UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Física

Equações Diferenciais Não Lineares com Três
Retardos: Estudo Detalhado das Soluções

Júlio César Bastos de Figueiredo

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo, Departamento de Física Nuclear, sob a orientação da Professora Doutora Coraci Pereira Malta.

SÃO PAULO
2000

Para Hermes e Lourdes,
meus queridos pais. Pelo carinho e
dedicação durante todos esses anos.

AGRADECIMENTOS

- À professora Coraci, pela importância em minha formação, pela orientação e pela amizade.
- Aos amigos do Instituto de Física, em particular ao Rone, amigo sempre presente em todos os momentos.
- A todos os professores do Instituto de Física, que de uma forma ou de outra me ajudaram nesta tese.
- A todos os funcionários do departamento de Física Nuclear, em particular ao Adilson e ao Fábio.
- A todos os colegas do Grupo de Pesquisa de Desenvolvimento do Serviço de Informática do InCor. Em especial ao professor Sérgio Furuie, pelo incentivo e apoio.
- Ao CNPq pelo auxílio financeiro.

Abstract

In this thesis we study the behavior of a simple control system based on a delay differential equation with multiple loops of negative feedback. Numerical solutions of the delay differential equation with N delays $\frac{d}{dt}x(t) = -x(t) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\theta_i^n}{\theta_i^n + x(t-\tau_i)^n}$ have been investigated as function of its parameters: n , θ_i and τ_i .

A simple numerical method for determine the stability regions of the equilibrium points in the parameter space (θ_i, n) is presented. The existence of a doubling period route to chaos in the equation, for $N = 3$, is characterized by the construction of bifurcation diagram with parameter n . A numerical method that uses the analysis of Poincaré sections of the reconstructed attractor to find aperiodic solutions in the parameter space of the equation is also presented. We apply this method for $N = 2$ and get evidences for the existence of chaotic solutions as result of a period doubling route to chaos (chaotic solutions for $N = 2$ in that equation had never been observed). Finally, we study the solutions of a piecewise constant equation that corresponds to the limit case $n \rightarrow \infty$.

Resumo

Nesta tese é analisado o comportamento de um sistema de controle simples, baseado em uma equação diferencial com retardo com múltiplos ciclos de retroalimentação negativa. Estuda-se numericamente as soluções da equação diferencial com N retardos $\frac{d}{dt}x(t) = -x(t) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\theta_i^n}{\theta_i^n + x(t-\tau_i)^n}$ em relação a seus parâmetros: n , θ_i e τ_i .

É apresentado um método numérico que permite a determinação das regiões de estabilidade dos pontos de equilíbrio dessa equação no espaço de parâmetros (θ_i, n) . A existência de uma rota de duplicação de período para o caos nessa equação, para o caso de $N = 3$, é caracterizada com a construção de diagramas de bifurcação com o parâmetro n . É apresentado outro método numérico que, a partir da análise das seções de Poincaré dos atratores reconstruídos, permite encontrar soluções aperiódicas no espaço de parâmetros dessa equação. Esse método é aplicado para o caso de $N = 2$ e evidências da existência de soluções caóticas, resultado de uma rota de duplicação de período, também são encontradas (soluções caóticas para $N = 2$ nessa equação nunca tinham sido observadas antes). Por fim, considera-se também o estudo de uma equação constante por partes que corresponde à solução de um caso limite dessa equação (quando $n \rightarrow \infty$).

Sumário

Introdução	1
1 Sistemas Dinâmicos	4
1.1 Introdução	4
1.2 Atratores	5
1.3 Aplicações e Seções de Poincaré	12
1.4 Bifurcações	15
1.5 Análise Espectral	20
1.6 Reconstrução de Takens	22
1.7 Dimensões Generalizadas	24
2 Equações Diferenciais com Retardo	29
2.1 EDRs em Biologia e Fisiologia	34
3 Análise Linear	39
3.1 Introdução	39
3.2 Linearização	39
3.3 Regiões de Estabilidade dos Pontos de Equilíbrio	48
4 Estudo das Soluções	56
4.1 Introdução	56
4.2 Convergência das Soluções Numéricas	59
4.2.1 O Teste de Kolmogorov-Smirnov	69
4.2.2 Cálculo da Distância Entre Atratores	76
4.3 Obtenção dos Diagramas de Bifurcação	80

5	Soluções Caóticas para Dois Retardos	89
5.1	Detecção de Soluções Aperiódicas	89
5.2	Equação Constante por Partes	97
5.2.1	Detecção de Soluções Aperiódicas	102
6	Conclusões	109
A	O método de Gear	112
B	Programas	116
B.1	Códigos fonte	119
B.1.1	Interface <i>drive.tcl</i> (TCL/TK)	119
B.1.2	Programa <i>integra.for</i> (FORTRAN 77)	123
C	Publicações	134
C.1	Lyapunov Graph for two-parameters map: application to the circle map	134
C.2	Two important numbers in the Hénon-Heiles dynamics	135
C.3	Epileptic activity recognition in EEG recording	135
	Bibliografia	137

Introdução

Nesta tese estudamos a equação diferencial com retardo:

$$\frac{d}{dt}x(t) = -x(t) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(\theta_i)^n}{(\theta_i)^n + (x(t - \tau_i))^n} \quad (1)$$

Esta equação é a formulação, para múltiplos retardos, de uma forma mais simples de equação, com apenas um retardo, proposta por Glass & Mackey (1979) como modelo matemático para o controle hormonal da produção de células brancas do sangue e que foi posteriormente estudada, para o caso de três ou mais retardos, por Glass & Malta (1990). Essa equação é particularmente interessante no contexto dos sistemas fisiológicos como mostraremos no capítulo 2, porém, sistemas de controle baseados em equações diferenciais com retardo são encontrados em muitas outras áreas, tanto na fisiologia como na física, na matemática, engenharia e mesmo na economia. Muitos sistemas físicos podem ser descritos por equações diferenciais que envolvem apenas os estados atuais das variáveis do sistema e a taxa de mudança dessas variáveis, ou seja, podem ser modelados por equações diferenciais ordinárias (EDOs). Muitas vezes porém, para descrever um determinado sistema físico, devemos incluir o passado desse sistema, e nesses casos, uma equação diferencial com retardo (EDR) é um modelo mais apropriado. O critério

utilizado para a escolha de um modelo baseado em EDOs ou em EDRs dependerá fundamentalmente do estudo das características do sistema físico que desejamos modelar, baseando-se principalmente no fato desse sistema físico apresentar, ou não, dependência com estados passados.

Podemos perceber que, devido ao retardamento existente em (1), temos em mãos um problema cuja informação inicial necessária é uma função definida em um intervalo de tempo no passado. Portanto, o espaço de fase natural desse sistema é o espaço de fase das funções definidas nesse mesmo intervalo. Isso nos coloca frente a frente com um problema cujo espaço de fase possui dimensão infinita, o que leva a um comportamento dinâmico bastante rico e complexo que não possui um tratamento analítico simples. A teoria para tais sistemas tem sofrido avanços recentes, em grande parte devido ao advento de computadores cada vez mais potentes e de algoritmos numéricos robustos que permitem resolver numericamente equações variadas com comportamentos dinâmicos complexos.

Esta tese visa dar uma contribuição à compreensão dos sistemas controlados por equações do tipo da equação (1). No capítulo 1 é feita uma introdução aos sistemas dinâmicos e aos principais conceitos e ferramentas analíticas utilizadas para caracterização da dinâmica nesses sistemas, principalmente no que diz respeito às EDOs. O capítulo 2 apresenta as EDRs. Mostram-se suas principais características e aplicações. A equação (1) é apresentada no contexto do estudo da dinâmica de sistemas fisiológicos com retroalimentação negativa e função de controle do tipo sigmoidal. A importância das funções do tipo sigmoidal nos sistemas de controle também é discutida. No capítulo 3 é feita a análise linear da equação (1). A estabilidade local dos pontos de equilíbrio é obtida a partir da linearização da equação em torno desses pontos. Discutem-se alguns resultados importantes derivados dessa análise e apresenta-se um método numérico para a determinação das curvas de estabilidade da equação (1) no espaço de parâmetros do

sistema.

No capítulo 4 é feito o estudo numérico da equação (1) para o caso onde $N = 3$. Estuda-se o problema da convergência numérica de soluções caóticas desse tipo de equação e apresenta-se um critério para análise dessa convergência. É construído um diagrama de bifurcações para um conjunto de parâmetros da equação (1) utilizado na literatura [Glass & Malta (1990), Malta & Teles (1996)] e, através desse diagrama, que corresponde a uma cascata completa de duplicação de períodos, confirma-se o fato de que existem rotas de duplicação de período para caos nesse sistema quando $N = 3$. Apresentam-se ainda os resultados dos estudos envolvendo a análise de Fourier das séries temporais integradas e as reconstruções de Takens dos atratores, bem como a caracterização das seções de Poincaré dos atratores reconstruídos. No capítulo 5 desenvolve-se um método de busca de soluções complexas nos espaços de parâmetros da equação (1). Esse método é baseado na contagem de pontos em uma seção de Poincaré de um atrator reconstruído. Utiliza-se esse método para encontrar outras soluções caóticas nos espaços de parâmetros da equação (1) com $N = 2$. Soluções aperiódicas ou caóticas da equação (1) com $N = 2$ nunca haviam sido observadas antes. Ainda nesse capítulo é estudada uma equação constante por partes que corresponde à solução da equação (1) no caso limite de $n \rightarrow \infty$ [Glass & Mackey (1979), Glass et al. (1988)].

Por fim, no capítulo 6, é feita uma explanação a respeito dos principais resultados obtidos nesta tese apontando-se alguns caminhos futuros que podem vir a ser seguidos.

Capítulo 1

Sistemas Dinâmicos

1.1 Introdução

O conceito de *sistemas dinâmicos* é um tanto quanto geral, e portanto difícil de ser definido. De maneira não rigorosa os sistemas dinâmicos se apresentam como objetos matemáticos usados para modelar fenômenos físicos nos quais os estados (ou uma descrição instantânea deles) mudam com o passar do tempo. Estes modelos são usados nas mais diversas áreas e suas aplicações são, na maioria das vezes, classificadas em três grandes funções: *Preditiva*, na qual o objetivo é prever estados futuros do sistema a partir de observações do passado e de estados presentes do sistema. *Diagnóstica*, na qual o objetivo é deduzir quais dos possíveis estados passados do sistema poderiam ter conduzido ao presente estado, e, finalmente, *aplicativa*, na qual o objetivo não é prever o futuro, nem explicar o passado, mas sim prover uma teoria para os fenômenos físicos em questão. Essas três categorias correspondem às necessidades básicas científicas no sentido de se prever, explicar, e entender os fenômenos físicos.

Estudos teóricos dos sistemas dinâmicos tentam desenvolver equações para descrever a evolução temporal das variáveis envolvidas, como, por exemplo, as concentrações de

gases na atmosfera, as concentrações de células no sangue, os potenciais de um gerador, etc.. Muitas vezes, os modelos matemáticos desenvolvidos para expressar a evolução temporal dos sistemas são escritos na forma de *equações diferenciais ordinárias* (EDOs), porém, dependendo do fenômeno natural que estamos estudando, e do tipo de hipóteses que fazemos para tentar entendê-lo, podemos chegar a outros tipos de modelos matemáticos que dizem respeito a sistemas de equações integrais, equações funcionais, aplicações n -dimensionais com tempo discreto, etc., e todos estes podem ser genericamente chamados de sistemas dinâmicos.

Uma compreensão dos mecanismos dos sistemas dinâmicos requer uma integração de estudos entre a matemática e a física, com relevância particular para um ramo da matemática denominado dinâmica não-linear. Foi Poincaré, no final do século passado, quem estabeleceu as raízes da dinâmica não-linear, mas seus desenvolvimentos mais notáveis ocorreram nos últimos 35 anos.

Neste capítulo falaremos sobre alguns princípios matemáticos básicos utilizados para o estudo de sistemas dinâmicos, sendo que, por motivo de clareza, restringiremos nossas considerações às equações diferenciais ordinárias.

1.2 Atratores

Considere inicialmente a equação diferencial simples,

$$\frac{dx}{dt} = \lambda - \gamma x. \quad (1.1)$$

Usando integração direta, encontramos que

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t} + \frac{\lambda}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}). \quad (1.2)$$

A solução, com $\lambda = 0$, é conhecida como *decaimento exponencial* quando $\gamma > 0$, e como *crescimento exponencial* quando $\gamma < 0$ (λ e γ são chamados de *parâmetros de controle* da equação). O gráfico da solução da equação (1.1) é mostrado na figura 1.1. Nessa figura temos representada uma situação em que λ e γ são positivos. É importante perceber que, qualquer que seja a condição inicial, teremos $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lambda/\gamma$. Esse estado final, para o qual o sistema caminha e permanece após atingí-lo, é chamado de *estado estacionário do sistema*.

Figura 1.1: Soluções da equação (1.1) como uma função do tempo a partir de duas condições iniciais diferentes.

Se o estado estacionário de um sistema corresponde a um valor constante ele é chamado de *ponto de equilíbrio* ou *ponto fixo* do sistema. Para modelos formulados em termos de uma equação diferencial do tipo da equação (1.1), um ponto de equilíbrio x^*

é uma solução da equação diferencial para a qual $dx/dt = 0$. Por exemplo, $x^* = \lambda/\gamma$ corresponde ao único ponto de equilíbrio da equação (1.1).

Um ponto de equilíbrio é dito *estável* se a solução do sistema sempre retorna para esse ponto após aplicarmos uma pequena perturbação no sistema que o afaste desse estado. Caso isso não aconteça, o ponto de equilíbrio é dito *instável*. A natureza (quanto à estabilidade) dos pontos de equilíbrio de um sistema de equações diferenciais pode ser obtida através da linearização do campo vetorial do sistema em torno desses pontos de equilíbrio [Guckenheimer & Holmes (1983)].

Considere o sistema

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}(t)) \quad (1.3)$$

onde $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. A linearização (via expansão de Taylor) em torno do ponto de equilíbrio $\vec{x}^*$ é escrita como

$$\frac{d\vec{\tilde{x}}}{dt} = J \vec{\tilde{x}} = \left. \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right|_{\vec{x}=\vec{x}^*} \vec{\tilde{x}}, \quad (1.4)$$

onde $\vec{\tilde{x}} = (\vec{x} - \vec{x}^*)$ e J é a matriz Jacobiana calculada no ponto de equilíbrio. A equação (1.4) tem solução geral dada por [Guckenheimer & Holmes (1983)]

$$\vec{\tilde{x}}(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\lambda_i t} \vec{v}_i, \quad (1.5)$$

onde $\vec{v}_i \in \mathbb{R}^n$ são os autovetores de J correspondentes aos autovalores λ_i , e α_i são constantes determinadas pelas condições iniciais. Os autovalores λ_i são as raízes da

equação característica $\det(J - I \vec{\lambda}) = 0$, onde I é a matriz identidade. As diferentes possibilidades de combinação dos autovalores λ_i , que podem ser reais, imaginários puros, todos com parte real positiva, etc..., definem a estabilidade dos pontos de equilíbrio [Guckenheimer & Holmes (1983)]. Se $\text{Re}(\lambda_i) \neq 0$ para todos λ_i , o equilíbrio é dito *hiperbólico* ou *não-degenerado* e nesse caso a estabilidade é determinada pelo sinal da parte real dos autovalores: se $\text{Re}(\lambda_i) < 0$, para todo i , então o ponto de equilíbrio é estável (*estabilidade assintótica*); se $\text{Re}(\lambda_i) > 0$, para um (ou mais) valores de i , então o ponto de equilíbrio é instável.

Nos casos onde temos um (ou todos) $\text{Re}(\lambda_i) = 0$ o equilíbrio é dito *não-hiperbólico*, *elíptico* ou *degenerado*. Nesses casos, quando o sistema original é linear, a solução quando deslocada do ponto de equilíbrio não se afasta, nem tende a retornar para esse ponto. O ponto de equilíbrio é então chamado de *centro*. Contudo, se o sistema original não for linear, a obtenção de algum valor $\text{Re}(\lambda_i) = 0$ indica que nada podemos concluir, através da linearização, sobre a estabilidade do ponto de equilíbrio. Nesses casos outros procedimentos devem ser usados para o estudo da estabilidade desse ponto.

Considere agora a equação diferencial que descreve o oscilador harmônico amortecido:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1.6)$$

onde $\dot{x} = dx/dt$. Se considerarmos uma nova variável, $y = \dot{x}$, podemos escrever a equação (1.6) como

$$\dot{x} = y, \quad (1.7)$$

$$\dot{y} = -\gamma y - \omega_0^2 x.$$

Existe uma maneira simples de identificar as principais características das soluções dessa equação e compreender, de modo qualitativo, os possíveis movimentos do sistema. Isso é feito através do estudo do *diagrama de fase desse sistema*. Observe a figura 1.2.

Figura 1.2: Diagrama de fase da equação (1.7).

Nessa figura cada par de valores (x, y) corresponde a um estado dinâmico do oscilador harmônico amortecido. As curvas desenhadas são chamadas de *trajetórias de fase* ou *linhas de fluxo* e representam a evolução das soluções de (1.7) a partir de quatro condições iniciais diferentes. Essas trajetórias mostram como os estados evoluem à medida que o tempo passa. O conjunto de todas as curvas é chamado *diagrama de fase* (ou *retrato de fase*) e o espaço onde estas curvas se encontram é chamado de *espaço de fase do sistema*. As flechas indicam o sentido da evolução temporal. Pode-se determiná-las observando que para y positivo (negativo) x cresce (decresce) com o tempo. O ponto $(x, y) = (0, 0)$ corresponde à solução trivial, ou seja, o oscilador está parado e assim permanece indefinidamente. Tal ponto é um ponto de equilíbrio estável pois, conforme podemos ver através do diagrama de fase, se afastarmos o sistema desse ponto e o

abandonarmos ele retornará para o ponto de equilíbrio.

Sistemas dinâmicos nem sempre atingem apenas estados estacionários correspondentes a pontos de equilíbrio. Algumas vezes o estado estacionário do sistema pode corresponder a uma oscilação, que pode ser periódica ou não. Considere a equação diferencial (1.8).

$$\dot{x} = y, \quad (1.8)$$

$$\dot{y} = -(1 - x^2)y - x.$$

Essa equação corresponde a um caso particular da equação diferencial de Van der Pol. Ela representa um oscilador para o qual a energia é dissipada para amplitudes grandes e gerada para amplitudes pequenas. Esse sistema apresenta um ponto de equilíbrio instável em $P^* = (0, 0)$. Qualquer condição inicial fora desse ponto irá evoluir em direção a uma oscilação periódica estável, conforme podemos ver na figura 1.3. Essa órbita estável (chamada de *ciclo-limite*) corresponderá ao estado estacionário do sistema quando a condição inicial for diferente de $P^* = (0, 0)$.

Figura 1.3: Diagrama de fase da equação (1.8).

Estados estacionários para os quais as trajetórias no espaço de fase convergem, sejam eles pontos de equilíbrio ou órbitas periódicas, correspondem ao que em sistemas dinâmicos chamamos de *atrator*. Quando a dinâmica de um sistema (dissipativo) for redutível a um conjunto de leis determinísticas, então, após um certo tempo de comportamento transiente, o sistema atingirá um estado estacionário e as trajetórias de fase convergirão em direção a um subconjunto desse espaço de fase [Thompson & Stewart (1986)]. Esse conjunto invariante¹, formado pelas trajetórias no espaço de fase, é chamado de *atrator* [Eckmann (1981)] e representa a dinâmica desse sistema [Thompson & Stewart (1986)]. Além dos dois tipos de atratores acima citados (pontos de equilíbrio e ciclos-limite) existem outros tipos que são encontrados em vários sistemas. São eles os *atratores estranhos* e os *atratores quasi-periódicos*.

Segundo uma definição devida a Ruelle e Takens [Ruelle & Takens (1971a), Ruelle & Takens (1971b)], um atrator é chamado estranho quando suas linhas de fluxo *dependem sensivelmente* das condições iniciais. Em um atrator estranho, pontos inicialmente e arbitrariamente próximos estarão exponencialmente separados depois de um intervalo de tempo suficientemente longo. Por outro lado, um sistema dinâmico dissipativo gera elementos de volume no espaço de fase que se contraem. Logo, a dinâmica tende a permanecer confinada a uma região limitada do espaço de fase. A única maneira pela qual soluções podem divergir exponencialmente em uma região limitada de um espaço de fase é se o fluxo se contrair em algumas direções e se expandir em outras, permanecendo assim em uma região finita. Esse processo, característico de atratores estranhos, é conhecido por processo de *dobra e estiramento* (ou *foliação*) [Ferrara & Prado (1994)]. Uma descrição mais detalhada desse processo pode ser vista em Thompson & Stewart (1986) e em Gukenheimer & Holmes (1983) (*Smale horseshoe map*).

¹Um conjunto S é um *conjunto invariante* de um fluxo $\varphi(x_0, t)$ se para qualquer $x_0 \in S$ tivermos $\varphi(x_0, t) \in S$ para todo $t \in \mathbb{R}$ [Tufillaro et al. (1992)]

Sistemas determinísticos cuja evolução temporal conduz de forma assintótica a atratores estranhos apresentam algumas características fundamentais: (a) *imprevisibilidade*, isto é, o conhecimento do estado do sistema durante um tempo arbitrariamente longo não permite prever, de maneira imediata, sua evolução posterior. A imprevisibilidade está associada à dependência com as condições iniciais. (b) *espectro contínuo de frequências*, caracterizando um comportamento aperiódico. E (c) *invariância de escala*, significando uma certa estrutura hierárquica com características de *auto-similaridade* nas estruturas do espaço de fase.

Essas características, próprias dos atratores estranhos, definem aquilo que é chamado de *comportamento caótico* e, em razão disto, os atratores estranhos são também chamados de *atratores caóticos*. O *comportamento caótico* de um sistema, representado principalmente pela dependência das condições ou valores iniciais, é resultado das características dinâmicas do sistema, não sendo produzido, por exemplo, por perturbações de natureza estocástica. Por isso, esse tipo de comportamento é caracterizado como *caótico determinístico*. Já os atratores quasi-periódicos são aqueles gerados por sinais onde há uma composição de duas ou mais componentes de frequência incomensuráveis. Nesses casos, as órbitas descritas no espaço de fase nunca se fecham, e o atrator preenche densamente o espaço de fase. Esse tipo de atrator é muito encontrado em soluções para sistemas de oscilação forçada onde a relação entre a frequência fundamental do sistema e a frequência de forçamento não possui uma razão inteira [Glass & Mackey (1988)].

1.3 Aplicações e Seções de Poincaré

Algumas vezes é difícil ter uma boa idéia acerca da dinâmica de um sistema observando apenas a estrutura de um atrator no espaço de fase, principalmente quando se trata

de um atrator caótico. Isso deve-se ao emaranhado que alguns atratores desenham nesse espaço. No caso dos atratores caóticos esse emaranhado é decorrente do processo de alongamentos e dobras pelo qual esses atratores evoluem [Grassberger & Procaccia (1983b)]. Para ter uma idéia melhor do que acontece em relação à dinâmica de alguns sistemas vamos introduzir os conceitos de *aplicação* e *seção de Poincaré*.

Uma *aplicação unidimensional* F é uma função que fornece o próximo estado, $F(x_i)$, de um sistema, dado o seu estado atual x_i [Thompson & Stewart (1986)], ou seja:

$$x_{i+1} = F(x_i). \quad (1.9)$$

Em geral, principalmente no contexto de sistemas dinâmicos caóticos, F é uma função não linear. Se F é inversível e contínua então F é um *homeomorfismo*. Se além disso, F é diferenciável, e possui inversa (F^{-1}) continuamente diferenciável, então F é um *difeomorfismo*.

Aplicações são, em geral, mais simples de analisar do que sistemas de equações diferenciais, sendo que existem inúmeros modelos cujas soluções aparecem sob a forma de relações de recorrência e portanto podem ser descritos por aplicações [Bastos de Figueiredo & Malta (1998), Brandt & Chen (1996), Michielin & Phillipson (1997)]. Além disso, existe um importante método que permite reduzir o fluxo gerado por um sistema de equações diferenciais a uma aplicação discreta. Esse método é o método de redução de fluxos através do uso de *seções de Poincaré*.

Uma seção de Poincaré reduz um fluxo imerso em um espaço de fase m -dimensional a uma aplicação com $(m - 1)$ dimensões. Essa aplicação é chamada de *aplicação de Poincaré* ou *aplicação de retorno* (*return map*). Seja o sistema dinâmico autônomo

m -dimensional

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}), \quad (1.10)$$

onde $\vec{f}(\vec{x})$ é um campo vetorial não linear. O fluxo gerado por essa equação no espaço de fase é representado por uma função vetorial $\vec{\varphi}(\vec{x}^*, t)$, onde $\vec{x}^*$ é o ponto correspondente à condição inicial, ou seja $\vec{\varphi}(\vec{x}^*, 0) = \vec{x}^*$. Seja $\vec{x}_0$ uma órbita periódica de período T correspondente a uma solução de (1.10). Tomemos uma hipersuperfície $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ de dimensão $(m - 1)$ de tal maneira que a órbita $\vec{x}_0$ seja transversal a ela. Seja $\vec{x}_0^*$ o ponto onde a órbita $\vec{x}_0$ intercepta Ω (figura 1.4) e $U \subseteq \Omega$ uma vizinhança de $\vec{x}_0^*$. Então a aplicação de Poincaré $P : U \rightarrow \Omega$ é definida para um ponto $\vec{x}'_1 \in U$ por

$$\vec{P}(\vec{x}'_1) = \varphi(\vec{x}'_1, \gamma), \quad (1.11)$$

onde $\gamma = \gamma(\vec{x}'_1)$ é o tempo necessário para uma órbita $\vec{x}_1$, que parte de $\vec{x}'_1$, retorne pela primeira vez a Ω . Em geral γ depende de $\vec{x}'_1$, mas $\gamma \rightarrow T$ quando $\vec{x}'_1 \rightarrow \vec{x}_0^*$ [Ozorio de Almeida (1987)]. A hipersuperfície Ω é chamada *seção de Poincaré*.

Figura 1.4: Representação geométrica de uma aplicação de Poincaré.

1.4 Bifurcações

Um sistema dinâmico normalmente depende de um ou mais parâmetros que representam propriedades específicas do sistema. Esses parâmetros são chamados de *parâmetros de controle*. Na equação (1), os parâmetros n , θ_i e τ_i são os parâmetros de controle. Uma mudança nos parâmetros de controle de um sistema pode alterar a estabilidade dos atratores. Qualquer valor de um parâmetro no qual mudam o número e/ou a estabilidade dos estados estacionários do sistema é chamado de *ponto de bifurcação* [Guckenheimer & Holmes (1983)].

Um sistema dinâmico pode ser pensado como função de seus parâmetros de controle. Com efeito, o comportamento dinâmico de um sistema pode ser bem diferente se o valor desses parâmetros forem alterados. Em uma bifurcação o diagrama de fase muda

qualitativamente; novos pontos de equilíbrio podem aparecer e outros anteriormente estáveis podem se tornar instáveis (e vice-versa). Uma discussão mais avançada sobre bifurcações em sistemas dinâmicos, que é um tema extenso, foge do objetivo desta tese, contudo, discutiremos dois tipos importantes de bifurcações que surgem no sistema que estamos estudando (equação (1)). Um tratamento mais avançado sobre esse tema pode ser encontrado em Thompson & Stewart (1986) e em Gukenheimer & Holmes (1983).

O primeiro tipo de bifurcação que vamos estudar é a *bifurcação de Hopf*. Considere o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 + x_1(\mu - x_1^2 - x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2(\mu - x_1^2 - x_2^2).\end{aligned}\tag{1.12}$$

Qualquer que seja o valor do parâmetro de controle μ o único ponto de equilíbrio do sistema será dado por $x_1 = x_2 = 0$. Para valores de $\mu < 0$, esse ponto de equilíbrio é estável (figura 1.5-a). Já para $\mu > 0$ o ponto de equilíbrio torna-se instável e há o surgimento de um ciclo limite estável (figura 1.5-b). A bifurcação de um ponto de equilíbrio estável que perde a estabilidade com o surgimento de uma oscilação periódica é chamada de *bifurcação de Hopf*.

Figura 1.5: Bifurcação de Hopf da equação (1.12).

Um outro tipo de bifurcação bastante frequente e importante é aquele onde, para um certo valor do parâmetro de controle $\mu = \mu_1$, um ponto de equilíbrio estável sofre primeiramente uma bifurcação de Hopf e, quando o parâmetro de controle atinge um segundo valor $\mu = \mu_2 > \mu_1$, o ciclo limite torna-se instável e uma órbita de período duplo aparece (figura 1.6). Esse tipo de bifurcação é chamada de *bifurcação de duplicação de período* ou *bifurcação flip*.

Figura 1.6: Um sistema sofre uma bifurcação de Hopf [a) $\rightarrow$ b)] com o surgimento de uma órbita de período T . Em seguida ocorre uma bifurcação de duplicação de período [b) $\rightarrow$ c)] e a órbita resultante tem agora período $2T$.

Em geral, após a primeira duplicação de período, podem aparecer uma série de n duplicações, quando então uma órbita de período $2^n T$ é obtida. Contudo, certos sistemas podem apresentar uma série infinita de bifurcações de duplicação de período com um ponto de acumulação finito para o parâmetro de controle. É o caso, por exemplo, da aplicação quadrática

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n) \quad (1.13)$$

Essa aplicação (que é um modelo para a dinâmica de populações biológicas) pertence à classe das *aplicações unimodais*. Uma aplicação unimodal w é uma aplicação definida em um intervalo finito, $w : I \rightarrow I$, tal que w possui um único ponto crítico que corresponde a um máximo [Guckenheimer & Holmes (1983)] (figura 1.7).

Figura 1.7: Aplicação unimodal quadrática (equação (1.13)) para $\mu = 3.5$.

Uma propriedade importante das aplicações unimodais é que elas apresentam os mesmos padrões de bifurcação quando o parâmetro de controle é variado [Collet & Eckmann (1980)]. Essas aplicações, além de apresentarem padrões de bifurcação similares, mostram uma sequência infinita de bifurcações de duplicação de período. Os valores do parâmetro de controle μ nos quais as bifurcações ocorrem formam uma sequência crescente que converge em direção a um ponto de acumulação μ_c (que só pode ser obtido numericamente). Além desse ponto de acumulação tem-se comportamento caótico entremeado por algumas regiões de periodicidade chamadas de *janelas de periodicidade* [Feigenbaum (1978)].

A forma mais simples de visualizar essa sequência de duplicações de período (chamada de *cascata de duplicação de período* ou *cascata subharmônica*) é através da construção de *diagramas de bifurcação*. Esses diagramas são construídos iterando-se, para uma sequência crescente do parâmetro de controle e a partir de uma certa condição inicial, a aplicação que está sendo estudada. Um certo número de iterações iniciais é então descartado (transientes) e o restante das iterações é representado graficamente como

função do parâmetro de controle. A figura 1.8 mostra o diagrama de bifurcações da aplicação quadrática (equação (1.13)).

Figura 1.8: Diagrama de bifurcações da aplicação quadrática (equação (1.13)).

Para $\mu \leq 3$ qualquer valor inicial evolui em direção a um único ponto de equilíbrio estável. Em $\mu = 3$ ocorre uma bifurcação de Hopf que resulta em uma órbita de período 2 (indicada no diagrama pelo fato das iterações de x_n no regime estacionário alternarem sequencialmente entre dois valores distintos). Em $\mu = 1 + \sqrt{6} \simeq 3.44949$ acontece uma bifurcação de duplicação de período. Novas duplicações de período ocorrem então à medida que se aumenta o valor de μ , resultando em uma sequência de bifurcações desse tipo, e, para $\mu > \mu_c = 3.5699\dots$, surge uma sequência de órbitas caóticas entremeadas por janelas de periodicidade. A cascata de duplicação de período ilustrada na figura 1.8 representa uma das mais conhecidas formas (chamadas de *rotas*) através das quais um sistema pode atingir comportamento caótico. Esse processo é conhecido como *rota de duplicação de período para o caos*. Devido a suas principais características universais

(existência de uma aplicação unimodal associada e de uma sequência infinita de duplicação de período com acumulação geométrica) a observação dessa rota em sistemas dinâmicos tem sido usada como evidência da existência de caos nesses sistemas [May (1976), Feigenbaum (1978), Eckmann (1981), Glass & Malta (1990)]. Para um estudo mais detalhado sobre a rota de duplicação de período para o caos na aplicação quadrática, e em outras aplicações unimodais, devem ser consultadas as referências [Collet & Eckmann (1980)] e [Thompson & Stewart (1986)].

1.5 Análise Espectral

Em muitos casos a distinção entre processos periódicos e processos caóticos ou estocásticos pode ser feita com o uso de um método clássico de análise chamado de análise espectral (espectro de potências).

Sabemos pela teoria de Fourier que qualquer função $f(t)$ (integrável e cuja a integral convirja) pode ser representada pela superposição de um número (eventualmente infinito) de componentes periódicas. A determinação do peso relativo de cada uma dessas componentes é chamada de *análise espectral* e pode ser feita através do cálculo do *espectro de potências* da função $f(t)$. O espectro de potências de uma função nos fornece a intensidade, ou potência, associada a cada valor de frequência que compõe a função $f(t)$. O espectro de potências de $f(t)$ é definido como

$$P(\omega) = |f(\omega)|^2 = \left| \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega t} f(t) dt \right|^2, \quad (1.14)$$

onde T representa um período da função $f(t)$. A função $f(\omega)$ é chamada de *transformada de Fourier* da função $f(t)$.

Em muitas situações não conhecemos a forma analítica da função $f(t)$ por detrás do sistema dinâmico que queremos analisar, contudo, é comum contarmos com um sinal discreto (e finito) representado por uma série de medidas realizadas em intervalos de tempos regulares Δt (essa série pode ser o resultado das medidas de um procedimento experimental ou a saída de um processo de integração numérica). Nesses casos devemos fazer uso de uma *transformada de Fourier discreta* para obtermos o espectro de potências do sinal.

Considere uma série temporal finita e discreta $\{x_j\}$, onde $x_j = x(t_j)$, $t_j = j\Delta t$. Se N for o número total de pontos na série, então $\{x_j\}$ corresponderá a um tempo total de medida $N\Delta t$. A transformada de Fourier discreta, $\{\hat{x}_k\}$, é definida como

$$\hat{x}_k = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sum_{j=0}^{N-1} x_j \exp\left(i \frac{2\pi jk}{N-1}\right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1.15)$$

e o *espectro de potências discreto* será dado então por

$$P_k = P(\omega = k\Delta\omega) = |\hat{x}_k|^2, \quad (1.16)$$

onde $\Delta\omega = 1/N\Delta t$. Note que a série $\{x_j\}$ depende do tempo, ou seja, $x_j = x(t = j\Delta t)$. Por outro lado, $\{\hat{x}_k\}$ depende das frequências, isto é, $\hat{x}_k = \hat{x}(\omega = k\Delta\omega)$.

O mais importante na análise espectral é que, em geral, sinais com evoluções temporais diferentes apresentarão diferentes espectros de potências. Por exemplo, sinais periódicos de período T apresentarão um espectro de potências com um pico bem definido na frequência correspondente a esse período e, em geral, picos menores nos harmônicos dessa frequência, isto é, $2/T$, $3/T$, $4/T$, etc. Se o sinal não é periódico, porém é resultado da superposição de m movimentos periódicos de períodos incomensuráveis, o espectro

de potências será formado por picos bem localizados nas frequências $\Omega = |\sum_{i=1}^m l_i \omega_i|$, onde l_i são inteiros arbitrários e ω_i são as frequências associadas aos períodos de cada oscilação independente que compõe o movimento. Quando o sinal for aperiódico (podendo ser caótico ou mesmo estocástico como o ruído branco) o espectro de potências será composto de um número infinito de componentes de frequência e então teremos o que é chamado de *espectro contínuo* ou *espectro de banda larga*. Devemos notar porém que se o sinal for multi-periódico, com um número muito grande de frequências independentes, podemos obter um espectro de potências que parece ser contínuo, ou seja, os picos serão tantos, e tão próximos, que se não se houver uma resolução perfeita, eles irão se sobrepor formando aparentemente um espectro contínuo.

O cálculo da transformada de Fourier pode ser feito com rapidez através do uso de um algoritmo conhecido como FFT (*Fast Fourier Transform*) [Press et al. (1986)].

1.6 Reconstrução de Takens

Para que se possa analisar as propriedades dinâmicas de uma série temporal discreta é necessário, em primeiro lugar, reconstruir o atrator associado a esta série em um espaço de fase de dimensão conveniente. A primeira idéia de como proceder foi sugerida em um trabalho de Packard et al. [Packard et al. (1980)]. Nesse trabalho mostrou-se que as derivadas sucessivas de um sinal, $d\{x_j\}^m/dt^m$, contém informações sobre a evolução dinâmica do sistema, e que é possível utilizar um conjunto dessas derivadas sucessivas como coordenadas para reconstrução do espaço de fase do sistema. Apesar de eficaz, esse método apresenta o problema de amplificar erros (inerente ao cálculo numérico das derivadas). Além disso, o algoritmo torna-se pouco prático se o número de variáveis independentes envolvidas no sistema for muito grande.

Os problemas constatados com o método de Packard et al. são evitados utilizando-se um procedimento proposto por Takens em 1980 [Takens (1980)]. Takens demonstrou que é possível reconstruir certas propriedades topológicas do atrator original do sistema a partir de um método simples. Vetores $\vec{\xi}_i$ m -dimensionais são reconstruídos a partir da série temporal $\{x_j\}$ por meio do vetor

$$\vec{\xi}_j = \{x(t_j), x(t_j - s), \dots, x(t_j - (m - 1)s)\} \quad (1.17)$$

onde m é a chamada *dimensão de imersão* e s é o *passo de reconstrução*. A escolha do passo de reconstrução e da dimensão de imersão são fundamentais para o método de reconstrução de Takens. Existem técnicas numéricas propostas em alguns trabalhos [Fraser & Swinney (1986), Buzug et al. (1990)] que visam automatizar a escolha do passo de reconstrução, contudo, o método usual para escolha do passo s é baseado na inspeção visual de um gráfico chamado de *gráfico de primeiro retorno* [Ferrara & Prado (1994)]. O gráfico de primeiro retorno é o gráfico $x(t_j) \times x(t_j - s)$. Uma simples inspeção visual desse gráfico nos fornece informações sobre os valores de s para os quais $x(t_j)$ e $x(t_j - s)$ ainda estão fortemente correlacionados e portanto não podem ser usados como variáveis independentes de um espaço de fase; nessa situação, o gráfico de primeiro retorno fica comprimido próximo à diagonal do gráfico. Devemos procurar um valor de passo s que forneça, no gráfico de primeiro retorno, uma distribuição uniforme de pontos e que seja pouco sensível a pequenas variações nesse passo. A escolha da dimensão de imersão m é feita geralmente de maneira similar reconstruindo-se o atrator sucessivamente em espaços de imersão de dimensões crescentes e inspecionando visualmente o atrator reconstruído procurando uma distribuição de pontos que seja uniforme e não comprimida em uma diagonal. Apesar de existirem métodos numéricos para automatizar a determinação da dimensão de imersão, normalmente é necessário uma boa dose

de experimentação numérica e inspeção visual antes de se obter a dimensão adequada à reconstrução de um sinal [Ferrara & Prado (1994)].

No método de Takens (também chamado de *método dos atrasos temporais*), assim como no de Packard et al., via de regra não podemos reconstruir o atrator original, mas podemos obter um atrator cujas propriedades topológicas são preservadas em relação ao atrator original do sistema [Thompson & Stewart (1986)]. Além disso, o algoritmo de reconstrução de Takens é rápido e não apresenta problemas de amplificação de erros.

1.7 Dimensões Generalizadas

Considere uma sequência de N pontos de um atrator reconstruído a partir da imersão de uma série temporal em um espaço de dimensão m (utilizando a técnica de Takens). Seja $B(r)$ o número mínimo de caixas de lado r necessárias para cobrir todo o conjunto de pontos. A probabilidade p_i de um ponto arbitrário do atrator cair na i -ésima caixa será dada por

$$p_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_i}{N}, \quad (1.18)$$

onde N_i é o número de pontos que caem na caixa i . A entropia, ou informação, que está associada a essa distribuição, $\{p_1, p_2, \dots, p_{B(r)}\}$, é dada através da definição de *entropias generalizadas de Renyi* (ou *entropia paramétrica de Renyi*) [Renyi (1961)]

$$I_\alpha(p) = I_\alpha(p_1, p_2, \dots, p_{B(r)}) = \frac{1}{1 - \alpha} \log_2 \sum_{i=1}^{B(r)} p_i^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 1). \quad (1.19)$$

O parâmetro α é chamado de *grau da entropia*. Esse parâmetro faz o papel de

uma “lente”, com a qual observamos o conjunto de pontos no espaço [Ferrara & Prado (1994)]. Quando $\alpha \rightarrow \infty$ as caixas com maior probabilidade p_i de serem preenchidas tornam-se dominantes no cálculo da entropia. No caso $\alpha \rightarrow -\infty$ as caixas que apresentarem menor probabilidade de serem preenchidas é que serão dominantes. Quando, por exemplo, variamos α de 0 até ∞ , estamos considerando cada vez mais as caixas com maior probabilidade serem preenchidas ou, em outras palavras, estamos considerando as regiões mais densas de um atrator no cálculo da entropia [Crutchfield & Young (1990)].

As distribuições de pontos formam objetos geométricos no espaço m -dimensional. A dimensão desses objetos é fornecida através do conceito de *dimensões generalizadas de Renyi*. Definem-se as *dimensões generalizadas de Renyi* como

$$D_\alpha = -\lim_{r \rightarrow 0} \frac{I_\alpha(p)}{\log_2 r} = \frac{1}{\alpha - 1} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log_2 \sum_{i=1}^{B(r)} p_i^\alpha}{\log_2 r} \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 1). \quad (1.20)$$

Note que nessa definição de dimensão é irrelevante a base logarítmica utilizada, pois a dimensão é dada como o quociente de dois logaritmos. Vamos concentrar a interpretação das dimensões generalizadas D_α para os casos mais comuns no estudo de sistemas dinâmicos, ou seja: D_0 e D_2 . Para isto é conveniente interpretarmos o conjunto de N pontos mencionado acima como sendo o conjunto dos pontos de um atrator no espaço de fase, e p_i como sendo a fração desses pontos que estão na i -ésima caixa de tamanho r , de tal forma que $B(r)$ será o número de caixas necessárias para cobrir todo o atrator. Para $\alpha = 0$ temos

$$D_0 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log B(r)}{\log(1/r)}. \quad (1.21)$$

D_0 é chamada de *dimensão fractal* ou *dimensão de Hausdorff*. Essa dimensão é uma generalização do conceito de dimensão euclidiana. Normalmente, quando falamos de dimensão, estamos nos referindo à dimensão euclidiana, onde os objetos geométricos tem sempre dimensão inteira: um ponto tem dimensão zero, uma linha tem dimensão um, uma superfície tem dimensão dois, etc. Contudo, quando falamos de atratores estranhos, é possível encontrar objetos geométricos complexos com dimensões não inteiras. Tais objetos geométricos são genericamente chamados de *fractais* [Mandelbrot (1982)]. A figura 1.9 ilustra o cálculo da dimensão fractal do conjunto de Cantor (esse conjunto é formado pela remoção da terça parte central de um segmento unitário e pela remoção sucessiva e recorrente da terça parte central de cada segmento restante).

	1	B(r)	r
n = 0	—————	1	1
n = 1	——— ———	2	1/3
n = 2	—— ——— ——— ———	4	1/9
⋮	⋮	⋮	⋮
↓	↓	↓	↓
n = ∞	conjunto de Cantor	2 ⁿ	1/3 ⁿ

Figura 1.9: Aplicação da definição de dimensão fractal (equação (1.21)) ao conjunto de Cantor. $D_0 = \lim_{r \rightarrow 0} [\log 2^n / \log(3^n/1)] = \log 2 / \log 3 = 0.63$.

A definição (1.21) é dita ser uma generalização do conceito de dimensão euclidiana pois abrange os casos onde temos dimensão não inteira (fractais) e recupera a dimensão inteira euclidiana nos casos usuais (quando aplicada a segmentos de reta, planos,

etc.). Um aspecto importante é que atratores estranhos, provenientes de dinâmica caótica, geralmente são fractais [Grassberger & Procaccia (1983b), Thompson & Stewart (1986)].

A dimensão generalizada de Renyi de grau 2, D_2 , é chamada de *dimensão de correlação*, e é dada por

$$D_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \sum_{i=1}^{B(r)} p_i^2}{\log r}. \quad (1.22)$$

A dimensão de correlação popularizou-se muito nos últimos anos devido ao fato de poder ser facilmente calculada, principalmente depois do surgimento de um algoritmo desenvolvido por Grassberger & Procaccia (1983a). Grassberger & Procaccia observaram que, uma vez que $\sum_{i=1}^{B(r)} p_i^2$ é a probabilidade de que dois pontos do atrator estejam dentro de uma mesma caixa de tamanho r , então essa probabilidade pode ser aproximada, para $N \rightarrow \infty$, pela probabilidade de que dois pontos do atrator estejam separados por uma distância menor ou igual a r , ou seja

$$\sum_{i=1}^{B(r)} p_i^2 \simeq C(m, r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{i, j = 1 \\ i \neq j}}^N \Theta[r - |x_i^{(m)} - x_j^{(m)}|] \quad (1.23)$$

onde m é a dimensão do espaço, N é o número total de pontos do atrator, $x_i^{(m)}$ é o vetor m -dimensional associado ao i -ésimo ponto do atrator reconstruído e Θ é a função de Heaviside que tem valor 1 se o argumento for maior ou igual a zero e valor 0 se o argumento for negativo. $C(m, r)$ é conhecida como *integral de correlação* e representa a fração de todas as distâncias, entre pares distintos de pontos sobre a trajetória de

fase do atrator, que não excedam um certo valor r . $C(m, r)$ é uma função crescente e monotônica em r e, devido à normalização, possui valor máximo igual a 1.

Utilizando a equação (1.23) na equação (1.22) temos que

$$D_2 \simeq \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log C(m, r)}{\log r}, \quad (1.24)$$

ou seja, D_2 pode agora ser determinada calculando-se simplesmente $C(m, r)$ e usando a equação (1.24), sendo que, o algoritmo de Grassberger & Procaccia (1983a), que implementa o cálculo de $C(m, r)$, ao contrário dos algoritmos de contagem de caixa utilizados para o cálculo da dimensão fractal, é rápido e de fácil implementação.

Capítulo 2

Equações Diferenciais com Retardo

Vamos introduzir as equações diferenciais com retardo considerando primeiramente um modelo simples baseado no experimento de Tadei (1954) e Nicholson (1975) para estudo da evolução de populações isoladas. Esse experimento consistia em criar moscas (Tadei utilizou a mosca da fruta - *Drosophyla*) isoladas em caixas fechadas. O suprimento de alimento era limitado para as moscas mas não para as larvas.

Sabe-se que o ciclo de vida das moscas é caracterizado por duas fases distintas. A primeira chamada de fase larval, onde o inseto é uma larva, e a segunda de fase adulta, onde o inseto é uma mosca propriamente dita. O ciclo de vida começa pela deposição dos ovos, realizada por indivíduos adultos. Estes ovos, após certo tempo, eclodem dando origem a larvas, que se alimentam intensivamente. Após um certo tempo, estas larvas iniciam um processo de metamorfose, conhecido por empulpamento. Passado um certo período, estas pulpas transformam-se em adultos e estes reiniciam o processo de acasalamento e postura dos ovos.

Perez, Malta & Coutinho (1978) desenvolveram um modelo simples que descreve o número, ou a densidade, de moscas dentro da caixa em função do tempo. Esse modelo é obtido considerando o caso onde é muito grande o número de indivíduos dentro das

caixas. Nesta situação vale a aproximação do contínuo e pode-se levar em conta apenas propriedades médias da população de moscas.

Se considerarmos $N(t)$ como sendo a função que a cada instante t dá o número, ou a densidade, de moscas dentro da caixa, então a variação $\Delta N = N(t + \Delta t) - N(t)$ será dada pelo número de moscas que passa para a fase adulta, menos o número de moscas que morre no intervalo de tempo Δt . O aspecto fundamental neste modelo é que o número de moscas que passa para a fase adulta no instante t , não é função do número de moscas nesse instante, $N(t)$, mas sim do número de moscas no instante $t - \tau$, $N(t - \tau)$, onde τ é o intervalo de tempo entre a postura dos ovos e o começo da fase adulta das moscas. O número de moscas que morre no instante t é simplificadaamente assumido como dependente somente de $N(t)$.

A partir dessas hipóteses temos, no limite $\Delta t \rightarrow 0$

$$\frac{d}{dt}N(t) = A(N(t - \tau)) \cdot N(t - \tau) - B(N(t)) \cdot N(t) \quad (2.1)$$

onde $A(N(t - \tau))$ é uma função que fornece a taxa de nascimento *per capita* e $B(N(t))$ uma função que fornece a taxa de mortandade *per capita*. Essas funções são escolhidas levando-se em conta critérios relacionados à competição por alimento. Utilizando as formas básicas dessas equações usadas por Smith (1968) como modelo para essa mesma experiência, chegamos à equação [Perez et al. (1978), Grotta Ragazzo (1989)]

$$\frac{d}{dt}N(t) = (-C_1N(t - \tau) + C_2)N(t - \tau) - C_3N(t) \quad (2.2)$$

onde C_1 , C_2 e C_3 são constantes positivas. Equações como a equação (2.2) são chamadas de *equações diferenciais com retardo* (EDRs). O principal aspecto nesse tipo de equação

é sua dependência dinâmica no passado, em virtude da qual sistemas modelados por essas equações são ditos *sistemas com memória*.

Equações diferenciais com retardo surgem como modelo para os mais diversos tipos de sistemas, como por exemplo, processos químicos [Boe & Chang (1989)], flutuações de mercados financeiros [Mackey (1989)], interações eletromagnéticas [Bel (1982)], sistemas óticos [Ikeda et al. (1982)], sistemas biológicos e fisiológicos [Baker et al. (1999)], etc.

A teoria geral para as equações diferenciais com retardo foi apresentada na literatura matemática por vários autores. As referências clássicas são Bellman & Cooke (1963), Hale (1977) e Hale & Lunel (1993). Nessas, e em outras referências [El'sgol'ts & Norkin (1973), Driver (1977), Kolmanovskii & Myshkis (1992)], podem ser vistos muitos dos resultados analíticos obtidos a respeito do comportamento dinâmico e da estabilidade das soluções desse tipo de equação. A maior parte desses resultados diz respeito aos casos em que a equação diferencial é linear. Muitas das situações onde a equação é não linear não podem ser tratadas através de métodos analíticos. A investigação de tais modelos nesses casos implica no uso de métodos numéricos para análise do comportamento e da estabilidade de suas soluções. O desenvolvimento desses métodos também é difícil e dispendioso, principalmente em termos de recursos computacionais, por causa das propriedades específicas dos sistemas dinâmicos com retardos. Uma série de trabalhos tem usado métodos numéricos de integração no estudo desse tipo de equação (vide capítulo 4) visando principalmente a obtenção de soluções caóticas [Mackey & Glass (1977), Glass & Mackey (1979), Glass & Malta (1990)].

Segundo Hale & Lunel (1993), uma equação diferencial com retardo autônoma (que não possui dependência explícita no tempo) é uma equação na forma

$$\frac{d}{dt}x(t) = F(x(t), x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_k)), \quad (2.3)$$

onde $x \in \mathbb{R}$, $\tau_i \in \mathbb{R}_+$, $i = 1, \dots, k$ e $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. O estudo analítico de equações similares a equação (2.3) é complexo, mesmo nos casos onde função F é linear, todavia, as propriedades dinâmicas desse tipo de equação podem ser extraídas do estudo das séries temporais geradas pela integração numérica da equação [Baker et al. (1999)]. A análise da dinâmica das séries temporais pressupõe o estudo dos atratores do sistema, e nesse caso, o espaço onde esses atratores serão reconstruídos deve ser escolhido com cuidado.

Conforme já foi mencionado na introdução desta tese, a informação inicial requerida para resolver uma equação diferencial com retardo é uma função definida, no caso de um único retardo τ , no intervalo $[-\tau, 0]$ [Hale & Lunel (1993)]. No caso de vários retardos τ_i , como na equação (2.3), a função inicial deve ser definida no intervalo $[-\max(\tau_i), 0]$. Sendo assim, o espaço de fase natural para tratarmos, por exemplo, a EDR (2.2) seria o espaço de fase das funções contínuas definidas no intervalo $[-\tau, 0]$, que é um espaço de dimensão infinita. Todavia Farmer (1982) mostrou que, em alguns casos, os atratores de tais sistemas podem ser imersos (utilizando a técnica de Takens) em um espaço de dimensão finita. Segundo Farmer (1982), a dimensão dos atratores de equações diferenciais com retardo, tais como a equação (1), para valores baixos de retardo, tem dimensão da ordem de 2 ou 3. De fato, Glass & Malta (1990) utilizaram atratores de dimensão igual a 2 para estudar a equação (1) e caracterizar sua dinâmica. Glass & Mackey (1979) e Kittel et al. (1995) utilizaram também atratores de dimensão igual a 2 para construir seções de Poincaré para equações similares à equação (1).

Outro aspecto importante nesta tese é o estudo da estabilidade dos pontos de equi-

líbrio da equação (2.3). Uma solução constante $x(t) = x_{eq}$ de (2.3) é chamada de *ponto de equilíbrio* se for uma solução tal que $\frac{d}{dt}x(t)\big|_{x(t)=x_{eq}} = 0$. [Hale & Lunel (1993)].

Uma bifurcação de Hopf é caracterizada pela perda de estabilidade de um ponto de equilíbrio estável (com o surgimento de uma oscilação periódica) quando um determinado parâmetro de controle do sistema atinge um valor crítico. A teoria geral sobre bifurcações de Hopf em equações diferenciais com retardo foi dada por Oliveira (1980) e é baseada no estudo da estabilidade dos pontos de equilíbrio desse tipo de equação [Kuang (1993)].

O teste básico para testar a estabilidade de um ponto de equilíbrio de (2.3) é escolher uma condição inicial “próxima” do ponto de equilíbrio e verificar se as trajetórias no espaço de fase, partindo dessa condição inicial, convergem ou divergem do ponto de equilíbrio [Engelborghs & Roose (1998)]. Todavia, esse método é sujeito à crítica. Ele depende da escolha de uma condição inicial que pode estar fora das regiões do espaço de fase de onde partem as trajetórias que são atraídas em direção ao ponto de equilíbrio (essas regiões são chamadas de *bacias de atração* do ponto de equilíbrio). Para evitar que possíveis bacias de atração, muito próximas do ponto de equilíbrio, sejam perdidas na escolha da condição inicial fazemos a linearização da equação (2.3) (com o uso de uma expansão em série de Taylor) em torno do ponto de equilíbrio. O estudo da equação linearizada permite considerar o comportamento das trajetórias que partem de regiões próximas ao ponto de equilíbrio.

A linearização da equação (2.3) em torno de um ponto de equilíbrio x_{eq} resulta em uma equação linear chamada de *equação variacional* [Engelborghs & Roose (1998)]

$$\frac{d}{dt}x(t) = A_0(x_{eq}) (x(t) - x_{eq}) + \sum_{i=1}^k A_j(x_{eq}) (x(t - \tau_i) - x_{eq}), \quad (2.4)$$

onde

$$A_0(x_{eq}) = \left. \frac{\partial F}{\partial x(t)} \right|_{x(t)=x_{eq}} \quad \text{e} \quad (2.5)$$

$$A_j(x_{eq}) = \left. \frac{\partial F}{\partial x(t - \tau_j)} \right|_{x(t)=x_{eq}}.$$

O estudo da estabilidade dos pontos de equilíbrio da equação (2.3) é baseada no estudo da equação (2.4). O comportamento assintótico das soluções de (2.4) será determinado pelos autovalores λ da equação característica

$$\Delta(x_{eq}, \lambda) = \lambda - A_0(x_{eq}) - \sum_{i=1}^k A_j(x_{eq}) e^{-\tau_i \lambda} = 0. \quad (2.6)$$

O ponto de equilíbrio x_{eq} será assintoticamente estável se todos os valores de λ que são solução da equação (2.6) tiverem parte real negativa, de outra forma o ponto de equilíbrio será instável [Hale & Lunel (1993), Engelborghs & Roose (1998)]. Logo, as bifurcações de Hopf dos pontos de equilíbrio ocorrerão quando um par de autovalores da equação característica, que inicialmente possuíam parte real negativa, cruzarem o eixo imaginário (caracterizando uma troca de estabilidade desses pontos de equilíbrio) [Luzyanina et al. (1997), Engelborghs & Roose (1998)].

2.1 EDRs em Biologia e Fisiologia

Na introdução deste capítulo citamos alguns dos principais campos de aplicação das equações diferenciais com retardo. Dentre esses, um campo de destaque tem sido a modelagem de sistemas biológicos e fisiológicos (vide [Baker et al. (1999)]). O modelo de Perez, Malta & Coutinho é um exemplo desse tipo de equação aplicado à dinâmica populacional. Na área de fisiologia muitos fenômenos, como o surgimento de oscilações aperiódicas em sinais antes periódicos, podem ser explicados considerando o efeito de retardos nos modelos matemáticos [Glass & Mackey (1988)]. Geralmente aceita-se que a presença de retardos nos modelos representa uma fonte de instabilidades nos sistemas fisiológicos modelados por este tipo de equação [Glass & Mackey (1979)].

O potencial das EDRs em descrever a dinâmica complexa observada em alguns sistemas fisiológicos foi descrito em uma série de trabalhos [Mackey & Glass (1977), Glass & Mackey (1979), an der Heiden & Mackey (1982), Mackey & an der Heiden (1984), Glass & Mackey (1988)]. O Ponto de partida nesses trabalhos é, em geral, uma equação diferencial na forma

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\gamma x(t) + f(x_\tau) \quad (2.7)$$

onde $x_\tau = x(t - \tau)$ e $f(x) \geq 0$ é uma função que representa uma taxa de produção, ou criação, enquanto $\gamma \geq 0$ representa uma taxa de destruição, ou eliminação. A equação (2.7) representa um sistema simples de retroalimentação que possui uma dependência no passado. Conceitualmente acredita-se que os mecanismos de retroalimentação são fundamentais para o controle de um grande número de processos físicos e fisiológicos [Glass & Mackey (1979), Glass & Mackey (1988)]. Sistemas de retroalimentação são classificados em três tipos: *sistemas de retroalimentação negativa*, *sistemas de retroali-*

mentação positiva e sistemas de retroalimentação mista. Sistemas de retroalimentação negativa são aqueles em que desvios do estado estacionário do sistema tendem a ser corrigidos pela retroalimentação. Como exemplo considere o sistema de controle pupilar. Quando acende-se uma pequena luz na borda da pupila, de modo que ela ilumine sempre essa mesma região do olho, a pupila se contrai. Com a contração da pupila, a luz passa a não entrar mais no olho e então a pupila reflexivamente se dilata. Agora a luz passa a entrar de novo na pupila, provocando uma nova contração, e o processo se repete levando a um regime de oscilação. A retroalimentação no sistema é negativa, pois tende sempre a corrigir os desvios da pupila de sua posição estável (associada à luz ambiente). Esse sistema de retroalimentação negativa é modelado por uma equação diferencial com retardo [Longtin et al. (1990)]. Os sistemas de retroalimentação positiva são aqueles em que os desvios do estado estacionário tendem a ser amplificados pela retroalimentação. Esse tipo de sistema é pouco considerado como modelo para sistemas fisiológicos. Por fim, sistemas de retroalimentação mista são sistemas que incorporam uma mistura de retroalimentação positiva e negativa (um exemplo de modelo de sistema de retroalimentação mista é dado pelo modelo de Mackey & Glass (1977) para a produção de células brancas no sangue em pacientes com leucemia aguda).

O elemento fundamental nos trabalhos que utilizam a equação (2.7) como modelo de retroalimentação para sistemas fisiológicos é a suposição de que a taxa de produção é uma função não linear que depende de um estado passado do sistema. As duas principais formas consideradas para $f(x_\tau)$ são

$$f(x_\tau) = \frac{\theta^n}{\theta^n + x_\tau^n} \quad \text{e} \quad (2.8)$$

$$f(x_\tau) = \frac{\theta^n x_\tau}{\theta^n + x_\tau^n}, \quad (2.9)$$

Figura 2.1: Funções a) (2.8) e b) (2.9) para $\theta = 0.5$ e $n = 10$.

onde θ e n são parâmetros de controle. A função (2.8) é uma função monotônica decrescente que corresponde a uma retroalimentação negativa (figura 2.1-a). Já a função (2.9) é não-monotônica (figura 2.1-b) e corresponde a uma retroalimentação mista. Usando a função (2.8) na equação (2.7) somente órbitas periódicas ou pontos de equilíbrio foram observados [Glass et al. (1988)]. A situação utilizando a função (2.9) é bem diferente. Nesse caso, para alguns valores de parâmetros, simulações numéricas mostraram comportamento complexo, incluindo sequências de duplicação de período e dinâmica caótica [Mackey & Glass (1977), Glass & Mackey (1979)] (comportamento complexo e sequências de duplicação de período também foram observadas no modelo populacional de Perez, Malta & Coutinho [Oliveira & Malta (1987), Malta & Grotta Ragazzo (1991)]).

Um conceito importante em fisiologia é o conceito de *homeostase*, que representa a relativa constância que algumas variáveis fisiológicas, tais como a taxa de açúcar no sangue, a pressão sanguínea, o pH do sangue, etc., apresentam em relação às mudanças no ambiente do organismo. Esse conceito torna natural a escolha de sistemas de retroali-

mentação negativa (devido à sua estabilidade) como modelo para sistemas de controle fisiológico. Embora seja provável que sistemas de retroalimentação mista sejam importantes em alguns contextos de fisiologia, são raras as observações experimentais desse tipo de sistema controlando variáveis fisiológicas [Glass & Malta (1990)]. Em contrapartida, os mecanismos de retroalimentação negativa exercem o principal papel como modelo em muitos contextos de controle fisiológico [Guyton (1981)].

Sabe-se que as oscilações de algumas variáveis fisiológicas podem ser aperiódicas e extremamente complexas. Existem propostas de que essas oscilações sejam, em muitos casos, manifestação de caos determinístico [Goldberger & West (1987), Glass et al. (1987)]. Todavia, o fato dos sistemas de controle fisiológico serem modelados, em sua maioria, por retroalimentação negativa (mais estável) torna difícil entender a origem dessas oscilações complexas. Uma tentativa de explicar isso é considerar o efeito de múltiplos ciclos de retroalimentação negativa. Sabe-se que sistemas com um único ciclo de retroalimentação negativa com retardo podem apresentar apenas soluções que correspondem a pontos de equilíbrio e oscilações periódicas. Porém, muitos dos sistemas fisiológicos, como o cardiovascular, o respiratório, e o sistema motor não são controlados por um único ciclo de retroalimentação negativa, mas sim por múltiplos ciclos de retroalimentação negativa com retardo [Mees & Rapp (1978), Mees (1986), Glass & Malta (1990)]. A equação (1) é um caso particular da equação (2.7), utilizando a função de retroalimentação negativa (2.8) e com $\gamma = 1$, para múltiplos ciclos de retroalimentação.

Múltiplos ciclos de retroalimentação negativa em controle biológico também são consideradas mais estáveis que um único ciclo de retroalimentação mista [Mees (1986)]. Não obstante, Glass et al. (1988) mostraram que pode ser encontrada dinâmica complexa (aperiódica) em um modelo com múltiplos ciclos de retroalimentação negativa. Esses estudos motivaram posteriormente Glass & Malta (1990) a considerar uma ver-

são mais geral da equação estudada por Glass et al. (1988). Glass & Malta (1990) observaram que, para alguns conjuntos de parâmetros, há uma sucessão de duplicações de período na equação (1) levando a comportamento caótico, contudo, tal comportamento pareceu ser raro. Dinâmica complexa só foi encontrada em faixas estreitas no espaço de parâmetros. A necessidade de um estudo mais detalhado dessa equação de forma a compreender melhor suas características, relativamente aos tipos de soluções que ela pode apresentar, é a motivação principal desta tese.

Nos próximos capítulos apresentaremos importantes resultados referentes ao estudo desse tipo de equação.

Capítulo 3

Análise Linear

3.1 Introdução

Neste capítulo a equação característica associada à equação diferencial com retardo que estamos estudando, equação (1), será considerada. Apresentaremos um método numérico para a determinação da estabilidade de seus pontos de equilíbrio. Esse método é baseado na computação dos zeros da equação característica que possuem parte real maior que zero, ou seja, determinaremos onde o sistema sofre sua primeira bifurcação de Hopf. Os tipos de estabilidade dos pontos de equilíbrio serão representados no espaço de parâmetros (θ_i, n) . Dessa forma teremos uma idéia da dependência da estabilidade dos pontos de equilíbrio com esses parâmetros.

3.2 Linearização

A equação (1) é baseada em um modelo onde a variável de interesse x é dada por

$$x(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i(t). \quad (3.1)$$

Neste modelo cada variável ξ_i é controlada por um mecanismo de retroalimentação:

$$\frac{d}{dt}\xi_i(t) = S_i(x(t - \tau_i)) - \xi_i(t), \quad (3.2)$$

onde S_i é uma função não linear que depende dos valores da variável x em instantes de tempo $t - \tau_i$. A figura 3.1 representa um diagrama esquemático desse modelo. Nessa figura estão ilustrados os caminhos correspondente às realimentações com retardos τ_i . Cada um desses ciclos é controlado por uma função S_i de acordo com a equação (3.2).

Figura 3.1: Diagrama esquemático da equação (3.3) representando os ciclos de realimentação com retardo.

A equação (1) pode ser escrita, combinando-se as equações (3.1) e (3.2), como

$$\frac{d}{dt}x(t) = -x(t) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i(x(t - \tau_i)). \quad (3.3)$$

Este modelo é bastante geral para sistemas com múltiplos ciclos de retroalimentação pois podemos mudar o tipo de função S_i em cada ciclo com retardo de acordo com o sistema físico que queremos modelar. Via de regra (principalmente em sistemas físicos e fisiológicos mais complexos) a função S_i é uma função não linear. Nesta tese estamos particularmente interessados em estudar o caso onde a função S_i é dada por

$$S_i(x(t)) = \frac{(\theta_i)^n}{(\theta_i)^n + (x(t))^n}. \quad (3.4)$$

A equação (3.4) é a equação de uma função sigmoideal conhecida como *função de Hill*. Esse tipo de função é utilizada em vários contextos, principalmente no estudo de redes neurais e sistemas de retroalimentação em sistemas fisiológicos. No contexto de redes neurais, funções sigmoideais são comumente utilizadas como *funções de transferência*. Uma função de transferência é uma função que fornece uma regra que descreve qual será a contribuição que uma determinada ocorrência, chamada de *ativação*, irá fornecer ao sistema que estiver sendo controlado. A função de transferência mais simples conhecida é a função degrau (*step function*). Essa função (figura 3.2) pode ser obtida como um caso particular da equação (3.4) se tomarmos o limite $n \rightarrow \infty$.

Figura 3.2: Função de transferência do tipo degrau correspondente à equação (3.4) no limite $n \rightarrow \infty$. θ_i corresponde ao limiar da variável de ativação $x(t)$.

Se associarmos a figura 3.2 a um determinado processo podemos dizer que esse processo estará em um estado *ligado* enquanto tivermos $x(t) < \theta_i$ e *desligado* quando $x(t) > \theta_i$. Mostraremos no capítulo 5 que o uso da função de transferência degrau na equação (3.3) permite a integração direta dessa equação.

Apesar do uso da função degrau simplificar o estudo da equação (3.3) devemos considerar que a maioria dos sistemas físicos reais não apresentam um controle cuja função de transferência tenha um corte tão abrupto como a função degrau. Para modelos mais reais devemos levar em conta valores menores de n , o que, do ponto de vista físico, corresponderia a uma transição mais “suave” entre os estados ligado e desligado (figura 3.3). Na equação (3.4) os parâmetros n e θ_i controlam respectivamente a declividade e o limiar da função de transferência S_i .

Figura 3.3: Equação (3.4) para dois conjuntos de parâmetros. Os gráficos ilustram a influência do parâmetro n na função S_i .

O primeiro passo para estudar o comportamento do sistema é encontrar seus pontos de equilíbrio. Um ponto de equilíbrio da equação (3.3) é encontrado resolvendo a equação $\frac{d}{dt}x(t) = 0$ ou seja, encontrando $x(t) = x_{eq} = \text{constante}$ tal que

$$x_{eq} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i(x_{eq}). \quad (3.5)$$

A solução dessa equação pode ser obtida numericamente. Graficamente o ponto de equilíbrio é dado pela intersecção da reta $y(x) = x$ com a curva

$$g(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i(x). \quad (3.6)$$

A solução gráfica para alguns conjuntos de parâmetros está representada na figura 3.4.

Figura 3.4: Soluções gráficas da equação (3.5) com $n = 75$. a) $N = 3$, $\theta_i = \{0.4, 0.5, 0.6\}$ b) $N = 4$, $\theta_i = \{0.3, 0.4, 0.6, 0.7\}$.

Uma vez encontrado o ponto de equilíbrio fazemos a expansão em série de Taylor em torno desse ponto, $x(t) = x_{eq}$. Quando desprezamos os termos de ordem superior obtemos a equação

$$\frac{d}{dt}x(t) = -(x - x_{eq}) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u(\theta_i) \cdot (x_{\tau_i} - x_{eq}), \quad (3.7)$$

onde

$$u(\theta_i) = n \frac{(\theta_i)^n (x_{eq})^{n-1}}{[(\theta_i)^n + (x_{eq})^n]^2}. \quad (3.8)$$

Essa função é equivalente a uma função densidade de probabilidade ou função peso. Essa função pode ser interpretada como uma medida do *peso* com que cada unidade de retardo irá contribuir para o ciclo de retroalimentação. A figura 3.5 ilustra a função u .

Figura 3.5: Função u_i para vários valores de n .

Observe que a função u_i é uma função extremamente localizada em torno do valor de $\theta_i = x_{eq}$ e sua amplitude e localização aumentam com o valor de n . A implicação imediata desse fato é que, em um sistema com múltiplos retardos como o que estamos estudando, a dinâmica do sistema linear estará mais fortemente associada ao ciclo de retardo que tiver o valor da variável θ_i mais próximo do valor do ponto de equilíbrio x_{eq} .

Fazendo agora a transformação de variáveis $y = (x - x_{eq})$, definindo $u_i = u(\theta_i)$ e usando a solução tentativa usual $y = e^{\lambda t}$ obtemos a equação característica

$$\lambda = -1 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i e^{-\lambda \tau_i}. \quad (3.9)$$

As raízes λ da equação característica são complexas. Escrevendo $\lambda = \alpha + i\beta$, e lembrando que $e^{-i\varphi} = \cos(\varphi) - i\sin(\varphi)$, podemos reescrever a equação (3.9) da seguinte maneira

$$z(\alpha, \beta) = \left[\alpha + 1 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i e^{-\alpha\tau_i} \cos(\beta\tau_i) \right] + i \left[\beta - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i e^{-\alpha\tau_i} \sin(\beta\tau_i) \right] = 0. \quad (3.10)$$

O ponto de equilíbrio x_{eq} será assintoticamente estável se todos os valores de λ que são solução da equação (3.9) tiverem parte real negativa, de outra forma o ponto de equilíbrio será instável [Hale & Lunel (1993)].

Separando a equação (3.10) em suas partes real e imaginária obtemos

$$\operatorname{Re}(z(\alpha, \beta)) = \alpha + 1 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i e^{-\alpha\tau_i} \cos(\beta\tau_i) = 0, \quad (3.11)$$

$$\operatorname{Im}(z(\alpha, \beta)) = \beta - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i e^{-\alpha\tau_i} \sin(\beta\tau_i) = 0. \quad (3.12)$$

Essas equações podem ser resolvidas numericamente utilizando o método de Newton-Raphson [Press et al. (1986)]. A figura 3.6 mostra algumas curvas no espaço (α, β) que representam soluções das equações (3.11) e (3.12) para o conjunto de parâmetros $N = 3$, $\theta_i = \{0.4, 0.5, 0.6\}$ e $\tau_i = \{0.55, 2.00, 0.86\}$.

Figura 3.6: Solução das equações (3.11) e (3.12) para o conjunto de parâmetros $N = 3$, $\theta_i = \{0.4, 0.5, 0.6\}$, $\tau_i = \{0.55, 2.00, 0.86\}$ e $n = 5$.

Os pontos onde há intersecção das curvas $\text{Re}(z(\alpha, \beta))$ e $\text{Im}(z(\alpha, \beta))$ são soluções da equação (3.9). Observe na figura 3.6 que nenhuma intersecção das curvas está acima da linha $\alpha = 0$, ou seja, nesse caso todas as soluções da equação (3.9) possuem parte real negativa. Isso significa que o ponto de equilíbrio é estável. Porém, se aumentarmos o valor de n , passam a existir intersecções acima da linha $\alpha = 0$ e o ponto de equilíbrio é então instável. Isto é ilustrado na figura 3.7 onde agora podemos ver intersecções das duas curvas acima da linha $\alpha = 0$.

Figura 3.7: Solução das equações (3.11) e (3.12) para o conjunto de parâmetros $N = 3$, $\theta_i = \{0.4, 0.5, 0.6\}$, $\tau_i = \{0.55, 2.00, 0.86\}$ e $n = 15$.

3.3 Regiões de Estabilidade dos Pontos de Equilíbrio

Do ponto de vista prático é importante saber quando um sistema sofrerá uma transição de um regime estável para um regime instável. Baseado nisso estamos interessados em determinar as regiões onde os pontos de equilíbrio da equação (3.3) perdem a estabilidade com a ocorrência da primeira bifurcação de Hopf. Essa perda de estabilidade do ponto de equilíbrio é caracterizada por uma transição no sinal da parte real do autovalor λ que deve ter parte imaginária não nula [Hale & Lunel (1993)], ou seja, quando α muda seu sinal de negativo para positivo.

As curvas vistas nas figuras 3.6 e 3.7 dividem o espaço (α, β) em regiões distintas quanto ao sinal das funções $\text{Re}(z(\alpha, \beta))$ e $\text{Im}(z(\alpha, \beta))$. Para entender melhor essa divisão observe a figura 3.8.

Figura 3.8: Valores de $\text{Re}(z(0, \beta))$ e $\text{Im}(z(0, \beta))$ no espaço (α, β) para 3 valores distintos de n da equação (3.3) com $N = 3$, $\tau_1 = 0.80$, $\tau_2 = 1.90$, $\tau_3 = 0.65$, $\theta_1 = 0.40$, $\theta_2 = 0.50$ e $\theta_3 = 0.60$.

Essa figura é baseada no seguinte conjunto de parâmetros: $N = 3$, $\theta_i = \{0.4, 0.5, 0.6\}$, $\tau_i = \{0.80, 1.90, 0.65\}$. O parâmetro n é variado. Escolhemos nesse estudo variar o parâmetro n pelo fato desse parâmetro estar relacionado com a declividade da função sigmoidal S_i (vide figura 3.3) e com a amplitude da função peso u_i .

Na figura 3.8 as regiões no espaço (α, β) onde temos simultaneamente $\text{Re}(z(\alpha, \beta)) > 0$ e $\text{Im}(z(\alpha, \beta)) > 0$ estão representadas em branco. Em preto estão representadas as regiões onde $\text{Re}(z(\alpha, \beta)) \leq 0$ e $\text{Im}(z(\alpha, \beta)) \leq 0$. As regiões em cinza correspondem aos casos onde temos, individualmente, $\text{Re}(z(\alpha, \beta)) < 0$ ou $\text{Im}(z(\alpha, \beta)) < 0$ conforme indicado na legenda. A fronteira entre as regiões brancas e as regiões pretas e cinzas corresponde ao caso onde $\text{Re}(z(\alpha, \beta)) = 0$ e $\text{Im}(z(\alpha, \beta)) = 0$. Na figura 3.8-a as setas indicam os cruzamentos das curvas $\text{Re}(z(\alpha, \beta)) = 0$ e $\text{Im}(z(\alpha, \beta)) = 0$. Esses cruzamentos são soluções da equação (3.10) e, nesse caso particular, podemos ver que nenhuma das soluções possui parte real maior que 0. Isso quer dizer que o ponto de equilíbrio é

estável. Em geral para valores baixos de n todas as soluções da equação (3.10) possuem $\alpha < 0$ e, conforme aumentamos os valores de n , soluções com $\alpha \geq 0$ começam a surgir. Na figura 3.8-b vemos que o ponto de equilíbrio do sistema tornou-se instável com o surgimento de uma solução de (3.10) onde $\alpha = 0$.

Observe agora atentamente a linha $\alpha = 0$ nas figuras 3.8-a, 3.8-b e 3.8-c. Estamos interessados em saber se existe alguma intersecção dessa linha com as regiões em preto onde $\text{Re}(z(\alpha, \beta)) \leq 0$ e $\text{Im}(z(\alpha, \beta)) \leq 0$. Se existir uma intersecção desse tipo então existirá ao menos uma solução da equação (3.10) com $\alpha \geq 0$ e conseqüentemente o ponto de equilíbrio será instável. Essa conjectura mostrou-se verdadeira para todos os conjuntos de parâmetros testados. E vamos ilustrar e validar seu uso com um exemplo prático. Considere o seguinte conjunto de parâmetros: $N = 2$, $\theta_1 = 0.6$, $\tau_1 = 0.26$ e $\tau_2 = 2.00$. Esse conjunto de parâmetros nos fornece a equação:

$$\frac{d}{dt}x(t) = -x(t) + \frac{(0.6)^n}{(0.6)^n + (x(t - 0.26))^n} + \frac{(\theta_2)^n}{(\theta_2)^n + (x(t - 2.00))^n}. \quad (3.13)$$

Vamos determinar para a equação (3.13) as regiões do espaço de parâmetros (θ_2, n) onde os pontos de equilíbrio perdem sua estabilidade. Isso é feito calculando, para cada ponto no plano (θ_2, n) , o ponto de equilíbrio da equação (3.13) e os valores de $\text{Re}(z(0, \beta))$ e $\text{Im}(z(0, \beta))$. Se, para um dado ponto nesse espaço, obtivermos $\text{Re}(z(0, \beta)) \leq 0$ e $\text{Im}(z(0, \beta)) \leq 0$, diremos que o ponto de equilíbrio é instável.

Tomando $\alpha = 0$ as equações (3.11) e (3.12) ficam simplificadas da seguinte maneira:

$$\operatorname{Re}(z(0, \beta)) = 1 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i \cos(\beta \tau_i), \quad (3.14)$$

$$\operatorname{Im}(z(0, \beta)) = \beta - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i \sin(\beta \tau_i). \quad (3.15)$$

As funções $\operatorname{Re}(z(0, \beta))$ e $\operatorname{Im}(z(0, \beta))$ são calculadas para valores de β no intervalo $[0, \beta_{\max}]$. Consideramos apenas os valores positivos de β pois as equações (3.14) e (3.15) são simétricas em relação à troca $\beta \rightarrow -\beta$. Em todos os casos que encontramos um valor de λ com $\alpha \geq 0$ esses sempre foram encontrados para valores de $\beta < 10$, contudo, utilizamos sempre $\beta_{\max} = 50$ em nossos cálculos.

As regiões de estabilidade dos pontos de equilíbrio da equação (3.13) em função de θ_2 e n , determinadas com esse método, podem ser vistas na figura 3.9. Essa figura foi construída tomando-se 500 valores de n no intervalo $[0, 100]$ e 500 valores de θ_2 no intervalo $[0.40, 0.75]$. Para cada par (θ_2, n) determinamos o ponto de equilíbrio (equação 3.5) e os valores correspondentes de u_i (equação 3.8). Para cada um dos valores de n , partindo de $n = 0$, variamos β no intervalo $[0, 50]$ com um passo $\delta_\beta = 0.01$, ou seja, a partir de $\beta_{\min} = 0$, β é acrescido de passos δ_β . Essa variação de β persiste até que β atinja o valor de $\beta_{\max} = 50$ ou até que seja encontrada uma situação onde $\operatorname{Re}(z(0, \beta)) \leq 0$ e $\operatorname{Im}(z(0, \beta)) \leq 0$.

Figura 3.9: Regiões de estabilidade dos pontos de equilíbrio da equação (3.13) em função de θ_2 e n . Para obter a curva que separa as duas regiões foram utilizados 500 valores de n distribuídos no intervalo $[0,100]$ e 500 valores de θ_2 distribuídos no intervalo $[0.40,0.75]$. Para cada par (θ_2, n) o valor de β foi variado a partir de 0 até encontrar uma situação onde $\text{Re}(z(0, \beta)) \leq 0$ e $\text{Im}(z(0, \beta)) \leq 0$ ou até β atingir $\beta_{\max} = 50$.

Se atingirmos o valor de $\beta_{\max}$ antes de encontrarmos uma situação onde $\text{Re}(z(0, \beta)) \leq 0$ e $\text{Im}(z(0, \beta)) \leq 0$ então o ponto de equilíbrio (correspondente ao valor de (θ_2, n) que está sendo usado) é considerado estável, caso contrário, se encontrarmos uma situação onde $\text{Re}(z(0, \beta)) \leq 0$ e $\text{Im}(z(0, \beta)) \leq 0$, então existirá ao menos uma região de intersecção entre a linha $\alpha = 0$ e as regiões onde $\text{Re}(z(\alpha, \beta)) \leq 0$ e $\text{Im}(z(\alpha, \beta)) \leq 0$ e o ponto de equilíbrio será considerado instável (vide figuras 3.8-b e 3.8-c). Esse processo é repetido até que $n_{\max} = 100$ seja atingido.

Devemos lembrar, observando a equação (3.5), que cada ponto no espaço (θ_2, n) da figura 3.9 corresponde a um ponto de equilíbrio diferente. A figura 3.9 indica o tipo de equilíbrio (estável ou instável) de cada ponto de equilíbrio associado a um par de parâmetros (θ_2, n) , ou seja, nos diz quais valores de (θ_2, n) na equação (3.13)

correspondem a um ponto de equilíbrio estável (ou instável).

A figura 3.10 é a ampliação de um detalhe da figura 3.9. Nessa figura podemos observar que, ao longo da linha $\theta_2 = 0.485$, o tipo de estabilidade associada aos diferentes pontos de equilíbrio, correspondentes aos parâmetros (θ_2, n) , muda duas vezes à medida que aumentamos o valor de n a partir de $n = 0$. As mudanças na estabilidade desses pontos de equilíbrio ocorrem entre $n = 25$ e $n = 30$ (estável $\rightarrow$ instável) e entre $n = 71$ e $n = 76$ (instável $\rightarrow$ estável).

Figura 3.10: Regiões de estabilidade dos pontos de equilíbrio da equação (3.13) em função de θ_2 e n . Ao longo da linha $\theta_2 = 0.485$ são tomados quatro valores de n .

Os resultados apresentados nas figuras 3.9 e 3.10 podem ser verificados integrando numericamente (ver capítulo 4) a equação (3.13) a partir de uma condição inicial próxima ao ponto de equilíbrio. Se após um intervalo de tempo transiente a solução convergir para o ponto de equilíbrio então a solução estacionária é estável, de outra forma, instável. Isso foi feito para os quatro pontos no espaço (θ_2, n) que estão indicados na figura 3.10 e o

resultado está apresentado na figura 3.11. Nessa figura podemos ver que há concordância entre os tipos de estabilidade apontadas na figura 3.10 e as soluções de (3.13) obtidas por integração numérica.

Figura 3.11: Soluções da equação (3.13) integradas no intervalo $50 \leq t \leq 1050$. A condição inicial em todos os casos é dada por $x(t) = 0.4$ para $t < 0$ e o passo utilizado foi 0.001. a) $n = 25$, b) $n = 30$, c) $n = 71$, e d) $n = 76$.

Algumas situações representadas na figura 3.9 onde há, por exemplo, valores de θ_2 para os quais os pontos de equilíbrio não apresentam perda de estabilidade com n , ou valores de θ_2 para os quais os pontos de equilíbrio mudam duas vezes o tipo de estabilidade, representam apenas um caso particular para aquele conjunto de parâmetros. Outros conjuntos de parâmetros podem não apresentar tais comportamentos. Em particular, para o conjunto de parâmetros: $N = 3$, $\theta_1 = 0.4$, $\theta_3 = 0.6$, $\tau_1 = 0.55$, $\tau_2 = 2.00$ e $\tau_3 = 0.86$ a estabilidade das soluções estacionárias no espaço (θ_2, n) não apresenta tais comportamentos como podemos ver na figura 3.12.

Figura 3.12: Regiões de estabilidade dos pontos de equilíbrio da equação (3.3) em função de θ_2 e n para os parâmetros $N = 3$, $\theta_1 = 0.4$, $\theta_3 = 0.6$, $\tau_1 = 0.55$, $\tau_2 = 2.00$ e $\tau_3 = 0.86$.

Por fim ressaltamos o fato de que em todos os casos onde aplicamos o método descrito neste capítulo para a determinação do tipo de estabilidade das soluções estacionárias da equação (3.3) os resultados sempre concordaram com os resultados integração numérica da equação diferencial, caracterizando a eficiência desse método para esse tipo de estudo.

Capítulo 4

Estudo das Soluções

4.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados obtidos através da análise numérica da equação (1). Em especial mostraremos que essa equação apresenta, para alguns conjuntos de parâmetros, uma rota de duplicação de período para o caos. Evidências da existência dessa rota nessa equação foram apontadas por Glass & Malta (1990) e por Malta & Teles (1996). Nesta tese evidenciamos de maneira clara a existência de rotas de duplicação de período nesse sistema através da construção de diagramas de bifurcações com o parâmetro n .

Ao longo deste estudo serão utilizados métodos clássicos para análise de séries temporais: FFT, reconstrução de Takens, seções de Poincaré e diagramas de bifurcação. Esses métodos são aplicados em conjunto de modo a permitir uma melhor caracterização da rota de duplicação de período que queremos evidenciar na equação (1).

Uma parte muito grande do trabalho atualmente feito no campo da dinâmica não linear é fundamentado em simulações numéricas. Apesar desse tipo de simulação ter aju-

dado em muito no estudo de tais sistemas devemos ter em mente que muitos cuidados devem ser tomados para garantir que os resultados obtidos não estejam comprometidos por alguns tipos de erros que são inerentes aos processos numéricos. Erros de convergência na integração ou de precisão numérica podem levar a resultados incorretos e isso deve ser evitado. Porém, temos de ter sempre em mente que, não importa o tipo de método numérico ou aparato computacional que utilizamos, haverá sempre fontes de erros e devemos fazer o possível para tentar minimizá-las. Formas de testar a robustez de um sistema numérico estudando a sua estabilidade quanto ao aumento do passo ou à diminuição da precisão numérica utilizada são importantes e refletem uma das principais preocupações nesta tese.

Uma outra preocupação importante é a de tornar as ferramentas numéricas desenvolvidas para uma pesquisa disponíveis para que outros pesquisadores possam fazer uso das técnicas e métodos criados. Não estamos falando apenas do algoritmo mas também do código e das interfaces desenvolvidas para entrada de dados nesses códigos. Hoje em dia fala-se muito em *portabilidade de sistemas*. Isso significa construir um sistema que possa ser transferido facilmente para qualquer plataforma computacional operando sob qualquer sistema operacional. Feito isso, garante-se um uso maior, por parte de outras pessoas, do sistema desenvolvido bem como uma maior disseminação das informações obtidas pela pesquisa. Essa preocupação sempre esteve presente neste trabalho. Em razão disso os códigos foram todos construídos em FORTRAN 77 padrão sem o uso de nenhuma biblioteca especial (ANSI FORTRAN). A entrada de dados e a interface para entrada desses dados foi contruída em um sistema multi plataforma (TCL/TK). Todos os códigos construídos foram compilados e testados em várias plataformas (PC, Sun, Aix, etc) e funcionam sob igual precisão. Por fim, a estrutura dos códigos foi toda construída para fácil modificação e reimplementação, bem como a interface gráfica em TCL/TK (figura 4.1).

74 Integrador - configuracao dos parametros

ativar.: ☒ ☒ ☒ ☐ ☐

tau....:

teta....:

n.....:

passo de reconstrucao: ☒ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

(real*8) - passo do integrador _____:

(integer) - escala de passos para a saida _____:

(real*8) - seccao de poincare do atrator _____:

(real*8) - amplitude da condicao inicial _____:

(integer) - transiente(em seg) da serie temporal _:

(integer) - pontos produzidos na saida _____:

(real*8) - n final para variacoes de n _____:

(integer) - numero de variacoes de n _____:

(string) - arquivo de saida.....:

tipo de saida: ☒ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

EXECUTAR

Figura 4.1: Interface gráfica para entrada de dados desenvolvida para o integrador utilizado nesta tese. Os itens dessa interface estão descritos no apêndice B.

O primeiro passo importante neste trabalho foi escolher o método de integração numérica que foi usado. O método usual utilizado na maioria dos trabalhos que envolvem integração numérica de equações diferenciais com retardo é o método de Runge-Kutta de 4ª ordem. Vários trabalhos tem sido escritos nos últimos tempos analisando modificações no método de Runge-Kutta de forma a dar uma maior confiabilidade a esse método para integração desse tipo de equação [Paul (1991), Paul & Baker (1991), Baker et al. (1994)]. Contudo nós utilizaremos nesta tese o método de Gear (descrito no apêndice A). Comparações do desempenho entre os métodos de Gear e de Runge-Kutta (4ª ordem) para integrar equações com retardo mostraram que o método de Gear, no caso

da equação (1), é em geral mais eficiente (a convergência é alcançada para um passo que é maior ou igual ao passo requerido pelo método de Runge-Kutta) quando utilizamos um passo fixo. Contudo, mostrou-se também que a convergência da solução tem de ser sempre verificada pois uma mudança pequena de um dos parâmetros pode resultar em uma não convergência para um mesmo valor de passo [Malta & Teles (1996)].

Todas as séries geradas para estudo nesta tese tiveram a convergência verificada. Essa preocupação fica melhor justificada quando lembramos que um processo de integração numérica envolve discretização, o que torna a dimensão do sistema finita. Até mesmo no caso de EDOs é necessário ter muito cuidado porque a equação discretizada tem mais soluções que a equação contínua, e só aquela solução que não muda quando o passo é mudado é solução tanto da equação discretizada como da equação contínua.

O tratamento do método de Gear é feito no apêndice A. Os códigos dos programas desenvolvidos, bem como de suas interfaces, estão contidos no apêndice B.

4.2 Convergência das Soluções Numéricas

A idéia principal em qualquer método de integração numérica de equações diferenciais é a de reescrever os elementos diferenciais dependentes e independentes como elementos finitos [Press et al. (1986)]. No caso da equação diferencial que estamos estudando os elementos diferenciais dx e dt são substituídos por elementos finitos Δx e Δt . Fazendo isso podemos construir fórmulas algébricas que permitem obter as variações Δx quando a variável independente t é acrescida de uma unidade de passo Δt . No limite em que Δt é muito pequeno uma boa aproximação da solução será obtida. Contudo, a diminuição excessiva do valor de Δt acarretará um aumento muito grande do tempo de computação da solução, o que não é desejável pois inviabiliza tecnicamente a obtenção de grandes

quantidades de dados, o que é importante dependendo da pesquisa que queremos fazer. Devemos então tentar encontrar o maior valor de passo para o qual a solução discreta pode ser considerada, dentro de uma certa precisão, como sendo solução do sistema contínuo. O valor do passo também estará sempre limitado pela precisão do conjunto compilador-máquina que estamos utilizando, ou seja, o passo nunca poderá ser menor que um certo valor, sob pena de introduzirmos ruído numérico no cálculo.

Uma preocupação é a de garantir que a série temporal obtida numericamente esteja em um regime estacionário. A região de transientes originada do processo de integração numérica deve ser bem caracterizada e extraída dos dados que serão utilizados para análise, pois essa região, chamada de *região transiente*, não pode ser incorporada aos dados que iremos analisar. O comportamento dinâmico das soluções nessa região não representa o comportamento padrão do sistema que é o que nos interessa.

A partir de agora chamaremos de h o passo discreto Δt que utilizaremos para a integração das equações diferenciais estudadas nesta tese.

Dizemos que uma solução numérica *convergiu para um dado passo h* se o resultado da integração não mudar quando tomamos um passo igual a $h/2$. Na figura 4.2 ilustramos um caso simples da integração numérica da equação $dx/dt = -x$ com $x(0) = -10$ no intervalo $t \in [0, 1]$. Integramos a equação utilizando passos $h = 1$, $h = 0.5$ e $h = 0.25$. A linha tracejada ilustra o resultado da solução analítica da equação diferencial. Observe que à medida que diminuimos o passo de integração o resultado tende para a solução exata da equação diferencial.

Figura 4.2: Integração numérica da equação $dx/dt = -x$ com $x(0) = -10$ no intervalo $[0, 1]$ com passos $h = 1$, $h = 0.5$ e $h = 0.25$. A linha tracejada ilustra o resultado da solução analítica dessa equação.

Escrevendo cada ponto de uma série temporal integrada com passo h como $x_h(t_0 + mh)$ ($m = 1, 2, 3, \dots, M$) podemos fazer a comparação ponto a ponto entre séries calculando a quantidade

$$\Delta_h(m) = \left| x_h(t_0 + mh) - x_{\frac{h}{2}}(t_0 + 2m\frac{h}{2}) \right| \quad (m = 1, 2, 3, \dots, M), \quad (4.1)$$

e observando para quais valores de h é satisfeito o critério

$$\max(\Delta_h(m)) \leq \varepsilon. \quad (4.2)$$

Podemos, em um primeiro momento, adotar um valor ε pequeno em comparação com as amplitudes das séries integradas e assumir o critério estabelecido em (4.2) como único critério para decidir se uma série temporal integrada com passo h convergiu. Apesar

desse método ser eficaz para determinar a convergência de séries periódicas e quase periódicas deve-se tomar um cuidado grande com séries caóticas.

Se integrarmos uma equação diferencial com passos h e $h/2$, a partir da mesma condição inicial, veremos que sempre existirá uma pequena diferença entre cada passo das séries geradas (devido à imprecisão numérica). Quando o passo h é suficientemente pequeno essa imprecisão localiza-se na últimas casas decimais dos valores gerados. Se o sistema for periódico, ou quasi-periódico, essas diferenças não são amplificadas e ficam limitados à precisão numérica que estamos utilizando. Contudo, se o sistema for caótico, diferenças numéricas pequenas (mesmo nas últimas casas decimais de um sistema integrado com dupla precisão - 16 dígitos) são amplificadas pelo sistema podendo resultar em diferenças acentuadas entre as séries temporais.

Como exemplo consideremos o seguinte conjunto de parâmetros utilizado por Glass & Malta (1990) e por Malta & Teles (1996) em estudos sobre a equação (1) com três retardos.

$$\theta_1 = 0.40, \theta_2 = 0.50, \theta_3 = 0.60, \quad (4.3)$$

$$\tau_1 = 0.55, \tau_2 = 2.00, \tau_3 = 0.86.$$

Para $n = 45$ esse conjunto de parâmetros fornece uma solução periódica [Glass & Malta (1990)]. A figura 4.3 mostra a função Δ_h calculada para os passos $h = 0.01$ e $h = 0.001$ no intervalo $t \in [0, 600]$. Foi usado o conjunto de parâmetros (4.3) com $n = 45$ e $x(t) = 0.4$ para $t < 0$.

Figura 4.3: Função Δ_h calculada no intervalo $[0, 600]$ para: a) $h = 0.01$ e b) $h = 0.001$. Foi usado o conjunto de parâmetros (4.3) com $n = 45$ e $x(t) = 0.4, t < 0$.

Na figura 4.3-a podemos considerar que a solução convergiu para o passo $h = 0.01$ se tomarmos $\varepsilon = 4 \cdot 10^{-5}$. Já na figura 4.3-b, não foi possível identificar diferenças entre as séries com passo $h = 0.001$ e $h/2 = 0.0005$ dentro da precisão do programa utilizado para fazer o gráfico, que é de 5 casas decimais. Nesse caso temos um valor limite de $\varepsilon = 10^{-5}$. Na figura 4.3 temos um caso para o qual seria suficiente integrar a equação (1) usando um passo $h = 0.01$ (para $\varepsilon = 4 \cdot 10^{-5}$). Contudo, nem sempre a convergência pode ser obtida para valores tão altos do passo h (da ordem de 10^{-2}). Isso via de regra acontece apenas para soluções periódicas ou quasi-periódicas que são bem comportadas no sentido de não amplificarem exponencialmente diferenças numéricas. O mesmo contudo não acontece com as séries caóticas.

A figura 4.4 mostra novamente a função Δ_h calculada no intervalo $t \in [0, 600]$ usando o conjunto de parâmetros (4.3) para os passos: $h = 0.01$, $h = 0.001$ e $h = 0.0001$. Dessa vez porém o valor de n utilizado foi $n = 75$. Esse valor de n corresponde a um caso

caótico estudado por Glass & Malta (1990).

Figura 4.4: Função Δ_h calculada no intervalo $[0, 600]$ para: a) $h = 0.01$, b) $h = 0.001$ e c) $h = 0.0001$. Foi usado o conjunto de parâmetros (4.3) com $n = 75$ e $x(t) = 0.4, t < 0$.

Novamente todas as séries temporais foram integradas a partir da mesma condição inicial, $x(t) = 0.4$ para $t < 0$. Todavia, como a solução é caótica, as flutuações numéricas acabam sendo amplificadas levando a uma situação onde não há convergência. Na verdade é importante ressaltar que dois fenômenos podem estar envolvidos aqui, um deles está relacionado à não-convergência (figura 4.2) devida ao uso de passos grandes. O outro diz respeito à amplificação de diferenças entre soluções caóticas. Ambos os fenômenos fariam com que obtivéssemos uma figura como a figura 4.4. Contudo, se o comportamento nessa figura for devido às características da dinâmica caótica, e não a um problema de convergência numérica gerado por uso de um passo não apropriado, então a dinâmica do sistema deve ser a mesma para todas as soluções integradas o que não ocorreria no caso de problemas de convergência numérica (pois as soluções seriam

diferentes).

Conforme foi discutido no capítulo 1, o estado instantâneo de um sistema dinâmico pode ser caracterizado por um ponto em um espaço característico chamado de espaço de fase do sistema. Os atratores nesse espaço podem ser obtidos a partir de séries temporais discretas, originadas por exemplo, de processos de integração numérica. Para isto deve-se fazer uso do método de reconstrução de Takens. Esse tipo de reconstrução, para equações diferenciais com retardo, foi utilizada em Glass & Mackey (1979) e em Glass & Malta (1990). Nesses trabalhos os atratores reconstruídos foram imersos em um espaço de dimensão $m = 2$ utilizando sempre o maior retardo ($\max(\tau_i)$) como passo s de reconstrução. Considere novamente o conjunto de parâmetros (4.3). As figuras 4.5-a e 4.5-b mostram, para esse conjunto de parâmetros, com $m = 2$ e $s = \max(\tau_i) = 2.00$, os atratores reconstruídos a partir das séries temporais integradas no intervalo $t \in [0, 70]$ com $n = 75$ e $n = 45$ respectivamente. A condição inicial utilizada foi $x(t) = 0.4$ para $t < 0$, e o passo utilizado para integração foi $h = 0.001$.

Figura 4.5: Atratores reconstruídos a partir das séries temporais integradas com o conjunto de parâmetros (4.3) no intervalo $[0, 70]$, utilizando $m = 2$ e $s = 2.00$ para a) $n = 75$ e b) $n = 45$

Utilizaremos dois métodos de análise que, baseados nos atratores reconstruídos, nos permitirão decidir se a série temporal integrada está no regime estacionário e se a solução obtida convergiu, ou seja, se a solução discreta corresponde, dentro de uma boa precisão, à solução da equação contínua. O primeiro método que estudaremos foi proposto por Albano et al. (1995) e faz uso das integrais de correlação dos atratores reconstruídos e da probabilidade de Kolmogorov-Smirnov.

Vimos no capítulo 1 que as integrais de correlação (equação (1.23)) podem ser usadas para o cálculo da dimensão de correlação de um atrator. Funções similares à equação (1.23) são, em estatística, comumente chamadas de *funções de distribuição acumulativa*. A integral de correlação é uma função de distribuição acumulativa de distâncias [Albano et al. (1995)].

As curvas $\log C(m, r) \times r$ independem do intervalo de tempo considerado para o

cálculo quando a série se encontra em seu estado estacionário. Isso acontece porque, quando a série é estacionária, as trajetórias no espaço de fase convergem sempre para o mesmo atrator e, como a integral de correlação está relacionada com uma quantidade invariante desse atrator (que é sua dimensão de correlação), ela não mudará quando mudarmos o intervalo de tempo [Grassberger & Procaccia (1983a)]. O mesmo não acontece, por exemplo, se utilizarmos pontos na região transiente da série temporal para o cálculo da integral de correlação ou se a solução não tiver convergido (o que implica em diferentes atratores). Utilizaremos essa característica para distinguir a região transiente nas séries integradas. Como já foi dito, os primeiros pontos da integração numérica são pontos onde a série temporal ainda não atingiu o seu estado estacionário. Dessa forma temos que determinar o instante t a partir do qual podemos considerar a série temporal estacionária.

Considere dois intervalos de tempo: δt_1 e δt_2 , onde $\delta t_2 \gg \delta t_1$. O intervalo δt_2 corresponde ao intervalo, ou janela, que utilizaremos para calcular a integral de correlação e δt_1 é a janela correspondente aos transientes que serão descartados. Dessa forma $C(2, r, k)$ representará o valor da integral de correlação para uma dimensão de imersão igual a 2 calculada para os pontos contidos no intervalo $[k\delta t_1, k\delta t_1 + \delta t_2]$ ($k = 1, 2, 3, \dots$). Isso fornecerá um conjunto de curvas $\log C(2, r, k) \times r$ para diversos valores de k . Estas curvas irão convergir para uma única curva à medida em que aumentamos o valor de k . Quando não existirem mais mudanças significativas entre duas curvas $\log C(2, r, k) \times r$ e $\log C(2, r, k + 1) \times r$ diremos que o que a série temporal leva um tempo $k\delta t_1$ para tornar-se estacionária.

Aplicando esse critério nas séries temporais utilizadas para construir as figuras 4.4-a e 4.4-b determinamos que o tempo necessário para a série temporal tornar-se estacionária é menor que 50seg (o valor de δt_1 utilizado foi de 25seg com $\delta t_2 = 200\text{seg}$). Nesse

caso específico a série temporal possui um regime transiente extremamente curto e as curvas $\log C(2, r, k) \times r$ coincidem rapidamente. Para ilustrar o problema de uma forma mais clara vamos adicionar à série temporal integrada com $h = 0.0001$ um ruído branco proporcional a e^{-t} durante os 100 primeiros segundos, ou seja, a série será estacionária apenas a partir de $t = 100\text{seg}$ (figura 4.6).

Figura 4.6: Série temporal gerada pela equação (1.1) integrada com o conjunto de parâmetros (4.3) e passo $h = 0.0001$. Um ruído branco proporcional a e^{-t} foi adicionado aos 100 primeiros segundos da série.

A figura 4.7 mostra, para $\delta t_1 = 25\text{seg}$ e $\delta t_2 = 200\text{seg}$, as curvas $\log C(2, r, 1) \times r$, $\log C(2, r, 2) \times r$, ..., $\log C(2, r, 3) \times r$. Note que as curvas vão se aproximando e convergindo à medida que aumentamos o valor de k , sendo que após $t = k\delta t_1 = 100\text{seg}$ as curvas coincidem. Dessa forma podemos, através da inspeção das integrais de correlação calculadas sobre as janelas de tempo, determinar o instante a partir do qual as séries temporais integradas atingem o regime estacionário.

Figura 4.7: Curvas $\log C(2, r, k) \times r$ para $k = 1, 2, \dots, 6$ obtidas a partir da srie temporal representada na figura (4.6) utilizando $\delta t_1 = 25\text{seg}$ e $\delta t_2 = 200\text{seg}$

4.2.1 O Teste de Kolmogorov-Smirnov

O teste estatstico de Kolmogorov-Smirnov baseado no clculo da probabilidade de que duas funes de distribuio acumulativa resultem da mesma distribuio de dados. Considere dois conjuntos de medidas de um mesmo observvel: $\{\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \dots, \bar{\eta}_{N_1}\}$ e $\{\underline{\eta}_1, \underline{\eta}_2, \dots, \underline{\eta}_{N_2}\}$. A partir dessas distribuies podemos obter duas funes de distribuio acumulativa, $\chi_{N_1}(\eta)$ e $\xi_{N_2}(\eta)$ que representam a frao de todas as medidas que no excedem um certo valor η em relao aos conjuntos de medidas $\bar{\eta}$ e $\underline{\eta}$, respectivamente. Ou seja:

$$\chi_{N_1}(\eta) = \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} \Theta(\eta - \bar{\eta}_i) \quad (4.4)$$

$$\xi_{N_2}(\eta) = \frac{1}{N_2} \sum_{i=1}^{N_2} \Theta(\eta - \underline{\eta}_i). \quad (4.5)$$

Diferentes distribuições de dados dão origem a diferentes funções de distribuição acumulativa [Albano et al. (1995), Press et al. (1986)]. Sendo assim, podemos comparar duas distribuições, ou conjuntos de dados, comparando suas funções de distribuição acumulativa. Essa comparação pode ser feita utilizando a estatística de Kolmogorov-Smirnov. A estatística de Kolmogorov-Smirnov é uma medida simples que é definida como sendo o máximo valor da diferença absoluta entre as duas funções de distribuição acumulativa. No caso das funções de distribuição (4.4) e (4.5) ela é definida como

$$D_{\chi,\xi} = \max_{-\infty < \eta < \infty} |\chi_{N_1}(\eta) - \xi_{N_2}(\eta)|. \quad (4.6)$$

Essa estatística está relacionada a um importante resultado obtido por Kolmogorov [Kolmogorov (1933)] e posteriormente estendido por Smirnov [Smirnov (1939)]. Smirnov demonstrou que, dado $\lambda > 0$,

$$Q_{KS} = \Pr\{D_{\chi,\xi} \geq \lambda\} = 2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \exp(-2j^2 \lambda^2 \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2}). \quad (4.7)$$

Essa probabilidade fornece uma medida de significância para se aceitar a hipótese inicial de que dois conjuntos de medidas ($\bar{\eta}$ e $\underline{\eta}$) derivem de uma mesma distribuição. Por

exemplo, suponha que para duas medidas de tamanhos $N_1 = 55$ e $N_2 = 60$, o máximo desvio absoluto das funções de distribuição acumulativa seja $D_{\chi,\xi} = 0.25$. Tomando-se $\lambda = 0.25$ teremos que a probabilidade de que um valor seja tão grande quanto este é pouco maior que 0.05 ($Q_{KS} = 0.05536$). Assim, essa diferença, $D_{\chi,\xi} = 0.25$, não é grande o suficiente para se rejeitar a hipótese inicial a um nível de significância de 5%.

Albano propôs o uso das integrais de correlação como funções de distribuição para o cálculo das probabilidades de Kolmogorov-Smirnov. A probabilidade nesse caso passaria a testar a hipótese de que duas distribuições de pontos tomadas em um espaço de fase pertençam a um mesmo atrator. O principal cuidado que deve ser tomado nesse caso é fazer com que cada uma das integrais de correlação tenha um número de pontos suficientemente grande (N_1 e N_2 nas equações (4.4) e (4.5)), de forma a garantir uma boa visitação do atrator.

O trabalho de Albano mostra que as integrais de correlação de atratores similares possuirão alguma similaridade topológica e as integrais provenientes de diferentes atratores serão sensivelmente diferentes. Esse aspecto pode ser explorado no sentido de determinar o grau de diferença ou o grau de similaridade entre os atratores, e a probabilidade de Kolmogorov-Smirnov é utilizada como ferramenta para quantificar a diferença, ou a semelhança, entre dois atratores.

Seja x_h uma série temporal discreta gerada pela integração numérica da equação (1) com passo h , ou seja, $x_h = \{x_h(t_0 + mh)\}$, onde $m = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ e t_0 é o instante inicial considerado. Conforme vimos, os atratores serão reconstruídos utilizando como passo de reconstrução o maior retardo da equação (1), ou seja, $\max(\tau_i)$. Para simplificar o processo de cálculo numérico é imposta a condição de que os retardos sejam sempre múltiplos inteiros do passo de integração. Dessa forma podemos escrever $\max(\tau_i) = l \cdot h$,

com l inteiro. Os atratores bi-dimensionais gerados, g_h , serão dados então por

$$g_h = \{ (x_h(t_0 + (m-l)h), x_h(t_0 + mh)) \}, \quad (4.8)$$

onde $m = l, l+1, l+2, \dots, N-1$. As integrais de correlação desses atratores ficam

$$C_h(2, r) = \frac{1}{(N-l)^2} \sum_{\substack{i, j = l \\ i \neq j}}^{N-1} \Theta[r - |(g_h)_i - (g_h)_j|]. \quad (4.9)$$

onde $(g_h)_i$ é o i -ésimo ponto da trajetória de fase do atrator. Considere agora duas séries temporais integradas a partir da equação (1) utilizando o mesmo conjunto de parâmetros. As séries são integradas com passos h e $\frac{h}{2}$ respectivamente. A estatística de Kolmogorov-Smirnov relacionada às integrais de correlação dos atratores reconstruídos será dada por

$$D_{C_h, C_{\frac{h}{2}}} = \max_{r_{\min} < r < r_{\max}} \left| C_h(2, r) - C_{\frac{h}{2}}(2, r) \right|. \quad (4.10)$$

Alguns cuidados devem ser tomados na escolha dos valores de $r_{\min}$ e $r_{\max}$. Valores muito baixos para $r_{\min}$ ($r_{\min} \sim 0$) são descartados pois, em geral, o cálculo da integral de correlação para valores muito pequenos de r é afetado por ruído numérico. Valores muito altos para $r_{\max}$ ($r_{\max} \sim 1$) também não são considerados por estarem em uma região de saturação das integrais de correlação [Albano et al. (1995)]. Os valores de $r_{\min}$ e $r_{\max}$ sugeridos por Albano são $r_{\min} = 0.01$ e $r_{\max} = 0.99$.

Utilizamos então a probabilidade de Kolmogorov-Smirnov aplicada às integrais de correlação da equação (1), com o conjunto de parâmetros (4.3), integrada com vários

passos e a partir da mesma condição inicial. Desse modo pretendemos determinar o passo a partir do qual a solução numérica poder ser considerada satisfatória (solução convergida). Para $n = 75$ e $n = 45$ utilizamos os passos: $h = 0.01$, $0.01/2 = 0.005$, $0.01/2^2 = 0.0025$, $0.01/2^3 = 0.00125$, $0.01/2^4 = 0.000625$, $0.01/2^5 = 0.0003125$, $0.01/2^6 = 0.00015625$, $0.01/2^7 = 0.000078125$, $0.01/2^8 = 0.0000390625$ e $0.01/2^9 = 0.00001953125$. A condição inicial em todos os casos foi $x(t) = \text{constante} = 0.4$ para $t < 0$. Um total de 100seg foram descartados como transiente e 1000seg foram utilizados para reconstrução dos atratores.

As integrais de correlação foram calculadas para $N_1 = N_2 = 1000$ valores de r entre $0.01 < r < 0.99$. Em seguida foram calculadas as probabilidades de Kolmogorov-Smirnov (equação (4.7)) baseadas nas estatísticas dadas por (4.10). Note que as distribuições de pontos dos atratores no espaço de fase estão sendo interpretadas como conjuntos de medidas independentes que queremos comparar. Sendo assim, nesse caso, as probabilidades Q_{KS} representam a probabilidade de que cada atrator integrado com passo h seja igual ao atrator integrado com passo $h/2$. Os resultados estão ilustrados na figura 4.8.

A figura 4.9 mostra os valores de Δ_h (equação (4.1)) para a série integrada com passo $h = 0.01/2^8 = 0.0000390625$ e para o mesmo conjunto de parâmetros e condição inicial utilizados na figura 4.8. Note que pelo critério estabelecido em (4.2) não podemos considerar que há convergência. Contudo, se observarmos a figura 4.8, poderemos ver que a probabilidade de que as integrais de correlação associadas a essas séries pertençam a um mesmo atrator é próxima de 100% (99.7%).

Figura 4.8: a) e c) Integrais de correlação dos atratores reconstruídos a partir dos parâmetros das figuras (4.5-a) e (4.5-b) respectivamente utilizando os passos: $h = 0.01, 0.01/2, 0.01/2^2, 0.01/2^3, 0.01/2^4, 0.01/2^5, 0.01/2^6, 0.01/2^7, 0.01/2^8$ e $0.01/2^9$. b) e d) Probabilidade de Kolmogorov-Smirnov (Q_{KS}), baseada nas integrais de correlação (a) e (c), de que cada atrator integrado com passo h seja igual ao atrator integrado com passo $h/2$.

Figura 4.9: Valores de Δ_h (equação (4.1)) para a série integrada com passo $h = 0.01/2^8 = 0.0000390625$ e para o mesmo conjunto de parâmetros e condição inicial utilizados na figura 4.8.

Observando os gráficos correspondentes às probabilidades de Kolmogorov-Smirnov calculadas (figuras 4.8-b e 4.8-d) podemos perceber que, como era esperado, o conjunto de parâmetros que dá origem ao atrator caótico precisa de um passo muito menor para convergir do que o conjunto de parâmetros correspondente à série periódica. Na verdade as integrais de correlação referentes aos vários passos de integração da solução periódica são tão próximas que não podem ser distinguidas pelo cálculo da probabilidade de Kolmogorov-Smirnov. A figura 4.8-d mostra que a probabilidade é de 100% para todos os passos. Isso quer dizer que, por esse critério, o uso de um passo $h = 0.01$ seria suficiente para a integração da solução periódica. Para o caso caótico (4.8-b) necessitaríamos de um passo no mínimo igual a $0.01/2^4 = 0.0003125$ para ter uma probabilidade maior que 99.5%. Em vários testes feitos com outros conjuntos de parâmetros os resultados obtidos com a probabilidade de Kolmogorov-Smirnov apresentaram resultados razoáveis no sentido de apontar um passo apropriado para integração. Contudo o fato dessa probabilidade “saturar” rapidamente quando tentamos detectar diferenças em integrais de correlação muito próximas fez com que buscássemos um outro critério com maior sensibilidade para distinguir atratores reconstruídos.

4.2.2 Cálculo da Distância Entre Atratores

O segundo método utilizado para diferenciar atratores reconstruídos foi um método proposto por Diambra (1999) para medir a distância entre duas distribuições de probabilidade em um espaço m -dimensional. É feita uma analogia entre essas distribuições de probabilidade e as distribuições de pontos geradas pelos atratores reconstruídos em um espaço m -dimensional. A partir dessa analogia é utilizado um cálculo de distância estatística entre distribuições de probabilidade para obter uma medida da distância entre os atratores reconstruídos no espaço de fase.

Vimos no capítulo 1 que no cálculo das dimensões generalizadas de grau α (D_α) de um atrator, as distribuições de pontos no espaço de fase são interpretadas como distribuições estatísticas cujo valor da entropia é dado pela entropia de Renyi. Os casos mais importantes correspondem a $\alpha = 0$ (D_0 é a dimensão fractal) e $\alpha = 2$ (D_2 é a dimensão de correlação). Dadas duas distribuições de probabilidade, p e g , existirá sempre uma medida de informação (entropia) associada a cada uma dessas distribuições. A quantidade de informação associada a p em relação à quantidade de informação que está associada a g é chamada de medida relativa de informação - $D(p : g)$ - e representa a distância estatística entre essas duas distribuições de probabilidade [Jaymes (1988)]. A forma usual para essa distância é dada por [Csiszár (1974)]

$$D_{f_\alpha}(p : g) = \int f_\alpha \left(\frac{p(x)}{g(x)} \right) g(x) dx \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 1), \quad (4.11)$$

onde f_α é um operador funcional para a entropia do sistema e α é o grau da entropia. A escolha da forma funcional da entropia feita por Diambra é baseada no formalismo de Tsallis sobre entropias generalizadas [Tsallis (1988)]. De acordo com esse formalismo a entropia de grau α (S_α) associada a uma distribuição de probabilidade $p(x)$ é dada por

$$S_\alpha = - \int f_\alpha(p(x))dx = (\alpha - 1)^{-1} \int (p(x) - p(x)^\alpha)dx, \quad (4.12)$$

ou seja,

$$f_\alpha(p) = (\alpha - 1)^{-1}(p^\alpha - p). \quad (4.13)$$

Tomamos então $\alpha = 2$, que corresponde ao grau da entropia de correlação (vimos no capítulo 2 que esta entropia está relacionada com as integrais de correlação derivadas dos atratores reconstruídos). Dessa forma a equação (4.13) fica reduzida a uma forma simples: $f_2(p) = (p^2 - p)$. Substituindo essa expressão na equação (4.11) obtemos

$$D(p : g) \equiv D_{f_2}(p : g) = \left(\int \frac{p^2(x)}{g(x)} dx \right) - 1 \quad (4.14)$$

Para utilizarmos essa medida de distância, com os atratores reconstruídos a partir das séries temporais integradas numericamente precisamos utilizar a forma discreta da equação (4.14). Sejam p e g dois atratores com dimensão $m = 2$ que estão limitados a uma mesma região do espaço. Recubramos essa região com B caixas de lado c de modo que a quantidade de pontos em cada caixa, para cada atrator, seja dada por $p_{i,j}$ e $g_{i,j}$ respectivamente. A figura 4.10 é uma ilustração, para o caso onde $B = 28$ e $c = 0.25$, da divisão em caixas do espaço ocupado pelo atrator figura 4.5-a. Nesse exemplo chamamos o atrator de p . A divisão em caixas para um outro atrator g seria feita de maneira similar.

Figura 4.10: a) Divisão em caixas do espaço ocupado pelo atrator figura (4.5-a). $B = 28$ e $c = 0.25$. b) Detalhe da figura (4.10-a) ilustrando as dimensões de cada caixa e a contagem de pontos.

O valores de B (número de caixas) e de c (tamanho da caixa) na figura 4.10 são apenas para efeito de ilustração. Na prática devemos definir valores muito menores de c . Valores grandes de c tendem a fornecer resultados falsos de similaridade devido à perda de detalhes na comparação dos atratores. Escolhemos um valor de $c = 0.0005$ para nossos estudos pois, uma vez que os atratores estarão limitados ao espaço unitário, isso tornará possível a identificação de pontos distintos nos atratores com uma precisão de $5 \cdot 10^{-4}$. Essa resolução mostrou-se suficiente para identificação dos detalhes topológicos importantes dos atratores estudados, sem contudo comprometer o desempenho computacional.

Se normalizarmos as distribuições de pontos dos atratores de modo que tenhamos $\sum \sum p_{i,j} = \sum \sum g_{i,j} = 1$ a distância estatística $\mathcal{D}(p : g)$ entre esses atratores será dada por

$$\mathcal{D}(p : g) = \left(\sum_{i=1}^B \sum_{\substack{j=1 \\ g_{i,j} \neq 0}}^B \frac{p_{i,j}^2}{g_{i,j}} \right) - 1. \quad (4.15)$$

A figura 4.11 mostra, para $B = 2000$ caixas de lado $c = 0.0005$, as distâncias $\mathcal{D}(p : g)$ calculadas entre dois atratores reconstruídos com séries temporais integradas com passos h e $h/2$ respectivamente. Foram usados os passos $h = 0.01, 0.01/2, 0.01/2^2, 0.01/2^3, 0.01/2^4, 0.01/2^5, 0.01/2^6, 0.01/2^7, 0.01/2^8$ e $0.01/2^9$. Os parâmetros utilizados nas figuras 4.11-a e 4.11-b estão indicados em (4.3) sendo que a figura 4.11-a corresponde ao caso caótico ($n = 75$) e a figura 4.11-b ao caso periódico ($n = 45$).

Figura 4.11: Distâncias $\mathcal{D}(p : g)$ calculadas entre atratores reconstruídos com séries temporais integradas com o conjunto de parâmetros (4.3) com passos h e $h/2$ respectivamente para: a) $n = 75$ e b) $n = 45$. Os passos utilizados foram: $h = 0.01, 0.01/2, 0.01/2^2, 0.01/2^3, 0.01/2^4, 0.01/2^5, 0.01/2^6, 0.01/2^7, 0.01/2^8$ e $0.01/2^9$. O valor de c utilizado em todos os casos foi $c = 0.0005$.

Na figura 4.11 podemos perceber que por esse critério ($D(p : g)$) a convergência das soluções no caso caótico analisado é muito mais lenta do que foi apontado pelo critério da probabilidade de Kolmogorov-Smirnov. Mesmo no caso periódico a “saturação” acontece para um valor de passo menor que o indicado na figura 4.8-d, ou seja, $h = 0.01/2^2 = 0.0025$. Porém, percebemos que para o valor de r utilizado ($c = 0.0005$), distâncias da ordem de $D(p : g) = 1$ corresponderam a uma probabilidade de Kolmogorov-Smirnov maior ou igual a 99.5% dos atratores pertencerem à mesma distribuição. Dessa forma podemos definir um critério para escolha dos passos de integração que se resume em analisar duas séries temporais integradas com passos h e $h/2$. Caso a probabilidade Kolmogorov-Smirnov de os atratores p e g reconstruídos pertencerem à mesma distribuição seja maior que 99.5% com $D(p : g) \leq 1$ ($c = 0.0005$) os passos utilizados para a integração das séries temporais serão considerados satisfatórios.

4.3 Obtenção dos Diagramas de Bifurcação

Nesta seção vamos ilustrar os principais aspectos relacionados à obtenção dos diagramas de bifurcação com o parâmetro n da equação (1). Em primeiro lugar considere novamente o conjunto de parâmetros (4.3). As séries temporais correspondentes a $n = 27$, $n = 54$, $n = 65$ e $n = 75$ podem ser vistas na figura 4.12.

Figura 4.12: Séries temporais obtidas pela integração numérica da equação (1.1) para o conjunto de parâmetros indicados em (4.3). Os 100 primeiros segundos são descartados como transientes. a) $n = 27$, $h = 0.005$ b) $n = 54$, $h = 0.005$ c) $n = 65$, $h = 0.005$ d) $n = 75$, $h = 0.0001$.

Observando apenas as séries temporais fica difícil deduzir o comportamento dinâmico do sistema. Para entendermos melhor o comportamento representado por essas séries é preciso usar outras técnicas tais como a reconstrução de Takens que já mencionamos. De antemão podemos ressaltar que os valores de n na figura 4.12 foram escolhidos por representarem uma situação onde as séries temporais das figuras 4.12-a, 4.12-b e 4.12-c são periódicas com períodos T , $2T$ e $4T$. A série temporal da figura 4.12-d é aperiódica ou tem período maior que $200T$ (esse tempo corresponde ao tempo total de observação, dentro do qual não foi detectada nenhuma periodicidade na série).

As figuras 4.13-a, 4.13-b, 4.13-c e 4.13-d representam os espectros de potência das séries temporais das figuras 4.12-a, 4.12-b, 4.12-c e 4.12, respectivamente. Esses espectros, conforme vimos no capítulo 1, são gráficos que representam o quadrado das

amplitudes da transformada de Fourier da série temporal.

Figura 4.13: Espectros de potência correspondentes às séries temporais da figura (4.12).

Na figura 4.13-a vemos um espectro de potências com um pico correspondente a uma frequência principal acompanhada por harmônicos de frequências mais altas. A partir desse pico podemos obter o valor de T que corresponde, nesse caso, a $T \simeq 1/0.2308 \simeq 4.33\text{seg}$. Note que o pico correspondente à frequência principal do sistema ainda aparece nos demais espectros de potência dessa figura. Observe também que, quando aumentamos o valor de n , passando de $n = 27$ para $n = 54$, um novo pico, correspondente à metade da frequência principal, é somado ao espectro e que surge um novo conjunto de harmônicos cujas frequências são metade das frequências dos harmônicos anteriores. O mesmo processo ocorre quando passamos de $n = 54$ para $n = 65$. Esse processo, que é chamado de duplicação de período, e já foi discutido no capítulo 1, acontece nesse caso com o aumento de n e persiste até que são alcançados regimes como o da figura 4.13-d

onde um número infinito de frequências baixas e seus harmônicos acabam por criar um espectro de banda larga.

Apesar de séries temporais caóticas apresentarem espectro de potência de banda larga [Thompson & Stewart (1986)], um espectro desse tipo, como o que é visto na figura 4.13-d, ainda não é suficiente para caracterizar um regime como sendo caótico. Em verdade, conforme vimos no capítulo 1, sinais estocásticos, como o ruído branco, e mesmo sinais onde o número de componentes harmônicos é muito grande, acabam gerando esse tipo de comportamento.

O fato de que podem ser observadas sequências de duplicação de período na equação (1), para variações de n com o conjunto de parâmetros (4.3), foi apontado em outro trabalho [Malta & Teles (1996)]. Contudo, um retrato das sequências de bifurcações com a variação desse parâmetro ainda não foi feito. Neste capítulo vamos caracterizar a existência dessa rota através da construção de diagramas paramétricos de bifurcação. Esses diagramas são construídos a partir de seções de Poincaré dos atratores reconstruídos com as séries temporais.

Sistemas que apresentam sequências de duplicação de período para o caos em relação a algum parâmetro apresentam sequências de duplicação de período que são topologicamente similares às que são apresentadas na figura 1.8 (sequência universal) [Thompson & Stewart (1986)]. Esses diagramas fornecem um retrato mais preciso da rota na medida em que permitem identificar toda a estrutura de bifurcações e não apenas parte dela. Para ter uma idéia mais clara do que acontece com a sequência de séries temporais da figura 4.12 é necessário caracterizar a trajetória dos estados do sistema através de um espaço de fase. Utilizando o método de Takens (equação (1.17)) para reconstruir um espaço de fase para as séries temporais da figura 4.12 com $m = 2$ e $s = \max(\tau_i)$

obtemos os gráficos da (figura 4.14).

Figura 4.14: Atratores reconstruídos utilizando o método de Takens com $m = 2$ e $s = \max(\tau_i)$ para as séries temporais da figura (4.12).

Os gráficos da figura 4.14 mostram os atratores reconstruídos para as séries temporais da figura 4.12. Os atratores das figuras 4.14-a, 4.14-b e 4.14-c são periódicos e não importa o número de pontos da série temporal utilizados para a reconstrução, o comprimento da trajetória nesse espaço limita-se à trajetória das órbitas representadas nessas figuras. Já a figura 4.14-d corresponde a uma série temporal aperiódica [Glass & Malta (1990)], e nesse caso, se aumentarmos o número de pontos utilizados para a reconstrução, o atrator preencherá mais densamente o espaço de fase. Além disso observamos, através da integração a partir de várias condições iniciais, que o atrator da figura 4.14-d apresenta trajetórias que dependem da condição inicial utilizada. Mudando essa condição inicial há uma mudança no modo como as trajetórias do atrator da figura

4.12-d são preenchidas, e isso é relevante quando queremos caracterizar a dinâmica do sistema como caótica.

Vamos utilizar uma seção de Poincaré (vide capítulo 1) para reduzir o fluxo bi-dimensional do atrator reconstruído a uma aplicação discreta uni-dimensional (*return map*). No caso dos atratores da figura 4.14 a aplicação de Poincaré é obtida considerando os sucessivos cruzamentos da trajetória de fase com a linha $x(t) = 0.55$ com $dx/dt < 0$ [Glass & Malta (1990)]. Definimos x_i como sendo o valor de $x(t - \max(\tau_i))$ correspondente ao i -ésimo cruzamento dessa seção. O gráfico formado pelos pontos no espaço (x_{i+1}, x_i) é a aplicação de Poincaré que iremos estudar.

Via de regra, quando a dimensão de reconstrução dos atratores é apropriada, o número de pontos na aplicação de Poincaré representará o período da órbita original do atrator reconstruído, ou seja, uma órbita de período 1 corresponderá a um único ponto, uma órbita de período 2 a dois pontos e assim sucessivamente. Se a órbita gerada for caótica ou quasi-periódica o número de pontos na aplicação será grande, igual ao número de iterações computadas na aplicação (supondo uma boa precisão numérica no seu cálculo).

As aplicações de Poincaré correspondentes aos gráficos da figura 4.14 podem ser vistas na figura 4.15.

Figura 4.15: Aplicações de Poincaré obtidas a partir dos atratores da figura (4.14). Considera-se para cada atrator os sucessivos cruzamentos da trajetória de fase com a linha $x(t) = 0.55$ com $dx/dt < 0$. Foram computados 200 cruzamentos em cada figura.

Em cada uma das figuras foram computados 200 cruzamentos com a seção de Poincaré, porém, apenas na figura 4.15-d, todos os cruzamentos correspondem a pontos distintos no espaço (x_{i+1}, x_i) . Observe que a distribuição final dos pontos nesse plano forma uma curva que pode ser aproximada por uma função com um único máximo. É sabido que esse tipo de resultado em uma aplicação discreta é típico da rota de duplicação de período para o caos [May (1976), Feigenbaum (1978), Eckmann (1981)] e foi usado como uma evidência de caos nesse sistema por Glass & Malta (1990).

Para reforçar a existência dessa rota vamos utilizar as aplicações de Poincaré computadas para construir um diagrama de bifurcações com o parâmetro n . Esperamos que esse diagrama de bifurcações seja similar topologicamente ao diagrama de bifurcações da figura 1.8 pertencente ao mapa logístico. O diagrama de bifurcações da figura 4.16

foi construído para um conjunto de 610 valores de n no intervalo $20 \leq n \leq 81$.

Para cada valor de n nesse intervalo integramos numericamente a equação (1) para o conjunto de parâmetros definidos em (4.3). Após o sistema atingir o estado estacionário (com o fim dos transientes) são computados 300 pontos na seção de Poincaré que foi definida anteriormente para a construção da figura 4.15. Esses 300 pontos são então representados graficamente para cada valor de n resultando na figura 4.16.

Figura 4.16: Diagrama de bifurcação da equação (1.1) em relação ao parâmetro n para o conjunto de parâmetros dado em (4.3). Para cada valor de n foram computados 300 pontos na seção de Poincaré. A seção de Poincaré utilizada é a mesma utilizada para construção da figura (4.15).

É nítida a semelhança entre figura 4.16 e a figura 1.8. A rota de duplicação de período é agora evidente e reforça sobremaneira a conjectura de que o sistema representado pela equação (1) apresenta soluções caóticas. No próximo capítulo utilizaremos a construção de diagramas de bifurcação com o parâmetro n para evidenciar a existência de rotas de duplicação de período no caso em que a equação (1) possui apenas dois retardos.

Apresentaremos também um método simples para a busca de soluções caóticas no espaço de parâmetros dessa equação.

Capítulo 5

Soluções Caóticas para Dois Retardos

5.1 Detecção de Soluções Aperiódicas

Conforme discutimos no capítulo anterior, já foi mostrado [Glass & Malta (1990)] que no caso $N \geq 3$ podem ser encontradas soluções caóticas para alguns conjuntos de parâmetros da equação (1). Contudo até este momento, para $N = 2$, apenas soluções periódicas ou constantes haviam sido observadas. Neste capítulo mostraremos que soluções caóticas também podem ser encontradas para o caso de apenas dois retardos.

A busca de soluções aperiódicas a partir apenas da avaliação das séries temporais geradas pela integração da equação diferencial estudada, para vários conjuntos de parâmetros, é lenta, difícil e ineficiente. É necessário desenvolver um método mais prático para procurar esse tipo de solução no espaço de parâmetros da equação.

Sabemos que é muito difícil criar um método para determinar de maneira precisa se um conjunto de parâmetros leva a uma solução caótica ou não da equação diferencial que estamos estudando. Contudo, podemos criar uma ferramenta que nos indique

quais conjuntos de parâmetros são candidatos a apresentar uma solução aperiódica. A partir desses *candidatos* podemos aplicar outros métodos de modo a confirmar ou não a natureza das soluções.

Vamos apresentar, através de um exemplo prático, uma ferramenta simples desenvolvida nesta tese para localização de possíveis soluções aperiódicas da equação (1). Considere o caso particular da equação diferencial (1) para dois retardos:

$$\frac{d}{dt}x(t) = -x(t) + \frac{1}{2} \left[\frac{(\theta_1)^{45}}{(\theta_1)^{45} + (x(t - 0.26))^{45}} + \frac{(\theta_2)^{45}}{(\theta_2)^{45} + (x(t - 2.00))^{45}} \right]. \quad (5.1)$$

Queremos estudar os tipos de solução desse sistema no espaço de parâmetros (θ_1, θ_2) .

Para ter idéia da dinâmica associada a cada par de parâmetros nesse espaço devemos, conforme vimos no capítulo 4, integrar a equação diferencial e estudar o comportamento do atrator reconstruído e das seções de Poincaré desse atrator. Vimos também que se a órbita obtida a partir da série temporal for periódica o número de pontos na seção de Poincaré será baixo, porém, se a órbita for caótica, ou quasi-periódica, o número de pontos na seção será alto. Sendo assim, podemos utilizar as seções de Poincaré dos atratores reconstruídos para analisar o tipo de dinâmica do sistema. Isso é feito a partir da contagem do número de pontos gerados pelo cruzamento das trajetórias de fase dos atratores com essas seções .

Na equação (5.1), para cada par de valores (θ_1, θ_2) , integramos a equação diferencial e reconstruímos o atrator (bi-dimensional) utilizando a técnica de Takens com $s = 2.00$. A partir desse atrator tomamos a aplicação de Poincaré definida por cruzamentos da trajetória de fase do atrator com a linha $x(t) = x_{eq}$ e com $dx/dt < 0$. Na equação (3.5)

definimos x_{eq} como sendo o ponto de equilíbrio da equação (1). Essa seção de Poincaré é escolhida em particular pois, como há um único ponto de equilíbrio no sistema, $x(t) = x_{eq}$, as órbitas geradas irão sempre oscilar em torno desse ponto. A escolha dessa seção garantirá a existência de pelo menos um ponto na aplicação de Poincaré, quaisquer que sejam os valores de θ_1 e θ_2 na equação (5.1). Definimos novamente x_i como sendo o valor de $x(t - \max(\tau_i))$ no i -ésimo cruzamento dessa seção.

O procedimento numérico que desenvolvemos para determinar se uma dada solução da equação é aperiódica ou não consiste em discretizar a seção de Poincaré em um vetor V e computar o número de posições desse vetor visitadas pela evolução da trajetória de fase do atrator. Este procedimento está ilustrado na figura 5.1.

Figura 5.1: Representação de uma seção de Poincaré discretizada em um vetor. Nessa representação temos a detecção de uma órbita de período 2.

As soluções $x(t)$ estão limitadas ao intervalo $[0, 1]$. Dessa forma, se um vetor discreto V , que representa a seção de Poincaré discretizada, tiver 1000 posições, cada posição do

vetor terá uma resolução de $1/1000$ e poderemos diferenciar pontos na seção de Poincaré dentro dessa resolução. Discretizamos então a seção de Poincaré em vetor V de 1000 posições e tomamos inicialmente todos $V_j = 0$ ($j = 0, 1, \dots, 1000$). A seguir integramos a equação diferencial e aguardamos que sejam computados M cruzamentos na seção de Poincaré. Para cada cruzamento da trajetória de fase que ocorre nessa seção fazemos

$$V_j = 1 \text{ onde } j = \text{int}(1000 \times x_i). \quad (5.2)$$

Isso quer dizer que as posições do vetor correspondentes aos cruzamentos da órbita do atrator terão seus valores alterados de 0 para 1. Na figura 5.1, por exemplo, o vetor terá apenas duas posições com o valor 1. Ao atingirmos os M cruzamentos computamos o total de posições preenchidas no vetor calculando a quantidade

$$\sigma = \sum_{j=1}^{1000} V_j. \quad (5.3)$$

Se a órbita for periódica, o número de pontos σ no vetor V (que corresponde à seção de Poincaré discretizada) será baixo. Contudo, se a órbita gerada for caótica ou quase-periódica, o número desses pontos será alto. Do ponto de vista numérico o termo “alto” quer dizer que o número de pontos nesses casos tenderá ao número de cruzamentos M computados na seção de Poincaré. Dessa forma podemos ter uma idéia aproximada sobre a periodicidade do sistema.

Uma vez computados os pontos na seção discreta, para cada par (θ_1, θ_2) , fazemos um gráfico no espaço (θ_1, θ_2) onde o tom de cinza de cada ponto nesse espaço será

proporcional ao número de posições com $V_j = 1$ na seção de Poincaré discretizada. Quanto mais posições com valor 1 forem encontrados no vetor V mais escuro será o ponto. Sendo assim, através de uma inspeção simples, podemos selecionar os pontos que são *candidatos* a caos. Os pontos serão apenas *candidatos* porque órbitas quasi-periódicas também gerarão muitos pontos na seção de Poincaré. Para ter uma idéia mais precisa do tipo de dinâmica que está associada a um ponto nesse espaço é necessário analisar os atratores reconstruídos.

A figura 5.2 representa o espaço de parâmetros da equação (5.1) para $(0.25 \leq \theta_1 \leq 0.75, 0.25 \leq \theta_2 \leq 0.75)$. Em cada ponto nesse plano o sistema foi integrado até que tivéssemos $M = 100$ cruzamentos na seção de Poincaré. O passo do integrador utilizado foi o mesmo para todos os pontos, $h = 0.001$. O estudo da convergência das soluções para cada ponto não foi feito nesse caso, pois isso acarretaria em um tempo extremamente longo de computação. Optamos por utilizar um valor de passo único (e que se mostrou apropriado para grande parte dos casos que estudamos) e deixar a análise de convergência para o estudo dos atratores que serão selecionados na figura 5.2. Foram utilizados 64 tons de cinza para compor a grade de tons do gráfico.

Figura 5.2: Espaço de parâmetros (θ_1, θ_2) da equação (5.1). A figura possui uma resolução de 100×100 pontos. A seção de Poincaré foi computada até $M = 100$ iterações e os tons de cinza indicam os pontos computados no vetor discreto V .

Os pontos (θ_1, θ_2) mais escuros representados nesse gráfico são os *candidatos* a caos. Para saber ao certo o tipo de dinâmica associada a cada par (θ_1, θ_2) devemos agora estudar os atratores reconstruídos e as aplicações de Poincaré correspondentes. A figura 5.3 apresenta, para alguns pontos selecionados na figura 5.2, os atratores reconstruídos e as aplicações de Poincaré derivadas desses atratores. Os passos utilizados para integração foram, respectivamente para cada figura e utilizando o critérios de convergência definidos no capítulo 4, a) $h = 0.0001$, b) $h = 0.0001$, c) $h = 0.0001$, d) $h = 0.005$, e) $h = 0.005$. Em todos os casos foram descartados 100seg de transientes e foram utilizados os 200seg seguintes para construção dos atratores. Todas as aplicações de Poincaré foram construídas com $M = 500$ pontos.

Para todos os casos observados nessa figura foi notado que, se aumentarmos o tempo de integração, tanto os atratores como as aplicações de Poincaré são preenchidos mais

Figura 5.3: Atratores e espectros de Potência da (5.1) para valores de parâmetros correspondentes aos pontos escuros na figura (5.2)

densamente. Contudo, podemos notar que os atratores e as aplicações das figuras 5.3-d e 5.3-e não apresentam uma topologia associada a caos mas sim à quasi-periodicidade. Uma característica que confirma isso é o fato das aplicações de Poincaré corresponderem a curvas fechadas que são preenchidas densamente e uniformemente a medida que as trajetórias de fase atravessam essas seções [Thompson & Stewart (1986)].

No casos das figuras 5.3-a, 5.3-b e 5.3-c podemos ver que as aplicações de Poincaré correspondem aproximadamente a funções com um único extremo. Todavia, apenas a figura 5.3-c apresenta um extremo que corresponde a um máximo. Conforme apontamos nos capítulos 1 e 4 esse tipo de característica (mapas unidimensionais com um máximo) é um indicativo da existência de rotas de duplicação de período no sistema. Para as figuras 5.3-a e 5.3-b, que possuem um mínimo e não um máximo, a transformação em um mapa unimodal é feita fazendo-se a troca $x_n \rightarrow -x_n \Rightarrow x_{n+1} \rightarrow -x_{n+1}$ (isso corresponde a multiplicar os dois lados da equação (1) por -1). Essa nova aplicação possui agora um máximo e mantém as propriedades dinâmicas do sistema (as bifurcações ocorrem para os mesmos valores de parâmetros da aplicação original).

Para confirmar a hipótese da rota de duplicação de período construímos, da mesma forma que foi feito no capítulo 4, um diagrama de bifurcações com o parâmetro n da equação (5.1). Esse diagrama corresponde aos valores de θ_1 e θ_2 da figura 5.3-a e foi construído para 300 valores de $n \in [39, 46]$ (figura 5.4). Para cada valor de n a série temporal foi integrada com um passo $h = 0.0001$. Os 100 primeiros segundos foram descartados como transientes e a série foi então integrada até que fossem computados 300 pontos na aplicação de Poincaré.

Figura 5.4: Diagrama de bifurcações com o parâmetro n da equação (5.1) correspondente aos valores de θ_1 e θ_2 da figura 5.3-a.

Mais uma vez podemos perceber que é nítida a existência de uma rota de duplicação de período nesse sistema com dois retardos. Esse resultado é importante pois não havia, até este momento, nenhuma evidência da existência desse tipo rota (ou mesmo de soluções caóticas) na equação (1) com $N = 2$. Contudo, essas soluções aperiódicas são difíceis de serem encontradas, pois se limitam a regiões muito pequenas dos espaços de parâmetros da equação (1) conforme podemos ver na figura 5.2).

5.2 Equação Constante por Partes

Nesta seção utilizaremos o método descrito na seção anterior, para localização de soluções aperiódicas nos espaços de parâmetros da equação (1), aplicado ao caso particular onde a função de transferência é considerada constante por partes. Conforme vimos no capítulo 3, esse caso corresponde ao caso onde tomamos o limite $n \rightarrow \infty$ na equação (3.4). Nesse limite a função sigmoidal de transferência passa a ser representada por uma função

degrau ($\check{S}_i$)

$$\check{S}_i(x(t - \tau_i)) = \begin{cases} 0 & \text{se } x(t - \tau_i) \geq \theta_i \\ 1 & \text{se } x(t - \tau_i) < \theta_i \end{cases} . \quad (5.4)$$

Se em um instante de tempo t tivermos $x(t - \tau_i) \geq \theta_i$, então diremos que a função $\check{S}_i$ está em um estado *desligado*; caso contrário, diremos que $\check{S}_i$ está em um estado *ligado*. Substituindo essa equação na equação (1) obtemos

$$\frac{d}{dt}x(t) = -x(t) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [1 - \Theta(x(t - \tau_i) - \theta_i)], \quad (5.5)$$

onde Θ é a função de Heaviside que tem valor 1 se o argumento for maior ou igual a zero e valor 0 se o argumento for negativo.

Se um limiar θ_i é cruzado por $x(t)$ em um instante de tempo t , e nesse instante o valor de $x(t)$ esta crescendo, então, em $t + \tau_i$, $\check{S}_i$ será mudado para o estado *desligado*. Caso o valor de $x(t)$ esteja decrescendo quando o limiar é cruzado, então, em $t + \tau_i$, $\check{S}_i$ é mudado para o estado *ligado*. Cada vez que um limiar é cruzado haverá uma descontinuidade em dx/dt . Essa descontinuidade ocorre após um intervalo de tempo que corresponde ao retardo associado à descontinuidade. Suponha agora que ocorra uma descontinuidade no instante t_j . Então, para $t_j < t < t_{j+1}$ temos

$$x(t) = x(t_j) e^{-(t-t_j)} + \frac{1}{N} [1 - e^{-(t-t_j)}] \cdot \sum_{i=1}^N [1 - \Theta(x(t - \tau_i) - \theta_i)]. \quad (5.6)$$

Apesar de termos agora uma expressão para evolução temporal do sistema, a implementação de um código para fazer isso não trivial. Temos de controlar a todo momento os cruzamentos dos limiares e temos que estar aptos a fazer as transições corretas nas descontinuidades. Essa não é uma tarefa simples, principalmente em um sistema com múltiplos retardos. A equação (5.6) fornecerá agora as séries temporais. Note que não temos mais problemas de convergência com essas séries. A equação (5.6) é uma solução exata da equação (1) para caso constante por partes.

Podemos utilizar a técnica de Takens, aplicada às séries temporais obtidas a partir da equação (5.6), para reconstrução dos seus atratores. Considere o seguinte conjunto de parâmetros (para $N = 3$)

$$\theta_1 = 0.40, \theta_2 = 0.50, \theta_3 = 0.60, \quad (5.7)$$

$$\tau_1 = 0.56, \tau_2 = 2.00, \tau_3 = 0.87.$$

A figura 5.5 apresenta o atrator correspondente ao conjunto de parâmetros (5.7) construído para $500\text{seg} < t \leq 700\text{seg}$. Esse conjunto de parâmetros foi um dos conjuntos utilizados por Glass et al. (1988) para demonstrar que a equação (5.6) pode apresentar soluções aperiódicas. Glass et al. (1988) mostraram que a solução correspondente à figura 5.5 é aperiódica ou possui um período maior que o tempo necessário para que os limiares sejam cruzados 500 vezes durante a evolução temporal da função (no caso da figura 5.5 esse tempo corresponde a aproximadamente 250seg). Dessa forma não sabemos exatamente qual é a natureza da solução encontrada, ou seja, não é possível determinar se a solução é realmente aperiódica ou se possui um período extremamente longo, pelo menos maior do que o período em que foi observada sua evolução. Mesmo que essa solução seja realmente aperiódica, a caracterização das séries temporais, no sentido de classificá-las como caóticas ou não, é difícil. Métodos clássicos utilizados para

caracterização de séries temporais caóticas (tais como cálculos de dimensões fractais) não podem ser aplicados de forma confiável em sistemas com descontinuidades [Mackey & an der Heiden (1984), Glass et al. (1988)] pois podem levar a falsos resultados.

Figura 5.5: Atrator correspondente ao conjunto de parâmetros (5.7) para $500\text{seg} < t \leq 700\text{seg}$.

Uma maneira de estudar o comportamento das soluções da equação (5.6) é tentar observar a existência de possíveis rotas para o caos em seu espaço de parâmetros (tal como a rota de duplicação de períodos vista no capítulo 4 e na seção anterior). Glass et al. (1988) em seu trabalho optaram por variar o parâmetro τ_2 (mantendo os outros parâmetros em (5.7) constantes) de forma a observar a dependência das soluções da equação (5.6) com esse parâmetro. Os resultados observados (a partir da inspeção das séries temporais) não indicaram a existência de nenhuma cascata de duplicação de períodos em relação a esse parâmetro, contudo, em algumas situações, tal como na transição $\tau_2 = 1.2 \rightarrow \tau_2 = 1.5$, foram observadas duplicações de período simples (período

1 $\rightarrow$ período 2) que todavia não faziam parte de uma rota completa de duplicações para o caos.

Para observar com maior cuidado a sequência de soluções originadas com a variação do parâmetro τ_2 , e assim ter uma melhor idéia da dependência das soluções com esse parâmetro, resolvemos construir um diagrama de bifurcações com τ_2 . Esse diagrama é construído considerando os sucessivos cruzamentos do atrator reconstruído (figura 5.5) com a linha $x(t) = 0.55$ com $dx/dt > 0$ (seção de Poincaré). Após descartar-se os transientes (100seg), são computados 300 pontos na seção de Poincaré. Esses pontos são então colocados em um gráfico em função de τ_2 . O resultado pode ser visto na figura 5.6.

Figura 5.6: Diagrama de bifurcações da equação (5.6) com o parâmetro τ_2 para o conjunto de parâmetros em (5.7).

Na figura 5.6 podemos ver a duplicação de período que foi apontada por Glass et al. (1988) na transição $\tau_2 = 1.2 \rightarrow \tau_2 = 1.5$. Vemos também que essa duplicação de período não faz parte de uma cascata de duplicação de período para o caos. Esse tipo

de cascata não foi observada em nenhuma circunstância, mesmo em outras configurações de parâmetros da equação (5.6).

Observe na figura 5.6 que a partir de $\tau_2 \simeq 1.85$ passam a existir soluções que podem apresentar comportamento aperiódico. Investigamos diversas dessas soluções e constatamos que, em todos os casos onde a solução era aparentemente aperiódica (como na figura 5.5), mesmo para um tempo de evolução da ordem de 10000seg, não foi possível encontrar evidências de ciclos periódicos. Todavia, não podemos descartar que essas soluções tenham período maior do que 10000seg, ou então, que sejam soluções quasi periódicas. Os comportamentos aparentemente aperiódicos observados aqui devem ser melhor caracterizados, assim como devem ser testadas outras configurações de parâmetro na tentativa de localizar outras regiões do espaço de fase onde tais soluções aparecem. Essas são áreas futuras de investigação a respeito da equação (5.6).

5.2.1 Detecção de Soluções Aperiódicas

Vamos agora mostrar que o método simples, desenvolvido na seção inicial deste capítulo, para encontrar soluções aperiódicas no espaço de parâmetros da equação (1) também pode ser aplicado para encontrar soluções desse tipo no espaço de parâmetros da equação (5.6).

Até hoje, tanto para a equação (1) como para a equação (5.6), não haviam sido observadas soluções aperiódicas. Na seção anterior mostramos que tais soluções existem para a equação (1) e que, em relação ao parâmetro n , podem ser encontradas rotas de duplicação de períodos para o caos.

Da mesma forma como fizemos para a equação (1), vamos utilizar o método de con-

tagem de pontos em uma seção de Poincaré discretizada para localizar soluções aperiódicas no espaço de parâmetros da equação (5.6) com $N = 2$. Considere, para $N = 2$, o seguinte conjunto de parâmetros da equação (5.6): $\tau_1 = 0.715$ e $\tau_2 = 2.30$. Para esses dois valores fixos de τ_i , a figura 5.7 representa o espaço de parâmetros (θ_1, θ_2) da equação (5.6) com $0.1 \leq \theta_1 \leq 0.40$ e $0.1 \leq \theta_2 \leq 0.50$. Nesse espaço, cada ponto no plano representa, em tons de cinza, a contagem de pontos na seção de Poincaré definida pelos cruzamentos do atrator $x(t - 2.30) \times x(t)$ com a linha $x(t) = 0.30$ e $dx/dt > 0$. Essa seção de Poincaré é discretizada e um vetor de 1000 células e então são computados 100 cruzamentos na seção. Em todos os casos foram descartados 100seg de transientes e foram utilizados 64 tons de cinza para compor a grade de tons do gráfico.

Figura 5.7: Espaço de parâmetros (θ_1, θ_2) da equação (5.6) para $\tau_1 = 0.715$ e $\tau_2 = 2.30$.

A partir da figura 5.7 podemos obter pontos no espaço (θ_1, θ_2) que são candidatos a apresentarem soluções aperiódicas (os pontos mais escuros). Em particular selecionamos o par $(\theta_1, \theta_2) = (0.230, 0.217)$. A figura 5.8 mostra dois atratores - $x(t - 2.30) \times x(t)$ - re-

construídos com o conjunto de parâmetros $\tau_1 = 0.715$, $\tau_2 = 2.30$, $\theta_1 = 0.230$ e $\theta_2 = 0.217$ nas seguintes situações: figura 5.8-a) equação (5.6) calculada para $500\text{seg} < t \leq 700\text{seg}$; figura 5.8-b) equação (1) integrada para $500\text{seg} < t \leq 700\text{seg}$, $n = 400$ e passo $h = 0.000001$. Primeiramente é importante notar que a topologia dos dois atratores é extremamente similar, mostrando que a evolução da equação (5.6) tem o mesmo comportamento das soluções da equação (1) no limite $n \rightarrow \infty$. Também verificamos que ambas as soluções não são periódicas ou então possuem um período maior que 10000seg , que foi o tempo máximo em que observamos as soluções sem notar a ocorrência de ciclos.

Figura 5.8: Atratores $x(t - 2.30) \times x(t)$ reconstruídos com o conjunto de parâmetros $\tau_1 = 0.715$, $\tau_2 = 2.30$, $\theta_1 = 0.230$ e $\theta_2 = 0.217$ para: a) equação (5.6) e b) equação (1) integrada com $n = 400$ e passo $h = 0.000001$.

Para tentar caracterizar o tipo de solução vista na figura 5.8-a, construímos um diagrama de bifurcações em relação ao parâmetro τ_1 . Utilizamos 500 valores de τ_1 no intervalo $0.50 \leq \tau_1 \leq 0.75$ e registramos, para cada valor desse parâmetro, 300 pontos na seção de Poincaré definida pelos cruzamentos do atrator $x(t - 2.30) \times x(t)$ com a

linha $x(t) = 0.30$ e $dx/dt > 0$. O resultado pode ser visto na figura 5.9.

Figura 5.9: Diagrama de bifurcações construído para o mesmo conjunto de parâmetros utilizado na figura 5.8-a em função do parâmetro τ_1 (foram utilizados 500 valores de τ_1).

Apesar de uma estrutura complexa de bifurcações ocorrer em algumas regiões da figura 5.9, não fomos capazes de identificar nenhuma rota de duplicação de período para o caos com o parâmetro τ_1 . Também construímos um diagrama de bifurcações em relação a τ_1 (para 500 valores no intervalo $0.50 \leq \tau_1 \leq 0.75$) para a equação (1). Utilizamos o mesmo conjunto de parâmetros usado para construir a figura 5.8-b. Para cada valor do parâmetro a série temporal foi integrada com passo $h = 0.001$ e foram registrados 300 pontos na seção de Poincaré definida pelos cruzamentos do atrator $x(t - 2.30) \times x(t)$ com a linha $x(t) = 0.30$ e $dx/dt > 0$. O resultado pode ser visto na figura 5.10.

Figura 5.10: Diagrama de bifurcações construído para o mesmo conjunto de parâmetros utilizado na figura 5.8-b em função do parâmetro τ_1 (foram utilizados 500 valores de τ_1). O passo de integração usado foi $h = 0.001$.

Observe que as sequências de bifurcações observadas na figura 5.10 são muito similares à aquelas vistas na figura 5.9. As diferenças observadas justificam-se pelo fato de que, apesar das soluções da equação (1) utilizadas para construir essa figura terem sido calculadas com um valor grande de n ($n = 400$), esse valor é finito. As soluções da integração numérica da equação (1) só são iguais à equação (5.6) no limite $n \rightarrow \infty$. Também o passo de integração utilizado para obter as séries temporais utilizadas na construção do diagrama de bifurcações 5.10 não garante a convergência das soluções. Verificamos que o passo para o qual as soluções obtidas com $n = 400$ podem ser consideradas convergidas é em torno de $h = 0.00005$. Esse valor de passo é $1/20$ do passo utilizado para construção da figura 5.10 ($h = 0.001$). Tivemos de utilizar um passo muito maior que o passo apropriado para a integração pois caso fosse utilizado um passo da ordem de $h = 0.00005$ o tempo de computação da figura 5.10 seria extremamente grande (da ordem de 20 dias). Todavia, selecionamos 50 valores de τ_1 no intervalo $0.675 \leq \tau_1 \leq 0.70$

na figura 5.10 e reconstruímos o diagrama de bifurcações nesse intervalo utilizando o passo $h = 0.00005$ (figura 5.11-a). Essa figura pode ser agora melhor comparada com o mesmo intervalo de τ_1 na figura 5.9 (figura 5.11-b). Note na figura 5.11 que apesar de existir uma certa similaridade topológica nos diagramas ainda existem diferenças marcantes nas estruturas de bifurcação. Isso era de se esperar uma vez que, como já dissemos, o valor de $n = 400$ é apenas uma aproximação para o caso limite $n \rightarrow \infty$.

Figura 5.11: a) Detalhe do diagrama de bifurcações da figura 5.10 construído com séries temporais integradas com passo $h = 0.00005$. b) Detalhe do diagrama de bifurcações da figura 5.9.

Mesmo nos casos onde integramos a equação (1) para valores grandes de n ($n \geq 400$) (nos aproximando então das soluções da equação (5.6)) não fomos capazes de caracterizar as soluções aperiódicas observadas. Em todos os casos em que encontramos tais soluções não fomos capazes de observar nenhuma cascata de duplicação de período. Todavia, o fato de não observarmos nenhuma cascata de duplicações de período com o parâmetro τ_1 na equação (5.6) ou na equação (1) integrada para grandes valores de n não elimina

a possibilidade da existência de soluções caóticas pois tais soluções podem se originar de outras rotas. O importante é que o método simples para localização de soluções aperiódicas no espaço de parâmetros da equação (5.6) se mostrou eficiente e pode ser utilizado futuramente para estender os estudos aqui apresentados no sentido de tentar compreender a natureza das soluções aperiódicas encontradas.

Capítulo 6

Conclusões

Os estudos realizados nesta tese geraram uma série de resultados que possibilitam ter uma melhor compreensão sobre o comportamento dinâmico da equação (1). Estes estudos forneceram também ferramentas (métodos numéricos, programas, interfaces, etc.) que permitem a continuidade dos trabalhos aqui desenvolvidos, ou seja, permitem que outros aspectos da equação (1) sejam explorados no futuro, tais como pesquisas com outros conjuntos de parâmetros, diferentes dos utilizados aqui, ou pesquisas com um número maior de elementos de retardo na equação.

No capítulo 3 foi desenvolvido um método numérico simples e eficiente que permite estudar a estabilidade dos pontos de equilíbrio da equação (1) em relação aos parâmetros (θ_i, n) . As curvas vistas nas figuras 3.9 e 3.12 são importantes pois nos dão uma idéia de como a estabilidade dos pontos de equilíbrio é afetada pela declividade da função sigmoidal de transferência (essa declividade é controlada pelo valor do parâmetro n - vide capítulo 3) e pelo valor dos limiares (θ_i) de cada ciclo de retroalimentação.

Mostramos no capítulo 4 que deve haver um cuidado muito grande quando analisamos as séries temporais provenientes da integração numérica da equação (1). A

convergência numérica dessas séries temporais deve ser tratada de maneira conveniente de modo a ter-se um critério que permita classificar a série temporal como convergida ou não. A análise da convergência numérica utilizando os métodos de comparação de atratores propostos por Albano et al. (1995), com o uso da probabilidade de Kolmogorov Smirnov aplicada às integrais de correlação, e por Diambra (1999), usando o cálculo da distância estatística entre atratores, mostrou que esse cuidado é muito mais importante nos casos onde as soluções são caóticas. Nesses casos, a solução numérica obtida só pôde ser considerada convergida para passos de integração muito menores que os passos utilizados para obter convergência das soluções periódicas ou quasi-periódicas. Também é importante notar que os métodos utilizados para análise, Albano et al. (1995) e Diambra (1999), foram utilizados em conjunto de modo a dar maior confiabilidade aos resultados, sendo que esses métodos também podem ser aplicados para análise de soluções de outros tipos de sistemas dinâmicos, uma vez que não fazem uso de nenhuma propriedade ou característica particular da equação (1). Notamos também que o método proposto por Diambra (1999) é de processamento mais rápido que método de Albano et al. (1995), pois não necessita do cálculo das integrais de correlação, e possui uma sensibilidade maior na distinção dos atratores.

As rotas de duplicação de período constatadas através da construção dos diagramas de bifurcação vistos nos capítulos 4 e 5 (figuras 4.16 e 5.4) fornecem uma clara evidência de que a equação (1) pode apresentar caos nos casos onde $N = 3$ e onde $N = 2$ sendo que a existência de caos para $N = 2$ nunca havia sido observada antes. Apesar de soluções caóticas terem sido observadas por nós, elas continuam sendo raras no espaço de parâmetros da equação (1), conforme já apontado por Glass & Malta (1990). Dessa forma, sistemas físicos modelados pela equação (1), apesar de poderem apresentar soluções caóticas, possuem poucas chances de exibir tal comportamento caso as faixas

de parâmetros naturais do sistema estejam distantes das regiões caóticas de parâmetros observadas no modelo.

Como dissemos no início dessas conclusões, durante o trabalho de pesquisa desta tese foram feitos diversos estudos e desenvolvidas várias ferramentas numéricas. Esse material acabou servindo de suporte para outros trabalhos que foram publicados ao longo do período de elaboração da tese (vide apêndice C). A análise e o estudo de aplicações discretas, bem como as ferramentas e programas desenvolvidos para a construção de *density plots* como o da figura 5.2, foram utilizados por Bastos de Figueiredo & Malta (1998) em um estudo da aplicação do círculo (*circle map*) com o uso de gráficos de Lyapunov. As rotinas em FORTRAN desenvolvidas nesta tese para a construção, durante o processo de integração numérica, de aplicações de Poincaré, foram utilizadas por Bastos de Figueiredo, Grotta Ragazzo & Malta (1998) em um estudo sobre a dinâmica de sistemas Hamiltonianos com 2 graus de liberdade, especificamente estudou-se o sistema Hamiltoniano de Hénon-Heiles.

Para a caracterização da dinâmica das séries temporais geradas pela integração numérica da equação (1) foram estudados vários métodos. Um desses métodos foi a de caracterização da complexidade de séries temporais através do cálculo da entropia aproximada (*Approximate Entropy* - ApEn). Apesar desse método não ter sido aplicado nesta tese, os programas desenvolvidos durante esse estudo foram posteriormente utilizados por Diambra, Bastos de Figueiredo & Malta (1999) em um trabalho sobre a localização de surtos epiléticos em séries temporais provenientes de eletroencefalogramas. Dessa forma, podemos perceber que houve uma grande contribuição desta tese em fornecer conhecimento e ferramentas para que outras pesquisas pudessem ser levadas a cabo.

Apêndice A

O método de Gear

O método de Gear [Gear (1971)] é um método numérico, para solução de equações diferenciais, pertencente à uma classe de fórmulas numéricas conhecidas como *Multi-Step Backward Differentiation Formulas* [Forsythe et al. (1977)]. Considere inicialmente a seguinte equação diferencial

$$x'(t) = f(x(t), t). \quad (\text{A.1})$$

Considere agora uma sequência discreta, reversa no tempo, da variável independente $t : t_0 = 0, t_1 = -h, \dots, t_n = -nh$, onde h é o passo utilizado no processo de integração numérica. No método de Gear a solução da equação diferencial, em cada instante t_n , é aproximada por um polinômio de grau n , ou seja

$$x_n = a_0 + a_1 t_n + \dots + a_{n-1} (t_n)^{n-1} + a_n (t_n)^n, \quad (\text{A.2})$$

onde $a_0, a_1, \dots, a_n$ são os coeficientes do polinômio. Substituindo os valores de t_i pelo

número correspondente de unidades de passo h temos

$$\begin{aligned}
 x_0 &= a_0, \\
 x_1 &= a_0 - ha_1 + h^2a_2 - \dots + (-h)^na_n, \\
 x_2 &= a_0 - 2ha_1 + 4h^2a_2 - \dots + (-2h)^na_n, \\
 &\vdots \\
 x_n &= a_0 - nha_1 + n^2h^2a_2 - \dots + (-nh)^na_n.
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Escrevendo o sistema acima em notação matricial obtemos

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^n \\ 1 & -2 & 4 & \cdots & (-2)^n \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & n & n^2 & \cdots & (-n)^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & h & & & \\ & & h^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & h^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}. \tag{A.4}$$

A derivada em cada ponto (x'_n) é dada por

$$x'_n = 0 + a_1 + \dots + (n-1)a_{n-1}(t_n)^{n-2} + na_n(t_n)^{n-1}, \tag{A.5}$$

e dessa forma

$$hx'_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & h & & & \\ & & h^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & h^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}. \tag{A.6}$$

Por fim, combinando o sistema (A.6) e o sistema (A.4), obtemos a *fórmula matricial de Gear*

$$\begin{bmatrix} x_0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^n \\ x_2 & 1 & -2 & 4 & \cdots & (-2)^n \\ \vdots & & & & \ddots & \\ x_n & 1 & -n & n^2 & \cdots & (-n)^n \\ hx'_0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & h & & & \\ & & & h^2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & h^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Para $n = 3$ (*three-step Gear*), a expressão recursiva para integração numérica é obtida resolvendo-se

$$\det \begin{bmatrix} x_0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ x_2 & 1 & -2 & 4 & -8 \\ x_3 & 1 & -3 & 9 & -27 \\ hx'_0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 12hx'_0 - 22x_0 + 36x_1 - 18x_2 + 4x_3 = 0. \quad (\text{A.8})$$

Isolando o valor de x_0 na equação acima e reescrevendo a expressão em termos de valores genéricos (x_i) obtemos finalmente

$$x_{i+1} = \frac{1}{11}(18x_i - 9x_{i-1} + 2x_{i-2}) + h\frac{6}{11}x'_{i+1}, \quad (\text{A.9})$$

que é a fórmula de integração numérica utilizada nesta tese.

Para resolver a equação (1) o tempo deve ser discretizado com o uso de um passo h . Esse passo é escolhido de tal forma que os retardos τ_i serão dados por um número inteiro de unidades de passos h , denotado por d_i . Sendo assim, a condição inicial deve ser definida no intervalo discreto $-\max(d_i) \leq k \leq 0$. Se escrevermos $x_k = x(hk)$ e representarmos a função sigmoideal (equação (3.4)) como $S_k = S(x_k)$, obtemos, substituindo a equação (1) na equação (A.9),

$$x_{i+1} = \frac{1}{11+6h}(18x_i - 9x_{i-1} + 2x_{i-2}) + \frac{6h}{11+6h} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_{k+1-d_i},$$

que é a expressão recursiva para integração numérica da equação (1).

Apêndice B

Programas

Figura B.1: Interface gráfica para entrada de dados desenvolvida para o integrador utilizado nesta tese.

A figura B.1 representa a interface gráfica para entrada de dados desenvolvida para o integrador numérico utilizado nesta tese. Apesar de outros programas terem sido desenvolvidos durante este trabalho, o integrador numérico, juntamente com sua interface gráfica, é o mais importante. Devido à sua robustez e facilidade de uso (propiciada pela interface gráfica), esse integrador pode ainda ser utilizado na pesquisa de outros aspectos da equação (1) e sendo assim, neste apêndice, publicamos o código completo do integrador.

A interface gráfica da figura B.1 foi escrita em TCL/TK. A TCL (*Tool Command Language*) é uma linguagem de script multi plataforma capaz de controlar tarefas de integração de sistemas tais como o ciclo geração-gravação-leitura de dados. É usada conjuntamente com sua extensão, chamada de TK (*ToolKit*), para construção de interfaces gráficas amigáveis. Essas ferramentas visam facilitar a manipulação e a configuração de sistemas de informação. São usadas mundialmente por sua simplicidade, por não dependerem de plataforma de hardware ou de sistema operacional específico e por serem gratuitas (*open source*) [Flynt (1998)].

Na seção seguinte apresentaremos o código fonte da interface gráfica e do programa FORTRAN do integrador. Descreveremos agora os itens de configuração do integrador numérico que aparecem na figura B.1:

- [a] *ativar*: Esta chave, do tipo *check box*, indica qual é o número, e quais são os elementos de retardo que serão utilizados na equação (1). Cada chave ativa o elemento de retardo imediatamente abaixo dela na interface. O programa integrador é capaz de integrar a equação (1) para até $N = 5$ elementos de retardo.
- [b] *tau*: Configura os valores de τ_i na equação (1).
- [c] *teta*: Configura os valores de θ_i na equação (1).

- [d] *n*: Configura o valor de n na equação (1).
- [e] *passo do integrador*: Configura o passo h do integrador numérico.
- [f] *passo de reconstrução*: Esta chave indica qual dos elementos de retardo, τ_i , será utilizado como passo de reconstrução para o método de Takens.
- [g] *escala de passos da saída*: Configura a escala temporal do arquivo de saída, isto é, indica o número de passos que serão computados entre cada saída gerada, por exemplo: o número 20 para esse parâmetro indica que 1 passo, a cada 20 computados, será impresso na saída (isso permite registrar longos intervalos de tempo em arquivos pequenos).
- [h] *seção de Poincaré do atrator*: Configura o valor da seção de Poincaré para os atrator bidimensional reconstruído (utilizando o método de Takens). Se esse valor for positivo, a seção é registrada quando $dx/dt > 0$, e se for negativo, a seção é registrada quando $dx/dt < 0$.
- [i] *condição inicial*: Configura o valor da condição inicial $x(t < 0) = \text{constante}$.
- [j] *transiente (em seg) da série temporal*: Transientes (em segundos) que serão descartados.
- [k] *pontos produzidos na saída*: Configura o número de pontos registrados no arquivo de saída. Note que o tempo total registrado no arquivo de saída (no caso da saída ser uma série temporal ou um atrator) é dado por: $(\text{pontos produzidos na saída} \times \text{escala de passos da saída} \times \text{passo do integrador})$. No caso da saída ser uma aplicação de Poincaré (ou um diagrama de bifurcações) esse parâmetro configura o número de pontos registrados em cada seção de Poincaré.

[l] *n final para variações de n*: Utilizado para construção do diagrama de bifurcações com n . Configura o valor final de n (o valor inicial é dado pelo parâmetro n da interface - item [d]).

[m] *numero de variações de n*: Indica o número de passos entre $n_{inicial}$ e n_{final} para construção dos diagramas de bifurcação com n .

[n] *arquivo de saída*: Nome do arquivo de saída.

[o] *tipo de saída*:

1. Séries temporais (vide figura 4.12)
2. Atratores bidimensionais via reconstrução de Takens (vide figura 4.14)
3. Aplicações de Poincaré (vide figura 4.15)
4. Espectro de potências (vide figura 4.13)
5. Diagrama de bifurcações com n (vide figura 4.16)

B.1 Códigos fonte

Nesta seção estão os códigos fonte da interface gráfica TCL/TK e do integrador numérico em FORTRAN. O programa em FORTRAN (*integra.for*) deve ser compilado em dupla precisão e o executável gerado deve ficar no mesmo diretório da interface *drive.tcl*. Os únicos requisitos operacionais necessários são que seu sistema possua um compilador FORTRAN 77 (que suporte dupla precisão) e um interpretador TCL/TK.

B.1.1 Interface *drive.tcl* (TCL/TK)

```
#c# subrotina proc
proc positionWindow w {
    wm geometry $w +1+1
```



```

}
#c# subrotina grava
proc grava w {
    catch {open ''./retard.dat'' w 0600} desc
    puts $desc [.d9.entry get]
    puts $desc [.a.entry1 get]
    puts $desc [.a.entry2 get]
    puts $desc [.a.entry3 get]
    puts $desc [.a.entry4 get]
    puts $desc [.a.entry5 get]
    foreach i {p1 p2} {
        puts $desc [.$i.entry5 get]
        puts $desc [.$i.entry4 get]
        puts $desc [.$i.entry3 get]
        puts $desc [.$i.entry2 get]
        puts $desc [.$i.entry1 get]
    }
    puts $desc [.p3.entry get]
    puts $desc [.delay.entry get]
    foreach i {d1 d2 d3 d4 d5 d6 d7 d8} {
        puts $desc [.$i.entry get]
    }
    puts $desc [.select.entry get]
    close $desc
#c# modificar a linha abaixo com o
#c# nome do executavel do integrador.
    exec integra.exe
    bell
}
#c# subrotina executa
proc executa w {
    grava .
    exec integra.exe
    bell
}
#c# inicio do drive.tcl
set font {''Courier'' 8}
set font2 {''Courier'' 8 bold}
wm title . ''Integrador - configuracao dos parametros''
positionWindow .
#c# define valores iniciais
set a1 1
set delay 1
set select 1
label .msg1 -wraplength 4i -font $font -justify left -bg yellow\
-text ''Parametros da Equacao (real*8)''
label .msg2 -font $font -bg yellow\
-text ''Parametros do Programa''
label .msg3 -font $font -bg yellow\
-text ''Tipo de Saida''
#c# botoes

```

```

frame .buttons
button .buttons.grava -font $font2 -text\
'' EXECUTAR ''\
-command ''grava .''
pack .buttons -side bottom -fill x
pack .buttons.grava -side left -expand 1
#c# frame a
frame .a
label .a.label -font $font
.a.label config -font $font -text '' ativar:''
checkboxbutton .a.b1 -font $font -text '' '' -variable a1 -relief flat
checkboxbutton .a.b2 -font $font -text '' '' -variable a2 -relief flat
checkboxbutton .a.b3 -font $font -text '' '' -variable a3 -relief flat
checkboxbutton .a.b4 -font $font -text '' '' -variable a4 -relief flat
checkboxbutton .a.b5 -font $font -text '' '' -variable a5 -relief flat
entry .a.entry1 -font $font -textvar a1
entry .a.entry2 -font $font -textvar a2
entry .a.entry3 -font $font -textvar a3
entry .a.entry4 -font $font -textvar a4
entry .a.entry5 -font $font -textvar a5
pack .a.label -side left
pack .a.b1 -side left -pady 2 -anchor w
pack .a.b2 -side left -pady 2 -anchor w
pack .a.b3 -side left -pady 2 -anchor w
pack .a.b4 -side left -pady 2 -anchor w
pack .a.b5 -side left -pady 2 -anchor w
#c# frame tau/teta
foreach i {p1 p2} {
    frame .$i -bd 5
    entry .$i.entry1 -font $font -relief sunken -width 10
    entry .$i.entry2 -font $font -relief sunken -width 10
    entry .$i.entry3 -font $font -relief sunken -width 10
    entry .$i.entry4 -font $font -relief sunken -width 10
    entry .$i.entry5 -font $font -relief sunken -width 10
    label .$i.label -font $font
    pack .$i.label -side left
    pack .$i.entry5 -side left
    pack .$i.entry4 -side left
    pack .$i.entry3 -side left
    pack .$i.entry2 -side left
    pack .$i.entry1 -side left
}
.p1.label config -font $font -text ''tau....:''
.p2.label config -font $font -text ''teta....:''
#c# frame n,delay
frame .p3
entry .p3.entry -font $font -relief sunken -width 10
label .p3.label -font $font
pack .p3.label -side left

```

```

pack .p3.entry -side left
.p3.label config -font $font\
-text '' n.....:''
frame .delay
label .delay.label -font $font
.delay.label config -font $font\
-text '' passo de reconstrucao .....:''
pack .delay.label -side left
foreach i {1 2 3 4 5} {
    radiobutton .delay.b$i -font $font -text ''$i'' -variable delay\
    -relief flat -value $i
    pack .delay.b$i -side left -anchor w
}
entry .delay.entry -font $font -textvar delay
#c# parametros
foreach i {d1 d2 d3 d4 d5 d6 d7 d8 d9} {
    frame .$i -bd 2
    entry .$i.entry -font $font -relief sunken -width 10
    label .$i.label -font $font
    pack .$i.label -side left
    pack .$i.entry -side left
}
.d1.label config -font $font\
-text '' (real*8 ) - passo do integrador .....:''
.d2.label config -font $font\
-text '' (integer) - escala de passos para a saida .....:''
.d3.label config -font $font\
-text '' (real*8 ) - seccao de poincare do atrator .....:''
.d4.label config -font $font\
-text '' (real*8 ) - amplitude da condicao inicial .....:''
.d5.label config -font $font\
-text '' (integer) - transiente(em seg) da serie temporal _:''
.d6.label config -font $font\
-text '' (integer) - pontos produzidos na saida .....:''
.d7.label config -font $font\
-text '' (real*8 ) - n final para variacoes de n .....:''
.d8.label config -font $font\
-text '' (integer) - numero de variacoes de n .....:''
.d9.label config -font $font\
-text '' (string ) - arquivo de saida.....:''
#c# composicao da interface
frame .select
label .select.label -font $font
.select.label config -font $font -text '' tipo de saida .....:''
pack .select.label -side left
foreach i {1 2 3 4 5} {
    radiobutton .select.b$i -font $font -text ''$i'' -variable select\
    -relief flat -value $i
}

```

```

pack .select.b$i -side left -pady 2 -anchor w
}
entry .select.entry -font $font -textvar select
pack .a .p1 .p2 .p3 .delay .d1 .d2 .d3 .d4 .d5 .d6\
.d7 .d8 .d9 .select -side top -fill x
focus .p1.entry1

```

B.1.2 Programa *integra.for* (FORTRAN 77)

```

c# begin program integra
    program integra
c# definicao das variaveis
    real*8 a(5),tau(5),teta(5),n(5)
    real*8 section,p0,n_final,step
    integer salto,delay_map,transientes
    integer n_passos,tipo_saida,pontos
    character*20 arquivo
c# le os parametros do arquivo 'retard.dat'
c# gerados pela interface TCL/TK
    open(unit=99,status='old',file='retard.dat')
    read(99,*)arquivo
    read(99,*)a(1)
    read(99,*)a(2)
    read(99,*)a(3)
    read(99,*)a(4)
    read(99,*)a(5)
    read(99,*)tau(1)
    read(99,*)tau(2)
    read(99,*)tau(3)
    read(99,*)tau(4)
    read(99,*)tau(5)
    read(99,*)teta(1)
    read(99,*)teta(2)
    read(99,*)teta(3)
    read(99,*)teta(4)
    read(99,*)teta(5)
    read(99,*)n(1)
    n(2) = n(1)
    n(3) = n(1)
    n(4) = n(1)
    n(5) = n(1)
    read(99,*)delay_map
    read(99,*)step
    read(99,*)salto
    read(99,*)section
    read(99,*)p0
    read(99,*)transientes
    read(99,*)pontos
    read(99,*)n_final
    read(99,*)n_passos

```

```

        read(99,*)tipo_saida
        close(99)
c# inicia a execucao com a chamadando a rotina 'executa'
        open(99,status='unknown',file=arquivo)
        call executa(a,tau,teta,n,delay_map,step,salto,
+                section,p0,transientes,pontos,
+                n_final,n_passos,99,tipo_saida)
        close(99)
    end
c#
c#
c# subrotina executa
        subroutine executa(a,tau,teta,n,delay_map,step,salto,
+                section,p0,transientes,pontos,
+                n_final,n_passos,arquivo,tipo_saida)
        real*8 a(5),tau(5),teta(5),n(5),step
        integer salto,delay_map,transientes,pontos
        integer n_passos,tipo_saida,arquivo
        real*8 section,p0,n_final,uso_r
        real*8 dados(2,131072)
        real*8 saida(2,131072)
        integer i,j,k
        if((tipo_saida.eq.1).or.
+        (tipo_saida.eq.2).or.
+        (tipo_saida.eq.3)) then
            call integrar(a,tau,teta,n,step,
+                salto,delay_map,section,
+                p0,transientes,pontos,
+                dados,tipo_saida)
            do i=1,pontos
                write(arquivo,*)dados(1,i),dados(2,i)
            end do
        end if
        if(tipo_saida.eq.4) then
            pontos=2**int(dlog(dble(pontos))/dlog(2.d0))
            call integrar(a,tau,teta,n,step,
+                salto,delay_map,section,
+                p0,transientes,pontos,
+                dados,1)
            call spectrm(dados,pontos)
            do i=1,pontos/2
                write(arquivo,*)dados(1,i)/pontos/(dble(salto)*step),
+                dados(2,i)
            end do
        end if
        if(tipo_saida.eq.5) then
            uso_r = (n_final-n(1))/n_passos
            i=0
            do while(n(1).le.n_final)
                n(2) = n(1)
                n(3) = n(1)
            end do
        end if
    end subroutine

```

```

        n(4) = n(1)
        n(5) = n(1)
        call integrar(a,tau,teta,n,step,
+             salto,delay_map,section,
+             p0,transientes,pontos,
+             dados,3)
        do j=1,pontos
            saida(1,i+j) = n(1)
            saida(2,i+j) = dados(1,j)
        end do
        i=i+j-1
        n(1)=n(1)+uso_r
    end do
    do k=1,i
        write(arquivo,*)saida(1,k),saida(2,k)
    end do
end if
return
end
c# subrotina integrador
    subroutine integrador(a,teta,n,step,
+             salto,delay_map,section,
+             p0,transientes,pontos,
+             dados,tipo_saida,
+             nd,nd_max,n_delays)
    real*8 a(5),teta(5),n(5),step
    integer salto,delay_map,tipo_saida
    integer transientes,pontos,ind(9)
    integer nd(5),nd_max,n_delays
    real*8 section,p0,passo,rk(3),m(3,5)
    real*8 dados(2,131072),p(131072),fixed
    real*8 p_map(6),p6_ant,fator(3),AA(4)
    real*8 s,cruzamento,delta_cruzamento
    integer i,j
c# Preenche o vetor p(nd_max) com a condicao inicial desejada
    do i=1,nd_max
        p(i)=p0
    end do
c# Calcula os 3 passos inciais usando RK de 4 ordem
    passo = p(nd_max)
    do i=nd_max+1,nd_max+3
        m(1,1) = p(i-nd(1))
        m(1,2) = p(i-nd(2))
        m(1,3) = p(i-nd(3))
        m(1,4) = p(i-nd(4))
        m(1,5) = p(i-nd(5))
        m(2,1) = (p(i-nd(1))+p(i-nd(1)+1))/2.d0
        m(2,2) = (p(i-nd(2))+p(i-nd(2)+1))/2.d0
        m(2,3) = (p(i-nd(3))+p(i-nd(3)+1))/2.d0
        m(2,4) = (p(i-nd(4))+p(i-nd(4)+1))/2.d0

```

```

m(2,5) = (p(i-nd(5))+p(i-nd(5)+1))/2.d0
m(3,1) = p(i-nd(1)+1)
m(3,2) = p(i-nd(2)+1)
m(3,3) = p(i-nd(3)+1)
m(3,4) = p(i-nd(4)+1)
m(3,5) = p(i-nd(5)+1)
fator(1) = (a(1)*teta(1)**n(1)/
+          (teta(1)**n(1)+m(1,1)**n(1))+
+          a(2)*teta(2)**n(2)/
+          (teta(2)**n(2)+m(1,2)**n(2))+
+          a(3)*teta(3)**n(3)/
+          (teta(3)**n(3)+m(1,3)**n(3))+
+          a(4)*teta(4)**n(4)/
+          (teta(4)**n(4)+m(1,4)**n(4))+
+          a(5)*teta(5)**n(5)/
+          (teta(5)**n(5)+m(1,5)**n(5))
+          )/dble(n_delays)
fator(2) = (a(1)*teta(1)**n(1)/
+          (teta(1)**n(1)+m(2,1)**n(1))+
+          a(2)*teta(2)**n(2)/
+          (teta(2)**n(2)+m(2,2)**n(2))+
+          a(3)*teta(3)**n(3)/
+          (teta(3)**n(3)+m(2,3)**n(3))+
+          a(4)*teta(4)**n(4)/
+          (teta(4)**n(4)+m(2,4)**n(4))+
+          a(5)*teta(5)**n(5)/
+          (teta(5)**n(5)+m(2,5)**n(5))
+          )/dble(n_delays)
fator(3) = (a(1)*teta(1)**n(1)/
+          (teta(1)**n(1)+m(3,1)**n(1))+
+          a(2)*teta(2)**n(2)/
+          (teta(2)**n(2)+m(3,2)**n(2))+
+          a(3)*teta(3)**n(3)/
+          (teta(3)**n(3)+m(3,3)**n(3))+
+          a(4)*teta(4)**n(4)/
+          (teta(4)**n(4)+m(3,4)**n(4))+
+          a(5)*teta(5)**n(5)/
+          (teta(5)**n(5)+m(3,5)**n(5))
+          )/dble(n_delays)
AA(1) = fator(1) - passo
AA(2) = fator(2) - step*AA(1)/2.D0 - passo
AA(3) = fator(2) - step*AA(2)/2.D0 - passo
AA(4) = fator(3) - step*AA(3) - passo
passo = passo + step*(AA(1)+
+          2.D0*(AA(2)+AA(3))+AA(4))/6.D0
rk(i-nd_max) = passo
end do
do i=1,nd_max-3
  p(i)=p(i+3)
end do

```

```

        p(nd_max-2) = rk(1)
        p(nd_max-1) = rk(2)
        p(nd_max ) = rk(3)
c# Inicializa os ponteiros do programa. Estes ponteiros fazem a
c# reordenacao da posicao dos delays no vetor p(nd_max).
        ind(1) = 1
        ind(2) = nd_max
        ind(3) = nd_max-1
        ind(4) = nd_max-2
        ind(5) = nd_max+1-ind(1)
        ind(6) = nd_max+1-ind(2)
        ind(7) = nd_max+1-ind(3)
        ind(8) = nd_max+1-ind(4)
        ind(9) = nd_max+1-ind(5)
        do i=1,6
            p_map(i) = 0.d0
        end do
c# Esta parte faz a integracao propriamente dita utilizando
c# a subrotina fcn que eh o corpo do integrador de Gear.
        call ptfixo(a,teta,n,n_delays,step,fixed)
        if(section.eq.0.d0) section=fixed
        do i=1,int(dble(transientes)/step)-3
            call fcn(ind,p,nd_max,step,teta,n,a,
+                n_delays,delay_map,p_map)
        end do
        i = 1
        j = salto
        s = section/dabs(section)
        cruzamento= 0.d0
        delta_cruzamento = 0.d0
        do while(i.le.pontos)
            p6_ant = p_map(6)
            call fcn(ind,p,nd_max,step,teta,n,a,
+                n_delays,delay_map,p_map)
            if(tipo_saida.eq.1) then
                if(mod(j,salto).eq.0) then
                    dados(1,i) = i-1
                    dados(2,i) = p_map(6)
                    i=i+1
                end if
                j=j+1
            else
                if(tipo_saida.eq.2) then
                    if(mod(j,salto).eq.0) then
                        dados(1,i) = p_map(delay_map)
                        dados(2,i) = p_map(6)
                        i=i+1
                    end if
                    j=j+1
                else
                    if(tipo_saida.eq.3) then

```



```

        if(((s*p_map(6).ge.section).and.(s*p6_ant.le.section))
+       .or.((p_map(6).eq.p6_ant).and.(dabs(p6_ant-fixed).le.
+       1.d-5))) then
            if(cruzamento.gt.0.d0) then
                dados(1,i) = cruzamento
                dados(2,i) = p_map(delay_map)
                i=i+1
            end if
            cruzamento = p_map(delay_map)
        end if
    end if
end if
end do
return
end
c# subrotina integrar
    subroutine integrar(a,tau,teta,n,step,
+                       salto,delay_map,section,
+                       p0,transientes,pontos,
+                       dados,tipo_saida)
    real*8 a(5),tau(5),teta(5),n(5),step
    integer salto,delay_map,tipo_saida
    integer transientes,pontos,n_delays,i
    real*8 section,p0,di,dados(2,131072)
    integer nd(5),nd_max
c# Determina qual o delay maximo para contruir o intervalo e
c# verifica se todos os delays sao multiplos do passo.
    n_delays = 5
    do i=1,5
        if(a(i).eq.0.d0) then
            n_delays = n_delays-1
            tau(i) = 1.d0
            teta(i) = 1.d0
            n(i) = 1.d0
            nd(i) = 4
        else
            di = (tau(i)/step)
            nd(i) = int(di+1.D-10)
            if (abs(dble(di-nd(i))).ge.1.D-10) then
                write(6,*)'erro em um dos passos!',tau(i),step
                stop
            end if
            nd_max = max(nd_max,nd(i))
        end if
    end do
    call integrador(a,teta,n,step,
+                 salto,delay_map,section,
+                 p0,transientes,pontos,
+                 dados,tipo_saida,
+                 nd,nd_max,n_delays)
    return
end

```

```

c# subrotina fcn
      subroutine fcn(ind,p,nd_max,step,teta,n,a,
+           n_delays,delay_map,p_map)
      integer ind(9),nd_max,i
      real*8 p(nd_max),p_map(6)
      real*8 step,teta(5),n(5),a(5)
      integer n_delays,delay_map
c# delay_map nao eh usado na subrotina fcn.
      delay_map=delay_map
      do i=1,5
         p_map(i) = p(ind(i+4))
      end do
      p(ind(1)) = (1.D0/(11.D0+6.D0*step))*
+           (18.D0*p(ind(2))-
+           09.D0*p(ind(3))+
+           02.D0*p(ind(4))
+           )+
+           (6.D0*step)/(11.D0+6.D0*step)*
+           (a(1)*teta(1)**n(1)/
+           (teta(1)**n(1)+p(ind(5))**n(1))+
+           a(2)*teta(2)**n(2)/
+           (teta(2)**n(2)+p(ind(6))**n(2))+
+           a(3)*teta(3)**n(3)/
+           (teta(3)**n(3)+p(ind(7))**n(3))+
+           a(4)*teta(4)**n(4)/
+           (teta(4)**n(4)+p(ind(8))**n(4))+
+           a(5)*teta(5)**n(5)/
+           (teta(5)**n(5)+p(ind(9))**n(5))
+           )/dble(n_delays)
      p_map(6) = p(ind(1))
      do i=1,9
         ind(i)= mod(ind(i),nd_max)+1
      end do
      return
      end
c# subrotina ptfixo
      subroutine ptfixo(a,teta,n,n_delays,step,fixed)
      real*8 a(5),teta(5),n(5),step
      real*8 fixed,x_ant,passo,x
      integer n_delays,round
      x = 0.d0
      x_ant = 0.d0
      passo = step
      round = 1
      do while(round.le.5)
         fixed = -x+
+           (a(1)*teta(1)**n(1)/
+           (teta(1)**n(1)+x**n(1))+
+           a(2)*teta(2)**n(2)/
+           (teta(2)**n(2)+x**n(2))+
+           a(3)*teta(3)**n(3)/

```

```

+          (teta(3)**n(3)+x**n(3))+
+          a(4)*teta(4)**n(4)/
+          (teta(4)**n(4)+x**n(4))+
+          a(5)*teta(5)**n(5)/
+          (teta(5)**n(5)+x**n(5))
+          )/dble(n_delays)
      if(fixed.le.0) then
        passo=dabs(x-x_ant)/10
        round=round+1
        x=x_ant
      end if
      x_ant=x
      x=x+passo
    end do
    fixed=x
    return
  end
c# subrotina four1
  subroutine four1(data,nm,isign)
    integer isign
    real*8 data(2*nm)
    integer i,istep,j,m,mmax,n
    real*8 tempi,tempr
    real*8 theta,wi,wpi,wpr,wr,wtemp
    n=2*nm
    j=1
    do i=1,n,2
      if(j.gt.i) then
        tempr=data(j)
        tempi=data(j+1)
        data(j)=data(i)
        data(j+1)=data(i+1)
        data(i)=tempr
        data(i+1)=tempi
      end if
      m=n/2
1    if((m.ge.2).and.(j.gt.m)) then
      j=j-m
      m=m/2
      goto 1
    end if
      j=j+m
    end do
    mmax=2
2  if(n.gt.mmax) then
    istep=2*mmax
    theta=6.28318530717959d0/(isign*mmax)
    wpr=-2.d0*sin(0.5d0*theta)**2
    wpi=sin(theta)
    wr=1.d0
    wi=0.d0
    do m=1,mmax,2
      do i=m,n,istep

```

```

        j=i+mmax
        tempr=sngl(wr)*data(j)-sngl(wi)*data(j+1)
        tempi=sngl(wr)*data(j+1)+sngl(wi)*data(j)
        data(j)=data(i)-tempr
        data(j+1)=data(i+1)-tempi
        data(i)=data(i)+tempr
        data(i+1)=data(i+1)+tempi
    end do
    wtemp=wr
    wr=wr*wpr-wi*wpi+wr
    wi=wi*wpr+wtemp*wpi+wi
end do
mmax=istep
goto 2
end if
return
end
c# subrotina spectrm
subroutine spectrm(dados,pontos)
integer pontos
real*8 dados(2,pontos)
real*8 data(131072)
integer i,j
real*8 maximo,dado,dadoant,dadoant_ant
do i=1,pontos
    data(i)=dados(2,i)
end do
j = pontos/2
do i=1,2
    dados(1,j+i)=0.d0
    dados(2,j+i)=0.d0
end do
call realft(data,pontos,1)
maximo = data(1)**2.d0+data(2)**2.d0
dados(1,1) = 0.d0
dados(2,1) = 1.d0
dadoant = -1.d0
dadoant_ant = -1d0
do i=3,pontos-1,2
    dado = dsqrt((data(i)**2.d0+data(i+1)**2.d0)/maximo)
    if((dado.lt.dadoant).and.(dadoant.gt.dadoant_ant)) then
        if(dadoant.ge.dados(2,j+1)) then
            dados(1,j+2)=dados(1,j+1)
            dados(2,j+2)=dados(2,j+1)
            dados(1,j+1)=(i-3)/2
            dados(2,j+1)=dadoant
        else
            if(dadoant.ge.dados(2,j+2)) then
                dados(1,j+2)=(i-3)/2
                dados(2,j+2)=dadoant
            end if
        end if
    end if
end do

```

```

        end if
    end if
    dadoant_ant=dadoant
    dadoant =dado
    dados(1,(i-3)/2+2)=(i-3)/2+1
    dados(2,(i-3)/2+2)=dado
end do
return
end
c# subrotina realft
subroutine realft(data,n,isign)
integer isign,n
real*8 data(n)
integer i,i1,i2,i3,i4,n2p3
real*8 c1,c2,h1i,h1r,h2i,h2r,wis,wrs
real*8 theta,wi,wpi,wpr,wr,wtemp
theta=3.141592653589793d0/dble(n/2)
c1=0.5
if(isign.eq.1) then
    c2=-0.5
    call four1(data,n/2,+1)
else
    c2=0.5
    theta=-theta
end if
wpr=-2.0d0*sin(0.5d0*theta)**2
wpi=sin(theta)
wr=1.0d0+wpr
wi=wpi
n2p3=n+3
do i=2,n/4
    i1=2*i-1
    i2=i1+1
    i3=n2p3-i2
    i4=i3+1
    wrs=sngl(wr)
    wis=sngl(wi)
    h1r=c1*(data(i1)+data(i3))
    h1i=c1*(data(i2)-data(i4))
    h2r=-c2*(data(i2)+data(i4))
    h2i=c2*(data(i1)-data(i3))
    data(i1)=h1r+wrs*h2r-wis*h2i
    data(i2)=h1i+wrs*h2i+wis*h2r
    data(i3)=h1r-wrs*h2r+wis*h2i
    data(i4)=-h1i+wrs*h2i+wis*h2r
    wtemp=wr
    wr=wr*wpr-wi*wpi+wr
    wi=wi*wpr+wtemp*wpi+wi
end do
if(isign.eq.1) then
    h1r=data(1)
    data(1)=h1r+data(2)
    data(2)=h1r-data(2)
else

```

```
    h1r=data(1)
    data(1)=c1*(h1r+data(2))
    data(2)=c1*(h1r-data(2))
    call four1(data,n/2,-1)
end if
return
end
```

Apêndice C

Publicações

C.1 Lyapunov Graph for two-parameters map: application to the circle map

J.C. Bastos de Figueiredo & C.P. Malta

International Journal of Bifurcation and Chaos **8**(2), 281-293 (1998)

Abstract:

In a Lyapunov graph the Lyapunov exponent, λ , is represented by a colour in the parameter space. The colour shade varies from black to white as goes from $-\infty$ to 0. Some of the main aspects of the complex dynamics of the circle map ($\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega + (1/2\pi)K \sin(2\pi\theta_n)(\text{mod } 1)$), can be obtained by analysing its Lyapunov graph. For $K > 1$ the map develops one maximum and one minimum and may exhibit bistability that corresponds to the intersection of topological structures (stability arms) in the Lyapunov graph. In the bistability region, there is a strong sensitivity to the initial condition. Using the fact that each of the coexisting stable solution is associated to one of the extrema of the map, we construct a function that allows to obtain the boundary

separating the set of initial conditions converging to one stable solution, from the set of initial conditions converging to the other coexisting stable solution.

C.2 Two important numbers in the Hénon-Heiles dynamics

J.C. Bastos de Figueiredo, C. Grotta Ragazzo & C.P. Malta

Physics Letters A **241**, 35-40 (1998)

Abstract:

We study the dynamics of a one parameter family of two degrees of free-dom Hamiltonian systems that includes the Henon-Heiles system. We show that several dynamical properties of this family, like the existence of large stochastic regions in certain parts of the phase space, are related to two canonical invariants that can be explicitly computed. These two invariants characterize universality classes of 2-degrees of freedom Hamiltonian systems with orbits homoclinic (bi-asymptotic) to saddle-center equilibria (related to pairs of real and pure imaginary eigenvalues). Examples of systems that can be described by Hamiltonians in this universality class: the planar three-body system, charged particles in a magnetic dipole eld (Stormer problem), buckled beams, some stationary plasma systems.

C.3 Epileptic activity recognition in EEG recording

L. Diambra, *J.C. Bastos de Figueiredo* & C. P. Malta

Abstract:

We apply Approximate Entropy (ApEn) algorithm in order to recognize epileptic activity in electroencephalogram recordings. ApEn is a recently developed statistical quantity for quantifying regularity and complexity. Our approach is illustrated regarding different types of epileptic activity. In all segments associated with epileptic activity analyzed here the complexity of the signal measured by ApEn drops abruptly. This fact can be useful for automatic recognition and detection of epileptic seizures.

Referências Bibliográficas

- A. M. Albano, P. E. Rapp & A. Passamante. Kolmogorov-Smirnov test distinguishes attractors with similar dimensions. *Phys. Rev. E* **52**(1), 196–206 (1995).
- U. an der Heiden & M. C. Mackey. The dynamics of production and destruction: analytic insight into complex behavior. *J. Math. Biol.* **16**, 75–101 (1982).
- C. T. H. Baker, G. A. Bocharov & F. A. Rihan. A report on the use of delay differential equations in numerical modelling in the biosciences. Technical Report 343, University of Manchester, UK, 1999.
- C. T. H. Baker, C. A. H. Paul & D. R. Willé. Issues in the numerical solution of evolutionary delay differential equations. Technical Report 248, University of Manchester, UK, 1994.
- J. C. Bastos de Figueiredo, C. Grotta Ragazzo & C. P. Malta. Two important numbers in the Hénon-Heiles dynamics. *Phys. Lett. A* **241**, 35–40 (1998).
- J. C. Bastos de Figueiredo & C. P. Malta. Lyapunov graph for two-parameter map: Application to the circle map. *Int. J. of Bifurcation and Chaos* **8**(2), 281–293 (1998).
- L. Bel. Spontaneous predictivisation. *Lect. Notes in Phys.* **162**, 21–49 (1982).
- R. Bellman & K. L. Cooke. *Differential-difference Equations*. Academic Press, New York, 1963.

- E. Boe & H. Chang. Dynamics of delayed systems under feedback control. *Chem. Eng. Science* **44**(6), 1281–1294 (1989).
- M. E. Brandt & G. Chen. Feedback control of a quadratic map model of cardiac chaos. *Int. J. of Bifurcation and Chaos* **6**(4), 715–723 (1996).
- T. Buzug, T. Reimers & G. Pfister. Optimal reconstruction of strange attractors from purely geometrical arguments. *Europhys. Lett.* **13**, 605–610 (1990).
- P. Collet & J.-P. Eckmann. *Iterated Maps on the Interval as Dynamical System*. Birkhäuser, Basel, 1980.
- J. P. Crutchfield & K. Young. Computation at the onset of chaos. Em *Entropy, Complexity and the Physics of Information*, volume VIII de *Santa Fe Inst. of Studies in the Science of Complexity*, páginas 223–269. Addison Wesley, Reading, Mass., 1990.
- I. Csiszár. Information measures: a critical survey. *Proc. 7th Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions and Random Processes* , 73–86 (1974).
- L. Diambra. From Tsallis entropy to statistical distances of order. Não publicado, 1999.
- R. D. Driver. *Ordinary and Delay Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg e Berlin, 1977.
- J.-P. Eckmann. Roads to turbulence in dissipative dynamical systems. *Rev. Mod. Phys.* **53**, 643–654 (1981).
- L. E. El'sgol'ts & Norkin. *Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments*. Academic Press, New York, 1973.

- K. Engelborghs & D. Roose. Numerical computation of stability and detection of hopf bifurcations of steady state solutions of delay differential equations. Technical Report TW 274, Departament of Computer Science, K. U. Leuven, Belgian, 1998.
- J. D. Farmer. Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamic system. *Physica D* **4**, 366–393 (1982).
- M. J. Feigenbaum. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *J. Stat. Phys.* **19**, 25–52 (1978).
- N. F. Ferrara & C. P. C. D. Prado. *Caos: Uma introdução*. Edgard Blücher, São Paulo, 1994.
- C. Flynt. *Tcl/Tk for Real Programers*. Academic Press Professional, Burlington, 1998.
- G. E. Forsythe, M. A. Malcolm & C. B. Moler. *Computer Methods for Mathematical Computations*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1977.
- A. M. Fraser & H. L. Swinney. Independent coordinates for strange attractors from mutual information. *Phys. Rev. A* **33**(2), 1134–1140 (1986).
- C. W. Gear. *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1971.
- L. Glass, A. Beuter & D. Larocque. Time delays, oscillations and chaos in physiological control systems. *Math. Biosc.* **90**, 111–125 (1988).
- L. Glass, A. L. Goldberger, M. Courtemanche & A. Shrier. Nonlinear dynamics, chaos and complex cardiac arrhythmias. Em *Dynamical Chaos , Proc. of a Roy. Soc. Disc. Meeting, Feb. 1987*, páginas 9–26. University Press, Princeton, NJ, 1987.
- L. Glass & M. C. Mackey. Pathological conditions resulting from instabilities in physiological control systems. *Ann. N.Y. Acad. Sci* **316**, 214–235 (1979).

- L. Glass & M. C. Mackey. *From Clocks to Chaos: The Rhythms of Life*. Princeton University Press, Princeton, 1988.
- L. Glass & C. P. Malta. Chaos in multi-looped negative feedback systems. *J. Theor. Biol.* **145**, 217–223 (1990).
- A. L. Goldberger & B. J. West. Chaos in physiology: health or disease? Em *Chaos in Biological Systems*, páginas 1–4. Plenum, New York, 1987.
- P. Grassberger & I. Procaccia. Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica D* **9**, 189–208 (1983a).
- P. Grassberger & I. Procaccia. On the characterization of strange attractors. *Phys. Rev. Lett.* **50**, 346–349 (1983b).
- C. Grotta Ragazzo. *Bifurcações sucessivas no espaço de parâmetros para equações diferenciais com retardamento*. Tese de doutorado, Instituto de Física da USP, 1989.
- J. Gukenheimer & P. Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg e Berlin, 1983.
- A. C. Guyton. *A Textbook of Medical Physiology*. W. B. Saunders, Philadelphia, 1981.
- J. K. Hale. *Theory of Functional Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg e Berlin, 1977.
- J. K. Hale & S. M. V. Lunel. *Introduction to Functional Differential Equations*, volume 99 de *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg e Berlin, 1993.
- K. Ikeda, K. Kondo & O. Akimoto. Successive higher harmonic bifurcations in systems with delayed feedback. *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1467–1470 (1982).

- E. T. Jaymes. Em *Maximum Entropy and Bayesian Methods in Science and Engineering*, volume 1, páginas 25–30. Kluwer Dordrecht, 1988.
- A. Kittel, J. Parisi & K. Pyragas. Delayed feedback control of chaos by self-adapted delay time. *Phys. Lett. A* **198**(5-6), 433–436 (1995).
- V. B. Kolmanovskii & A. Myshkis. *Applied Theory of Functional Differential Equations*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992.
- A. Kolmogorov. Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione. *Inst. Ital. Attuari, Giorn.* **4**, 1–11 (1933).
- Y. Kuang. *Delay Differential Equations With Applications in Population Dynamics*, volume 191 de Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, Boston, San Diego, New York, 1993.
- A. Longtin, J. G. Milton, J. E. Bos & M. C. Mackey. Noise and critical behaviour of the pupil light reflex at oscillation onset. *Phys. Rev.* **A41**, 6992–7005 (1990).
- T. Luzyanina, K. Engelborghs, K. Lust & D. Roose. Computation, continuation and bifurcation analysis of periodic solutions of delay differential equations. *Int. J. of Bifurcation and Chaos* **11**, 2547–2560 (1997).
- M. C. Mackey. Commodity fluctuations: Price dependent delays and nonlinearities as explanatory factors. *J. Econ. Theory* (48), 497–509 (1989).
- M. C. Mackey & U. an der Heiden. The dynamics of recurrent inhibition. *J. Math. Biol.* **19**, 211–225 (1984).
- M. C. Mackey & L. Glass. Oscillation and chaos in physiological control systems. *Science* **197**, 287–289 (1977).

- C. P. Malta & C. Grotta Ragazzo. Bifurcation structure of scalar differential delayed equations. *Int. J. of Bifurcation and Chaos* **1**(3), 657–665 (1991).
- C. P. Malta & M. L. S. Teles. Nonlinear delay differential equations: Comparison of integration methods. Preprint - IFUSP (P-1227) (1996).
- B. Mandelbrot. *The fractal geometry of nature*. Freeman, San Francisco, 1982.
- R. M. May. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature* **261**, 459–467 (1976).
- A. I. Mees. Chaos in feedback systems. Em *Chaos*, páginas 99–110. University Press, Manchester, 1986.
- A. I. Mees & P. E. Rapp. Periodic metabolic systems: oscilations in multiple-loop negative feedback biochemical control networks. *J. math. Biol.* **5**, 99–114 (1978).
- O. Michielin & P. E. Phillipson. Map dynamics study of the lorenz equations. *Int. J. of Bifurcation and Chaos* **7**(2), 373–382 (1997).
- C. R. Oliveira & C. P. Malta. Bifurcations in a class of time delay equations. *Phys. Rev.* **A36**, 3997–4001 (1987).
- J. C. F. Oliveira. Hopf bifurcation for functional differential equations. *Nonlinear Analysis* **4**, 217–229 (1980).
- A. M. Ozorio de Almeida. *Sistemas Hamiltonianos, caos e quantização*. Editora da UNICAMP, Campinas, 1987.
- N. H. Packard, J. P. Crutchfield, J. D. Farmer & R. S. Shaw. Geometry from a time series. *Phys. Rev. Lett.* **45**, 712–716 (1980).

- C. A. H. Paul. Developing a delay differential equation solver. Technical Report 204, University of Manchester, UK, 1991.
- C. A. H. Paul & C. T. H. Baker. Stability boundaries revisited - the Runge-Kutta methods for delay differential equations. Technical Report 205, University of Manchester, UK, 1991.
- J. F. Perez, C. P. Malta & F. A. B. Coutinho. Qualitative analysis of oscillations in isolated populations of flies. *J. Theory. Biol.* **71**, 505–514 (1978).
- W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky & W. T. Vetterling. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- A. Renyi. On measures of entropy and information. *Proc. 4th Berkeley Symposium* **1**, 547–561 (1961).
- D. Ruelle & F. Takens. On the nature of turbulence. *Commun. Math. Phys.* **20**, 167–192 (1971a).
- D. Ruelle & F. Takens. On the nature of turbulence. *Commun. Math. Phys.* **23**, 343–344 (1971b).
- N. Smirnov. On the estimation of the discrepancy between empirical curves of distribution for two independent samples. *Bulletin Mathématique de l'Université de Moscou* **2**, 3–26 (1939).
- J. M. Smith. *Mathematical Ideas in Biology*. Cambridge Press, Cambridge, 1968.
- F. Takens. Detecting strange attractors in turbulence. Em *Dynamical Systems and Turbulence*, volume 898 de *Lecture Notes in Mathematics*, páginas 366–381. Springer-Verlag, New York, Heidelberg e Berlin, 1980.

- J. M. Thompson & H. B. Stewart. *Nonlinear dynamics and chaos*. John Wiley, Chichester, New York, Brisbane, Toronto e Singapore, 1986.
- C. Tsallis. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. J. Stat. Phys. **52**, 479 (1988).
- N. B. Tufillaro, T. A. Abbott & J. P. Reilly. *An experimental approach to nonlinear dynamics and chaos*. Addison-Wesley, Redwood City, 1992.