$

$$H_I' = H_I - (H_\chi + H_\phi) \quad (30)$$

onde

$$H_{\chi} = \sum_{km} \chi_k \psi_{km}^{\dagger} \psi_{km} \quad (31)$$

é o termo que será o potencial de Hartree-Fock.

O termo

$$\mu N = \mu \sum_{km} \psi_{km}^{\dagger} \psi_{km} \quad (32)$$

é incluído para deslocar a origem da energia. μ é um multiplicador de Lagrange que é determinado pela condição de que o valor esperado do operador $N = \sum_{km} \psi_{km}^{\dagger} \psi_{km}$ deva ser igual a N_0 , o número médio de partículas.

Tratando o emparelhamento monopolar e quadrupolar em pé de igualdade, podemos escrever o termo que descreve essa interação como

$$H_{\phi} = \sum_k [\phi^* (\psi_{k3/2}^{\dagger} \psi_{-k-3/2}^{\dagger} + \psi_{k1/2}^{\dagger} \psi_{-k-1/2}^{\dagger}) + \phi (\psi_{-k-3/2} \psi_{k3/2} + \psi_{-k-1/2} \psi_{k1/2})] \quad (33)$$

onde $\phi = \phi_1 + i \phi_2$ é uma constante complexa.

O hamiltoniano (33) contém contribuições para os dois tipos de emparelhamento sem que possamos distingui-los. Seria interessante verificar se essa é uma regra geral mesmo parecendo que não. Note-se que, no caso de pares acoplados a $J = 2$, somente a projeção $M = 0$ foi considerada. Fizemos isso somente para simplificar. Poderíamos ter incluído as outras projeções ($M = 2, 1, -1, -2$) mas isso só aumentaria o trabalho.

Agora surge um problema. Devido a presença de H_ϕ , o hamiltoniano (29) não é mais um operador de 1 corpo e não podemos tratar H_I^1 como perturbação. Para contornar essa dificuldade utilizamos uma notação diferente. Definimos os espinores

$$\mathcal{Y}_k = \begin{bmatrix} \psi_{k \ 3/2} \\ \psi_{-k \ -3/2}^+ \\ \psi_{k \ 1/2} \\ \psi_{-k \ -1/2}^+ \end{bmatrix} \quad (34-a)$$

$$\mathcal{Y}_k^+ = \left[\psi_{k \ 3/2}^+, \psi_{-k \ -3/2}, \psi_{k \ 1/2}^+, \psi_{-k \ -1/2} \right] \quad (34-b)$$

e reescrevemos H_0' e H_I' como

$$H_0' = \sum_k \bar{\Psi}_k^+ (\tilde{\epsilon}_k A_3 + \phi_1 A_1 + \phi_2 A_2) \bar{\Psi}_k + \text{CONST.} \quad (35)$$

$$H_I' = (g/2) \sum_{k, k', q} (\bar{\Psi}_{k+q}^+ A_3 \bar{\Psi}_k) (\bar{\Psi}_{k'-q}^+ A_3 \bar{\Psi}_{k'}) + \\ - \sum_k \bar{\Psi}_k^+ (\phi_1 A_1 + \phi_2 A_2 + \chi_k A_3) \bar{\Psi}_k \quad (36)$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 são, respectivamente, as partes real e imaginária de ϕ ; o termo constante aparece devido às relações de anticomutação dos ψ ; $\tilde{\epsilon}_k = \epsilon_k + \chi_k - \mu$ é a nova energia de partícula independente, e as matrizes A são dadas por

$$A_1 = \begin{pmatrix} \tilde{\epsilon}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{\epsilon}_1 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} \tilde{\epsilon}_2 & 0 \\ 0 & \tilde{\epsilon}_2 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} \tilde{\epsilon}_3 & 0 \\ 0 & \tilde{\epsilon}_3 \end{pmatrix} \quad (37)$$

sendo que

$$\tilde{\epsilon}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\epsilon}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\epsilon}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

são as matrizes de Pauli.

Podemos agora calcular o propagador de 1 corpo o qual será necessário para o cálculo das auto-energias devido à interação residual H_I^1 . O propagador de 1 corpo é definido por

$$G_0(\vec{p}, t) = -i \langle \varphi | T \{ \psi_p(t) \psi_p^\dagger(0) \} | \varphi \rangle, \quad (38)$$

onde

$$|\varphi\rangle = \prod_k (u_k + v_k \psi_{km}^\dagger \psi_{-k-m}^\dagger) |0\rangle \quad (39)$$

é a função de onda do estado fundamental "supercondutor", e

$$\psi_p(t) = e^{iH_0't} \psi_p(0) e^{-iH_0't} \quad (40)$$

Escrevendo $iG_0(\vec{p}, t)$ na forma matricial temos,

$$\langle \varphi | \left[\begin{array}{cc} T\{\psi_{p3/2}(t) \psi_{p3/2}^\dagger(0)\}, T\{\psi_{p3/2}(t) \psi_{-p-3/2}^\dagger(0)\}, & 0, 0 \\ T\{\psi_{-p-3/2}^\dagger(t) \psi_{p3/2}^\dagger(0)\}, T\{\psi_{-p-3/2}^\dagger(t) \psi_{-p-3/2}^\dagger(0)\}, & 0, 0 \\ 0, 0 & T\{\psi_{p1/2}(t) \psi_{p1/2}^\dagger(0)\}, T\{\psi_{p1/2}(t) \psi_{p1/2}^\dagger(0)\} \\ 0, 0 & T\{\psi_{-p-1/2}^\dagger(t) \psi_{p1/2}^\dagger(0)\}, T\{\psi_{-p-1/2}^\dagger(t) \psi_{-p-1/2}^\dagger(0)\} \end{array} \right] | \varphi \rangle \quad (41)$$

A transformada de Fourier temporal de cada elemento de matriz de (41) fornece:

$$G_{011}(\vec{p}, p_0) = G_{033}(\vec{p}, p_0) = \frac{(p_0 + \tilde{E}_p) e^{i\mathcal{J}p_0}}{p_0^2 - \tilde{E}_p^2 - \phi_1^2 - \phi_2^2 + i\mathcal{J}} \quad (42-a)$$

$$G_{022}(\vec{p}, p_0) = G_{044}(\vec{p}, p_0) = \frac{(p_0 - \tilde{E}_p) e^{-i\mathcal{J}p_0}}{p_0^2 - \tilde{E}_p^2 - \phi_1^2 - \phi_2^2 + i\mathcal{J}} \quad (42-b)$$

$$G_{012}(\vec{p}, p_0) = G_{034}(\vec{p}, p_0) = \frac{\phi_1 - i\phi_2}{p_0^2 - \tilde{E}_p^2 - \phi_1^2 - \phi_2^2 + i\mathcal{J}} \quad (42-c)$$

$$G_{021}(\vec{p}, p_0) = G_{043}(\vec{p}, p_0) = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{p_0^2 - \tilde{E}_p^2 - \phi_1^2 - \phi_2^2 + i\mathcal{J}} \quad (42-d)$$

onde $\mathcal{J}$ é uma quantidade infinitesimal positiva e o termo exponencial nas expressões (42-a) e (42-b) é posto para assegurar a convergência da integral em p_0 de $G_0(\vec{p}, p_0)$. Assim, o propagador no espaço dos momentos pode ser escrito como

$$G_0(\vec{p}, p_0) = \frac{(p_0 \mathbf{1} + \tilde{E}_p A_3 + \phi_1 A_1 + \phi_2 A_2) e^{i\mathcal{J}p_0 A_3}}{p_0^2 - \tilde{E}_p^2 - \phi_1^2 - \phi_2^2 + i\mathcal{J}} \quad (43)$$

A energia de quase-partícula é obtida do polo de (43) com $p_0 > 0$, e é dada por

$$E_p = (\tilde{\epsilon}_p^2 + \phi_1^2 + \phi_2^2)^{1/2}. \quad (44)$$

Vemos dessa última equação que a energia de quase-partícula do sistema supercondutor difere da energia, $E_p' = \epsilon_p + \chi_p - \mu$ do sistema normal. Isso ocorre devido ao aparecimento de um "gap" de energia entre o estado fundamental e os primeiros estados excitados de um supercondutor. Sendo assim, é necessária uma quantidade finita mínima de energia para excitar o sistema. Essa quantidade mínima é igual a 2Δ onde Δ é o parâmetro do gap. É a energia necessária para quebrar um par de Cooper. Veremos adiante que ϕ_1 pode ser identificado com o gap.

Para encontrarmos o efeito de H_I^1 sobre o espectro de excitação de quase-partícula, calculamos a auto-energia $\Sigma(\vec{p}, p_0)$ devido a essas interações residuais. As regras de Feynman-Dyson em 1ª ordem (fig. 7) fornecem 5,7)

$$\begin{aligned} \Sigma(\vec{p}, p_0) = & -i A_3 \int g T_F [A_3 G_0(\vec{p}, p_0)] \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} + \\ & + i \int g A_3 [G_0(\vec{p}, p_0)] A_3 \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} + \chi_p A_3 - \phi_1 A_1 - \phi_2 A_2 \quad (45) \end{aligned}$$

Figura 7- Auto energia das quase-partículas na aproximação BCS. O primeiro termo corresponde à contribuição direta, o segundo é o termo de troca (exchange) e os dois últimos podem ser vistos como uma interação com campos externos.

Se quisermos que a energia de quase-partícula não seja afetada por H_I' , isto é, se não permitirmos contribuições adicionais devidas a H_I' sobre H_0' , devemos usar o que se chama de condição autoconsistente ^{5,6)}

$$\sum (\vec{p}, p_0) = 0, \quad (46)$$

e é essa condição que irá determinar χ_p , ϕ_1 e ϕ_2 .

Podemos integrar em p_0 a expressão (45) sabendo que

$$-i \int G_0(\vec{p}, p_0) \frac{dp_0}{2\pi} = \frac{(E_p - \tilde{E}_p) A_3 - \phi_1 A_1 - \phi_2 A_2}{2E_p}. \quad (47)$$

Temos então,

$$\sum (\vec{p}, p_0) = A_1 \left[\mathcal{I} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \cdot \frac{\phi_1}{2E_p} + \phi_1 \right] + \\ + A_2 \left[\mathcal{I} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \cdot \frac{\phi_2}{2E_p} + \phi_2 \right] + A_3 \left[\mathcal{I} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} v_p^2 - \chi_p \right] \quad (48)$$

Utilizando a condição de autoconsistência (46) e o fato de as matrizes A serem linearmente independentes, podemos igualar a zero os coeficientes de A_1 , A_2 e A_3 . Obtemos

$$\phi_1 = - \mathcal{I} \int_{p_F - p_{1/2}}^{p_F + p_{1/2}} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \cdot \frac{\phi_1}{2E_p} \quad (49-a)$$

$$\phi_2 = - \mathcal{I} \int_{p_F - p_{1/2}}^{p_F + p_{1/2}} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \cdot \frac{\phi_2}{2E_p} \quad (49-b)$$

$$\chi_p = \mathcal{I} \int_{p_F - p_{1/2}}^{p_F + p_{1/2}} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} v_p^2 \quad (49-c)$$

onde

$$v_p^2 = 1/2 (1 - \tilde{\epsilon}_p / E_p) \quad (50)$$

é a probabilidade de ocupação de estados emparelhados.

Observemos que o hamiltoniano total, $H' = H'_0 + H'_1$, é invariante sob rotações em torno de A_3 , de modo que podemos escolher a fase de ϕ tal que $\phi_2 = 0$. Assim, a equação (49-a) torna-se a equação do gap em BCS e $\phi = \phi_1$ é identificado com o parâmetro de gap (5,6).

Podemos escrever a equação do gap na forma

$$g' \int_{p_F - p_{1/2}}^{p_F + p_{1/2}} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \cdot \frac{1}{(\tilde{\epsilon}_p^2 + \Delta^2)^{1/2}} = 1 \quad (51)$$

onde usamos $E_p = (\tilde{\epsilon}_p^2 + \phi_1^2)^{1/2}$, $\phi_1 = \Delta = \text{const.}$ e $g' = -g/2$.

Vamos agora tratar das excitações coletivas desse sistema. Para encontrarmos o espectro de massa das excitações coletivas e a intensidade de seu acoplamento com os férmions, construímos um diagrama de bolhas que representa a interação férmion-férmion via a troca de um boson (8,9). Isso está esquematizado na figura 8. A justificativa para tal procedimento pode ser encontrada nas referências 7 e 8.

Figura 8- Diagrama de bolhas equivalente ao diagrama onde ocorre a troca de um boson.

A energia (ou massa) dos modos coletivos é encontrada tomando-se os polos da contribuição para a cadeia de bolhas da figura 8. Com A_1 nos vértices obtemos dois modos coletivos massivos (modos de amplitude ou de Higgs) pois o condensado foi escolhido na "direção" A_1 enquanto que com A_2 nos vértices obtemos dois modos coletivos de massa zero (modos de fase ou de Goldstone). Os modos de amplitude e de fase serão simbolizados por σ_0 , π_0 e σ_2 , π_2 , respectivamente. Os índices 0 e 2 referem-se a bosons de momento angular 0 e 2 (projeção 0) correspondendo ao emparelhamento monopolar e quadrupolar.

Como dissemos no capítulo 2, os modos de fase e amplitude sempre surgem devido a alguma quebra de simetria. No presente caso, os modos σ_0 e π_0 surgem devido à quebra da simetria $U(1)$, isto é, do número de partículas, enquanto que os modos σ_2 e π_2 surgem devido à quebra da simetria $O(3)$ (invariância rotacional) bem como do número de partículas. Observemos que se tivéssemos levado em conta as outras projeções para o caso de emparelhamento quadrupolar, a simetria seria maior, a saber, $O(6)$, e ela é que seria

quebrada além da usual violação do número de partículas. Veremos essa simetria mais tarde quando da tentativa de derivação do IBM.

A contribuição para a cadeia de bolhas é 8,9,10)

$$J_0(q) = i g' \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[A_1 G_0(p+q/2) A_1 G_0(p-q/2) \right] \quad (52-a)$$

$$J_\pi(q) = i g' \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[A_2 G_0(p+q/2) A_2 G_0(p-q/2) \right] \quad (52-b)$$

Usando os propagadores (no limite $\epsilon_f \rightarrow 0$, isto é, momento transferido zero),

$$G_0(p+q/2) = \frac{(p_0 + q_0/2)1 + \tilde{\epsilon}_p A_3 + \Delta A_1}{(p_0 + q_0/2)^2 - \tilde{\epsilon}_p^2 - \Delta^2 + i\delta} \quad (53-a)$$

$$G_0(p-q/2) = \frac{(p_0 - q_0/2)1 + \tilde{\epsilon}_p A_3 + \Delta A_1}{(p_0 - q_0/2)^2 - \tilde{\epsilon}_p^2 - \Delta^2 + i\delta} \quad (53-b)$$

podemos escrever $J_\sigma(q)$ e $J_\pi(q)$ como

$$J_\sigma(q) = 2ig' \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p_0^2 - q_0^2/4 - \tilde{\epsilon}_p^2 + \Delta^2}{[(p_0 - q_0/2)^2 - \tilde{\epsilon}_p^2 - \Delta^2 + i\delta][(p_0 + q_0/2)^2 - \tilde{\epsilon}_p^2 - \Delta^2 + i\delta]} \quad (54-a)$$

$$J_\pi(q) = 2ig' \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p_0^2 - q_0^2/4 - \tilde{\epsilon}_p^2 - \Delta^2}{[(p_0 - q_0/2)^2 - \tilde{\epsilon}_p^2 - \Delta^2 + i\delta][(p_0 + q_0/2)^2 - \tilde{\epsilon}_p^2 - \Delta^2 + i\delta]} \quad (54-b)$$

onde os polos estão em

$$p_0 = \pm q_0/2 - (\tilde{\epsilon}_p^2 + \Delta^2) + i\delta \quad (55)$$

Agora integramos (54-a) e (54-b) em p_0 e obtemos

$$J_\sigma(q_0) = g' \int_{p_F - p_{\lambda/2}}^{p_F + p_{\lambda/2}} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \cdot \frac{1}{(\tilde{\epsilon}_p^2 + \Delta^2)^{1/2}} \cdot \left[1 - \frac{q_0^2 - 4\Delta^2}{q_0^2 - 4(\tilde{\epsilon}_p^2 + \Delta^2)} \right] \quad (56-a)$$

$$J_\pi(q_0) = g' \int_{p_F - p_{\lambda/2}}^{p_F + p_{\lambda/2}} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \cdot \frac{1}{(\tilde{\epsilon}_p^2 + \Delta^2)^{1/2}} \cdot \left[1 - \frac{q_0^2}{q_0^2 - 4(\tilde{\epsilon}_p^2 + \Delta^2)} \right] \quad (56-b)$$

A condição para a existência de um modo coletivo é (5, 8, 9, 11)

$$J_{\sigma, \pi}(q) = 1 \quad (57)$$

Usando a equação do gap (51) e $g_0^2 = 4\Delta^2$ em (56-a) e $g_0^2 = 0$ em (56-b) a condição (57) é satisfeita. Vemos então que

$$J_\sigma(g_0^2 = 4\Delta^2) = 1 \quad e \quad J_\pi(g_0^2 = 0) = 1 \quad (58)$$

de modo que as massas dos modos coletivos são

$$m_\sigma = 2\Delta \quad e \quad m_\pi = 0. \quad (59)$$

Já que a massa das excitações fermiônicas é igual ao gap, vemos de (59) que a razão entre m_π , m_f e m_σ é igual a 0:1:2 o que está de acordo com a teoria de BCS (5,6).

Para calcular as constantes de acoplamento G_σ e G_π entre os modos σ e π e os férmions, notemos a igualdade dos diagramas da figura 8. O elemento de matriz para a cadeia de bolhas é (7,8,9)

$$M_\sigma = \frac{g'}{1 - J_\sigma} ; \quad M_\pi = \frac{g'}{1 - J_\pi} \quad (60)$$

enquanto que o correspondente ao diagrama com o boson intermediário é dado por (8,9)

$$M_\sigma = \frac{-G_\sigma^2}{g_0^2 - m_\sigma^2} ; \quad M_\pi = \frac{-G_\pi^2}{g_0^2 - m_\pi^2} \quad (61)$$

Já que os diagramas são equivalentes, podemos escrever

$$\frac{-G_\sigma^2}{q_0^2 - m_\sigma^2} = \frac{g'}{1 - J_\sigma} \quad \text{e} \quad \frac{-G_\pi^2}{q_0^2 - m_\pi^2} = \frac{g'}{1 - J_\pi} \quad (62)$$

Agora expandimos $J_\sigma(q_0^2)$ e $J_\pi(q_0^2)$ em série de Taylor em torno de $q_0 = 0$ e $q_0^2 = 4\Delta^2$ para os modos π e σ , respectivamente. Temos então

$$\begin{aligned} J_\sigma(q_0^2) &= J_\sigma(q_0^2 = 4\Delta^2) + (q_0^2 - 4\Delta^2) \left. \frac{dJ_\sigma(q_0^2)}{dq_0^2} \right|_{q_0^2 = 4\Delta^2} \\ &= 1 + (q_0^2 - 4\Delta^2) \left. \frac{dJ_\sigma(q_0^2)}{dq_0^2} \right|_{q_0^2 = 4\Delta^2} \end{aligned} \quad (63)$$

onde o 1 vem da equação (58). Substituindo (63) na primeira das relações (62) obtemos

$$G_\sigma^2 = g' \left(\left. \frac{dJ_\sigma(q_0^2)}{dq_0^2} \right|_{q_0^2 = 4\Delta^2} \right)^{-1} \quad (64-a)$$

De modo análogo temos para G_π^2 ,

$$G_\pi^2 = g' \left(\left. \frac{dJ_\pi(q_0^2)}{dq_0^2} \right|_{q_0^2 = 0} \right)^{-1} \quad (64-b)$$

Para avaliar as derivadas, é conveniente escrevermos J_0 e J_π de um modo que as torne mais simples para a integração.

Fazemos a aproximação

$$\frac{d^3 p}{(2\pi)^3} = \frac{4\pi p^2}{(2\pi)^3} dp = \frac{p_F}{2\pi^2} p dp = \frac{N_F}{4} d\tilde{E}_p \quad (65)$$

e a mudança de variáveis $x = 2(\tilde{E}_p^2 + \Delta^2)^{1/2}$ para escrevermos

$$J_0(p_0^2) = \frac{g' N_F}{4} \int_{4\Delta^2}^{\lambda^2} \frac{(1 - 4\Delta^2/x^2)^{1/2}}{(x^2 - p_0^2)} dx^2 \quad (66-a)$$

$$J_\pi(p_0^2) = \frac{g' N_F}{4} \int_{4\Delta^2}^{\lambda^2} \frac{1}{(x^2 - p_0^2)(1 - 4\Delta^2/x^2)^{1/2}} dx^2 \quad (66-b)$$

Lembrando que no limite de acoplamento fraco ($g \cdot N_F \ll 1$), $\lambda^2 \gg 4\Delta^2$ e que ainda $(1 - 4\Delta^2/x^2)^{1/2} \sim 1$, a integral (66-a) fornece

$$J_0(p_0^2) = \frac{g' N_F}{4} \left[\ln(\lambda^2 - p_0^2) - \ln(4\Delta^2 - p_0^2) \right] \quad (67)$$

de modo que

$$\left(\frac{dJ_\sigma(q_0^2)}{dq_0^2} \right)^{-1}_{q_0^2 = 4\Delta^2} = \frac{16\Delta^2}{g' N_F} \quad (68)$$

e, finalmente,

$$\zeta_0^2 = 16\Delta^2 / N_F \quad (69-a)$$

A constante de acoplamento para o modo π é obtida de modo análogo sendo que a derivada é avaliada em $q_0^2 = 0$. O resultado é,

$$\zeta_\pi^2 = 16\Delta^2 / N_F \quad (69-b)$$

Observemos que a densidade de Fermi N_F é aproximadamente constante pois a região de interação λ é muito menor que a energia de Fermi μ .

4 - BCS e IBM

Neste capítulo apresentamos o tratamento proposto por Nambu e Mukerjee⁹⁾ visando uma derivação microscópica do IBM através de um tratamento tipo BCS.

Através de um hamiltoniano efetivo com interações boson-boson e boson-fermion é obtida, após quebra espontânea de simetria, uma característica importante do BCS: a relação de massa entre as excitações bosônicas e fermiônicas $0 : 1 : 2$.

Vamos nos limitar à discussão da cadeia $O(6)$ do IBM, adequada para a descrição de núcleos transicionais; é assumido que os nucleons de valência (partículas ou buracos) ocupam estados com $j=3/2$, de modo que pares de nucleons podem dar origem a bosons com momento angular total 0 e 2. Esta escolha não é tão restritiva como parece à primeira vista se levarmos em conta que na região da Platina, exemplo padrão de aplicação da cadeia $O(6)$, os nucleons de valência ocupam estados com $j=3/2$ (ver apêndice 2 para uma discussão alternativa em termos de pseudo-spin e pseudo-momento angular orbital); de qualquer forma o objetivo maior é mostrar que o IBM tem pontos de contato com o BCS. Assim, supondo nucleons com $j=3/2$, a simetria do setor fermiônico é $U(4)$, correspondendo à degenerescência de um estado com $j = 3/2$ ($2j + 1 = 4$), enquanto que a simetria do setor

bosônico é $O(6)$, a qual corresponde aos 6 estados de momento angular 0 e 2 ($M=0$ e $M=-2,-1,0,1,2$). O hamiltoniano de partida, levando em conta essas simetrias, é

$$\begin{aligned}
 H = & \sum_n p_n^\dagger p_n + 2\epsilon^2 \left(\sum_n \phi_n^\dagger \phi_n - \bar{c}^2 \right)^2 + \\
 & - \epsilon^2 \sum_{nm} \left(\phi_n^\dagger \phi_m - \phi_m^\dagger \phi_n \right)^2 + \bar{\Psi} \Gamma_7 k \Psi + \\
 & + \epsilon^2 / \sqrt{2} \sum_n \left[\bar{\Psi} (1 + \Gamma_7) \Gamma_n \Psi \phi_n + \bar{\Psi} (1 - \Gamma_7) \Gamma_n \Psi \phi_n^\dagger \right] \quad (70)
 \end{aligned}$$

onde o férmion é escrito como um espinor de oito componentes, $\bar{\Psi} = (\bar{\psi}_{3/2}^\dagger \ \bar{\psi}_{1/2}^\dagger \ \bar{\psi}_{-1/2}^\dagger \ \bar{\psi}_{-3/2}^\dagger \ \bar{\psi}_{3/2} \ \bar{\psi}_{1/2} \ \bar{\psi}_{-1/2} \ \bar{\psi}_{-3/2}) / \sqrt{2}$, representando estados na camada de valência (aqui a superfície de Fermi), e o campo bosônico, ϕ_n ($n=0,1,2,3,4,5$), é rotulado pelas projeções de seu momento angular e é interpretado, em primeira aproximação, como um par de férmions ($\phi \sim \psi \bar{\psi}$). (Aqui também o sistema é considerado como parte de um meio infinito onde se trabalha no limite de momento zero). Note ainda que a parte bosônica da equação (70) é semelhante a um hamiltoniano do tipo modelo σ . Veja, por exemplo, a referência (21).

No hamiltoniano acima, o primeiro termo é a energia cinética bosônica com p_n o momento canonicamente conjugado a ϕ_n . O segundo termo descreve um potencial com invariância por $U(6)$, cuja forma é igual à figura 6 do capítulo 2 (aqui um chapéu mexicano em 6 dimensões), e o

terceiro possui uma invariância por $O(6)$ onde $L_{mn} = -i(\phi_n^\dagger \phi_m - \phi_m^\dagger \phi_n)$ é interpretado como um momento angular em 6 dimensões e $(1/2) \sum L_{mn}^2$ é o correspondente invariante de Casimir ¹³⁾. O quarto é o termo de energia cinética dos fermions, onde $\sqrt{7}$ é uma matriz diagonal 8×8 usada para representar energias positivas e negativas para partículas e buracos respectivamente. A diagonal de $\sqrt{7}$ é $(1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1)$. O último termo é a interação boson-fermion escrito de modo a conservar o número de partículas, isto é, permite interações do tipo $\psi \psi \phi^\dagger$ mas não $\psi \psi \phi$. As matrizes $\sqrt{n}$ são 8×8 , se transformam como vetores sob operações $O(6)$ e servem para acoplar os nucleons, ψ , em pares com momento angular 0 e 2. A constante de acoplamento G é discutida no capítulo 3.

Agora, notemos que o estado fundamental do sistema bosônico é constituído por 6 bosons ϕ_n , isto é, o estado de menor energia pode ser representado como uma combinação linear de estados ϕ_n . Isso não é interessante pois não temos um estado único para representar o estado fundamental e, conseqüentemente, uma referência para tratar os estados excitados. Como foi dito no capítulo 2, podemos escolher qualquer um desses 6 estados degenerados para representar o estado fundamental impondo que o mesmo tenha um valor esperado do vácuo (VEV) diferente de zero. Ao fazermos essa escolha, ocorre uma quebra de simetria pois agora o estado

fundamental não mais possui a simetria do hamiltoniano. Nambu ⁹⁾ escolhe o boson de momento angular total 0, ϕ_0 , para desenvolver um VEV diferente de zero, escrevendo

$$\phi_0 = \tilde{c} + (\sigma_0 + i\pi_0)/\sqrt{2} \quad (71-a)$$

$$\phi_i = (\pi_i + i\sigma_i)/\sqrt{2} \quad i=1,2,3,4,5 \quad (71-b)$$

onde σ e π representam oscilações em torno do vácuo. A escolha desse boson para desenvolver um $VEV \neq 0$ remove a degenerescência e ainda abaixa a energia desse modo em relação aos outros. Esse abaixamento é feito para concordar com o fato, a partir de ingredientes físicos, que o boson de momento angular zero é mais ligado que o boson de momento angular 2. Veja a figura 1 do cap. 1.

Introduzindo (71-a) e (71-b) no hamiltoniano (70) (omitindo os termos cinéticos) obtemos

$$\begin{aligned} H = & 1/2(8\zeta^2\tilde{c}^2) \sum_n \sigma_n^2 + \sqrt{2}\zeta\tilde{c} \Psi^\dagger \Gamma_0 \Psi + \\ & + 2\sqrt{2}\zeta^2\tilde{c} \sigma_0 \sum_n (\sigma_n^2 + \pi_n^2) + 4\sqrt{2}\zeta^2\tilde{c} \sum_i \sigma_i (\sigma_0\sigma_i - \pi_0\pi_i) \\ & + \zeta^2/2 \left[\sum_n (\sigma_n^2 + \pi_n^2) \right]^2 + \zeta^2 \sum_{i,j} (\pi_i\sigma_j - \sigma_i\pi_j)^2 + \\ & + 2\zeta^2 \sum_i (\sigma_0\sigma_i - \pi_0\pi_i)^2 + \zeta \sum_i \Psi^\dagger (\Gamma_0\sigma_0 + i\Gamma_2\Gamma_0\pi_0 + \Gamma_1\pi_i + i\Gamma_3\Gamma_1\sigma_i) \Psi \end{aligned} \quad (72)$$

onde $n = 0,1,2,3,4,5$ e $i(j) = 1,2,3,4,5$.

Na equação (72), o primeiro e o segundo membros são termos de massa para o boson σ e o fermion respectivamente. Note que o boson π não possui massa. Temos então

$$m_\sigma = 2\sqrt{2} G \tilde{c} \quad (73-a)$$

$$m_f = \sqrt{2} G \tilde{c} = \Delta \quad (73-b)$$

$$m_\pi = 0 \quad (73-c)$$

de modo que a relação de massa $m_\pi : m_f : m_\sigma = 0 : 1 : 2$ é satisfeita.

A seguir, as interações boson-boson (do 3º ao 7º membro da equação 72) são tratadas em termos de diagramas a nível de "árvore" (sem loops internos) e no limite de momento zero. Diagramas com loops internos se referem a interações em energias maiores (onde a auto-energia das partículas é importante) e, como o hamiltoniano (70) reproduz apenas as propriedades em baixas energias do sistema, tais diagramas não são levados em conta. Os campos σ e π são escritos em termos de operadores de criação e aniquilação,

$$\sigma_n = (a_n + a_n^\dagger) / \sqrt{2V m_\sigma} \quad (74-a)$$

$$\pi_n = (b_n + b_n^\dagger) / \sqrt{2V m_\pi} \quad (74-b)$$

onde V é um volume de normalização, o qual pode ser igualado (depois da redução para um sistema finito) ao volume nuclear, e m_π é a massa do boson π que no final faremos tender para zero. Essa pequena massa é introduzida para eliminar problemas com divergência quando os diagramas envolvem tais bosons. Como exemplo mostramos alguns diagramas (retirados da referência 9) e suas contribuições.

A interação representada por esse diagrama vem do terceiro e quarto membros do hamiltoniano (72). Sua contribuição é dada por (vértice esquerdo) $\times$ (propagador) $\times$ (vértice direito) com o resultado

$$\frac{(2\sqrt{2} g^2 \tilde{c})^2}{-m_\sigma^2} 9 (4 a_i^\dagger a_o^\dagger a_i a_o) \frac{1}{(2\sqrt{2} m_\sigma)^2} \quad (75)$$

onde o propagador (no limite de momento zero) é $\frac{1}{-m_\sigma^2}$.

Essa interação vem do terceiro membro da eq. (72) com uma contribuição dada por

$$\frac{(2\sqrt{2}G^2\tilde{c})^2}{(2VM_\pi)^2} b_0^\dagger b_0^\dagger b_0 b_0 \left(\frac{1}{4M_\pi^2 - m_\sigma^2} \right) \quad (76)$$

onde o último termo é o propagador. Expandindo (76) em potências de m_π^2/m_σ^2 até 1ª ordem temos

$$-\frac{(2\sqrt{2}G^2\tilde{c})^2}{4V^2} b_0^\dagger b_0^\dagger b_0 b_0 \cdot \left(\frac{1}{m_\pi^2 m_\sigma^2} + \frac{4}{m_\sigma^4} \right) \quad (76-a)$$

No último parênteses, o primeiro termo é divergente (tem m_π no denominador) enquanto que o segundo é finito. De acordo com a referência 9, os termos divergentes se cancelam identicamente quando as contribuições de todos os possíveis diagramas são somadas. (Não conseguimos eliminar essas divergências. No apêndice 1 mostramos as dificuldades que encontramos com esse modelo).

3.

Esse diagrama, representando uma interação quártica entre os bosons σ , vem do 5º e 7º membros da eq. (72). Sua contribuição é

$$\frac{2G^2}{(2\sqrt{m_\sigma})^2} (a_i^\dagger a_o^\dagger a_i a_o) \quad (77)$$

Note-se que, quando é feita a substituição $2\sqrt{2}G\tilde{c}$ para a massa do boson σ , todos os diagramas convergentes tem a mesma dependência $1/\tilde{c}^2.v^2$.

Agora os operadores a e b são reagrupados de modo a aparecerem de forma explícita os invariantes de Casimir para o $U(6)$, $O(6)$ e $O(5)$.

$$\begin{aligned} N_6(\sigma) &= \sum_n a_n^\dagger a_n ; N_6(\pi) = \sum_n b_n^\dagger b_n \\ O_6(\sigma) &= -1/2 \sum_{nm} (a_m^\dagger a_n - a_n^\dagger a_m)^2 \\ O_6(\pi) &= -1/2 \sum_{nm} (b_m^\dagger b_n - b_n^\dagger b_m)^2 \\ O_5(\sigma) &= \sum_{ij} (a_i^\dagger a_j - a_j^\dagger a_i)^2 ; O_5(\pi) = \sum_{ij} (b_i^\dagger b_j - b_j^\dagger b_i)^2 \\ O_5(\sigma, \pi) &= \sum_{ij} (a_i^\dagger a_j - a_j^\dagger a_i)(b_i^\dagger b_j - b_j^\dagger b_i) \end{aligned} \quad (78)$$

Em termos desses invariantes o hamiltoniano bosônico é

escrito como

$$H_b = m_\sigma N_6(\sigma) + (1/8\tilde{c}^2 V) \left[-3 N_6(\sigma)^2 - 3 O_6(\sigma) + \right. \\ \left. + 2 O_5(\sigma) - N_6(\pi)^2 - O_6(\pi) + 2 O_5(\pi) + 2 O_5(\sigma\pi) \right] \quad (79)$$

onde multiplica-se por V para fornecer o resultado em unidades de energia e não em unidades de energia por volume. O hamiltoniano acima ainda não está pronto para ser comparado com o IBM. É preciso tratar o problema do número de partículas, que não é uma quantidade conservada, e o caso de volume infinito.

Quanto ao primeiro caso, Nambu e Mukerjee⁹⁾ resolvem o problema projetando o hamiltoniano de uma base diagonal em energia para uma base diagonal em número de partículas. Isso é feito notando que $\sigma \sim \Psi^\dagger A_1 \Psi$ e que $\pi \sim \Psi^\dagger A_2 \Psi$ de modo que se pode escrever

$$a = (u + v)/\sqrt{2} \quad (80-a)$$

$$b = -i(u - v)/\sqrt{2} \quad (80-b)$$

onde $\underline{u}$ aniquila um par de partículas e $\underline{v}$ um par de buracos. Mantendo somente $\underline{u}$ ou $\underline{v}$ pois partículas e buracos podem ser considerados "partículas" nessa representação, os modos π e

σ tornam-se idênticos com uma massa $m = m_\sigma/2$. Em termos do operador $\underline{u}$, o hamiltoniano (79) é escrito como

$$H_b = (1/2) m_\sigma N_6 + (1/8 \tilde{c}^2 V) [-N_6 - O_6 + (3/2) O_5] \quad (81)$$

onde os operadores de Casimir são agora funções de $\underline{u}$ e tem a mesma forma que antes. Para o segundo caso, notemos que um número de partículas finito implica em um sistema finito, cujo efeito é o de diminuir os propagadores de todos os diagramas. Essa redução ocorre pois agora há uma incerteza no momento. Por exemplo, para núcleos com $A \sim 200$, (raio nuclear ~ 7 fm) o propagador do diagrama 1 torna-se

$$\frac{1}{-m_\sigma^2} \rightarrow \frac{1}{m_\sigma^2 + \Delta p^2} = \frac{1}{m_\sigma^2} \cdot \left(\frac{1}{1 + \ell^2/R^2} \right) \sim \frac{1}{3m_\sigma^2} \quad (82)$$

onde R é o raio nuclear e ℓ é o comprimento de coerência dado por $\ell = v_F / \sqrt{3} m_\sigma$. Portanto, nesse exemplo, o fator de redução é $C=1/3$. Na verdade, esse fator deve ser diferente para diferentes diagramas mas foi tomado como um fator de correção global ⁹⁾.

O comprimento de coerência pode ser interpretado como a distância entre os constituintes de um par de Cooper. Por exemplo, para núcleos na região de massa $A \sim 200$, (momento de Fermi $p_F \sim 240$ Mev) o gap de energia é aproximadamente 0,75 Mev o que implica em $m=3$ Mev e em $\ell \sim 10$ fm que é menor que o comprimento de coerência no meio infinito (~ 20 fm).

Levando em conta esse fator de correção, o hamiltoniano bosônico é escrito como

$$H_b = (1/2) m_0 N_6 + (C/8\tilde{c}^2 V) [-N_6^2 - O_6 + (3/2) O_5] \quad (83)$$

é a equação acima que será comparada com o hamiltoniano do IBM correspondendo ao limite γ^1 -instável.

O coeficiente $C/(8\tilde{c}^2 V)$ tem o valor de aproximadamente $40C/A$ Mev ~ 200 C Kev para $A \sim 200$. No IBM, os coeficientes na região da Platina variam de -30 a -50 Kev para o termo O_6 e de 40 a 60 Kev para o termo O_5 . O hamiltoniano (83) reproduz esses resultados, em média, para $C \sim 1/4$.

Note que o hamiltoniano acima não possui o termo correspondente ao invariante de Casimir do $O(3)$. De acordo com a referência 9, não é possível obter esse termo espontaneamente através do hamiltoniano de partida.

C O N C L U S Ã O

Apesar de não termos obtido a correspondência entre o BCS e o IBM, é prematuro dizer que o modelo proposto por Nambu e Mukerjee ⁹⁾ seja falho. O modelo utiliza em sua formulação uma quantidade excessiva de aproximações (o que não é de todo ruim para uma descrição qualitativa) e na passagem do sistema infinito a finito emprega um fator de correção C um tanto quanto forçado mas, o ponto principal não reside nas aproximações utilizadas na adequação do hamiltoniano tipo modelo σ com o IBM realista, mas sim em saber quão boa é a conexão entre o BCS com emparelhamento monopolar e quadrupolar e o hamiltoniano tipo modelo σ (ver equação 70).

Como vimos no capítulo 3, o estado bosônico constituído por pares de nucleons acoplados a $J=0$ e $J=2$ não é um escalar (invariante) sob rotações. No entanto, o hamiltoniano 70 do capítulo 4 possui os campos ϕ_n (que são interpretados pictoricamente como pares de nucleons) com bom momento angular, isto é, o momento angular é um bom número quântico e o hamiltoniano é invariante sob as operações de rotação no espaço tridimensional. Isso deve ser assim pois o hamiltoniano do IBM também é invariante sob rotações. O que queremos dizer com isso é que enquanto no BCS os estados constituídos por pares acoplados a $J=0$ e $J=2$ não tem momento

angular como bom número quântico, os campos ϕ_n do hamiltoniano 70 tem bom momento angular e isso deixa um pouco obscura a ligação entre os dois.

Outro ponto importante é o fato que o BCS não mistura protons e neutrons, isto é, ou trabalhamos com protons ou com neutrons. Já o IBM não distingue esses dois tipos de partículas e, assim, a conexão entre BCS e IBM fica um pouco prejudicada. No entanto, há a possibilidade de protons e neutrons serem tratados (via BCS) conjuntamente através de um acoplamento a modos coletivos de densidade ⁹⁾. Trata-se, contudo, de uma idéia obscura. Note ainda que o tratamento mutuamente exclusivo entre protons e neutrons ⁹⁾ é que permitiu a projeção do hamiltoniano (79) em um subespaço diagonal em número de partículas como foi feito (ver equações 80-a e 80-b), isto é, considerando só partículas ou só buracos. Por outro lado, no IBM os bosons são "formados" por pares de protons (partícula ou buraco) e pares de neutrons (partícula ou buraco) de modo que numa aplicação do IBM a um núcleo real a diferença entre bosons-protons e bosons-neutrons é completamente ignorada (talvez não seja tarde para reforçar mais uma vez que tratamos ao longo deste trabalho com a versão mais simples do IBM-frequentemente denominada, na literatura, IBM-1, embora existam versões onde a distinção entre protons e neutrons é levada em conta explicitamente- o chamado IBM-2).

Posteriormente, seria interessante fazer um tratamento BCS levando em conta ambas as espécies de partículas (protons e neutrons), seguir o mesmo modelo proposto por Nambu e Mukerjee ⁹⁾ e, finalmente, fazer a comparação com o IBM-2. Nesse caso é necessário incluir explicitamente o número quântico de isospin.

Outro ponto interessante seria verificar a possibilidade de se obter núcleos deformados a partir de um hamiltoniano efetivo escrito em termos dos bosons π e σ do BCS. Já que esses bosons não tem momento angular como bom número quântico (são deformados) talvez fosse possível gerar, a partir deles, um campo nuclear que apresente características rotacionais.

APÊNDICE 1

Neste apêndice mostraremos a dificuldade encontrada no cálculo das interações bosônicas através de diagramas.

O fato é que não conseguimos eliminar as divergências causadas pela massa zero do boson π e mesmo algumas contribuições envolvendo os bosons σ não concordaram em resultado numérico. A tabela A-1 abaixo mostra todos os possíveis diagramas com 2 vértices e seus respectivos propagadores.

INTERAÇÃO	PROPAGADOR	INTERAÇÃO	PROPAGADOR
	$\frac{1}{-m_\sigma^2}$		$\frac{1}{m_\sigma^2 - 2m_\pi m_\sigma}$
	$\frac{1}{3m_\sigma^2}$		$\frac{1}{m_\sigma^2 + 2m_\pi m_\sigma}$
	$\frac{1}{-m_\sigma^2}$		$\frac{1}{-m_\sigma^2}$
	$\frac{1}{4m_\pi^2 - m_\sigma^2}$		PROIBIDOS. NÃO HÁ CONSERVAÇÃO DO QUADRIMOMENTO.

Tabela A-1 - Diagramas e propagadores do modelo de Nambu e Mukerjee

Os propagadores da tabela acima foram calculados através da conservação do quadrimomento $p=(\vec{p},p_0)=(\vec{p},E)$ nos vértices. A energia das partículas internas é $E=m_\sigma$ ou $E=m_\pi$ dependendo do tipo de boson que se propaga, e os cálculos foram feitos no limite de momento zero. A conservação do quadrimomento exclui alguns diagramas (interações) como, por exemplo, o último da tabela A-1. Note, mais uma vez, que o boson π possui uma pequena massa $m_\pi \neq 0$ a qual tenderá a zero.

As interações quárticas, que não ocorrem por intermédio de outra partícula, serão finitas se envolverem os bosons σ e divergirão ($\rightarrow \infty$) se envolverem os bosons π ou dois π e dois σ . Não há meios de evitar a divergência das interações quárticas. Elas deveriam ser canceladas pela parte divergente dos diagramas com 2 vértices. Isto é, uma interação quártica com contribuição positiva teria a sua correspondente negativa da interação representada por um diagrama com 2 vértices.

Como dissemos no capítulo 4, o hamiltoniano de partida é muito parecido com um hamiltoniano do tipo modelo σ . A referência (21) trata esse modelo no contexto de quebra espontânea de simetria e fornece as regras para o cálculo das interações entre os bosons através de diagramas. Utilizamos essas regras e o resultado foi negativo: não conseguimos eliminar as divergências.

Vemos então que esse é um problema fundamental. Se não for possível eliminar tais divergências não haverá meios de conectar os dois modelos.

APÊNDICE 2

Como vimos no capítulo 4, a escolha de nucleons ocupando estados como $j=3/2$ pode parecer uma limitação do modelo. Por isso, apresentamos aqui uma formulação alternativa no contexto de pseudo-spin e pseudo-momento angular orbital (22,23).

A idéia (22,23) é que a base utilizada para as funções de onda do Modelo de Camadas rotulada pelos números quânticos j, m (e demais números quânticos implícitos) é transformada em uma nova base, chamada base $k-i$, onde o momento angular $\vec{j}$ é decomposto em um pseudo momento angular $\vec{k}$ e um pseudo-spin $\vec{i}$ da seguinte forma :

$$\vec{j} = \vec{k} + \vec{i} ; a_{jm}^{\dagger} = \sum_{m_k m_i} \langle k m_k i m_i | j m \rangle b_{k m_k i m_i}^{\dagger} \quad (B-1)$$

onde $a_{jm}^{\dagger}$ é o operador de criação de partícula independente do Modelo de Camadas, $b_{k m_k i m_i}^{\dagger}$ é o operador de criação na base $k-i$, e $\langle k m_k i m_i | j m \rangle$ é o coeficiente de Clebsch-Gordan.

A base $k-i$ deve satisfazer dois requerimentos :

- (1) Os valores de k e i devem ser tais que todos os j na maior camada devem ser reproduzidos pelo acoplamento dos k e i , nem mais nem menos.
- (2) Ou k deve ser 1 ou i deve ser $3/2$, a menos que isto esteja em contradição com o primeiro requerimento e, então, $k = 0$ deve ser escolhido.

O primeiro requerimento baseia-se no fato de que existe uma transformação unitária, tal que

$$b_{km_k i m_i}^\dagger = \sum_j \langle km_k i m_i | jm \rangle a_{jm}^\dagger \quad (B-2)$$

O segundo é motivado pelo fato que os movimentos nucleares coletivos em baixas energias parecem ser dominados por pares S e D . Esses pares nessa nova base são formados da seguinte maneira: uma parte de j , que chamaremos j_{inerte} , acopla dois nucleons idênticos a $J=0$ formando os pares S . A outra parte de j , que chamaremos j_{ativo} , acopla dois nucleos idênticos a $J=0$ e $J=2$ formando pares S e D .

É possível, então, escolher a decomposição $k-i$ tal que uma parte seja ATIVA e outra INERTE :

$$\vec{j} = \vec{j}_{\text{ATIVO}} + \vec{j}_{\text{INERTE}} \quad (B-3)$$

sendo que a física por trás dessa decomposição é análoga à decomposição de $\vec{j}$ em $\vec{l}$ e $\vec{s}$.

Por definição, há somente duas alternativas para o momento angular ATIVO em tal decomposição $k-i$: para $\vec{k}_{\text{ativo}} \rightarrow k=1$ e para $\vec{i}_{\text{ativo}} \rightarrow i=3/2$. Isso ocorre devido ao segundo requerimento. Os correspondentes esquemas de acoplamento são apresentados na figura B-1 (cabe aqui uma palavra de advertência a cerca do significado de k e i : $\vec{k}$ não é o momento angular orbital usual nem $\vec{i}$ é o spin intrínseco).

Figura B-1 - Esquema de acoplamento 22,23).

Também mostramos na tabela B-1 a nova base de partícula independente formada pelos números quânticos k e i .

N.	1	2	3	4	5	6	7	8
n	0	1	2	3	3 4	4 5	5 5 6	6 6 7
k	0	1	1	0	1 0	2 0	1 1 0	1 1 0
i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{3}{2}$ $\frac{9}{2}$	$\frac{5}{2}$ $\frac{11}{2}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{7}{2}$ $\frac{13}{2}$	$\frac{3}{2}$ $\frac{9}{2}$ $\frac{15}{2}$
CONFIGURATION	$s_{1/2}$	$p_{1/2}$ $p_{3/2}$	$s_{1/2}$ $d_{3/2}$ $d_{5/2}$	$f_{7/2}$	$p_{1/2}$ $g_{9/2}$ $p_{3/2}$ $f_{5/2}$	$s_{1/2}$ $h_{11/2}$ $d_{3/2}$ $d_{5/2}$ $g_{7/2}$	$p_{1/2}$ $f_{5/2}$ $h_{7/2}$ $p_{3/2}$ $f_{7/2}$ $h_{9/2}$	$s_{1/2}$ $g_{7/2}$ $j_{5/2}$ $d_{3/2}$ $g_{9/2}$ $d_{5/2}$ $h_{11/2}$
SYM			$6_6 6_3$		$6_6 6_3$	6_8	6_6	6_6
Ω_0	0	0	0	0	5	6'	7	8
Ω_1	1'	3	6	4	6	10	15	21
Ω	2	8	20	28	50	82	126	184

Tabela B-1 - Reclassificação da base do Modelo de Camadas (22,23)

Na tabela acima N_0 rotula a ordem das camadas; n , k e i são os números quânticos principal, pseudo-orbital e pseudo-spin e Ω_0 e Ω_1 são as degenerescências dos estados com $k=0$ (onde os pares S dominam) e dos estados com k_{ativo} ($k=1$) ou i_{ativo} ($i=3/2$) respectivamente.

Na base $k=1$, um subespaço formado por pares S e D (que representa a maior parte do espaço responsável pelas excitações coletivas em baixas energias) pode ser separado de todo o espaço do Modelo de Camadas simplesmente "congelando" a parte INERTE do momento angular (isto é,

acoplamento a $J=0$). Nessa base os pares S e D são definidos por

$$S^{\dagger} = (\Omega_{ki}/2)^{1/2} \begin{bmatrix} b_{ki}^{\dagger} & b_{ki}^{\dagger} \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \quad \forall k \in i \quad (B-4)$$

$$D_{\mu}^{\dagger r} = (\Omega_{k3/2}/2)^{1/2} \begin{bmatrix} b_{k3/2}^{\dagger} & b_{k3/2}^{\dagger} \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 & r \\ 0 & \mu \end{matrix} \quad i \text{ ATIVO} \quad (B-5)$$

$$D_{\mu}^{\dagger r} = (\Omega_{1i}/2)^{1/2} \begin{bmatrix} b_{1i}^{\dagger} & b_{1i}^{\dagger} \end{bmatrix} \begin{matrix} r & 0 \\ \mu & 0 \end{matrix} \quad k \text{ ATIVO} \quad (B-6)$$

onde $\Omega_{ki} = (2k+1)(2i+1)/2$. Para a camada com mais que um i , as equações (B-4 a B-6) devem ser somadas sobre i .

Acreditamos que com essa nova interpretação o modelo de Nambu-Mukerjee ⁹⁾ torna-se mais geral, no sentido que não precisa se restringir a estados com $j=3/2$ para a construção de pares com $J=0$ e $J=2$. Nessa nova base, $k-i$, podemos ter nucleons ocupando estados com qualquer $j \geq 3/2$ desde que congelemos a parte INERTE e consideremos apenas a parte ATIVA do modelo angular.

REFERÊNCIAS

1. S. Coleman, Lectures at the 1973 International Summer School of Physics Ettore Majorana.
2. F. Mandl and G. Shaw, Quantum Field Theory, John Wiley (1986).
3. P. W. Higgs, Phys. Lett. 12 (1964) 132; 13 (1964) 508; Phys. Rev. 145 (1966) 1156.
4. S. Weinberg, Phys. Rev. D7 (1973) 1068
5. J. R. Schrieffer, "Theory of Superconductivity", Frontiers of Physics, Benjamin, New York, 1964.
6. P. B. Littlewood and C. M. Varma, Phys. Rev. B26 (1982) 4883.
7. R. D. Mattuck, "A Guide to Feynman Diagrams in the Many Body Problem", McGraw-Hill, (1967).
8. Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. 122 (1961) 345.
9. Y. Nambu and M. Mukerjee, Phys. Lett. B209 (1988) 1
M. Mukerjee and Y. Nambu, Ann. of Phys. 191 (1989) 143.
10. Y. Nambu, Phys. Rev. 117 (1960) 648.
11. Y. Nambu, Physica 15D (1985) 147.
12. R. A. Broglia, D. R. Bes and B. S. Nilsson, Phys. Letters, 50B (1974) 213.
13. D. Sholten, PhD Thesis, Groningen University, (1980)
R. Bijker, PhD Thesis, Groningen University, (1984)
A. Arima and F. Iachello, Phys. Rev. Lett. 35 (1975) 1069
I. Talmi, Proceedings of International School of Physics Enrico Fermi, Varena, (1982)
D. Castaños, F. Chacón, A. Frank e M. Moshinski, J. Math. Phys. 20 (1979) 35
14. J. P. Shiffer and W. W. True, Rev. Mod. Phys. 48 (1976) 191.
15. R. F. Daschen and M. Gell-Mann, Phys. Lett. 17 (1965) 142
F. Iachello, Comm. Nucl. Part. Phys. 8 (1978) 59.
16. Cesar A. A. Nunes, Dissertação de Mestrado, IFUSP (1987)

17. J. Dukelsky et al, Nucl. Phys. A456 (1986) 75 e referências lá citadas.
18. A. Bohr, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 26 n°14 (1952)
A. Bohr and B. Mottelson, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 27 n°16 (1953).
19. F. J. Margetan, PhD thesis, Iowa State University.
20. T. M. Corrigan, F. J. Margetan and S. A. Williams, Phys. Rev. C14 (1976) 2279.
21. B. W. Lee, Chiral Dynamics, Doc. on Modern Phys. Gordon and Breach Inc. (1972).
22. Cheng-Li Wu, Workshop on the Microscopic Models of Nuclei, Oak Ridge National Laboratory, October (1988).
23. J. N. Ginocchio, Phys. Rev. B79 (1978) 173;
Ann. of Phys. 126 (1980) 234.