SBI-IFUSP

305M810T2377

31/01/96

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA

INTERAÇÃO MÉSON-MÉSON NO FORMALISMO FOCK-TANI

Tese de Doutorado
submetida ao Instituto de Física
da Universidade de São Paulo

SÉRGIO SZPIGEL

Orientador: Prof. Dr. GASTÃO INÁCIO KREIN

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Gastão Inácio Krein (IFT-UNESP)(orientador)

Prof^a. Dr^a. Frederique Grassi (IFUSP)

Prof. Dr. Sérgio Novaes (IFT-UNESP)

Prof. Dr. Tobias Frederico (ITA-CTA)

Prof. Dr. Takeshi Kodama (Dept^o. de Física-UFRJ)

SÃO PAULO - BRASIL

1995

Iberê Luiz Caldas

Prof. Iberê Luiz Caldas
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

539.721

5998i

D

ex. 1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Szpigel, Sérgio

Interação méson-méson no formalismo Fock-Tani.
São Paulo, 1995.

Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo.
Instituto de Física. Departamento de Física Experimental
Área de Concentração: Física Nuclear
Orientador: Prof. Dr. Gastão Inácio Krein

Unitermos: 1. Mésons; 2. Quarks e glúons;
3. Teoria de campos; 4. Modelos efetivos.

USP/IF/SBI- 69/95

Para Célia e Luana, com quem estou
construindo meu “espaço ideal”.

"O tempo nunca morre
pois o círculo não é redondo".

Agradecimentos

Um fator importante para a realização de um trabalho como este, que exige doses elevadas de entusiasmo e determinação, é sentir que as pessoas com quem convivemos são especiais.

Quero agradecer ao Prof. Gastão I. Krein, pela orientação dedicada, pela confiança no meu trabalho e, sobretudo, pelo apoio e amizade.

Agradeço ao Dimiter Hadjimichef, ao Jaime S. da Veiga e ao Cláudio Maekawa, pelo clima de amizade e união em que realizávamos nosso trabalho.

Ao Fernando Kokubun, agradeço pela ajuda em computação.

Ao Bruno Sestokas e à Vera Kuntz, meus amigos especiais.

Ao Mário Fittipaldi, por ser uma pessoa fantástica e pela força que me deu em momentos difíceis.

À Miriam Bracco, pela amizade e pelo apoio.

À Célia e à Luana, pelo amor que me dão e pela paciência que tiveram ao longo desses anos, em momentos que eu estava totalmente absorvido pelo meu trabalho, totalmente eufórico com um resultado obtido ou totalmente impaciente com contas que não davam certo.

Resumo

A representação Fock-Tani é um formalismo de teoria de campos para tratar problemas envolvendo simultaneamente partículas compostas e seus constituintes. O formalismo foi originalmente desenvolvido para problemas de física atômica e nesta tese este é estendido para problemas de física hadrônica. Uma mudança de representação é implementada através de um operador unitário tal que estados mesônicos no espaço de Fock compostos por um par quark-anti-quark sejam redescritos em termos de operadores de campo de mésons elementares num espaço de Hilbert estendido. A aplicação do operador unitário a um Hamiltoniano microscópico de quarks leva a um Hamiltoniano efetivo que descreve todos os possíveis processos envolvendo quarks, anti-quarks e mésons. Esse Hamiltoniano efetivo é utilizado para estudar as interações entre mésons em baixa energia num modelo de quarks constituintes onde os quarks e anti-quarks interagem através da troca de um glúon e são confinados por um potencial fenomenológico. Este mesmo Hamiltoniano efetivo é empregado para estudar as propriedades de estados ligados mesônicos num meio a temperatura finita. Apresentamos também uma generalização do formalismo Fock-Tani para modelos de quarks sofisticados.

Abstract

The Fock-Tani representation is a field theoretic formalism to deal with problems involving simultaneously composite particles and their constituents. The formalism was originally developed for problems in atomic physics and in this thesis it is extended to problems in hadron physics. A change of representation is implemented by means of a unitary operator such that Fock-space bound meson states composed by a quark-anti-quark pair are redescribed by elementary-meson field operators in an extended Hilbert space. Application of the unitary operator on a microscopic quark Hamiltonian gives rise to an effective Hamiltonian which describes all possible processes involving quarks, anti-quarks, and mesons. This effective Hamiltonian is used to study meson interactions at low energies in a constituent quark model in which quarks and anti-quarks interact through one-gluon-exchange and are confined by a phenomenological potential. This same effective Hamiltonian is employed to study the properties of meson bound states in a medium at finite temperature. We also present a generalization of the Fock-Tani formalism for sophisticated quark models.

Índice

1	Introdução	3
2	Uma Breve Revisão sobre Alguns Métodos para Tratar a Interação Méson-Méson	9
2.1	O "Resonating Group Method" (RGM).	9
2.2	"Quark-Born Diagram Method" (QBD).	14
2.3	A Função de Green para um Sistema $(q, \bar{q}, q, \bar{q})$.	18
3	O Formalismo Fock-Tani	22
3.1	A Representação Fock-Tani.	22
3.2	A Transformação Fock-Tani dos Operadores.	28
3.3	O Hamiltoniano na representação Fock-Tani.	37
3.4	Formalismo Fock-Tani e o "Resonating Group Method".	53
3.5	Exemplo: Potencial Efetivo Méson-Méson para Interação Microscópica tipo Oscilador Harmônico.	56
4	Espalhamento Méson-Méson no Formalismo Fock-Tani	72
4.1	A Amplitude de Espalhamento	72
4.2	O Hamiltoniano Microscópico.	76
4.3	O Espalhamento π - π e K-K.	78
4.4	O Espalhamento J/ψ - π .	87
5	Potencial Méson-Méson Fock-Tani para Sistemas de Muitos Corpos	108
5.1	As Funções de Green para Sistemas de Muitos Corpos.	108

5.2	A Equação de Movimento para a Função de Green de um Sistema de Mésons Interagindo através do Potencial Efetivo Méson-Méson Fock-Tani.	113
5.3	A Função de Green para o Potencial Efetivo Méson-Méson Fock-Tani na Aproximação de Hartree-Fock.	117
5.4	O Espalhamento Méson-Méson num Gás de Mésons.	123
6	Representação Fock-Tani Generalizada	131
7	Conclusão	145
	Apêndices	148
A	Redução não-relativística da troca de um glúon.	148
B	Função de Onda do Méson.	156
C	Determinação de O_α .	162
D	Elementos de Matriz do Potencial Fock-Tani.	164
E	Variáveis de Mandelstam e Cinemática Relativística.	172
F	Matrizes	175
	Referências Bibliográficas	178

Capítulo 1

Introdução

Os progressos da física de partículas observados durante as últimas três décadas são impressionantes. Várias descobertas experimentais importantes estabeleceram firmemente a existência do mundo sub-nuclear de quarks e glúons, as partículas constituintes dos hádrons (bárions e mésons), cuja dinâmica é governada pelas interações fortes.

Acredita-se que a teoria fundamental das interações fortes seja a teoria de gauge não-abeliana renormalizável, conhecida como Cromodinâmica Quântica (QCD) [1]. Assim, espera-se que todos os fenômenos hadrônicos, e em particular a interação hádron-hádron, possam ser derivados a partir da interação entre quarks e glúons. Um dos aspectos mais impressionantes da QCD é a liberdade assintótica, a qual prevê que as interações hadrônicas tornam-se fracas para energias suficientemente altas [2]. Devido a essa propriedade, pode-se utilizar a teoria de perturbação na constante de acoplamento quark-glúon para estudar certos processos de alta energia. De modo geral, não se observa grandes discrepâncias entre os experimentos e as previsões da QCD perturbativa. Por outro lado, processos envolvendo energias mais baixas são caracterizados por acoplamento forte, de modo que a QCD perturbativa não pode ser aplicada. Um fenômeno tipicamente não-perturbativo da QCD é o confinamento dos quarks e glúons no interior dos hádrons. Espera-se que esses aspectos possam ser tratados através da solução numérica das equações da QCD formuladas numa rede do espaço-tempo, utilizando-se supercomputadores. No entanto, a tecnologia atual de supercomputadores não permite que redes suficientemente grandes sejam empregadas e por isso os resultados obtidos até os dias de hoje não são suficientemente precisos para o entendimento desta fase da QCD. Portanto, a construção de modelos e o emprego de

métodos analíticos ainda são ferramentas essenciais para um entendimento detalhado da QCD no regime não-perturbativo. Nesse sentido, modelos efetivos de quarks inspirados na QCD desempenham um papel importante no estudo das propriedades dos hádrons. Vários modelos desse tipo têm sido propostos com o intuito de descrever a estrutura interna e as propriedades estáticas dos hádrons, tais como o “MIT bag” [3], o “soliton bag” [4], [5], o “little bag” [6], o “cloudy-bag” [7] e os modelos potenciais [8], [9], [10]. Esses modelos diferem, basicamente, na fenomenologia utilizada para introduzir o confinamento dos quarks.

Seguindo o sucesso na descrição das propriedades de um único hádron, a aplicação dos modelos de quarks foi estendida ao estudo das interações hadrônicas. Desde os trabalhos pioneiros de Liberman [11] e DeTar [12] utilizando, respectivamente, um potencial não-relativístico de quarks e o “MIT bag”, vários métodos têm sido propostos, utilizando diferentes modelos. Uma das técnicas mais utilizadas é o “Resonating Group Method”, inicialmente proposto por Wheeler [13] no contexto de estrutura nuclear e posteriormente utilizado por Ribeiro [14], Oka e Yazaki [15] e Warke e Shankar [16] para descrever as interações entre clusters de quarks. Uma revisão destes cálculos foi feita por Shimizu [17]. Outra técnica é o método variacional, utilizado por Maltman e Isgur [18] e Weinstein [19]. A interação núcleon-núcleon tem sido estudada com bastante vigor devido à sua importância na física nuclear.

A interação entre mésons, por sua vez, também tem recebido atenção, mas em menor intensidade. Um dos primeiros trabalhos foi o de Jaffe e Low [20] que introduziram o formalismo da matriz-P para o espalhamento hádron-hádron, aplicando o mesmo na espectroscopia dos mésons. No regime de alta energia, o espalhamento méson-méson na QCD perturbativa foi estudado por Brodsky e Lepage [21], utilizando o formalismo do “cone de luz” com um modelo de troca de constituintes. Em baixa energia, o espalhamento méson-méson foi estudado por Weinstein e Isgur [22], [23], utilizando o método variacional e um modelo de quarks não-relativístico. Utilizando também um modelo de quarks não-relativístico, potenciais efetivos méson-méson para vários canais foram obtidos por Swanson [24], através do cálculo da matriz-T em primeira ordem na aproximação de Born. O potencial méson-méson também foi obtido por Blaschke e Ropke [25], utilizando funções

de Green termodinâmicas de quatro quarks.

Outro método, introduzido por Barnes e Swanson [26], é o chamado “Quark-Born Diagram” (QBD), que utiliza diagramas de linhas de quarks e uma interação de troca de um glúon seguida da troca de constituintes entre os hádrons. Esse método tem sido aplicado a vários processos hadrônicos [27]-[30]. Recentemente, o QBD foi utilizado por Quack, Blaschke e Ropke [31] no estudo da dissociação do “charmonium” na matéria hadrônica quente.

Apesar de vários métodos diferentes terem sido utilizados no estudo dos graus de liberdade de quarks e glúons nos hádrons, ainda não existe um método que permita tratar convenientemente um sistema contendo simultaneamente as partículas compostas (hádrons) e os seus constituintes (quarks e glúons). Em outras áreas da física existem exemplos de sistemas de muitos corpos onde os graus de liberdade internos das partículas compostas não podem ser desprezados, tais como supercondutividade em metais, plasmas parcialmente ionizados e colisões atômicas.

Apresentamos nesta tese um método diferente, conhecido como Formalismo Fock-Tani (FT), que consideramos adequado para tratar as interações hadrônicas em baixa energia e o problema de muitos corpos nuclear em termos dos graus de liberdade de quarks e glúons. O formalismo Fock-Tani foi desenvolvido, originalmente, na física atômica, para tratar problemas em que os graus de liberdade internos dos átomos desempenham um papel importante. Esse formalismo foi inventado independentemente por Girardeau [32] e Vorob'ev e Khomkin [33], tendo sido utilizado com sucesso por Girardeau e colaboradores em várias áreas da física atômica [34]-[43]. O método é baseado na idéia de mapeamento entre o espaço de Hilbert físico e um espaço de Hilbert “ideal”, empregando-se o formalismo de segunda quantização, e consiste numa generalização de uma transformação utilizada por Tani [44] em 1960 para estudar o espalhamento de uma partícula por um potencial com um estado ligado. O formalismo foi chamado por Girardeau de “representação Fock-Tani”. O método também tem similaridades com a técnica utilizada por Dyson [45] para tratar o modelo do ferromagneto de Heisenberg e o método utilizado por Bohm e Pines [46] para tratar os modos coletivos nos núcleos.

A idéia básica do formalismo Fock-Tani é uma mudança de representação, tal que as

partículas compostas são “mapeadas” em partículas “ideais”, sendo estas redescritas por operadores de criação e aniquilação de partículas “ideais”. Partimos da representação no espaço de Fock, onde as partículas compostas (hádrons) são descritas por operadores de criação e aniquilação dados em termos dos operadores dos constituintes elementares (quarks, anti-quarks e glúons). Os operadores dos constituintes satisfazem relações de comutação ou anti-comutação canônicas. Os operadores das partículas compostas em geral não satisfazem relações de (anti)comutação canônicas, de modo que os métodos da teoria quântica de campos, tais como o ordenamento de Wick e as funções de Green, não podem ser aplicados trivialmente. Introduzimos, então, operadores de criação e aniquilação de partículas compostas “ideais”, que atuam em um espaço de Fock estendido. Esse espaço é o produto direto “graduado” do espaço de Fock original e do espaço de estados “ideais”. Os operadores ideais têm os mesmos números quânticos dos operadores das partículas compostas originais, mas satisfazem, por definição, relações de (anti)comutação canônicas. Construímos, em seguida, um operador unitário que transforma os estados de uma partícula composta em estados de uma partícula ideal. Aplicando esse operador unitário ao Hamiltoniano microscópico, ou a outros observáveis do sistema expressos em termos dos operadores dos constituintes elementares, obtemos os operadores equivalentes contendo os operadores de partículas ideais. Na representação Fock-Tani, uma vez que todos os operadores de criação e aniquilação satisfazem relações de (anti)comutação canônicas, os métodos convencionais da teoria quântica de campos podem ser diretamente utilizados. Essa mudança de representação realiza num certo sentido a idéia de “quase-partícula” de Weinberg [47], utilizada para melhorar a convergência da série de Born para o espalhamento na presença de estados ligados. No formalismo da quase-partícula, os estados ligados são redescritos por partículas elementares fictícias e, para não mudar a física do problema, o potencial deve ser modificado de tal maneira que este não forme mais os estados ligados.

Existem outras técnicas de mapeamento para tratar correlações entre pares de férmions, utilizadas principalmente na descrição de modos coletivos em núcleos. Alguns exemplos são a representação de Holstein-Primakoff [48], a expansão bosônica de Belyaev e Zelevinskii [49] e o mapeamento de Marumori [50]. As referências [51]-[52] apresentam discussões detalhadas a respeito dos sucessos e limitações a respeito destas técnicas. Na física

hadrônica, só muito recentemente essas técnicas estão começando a ser utilizadas [53], [54]. Uma diferença básica entre estes métodos e o Fock-Tani é que enquanto este último trata do mapeamento do estado de uma partícula composta num estado de uma partícula ideal, os primeiros tratam do mapeamento de um estado de muitas partículas compostas num estado de muitas partículas ideais.

Esta tese é parte de um programa maior, em que o formalismo atômico original é generalizado para a física hadrônica no contexto de modelos de quarks constituintes [55]-[58]. Nesta tese trata-se da generalização para as interações entre mésons. No Capítulo 2, apresentamos alguns dos métodos utilizados para descrever a interação méson-méson em termos da estrutura de quarks: o “Resonating Group Method”, o “Quark-Born Diagram Method” e o método de Funções de Green de quatro quarks. No Capítulo 3, descrevemos o formalismo Fock-Tani para mésons, considerando estes como estados ligados de um quark e um antiquark. São apresentados os princípios gerais do formalismo, a transformação dos operadores e a transformação do Hamiltoniano microscópico. Apresentamos também uma comparação entre o formalismo Fock-Tani e o “Resonating Group Method” (RGM). Para tal, reformulamos as equações do RGM empregando a formulação em segunda quantização. No Capítulo 4, aplicamos o formalismo Fock-Tani ao espalhamento méson-méson. Obtemos os elementos de matriz para o potencial méson-méson Fock-Tani, utilizando um Hamiltoniano microscópico no modelo de quarks não-relativístico, com interação dada por um termo de confinamento gaussiano e um termo de troca de um glúon composto por um termo orbital do tipo Coulomb e um termo hiperfino de contato spin-spin. São calculadas as secções de choque e deslocamentos de fase para os processos de espalhamento elástico pión-pión e káon-káon. Também são calculadas as secções de choque para os processos de espalhamento inelástico J/ψ -pión em estados assintóticos finais de quarks e antiquarks correlacionados em mésons e em estados assintóticos finais de quarks e antiquarks “livres”. No Capítulo 5, o formalismo Fock-Tani é aplicado a um sistema de muitos corpos. São descritas as funções de Green de um méson e a solução de sua equação de movimento na aproximação de Hartree-Fock utilizando o potencial efetivo méson-méson Fock-Tani. Esse resultado é utilizado para estudar as propriedades de um méson num gás quente de mésons. No Capítulo 6, motivamos a generalização do formalismo Fock-Tani para estados

hadrônicos com número indefinido de quarks, anti-quarks e glúons. Essa generalização permite que o formalismo seja estendido para modelos mais sofisticados. Esse formalismo generalizado é aplicado para um sistema de quarks, anti-quarks e glúons, considerando estados ligados contendo uma componente quark-antiquark e uma componente com um glúon acoplado ao par quark-antiquark. No Capítulo 7 são apresentadas as conclusões e perspectivas futuras. A tese também apresenta seis Apêndices. No Apêndice A é feita a redução não-relativística da troca de um glúon. No Apêndice B são construídas em detalhe as funções de onda internas dos mésons. No Apêndice C mostramos a construção detalhada do gerador da Transformação Fock-Tani. No Apêndice D, são apresentados os elementos de matriz do Potencial Fock-Tani em ordem mais baixa. No Apêndice E são descritas as variáveis de Mandelstam. No Apêndice F, apresentamos as matrizes de Pauli, Dirac e Gell-Mann utilizadas nesta tese.

Capítulo 2

Uma Breve Revisão sobre Alguns Métodos para Tratar a Interação Méson-Méson

Este capítulo apresenta uma breve revisão sobre alguns métodos que têm sido empregados recentemente na literatura para tratar a interação méson-méson. Consideramos o “Resonating Group Method” (RGM), o “Quark Born Diagram” (QBD) e o método das funções de Green. Estes métodos são apresentados com o objetivo de comparar os resultados para a interação méson-méson obtidos com estes métodos e os obtidos com o formalismo Fock-Tani. Esta comparação é instrutiva no que se refere ao estudo de truncamentos e aproximações empregados nos diversos métodos.

2.1 O “Resonating Group Method” (RGM).

O RGM é um método utilizado na solução de problemas envolvendo interações entre partículas compostas, inicialmente proposto por Wheeler [13] no contexto da estrutura nuclear. Nesta secção, descrevemos a aplicação do método no caso de dois mésons, α e β , cada um composto por um quark e um antiquark. Seguimos, basicamente, as Ref. [15] e [24].

Consideremos um sistema de dois mésons, compostos por quarks e antiquarks de massas iguais, α ($q_1\bar{q}_3$) e β ($q_2\bar{q}_4$). Sejam $\mathbf{r}_i$ ($i = 1, 4$) as coordenadas dos quarks e antiquarks. As coordenadas relativas internas para cada “cluster”, ξ_α e ξ_β , e a coordenada relativa entre os dois “clusters”, $\mathbf{R}_{\alpha\beta}$, são dadas por:

$$\xi_\alpha = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3 \quad (2.1)$$

$$\xi_\beta = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4 \quad (2.2)$$

$$\mathbf{R}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3) - \frac{1}{2}(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_4) . \quad (2.3)$$

O estado de espalhamento de dois mésons correspondente é descrito pela função de onda RGM, que pode ser escrita na forma

$$\mathcal{A}\Psi(\xi_\alpha, \xi_\beta, \mathbf{R}_{\alpha\beta}) = \mathcal{A} \left[C_{\alpha\beta} \phi_\alpha(\xi_\alpha) \phi_\beta(\xi_\beta) \chi(\mathbf{R}_{\alpha\beta}) \right] , \quad (2.4)$$

onde ϕ_α e ϕ_β são, respectivamente, as funções de onda espaciais dos mésons α e β , χ é a “função de onda relativa” entre os dois “clusters”, $C_{\alpha\beta}$ é um fator que contém a parte correspondente às funções de onda de spin, sabor e cor. O operador de anti-simetrização, $\mathcal{A}$, é definido por

$$\mathcal{A} = 1 - \mathcal{A}' = 1 - \sum_{i \in \alpha} \sum_{j \in \beta} P_{ij} , \quad (2.5)$$

onde P_{ij} é o operador de permutação das partículas i e j .

Consideremos uma interação entre quarks do tipo de dois corpos, tal que o Hamiltoniano microscópico é dado por:

$$H = K + V , \quad (2.6)$$

$$K = \sum_i \left(\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i} + m_i \right) - K_G \quad (2.7)$$

$$V = \sum_{i>j} V_{ij} \quad (2.8)$$

onde $m_i = m_q$ ($i = 1, 4$) são as massas dos quarks e antiquarks e K_G é a energia cinética do centro de massa.

Dado o Hamiltoniano microscópico, H , e conhecidas as funções de onda dos mésons, a equação de movimento para a função χ é obtida utilizando-se o princípio variacional,

$$\frac{\delta}{\delta \chi^\dagger} \int d\xi_\alpha d\xi_\beta \Psi^\dagger(\xi_\alpha, \xi_\beta, \mathbf{R}_{\alpha\beta}) (H - E) \mathcal{A}\Psi(\xi_\alpha, \xi_\beta, \mathbf{R}_{\alpha\beta}) = 0 , \quad (2.9)$$

onde E é a energia total do sistema de dois mésons no centro de massa.

Assim, obtemos

$$\int d\xi_\alpha d\xi_\beta \left[\phi_\beta^\dagger(\xi_\beta) \phi_\alpha^\dagger(\xi_\alpha) C_{\alpha\beta}^* \right] (H - E) \mathcal{A} \left[C_{\alpha\beta} \phi_\alpha(\xi_\alpha) \phi_\beta(\xi_\beta) \chi(\mathbf{R}_{\alpha\beta}) \right] = 0. \quad (2.10)$$

Definimos, então, o Hamiltoniano RGM, $H(\mathbf{R}', \mathbf{R})$, e o “kernel de normalização”, $N(\mathbf{R}', \mathbf{R})$, dados por

$$H(\mathbf{R}', \mathbf{R}) = K(\mathbf{R}', \mathbf{R}) + V(\mathbf{R}', \mathbf{R}) \quad (2.11)$$

$$K(\mathbf{R}', \mathbf{R}) = K^{dir}(\mathbf{R}) \delta(\mathbf{R}' - \mathbf{R}) - K^{ex}(\mathbf{R}', \mathbf{R}) \quad (2.12)$$

$$V(\mathbf{R}', \mathbf{R}) = V^{dir}(\mathbf{R}) \delta(\mathbf{R}' - \mathbf{R}) - V^{ex}(\mathbf{R}', \mathbf{R}) \quad (2.13)$$

$$N(\mathbf{R}', \mathbf{R}) = N^{dir}(\mathbf{R}) \delta(\mathbf{R}' - \mathbf{R}) - N^{ex}(\mathbf{R}', \mathbf{R}), \quad (2.14)$$

onde

$$\begin{pmatrix} K^{dir} \\ V^{dir} \\ N^{dir} \end{pmatrix}(\mathbf{R}) = \int d\xi_\alpha d\xi_\beta d\mathbf{R}_{\alpha\beta} \left[\phi_\beta^\dagger(\xi_\beta) \phi_\alpha^\dagger(\xi_\alpha) C_{\alpha\beta}^* \right] \times \begin{pmatrix} K \\ V \\ 1 \end{pmatrix} \delta^{(3)}(\mathbf{R} - \mathbf{R}_{\alpha\beta}) \left[C_{\alpha\beta} \phi_\alpha(\xi_\alpha) \phi_\beta(\xi_\beta) \right], \quad (2.15)$$

$$\begin{pmatrix} K^{ex} \\ V^{ex} \\ N^{ex} \end{pmatrix}(\mathbf{R}', \mathbf{R}) = \int d\xi_\alpha d\xi_\beta d\mathbf{R}_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\mathbf{R}' - \mathbf{R}_{\alpha\beta}) \left[\phi_\beta^\dagger(\xi_\beta) \phi_\alpha^\dagger(\xi_\alpha) C_{\alpha\beta}^* \right] \times \begin{pmatrix} K \\ V \\ 1 \end{pmatrix} \mathcal{A}' \left[C_{\alpha\beta} \phi_\alpha(\xi_\alpha) \phi_\beta(\xi_\beta) \delta^{(3)}(\mathbf{R} - \mathbf{R}_{\alpha\beta}) \right]. \quad (2.16)$$

Utilizando essas definições, obtemos a equação RGM

$$\int d\mathbf{R} \mathcal{L}(\mathbf{R}', \mathbf{R}) \chi(\mathbf{R}) = 0, \quad (2.17)$$

com

$$\mathcal{L}(\mathbf{R}', \mathbf{R}) = H(\mathbf{R}', \mathbf{R}) - EN(\mathbf{R}', \mathbf{R})$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[-\frac{1}{2\mu_{13;24}} \nabla_{\mathbf{R}}^2 + V_{rel}^{dir}(\mathbf{R}) - E_{rel} \right] \delta^{(3)}(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \\
 &- [K^{ex}(\mathbf{R}', \mathbf{R}) + V^{ex}(\mathbf{R}', \mathbf{R}) - EN^{ex}(\mathbf{R}', \mathbf{R})] , \quad (2.18)
 \end{aligned}$$

onde $\mu_{13;24}$ é a “massa reduzida” do sistema de dois mésons, dada por

$$\mu_{13;24} = \frac{(m_1 + m_3)(m_2 + m_4)}{(m_1 + m_3) + (m_2 + m_4)} = m_q . \quad (2.19)$$

A interação direta entre os mésons, V_{rel}^{dir} , é dada por

$$\begin{aligned}
 V_{rel}^{dir}(\mathbf{R}) &= \int d\xi_\alpha d\xi_\beta d\mathbf{R}_{\alpha\beta} \left[\phi_\beta^\dagger(\xi_\beta) \phi_\alpha^\dagger(\xi_\alpha) C_{\alpha\beta}^* \right] \\
 &\times \sum_{i \in \alpha} \sum_{j \in \beta} V_{ij} \delta^{(3)}(\mathbf{R} - \mathbf{R}_{\alpha\beta}) \left[C_{\alpha\beta} \phi_\alpha(\xi_\alpha) \phi_\beta(\xi_\beta) \right] , \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

A energia relativa dos dois “clusters”, E_{rel} , é dada por

$$E_{rel} = E - E_{int} , \quad (2.21)$$

onde E_{int} é a energia interna total do sistema de dois mésons, dada por

$$E_{int} = \epsilon_\alpha + \epsilon_\beta = \frac{\mathbf{P}_\alpha^2}{4m_q} + m_\alpha + \frac{\mathbf{P}_\beta^2}{4m_q} + m_\beta , \quad (2.22)$$

onde $\mathbf{P}_\alpha$ e $\mathbf{P}_\beta$ denotam os momentos e m_α e m_β denotam as energias internas (massas) dos mésons. Uma vez que as ϕ 's são auto-funções do Hamiltoniano, podemos escrever

$$K^{ex}(\mathbf{R}', \mathbf{R}) + V^{ex}(\mathbf{R}', \mathbf{R}) = H_{int} N^{ex}(\mathbf{R}', \mathbf{R}) + \mathcal{K}^{ex}(\mathbf{R}', \mathbf{R}) + \mathcal{V}^{ex}(\mathbf{R}', \mathbf{R}) , \quad (2.23)$$

onde

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}^{ex}(\mathbf{R}', \mathbf{R}) &= \int d\xi_\alpha d\xi_\beta d\mathbf{R}_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\mathbf{R}' - \mathbf{R}_{\alpha\beta}) \left[\phi_\beta^\dagger(\xi_\beta) \phi_\alpha^\dagger(\xi_\alpha) C_{\alpha\beta}^* \right] \\
 &\times \left(-\frac{\nabla_{\mathbf{R}_{\alpha\beta}}^2}{2\mu_{13;24}} \right) \mathcal{A}' \left[C_{\alpha\beta} \phi_\alpha(\xi_\alpha) \phi_\beta(\xi_\beta) \delta^{(3)}(\mathbf{R} - \mathbf{R}_{\alpha\beta}) \right] . \quad (2.24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{ex}(\mathbf{R}', \mathbf{R}) &= \int d\xi_\alpha d\xi_\beta d\mathbf{R}_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\mathbf{R}' - \mathbf{R}_{\alpha\beta}) \left[\phi_\beta^\dagger(\xi_\beta) \phi_\alpha^\dagger(\xi_\alpha) C_{\alpha\beta}^* \right] \\ &\times \sum_{i \in \alpha} \sum_{j \in \beta} V_{ij} \mathcal{A}' \left[C_{\alpha\beta} \phi_\alpha(\xi_\alpha) \phi_\beta(\xi_\beta) \delta^{(3)}(\mathbf{R} - \mathbf{R}_{\alpha\beta}) \right]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{R}', \mathbf{R}) &= \left[-\frac{1}{2\mu_{13;24}} \nabla_{\mathbf{R}}^2 + V_{rel}^{dir}(\mathbf{R}) - E_{rel} \right] \delta^{(3)}(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \\ &- [\mathcal{K}^{ex}(\mathbf{R}', \mathbf{R}) + \mathcal{V}^{ex}(\mathbf{R}', \mathbf{R}) - E_{rel} N^{ex}(\mathbf{R}', \mathbf{R})], \end{aligned} \quad (2.26)$$

Escrevemos a Eq. (2.17) numa forma adequada para problemas de espalhamento,

$$(\nabla_{\mathbf{R}}^2 + k_{rel}^2) \chi(\mathbf{R}) = 2\mu_{13;24} \int d\mathbf{R}' U(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \chi(\mathbf{R}') \quad (2.27)$$

onde

$$k_{rel}^2 = 2\mu_{13;24} E_{rel}, \quad (2.28)$$

$$U(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = V_{rel}^{dir}(\mathbf{R}) - \mathcal{K}^{ex}(\mathbf{R}', \mathbf{R}) - \mathcal{V}^{ex}(\mathbf{R}', \mathbf{R}) + E_{rel} N^{ex}(\mathbf{R}', \mathbf{R}). \quad (2.29)$$

Esta equação pode ser escrita na forma de uma equação de Lippmann-Schwinger,

$$\chi(\mathbf{R}) = \chi_0(\mathbf{R}) + 2\mu_{13;24} \int d\mathbf{R}' G^0(\mathbf{R}, \mathbf{R}') U(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \chi(\mathbf{R}'), \quad (2.30)$$

onde G^0 é a função de Green livre para o operador $(\nabla_{\mathbf{R}}^2 + k_{rel}^2)$. Para χ_0 tomamos uma onda plana,

$$\chi_0(\mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i\mathbf{k}_{rel} \cdot \mathbf{R}}. \quad (2.31)$$

Obtemos, assim, uma equação auto-consistente para a função de onda relativa χ , cuja solução iterativa corresponde à série de Born completa [24]. Para o potencial tipo oscilador harmônico, essa equação pode ser resolvida exatamente [24].

É importante observar que a função χ obtida não pode ser interpretada como a função de onda relativa usual dos dois “clusters”, devido à presença do “kernel de normalização”,

N , na Eq. (2.18). Isto é, a função χ não está normalizada da maneira usual em mecânica quântica. Definimos [15] a função de onda “renormalizada”,

$$\chi_R(\mathbf{R}) = \int d\mathbf{R}' N^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \chi(\mathbf{R}'). \quad (2.32)$$

A função χ_R é normalizada da maneira usual, e satisfaz uma equação do tipo Schrodinger ordinária,

$$\int d\mathbf{R}' \mathcal{H}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \chi_R(\mathbf{R}') = E \chi_R(\mathbf{R}), \quad (2.33)$$

onde $\mathcal{H}$ é o Hamiltoniano “renormalizado”, definido por

$$\mathcal{H}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \int d\mathbf{R}'' d\mathbf{R}''' N^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}'') H(\mathbf{R}'', \mathbf{R}''') N^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}''', \mathbf{R}'), \quad (2.34)$$

de modo que pode ser interpretada como a função de onda relativa dos dois “clusters”.

A renormalização da função relativa no RGM tem implicações importantes, e permite entender certo truncamento nos formalismos QBD e Fock-Tani. Estes aspectos serão discutidos com mais detalhes no decorrer desta tese.

2.2 “Quark-Born Diagram Method” (QBD).

O “Quark-Born Diagram Method” (QBD), desenvolvido por Barnes e Swanson, é um formalismo que utiliza diagramas de troca de quarks para calcular amplitudes de espalhamento hádron-hádron na aproximação de Born. O método consiste na representação diagramática da interação de troca de um glúon perturbativa seguida pelo rearranjo dos quarks em estados finais (hádrons) singletos de cor. Esse mecanismo de interação corresponde ao modelo de troca de constituintes [21] acrescido da troca de um glúon. Dessa forma, dado o Hamiltoniano de quarks e a função de onda dos hádrons, as amplitudes de espalhamento podem ser escritas diretamente dos diagramas de espalhamento. Esse formalismo tem sido utilizado para descrever os processos de espalhamento núcleon-núcleon [29], méson-méson [26] e núcleon-méson [30] em baixa energia. Nesta seção descrevemos a aplicação do método no espalhamento méson-méson, seguindo a Ref. [26].

Consideremos o espalhamento de dois mésons,

$$A + B \rightarrow C + D. \quad (2.35)$$

Utilizamos um Hamiltoniano microscópico da forma:

$$H = \sum_i -\frac{\nabla^2}{2m_i} + \sum_{i<j} H_{ij} , \quad (2.36)$$

onde H_{ij} é o Hamiltoniano de interação,

$$H_{ij} = \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{F}_j \left[-\frac{3b_s}{4} r_{ij} + \frac{\alpha_s}{r_{ij}} - \frac{8\pi\alpha_s}{3m_i m_j} \delta^{(3)}(\mathbf{r}_{ij}) \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j}{2} \right) \right] \quad (2.37)$$

Podemos escrever esse Hamiltoniano na forma

$$H = H_0(A, B) + H_I(A, B) . \quad (2.38)$$

O termo $H_0(A, B)$ é dado por

$$H_0(A, B) = H_0(A) + H_0(B) , \quad (2.39)$$

onde

$$H_0(A) = \sum_{i \in A} -\frac{\nabla^2}{2m_i} + \sum_{i<j(i,j \in A)} H_{ij} \quad (2.40)$$

é o termo livre, que contém as interações dentro de cada méson inicial.

O termo $H_I(A, B)$ é o termo de interação, que contém as interações entre os mésons iniciais e é dado por:

$$H_I(A, B) = \sum_{i \in A, j \in B} H_{ij} . \quad (2.41)$$

O estado inicial $|A, B\rangle$ é, por definição, auto-estado de $H_0(A, B)$:

$$\begin{aligned} H_0(A, B)|A, B\rangle &= (E_A + E_B)|A, B\rangle \\ &= \left(m_A + \frac{\mathbf{P}_A^2}{2m_A} + m_B + \frac{\mathbf{P}_B^2}{2m_B} \right) |A, B\rangle . \end{aligned} \quad (2.42)$$

Os estados assintóticos $|A(\mathbf{P}, S)\rangle$ de um méson de momento $\mathbf{P}$ e spin S satisfazem a equação de Schrodinger

$$H_0(A)|A(\mathbf{P}, S)\rangle = E_0(A)|A(\mathbf{P}, S)\rangle \quad (2.43)$$

e podem ser escritos na forma

$$|A(\mathbf{P}, S)\rangle = a_{A(\mathbf{P}, S)}^\dagger |0\rangle , \quad (2.44)$$

onde $a_{A(\mathbf{P},S)}^\dagger$ é o operador de criação de um méson dado por

$$a_{A(\mathbf{P},S)}^\dagger = \sum_{c,\bar{c}} \sum_{s,\bar{s}} \int dk d\bar{k} \frac{\delta_{c\bar{c}}}{\sqrt{3}} \chi_S^{s\bar{s}} \delta^{(3)}(\mathbf{P} - \mathbf{k} - \bar{\mathbf{k}}) \Phi_A(\mathbf{k} - \bar{\mathbf{k}}) q_{\mathbf{k},s,c}^\dagger \bar{q}_{\bar{\mathbf{k}},\bar{s},\bar{c}}^\dagger, \quad (2.45)$$

onde $c, \bar{c}, s, \bar{s}, \mathbf{k}$ e $\bar{\mathbf{k}}$ são os índices de cor e spin e os momentos do quark e do antiquark, $\chi_S^{s\bar{s}}$ é a função de onda de spin do méson de spin S , Φ_A é a função de onda espacial relativa do méson e $q_{\mathbf{k},s,c}^\dagger$ e $\bar{q}_{\bar{\mathbf{k}},\bar{s},\bar{c}}^\dagger$ são os operadores de criação do quark e do antiquark.

Consideramos os estados de um méson normalizados na forma

$$\langle A(\mathbf{P}', S') | A(\mathbf{P}, S) \rangle = \delta_{S'S} \delta^{(3)}(\mathbf{P}' - \mathbf{P}). \quad (2.46)$$

O Hamiltoniano definido anteriormente corresponde à forma “prior”. Podemos definir o Hamiltoniano também na forma “post”,

$$H = H_0(C, D) + H_I(C, D). \quad (2.47)$$

Se os estados assintóticos são auto-estados dos respectivos Hamiltonianos livres, pode-se mostrar que as duas definições levam à mesma amplitude de espalhamento em aproximação de Born. Em caso contrário, aparecem as discrepâncias “post-prior”.

A amplitude de espalhamento em ordem mais baixa na aproximação de Born é dada por

$$S_{fi} = \delta_{fi} - 2\pi i \delta(E_f - E_i) \langle C, D | H_I(A, B) | A, B \rangle, \quad (2.48)$$

onde o elemento de matriz do Hamiltoniano de interação é dado por

$$\langle C, D | H_I(A, B) | A, B \rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i) h_{fi}, \quad (2.49)$$

com $\mathbf{P}_f = \mathbf{P}_C + \mathbf{P}_D$ e $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_A + \mathbf{P}_B$.

Existem quatro diagramas de Born que contribuem para a amplitude de espalhamento. Esses diagramas correspondem aos quatro tipos de interação possíveis entre os constituintes do méson A e do méson B com troca de um quark entre os mesmos. Esses diagramas são mostrados na Fig. (2.1). Para cada méson, a linha superior corresponde ao quark e a linha inferior ao antiquark. As linhas tracejadas correspondem ao potencial efetivo de troca de um glúon.

Figura 2.1: Diagramas que contribuem para o espalhamento méson-méson utilizados no QBD.

Os dois primeiros são chamados de “diagramas de captura”, uma vez que o par quark-antiquark interagente espalha-se no mesmo méson final. Os dois últimos são chamados “diagramas de transferência”, uma vez que o par quark-quark ou antiquark-antiquark interagente troca momento mas espalha-se em mésons diferentes.

O elemento de matriz h_{fi}^j correspondente a cada diagrama é dado pelo produto de cinco fatores:

$$h_{fi}^j = S I_{\text{spin}}^j I_{\text{sabor}}^j I_{\text{cor}}^j I_{\text{espacial}}^j. \quad (2.50)$$

O fator de fase S , é dado por

$$S = (-1)^{N_x}, \quad (2.51)$$

onde N_x é o número de cruzamentos de linhas fermiônicas no diagrama. Para os diagramas considerados $N_x = 3$, de modo que $S = -1$ para todos os diagramas.

As regras descritas na Ref. [26], para a obtenção dos fatores de spin, sabor, cor a partir dos diagramas, são análogas às apresentadas no Apêndice D desta tese e conduzem aos

mesmos resultados.

Os fatores espaciais são dados por

$$\begin{aligned}
 I_{esp}^{cap1} &= \int da \, dc \, \Phi_A(2a - A) \Phi_B(2a - A - 2C) V(|a - c|) \Phi_C^*(2c - C) \Phi_D^*(2a - 2A - C) \\
 I_{esp}^{cap2} &= \int da \, dd \, \Phi_A(2a - A) \Phi_B(2a - A - 2C) V(|a - d - A - C|) \Phi_C^*(2a - C) \Phi_D^*(2d + C) \\
 I_{esp}^{trans1} &= \int da \, db \, \Phi_A(2a - A) \Phi_B(2b + A) V(|a - b - A - C|) \Phi_C^*(2b + 2A + C) \\
 &\quad \times \Phi_D^*(2a - 2A - C) \\
 I_{esp}^{trans2} &= \int da \, db \, \Phi_A(2a - A) \Phi_B(2b + A) V(|a - b - A - C|) \Phi_C^*(2a - C) \\
 &\quad \times \Phi_D^*(2b + C) ,
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

onde $V(|\mathbf{q}|)$ é a transformada de Fourier da interação espacial e A, B, C e D são, respectivamente, os momentos dos mésons A, B, C e D . Para sistemas contendo quarks e antiquarks idênticos, devemos incluir diagramas adicionais correspondentes à permutação de partículas idênticas no espalhamento. Esses diagramas são chamados diagramas de “simetrização”, pois equivalem à imposição de simetria de Bose para a amplitude de espalhamento quando os mésons são idênticos. Esses diagramas são obtidos a partir dos diagramas originais pela troca dos mésons C e D .

Na Ref. [26] os elementos de matriz obtidos são utilizados no cálculo da secção de choque e deslocamento de fase para os espalhamentos elásticos $I = 2\pi\pi$ e $I = 1KK$.

2.3 A Função de Green para um Sistema $(q, \bar{q}, q, \bar{q})$.

A interação méson-méson com o mecanismo de troca de quarks pode ser formulada no contexto das funções de Green termodinâmicas para um sistema de quatro quarks $(q, \bar{q}, q, \bar{q})$, conforme descrito por Blaschke e Ropke [25]. Dessa forma, a interação pode ser aplicada à sistemas de quarks em temperaturas e densidades finitas [59]. Nesta secção descrevemos os aspectos principais dessa formulação, seguindo a Ref. [25].

Consideremos a função de Green de um quark,

$$G(1, z) = \frac{1}{z - E_1} , \tag{2.53}$$

onde $1 \equiv (\nu_1, \mathbf{p}_1)$ corresponde aos números quânticos de spin, sabor e cor, ν_1 , e ao momento, $\mathbf{p}_1$, do quark 1. A energia do quark é dada por

$$E_1 = m_q + \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_q} . \quad (2.54)$$

A função de Green de dois quarks é dada, no limite de baixa densidade, pela aproximação de “escada”:

$$G_2^L(12, 1'2', \Omega_2) = G_2^0(12, \Omega_2) \left(\delta_{11'} \delta_{22'} + \sum_{1'', 2''} V(12, 1''2'') G_2^L(1''2'', 1'2', \Omega_2) \right) , \quad (2.55)$$

com a função de Green livre de dois quarks, G_2^0 , dada por

$$G_2^0(12, \Omega_2) = \sum_{z_\nu} G(1, z_\nu) G(2, \Omega_2 - z_\nu) = \frac{1 - f(E_1)f(E_2)}{\Omega_2 - E_1 - E_2} , \quad (2.56)$$

onde f é a função de distribuição de Fermi-Dirac. No limite de baixa densidade, temos $1 - f(E_1)f(E_2) \simeq 1$.

Seja $\langle 12 | \alpha \rangle$ a função de onda de duas partículas, correspondente à solução da equação de Schrodinger para duas partículas, com auto-energia E_α . A função G_2^L na representação bilinear pode ser escrita na notação de operadores como:

$$G_2^L = \sum_{\alpha} |\alpha \rangle \mathcal{G}_{meson}(\alpha, \Omega_2) \langle \alpha | , \quad (2.57)$$

onde $\mathcal{G}_{meson}$ é o propagador do méson, dado por

$$\mathcal{G}_{meson}(\alpha, \Omega_2) = \frac{1}{\Omega_2 - E_\alpha} . \quad (2.58)$$

A soma sobre α , em geral, inclui os estados ligados e os estados de espalhamento. No limite de baixa densidade e baixa temperatura, a contribuição dos estados de espalhamento, com quarks e antiquarks “quase-livres”, é desprezível devido ao confinamento, de modo que podemos considerar apenas a soma sobre os estados ligados (hádrons).

Para derivar o potencial efetivo méson-méson utilizamos a função de Green de quatro quarks na aproximação de escada, G_4^L . Essa função pode ser decomposta em blocos de propagadores de duas partículas, tal que

$$G_4^L = G_4^I + G_4^{II} - G_{4,ex}^0 , \quad (2.59)$$

onde $G_{4,ex}^0$ é o propagador livre de quatro quarks anti-simetrizado, no limite de baixa densidade, dado por

$$G_{4,ex}^0(1234, 1'2'3'4', \Omega_4) = \frac{1}{(\Omega_4 - E_1 - E_2 - E_3 - E_4)} \times (\delta_{11'}\delta_{22'}\delta_{33'}\delta_{44'} - \delta_{13'}\delta_{22'}\delta_{31'}\delta_{44'} - \delta_{11'}\delta_{24'}\delta_{33'}\delta_{42'} - \delta_{13'}\delta_{24'}\delta_{31'}\delta_{42'}) . \quad (2.60)$$

Os propagadores de quatro quarks nas duas possibilidades de “pairing”, G_4^I e G_4^{II} , satisfazem as equações de movimento

$$G_4^I = G_{4,ex}^0 + G_{2+2}^I U_{2+2} G_4^I \quad (2.61)$$

$$G_4^{II} = G_{4,ex}^0 + G_{2+2}^{II} U_{2+2} G_4^{II} , \quad (2.62)$$

onde

$$G_{2+2}^I(1234, 1'2'3'4', \Omega_4) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2} \frac{\langle 12 | \alpha_1 \rangle \langle 34 | \alpha_2 \rangle \langle \alpha_2 | 3'4' \rangle \langle \alpha_1 | 1'2' \rangle}{\Omega_4 - E_{\alpha_1} - E_{\alpha_2}} - \frac{\delta_{11'}\delta_{22'}\delta_{33'}\delta_{44'}}{\Omega_4 - E_1 - E_2 - E_3 - E_4} \quad (2.63)$$

$$G_{2+2}^{II}(1234, 1'2'3'4', \Omega_4) = G_{2+2}^I(3214, 3'2'1'4', \Omega_4) \quad (2.64)$$

$$U_{2+2}(1234, 1'2'3'4', \Omega_4) = -(\Omega_4 - E_1 - E_2 - E_3 - E_4)\delta_{13'}\delta_{22'}\delta_{31'}\delta_{44'} . \quad (2.65)$$

Considerando uma interação instantânea quark-antiquark, $V_{q\bar{q}}(ij, i'j')$, e utilizando a equação de Schrodinger

$$\sum_{i', j'} V_{q\bar{q}}(ij, i'j') |i'j'\rangle = (E_{\alpha_i} - E_i - E_j) |ij\rangle , \quad (2.66)$$

resolvemos as Eq. (2.61) e Eq. (2.62), obtendo o potencial efetivo méson-méson, $\mathcal{U}_{meson-meson}$,

$$\mathcal{U}_{meson-meson}(\alpha_1, \alpha_2; \alpha_1', \alpha_2') = - \sum_{1\dots 4'} \langle \alpha_1 | 12 \rangle \langle \alpha_2 | 34 \rangle \times [V_{q\bar{q}}(14; 1'4')\delta_{22'}\delta_{33'} + V_{q\bar{q}}(32; 3'2')\delta_{11'}\delta_{44'}] \langle 1'4' | \alpha_1' \rangle \langle 3'2' | \alpha_2' \rangle , \quad (2.67)$$

e o propagador de dois mésons, $\mathcal{G}_{2,meson}$,

$$\mathcal{G}_{2,meson}(\alpha_1, \alpha_2, \Omega_4) = \sum_{\Omega_2} \mathcal{G}_{meson}(\alpha_1, \Omega_2) \mathcal{G}_{meson}(\alpha_2, \Omega_4 - \Omega_2) = \frac{1 + g(E_{\alpha_1}) + g(E_{\alpha_2})}{\Omega_4 - E_{\alpha_1} - E_{\alpha_2}} \quad (2.68)$$

onde g é a função de distribuição de Bose-Einstein. No limite de baixa densidade, temos $1 + g(E_{\alpha_1}) + g(E_{\alpha_2}) \simeq 1$.

Sendo as funções de onda dos mésons dadas por

$$\langle \alpha_1 | 12 \rangle = \Phi_{\alpha_1}^{*\mu\nu} \quad (2.69)$$

$$\langle \alpha_2 | 34 \rangle = \Phi_{\alpha_2}^{*\rho\sigma} \quad (2.70)$$

$$\langle 1'4' | \alpha_{1'} \rangle = \Phi_{\alpha_{1'}}^{\mu'\sigma'} \quad (2.71)$$

$$\langle 3'2' | \alpha_{2'} \rangle = \Phi_{\alpha_{2'}}^{\rho'\nu'} \quad (2.72)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{meson-meson}(\alpha_1, \alpha_2; \alpha_{1'}, \alpha_{2'}) = & - \Phi_{\alpha_1}^{*\mu\nu} \Phi_{\alpha_2}^{*\rho\sigma} V_{q\bar{q}}(\mu\sigma; \mu'\sigma') \Phi_{\alpha_{1'}}^{\mu'\sigma'} \Phi_{\alpha_{2'}}^{\rho\nu} \\ & - \Phi_{\alpha_1}^{*\mu\nu} \Phi_{\alpha_2}^{*\rho\sigma} V_{q\bar{q}}(\rho\nu; \rho'\nu') \Phi_{\alpha_{1'}}^{\mu\sigma} \Phi_{\alpha_{2'}}^{\rho'\nu'}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Notamos que os termos do potencial efetivo obtido são equivalentes às contribuições dos diagramas de captura para o elemento de matriz do Hamiltoniano de interação do QBD. Os termos equivalentes às contribuições dos diagramas de transferência podem ser obtidos de maneira análoga, utilizando V_{qq} e $V_{\bar{q}\bar{q}}$ na Eq. (2.67). Dessa forma, no limite de baixa temperatura e densidade, os resultados coincidem com os obtidos através do QBD. Mantendo as funções de distribuição f e g nos propagadores de quark e méson, o potencial efetivo obtido, $\mathcal{U}_{meson-meson}$, pode ser generalizado para o caso de temperatura e densidade finitas.

Capítulo 3

O Formalismo Fock-Tani

Este capítulo apresenta a generalização do formalismo originalmente desenvolvido na física atômica para o caso de mésons. Desde a formulação original do formalismo Fock-Tani [32], este foi sendo aprimorado ao longo dos anos. Aqui apresentamos o formalismo seguindo seu desenvolvimento histórico e introduzimos as modificações que se seguiram.

3.1 A Representação Fock-Tani.

No formalismo de Fock-Tani (FT) partimos da representação do sistema no espaço de Fock, usando operadores de criação e aniquilação para as partículas constituintes elementares. Consideremos um sistema contendo quarks e antiquarks (constituintes elementares) que podem formar estados ligados (mésons compostos). Nesta representação, os estados de um méson podem ser construídos a partir de operadores de criação de mésons, os quais podem ser definidos em termos de combinações lineares de produtos de operadores de criação de quarks e antiquarks.

Consideremos o estado de um méson composto por um quark e um antiquark. O vetor de estado $|\alpha\rangle$ no espaço de Fock, $\mathcal{F}$, que descreve esse méson pode ser escrito como:

$$|\alpha\rangle = M_{\alpha}^{\dagger} |0\rangle, \quad (3.1)$$

onde $M_{\alpha}^{\dagger}$ é o operador de criação de um méson composto no estado α e $|0\rangle$ é o estado de vácuo, definido por:

$$q_{\mu} |0\rangle = \bar{q}_{\nu} |0\rangle = 0, \quad (3.2)$$

e o operador $M_\alpha^\dagger$ é definido como:

$$M_\alpha^\dagger = \Phi_\alpha^{\mu\nu} q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger, \quad (3.3)$$

onde $\Phi_\alpha^{\mu\nu}$ é a função de onda do méson. O índice α representa de uma maneira compacta os números quânticos do méson: $\alpha = \{\text{espacial, spin, isospin}\}$. Os índices μ e ν identificam os números quânticos dos quarks e antiquarks: $\mu, \nu = \{\text{espacial, spin, sabor, cor}\}$. Usamos a convenção de soma implícita nos índices repetidos. Dessa forma, o vetor de estado é dado por:

$$|\alpha\rangle = |S_\alpha, M_\alpha^s\rangle \otimes |F_\alpha, M_\alpha^f\rangle \otimes |C_\alpha\rangle \otimes |\mathbf{P}_\alpha\rangle. \quad (3.4)$$

A função de onda do méson pode ser escrita na forma:

$$\Phi_\alpha^{\mu\nu} = \chi_{S_\alpha, M_\alpha^s}^{s_1 s_2} \mathcal{F}_{F_\alpha, M_\alpha^f}^{f_1 f_2} \mathcal{C}_{C_\alpha}^{c_1 c_2} \Phi_{\mathbf{P}_\alpha}^{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}, \quad (3.5)$$

onde $\chi_{S_\alpha, M_\alpha^s}^{s_1 s_2}$ é a função de onda de spin, $\mathcal{F}_{F_\alpha, M_\alpha^f}^{f_1 f_2}$ é a função de onda de sabor, $\mathcal{C}_{C_\alpha}^{c_1 c_2}$ é a função de onda de cor e $\Phi_{\mathbf{P}_\alpha}^{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}$ é a função de onda espacial. No Apêndice B essas funções de onda são apresentadas detalhadamente.

É conveniente trabalhar com funções de onda orto-normalizadas:

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{\mu\nu} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (3.6)$$

Os operadores de quark e antiquark satisfazem relações de anticomutação canônicas,

$$\begin{aligned} \{q_\mu, q_\nu\} &= \{q_\mu, \bar{q}_\nu\} = \{\bar{q}_\mu, \bar{q}_\nu\} = \{q_\mu, \bar{q}_\nu^\dagger\} = 0, \\ \{q_\mu, q_\nu^\dagger\} &= \{\bar{q}_\mu, \bar{q}_\nu^\dagger\} = \delta_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Utilizando essas relações de anticomutação juntamente com a condição de orto-normalização da Eq. (3.6), obtemos as relações de comutação para os operadores de mésons compostos:

$$\begin{aligned} [M_\alpha, M_\beta] &= 0, \\ [M_\alpha, M_\beta^\dagger] &= \delta_{\alpha\beta} - \Delta_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde

$$\Delta_{\alpha\beta} = \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{\mu\sigma} \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu + \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{\rho\nu} q_\rho^\dagger q_\mu. \quad (3.9)$$

Adicionalmente, temos

$$\begin{aligned} [q_\mu, M_\alpha] &= [\bar{q}_\nu, M_\alpha] = 0, \\ [q_\mu, M_\alpha^\dagger] &= \delta_{\mu\mu'} \Phi_\alpha^{\mu'\nu} \bar{q}_\nu^\dagger, \\ [\bar{q}_\nu, M_\alpha^\dagger] &= -\delta_{\nu\nu'} \Phi_\alpha^{\mu\nu'} q_\mu^\dagger. \end{aligned} \quad (3.10)$$

O termo $\Delta_{\alpha\beta}$ na Eq. (3.8) é uma manifestação da natureza composta e da estrutura interna dos mésons. A existência deste termo torna bastante complicados os problemas em que os graus de liberdade internos dos mésons não podem ser desprezados, pois as técnicas usuais da teoria de campos, tais como funções de Green, teorema de Wick, etc., aplicam-se a operadores que satisfazem relações de comutação (ou anticomutação) canônicas. Analogamente, o fato de que os comutadores $[q_\mu, M_\alpha^\dagger]$ e $[\bar{q}_\nu, M_\alpha^\dagger]$ não se anulam expressa a dependência cinemática entre o operador de méson e os operadores de quark e antiquark. Assim, os operadores de méson, M_α e $M_\alpha^\dagger$, não são variáveis dinâmicas convenientes.

A idéia do método Fock-Tani é fazer uma mudança de representação, de forma que os operadores das partículas compostas sejam redescritos por operadores que satisfazem relações de comutação canônicas. Naturalmente, as complicações da natureza composta dos mésons aparecerão em algum outro ponto do formalismo. A mudança de representação é realizada por meio de um operador unitário, U , de modo que os estados de um méson composto sejam redescritos por estados de um méson ideal, descritos por operadores de partículas “ideais”, m_α e $m_\alpha^\dagger$.

Seja $|\Omega\rangle$ um vetor de estado arbitrário e O um operador arbitrário, ambos expressos em termos dos operadores de quark e antiquark, $q, q^\dagger, \bar{q}, \bar{q}^\dagger$, da representação de Fock original e $|\Omega\rangle$ e O_{FT} as quantidades correspondentes na nova representação:

$$\begin{aligned} |\Omega\rangle &\longrightarrow |\Omega\rangle = U^{-1}|\Omega\rangle, \\ O &\longrightarrow O_{\text{FT}} = U^{-1}OU. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Uma vez que o operador U é unitário, os produtos escalares e os elementos de matriz são preservados sob a mudança de representação:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \Omega \rangle &= (\Omega | \Omega), \\ \langle \Omega | O | \Omega \rangle &= (\Omega | O_{\text{FT}} | \Omega). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Note-se que na nova representação os estados são representados por “bras” e “kets” circulares ao invés de angulares.

Dessa forma, se $|\alpha\rangle$ é um estado de um méson, ele será redescrito por um méson elementar (“ideal”) sob a transformação

$$|\alpha\rangle \longrightarrow U^{-1}|\alpha\rangle \equiv |\alpha\rangle = m_\alpha^\dagger |0\rangle, \quad (3.13)$$

onde os operadores de méson “ideal”, $m_\alpha^\dagger$ e m_α , satisfazem, por definição, relações de comutação canônicas

$$\begin{aligned} [m_\alpha, m_\beta] &= 0, \\ [m_\alpha, m_\beta^\dagger] &= \delta_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

e são cinematicamente independentes dos operadores de quark e antiquark

$$[q_\mu, m_\alpha] = [q_\mu, m_\alpha^\dagger] = [\bar{q}_\nu, m_\alpha] = [\bar{q}_\nu, m_\alpha^\dagger] = 0. \quad (3.15)$$

O estado $|0\rangle$ é o vácuo para os graus de liberdade de quarks, antiquarks e mésons “ideais” na nova representação.

O operador unitário U é construído expandindo-se o espaço de Fock original de modo que os estados de méson “ideal” sejam incluídos. Consideremos o espaço de Fock físico, indicado por $\mathcal{F}$. Esse é o espaço de estados gerado por todas as combinações lineares de estados construídos de operadores de quark e antiquark,

$$q_{\mu_1}^\dagger \cdots q_{\mu_l}^\dagger \bar{q}_{\nu_1}^\dagger \cdots \bar{q}_{\nu_m}^\dagger |0\rangle, \quad (3.16)$$

com l e m arbitrários. Definimos um espaço de Hilbert $\mathcal{M}$, o espaço de mésons ideais, independente do espaço de Fock físico $\mathcal{F}$, como o espaço gerado por todas as combinações lineares de estados construídos de operadores de méson “ideal”,

$$m_{\alpha_1}^\dagger \cdots m_{\alpha_n}^\dagger |0\rangle_{\mathcal{M}}, \quad (3.17)$$

onde $|0\rangle_{\mathcal{M}}$ é o vácuo de $\mathcal{M}$, definido por

$$m_\alpha |0\rangle_{\mathcal{M}} = 0. \quad (3.18)$$

Agora, define-se um novo espaço de Hilbert, chamado “espaço de estados ideais”, como o produto direto dos espaços de Fock físico $\mathcal{F}$ e de mésons ideais $\mathcal{M}$,

$$\mathcal{I} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{M}. \quad (3.19)$$

As relações de comutação das Eqs. (3.8)-(3.10), inicialmente definidas em $\mathcal{F}$, como também as da Eq. (3.14), inicialmente definidas em $\mathcal{M}$, são válidas também em $\mathcal{I}$. Por definição, os operadores de quark e de méson ideal são cinematicamente independentes e, portanto, também satisfazem a Eq. (3.15) em $\mathcal{I}$.

O vácuo de $\mathcal{I}$ é dado pelo produto direto dos vácuos de $\mathcal{M}$ e $\mathcal{F}$,

$$|0\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle_{\mathcal{M}}. \quad (3.20)$$

Dessa forma, $|0\rangle$ é o vácuo dos graus de liberdade de quarks, antiquarks e mésons ideais:

$$q_\mu |0\rangle = \bar{q}_\nu |0\rangle = m_\alpha |0\rangle = 0. \quad (3.21)$$

Os operadores de quarks atuam em $|0\rangle$ e os operadores de mésons ideais atuam em $|0\rangle_{\mathcal{M}}$ na Eq. (3.20).

Estabelecemos, então, uma correspondência um-para-um entre os estados do espaço de Fock físico $\mathcal{F}$ e os estados de um sub-espaço de $\mathcal{I}$. Em $\mathcal{I}$, existe um sub-espaço $\mathcal{I}_0$ que é isomórfico ao espaço de Fock original $\mathcal{F}$ e consiste dos estados $|\Omega\rangle \in \mathcal{F}$ sem mésons ideais,

$$m_\alpha |\Omega\rangle = 0 \quad \forall \alpha, \quad \text{ou} \quad N_m |\Omega\rangle = 0, \quad (3.22)$$

onde N_m é o operador número total de mésons ideais

$$N_m = \sum_\alpha m_\alpha^\dagger m_\alpha. \quad (3.23)$$

A Eq. (3.22) passa a ser um vínculo a ser satisfeito pelos estados permitidos em $\mathcal{I}$.

A equação de vínculo, ou condição subsidiária, exige que em $\mathcal{I}_0$ os mésons ideais sejam modos redundantes, ou seja, correspondam a estados totalmente desocupados. Essa condição é necessária para evitar múltipla contagem de graus de liberdade.

O operador U , que realiza esta transformação, é dado explicitamente por [34]:

$$U = \exp\left(-\frac{\pi}{2}F\right), \quad (3.24)$$

onde F , o gerador da transformação, é dado por:

$$F = \sum_{\alpha} \left(m_{\alpha}^{\dagger} M_{\alpha} - M_{\alpha}^{\dagger} m_{\alpha} \right). \quad (3.25)$$

Podemos facilmente verificar, fazendo uso da definição da exponencial de um operador como uma série de potências e aplicando o gerador da transformação sucessivamente em $M_{\alpha}^{\dagger}|0\rangle$, que:

$$\begin{aligned} U^{-1} M_{\alpha}^{\dagger} |0\rangle &= \cos \frac{\pi}{2} M_{\alpha}^{\dagger} |0\rangle + \sin \frac{\pi}{2} m_{\alpha}^{\dagger} |0\rangle \\ &= m_{\alpha}^{\dagger} |0\rangle. \end{aligned} \quad (3.26)$$

O operador unitário U atua sobre estados de $\mathcal{I}$ e não pode ser definido em $\mathcal{F}$. Contudo, U está definido em $\mathcal{I}_0$, que é isomórfico a $\mathcal{F}$. Definimos, então, o espaço de Fock-Tani $\mathcal{F}_{\text{FT}}$ como o espaço imagem de $\mathcal{I}_0$:

$$\mathcal{F}_{\text{FT}} = U^{-1} \mathcal{I}_0. \quad (3.27)$$

Assim, o espaço $\mathcal{F}_{\text{FT}}$ é o sub-espaço de $\mathcal{I}$ cujos vetores de estado $|\Omega\rangle$ na nova representação estão relacionados aos vetores de estado de $\mathcal{I}_0$ por

$$|\Omega\rangle = U|\Omega_0\rangle \Rightarrow |\Omega_0\rangle = U^{-1}|\Omega\rangle. \quad (3.28)$$

Qualquer cálculo efetuado no espaço físico $\mathcal{F}$ é equivalente ao cálculo no espaço de Fock-Tani. Para dois estados quaisquer, $|\Omega\rangle$ e $|\Omega'\rangle$ e qualquer observável O em $\mathcal{F}$, temos

$$\langle \Omega | O | \Omega' \rangle = \langle \Omega | U^{-1} O U | \Omega' \rangle = \langle \Omega | O_{\text{FT}} | \Omega' \rangle. \quad (3.29)$$

É claro que em $\mathcal{F}_{\text{FT}}$ a condição que garante que não há dupla contagem:

$$U^{-1} m_{\alpha} U |\Omega\rangle = 0, \quad (3.30)$$

deve sempre ser satisfeita.

A vantagem de trabalhar em $\mathcal{F}_{\text{FT}}$ é que neste espaço todos os operadores de criação e aniquilação satisfazem relações de (anti)comutação canônicas. No entanto, a natureza composta dos mésons aparecerá em outro lugar. Os operadores transformados,

$$O_{\text{FT}} = U^{-1} O U, \quad (3.31)$$

dão origem a séries infinitas que fisicamente representam, de algum modo, uma expansão na densidade do sistema. O método será eficiente para cálculos práticos se forem necessários poucos termos da série para descrever as interações entre os mésons e os quarks. A obtenção de forças efetivas de muitos corpos entre os mésons requer uma expansão até altas ordens na função de onda do méson. No entanto, interações efetivas entre dois mésons podem ser obtidas em ordem relativamente baixa.

Outra complicação potencial relaciona-se com a condição subsidiária. Para problemas envolvendo muitos mésons deve-se tomar cuidado para não violar esse vínculo. Para um estado contendo vários mésons compostos, $|\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle = M_{\alpha_1}^\dagger \dots M_{\alpha_n}^\dagger |0\rangle$, a transformação através do operador U não resulta, em geral, em um estado produto de mésons ideais, pois $U^{-1}M_\alpha^\dagger U$ difere de $m_\alpha^\dagger$ por uma série infinita contendo operadores de quarks. No entanto, é possível mostrar que um estado em $\mathcal{F}_{\text{FT}}$ da forma $|\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle = m_{\alpha_1}^\dagger \dots m_{\alpha_n}^\dagger |0\rangle$ satisfaz a condição subsidiária Eq. (3.30) e, portanto, é um estado físico. A imagem deste estado em $\mathcal{I}_0$ é um estado complicado contendo quarks, antiquarks e mésons. Para processos de espalhamento, a matriz- S é definida em termos de estados assintóticos, os quais, por definição, não se superpõem, de forma que podemos escrever:

$$\begin{aligned} |\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle \rightarrow U^{-1}|\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle &= |\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle \\ &= m_{\alpha_1}^\dagger \dots m_{\alpha_n}^\dagger |0\rangle. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Portanto, para estados assintóticos, a condição subsidiária é trivialmente satisfeita.

3.2 A Transformação Fock-Tani dos Operadores.

Os operadores básicos de um determinado modelo, tais como o operador Hamiltoniano, correntes eletromagnéticas, etc., são expressos em termos de operadores de quark e antiquark. Dessa forma, para obtermos os operadores do modelo na nova representação, necessitamos dos operadores de quark e antiquark transformados:

$$\begin{aligned} q_{\text{FT}} &= U^{-1}qU \\ \bar{q}_{\text{FT}} &= U^{-1}\bar{q}U. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Os operadores de criação são obtidos de forma análoga, tomando o conjugado Hermitiano da Eq. (3.33) e lembrando que $U^{-1} = U^\dagger$.

Os cálculos dessas expressões pelo método de multicomutadores é bastante complicado, envolvendo séries infinitas e não podem, em geral, ser expressos numa forma fechada. No entanto, as transformações podem ser obtidas iterativamente através do método de “equações de movimento”, sugerido por Girardeau [34]. Para qualquer operador O , define-se:

$$O(t) = \exp(-tF)O \exp(tF), \quad (3.34)$$

onde t é um parâmetro real, “tempo” (t é na verdade, como será visto a seguir, um ângulo de rotação no espaço de Hilbert).

Diferenciando a expressão acima com relação a t , obtemos a equação de movimento para o operador O :

$$\frac{dO(t)}{dt} = [O(t), F], \quad (3.35)$$

com a “condição inicial”:

$$O(t=0) = O. \quad (3.36)$$

Os operadores transformados de Fock-Tani são obtidos das soluções das Eqs. (3.35-3.36) para $t = -\frac{\pi}{2}$:

$$O_{\text{FT}} = U^{-1}OU = O(-\pi/2). \quad (3.37)$$

Deste modo, usando a Eq. (3.35) e o gerador da transformação dado na Eq. (3.25), obtemos as equações de movimento para os operadores de quarks e antiquarks:

$$\begin{aligned} \frac{dq_\mu(t)}{dt} &= [q_\mu(t), F] \\ &= -\delta_{\mu\mu_1} \Phi_\alpha^{\mu_1\nu} \bar{q}_\nu^\dagger(t) m_\alpha(t), \end{aligned} \quad (3.38)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{q}_\nu(t)}{dt} &= [\bar{q}_\nu(t), F] \\ &= \delta_{\nu\nu_1} \Phi_\alpha^{\mu\nu_1} q_\mu^\dagger(t) m_\alpha(t). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Uma vez que as equações de movimento para q e $\bar{q}$ envolvem $m_\alpha(t)$, é necessário obter a equação de movimento para $m_\alpha(t)$:

$$\begin{aligned}\frac{dm_\alpha(t)}{dt} &= [m_\alpha(t), F] \\ &= M_\alpha(t) .\end{aligned}\tag{3.40}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned}\frac{dM_\alpha(t)}{dt} &= [M_\alpha(t), F] \\ &= -[\delta_{\alpha\beta} - \Delta_{\alpha\beta}(t)] m_\beta(t) .\end{aligned}\tag{3.41}$$

As Eqs. (3.38)-(3.41), juntamente com suas Hermitianas conjugadas, formam um conjunto de equações diferenciais não-lineares acopladas, tão difíceis de resolver quanto as expressões obtidas pela técnica de multicomutadores. No entanto, essas equações podem ser resolvidas de maneira direta por iteração.

Partindo de uma aproximação de ordem zero, onde é desprezada a superposição dos mésons, coletamos os termos de mesma ordem na função de onda do estado ligado, Φ_α e Φ_α^* . Dessa forma, escrevemos os operadores como uma expansão

$$\begin{aligned}q_\mu(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} q_\mu^{(i)}(t) , & \bar{q}_\mu(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \bar{q}_\mu^{(i)}(t) , \\ m_\alpha(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} m_\alpha^{(i)}(t) , & M_\alpha(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} M_\alpha^{(i)}(t) ,\end{aligned}\tag{3.42}$$

onde (i) indica a ordem nas funções de onda. Para que se tenha uma contagem de potências consistente, como pode ser visto nas Eqs. (3.44) a seguir, as funções de onda implícitas nos operadores M_α e $M_\alpha^\dagger$ via Eq. (3.3), não devem entrar na contagem. Desta forma, a expansão da Eq. (3.42) pode ser entendida como uma expansão na densidade do sistema.

Assim, as equações de movimento em ordem zero nas funções de onda são obtidas desprezando-se os termos $\Delta_{\alpha\beta}(t)$ e Φ_α nas Eqs. (3.38)-(3.41):

$$\begin{aligned}\frac{dq_\mu^{(0)}(t)}{dt} &= 0 , \\ \frac{d\bar{q}_\nu^{(0)}(t)}{dt} &= 0 , \\ \frac{dM_\alpha^{(0)}(t)}{dt} &= -m_\alpha^{(0)}(t) , \\ \frac{dm_\alpha^{(0)}(t)}{dt} &= M_\alpha^{(0)}(t) .\end{aligned}\tag{3.43}$$

Usando as condições iniciais da Eq. (3.36), as soluções resultam em

$$\begin{aligned}
 q_\mu^{(0)}(t) &= q_\mu , \\
 \bar{q}_\nu^{(0)}(t) &= \bar{q}_\nu , \\
 m_\alpha^{(0)}(t) &= m_\alpha \cos t + M_\alpha \sin t , \\
 M_\alpha^{(0)}(t) &= M_\alpha \cos t - m_\alpha \sin t .
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Deve-se notar que as condições iniciais foram impostas sobre o termo de ordem zero na expansão da Eq. (3.42). Assim, para que esta expansão seja consistente com a Eq. (3.36), devemos ter como condições iniciais para os termos de ordem ≥ 1 que:

$$q_\mu^{(i)}(t=0) = \bar{q}_\mu^{(i)}(t=0) = m_\alpha^{(i)}(t=0) = M_\alpha^{(i)}(t=0) = 0 , \text{ para } i \geq 1 . \tag{3.45}$$

Uma vez que o termo $\Delta_{\alpha\beta}$ não contribui para as equações de movimento de primeira ordem, obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{dq_\mu^{(1)}(t)}{dt} &= -\delta_{\mu\mu_1} \Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1} \bar{q}_{\nu_1}^\dagger(t) m_\alpha^{(0)}(t) , \\
 \frac{d\bar{q}_\nu^{(1)}(t)}{dt} &= \delta_{\nu\nu_1} \Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1} q_{\mu_1}^\dagger(t) m_\alpha^{(0)}(t) , \\
 \frac{dM_\alpha^{(1)}(t)}{dt} &= -m_\alpha^{(1)}(t) , \\
 \frac{dm_\alpha^{(1)}(t)}{dt} &= M_\alpha^{(1)}(t) .
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Com as condições iniciais da Eq. (3.45) e a condição em $t = -\pi/2$, obtemos:

$$\begin{aligned}
 q_\mu^{(1)}(t) &= -\delta_{\mu\mu_1} \Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1} \bar{q}_{\nu_1}^\dagger [m_\alpha \sin t + M_\alpha (1 - \cos t)] , \\
 \bar{q}_\nu^{(1)}(t) &= \delta_{\nu\nu_1} \Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1} q_{\mu_1}^\dagger [m_\alpha \sin t + M_\alpha (1 - \cos t)] , \\
 m_\alpha^{(1)}(t) &= 0 , \\
 M_\alpha^{(1)}(t) &= 0 .
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Esse processo iterativo pode ser estendido diretamente até ordens mais altas. No entanto, as soluções de segunda ordem em diante darão origem a termos seculares, isto é,

termos que envolvem polinômios em t , além de funções trigonométricas em t . Entre outras coisas, os termos seculares introduzem as familiares discrepâncias “post-prior” [61], [42] na análise de processos de espalhamento e processos reativos. A origem dos termos seculares está na assimetria das equações de movimento para m_α e O_α , Eqs. (3.40,3.41). A simetria é quebrada pelo termo $\Delta_{\alpha\beta}$.

Este problema foi resolvido recentemente por Girardeau e Straton [41]. A solução consiste em adicionar a F um termo dependente de $\Delta_{\alpha\beta}$ de modo que as equações tornem-se simétricas. Seguimos, aqui, o procedimento de Lo e Girardeau [42], que embora seja equivalente ao procedimento de Girardeau e Straton, é mais elegante e sistemático. O gerador da transformação é definido como

$$F = \sum_{\alpha} \left(m_{\alpha}^{\dagger} O_{\alpha} - O_{\alpha}^{\dagger} m_{\alpha} \right), \quad (3.48)$$

onde o operador O_{α} é uma função somente dos operadores de quark e antiquark, escolhido de tal forma que satisfaça relações de comutação canônicas, ou seja:

$$\begin{aligned} [O_{\alpha}, O_{\beta}] &= 0, \\ [O_{\alpha}, O_{\beta}^{\dagger}] &= \delta_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Isto leva a equações de movimento simétricas para m_{α} e O_{α} em todas as ordens nas funções de onda de estado ligado Φ_{α} e Φ_{α}^* :

$$\begin{aligned} \frac{dm_{\alpha}(t)}{dt} &= [m_{\alpha}(t), F] = O_{\alpha}(t), \\ \frac{dO_{\alpha}(t)}{dt} &= [O_{\alpha}(t), F] = -m_{\alpha}(t). \end{aligned} \quad (3.50)$$

As soluções destas equações

$$\begin{aligned} m_{\alpha}(t) &= O_{\alpha} \sin t + m_{\alpha} \cos t, \\ O_{\alpha}(t) &= O_{\alpha} \cos t - m_{\alpha} \sin t, \end{aligned} \quad (3.51)$$

contêm somente funções trigonométricas de t . Não é difícil mostrar que isto elimina também os termos seculares dos operadores de quark e antiquark.

O operador O_{α} também é determinado iterativamente, ou seja, ordem a ordem em Φ_{α} e Φ_{α}^* , de modo que O_{α} pode ser expandido como

$$O_{\alpha}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} O_{\alpha}^{(i)}(t), \quad (3.52)$$

onde, novamente, (i) indica a ordem considerada em Φ_α e Φ_α^* . O termo de ordem zero é trivialmente dado por:

$$O_\alpha^{(0)} = M_\alpha, \quad (3.53)$$

que certamente satisfaz a Eq. (3.49), em ordem zero, e reproduz os resultados originais para primeira e segunda ordem. O termo seguinte é o de segunda ordem:

$$O_\alpha = M_\alpha + O_\alpha^{(2)}, \quad (3.54)$$

onde $O_\alpha^{(2)}$ deve ser escolhido de forma que

$$[O_\alpha, O_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(\Phi^3). \quad (3.55)$$

A escolha apropriada é:

$$O_\alpha^{(2)} = \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\beta} M_\beta. \quad (3.56)$$

Seguindo o mesmo procedimento, obtemos o operador de terceira ordem,

$$O_\alpha^{(3)} = -\frac{1}{2} M_\beta^\dagger [\Delta_{\beta\gamma}, M_\alpha] M_\gamma. \quad (3.57)$$

Assim, até terceira ordem, verifica-se que o operador O_α é dado por:

$$O_\alpha = M_\alpha + \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\beta} M_\beta + \frac{1}{2} M_\beta^\dagger [\Delta_{\beta\gamma}, M_\alpha] M_\gamma. \quad (3.58)$$

É fácil mostrar usando estas relações que:

$$\begin{aligned} [O_\alpha, O_\beta] &= \mathcal{O}(\Phi^4) \\ [O_\alpha, O_\beta^\dagger] &= \delta_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(\Phi^4), \end{aligned} \quad (3.59)$$

O cálculo detalhado do operador O_α é descrito no Apêndice C.

É importante observar que a equação de vínculo para a transformação de Fock-Tani com o novo gerador resulta em

$$O_\alpha |\Omega\rangle = 0, \quad \forall \alpha. \quad (3.60)$$

Dessa forma, para estados no sub-espço $\mathcal{F}_{\text{FT}}$ do tipo:

$$|\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle = m_{\alpha_1}^\dagger \cdots m_{\alpha_n}^\dagger |0\rangle, \quad (3.61)$$

a condição subsidiária Eq. (3.30) é trivialmente satisfeita, uma vez que O_α é função somente de operadores de quark e antiquark e, portanto, comuta com $m_\alpha^\dagger$. Também, temos que impor que O_α aniquila o vácuo:

$$O_\alpha|0\rangle = 0 \quad , \forall \alpha \quad (3.62)$$

Esta é uma condição necessária a ser imposta sobre O_α para que o vácuo permaneça invariante sob a transformação Fock-Tani [58], pois somente assim teremos:

$$F|0\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad U|0\rangle = |0\rangle \quad , \quad (3.63)$$

Esta é uma propriedade extremamente importante para que possamos realizar os cálculos no espaço $\mathcal{F}_{\text{FT}}$. Assim, supõe-se que $O_\alpha^{(i)}$, $i > 0$, possa sempre ser construído como um produto ordenado normalmente contendo sempre um operador de aniquilação na direita.

Além disso, pode-se notar que

$$M_\alpha^\dagger|0\rangle = O_\alpha^\dagger|0\rangle \quad , \quad (3.64)$$

o que até terceira ordem segue imediatamente da Eq. (3.60). De acordo com as observações acima, espera-se que esse resultado mantenha-se em qualquer ordem. Assim, a transformação Fock-Tani sobre um estado contendo um único méson composto pode ser escrita como

$$\begin{aligned} U^{-1}M_\alpha^\dagger|0\rangle &= U^{-1}O_\alpha^\dagger|0\rangle = U^{-1}O_\alpha^\dagger U|0\rangle \\ &= m_\alpha^\dagger|0\rangle \end{aligned} \quad (3.65)$$

de modo que a transformação de Fock-Tani com o novo gerador mantém o significado físico da transformação original, dada pelo gerador definido em Eq. (3.25).

As equações de movimento de segunda ordem para m_α e O_α com a transformação de Fock-Tani generalizada são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{dm_\alpha^{(2)}(t)}{dt} &= O_\alpha^{(2)}(t) \quad , \\ \frac{dO_\alpha^{(2)}(t)}{dt} &= -m_\alpha^{(2)}(t) \quad . \end{aligned} \quad (3.66)$$

Ao considerarmos as equações de movimento para os operadores q e $\bar{q}$, temos que incluir as contribuições adicionais que resultam da mudança do gerador da transformação. Assim, temos:

$$\begin{aligned}\frac{dq_\mu^{(2)}(t)}{dt} &= -\delta_{\mu\mu_1} \left[\Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1} \bar{q}_{\nu_1}^{\dagger(1)}(t) m_\alpha^{(0)}(t) + \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu_2\nu_1} \Phi_\gamma^{\mu_1\nu_1} m_\alpha^{\dagger(0)}(t) q_{\mu_2}^{(0)}(t) M_\gamma^{(0)}(t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \Phi_\gamma^{*\mu_2\nu_1} \Phi_\alpha^{\mu\nu_1} M_\gamma^{\dagger(0)}(t) q_{\mu_2}^{(0)}(t) m_\alpha^{(0)}(t) \right], \\ \frac{d\bar{q}_\nu^{(2)}(t)}{dt} &= \delta_{\nu\nu_1} \left[\Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1} q_{\mu_1}^{\dagger(1)}(t) m_\alpha^{(0)}(t) + \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu_1\nu_2} \Phi_\gamma^{\mu_1\nu_1} m_\alpha^{\dagger(0)}(t) M_\gamma^{(0)}(t) \bar{q}_{\nu_2}^{(0)}(t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu_1\nu_2} \Phi_\gamma^{\mu_1\nu_1} M_\gamma^{\dagger(0)}(t) m_\alpha^{(0)}(t) \bar{q}_{\nu_2}^{(0)}(t) \right].\end{aligned}\quad (3.67)$$

As condições iniciais para $O_\alpha^{(i)}(t)$ são dadas por

$$O_\alpha^{(i)}(t=0) = O_\alpha^{(i)} \quad \forall i \quad (3.68)$$

Assim, temos $O_\alpha^{(2)}(t=0) = \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\beta} M_\beta$ e, integrando as Eqs. (3.66)-(3.67) obtemos

$$\begin{aligned}m_\alpha^{(2)}(t) &= \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\beta} M_\beta \sin t, \\ O_\alpha^{(2)}(t) &= \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\beta} M_\beta \cos t,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}q_\mu^{(2)}(t) &= \delta_{\mu\mu_1} \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu_2\nu_1} \Phi_\beta^{\mu_1\nu_1} \left[m_\alpha^\dagger M_\beta \sin t \cos t - m_\alpha^\dagger m_\beta \sin^2 t - M_\alpha^\dagger M_\beta (2 - 2 \cos t \right. \\ &\quad \left. - \sin^2 t) - M_\alpha^\dagger m_\beta (2 \sin t - \sin t \cos t) \right] q_{\mu_2}, \\ \bar{q}_\nu^{(2)}(t) &= \delta_{\nu\nu_1} \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu_1\nu_2} \Phi_\beta^{\mu_1\nu_1} \left[m_\alpha^\dagger M_\beta \sin t \cos t - m_\alpha^\dagger m_\beta \sin^2 t - M_\alpha^\dagger M_\beta (2 - 2 \cos t \right. \\ &\quad \left. - \sin^2 t) - M_\alpha^\dagger m_\beta (2 \sin t - \sin t \cos t) \right] \bar{q}_{\nu_2}.\end{aligned}\quad (3.69)$$

As equações de movimento de terceira ordem para os operadores de quarks e antiquarks são dadas por:

$$\begin{aligned}
\frac{dq_\mu^{(3)}(t)}{dt} = & -\delta_{\mu\mu_1} \frac{1}{2} \left\{ 2\Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1} \left[\bar{q}_{\nu_1}^{\dagger(2)}(t)m_\alpha^{(0)}(t) + \bar{q}_{\nu_1}^{\dagger(0)}(t)m_\alpha^{(2)}(t) \right] \right. \\
& + \Phi_\alpha^{*\mu_2\nu_1} \Phi_\gamma^{\mu_1\nu_1} \left[m_\alpha^{\dagger(0)}(t)q_{\mu_2}^{(1)}(t)M_\gamma^{(0)}(t) - M_\alpha^{\dagger(0)}(t)q_{\mu_2}^{(1)}(t)m_\gamma^{(0)}(t) \right] \\
& + \Phi_\alpha^{\mu_1\sigma} \Phi_\gamma^{*\rho_1\sigma} \Phi_\delta^{\rho_1\sigma_1} M_\gamma^{\dagger(0)}(t)\bar{q}_{\sigma_1}^{\dagger(0)}(t)M_\delta^{(0)}(t)m_\alpha^{(0)}(t) \\
& + \Phi_\alpha^{\rho\sigma} \Phi_\gamma^{*\rho\sigma_1} \Phi_\delta^{\mu_1\sigma_1} M_\gamma^{\dagger(0)}(t)\bar{q}_\sigma^{\dagger(0)}(t)M_\delta^{(0)}(t)m_\alpha^{(0)}(t) \\
& \left. - \Phi_\gamma^{\mu_1\nu_1} \bar{q}_{\nu_1}^{\dagger(0)}(t)\Delta_{\gamma\alpha}(t)m_\alpha^{(0)}(t) \right\}, \tag{3.70}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{q}_\nu^{(3)}(t)}{dt} = & \delta_{\nu\nu_1} \frac{1}{2} \left\{ 2\Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1} \left[q_{\mu_1}^{\dagger(0)}(t)m_\alpha^{(2)}(t) + q_{\mu_1}^{\dagger(2)}(t)m_\alpha^{(0)}(t) \right] \right. \\
& + \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{\rho\nu_1} \left[m_\alpha^{\dagger(0)}(t)\bar{q}_\sigma^{(1)}(t)M_\beta^{(0)}(t) - M_\alpha^{\dagger(0)}(t)\bar{q}_\sigma^{(1)}(t)m_\beta^{(0)}(t) \right] \\
& - \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{\rho\nu_1} \Phi_\gamma^{\rho_1\sigma} M_\alpha^{\dagger(0)}(t)q_{\rho_1}^{\dagger(0)}(t)M_\beta^{(0)}(t)m_\gamma^{(0)}(t) \\
& - \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{\rho_1\sigma} \Phi_\gamma^{\rho\nu_1} M_\alpha^{\dagger(0)}(t)q_{\rho_1}^{\dagger(0)}(t)M_\beta^{(0)}(t)m_\gamma^{(0)}(t) \\
& \left. + \Phi_\gamma^{\rho\nu_1} q_\rho^{\dagger(0)}(t)\Delta_{\gamma\beta}(t)m_\beta^{(0)}(t) \right\}, \tag{3.71}
\end{aligned}$$

Integrando estas equações, obtemos:

$$\begin{aligned}
q_\mu^{(3)}(t) = & \delta_{\mu\mu_1} \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{\mu_1\nu_1} \Phi_\gamma^{\rho\sigma_1} \bar{q}_{\sigma_1}^{\dagger} \left[m_\alpha^{\dagger} m_\beta m_\gamma \sin^3 t + M_\alpha^{\dagger} M_\beta m_\gamma (\sin t - \sin^3 t) \right. \\
& + M_\alpha^{\dagger} m_\beta M_\gamma (2 \sin t - \sin t \cos t - \sin^3 t) \\
& + (M_\alpha^{\dagger} m_\beta m_\gamma + m_\alpha^{\dagger} M_\beta m_\gamma) (-\cos t + \cos^3 t) \\
& + m_\alpha^{\dagger} m_\beta M_\gamma (-\cos t + \cos^3 t + \sin^2 t) \\
& + M_\alpha^{\dagger} M_\beta M_\gamma (2 - \cos t - \cos^3 t - \sin^2 t) \\
& \left. + m_\alpha^{\dagger} M_\beta M_\gamma (\sin t - \sin t \cos t - \sin^3 t) \right] \\
& + \delta_{\mu\mu_1} \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1} \Phi_\beta^{\rho\sigma_1} \bar{q}_{\nu_1}^{\dagger} \bar{q}_{\sigma_1}^{\dagger} \bar{q}_\sigma [2M_\beta (\cos t - 1) - m_\beta \sin t] \\
& + \delta_{\mu\mu_1} \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1} \Phi_\beta^{\rho_1\sigma} \bar{q}_{\nu_1}^{\dagger} q_{\rho_1}^{\dagger} q_\rho [2M_\beta (\cos t - 1) - m_\beta \sin t]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{q}_\nu^{(3)}(t) = & -\delta_{\nu\nu_1} \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{\rho\nu_1} \Phi_\gamma^{\rho_1\sigma} q_{\rho_1}^\dagger \left[m_\alpha^\dagger m_\beta m_\gamma \sin^3 t + M_\alpha^\dagger M_\beta m_\gamma (\sin t - \sin^3 t) \right. \\
& + M_\alpha^\dagger m_\beta M_\gamma (2 \sin t - \sin t \cos t - \sin^3 t) \\
& + \left(M_\alpha^\dagger m_\beta m_\gamma + m_\alpha^\dagger M_\beta m_\gamma \right) (-\cos t + \cos^3 t) \\
& + m_\alpha^\dagger m_\beta M_\gamma (-\cos t + \cos^3 t + \sin^2 t) \\
& + M_\alpha^\dagger M_\beta M_\gamma (2 - \cos t - \cos^3 t - \sin^2 t) \\
& \left. + m_\alpha^\dagger M_\beta M_\gamma (\sin t - \sin t \cos t - \sin^3 t) \right] \\
& + \delta_{\nu\nu_1} \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1} \Phi_\beta^{\rho\sigma_1} q_{\mu_1}^\dagger \bar{q}_{\sigma_1}^\dagger \bar{q}_\sigma [2M_\beta (1 - \cos t) + m_\beta \sin t] \\
& + \delta_{\nu\nu_1} \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1} \Phi_\beta^{\rho_1\sigma} q_{\mu_1}^\dagger q_{\rho_1}^\dagger q_\rho [2M_\beta (1 - \cos t) + m_\beta \sin t] \quad (3.72)
\end{aligned}$$

Em princípio, este processo pode ser extendido até qualquer ordem, ainda que a complexidade das expressões obtidas aumente muito com a ordem considerada. Verifica-se, no entanto, que para obter uma interação efetiva méson-méson, bem como outros processos envolvendo quarks e mésons, necessita-se ir somente até terceira ordem nos operadores de quarks transformados.

3.3. O Hamiltoniano na representação Fock-Tani.

O Hamiltoniano na representação Fock-Tani é obtido pela aplicação da transformação unitária U sobre o Hamiltoniano microscópico original, expresso em termos dos operadores dos constituintes fundamentais, $q, q^\dagger, \bar{q}$ e $\bar{q}^\dagger$. Para as aplicações desta tese, consideramos o Hamiltoniano microscópico da forma geral

$$\begin{aligned}
H = & T(\mu) q_\mu^\dagger q_\mu + T(\nu) \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\nu + \frac{1}{2} V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^\dagger q_\nu^\dagger q_\rho q_\sigma \\
& + \frac{1}{2} V_{\bar{q}\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \bar{q}_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho \bar{q}_\sigma + V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho q_\sigma. \quad (3.73)
\end{aligned}$$

Vários Hamiltonianos de modelos de quarks utilizados na literatura podem ser escritos nessa forma, como por exemplo o Hamiltoniano do tipo Fermi-Breit no modelo de quarks não-relativístico, descrito no Apêndice A.

A equação de movimento para a função de onda de um méson é dada por

$$H(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_\alpha^{\mu'\nu'} = \epsilon_{[\alpha]} \Phi_\alpha^{\mu\nu}, \quad (3.74)$$

onde ϵ_α é a energia total do méson, energia do centro de massa mais energia interna, e $H(\mu\nu; \sigma\rho)$ é dado por:

$$H(\mu\nu; \mu'\nu') = \delta_{\mu[\mu']}\delta_{\nu[\nu']} [T([\mu']) + T([\nu'])] + V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu') . \quad (3.75)$$

Usamos a convenção de que não há soma nos índices repetidos entre colchetes.

O Hamiltoniano transformado $U^{-1}HU \equiv H_{\text{FT}}$ exato, isto é, avaliado em todas as ordens na função de onda do méson, descreve todos os processos possíveis envolvendo quarks e mésons. Tais processos incluem interações de dois corpos do tipo (anti)quark-(anti)quark, méson-(anti)quark, méson-méson, bem como processos de muitos corpos envolvendo interações em que várias partículas (quarks, antiquarks e mésons) participam. Até a ordem em que os operadores de quark e antiquark foram obtidos (ordem tres), é possível obter um Hamiltoniano efetivo truncado, que descreve apenas interações de poucas partículas. A derivação do Hamiltoniano transformado segue o mesmo procedimento da Ref. [34] para o caso da física atômica.

O Hamiltoniano na representação Fock-Tani, H_{FT} , tem a seguinte estrutura geral:

$$H_{\text{FT}} = H_q + H_m + H_{mq} , \quad (3.76)$$

onde H_q indica termos contendo somente operadores de quarks e antiquarks, H_m contém apenas operadores de mésons e H_{mq} indica termos contendo operadores de mésons e quarks. O procedimento para obter a Eq. (3.76) é substituir na Eq. (3.73) os operadores de quarks transformados, fazendo em seguida o ordenamento normal dos operadores.

O termo H_q tem estrutura idêntica à Eq. (3.73), exceto pelo termo que descreve a interação quark-antiquark, que é modificado de forma a não produzir estados ligados quark-antiquark. Os operadores q e $\bar{q}$ presentes em H e H_q têm significados distintos, pois em H_q estes representam somente quarks e antiquarks não ligados. Assim,

$$\begin{aligned} H_q = & T(\mu) q_\mu^\dagger q_\mu + T(\nu) \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\nu + \frac{1}{2} V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^\dagger q_\nu^\dagger q_\rho q_\sigma \\ & + \frac{1}{2} V_{\bar{q}\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \bar{q}_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho \bar{q}_\sigma + V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho q_\sigma . \end{aligned} \quad (3.77)$$

Os primeiros quatro termos em H_q são obtidos diretamente da substituição em (3.73) dos operadores q e $\bar{q}$ pelos seus termos de ordem zero nas funções de onda de estado ligado:

- os termos de energia cinética são obtidos de:

$$T(\mu) q_\mu^{(0)\dagger} q_\mu^{(0)}, \quad T(\nu) \bar{q}_\nu^{(0)\dagger} \bar{q}_\nu^{(0)}. \quad (3.78)$$

- os termos de interação quark-quark e antiquark-antiquark são obtidos de:

$$V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^{(0)\dagger} q_\nu^{(0)\dagger} q_\rho^{(0)} q_\sigma^{(0)}, \quad V_{\bar{q}\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \bar{q}_\mu^{(0)\dagger} \bar{q}_\nu^{(0)\dagger} \bar{q}_\rho^{(0)} \bar{q}_\sigma^{(0)}. \quad (3.79)$$

O termo de interação quark-antiquark modificado, é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) &= V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) - \Delta(\mu\nu; \mu'\nu') H(\mu'\nu'; \sigma\rho) - H(\mu\nu; \sigma'\rho') \Delta(\sigma'\rho'; \sigma\rho) \\ &+ \Delta(\mu\nu; \mu'\nu') H(\mu'\nu'; \sigma'\rho') \Delta(\sigma'\rho'; \sigma\rho), \end{aligned} \quad (3.80)$$

onde $\Delta(\mu\nu; \mu'\nu')$ é o “kernel de estado ligado”

$$\Delta(\mu\nu; \mu'\nu') = \sum_\alpha \Phi_\alpha^{\mu\nu} \Phi_\alpha^{*\mu'\nu'}, \quad (3.81)$$

e $H(\mu\nu; \sigma\rho)$ é dado por:

$$H(\mu\nu; \mu'\nu') = \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'} [T(\mu') + T(\nu')] + V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu'). \quad (3.82)$$

A origem destes termos é a seguinte:

- o primeiro termo em $\mathcal{V}_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho)$, é dado pelas contribuições dos termos de ordem zero nas funções de onda de estado ligado para os operadores de quarks:

$$V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^{\dagger(0)} \bar{q}_\nu^{\dagger(0)} \bar{q}_\rho^{(0)} q_\sigma^{(0)}. \quad (3.83)$$

- o segundo termo é dado pelas contribuições dos termos de ordem um,

$$T(\mu) q_\mu^{\dagger(1)} q_\mu^{(0)}, \quad T(\nu) q_\nu^{\dagger(1)} q_\nu^{(0)}, \quad V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^{\dagger(1)} \bar{q}_\nu^{\dagger(0)} \bar{q}_\rho^{(0)} q_\sigma^{(0)}. \quad (3.84)$$

- o terceiro termo é dado pelo conjugado Hermitiano destes. O quarto termo é dado pelas contribuições dos termos de ordem dois,

$$T(\mu) q_\mu^{\dagger(1)} q_\mu^{(1)}, \quad T(\nu) q_\nu^{\dagger(1)} q_\nu^{(1)}, \quad V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^{\dagger(1)} \bar{q}_\nu^{\dagger(0)} \bar{q}_\rho^{(0)} q_\sigma^{(1)}. \quad (3.85)$$

Para mostrarmos que a interação quark-antiquark modificada não forma estados ligados seguiremos a demonstração apresentada no Apêndice A da Ref. [34]. Consideremos um estado $|\Psi\rangle$ qualquer, formado a partir de um quark e um antiquark:

$$|\Psi\rangle = \Psi^{\mu\nu} q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger |0\rangle. \quad (3.86)$$

No caso em que $\Phi_\alpha^{\mu\nu}$ é um auto-estado do Hamiltoniano microscópico de quarks, temos

$$H_q |\Psi\rangle = \left[H(\mu\nu; \sigma\rho) \Psi^{\sigma\rho} - \sum_\alpha \epsilon_\alpha \Psi^{\mu\nu} \langle \alpha | \Psi \rangle \right] q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger |0\rangle. \quad (3.87)$$

Para obter este resultado utilizamos a propriedade

$$\Delta(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_\alpha^{\mu'\nu'} = \Phi_\alpha^{\mu\nu}. \quad (3.88)$$

Se $\Psi^{\mu\nu}$ também é um dos auto-estados do Hamiltoniano microscópico, então Eq. (3.87) torna-se

$$\begin{aligned} H_q |\Psi\rangle &= H_q |\alpha'\rangle \\ &= \left[H(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_{\alpha'}^{\sigma\rho} - \sum_\alpha \epsilon_\alpha \Phi_\alpha^{\mu\nu} \langle \alpha | \alpha' \rangle \right] \\ &= \left[\epsilon_{[\alpha']} \Phi_{[\alpha']}^{\mu\nu} - \sum_\alpha \epsilon_\alpha \Phi_\alpha^{\mu\nu} \delta_{\alpha\alpha'} \right] q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger |0\rangle = 0. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Por outro lado, se Ψ é ortogonal aos estados ligados, $\langle \alpha | \Psi \rangle = 0$, temos:

$$H_q |\Psi\rangle = H(\mu\nu; \sigma\rho) \Psi^{\sigma\rho} q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger |0\rangle. \quad (3.90)$$

Qualquer $\Psi^{\sigma\rho}$ pode ser expandida como

$$\sum_\alpha c_\alpha \Phi_\alpha^{\mu\nu} + \sum_\kappa c_\kappa \psi_\kappa^{\mu\nu}. \quad (3.91)$$

onde $\psi_\kappa^{\mu\nu}$ são auto-estados do contínuo de H , com auto-valores $\epsilon_\kappa > 0$. Dessa forma, das Eq. (3.89) e Eq. (3.90), temos

$$H_q |\Psi\rangle = \sum_\kappa c_\kappa |\psi_\kappa\rangle. \quad (3.92)$$

Assim,

$$\langle \Psi | H_q | \Psi \rangle = \sum_\kappa \epsilon_\kappa |c_\kappa|^2, \quad (3.93)$$

Vemos que H_q é semidefinido positivo e, portanto, não possui estados ligados quark-antiquark.

O fato de que a interação quark-antiquark remanescente não pode formar os estados ligados empregados na transformação unitária realiza num certo sentido a idéia de quase-partículas de Weinberg [47]. O formalismo de quase-partículas de Weinberg foi introduzido com o objetivo de calcular amplitudes de espalhamento para potenciais muito fortes, para os quais a teoria de perturbação não pode ser empregada. Neste formalismo, partículas elementares fictícias são introduzidas na teoria, em correspondência direta com os estados ligados da teoria. Para que a física do problema não seja modificada, Weinberg argumenta que é necessário mudar simultaneamente o potencial. Como os estados ligados da teoria original são introduzidos como partículas elementares, o potencial modificado não deve produzir estes estados ligados. Portanto, o potencial modificado torna-se mais fraco e, por isso, a teoria de perturbação pode ser usada. No formalismo Fock-Tani, o potencial enfraquecido de Weinberg é realizado pelo potencial da Eq. (3.80).

Consideremos, agora, o termo do Hamiltoniano transformado que descreve interações envolvendo mésons e quarks, H_{mq} . Estas interações correspondem ao acoplamento dos estados ligados aos estados do contínuo. Em um modelo de quarks com confinamento de cor, estes processos não contribuem em ordem mais baixa na aproximação de Born, pois não há estados assintóticos de quarks livres. No entanto, estes processos irão contribuir em ordens mais altas como estados intermediários de processos físicos com estados assintóticos confinados sem cor. Por outro lado, na matéria hadrônica densa e quente, quando espera-se que haja desconfinamento, estas interações certamente irão contribuir em processos de espalhamento e reações em que os quarks e antiquarks aparecem como estados físicos no meio. Uma dessas interações representa o “break-up” de dois mésons em dois quarks e dois antiquarks e é dado por:

$$H_{mm \rightarrow q\bar{q}q\bar{q}} = \frac{1}{2} V(\mu\nu\rho\sigma; \alpha\beta) q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger q_\rho^\dagger \bar{q}_\sigma^\dagger m_\beta m_\alpha, \quad (3.94)$$

onde

$$\begin{aligned} V(\mu\nu\rho\sigma; \alpha\beta) = & V_{qq}(\mu\rho; \mu'\rho') \Phi_\beta^{\mu'\nu} \Phi_\alpha^{\rho'\sigma} + V_{\bar{q}\bar{q}}(\nu\sigma; \nu'\sigma') \Phi_\beta^{\rho\nu'} \Phi_\alpha^{\mu\sigma'} \\ & + 2V_{q\bar{q}}(\mu\sigma; \mu'\nu') \Phi_\beta^{\rho\nu'} \Phi_\alpha^{\mu'\nu}. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Quando iterado com seu Hermitiano conjugado, $H_{q\bar{q}q\bar{q} \rightarrow mm} = H_{mm \rightarrow q\bar{q}q\bar{q}}^\dagger$, que representa a recombinação de dois quarks e dois anti-quarks em dois mésons, temos a seguinte descrição para o processo: (1) os dois mésons colidem e quebram em dois quarks e dois anti-quarks, (2) os quarks e anti-quarks propagam-se livremente e (3) devido às forças confinantes recombinam-se em mésons. Este mecanismo, de segunda ordem na aproximação de Born, compete com o processo de mesma ordem em que no estado intermediário os quarks e anti-quarks permanecem ligados em mésons. Processos deste tipo, em que os quarks aparecem explicitamente nos estados intermediários, representam o início da escala microscópica, não aparecendo em modelos efetivos onde apenas os mésons estão envolvidos. As possíveis diferenças entre esses dois mecanismos permitiriam distinguir entre os efeitos genuinamente de quarks e os efeitos devidos aos mésons. O diagrama correspondente a esse processo é mostrado na Fig. (3.1).

Outra dessas interações corresponde à ionização de um méson livre resultando em um quark e um anti-quark livres, sendo dada por:

$$H_{m \rightarrow q\bar{q}} = V(\mu\nu; \alpha) q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger m_\alpha, \quad (3.96)$$

onde

$$V(\mu\nu; \alpha) = H(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_\alpha^{\mu'\nu'} - \Delta(\mu\nu; \mu'\nu') H(\mu'\nu'; \rho\sigma) \Phi_\alpha^{\rho\sigma}. \quad (3.97)$$

Os termos que contribuem para $H_{m \rightarrow q\bar{q}}$ são:

$$\begin{aligned} & T(\mu) q_\mu^{\dagger(1)} q_\mu^{(0)}, \quad T(\nu) \bar{q}_\nu^{\dagger(1)} \bar{q}_\nu^{(0)}, \quad T(\mu) q_\mu^{\dagger(1)} q_\mu^{(1)}, \quad T(\nu) \bar{q}_\nu^{\dagger(1)} \bar{q}_\nu^{(1)}, \\ & V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^{\dagger(1)} \bar{q}_\nu^{\dagger(0)} \bar{q}_\rho^{(0)} q_\sigma^{(0)}, \quad V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^{\dagger(1)} \bar{q}_\nu^{\dagger(0)} \bar{q}_\rho^{(0)} q_\sigma^{(1)}. \end{aligned} \quad (3.98)$$

O Hermitiano conjugado deste termo, $H_{q\bar{q} \rightarrow m} = H_{m \rightarrow q\bar{q}}^\dagger$, corresponde à recombinação de um quark e um anti-quark livres. Quando as funções de onda Φ são auto-estados do Hamiltoniano microscópico, estes termos são nulos, o que mostra a estabilidade dos estados ligados na ausência de interações externas. A mesma discussão feita para o caso dos termos de “break-up” vale aqui: dentro de um meio quente e denso, esses termos poderão contribuir, uma vez que o desconfinamento é permitido e os mésons não podem mais ser considerados livres de interações externas.

Figura 3.1: Diagrama para o processo de “break-up” de dois mésons.

O diagrama correspondente a esse processo é mostrado na Fig. (3.2).

Outro destes processos representa a interação entre um méson e um quark e é dado por:

$$H_{mq \rightarrow mq} = H_{mq}(\alpha' \mu'; \alpha \mu) m_{\alpha'}^\dagger q_{\mu'}^\dagger q_\mu m_\alpha \quad (3.99)$$

onde

$$\begin{aligned} H_{mq}(\alpha' \mu'; \alpha \mu) = & V_{mq}^{\text{dir}}(\alpha' \mu'; \alpha \mu) + V_{mq}^{\text{corr}}(\alpha' \mu'; \alpha \mu) \\ & + V_{mq}^{\text{intra}}(\alpha' \mu'; \alpha \mu) + V_{mq}^{\text{ex}}(\alpha' \mu'; \alpha \mu) \end{aligned} \quad (3.100)$$

Figura 3.2: Diagrama para o processo de “ionização” do méson.

com

$$V_{mq}^{\text{dir}}(\alpha'\mu'; \alpha\mu) = \Phi_{\alpha'}^{*\rho'\nu'} V_{q\bar{q}}(\mu'\nu'; \mu\nu) \Phi_{\alpha}^{\rho\nu} + \Phi_{\alpha'}^{*\rho'\nu} V_{qq}(\mu'\rho'; \mu\rho) \Phi_{\alpha}^{\rho\nu}. \quad (3.101)$$

$$\begin{aligned} V_{mq}^{\text{ort}}(\alpha'\mu'; \alpha\mu) = & -\Phi_{\alpha'}^{*\rho'\nu'} \left(\frac{3}{4}T_{\rho'} + \frac{1}{2}T_{\nu'} + \frac{1}{2}T_{\nu} + \frac{1}{8}T_{\mu'} + \frac{1}{8}T_{\mu} \right) \Delta(\mu'\nu'; \mu\nu) \Phi_{\alpha}^{\rho'\nu} \\ & - \frac{1}{2}\Phi_{\alpha'}^{*\rho'\nu'} V_{q\bar{q}}(\rho'\nu'; \rho\nu) \Delta(\mu'\nu'; \mu\sigma) \Phi_{\alpha}^{\rho\sigma} \\ & - \frac{1}{2}\Phi_{\alpha'}^{*\mu'\rho'} \Delta(\mu'\sigma; \mu\nu') V_{q\bar{q}}(\rho'\nu'; \rho\nu) \Phi_{\alpha}^{\rho\nu} \\ & - \frac{1}{2}\Phi_{\alpha'}^{*\rho'\nu'} V_{q\bar{q}}(\mu'\nu'; \rho\nu) \Delta(\rho\nu; \mu\sigma) \Phi_{\alpha}^{\rho'\sigma} \\ & - \frac{1}{2}\Phi_{\alpha'}^{*\rho'\sigma} \Delta(\mu'\sigma; \rho\nu') V_{q\bar{q}}(\rho\nu'; \mu\nu) \Phi_{\alpha}^{\rho'\nu} \\ & - \frac{1}{2}\Phi_{\alpha'}^{*\rho'\nu'} V_{qq}(\rho'\mu'; \lambda\rho) \Delta(\rho\nu'; \mu\nu) \Phi_{\alpha}^{\lambda\nu} \\ & - \frac{1}{2}\Phi_{\alpha'}^{*\rho'\nu'} \Delta(\mu'\nu'; \rho\nu) V_{qq}(\rho'\rho; \lambda\mu) \Phi_{\alpha}^{\lambda\nu}. \end{aligned} \quad (3.102)$$

$$\begin{aligned} V_{mq}^{\text{intra}}(\alpha'\mu'; \alpha\mu) = & -\frac{1}{2}\Phi_{\alpha'}^{*\mu\nu'} H(\mu'\nu'; \lambda\nu) \Phi_{\alpha}^{\lambda\nu} - \frac{1}{2}\Phi_{\alpha'}^{*\lambda\nu'} H(\lambda\nu'; \mu\nu) \Phi_{\alpha}^{\mu'\nu} \\ & + \frac{1}{2}\Phi_{\alpha'}^{*\mu\sigma} \Delta(\mu'\sigma; \rho\nu') H(\rho\nu'; \lambda\nu) \Phi_{\alpha}^{\lambda\nu} \\ & + \frac{1}{2}\Phi_{\alpha'}^{*\lambda\nu'} H(\lambda\nu'; \rho\nu) \Delta(\rho\nu; \mu\sigma) \Phi_{\alpha}^{\mu'\sigma}. \end{aligned} \quad (3.103)$$

$$\begin{aligned} V_{mq}^{\text{ex}}(\alpha'\mu'; \alpha\mu) = & -\frac{1}{2}\Phi_{\alpha'}^{*\mu\nu'} V_{q\bar{q}}(\mu'\nu'; \lambda\nu) \Phi_{\alpha}^{\lambda\nu} - \frac{1}{2}\Phi_{\alpha'}^{*\lambda\nu'} V_{q\bar{q}}(\lambda\nu'; \mu\nu) \Phi_{\alpha}^{\mu'\nu} - \Phi_{\alpha'}^{*\rho'\nu} V_{qq}(\mu'\rho'; \rho\mu) \Phi_{\alpha}^{\rho\nu} \\ & + \frac{1}{2}\Phi_{\alpha'}^{*\lambda\sigma} \Delta(\mu'\sigma; \rho\nu') V_{q\bar{q}}(\lambda\nu'; \mu\nu) \Phi_{\alpha}^{\rho\nu} \\ & + \frac{1}{2}\Phi_{\alpha'}^{*\rho\nu'} V_{q\bar{q}}(\mu'\nu'; \lambda\nu) \Delta(\rho\nu'; \mu\sigma) \Phi_{\alpha}^{\lambda\sigma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \Phi_{\alpha'}^{*\rho'\nu'} V_{qq}(\mu'\rho'; \rho\lambda) \Delta(\lambda\nu'; \mu\nu) \Phi_{\alpha}^{\rho\nu} \\
& + \frac{1}{2} \Phi_{\alpha'}^{*\rho'\nu'} \Delta(\mu'\nu'; \rho\nu) V_{qq}(\rho'\rho; \mu\lambda) \Phi_{\alpha}^{\lambda\nu} .
\end{aligned} \tag{3.104}$$

O termo V_{mq}^{dir} , de segunda ordem em Φ , é o termo de interação direto. O termo V_{mq}^{ort} é de quarta ordem em Φ e corresponde às correções de ortogonalidade ao termo direto. O termo V_{mq}^{intra} corresponde à interação com troca de um glúon dentro do méson seguida da troca de quarks, incluindo as correções de ortogonalidade de ordem quatro em Φ . O termo V_{mq}^{ex} representa a interação com troca de um glúon entre o méson e o quark livre seguida da troca de quarks, mais as correções de ortogonalidade de ordem quatro. Esse resultado é análogo ao obtido para o caso atômico [41].

As correções de ortogonalidade, de ordem mais alta em Φ , são equivalentes à descrição dos estados do contínuo por ondas planas ortogonalizadas (ondas planas com a projeção nos estados ligados subtraída [60]). Consideremos, por exemplo, um estado de um quark e um antiquark do contínuo, $|\mu; \nu\rangle$:

$$|\mu; \nu\rangle = q_{\mu}^{\dagger} \bar{q}_{\nu}^{\dagger} |0\rangle \tag{3.105}$$

Este estado é descrito por uma onda plana simples. Para extrair deste estado a projeção nos estados ligados, utilizamos o projetor P_c , dado por:

$$P_c = 1 - |\alpha\rangle\langle\alpha| \tag{3.106}$$

Aplicando o projetor ao estado $|\mu\nu\rangle$, temos

$$\begin{aligned}
P_c |\mu; \nu\rangle &= \{1 - |\alpha\rangle\langle\alpha|\} |\mu; \nu\rangle = \\
&= |\mu; \nu\rangle - |\alpha\rangle\langle\alpha|\mu; \nu\rangle = \\
&= |\mu; \nu\rangle - \Delta(\mu'\nu'; \mu\nu) |\mu'; \nu'\rangle
\end{aligned} \tag{3.107}$$

Esse resultado é equivalente à modificação do potencial quark-antiquark de forma a não formar mais estados ligados quark-antiquark descrita anteriormente.

No formalismo de FT, os termos de ortogonalidade aparecem em ordem mais alta nos elementos de matriz, como consequência da transformação dos operadores. Esse resultado tem a vantagem de que os operadores de quark e antiquark continuam satisfazendo

relações de anticomutação canônicas, o que não ocorreria se fossem utilizados os operadores projetados [38]. No caso em que as funções de onda Φ são auto-estados do Hamiltoniano microscópico, o termo V_{mq}^{intra} torna-se nulo, por um argumento análogo ao que exige o cancelamento dos termos de ionização e recombinação de um méson livre. Esse cancelamento mostra que as correções de ortogonalização podem ser muito importantes.

Consideremos, agora, o termo do Hamiltoniano transformado contendo somente operadores de mésons, H_m . Em ordem mais baixa este termo tem a forma geral

$$H_m^{(0)} = T_m^{(0)} + V_{mm}^{(0)}. \quad (3.108)$$

$T_m^{(0)}$ é o termo de um único méson, dado por

$$T_m^{(0)} = \sum_{\alpha\beta} T(\alpha, \beta) m_\alpha^\dagger m_\beta, \quad (3.109)$$

onde

$$\begin{aligned} T(\alpha, \beta) &= \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \{ \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'} [T(\mu') + T(\nu')] + V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu') \} \Phi_\beta^{\mu'\nu'} \\ &= \Phi_\alpha^{*\mu\nu} H(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_\beta^{\mu'\nu'}. \end{aligned} \quad (3.110)$$

Nesta expressão, os termos em $T(\mu)$ e $T(\nu)$ vêm das contribuições dos termos de ordem dois.

$$T(\mu) q_\mu^{\dagger(1)} q_\mu^{(1)}, \quad T(\nu) \bar{q}_\nu^{\dagger(1)} \bar{q}_\nu^{(1)}. \quad (3.111)$$

O termo $V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho)$ vem da contribuição do termo de ordem dois

$$V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^{\dagger(1)} \bar{q}_\nu^{\dagger(0)} \bar{q}_\rho^{(0)} q_\sigma^{(1)}. \quad (3.112)$$

Se Φ_α é um auto-estado do Hamiltoniano microscópico de quarks, temos

$$T(\alpha, \beta) = \delta_{\alpha\beta} \epsilon_\beta, \quad (3.113)$$

de modo que o termo $T_m^{(0)}$ reduz-se a:

$$T_m^{(0)} = \sum_\alpha \epsilon_\alpha m_\alpha^\dagger m_\alpha. \quad (3.114)$$

$V_{mm}^{(0)}$ corresponde ao potencial efetivo méson-méson:

$$V_{mm}^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} V_{mm}(\alpha\beta; \gamma\delta) m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger m_\delta m_\gamma, \quad (3.115)$$

onde $V_{mm}(\alpha\beta; \gamma\delta)$ é dado por:

$$V_{mm}(\alpha\beta; \gamma\delta) = V_{mm}^{\text{intra-ex}}(\alpha\beta; \gamma\delta) + V_{mm}^{\text{dir}}(\alpha\beta; \gamma\delta) + V_{mm}^{\text{ex}}(\alpha\beta; \gamma\delta). \quad (3.116)$$

$$\begin{aligned} V_{mm}^{\text{intra-ex}}(\alpha\beta; \gamma\delta) = & - \frac{1}{2} \Phi_{\alpha}^{*\mu\nu} \Phi_{\beta}^{*\rho\sigma} H(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_{\delta}^{\mu'\sigma} \Phi_{\gamma}^{\rho\nu'} \\ & - \frac{1}{2} \Phi_{\alpha}^{*\rho\sigma} \Phi_{\beta}^{*\mu\nu} H(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_{\delta}^{\rho\nu'} \Phi_{\gamma}^{\mu'\sigma} \\ & - \frac{1}{2} \Phi_{\alpha}^{*\mu\sigma} \Phi_{\beta}^{*\rho\nu} H(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_{\delta}^{\mu'\nu'} \Phi_{\gamma}^{\rho\sigma} \\ & - \frac{1}{2} \Phi_{\alpha}^{*\rho\nu} \Phi_{\beta}^{*\mu\sigma} H(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_{\delta}^{\rho\sigma} \Phi_{\gamma}^{\mu'\nu'}, \end{aligned} \quad (3.117)$$

$$\begin{aligned} V_{mm}^{\text{dir}}(\alpha\beta; \gamma\delta) = & + 2\Phi_{\alpha}^{*\mu\sigma} \Phi_{\beta}^{*\rho\nu} V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_{\delta}^{\rho\nu'} \Phi_{\gamma}^{\mu'\sigma} \\ & + \Phi_{\alpha}^{*\mu\sigma} \Phi_{\beta}^{*\rho\nu} V_{qq}(\mu\rho; \mu'\rho') \Phi_{\delta}^{\rho'\nu} \Phi_{\gamma}^{\mu'\sigma} \\ & + \Phi_{\alpha}^{*\mu\sigma} \Phi_{\beta}^{*\rho\nu} V_{\bar{q}\bar{q}}(\sigma\nu; \sigma'\nu') \Phi_{\delta}^{\rho\nu'} \Phi_{\gamma}^{\mu\sigma'} \end{aligned} \quad (3.118)$$

$$\begin{aligned} V_{mm}^{\text{ex}}(\alpha\beta; \gamma\delta) = & - \frac{1}{2} \Phi_{\alpha}^{*\mu\nu} \Phi_{\beta}^{*\rho\sigma} V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_{\delta}^{\mu'\sigma} \Phi_{\gamma}^{\rho\nu'} \\ & - \frac{1}{2} \Phi_{\alpha}^{*\rho\sigma} \Phi_{\beta}^{*\mu\nu} V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_{\delta}^{\rho\nu'} \Phi_{\gamma}^{\mu'\sigma} \\ & - \frac{1}{2} \Phi_{\alpha}^{*\mu\sigma} \Phi_{\beta}^{*\rho\nu} V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_{\delta}^{\mu'\nu'} \Phi_{\gamma}^{\rho\sigma} \\ & - \frac{1}{2} \Phi_{\alpha}^{*\rho\nu} \Phi_{\beta}^{*\mu\sigma} V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_{\delta}^{\rho\sigma} \Phi_{\gamma}^{\mu'\nu'} \\ & - \Phi_{\alpha}^{*\mu\sigma} \Phi_{\beta}^{*\rho\nu} V_{qq}(\mu\rho; \mu'\rho') \Phi_{\delta}^{\mu'\nu} \Phi_{\gamma}^{\rho'\sigma} \\ & - \Phi_{\alpha}^{*\mu\sigma} \Phi_{\beta}^{*\rho\nu} V_{\bar{q}\bar{q}}(\sigma\nu; \sigma'\nu') \Phi_{\delta}^{\mu\nu'} \Phi_{\gamma}^{\rho\sigma'}. \end{aligned} \quad (3.119)$$

O termo $V_{mm}^{\text{intra-ex}}$ corresponde à interação dos dois mésons com troca de um glúon dentro do méson seguida da troca de um quark. Para Φ 's auto-funções do Hamiltoniano, esse termo reduz-se a:

$$\begin{aligned} V_{mm}^{\text{intra-ex}}(\alpha\beta; \gamma\delta) = & - \frac{1}{2} \epsilon_{[\alpha]} \Phi_{[\alpha]}^{*\mu'\nu'} \Phi_{\beta}^{*\rho\sigma} \Phi_{\delta}^{\mu'\sigma} \Phi_{\gamma}^{\rho\nu'} \\ & - \frac{1}{2} \epsilon_{[\beta]} \Phi_{\alpha}^{*\rho\sigma} \Phi_{[\beta]}^{*\mu'\nu'} \Phi_{\delta}^{\rho\nu'} \Phi_{\gamma}^{\mu'\sigma} \\ & - \frac{1}{2} \epsilon_{[\delta]} \Phi_{\alpha}^{*\mu\sigma} \Phi_{\beta}^{*\rho\nu} \Phi_{[\delta]}^{\mu\nu} \Phi_{\gamma}^{\rho\sigma} \\ & - \frac{1}{2} \epsilon_{[\gamma]} \Phi_{\alpha}^{*\rho\nu} \Phi_{\beta}^{*\mu\sigma} \Phi_{\delta}^{\rho\sigma} \Phi_{[\gamma]}^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.120)$$

O termo V_{mm}^{dir} corresponde à interação dos dois mésons através da troca de um glúon entre eles, sem troca de quark. O termo V_{mm}^{ex} corresponde à interação dos dois mésons através da troca de um glúon entre eles, seguida da troca de um quark. As Fig. (3.3), (3.4), (3.5) mostram os diagramas correspondentes a esses termos. Os diagramas relativos ao termo V_{mm}^{ex} são análogos aos diagramas utilizados por Barnes e Swanson [26] para obter o potencial efetivo méson-méson através do QBD, incluindo, adicionalmente, os diagramas correspondentes aos termos “post”. Além disso, nesses diagramas consideramos a troca de quarks entre os mésons ao invés da troca de antiquarks que aparece no QBD.

Figura 3.3: Diagramas correspondentes às contribuições do termo $V_{mm}^{intra-ex}$.

Figura 3.4: Diagramas correspondentes às contribuições do termo $V_{\text{mm}}^{\text{dir}}$.

Figura 3.5: Diagramas correspondentes às contribuições do termo V_{mm}^{ex} .

Os diversos termos têm sua origem da seguinte maneira:

- os termos de energia cinética dos quarks e antiquarks vêm de

$$T(\mu)q_\mu^\dagger{}^{(3)}q_\mu^{(1)} + \text{h.c.}, \quad T(\nu)\bar{q}_\mu^\dagger{}^{(3)}\bar{q}_\mu^{(1)} + \text{h.c.} \quad (3.121)$$

- os termos de potencial quark-quark e antiquark-antiquark vêm de:

$$V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho)q_\mu^\dagger{}^{(1)}q_\nu^\dagger{}^{(1)}q_\rho^{(1)}q_\sigma^{(1)}, \quad V_{\bar{q}\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho)\bar{q}_\mu^\dagger{}^{(1)}\bar{q}_\nu^\dagger{}^{(1)}\bar{q}_\rho^{(1)}\bar{q}_\sigma^{(1)}. \quad (3.122)$$

- os termos de potencial quark-antiquark vêm de

$$V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho)q_\mu^\dagger{}^{(1)}\bar{q}_\nu^\dagger{}^{(2)}\bar{q}_\rho^{(0)}q_\sigma^{(1)} + \text{h.c.}, \quad V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho)q_\mu^\dagger{}^{(3)}\bar{q}_\nu^\dagger{}^{(0)}\bar{q}_\rho^{(0)}q_\sigma^{(1)} + \text{h.c.}, \quad (3.123)$$

$$V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho)q_\mu^\dagger{}^{(1)}\bar{q}_\nu^\dagger{}^{(1)}\bar{q}_\rho^{(1)}q_\sigma^{(1)}. \quad (3.124)$$

É importante notar que a Eq. (3.115) representa a contribuição de ordem mais baixa na função de onda Φ para o potencial méson-méson (quarta ordem). Existem outras contribuições de ordem mais alta que correspondem às correções de ortogonalidade, análogas as que aparecem no termo $H_{mq \rightarrow mq}$. Por exemplo, consideremos a integração até quinta ordem do quinto termo da Eq. (3.70),

$$\frac{dq_\mu^{(5)}(t)}{dt} = -\delta_{\mu\mu_1} \frac{1}{2} \Phi_\gamma^{\mu_1\nu_1} \bar{q}_{\nu_1}^\dagger{}^{(0)}(t) \Delta_{\gamma\alpha}^{(4)}(t) m_\alpha^{(0)}(t). \quad (3.125)$$

Integrando, obtemos

$$\begin{aligned} q_\mu^{(5)} = & + \frac{1}{6} \Delta(\mu\nu; \lambda\tau) \Phi_\gamma^{*\rho\tau'} \Phi_\alpha^{\lambda\tau'} \Phi_\beta^{\rho'\tau} m_\gamma^\dagger m_\beta m_\alpha q_\nu^\dagger q_\rho q_{\rho'}^\dagger \\ & + \frac{1}{6} \Delta(\mu\nu; \lambda\tau) \Phi_\gamma^{*\lambda'\sigma} \Phi_\alpha^{\lambda'\tau} \Phi_\beta^{\lambda\sigma'} m_\gamma^\dagger m_\beta m_\alpha q_\nu^\dagger \bar{q}_\sigma q_\sigma^\dagger, \end{aligned} \quad (3.126)$$

Analogamente, para o operador de antiquark, temos da Eq. (3.71)

$$\frac{d\bar{q}_\nu^{(5)}(t)}{dt} = \delta_{\nu\nu_1} \frac{1}{2} \Phi_\gamma^{\rho\nu_1} q_\rho^\dagger{}^{(0)}(t) \Delta_{\gamma\beta}^{(4)}(t) m_\beta^{(0)}(t), \quad (3.127)$$

cujas soluções são:

$$\begin{aligned} \bar{q}_\nu^{(5)} = & - \frac{1}{6} \Delta(\mu\nu; \lambda\tau) \Phi_\gamma^{*\rho\tau'} \Phi_\alpha^{\lambda\tau'} \Phi_\beta^{\rho'\tau} m_\gamma^\dagger m_\beta m_\alpha q_\mu^\dagger q_\rho q_{\rho'}^\dagger \\ & - \frac{1}{6} \Delta(\mu\nu; \lambda\tau) \Phi_\gamma^{*\lambda'\sigma} \Phi_\alpha^{\lambda'\tau} \Phi_\beta^{\lambda\sigma'} m_\gamma^\dagger m_\beta m_\alpha q_\mu^\dagger \bar{q}_\sigma q_\sigma^\dagger, \end{aligned} \quad (3.128)$$

Utilizando esses operadores de quinta ordem na transformação do Hamiltoniano microscópico, obtemos uma contribuição para V_{mm} dada por

$$\begin{aligned} & T(\mu)q_\mu^{\dagger(5)}q_\mu^{(1)} + T(\nu)\bar{q}_\nu^{\dagger(5)}\bar{q}_\nu^{(1)} + V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \rho\sigma)q_\mu^{(5)\dagger}\bar{q}_\nu^{(0)\dagger}\bar{q}_\sigma^{(0)}q_\rho^{(5)} + (\text{h.c.}) = \\ & = \frac{1}{6} \left[\Phi_\alpha^{*\mu\sigma} \Phi_\beta^{*\rho\nu} \Delta(\mu\nu; \lambda\tau) H(\lambda\tau; \mu'\nu') \Phi_\delta^{\mu'\nu'} \Phi_\gamma^{\rho\sigma} \right. \\ & + \left. \Phi_\alpha^{*\rho\nu} \Phi_\beta^{*\mu\sigma} \Delta(\mu\nu; \lambda\tau) H(\lambda\tau; \mu'\nu') \Phi_\delta^{\rho\sigma} \Phi_\gamma^{\mu'\nu'} \right] m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger m_\delta m_\gamma + (\text{h.c.}) . \end{aligned} \quad (3.129)$$

Naturalmente, existem outras contribuições do mesmo tipo provenientes do operador $O_\alpha^{(5)}$. Dessa forma, o termo H_m pode ser escrito como

$$H_m = H_m^{(0)} + \Delta H_m , \quad (3.130)$$

onde ΔH_m representa as correções de ortogonalidade.

Conforme observado anteriormente, essas correções de ortogonalidade têm o efeito, entre outros, de enfraquecer o termo $V_{mm}^{\text{intra-ex}}$. No caso em que as funções de onda Φ são autoestados do Hamiltoniano microscópico pode-se mostrar que a correção de ortogonalização de ordem mais baixa cancela exatamente o termo $V_{mm}^{\text{intra-ex}}$, restando correções de ordem mais alta. Esse resultado será mostrado adiante na discussão do RGM. O cálculo explícito dos termos que levam a correções de ortogonalidade pode ser evitado utilizando-se um método gráfico similar ao utilizado por Gilbert [35] .

3.4 Formalismo Fock-Tani e o “Resonating Group Method”.

Nesta seção vamos reformular o problema do espalhamento de dois “clusters” usando o RGM na linguagem de segunda quantização. Nesta linguagem, o “ansatz” para o estado de dois mésons é dado por:

$$|\Lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_\Lambda^{\alpha\beta} M_\alpha^\dagger M_\beta^\dagger |0\rangle , \quad (3.131)$$

onde $\Psi_\Lambda^{\alpha\beta}$ é a função de onda ansatz para o estado de dois mésons, que descreve o movimento do centro de massa e o movimento relativo dos dois “clusters”. Os operadores de méson são os mesmos utilizados anteriormente na Eq. (3.1). Λ identifica os números quânticos do estado de dois mésons. A condição de normalização para $\Psi_\Lambda^{\alpha\beta}$ é dada por

$$\langle \Lambda | \Lambda' \rangle = \Psi_\Lambda^{*\alpha\beta} N(\alpha\beta; \alpha'\beta') \Psi_{\Lambda'}^{\alpha'\beta'} , \quad (3.132)$$

onde $N(\alpha\beta; \alpha'\beta')$ é o “kernel de normalização”,

$$N(\alpha\beta; \alpha'\beta') = \delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'} - N_E(\alpha\beta; \alpha'\beta') , \quad (3.133)$$

e

$$N_E(\alpha\beta; \alpha'\beta') = \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{*\rho\sigma} \Phi_{\beta'}^{\mu\sigma} \Phi_{\alpha'}^{\rho\nu} . \quad (3.134)$$

é o “kernel” de troca.

A equação de movimento para $\Psi_\Lambda^{\alpha\beta}$ é obtida por meio do princípio variacional:

$$\delta \langle \Lambda | (H - E_\Lambda) | \Lambda \rangle = 0 . \quad (3.135)$$

A equação RGM obtida é:

$$[H_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) - E_\Lambda N(\alpha\beta; \gamma\delta)] \Psi_\Lambda^{\gamma\delta} = 0 , \quad (3.136)$$

onde a matriz Hamiltoniana

$$H_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) = T_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) + V_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta), \quad (3.137)$$

onde $T_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta)$ é dado por:

$$T_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) = \delta_{\beta\delta} \Phi_\alpha^{*\mu\nu} H(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_\gamma^{\mu'\nu'} + \delta_{\alpha\gamma} \Phi_\beta^{*\mu\nu} H(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_\delta^{\mu'\nu'}, \quad (3.138)$$

e

$$V_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) = V_{mm}(\alpha\beta; \gamma\delta), \quad (3.139)$$

onde V_{mm} está definido na Eqs. (3.116)-(3.119).

O Hamiltoniano RGM “renormalizado” é então dado por:

$$\bar{H}_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) \equiv N^{-\frac{1}{2}}(\alpha\beta; \alpha'\beta') H_{RGM}(\alpha'\beta'; \gamma'\delta') N^{-\frac{1}{2}}(\gamma'\delta'; \gamma\delta), \quad (3.140)$$

de modo que a equação de movimento RGM “renormalizada” pode ser escrita como:

$$[\bar{H}_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) - E_\Lambda \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta}] \bar{\Psi}_\Lambda^{\gamma\delta} = 0 . \quad (3.141)$$

Expandindo a matriz $N^{-\frac{1}{2}}$ de acordo com

$$N^{-\frac{1}{2}} = (1 - N_E)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}N_E + \frac{3}{4}N_E^2 + \dots \quad (3.142)$$

obtemos

$$\bar{H}_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) = H_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) + \Delta H_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta), \quad (3.143)$$

onde $\Delta H_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta)$ contém potências do fator $\Delta(\mu\nu; \rho\sigma) = \Phi_\alpha^{\mu\nu} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma}$. Usando a expansão dada na Eq. (3.142) até primeira ordem em N_E , obtemos o potencial efetivo méson-méson com a correção de ortogonalidade de ordem mais baixa em $\Delta(\mu\nu; \rho\sigma)$ dado por:

$$V_{mm}^{\text{orto}(1)}(\alpha\beta; \gamma\delta) = V_{mm}^{\text{dir}}(\alpha\beta; \gamma\delta) + V_{mm}^{\text{intra-ex}}(\alpha\beta; \gamma\delta) + \Delta H_{RGM}^{(1)}(\alpha\beta; \gamma\delta) + V_{mm}^{\text{ex}}(\alpha\beta; \gamma\delta), \quad (3.144)$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta H_{RGM}^{(1)}(\alpha\beta; \gamma\delta) = & \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{*\rho\sigma} H(\mu\nu; \lambda\tau) \Delta(\lambda\tau; \mu'\sigma') \Phi_\delta^{\mu'\sigma} \Phi_\gamma^{\rho\sigma'} \\ & + \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{*\mu\nu} H(\mu\nu; \lambda\tau) \Delta(\lambda\tau; \mu'\sigma') \Phi_\delta^{\rho\sigma'} \Phi_\gamma^{\mu'\sigma} \\ & + \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu\sigma} \Phi_\beta^{*\rho\nu} \Delta(\mu\nu; \lambda\tau) H(\lambda\tau; \mu'\nu') \Phi_\delta^{\mu'\nu'} \Phi_\gamma^{\rho\sigma} \\ & + \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\nu} \Phi_\beta^{*\mu\sigma} \Delta(\mu\nu; \lambda\tau) H(\lambda\tau; \mu'\nu') \Phi_\delta^{\rho\sigma} \Phi_\gamma^{\mu'\nu'} \end{aligned} \quad (3.145)$$

Agora, para Φ 's auto-funções do Hamiltoniano, e utilizando a propriedade Eq. (3.88), obtemos que a correção de ortogonalização de ordem mais baixa cancela exatamente o termo $V_{mm}^{\text{intra-ex}}$:

$$V_{mm}^{\text{intra-ex}} + \Delta H_{mm}^{(1)} = 0 \quad (3.146)$$

O mesmo problema descrito no formalismo Fock-Tani consiste em escrever para a função ansatz o seguinte:

$$|\Lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \chi_\Lambda^{\alpha\beta} m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger |0\rangle \quad (3.147)$$

A função de onda do estado de dois mésons no formalismo de FT satisfaz a condição de normalização usual,

$$\langle \Lambda | \Lambda' \rangle = \chi_\Lambda^{*\alpha\beta} \chi_{\Lambda'}^{\alpha\beta} = \delta_{\Lambda\Lambda'}. \quad (3.148)$$

Utilizando o princípio variacional,

$$\delta \langle \Lambda | (H_{FT} - E_\Lambda) | \Lambda \rangle = 0, \quad (3.149)$$

obtemos a equação de movimento para $\chi_\Lambda^{\alpha\beta}$:

$$[H_{FT}(\alpha\beta; \gamma\delta) - E_\Lambda \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta}] \chi_\Lambda^{\gamma\delta} = 0, \quad (3.150)$$

onde H_{FT} é a matriz Hamiltoniana Fock-Tani

$$H_{FT}(\alpha\beta; \gamma\delta) = \delta_{\beta\delta} \Phi_{\alpha}^{*\mu\nu} H(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_{\gamma}^{\mu'\nu'} + \delta_{\alpha\gamma} \Phi_{\beta}^{*\mu\nu} H(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_{\delta}^{\mu'\nu'} + V_{mm}(\alpha\beta; \gamma\delta). \quad (3.151)$$

Notamos então, que

$$H_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) = H_{FT}(\alpha\beta; \gamma\delta). \quad (3.152)$$

A diferença nas equações de movimento para as duas funções ansatz consiste na presença do kernel de normalização na equação RGM. Por outro lado, a Eq. (3.130) mostra que este pode ser gerado no formalismo Fock-Tani a partir da consideração de termos de ordem mais alta. Portanto, o truncamento do gerador da transformação Fock-Tani até terceira ordem implica, para o problema do espalhamento méson-méson, que as correções de ortogonalidade não estão consideradas.

Para as aplicações que se seguem nesta tese, vamos sempre desconsiderar os termos *intra-exchange*, os quais, como vimos, são cancelados pelas correções de ortogonalidade em ordem mais baixa.

3.5 Exemplo: Potencial Efetivo Méson-Méson para Interação Microscópica tipo Oscilador Harmônico.

Nesta secção apresentamos um exemplo simples de aplicação do formalismo Fock-Tani. Consideremos uma interação microscópica do tipo oscilador harmônico, independente de spin e sabor. O Hamiltoniano correspondente, em primeira quantização e no espaço de coordenadas, é dado por

$$H = \sum_i \left(\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i} + m_i \right) + \sum_{(i>j)} V_{ij}^{\text{osc}} \quad (3.153)$$

com

$$V_{ij}^{\text{osc}} = - \left(C + \frac{1}{2} k |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2 \right) \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{F}_j, \quad (3.154)$$

Notamos a seguinte particularidade sobre as matrizes de cor $\mathbf{F} = (1/2\lambda^1, \dots, 1/2\lambda^8)$ com relação ao fato de os índices i e j se referirem a um quark ou a um anti-quark:

$$\mathbf{F} = (1/2\lambda^1, \dots, 1/2\lambda^8) \quad \text{para quarks} \quad (3.155)$$

$$\mathbf{F} = (-1/2\lambda^{1T}, \dots, -1/2\lambda^{8T}) \quad \text{para anti-quarks} \quad (3.156)$$

Para separar o movimento do centro de massa e o movimento relativo, fazemos a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j &\rightarrow \mathbf{R}, \mathbf{r} \\ \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j &\rightarrow \mathbf{P}, \mathbf{p} \end{aligned} \quad (3.157)$$

onde $\mathbf{R}$ é o vetor posição do centro de massa, $\mathbf{r}$ é o vetor posição relativa, $\mathbf{P}$ é o momento do centro de massa e $\mathbf{p}$ é o momento relativo,

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \frac{(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j)}{2} \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \\ \mathbf{P} &= \mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j \\ \mathbf{p} &= \frac{(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)}{2} . \end{aligned} \quad (3.158)$$

Com essa mudança de variáveis, o Hamiltoniano torna-se:

$$H = H^{\text{cm}} + H^{\text{rel}} \quad (3.159)$$

com

$$H^{\text{cm}} = \left[\frac{\mathbf{P}^2}{2M} + M \right] \quad (3.160)$$

$$H^{\text{rel}} = \left[\frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} - \left(C + \frac{1}{2} k r^2 \right) \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{F}_j \right] , \quad (3.161)$$

onde $M = m_i + m_j$ e $\mu = \frac{(m_i + m_j)}{4}$.

Consideremos o Hamiltoniano quark-antiquark, $H_{q\bar{q}}$,

$$\begin{aligned} H_{q\bar{q}} &= H_{q\bar{q}}^{\text{cm}} + H_{q\bar{q}}^{\text{rel}} = \\ &= \left[-\frac{\nabla_{\mathbf{R}}^2}{2M} + M \right] + \left[-\frac{\nabla_{\mathbf{r}}^2}{2\mu} + \left(C + \frac{1}{2} k r^2 \right) \left(\frac{\lambda_i}{2} \right) \left(\frac{\lambda_j^T}{2} \right) \right] , \end{aligned} \quad (3.162)$$

onde foi feita a substituição

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &\rightarrow -i\nabla_{\mathbf{R}} \\ \mathbf{p} &\rightarrow -i\nabla_{\mathbf{r}} . \end{aligned} \quad (3.163)$$

Seja $\Psi_{\mathbf{P}}(\mathbf{R}, \mathbf{r})$ a função de onda espacial de um méson composto por um quark e um antiquark ligados. A equação de Schroedinger para a função de onda Ψ é dada por:

$$H_{q\bar{q}}\Psi_{\mathbf{P}}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \epsilon_{\text{tot}}\Psi_{\mathbf{P}}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) . \quad (3.164)$$

Supondo que Ψ possa ser escrita na forma separável

$$\Psi_{\mathbf{P}}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \psi_{\mathbf{P}}(\mathbf{R})\Phi(\mathbf{r}) , \quad (3.165)$$

obtemos duas equações, uma para o centro de massa e outra para o movimento relativo:

$$\left[-\frac{\nabla_{\mathbf{R}}^2}{2M} + M \right] \psi_{\mathbf{P}}(\mathbf{R}) = \epsilon_{\text{cm}}\psi_{\mathbf{P}}(\mathbf{R}) \quad (3.166)$$

$$\left[-\frac{\nabla_{\mathbf{r}}^2}{2\mu} + \left(C + \frac{1}{2}k\mathbf{r}^2 \right) \left(\frac{\lambda_i}{2} \right) \left(\frac{\lambda_j^T}{2} \right) \right] \Phi(\mathbf{r}) = \epsilon_{\text{rel}}\Phi(\mathbf{r}) , \quad (3.167)$$

com $\epsilon_{\text{tot}} = \epsilon_{\text{cm}} + \epsilon_{\text{rel}}$.

A auto-função da Eq. (3.166) é dada por,

$$\psi_{\mathbf{P}}(\mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}} , \quad (3.168)$$

com auto-valor correspondente

$$\epsilon_{\text{cm}} = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + M . \quad (3.169)$$

Dessa forma, vemos que o movimento do centro de massa é descrito por uma onda plana, correspondendo à uma partícula livre de massa M e momento $\mathbf{P}$.

A auto-função da Eq. (3.167) para o estado fundamental é dada por uma gaussiana

$$\Phi(\mathbf{r}) = \left(\frac{\alpha_{\text{sho}}^2}{\pi} \right)^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{\alpha_{\text{sho}}^2 \mathbf{r}^2}{2}} , \quad (3.170)$$

com auto-valor correspondente

$$\epsilon_{\text{rel}} = \frac{3\alpha_{\text{sho}}^2}{2\mu} + \frac{4C}{3} . \quad (3.171)$$

onde α_{sho} é o parâmetro do oscilador harmônico simples, dado por

$$\alpha_{\text{sho}}^2 = \left(\frac{4\mu k}{3} \right)^{\frac{1}{2}} , \quad (3.172)$$

Assim, a função de onda espacial é dada por

$$\Psi_{\mathbf{P}}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{R}} \left(\frac{\alpha_{\text{sho}}^2}{\pi} \right)^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{\alpha_{\text{sho}}^2}{2} \mathbf{r}^2}, \quad (3.173)$$

com auto-energia correspondente

$$\epsilon_{\text{tot}} = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + M_{\text{mes}}, \quad (3.174)$$

onde

$$M_{\text{mes}} = M + \frac{3\alpha_{\text{sho}}^2}{2\mu} + \frac{4C}{3}. \quad (3.175)$$

Em notação de segunda quantização, podemos então escrever para o Hamiltoniano microscópico da Eq. (3.73) o seguinte:

- para as energias cinéticas dos quarks e antiquarks:

$$T(\mu) = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} + m_1 \quad (3.176)$$

$$T(\nu) = \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} + m_2 \quad (3.177)$$

$$(3.178)$$

- para a interação quark-quark:

$$\begin{aligned} V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) &= \delta_{f_1', f_1} \delta_{f_2', f_2} \delta_{s_1', s_1} \delta_{s_2', s_2} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_1' c_1} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_2' c_2} \\ &\times \delta^{(3)}(\mathbf{p}_{1'} + \mathbf{p}_{2'} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) V(\mathbf{p}_{1'} - \mathbf{p}_1) \end{aligned} \quad (3.179)$$

- para a interação anti-quark-anti-quark:

$$\begin{aligned} V_{\bar{q}\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) &= \delta_{f_1', f_1} \delta_{f_2', f_2} \delta_{s_1', s_1} \delta_{s_2', s_2} \left(-\frac{\lambda^{aT}}{2} \right)^{c_1' c_1} \left(-\frac{\lambda^{aT}}{2} \right)^{c_2' c_2} \\ &\times \delta^{(3)}(\mathbf{p}_{1'} + \mathbf{p}_{2'} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) V(\mathbf{p}_{1'} - \mathbf{p}_1) \end{aligned} \quad (3.180)$$

- para a interação quark-anti-quark:

$$\begin{aligned} V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) &= \delta_{f_1', f_1} \delta_{f_2', f_2} \delta_{s_1', s_1} \delta_{s_2', s_2} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_1' c_1} \left(-\frac{\lambda^{aT}}{2} \right)^{c_2' c_2} \\ &\times \delta^{(3)}(\mathbf{p}_{1'} + \mathbf{p}_{2'} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) V(\mathbf{p}_{1'} - \mathbf{p}_1), \end{aligned} \quad (3.181)$$

onde $V(\mathbf{p})$ é a transformada de Fourier do potencial oscilador harmônico $V(\mathbf{r})$,

$$V(\mathbf{r}) = - \left(C + \frac{1}{2} k r^2 \right), \quad (3.182)$$

dada por

$$\begin{aligned} V(\mathbf{p}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} V(\mathbf{r}) \\ &= \left[\frac{k}{2} \nabla_{\mathbf{p}}^2 \delta^{(3)}(\mathbf{p}) - C \delta^{(3)}(\mathbf{p}) \right]. \end{aligned} \quad (3.183)$$

Definimos, então, o estado de um méson composto. Consideremos um méson com momento $\mathbf{P}_\alpha$, spin S_α e projeção M_α^s , sabor F_α e projeção M_α^f , no estado singlete de cor (branco), descrito pelo vetor de estado da Eq. (3.4) com função de onda correspondente dada na Eq. (3.5).

As funções de spin, sabor e cor são dadas pelos coeficientes de Clebsch-Gordan correspondentes ao estado α considerado, conforme descrito no Apêndice B. Neste exemplo vamos considerar mésons com números quânticos do π^+ , compostos por um quark u e um antiquark $\bar{d}$ ($m_i = m_u = m_j = m_d = m_q$, $S_\alpha = 0$, $M_\alpha^s = 0$, $F_\alpha = 1$, $M_\alpha^f = 1$, $C_\alpha = 0$).

A função espacial, no espaço de momentos, é a transformada de Fourier da função de onda da Eq. (3.173):

$$\Phi_{\mathbf{P}}^{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2} = \delta^{(3)}(\mathbf{P} - \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) \phi(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2), \quad (3.184)$$

onde

$$\phi(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) = \frac{1}{(\pi \alpha_{\text{sho}}^2)^{\frac{3}{4}}} e^{-\frac{1}{8\alpha_{\text{sho}}^2} (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2}. \quad (3.185)$$

Dados o Hamiltoniano microscópico e a função de onda do méson, calculamos o termo de mésons do Hamiltoniano Fock-Tani em ordem mais baixa, $H_m^{(0)}$, dado na Eq. (3.108). No termo de um único méson, Eq. (3.109), considerando as Φ 's auto-funções do Hamiltoniano e utilizando a condição de normalização, obtemos :

$$T(\alpha, \beta) = \delta_{\alpha\beta} \epsilon_\beta, \quad (3.186)$$

onde

$$\epsilon_\beta = \frac{\mathbf{P}_\beta^2}{2M} + M_\beta, \quad (3.187)$$

com

$$M_\beta = M + \frac{3\alpha_{\text{sho}}^2}{2\mu} + \frac{4C}{3} . \quad (3.188)$$

No potencial méson-méson, Eq. (3.115), cada elemento de matriz, V , pode ser escrito como um produto de cinco fatores

$$V(\alpha\beta; \gamma\delta) = I_0 I_{\text{spin}}(\alpha\beta; \gamma\delta) I_{\text{sabor}}(\alpha\beta; \gamma\delta) I_{\text{cor}}(\alpha\beta; \gamma\delta) I_{\text{espacial}}(\alpha\beta; \gamma\delta) , \quad (3.189)$$

Como exemplo, apresentamos explicitamente o cálculo do termo

$$- \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{*\rho\sigma} V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_\delta^{\mu'\sigma} \Phi_\gamma^{\rho\nu'} , \quad (3.190)$$

que aparece em $V_{\text{mm}}^{\text{ex}}$.

O fator I_0 vem da transformação de Fock-Tani e é igual a $-\frac{1}{2}$.

O fator de spin é dado por:

$$I_{\text{spin}}(\alpha\beta; \gamma\delta) = \chi_{S_\alpha, M_\alpha}^{*s_1' s_2'} \chi_{S_\beta, M_\beta}^{*s_3 s_4} \left[\delta_{s_1' s_1} \delta_{s_2' s_2} \right] \chi_{S_\delta, M_\delta}^{s_1 s_4} \chi_{S_\gamma, M_\gamma}^{s_3 s_2} = \frac{1}{2} . \quad (3.191)$$

O fator de sabor é dado por:

$$I_{\text{sabor}}(\alpha\beta; \gamma\delta) = \mathcal{F}_{F_\alpha, M_\alpha}^{*f_1' f_2'} \mathcal{F}_{F_\beta, M_\beta}^{*f_3 f_4} \left[\delta_{f_1' f_1} \delta_{f_2' f_2} \right] \mathcal{F}_{F_\delta, M_\delta}^{f_1 f_4} \mathcal{F}_{F_\gamma, M_\gamma}^{f_3 f_2} = 1 . \quad (3.192)$$

O fator de cor é dado por:

$$I_{\text{cor}}(\alpha\beta; \gamma\delta) = C_0^{*f_1' f_2'} C_0^{*f_3 f_4} \left[\left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_1' c_1} \left(-\frac{\lambda^{aT}}{2} \right)^{c_2' c_2} \right] C_0^{f_1 f_4} C_0^{f_3 f_2} = -\frac{4}{9} , \quad (3.193)$$

onde foi utilizada a relação

$$\left[\left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_1' c_1} \left(-\frac{\lambda^{aT}}{2} \right)^{c_2' c_2} \right] = \left[\frac{1}{2} \delta_{c_1' c_2'} \delta_{c_1 c_2} - \frac{1}{6} \delta_{c_1' c_1} \delta_{c_2 c_2'} \right] . \quad (3.194)$$

O fator espacial é dado por:

$$\begin{aligned}
 I_{\text{espacial}}(\alpha\beta; \gamma\delta) &= \int d\mathbf{p}_1' d\mathbf{p}_2' d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 d\mathbf{p}_4 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \\
 &\times \Phi_{\mathbf{P}_\alpha}^{*\mathbf{p}_1' \mathbf{p}_2'} \Phi_{\mathbf{P}_\beta}^{*\mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4} V(\mathbf{p}_1' - \mathbf{p}_1) \Phi_{\mathbf{P}_\delta}^{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_4} \Phi_{\mathbf{P}_\gamma}^{\mathbf{p}_3 \mathbf{p}_2} \\
 &= \delta^{(3)}(\mathbf{P}_{\alpha\beta} - \mathbf{P}_{\gamma\delta}) \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\alpha_{\text{sho}}^3} e^{-\frac{(\mathbf{p}_{\alpha\beta}^2 + \mathbf{p}_{\gamma\delta}^2)}{4\alpha_{\text{sho}}^2}} \\
 &\times \int d\mathbf{q} V(\mathbf{q}) e^{-\frac{3\mathbf{q}^2}{8\alpha_{\text{sho}}^2} + \frac{\mathbf{q} \cdot (\mathbf{P}_{\alpha\beta} + \mathbf{P}_{\gamma\delta})}{2\alpha_{\text{sho}}^2}} \\
 &= \delta^{(3)}(\mathbf{P}_{\alpha\beta} - \mathbf{P}_{\gamma\delta}) \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(\mathbf{p}_{\alpha\beta}^2 + \mathbf{p}_{\gamma\delta}^2)}{4\alpha_{\text{sho}}^2}} \\
 &\times \left[\frac{3\mathbf{p}_{\gamma\delta}^2}{16} - \frac{27}{16\alpha_{\text{sho}} m_q} - C \right] \quad (3.195)
 \end{aligned}$$

Assim,

$$V(\alpha\beta; \gamma\delta) = \frac{1}{2} \delta^{(3)}(\mathbf{P}_{\alpha\beta} - \mathbf{P}_{\gamma\delta}) \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(\mathbf{p}_{\alpha\beta}^2 + \mathbf{p}_{\gamma\delta}^2)}{4\alpha_{\text{sho}}^2}} \left[\frac{\mathbf{p}_{\gamma\delta}^2}{24m_q} - \frac{3}{8\alpha_{\text{sho}} m_q} - \frac{2C}{9} \right], \quad (3.196)$$

onde

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_{\alpha\beta} &= \mathbf{P}_\alpha + \mathbf{P}_\beta \\
 \mathbf{P}_{\gamma\delta} &= \mathbf{P}_\gamma + \mathbf{P}_\delta \\
 \mathbf{p}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\mathbf{P}_\alpha - \mathbf{P}_\beta) \\
 \mathbf{p}_{\gamma\delta} &= \frac{1}{2}(\mathbf{P}_\gamma - \mathbf{P}_\delta). \quad (3.197)
 \end{aligned}$$

Os outros termos do potencial são calculados de maneira análoga. Apresentamos, aqui, apenas os resultados obtidos.

O termo $V_{\text{mm}}^{\text{intra-ex}}$ é dado por:

$$V_{\text{mm}}^{\text{intra-ex}}(\alpha\beta; \gamma\delta) = -\delta^{(3)}(\mathbf{P}_{\alpha\beta} - \mathbf{P}_{\gamma\delta}) \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\alpha_{\text{sho}}^3} e^{-\frac{(\mathbf{p}_{\alpha\beta}^2 + \mathbf{p}_{\gamma\delta}^2)}{4\alpha_{\text{sho}}^2}} \frac{1}{2} (\epsilon_\alpha + \epsilon_\beta + \epsilon_\gamma + \epsilon_\delta), \quad (3.198)$$

onde ϵ_i ($i = \alpha, \beta, \gamma, \delta$) é a auto-energia do méson i , dada por Eq. (3.187).

O termo $V_{\text{mm}}^{\text{dir}}$ é igual a zero, pois o fator de cor dos termos diretos é nulo. Esse resultado corresponde ao fato que dois mésons isolados sem cor não podem “trocar uma interação colorida”. Isto é análogo ao fato de que não há troca de um fóton entre objetos de carga elétrica igual a zero.

O termo $V_{\text{mm}}^{\text{ex}}$ é dado por:

$$V_{\text{mm}}^{\text{ex}}(\alpha\beta; \gamma\delta) = \delta^{(3)}(\mathbf{P}_{\alpha\beta} - \mathbf{P}_{\gamma\delta}) \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(\mathbf{P}_{\alpha\beta}^2 + \mathbf{P}_{\gamma\delta}^2)}{4\alpha_{\text{sho}}^2}} \left[\frac{1}{4\alpha_{\text{sho}} m_q} - \frac{(\mathbf{P}_{\alpha\beta}^2 + \mathbf{P}_{\gamma\delta}^2)}{24m_q} \right]. \quad (3.199)$$

Isso completa o cálculo do Hamiltoniano de mésons em ordem mais baixa. Em seguida, calculamos os termos de ordem mais alta, correspondentes às correções de ortogonalidade. Para isso, utilizamos o método descrito na secção anterior.

Consideremos o “kernel de normalização” dado na Eq. (3.133). Inicialmente, separamos a parte espacial da parte de spin, sabor e cor:

$$\begin{aligned} N(\alpha\beta; \gamma\delta) &= \Delta_{SFC}(\alpha\gamma) \Delta_{SFC}(\beta\delta) \delta^{(3)}(\mathbf{P}_{\alpha} - \mathbf{P}_{\gamma}) \delta^{(3)}(\mathbf{P}_{\beta} - \mathbf{P}_{\delta}) \\ &- I_{SFC} N_E^{\text{esp}}(\mathbf{P}_{\alpha} \mathbf{P}_{\beta}; \mathbf{P}_{\gamma} \mathbf{P}_{\delta}), \end{aligned} \quad (3.200)$$

onde

$$\Delta_{SFC}(\alpha\gamma) = \delta_{S_{\alpha} S_{\gamma}} \delta_{M_{\alpha}^s M_{\gamma}^s} \delta_{F_{\alpha} F_{\gamma}} \delta_{M_{\alpha}^f M_{\gamma}^f} \delta_{C_{\alpha} C_{\gamma}} \quad (3.201)$$

$$\Delta_{SFC}(\beta\delta) = \delta_{S_{\beta} S_{\delta}} \delta_{M_{\beta}^s M_{\delta}^s} \delta_{F_{\beta} F_{\delta}} \delta_{M_{\beta}^f M_{\delta}^f} \delta_{C_{\beta} C_{\delta}} \quad (3.202)$$

$$I_{SFC} = I_{\text{spin}} I_{\text{sabor}} I_{\text{cor}} \quad (3.203)$$

$$I_{\text{spin}} = \chi_{S_{\alpha}, M_{\alpha}^s}^{*s_1' s_2'} \chi_{S_{\beta}, M_{\beta}^s}^{*s_3 s_4} \chi_{S_{\delta}, M_{\delta}^s}^{s_1' s_4} \chi_{S_{\gamma}, M_{\gamma}^s}^{s_3 s_2'} = \frac{1}{2} \quad (3.204)$$

$$I_{\text{sabor}} = \mathcal{F}_{F_{\alpha}, M_{\alpha}^f}^{*f_1' f_2'} \mathcal{F}_{F_{\beta}, M_{\beta}^f}^{*f_3 f_4} \mathcal{F}_{F_{\delta}, M_{\delta}^f}^{f_1' f_4} \mathcal{F}_{F_{\gamma}, M_{\gamma}^f}^{f_3 f_2'} = 1 \quad (3.205)$$

$$I_{\text{cor}} = C_0^{*f_1' f_2'} C_0^{*f_3 f_4} C_0^{f_1' f_4} C_0^{f_3 f_2'} = \frac{1}{3} \quad (3.206)$$

$$\begin{aligned} N_E^{\text{esp}}(\mathbf{P}_{\alpha} \mathbf{P}_{\beta}; \mathbf{P}_{\gamma} \mathbf{P}_{\delta}) &= \int d\mathbf{p}_1' d\mathbf{p}_2' d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 d\mathbf{p}_4 \Phi_{\mathbf{P}_{\alpha}}^{*P_1' P_2'} \Phi_{\mathbf{P}_{\beta}}^{*P_3 P_4} \Phi_{\mathbf{P}_{\delta}}^{P_1' P_4} \Phi_{\mathbf{P}_{\gamma}}^{P_3 P_2'} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\alpha_{\text{sho}}^3} \delta^{(3)}(\mathbf{P}_{\alpha} + \mathbf{P}_{\beta} - \mathbf{P}_{\gamma} - \mathbf{P}_{\delta}) \\ &\times e^{-\frac{1}{4\alpha_{\text{sho}}^2} \left[\mathbf{P}_{\alpha}^2 + \frac{\mathbf{P}_{\gamma}^2}{2} + \frac{\mathbf{P}_{\delta}^2}{2} - \mathbf{P}_{\alpha} \cdot (\mathbf{P}_{\gamma} + \mathbf{P}_{\delta}) \right]} \end{aligned} \quad (3.207)$$

Utilizando a mudança de variáveis da Eq. (3.197), obtemos:

$$\begin{aligned} N(\alpha\beta; \gamma\delta) &= \Delta_{SFC}(\alpha\gamma)\Delta_{SFC}(\beta\delta)\delta^{(3)}(\mathbf{P}_{\alpha\beta} - \mathbf{P}_{\gamma\delta})\delta^{(3)}(\mathbf{p}_{\alpha\beta} - \mathbf{p}_{\gamma\delta}) \\ &- I_{SFC}N_E^{\text{esp}}(\mathbf{P}_{\alpha\beta}\mathbf{p}_{\alpha\beta}; \mathbf{P}_{\gamma\delta}\mathbf{p}_{\gamma\delta}), \end{aligned} \quad (3.208)$$

onde

$$N_E^{\text{esp}}(\mathbf{P}_{\alpha\beta}\mathbf{p}_{\alpha\beta}; \mathbf{P}_{\gamma\delta}\mathbf{p}_{\gamma\delta}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\alpha_{\text{sho}}^3} \delta^{(3)}(\mathbf{P}_{\alpha\beta} - \mathbf{P}_{\gamma\delta}) e^{-\frac{(\mathbf{p}_{\alpha\beta}^2 + \mathbf{p}_{\gamma\delta}^2)}{4\alpha_{\text{sho}}^2}}. \quad (3.209)$$

No caso de funções de onda espaciais gaussianas, N_E^{esp} satisfaz a seguinte propriedade:

$$[N_E^{\text{esp}}]^n = N_E^{\text{esp}}, \quad (3.210)$$

onde $[N_E^{\text{esp}}]^n$ representa a n-ésima potência do “kernel de troca”. Essa propriedade permite obtermos uma expressão exata para a expansão da Eq. (3.142):

$$\begin{aligned} N^{-\frac{1}{2}}(\alpha\beta; \gamma\delta) &= \Delta_{SFC}(\alpha\gamma)\Delta_{SFC}(\beta\delta)\delta^{(3)}(\mathbf{P}_{\alpha\beta} - \mathbf{P}_{\gamma\delta})\delta^{(3)}(\mathbf{p}_{\alpha\beta} - \mathbf{p}_{\gamma\delta}) \\ &+ C_N N_E^{\text{esp}}(\mathbf{P}_{\alpha\beta}\mathbf{p}_{\alpha\beta}; \mathbf{P}_{\gamma\delta}\mathbf{p}_{\gamma\delta}), \end{aligned} \quad (3.211)$$

onde

$$C_N = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{I_{SFC}}{2} \right)^k \left[\prod_{n=1}^k \frac{2n-1}{n} \right]. \quad (3.212)$$

Para $I_{SFC} = \frac{1}{6}$, a série é convergente, conforme mostra o gráfico da Fig. (3.6), de onde obtemos $C_N = 0.095441$.

O valor de C_N também pode ser obtido utilizando-se a condição:

$$N^{-\frac{1}{2}}(\alpha\beta; \gamma\delta)N(\gamma\delta; \gamma'\delta')N^{-\frac{1}{2}}(\gamma'\delta'; \alpha'\beta') = \delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'}. \quad (3.213)$$

Utilizando Eq. (3.211), temos

$$\begin{aligned} &N^{-\frac{1}{2}}(\alpha\beta; \gamma\delta)N(\gamma\delta; \gamma'\delta')N^{-\frac{1}{2}}(\gamma'\delta'; \alpha'\beta') = \\ &= \delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'} + [C_N^2(1 - I_{SFC}) + 2C_N(1 - I_{SFC}) - I_{SFC}] \\ &\times N_E^{\text{esp}}(\mathbf{P}_{\alpha\beta}\mathbf{p}_{\alpha\beta}; \mathbf{P}_{\gamma\delta}\mathbf{p}_{\gamma\delta}). \end{aligned} \quad (3.214)$$

Portanto, devemos ter:

$$C_N^2(1 - I_{SFC}) + 2C_N(1 - I_{SFC}) - I_{SFC} = 0. \quad (3.215)$$

Figura 3.6: Coeficientes da expansão de $N^{-\frac{1}{2}}$.

Resolvendo a equação, obtemos

$$C_N = \frac{1}{(1 - I_{SFC})^{\frac{1}{2}}} - 1 = 0.0954. \quad (3.216)$$

Notamos que a série de C_N só converge para $I_{SFC} < 1$. Dessa forma, a expansão de $N^{\frac{1}{2}}(\alpha\beta; \gamma\delta)$ só converge se for considerado pelo menos um dos graus de liberdade internos (spin ou cor).

Consideremos, agora, a equação RGM, Eq. (3.136). Com $V_{RGM}^{\text{dir}}(\alpha\beta; \gamma\delta) = 0$, temos:

$$\left[T_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) + V_{RGM}^{\text{intra-ex}}(\alpha\beta; \gamma\delta) + V_{RGM}^{\text{ex}}(\alpha\beta; \gamma\delta) \right] \Psi_A^{\gamma\delta} = E_A N(\alpha\beta; \gamma\delta) \Psi_A^{\gamma\delta}. \quad (3.217)$$

Para Φ 's auto-funções do Hamiltoniano e utilizando a simetria das funções de onda relativas $\Psi_A^{\gamma\delta}$ em relação à troca dos índices de méson, os termos $T_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta)$ e $V_{RGM}^{\text{intra-ex}}(\alpha\beta; \gamma\delta)$ podem ser combinados resultando em um termo proporcional ao “kernel de normalização”:

$$T_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) = \frac{1}{2}(\epsilon_{[\alpha]} + \epsilon_{[\beta]} + \epsilon_{[\gamma]} + \epsilon_{[\delta]})\delta_{[\alpha][\gamma]}\delta_{[\beta][\delta]}, \quad (3.218)$$

$$V_{RGM}^{\text{intra-ex}}(\alpha\beta; \gamma\delta) = \frac{1}{2}(\epsilon_{[\alpha]} + \epsilon_{[\beta]} + \epsilon_{[\gamma]} + \epsilon_{[\delta]})N_E([\alpha][\beta]; [\gamma][\delta]), \quad (3.219)$$

$$\begin{aligned} T_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) + V_{RGM}^{\text{intra-ex}}(\alpha\beta; \gamma\delta) \\ = \frac{1}{2}(\epsilon_{[\alpha]} + \epsilon_{[\beta]} + \epsilon_{[\gamma]} + \epsilon_{[\delta]})N([\alpha][\beta]; [\gamma][\delta]). \end{aligned} \quad (3.220)$$

Utilizando Eq. (3.187), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\epsilon_\alpha + \epsilon_\beta + \epsilon_\gamma + \epsilon_\delta) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\mathbf{P}_\alpha^2}{2M} + M_\alpha + \frac{\mathbf{P}_\beta^2}{2M} + M_\beta + \frac{\mathbf{P}_\gamma^2}{2M} + M_\gamma + \frac{\mathbf{P}_\delta^2}{2M} + M_\delta \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\mathbf{P}_\alpha^2}{2M} + \frac{\mathbf{P}_\beta^2}{2M} + \frac{\mathbf{P}_\gamma^2}{2M} + \frac{\mathbf{P}_\delta^2}{2M} \right] + 2M_{\pi^+}, \end{aligned} \quad (3.221)$$

onde

$$2M_{\pi^+} = \frac{1}{2}(M_\alpha + M_\beta + M_\gamma + M_\delta). \quad (3.222)$$

Dessa forma, a equação RGM fica:

$$[K_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) + V_{RGM}^{\text{ex}}(\alpha\beta; \gamma\delta)] \Psi_\Lambda^{\gamma\delta} = E_\Lambda N(\alpha\beta; \gamma\delta) \Psi_\Lambda^{\gamma\delta}, \quad (3.223)$$

onde

$$K_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{P}_{[\alpha]}^2}{2M} + \frac{\mathbf{P}_{[\beta]}^2}{2M} + \frac{\mathbf{P}_{[\gamma]}^2}{2M} + \frac{\mathbf{P}_{[\delta]}^2}{2M} \right) + 2M_{\pi^+} \right] N([\alpha][\beta]; [\gamma][\delta]). \quad (3.224)$$

Obtemos, então, a equação RGM “renormalizada”:

$$[\bar{K}_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) + \bar{V}_{RGM}^{\text{ex}}(\alpha\beta; \gamma\delta)] \bar{\Psi}_\Lambda^{\gamma\delta} = E_\Lambda \bar{\Psi}_\Lambda^{\alpha\beta}, \quad (3.225)$$

onde

$$\bar{K}_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) = N^{-\frac{1}{2}}(\alpha\beta; \alpha'\beta') K_{RGM}(\alpha'\beta'; \gamma'\delta') N^{-\frac{1}{2}}(\gamma'\delta'; \gamma\delta), \quad (3.226)$$

$$\bar{V}_{RGM}^{\text{ex}}(\alpha\beta; \gamma\delta) = N^{-\frac{1}{2}}(\alpha\beta; \alpha'\beta') V_{RGM}^{\text{ex}}(\alpha'\beta'; \gamma'\delta') N^{-\frac{1}{2}}(\gamma'\delta'; \gamma\delta) . \quad (3.227)$$

Somando sobre todos os índices de spin sabor e cor dos mésons, obtemos uma equação RGM dependente apenas das variáveis espaciais:

$$\begin{aligned} & \left[\bar{K}_{RGM}(\mathbf{P}_\alpha \mathbf{P}_\beta; \mathbf{P}_\gamma \mathbf{P}_\delta) + \bar{V}_{RGM}^{\text{ex}}(\mathbf{P}_\alpha \mathbf{P}_\beta; \mathbf{P}_\gamma \mathbf{P}_\delta) \right] \bar{\Psi}_{\mathbf{P}_\Lambda}(\mathbf{P}_\gamma; \mathbf{P}_\delta) = \\ & = E_\Lambda \bar{\Psi}_{\mathbf{P}_\Lambda}(\mathbf{P}_\alpha; \mathbf{P}_\beta) . \end{aligned} \quad (3.228)$$

Fazendo a mudança de variáveis Eq. (3.197), obtemos:

$$\begin{aligned} & \left[\bar{K}_{RGM}(\mathbf{P}_{\alpha\beta} \mathbf{P}_{\alpha\beta}; \mathbf{P}_{\gamma\delta} \mathbf{P}_{\gamma\delta}) + \bar{V}_{RGM}^{\text{ex}}(\mathbf{P}_{\alpha\beta} \mathbf{P}_{\alpha\beta}; \mathbf{P}_{\gamma\delta} \mathbf{P}_{\gamma\delta}) \right] \bar{\Psi}_{\mathbf{P}_\Lambda}(\mathbf{P}_{\gamma\delta}; \mathbf{P}_{\gamma\delta}) = \\ & = E_\Lambda \bar{\Psi}_{\mathbf{P}_\Lambda}(\mathbf{P}_{\alpha\beta}; \mathbf{P}_{\alpha\beta}) , \end{aligned} \quad (3.229)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{K}_{RGM}(\mathbf{P}_{\alpha\beta} \mathbf{P}_{\alpha\beta}; \mathbf{P}_{\gamma\delta} \mathbf{P}_{\gamma\delta}) &= N^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{P}_{\alpha\beta} \mathbf{p}_{\alpha\beta}; \mathbf{P}_{\alpha'\beta'} \mathbf{p}_{\alpha'\beta'}) K_{RGM}(\mathbf{P}_{\alpha'\beta'} \mathbf{p}_{\alpha'\beta'}; \mathbf{P}_{\gamma'\delta'} \mathbf{p}_{\gamma'\delta'}) \\ &\times N^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{P}_{\gamma'\delta'} \mathbf{p}_{\gamma'\delta'}; \mathbf{P}_{\gamma\delta} \mathbf{p}_{\gamma\delta}) , \end{aligned} \quad (3.230)$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_{RGM}^{\text{ex}}(\mathbf{P}_{\alpha\beta} \mathbf{p}_{\alpha\beta}; \mathbf{P}_{\gamma\delta} \mathbf{p}_{\gamma\delta}) &= N^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{P}_{\alpha\beta} \mathbf{p}_{\alpha\beta}; \mathbf{P}_{\alpha'\beta'} \mathbf{p}_{\alpha'\beta'}) V_{RGM}^{\text{ex}}(\mathbf{P}_{\alpha'\beta'} \mathbf{p}_{\alpha'\beta'}; \mathbf{P}_{\gamma'\delta'} \mathbf{p}_{\gamma'\delta'}) \\ &\times N^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{P}_{\gamma'\delta'} \mathbf{p}_{\gamma'\delta'}; \mathbf{P}_{\gamma\delta} \mathbf{p}_{\gamma\delta}) , \end{aligned} \quad (3.231)$$

com

$$\begin{aligned} N^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{P}_{\alpha\beta} \mathbf{p}_{\alpha\beta}; \mathbf{P}_{\gamma\delta} \mathbf{p}_{\gamma\delta}) &= \delta^{(3)}(\mathbf{P}_{\alpha\beta} - \mathbf{P}_{\gamma\delta}) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_{\alpha\beta} - \mathbf{p}_{\gamma\delta}) \\ &+ C_N N_E^{\text{esp}}(\mathbf{P}_{\alpha\beta} \mathbf{p}_{\alpha\beta}; \mathbf{P}_{\gamma\delta} \mathbf{p}_{\gamma\delta}) , \end{aligned} \quad (3.232)$$

$$\begin{aligned} K_{RGM}(\mathbf{P}_{\alpha\beta} \mathbf{p}_{\alpha\beta}; \mathbf{P}_{\gamma\delta} \mathbf{p}_{\gamma\delta}) &= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{P}_{[\alpha][\beta]}^2}{4M} + \frac{\mathbf{p}_{[\alpha][\beta]}^2}{M} + \frac{\mathbf{P}_{[\gamma][\delta]}^2}{4M} + \frac{\mathbf{p}_{[\gamma][\delta]}^2}{M} \right) + 2M_{\pi^+} \right] \\ &\times N(\mathbf{P}_{[\alpha][\beta]} \mathbf{p}_{[\alpha][\beta]}; \mathbf{P}_{[\gamma][\delta]} \mathbf{p}_{[\gamma][\delta]}) , \end{aligned} \quad (3.233)$$

$$\begin{aligned}
 N(\mathbf{P}_{\alpha\beta}\mathbf{p}_{\alpha\beta}; \mathbf{P}_{\gamma\delta}\mathbf{p}_{\gamma\delta}) &= \delta^{(3)}(\mathbf{P}_{\alpha\beta} - \mathbf{P}_{\gamma\delta})\delta^{(3)}(\mathbf{p}_{\alpha\beta} - \mathbf{p}_{\gamma\delta}) \\
 &- I_{SFC} N_E^{\text{esp}}(\mathbf{P}_{\alpha\beta}\mathbf{p}_{\alpha\beta}; \mathbf{P}_{\gamma\delta}\mathbf{p}_{\gamma\delta}) ,
 \end{aligned} \tag{3.234}$$

$$\begin{aligned}
 V_{RGM}^{\text{ex}}(\mathbf{P}_{\alpha\beta}\mathbf{p}_{\alpha\beta}; \mathbf{P}_{\gamma\delta}\mathbf{p}_{\gamma\delta}) &= \delta^{(3)}(\mathbf{P}_{\alpha\beta} - \mathbf{P}_{\gamma\delta}) \\
 &\times \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(\mathbf{p}_{\alpha\beta}^2 + \mathbf{p}_{\gamma\delta}^2)}{4\alpha_{\text{sho}}^2}} \left[\frac{1}{4\alpha_{\text{sho}} m_q} - \frac{(\mathbf{p}_{\alpha\beta}^2 + \mathbf{p}_{\gamma\delta}^2)}{24m_q} \right] .
 \end{aligned} \tag{3.235}$$

Supondo que $\bar{\Psi}_{\mathbf{P}_\Lambda}(\mathbf{P}_{\alpha\beta}; \mathbf{p}_{\alpha\beta})$ possa ser escrita na forma separável,

$$\bar{\Psi}_{\mathbf{P}_\Lambda}(\mathbf{P}_{\alpha\beta}; \mathbf{p}_{\alpha\beta}) = \psi_{\mathbf{P}_\Lambda}(\mathbf{P}_{\alpha\beta})\chi(\mathbf{p}_{\alpha\beta}) , \tag{3.236}$$

obtemos duas equações, uma para o centro de massa e uma para o movimento relativo dos dois “clusters”:

$$\left[\frac{\mathbf{P}_{\alpha\beta}^2}{4M} + 2M_{\pi^+} \right] \psi_{\mathbf{P}_\Lambda}(\mathbf{P}_{\alpha\beta}) = E_{\text{cm}} \psi_{\mathbf{P}_\Lambda}(\mathbf{P}_{\alpha\beta}) . \tag{3.237}$$

$$\bar{U}_{\text{rel}}(\mathbf{p}_{\alpha\beta}; \mathbf{p}_{\gamma\delta})\chi(\mathbf{p}_{\gamma\delta}) = E_{\text{rel}}\chi(\mathbf{p}_{\alpha\beta}) , \tag{3.238}$$

com $E_\Lambda = E_{\text{cm}} + E_{\text{rel}}$.

O termo $\bar{U}_{\text{rel}}$ é dado por:

$$\bar{U}_{\text{rel}}(\mathbf{p}_{\alpha\beta}; \mathbf{p}_{\gamma\delta}) = \bar{K}_{\text{rel}}(\mathbf{p}_{\alpha\beta}; \mathbf{p}_{\gamma\delta}) + \bar{V}_{\text{rel}}^{\text{ex}}(\mathbf{p}_{\alpha\beta}; \mathbf{p}_{\gamma\delta}) , \tag{3.239}$$

onde

$$\begin{aligned}
 \bar{K}_{\text{rel}}(\mathbf{p}_{\alpha\beta}; \mathbf{p}_{\gamma\delta}) &= N_{\text{rel}}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{p}_{\alpha\beta}; \mathbf{p}_{\alpha'\beta'}) \frac{1}{2} \left[\frac{\mathbf{p}_{\alpha'\beta'}^2}{M} + \frac{\mathbf{p}_{\gamma'\delta'}^2}{M} \right] N_{\text{rel}}(\mathbf{p}_{\alpha'\beta'}; \mathbf{p}_{\gamma'\delta'}) \\
 &\times N_{\text{rel}}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{p}_{\gamma'\delta'}; \mathbf{p}_{\gamma\delta}) ,
 \end{aligned} \tag{3.240}$$

$$\bar{V}_{\text{rel}}^{\text{ex}}(\mathbf{p}_{\alpha\beta}; \mathbf{p}_{\gamma\delta}) = N_{\text{rel}}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{p}_{\alpha\beta}; \mathbf{p}_{\alpha'\beta'}) V_{\text{rel}}^{\text{ex}}(\mathbf{p}_{\alpha'\beta'}; \mathbf{p}_{\gamma'\delta'}) N_{\text{rel}}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{p}_{\gamma'\delta'}; \mathbf{p}_{\gamma\delta}), \quad (3.241)$$

com

$$N_{\text{rel}}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{p}_{\alpha\beta}; \mathbf{p}_{\gamma\delta}) = \delta^{(3)}(\mathbf{p}_{\alpha\beta} - \mathbf{p}_{\gamma\delta}) + C_N \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\alpha_{\text{sho}}^3} e^{-\frac{(\mathbf{p}_{\alpha\beta}^2 + \mathbf{p}_{\gamma\delta}^2)}{4\alpha_{\text{sho}}^2}} \quad (3.242)$$

$$N_{\text{rel}}(\mathbf{p}_{\alpha\beta}; \mathbf{p}_{\gamma\delta}) = \delta^{(3)}(\mathbf{p}_{\alpha\beta} - \mathbf{p}_{\gamma\delta}) - I_{SFC} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\alpha_{\text{sho}}^3} e^{-\frac{(\mathbf{p}_{\alpha\beta}^2 + \mathbf{p}_{\gamma\delta}^2)}{4\alpha_{\text{sho}}^2}} \quad (3.243)$$

$$V_{\text{rel}}^{\text{ex}}(\mathbf{p}_{\alpha\beta}; \mathbf{p}_{\gamma\delta}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(\mathbf{p}_{\alpha\beta}^2 + \mathbf{p}_{\gamma\delta}^2)}{4\alpha_{\text{sho}}^2}} \left[\frac{1}{4\alpha_{\text{sho}} m_q} - \frac{(\mathbf{p}_{\alpha\beta}^2 + \mathbf{p}_{\gamma\delta}^2)}{24m_q} \right]. \quad (3.244)$$

Vemos que o centro de massa move-se como uma partícula livre de momento $\mathbf{P}_\Lambda$ e massa M_{π^+} .

Calculando os termos Eq. (3.240) e Eq. (3.241), obtemos:

$$\begin{aligned} \bar{K}_{\text{rel}}(\mathbf{p}_{\alpha\beta}; \mathbf{p}_{\gamma\delta}) &= \frac{\mathbf{p}_{\alpha\beta}^2}{M} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_{\alpha\beta} - \mathbf{p}_{\gamma\delta}) \\ &+ C_K \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(\mathbf{p}_{\alpha\beta}^2 + \mathbf{p}_{\gamma\delta}^2)}{4\alpha_{\text{sho}}^2}} \left[\frac{1}{4\alpha_{\text{sho}} m_q} - \frac{(\mathbf{p}_{\alpha\beta}^2 + \mathbf{p}_{\gamma\delta}^2)}{24m_q} \right], \end{aligned} \quad (3.245)$$

$$\bar{V}_{\text{rel}}^{\text{ex}}(\mathbf{p}_{\alpha\beta}; \mathbf{p}_{\gamma\delta}) = C_V \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(\mathbf{p}_{\alpha\beta}^2 + \mathbf{p}_{\gamma\delta}^2)}{4\alpha_{\text{sho}}^2}} \left[\frac{1}{4\alpha_{\text{sho}} m_q} - \frac{(\mathbf{p}_{\alpha\beta}^2 + \mathbf{p}_{\gamma\delta}^2)}{24m_q} \right], \quad (3.246)$$

onde

$$C_K = 6 \frac{2(1 - I_{SFC})^{\frac{1}{2}} + I_{SFC} - 2}{(1 - I_{SFC})^{\frac{1}{2}}},$$

$$C_V = \frac{1}{(1 - I_{SFC})^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.247)$$

Assim, a equação Eq. (3.239) resulta:

$$\left[\frac{\mathbf{p}_{\alpha\beta}^2}{M} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_{\alpha\beta} - \mathbf{p}_{\gamma\delta}) + V_{\text{rel}}^{\text{eff}}(\mathbf{p}_{\alpha\beta}; \mathbf{p}_{\gamma\delta}) \right] \chi(\mathbf{p}_{\gamma\delta}) = E_{\text{rel}} \chi(\mathbf{p}_{\alpha\beta}), \quad (3.248)$$

onde o potencial relativo efetivo é dado por

$$V_{\text{rel}}^{\text{eff}}(\mathbf{p}_{\alpha\beta}; \mathbf{p}_{\gamma\delta}) = (C_K + C_V) V_{\text{rel}}^{\text{ex}}(\mathbf{p}_{\alpha\beta}; \mathbf{p}_{\gamma\delta}), \quad (3.249)$$

com $C_V + C_K = 1,046$.

Dessa forma, o potencial méson-méson exato, incluindo todas as correções de ortogonalidade, pode ser escrito como:

$$V_{\text{mm}}^{\text{orto}}(\alpha\beta; \gamma\delta) = V_{\text{mm}}^{\text{ex}}(\alpha\beta; \gamma\delta) + V_{\text{mm}}^{\text{corr}}(\alpha\beta; \gamma\delta), \quad (3.250)$$

onde o termo de correção de ortogonalidade é dado por

$$\begin{aligned} V_{\text{mm}}^{\text{corr}}(\alpha\beta; \gamma\delta) &= (C_V + C_K - 1) V_{\text{mm}}^{\text{ex}}(\alpha\beta; \gamma\delta) \\ &= 0,046 V_{\text{mm}}^{\text{ex}}(\alpha\beta; \gamma\delta), \end{aligned} \quad (3.251)$$

e contém contribuições dos termos renormalizados $\bar{K}$ e $\bar{V}$. É importante observar que o cancelamento do termo $V_{RGM}^{\text{intra-ex}}$ do potencial méson-méson, conforme descrito anteriormente [Eq. (3.146)], ocorre implicitamente, em primeira ordem no “bound-state kernel”, na renormalização do termo $\bar{K}$, que é a combinação de T_{RGM} e V_{RGM} (Eq. (3.220)). Esse cancelamento, equivalente ao descrito por Swanson [24] no contexto de primeira quantização, é independente da interação microscópica considerada, de modo que, para Φ 's auto-funções do Hamiltoniano microscópico, o termo $V_{RGM}^{\text{intra-ex}}$ não contribui em ordem mais baixa para o potencial efetivo. As correções de ordem mais alta remanescentes são proporcionais ao termo V_{RGM}^{ex} . Esse resultado é consequência da propriedade Eq. (3.210), satisfeita quando

usamos funções de onda gaussianas, associado ao fato do termo V_{RGM}^{ex} ser proporcional ao “kernel de troca”. A contribuição das correções remanescentes para o potencial efetivo é da ordem de 5 por cento. É razoável supor que para outros tipos de interação microscópica essas correções remanescentes também sejam pequenas. Assim, no que se segue, utilizaremos

$$V_{\text{mm}}^{\text{eff}} = V_{\text{mm}}^{\text{ex}} . \quad (3.252)$$

Essa aproximação é razoável, sobretudo em primeira ordem na aproximação de Born para processos de espalhamento. Conforme descrito por Swanson [24], os efeitos de normalização aparecem apenas em ordens mais altas na aproximação de Born e são importantes só muito próximo ao limiar.

Capítulo 4

Espalhamento Méson-Méson no Formalismo Fock-Tani

Este capítulo apresenta algumas aplicações do potencial efetivo méson-méson Fock-Tani derivado no capítulo anterior para uma interação microscópica arbitrária. Consideramos vários exemplos de espalhamento méson-méson no espaço livre. Calculamos amplitudes de espalhamento, secções de choque, e deslocamentos de fase. Também consideramos um caso de quebra de mésons, isto é, consideramos o espalhamento méson-méson em que os quarks nos estados finais não aparecem confinados em hádrons, mas sim, encontram-se livres. Alguns destes exemplos têm mero interesse acadêmico, no sentido de servirem apenas como ilustração de alguns aspectos a respeito do formalismo Fock-Tani, tal como a discrepância post-prior. Outros exemplos, como o caso do espalhamento J/Ψ num gás de píons, podem ter alguma relevância para o estudo de signaturas da formação do plasma de quarks e glúons em colisões de íons pesados relativísticos.

4.1 A Amplitude de Espalhamento

Consideremos o processo de espalhamento méson-méson,

$$\gamma + \delta \rightarrow \alpha + \beta. \quad (4.1)$$

A amplitude de espalhamento exata para esse processo é dada pelos elementos da matriz-T na representação Fock-Tani,

$$T_{fi}(z) = \langle f | T_{FT}(z) | i \rangle, \quad (4.2)$$

onde

$$\begin{aligned} |f\rangle &= |\alpha\beta\rangle = m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger |0\rangle \\ |i\rangle &= |\gamma\delta\rangle = m_\gamma^\dagger m_\delta^\dagger |0\rangle \end{aligned} \quad (4.3)$$

são, respectivamente, os estados assintóticos final e inicial, que são auto-estados de $T_m^{(0)}$ dado na Eq. (3.85) e $T_{FT}(z)$ é o operador de transição na representação de Fock-Tani, que satisfaz uma equação do tipo Lippman-Schwinger,

$$\begin{aligned} T_{FT}(z) &= V_{FT} + V_{FT} G_0(z) T_{FT}(z) \\ &= V_{FT} + V_{FT} G_0(z) V_{FT}(z) + \dots, \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde V_{FT} é o termo de interação do Hamiltoniano de Fock-Tani e $G_0(z)$ é o propagador livre do méson, dado por,

$$G_0(z) = (z - T^{(0)})^{-1}. \quad (4.5)$$

onde $T^{(0)}$ corresponde ao termo de partícula única do Hamiltoniano transformado,

$$T^{(0)} = \sum_\mu T(\mu) q_\mu^\dagger q_\mu + \sum_\nu T(\nu) \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\nu + \sum_{\alpha\beta} T(\alpha; \beta) m_\alpha^\dagger m_\beta. \quad (4.6)$$

Na solução da equação Eq. (4.4), em primeira ordem na aproximação de Born, apenas a parte de V_{FT} correspondente ao potencial méson-méson, V_{mm} , contribue, uma vez que os estados assintóticos contêm apenas operadores de mésons ideais. Dessa forma, o elemento da matriz-T, na representação Fock-Tani, em primeira ordem na aproximação de Born, é dado por:

$$T_{fi}(z) = T(\alpha\beta; \gamma\delta)(z) = (\alpha\beta | V_{mm} | \gamma\delta). \quad (4.7)$$

Conforme observado anteriormente, a neutralidade de cor dos estados assintóticos no espalhamento hádron-hádron implica que $V_{mm}^{\text{dir}} = 0$. Considerando o cancelamento do termo $V_{mm}^{\text{intra-ex}}$ pela correção de ortogonalidade de primeira ordem e desprezando as correções remanescentes, obtemos que o processo de espalhamento méson-méson é dominado pela interação efetiva entre quarks via troca de um glúon seguida da troca de quarks entre os mésons. Esse resultado é válido para espalhamento em energias relativamente baixas [31].

Para energias mais altas, deve-se levar em conta, também, a produção de pares $q\bar{q}$, sendo necessário um modelo de quarks relativístico. Assim, considerando processos em baixa energia, utilizamos para V_{mm} o potencial efetivo $V_{mm}^{\text{eff}} = V_{mm}^{\text{ex}}$, de modo que

$$T(\alpha\beta; \gamma\delta)(z) = (\alpha\beta|V_{mm}^{\text{eff}}|\gamma\delta) = (\alpha\beta|V_{mm}^{\text{ex}}|\gamma\delta), \quad (4.8)$$

onde

$$V_{mm}^{\text{ex}} = \frac{1}{2} V_{mm}^{\text{ex}}(\alpha'\beta'; \gamma'\delta') m_{\alpha'}^{\dagger} m_{\beta'}^{\dagger} m_{\delta'} m_{\gamma'}. \quad (4.9)$$

Dessa forma, obtemos:

$$T(\alpha\beta; \gamma\delta)(z) = \frac{1}{2} [V_{mm}^{\text{ex}}(\alpha\beta; \gamma\delta) + V_{mm}^{\text{ex}}(\beta\alpha; \gamma\delta) + V_{mm}^{\text{ex}}(\alpha\beta; \delta\gamma) + V_{mm}^{\text{ex}}(\beta\alpha; \delta\gamma)] \quad (4.10)$$

onde

$$\begin{aligned} V_{mm}^{\text{ex}}(\alpha\beta; \gamma\delta) &= V^1(\alpha\beta; \gamma\delta) + V^2(\alpha\beta; \gamma\delta) + V^3(\alpha\beta; \gamma\delta) + V^4(\alpha\beta; \gamma\delta) \\ &+ V^5(\alpha\beta; \gamma\delta) + V^6(\alpha\beta; \gamma\delta) \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} V^1(\alpha\beta; \gamma\delta) &= -\frac{1}{2} \Phi_{\alpha}^{*\mu\nu} \Phi_{\beta}^{*\rho\sigma} V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_{\delta}^{\mu'\sigma} \Phi_{\gamma}^{\rho\nu'} \\ V^2(\alpha\beta; \gamma\delta) &= -\frac{1}{2} \Phi_{\alpha}^{*\rho\sigma} \Phi_{\beta}^{*\mu\nu} V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_{\delta}^{\rho\nu'} \Phi_{\gamma}^{\mu'\sigma} \\ V^3(\alpha\beta; \gamma\delta) &= -\frac{1}{2} \Phi_{\alpha}^{*\mu\sigma} \Phi_{\beta}^{*\rho\nu} V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_{\delta}^{\mu'\nu'} \Phi_{\gamma}^{\rho\sigma} \\ V^4(\alpha\beta; \gamma\delta) &= -\frac{1}{2} \Phi_{\alpha}^{*\rho\nu} \Phi_{\beta}^{*\mu\sigma} V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_{\delta}^{\rho\sigma} \Phi_{\gamma}^{\mu'\nu'} \\ V^5(\alpha\beta; \gamma\delta) &= -\Phi_{\alpha}^{*\mu\sigma} \Phi_{\beta}^{*\rho\nu} V_{q\bar{q}}(\mu\rho; \mu'\rho') \Phi_{\delta}^{\mu'\nu} \Phi_{\gamma}^{\rho'\sigma} \\ V^6(\alpha\beta; \gamma\delta) &= -\Phi_{\alpha}^{*\mu\sigma} \Phi_{\beta}^{*\rho\nu} V_{q\bar{q}}(\sigma\nu; \sigma'\nu') \Phi_{\delta}^{\mu\nu'} \Phi_{\gamma}^{\rho\sigma'} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Os elementos de matriz, $V^j, (j = 1, 6)$, podem ser escritos como

$$V^j(\alpha\beta; \gamma\delta) = I_{\text{spin}}^j(\alpha\beta; \gamma\delta) I_{\text{sabor}}^j(\alpha\beta; \gamma\delta) I_{\text{cor}}^j(\alpha\beta; \gamma\delta) I_{\text{espacial}}^j(\alpha\beta; \gamma\delta). \quad (4.13)$$

As expressões para os fatores correspondentes a cada termo são dadas no Apêndice D.

A matriz-T obtida é utilizada na determinação da secção de choque. No que se segue, utilizamos, basicamente, a notação das Ref. [26]- [31]. Os elementos da matriz-S, na aproximação de Born, são dados por:

$$S_{fi} = \delta_{fi} - 2\pi i \delta(E_f - E_i) (\alpha\beta|V_{mm}^{\text{ex}}|\gamma\delta), \quad (4.14)$$

onde $E_f = E_\alpha + E_\beta$ e $E_i = E_\gamma + E_\delta$ são, respectivamente, as energias final e inicial do sistema de dois mésons, com

$$E_\alpha = (\mathbf{P}_\alpha^2 + M_\alpha^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.15)$$

Observamos que S_{fi} satisfaz a conservação de energia. Além disso, a invariância translacional permite que $(\alpha\beta|V_{mm}^{\text{ex}}|\gamma\delta)$ possa ser escrito na forma

$$(\alpha\beta|V_{mm}^{\text{ex}}|\gamma\delta) = \delta^{(3)}(\mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i)h_{fi}, \quad (4.16)$$

onde $\mathbf{P}_f = \mathbf{P}_\alpha + \mathbf{P}_\beta$ e $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_\gamma + \mathbf{P}_\delta$ são, respectivamente, os momentos final e inicial do sistema. Assim, a conservação do 4-momento é implementada pelo elemento de matriz S_{fi} .

A matriz-S pode ser escrita em termos da amplitude invariante, $\mathcal{M}_{fi}$, como

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \left[\prod_{n=1}^4 (2(2\pi)^3 E_n)^{-\frac{1}{2}} \right] \mathcal{M}_{fi}, \quad (4.17)$$

onde P_f e P_i são, respectivamente, os 4-momentos final e inicial, e

$$\mathcal{M}_{fi} = \mathcal{N}h_{fi}, \quad (4.18)$$

onde

$$\mathcal{N} = \frac{1}{(2\pi)^3} \prod_{n=1}^4 (2(2\pi)^3 E_n)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.19)$$

é o fator de normalização necessário para obter a forma correta da amplitude invariante a partir do elemento de matriz -T não-relativístico.

A secção de choque diferencial no referencial do centro de massa (c.m.) para o processo $i \rightarrow f$ é dada por

$$\left(\frac{d\sigma_{fi}(s, t, u)}{dt} \right)_{\text{c.m.}} = \frac{1}{64\pi s} \frac{1}{\mathbf{P}^2(s)} |\mathcal{M}_{fi}(s, t, u)|^2, \quad (4.20)$$

onde $\mathbf{P}(s)$ é o momento relativo dos dois mésons no estado inicial e $\mathcal{M}_{fi}(s, t, u)$ é a amplitude invariante calculada no centro de massa dos mésons iniciais. Todas as grandezas são expressas em termos das variáveis de Mandelstam (Apêndice E), isto é, na forma invariante de Lorentz.

A secção de choque total é obtida integrando-se Eq. (4.20) em t ,

$$\sigma_{fi}(s) = \int_{t_-}^{t_+} dt \left(\frac{d\sigma_{fi}(s, t, u)}{dt} \right)_{c.m.}, \quad (4.21)$$

onde t_- e t_+ são, respectivamente, o momento mínimo e o momento máximo transferidos. Essa integral em t pode ser transformada em uma integral na variável z ,

$$z = \cos \theta(\mathbf{P}, \mathbf{P}'), \quad (4.22)$$

onde $\theta(\mathbf{P}, \mathbf{P}')$ é o ângulo entre os momentos relativos inicial e final. Para partículas não-identicas, temos:

$$\sigma_{fi}(s) = \frac{1}{32\pi s} \frac{|\mathbf{P}'(s)|}{|\mathbf{P}(s)|} \int_{-1}^{+1} dz |\mathcal{M}_{fi}(|\mathbf{P}'(s)|, |\mathbf{P}(s)|, z)|^2. \quad (4.23)$$

Para espalhamento elástico no c.m. de partículas idênticas com massa M , obtemos:

$$\left(\frac{d\sigma_{fi}(s, t, u)}{dt} \right)_{c.m.} = \frac{4\pi^5 s}{(s - 4M^2)} |h_{fi}|^2, \quad (4.24)$$

e

$$\sigma_{fi}(s) = \frac{4\pi^5 s}{(s - 4M^2)} \int_{-(s-4M^2)}^0 dt |h_{fi}|^2. \quad (4.25)$$

4.2 O Hamiltoniano Microscópico.

Para estudar o espalhamento méson-méson utilizamos o modelo de quarks não-relativístico, descrito no Apêndice A. A interação microscópica entre os quarks é descrita por um Hamiltoniano do tipo Fermi-Breit. Consideramos apenas mésons em estados de onda-S, de modo que os termos de interação spin-órbita e tensorial não contribuem. Assim, o Hamiltoniano considerado consiste de um termo de energia cinética, um termo correspondente às contribuições de ordem mais baixa da troca de um glúon perturbativa e um termo efetivo de confinamento, correspondente às contribuições de ordem mais alta:

$$H = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i} + m_i \right) + \sum_{i,j(i>j)} (V_{ij}^{\text{conf}} + V_{ij}^{\text{OGE}}). \quad (4.26)$$

Para o termo de confinamento, utilizamos um “ansatz” gaussiano:

$$V_{ij}^{\text{conf}} = V_0 e^{-\frac{\mathbf{r}_{ij}^2}{8x}} \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{F}_j, \quad (4.27)$$

onde V_0 e x são os parâmetros da gaussiana.

O termo de troca de um glúon é composto por um potencial tipo Coulomb e um termo de interação hiperfina spin-spin

$$V_{ij}^{OGE} = V_{ij}^{\text{coul}} + V_{ij}^{\text{hyp}}$$

$$V_{ij}^{\text{coul}} = \frac{\alpha_s}{r_{ij}} \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{F}_j$$

$$V_{ij}^{\text{hyp}} = -\frac{8\pi\alpha_s}{3m_i m_j} \delta^{(3)}(\mathbf{r}_{ij}) \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j}{2} \right) \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{F}_j. \quad (4.28)$$

Analogamente ao que foi descrito na secção (2.5), especificado o modelo de quarks ficam definidos os operadores do Hamiltoniano microscópico. Somando as diversas contribuições, podemos escrever:

- potencial quark-quark

$$V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) = \delta_{f_1' f_1} \delta_{f_2' f_2} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_1' c_1} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_2' c_2} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_{1'} + \mathbf{p}_{2'} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \\ \left[V_{s_1' s_1, s_2' s_2}^{\text{conf}}(\mathbf{p}_{1'} - \mathbf{p}_1) + V_{s_1' s_1, s_2' s_2}^{\text{coul}}(\mathbf{p}_{1'} - \mathbf{p}_1) + V_{s_1' s_1, s_2' s_2}^{\text{hyp}}(\mathbf{p}_{1'} - \mathbf{p}_1) \right] \quad (4.29)$$

- potencial anti-quark-anti-quark

$$V_{\bar{q}\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) = \delta_{f_1' f_1} \delta_{f_2' f_2} \left(-\frac{\lambda^{aT}}{2} \right)^{c_1' c_1} \left(-\frac{\lambda^{aT}}{2} \right)^{c_2' c_2} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_{1'} + \mathbf{p}_{2'} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \\ \left[V_{s_1' s_1, s_2' s_2}^{\text{conf}}(\mathbf{p}_{1'} - \mathbf{p}_1) + V_{s_1' s_1, s_2' s_2}^{\text{coul}}(\mathbf{p}_{1'} - \mathbf{p}_1) + V_{s_1' s_1, s_2' s_2}^{\text{hyp}}(\mathbf{p}_{1'} - \mathbf{p}_1) \right] \quad (4.30)$$

- potencial quark-anti-quark

$$V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) = \delta_{f_1' f_1} \delta_{f_2' f_2} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_1' c_1} \left(-\frac{\lambda^{aT}}{2} \right)^{c_2' c_2} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_{1'} + \mathbf{p}_{2'} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \\ \left[V_{s_1' s_1, s_2' s_2}^{\text{conf}}(\mathbf{p}_{1'} - \mathbf{p}_1) + V_{s_1' s_1, s_2' s_2}^{\text{coul}}(\mathbf{p}_{1'} - \mathbf{p}_1) + V_{s_1' s_1, s_2' s_2}^{\text{hyp}}(\mathbf{p}_{1'} - \mathbf{p}_1) \right] \quad (4.31)$$

onde os potenciais de confinamento, coulombiano e spin-spin são dados respectivamente por:

- confinamento

$$V_{s'_1 s_1, s'_2 s_2}^{\text{conf}}(\mathbf{p}_{1'} - \mathbf{p}_1) = \frac{1}{(2\pi)^3} V_0 (8\pi x)^{\frac{3}{2}} e^{-2x(\mathbf{p}_{1'} - \mathbf{p}_1)^2} \delta_{s'_1 s_1} \delta_{s'_2 s_2} \quad (4.32)$$

- coulombiano

$$V_{s'_1 s_1, s'_2 s_2}^{\text{coul}}(\mathbf{p}_{1'} - \mathbf{p}_1) = \frac{\alpha_s}{2\pi^2} \frac{1}{(\mathbf{p}_{1'} - \mathbf{p}_1)^2} \delta_{s'_1 s_1} \delta_{s'_2 s_2} \quad (4.33)$$

- spin-spin

$$V_{s'_1 s_1, s'_2 s_2}^{\text{hyp}}(\mathbf{p}_{1'} - \mathbf{p}_1) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{8\pi\alpha_s}{3m_i m_j} \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)_{s'_1 s_1} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)_{s'_2 s_2} \quad (4.34)$$

4.3 O Espalhamento π - π e K-K.

Consideremos o espalhamento $F_{\text{tot}} = 2 \pi\pi$,

$$\pi^+ + \pi^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ . \quad (4.35)$$

As funções de onda de spin, sabor e cor para o méson π^+ são dadas no Apêndice B. Para a função de onda espacial utilizamos o “ansatz” gaussiano:

$$\Phi_{\mathbf{P}_\alpha}^{\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j} = \delta^{(3)}(\mathbf{P} - \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) \left(\pi b^2\right)^{-\frac{3}{4}} e^{-\frac{1}{8b^2}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)^2} , \quad (4.36)$$

onde b é o parâmetro da gaussiana.

A massa dos mésons π^+ é dada por:

$$\begin{aligned} M_{\pi^+} &= (\pi | T_m^{(0)} | \pi)_{\mathbf{P}=0} \\ &= 2m_q + \frac{3b^2}{2m_q} - \frac{8b\alpha_s}{3\pi^{\frac{1}{2}}} - \frac{4V_0}{3} \left[1 + \frac{\lambda}{2}\right]^{-\frac{3}{2}} - \frac{8\pi\alpha_s}{3m_q^2} \left(\frac{b^2}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} + C , \end{aligned} \quad (4.37)$$

onde $\lambda = \frac{1}{4xb^2}$ e C é uma constante necessária para o ajuste da massa. Notamos que C não contribui para o espalhamento.

Utilizando o potencial Fock-Tani efetivo méson-méson, $V_{\text{mm}}^{\text{eff}}$, para a interação microscópica descrita anteriormente, obtemos a matriz-T, em primeira ordem na aproximação de Born, correspondente a esse processo. Uma vez que os mésons no estado inicial e no estado final são idênticos e considerando a simetria do potencial efetivo méson-méson, temos:

$$V_{\text{mm}}^{\text{ex}}(\alpha\beta; \gamma\delta) = V_{\text{mm}}^{\text{ex}}(\beta\alpha; \gamma\delta) = V_{\text{mm}}^{\text{ex}}(\alpha\beta; \delta\gamma) = V_{\text{mm}}^{\text{ex}}(\beta\alpha; \delta\gamma), \quad (4.38)$$

Dessa forma,

$$T(\alpha\beta; \gamma\delta)(z) = 2V_{\text{mm}}^{\text{ex}}(\alpha\beta; \gamma\delta). \quad (4.39)$$

Esse resultado é equivalente à inclusão dos diagramas de simetrização no “QBD” [26], quando os dois mésons são compostos por quarks e antiquarks idênticos.

O elemento de matriz, h_{fi} , é dado por

$$h_{fi} = h_{fi}^{\text{conf}} + h_{fi}^{\text{coul}} + h_{fi}^{\text{hyp}}. \quad (4.40)$$

Cada elemento de matriz contém as contribuições correspondentes aos termos V^j ($j = 1, 6$) do potencial efetivo méson-méson dados na Eq. (4.12):

$$h_{fi}^k = \sum_{j=1}^6 h_{fi}^{k,j}. \quad (4.41)$$

O termo correspondente ao potencial de confinamento é dado por:

$$\begin{aligned} h_{fi}^{\text{conf}} = & \frac{4}{9} V_0 (2\pi b^2)^{-\frac{3}{2}} \left[8(4 + 3\lambda)^{-\frac{3}{2}} \left(e^{-\frac{1}{4b^2}(\mathbf{p}_{\alpha\beta}^2 + (\frac{4+\lambda}{4+3\lambda})\mathbf{p}_{\gamma\delta}^2)} + e^{-\frac{1}{4b^2}((\frac{4+\lambda}{4+3\lambda})\mathbf{p}_{\alpha\beta}^2 + \mathbf{p}_{\gamma\delta}^2)} \right) \right. \\ & \left. - (1 + \lambda)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{4b^2}(\mathbf{p}_{\alpha\beta}^2 + \mathbf{p}_{\gamma\delta}^2)} \left(e^{\frac{\lambda}{8b^2(1+\lambda)}(\mathbf{p}_{\alpha\beta} + \mathbf{p}_{\gamma\delta})^2} + e^{\frac{\lambda}{8b^2(1+\lambda)}(\mathbf{p}_{\alpha\beta} - \mathbf{p}_{\gamma\delta})^2} \right) \right]. \quad (4.42) \end{aligned}$$

Muito recentemente, um resultado similar a este foi derivado por Blaschke e Ropke [25]. A diferença está no fato de que o nosso resultado é simétrico frente à troca dos estados final e inicial. Como será visto a seguir, o fato de potenciais efetivos não possuírem esta simetria é catastrófico para situações em que estados iniciais e finais são muito diferentes, como é o caso do espalhamento $J/\Psi + \pi \rightarrow D + \bar{D}$.

O termo correspondente ao potencial de Coulomb é dado por:

$$h_{fi}^{\text{coul}} = \frac{4}{9} \frac{\alpha_s}{\pi} \left(\frac{1}{2b^2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} 2e^{-\frac{1}{4b^2}(\mathbf{p}_{\alpha\beta}^2 + \mathbf{p}_{\gamma\delta}^2)} \times [F(|\mathbf{p}_{\alpha\beta}|) + F(|\mathbf{p}_{\gamma\delta}|) - G(|\mathbf{p}_{\alpha\beta} + \mathbf{p}_{\gamma\delta}|) - G(|\mathbf{p}_{\alpha\beta} - \mathbf{p}_{\gamma\delta}|)] , \quad (4.43)$$

onde $F(z)$ e $G(z)$ são integrais a serem calculadas numericamente,

$$F(z) = \int_0^\infty dq \exp\left(-\frac{3}{8b^2}q^2\right) \frac{\sinh(zq/2b^2)}{zq/2b^2} \quad (4.44)$$

$$G(z) = \int_0^\infty dq \exp\left(-\frac{1}{2b^2}q^2\right) \frac{\sinh(zq/2b^2)}{zq/2b^2} . \quad (4.45)$$

O termo correspondente ao potencial hiperfino spin-spin é dado por:

$$h_{fi}^{\text{hyp}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{8\pi\alpha_s}{9m_q^2} \left[\frac{8}{3\sqrt{3}} \left(e^{-\frac{1}{4b^2}(\mathbf{p}_{\alpha\beta}^2 + \frac{1}{3}\mathbf{p}_{\gamma\delta}^2)} + e^{-\frac{1}{4b^2}(\frac{1}{3}\mathbf{p}_{\alpha\beta}^2 + \mathbf{p}_{\gamma\delta}^2)} \right) + e^{-\frac{1}{8b^2}(\mathbf{p}_{\alpha\beta} - \mathbf{p}_{\gamma\delta})^2} + e^{-\frac{1}{8b^2}(\mathbf{p}_{\alpha\beta} + \mathbf{p}_{\gamma\delta})^2} \right] . \quad (4.46)$$

Nos termos acima,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\mathbf{P}_\alpha - \mathbf{P}_\beta) \\ \mathbf{p}_{\gamma\delta} &= \frac{1}{2}(\mathbf{P}_\gamma - \mathbf{P}_\delta) . \end{aligned} \quad (4.47)$$

Para mésons leves, no canal pseudoescalar-pseudoescalar, o espalhamento é dominado pelo termo hiperfino, devido à presença do fator $\frac{1}{m_i m_j}$. A contribuição dos termos de confinamento e de Coulomb tem sido sistematicamente desprezada em cálculos recentes [26].

Para espalhamento elástico no c.m., temos:

$$\mathbf{P}_\alpha = -\mathbf{P}_\beta = \mathbf{P} \quad (4.48)$$

$$\mathbf{P}_\gamma = -\mathbf{P}_\delta = \mathbf{P}' \quad (4.49)$$

$$|\mathbf{P}| = |\mathbf{P}'| . \quad (4.50)$$

Expressando o elemento de matriz em termos das variáveis de Mandelstam (s, t, u), obtemos:

$$h_{fi} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{8\pi\alpha_s}{9m_q^2} \left[\frac{16}{3\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{4b^2} \frac{(s-4M^2)}{3} \frac{\pi^2}{\pi^2}} + e^{\frac{t}{8b^2}} + e^{\frac{u}{8b^2}} \right] . \quad (4.51)$$

A secção de choque diferencial é dada por:

$$\left(\frac{d\sigma_{fi}(s, t, u)}{dt} \right)_{c.m.} = \frac{16\pi\alpha_s^2 b^2 s}{81\xi} \left[\frac{16}{3\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{4b^2}\xi} + e^{-\frac{t}{8b^2}} + e^{-\frac{u}{8b^2}} \right]^2, \quad (4.52)$$

onde $\xi = s - 4M_{\pi^+}^2$.

Integrando a secção de choque diferencial em t e dividindo por dois devido ao estado final conter dois mésons idênticos, obtemos a secção de choque total,

$$\sigma_{fi}(s) = \frac{4\pi\alpha_s^2 s}{81m_q^4} \left[\frac{4b^2 \left(1 - e^{-\frac{\xi}{4b^2}} \right)}{\xi} + \frac{128}{27} e^{-\frac{\xi}{6b^2}} + e^{-\frac{\xi}{8b^2}} + \frac{64}{3\sqrt{3}} \frac{4b^2}{\xi} \left(e^{-\frac{\xi}{12b^2}} - e^{-\frac{5\xi}{24b^2}} \right) \right] \quad (4.53)$$

O deslocamento de fase aproximado para a onda parcial l é calculado analiticamente através da expressão [28]:

$$\delta^{(l)} = -\pi^2 |\mathbf{P}(s)| E_\pi \int_{-1}^{+1} dz h_{fi} P_l(z), \quad (4.54)$$

onde $P_l(z)$ é o polinômio de Legendre de ordem l . No caso de mésons idênticos no estado final, dividimos a expressão por 2. Assim, em primeira ordem na aproximação de Born, o deslocamento de fase para a onda-S é dado por:

$$\begin{aligned} \delta^{(0)} &= -\frac{\pi^2}{2} |\mathbf{P}(s)| E_\pi \int_{-1}^{+1} dz h_{fi} \\ &= -\frac{4\alpha_s b^2}{9m_q^2} \sqrt{\frac{s}{\xi}} \left[1 - e^{-\frac{\xi}{8b^2}} + \frac{\xi}{3b^2\sqrt{3}} e^{-\frac{\xi}{12b^2}} \right]. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Esses resultados são idênticos aos obtidos por Barnes e Swanson [26] através do “QBD”.

Nas Fig. (4.1) e Fig. (4.2) são mostrados, respectivamente, os gráficos da secção de choque total e do deslocamento de fase da onda-S em função da energia do c.m., $\sqrt{s}$, calculados para o espalhamento $F_{tot} = 2\pi\pi$.

Os parâmetros escolhidos [26] são:

$$\begin{aligned} M_{\pi^+} &= 0,138 \text{ GeV} \\ \alpha_s &= 0,6 \\ m_q = m_u = m_d &= 0,33 \text{ GeV} \\ b &= 0,337 \text{ GeV}^{-2}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

As expressões obtidas para o espalhamento $F_{tot} = 2 \pi\pi$ aplicam-se também (mudando-se os valores dos parâmetros) ao espalhamento $F_{tot} = 1 KK$,

$$K^+ + K^+ \rightarrow K^+ + K^+ . \quad (4.57)$$

Para o méson K^+ , temos

$$|F, M_f\rangle \equiv |u\bar{s}\rangle . \quad (4.58)$$

As funções de onda de spin, cor e espacial são idênticas às dos mésons π^+ .

Escolhemos o seguinte conjunto de parâmetros:

$$\begin{aligned} M_{K^+} &= 0,495 \text{ GeV} \\ \alpha_s &= 0,6 \\ m_q &= \frac{m_u + m_s}{2} = 0,44 \text{ GeV} \\ b &= 0,337 \text{ GeV}^{-2} . \end{aligned} \quad (4.59)$$

A secção de choque e o deslocamento de fase calculados são mostrados, respectivamente, na Fig. (4.3) e Fig. (4.4).

Embora descrevam razoavelmente bem os processos de espalhamento considerados, os resultados obtidos devem ser considerados com cautela, uma vez que foram obtidos em primeira aproximação de Born, foram desprezados os termos de confinamento e de Coulomb, e foram utilizadas funções de onda gaussianas para os estados ligados. Para uma descrição mais segura é necessário, entre outras coisas, conhecer melhor o mecanismo de confinamento da QCD.

Figura 4.1: Secção de choque para o espalhamento pión-pión.

Figura 4.2: Deslocamento de fase da onda-S para o espalhamento pión-pión.

Figura 4.3: Secção de choque para o espalhamento káon-káon.

Figura 4.4: Deslocamento de fase da onda-S para o espalhamento káon-káon.

4.4 O Espalhamento J/ψ - π .

Nesta secção, utilizamos o formalismo Fock-Tani para estudar processos de colisão de um méson pesado J/ψ e um méson π . A análise desenvolvida é similar à descrita na Ref. [31], em que é utilizado o “QBD”. Vamos considerar dois processos de reação: o espalhamento inelástico em estados finais com quarks e antiquarks correlacionados em mésons e a reação de “break-up” em dois quarks e dois antiquarks assintoticamente livres. Essas reações são exemplos possíveis de processos de absorção do “charmonium” na matéria hadrônica, problema que tem aparecido recentemente em vários artigos [62]-[63]-[64]. A supressão do J/ψ , observada em colisões de íons pesados relativísticos [65] tem sido apontada como um sinal para a transição da matéria hadrônica para a matéria de quarks e glúons [66]. No entanto, esse padrão de supressão pode ser explicado por modelos fenomenológicos tanto em um cenário hadrônico convencional [67], como em um plasma de quarks e glúons [68], de modo que o assunto continua ainda bastante controverso.

Consideremos, inicialmente, o processo de espalhamento inelástico em estados finais correlacionados:

$$J/\psi + \pi \rightarrow D + \bar{D} \quad (4.60)$$

O limiar para a reação é dado pela diferença de massas dos mésons finais e iniciais,

$$\Delta M = (M_D + M_{\bar{D}}) - (M_{J/\psi} + M_{\pi}) . \quad (4.61)$$

Os mésons J/ψ são compostos por um quark e um antiquark “charm” pesados, c e $\bar{c}$, que denotamos por Q e $\bar{Q}$. Consideramos mésons J/ψ (spin 1), no estado fundamental de onda-S (3S_1):

$$|J/\psi\rangle \equiv |c\bar{c}\rangle . \quad (4.62)$$

Os mésons π (π^+ , π^- , π^0) são compostos por quarks e antiquarks leves, u , $\bar{u}$, d , $\bar{d}$, que denotamos por q e $\bar{q}$. Consideramos mésons π (spin 0), no estado fundamental de onda-S (1S_0):

$$|\pi^+\rangle \equiv -|u\bar{d}\rangle \quad (4.63)$$

$$|\pi^- \rangle \equiv |d\bar{u} \rangle \quad (4.64)$$

$$|\pi^0 \rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u} \rangle - |d\bar{d} \rangle) . \quad (4.65)$$

Os mésons D^+ e D^0 são compostos por um quark pesado Q e um antiquark leve $\bar{q}$ e os mésons D^- e $\bar{D}^0$ por um quark leve q e um antiquark pesado $\bar{Q}$. Consideramos mésons nos estados de onda-S fundamental (spin 0), D e $\bar{D}$ (1S_0) e excitado (spin 1), D^* e $\bar{D}^*$ (3S_1):

$$|D^+(D^{+*}) \rangle \equiv -|cd \rangle \quad (4.66)$$

$$|D^-(D^{-*}) \rangle \equiv |d\bar{c} \rangle \quad (4.67)$$

$$|D^0(D^{0*}) \rangle \equiv |c\bar{u} \rangle \quad (4.68)$$

$$|\bar{D}^0(\bar{D}^{0*}) \rangle \equiv |u\bar{c} \rangle . \quad (4.69)$$

Assim, temos quatro canais de estado final possíveis para o espalhamento:

$$1) \quad J/\psi + \pi \rightarrow D(1S) + \bar{D}(1S) \quad (4.70)$$

$$2) \quad J/\psi + \pi \rightarrow D^*(1S) + \bar{D}(1S) \quad (4.71)$$

$$3) \quad J/\psi + \pi \rightarrow D(1S) + \bar{D}^*(1S) \quad (4.72)$$

$$4) \quad J/\psi + \pi \rightarrow D^*(1S) + \bar{D}^*(1S) . \quad (4.73)$$

Por conservação de momento angular ($S_i^{tot} = S_f^{tot}$), notamos que o espalhamento sem estados finais excitados não é possível, de forma que a reação (1) é proibida. Para determinar os elementos de matriz e secções de choque correspondentes a esses processos, seguimos o mesmo procedimento desenvolvido para o espalhamento $\pi\pi$.

Na definição da função de onda espacial, introduzimos uma notação que permite levar em conta a diferença de massa entre o quark e o antiquark que compõem o méson, como é o caso para os mésons D . Escrevemos a função de onda espacial na forma

$$\Phi_{\mathbf{P}_\alpha}^{\mathbf{p}_i \mathbf{p}_j} = \delta^{(3)}(\mathbf{P}_\alpha - \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) \left(\pi b_\alpha^2 \right)^{-\frac{3}{4}} e^{-\frac{\mathbf{p}^2}{2b_\alpha^2}} , \quad (4.74)$$

onde

$$\bar{\mathbf{p}} = \eta_\alpha \mathbf{p}_i - (1 - \eta_\alpha) \mathbf{p}_j \quad (4.75)$$

$$\eta_\alpha = \frac{m_j}{m_i + m_j} . \quad (4.76)$$

Na matriz-T, temos

$$V_{\text{mm}}^{\text{ex}}(\beta\alpha; \gamma\delta) = V_{\text{mm}}^{\text{ex}}(\alpha\beta; \delta\gamma) = 0, \quad (4.77)$$

pois os fatores de sabor correspondentes são nulos. Isso ocorre porque os mésons são compostos por quarks e antiquarks diferentes ($q, Q, \bar{q}, \bar{Q}$) de forma que os estados finais não têm o conteúdo de sabor apropriado. Ainda, dada a simetria do potencial efetivo méson-méson, temos:

$$V_{\text{mm}}^{\text{ex}}(\alpha\beta; \gamma\delta) = V_{\text{mm}}^{\text{ex}}(\beta\alpha; \delta\gamma). \quad (4.78)$$

Assim,

$$T(\alpha\beta; \gamma\delta)(z) = V_{\text{mm}}^{\text{ex}}(\alpha\beta; \gamma\delta). \quad (4.79)$$

O elemento de matriz, h_{fi} , em primeira ordem na aproximação de Born, calculado no c.m., é dado por:

$$h_{fi} = h_{fi}^{\text{conf}} + h_{fi}^{\text{coul}} + h_{fi}^{\text{hyp}} = \sum_k h_{fi}^k \quad (4.80)$$

$$h_{fi}^k = \sum_{j=1}^6 h_{fi}^{k,j}. \quad (4.81)$$

$$h_{fi}^{k,j} = I_0^{k,j} I_{\text{spin}}^{k,j} I_{\text{sabor}}^{k,j} I_{\text{cor}}^{k,j} I_{\text{espacial}}^{k,j}. \quad (4.82)$$

Os fatores I_0 são dados por:

$$\begin{aligned} I_0^{k,1} &= I_0^{k,2} = I_0^{k,3} = I_0^{k,4} = -\frac{1}{2} \\ I_0^{k,5} &= I_0^{k,6} = -1. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Os fatores de sabor e cor são os mesmos para os termos de confinamento, Coulomb e hiperfino:

$$\begin{aligned} I_{\text{sabor}}^{k,1} &= I_{\text{sabor}}^{k,2} = I_{\text{sabor}}^{k,3} = I_{\text{sabor}}^{k,4} = I_{\text{sabor}}^{k,5} = I_{\text{sabor}}^{k,6} = 1 \\ I_{\text{cor}}^{k,1} &= I_{\text{cor}}^{k,2} = I_{\text{cor}}^{k,3} = I_{\text{cor}}^{k,4} = -\frac{4}{9} \\ I_{\text{cor}}^{k,5} &= I_{\text{cor}}^{k,6} = \frac{4}{9}. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Os fatores de spin para o termo de confinamento e de Coulomb são os mesmos e têm o mesmo valor para todos os termos do potencial:

$$I_{\text{spin}}^{\text{conf,j}} = I_{\text{spin}}^{\text{coul,j}} = \frac{1}{2} . \quad (4.85)$$

Para o termo hiperfino, os fatores de spin têm valores diferentes para cada termo do potencial e para cada combinação de estados iniciais e finais. A determinação desses fatores é descrita no Apêndice D.

Os fatores espaciais correspondentes ao potencial de confinamento podem ser escritos na forma geral

$$I_{\text{espacial}}^{\text{conf,j}} = A_j^{\text{conf}} e^{-(\alpha_j^{\text{conf}} |\mathbf{P}^2| + \beta_j^{\text{conf}} |\mathbf{P}'^2| + \gamma_j^{\text{conf}} |\mathbf{P}| |\mathbf{P}'| z)} , \quad (4.86)$$

onde

$$\begin{aligned} A_1^{\text{conf}} &= \frac{V_0}{(2\pi)^3} (\lambda_{Qq} \lambda_{qq})^{\frac{3}{4}} \left(\frac{32\pi \lambda'_{Qq}}{\Lambda_1^{\text{conf}}} \right)^{\frac{3}{2}} \\ \alpha_1^{\text{conf}} &= \frac{2}{\Lambda_1^{\text{conf}}} \left[\frac{1}{4} (\lambda'_{Qq} + \lambda_{Qq}) (\lambda_{qq} + \lambda_{QQ}) + \lambda'_{Qq} \lambda_{Qq} \right] \\ \beta_1^{\text{conf}} &= \frac{2}{\Lambda_1^{\text{conf}}} [(\lambda'_{Qq} + \lambda_{Qq}) (\lambda_{qq} (1 - \eta)^2 + \lambda_{QQ} \eta^2) + \lambda_{qq} \lambda_{QQ}] \\ \gamma_1^{\text{conf}} &= \frac{2}{\Lambda_1^{\text{conf}}} (\lambda_{Qq} - \lambda'_{Qq}) [\lambda_{QQ} \eta - \lambda_{qq} (1 - \eta)] \\ \Lambda_1^{\text{conf}} &= \lambda'_{Qq} + \lambda_{Qq} + \lambda_{QQ} + \lambda_{qq} \end{aligned} \quad (4.87)$$

$$\begin{aligned} A_2^{\text{conf}} &= A_1^{\text{conf}} \\ \alpha_2^{\text{conf}} &= \alpha_1^{\text{conf}} \\ \beta_2^{\text{conf}} &= \beta_1^{\text{conf}} \\ \gamma_2^{\text{conf}} &= -\gamma_1^{\text{conf}} \\ \Lambda_2^{\text{conf}} &= \Lambda_1^{\text{conf}} \end{aligned} \quad (4.88)$$

$$\begin{aligned} A_3^{\text{conf}} &= \frac{V_0}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} (\lambda_{Qq} \lambda_{qq})^{\frac{3}{4}} \left(\frac{32\pi x}{\Lambda_3^{\text{conf}}} \right)^{\frac{3}{2}} \\ \alpha_3^{\text{conf}} &= \lambda_{Qq} \\ \beta_3^{\text{conf}} &= \frac{2}{\lambda'_{qq} + 2\lambda_{Qq} + \lambda_{QQ}} [2\lambda_{Qq} (\lambda_{QQ} \eta^2 + \lambda'_{qq} (1 - \eta)^2) + \lambda'_{qq} \lambda_{QQ}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_3^{\text{conf}} &= 0 \\ \Lambda_3^{\text{conf}} &= \frac{(x + \lambda_{qq})(\lambda'_{qq} + 2\lambda_{Qq} + \lambda_{QQ})}{\lambda_{Qq}}.\end{aligned}\quad (4.89)$$

$$\begin{aligned}A_4^{\text{conf}} &= \frac{V_0}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}(\lambda_{QQ}\lambda_{qq})^{\frac{3}{4}}\left(\frac{32\pi x}{\Lambda_4^{\text{conf}}}\right)^{\frac{3}{2}} \\ \alpha_4^{\text{conf}} &= \lambda_{Qq} \\ \beta_4^{\text{conf}} &= \frac{2}{\lambda'_{QQ} + 2\lambda_{Qq} + \lambda_{qq}}[2\lambda_{Qq}(\lambda'_{QQ}\eta^2 + \lambda_{qq}(1-\eta)^2) + \lambda_{qq}\lambda'_{QQ}] \\ \gamma_4^{\text{conf}} &= 0 \\ \Lambda_4^{\text{conf}} &= \frac{(x + \lambda_{QQ})(\lambda'_{QQ} + 2\lambda_{Qq} + \lambda_{qq})}{\lambda_{Qq}}.\end{aligned}\quad (4.90)$$

$$\begin{aligned}A_5^{\text{conf}} &= \frac{V_0}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}(\lambda_{QQ}\lambda_{qq})^{\frac{3}{4}}\left(\frac{32\pi x}{\Lambda_5^{\text{conf}}}\right)^{\frac{3}{2}} \\ \alpha_5^{\text{conf}} &= \frac{2}{\Lambda_5^{\text{conf}}}\left[\frac{\lambda_{QQ}(2x + \lambda_{qq} + \lambda_{Qq})}{4} + \frac{\lambda_{qq}(2x + \lambda_{QQ} + \lambda_{Qq})}{4} + x\lambda_{Qq}\right] \\ \beta_5^{\text{conf}} &= \frac{2}{\Lambda_5^{\text{conf}}}\left[\lambda_{QQ}\eta^2(2x + \lambda_{Qq} + \lambda_{qq}) + x\frac{\lambda_{QQ}\lambda_{qq}}{\lambda_{Qq}} + \lambda_{qq}(1-\eta)^2(2x + \lambda_{Qq} + \lambda_{QQ})\right] \\ \gamma_5^{\text{conf}} &= -\frac{2}{\Lambda_5^{\text{conf}}}[\lambda_{qq}(1-\eta)(\lambda_{Qq} + \lambda_{QQ}) + \lambda_{QQ}\eta(\lambda_{Qq} + \lambda_{qq})] \\ \Lambda_5^{\text{conf}} &= \frac{(x + \lambda_{Qq} + \lambda_{QQ})(x + \lambda_{Qq} + \lambda_{qq}) - x^2}{\lambda_{Qq}}\end{aligned}\quad (4.91)$$

$$\begin{aligned}A_6^{\text{conf}} &= A_5^{\text{conf}} \\ \alpha_6^{\text{conf}} &= \alpha_5^{\text{conf}} \\ \beta_6^{\text{conf}} &= \beta_5^{\text{conf}} \\ \gamma_6^{\text{conf}} &= -\gamma_5^{\text{conf}} \\ \Lambda_6^{\text{conf}} &= \Lambda_5^{\text{conf}}\end{aligned}\quad (4.92)$$

Os fatores espaciais correspondentes ao potencial de Coulomb são dados por:

$$I_{\text{espacial}}^{\text{coul},j} = A_j^{\text{coul}} e^{-(\alpha_j^{\text{coul}}|\mathbf{P}^2| + \beta_j^{\text{coul}}|\mathbf{P}'^2| + \gamma_j^{\text{coul}}|\mathbf{P}||\mathbf{P}'|z)} U_j^{\text{coul}} \quad (4.93)$$

onde U_j^{coul} são integrais a serem resolvidas numericamente,

$$U_j^{\text{coul}} = \int_0^\infty dq \, e^{-2\omega_j q^2} \frac{\text{sen}(X_j q)}{X_j q} \quad (4.94)$$

$$X_j = |a_j \mathbf{P} + b_j \mathbf{P}'| \quad (4.95)$$

$$\begin{aligned}
A_1^{\text{coul}} &= \frac{128\alpha_s}{\pi^4} (\lambda_{QQ}\lambda_{qq})^{\frac{3}{4}} \left(\frac{\pi\lambda_{Qq}}{2\Lambda_1^{\text{coul}}} \right)^{\frac{3}{2}} \\
\alpha_1^{\text{coul}} &= \frac{2}{\Lambda_1^{\text{coul}}} \left[\lambda_{Qq} \left(\lambda_{Qq} + \frac{\lambda_{qq}}{2} + \frac{\lambda_{QQ}}{2} \right) \right] \\
\beta_1^{\text{coul}} &= \frac{2}{\Lambda_1^{\text{coul}}} [2\eta^2 \lambda_{QQ}\lambda_{Qq} + 2(1-\eta)^2 \lambda_{qq}\lambda_{Qq} + \lambda_{QQ}\lambda_{qq}] \\
\gamma_1^{\text{coul}} &= 0 \\
\Lambda_1^{\text{coul}} &= 2\lambda_{Qq} + \lambda_{qq} + \lambda_{QQ} \\
a_1 &= 2\lambda_{Qq} \\
b_1 &= \frac{4\lambda_{Qq}}{\Lambda_1^{\text{coul}}} [(1-\eta)\lambda_{qq} - \eta\lambda_{QQ}] \\
\omega_1 &= \lambda_{Qq} - \frac{\lambda_{Qq}^2}{\Lambda_1^{\text{coul}}}
\end{aligned} \tag{4.96}$$

$$\begin{aligned}
A_2^{\text{coul}} &= A_1^{\text{coul}} \\
\alpha_2^{\text{coul}} &= \alpha_1^{\text{coul}} \\
\beta_2^{\text{coul}} &= \beta_1^{\text{coul}} \\
\gamma_2^{\text{coul}} &= 0 \\
\Lambda_2^{\text{coul}} &= \Lambda_1^{\text{coul}} \\
a_2 &= a_1 \\
b_2 &= -b_1 \\
\omega_2 &= \omega_1
\end{aligned} \tag{4.97}$$

$$\begin{aligned}
A_3^{\text{coul}} &= A_1^{\text{coul}} \\
\alpha_3^{\text{coul}} &= \alpha_1^{\text{coul}} \\
\beta_3^{\text{coul}} &= \beta_1^{\text{coul}} \\
\gamma_3^{\text{coul}} &= 0 \\
\Lambda_3^{\text{coul}} &= \Lambda_1^{\text{coul}} \\
a_3 &= 0 \\
b_3 &= \frac{4}{\Lambda_1^{\text{coul}}} [2(1-\eta)\lambda_{Qq} + \lambda_{QQ}] \lambda_{qq} \\
\omega_3 &= \lambda_{qq} - \frac{\lambda_{qq}^2}{\Lambda_1^{\text{coul}}}
\end{aligned} \tag{4.98}$$

$$\begin{aligned}
A_4^{\text{coul}} &= A_1^{\text{coul}} \\
\alpha_4^{\text{coul}} &= \alpha_1^{\text{coul}} \\
\beta_4^{\text{coul}} &= \beta_1^{\text{coul}} \\
\gamma_4^{\text{coul}} &= 0 \\
\Lambda_4^{\text{coul}} &= \Lambda_1^{\text{coul}} \\
a_4 &= \frac{4}{\Lambda_1^{\text{coul}}} [2\eta\lambda_{Qq} + \lambda_{qq}] \lambda_{QQ} \\
b_4 &= 0 \\
\omega_4 &= \lambda_{QQ} - \frac{\lambda_{QQ}^2}{\Lambda_1^{\text{coul}}}
\end{aligned} \tag{4.99}$$

$$\begin{aligned}
A_5^{\text{coul}} &= 2A_1^{\text{coul}} \\
\alpha_5^{\text{coul}} &= \alpha_1^{\text{coul}} \\
\beta_5^{\text{coul}} &= \beta_1^{\text{coul}} \\
\gamma_5^{\text{coul}} &= 0 \\
\Lambda_5^{\text{coul}} &= \Lambda_1^{\text{coul}} \\
a_5 &= 2\lambda_{Qq} \\
b_5 &= \frac{4}{\Lambda_1^{\text{coul}}} [(1-\eta)\lambda_{qq}\lambda_{Qq} + \eta\lambda_{QQ}\lambda_{Qq} + \lambda_{qq}\lambda_{QQ}] \\
\omega_5 &= (\lambda_{Qq} + \lambda_{qq}) - \frac{(\lambda_{qq} + \lambda_{Qq})^2}{\Lambda_1^{\text{coul}}}
\end{aligned} \tag{4.100}$$

$$\begin{aligned}
A_6^{\text{coul}} &= A_5^{\text{coul}} \\
\alpha_6^{\text{coul}} &= \alpha_1^{\text{coul}} \\
\beta_6^{\text{coul}} &= \beta_1^{\text{coul}} \\
\gamma_6^{\text{coul}} &= 0 \\
\Lambda_6^{\text{coul}} &= \Lambda_1^{\text{coul}} \\
a_6 &= a_5 \\
b_6 &= -b_5 \\
\omega_6 &= \omega_5
\end{aligned} \tag{4.101}$$

Os fatores espaciais correspondentes ao potencial hiperfino spin-spin são dados por:

$$I_{\text{espacial}}^{\text{hyp,j}} = A_j^{\text{hyp}} e^{-(\alpha_j^{\text{hyp}} |\mathbf{P}^2| + \beta_j^{\text{hyp}} |\mathbf{P}'^2| + \gamma_j^{\text{hyp}} |\mathbf{P}| |\mathbf{P}'| z)}, \quad (4.102)$$

onde

$$\begin{aligned} A_1^{\text{hyp}} &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{8\pi\alpha_s}{3m_Q m_q} 8(\lambda_{QQ} \lambda_{qq})^{\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{\Lambda_1^{\text{hyp}}} \right)^{\frac{3}{2}} \\ \alpha_1^{\text{hyp}} &= \frac{1}{2\Lambda_1^{\text{hyp}}} \lambda_{Qq} (\lambda_{qq} + \lambda_{QQ}) \\ \beta_1^{\text{hyp}} &= \frac{2}{\Lambda_1^{\text{hyp}}} [\lambda_{QQ} \lambda_{qq} + \lambda_{Qq} (\lambda_{QQ} \eta^2 + \lambda_{qq} (1 - \eta)^2)] \\ \gamma_1^{\text{hyp}} &= \frac{2}{\Lambda_1^{\text{hyp}}} [\lambda_{Qq} (\lambda_{QQ} \eta - \lambda_{qq} (1 - \eta))] \\ \Lambda_1^{\text{hyp}} &= \lambda_{Qq} + \lambda_{qq} + \lambda_{QQ} \end{aligned} \quad (4.103)$$

$$\begin{aligned} A_2^{\text{hyp}} &= A_1^{\text{hyp}} \\ \alpha_2^{\text{hyp}} &= \alpha_1^{\text{hyp}} \\ \beta_2^{\text{hyp}} &= \beta_1^{\text{hyp}} \\ \gamma_2^{\text{hyp}} &= -\gamma_1^{\text{hyp}} \\ \Lambda_2^{\text{hyp}} &= \Lambda_1^{\text{hyp}} \end{aligned} \quad (4.104)$$

$$\begin{aligned} A_3^{\text{hyp}} &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{8\pi\alpha_s}{3m_Q m_q} 8(\lambda_{QQ} \lambda_{qq})^{\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{\Lambda_3^{\text{hyp}}} \right)^{\frac{3}{2}} \\ \alpha_3^{\text{hyp}} &= \lambda_{Qq} \\ \beta_3^{\text{hyp}} &= \frac{4\lambda_{Qq} \lambda_{QQ}}{2\lambda_{Qq} + \lambda_{QQ}} \eta^2 \\ \gamma_3^{\text{hyp}} &= 0 \\ \Lambda_3^{\text{hyp}} &= \frac{\lambda_{qq}}{\lambda_{Qq}} (2\lambda_{Qq} + \lambda_{QQ}) \end{aligned} \quad (4.105)$$

$$\begin{aligned} A_4^{\text{hyp}} &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{8\pi\alpha_s}{3m_Q m_q} 8(\lambda_{QQ} \lambda_{qq})^{\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{\Lambda_4^{\text{hyp}}} \right)^{\frac{3}{2}} \\ \alpha_4^{\text{hyp}} &= \lambda_{Qq} \\ \beta_4^{\text{hyp}} &= \frac{4\lambda_{Qq} \lambda_{qq}}{2\lambda_{Qq} + \lambda_{qq}} (1 - \eta)^2 \\ \gamma_4^{\text{hyp}} &= 0 \\ \Lambda_4^{\text{hyp}} &= \frac{\lambda_{QQ}}{\lambda_{Qq}} (2\lambda_{Qq} + \lambda_{qq}) \end{aligned} \quad (4.106)$$

$$\begin{aligned}
A_5^{\text{hyp}} &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{8\pi\alpha_s}{3m_Q m_q} 8(\lambda_{QQ}\lambda_{qq})^{\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{\Lambda_5^{\text{hyp}}} \right)^{\frac{3}{2}} \\
\alpha_5^{\text{hyp}} &= \frac{1}{2\Lambda_5^{\text{hyp}}} [\lambda_{QQ}(\lambda_{Qq} + \lambda_{qq}) + \lambda_{qq}(\lambda_{Qq} + \lambda_{QQ})] \\
\beta_5^{\text{hyp}} &= \frac{2}{\Lambda_5^{\text{hyp}}} [\lambda_{QQ}(\lambda_{Qq} + \lambda_{qq})\eta^2 + \lambda_{qq}(\lambda_{Qq} + \lambda_{QQ})(1-\eta)^2] \\
\gamma_5^{\text{hyp}} &= -\frac{2}{\Lambda_5^{\text{hyp}}} [\lambda_{QQ}(\lambda_{Qq} + \lambda_{qq})\eta + \lambda_{qq}(\lambda_{Qq} + \lambda_{QQ})(1-\eta)] \\
\Lambda_5^{\text{hyp}} &= \frac{(\lambda_{Qq} + \lambda_{qq})(\lambda_{Qq} + \lambda_{QQ})}{\lambda_{Qq}}
\end{aligned} \tag{4.107}$$

$$\begin{aligned}
A_6^{\text{hyp}} &= A_5^{\text{hyp}} \\
\alpha_6^{\text{hyp}} &= \alpha_5^{\text{hyp}} \\
\beta_6^{\text{hyp}} &= \beta_5^{\text{hyp}} \\
\gamma_6^{\text{hyp}} &= -\gamma_5^{\text{hyp}} \\
\Lambda_6^{\text{hyp}} &= \Lambda_5^{\text{hyp}}
\end{aligned} \tag{4.108}$$

Nas expressões acima,

$$\eta = \frac{m_Q}{m_q + m_Q} \tag{4.109}$$

$$\lambda_{Qq} = \frac{1}{4b_D^2} = \frac{1}{4b_{\bar{D}}^2} \tag{4.110}$$

$$\lambda_{qq} = \frac{1}{4b_\pi^2} \tag{4.111}$$

$$\lambda_{QQ} = \frac{1}{4b_{J/\psi}^2} \tag{4.112}$$

$$\lambda'_{Qq} = \frac{x\lambda_{Qq}}{x + \lambda_{Qq}} \tag{4.113}$$

$$\lambda'_{qq} = \frac{x\lambda_{qq}}{x + \lambda_{qq}} \tag{4.114}$$

$$\lambda'_{QQ} = \frac{x\lambda_{QQ}}{x + \lambda_{QQ}} \tag{4.115}$$

Para mésons pesados, a contribuição do termo hiperfino pode ser desprezada, devido à presença do fator $\frac{1}{m_Q m_q}$. Analogamente ao espalhamento de mésons leves, a contribuição do termo de Coulomb também pode ser desprezada [31]. Assim, o espalhamento é dominado pelo termo de confinamento.

A amplitude invariante é dada, dessa forma, por:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{fi} &= \mathcal{N} h_{fi}^{\text{conf}} \\
 &= \mathcal{N} \frac{2}{9} \frac{V_0}{(2\pi)^3} (\lambda_{Qq} \lambda_{qq})^{\frac{3}{4}} (32\pi)^{\frac{3}{2}} \left[2 \left(\frac{\lambda'_{Qq}}{\Lambda_1^{\text{conf}}} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-(\alpha_1^{\text{conf}} |\mathbf{P}|^2 + \beta_1^{\text{conf}} |\mathbf{P}'|^2)} \cosh(\gamma_1^{\text{conf}} |\mathbf{P}| |\mathbf{P}'| z) \right. \\
 &\quad + x^{\frac{3}{2}} e^{-\alpha_3^{\text{conf}} |\mathbf{P}|^2} \left(\frac{1}{\Lambda_3^{\text{conf}}} e^{-\beta_3^{\text{conf}} |\mathbf{P}'|^2} + \frac{1}{\Lambda_4^{\text{conf}}} e^{-\beta_4^{\text{conf}} |\mathbf{P}'|^2} \right) \\
 &\quad \left. - 4 \left(\frac{x}{\Lambda_5^{\text{conf}}} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-(\alpha_5^{\text{conf}} |\mathbf{P}|^2 + \beta_5^{\text{conf}} |\mathbf{P}'|^2)} \cosh(\gamma_5^{\text{conf}} |\mathbf{P}| |\mathbf{P}'| z) \right] \quad (4.116)
 \end{aligned}$$

onde

$$|\mathbf{P}|^2 = \frac{1}{4s} \left[(s - (M_{J/\psi}^2 + M_\pi^2))^2 - 4M_{J/\psi}^2 M_\pi^2 \right] \quad (4.117)$$

$$|\mathbf{P}'|^2 = \frac{1}{4s} \left[(s - (M_D^2 + M_D^2))^2 - 4M_D^2 M_D^2 \right] \quad (4.118)$$

$$\mathcal{N} = \frac{(2\pi)^3}{s} \{ [s^2 - (M_{J/\psi}^2 - M_\pi^2)^2] [s^2 - (M_D^2 - M_D^2)^2] \}^{\frac{1}{2}} \quad (4.119)$$

Substituindo este resultado na Eq. (4.20) e utilizando a Eq. (4.21), obtemos a secção de choque total, $\sigma_{fi}(s)$, para um dado canal final. Somando sobre todos os possíveis canais finais, obtemos a secção de choque total para o espalhamento:

$$\sigma_{tot}(s) = \sum_{f=1}^4 \sigma_{fi}(s) \quad (4.120)$$

Na Fig. (4.5) é mostrado um gráfico da secção de choque em função da energia cinética relativa dos mésons iniciais no c.m., $E_{cin}^{rel} = \sqrt{s} - (M_{J/\psi} + M_\pi)$.

Os valores dos parâmetros do potencial e das funções de onda são obtidos através de ajuste pelas massas dos mésons com a utilização do princípio variacional:

$$\begin{aligned}
 M_\alpha &= m_1 + m_2 + \frac{3(m_1 + m_2)}{16\lambda_\alpha m_1 m_2} - \frac{4V_0}{3} \left[1 + \frac{\lambda_\alpha}{2x} \right]^{-\frac{3}{2}} \\
 &\quad - \frac{4\alpha_s}{3(\pi\lambda_\alpha)^{\frac{1}{2}}} - \left(\frac{3}{4} - S_\alpha \right) \frac{32\pi\alpha_s}{9m_1 m_2} \left(\frac{1}{4\lambda_\alpha\pi} \right)^{\frac{3}{2}} + C; , \quad (4.121)
 \end{aligned}$$

$$\frac{dM_\alpha}{d\lambda_\alpha} = 0 \quad (4.122)$$

onde $\lambda_\alpha = \frac{1}{4b_\alpha^2}$ e S_α são, respectivamente, o parâmetro de oscilador e o spin do méson α .

Figura 4.5: Secção de choque para o espalhamento inelástico $J/\psi - \pi$ para os diferentes canais finais.

Utilizamos os valores

$$m_Q = 1,67 \text{ GeV} ; m_q = 0,33 \text{ GeV} \quad (4.123)$$

$$V_0 = 0,675 \text{ GeV} ; C = 0,24 \text{ GeV} ; x = 1,0 \text{ GeV}^{-2} \quad (4.124)$$

$$\lambda_{QQ} = 0,64 \text{ GeV}^{-2} ; \lambda_{qq} = 2,4 \text{ GeV}^{-2} ; \lambda_{Qq} = 1,7 \text{ GeV}^{-2} \quad (4.125)$$

Figura 4.6: Secções de choque totais para o espalhamento $J/\psi - \pi$ obtidas com o FT e o QBD.

Esses valores são os mesmos utilizados na Ref. [31], cujo resultado para a secção de choque total é comparado, na Fig. (4.6), com o obtido através do método Fock-Tani.

Observamos que o resultado obtido através do método Fock-Tani é aproximadamente igual ao obtido na Ref. [31], onde é utilizado o “QBD”. No entanto, é importante observar que o elemento de matriz, h_{fi} , utilizado para o cálculo das secções de choque é diferente do utilizado na referência citada acima, apresentando termos adicionais.

Primeiramente, incluímos os termos quark-quark (V_{qq}), antiquark-antiquark ($V_{\bar{q}\bar{q}}$) e quark-antiquark ($V_{q\bar{q}}$) no potencial de confinamento gaussiano, V^{conf} , seguindo o mesmo procedimento das Ref. [15] -[24]. Na Ref. [31], o potencial de confinamento é visto como um termo não-perturbativo efetivo, em que apenas o termo quark-antiquark é incluído, de modo que o elemento de matriz obtido, h_{fi}^{QBD} , não contém as contribuições dos termos quark-quark e antiquark-antiquark. Em segundo lugar, o potencial Fock-Tani efetivo méson-méson apresenta explicitamente a simetria “post-prior”. Como no processo considerado os estados finais são diferentes dos estados iniciais e uma vez que são utilizadas funções de onda aproximadas (gaussianas), espera-se que os termos “post” e “prior” sejam diferentes. De fato, notamos que as contribuições dos termos V_1 e V_2 (“prior”) são diferentes das contribuições dos termos V_3 e V_4 (“post”). O potencial Fock-Tani é dado pela média aritmética das formas “post” e “prior”, de modo que a discrepância “post-prior” é eliminada dos elementos de matriz. O potencial utilizado na Ref. [31] contém apenas a contribuição dos termos “prior”, de modo que o elemento de matriz apresenta discrepância “post-prior”.

Para analisarmos os efeitos dos termos adicionais que aparecem no potencial Fock-Tani, incluímos no elemento de matriz h_{fi}^{QBD} , primeiramente apenas as contribuições dos termos quark-quark e antiquark-antiquark, mantendo a assimetria “post-prior”. Na Fig. (4.7) é mostrada a secção de choque calculada com esse novo elemento de matriz. Observamos que a inclusão dos termos quark-quark e antiquark-antiquark diminui consideravelmente a secção de choque . . .

Incluímos, então, apenas o efeito da simetria “post- prior”, mantendo ausentes as contribuições dos termos quark-quark e antiquark-antiquark. Na Fig. (4.8) é mostrado o gráfico da secção de choque calculada. Observamos que a inclusão dos termos “post” aumenta consideravelmente a secção de choque.

Figura 4.7: Efeito dos termos qq e $\bar{q}\bar{q}$ na secção de choque total para o espalhamento $J/\psi - \pi$ obtida com o QBD.

Figura 4.8: Efeito da simetria “post-prior” na secção de choque total para o espalhamento $J/\psi - \pi$ obtida com o QBD.

Assim, uma vez que os resultados obtidos pelos dois métodos são da mesma ordem, podemos concluir que o efeito da assimetria do potencial utilizado na obtenção do elemento de matriz h_{fi}^{QBD} é compensado pela ausência das contribuições dos termos quark-quark e antiquark-antiquark. Considerando que a inclusão dos termos quark-quark e antiquark-antiquark no potencial é mais correta, vemos que a simetria “post-prior” é essencial para a obtenção de uma secção de choque compatível com o que é descrito na literatura [69]-[70].

Consideremos, agora, a reação de “break-up” em quarks e antiquarks assintoticamente livres:

$$J/\psi + \pi \rightarrow Q + \bar{Q} + q + \bar{q} \quad (4.126)$$

Os quarks pesados, Q e $\bar{Q}$, estão contidos no estado γ e os quarks leves, q e $\bar{q}$, no estado δ .

O termo do Hamiltoniano de Fock-Tani correspondente a esse processo é dado nas Eq. (3.94)-(3.95). Os estados inicial e final são dados por:

$$|i\rangle = m_\gamma^\dagger m_\delta^\dagger |0\rangle \quad (4.127)$$

$$|f\rangle = q_\epsilon^\dagger q_\omega^\dagger q_{\epsilon'}^\dagger q_{\omega'}^\dagger |0\rangle \quad (4.128)$$

Dessa forma, o elemento de matriz-T, correspondente ao processo, é dado por:

$$\begin{aligned} V(\mu\nu\rho\sigma; \gamma\delta) &= V_{qq}^{\epsilon\epsilon'\rho'\lambda'} \Phi_\delta^{\lambda'\omega'} \Phi_\gamma^{\rho'\omega} + V_{\bar{q}\bar{q}}^{\omega\omega'\sigma'\tau'} \Phi_\delta^{\epsilon'\tau'} \Phi_\gamma^{\epsilon\sigma'} \\ &+ V_{q\bar{q}}^{\epsilon\omega'\rho'\tau'} \Phi_\delta^{\epsilon'\tau'} \Phi_\gamma^{\rho'\omega} + V_{\bar{q}q}^{\epsilon'\omega\rho'\tau'} \Phi_\delta^{\epsilon\tau'} \Phi_\gamma^{\rho'\omega'}. \end{aligned} \quad (4.129)$$

Consideramos que os estados finais são degenerados em spin e cor, o que leva a um fator de spin, sabor e cor $I_{SFC} = 1/2$.

Para as funções de onda espaciais dos estados finais, utilizamos ondas planas. No espaço de momentos, temos:

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{P}_\alpha}^{\mathbf{P}_Q \mathbf{P}_{\bar{Q}}} &= \delta^{(3)}(\mathbf{P}_\alpha - \mathbf{p}_Q - \mathbf{p}_{\bar{Q}}) \\ \Phi_{\mathbf{P}_\beta}^{\mathbf{P}_q \mathbf{P}_{\bar{q}}} &= \delta^{(3)}(\mathbf{P}_\beta - \mathbf{p}_q - \mathbf{p}_{\bar{q}}) \end{aligned} \quad (4.130)$$

Fixando os momentos finais e mudando para as variáveis do c.m., obtemos:

$$\mathbf{P}_\alpha = \mathbf{P}' = \mathbf{P}_Q + \mathbf{P}_{\bar{Q}}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_\beta &= -\mathbf{P}' = \mathbf{P}_q + \mathbf{P}_{\bar{q}} \\
\mathbf{p}_\alpha &= \frac{1}{2}(\mathbf{p}_Q - \mathbf{p}_{\bar{Q}}) \\
\mathbf{p}_\beta &= \frac{1}{2}(\mathbf{p}_q - \mathbf{p}_{\bar{q}}) \\
\mathbf{p}_Q &= \frac{\mathbf{P}'}{2} + \mathbf{p}_\alpha \\
\mathbf{p}_{\bar{Q}} &= \frac{\mathbf{P}'}{2} - \mathbf{p}_\alpha \\
\mathbf{p}_q &= -\frac{\mathbf{P}'}{2} + \mathbf{p}_\beta \\
\mathbf{p}_{\bar{q}} &= -\frac{\mathbf{P}'}{2} - \mathbf{p}_\beta
\end{aligned} \tag{4.131}$$

O elemento de matriz resultante é dado por:

$$\begin{aligned}
h_{fi} &= \frac{1}{2}V(\mathbf{Q}) \left[\phi_\gamma \left(\mathbf{p}_\alpha - \frac{\mathbf{Q}}{2} \right) \phi_\delta \left(\mathbf{p}_\beta + \frac{\mathbf{Q}}{2} \right) \right. \\
&\quad + \phi_\gamma \left(\mathbf{p}_\alpha + \frac{\mathbf{Q}}{2} \right) \phi_\delta \left(\mathbf{p}_\beta - \frac{\mathbf{Q}}{2} \right) \\
&\quad - \phi_\gamma \left(\mathbf{p}_\alpha - \frac{\mathbf{Q}}{2} \right) \phi_\delta \left(\mathbf{p}_\beta - \frac{\mathbf{Q}}{2} \right) \\
&\quad \left. - \phi_\gamma \left(\mathbf{p}_\alpha + \frac{\mathbf{Q}}{2} \right) \phi_\delta \left(\mathbf{p}_\beta + \frac{\mathbf{Q}}{2} \right) \right],
\end{aligned} \tag{4.132}$$

onde $V(\mathbf{Q})$ é o potencial de interação,

$$V(\mathbf{Q}) = V^{\text{conf}}(\mathbf{Q}) + V^{\text{coul}}(\mathbf{Q}) + V^{\text{hyp}}(\mathbf{Q}) \tag{4.133}$$

$\mathbf{Q} = \mathbf{P} - \mathbf{P}'$ é o momento transferido e

$$\phi_\alpha(\mathbf{p}) = \left(\frac{4\lambda_\alpha}{\pi} \right)^{\frac{3}{4}} e^{-2\lambda_\alpha \mathbf{p}^2} \tag{4.134}$$

são as funções de onda relativa dos mésons.

Analogamente ao caso anterior, a contribuição do termo hiperfino é desprezível. Consideremos a contribuição do termo de confinamento. A amplitude invariante é dada por:

$$\mathcal{M}_{fi} = \mathcal{N} h_{fi}^{\text{conf}} \tag{4.135}$$

onde

$$\mathcal{N} = \frac{(2\pi)^3}{s} \left\{ \left[s^2 - (M_{J/\psi}^2 - M_\pi^2)^2 \right] \left[s^2 - (4(m_Q^2 + \mathbf{p}_\alpha^2) - 4(m_q^2 + \mathbf{p}_\beta^2))^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{4.136}$$

Para uma dada configuração de momentos relativos, a secção de choque é dada por:

$$\sigma_{fi}(s, \mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta) = \frac{1}{64\pi s} \frac{K^2}{|\mathbf{P}|^2} 4\mathcal{N}^2 e^{-4\lambda_{QQ}\mathbf{p}_\alpha^2} e^{-4\lambda_{qq}\mathbf{p}_\beta^2} \int_{Q_{min}}^{Q_{max}} dQ Q e^{-\Lambda Q^2} F(Q, z_\alpha, z_\beta) \quad (4.137)$$

$$F(Q, z_\alpha, z_\beta) = \cosh[(a-b)Q] + \cosh[(a+b)Q] - 2\cosh[aQ] - 2\cosh[bQ] + 2 \quad (4.138)$$

onde

$$K = 4(\lambda_{QQ}\lambda_{qq})^{\frac{3}{4}} \frac{V_0}{(2\pi)^3} (8x)^{\frac{3}{2}} \quad (4.139)$$

$$Q_{min} = (|\mathbf{P}| - |\mathbf{P}'|)^2 \quad (4.140)$$

$$Q_{max} = (|\mathbf{P}| + |\mathbf{P}'|)^2 \quad (4.141)$$

$$a = 4\lambda_{QQ}|\mathbf{p}_\alpha|z_\alpha \quad (4.142)$$

$$b = 4\lambda_{qq}|\mathbf{p}_\beta|z_\beta \quad (4.143)$$

$$\Lambda = 4x + \lambda_{QQ} + \lambda_{qq} \quad (4.144)$$

$$z_\alpha = \cos[\theta(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{Q})] \quad (4.145)$$

$$z_\beta = \cos[\theta(\mathbf{p}_\beta, \mathbf{Q})] \quad (4.146)$$

A secção de choque total é obtida integrando-se $\sigma_{fi}(s, \mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta)$ sobre todos os possíveis momentos relativos:

$$\sigma_{fi}(s) = \int d\mathbf{p}_\alpha \int d\mathbf{p}_\beta \sigma_{fi}(s, \mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta) \quad (4.147)$$

A conservação de energia implica que

$$\sqrt{s} \geq (4m_Q^2 + 4\mathbf{p}_\alpha^2)^{\frac{1}{2}} + (4m_q^2 + 4\mathbf{p}_\beta^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4.148)$$

de modo que os limites de integração ficam restritos:

$$0 \leq \mathbf{p}_\alpha^2 \leq \left[\frac{\sqrt{s}}{2} - m_q \right]^2 - m_Q^2 \quad (4.149)$$

$$(4.150)$$

$$0 \leq \mathbf{p}_\beta^2 \leq \left[\frac{\sqrt{s}}{2} - (m_q^2 + \mathbf{p}_\alpha^2)^{\frac{1}{2}} \right]^2 - m_q^2 \quad (4.151)$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \sigma_{fi}(s) = & 2\pi \frac{K^2}{s|\mathbf{P}|^2} \int_0^{|\mathbf{p}_\alpha|_{\max}} d\mathbf{p}_\alpha \int_0^{|\mathbf{p}_\beta|_{\max}} d\mathbf{p}_\beta |\mathbf{p}_\alpha|^2 |\mathbf{p}_\beta|^2 \mathcal{N}^2 e^{-4\lambda_{QQ}\mathbf{p}_\alpha^2} e^{-4\lambda_{qq}\mathbf{p}_\beta^2} \\ & \times \int_{Q_{\min}}^{Q_{\max}} dQ Q e^{-\Lambda Q^2} \left[1 - \frac{\text{sen}(4\lambda_{QQ}|\mathbf{p}_\alpha|Q)}{4\lambda_{QQ}|\mathbf{p}_\alpha|Q} \right] \left[1 - \frac{\text{sen}(4\lambda_{qq}|\mathbf{p}_\beta|Q)}{4\lambda_{qq}|\mathbf{p}_\beta|Q} \right] \end{aligned} \quad (4.152)$$

Consideremos, agora, a contribuição do termo de Coulomb. A secção de choque total é dada por

$$\begin{aligned} \sigma_{fi}(s) = & 2\pi \frac{K'^2}{s|\mathbf{P}|^2} \int_0^{|\mathbf{p}_\alpha|_{\max}} d\mathbf{p}_\alpha \int_0^{|\mathbf{p}_\beta|_{\max}} d\mathbf{p}_\beta |\mathbf{p}_\alpha|^2 |\mathbf{p}_\beta|^2 \mathcal{N}^2 e^{-4\lambda_{QQ}\mathbf{p}_\alpha^2} e^{-4\lambda_{qq}\mathbf{p}_\beta^2} \\ & \times \int_{Q_{\min}}^{Q_{\max}} \frac{dQ}{Q^3} e^{-\Lambda' Q^2} \left[1 - \frac{\text{sen}(4\lambda_{QQ}|\mathbf{p}_\alpha|Q)}{4\lambda_{QQ}|\mathbf{p}_\alpha|Q} \right] \left[1 - \frac{\text{sen}(4\lambda_{qq}|\mathbf{p}_\beta|Q)}{4\lambda_{qq}|\mathbf{p}_\beta|Q} \right] \end{aligned} \quad (4.153)$$

onde

$$K' = 4 \left(\frac{\lambda_{QQ}\lambda_{qq}}{\pi^2} \right)^{\frac{3}{4}} \frac{\alpha_s}{2\pi^2} \quad (4.154)$$

$$\Lambda' = \lambda_{QQ} + \lambda_{qq} . \quad (4.155)$$

Nas Fig.(4.9) e Fig. (4.10) são mostrados os gráficos da secção de choque em função da energia dos mésons iniciais no c.m., $\sqrt{s}$ para as contribuições do termo de confinamento e de Coulomb. As secções de choque não apresentam um pico próximo ao “threshold”, mas aumentam com a energia de forma suave até um valor assintótico máximo. Estes resultados são similares aos descritos na Ref. [31].

Figura 4.9: Contribuição do termo de confinamento para a secção de choque total para a reação de “break-up” no espalhamento $J/\psi - \pi$.

Figura 4.10: Contribuição do termo de Coulomb para a secção de choque total para a reação de “break-up” no espalhamento $J/\psi - \pi$.

Capítulo 5

Potencial Méson-Méson Fock-Tani para Sistemas de Muitos Corpos

Neste capítulo vamos empregar o potencial efetivo méson-méson Fock-Tani para estudar efeitos de temperatura sobre as propriedades dos mésons. Neste estudo não são levados em conta os efeitos de possíveis quebras e ionizações de mésons no meio. Devido ao fato de usarmos modelos de quarks um tanto esquemáticos, os resultados não devem ser tomados literalmente. No entanto, acreditamos que os aspectos qualitativos devem ser mantidos quando um modelo de quarks mais realista for empregado.

5.1 As Funções de Green para Sistemas de Muitos Corpos.

Nesta secção faremos uma breve revisão das funções de Green para sistemas de muitos corpos, apresentando as definições básicas e condições de contorno. Seguimos, principalmente, o livro de Kadanoff e Baym [71].

Consideremos um sistema de muitas partículas idênticas elementares (sem estrutura) descrito pelos operadores de criação e aniquilação, $\psi^\dagger(\mathbf{r}, t)$ e $\psi(\mathbf{r}, t)$. Estes operadores obedecem relações de comutação (bósons) ou anticomutação (férmions) a tempos iguais dadas por :

$$[\psi(\mathbf{r}, t), \psi(\mathbf{r}', t)]_{\mp} = [\psi^\dagger(\mathbf{r}, t), \psi^\dagger(\mathbf{r}', t)]_{\mp} = 0 \quad (5.1)$$

$$[\psi(\mathbf{r}, t), \psi^\dagger(\mathbf{r}', t)]_{\mp} = \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') , \quad (5.2)$$

onde o sinal $(-)$ indica bósons e o sinal $(+)$ indica férmions.

Os operadores macroscópicos que descrevem o sistema podem ser escritos em termos de produtos envolvendo os operadores ψ e $\psi^\dagger$. Por exemplo, a densidade de partículas no ponto $\mathbf{r}$ no instante t é dada por:

$$n(\mathbf{r}, t) = \psi^\dagger(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t). \quad (5.3)$$

Da mesma forma, o Hamiltoniano do sistema para uma interação instantânea de dois corpos, $V(\mathbf{r})$, é dado por:

$$\begin{aligned} H(t) = & \frac{1}{2M} \int d\mathbf{r} \nabla \psi^\dagger(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, t) \\ & + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \psi^\dagger(\mathbf{r}, t) \psi^\dagger(\mathbf{r}', t) V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \psi(\mathbf{r}', t) \psi(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde M é a massa das partículas.

A evolução temporal de um operador qualquer do sistema, $O(t)$, é dada pela equação de Heisenberg:

$$i \frac{dO(t)}{dt} = [O(t), H(t)]. \quad (5.5)$$

Com H explicitamente independente do tempo, obtemos:

$$O(t) = e^{iHt} O(0) e^{-iHt}. \quad (5.6)$$

Desejamos, agora, descrever o comportamento do sistema à temperatura finita. Para isso, devemos tomar os valores esperados dos operadores nos estados termodinâmicos do sistema, utilizando os “ensembles” da mecânica estatística. Assim, os valores esperados passam a representar médias termodinâmicas. Consideremos um sistema em equilíbrio termodinâmico descrito pelo “ensemble” macrocanônico. O valor esperado do operador O é dado por:

$$\langle O \rangle = \frac{\sum_i \langle i | O | i \rangle e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}}{\sum_i e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}}, \quad (5.7)$$

onde $|i\rangle$ representa um estado de N_i partículas com energia E_i , normalizado a um, $\beta = \frac{1}{T}$ (com a temperatura dada em unidades de energia) e μ é o potencial químico. A soma é feita sobre todos os estados do sistema com todos os possíveis números de partículas. Podemos escrever a Eq. (5.7) na forma compacta,

$$\langle O \rangle = \frac{\text{Tr} [O e^{-\beta(E - \mu N)}]}{\text{Tr} [e^{-\beta(E - \mu N)}]}, \quad (5.8)$$

onde “Tr” denota o traço do operador entre colchetes. Para $\beta \rightarrow \infty$ ($T \rightarrow 0$) temos o sistema no estado fundamental.

As funções de Green são definidas como médias termodinâmicas de produtos de operadores ψ e $\psi^\dagger$. A função de Green de uma partícula é definida como:

$$G(1, 1') = \frac{1}{i} \left\langle \mathcal{T} \left[\psi(1) \psi^\dagger(1') \right] \right\rangle, \quad (5.9)$$

onde $1 \equiv (\mathbf{r}_1, t_1)$. A função de Green de duas partículas é definida como:

$$G_2(12, 1'2') = \frac{1}{i^2} \left\langle \mathcal{T} \left[\psi(1) \psi(2) \psi^\dagger(2') \psi^\dagger(1') \right] \right\rangle. \quad (5.10)$$

Nestas expressões, $\mathcal{T}$ é o operador de ordenamento temporal de Wick,

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \left[\psi(1) \psi^\dagger(1') \right] &= \psi(1) \psi^\dagger(1'), \quad \text{para } t_1 > t_{1'} \\ &= \pm \psi^\dagger(1') \psi(1), \quad \text{para } t_1 < t_{1'}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Usamos a convenção de sinal superior referindo-se a bósons e o sinal inferior referindo-se a férmions.

A função de Green de uma partícula, $G(1, 1')$, descreve a propagação de perturbações nas quais uma partícula é adicionada ou removida de um sistema de muitas partículas em equilíbrio, contendo, portanto, informações sobre as propriedades da partícula no sistema, tais como a energia de partícula única, os estados de partícula única permitidos, etc.. Analogamente, a função de Green de duas partículas, $G_2(12, 1'2')$, descreve as perturbações resultantes da adição ou remoção de duas partículas do sistema.

É útil definir também as funções de correlação,

$$G^>(1, 1') = \frac{1}{i} \left\langle \left[\psi(1) \psi^\dagger(1') \right] \right\rangle \quad (5.12)$$

$$G^<(1, 1') = \pm \frac{1}{i} \left\langle \left[\psi^\dagger(1') \psi(1) \right] \right\rangle. \quad (5.13)$$

A função de Green de uma partícula pode ser escrita em termos das funções de correlação na forma

$$G(1, 1') = \theta(t_1 - t_{1'}) G^>(1, 1') + \theta(t_{1'} - t_1) G^<(1, 1'). \quad (5.14)$$

As funções de Green e as funções de correlação satisfazem uma série de identidades importantes. Por exemplo, utilizando a invariância cíclica do traço e a relação $[H, N] = 0$

(conservação do número de partículas), é possível mostrar que G , $G^<$ e $G^>$ são funções apenas da diferença dos tempos:

$$G^>(t, t') = G^>(t - t') \quad (5.15)$$

$$G^<(t, t') = G^<(t - t') \quad (5.16)$$

$$G(t, t') = G(t - t') . \quad (5.17)$$

Outra relação importante é conhecida como condição de Kubo-Martin-Schwinger (KMS) [72]:

$$G^<(1, 1')|_{t_1=0} = \pm e^{\beta\mu} G^>(1, 1')|_{t_1=-i\beta} . \quad (5.18)$$

Para obtermos uma relação análoga para G_2 , estendemos a definição do ordenamento temporal para tempos imaginários. Dessa forma, a função de Green de uma partícula fica bem definida no intervalo $0 \leq it \leq \beta$,

$$\begin{aligned} G(1, 1') &= G^>(1, 1'), \text{ para } it_1 > it_1', \\ &= G^<(1, 1'), \text{ para } it_1 < it_1', \end{aligned} \quad (5.19)$$

de modo que podemos reescrever a Eq. (5.18) como

$$G(1, 1')|_{t_1=0} = \pm e^{\beta\mu} G(1, 1')|_{t_1=-i\beta} . \quad (5.20)$$

Desse resultado, segue que G_2 obedece a mesma condição sobre o eixo imaginário:

$$G(12, 1'2')|_{t_{1(1')}=0} = \pm e^{\beta\mu} G(12, 1'2')|_{t_{1(1')}=-i\beta} . \quad (5.21)$$

Quando o Hamiltoniano do sistema apresentar invariância translacional e rotacional no espaço e invariância translacional no tempo, as funções de correlação dependerão apenas de $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{1'}|$ e $t_1 - t_{1'}$, de modo que podemos escrever:

$$G^{>(<)}(1, 1') = G^{>(<)}(1 - 1') = G^{>(<)}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{1'}|, t_1 - t_{1'}) . \quad (5.22)$$

Nesse caso, podemos definir as transformadas de Fourier de $G^<$ e $G^>$:

$$\begin{aligned} G^>(\mathbf{p}, \omega) &= i \int d\mathbf{r} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} + i\omega t} G^>(\mathbf{r}, t) \\ G^<(\mathbf{p}, \omega) &= \pm i \int d\mathbf{r} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} + i\omega t} G^<(\mathbf{r}, t) . \end{aligned} \quad (5.23)$$

A condição de contorno Eq. (5.18) pode ser escrita em termos das diferenças de variáveis espaciais e temporais como:

$$G^<(\mathbf{r}, t) = \pm e^{\beta\mu} G^>(\mathbf{r}, t - i\beta) . \quad (5.24)$$

No espaço de momentos obtemos:

$$G^<(\mathbf{p}, \omega) = \pm e^{-\beta(\omega-\mu)} G^>(\mathbf{p}, \omega) . \quad (5.25)$$

É útil introduzir a função espectral, $A(\mathbf{p}, \omega)$, definida por:

$$A(\mathbf{p}, \omega) = G^>(\mathbf{p}, \omega) \mp G^<(\mathbf{p}, \omega) . \quad (5.26)$$

A condição de contorno pode ser representada, assim, na forma

$$G^>(\mathbf{p}, \omega) = [1 \pm f(\omega)] A(\mathbf{p}, \omega) \quad (5.27)$$

$$G^<(\mathbf{p}, \omega) = f(\omega) A(\mathbf{p}, \omega) , \quad (5.28)$$

onde $f(\omega)$ é reconhecido como o número de ocupação médio para o modo de energia ω no “ensemble” macrocanônico,

$$f(\omega) = \frac{1}{e^{\beta(\omega-\mu)} \mp 1} . \quad (5.29)$$

Utilizando a representação integral da função degrau,

$$\theta(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{i\omega\tau}}{\omega + i\epsilon} , \quad (5.30)$$

podemos expressar $G(\mathbf{p}, \omega)$ em termos de $A(\mathbf{p}, \omega)$:

$$G(\mathbf{p}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega_1}{2\pi} A(\mathbf{p}, \omega_1) \left[\frac{f(\omega_1)}{\omega - \omega_1 - i\epsilon} \mp \frac{1 \pm f(\omega_1)}{\omega - \omega_1 + i\epsilon} \right] . \quad (5.31)$$

Como exemplo simples, vamos determinar a função de Green para partículas livres. Nesse caso, o Hamiltoniano é dado por:

$$H_0 = \frac{1}{2M} \int d\mathbf{r} \nabla \psi^\dagger(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, t) . \quad (5.32)$$

Para partículas livres, a função espectral é dada por:

$$A_0(\mathbf{p}, \omega) = 2\pi \delta \left(\omega - \frac{\mathbf{p}^2}{2M} \right) , \quad (5.33)$$

de modo que obtemos

$$\begin{aligned} G_0^>(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{i} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - i\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2M}\right)t} \left[1 \pm f\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2M}\right) \right] \\ G_0^<(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{i} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - i\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2M}\right)t} f\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2M}\right) . \end{aligned} \quad (5.34)$$

A densidade média de partículas com momento $\mathbf{p}$ é dada por:

$$\langle n(\mathbf{p}) \rangle = f\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2M}\right) = \frac{1}{e^{\beta\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2M} - \mu\right)} \mp 1} , \quad (5.35)$$

que é o resultado familiar da mecânica estatística elementar.

5.2 A Equação de Movimento para a Função de Green de um Sistema de Mésons Interagindo através do Potencial Efetivo Méson-Méson Fock-Tani.

Nesta secção vamos obter a equação de movimento para a função de Green de um méson num sistema de mésons idênticos que interage via potencial efetivo méson-méson Fock-Tani.

Os operadores M e $M^\dagger$ não satisfazem relações de comutação canônicas, de forma que sua utilização na definição das funções de Green não é trivial. Conforme descrito no Capítulo 3, os valores esperados calculados no espaço de Fock-Tani são idênticos aos obtidos no espaço de Fock original. Assim, fazendo os cálculos no espaço de Fock-Tani, onde os mésons são descritos pelos operadores de méson “ideal” (sem estrutura), m e $m^\dagger$, que satisfazem relações de comutação canônicas, podemos definir e utilizar as funções de Green conforme descrito na secção anterior para partículas elementares.

A função de Green de um méson ideal é definida por:

$$G_{\alpha\alpha'}(\mathbf{r}_1 t_1; \mathbf{r}_2 t_2) = \frac{1}{i} \left\langle \mathcal{T} \left[m_\alpha(\mathbf{r}_1 t_1) m_{\alpha'}^\dagger(\mathbf{r}_2 t_2) \right] \right\rangle . \quad (5.36)$$

A função de Green de dois mésons é definida por:

$$G_{\alpha\beta;\gamma\delta}(\mathbf{r}_1 t_1; \mathbf{r}_2 t_2; \mathbf{r}_1' t_1'; \mathbf{r}_2' t_2') = \frac{1}{i^2} \left\langle \mathcal{T} \left[m_\alpha(\mathbf{r}_1 t_1) m_\beta(\mathbf{r}_2 t_2) m_\delta^\dagger(\mathbf{r}_2' t_2') m_\gamma^\dagger(\mathbf{r}_1' t_1') \right] \right\rangle . \quad (5.37)$$

Nas definições acima, os índices de méson, α , β , etc., denotam apenas os números quânticos de spin, sabor e cor dos mésons. As coordenadas espaciais e temporais são

explicitadas de modo a facilitar o manuseio das expressões. Por simplicidade, deixaremos a parte de spin, sabor e cor implícita. Dessa forma, escrevemos:

$$G(\mathbf{r}_1 t_1; \mathbf{r}_2 t_2) = \frac{1}{i} \left\langle \mathcal{T} \left[m(\mathbf{r}_1 t_1) m^\dagger(\mathbf{r}_2 t_2) \right] \right\rangle \quad (5.38)$$

$$G(\mathbf{r}_1 t_1; \mathbf{r}_2 t_2; \mathbf{r}_1' t_1'; \mathbf{r}_2' t_2') = \frac{1}{i^2} \left\langle \mathcal{T} \left[m(\mathbf{r}_1 t_1) m(\mathbf{r}_2 t_2) m^\dagger(\mathbf{r}_2' t_2') m^\dagger(\mathbf{r}_1' t_1') \right] \right\rangle. \quad (5.39)$$

O operador de méson no espaço de coordenadas é dado pela transformada de Fourier do operador $m(\mathbf{p}, t)$:

$$m(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} m(\mathbf{p}, t). \quad (5.40)$$

O Hamiltoniano Fock-Tani é dado por:

$$\begin{aligned} H_m &= \frac{1}{2M} \int d\mathbf{r} \left[\nabla m^\dagger(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla m(\mathbf{r}, t) + M_\alpha m^\dagger(\mathbf{r}, t) m(\mathbf{r}, t) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^6} \int d\mathbf{R}_{\alpha\beta} d\mathbf{R}_{\gamma\delta} d\mathbf{r}_{\alpha\beta} d\mathbf{r}_{\gamma\delta} d\mathbf{P}_{\alpha\beta} d\mathbf{P}_{\gamma\delta} d\mathbf{p}_{\alpha\beta} d\mathbf{p}_{\gamma\delta} \delta^{(3)}(\mathbf{P}_{\alpha\beta} - \mathbf{P}_{\gamma\delta}) V_{\text{rel}}(\mathbf{p}_{\alpha\beta}, \mathbf{p}_{\gamma\delta}) \\ &\times e^{i\left(\frac{\mathbf{P}_{\alpha\beta}}{2} + \mathbf{p}_{\alpha\beta}\right) \cdot \left(\mathbf{R}_{\alpha\beta} + \frac{\mathbf{r}_{\alpha\beta}}{2}\right)} e^{i\left(\frac{\mathbf{P}_{\alpha\beta}}{2} - \mathbf{p}_{\alpha\beta}\right) \cdot \left(\mathbf{R}_{\alpha\beta} - \frac{\mathbf{r}_{\alpha\beta}}{2}\right)} \\ &\times e^{-i\left(\frac{\mathbf{P}_{\gamma\delta}}{2} - \mathbf{p}_{\gamma\delta}\right) \cdot \left(\mathbf{R}_{\gamma\delta} - \frac{\mathbf{r}_{\gamma\delta}}{2}\right)} e^{-i\left(\frac{\mathbf{P}_{\gamma\delta}}{2} + \mathbf{p}_{\gamma\delta}\right) \cdot \left(\mathbf{R}_{\gamma\delta} + \frac{\mathbf{r}_{\gamma\delta}}{2}\right)} \\ &\times m^\dagger\left(\mathbf{R}_{\alpha\beta} + \frac{\mathbf{r}_{\alpha\beta}}{2}, t\right) m^\dagger\left(\mathbf{R}_{\alpha\beta} - \frac{\mathbf{r}_{\alpha\beta}}{2}, t\right) m\left(\mathbf{R}_{\gamma\delta} - \frac{\mathbf{r}_{\gamma\delta}}{2}, t\right) m\left(\mathbf{R}_{\gamma\delta} + \frac{\mathbf{r}_{\gamma\delta}}{2}, t\right) \end{aligned} \quad (5.41)$$

onde $M = m_q + m_{\bar{q}}$ e M_α é a massa do méson.

Integrando o segundo termo em $\mathbf{P}_{\alpha\beta}$ e $\mathbf{P}_{\gamma\delta}$, obtemos

$$\begin{aligned} H_m &= \frac{1}{2M} \int d\mathbf{r} \left[\nabla m^\dagger(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla m(\mathbf{r}, t) + M_\alpha m^\dagger(\mathbf{r}, t) m(\mathbf{r}, t) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{R}_{\alpha\beta} d\mathbf{R}_{\gamma\delta} d\mathbf{r}_{\alpha\beta} d\mathbf{r}_{\gamma\delta} d\mathbf{p}_{\alpha\beta} d\mathbf{p}_{\gamma\delta} \delta^{(3)}(\mathbf{R}_{\alpha\beta} - \mathbf{R}_{\gamma\delta}) V_{\text{rel}}(\mathbf{p}_{\alpha\beta}, \mathbf{p}_{\gamma\delta}) e^{i\mathbf{p}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{r}_{\alpha\beta}} e^{-i\mathbf{p}_{\gamma\delta} \cdot \mathbf{r}_{\gamma\delta}} \\ &\times m^\dagger\left(\mathbf{R}_{\alpha\beta} + \frac{\mathbf{r}_{\alpha\beta}}{2}, t\right) m^\dagger\left(\mathbf{R}_{\alpha\beta} - \frac{\mathbf{r}_{\alpha\beta}}{2}, t\right) m\left(\mathbf{R}_{\gamma\delta} - \frac{\mathbf{r}_{\gamma\delta}}{2}, t\right) m\left(\mathbf{R}_{\gamma\delta} + \frac{\mathbf{r}_{\gamma\delta}}{2}, t\right). \end{aligned} \quad (5.42)$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$\mathbf{x} = \mathbf{r}_{\alpha\beta} \quad (5.43)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{r}_{\gamma\delta} \quad (5.44)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{R}_{\alpha\beta} \quad (5.45)$$

$$\mathbf{z}' = \mathbf{R}_{\gamma\delta} , \quad (5.46)$$

e integrando em $\mathbf{z}'$, obtemos:

$$\begin{aligned} H_m &= \frac{1}{2M} \int d\mathbf{x} \left[\nabla m^\dagger(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla m(\mathbf{x}, t) + M_\alpha m^\dagger(\mathbf{x}, t) m(\mathbf{x}, t) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \int d\mathbf{z} d\mathbf{x} d\mathbf{y} V_{\text{rel}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &\times m^\dagger \left(\mathbf{z} + \frac{\mathbf{x}}{2}, t \right) m^\dagger \left(\mathbf{z} - \frac{\mathbf{x}}{2}, t \right) m \left(\mathbf{z} - \frac{\mathbf{y}}{2}, t \right) m \left(\mathbf{z} + \frac{\mathbf{y}}{2}, t \right) , \end{aligned} \quad (5.47)$$

onde

$$V_{\text{rel}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p}_{\alpha\beta} d\mathbf{p}_{\gamma\delta} e^{i\mathbf{p}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{r}_{\alpha\beta}} e^{-i\mathbf{p}_{\gamma\delta} \cdot \mathbf{r}_{\gamma\delta}} V_{\text{rel}}(\mathbf{p}_{\alpha\beta}, \mathbf{p}_{\gamma\delta}) . \quad (5.48)$$

Consideremos a equação de Heisenberg para o operador de méson ideal,

$$i \frac{dm(\mathbf{x}_1, t_1)}{dt_1} = [m(\mathbf{x}_1, t_1), H_m] . \quad (5.49)$$

Substituindo o Hamiltoniano Eq. (5.47) na equação de Heisenberg, obtemos

$$\begin{aligned} \left[i \frac{d}{dt_1} + \frac{\nabla^2}{2M} \right] m(1) &= M_\alpha m(1) + \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} V_{\text{rel}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) m^\dagger(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}, t_1) \\ &\times m \left(\mathbf{x}_1 - \frac{\mathbf{x}}{2} - \frac{\mathbf{y}}{2}, t_1 \right) m \left(\mathbf{x}_1 - \frac{\mathbf{x}}{2} + \frac{\mathbf{y}}{2}, t_1 \right) . \end{aligned} \quad (5.50)$$

Multiplicando à direita por $m^\dagger(1')$, aplicando o operador de ordenamento temporal e tomando a média no “ensemble” macrocanônico, obtemos:

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{T} \left[\left(i \frac{d}{dt_1} + \frac{\nabla^2}{2M} \right) m(1) m^\dagger(1') \right] \right\rangle &= M_\alpha \left\langle \mathcal{T} [m(1) m^\dagger(1')] \right\rangle \\ &+ \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} V_{\text{rel}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \bar{G}' \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$\bar{G}' = \left\langle \mathcal{T} \left[m^\dagger(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}, t_{2+}) m \left(\mathbf{x}_1 - \frac{\mathbf{x}}{2} - \frac{\mathbf{y}}{2}, t_1 \right) m \left(\mathbf{x}_1 - \frac{\mathbf{x}}{2} + \frac{\mathbf{y}}{2}, t_2 \right) m^\dagger(\mathbf{x}_{1'}, t_{1'}) \right] \right\rangle, \quad (5.52)$$

onde $t_2 = t_1$. A notação t_{2+} indica que esse instante é infinitesimalmente maior que t_2 .

As derivadas espaciais comutam com $\mathcal{T}$, de modo que podemos tomá-las fora do ordenamento temporal. Para tomar as derivadas temporais fora do ordenamento temporal utilizamos a relação

$$\frac{d}{dt_1} \left\langle \mathcal{T} [m(1) m^\dagger(1')] \right\rangle - \left\langle \mathcal{T} \left[\frac{d}{dt_1} m(1) m^\dagger(1') \right] \right\rangle = \delta(1 - 1'). \quad (5.53)$$

Assim, utilizando a propriedade cíclica do traço e a comutação dos operadores m e $m^\dagger$, obtemos:

$$\begin{aligned} \left(i \frac{d}{dt_1} + \frac{\nabla^2}{2M} \right) \left\langle \mathcal{T} [m(1) m^\dagger(1')] \right\rangle &= i\delta(1 - 1') + M_\alpha \left\langle \mathcal{T} [m(1) m^\dagger(1')] \right\rangle \\ &+ \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} V_{\text{rel}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \bar{G} \end{aligned} \quad (5.54)$$

$$\bar{G} \equiv \left\langle \mathcal{T} \left[m \left(\mathbf{x}_1 - \frac{\mathbf{x}}{2} - \frac{\mathbf{y}}{2}, t_1 \right) m \left(\mathbf{x}_1 - \frac{\mathbf{x}}{2} + \frac{\mathbf{y}}{2}, t_2 \right) m^\dagger(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}, t_{2+}) m^\dagger(\mathbf{x}_{1'}, t_{1'}) \right] \right\rangle. \quad (5.55)$$

Nessa expressão, identificamos as funções de Green,

$$\left\langle \mathcal{T} [m(1) m^\dagger(1')] \right\rangle \equiv iG(1, 1') \quad (5.56)$$

$$\bar{G} \equiv i^2 G_2 \left[\left(\mathbf{x}_1 - \frac{\mathbf{x}}{2} - \frac{\mathbf{y}}{2}, t_1 \right) \left(\mathbf{x}_1 - \frac{\mathbf{x}}{2} + \frac{\mathbf{y}}{2}, t_2 \right); (\mathbf{x}_{1'}, t_{1'}) (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}, t_{2+}) \right] \Big|_{t_2=t_1}. \quad (5.57)$$

Assim, obtemos a equação para a função de Green

$$\left(i \frac{d}{dt_1} + \frac{\nabla^2}{2M} - M_\alpha\right) iG(1, 1') = i\delta(1 - 1') + \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} V_{\text{rel}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) i^2 G_2 \quad (5.58)$$

$$G_2 \equiv G_2 \left[\left(\mathbf{x}_1 - \frac{\mathbf{x}}{2} - \frac{\mathbf{y}}{2}, t_1 \right) \left(\mathbf{x}_1 - \frac{\mathbf{x}}{2} + \frac{\mathbf{y}}{2}, t_2 \right); (\mathbf{x}_1', t_1') (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}, t_2+) \right] \Big|_{t_2=t_1} . \quad (5.59)$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = 2\mathbf{R} \quad (5.60)$$

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{r} , \quad (5.61)$$

a equação de movimento para a função de Green fica:

$$\left(i \frac{d}{dt_1} + \frac{\nabla^2}{2M} - M_\alpha\right) G(1, 1') = \delta(1 - 1') + i \int d\mathbf{R} d\mathbf{r} V_{\text{rel}}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) G_2 \quad (5.62)$$

$$G_2 \equiv G_2 \left[(\mathbf{x}_1 - \mathbf{R}, t_1) \left(\mathbf{x}_1 - \frac{\mathbf{r}}{2}, t_2 \right); (\mathbf{x}_1', t_1') \left(\mathbf{x}_1 - \mathbf{R} - \frac{\mathbf{r}}{2}, t_2+ \right) \right] \Big|_{t_2=t_1} . \quad (5.63)$$

5.3 A Função de Green para o Potencial Efetivo Méson-Méson Fock-Tani na Aproximação de Hartree-Fock.

Para resolvermos a equação de movimento Eq. (5.62) e determinarmos a função de Green G , é necessário fazermos aproximações para G_2 . Estas aproximações podem ser motivadas pela interpretação dos propagadores, feitas com o auxílio de gráficos. A função de Green de uma partícula, $G(1, 1')$, descreve a propagação de uma partícula adicionada ao meio em $1'$ e retirada em 1 . A função de Green de duas partículas descreve a propagação de duas partículas adicionadas ao meio em $1'$ e $2'$ e retiradas em 1 e 2 . Nas Fig. (5.1) e Fig. (5.2) são mostradas as representações diagramáticas de G e G_2 .

Em geral, o movimento das partículas é correlacionado, uma vez que elas interagem diretamente ou através das outras partículas do meio. Em primeira aproximação, podemos

$$G_1(1, 1') = 1' \longrightarrow 1$$

Figura 5.1: Representação diagramática da função de Green de uma partícula.

$$G_2(12; 1'2') = \begin{array}{c} 1' \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow 1 \\ 2' \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow 2 \end{array}$$

Figura 5.2: Representação diagramática da função de Green de duas partículas.

desprezar essa correlação, assumindo que as partículas propagam-se independentemente através do meio. Assim, podemos escrever

$$G_2(12; 1'2') = G(1, 1')G(2, 2') . \quad (5.64)$$

Essa é a aproximação de Hartree, que descreve o sistema como um conjunto de partículas independentes que se movem em um campo médio gerado por todas as outras partículas (campo auto-consistente de Hartree). Na Fig. (5.3) é mostrada a representação gráfica correspondente a essa aproximação.

Utilizando a aproximação de Hartree, a função G_2 dada pela Eq. (5.63) fica

$$G_2 = G[(\mathbf{x}_1 - \mathbf{R}, t_1); (\mathbf{x}_{1'}, t_{1'})] G \left[\left(\mathbf{x}_1 - \frac{\mathbf{r}}{2}, t_2 \right); \left(\mathbf{x}_1 - \mathbf{R} - \frac{\mathbf{r}}{2}, t_{2+} \right) \right] \Big|_{t_2=t_1} . \quad (5.65)$$

Consideramos o meio infinito e homogêneo, de modo que as funções de Green são translacionalmente invariantes,

$$G(1, 1') = G(1 - 1') = G(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{1'}; t_1 - t_{1'}) . \quad (5.66)$$

Assim, escrevemos

$$G_2 = G(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{1'} - \mathbf{R}, t_1 - t_{1'}) G(\mathbf{R}, t_2 - t_{2+}) \Big|_{t_2=t_1} . \quad (5.67)$$

Assim, equação de movimento na aproximação de Hartree é dada por:

$$\begin{aligned} \left(i \frac{d}{dt_1} + \frac{\nabla^2}{2M} - M_\alpha \right) G(1, 1') &= \delta(1 - 1') \\ + i \int d\mathbf{R} d\mathbf{r} V_{\text{rel}}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) G(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{1'} - \mathbf{R}, t_1 - t_{1'}) &G(\mathbf{R}, t_2 - t_{2+}) \Big|_{t_2=t_1} . \end{aligned} \quad (5.68)$$

Figura 5.3: Representação diagramática para a aproximação de Hartree da função de Green de duas partículas.

Uma vez que as partículas são idênticas, devemos considerar a contribuição do termo correspondente à troca do estados finais. Isso constitui a chamada aproximação de Hartree-Fock:

$$G_2(12; 1'2') = G(1, 1')G(2, 2') \pm G(1, 2')G(2, 1') . \quad (5.69)$$

Na Fig. (5.4) é mostrada a representação gráfica correspondente a essa aproximação.

Assim, a função G_2 nessa aproximação é dada por:

$$\begin{aligned} G_2 &= G(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{1'} - \mathbf{R}, t_1 - t_{1'}) G(\mathbf{R}, t_2 - t_{2+})|_{t_2=t_1} \\ &+ G\left(\frac{\mathbf{r}}{2}, t_2 - t_{2+}\right) G\left(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{1'} - \frac{\mathbf{r}}{2}, t_1 - t_{1'}\right)|_{t_2=t_1} , \end{aligned} \quad (5.70)$$

de modo que a equação para G_2 fica:

$$\begin{aligned} &\left(i \frac{d}{dt_1} + \frac{\nabla^2}{2M} - M_\alpha\right) G(1, 1') = \delta(1 - 1') \\ &+ i \int d\mathbf{R} d\mathbf{r} V_{\text{rel}}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) G(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{1'} - \mathbf{R}, t_1 - t_{1'}) G(\mathbf{R}, t_2 - t_{2+})|_{t_2=t_1} \\ &+ i \int d\mathbf{R} d\mathbf{r} V_{\text{rel}}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) G\left(\frac{\mathbf{r}}{2}, t_2 - t_{2+}\right) G\left(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{1'} - \frac{\mathbf{r}}{2}, t_1 - t_{1'}\right)|_{t_2=t_1} , \end{aligned} \quad (5.71)$$

Figura 5.4: Representação diagramática para a aproximação de Hartree-Fock da função de Green de duas partículas.

No terceiro termo, fazemos a mudança de variáveis

$$\mathbf{R} \rightarrow \frac{\mathbf{r}}{2} \quad (5.72)$$

$$\mathbf{r} \rightarrow 2\mathbf{R}, \quad (5.73)$$

obtendo um termo idêntico ao segundo.

Dessa forma, a equação de movimento para G_2 na aproximação de Hartree-Fock é dada por

$$\left(i \frac{d}{dt_1} + \frac{\nabla^2}{2M} - M_\alpha \right) G(1, 1') = \delta(1 - 1') + 2i \int d\mathbf{R} d\mathbf{r} V_{\text{rel}}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) G(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{1'} - \mathbf{R}, t_1 - t_{1'}) G(\mathbf{R}, t_2 - t_{2+})|_{t_2=t_1}. \quad (5.74)$$

Obtemos, agora, a equação de movimento no espaço de momentos, tomando as transformadas de Fourier das funções envolvidas. Seja $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{1'} = \mathbf{y}$. Multiplicando ambos os membros da Eq. (5.74) por $e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}}$ e integrando em $\mathbf{y}$ obtemos

$$\left(i \frac{d}{dt_1} - \frac{\mathbf{p}^2}{2M} - M_\alpha \right) G(\mathbf{P}, t_1 - t_{1'}) = \delta(t_1 - t_{1'}) + 2i \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{R} d\mathbf{r} d\mathbf{q} d\mathbf{q}' e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}} e^{-i\mathbf{q}' \cdot \mathbf{R}} \delta^{(3)}(\mathbf{q}' - \mathbf{p}) V_{\text{rel}}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) \times G(\mathbf{q}', t_1 - t_{1'}) G(\mathbf{q}, t_2 - t_{2+})|_{t_2=t_1}. \quad (5.75)$$

Integrando em $\mathbf{q}'$, obtemos:

$$\left(i \frac{d}{dt_1} - \frac{\mathbf{p}^2}{2M} - M_\alpha \right) G(\mathbf{P}, t_1 - t_{1'}) = \delta(t_1 - t_{1'}) + 2i \left[\frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{q} F(\mathbf{q}, \mathbf{p}) G(\mathbf{q}, t_2 - t_{2+}) \right] \Big|_{t_2=t_1} G(\mathbf{p}, t_1 - t_{1'}) , \quad (5.76)$$

onde

$$F(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \int d\mathbf{R} d\mathbf{r} V_{\text{rel}}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{p}) \cdot \mathbf{R}} . \quad (5.77)$$

Podemos representar a função de Green $G(\mathbf{p}, t - t')$ como uma série de Fourier:

$$G(\mathbf{p}, t - t') = \frac{1}{-i\beta} \sum_{\nu} e^{iz_{\nu}(t-t')} G(\mathbf{p}, z_{\nu}) \quad \text{para } 0 \leq t(t') \leq -i\beta , \quad (5.78)$$

onde z_{ν} são as frequências de Matsubara, dadas por

$$z_{\nu} = \frac{\pi\nu}{-i\beta} + \mu . \quad (5.79)$$

A soma é feita sobre todos os inteiros pares para bósons e sobre todos os inteiros ímpares para férmions. Assim, os coeficientes de Fourier são dados por:

$$G(\mathbf{p}, z_{\nu}) = \int_0^{-i\beta} dt e^{i(\frac{\pi\nu}{-i\beta} + \mu)(t-t')} G(\mathbf{p}, t - t') . \quad (5.80)$$

Assim, multiplicando ambos os termos da Eq. (5.76) por $e^{iz_{\nu}(t_1-t_{1'})}$, integrando em t_1 e utilizando a condição de contorno periódica Eq. (5.20), obtemos

$$\left(z_{\nu} - \frac{\mathbf{p}^2}{2M} - M_\alpha \right) G(\mathbf{P}, z_{\nu}) = 1 + 2i \left[\frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{q} F(\mathbf{q}, \mathbf{p}) G(\mathbf{q}, t_2 - t_{2+}) \right] \Big|_{t_2=t_1} G(\mathbf{p}, z_{\nu}) \quad (5.81)$$

Analogamente,

$$G(\mathbf{q}, t_2 - t_{2+}) = \frac{1}{-i\beta} \sum_{\nu'} e^{iz_{\nu'}(t_2-t_{2+})} G(\mathbf{p}, z_{\nu'}) = \frac{1}{-i\beta} \sum_{\nu'} G(\mathbf{p}, z_{\nu'}) . \quad (5.82)$$

A função de Green pode ser escrita em termos da função espectral como

$$G(\mathbf{q}, z_{\nu'}) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{A(\mathbf{q}, \omega)}{z_{\nu'} - \omega} , \quad (5.83)$$

de modo que

$$G(\mathbf{q}, t_2 - t_{2+}) = \frac{1}{-i\beta} \int \frac{d\omega}{2\pi} \sum_{\nu'} \frac{A(\mathbf{q}, \omega)}{z_{\nu'} - \omega}. \quad (5.84)$$

A soma em ν' pode ser substituída por uma integral de contorno apropriada [73]. Consideremos a função

$$f(z) = \frac{1}{e^{\beta(z-\mu)} - 1}. \quad (5.85)$$

cujos pólos são localizados nas frequências de Matsubara z_1 , com resíduos $\frac{1}{\beta}$. Seja $h(z)$ uma função analítica com pólos $z_{\nu'}$ não localizados nas frequências de Matsubara, tal que

$$zf(z)h(z) \rightarrow 0, \quad \text{para } |z| \rightarrow \infty \quad (5.86)$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{1}{-i\beta} \sum_{\nu'} h(z) &= \int_{C'} \frac{dz}{2\pi} f(z)h(z) \\ &= - \int_C \frac{dz}{2\pi} f(z)h(z), \end{aligned} \quad (5.87)$$

onde o contorno C' engloba o eixo imaginário e pode ser deformado no contorno C que encerra os pólos isolados $z_{\nu'}$, conforme mostra a Fig.(5.5).

Assim, obtemos

$$\frac{1}{-i\beta} \sum_{\nu'} \frac{1}{z_{\nu'} - \omega} = \frac{-i}{e^{\beta(\omega-\mu)} - 1} = -if(\omega) \quad (5.88)$$

$$G(\mathbf{q}, t_2 - t_{2+}) = i \int \frac{d\omega}{2\pi} f(\omega) A(\mathbf{q}, \omega). \quad (5.89)$$

Na aproximação de Hartree-Fock, as partículas são livres, de modo que

$$A(\mathbf{q}, \omega) = 2\pi\delta(\omega - E(\mathbf{q})). \quad (5.90)$$

Assim,

$$G(\mathbf{q}, t_2 - t_{2+}) = -if(E(\mathbf{q})). \quad (5.91)$$

Figura 5.5: Contornos C e C'.

Dessa forma, a equação de movimento é dada por

$$[z_\nu - E(\mathbf{p})] G(\mathbf{p}, z_\nu) = 1, \quad (5.92)$$

onde

$$E(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + M_\alpha + 2 \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{q} F(\mathbf{q}, \mathbf{p}) f(E(\mathbf{q})), \quad (5.93)$$

é a energia de Hartree-Fock de um méson. A Eq. (5.93) é uma equação auto-consistente que pode ser resolvida numericamente por iteração, e fornece o espectro de energia de partícula única para o sistema de mésons. A função de Green correspondente a cada valor de energia do espectro é dada pela continuação analítica das soluções da Eq. (5.92),

$$G(\mathbf{p}, z) = \frac{1}{z - E(\mathbf{p})}. \quad (5.94)$$

5.4 O Espalhamento Méson-Méson num Gás de Mésons.

Devido à interação efetiva méson-méson no meio (campo médio de Hartree-Fock), alguns parâmetros do méson tais como o raio quadrático médio e a massa efetiva, são modifi-

cados. Vamos utilizar a energia de Hartree-Fock obtida anteriormente para examinar a dependência com a temperatura do raio quadrático médio e da massa efetiva de um pión que se move num gás de píons [74].

Consideremos que a função de onda espacial dos mésons depende da temperatura através do parâmetro da gaussiana, b ,

$$b = b(\beta) \quad (5.95)$$

$$\Phi(\mathbf{p}, \beta) = \left(\pi b^2(\beta) \right)^{-\frac{3}{4}} e^{-\frac{1}{8b^2(\beta)} (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)^2} . \quad (5.96)$$

Para $T = 0$ ($\beta = \infty$), os mésons estão no estado fundamental:

$$\Phi(\mathbf{p}, \infty) = \left(\pi b^2(\infty) \right)^{-\frac{3}{4}} e^{-\frac{1}{8b^2(\infty)} (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)^2} . \quad (5.97)$$

Supondo que os parâmetros do potencial microscópico não dependem da temperatura, podemos escrever a expressão para a energia de Hartree-Fock na forma

$$E(\mathbf{p}, \beta) = \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + M_\alpha(\beta) + \Delta E(\mathbf{p}, \beta) , \quad (5.98)$$

onde

$$\begin{aligned} M_\alpha(\beta) = & 2m_q + \frac{3b^2(\beta)}{2m_q} - \frac{8b(\beta)\alpha_s}{3\pi^{\frac{1}{2}}} - \frac{4V_0}{3} \left[1 + \frac{1}{8\pi b^2(\beta)} \right]^{-\frac{3}{2}} \\ & - \frac{8\pi\alpha_s}{3m_q^2} \left(\frac{b^2(\beta)}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} + C , \end{aligned} \quad (5.99)$$

é a massa do méson e

$$\Delta E(\mathbf{p}, \beta) = 2 \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{q} F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \beta) f(E(\mathbf{q}, \beta)) . \quad (5.100)$$

é a correção à energia do méson livre devida ao campo médio de Hartree-Fock.

Conforme discutido anteriormente, a interação $\pi\pi$ é dominada pelo termo hiperfino spin-spin do potencial microscópico, de modo que desprezamos os termo de confinamento gaussiano e o termo de Coulomb no potencial efetivo méson-méson. Assim, a Eq. (5.48) pode ser escrita

$$V_{\text{rel}}^{\text{hyp}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p}_{\alpha\beta} d\mathbf{p}_{\gamma\delta} e^{i\mathbf{p}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{r}_{\alpha\beta}} e^{-i\mathbf{p}_{\gamma\delta} \cdot \mathbf{r}_{\gamma\delta}} V_{\text{rel}}^{\text{hyp}}(\mathbf{p}_{\alpha\beta}, \mathbf{p}_{\gamma\delta}) . \quad (5.101)$$

Assim, obtemos:

$$V_{\text{rel}}^{\text{hyp}}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{16\pi\alpha_s}{3m_q^2} \left[\frac{16b^6}{3} \left[e^{-b^2(4\mathbf{R}^2 + \mathbf{r}^2 - 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{r})} + e^{-b^2(4\mathbf{R}^2 + \mathbf{r}^2 + 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{r})} \right] \right. \\ \left. + (2\pi)^{\frac{3}{2}} \frac{2b^3}{3} \left[\delta^{(3)}(\mathbf{r}) e^{-b^2(2\mathbf{R}^2 + \frac{\mathbf{r}^2}{2})} + \delta^{(3)}(2\mathbf{R}) e^{-b^2(2\mathbf{R}^2 + \frac{\mathbf{r}^2}{2})} \right] \right] . \quad (5.102)$$

Substituindo essa expressão na Eq. (5.77), obtemos:

$$F^{\text{hyp}}(\mathbf{p}; \mathbf{q}) = \frac{8\pi\alpha_s}{9m_q^2} \left[\frac{8}{3\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{12b^2}(\mathbf{q}-\mathbf{p})^2} + \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{8b^2}(\mathbf{q}-\mathbf{p})^2} + \frac{1}{2} \right] . \quad (5.103)$$

Integrando a Eq. (5.100) nos ângulos, obtemos

$$\Delta E(\mathbf{p}, \beta) = 2 \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{8\pi\alpha_s}{9m_q^2} \int_0^\infty dq f(E(\mathbf{q}, \beta)) \frac{q}{p} \\ \times \left[\frac{32b^2(\beta)}{3\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{12b^2(\beta)}(q^2 + p^2)} \sinh\left(\frac{qp}{6b^2(\beta)}\right) \right. \\ \left. + 4b^2(\beta) e^{-\frac{1}{8b^2(\beta)}(q^2 + p^2)} \sinh\left(\frac{qp}{4b^2(\beta)}\right) + 1 \right] . \quad (5.104)$$

A integral em q deve ser resolvida numericamente. Se $E(\mathbf{p}, \beta) \geq \mu$, temos

$$f(E(\mathbf{q}, \beta))|_{\beta \rightarrow \infty} = \left[\frac{1}{e^{\beta(E(\mathbf{q}, \beta) - \mu)} - 1} \right]_{\beta \rightarrow \infty} \rightarrow 0 . \quad (5.105)$$

Assim,

$$\Delta E(\mathbf{p}, \beta)|_{\beta \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \quad (5.106)$$

$$E(\mathbf{p}, \beta)|_{\beta \rightarrow \infty} = \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + M_\alpha(\beta)|_{\beta \rightarrow \infty} . \quad (5.107)$$

Vemos que para $T = 0$, o campo médio de Hartree-Fock se anula, de modo que a energia de Hartree-Fock é igual à energia de um méson no espaço livre no estado fundamental.

Para determinarmos os parâmetros do méson em função da temperatura, utilizamos o valor esperado do Hamiltoniano do sistema por unidade de volume, dado por

$$\frac{\langle H(\beta) \rangle}{\Omega} = \frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[\frac{\mathbf{p}^2}{2M} + M_\pi(\beta) + E(\mathbf{p}; \beta) \right] f[E(\mathbf{p}; \beta)] \quad (5.108)$$

O parâmetro da gaussiana, $b(\beta)$, para cada valor de temperatura, $T = \frac{1}{\beta}$, é determinado por meio do princípio variacional:

$$\frac{d}{db(\beta)} \left[\frac{\langle H \rangle}{\Omega} \right]_{b_{min}(\beta)} = 0. \quad (5.109)$$

Para cada β , resolvemos a equação auto-consistente Eq. (5.98), para vários valores de b , obtendo os valores da energia de Hartree-Fock correspondentes, $E(\mathbf{p}, \beta)$. Determinamos, então, o valor de b que minimiza o valor esperado do Hamiltoniano por unidade de volume, $\frac{\langle H(\beta) \rangle}{\Omega}$.

Os parâmetros do potencial são escolhidos pelo ajuste da massa do méson no estado fundamental ($T = 0$) e utilizando o princípio variacional,

$$\frac{d}{db(\beta)} [M_\alpha(\beta)]_{b(\infty)} = 0. \quad (5.110)$$

Utilizamos $M_\pi = 0.137$ GeV, $b(\beta = \infty) = 0.337$ GeV, $m_q = 0.33$ GeV e $\alpha_s = 0.5$. Escolhendo $x = 1$ GeV⁻² obtemos $V_0 = 0.92$ GeV and $C = -0.68$ GeV.

O raio quadrático médio do méson é dado por

$$\langle r^2 \rangle (T) = \frac{3}{2b_{min}^2(T)}. \quad (5.111)$$

Para cada temperatura, a massa efetiva é obtida utilizando-se o valor de $b_{min}(T)$:

$$M_\pi^{eff}(\mathbf{p}; T) = M_\pi(T) + \Delta E(\mathbf{p}; T) \quad (5.112)$$

Utilizamos um intervalo de temperatura de 100-200 MeV. O limite inferior corresponde ao menor valor que aparece em medidas do espectro de momentos transversais, p_T e o limite superior corresponde aproximadamente à temperatura de transição para o plasma de quarks e glúons (dissociação dos mésons) [75]. O valor do potencial químico também é fixado em $\mu = 126$ MeV [76].

Na Fig. (5.6) é mostrado um gráfico do raio quadrático médio em função da temperatura. Notamos que o raio quadrático diminui com a temperatura, o que é esperado para um potencial repulsivo, conforme descrito por Oka e Amado na Ref. [77]. Na Fig. (5.7) é mostrado um gráfico da massa efetiva em função da temperatura para vários valores do momento. Vemos que a massa efetiva aumenta com a temperatura, tendendo à massa do

píon livre no limite em que a temperatura tende a zero, para todos os valores do momento. À medida que o momento aumenta, o crescimento da massa efetiva torna-se menor, tendendo a zero para momentos elevados. Esse resultado está de acordo com o comportamento da correção de Hartree-Fock. Na Fig. (5.8) é mostrado um gráfico da correção de Hartree-Fock em função do momento para alguns valores de temperatura. Vemos que a correção diminui com o momento, tendendo a zero para momentos elevados. Para um dado valor do momento, a correção aumenta com a temperatura, anulando-se no limite em que a temperatura tende a zero.

Figura 5.6: Raio quadrático médio do méson em função da temperatura num gás de mésons

Figura 5.7: Massa efetiva do méson num gás de mésons.

Figura 5.8: Correção de Hartree-Fock para a energia de um méson num gás de mésons que interagem através do potencial efetivo Fock-Tani.

Capítulo 6

Representação Fock-Tani Generalizada

Neste breve capítulo, de uma única seção, vamos mostrar uma generalização do formalismo Fock-Tani, desenvolvida por Girardeau e Krein [58], para modelos de quarks mais sofisticados do que os considerados nesta tese. Não iremos fazer nenhuma aplicação desta generalização nesta tese. O intuito de discutí-la aqui é mostrar a generalidade do formalismo, e indicar perspectivas futuras.

Consideremos o modelo de quarks relativístico descrito por Zhang e Koniuk [78]-[80]. Nesse modelo, a interação microscópica é descrita pelo Hamiltoniano da QCD no “gauge” de Coulomb, onde os termos não-abelianos são substituídos por um termo efetivo de confinamento escalar linear.

O Hamiltoniano proposto por Zhang e Koniuk é o seguinte:

$$H = H_q + H_g + H_c + H_{qg} + H_s . \quad (6.1)$$

onde H_q e H_g correspondem respectivamente às energias cinéticas dos quarks (e antiquarks) e glúons, H_c é um termo de interação entre quarks e antiquarks coulombiano, H_{qg} corresponde ao Hamiltoniano de interação entre glúons e quarks (e antiquarks), e H_s é um termo fenomenológico que descreve o confinamento dos quarks.

O termo de energia cinética dos quarks (e antiquarks) é dado por:

$$H_q = \int d\mathbf{x} \sum_{f_i, c_i} \bar{\Psi}_{f_i, c_i}(\mathbf{x}) [-i\gamma \cdot \nabla + m_{f_i}] \Psi_{f_i, c_i}(\mathbf{x}) , \quad (6.2)$$

onde m_{f_i} é a massa dos quarks, Ψ e $\bar{\Psi}$ são os operadores de campo de Dirac e γ são as

matrizes de Dirac. A energia cinética dos glúons é dada por:

$$H_g = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \left[\dot{\mathbf{A}}_a^2(\mathbf{x}, 0) + (\nabla \times \mathbf{A}_a(\mathbf{x}, 0))^2 \right], \quad (6.3)$$

onde $\mathbf{A}_a(\mathbf{x}, t)$ é o operador de campo dos glúons e $\dot{\mathbf{A}}_a(\mathbf{x}, t)$ corresponde à derivada parcial com relação ao tempo.

O termo de interação coulombiana entre quarks e antiquarks é dado por:

$$\begin{aligned} H_c = & \frac{\alpha_s}{2} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \sum_{f_i, f_k} \sum_{c_i, c_j} \sum_{c_k, c_l} \sum_a \left[\Psi_{f_i, c_i}^\dagger(\mathbf{x}) \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_i c_j} \Psi_{f_i, c_j}(\mathbf{x}) \right] \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \\ & \times \left[\Psi_{f_k, c_k}^\dagger(\mathbf{y}) \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_k c_l} \Psi_{f_k, c_l}(\mathbf{y}) \right], \end{aligned} \quad (6.4)$$

onde $\alpha_s = g_s^2/4\pi$, e g_s é a constante de acoplamento da QCD.

O termo de interação quark (antiquark)-glúon é dado por

$$H_{qg} = g_s \int d\mathbf{x} \sum_{f_i} \sum_{c_i, c_j} \sum_a \bar{\Psi}_{f_i, c_i}(\mathbf{x}) \gamma_\mu \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_i c_j} \mathbf{A}_a(\mathbf{x}, 0) \Psi_{f_i, c_j}(\mathbf{x}). \quad (6.5)$$

O termo de confinamento, tomado como sendo escalar de Lorentz e linear, é dado por:

$$\begin{aligned} H_s = & \frac{3b_s}{8} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \sum_{f_i, f_k} \sum_{c_i, c_j} \sum_{c_k, c_l} \sum_a \left[\bar{\Psi}_{f_i, c_i}(\mathbf{x}) \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_i c_j} \Psi_{f_i, c_j}(\mathbf{x}) \right] |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \\ & \times \left[\bar{\Psi}_{f_k, c_k}(\mathbf{y}) \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_k c_l} \Psi_{f_k, c_l}(\mathbf{y}) \right], \end{aligned} \quad (6.6)$$

onde b_s é a constante “elástica” do potencial efetivo de confinamento.

Conforme descrito no Apêndice A, os operadores de campo de Dirac, Ψ e $\bar{\Psi}$, são escritos em termos dos operadores de quark e antiquark, q , $q^\dagger$, $\bar{q}$ e $\bar{q}^\dagger$, e dos espinores de Dirac, $u_{f_i, s_i}(\mathbf{p})$ e $v_{f_i, s_i}(-\mathbf{p})$. O operador de campo dos glúons, $\mathbf{A}_a(\mathbf{x}, t)$, no “gauge” de Coulomb (polarizações transversais), escrito em termos dos operadores de glúon, g e $g^\dagger$, é dado por:

$$\mathbf{A}_a(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{(2\omega_{\mathbf{k}})^{\frac{1}{2}}} \sum_m \left[g_{a, m}(\mathbf{k}) \epsilon_m(\mathbf{k}) e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + g_{a, m}^\dagger(\mathbf{k}) \epsilon_m^*(\mathbf{k}) e^{i\omega_{\mathbf{k}} t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right], \quad (6.7)$$

onde $\omega_{\mathbf{k}}$ é a energia dos glúons de momento $\mathbf{k}$ e $\epsilon_m(\mathbf{k})$ é o vetor de polarização, que satisfaz a relação

$$\epsilon_m(\mathbf{k}) \cdot \epsilon_{m'}(\mathbf{k}) = \delta_{m, m'}. \quad (6.8)$$

Substituindo esses operadores de campo nas Eq. (6.2-6.6) , obtemos o Hamiltoniano em termos dos operadores de quark, antiquark e glúon. O termo H_q é dado por:

$$H_q = \int d\mathbf{p}_i \sum_{f_i, c_i} \sum_{s_i, s_j} \left(\frac{m_{f_i}}{E_i} \right) K_q , \quad (6.9)$$

onde

$$\begin{aligned} K_q &= \left[u_{f_i, s_i}^\dagger(\mathbf{p}_i) q_{c_i, f_i, s_i}^\dagger(\mathbf{p}_i) + v_{f_i, s_i}^\dagger(-\mathbf{p}_i) \bar{q}_{c_i, f_i, s_i}(-\mathbf{p}_i) \right] \\ &\times (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}_i + \beta m_{f_i}) \\ &\times \left[u_{f_i, s_j}(\mathbf{p}_i) q_{c_i, f_i, s_j}(\mathbf{p}_i) + v_{f_i, s_j}(-\mathbf{p}_i) \bar{q}_{c_i, f_i, s_j}^\dagger(-\mathbf{p}_i) \right] . \end{aligned} \quad (6.10)$$

O termo H_g é dado por:

$$H_g = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_{a, m} \omega_{\mathbf{k}} g_{a, m}^\dagger(\mathbf{k}) g_{a, m}(\mathbf{k}) . \quad (6.11)$$

O termo H_c é dado por:

$$\begin{aligned} H_c &= \frac{\alpha_s}{2} \int d\mathbf{p}_i d\mathbf{p}_j d\mathbf{p}_k d\mathbf{p}_l \sum_{f_i, f_k} \sum_{c_i, c_j} \sum_{c_k, c_l} \sum_{s_i, s_j} \sum_{s_k, s_l} \sum_a \left(\frac{m_{f_i}}{E_i} \right) \left(\frac{m_{f_k}}{E_k} \right) \\ &\times \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_i c_j} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_k c_l} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j - \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_l) K_c , \end{aligned} \quad (6.12)$$

onde

$$\begin{aligned} K_c &= \left[u_{f_i, s_i}^\dagger(\mathbf{p}_i) q_{c_i, f_i, s_i}^\dagger(\mathbf{p}_i) + v_{f_i, s_i}^\dagger(-\mathbf{p}_i) \bar{q}_{c_i, f_i, s_i}(-\mathbf{p}_i) \right] \\ &\times \left[u_{f_i, s_j}(\mathbf{p}_j) q_{c_j, f_i, s_j}(\mathbf{p}_j) + v_{f_i, s_j}(-\mathbf{p}_j) \bar{q}_{c_j, f_i, s_j}^\dagger(-\mathbf{p}_j) \right] \\ &\times V_c(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_k) \\ &\times \left[u_{f_k, s_k}^\dagger(\mathbf{p}_k) q_{c_k, f_k, s_k}^\dagger(\mathbf{p}_k) + v_{f_k, s_k}^\dagger(-\mathbf{p}_k) \bar{q}_{c_k, f_k, s_k}(-\mathbf{p}_k) \right] \\ &\times \left[u_{f_k, s_l}(\mathbf{p}_l) q_{c_l, f_k, s_l}(\mathbf{p}_l) + v_{f_k, s_l}(-\mathbf{p}_l) \bar{q}_{c_l, f_k, s_l}^\dagger(-\mathbf{p}_l) \right] . \end{aligned} \quad (6.13)$$

e

$$V_c(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{z} \frac{1}{|\mathbf{z}|} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{z}} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{\mathbf{q}^2} \quad (6.14)$$

O termo H_{gg} é dado por:

$$\begin{aligned} H_{gg} &= \frac{g_s}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} d\mathbf{p}_i d\mathbf{p}_j \sum_{f_i} \sum_{c_i, c_j} \sum_{a, m} \sum_{s_i, s_j} \left(\frac{m_{f_i}}{E_i} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m_{f_j}}{E_j} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\times \frac{1}{(2\omega_{\mathbf{k}})^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_i c_j} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i + \mathbf{k}) K_{gg} , \end{aligned} \quad (6.15)$$

onde

$$\begin{aligned}
 K_{gg} = & \left[u_{f_i, s_i}^\dagger(\mathbf{p}_i) q_{c_i, f_i, s_i}^\dagger(\mathbf{p}_i) + v_{f_i, s_i}^\dagger(-\mathbf{p}_i) \bar{q}_{c_i, f_i, s_i}(-\mathbf{p}_i) \right] \\
 & \times \left[\alpha \cdot \epsilon_m(\mathbf{k}) g_{a, m}(\mathbf{k}) + \alpha \cdot \epsilon_m^*(-\mathbf{k}) g_{a, m}^\dagger(-\mathbf{k}) \right] \\
 & \times \left[u_{f_j, s_j}(\mathbf{p}_j) q_{c_j, f_j, s_j}(\mathbf{p}_j) + v_{f_j, s_j}(-\mathbf{p}_j) \bar{q}_{c_j, f_j, s_j}^\dagger(-\mathbf{p}_j) \right] .
 \end{aligned} \quad (6.16)$$

O termo H_s é dado por:

$$\begin{aligned}
 H_s = & \frac{3b_s}{8} \int d\mathbf{p}_i d\mathbf{p}_j d\mathbf{p}_k d\mathbf{p}_l \sum_{f_i, f_k} \sum_{c_i, c_j} \sum_{c_k, c_l} \sum_{s_i, s_j} \sum_{s_k, s_l} \sum_a \left(\frac{m_{f_i}}{E_i} \right) \left(\frac{m_{f_k}}{E_k} \right) \\
 & \times \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_i c_j} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_k c_l} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j - \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_l) K_s ,
 \end{aligned} \quad (6.17)$$

onde

$$\begin{aligned}
 K_s = & \left[u_{f_i, s_i}^\dagger(\mathbf{p}_i) q_{c_i, f_i, s_i}^\dagger(\mathbf{p}_i) + v_{f_i, s_i}^\dagger(-\mathbf{p}_i) \bar{q}_{c_i, f_i, s_i}(-\mathbf{p}_i) \right] \beta \\
 & \times \left[u_{f_j, s_j}(\mathbf{p}_j) q_{c_j, f_j, s_j}(\mathbf{p}_j) + v_{f_j, s_j}(-\mathbf{p}_j) \bar{q}_{c_j, f_j, s_j}^\dagger(-\mathbf{p}_j) \right] \\
 & \times V_s(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_k) \\
 & \times \left[u_{f_k, s_k}^\dagger(\mathbf{p}_k) q_{c_k, f_k, s_k}^\dagger(\mathbf{p}_k) + v_{f_k, s_k}^\dagger(-\mathbf{p}_k) \bar{q}_{c_k, f_k, s_k}(-\mathbf{p}_k) \right] \beta \\
 & \times \left[u_{f_l, s_l}(\mathbf{p}_l) q_{c_l, f_l, s_l}(\mathbf{p}_l) + v_{f_l, s_l}(-\mathbf{p}_l) \bar{q}_{c_l, f_l, s_l}^\dagger(-\mathbf{p}_l) \right] .
 \end{aligned} \quad (6.18)$$

e

$$V_s(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{z} |\mathbf{z}| e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{z}} = -\frac{1}{\pi^2 \mathbf{q}^4} \quad (6.19)$$

A partir da estrutura destes Hamiltonianos fica claro que a criação e aniquilação de partículas está presente e, conseqüentemente, os graus de liberdade de glúons, além de quarks e anti-quarks, podem estar explicitamente presentes nos estados do espaço de Fock que descrevem os estados hadrônicos. Portanto, um estado hadrônico genérico $|\alpha\rangle$ no espaço de Fock, composto por um número variável de quarks, antiquarks e glúons, pode ser representado como:

$$|\alpha\rangle = A_\alpha^\dagger |0\rangle . \quad (6.20)$$

O operador de criação do hádron, $A_\alpha^\dagger$, pode ser escrito em termos dos operadores de quark, $(q^\dagger)$, antiquark $(\bar{q}^\dagger)$ e glúon $(g^\dagger)$ como

$$A_\alpha^\dagger = \sum_{n_q=0}^{\infty} \sum_{n_{\bar{q}}=0}^{\infty} \sum_{n_g=0}^{\infty} (n_q! n_{\bar{q}}! n_g!)^{-1/2} \Phi_\alpha^{\mu_1, \dots, \mu_{n_q}, \nu_1, \dots, \nu_{n_{\bar{q}}}, \sigma_1, \dots, \sigma_{n_g}} q_{\mu_1}^\dagger \cdots q_{\mu_{n_q}}^\dagger \bar{q}_{\nu_1}^\dagger \cdots \bar{q}_{\nu_{n_{\bar{q}}}}^\dagger g_{\sigma_1}^\dagger \cdots g_{\sigma_{n_g}}^\dagger, \quad (6.21)$$

onde n_q , $n_{\bar{q}}$ e n_g representam, respectivamente, o número de quarks, antiquarks e glúons. A função $\Phi_\alpha^{\mu_1, \dots, \mu_{n_q}, \nu_1, \dots, \nu_{n_{\bar{q}}}, \sigma_1, \dots, \sigma_{n_g}}$ é a amplitude correspondente à componente de Fock com n_q quarks, $n_{\bar{q}}$ antiquarks e n_g gluons. O índice α representa os números quânticos do hádron, os índices μ , ν e σ especificam, respectivamente, os números quânticos de quark, antiquark e glúon. Os operadores de quark e antiquark satisfazem as relações de anticomutação canônicas Eq. (3.5). Os operadores de glúon satisfazem relações de comutação canônicas

$$[g_\sigma, g_{\sigma'}^\dagger] = \delta_{\sigma\sigma'}, \quad [g_\sigma, g_{\sigma'}] = 0. \quad (6.22)$$

e comutam com os operadores de quark e antiquark.

Sem perda de generalidade, podemos tomar as $\Phi_\alpha^{\mu_1, \dots, \mu_{n_q}, \nu_1, \dots, \nu_{n_{\bar{q}}}, \sigma_1, \dots, \sigma_{n_g}}$ anti-simétricas nos índices de quark e antiquark e simétricas nos índices de glúon. Dessa forma, a ortonormalidade dos estados de hádron implica em

$$\sum_{n_q=0}^{\infty} \sum_{n_{\bar{q}}=0}^{\infty} \sum_{n_g=0}^{\infty} \Phi_\alpha^{*\mu_1, \dots, \mu_{n_q}, \nu_1, \dots, \nu_{n_{\bar{q}}}, \sigma_1, \dots, \sigma_{n_g}} \Phi_{\alpha'}^{\mu_1, \dots, \mu_{n_q}, \nu_1, \dots, \nu_{n_{\bar{q}}}, \sigma_1, \dots, \sigma_{n_g}} = \delta_{\alpha\alpha'}. \quad (6.23)$$

Exemplos de operadores de criação de hádrons são o operador de méson composto por um quark e um antiquark constituintes, utilizado anteriormente, e o operador de bárion composto por três quarks constituintes, dados respectivamente por

$$A_M^\dagger = \Phi_M^{\mu, \nu} q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger, \quad (6.24)$$

e

$$A_B^\dagger = \frac{1}{\sqrt{3!}} \Phi_B^{\mu_1, \mu_2, \mu_3} q_{\mu_1}^\dagger q_{\mu_2}^\dagger q_{\mu_3}^\dagger. \quad (6.25)$$

Outro exemplo de operador de bárion é dado por

$$A_B^\dagger = \frac{1}{\sqrt{3!}} \Phi_B^{\mu_1, \mu_2, \mu_3} q_{\mu_1}^\dagger q_{\mu_2}^\dagger q_{\mu_3}^\dagger + \frac{1}{\sqrt{4!}} \Psi_B^{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \nu} q_{\mu_1}^\dagger q_{\mu_2}^\dagger q_{\mu_3}^\dagger q_{\mu_4}^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger, \quad (6.26)$$

onde além da componente de três quarks temos uma componente com três quarks e um par quark-antiquark.

Outro exemplo de operador de méson é dado por

$$A_M^\dagger = \Phi_M^{\mu,\nu} q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger + \Psi_M^{\mu,\nu,\sigma} q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger g_\sigma^\dagger . \quad (6.27)$$

onde temos uma componente adicional com um glúon acoplado ao par quark-antiquark

Utilizando as relações de comutação e anticomutação para os operadores de quark, antiquark e glúon, pode-se mostrar que

$$A_\alpha \cdot A_{\alpha'}^\dagger = \delta_{\alpha\alpha'} + C_{\alpha\alpha'} , \quad (6.28)$$

$$A_\alpha \cdot A_{\alpha'} = A_\alpha^\dagger \cdot A_{\alpha'}^\dagger = 0 . \quad (6.29)$$

O produto escalar denota os parênteses de Lie “graduados” [37]. Se os dois estados correspondem a férmions, o produto escalar “graduado” denota o anticomutador. Se os dois estados correspondem a bósons o produto denota o comutador. Se um estado corresponde a férmion e o outro a bóson, escolhemos o comutador, embora o anticomutador seja possível também.

Em geral, o termo $C_{\alpha\alpha'}$ pode ser escrito [58] na forma

$$C_{\alpha\alpha'} = C_{\alpha\alpha'}^0 + C_{\alpha\alpha'}^+ + C_{\alpha\alpha'}^- , \quad (6.30)$$

As componentes $C_{\alpha\alpha'}^0$, $C_{\alpha\alpha'}^+$ e $C_{\alpha\alpha'}^-$ são definidas implicitamente pelas propriedades

$$C_{\alpha\alpha'}^0 |0\rangle = 0 , \quad (6.31)$$

$$C_{\alpha\alpha'}^- |0\rangle = 0 , \quad (6.32)$$

$$C_{\alpha\alpha'}^+ |0\rangle \neq 0 , \quad (6.33)$$

e

$$(C_{\alpha\alpha'}^0)^\dagger = C_{\alpha'\alpha}^0 , \quad (C_{\alpha\alpha'}^+)^\dagger = C_{\alpha'\alpha}^- , \quad (C_{\alpha\alpha'}^-)^\dagger = C_{\alpha'\alpha}^+ . \quad (6.34)$$

Para o exemplo da Eq. (6.25), pode-se mostrar que

$$\{A_B, A_{B'}^\dagger\} = \delta_{BB'} + C_{BB'}^0 , \quad (6.35)$$

onde

$$C_{BB'}^0 = -3\Phi_B^{*\mu_1\mu_2\mu_3} \Phi_{B'}^{\mu_1\mu_2\mu_3} q_{\mu_3}^\dagger q_{\mu_3} + \frac{3}{2}\Phi_B^{*\mu_1\mu_2\mu_3} \Phi_{B'}^{\mu_1\mu_2'\mu_3} q_{\mu_3}^\dagger q_{\mu_2'}^\dagger q_{\mu_2} q_{\mu_3} . \quad (6.36)$$

Neste exemplo, $C^\pm$ são nulos.

Definimos, agora, os operadores de hádron “ideal”, $a^\dagger$ e a , que atuam no espaço de Fock-Tani, $\mathcal{I} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{H}$, construído analogamente ao que foi descrito anteriormente para os mésons. Esses operadores satisfazem relações de comutação ou anticomutação dadas por

$$a_\alpha \cdot a_{\alpha'}^\dagger = \delta_{\alpha\alpha'} , \quad (6.37)$$

$$a_\alpha \cdot a_{\alpha'} = a_\alpha^\dagger \cdot a_{\alpha'}^\dagger = 0 , \quad (6.38)$$

e comutam com os operadores de quark, antiquark e glúon:

$$q_\mu \cdot a_\alpha = q_\mu \cdot a_\alpha^\dagger = 0 , \quad (6.39)$$

$$\bar{q}_\nu \cdot a_\alpha = \bar{q}_\nu \cdot a_\alpha^\dagger = 0 , \quad (6.40)$$

$$g_\sigma \cdot a_\alpha = g_\sigma \cdot a_\alpha^\dagger = 0 . \quad (6.41)$$

Introduzimos um novo vácuo $|0\rangle$, que é o produto direto do vácuo dos quarks, antiquarks e glúons e do vácuo dos hádrons ideais, tal que

$$q_\mu |0\rangle = \bar{q}_\nu |0\rangle = g_\sigma |0\rangle = a_\alpha |0\rangle = 0 , \quad (6.42)$$

e um vínculo para os estados permitidos, $|\psi\rangle$,

$$a_\alpha |\psi\rangle = 0 . \quad (6.43)$$

que garante o isomorfismo em relação aos estados originais do espaço de Fock.

Conforme descrito anteriormente, construímos um operador unitário U tal que os estados de hádrons $|\alpha\rangle = A_\alpha^\dagger |0\rangle$ são transformados em estados de hádron ideal $|\alpha\rangle = a_\alpha^\dagger |0\rangle$:

$$|\alpha\rangle = U |\alpha\rangle , \quad |\alpha\rangle = U^{-1} |\alpha\rangle = U^\dagger |\alpha\rangle . \quad (6.44)$$

Da mesma forma, para qualquer observável O do sistema de quarks, antiquarks e glúons o operador transformado correspondente, $U^{-1} O U$ é tal que

$$\langle \psi | O | \psi' \rangle = \langle \psi | U^{-1} O U | \psi' \rangle . \quad (6.45)$$

A equação de vínculo Eq. (6.43) transformada é dada por

$$(U^{-1} a_\alpha U) |\psi\rangle = D_\alpha |\psi\rangle = 0 . \quad (6.46)$$

Os estados transformados de muitos hádrons, com quarks, antiquarks e glúons confinados, podem ser representados por

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_n} F_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) a_{\alpha_1}^{\dagger} \cdots a_{\alpha_n}^{\dagger} |0\rangle. \quad (6.47)$$

O operador U tem a forma

$$U = e^{\frac{\pi}{2}F}, \quad (6.48)$$

onde

$$F = \sum_{\alpha} \left(B_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha} - a_{\alpha}^{\dagger} B_{\alpha} \right). \quad (6.49)$$

O operador B é construído ordem a ordem de tal forma que satisfaça relações de comutação ou anticomutação canônicas

$$B_{\alpha} \cdot B_{\alpha'}^{\dagger} = \delta_{\alpha\alpha'}, \quad (6.50)$$

$$B_{\alpha} \cdot B_{\alpha'} = B_{\alpha}^{\dagger} \cdot B_{\alpha'}^{\dagger} = 0. \quad (6.51)$$

Escrevemos

$$B_{\alpha} = \sum_{p=0}^{\infty} B_{\alpha}^{(p)}. \quad (6.52)$$

Até terceira ordem, o operador B_{α} é dado por

$$B_{\alpha} = B_{\alpha}^{(0)} + B_{\alpha}^{(1)} + B_{\alpha}^{(2)} + B_{\alpha}^{(3)} \quad (6.53)$$

$$B_{\alpha}^{(0)} = A_{\alpha} \quad (6.54)$$

$$B_{\alpha}^{(1)} = 0 \quad (6.55)$$

$$B_{\alpha}^{(2)} = - \sum_{\alpha'} \left(C_{\alpha\alpha'}^+ + \frac{1}{2} C_{\alpha\alpha'}^0 \right) A_{\alpha'} \quad (6.56)$$

$$B_{\alpha}^{(3)} = \sum_{\alpha'\alpha''} (-1)^{N N'} A_{\alpha'}^{\dagger} \left[A_{\alpha} \cdot \left(C_{\alpha'\alpha''}^- + \frac{1}{2} C_{\alpha'\alpha''}^0 \right) \right] A_{\alpha''}, \quad (6.57)$$

onde N e N' denotam o número de férmions nos estados α e α' . A obtenção destes termos e a demonstração de que a Eq. (6.51) é satisfeita até terceira ordem são descritas na Ref. [58].

Consideremos um modelo microscópico com um Hamiltoniano H dado em termos dos operadores de quark, antiquark e glúon. O Hamiltoniano transformado, $H_{FT} = U^{-1} H U$, terá a seguinte estrutura geral:

$$H_{FT} = H_{\text{quark-gluon}} + H_{\text{hadron}} + H_{\text{quark-gluon-hadron}}. \quad (6.58)$$

O termo $H_{\text{quark-gluon}}$ descreve os processos envolvendo quarks e glúons livres. O termo H_{hadron} descreve todos os processos envolvendo apenas hádrons. Uma das componentes deste termo é o potencial efetivo hádron-hádron. O termo $H_{\text{quark-gluon-hadron}}$ descreve os processos envolvendo os quarks, antiquarks e glúons livres e os hádrons. Em modelos que incorporam o confinamento dos quarks e glúons, estes termos contribuem apenas em estados intermediários nos processos hádron-hádron. Dessa forma, o Hamiltoniano transformado contém explicitamente termos correspondentes a todos os processos possíveis envolvendo quarks, antiquarks, glúons e hádrons.

Consideremos agora um sistema contendo quarks, antiquarks e glúons que podem formar estados de mésons compostos do tipo:

$$|\alpha\rangle = M_\alpha^\dagger |0\rangle, \quad (6.59)$$

onde o operador de criação do méson é do tipo dado na Eq. (6.27), contendo uma componente com um operador de quark e um operador de antiquark e uma componente com um operador de glúon acoplado ao par quark-antiquark:

$$M_\alpha^\dagger = \Phi_\alpha^{\mu,\nu} q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger + \Psi_\alpha^{\mu,\nu,\sigma} q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger g_\sigma^\dagger. \quad (6.60)$$

Utilizando as relações de anticomutação para os operadores de quark e antiquark dadas na Eq. (3.5) e as relações de comutação para os operadores de glúon dadas na Eq. (6.22), obtemos as seguintes relações de comutação para os operadores de méson:

$$[M_\alpha, M_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta} + C_{\alpha\beta}^0 + C_{\alpha\beta}^+ + C_{\alpha\beta}^-, \quad (6.61)$$

onde

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta}^0 &= -\Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{\mu'\nu'} q_\mu^\dagger q_\nu - \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{\mu'\nu'} \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\nu + \Psi_\alpha^{*\mu\nu\sigma} \Psi_\beta^{\mu'\nu'\sigma} q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\nu q_\mu \\ &+ \Psi_\alpha^{*\mu\nu\sigma} \Psi_\beta^{\mu'\nu'\sigma'} g_\sigma^\dagger g_\sigma - \Psi_\alpha^{*\mu\nu\sigma} \Psi_\beta^{\mu'\nu'\sigma'} q_\mu^\dagger g_\sigma^\dagger g_\sigma q_\mu - \Psi_\alpha^{*\mu\nu\sigma} \Psi_\beta^{\mu'\nu'\sigma} q_\mu^\dagger q_\mu \\ &- \Psi_\alpha^{*\mu\nu\sigma} \Psi_\beta^{\mu'\nu'\sigma'} \bar{q}_\nu^\dagger g_\sigma^\dagger g_\sigma \bar{q}_\nu - \Psi_\alpha^{*\mu\nu\sigma} \Psi_\beta^{\mu'\nu'\sigma} \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\nu, \end{aligned} \quad (6.62)$$

$$C_{\alpha\beta}^+ = \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Psi_\beta^{\mu\nu\sigma} g_\sigma^\dagger - \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Psi_\beta^{\mu'\nu\sigma} g_\sigma^\dagger q_\mu^\dagger q_\mu - \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Psi_\beta^{\mu\nu'\sigma} g_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\nu, \quad (6.63)$$

$$C_{\alpha\beta}^- = \Psi_\alpha^{*\mu\nu\sigma} \Phi_\beta^{\mu\nu} g_\sigma - \Psi_\alpha^{*\mu\nu\sigma} \Phi_\beta^{\mu'\nu} q_\mu^\dagger q_\mu g_\sigma - \Psi_\alpha^{*\mu\nu\sigma} \Phi_\beta^{\mu\nu'} \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\nu g_\sigma. \quad (6.64)$$

Adicionalmente, temos

$$[q_\mu, M_\alpha] = [\bar{q}_\nu, M_\alpha] = [q_\mu^\dagger, M_\alpha^\dagger] = [\bar{q}_\nu^\dagger, M_\alpha^\dagger] = 0 \quad (6.65)$$

$$[g_\sigma, M_\alpha] = [g_\sigma^\dagger, M_\alpha^\dagger] = 0 \quad (6.66)$$

$$[q_\mu, M_\alpha^\dagger] = \Phi_\alpha^{\mu\nu} \bar{q}_\nu^\dagger + \Psi_\alpha^{\mu\nu\sigma} \bar{q}_\nu^\dagger g_\sigma^\dagger \quad (6.67)$$

$$[\bar{q}_\nu, M_\alpha^\dagger] = -\Phi_\alpha^{\mu\nu} q_\mu^\dagger - \Psi_\alpha^{\mu\nu\sigma} q_\mu^\dagger g_\sigma^\dagger \quad (6.68)$$

$$[g_\sigma, M_\alpha^\dagger] = \Psi_\alpha^{\mu\nu\sigma} q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger. \quad (6.69)$$

O operador unitário que realiza a transformação é dado por

$$U = e^{-\frac{\pi}{2}F} \quad (6.70)$$

onde

$$F = \sum_\alpha \left(m_\alpha^\dagger B_\alpha - B_\alpha^\dagger m_\alpha \right). \quad (6.71)$$

onde o operador B_α satisfaz relações de comutação canônicas,

$$[B_\alpha, B_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta}. \quad (6.72)$$

O procedimento para a determinação do operador B_α é análogo ao descrito no Apêndice B. Escrevemos,

$$B_\alpha(t) = \sum_{i=0}^{\infty} B_\alpha^{(i)}(t). \quad (6.73)$$

Na aproximação de ordem zero, tomamos

$$B_\alpha^{(0)} = M_\alpha, \quad (6.74)$$

Com esta escolha, temos

$$[B_\alpha, B_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(\Phi^2), \quad (6.75)$$

$$\mathcal{O}(\Phi^2) = C_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta}^0 + C_{\alpha\beta}^+ + C_{\alpha\beta}^-, \quad (6.76)$$

de modo que a Eq. (6.72) é satisfeita em ordem zero, restando um termo indesejável de ordem dois.

Adicionamos um contratermo de ordem dois, dado por

$$B_{\alpha}^{(2)} = aC_{\alpha\beta}^0 + bC_{\alpha\beta}^+ + cC_{\alpha\beta}^-, \quad (6.77)$$

Com esse contratermo, obtemos

$$[B_{\alpha}, B_{\beta}^{\dagger}] = \delta_{\alpha\beta} + C_{\alpha\beta}^0 + C_{\alpha\beta}^+ + C_{\alpha\beta}^- + 2a\Delta_{\alpha\beta} + (b+c)C_{\alpha\beta}^+ + (b+c)C_{\alpha\beta}^- + \mathcal{O}_{\alpha}^{(3)} + \dots \quad (6.78)$$

Para $a = -\frac{1}{2}$, o termo $C_{\alpha\beta}^0$ de $\mathcal{O}(\Phi^2)$ é cancelado, de modo que obtemos:

$$[B_{\alpha}, B_{\beta}^{\dagger}] = \delta_{\alpha\beta} + (b+c)[C_{\alpha\beta}^+ + C_{\alpha\beta}^-] + \mathcal{O}_{\alpha}^{(3)} + \dots \quad (6.79)$$

Para a determinação de b e c , observamos, inicialmente, que adicionando o contratermo $B_{\alpha}^{(2)}$ e utilizando as Eq. (6.31-6.34), obtemos

$$FM_{\alpha}^{\dagger}|0\rangle = m_{\alpha}^{\dagger}|0\rangle + (1+b)\sum_{\beta} m_{\beta}^{\dagger}C_{\beta\alpha}^{\dagger+}|0\rangle + \mathcal{O}_{\alpha}^{(4)} + \dots \quad (6.80)$$

Em ordem dois, queremos

$$FM_{\alpha}^{\dagger}|0\rangle = m_{\alpha}^{\dagger}|0\rangle, \quad (6.81)$$

de modo que $b = -1$. Portanto, para cancelar os termos indesejáveis restantes, devemos ter $c = 0$.

Assim, a Eq. (6.72) é satisfeita até segunda ordem, restando termos indesejáveis de ordem maior ou igual a três:

$$[B_{\alpha}, B_{\beta}^{\dagger}] = \delta_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(\Phi^3) + \dots, \quad (6.82)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\Phi^3) = & -\frac{1}{2}\sum_{\gamma}\left(\left[C_{\alpha\gamma}^0, M_{\beta}^{\dagger}\right]M_{\gamma} + M_{\gamma}^{\dagger}\left[M_{\alpha}, C_{\gamma\beta}^0\right]\right) \\ & -\sum_{\gamma}\left(\left[C_{\alpha\gamma}^+, M_{\beta}^{\dagger}\right]M_{\gamma} + M_{\gamma}^{\dagger}\left[M_{\alpha}, C_{\gamma\beta}^-\right]\right). \end{aligned} \quad (6.83)$$

Adicionamos, então, um contratermo de ordem três, dado por

$$B_{\alpha}^{(3)} = d\sum_{\gamma\delta} M_{\gamma}^{\dagger}\left[M_{\alpha}, C_{\gamma\delta}^0\right]M_{\delta} + e\sum_{\gamma\delta} M_{\gamma}^{\dagger}\left[M_{\alpha}, C_{\gamma\delta}^+\right]M_{\delta} + f\sum_{\gamma\delta} M_{\gamma}^{\dagger}\left[M_{\alpha}, C_{\gamma\delta}^-\right]M_{\delta}. \quad (6.84)$$

Com esse contratermo, obtemos

$$\begin{aligned}
[B_\alpha, B_\beta^\dagger] &= \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \sum_\gamma \left([C_{\alpha\gamma}^0, M_\beta^\dagger] M_\gamma + M_\gamma^\dagger [M_\alpha, C_{\gamma\beta}^0] \right) \\
&\quad - \sum_\gamma \left([C_{\alpha\gamma}^+, M_\beta^\dagger] M_\gamma + M_\gamma^\dagger [M_\alpha, C_{\gamma\beta}^-] \right) \\
&\quad + d \sum_\gamma \left([C_{\alpha\gamma}^0, M_\beta^\dagger] M_\gamma + M_\gamma^\dagger [M_\alpha, C_{\gamma\beta}^0] \right) \\
&\quad + e \sum_\gamma \left([C_{\alpha\gamma}^-, M_\beta^\dagger] M_\gamma + M_\gamma^\dagger [M_\alpha, C_{\gamma\beta}^+] \right) \\
&\quad + f \sum_\gamma \left([C_{\alpha\gamma}^+, M_\beta^\dagger] M_\gamma + M_\gamma^\dagger [M_\alpha, C_{\gamma\beta}^-] \right) + \mathcal{O}_\alpha^{(4)} + \dots \quad (6.85)
\end{aligned}$$

O termo indesejável $\mathcal{O}(\Phi^3)$ é cancelado para

$$\begin{aligned}
d &= \frac{1}{2} \\
e &= 0 \\
f &= 1, \quad (6.86)
\end{aligned}$$

de forma que a Eq. (6.72) é satisfeita até terceira ordem, restando termos indesejáveis de ordem maior ou igual a quatro:

$$[B_\alpha, B_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(\Phi^4) + \dots, \quad (6.87)$$

Assim, obtemos o operador B_α que satisfaz a Eq. (6.72), até terceira ordem:

$$B_\alpha = M_\alpha - \sum_{\alpha'} \left(C_{\alpha\alpha'}^+ + \frac{1}{2} C_{\alpha\alpha'}^0 \right) M_{\alpha'} + \sum_{\alpha'\alpha''} M_{\alpha'}^\dagger \left[M_\alpha, \left(C_{\alpha'\alpha''}^- + \frac{1}{2} C_{\alpha'\alpha''}^0 \right) \right] M_{\alpha''}. \quad (6.88)$$

Notamos que esse resultado concorda com as expressões das Eq. (6.53)-(6.57).

As consequências da generalização da transformação original podem ser vistas considerando as “equações de movimento” até a segunda ordem. É claro, que para a obtenção de um Hamiltoniano méson-méson efetivo é necessário, como vimos anteriormente, considerarmos termos até terceira ordem. O objetivo de apresentarmos as equações de movimento até a segunda ordem é ilustrar o papel dos novos termos que aparecem no gerador da transformação devido à presença dos graus de liberdade de glúons nos estados de mésons.

Para os operadores de quark e anti-quark, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{dq_\mu(t)}{dt} &= [q_\mu(t), F] \\
&= -\sum_{\alpha} \Phi_{\alpha}^{\mu\nu} \delta_{\mu\mu'} \bar{q}_{\nu}^{\dagger}(t) m_{\alpha}(t) - \sum_{\alpha} \Psi_{\alpha}^{\mu\nu\sigma} \delta_{\mu\mu'} \bar{q}_{\nu}^{\dagger}(t) g_{\sigma}^{\dagger}(t) m_{\alpha}(t) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \Phi_{\alpha}^{*\mu\nu} \Phi_{\beta}^{\rho\nu} \delta_{\rho\mu'} \left[m_{\alpha}^{\dagger}(t) q_{\mu}(t) M_{\beta}(t) - M_{\alpha}^{\dagger}(t) q_{\mu}(t) m_{\beta}(t) \right] \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \Psi_{\alpha}^{*\mu\nu\sigma} \Psi_{\beta}^{\rho\nu\sigma} \delta_{\rho\mu'} \left[m_{\alpha}^{\dagger}(t) q_{\mu}(t) M_{\beta}(t) - M_{\alpha}^{\dagger}(t) q_{\mu}(t) m_{\beta}(t) \right] \\
&- \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \Psi_{\alpha}^{*\mu\nu\sigma} \Psi_{\beta}^{\rho\nu'\sigma} \delta_{\rho\mu'} \left[m_{\alpha}^{\dagger}(t) \bar{q}_{\nu'}^{\dagger}(t) \bar{q}_{\nu}(t) q_{\mu}(t) M_{\beta}(t) - M_{\alpha}^{\dagger}(t) \bar{q}_{\nu'}^{\dagger}(t) \bar{q}_{\nu}(t) q_{\mu}(t) m_{\beta}(t) \right] \\
&+ \sum_{\alpha\beta} \Phi_{\alpha}^{*\mu\nu} \Psi_{\beta}^{\rho\nu\sigma} \delta_{\rho\mu'} m_{\alpha}^{\dagger}(t) g_{\sigma}^{\dagger}(t) q_{\mu}(t) M_{\beta}(t) - \sum_{\alpha\beta} \Psi_{\alpha}^{*\mu\nu\sigma} \Phi_{\beta}^{\rho\nu} \delta_{\rho\mu'} M_{\alpha}^{\dagger}(t) g_{\sigma}(t) q_{\mu}(t) m_{\beta}(t) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \Psi_{\alpha}^{*\mu\nu\sigma} \Psi_{\beta}^{\rho\nu'\sigma'} \delta_{\rho\mu'} \left[m_{\alpha}^{\dagger}(t) g_{\sigma'}^{\dagger}(t) g_{\sigma}(t) q_{\mu}(t) M_{\beta}(t) - M_{\alpha}^{\dagger}(t) g_{\sigma'}^{\dagger}(t) g_{\sigma}(t) q_{\mu}(t) m_{\beta}(t) \right]
\end{aligned} \tag{6.89}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{q}_{\nu}(t)}{dt} &= [\bar{q}_{\nu}(t), F] \\
&= \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha}^{\mu\nu'} \delta_{\nu\nu'} q_{\mu}^{\dagger}(t) m_{\alpha}(t) + \sum_{\alpha} \Psi_{\alpha}^{\mu\nu'\sigma} \delta_{\nu\nu'} q_{\mu}^{\dagger}(t) g_{\sigma}^{\dagger}(t) m_{\alpha}(t) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \Phi_{\alpha}^{*\mu\nu'} \Phi_{\beta}^{\mu\tau} \delta_{\nu\tau} \left[m_{\alpha}^{\dagger}(t) \bar{q}_{\nu'}(t) M_{\beta}(t) - M_{\alpha}^{\dagger}(t) \bar{q}_{\nu'}(t) m_{\beta}(t) \right] \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \Psi_{\alpha}^{*\mu\nu'\sigma} \Psi_{\beta}^{\mu\tau\sigma} \delta_{\nu\tau} \left[m_{\alpha}^{\dagger}(t) \bar{q}_{\nu'}(t) M_{\beta}(t) - M_{\alpha}^{\dagger}(t) \bar{q}_{\nu'}(t) m_{\beta}(t) \right] \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \Psi_{\alpha}^{*\mu\nu'\sigma} \Psi_{\beta}^{\rho\tau\sigma} \delta_{\nu\tau} \left[m_{\alpha}^{\dagger}(t) q_{\rho}^{\dagger}(t) \bar{q}_{\nu'}(t) q_{\mu}(t) M_{\beta}(t) - M_{\alpha}^{\dagger}(t) q_{\rho}^{\dagger}(t) \bar{q}_{\nu'}(t) q_{\mu}(t) m_{\beta}(t) \right] \\
&+ \sum_{\alpha\beta} \Phi_{\alpha}^{*\mu\nu'} \Psi_{\beta}^{\mu\tau\sigma} \delta_{\nu\tau} m_{\alpha}^{\dagger}(t) g_{\sigma}^{\dagger}(t) \bar{q}_{\nu'}(t) M_{\beta}(t) - \sum_{\alpha\beta} \Psi_{\alpha}^{*\mu\nu'\sigma} \Phi_{\beta}^{\mu\tau} \delta_{\nu\tau} M_{\alpha}^{\dagger}(t) g_{\sigma}(t) \bar{q}_{\nu'}(t) m_{\beta}(t) \\
&- \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \Psi_{\alpha}^{*\mu\nu'\sigma} \Psi_{\beta}^{\mu\tau\sigma'} \delta_{\nu\tau} \left[m_{\alpha}^{\dagger}(t) g_{\sigma'}^{\dagger}(t) g_{\sigma}(t) \bar{q}_{\nu'}(t) M_{\beta}(t) - M_{\alpha}^{\dagger}(t) g_{\sigma'}^{\dagger}(t) g_{\sigma}(t) \bar{q}_{\nu'}(t) m_{\beta}(t) \right]
\end{aligned} \tag{6.90}$$

Para o operador de glúon, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{dg_\sigma(t)}{dt} &= [g_\sigma(t), F] \\
 &= -\sum_\alpha \Psi_\alpha^{\mu\nu\sigma'} \delta_{\sigma\sigma'} q_\mu^\dagger(t) \bar{q}_\nu^\dagger(t) m_\alpha(t) - \sum_\alpha \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Psi_\beta^{\mu\nu\sigma'} \delta_{\sigma\sigma'} m_\sigma^\dagger(t) M_\beta(t) \\
 &+ \sum_{\alpha\beta} \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Psi_\beta^{\mu\nu\sigma'} \delta_{\sigma\sigma'} m_\alpha^\dagger(t) \bar{q}_{\nu'}(t) \bar{q}_\nu(t) M_\beta(t) + \sum_{\alpha\beta} \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Psi_\beta^{\rho\nu\sigma'} \delta_{\sigma\sigma'} m_\alpha^\dagger(t) q_\rho^\dagger(t) q_\mu(t) M_\beta(t) \\
 &- \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \Psi_\alpha^{*\mu\nu\sigma''} \Psi_\beta^{\mu\nu\sigma'} \delta_{\sigma\sigma'} \left[m_\alpha^\dagger(t) g_{\sigma''}(t) M_\beta(t) - M_\alpha^\dagger(t) g_{\sigma''}(t) m_\beta(t) \right] \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \Psi_\alpha^{*\mu\nu\sigma''} \Psi_\beta^{\mu\nu\sigma'} \delta_{\sigma\sigma'} \left[m_\alpha^\dagger(t) \bar{q}_{\nu'}^\dagger(t) \bar{q}_\nu(t) g_{\sigma''}(t) M_\beta(t) - M_\alpha^\dagger(t) \bar{q}_{\nu'}^\dagger(t) \bar{q}_\nu(t) g_{\sigma''}(t) m_\beta(t) \right] \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \Psi_\alpha^{*\mu\nu\sigma''} \Psi_\beta^{\rho\nu\sigma'} \delta_{\sigma\sigma'} \left[m_\alpha^\dagger(t) q_\rho^\dagger(t) q_\mu(t) g_{\sigma''}(t) M_\beta(t) - M_\alpha^\dagger(t) q_\rho^\dagger(t) q_\mu(t) g_{\sigma''}(t) m_\beta(t) \right]
 \end{aligned} \tag{6.91}$$

As equações de movimento para os operadores m_α , B_α e M_α são dadas por:

$$\begin{aligned}
 \frac{dm_\alpha(t)}{dt} &= [m_\alpha(t), F] \\
 &= B_\alpha(t)
 \end{aligned} \tag{6.92}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dB_\alpha(t)}{dt} &= [B_\alpha(t), F] \\
 &= -m_\alpha(t)
 \end{aligned} \tag{6.93}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dM_\alpha(t)}{dt} &= [M_\alpha(t), F] \\
 &= -m_\alpha(t) - \sum_{\alpha'} \left(C_{\alpha\alpha'}^+(t) + \frac{1}{2} C_{\alpha\alpha'}^0(t) \right) m_{\alpha'}(t)
 \end{aligned} \tag{6.94}$$

A perspectiva de estudar as interações efetivas entre hádrons em modelos deste tipo é certamente interessante, e deverá dominar nossos interesses no futuro próximo.

Capítulo 7

Conclusão

O estudo de processos hadrônicos a energias menores que alguns GeV's, além de seu interesse intrínseco, é de importância para o entendimento da fase não-perturbativa da QCD. Com exceção de estudos preliminares da QCD na rede, todas as evidências que nos levam a acreditar que a QCD seja a teoria adequada para tratar os processos envolvendo a interação forte vêm de estudos de processos a altíssimas energias e grandes momentos transferidos. Mesmo que os progressos na tecnologia de supercomputadores permitam calcular com as técnicas da QCD na rede as propriedades estáticas de hádrons isolados e as propriedades dinâmicas de hádrons em colisão, o emprego de modelos e técnicas analíticas serão necessários para o entendimento dos fenômenos a estas escalas. Isto decorre do fato de que os resultados da QCD na rede serão apenas uma coleção de números que não trazem informações sobre os detalhes dos mecanismos físicos envolvidos na geração dos mesmos. Um exemplo em outra área ilustra bem essa situação [81]. Consideremos o fenômeno da supercondutividade em sólidos a baixas temperaturas. A teoria básica para descrever este fenômeno é a eletrodinâmica quântica (QED). Imaginemos que fosse possível obter, por exemplo, a temperatura crítica T_c para a transição do estado normal para o estado supercondutor através da solução numérica das equações básicas da QED. Neste caso, teríamos o número T_c , mas não teríamos informações sobre os processos envolvidos: formação dos átomos, que dão origem a um retículo cristalino de íons, cujos modos normais (fonons) interagem com os elétrons "livres" do cristal formando os pares de Cooper, os quais podem condensar a baixas temperaturas. Da mesma forma, na QCD não estamos interessados apenas nos números, mas sim nos mecanismos e processos básicos que dão origem, por ex-

emplo, ao confinamento dos quarks e glúons no interior dos hádrons. Esta tese é mais um passo nesta direção, no sentido de que ilustra o papel tanto de modelos quanto de métodos analíticos na busca de um entendimento das interações fortes a baixas energias.

Nesta tese foi adaptado para a física hadrônica o formalismo Fock-Tani desenvolvido originalmente para tratar problemas de física atômica. Partindo de um modelo envolvendo graus de liberdade microscópicos, o formalismo permite derivar um modelo efetivo envolvendo graus de liberdade macroscópicos. Um formalismo tal é útil para situações envolvendo a presença simultânea de hádrons, quarks e glúons. Esse formalismo emprega técnicas da teoria quântica de campos e baseia-se na idéia de mapeamento entre o espaço de Fock físico e um espaço de Hilbert “ideal”. O mapeamento é implementado por meio de uma transformação unitária. As partículas compostas (hádrons) são descritas no espaço de Fock por operadores de criação e aniquilação escritos em termos dos operadores das partículas constituintes (quarks, anti-quarks e glúons). Esses operadores, em geral, não satisfazem relações de (anti)comutação canônicas. Isso torna complicada a utilização dos métodos usuais da teoria de campos. Após a mudança de representação, implementada por meio da transformação unitária, as partículas compostas, bem como as partículas constituintes, são redescritas num espaço ideal por operadores de criação e aniquilação que satisfazem relações de (anti)comutação canônicas. Dessa forma, recupera-se a possibilidade de utilizar os métodos tradicionais da teoria quântica de campos de forma trivial.

Nesta tese o formalismo Fock-Tani foi implementado para o estudo das interações entre mésons num modelo de quarks constituintes em que os mésons são formados por um par quark-antiquark. A partir de um Hamiltoniano microscópico, foi derivado um Hamiltoniano efetivo contendo termos correspondentes aos vários processos envolvendo quarks, anti-quarks e mésons. O Hamiltoniano efetivo méson-méson contém contribuições de interação efetiva de troca de um glúon com troca de constituintes entre os mésons. Uma das características mais importantes desse Hamiltoniano é que ele exhibe explicitamente a simetria “post-prior”, fundamental para aplicações em problemas de espalhamento. Essa característica é consequência da generalização do gerador da transformação de Fock-Tani de modo a não introduzir termos seculares nos operadores transformados.

O Hamiltoniano efetivo foi utilizado para estudar o espalhamento méson-méson a baixas

energias, utilizando-se um Hamiltoniano de quarks em que quarks e anti-quarks interagem entre si através da troca de um glúon do tipo Fermi-Breit, e uma interação fenomenológica de confinamento. Estudamos os processos de espalhamento pión-pión e káon-káon, obtendo resultados equivalentes aos obtidos através do formalismo “quark-Born diagram”, com a diferença de que nossos resultados respeitam a simetria post-prior. Também estudamos o processo de espalhamento J/ψ - π , obtendo resultados compatíveis com os previamente obtidos usando as interações efetivas do “QBD”. A importância da simetria post-prior ficou claramente demonstrada neste exemplo.

Uma outra aplicação foi o estudo da interação méson-méson num sistema de muitos corpos. Obtivemos a função de Green de um méson para o potencial efetivo Fock-Tani na aproximação de Hartree-Fock. Em particular, mostramos como é possível estudar mudanças das propriedades elementares dos mésons, como massas e tamanhos, num meio quente. Este exemplo ilustra de maneira muito clara a vantagem da representação Fock-Tani: as funções de Green obtidas são dadas em termos dos operadores de campos de mésons ideais, os quais satisfazem relações de comutação canônicas, tornando direta a aplicação de técnicas usuais de teoria de muitos corpos.

Mostramos também a generalização do formalismo empregado nesta tese para modelos mais sofisticados de quarks. O emprego do formalismo generalizado para situações em que a criação e a destruição de partículas desempenha papel importante certamente deve ajudar em muito o entendimento dos fenômenos envolvendo os hádrons e seus constituintes a altas temperaturas e densidades. Situações tais espera-se que devam acontecer numa colisão de íons pesados a altas energias. Neste sentido, espera-se que o formalismo possa ajudar no entendimento dos processos e mecanismos básicos presentes na fase não-perturbativa da QCD.

Apêndice A

Redução não-relativística da troca de um glúon.

Consideremos o Hamiltoniano relativístico de quarks com interação de troca de um glúon dado por

$$H = T + V \quad (\text{A.1})$$

$$T = \int d\mathbf{x} \sum_{f_i, c_i} \bar{\Psi}_{f_i, c_i}(\mathbf{x}) [-i\gamma \cdot \nabla + m_{f_i}] \Psi_{f_i, c_i}(\mathbf{x}) \quad (\text{A.2})$$

$$V = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \sum_{f_i, f_k} \sum_{c_i, c_j} \sum_{c_k, c_l} \sum_a \left[\bar{\Psi}_{f_i, c_i}(\mathbf{x}) \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_i c_j} \gamma^\mu \Psi_{f_i, c_j}(\mathbf{x}) \right] D_{\mu\nu}(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \\ \times \left[\bar{\Psi}_{f_k, c_k}^\dagger(\mathbf{y}) \gamma^\nu \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_k c_l} \Psi_{f_k, c_l}(\mathbf{y}) \right], \quad (\text{A.3})$$

onde m_{f_i} é a massa dos quarks, γ_μ ($\mu = 1, 4$) são as matrizes Gamma, λ^a ($a = 1, 8$) são as matrizes de Gell-Mann e $D_{\mu\nu}(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$ é o propagador do glúon. Os operadores de campo de Dirac, $\Psi_{f_i, c_i}(\mathbf{x})$ e $\bar{\Psi}_{f_i, c_i}(\mathbf{x})$ são escritos em termos dos operadores de criação e aniquilação dos quarks e antiquarks [82],

$$\Psi_{f_i, c_i}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d\mathbf{p}_i \sum_{s_i} \left(\frac{m_{f_i}}{E_i} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{x}} \\ \times \left[q_{s_i, f_i, c_i}(\mathbf{p}_i) u_{f_i, s_i}(\mathbf{p}_i) + \bar{q}_{s_i, f_i}^\dagger(-\mathbf{p}_i) v_{s_i, f_i}(-\mathbf{p}_i) \right] \quad (\text{A.4})$$

$$\bar{\Psi}_{f_i, c_i}(\mathbf{x}) = \Psi_{f_i, c_i}^\dagger(\mathbf{x}) \beta \\ = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d\mathbf{p}_i \sum_{s_i} \left(\frac{m_{f_i}}{E_i} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-i\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{x}} \\ \times \left[q_{s_i, f_i, c_i}^\dagger(\mathbf{p}_i) \bar{u}_{f_i, s_i}(\mathbf{p}_i) + \bar{q}_{s_i, f_i}(-\mathbf{p}_i) \bar{v}_{s_i, f_i}(-\mathbf{p}_i) \right]. \quad (\text{A.5})$$

Os espinores de Dirac, $u_{f_i, s_i}(\mathbf{p}_i)$ e $v_{f_i, s_i}(-\mathbf{p}_i)$ são dados por

$$u_{f_i, s_i}(\mathbf{p}_i) = \left(\frac{E_i + m_{f_i}}{2m_{f_i}} \right)^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_i}{2m_{f_i}} \end{pmatrix} \chi_{s_i} \quad (\text{A.6})$$

$$v_{f_i, s_i}(-\mathbf{p}_i) = \left(\frac{E_i + m_{f_i}}{2m_{f_i}} \right)^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_i}{2m_{f_i}} \\ 1 \end{pmatrix} \chi_{s_i}^c \quad (\text{A.7})$$

$$\bar{u}_{f_i, s_i} = u_{f_i, s_i}^\dagger \beta \quad (\text{A.8})$$

$$\bar{v}_{f_i, s_i} = v_{f_i, s_i}^\dagger \beta, \quad (\text{A.9})$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ são as matrizes de Pauli, χ_{s_i} é o spinor de Pauli para o quark,

$$\chi_{s_i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

e $\chi_{s_i}^c$ é o spinor de Pauli para o antiquark, obtido por conjugação de carga,

$$\chi_{s_i}^c = -i\sigma_2 \chi_{s_i}^* . \quad (\text{A.11})$$

As matrizes de Pauli, Gamma e de Gell-Mann são dadas no Apêndice F.

Para o termo de energia cinética obtemos:

$$T = \int d\mathbf{p}_i \sum_{f_i, c_i} \sum_{s_i, s_j} \left(\frac{m_{f_i}}{E_i} \right) K_q, \quad (\text{A.12})$$

onde

$$\begin{aligned} K_q &= \left[\bar{u}_{f_i, s_i}(\mathbf{p}_i) q_{c_i, f_i, s_i}^\dagger(\mathbf{p}_i) + \bar{v}_{f_i, s_i}(-\mathbf{p}_i) \bar{q}_{c_i, f_i, s_i}(-\mathbf{p}_i) \right] \\ &\times (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}_i + m_{f_i}) \\ &\times \left[u_{f_i, s_j}(\mathbf{p}_i) q_{c_i, f_i, s_j}(\mathbf{p}_i) + v_{f_i, s_j}(-\mathbf{p}_i) \bar{q}_{c_i, f_i, s_j}^\dagger(-\mathbf{p}_i) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Para o termo de potencial, obtemos:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{p}_i d\mathbf{p}_j d\mathbf{p}_k d\mathbf{p}_l \sum_{f_i, f_k} \sum_{c_i, c_j} \sum_{c_k, c_l} \sum_{s_i, s_j} \sum_{s_k, s_l} \sum_a \left(\frac{m_{f_i}}{E_i} \right) \left(\frac{m_{f_k}}{E_k} \right) \\ &\times \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_i c_j} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_k c_l} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j - \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_l) K_c, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

onde

$$\begin{aligned}
 K_c = & \left[\bar{u}_{f_i, s_i}(\mathbf{p}_i) q_{c_i, f_i, s_i}^\dagger(\mathbf{p}_i) + \bar{v}_{f_i, s_i}(-\mathbf{p}_i) \bar{q}_{c_i, f_i, s_i}(-\mathbf{p}_i) \right] \\
 & \times \left[u_{f_i, s_j}(\mathbf{p}_j) q_{c_j, f_i, s_j}(\mathbf{p}_j) + v_{f_i, s_j}(-\mathbf{p}_j) \bar{q}_{c_j, f_i, s_j}^\dagger(-\mathbf{p}_j) \right] \\
 & \times \gamma^\mu D_{\mu\nu}(|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j|) \gamma^\nu \\
 & \times \left[\bar{u}_{f_k, s_k}(\mathbf{p}_k) q_{c_k, f_k, s_k}^\dagger(\mathbf{p}_k) + \bar{v}_{f_k, s_k}(-\mathbf{p}_k) \bar{q}_{c_k, f_k, s_k}(-\mathbf{p}_k) \right] \\
 & \times \left[u_{f_k, s_l}(\mathbf{p}_l) q_{c_l, f_k, s_l}(\mathbf{p}_l) + v_{f_k, s_l}(-\mathbf{p}_l) \bar{q}_{c_l, f_k, s_l}^\dagger(-\mathbf{p}_l) \right] . \quad (A.15)
 \end{aligned}$$

e

$$D_{\mu\nu}(|\mathbf{q}|) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{z} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{z}} D_{\mu\nu}(|\mathbf{z}|) . \quad (A.16)$$

Para uma interação efetiva tipo Coulomb, o propagador do glúon é dado por [83]:

$$D_{00}(|\mathbf{q}|) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{\alpha_s}{\mathbf{q}^2} \quad (A.17)$$

$$D_{ij}(|\mathbf{q}|) = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{\alpha_s}{\mathbf{q}^2} \left(\delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{\mathbf{q}^2} \right) \quad i, j = 1, 2, 3 . \quad (A.18)$$

O Hamiltoniano não-relativístico é obtido através da transformação de Foldy-Wouthuysen dos operadores de campo de Dirac [84]:

$$\Psi_{f_i, c_i}(\mathbf{x}) \rightarrow e^{iS} \Psi_{f_i, c_i}(\mathbf{x}) . \quad (A.19)$$

O operador S é dado por:

$$S = -\frac{\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla}}{2m_{f_i}} . \quad (A.20)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \Psi_{f_i, c_i}(\mathbf{x}) &= e^{-iS} \Psi'_{f_i, c_i}(\mathbf{x}) \\
 &= \left(1 - i \frac{\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla}}{2m_{f_i}} + \frac{\nabla^2}{8m_{f_i}^2} + \dots \right) \Psi'_{f_i, c_i}(\mathbf{x}) . \quad (A.21)
 \end{aligned}$$

Mantendo os termos até ordem $O\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$ com $E_i \simeq m_{f_i}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \Psi_{f_i, c_i}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d\mathbf{p}_i \sum_{s_i} e^{i\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{x}} \\
 &\times \left[q_{s_i, f_i, c_i}(\mathbf{p}_i) u_{f_i, s_i}(\mathbf{p}_i) + \bar{q}_{s_i, f_i}^\dagger(-\mathbf{p}_i) v_{s_i, f_i}(-\mathbf{p}_i) \right] \quad (A.22)
 \end{aligned}$$

onde

$$u_{f_i, s_i}(\mathbf{p}) = \left(1 - \frac{\mathbf{p}_i^2}{8m_{f_i}^2} \right) \chi_{s_i} + \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2m_{f_i}} \chi_{s_i} \quad (\text{A.23})$$

$$v_{f_i, s_i}(-\mathbf{p}_i) = \left(-\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_i}{2m_{f_i}} + 1 - \frac{\mathbf{p}_i^2}{8m_{f_i}^2} \right) \chi_{s_i}^c. \quad (\text{A.24})$$

Substituindo os espinores transformados no Hamiltoniano e mantendo apenas os termos até ordem $O\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$ obtemos o Hamiltoniano na aproximação não-relativística. O termo de energia cinética é dado por

$$T = \int d\mathbf{p}_i \sum_{f_i, s_i} \sum_{c_i} \left(\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_{f_i}} + m_{f_i} \right) [q_{f_i, s_i, c_i}^\dagger(\mathbf{p}_i) q_{f_i, s_i, c_i}(\mathbf{p}_i) + \bar{q}_{f_i, s_i, c_i}^\dagger(\mathbf{p}_i) \bar{q}_{f_i, s_i, c_i}(\mathbf{p}_i)] \quad (\text{A.25})$$

O termo de potencial é dado por

$$V = V_{qq} + V_{\bar{q}\bar{q}} + V_{q\bar{q}}, \quad (\text{A.26})$$

onde os termos quark-quark, antiquark-antiquark e quark-antiquark são dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned} V_{qq} = & \frac{1}{2} \int d\mathbf{p}_i d\mathbf{p}_j d\mathbf{p}_k d\mathbf{p}_l \sum_{f_i, f_j} \sum_{f_k, f_l} \sum_{c_i, c_j} \sum_{c_k, c_l} \sum_{s_i, s_j} \sum_{s_k, s_l} \sum_a \delta_{f_i f_j} \delta_{f_k f_l} \\ & \times \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_i c_j} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_k c_l} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_j - \mathbf{p}_l) \\ & \times \frac{1}{2\pi^2} \frac{\alpha_s}{\mathbf{q}^2} \left[\delta_{s_i, s_j} \delta_{s_k, s_l} - \frac{\mathbf{q}^2}{4m_{f_j} m_{f_l}} \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 - \left(\frac{1}{8m_{f_j}^2} + \frac{1}{8m_{f_l}^2} \right) \mathbf{q}^2 \delta_{s_i, s_j} \delta_{s_k, s_l} \right. \\ & + \frac{1}{4m_{f_j}^2} \delta_{s_k, s_l} i\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_j) - \frac{1}{4m_{f_l}^2} \delta_{s_i, s_j} i\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_l) \\ & + \frac{1}{2m_{f_j} m_{f_l}} \delta_{s_i, s_j} i\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_j) - \frac{1}{2m_{f_j} m_{f_l}} \delta_{s_k, s_l} i\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_l) \\ & + \frac{1}{m_{f_j} m_{f_l} \mathbf{q}^2} (\mathbf{p}_j \cdot \mathbf{q}) (\mathbf{p}_l \cdot \mathbf{q}) \delta_{s_i, s_j} \delta_{s_k, s_l} - \frac{1}{m_{f_j} m_{f_l}} \mathbf{p}_j \cdot \mathbf{p}_l \delta_{s_i, s_j} \delta_{s_k, s_l} \\ & \left. + \frac{1}{4m_{f_j} m_{f_l}} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{q}) (\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{q}) \right] \\ & \times q_{f_i, s_i, c_i}^\dagger(\mathbf{p}_i) q_{f_k, s_k, c_k}^\dagger(\mathbf{p}_k) q_{f_l, s_l, c_l}(\mathbf{p}_l) q_{f_j, s_j, c_j}(\mathbf{p}_j) \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

$$\begin{aligned}
 V_{\bar{q}q} = & \frac{1}{2} \int d\mathbf{p}_i d\mathbf{p}_j d\mathbf{p}_k d\mathbf{p}_l \sum_{f_i, f_j} \sum_{f_k, f_l} \sum_{c_i, c_j} \sum_{c_k, c_l} \sum_{s_i, s_j} \sum_{s_k, s_l} \sum_a \delta_{f_i f_j} \delta_{f_k f_l} \\
 & \times \left(-\frac{\lambda^{aT}}{2} \right)^{c_i c_j} \left(-\frac{\lambda^{aT}}{2} \right)^{c_k c_l} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_j - \mathbf{p}_l) \\
 & \times \frac{1}{2\pi^2} \frac{\alpha_s}{\mathbf{q}^2} \left[\delta_{s_i, s_j} \delta_{s_k, s_l} - \frac{\mathbf{q}^2}{4m_{f_j} m_{f_l}} \boldsymbol{\sigma}_1^c \cdot \boldsymbol{\sigma}_2^c - \left(\frac{1}{8m_{f_j}^2} + \frac{1}{8m_{f_l}^2} \right) \mathbf{q}^2 \delta_{s_i, s_j} \delta_{s_k, s_l} \right. \\
 & + \frac{1}{4m_{f_j}^2} \delta_{s_k, s_l} i\boldsymbol{\sigma}_1^c \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_j) + \frac{1}{4m_{f_l}^2} \delta_{s_i, s_j} i\boldsymbol{\sigma}_2^c \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_l) \\
 & + \frac{1}{2m_{f_j} m_{f_l}} \delta_{s_i, s_j} i\boldsymbol{\sigma}_2^c \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_j) + \frac{1}{2m_{f_j} m_{f_l}} \delta_{s_k, s_l} i\boldsymbol{\sigma}_1^c \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_l) \\
 & + \frac{1}{m_{f_j} m_{f_l} \mathbf{q}^2} (\mathbf{p}_j \cdot \mathbf{q}) (\mathbf{p}_l \cdot \mathbf{q}) \delta_{s_i, s_j} \delta_{s_k, s_l} - \frac{1}{m_{f_j} m_{f_l}} \mathbf{p}_j \cdot \mathbf{p}_l \delta_{s_i, s_j} \delta_{s_k, s_l} \\
 & \left. + \frac{1}{4m_{f_j} m_{f_l}} (\boldsymbol{\sigma}_1^c \cdot \mathbf{q}) (\boldsymbol{\sigma}_2^c \cdot \mathbf{q}) \right] \\
 & \times \bar{q}_{f_i, s_i, c_i}^\dagger(\mathbf{p}_i) \bar{q}_{f_k, s_k, c_k}^\dagger(\mathbf{p}_k) \bar{q}_{f_l, s_l, c_l}(\mathbf{p}_l) \bar{q}_{f_j, s_j, c_j}(\mathbf{p}_j)
 \end{aligned} \tag{A.28}$$

$$\begin{aligned}
 V_{q\bar{q}} = & \int d\mathbf{p}_i d\mathbf{p}_j d\mathbf{p}_k d\mathbf{p}_l \sum_{f_i, f_j} \sum_{f_k, f_l} \sum_{c_i, c_j} \sum_{c_k, c_l} \sum_{s_i, s_j} \sum_{s_k, s_l} \sum_a \delta_{f_i f_j} \delta_{f_k f_l} \\
 & \times \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_i c_j} \left(-\frac{\lambda^{aT}}{2} \right)^{c_k c_l} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_j - \mathbf{p}_l) \\
 & \times \frac{1}{2\pi^2} \frac{\alpha_s}{\mathbf{q}^2} \left[\delta_{s_i, s_j} \delta_{s_k, s_l} + \frac{\mathbf{q}^2}{4m_{f_j} m_{f_l}} \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2^c - \left(\frac{1}{8m_{f_j}^2} + \frac{1}{8m_{f_l}^2} \right) \mathbf{q}^2 \delta_{s_i, s_j} \delta_{s_k, s_l} \right. \\
 & + \frac{1}{4m_{f_j}^2} \delta_{s_k, s_l} i\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_j) + \frac{1}{4m_{f_l}^2} \delta_{s_i, s_j} i\boldsymbol{\sigma}_2^c \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_l) \\
 & - \frac{1}{2m_{f_j} m_{f_l}} \delta_{s_i, s_j} i\boldsymbol{\sigma}_2^c \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_j) - \frac{1}{2m_{f_j} m_{f_l}} \delta_{s_k, s_l} i\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_l) \\
 & + \frac{1}{m_{f_j} m_{f_l} \mathbf{q}^2} (\mathbf{p}_j \cdot \mathbf{q}) (\mathbf{p}_l \cdot \mathbf{q}) \delta_{s_i, s_j} \delta_{s_k, s_l} - \frac{1}{m_{f_j} m_{f_l}} \mathbf{p}_j \cdot \mathbf{p}_l \delta_{s_i, s_j} \delta_{s_k, s_l} \\
 & \left. - \frac{1}{4m_{f_j} m_{f_l}} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{q}) (\boldsymbol{\sigma}_2^c \cdot \mathbf{q}) \right] \\
 & \times q_{f_i, s_i, c_i}^\dagger(\mathbf{p}_i) \bar{q}_{f_k, s_k, c_k}^\dagger(\mathbf{p}_k) \bar{q}_{f_l, s_l, c_l}(\mathbf{p}_l) q_{f_j, s_j, c_j}(\mathbf{p}_j)
 \end{aligned} \tag{A.29}$$

onde

$$\mathbf{q} = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j = \mathbf{p}_l - \mathbf{p}_k \quad (\text{A.30})$$

e

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \chi_{s_i}^\dagger \sigma \chi_{s_j} \\ \sigma_2 &= \chi_{s_k}^\dagger \sigma \chi_{s_l} \\ \sigma_1^c &= \chi_{s_j}^{c\dagger} \sigma \chi_{s_i}^c \\ \sigma_2^c &= \chi_{s_l}^{c\dagger} \sigma \chi_{s_k}^c \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Utilizando a relação Eq. (A.11), obtemos

$$\begin{aligned} \sigma_1^c &= -\chi_{s_i}^\dagger \sigma \chi_{s_j} = -\sigma_1 \\ \sigma_2^c &= -\chi_{s_k}^{c\dagger} \sigma \chi_{s_l}^c = -\sigma_2, \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

de modo que

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2^c = -\sigma_1 \cdot \sigma_2 \quad (\text{A.33})$$

$$\sigma_1^c \cdot \sigma_2^c = \sigma_1 \cdot \sigma_2. \quad (\text{A.34})$$

Assim, os termos do potencial podem ser escritos na forma

$$\begin{aligned} V_{qq} &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{p}_i d\mathbf{p}_j d\mathbf{p}_k d\mathbf{p}_l \sum_{f_i, f_j} \sum_{f_k, f_l} \sum_{c_i, c_j} \sum_{c_k, c_l} \sum_{s_i, s_j} \sum_{s_k, s_l} \sum_a \delta_{f_i f_j} \delta_{f_k f_l} \\ &\times \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_i c_j} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_k c_l} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_j - \mathbf{p}_l) V(\mathbf{q}, \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_l) \\ &\times q_{f_i, s_i, c_i}^\dagger(\mathbf{p}_i) q_{f_k, s_k, c_k}^\dagger(\mathbf{p}_k) q_{f_l, s_l, c_l}(\mathbf{p}_l) q_{f_j, s_j, c_j}(\mathbf{p}_j) \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

$$\begin{aligned} V_{\bar{q}q} &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{p}_i d\mathbf{p}_j d\mathbf{p}_k d\mathbf{p}_l \sum_{f_i, f_j} \sum_{f_k, f_l} \sum_{c_i, c_j} \sum_{c_k, c_l} \sum_{s_i, s_j} \sum_{s_k, s_l} \sum_a \delta_{f_i f_j} \delta_{f_k f_l} \\ &\times \left(-\frac{\lambda^{aT}}{2} \right)^{c_i c_j} \left(-\frac{\lambda^{aT}}{2} \right)^{c_k c_l} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_j - \mathbf{p}_l) V(\mathbf{q}, \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_l) \\ &\times \bar{q}_{f_i, s_i, c_i}^\dagger(\mathbf{p}_i) \bar{q}_{f_k, s_k, c_k}^\dagger(\mathbf{p}_k) \bar{q}_{f_l, s_l, c_l}(\mathbf{p}_l) \bar{q}_{f_j, s_j, c_j}(\mathbf{p}_j) \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

$$\begin{aligned} V_{q\bar{q}} &= \int d\mathbf{p}_i d\mathbf{p}_j d\mathbf{p}_k d\mathbf{p}_l \sum_{f_i, f_j} \sum_{f_k, f_l} \sum_{c_i, c_j} \sum_{c_k, c_l} \sum_{s_i, s_j} \sum_{s_k, s_l} \sum_a \delta_{f_i f_j} \delta_{f_k f_l} \\ &\times \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_i c_j} \left(-\frac{\lambda^{aT}}{2} \right)^{c_k c_l} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_j - \mathbf{p}_l) V(\mathbf{q}, \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_l) \\ &\times q_{f_i, s_i, c_i}^\dagger(\mathbf{p}_i) \bar{q}_{f_k, s_k, c_k}^\dagger(\mathbf{p}_k) \bar{q}_{f_l, s_l, c_l}(\mathbf{p}_l) q_{f_j, s_j, c_j}(\mathbf{p}_j) \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

onde

$$\begin{aligned}
 V(\mathbf{q}, \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_l) = & \frac{1}{2\pi^2} \frac{\alpha_s}{\mathbf{q}^2} \left[\delta_{s_i, s_j} \delta_{s_k, s_l} - \frac{\mathbf{q}^2}{4m_{f_j} m_{f_l}} \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 - \left(\frac{1}{8m_{f_j}^2} + \frac{1}{8m_{f_l}^2} \right) \mathbf{q}^2 \delta_{s_i, s_j} \delta_{s_k, s_l} \right. \\
 & + \frac{1}{4m_{f_j}^2} \delta_{s_k, s_l} i \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_j) - \frac{1}{4m_{f_l}^2} \delta_{s_i, s_j} i \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_l) \\
 & + \frac{1}{2m_{f_j} m_{f_l}} \delta_{s_i, s_j} i \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_j) - \frac{1}{2m_{f_j} m_{f_l}} \delta_{s_k, s_l} i \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_l) \\
 & + \frac{1}{m_{f_j} m_{f_l} \mathbf{q}^2} (\mathbf{p}_j \cdot \mathbf{q}) (\mathbf{p}_l \cdot \mathbf{q}) \delta_{s_i, s_j} \delta_{s_k, s_l} - \frac{1}{m_{f_j} m_{f_l}} \mathbf{p}_j \cdot \mathbf{p}_l \delta_{s_i, s_j} \delta_{s_k, s_l} \\
 & \left. + \frac{1}{4m_{f_j} m_{f_l}} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{q}) (\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{q}) \right] \quad (\text{A.38})
 \end{aligned}$$

é a interação microscópica no espaço de momentos. A interação microscópica no espaço de coordenadas, $U(\mathbf{r}, \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_l)$, onde $\mathbf{r} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l$, é dada pela transformada de Fourier de $V(\mathbf{q}, \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_l)$:

$$\begin{aligned}
 U(\mathbf{r}, \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_l) &= \int d\mathbf{q} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} V(\mathbf{q}, \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_l) \\
 &= U^{orb} + U^{hyp} + U^{corr} + U^{so} + U^{tens}, \quad (\text{A.39})
 \end{aligned}$$

onde

$$U^{orb} = \alpha_s \left[\frac{1}{\mathbf{r}} - \frac{1}{2m_{f_j} m_{f_l}} \left(\frac{\mathbf{p}_j \cdot \mathbf{p}_l}{|\mathbf{r}|} + \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}_j) \mathbf{p}_l}{|\mathbf{r}|^3} \right) \right] \delta_{s_i, s_j} \delta_{s_k, s_l} \quad (\text{A.40})$$

é o termo de interação orbital,

$$U^{hyp} = -\frac{8\pi\alpha_s}{3m_{f_j} m_{f_l}} \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_1}{2} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}_2}{2} \right) \delta^{(3)}(\mathbf{r}) \quad (\text{A.41})$$

é o termo de interação hiperfina spin-spin,

$$U^{corr} = -\frac{\pi\alpha_s}{2} \left(\frac{1}{m_{f_j}^2} + \frac{1}{m_{f_l}^2} \right) \delta^{(3)}(\mathbf{r}) \delta_{s_i, s_j} \delta_{s_k, s_l} \quad (\text{A.42})$$

é um termo de correção relativística,

$$\begin{aligned}
 U^{so} = & -\frac{\alpha_s}{4m_{f_j}^2 |\mathbf{r}|^3} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_j \cdot \boldsymbol{\sigma}_1) \delta_{s_k, s_l} + \frac{\alpha_s}{4m_{f_l}^2 |\mathbf{r}|^3} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_l \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \delta_{s_i, s_j} \\
 & - \frac{\alpha_s}{2m_{f_j} m_{f_l} |\mathbf{r}|^3} \left[(\mathbf{r} \times \mathbf{p}_j \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \delta_{s_i, s_j} - (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_l \cdot \boldsymbol{\sigma}_1) \delta_{s_k, s_l} \right] \quad (\text{A.43})
 \end{aligned}$$

é o termo de interação spin-órbita e

$$U^{tens} = -\frac{\alpha_s}{4m_{f_j} m_{f_l} |\mathbf{r}|^3} \left[\frac{3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r})}{|\mathbf{r}|^2} - \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \right] \quad (\text{A.44})$$

é o termo correspondente á força tensorial.

A interação obtida corresponde ao potencial de Fermi-Breit, devido à troca de um glúon perturbativa, na aproximação não-relativística (incluindo correções relativísticas de ordem mais baixa), análogo ao utilizado na Ref. [85]. É importante observar que nessa aproximação não são considerados os termo correspondentes ao canal de aniquilação $q\bar{q}$. Para obtermos o Hamiltoniano completo, incluindo os efeitos não-perturbativos, acrescentamos um termo efetivo de confinamento, U^{conf} . No termo orbital, podemos considerar apenas o termo do tipo Coulomb. O termo de correção pode ser considerado incluído no termo efetivo de confinamento. Os termos spin-órbita e tensorial não contribuem para os valores esperados dos observáveis calculados em estados de momento angular orbital nulo. Uma vez que, nas aplicações desta tese, consideramos apenas mésons em estados de onda-S ($L = 0$), esses termos podem ser desprezados.

Apêndice B

Função de Onda do Méson.

No modelo de quarks não relativístico, a maioria dos mésons pode ser considerada como um estado ligado simples de um quark e um antiquark “constituintes”, $q\bar{q}$, com paridade (P, C) e momento angular (J^{PC}) apropriados [86].

O operador de paridade, P , é dado por:

$$P = (-1)^{L+1} \quad (\text{B.1})$$

onde L é o momento angular orbital.

O operador de paridade de conjugação de carga, C , é dado por:

$$C = (-1)^{L+S}, \quad (\text{B.2})$$

onde $S = 0, 1$ é o spin total do méson.

Se considerarmos os tripletos fundamentais do $SU(3)$ de sabor, $\mathbf{3}(u, d, s)$ para os quarks e $\mathbf{3}^*(\bar{u}, \bar{d}, \bar{s})$ para os antiquarks, existem nove possibilidades de combinação $q\bar{q}$, agrupadas em um octeto e um singlete de $SU(3)$:

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}^* = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}. \quad (\text{B.3})$$

Incluindo o quark (antiquark) “charm”, $c(\bar{c})$, devemos estender a simetria para $SU(4)$, obtendo um hexadecuplete.

Introduzindo o spin no modelo de quarks, devemos considerar o dubleto fundamental do $SU(2)$ de spin, $\mathbf{2}(\uparrow\downarrow)$, uma vez que os quarks e antiquarks apresentam spin $\frac{1}{2}$ com projeção de spin $\pm\frac{1}{2}$. Dessa forma, existem quatro possibilidades de combinação $q\bar{q}$, agrupadas em um triplete ($S = 1$) e um singlete ($S = 0$).

Combinando o SU(3) (SU(4)) de sabor com o dubleto SU(2) de spin, obtemos o grupo SU(6) (SU(8)). É importante observar que a invariância SU(6) (SU(8)) só é válida na aproximação não-relativística, quando o acoplamento spin-órbita pode ser desprezado.

Consideramos, ainda, que os quarks (antiquarks) formam um tripleto fundamental do SU(3) de cor, $\mathbf{3}(R, G, B)$ ($\mathbf{3}^*(\bar{R}, \bar{G}, \bar{B})$). A única combinação possível, $q\bar{q}$, para os mésons observados é o estado singlete de cor ("branco"), $(R\bar{R} + G\bar{G} + B\bar{B})$, invariante sob rotações no espaço de cor.

Na Tabela A1 são mostrados os números quânticos dos quarks (antiquarks) "constituintes" u, d, s, c ($\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}, \bar{c}$) e na Tabela A2 são mostrados os números quânticos, a estrutura de quarks e a massa dos mésons compostos por esses quarks, para estados de onda-S ($L = 0$).

No formalismo Fock-Tani, utilizamos os estados de méson em segunda quantização, dados por

$$|\alpha\rangle = M_\alpha^\dagger |0\rangle = \Phi_\alpha^{\mu\nu} q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger |0\rangle, \quad (\text{B.4})$$

onde $\Phi_\alpha^{\mu\nu}$ é a função de onda do méson, normalizada na forma

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{\mu\nu} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (\text{B.5})$$

Assim, considerando os graus de liberdade spin, sabor, cor e espacial, conforme descrito anteriormente, esse estado pode ser escrito na forma

$$|\alpha\rangle = |S_\alpha, M_\alpha^s\rangle \otimes |F_\alpha, M_\alpha^f\rangle \otimes |C_\alpha\rangle \otimes |\mathbf{P}_\alpha\rangle. \quad (\text{B.6})$$

de modo que a função de onda do méson é dada por

$$\Phi_\alpha^{\mu\nu} = \chi_{S_\alpha, M_\alpha^s}^{s_1 s_2} \mathcal{F}_{F_\alpha, M_\alpha^f}^{f_1 f_2} C_{C_\alpha}^{c_1 c_2} \Phi_{\mathbf{P}_\alpha}^{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}, \quad (\text{B.7})$$

onde as funções de onda para cada grau de liberdade são normalizadas separadamente:

$$\langle S_\alpha, M_\alpha^s | S_\beta, M_\beta^s \rangle = \chi_{S_\alpha, M_\alpha^s}^{*s_1 s_2} \chi_{S_\beta, M_\beta^s}^{s_1 s_2} = \delta_{S_\alpha, S_\beta} \delta_{M_\alpha^s, M_\beta^s} \quad (\text{B.8})$$

$$\langle F_\alpha, M_\alpha^f | F_\beta, M_\beta^f \rangle = \mathcal{F}_{F_\alpha, M_\alpha^f}^{*f_1 f_2} \mathcal{F}_{F_\beta, M_\beta^f}^{f_1 f_2} = \delta_{F_\alpha, F_\beta} \delta_{M_\alpha^f, M_\beta^f} \quad (\text{B.9})$$

$$\langle C_\alpha | C_\beta \rangle = C_{C_\alpha}^{*c_1 c_2} C_{C_\beta}^{c_1 c_2} = \delta_{C_\alpha, C_\beta} \quad (\text{B.10})$$

$$\langle \mathbf{P}_\alpha | \mathbf{P}_\beta \rangle = \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 \Phi_{\mathbf{P}_\alpha}^{*p_1 p_2} \Phi_{\mathbf{P}_\beta}^{p_1 p_2} = \delta^{(3)}(\mathbf{P}_\alpha - \mathbf{P}_\beta) . \quad (\text{B.11})$$

As funções de onda de spin, $\chi_{S_\alpha, M_\alpha^s}^{s_1 s_2}$, são dadas pelos coeficientes de Clebsh-Gordan correspondentes aos estados de spin do méson:

$$|S_\alpha, M_\alpha^s\rangle = \chi_{S_\alpha, M_\alpha^s}^{s_1 s_2} q_{s_1}^\dagger \bar{q}_{s_2}^\dagger |0\rangle , \quad (\text{B.12})$$

onde S_α é o spin total do méson, M_α^s é a projeção de spin do méson e s_1, s_2 são as projeções de spin do quark e do antiquark ($\uparrow \equiv +\frac{1}{2}; \downarrow \equiv -\frac{1}{2}$). O estado singlete de spin ($S_\alpha = 0; M_\alpha^s = 0$) é dado por:

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) . \quad (\text{B.13})$$

Assim,

$$\chi_{0,0}^{\uparrow\downarrow} = +\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{B.14})$$

$$\chi_{0,0}^{\downarrow\uparrow} = -\frac{1}{\sqrt{2}} . \quad (\text{B.15})$$

Os estados tripleto de spin ($S = 1; M_s = -1, 0, +1$) são dados por:

$$|1, -1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle \quad (\text{B.16})$$

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \quad (\text{B.17})$$

$$|1, +1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle . \quad (\text{B.18})$$

Assim,

$$\chi_{1,-1}^{\downarrow\downarrow} = 1 \quad (\text{B.19})$$

$$\chi_{1,0}^{\uparrow\downarrow} = +\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{B.20})$$

$$\chi_{1,0}^{\downarrow\uparrow} = +\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{B.21})$$

$$\chi_{1,+1}^{\uparrow\uparrow} = 1 . \quad (\text{B.22})$$

As funções de onda de sabor, $\mathcal{F}_{F_\alpha, M_\alpha^f}^{f_1 f_2}$, são dadas pelos coeficientes de Clebsch-Gordan correspondentes aos estados de sabor do méson:

$$|F_\alpha, M_\alpha^f\rangle = \mathcal{F}_{F_\alpha, M_\alpha^f}^{f_1 f_2} q_{f_1}^\dagger \bar{q}_{f_2}^\dagger |0\rangle , \quad (\text{B.23})$$

onde F_α é o isospin do méson, M_α^f é a projeção de isospin do méson, f_1 e f_2 são as projeções de isospin do quark e antiquark. Consideremos, por exemplo, os mésons π :

$$|\pi^+\rangle \equiv |1, +1\rangle = -|u\bar{d}\rangle \quad (\text{B.24})$$

$$|\pi^-\rangle \equiv |1, -1\rangle = |d\bar{u}\rangle \quad (\text{B.25})$$

$$|\pi^0\rangle \equiv |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle) . \quad (\text{B.26})$$

Assim,

$$\mathcal{F}_{1,+1}^{+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = -1 \quad (\text{B.27})$$

$$\mathcal{F}_{1,-1}^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = +1 \quad (\text{B.28})$$

$$\mathcal{F}_{1,0}^{+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = +\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{B.29})$$

$$\mathcal{F}_{1,0}^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} . \quad (\text{B.30})$$

Os estados de sabor são escritos utilizando-se a convenção de fase de de Swart [87].

As funções de onda de cor, $C_{C_\alpha}^{c_1 c_2}$, são dadas pelos coeficientes de Clebsch-Gordan correspondentes ao estado singlete de cor do méson,

$$\begin{aligned} |C_\alpha\rangle &= C_0^{c_1 c_2} q_{c_1}^\dagger \bar{q}_{c_2}^\dagger |0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|R\bar{R}\rangle + |G\bar{G}\rangle + |B\bar{B}\rangle) . \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

Assim,

$$C_0^{c_1 c_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \delta_{c_1 c_2} . \quad (\text{B.32})$$

Para as funções de onda espaciais utilizamos um “ansatz” gaussiano. Consideremos que, no espaço de coordenadas, a função de onda espacial pode ser escrita como o produto de uma onda plana de momento $\mathbf{P}_\alpha$ no c.m. e uma função de onda relativa quark-antiquark:

$$\Psi_{\mathbf{P}_\alpha}^{\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i\mathbf{P}_\alpha \cdot \mathbf{R}} \psi(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) . \quad (\text{B.33})$$

Utilizamos um “ansatz ” gaussiano para $\psi(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$,

$$\psi(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = N e^{-\frac{b^2}{2}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2} , \quad (\text{B.34})$$

onde b é o parâmetro da gaussiana e N é um fator de normalização. Impondo que a função de onda relativa é normalizada à unidade,

$$\int d\mathbf{r} |\psi(\mathbf{r})|^2 = 1, \quad (\text{B.35})$$

obtemos o fator de normalização N :

$$N = \left(\frac{b^2}{\pi} \right)^{\frac{3}{4}}. \quad (\text{B.36})$$

A função de onda espacial no espaço de momentos é dada pela transformada de Fourier de $\Psi_{\mathbf{P}_\alpha}^{\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j}$:

$$\Phi_{\mathbf{P}_\alpha}^{\mathbf{p}_i \mathbf{p}_j} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{r}_i d\mathbf{r}_j e^{-i\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i} e^{-i\mathbf{p}_j \cdot \mathbf{r}_j} \Psi_{\mathbf{P}_\alpha}^{\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j}. \quad (\text{B.37})$$

Dessa forma, a função de onda no espaço de momentos é dada pelo produto de uma delta de conservação de momento e uma função de onda gaussiana do momento relativo:

$$\Phi_{\mathbf{P}_\alpha}^{\mathbf{p}_i \mathbf{p}_j} = \delta^{(3)}(\mathbf{P}_\alpha - \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) \phi(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j), \quad (\text{B.38})$$

$$\phi(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) = \left(\frac{1}{\pi b^2} \right)^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{1}{8b^2} (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)^2}. \quad (\text{B.39})$$

A normalização de $\psi(\mathbf{r})$ à unidade implica na mesma normalização para $\phi(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)$:

$$\int d\mathbf{p} |\phi(2\mathbf{p})|^2 = 1, \quad (\text{B.40})$$

onde $2\mathbf{p} = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j$.

Esse “ansatz” gaussiano corresponde à utilização de uma função de onda espacial análoga à auto-função para o estado fundamental do Hamiltoniano microscópico com interação tipo oscilador harmônico, conforme descrito na secção (3.5). Assim, o parâmetro da gaussiana, b , é equivalente ao parâmetro α_{SHO} do oscilador harmônico simples, sendo ajustado pelos dados experimentais da espectroscopia dos mésons.

Tabela B.1: Números quânticos dos quarks.

Número quântico	Tipo de quark (sabor)					
	d	u	s	c	b	d
Q : carga elétrica	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$
I_z : componente z isospin	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	0	0	0	0
S : estranheza	0	0	-1	0	0	0
C : charme	0	0	-1	0	+1	0

Tabela B.2: Números quânticos dos mésons. Os números entre parênteses indicam as massas dos mésons em GeV.

$^{2S+1}L_J$	J^{PC}	$u\bar{d}, u\bar{u}, d\bar{d}$ $I = 1$	$u\bar{d}, d\bar{d}, s\bar{s}$ $I = 0$	$c\bar{c}$ $I = 0$	$\bar{s}u, \bar{s}d$ $I = 1/2$	$c\bar{u}, c\bar{d}, u\bar{c}, d\bar{c}$ $I = 1/2$	$c\bar{s}$ $I =$
1S_0	0^{-+}	$\pi(0.136)$	$\eta(0.549), \eta'(0.958)$	$\eta_c(2.980)$	$K(0.494)$	$D(1.868)$	$D_s(1.9)$
3S_1	1^{--}	$\rho(0.770)$	$\omega(0.783)$	$J/\Psi(3.097)$	$K^*(0.892)$	$D^*(2.009)$	

Apêndice C

Determinação de O_α .

O gerador da transformação Fock-Tani é dado por:

$$F = \sum_{\alpha} \left(m_{\alpha}^{\dagger} O_{\alpha} - O_{\alpha}^{\dagger} m_{\alpha} \right) , \quad (\text{C.1})$$

onde o operador O_{α} satisfaz relações de comutação canônicas,

$$[O_{\alpha}, O_{\beta}^{\dagger}] = \delta_{\alpha\beta} . \quad (\text{C.2})$$

O processo iterativo de construção de O_{α} envolve a adição de uma série de contratermos que cancelam os termos indesejáveis do comutador. Assim, escrevemos:

$$O_{\alpha}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} O_{\alpha}^{(i)}(t) . \quad (\text{C.3})$$

Na aproximação de ordem zero, tomamos

$$O_{\alpha}^{(0)} = M_{\alpha} , \quad (\text{C.4})$$

Com esta escolha, temos

$$[O_{\alpha}, O_{\beta}^{\dagger}] = \delta_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(\Phi^2) , \quad (\text{C.5})$$

$$\mathcal{O}(\Phi^2) = -\Delta_{\alpha\beta} , \quad (\text{C.6})$$

de modo que a Eq. (C.2) é satisfeita em ordem zero, restando um termo indesejável de ordem dois.

Adicionamos um contratermo de ordem dois, dado por

$$O_\alpha^{(2)} = a\Delta_{\alpha\beta}M_\beta. \quad (C.7)$$

Com esse contratermo, obtemos

$$[O_\alpha, O_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta} - \Delta_{\alpha\beta} + 2a\Delta_{\alpha\beta} + O_\alpha^{(3)} + \dots \quad (C.8)$$

Para $a = \frac{1}{2}$, o termo indesejável $\mathcal{O}(\Phi^2)$ é cancelado, de forma que a Eq. (C.2) é satisfeita até segunda ordem, restando termos indesejáveis de ordem maior ou igual a três:

$$[O_\alpha, O_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(\Phi^3) + \dots, \quad (C.9)$$

$$\mathcal{O}(\Phi^3) = \frac{1}{2} \sum_\gamma \left([\Delta_{\alpha\gamma}, M_\beta^\dagger] M_\gamma + M_\gamma^\dagger [M_\alpha, \Delta_{\gamma\beta}] \right). \quad (C.10)$$

Adicionamos, então, um contratermo de ordem três, dado por

$$O_\alpha^{(3)} = b \sum_{\gamma\delta} M_\gamma^\dagger [M_\alpha, \Delta_{\gamma\delta}] M_\delta. \quad (C.11)$$

Com esse contratermo, obtemos

$$\begin{aligned} [O_\alpha, O_\beta^\dagger] &= \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \sum_\gamma \left([\Delta_{\alpha\gamma}, M_\beta^\dagger] M_\gamma + M_\gamma^\dagger [M_\alpha, \Delta_{\gamma\beta}] \right) \\ &+ b \sum_\gamma \left([\Delta_{\alpha\gamma}, M_\beta^\dagger] M_\gamma + M_\gamma^\dagger [M_\alpha, \Delta_{\gamma\beta}] \right) + O_\alpha^{(4)} + \dots \end{aligned} \quad (C.12)$$

Para $b = -\frac{1}{2}$, o termo indesejável $\mathcal{O}(\Phi^3)$ é cancelado, de forma que a Eq. (C.2) é satisfeita até terceira ordem, restando termos indesejáveis de ordem maior ou igual a quatro:

$$[O_\alpha, O_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(\Phi^4) + \dots, \quad (C.13)$$

Assim, obtemos o operador O_α que satisfaz a Eq. (C.2), até terceira ordem:

$$O_\alpha = M_\alpha + \frac{1}{2}\Delta_{\alpha\beta}M_\beta + \frac{1}{2}M_\beta^\dagger[\Delta_{\beta\gamma}, M_\alpha]M_\gamma. \quad (C.14)$$

Esse processo pode ser estendido sequencialmente até qualquer ordem, multiplicando-se os termos indesejados, ordem a ordem, por M_γ para gerar os contratermos adequados.

Apêndice D

Elementos de Matriz do Potencial Fock-Tani.

Consideremos o elemento de matriz do potencial Fock-Tani efetivo méson-méson dado por:

$$\begin{aligned} V_{\text{mm}}^{\text{ex}}(\alpha\beta; \gamma\delta) &= V^1(\alpha\beta; \gamma\delta) + V^2(\alpha\beta; \gamma\delta) + V^3(\alpha\beta; \gamma\delta) + V^4(\alpha\beta; \gamma\delta) \\ &+ V^5(\alpha\beta; \gamma\delta) + V^6(\alpha\beta; \gamma\delta) \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

$$\begin{aligned} V^1(\alpha\beta; \gamma\delta) &= -\frac{1}{2} \Phi_{\alpha}^{*\mu\nu} \Phi_{\beta}^{*\rho\sigma} V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_{\delta}^{\mu'\sigma} \Phi_{\gamma}^{\rho\nu'} \\ V^2(\alpha\beta; \gamma\delta) &= -\frac{1}{2} \Phi_{\alpha}^{*\rho\sigma} \Phi_{\beta}^{*\mu\nu} V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_{\delta}^{\rho\nu'} \Phi_{\gamma}^{\mu'\sigma} \\ V^3(\alpha\beta; \gamma\delta) &= -\frac{1}{2} \Phi_{\alpha}^{*\mu\sigma} \Phi_{\beta}^{*\rho\nu} V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_{\delta}^{\mu'\nu'} \Phi_{\gamma}^{\rho\sigma} \\ V^4(\alpha\beta; \gamma\delta) &= -\frac{1}{2} \Phi_{\alpha}^{*\rho\nu} \Phi_{\beta}^{*\mu\sigma} V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_{\delta}^{\rho\sigma} \Phi_{\gamma}^{\mu'\nu'} \\ V^5(\alpha\beta; \gamma\delta) &= -\Phi_{\alpha}^{*\mu\sigma} \Phi_{\beta}^{*\rho\nu} V_{qq}(\mu\rho; \mu'\rho') \Phi_{\delta}^{\mu'\nu} \Phi_{\gamma}^{\rho'\sigma} \\ V^6(\alpha\beta; \gamma\delta) &= -\Phi_{\alpha}^{*\mu\sigma} \Phi_{\beta}^{*\rho\nu} V_{\bar{q}\bar{q}}(\sigma\nu; \sigma'\nu') \Phi_{\delta}^{\mu\nu'} \Phi_{\gamma}^{\rho\sigma'} \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Esses elementos de matriz podem ser escritos na forma

$$V^j(\alpha\beta; \gamma\delta) = I_0^j I_{\text{spin}}^j(\alpha\beta; \gamma\delta) I_{\text{sabor}}^j(\alpha\beta; \gamma\delta) I_{\text{cor}}^j(\alpha\beta; \gamma\delta) I_{\text{espacial}}^j(\alpha\beta; \gamma\delta) . \quad (\text{D.3})$$

Os fatores I_0^j são constantes provenientes da transformação de Fock-Tani dos operadores:

$$I_0^1 = I_0^2 = I_0^3 = I_0^4 = -\frac{1}{2} \quad (\text{D.4})$$

$$I_0^5 = I_0^6 = -1 . \quad (\text{D.5})$$

Os fatores de spin, I_{spin}^j , são dados pelos elementos de matriz dos operadores de spin (identidade e spin-spin), $\mathbf{O}_s$, entre os estados de spin inicial e final do sistema de dois

mésons ideais,

$$I_{spin}^j(\alpha\beta; \gamma\delta) = (S_\alpha, M_\alpha^s; S_\beta, M_\beta^s | \mathbf{O}_s | S_\gamma, M_\gamma^s; S_\delta, M_\delta^s)_j, \quad (D.6)$$

com

$$\mathbf{O}_{id} = \mathbf{I}_s = \delta_{s_1', s_1} \delta_{s_2', s_2} \quad (D.7)$$

$$\mathbf{O}_{s-s} = \frac{1}{4}(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) = \frac{1}{4}(2\delta_{s_1', s_2} \delta_{s_1, s_2'} - \delta_{s_1', s_1} \delta_{s_2', s_2}). \quad (D.8)$$

Dessa forma, obtemos:

$$I_{spin}^1(\alpha\beta; \gamma\delta) = \chi_{S_\alpha, M_\alpha^s}^{*s_1' s_2'} \chi_{S_\beta, M_\beta^s}^{*s_3 s_4} \mathbf{O}_s \chi_{S_\gamma, M_\gamma^s}^{s_1 s_4} \chi_{S_\delta, M_\delta^s}^{s_3 s_2} \quad (D.9)$$

$$I_{spin}^2(\alpha\beta; \gamma\delta) = \chi_{S_\alpha, M_\alpha^s}^{*s_3 s_4} \chi_{S_\beta, M_\beta^s}^{*s_1' s_2'} \mathbf{O}_s \chi_{S_\gamma, M_\gamma^s}^{s_3 s_2} \chi_{S_\delta, M_\delta^s}^{s_1 s_4} \quad (D.10)$$

$$I_{spin}^3(\alpha\beta; \gamma\delta) = \chi_{S_\alpha, M_\alpha^s}^{*s_1' s_4} \chi_{S_\beta, M_\beta^s}^{*s_3 s_2'} \mathbf{O}_s \chi_{S_\gamma, M_\gamma^s}^{s_1 s_2} \chi_{S_\delta, M_\delta^s}^{s_3 s_4} \quad (D.11)$$

$$I_{spin}^4(\alpha\beta; \gamma\delta) = \chi_{S_\alpha, M_\alpha^s}^{*s_3 s_2'} \chi_{S_\beta, M_\beta^s}^{*s_1' s_4} \mathbf{O}_s \chi_{S_\gamma, M_\gamma^s}^{s_3 s_4} \chi_{S_\delta, M_\delta^s}^{s_1 s_2} \quad (D.12)$$

$$I_{spin}^5(\alpha\beta; \gamma\delta) = \chi_{S_\alpha, M_\alpha^s}^{*s_1' s_4} \chi_{S_\beta, M_\beta^s}^{*s_2' s_3} \mathbf{O}_s \chi_{S_\gamma, M_\gamma^s}^{s_1 s_3} \chi_{S_\delta, M_\delta^s}^{s_2 s_4} \quad (D.13)$$

$$I_{spin}^6(\alpha\beta; \gamma\delta) = \chi_{S_\alpha, M_\alpha^s}^{*s_3 s_1'} \chi_{S_\beta, M_\beta^s}^{*s_4 s_2'} \mathbf{O}_s \chi_{S_\gamma, M_\gamma^s}^{s_3 s_2} \chi_{S_\delta, M_\delta^s}^{s_4 s_1} \quad (D.14)$$

É conveniente considerar os elementos de matriz entre estados de spin total, $\mathbf{S} = \mathbf{S}_\alpha + \mathbf{S}_\beta$, definido. Para descrever os estados através dos números quânticos de spin total, S_T , e projeção do spin total, M_T^s , do sistema de dois mésons, mudamos para a base $|S_T, M_T^s\rangle$:

$$\begin{aligned} I_{spin}^j &= (S_T', M_T'^s | \mathbf{O}_s | S_T, M_T^s)_j \\ &= \zeta_{S_T', M_T'^s}^{*S_\alpha, M_\alpha^s; S_\beta, M_\beta^s} \zeta_{S_T, M_T^s}^{S_\gamma, M_\gamma^s; S_\delta, M_\delta^s} (S_\alpha, M_\alpha^s; S_\beta, M_\beta^s | \mathbf{O}_s | S_\gamma, M_\gamma^s; S_\delta, M_\delta^s)_j, \end{aligned} \quad (D.15)$$

onde

$$\zeta_{S_T', M_T'^s}^{*S_\alpha, M_\alpha^s; S_\beta, M_\beta^s} = (S_T', M_T'^s | S_\alpha, M_\alpha^s; S_\beta, M_\beta^s) \quad (D.16)$$

$$\zeta_{S_T, M_T^s}^{S_\gamma, M_\gamma^s; S_\delta, M_\delta^s} = (S_\gamma, M_\gamma^s; S_\delta, M_\delta^s | S_T, M_T^s) \quad (D.17)$$

são os coeficientes de Clebsch-Gordon da mudança de base. Fixamos os valores $S_\alpha, S_\beta, S_\gamma, S_\delta$ e somamos sobre todos os $M_\alpha^s, M_\beta^s, M_\gamma^s, M_\delta^s$ tais que

$$M_\alpha^s + M_\beta^s = M_T'^s \quad (\text{D.18})$$

$$M_\gamma^s + M_\delta^s = M_T^s. \quad (\text{D.19})$$

Utilizando as funções de onda de spin do méson dadas no Apêndice A, obtemos os valores de I_{spin}^j , correspondentes aos vários canais possíveis. Para um dado canal $S_T = S_T', M_T^s = M_T'^s$, o resultado independe de M_T^s . Esses valores podem ser encontrados na Ref. [26].

Os fatores de sabor, I_{sabor}^j , são dados pelos elementos de matriz do operador identidade de sabor, $\mathbf{I}_f$, entre os estados de sabor inicial e final do sistema de dois mésons ideais,

$$I_{\text{sabor}}^j(\alpha\beta; \gamma\delta) = (F_\alpha, M_\alpha^f; F_\beta, M_\beta^f | \mathbf{I}_f | F_\gamma, M_\gamma^f; F_\delta, M_\delta^f)_j, \quad (\text{D.20})$$

com

$$\mathbf{I}_f = \delta_{f_1', f_1} \delta_{f_2', f_2}. \quad (\text{D.21})$$

Dessa forma, obtemos:

$$I_{\text{sabor}}^1(\alpha\beta; \gamma\delta) = \mathcal{F}_{F_\alpha, M_\alpha^f}^{*f_1' f_2'} \mathcal{F}_{F_\beta, M_\beta^f}^{*f_3 f_4} [\delta_{f_1', f_1} \delta_{f_2', f_2}] \mathcal{F}_{F_\gamma, M_\gamma^f}^{f_1 f_4} \mathcal{F}_{F_\delta, M_\delta^f}^{f_3 f_2} \quad (\text{D.22})$$

$$I_{\text{sabor}}^2(\alpha\beta; \gamma\delta) = \mathcal{F}_{F_\alpha, M_\alpha^f}^{*f_3 f_4} \mathcal{F}_{F_\beta, M_\beta^f}^{*f_1' f_2'} [\delta_{f_1', f_1} \delta_{f_2', f_2}] \mathcal{F}_{F_\gamma, M_\gamma^f}^{f_3 f_2} \mathcal{F}_{F_\delta, M_\delta^f}^{f_1 f_4} \quad (\text{D.23})$$

$$I_{\text{sabor}}^3(\alpha\beta; \gamma\delta) = \mathcal{F}_{F_\alpha, M_\alpha^f}^{*f_1' f_4} \mathcal{F}_{F_\beta, M_\beta^f}^{*f_3 f_2'} [\delta_{f_1', f_1} \delta_{f_2', f_2}] \mathcal{F}_{F_\gamma, M_\gamma^f}^{f_1 f_2} \mathcal{F}_{F_\delta, M_\delta^f}^{f_3 f_4} \quad (\text{D.24})$$

$$I_{\text{sabor}}^4(\alpha\beta; \gamma\delta) = \mathcal{F}_{F_\alpha, M_\alpha^f}^{*f_3 f_2'} \mathcal{F}_{F_\beta, M_\beta^f}^{*f_1' f_4} [\delta_{f_1', f_1} \delta_{f_2', f_2}] \mathcal{F}_{F_\gamma, M_\gamma^f}^{f_3 f_4} \mathcal{F}_{F_\delta, M_\delta^f}^{f_1 f_2} \quad (\text{D.25})$$

$$I_{\text{sabor}}^5(\alpha\beta; \gamma\delta) = \mathcal{F}_{F_\alpha, M_\alpha^f}^{*f_1' f_4} \mathcal{F}_{F_\beta, M_\beta^f}^{*f_2' f_3} [\delta_{f_1', f_1} \delta_{f_2', f_2}] \mathcal{F}_{F_\gamma, M_\gamma^f}^{f_1 f_3} \mathcal{F}_{F_\delta, M_\delta^f}^{f_2 f_4} \quad (\text{D.26})$$

$$I_{\text{sabor}}^6(\alpha\beta; \gamma\delta) = \mathcal{F}_{F_\alpha, M_\alpha^f}^{*f_3 f_1'} \mathcal{F}_{F_\beta, M_\beta^f}^{*f_4 f_2'} [\delta_{f_1', f_1} \delta_{f_2', f_2}] \mathcal{F}_{F_\gamma, M_\gamma^f}^{f_3 f_2} \mathcal{F}_{F_\delta, M_\delta^f}^{f_4 f_1} \quad (\text{D.27})$$

Analogamente ao que foi descrito para o fator de spin, mudamos para a base de sabor total do sistema de dois mésons, $|F_T, M_T^f\rangle$:

$$\begin{aligned} I_{\text{sabor}}^j &= (F_T', M_T'^f | \mathbf{I}_f | F_T, M_T^f)_j \\ &= \zeta_{F_T', M_T'^f}^{*F_\alpha, M_\alpha^f, F_\beta, M_\beta^f} \zeta_{F_T, M_T^f}^{F_\gamma, M_\gamma^f, F_\delta, M_\delta^f} (F_\alpha, M_\alpha^f; F_\beta, M_\beta^f | \mathbf{I}_f | F_\gamma, M_\gamma^f; F_\delta, M_\delta^f)_j, \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

onde

$$\zeta_{F_T', M_T'^f}^{*F_\alpha, M_\alpha^f, F_\beta, M_\beta^f} = (F_T', M_T'^f | F_\alpha, M_\alpha^f; F_\beta, M_\beta^f) \quad (\text{D.29})$$

$$\zeta_{F_T, M_T^f}^{F_\gamma, M_\gamma^f, F_\delta, M_\delta^f} = (F_\gamma, M_\gamma^f; F_\delta, M_\delta^f | F_T, M_T^f) \quad (\text{D.30})$$

são os coeficientes de Clebsch-Gordon da mudança de base. Da mesma forma, fixamos os valores $F_\alpha, F_\beta, F_\gamma, F_\delta$ e somamos sobre todos os $M_\alpha^f, M_\beta^f, M_\gamma^f, M_\delta^f$ tais que

$$M_\alpha^f + M_\beta^f = M_T'^f \quad (\text{D.31})$$

$$M_\gamma^f + M_\delta^f = M_T^f. \quad (\text{D.32})$$

Utilizando as funções de onda de sabor do méson dadas no Apêndice A, obtemos os valores de I_{sabor}^j , correspondentes aos vários canais possíveis. Para um dado canal $F_T = F_T', M_T^f = M_T'^f$, o resultado independe de M_T^f . Para espalhamento no canal $F_T = 2(\pi - \pi)$, os fatores de sabor correspondentes a cada termo do potencial são todos iguais a um. No caso de espalhamento $F_T = 1(J/\psi - \pi)$ os fatores relativos aos termos com conteúdo de sabor adequado também são todos iguais a um.

Os fatores de cor, I_{cor}^j , são dados pelos elementos de matrix do produto de matrizes de Gell-Mann (para $q\bar{q}, qq$ e $\bar{q}\bar{q}$), λ_k , entre os estados de cor inicial e final do sistema de dois mésons ideais,

$$I_{\text{cor}}^j(\alpha\beta; \gamma\delta) = (C_\alpha; C_\beta | \lambda_k | C_\gamma; C_\delta)_j, \quad (\text{D.33})$$

com

$$\lambda_{q\bar{q}} = \left[\left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_1' c_1} \left(-\frac{\lambda^{aT}}{2} \right)^{c_2' c_2} \right] = - \left[\frac{1}{2} \delta_{c_1' c_2'} \delta_{c_1 c_2} + \frac{1}{6} \delta_{c_1' c_1} \delta_{c_2 c_2'} \right] \quad (D.34)$$

$$\lambda_{qq} = \left[\left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_1' c_1} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_2' c_2} \right] = \left[\frac{1}{2} \delta_{c_1' c_2'} \delta_{c_1 c_2} - \frac{1}{6} \delta_{c_1' c_1} \delta_{c_2 c_2'} \right] \quad (D.35)$$

$$\lambda_{\bar{q}\bar{q}} = \left[\left(-\frac{\lambda^{aT}}{2} \right)^{c_1' c_1} \left(-\frac{\lambda^{aT}}{2} \right)^{c_2' c_2} \right] = \left[\frac{1}{2} \delta_{c_1' c_2'} \delta_{c_1 c_2} - \frac{1}{6} \delta_{c_1' c_1} \delta_{c_2 c_2'} \right], \quad (D.36)$$

Dessa forma, obtemos:

$$I_{\text{cor}}^1(\alpha\beta; \gamma\delta) = C_0^{*c_1' c_2'} C_0^{*c_3 c_4} \left[\left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_1' c_1} \left(-\frac{\lambda^{aT}}{2} \right)^{c_2' c_2} \right] C_0^{c_1 c_4} C_0^{c_3 c_2} \quad (D.37)$$

$$I_{\text{cor}}^2(\alpha\beta; \gamma\delta) = C_0^{*c_3 c_4} C_0^{*c_1' c_2'} \left[\left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_1' c_1} \left(-\frac{\lambda^{aT}}{2} \right)^{c_2' c_2} \right] C_0^{c_3 c_2} C_0^{c_1 c_4} \quad (D.38)$$

$$I_{\text{cor}}^3(\alpha\beta; \gamma\delta) = C_0^{*c_1' c_4} C_0^{*c_3 c_2'} \left[\left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_1' c_1} \left(-\frac{\lambda^{aT}}{2} \right)^{c_2' c_2} \right] C_0^{c_1 c_2} C_0^{c_3 c_4} \quad (D.39)$$

$$I_{\text{cor}}^4(\alpha\beta; \gamma\delta) = C_0^{*c_3 c_2'} C_0^{*c_1' c_4} \left[\left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_1' c_1} \left(-\frac{\lambda^{aT}}{2} \right)^{c_2' c_2} \right] C_0^{c_3 c_4} C_0^{c_1 c_2} \quad (D.40)$$

$$I_{\text{cor}}^5(\alpha\beta; \gamma\delta) = C_0^{*c_1' c_4} C_0^{*c_2' c_3} \left[\left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_1' c_1} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_2' c_2} \right] C_0^{c_1 c_3} C_0^{c_2 c_4} \quad (D.41)$$

$$I_{\text{cor}}^6(\alpha\beta; \gamma\delta) = C_0^{*c_3 c_1'} C_0^{*c_4 c_2'} \left[\left(-\frac{\lambda^{aT}}{2} \right)^{c_1' c_1} \left(-\frac{\lambda^{aT}}{2} \right)^{c_2' c_2} \right] C_0^{c_3 c_2} C_0^{c_4 c_1} \quad (D.42)$$

Utilizando as funções de onda de cor dos mésons

$$C_0^{c_1 c_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \delta_{c_1 c_2}. \quad (D.43)$$

obtemos

$$I_{\text{cor}}^1 = I_{\text{cor}}^2 = I_{\text{cor}}^3 = I_{\text{cor}}^4 = -\frac{4}{9} \quad (D.44)$$

$$I_{\text{cor}}^5 = I_{\text{cor}}^6 = \frac{4}{9}. \quad (D.45)$$

Os fatores espaciais, I_{espacial}^j , são dados pelos elementos de matrix da parte espacial da interação ($q\bar{q}$, qq e $\bar{q}\bar{q}$), V , entre os estados inicial e final do sistema de dois mésons ideais,

$$I_{\text{espacial}}^j(\alpha\beta; \gamma\delta) = (\mathbf{P}_\alpha; \mathbf{P}_\beta | V | \mathbf{P}_\gamma; \mathbf{P}_\delta)_j, \quad (D.46)$$

com

$$V = \delta^{(3)}(\mathbf{p}_{1'} + \mathbf{p}_{2'} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)V(\mathbf{p}_{1'} - \mathbf{p}_1). \quad (\text{D.47})$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} I_{\text{espacial}}^1(\alpha\beta; \gamma\delta) &= \int d\mathbf{p}_{1'} d\mathbf{p}_{2'} d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 d\mathbf{p}_4 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_{1'} + \mathbf{p}_{2'} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \\ &\quad \times \Phi_{\mathbf{P}_\alpha}^{*\mathbf{p}_{1'}\mathbf{p}_{2'}} \Phi_{\mathbf{P}_\beta}^{*\mathbf{p}_3\mathbf{p}_4} V(\mathbf{p}_{1'} - \mathbf{p}_1) \Phi_{\mathbf{P}_\delta}^{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_4} \Phi_{\mathbf{P}_\gamma}^{\mathbf{p}_3\mathbf{p}_2} \\ I_{\text{espacial}}^2(\alpha\beta; \gamma\delta) &= \int d\mathbf{p}_{1'} d\mathbf{p}_{2'} d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 d\mathbf{p}_4 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_{1'} + \mathbf{p}_{2'} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \\ &\quad \times \Phi_{\mathbf{P}_\alpha}^{*\mathbf{p}_3\mathbf{p}_4} \Phi_{\mathbf{P}_\beta}^{*\mathbf{p}_{1'}\mathbf{p}_{2'}} V(\mathbf{p}_{1'} - \mathbf{p}_1) \Phi_{\mathbf{P}_\delta}^{\mathbf{p}_3\mathbf{p}_2} \Phi_{\mathbf{P}_\gamma}^{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_4} \\ I_{\text{espacial}}^3(\alpha\beta; \gamma\delta) &= \int d\mathbf{p}_{1'} d\mathbf{p}_{2'} d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 d\mathbf{p}_4 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_{1'} + \mathbf{p}_{2'} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \\ &\quad \times \Phi_{\mathbf{P}_\alpha}^{*\mathbf{p}_{1'}\mathbf{p}_4} \Phi_{\mathbf{P}_\beta}^{*\mathbf{p}_3\mathbf{p}_{2'}} V(\mathbf{p}_{1'} - \mathbf{p}_1) \Phi_{\mathbf{P}_\delta}^{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2} \Phi_{\mathbf{P}_\gamma}^{\mathbf{p}_3\mathbf{p}_4} \\ I_{\text{espacial}}^4(\alpha\beta; \gamma\delta) &= \int d\mathbf{p}_{1'} d\mathbf{p}_{2'} d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 d\mathbf{p}_4 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_{1'} + \mathbf{p}_{2'} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \\ &\quad \times \Phi_{\mathbf{P}_\alpha}^{*\mathbf{p}_3\mathbf{p}_{2'}} \Phi_{\mathbf{P}_\beta}^{*\mathbf{p}_{1'}\mathbf{p}_4} V(\mathbf{p}_{1'} - \mathbf{p}_1) \Phi_{\mathbf{P}_\delta}^{\mathbf{p}_3\mathbf{p}_4} \Phi_{\mathbf{P}_\gamma}^{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2} \\ I_{\text{espacial}}^5(\alpha\beta; \gamma\delta) &= \int d\mathbf{p}_{1'} d\mathbf{p}_{2'} d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 d\mathbf{p}_4 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_{1'} + \mathbf{p}_{2'} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \\ &\quad \times \Phi_{\mathbf{P}_\alpha}^{*\mathbf{p}_{1'}\mathbf{p}_4} \Phi_{\mathbf{P}_\beta}^{*\mathbf{p}_{2'}\mathbf{p}_3} V(\mathbf{p}_{1'} - \mathbf{p}_1) \Phi_{\mathbf{P}_\delta}^{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_3} \Phi_{\mathbf{P}_\gamma}^{\mathbf{p}_2\mathbf{p}_4} \\ I_{\text{espacial}}^6(\alpha\beta; \gamma\delta) &= \int d^3\mathbf{p}_{1'} d\mathbf{p}_{2'} d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 d\mathbf{p}_4 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_{1'} + \mathbf{p}_{2'} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \\ &\quad \times \Phi_{\mathbf{P}_\alpha}^{*\mathbf{p}_3\mathbf{p}_{1'}} \Phi_{\mathbf{P}_\beta}^{*\mathbf{p}_4\mathbf{p}_{2'}} V(\mathbf{p}_{1'} - \mathbf{p}_1) \Phi_{\mathbf{P}_\delta}^{\mathbf{p}_3\mathbf{p}_2} \Phi_{\mathbf{P}_\gamma}^{\mathbf{p}_4\mathbf{p}_1} \end{aligned} \quad (\text{D.48})$$

Utilizamos as funções de onda espaciais definidas de modo a considerar mésons compostos por um quark e um antiquark com massas diferentes,

$$\Phi_{\mathbf{P}_\alpha}^{\mathbf{p}_i\mathbf{p}_j} = \delta^{(3)}(\mathbf{P}_\alpha - \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) \left(\pi b_\alpha^2 \right)^{-\frac{3}{4}} e^{-\frac{\mathbf{p}_i^2}{2b_\alpha^2}}, \quad (\text{D.49})$$

onde $\bar{\mathbf{p}} = \eta_\alpha \mathbf{p}_i - (1 - \eta_\alpha) \mathbf{p}_j$ com $\eta_\alpha = \frac{m_j}{m_i + m_j}$. Se as massas do quark e do antiquark forem iguais, $\eta_\alpha = \frac{1}{2}$.

Dessa forma, obtemos:

$$\begin{aligned}
 I_{\text{espacial}}^1(\alpha\beta; \gamma\delta) &= \delta^{(3)}(\mathbf{P}_\alpha + \mathbf{P}_\beta - \mathbf{P}_\gamma - \mathbf{P}_\delta) \frac{1}{\pi^3} (b_\alpha^2 b_\beta^2 b_\gamma^2 b_\delta^2)^{-\frac{3}{4}} \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{q} V(\mathbf{q}) \\
 &\times e^{-\frac{1}{2b_\alpha^2} [\mathbf{p}_1 + \mathbf{q} - (1-\eta_\alpha)\mathbf{P}_\alpha]^2} e^{-\frac{1}{2b_\beta^2} [\mathbf{p}_1 - \mathbf{P}_\delta + \eta_\beta \mathbf{P}_\beta]^2} \\
 &\times e^{-\frac{1}{2b_\delta^2} [\mathbf{p}_1 - (1-\eta_\delta)\mathbf{P}_\delta]^2} e^{-\frac{1}{2b_\gamma^2} [\mathbf{p}_1 + \mathbf{P}_\beta - \mathbf{P}_\delta - (1-\eta_\gamma)\mathbf{P}_\gamma]^2}
 \end{aligned} \quad (\text{D.50})$$

$$\begin{aligned}
 I_{\text{espacial}}^2(\alpha\beta; \gamma\delta) &= \delta^{(3)}(\mathbf{P}_\alpha + \mathbf{P}_\beta - \mathbf{P}_\gamma - \mathbf{P}_\delta) \frac{1}{\pi^3} (b_\alpha^2 b_\beta^2 b_\gamma^2 b_\delta^2)^{-\frac{3}{4}} \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{q} V(\mathbf{q}) \\
 &\times e^{-\frac{1}{2b_\alpha^2} [\mathbf{p}_1 - \mathbf{P}_\gamma + \eta_\alpha \mathbf{P}_\alpha]^2} e^{-\frac{1}{2b_\beta^2} [\mathbf{p}_1 + \mathbf{q} - (1-\eta_\beta)\mathbf{P}_\beta]^2} \\
 &\times e^{-\frac{1}{2b_\delta^2} [\mathbf{p}_1 + \mathbf{P}_\alpha - \mathbf{P}_\gamma - (1-\eta_\delta)\mathbf{P}_\delta]^2} e^{-\frac{1}{2b_\gamma^2} [\mathbf{p}_1 - (1-\eta_\gamma)\mathbf{P}_\gamma]^2}
 \end{aligned} \quad (\text{D.51})$$

$$\begin{aligned}
 I_{\text{espacial}}^3(\alpha\beta; \gamma\delta) &= \delta^{(3)}(\mathbf{P}_\alpha + \mathbf{P}_\beta - \mathbf{P}_\gamma - \mathbf{P}_\delta) \frac{1}{\pi^3} (b_\alpha^2 b_\beta^2 b_\gamma^2 b_\delta^2)^{-\frac{3}{4}} \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{q} V(\mathbf{q}) \\
 &\times e^{-\frac{1}{2b_\alpha^2} [\mathbf{p}_1 + \mathbf{q} - (1-\eta_\alpha)\mathbf{P}_\alpha]^2} e^{-\frac{1}{2b_\beta^2} [\mathbf{p}_1 + \mathbf{q} + \mathbf{P}_\gamma - \mathbf{P}_\alpha - (1-\eta_\beta)\mathbf{P}_\beta]^2} \\
 &\times e^{-\frac{1}{2b_\delta^2} [\mathbf{p}_1 - (1-\eta_\delta)\mathbf{P}_\delta]^2} e^{-\frac{1}{2b_\gamma^2} [\eta_\gamma(\mathbf{p}_1 + \mathbf{q} + \mathbf{P}_\gamma - \mathbf{P}_\alpha) - (1-\eta_\gamma)(\mathbf{P}_\alpha - \mathbf{p}_1 - \mathbf{q})]^2}
 \end{aligned} \quad (\text{D.52})$$

$$\begin{aligned}
 I_{\text{espacial}}^4(\alpha\beta; \gamma\delta) &= \delta^{(3)}(\mathbf{P}_\alpha + \mathbf{P}_\beta - \mathbf{P}_\gamma - \mathbf{P}_\delta) \frac{1}{\pi^3} (b_\alpha^2 b_\beta^2 b_\gamma^2 b_\delta^2)^{-\frac{3}{4}} \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{q} V(\mathbf{q}) \\
 &\times e^{-\frac{1}{2b_\alpha^2} [\mathbf{p}_1 + \mathbf{q} + \mathbf{P}_\delta - \mathbf{P}_\beta - (1-\eta_\alpha)\mathbf{P}_\alpha]^2} e^{-\frac{1}{2b_\beta^2} [\mathbf{p}_1 + \mathbf{q} - (1-\eta_\beta)\mathbf{P}_\beta]^2} \\
 &\times e^{-\frac{1}{2b_\delta^2} [\eta_\delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{q} + \mathbf{P}_\delta - \mathbf{P}_\beta) - (1-\eta_\delta)(\mathbf{P}_\beta - \mathbf{p}_1 - \mathbf{q})]^2} e^{-\frac{1}{2b_\gamma^2} [\mathbf{p}_1 - (1-\eta_\gamma)\mathbf{P}_\gamma]^2}
 \end{aligned} \quad (\text{D.53})$$

$$\begin{aligned}
 I_{\text{espacial}}^5(\alpha\beta; \gamma\delta) &= \delta^{(3)}(\mathbf{P}_\alpha + \mathbf{P}_\beta - \mathbf{P}_\gamma - \mathbf{P}_\delta) \frac{1}{\pi^3} (b_\alpha^2 b_\beta^2 b_\gamma^2 b_\delta^2)^{-\frac{3}{4}} \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{q} V(\mathbf{q}) \\
 &\times e^{-\frac{1}{2b_\alpha^2} [\mathbf{p}_1 + \mathbf{q} - (1-\eta_\alpha)\mathbf{P}_\alpha]^2} e^{-\frac{1}{2b_\beta^2} [\mathbf{p}_1 - \mathbf{P}_\delta + \eta_\beta \mathbf{P}_\beta]^2} \\
 &\times e^{-\frac{1}{2b_\delta^2} [\mathbf{p}_1 - (1-\eta_\delta)\mathbf{P}_\delta]^2} e^{-\frac{1}{2b_\gamma^2} [\mathbf{p}_1 + \mathbf{q} - \mathbf{P}_\alpha + \eta_\gamma \mathbf{P}_\gamma]^2}
 \end{aligned} \quad (\text{D.54})$$

$$\begin{aligned}
 I_{\text{espacial}}^6(\alpha\beta; \gamma\delta) &= \delta^{(3)}(\mathbf{P}_\alpha + \mathbf{P}_\beta - \mathbf{P}_\gamma - \mathbf{P}_\delta) \frac{1}{\pi^3} (b_\alpha^2 b_\beta^2 b_\gamma^2 b_\delta^2)^{-\frac{3}{4}} \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{q} V(\mathbf{q}) \\
 &\times e^{-\frac{1}{2b_\alpha^2} [\mathbf{p}_1 + \mathbf{q} - (1-\eta_\alpha)\mathbf{P}_\alpha]^2} e^{-\frac{1}{2b_\beta^2} [\mathbf{p}_1 - \mathbf{P}_\gamma + (1-\eta_\beta)\mathbf{P}_\beta]^2} \\
 &\times e^{-\frac{1}{2b_\delta^2} [\mathbf{p}_1 + \mathbf{q} - \mathbf{P}_\alpha + (1-\eta_\delta)\mathbf{P}_\delta]^2} e^{-\frac{1}{2b_\gamma^2} [\mathbf{p}_1 - \eta_\gamma \mathbf{P}_\gamma]^2}
 \end{aligned} \quad (\text{D.55})$$

No cálculo destas expressões aparecem as seguintes integrais:

$$\begin{aligned}
 I &= \int d\mathbf{u} \, u^r e^{-bu^2 + i\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}} \\
 &= \frac{4\pi}{v} \int_0^\infty \frac{du}{u} e^{-bu^2} \sinh(uv) \quad , \text{para } r = -2, \tag{D.56}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{4\pi}{v} \int_0^\infty du e^{-bu^2} \sinh(uv) \quad , \text{para } r = -1, \tag{D.57}$$

$$= \left(\frac{\pi}{b}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{v^2}{4b^2}} \quad , \text{para } r = 0, \tag{D.58}$$

$$= \frac{4\pi}{v} \int_0^\infty du \, u^2 e^{-bu^2} \sinh(uv) \quad , \text{para } r = 1, \tag{D.59}$$

$$= \left(\frac{\pi}{b}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2b} - \frac{v^2}{4b^2}\right) e^{-\frac{v^2}{4b^2}} \quad , \text{para } r = 2. \tag{D.60}$$

Apêndice E

Variáveis de Mandelstam e Cinemática Relativística.

Consideremos o processo de espalhamento

$$A + B \rightarrow C + D . \quad (\text{E.1})$$

As variáveis de Mandelstam, invariantes cinemáticos de Lorentz, são definidas por:

$$\begin{aligned} s &= (P_A + P_B)^2 = (P_C + P_D)^2 \\ &= (E_A + E_B)^2 - (\mathbf{P}_A + \mathbf{P}_B)^2 \\ &= (E_C + E_D)^2 - (\mathbf{P}_C + \mathbf{P}_D)^2 \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

$$\begin{aligned} t &= (P_A - P_C)^2 = (P_B - P_D)^2 \\ &= (E_A - E_C)^2 - (\mathbf{P}_A - \mathbf{P}_C)^2 \\ &= (E_B - E_D)^2 - (\mathbf{P}_B - \mathbf{P}_D)^2 \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

$$\begin{aligned} u &= (P_A - P_D)^2 = (P_B - P_C)^2 \\ &= (E_A - E_D)^2 - (\mathbf{P}_A - \mathbf{P}_D)^2 \\ &= (E_B - E_C)^2 - (\mathbf{P}_B - \mathbf{P}_C)^2 , \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

onde P_A , P_B , P_C e P_D são, respectivamente, os quadri-momentos das partículas A, B, C e D.

As energias das partículas A, B, C e D são dadas, respectivamente, por:

$$E_A = \sqrt{M_A^2 + \mathbf{P}_A^2} \quad (\text{E.5})$$

$$E_B = \sqrt{M_B^2 + \mathbf{P}_B^2} \quad (\text{E.6})$$

$$E_C = \sqrt{M_C^2 + \mathbf{P}_C^2} \quad (\text{E.7})$$

$$E_D = \sqrt{M_D^2 + \mathbf{P}_D^2} . \quad (\text{E.8})$$

onde M_A , M_B , M_C e M_D são as massas das partículas.

Essas variáveis satisfazem a relação

$$s + t + u = M_A^2 + M_B^2 + M_C^2 + M_D^2 . \quad (\text{E.9})$$

No centro de massa (c.m.) das partículas A e B, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_A &= -\mathbf{P}_B = \mathbf{P} \\ \mathbf{P}_C &= -\mathbf{P}_D = \mathbf{P}' . \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

Dessa forma, no c.m. as variáveis de Mandelstam são dadas por:

$$s = (E_A + E_B)^2 = (E_C + E_D)^2 \quad (\text{E.11})$$

$$\begin{aligned} t &= (E_A - E_C)^2 - (\mathbf{P} - \mathbf{P}')^2 \\ &= (E_B - E_D)^2 - (\mathbf{P} - \mathbf{P}')^2 \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

$$\begin{aligned} u &= (E_A - E_D)^2 - (\mathbf{P} + \mathbf{P}')^2 \\ &= (E_B - E_C)^2 - (\mathbf{P} + \mathbf{P}')^2 . \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

No c.m. são válidas as seguintes relações:

$$\mathbf{P}^2(s) = \frac{1}{4s} \left[\left(s - (M_A^2 + M_B^2) \right)^2 - 4M_A^2 M_B^2 \right] \quad (\text{E.14})$$

$$\mathbf{P}'^2(s) = \frac{1}{4s} \left[\left(s - (M_C^2 + M_D^2) \right)^2 - 4M_C^2 M_D^2 \right] \quad (\text{E.15})$$

$$\begin{aligned} 2\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}' &= 2|\mathbf{P}||\mathbf{P}'|\cos\theta(\mathbf{P}, \mathbf{P}') = 2|\mathbf{P}||\mathbf{P}'|z \\ &= t - (M_A^2 + M_C^2) + \frac{1}{2s} (s + M_A^2 - M_B^2) (s + M_C^2 - M_D^2) \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

$$E_A(s)E_B(s) = \frac{1}{4s} \left[s^2 - (M_A^2 - M_B^2)^2 \right] \quad (\text{E.17})$$

$$E_C(s)E_D(s) = \frac{1}{4s} \left[s^2 - (M_C^2 - M_D^2)^2 \right] . \quad (\text{E.18})$$

O fator $\mathcal{N}$ da Eq. (4.19) no c.m. é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \prod_{n=1}^4 (2(2\pi)^3 E_n)^{\frac{1}{2}} = (2\pi)^3 4\sqrt{E_A E_B E_C E_D} \\ &= \frac{(2\pi)^3}{s} \sqrt{\left[s^2 - (M_A^2 - M_B^2)^2 \right] \left[s^2 - (M_C^2 - M_D^2)^2 \right]} . \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

Para espalhamento elástico no c.m., com os mésons todos idênticos de massa M , as variáveis de Mandelstam ficam:

$$s = 4M^2 + 4\mathbf{P}^2 \quad (\text{E.20})$$

$$t = 2\mathbf{P}^2(z - 1) \quad (\text{E.21})$$

$$u = -2\mathbf{P}^2(z + 1) , \quad (\text{E.22})$$

com

$$s + t + u = 4M^2 . \quad (\text{E.23})$$

As relações Eq. (E.15) e Eq. (E.16) ficam:

$$\mathbf{P}^2(s) = \frac{1}{4} (s - 4M^2) \quad (\text{E.24})$$

$$2\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}' = t - 2M^2 + \frac{s}{2} . \quad (\text{E.25})$$

O fator $\mathcal{N}$ fica:

$$\mathcal{N} = (2\pi)^3 s . \quad (\text{E.26})$$

Apêndice F

Matrizes

Matrizes de Pauli

As matrizes de Pauli, σ^i , são as matrizes Hermitianas 2×2 de traço nulo, dadas por:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad (\text{F.1})$$

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad (\text{F.2})$$

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad (\text{F.3})$$

e satisfazem as relações

$$[\sigma^i, \sigma^j] = 2i\epsilon^{ijk}\sigma^k ,$$

$$\{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta^{ij} . \quad (\text{F.4})$$

Matrizes de Dirac

As matrizes de Dirac, α e β , são dadas por

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{F.5})$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{F.6})$$

onde 1 é a matriz identidade 2×2 .

As matrizes γ^μ são dadas em termos das matrizes de Dirac,

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^i = \beta \alpha^i, \quad \text{com } i = 1, 2, 3, \quad (\text{F.7})$$

e satisfazem as relações

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (\text{F.8})$$

onde

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{F.9})$$

Matrizes de Gell-Mann

As matrizes de Gell-Mann, λ^a , são as matrizes hermitianas de traço nulo 3×3 ,

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ \lambda^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \\ \lambda^7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

e satisfazem a relação de comutação

$$\left[\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2} \right] = i f^{abc} \frac{\lambda^c}{2}, \quad (\text{F.11})$$

onde f^{abc} é totalmente antissimétrico com membros não nulos dados por:

$$\begin{aligned} f^{123} &= 1, & f^{147} &= \frac{1}{2}, & f^{156} &= -\frac{1}{2}, \\ \\ f^{246} &= \frac{1}{2}, & f^{257} &= \frac{1}{2}, & f^{345} &= \frac{1}{2}, \\ \\ f^{367} &= -\frac{1}{2}, & f^{458} &= \frac{\sqrt{3}}{2}, & f^{678} &= \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

Referências Bibliográficas

- [1] Uma boa fonte de referências a respeito da QCD pode ser encontrada nos anais da conferência *Twenty Years of QCD*, editados por P. Zerwas, H. Kastrup (2 volumes), World Scientific, Cingapura (1993).
- [2] D.J. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973); H.D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973).
- [3] A. Chodos, R.L. Jaffe, K. Johnson e C.B. Thorn, Phys. Rev. D **10**, 2599 (1974).
- [4] R. Friedberg e T.D. Lee, Phys. Rev. D **18**, 2623 (1978).
- [5] R. Goldflam e L. Wilets, Phys. Rev. C **25**, 1951 (1982).
- [6] G.E. Brown e M. Rho, Phys. Lett. **82B**, 177 (1979).
- [7] S. Theberge, A.W. Thomas e G.A. Miller, Phys. Rev. D **22**, 2838 (1980).
- [8] T. DeGrand, R.L. Jaffe, K. Johnson e J. Kiskis, Phys. Rev. D **12**, 2060 (1975).
- [9] N. Isgur, Acta Phys. Aust. Suppl. **XXVII**, 177 (1985).
- [10] J. Carlson, J. Kogut e V.R. Pandharipande, Phys. Rev. D **27**, 233 (1983).
- [11] D.A. Liberman, Phys. Rev. D **16**, 1542 (1977).
- [12] C.E. DeTar, Phys. Rev. D **17**, 302 (1977).
- [13] J.A. Wheeler, Phys. Rev. **52**, 1083 (1937).
- [14] J.E.F.T. Ribeiro, Z. Phys. C **5**, 27 (1980).

- [15] M. Oka e K. Yazaki, Phys. Let. B **90**, 41 (1980).
- [16] C.S. Warke e R. Shanker, Phys. Rev. C **21**, 2646 (1980).
- [17] K. Shimizu, Rep. Prog. Phys. **52**, 1 (1989).
- [18] K. Maltman e N. Isgur, Phys. Rev. D **29**, 952 (1984).
- [19] J. Weinstein, Phys. Rev. D **47**, 911 (1993).
- [20] R.L. Jaffe e F.E. Low, Phys. Rev. D **19**, 2105 (1979).
- [21] G.P. Lepage e S.J. Brodsky, Phys. Rev. D **22**, 2157 (1980).
- [22] J. Weinstein e N. Isgur, Phys. Rev. Lett. **48**, 659 (1982).
- [23] J. Weinstein e N. Isgur, Phys. Rev. D **41**, 2236 (1990).
- [24] E.S. Swanson, Ann. Phys. (NY), **220**, 73 (1992).
- [25] D. Blaschke e G. Ropke, Phys. Lett. B **299**, 332 (1993).
- [26] T. Barnes e E.S. Swanson, Phys. Rev. D **46**, 131 (1992).
- [27] K. Dooley, E.S. Swanson e T. Barnes, Phys. Let. B **275**, 478 (1992).
- [28] T. Barnes, E.S. Swanson e J. Weinstein, Phys. Rev D **46**, 4868 (1992).
- [29] T. Barnes, S. Capstick, M.D. Kovarik e E.S. Swanson, Phys. Rev. C **48**, 111 (1993).
- [30] T. Barnes e E.S. Swanson, Phys. Rev. C **49**, 1166 (1994).
- [31] K. Martins, D. Blaschke e E. Quack, Phys. Rev. C **51**, 2723 (1995).
- [32] M.D. Girardeau, Phys. Rev. Lett. **27**, 1416 (1971).
- [33] V.S. Vorob'ev e A.L. Khomkin, Teor. i Mat. Fiz. **8**, 109 (1971) (in Russian). English translation: Consultants Bureau, Plenum Publ. Co., New York, 1972.
- [34] M.D. Girardeau, J. Math. Phys. **16**, 1901 (1975).

- [35] J.D. Gilbert, J. Math. Phys. **18**, 791 (1977).
- [36] M.D. Girardeau, J. Math. Phys. **19**, 2605 (1978).
- [37] M.D. Girardeau e J.D. Gilbert, Physica **97 A**, 42(1979).
- [38] M.D. Girardeau, Phys. Rev. A **26**, 217 (1982).
- [39] P.C.Ojha, M.D. Girardeau, J.D. Gilbert e J.C. Straton Phys. Rev. A **33**, 112(1986).
- [40] J.C. Straton, Phys. Rev. A **35**, 3725 (1987).
- [41] J.C. Straton e M.D. Girardeau, Phys. Rev. A **40**, 2991 (1989).
- [42] C. Lo e M.D. Girardeau, Phys. Rev. A **41**, 158 (1990).
- [43] J.C. Straton, Phys. Rev. A **43**, 6018 (1991).
- [44] S. Tani, Phys. Rev. **117**, 252 (1960).
- [45] F.J. Dyson, Phys. Rev. **102**, 1217 (1956).
- [46] D. Bohm e D. Pines, Phys. Rev. **92**, 609 (1953).
- [47] S. Weinberg, Phys. Rev. **130**, 776 (1963); **131**, 440 (1963); **133**, B232 (1964); S. Weinberg e M. Scadron, Phys. Rev. **133**, B1589 (1964).
- [48] T. Holstein e H. Primakoff, Phys. Rev. **58**, 1098 (1940).
- [49] S.T. Belyaev e V.G. Zelevinskii, Nucl. Phys. **39**, 582 (1962).
- [50] T. Marumori, M. Yamamura e A. Tokunaga, Prog. Theor. Phys. **31**, 1009 (1964).
- [51] A. Klein e R. Marshalek, Rev. Mod. Phys. **63**, 375 (1991).
- [52] P. Ring e P. Schuck, *The nuclear many-body problem* (Springer-Verlag, Nova Iorque, 1980).
- [53] S. Pittel, J. Engel, J. Dukelsky e P. Ring, Phys. Lett. B **247**, 185 (1990).
- [54] F. Catara e M. Sambataro, Nucl. Phys. A **535**, 605 (1991).

- [55] D. Hadjimichief, G. Krein, S. Szpigel, e J. S. da Veiga, *Second quantization approach to composite hadron interactions in quark models*, a ser publicado em Phys. Lett. B.
- [56] D. Hadjimichief, G. Krein, S. Szpigel, J. S. da Veiga, *Fock-Tani representation for composite hadron interactions in quark models I. Mesons*, submetido para publicação.
- [57] D. Hadjimichief, G. Krein, S. Szpigel, J. S. da Veiga, *Fock-Tani representation for composite hadron interactions in quark models II. Baryons*, submetido para publicação.
- [58] M. D. Girardeau e G. Krein, em preparação.
- [59] G. Ropke, D. Blaschke, H. Schulz, Phys. Rev. D **34**, 3499 (1986).
- [60] M.D. Girardeau e M.L. Sage, Physica **32**, 1521(1966).
- [61] L. I. Schiff, Quantum Mechanics, McGraw-Hill, New York (1968).
- [62] R. Vogt, M. Prakash, P. Koch e T.H. Hansson, Phys. Lett. B **207**, 263 (1988).
- [63] J.-P. Blaizot e J.-Y. Ollitraut, Phys. Rev. D **39**, 232 (1989).
- [64] C. Gerschel e J. Hufner, Z. Phys. C **56**, 171 (1992).
- [65] M.C. Abreu et. al. (NA38 colab.), Z. Phys. C **38**, 117 (1988).
- [66] T. Matsui e H. Satz, Phys. Lett. B **178**, 416 (1986).
- [67] J. Hufner, Y. Kurihara e H.J. Pirner, Phys. Lett. B **215**, 218 (1988).
- [68] F. Karsch e H. Satz, Z. Phys. C **51**, 209 (1991).
- [69] D. Kharzeev e H. Satz, Phys. Lett. B **334**, 155 (1994).
- [70] S. Gavin, H. Satz, R.L. Thews e R. Vogt, Z. Phys. C **61**, 351 (1994).
- [71] L.P. Kadanoff e G. Baym, Quantum Statistical Mechanics, W.A. Benjamin, New York, 1962.

- [72] R. Kubo, Phys. Soc. Japan **12**, 570(1957); P. Martin e J. Schwinger, Phys. Rev. **115**, 1342(1959).
- [73] A.L. Fetter e J.D. Walecka, *Quantum theory of many-particle systems* (McGraw-Hill Book Company, New York, 1971); P. Ring and P. Schuck, *The nuclear many-body problem* (Springer-Verlag, New York, 1980).
- [74] S. Szpigel, D. Hadjimichef, G. Krein, J. S. da Veiga, submetido para publicação.
- [75] M. Kataja e P.V. Ruuskanen, Phys. Lett. B **243**, 181 (1990).
- [76] R. Rapp e J. Wambach, Phys. Lett. B **315**, 220 (1993).
- [77] M. Oka e R.D. Amado, Phys. Rev. C **35**, 1586 (1987).
- [78] T. Zhang e R. Koniuk, Phys. Lett. B **244**, 493 (1990).
- [79] T. Zhang e R. Koniuk, Phys. Rev. D **43**, 1688 (1991).
- [80] T. Zhang e R. Koniuk, Phys. Lett. B **261**, 311 (1991).
- [81] T.D. Lee, *Particle Physics and Introduction to Field Theory*(Harwood Academic Publishers, Amsterdam, 1981).
- [82] J.D. Bjorken e S.D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics* (McGraw-Hill Book Company, Nova Iorque, 1964).
- [83] V.B. Berestetskii, E.M. Lifshitz e L.P. Pitaevskii, *Relativistic Quantum Theory* (Pergamon Press, Nova Iorque, 1971).
- [84] A. Le Yaouanc, L. Olivier, O. Pène e J.-C. Raynal, *Hadron Transitions in the Quark Model* (Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam (1988).
- [85] A.De Rújula, H. Georgi, S.L. Glashow, Phys. Rev. D **12**, 147 (1975).
- [86] Particle Data Group, J.J. Hernández et. al., Phys. Lett. B **239**, 1(1990).
- [87] S. Godfrey e N. Isgur, Phys. Rev. D **32**, 189 (1985).