UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

APROXIMAÇÃO CINÉTICA PARA O
PROBLEMA DE CONDIÇÃO INICIAL NA
TEORIA QUÂNTICA DE CAMPO

Lin Chi Yong

Orientador: Prof. Dr. Antônio Fernando Ribeiro de Toledo Piza

SBI-IFUSP

305M810T1804

Tese de Doutorado submetida ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo.

SÃO PAULO

1991

Dt. 16/08/91

Antônio Fernando Ribeiro de Toledo Piza

Antônio

Antônio

Antônio

530.143

Y55a

D
e. l

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Lin Chi Yong

Aproximação cinética para o problema de condição
inicial na teoria quântica de campo. São Paulo,
1991.

Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo.
Instituto de Física. Departamento de Física Matemá-
tica.

Área de Concentração: Física Nuclear

Orientador: Prof. Dr. Antonio Fernando Ribeiro
de Toledo Piza

Unitermos: 1. Teoria ϕ^4 ; 2. Renormalização do
vácuo; 3. Representação de Heisenberg; 4. Técnica
de projeção; 5. Campo médio; 6. Transformação de
Bogoliubov.

USP/IF/SBI - 26/91

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

APROXIMAÇÃO CINÉTICA PARA O
PROBLEMA DE CONDIÇÃO INICIAL NA
TEORIA QUÂNTICA DE CAMPO

Lia Chi Yong

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Fernandes Ribeiro de Toledo Pinheiro

SBI/FUSP

3055651011824

Departamento de Teoria e Fundamentos da Física
Instituto de Física
Universidade de São Paulo

SÃO PAULO

1990

Aos meus pais.

ANEXOS

ANEXO

AGRADECIMENTOS

- Ao Professor Piza pela orientação e paciência.
- Ao Professor Oscar Éboli pela colaboração direta neste trabalho.
- À Professora M. C. Nemes pelas inúmeras conversas e incentivo constante.
- Aos colegas do Departamento de Física Matemática.
- Aos meus amigos Mônica, Clodoaldo, Duda, Maurício, Edu, Aninha e Tadeu, pela amizade e ótima convivência.
- À FAPESP.

RESUMO

Uma técnica de projeção é usada para tratar o problema de condição inicial na teoria quântica de campos. Nesse formalismo, equações de movimento do tipo cinético são deduzidas para um conjunto restrito de variáveis dinâmicas. Estas equações podem ser submetidas a uma expansão de campo médio da qual algumas ordens são tratáveis numericamente. A ordem mais baixa corresponde à aproximação de campo médio e as ordens seguintes levam em conta as correlações dinâmicas. Este procedimento é ilustrado no contexto da teoria ϕ^4 em $1 + 1$ dimensões, incluindo a solução numérica para o caso espacialmente uniforme.

ABSTRACT

A time-dependent projection technique is used to treat the initial value problem in quantum field theory. On the basis of the general dynamics of the field, we derive equations of kinetic type for a restricted set of dynamical variables. A mean-field expansion can be written for these equations which is numerically tractable in the few lower orders. The lowest order corresponds to the mean-field approximation and higher orders add dynamic correlation effects. This procedure is applied to ϕ^4 theory in $1 + 1$ dimensions, including numerical solution for the case of a spatially uniform system.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1.....	1
INTRODUÇÃO	
CAPÍTULO 2.....	4
EQUAÇÕES CINÉTICAS PARA AS VARIÁVEIS SIMPLES NA TEORIA QUÂNTICA DE CAMPO	
2.1—Algumas Variáveis Simples do Campo	4
2.2—As Equações Dinâmicas	10
2.3—O Operador de Projeção	14
CAPÍTULO 3.....	20
RENORMALIZAÇÃO	
3.1—Aproximação de Campo Médio para um Sistema Espacialmente Uniforme.....	20
3.2—Potencial Efetivo	25
CAPÍTULO 4.....	29
EQUAÇÕES DE MOVIMENTO COM TERMOS DE COLISÃO PARA A TEORIA ϕ^4 EM 1 + 1 DIMENSÕES	
4.1—Sistema Inhomôgeno	29
4.2—Sistema Homôgeno.....	36
CAPÍTULO 5.....	41
RESULTADOS NUMÉRICOS	
CAPÍTULO 6.....	69
CONCLUSÕES	

APÊNDICES.....	71
A Tratamento Cinético do Oscilador Anarmônico	71
B A Técnica da Construção dos Projetores $\mathcal{P}(t)$ e $\mathcal{P}^\dagger(t)$	77
C Expansão da Hamiltoniana.....	82
D Cálculo da Densidade $\mathcal{Q}(t')[H, F_0(t')]$	88
E Aproximação para a Evolução Temporal dos Operadores de Heisenberg	92
F Aproximação para $F'(t)$ na Representação de Heisenberg	96
G Programa Numérico	99
H Solução Exata em $0 + 1$ Dimensões	102
 REFERÊNCIAS.....	 104

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O problema de condição inicial é muito familiar em física clássica. Na mecânica quântica não relativística, condições iniciais sobre as funções de onda são dados essenciais para uma solução completa do problema. Nos estudos da teoria quântica de campo, no entanto, o problema de condição inicial não é discutido nos textos padrões. Uma das razões disso é que a maioria dos problemas em que a teoria quântica de campo tem sido aplicada não requer conhecimento detalhado sobre a evolução das funções de onda. Os interesses se concentram em calcular elementos da matriz de espalhamento para obter seções de choque, razões de decaimento, etc., sem preocupação em relação à evolução temporal dos processos subjacentes.

Nos últimos anos, no entanto, a descrição de situações fora do equilíbrio no contexto da teoria quântica de campo com condição inicial ganhou uma importância considerável em duas subáreas relativamente independentes. De um lado temos o problema da descrição da matéria condensada hadrônica, onde as propriedades só são acessíveis experimentalmente através de colisões nucleares que envolvem situações drasticamente fora do equilíbrio^[1,2,3]. Por outro lado, o estudo do modelo do universo inflacionário exige o controle da evolução temporal de um campo escalar homogêneo^[4,5]. Esses problemas exigem esquema de aproximação que preserve o carácter não linear da teoria de campo, ou seja, técnicas não perturbativas são necessárias para a descrição das situações. A aproximação usada frequentemente para tratar esses problemas tem sido o método varacional dependente de tempo (time dependent Hartree- Fock, TDHF). Ela usa a funcional Gaussiana como ansatz, resultando as equações de movimento de campo médio autoconsistente^[6,7].

O objetivo do presente trabalho é mostrar uma forma alternativa para tratar o problema de condição inicial com a possibilidade de adicionar as correlações dinâmicas às equações usuais de campo médio. A técnica foi desenvolvida anteriormente no contexto da

teoria não relativística de muitos férmions^[8,9]. A idéia básica desse tratamento consiste em focalizar um conjunto restrito de variáveis do campo. Equações de movimento do tipo cinético que descrevam a dinâmica efetiva dessas variáveis são obtidas a partir da formulação geral da teoria de campo. Essas equações são escritas em termos de uma expansão de campo médio, onde várias ordens são tratáveis analítica e numericamente. Uma das características dessa expansão é a conservação da energia, verificada ordem por ordem. O termo de mais baixa ordem corresponde às equações de movimento de campo médio. A ordem seguinte que também é tratável numericamente resulta num conjunto de equações autoconsistentes, onde a dinâmica das correlações se apresenta sob forma da dinâmica das probabilidades de ocupação de um corpo.

Para evitar complicações técnicas desnecessárias, consideramos o caso simples de um campo escalar em $1 + 1$ dimensões, embora o procedimento desenvolvido é bastante geral. Implementamos os cálculos para a teoria ϕ^4 . Em geral não temos idéia sobre o domínio de validade das aproximações, e isso leva-nos a estudar soluções desse tratamento também em $0 + 1$ dimensões, onde solução numérica exata pode ser obtida facilmente. A comparação com a solução exata permite julgar a validade das aproximações.

No capítulo 2, discutiremos a escolha das variáveis de interesse. As equações de movimento que descrevem a dinâmica efetiva dessas variáveis serão formuladas. Serão discutidas também as aproximações necessárias de maneira que essas equações tornem-se trabalháveis.

No capítulo 3, calcularemos as equações de movimento na aproximação de campo médio para o caso particular em que o sistema é espacialmente uniforme. Nesse contexto será discutido a renormalização da teoria ϕ^4 . Onde estudaremos também situações estáticas, obtendo com isso o potencial efetivo do modelo.

No capítulo 4, mostraremos as equações de movimento obtidas a partir das expressões gerais e aproximação considerada no capítulo 2.

No capítulo 5, mostraremos os resultados da integração das equações de movimento do capítulo 4 para o caso em que o sistema é espacialmente homogêneo. Veremos a importância dos termos de correlação para uma melhor descrição das variáveis do campo.

O apêndice A é um resumo de todo formalismo no contexto em $0 + 1$ dimensões. Esse caso simples permite ilustrar de forma objetiva a aproximação adotada. Algumas técnicas de cálculo e fórmulas extensas que não são necessárias para a compreensão do texto estão dadas nos demais apêndices.

CAPÍTULO 2

EQUAÇÕES CINÉTICAS PARA AS VARIÁVEIS SIMPLES NA TEORIA QUÂNTICA DE CAMPO

2.1—ALGUMAS VARIÁVEIS SIMPLES DO CAMPO

A idéia básica do nosso tratamento consiste em focalizar um conjunto restrito de observáveis simples do campo e obter uma dinâmica efetiva que descreve seu comportamento. A dinâmica efetiva dessas variáveis é formulada em termos de equações de movimento do tipo cinético. Essas equações envolvem a dinâmica do campo como um todo e são formalmente fechadas em termos de quantidades conhecidas, e evidentemente exigirão aproximações para se tornarem trabalháveis.

Para implementar essa idéia, primeiro expandimos o operador de campo de Heisenberg $\phi(t, x)$ e seu momento canonicamente conjugado $\Pi(t, x)$ em ondas planas

$$\phi(t, x) = \sum_k \left[f_k(x) a_k(t) + f_k^*(x) a_k^\dagger(t) \right] , \quad (2.1)$$

$$\Pi(t, x) = i \sum_k k_0 \left[f_k^*(x) a_k^\dagger(t) - f_k(x) a_k(t) \right] , \quad (2.2)$$

onde $a_k(t)$, $a_k^\dagger(t)$ são operadores bosônicos de criação e aniquilação que satisfazem relações de comutação a tempos iguais

$$[a_k(t), a_{k'}^\dagger(t)] = \delta_{kk'} , \quad (2.3a)$$

$$[a_k(t), a_{k'}(t)] = 0 , \quad (2.3b)$$

$$[a_k^\dagger(t), a_{k'}^\dagger(t)] = 0 ; \quad (2.3b)$$

$f_k(x)$ são ondas planas

$$f_k(x) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2Lk_0}} , \quad (2.4)$$

L é o comprimento da caixa de quantização com condições periódicas de contorno e $k_0^2 = k^2 + \mu^2$, sendo μ um parâmetro de expansão que será fixado mais tarde. As definições (2.3), (2.4) correspondem de fato à quantização canônica usual do campo

$$[\phi(t, x), \Pi(t', x')]_{t=t'} = i\delta(x - x'). \quad (2.5)$$

A segunda etapa consiste em caracterizar as variáveis dinâmicas de interesse, sobre as quais o tratamento estará focalizado. A primeira delas é o valor esperado do campo

$$\langle \phi(t, x) \rangle = \text{Tr } \phi(t, x) F, \quad \text{Tr } F = 1, \quad (2.6)$$

onde F é a matriz densidade do sistema na representação de Heisenberg. Em termos da expansão (2.1) temos

$$\langle \phi(t, x) \rangle = \sum_k [f_k(x) A_k(t) + f_k^*(x) A_k^*(t)] \quad (2.7)$$

com

$$A_k(t) = \text{Tr } a_k(t) F. \quad (2.8)$$

$\langle \phi(t, x) \rangle$ é um campo clássico conhecido como condensado bosônico. No nosso caso, ele descreve o valor médio do campo escalar ϕ . $A_k(t)$ é interpretado como a amplitude do condensado coerente^[10] no modo k .

A segunda variável de interesse é a densidade de uma partícula bosônica. Na base de ondas planas ela é dada em termos dos valores esperados dos operadores $a_k^\dagger a_{k'}$

$$\Gamma_{kk'}(t) = \text{Tr } a_{k'}^\dagger(t) a_k(t) F = \Gamma_{k'k}^*(t) \quad (2.9)$$

A hermiticidade da matriz $\Gamma(t)$ implica que ela pode ser diagonalizada unitariamente com autovalores reais. Os autoestados são conhecidos como orbitais naturais e os autovalores como as respectivas probabilidades de ocupação. Na aproximação de campo médio, a dinâmica das probabilidades de ocupação é congelada, isto é, os autovalores de Γ são independentes do tempo. Como consequência, a evolução dos estados de cada subsistema

de uma partícula é feita com uma hamiltoniana média hermitiana de um corpo (bóson). Efeitos dinâmicos ligados a correlações entre as partículas não são levados em consideração nessa aproximação^[8].

No entanto, pelo menos uma parte das correlações de pares é tratável na aproximação de campo médio, através da técnica conhecida na teoria de muitos corpos como Hartree-Fock-Bogoliubov^[11]. Essa extensão da aproximação de Hartree-Fock envolve, além de (2.9), a consideração como variáveis de interesse da densidade de emparelhamento definida por

$$\Xi_{kk'}(t) = \text{Tr } a_{k'}(t)a_k(t)F . \quad (2.10)$$

A técnica de Hartree-Fock-Bogoliubov consiste em diagonalizar a matriz densidade de um corpo estendida construída a partir das matrizes Γ e Ξ

$$S = \begin{pmatrix} \Gamma & \Xi \\ \Xi^* & 1 + \Gamma^* \end{pmatrix} = S^\dagger , \quad (2.11)$$

onde Γ e Ξ são definidas pelas equações (2.9) e (2.10).

Em vez de trabalhar com densidades $\Gamma_{kk'}$ e $\Xi_{kk'}$ construídas a partir de operadores a_k , é mais conveniente definir um operador $b_k(t)$ deslocado de $a_k(t)$ com a ajuda de (2.8),

$$b_k(t) = a_k(t) - A_k(t) , \quad (2.12)$$

desta maneira, explicitamos o valor médio do operador de campo. Reescrevendo (2.1) em termos dos operadores deslocados $b_k(t)$, temos

$$\phi(t, x) = \langle \phi(t, x) \rangle + \sum_k \left[f_k(x) b_k(t) + f_k^*(x) b_k^\dagger(t) \right] . \quad (2.13)$$

As densidades correspondentes às equações (2.9) e (2.10) podem agora ser construídas a partir dos operadores deslocados como

$$A_{kk'}(t) = \text{Tr } b_{k'}^\dagger(t)b_k(t)F , \quad (2.14)$$

$$\Pi_{kk'}(t) = \text{Tr } b_{k'}(t)b_k(t)F . \quad (2.15)$$

Elas estão relacionadas com $\Gamma_{kk'}(t)$ e $\Xi_{kk'}(t)$ por

$$\Gamma_{kk'}(t) = \Lambda_{kk'}(t) + A_{k'}^*(t)A_k(t), \quad (2.16)$$

$$\Xi_{kk'}(t) = \Pi_{kk'}(t) + A_{k'}(t)A_k(t). \quad (2.17)$$

A densidade estendida correspondente à equação (2.11), mas construída a partir de Λ e Π é

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \Lambda & \Pi \\ \Pi^* & 1 + \Lambda^* \end{pmatrix} = \mathbf{R}^\dagger, \quad (2.18)$$

que é agora a matriz a ser diagonalizada segundo a técnica de Hartree-Fock-Bogoliubov.

A necessidade de diagonalizar a matriz $\mathbf{R}$ é devida basicamente a duas razões. A primeira é a possibilidade de tratar as correlações de pares $\langle b_{k'} b_k \rangle$, como já havíamos mencionado. A segunda é representar a densidade de um corpo em termos dos orbitais naturais que agora incluem efeitos de emparelhamento. O operador de campo na nova base poderá ser então escrito como

$$\phi(t, x) - \langle \phi(t, x) \rangle = \sum_{\alpha} [v_{\alpha}(t, x) d_{\alpha} + v_{\alpha}^*(t, x) d_{\alpha}^{\dagger}(t)], \quad (2.19)$$

onde d_{α} e $d_{\alpha}^{\dagger}$ estão canonicamente relacionados com b_k , $b_k^{\dagger}$ e satisfazem

$$\text{Tr } d_{\alpha}^{\dagger}(t) d_{\beta}(t) F = p_{\alpha}(t) \delta_{\alpha\beta}, \quad (2.20)$$

$$\text{Tr } d_{\alpha}(t) d_{\beta}(t) F = 0. \quad (2.21)$$

A maneira sistemática de implantar essas idéias é resolver o problema de autovalor para $\mathbf{R}$ definido por

$$\mathbf{G} \mathbf{R} \mathbf{X} = \mathbf{X} \mathbf{G} \mathbf{N}, \quad (2.22)$$

com

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} U & V^* \\ V & U^* \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 + P \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Como (2.22) não é um problema de autovalor hermitiano, será necessário considerar o seu problema adjunto

$$\mathbf{R} \mathbf{G} \widetilde{\mathbf{X}} = \widetilde{\mathbf{X}} \mathbf{G} \mathbf{N} \quad (2.24)$$

A métrica G é necessária devida à relação de comutação bosônica. As colunas da matriz X são os autovetores de R e a matriz de autovalores N é diagonal e real. As seguintes propriedades podem ser verificadas imediatamente:

$$G = G^\dagger, \quad GN = NG, \quad GG = 1. \quad (2.25)$$

Comparando as equações (2.22) e (2.24) temos

$$\widetilde{X} = GX, \quad X = G\widetilde{X}. \quad (2.26)$$

Os autovetores $\widetilde{X}$ e X satisfazem a relação de biortogonalidade, o que permite definir a condição de normalização

$$\widetilde{X}^\dagger X = X^\dagger GX = G \quad (2.27)$$

e completeza

$$XGX^\dagger = G. \quad (2.28)$$

Em termos dos blocos U e V , as condições de normalização são

$$U^\dagger U - V^\dagger V = 1, \quad (2.29a)$$

$$V^\dagger U - U^\dagger V = 0, \quad (2.29b)$$

e as relações de completeza

$$UU^\dagger - V^*V^\dagger = 1, \quad (2.30a)$$

$$VU^\dagger - U^*V^\dagger = 0. \quad (2.30b)$$

Podemos definir os operadores de quasipartícula da equação (2.19) com ajuda de $X^\dagger$,

$$\begin{pmatrix} d \\ d^\dagger \end{pmatrix} = X^\dagger \begin{pmatrix} b \\ b^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^\dagger & V^\dagger \\ V^* & U^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ b^\dagger \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

A canonicidade da transformação garante que os operadores d também satisfazem as relações de comutação. A relação de completeza (2.28) permite inverter a equação (2.31),

$$\begin{pmatrix} b \\ b^\dagger \end{pmatrix} = GXG \begin{pmatrix} d \\ d^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & -V^* \\ -V & U^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ d^\dagger \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

Explicitando as equações (2.31) e (2.32) temos

$$d_\alpha = \sum_k \left(U_{k\alpha}^* b_k + V_{k\alpha}^* b_k^\dagger \right), \quad (2.33)$$

$$b_k = \sum_\alpha \left(U_{k\alpha} d_\alpha - V_{k\alpha}^* d_\alpha^\dagger \right). \quad (2.34)$$

Para conseguir uma relação entre as ondas planas $f_k(x)$ e os estados naturais $v_\alpha(t, x)$, primeiro escrevemos a expansão (2.13) na forma matricial:

$$\phi(t, x) - \langle \phi(t, x) \rangle = \begin{pmatrix} f^T & f^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ b^\dagger \end{pmatrix}.$$

Substituindo $\begin{pmatrix} b \\ b^\dagger \end{pmatrix}$ pela equação (2.32) e usando as definições de G e X temos

$$\begin{aligned} \phi(t, x) - \langle \phi(t, x) \rangle &= (f^T U - f^\dagger V - f^T V^* - f^\dagger U^\dagger) \begin{pmatrix} d \\ d^\dagger \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v^T & v^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ d^\dagger \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

portanto

$$v = U^T f - V^T f^* \quad (2.36)$$

ou

$$v_\alpha(t, x) = \sum_k [f_k(x) U_{k\alpha}(t) - f_k^*(x) V_{k\alpha}(t)]. \quad (2.37)$$

Assim, para tratar a dinâmica de ocupação e de emparelhamento, expandimos inicialmente o operador de campo na base de estados naturais de quasipartículas dados através de sua expansão em ondas planas. A transformação entre as duas bases é feita através das matrizes $U(t)$ e $V(t)$, elementos da matriz X de dimensão $2M$ que é o autovetor do problema secular (2.22).

O valor esperado do operador de campo, dado pela equação (2.7), também pode ser escrito em termos da expansão de estados naturais:

$$\langle \phi(t, x) \rangle = \sum_\alpha [v_\alpha(t, x) C_\alpha(t) + v_\alpha^*(t, x) C_\alpha^*(t)]. \quad (2.38)$$

É evidente que os coeficientes das expansões A_k e C_α se transformam como b_k e d_α , i.e.,

$$\begin{pmatrix} C \\ C^* \end{pmatrix} = X^\dagger \begin{pmatrix} A \\ A^* \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Na forma explícita temos

$$C_\alpha(t) = \sum_k [U_{k\alpha}(t) A_k(t) + V_{k\alpha}^*(t) A_k^*(t)]. \quad (2.40)$$

Assim como $A_k(t)$ é valor esperado de $a_k(t)$, $C_\alpha(t)$ é valor esperado de $c_\alpha(t)$,

$$C_\alpha(t) = \text{Tr } c_\alpha(t) F \quad (2.41)$$

com

$$c_\alpha(t) = d_\alpha(t) + C_\alpha(t), \quad (2.42)$$

ou seja, $d_\alpha(t)$ é um operador deslocado da mesma forma que $b_k(t)$.

As várias notações e transformações descritas nessa seção podem ser resumidas no seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc} b & = & a & - & A \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ d & = & c & - & C \\ \downarrow & = & X^\dagger \uparrow & & \\ \uparrow & = & G X G \downarrow & & \\ \downarrow & : & d, c, C & & \\ \uparrow & : & b, a, A & & \end{array}$$

2.2-AS EQUAÇÕES DINÂMICAS

O estudo da dinâmica das variáveis relevantes se restringe aos observáveis $\langle \phi(t, x) \rangle$, $P(t)$ e às matrizes de transformação $U(t)$ e $V(t)$. As outras variáveis discutidas anteriormente podem ser obtidas imediatamente a partir dessas.

A equação dinâmica de $\langle \phi(t, x) \rangle$ resulta diretamente da equação de Heisenberg:

$$i\dot{\langle \phi(t, x) \rangle} = \text{Tr} [\phi(t, x), H] F. \quad (2.43)$$

H é a hamiltoniana do campo. A equação (2.43) escrita em termos das amplitudes $A_k(t)$ fica

$$\begin{aligned} i\dot{A}_k(t) &= \text{Tr} [a_k(t), H] F \\ &= \sum_{\alpha} U_{k\alpha} \text{Tr} [d_{\alpha}, H] F - \sum_{\alpha} V_{k\alpha}^* \text{Tr} [d_{\alpha}^{\dagger}, H] F; \end{aligned} \quad (2.44)$$

na última passagem usamos as equações (2.12) e (2.34).

Para outras variáveis precisamos estudar a evolução temporal da densidade $R^{[12]}$. Primeiro reescrevemos a equação de autovalores (2.22) como

$$X^{\dagger} R X = N. \quad (2.45)$$

Derivando em relação ao tempo temos

$$\begin{aligned} X^{\dagger} \dot{R} X &= \dot{N} - \dot{X}^{\dagger} R X - X^{\dagger} R \dot{X} \\ &= \dot{N} - \dot{X}^{\dagger} G X G N - N G X^{\dagger} G \dot{X}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

usamos a equação (2.22) novamente na última passagem. Desenvolvendo as multiplicações das matrizes e agrupando os termos chegamos a

$$\begin{aligned} X^{\dagger} \dot{R} X &= \\ &\left(\begin{array}{cc} \dot{P} + [U^{\dagger} \dot{U} - V^{\dagger} \dot{V}, P] & V^{\dagger} \dot{U}^* - U^{\dagger} \dot{V}^* + \{V^{\dagger} \dot{U}^* - U^{\dagger} \dot{V}^*, P\}_+ \\ V^T \dot{U} - U^T \dot{V} + \{V^T \dot{U} - U^T \dot{V}, P\}_+ & \dot{P} + [U^T \dot{U}^* - V^T \dot{V}^*, P] \end{array} \right), \end{aligned} \quad (2.47)$$

onde $\{ \}_+$ indica um anticomutador. Igualando os blocos da equação (2.47) temos duas equações matriciais independentes, enquanto as outras duas são complexo conjugado dessas:

$$U^{\dagger} \dot{A} U + U^{\dagger} \dot{B} V + V^{\dagger} \dot{B}^* U + V^{\dagger} \dot{A}^* V = \dot{P} + [U^{\dagger} \dot{U} - V^{\dagger} \dot{V}, P], \quad (2.48a)$$

$$\begin{aligned} U^{\dagger} \dot{A} V^* + U^{\dagger} \dot{B} U^* + V^{\dagger} \dot{B}^* V^* + V^{\dagger} \dot{A}^* U^* \\ = V^{\dagger} \dot{U}^* - U^{\dagger} \dot{V}^* + \{V^{\dagger} \dot{U}^* - U^{\dagger} \dot{V}^*, P\}_+. \end{aligned} \quad (2.48b)$$

Usando as relações de completaza e normalização e a equação de Heisenberg verificamos que os primeiros membros dessas equações são dados por

$$i \left[U^\dagger \dot{A}U + U^\dagger \dot{H}V + V^\dagger \dot{H}^*U + V^\dagger \dot{A}^*V \right]_{\alpha\beta} = \text{Tr}[d_\beta^\dagger d_\alpha, H]F, \quad (2.49a)$$

$$i \left[U^\dagger \dot{A}V^* + U^\dagger \dot{H}U^* + V^\dagger \dot{H}^*V^* + V^\dagger \dot{A}^*U^* \right]_{\alpha\beta} = \text{Tr}[d_\beta d_\alpha, H]F. \quad (2.49b)$$

Portanto

$$i \left\{ \dot{P} + [U^\dagger \dot{U} - V^\dagger \dot{V}, P] \right\}_{\alpha\beta} = \text{Tr}[d_\beta^\dagger d_\alpha, H]F, \quad (2.50a)$$

$$i \left[V^\dagger \dot{U}^* - U^\dagger \dot{V}^* + \{V^\dagger \dot{U}^* - U^\dagger \dot{V}^*, P\}_+ \right]_{\alpha\beta} = \text{Tr}[d_\beta d_\alpha, H]F. \quad (2.50b)$$

Como a matriz P é diagonal, separamos a equação (2.50a) em duas: uma para $\alpha = \beta$ e outra para $\alpha \neq \beta$,

$$i\dot{p}_\alpha = \text{Tr}[d_\alpha^\dagger d_\alpha, H]F. \quad (2.50c)$$

$$i(p_\beta - p_\alpha)(U^\dagger \dot{U} - V^\dagger \dot{V})_{\alpha\beta} = \text{Tr}[d_\beta^\dagger d_\alpha, H]F, \quad (\alpha \neq \beta). \quad (2.50d)$$

Além disso, a equação (2.50b) pode ser escrita como

$$i(V^\dagger \dot{U}^* - U^\dagger \dot{V}^*)_{\alpha\beta}(1 + p_\alpha + p_\beta) = \text{Tr}[d_\beta d_\alpha, H]F. \quad (2.50e)$$

Note que as equações (2.50d) e (2.50e) têm estrutura matricial do tipo: $U^\dagger \dot{U} - V^\dagger \dot{V}$ e $V^\dagger \dot{U}^* - U^\dagger \dot{V}^*$. Para tratar essas quantidades é mais conveniente resolver as equações dinâmicas para $\dot{U}$ e $\dot{V}$. Para isso, primeiro definimos matrizes h e g tais que

$$h = i(U^\dagger \dot{U} - V^\dagger \dot{V}), \quad (2.51a)$$

$$g = i(V^\dagger \dot{U}^* - U^\dagger \dot{V}^*). \quad (2.51b)$$

As equações (2.50d) e (2.50e) escritas em termos de h e g são

$$(p_\beta - p_\alpha)h_{\alpha\beta} = \text{Tr}[d_\beta^\dagger d_\alpha, H]F, \quad (\alpha \neq \beta) \quad (2.52a)$$

$$(1 + p_\alpha + p_\beta)g_{\alpha\beta} = \text{Tr}[d_\beta d_\alpha, H]F. \quad (2.52b)$$

Portanto, h e g podem ser expressos em termos dos traços de (2.52a) e (2.52b). A próxima etapa é encontrar as relações simples entre $\dot{U}$ e $\dot{V}$ e h e g . O ponto crucial é perceber que a evolução dos autoestados X de (2.22) pode ser gerada por uma matriz hermitiana Ω da seguinte forma

$$i\dot{X} = X\Omega G; \quad (2.53)$$

observe que (2.53) tem a estrutura da equação de Schrödinger com Ω funcionando como gerador da evolução temporal. Resolvemos Ω da equação (2.53) usando (2.25) e (2.27)

$$\begin{aligned} \Omega &= iGX^\dagger G\dot{X}G \\ &= i \begin{pmatrix} U^\dagger \dot{U} - V^\dagger \dot{V} & V^\dagger \dot{U}^* - U^\dagger \dot{V}^* \\ U^T \dot{V} - V^T \dot{U} & V^T \dot{V}^* - U^T \dot{U}^* \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Das definições (2.51a) e (2.51b) temos

$$\Omega = \begin{pmatrix} h & g \\ g^* & h^* \end{pmatrix}.$$

Igualando os blocos da equação (2.53) chegamos finalmente

$$i\dot{U} = Uh + V^*g^*, \quad (2.54a)$$

$$i\dot{V} = Vh + U^*g^*. \quad (2.54b)$$

As equações (2.50c), (2.54a) e (2.54b) junto com a de condensado (2.44) formam o conjunto de equações para as variáveis $\langle \phi \rangle$, P , U e V . O problema óbvio com essas equações é que elas não são fechadas no sentido de que a matriz densidade F e a evolução temporal dos operadores de Heisenberg não são dados em termos de quantidades conhecidas. Portanto, aproximações serão necessárias para desenvolver o cálculo dos traços. A maneira de contornar essa dificuldade é expressar F e a dinâmica dos operadores de campo também em termos das variáveis relevantes. Isso pode ser feito notando que a restrição às variáveis relevantes pode ser realizada em termos de um projetor dependente do tempo. Essa discussão será o objetivo da próxima seção.

2.3—O OPERADOR DE PROJEÇÃO

A dinâmica de um sistema com muitos graus de liberdade muitas vezes pode ser escrita a partir de um conjunto restrito de variáveis consideradas relevantes. O operador de projeção é uma técnica usada em vários contextos^[13] para reduzir a descrição do sistema às variáveis relevantes apenas. No nosso estudo de um campo escalar, focalizamos inicialmente as variáveis relevantes como sendo $\langle a_k \rangle$, $\langle a_k^\dagger a_{k'} \rangle$ e $\langle a_k a_{k'} \rangle$, que são transformadas convenientemente por U e V para $\langle c_\alpha \rangle$ e $\langle d_\alpha^\dagger d_\alpha \rangle$, e sua dinâmica pode ser resumida pelas seguintes equações:

$$i\dot{C}_\alpha = \text{Tr}[d_\alpha, H]F, \quad (2.55a)$$

$$i\dot{p}_\alpha = \text{Tr}[d_\alpha^\dagger d_\alpha, H]F, \quad (2.55b)$$

$$i\dot{U} = Uh + V^* g^*, \quad (2.55c)$$

$$i\dot{V} = Vh + U^* g^*; \quad (2.55d)$$

as matrizes h e g são obtidas a partir das equações (2.52a) e (2.52b). O cálculo explícito desses traços depende ainda de exprimirmos F e a dinâmica dos operadores $d_\alpha(t)$ em termos de quantidades conhecidas.

Na representação de Heisenberg, os operadores $d_\alpha(t)$ contêm todas as complicações da dinâmica de muitos corpos. Portanto, o problema crucial é como exprimir a dinâmica dos operadores $d_\alpha(t)$ de maneira que sua evolução seja dada em termos das variáveis relevantes. Podemos resolver esse problema usando a técnica de projeção. Primeiro decompomos a densidade F em duas partes:

$$F = F_0(t) + F'(t), \quad (2.56)$$

sendo $F_0(t)$ a parte de F que contém todas as informações sobre as variáveis relevantes, i.e.,

$$\text{Tr} d_\alpha F_0 = \text{Tr} d_\alpha F = 0, \quad \text{Tr} F_0 = \text{Tr} F = 1, \quad (2.57a)$$

$$\text{Tr} d_\alpha^\dagger d_\beta F_0 = \text{Tr} d_\alpha^\dagger d_\beta F = p_\alpha \delta_{\alpha\beta}, \quad (2.57b)$$

$$\text{Tr} d_\alpha d_\beta F_0 = \text{Tr} d_\alpha d_\beta F = 0. \quad (2.57c)$$

A forma de F_0 que satisfaz essas condições é conhecida^[8]. Ela se exprime convenientemente no espaço de Fock como

$$F_0(t) = \prod_{\alpha} \frac{1}{1 + p_{\alpha}(t)} \left[\frac{p_{\alpha}(t)}{1 + p_{\alpha}(t)} \right]^{d_{\alpha}^{\dagger}(t) d_{\alpha}(t)}. \quad (2.58)$$

As propriedades exigidas, (2.57), podem ser verificadas facilmente para a equação (2.58) lembrando que o cálculo desses traços consiste em somar todos elementos diagonais numa base no espaço de Fock, a base conveniente sendo no caso a dos autoestados do operador número n_{α} .

É importante notar que apesar de $F_0(t)$ ser um objeto complicado por conter operadores $d^{\dagger}(t)$, $d(t)$, o traço desses operadores com $F_0(t)$ envolve apenas propriedades conhecidas dos operadores e resulta em quantidades simples. Por exemplo:

$$\text{Tr } d_{\alpha}^{\dagger} d_{\beta}^{\dagger} d_{\gamma} d_{\delta} F_0 = p_{\alpha} p_{\beta} (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}).$$

Outro ponto importante é que, embora F_0 descreva completamente os aspectos de um corpo da densidade completa (2.57b), é fácil ver, usando propriedades cíclicas do traço, que ela não contribui para a evolução das ocupações. De fato,

$$\begin{aligned} i\dot{p}_{\alpha}(t) &= \text{Tr}[d_{\alpha}^{\dagger} d_{\alpha}, H] F_0 + \text{Tr}[d_{\alpha}^{\dagger} d_{\alpha}, H] F' \\ &= \text{Tr}[d_{\alpha}^{\dagger} d_{\alpha}, H] F'(t). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Portanto, $F_0(t)$ é o termo da densidade total que descreve a aproximação de campo médio, no sentido discutido na seção (2.1), as correlações dinâmicas serão descritas através de $F'(t)$.

A próxima etapa é exprimir $F'(t)$ em termos de $F_0(t)$. O ponto crucial é a possibilidade de construir um projetor dependente do tempo, a partir de F_0 , de tal maneira que

$$F_0(t) = \mathcal{P}(t) F, \quad (2.60)$$

ou seja, o operador $\mathcal{P}(t)$ projeta da densidade total F uma densidade reduzida, que contém todas as informações de F relativas às variáveis relevantes, em termos dos operadores de Heisenberg $d_{\alpha}(t)$, $d_{\alpha}^{\dagger}(t)$.

É importante notar que o operador $\mathcal{P}(t)$ não é um operador no espaço de vetores de estado, mas sim um operador no espaço de matrizes densidade, também conhecido com espaço de Liouville. Dessa forma, as densidades F , F_0 e F' são vetores nesse espaço vetorial. O produto escalar de dois vetores nesse espaço é definido como

$$(X, Y) = \text{Tr}(X^\dagger Y) . \quad (2.61)$$

Será útil ainda definir o projetor adjunto $\mathcal{P}^\dagger(t)$ e o projetor complementar $\mathcal{Q}(t)$:

$$(\mathcal{P}^\dagger(t)X, Y) = (X, \mathcal{P}(t)Y) , \quad (2.62)$$

$$\mathcal{Q}(t) = \mathcal{I} - \mathcal{P}(t) , \quad (2.63)$$

onde $\mathcal{I}$ é o operador identidade do espaço de Liouville.

As propriedades exigidas para a construção de $\mathcal{P}(t)$ são, além de (2.60),

$$\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}(t) , \quad (2.64a)$$

$$\begin{aligned} i\dot{F}_0(t) &= [F_0(t), \mathcal{L}]F \\ &= [F_0(t), H] + \mathcal{P}(t)[H, F] , \end{aligned} \quad (2.64b)$$

onde $\mathcal{L}$ também é um operador do espaço de Liouville definido como

$$\mathcal{L}X = [H, X] , \quad (2.65)$$

sendo X um vetor deste espaço. A equação (2.64b) é a representação de Heisenberg da equação $(\partial_t \mathcal{P}(t))F = 0$, que foi usada para definir $\mathcal{P}(t)$ na representação de Schrödinger^[8].

A construção explícita de $\mathcal{P}(t)$ é um exercício algébrico longo, porém direto, e algumas etapas relevantes são dadas no apêndice B. O resultado é

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(t)X &= \left\{ \left[1 - \sum_{\alpha} \frac{d_{\alpha}^{\dagger} d_{\alpha} - p_{\alpha}}{1 + p_{\alpha}} \right] \text{Tr} X \right. \\ &+ \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \frac{d_{\alpha_1}^{\dagger} d_{\alpha_2} - p_{\alpha_2} \delta_{\alpha_1 \alpha_2}}{p_{\alpha_2} (1 + p_{\alpha_1})} \text{Tr}(d_{\alpha_2}^{\dagger} d_{\alpha_1} X) \\ &+ \sum_{\alpha} \left[\frac{d_{\alpha}}{p_{\alpha}} \text{Tr}(d_{\alpha}^{\dagger} X) + \frac{d_{\alpha}^{\dagger}}{1 + p_{\alpha}} \text{Tr}(d_{\alpha} X) \right] \\ &\left. + \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \left[\frac{d_{\alpha_1} d_{\alpha_2}}{2p_{\alpha_1} p_{\alpha_2}} \text{Tr}(d_{\alpha_2}^{\dagger} d_{\alpha_1}^{\dagger} X) + \frac{d_{\alpha_1}^{\dagger} d_{\alpha_2}^{\dagger}}{2(1 + p_{\alpha_1})(1 + p_{\alpha_2})} \text{Tr}(d_{\alpha_2} d_{\alpha_1} X) \right] \right\} F_0(t) . \end{aligned} \quad (2.66)$$

O projetor adjunto $\mathcal{P}^\dagger(t)$ pode ser obtido facilmente usando as definições do produto escalar (2.61) e do operador adjunto (2.62) (ver apêndice B):

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^\dagger(t)X = & \left[1 - \sum_{\alpha} \frac{d_{\alpha}^{\dagger} d_{\alpha} - p_{\alpha}}{1 + p_{\alpha}} \right] \text{Tr}(F_0 X) \\ & + \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \frac{d_{\alpha_1}^{\dagger} d_{\alpha_2} - p_{\alpha_2} \delta_{\alpha_1 \alpha_2}}{p_{\alpha_2} (1 + p_{\alpha_1})} \text{Tr}(F_0 d_{\alpha_2}^{\dagger} d_{\alpha_1} X) \\ & + \sum_{\alpha} \left[\frac{d_{\alpha}}{p_{\alpha}} \text{Tr}(F_0 d_{\alpha}^{\dagger} X) + \frac{d_{\alpha}^{\dagger}}{1 + p_{\alpha}} \text{Tr}(F_0 d_{\alpha} X) \right] \\ & + \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \left[\frac{d_{\alpha_1} d_{\alpha_2}}{2 p_{\alpha_1} p_{\alpha_2}} \text{Tr}(F_0 d_{\alpha_2}^{\dagger} d_{\alpha_1}^{\dagger} X) + \frac{d_{\alpha_1}^{\dagger} d_{\alpha_2}^{\dagger}}{2(1 + p_{\alpha_1})(1 + p_{\alpha_2})} \text{Tr}(F_0 d_{\alpha_2} d_{\alpha_1} X) \right]. \end{aligned} \quad (2.67)$$

O fato de que $\mathcal{P}^\dagger(t) \neq \mathcal{P}(t)$ mostra explicitamente que $\mathcal{P}(t)$ não é uma projeção ortogonal.

Dado $\mathcal{P}(t)$, a etapa seguinte consiste em obter uma equação para $F'(t)$ em termos de $F_0(t)$. Isso é feito substituindo (2.56) em (2.64b) e isolando $F'(t)$. Obtemos assim

$$\left(i \frac{d}{dt} + \mathcal{P}(t) \mathcal{L} \right) F'(t) = \mathcal{Q}(t) \mathcal{L} F_0(t), \quad (2.68)$$

onde $\mathcal{L}$ e $\mathcal{Q}(t)$ são operadores no espaço de Liouville definidos pelas equações (2.65) e (2.63) respectivamente. Essa equação tem como solução formal

$$F'(t) = \mathcal{G}(t, 0) F'(0) - i \int_0^t dt' \mathcal{G}(t, t') \mathcal{Q}(t') \mathcal{L} F_0(t'), \quad (2.69)$$

onde $F'(0)$ é o termo que contém as correlações iniciais; no segundo termo $\mathcal{G}(t, t')$ é a função de Green ordenada temporalmente

$$\mathcal{G}(t, t') = T \exp i \int_{t'}^t d\tau \mathcal{P}(\tau) \mathcal{L}. \quad (2.70)$$

$\mathcal{G}(t, t')$ também é um operador no espaço de Liouville. Dessa forma $F'(t)$, e portanto F , é expresso formalmente em termos de $F_0(t')$ (para $t < t'$) e das correlações iniciais $F'(0)$. Por sua vez, as equações dinâmicas (2.55) são dadas como traços de operadores com F_0 da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \text{Tr}[O(t), H] F_0(t) + \text{Tr}[O(t), H] \mathcal{G}(t, 0) F'(0) \\ & - i \text{Tr}[O(t), H] \int_0^t dt' \mathcal{G}(t, t') \mathcal{Q}(t') \mathcal{L} F_0(t'), \end{aligned} \quad (2.71)$$

onde $O(t)$ pode ser $d_\alpha(t)$, $d_\alpha^\dagger(t)d_\beta(t)$ ou $d_\alpha(t)d_\beta(t)$. Por outro lado, como o traço de operadores $d(t)$, $d^\dagger(t)$ com $F_0(t)$ resulta em variáveis relevantes, vemos que as equações (2.55) junto com (2.69), (2.70) formam essencialmente equações fechadas do tipo cinético para as variáveis relevantes.

O primeiro termo de (2.71) dá a contribuição de campo médio como já havíamos discutido anteriormente. Os termos adicionais levam em conta as interações entre as partículas que dão origem a correlações entre elas, e nesse sentido eles são conhecidos como termos de colisão das equações cinéticas. De fato, a densidade $\mathcal{Q}(t')[H, F_0(t')]$ pode ser desenvolvida sem dificuldade (ver apêndice D), mostrando que não há contribuições de um corpo. No entanto, é fácil ver que um cálculo a cabo dos traços de (2.71) envolve a solução da equação de Heisenberg para os operadores $d_\alpha(t)$,

$$i\dot{d}_\alpha(t) = [d_\alpha(t), H] + \frac{\partial d_\alpha(t)}{\partial t}. \quad (2.72)$$

O último termo leva em conta a dependência explícita de $d_\alpha(t)$ com as amplitudes de deslocamento e os efeitos de emparelhamento. A complicada evolução dos operadores de Heisenberg impede, de fato, que o cálculo dos traços seja efetuado exatamente, exigindo, portanto, aproximações trabalháveis.

Uma expansão sistemática para tratar esse problema é discutida na referência [14] na representação de Schrödinger. Sua implementação na representação de Heisenberg consiste em aproximar a evolução dos operadores com uma hamiltoniana mais simples

$$i\dot{d}_\alpha \simeq [d_\alpha, H_0] + \frac{\partial d_\alpha}{\partial t}. \quad (2.73)$$

O critério adotado para a escolha de H_0 é a conservação de energia para todas as ordens da expansão, i.e.,

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle H \rangle_n = 0. \quad (2.74)$$

Um operador H_0 que satisfaz essa condição é

$$\begin{aligned} H_0 = & \mathcal{P}^\dagger H + \sum_{\alpha} d_{\alpha}^{\dagger} \text{Tr}[d_{\alpha}, H] F'(t) - \sum_{\alpha} d_{\alpha} \text{Tr}[d_{\alpha}^{\dagger}, H] F'(t) \\ & + \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \frac{d_{\alpha_1}^{\dagger} d_{\alpha_2}^{\dagger}}{2(1 + p_{\alpha_1} + p_{\alpha_2})} \text{Tr}[d_{\alpha_1} d_{\alpha_2}, H] F'(t) \\ & - \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \frac{d_{\alpha_1} d_{\alpha_2}}{2(1 + p_{\alpha_1} + p_{\alpha_2})} \text{Tr}[d_{\alpha_1}^{\dagger} d_{\alpha_2}^{\dagger}, H] F'(t). \end{aligned} \quad (2.75)$$

Note que o H_0 escolhido aqui não é exatamente igual ao da referência [14] ($H_0 = \mathcal{P}^\dagger H$) devido às dependências explícitas de $d_\alpha(t)$ com a amplitude de deslocamento e o efeito de emparelhamento. É importante notar que H_0 leva em conta os efeitos da energia de campo médio, i.e.,

$$\text{Tr } H F_0 = \text{Tr } H \mathcal{P} F = \text{Tr } \mathcal{P}^\dagger H F = \text{Tr } H_0 F .$$

Nessa aproximação, a equação de operadores (2.73) pode ser resolvida como (ver apêndice E)

$$d_\alpha(t) \simeq \sum_\gamma M_{\alpha\gamma}(t, t') d_\gamma(t') . \quad (2.76)$$

Por sua vez, a densidade $F'(t)$ é agora escrita como uma série “perturbativa” em H_0 (ver apêndice F). O termo de mais baixa ordem é

$$F'(t) \simeq \mathcal{G}(t, 0) F'(0) - i \int_0^t dt' \mathcal{Q}(t') [H, F_0(t')] . \quad (2.77)$$

Portanto a aproximação adotada leva em conta os efeitos de correlação de segunda ordem em H . Ainda vamos nos restringir, por simplicidade, a condições iniciais em que não haja correlação inicial $F'(0) = 0$. Dessa forma, o cálculo das equações de movimento para as variáveis relevantes nessa aproximação se resume em desenvolver os traços da expressão

$$\text{Tr}[O(t), H] F_0 - i \text{Tr}[O(t), H] \int_0^t dt' \mathcal{Q}(t') [H, F_0(t')] . \quad (2.78)$$

Os operadores do segundo termo que estão em tempos diferentes são relacionados pela equação (2.76).

CAPÍTULO 3

RENORMALIZAÇÃO

3.1-APROXIMAÇÃO DE CAMPO MÉDIO PARA UM SISTEMA ESPACIALMENTE UNIFORME

Nesta seção mostraremos a implementação mais simples para as expressões gerais obtidas no capítulo anterior. Consideramos o caso em que o campo é espacialmente homogêneo. O modelo estudado é a teoria ϕ^4 em $1 + 1$ dimensões, cuja hamiltoniana é

$$H = \int dx \mathcal{H}, \quad (3.1a)$$

$$\mathcal{H} = \frac{\Pi^2}{2} + \frac{1}{2}(\partial_x \phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{g}{4!}\phi^4 + \frac{\delta m^2}{2}\phi^2 + \lambda\phi. \quad (3.1b)$$

Onde m^2 é a massa renormalizada e δm^2 é o contratermo de maneira que o parâmetro de massa nua m_B^2 é redefinido por^[15]

$$m_B^2 = m^2 + \delta m^2. \quad (3.2)$$

A forma de δm^2 será fixada mais tarde. O último termo de $\mathcal{H}$ é um acoplamento linear externo que vai ser usado para o estudo do sistema em equilíbrio para diferentes valores de $\langle \phi \rangle$.

A simplificação essencial para um campo uniforme provem da invariância translacional do sistema. Isso, de fato, faz com que a densidade de um corpo $\langle x | \rho | x' \rangle$ seja uma função apenas da quantidade translacionalmente invariante $x - x'$. Os orbitais naturais, nesse caso, são sempre ondas planas. Portanto, a expansão de orbitais naturais em ondas planas, discutidas na seção (2.1), reduz à identidade e as variáveis de interesse se traduzem da seguinte maneira:

$$A_k = \text{Tr } a_k F \xrightarrow{\text{sistema uniforme}} A_k \delta_{k0} = A \quad (3.3a)$$

$$\Gamma_{kk'} = \text{Tr } a_k^\dagger a_{k'} F \longrightarrow \Gamma_{kk'} \delta_{kk'} = \gamma_k \quad (3.3b)$$

$$\Xi_{kk'} = \text{Tr } a_{k'} a_k F \longrightarrow \Xi_{kk'} \delta_{k,-k'} = \xi_k \quad (3.3c)$$

$$\Lambda_{kk'} = \text{Tr } b_k^\dagger b_{k'} F \longrightarrow \Lambda_{kk'} \delta_{kk'} = \lambda_k \quad (3.3d)$$

$$\Pi_{kk'} = \text{Tr } b_{k'} b_k F \longrightarrow \Pi_{kk'} \delta_{k,-k'} = \pi_k \quad (3.3e)$$

$$p_\alpha = \text{Tr } d_\alpha^\dagger d_\alpha F \longrightarrow p_k \quad (3.3f)$$

Para a amplitude de deslocamento, δ_{k0} elimina, de fato, a dependência espacial do valor esperado do operador de campo,

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2L\mu}} (A + A^*), \quad (3.4a)$$

e o valor esperado do operador de momento canônico é escrito nesse caso como

$$\langle \Pi \rangle = \frac{ik_0}{\sqrt{2L\mu}} (A^* - A). \quad (3.4b)$$

A representação diagonal da densidade de um corpo no espaço dos momentos, (3.3b) e (3.3d), implica que as ondas planas são, para o sistema homogêneo, os autoestados da densidade de um corpo conforme havíamos discutido anteriormente. A particular escolha de emparelhamento de k com $-k$ é coerente com a transformação de Bogoliubov (2.33), que nesse caso mais simples é uma combinação de operadores de a_k com a_{-k} ou b_k com b_{-k} como mostraremos mais tarde. É fácil ver também que as matrizes U e V são agora escritas em termos de dois números complexos para cada modo k e, dessa forma, o problema secular de dimensão $2M$ definido pela equação (2.22) se reduz agora a problemas desacoplados de autovalores, um para cada modo k , definidos por

$$GR_k X_\kappa = X_\kappa GN_k \quad (3.5)$$

onde

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad R_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & \pi_k \\ \pi_{-k}^* & 1 + \lambda_{-k} \end{pmatrix}$$

$$X_\kappa = \begin{pmatrix} x_\kappa & y_\kappa^* \\ y_\kappa & x_\kappa^* \end{pmatrix} \quad N_k = \begin{pmatrix} p_k & 0 \\ 0 & 1 + p_{-k} \end{pmatrix}$$

A semelhança entre os problemas (2.22) e (3.5) é óbvia, de maneira que os resultados obtidos nas seções (2.1) e (2.2) podem ser reescritos para o caso de sistemas homogêneos simplesmente fazendo as seguintes mudanças:

$$U_{k\alpha} \xrightarrow{\text{sistema homogêneo}} x_\kappa \quad (3.6a)$$

$$V_{k\alpha} \longrightarrow y_\kappa \quad (3.6b)$$

$$d_\alpha \longrightarrow d_k \quad (3.6c)$$

$$\sum_\alpha \longrightarrow \sum_k \quad (3.6d)$$

$$\sum_k \longrightarrow - \quad (3.6e)$$

Dessa forma, as relações de normalização e completeza são definidas por

$$|x_\kappa|^2 - |y_\kappa|^2 = 1 \quad (3.7)$$

As várias transformações de Bogoliubov e de deslocamento dadas pelo diagrama da seção (2.1) podem ser resumidas neste caso pelas seguintes equações

$$b_k(t) = a_k(t) - A_k(t)\delta_{k0}, \quad (3.8a)$$

$$d_k(t) = x_\kappa^* b_k(t) + y_\kappa^* b_{-k}^\dagger(t), \quad (3.8b)$$

$$c_k(t) = x_\kappa^* a_k(t) + y_\kappa^* a_{-k}^\dagger(t), \quad (3.8c)$$

$$d_k(t) = c_k(t) - C_k(t)\delta_{k0}, \quad (3.8d)$$

$$C_k\delta_{k0} = x_\kappa^* A_k\delta_{k0} + y_\kappa^* A_{-k}^*\delta_{k0}. \quad (3.8e)$$

É fácil ver que o índice k para x_κ e y_κ deve ser dado em módulo, o que é indicado pelo uso da letra κ . Além disso, por simetria de reflexão devemos ter $p_k = p_{-k}$, isto é, o índice para a variável p também deve ser κ .

Da mesma maneira, o estudo da dinâmica da matriz estendida feito na seção (2.2) pode ser adaptado para o caso de sistema homogêneo simplesmente seguindo as equações (3.6). Dessa forma, (2.47) reduz a

$$X^\dagger \dot{R}_k X = \begin{pmatrix} \dot{p}_\kappa & (x_\kappa^* y_\kappa^* - x_\kappa^* y_\kappa^*)(1 + 2p_\kappa) \\ (x_\kappa y_\kappa - x_\kappa y_\kappa)(1 + 2p_\kappa) & \dot{p}_\kappa \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

O comutador presente nos blocos diagonais da equação (2.47) é obviamente nulo, já que as matrizes U e V são substituídas por x_κ e y_κ , que são números. Temos, portanto, apenas duas equações independentes para a dinâmica da densidade estendida:

$$i\dot{p}_\kappa = \text{Tr}[d_k^\dagger d_k, H]F, \quad (3.10)$$

$$i(\dot{x}_\kappa y_\kappa - x_\kappa \dot{y}_\kappa)(1 + 2p_\kappa) = \text{Tr}[d_k^\dagger d_{-k}^\dagger, H]F, \quad (3.11)$$

juntamente com a equação do condensado

$$i\dot{A}_k \delta_{k0} = x_\kappa \text{Tr}[d_k \delta_{k0}, H]F - y_\kappa^* \text{Tr}[d_k^\dagger \delta_{k0}, H]F. \quad (3.12)$$

Essas equações formam o conjunto de equações para as variáveis relevantes para o caso em que o campo é espacialmente homogêneo.

A aproximação mais simples para as equações (3.10), (3.11) e (3.12) é simplesmente substituir a densidade completa F pela densidade reduzida F_0 (seção (2.3)), que é escrita como

$$F_0(t) = \prod_k \frac{1}{1 + p_\kappa(t)} \left[\frac{p_\kappa(t)}{1 + p_\kappa(t)} \right]^{d_k^\dagger(t) d_k(t)} \quad (3.13)$$

para o caso de sistema uniforme. Essa é a aproximação de campo médio como já havíamos discutido na seção (2.3). A consequência imediata disso é

$$\dot{p}_\kappa(t) = 0; \quad (3.14)$$

podemos ainda escolher o caso particular em $p_\kappa(0) = 0$, para todos os k 's; segue então $p_k \equiv \langle d_k^\dagger d_k \rangle = 0$. Essa é a condição inicial “vacuosa”, no sentido de que o valor médio de número de bóson nos modos k é zero para todos os k .

As equações de movimento nessas condições são:

$$i\dot{A}_k \delta_{k0} = x_\kappa \text{Tr}[d_k \delta_{k0}, H]F_0 - y_\kappa^* \text{Tr}[d_k^\dagger \delta_{k0}, H]F_0, \quad (3.15)$$

$$i(\dot{x}_\kappa y_\kappa - x_\kappa \dot{y}_\kappa) = \text{Tr}[d_k^\dagger d_{-k}^\dagger, H]F_0. \quad (3.16)$$

A expansão de H em termos dos operadores $d(t)$ e $d^\dagger(t)$ é imediata (ver apêndice C). Podemos escolher a seguinte parametrização, obedecendo as relações de normalização e completeza (3.7),

$$x_\kappa = \text{ch } \sigma_\kappa + i \frac{\tau_\kappa}{2}, \quad (3.17a)$$

$$y_\kappa = \text{sh } \sigma_\kappa + i \frac{\tau_\kappa}{2}. \quad (3.17b)$$

Todos os ingredientes estão disponíveis para o cálculo dos traços das equações (3.15) e (3.16), que é um exercício algébrico direto. A equação de movimento do condensado (3.15), que é complexa, resulta em uma equação de segunda ordem,

$$\partial_t^2 \langle \phi \rangle = - \left[\lambda + m^2 \langle \phi \rangle + \frac{g}{3!} \langle \phi \rangle^3 \right] - \frac{g}{4L} \langle \phi \rangle \sum_k \frac{e^{-2\sigma_k}}{\sqrt{k^2 + \mu^2}} - \delta m^2 \langle \phi \rangle, \quad (3.18)$$

ao passo que a equação de emparelhamento (3.16), que também é complexa, é separada em duas equações reais,

$$\dot{\sigma}_\kappa = -\sqrt{k^2 + \mu^2} e^{\sigma_\kappa} \tau_\kappa, \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\sigma_\kappa}}{2} (\dot{\sigma}_\kappa \tau_\kappa + \dot{\tau}_\kappa) &= \frac{\sqrt{k^2 + \mu^2}}{2} (e^{2\sigma_\kappa} - \tau_\kappa^2) - \frac{k^2 + m^2}{2\sqrt{k^2 + \mu^2}} e^{-2\sigma_\kappa} \\ &\quad - \frac{g}{4} \langle \phi \rangle^2 \frac{e^{-2\sigma_\kappa}}{\sqrt{k^2 + \mu^2}} - \frac{e^{-2\sigma_\kappa}}{\sqrt{k^2 + \mu^2}} \left[\frac{g}{8L} \sum_{k'} \frac{e^{-2\sigma_{k'}}}{\sqrt{k'^2 + \mu^2}} + \frac{\delta m^2}{2} \right]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

É conveniente ainda fazer uma mudança de variável adicional, exprimindo $\sigma_\kappa(t)$ em termos de $\mu_\kappa(t)$ através da relação

$$\frac{1}{\sqrt{k^2 + \mu_\kappa^2(t)}} = \frac{e^{-2\sigma_\kappa(t)}}{\sqrt{k^2 + \mu^2}}. \quad (3.21)$$

Dessa forma, $\mu_\kappa(t)$ podem ser interpretadas como variáveis dinâmicas com o sentido de massa efetiva para o modo de momento k . Além disso, a presença em (3.18) e (3.20) da combinação

$$\frac{g}{4L} \sum_k \frac{1}{\sqrt{k^2 + \mu_\kappa^2}} + \delta m^2$$

sugere a forma conveniente da escolha do contratermo δm^2 como sendo

$$\delta m^2 = -\frac{g}{4L} \sum_k \frac{1}{\sqrt{k^2 + m^2}}. \quad (3.22)$$

Reescrevendo com esses ingredientes as equações (3.18), (3.19) e (3.20) temos

$$\partial_t^2 \langle \phi \rangle = - \left[\lambda + m^2 \langle \phi \rangle + \frac{g}{3!} \langle \phi \rangle^3 \right] - \frac{g}{4L} \langle \phi \rangle \sum_k \left[\frac{1}{\sqrt{k^2 + \mu_\kappa^2}} - \frac{1}{\sqrt{k^2 + m^2}} \right], \quad (3.23)$$

$$\dot{\mu}_\kappa = -2(k^2 + \mu^2)^{1/4} \frac{(k^2 + \mu_\kappa^2)^{5/4}}{\mu_\kappa} \tau_\kappa, \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{k^2 + \mu^2}{k^2 + \mu_\kappa^2} \right)^{1/4} \left(\frac{1}{2} \frac{\mu_\kappa \dot{\mu}_\kappa}{k^2 + \mu_\kappa^2} \tau_\kappa + \dot{\tau}_\kappa \right) &= \sqrt{k^2 + \mu_\kappa^2} - \sqrt{k^2 + \mu^2} \tau_\kappa^2 - \frac{k^2 + m^2}{\sqrt{k^2 + \mu_\kappa^2}} \\ &- \frac{g}{2} \frac{\langle \phi \rangle^2}{\sqrt{k^2 + \mu_\kappa^2}} - \frac{g}{4L} \frac{1}{\sqrt{k^2 + \mu_\kappa^2}} \sum_{k'} \left[\frac{1}{\sqrt{k'^2 + \mu_{\kappa'}^2}} - \frac{1}{\sqrt{k'^2 + m^2}} \right]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Note que a divergência na soma sobre k agora está controlada. É fácil verificar que m^2 é a massa associada ao vácuo.

As equações (3.23), (3.24) e (3.25) formam o conjunto de equações fechadas para as variáveis relevantes $\langle \phi \rangle$, μ_κ e τ_κ na aproximação de campo médio para o campo espacialmente homogêneo. É importante notar que essas equações são “clássicas” no sentido de que existe uma hamiltoniana escrita em termos de coordenadas generalizadas $\langle \Pi \rangle$, $\langle \phi \rangle$, μ_k e τ_k , tal que as equações (3.23), (3.24) e (3.25) podem ser derivadas a partir das equações de movimento de Hamilton, onde τ_κ é o momento associado a μ_κ da mesma maneira que $\langle \Pi \rangle$ e $\langle \phi \rangle$. A única quantidade não definida nessas equações é o parâmetro de expansão μ , que será discutido na próxima seção

3.2-POTENCIAL EFETIVO

Nesta seção estudamos as condições de equilíbrio para as equações de movimento obtidas na seção (3.1). Primeiro definimos ϕ_0 como sendo o valor de equilíbrio de $\langle \phi \rangle'$ da seguinte maneira

$$\langle \phi \rangle = \phi_0 + \langle \phi \rangle'. \quad (3.26)$$

Em termos de ϕ_0 e $\langle\phi\rangle'$, a equação (3.23) fica

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \langle\phi\rangle' = & - \left[\lambda + m^2 \phi_0 + \frac{g}{3!} \phi_0^3 + \frac{g}{4L} \phi_0 \sum_k \left(\frac{1}{\sqrt{k^2 + \mu_\kappa^2}} - \frac{1}{\sqrt{k^2 + m^2}} \right) \right] \\ & - \left[m^2 + \frac{g}{4L} \sum_k \left(\frac{1}{\sqrt{k^2 + \mu_\kappa^2}} - \frac{1}{\sqrt{k^2 + m^2}} \right) + \frac{g}{2} \phi_0^2 \right] \langle\phi\rangle' \\ & - \frac{g}{2} \phi_0 \langle\phi\rangle'^2 - \frac{g}{3!} \langle\phi\rangle'^3 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Desse modo a condição de equilíbrio é

$$\lambda + m^2 \phi_0 + \frac{g}{3!} \phi_0^3 + \frac{g}{4L} \phi_0 \sum_k \left(\frac{1}{\sqrt{k^2 + \mu_\kappa^2}} - \frac{1}{\sqrt{k^2 + m^2}} \right) = 0 \quad (3.28)$$

Fazendo as mesmas considerações para (3.24) e (3.25), temos

$$\dot{\mu}_\kappa = 0; \quad \tau_\kappa = 0 \quad (3.29)$$

$$\mu_\kappa^2 = m^2 + \frac{g}{2} \phi_0^2 + \frac{g}{4L} \sum_{k'} \left(\frac{1}{\sqrt{k'^2 + \mu_{\kappa'}^2}} - \frac{1}{\sqrt{k'^2 + m^2}} \right) \quad (3.30)$$

Fixamos o parâmetro de expansão do operador de campo μ como sendo μ_κ para o equilíbrio de campo médio, que nesse caso é independente de k , i.e.,

$$\mu^2 = m^2 + \frac{g}{2} \phi_0^2 + \frac{g}{4L} \sum_k \left(\frac{1}{\sqrt{k^2 + \mu^2}} - \frac{1}{\sqrt{k^2 + m^2}} \right) \quad (3.31)$$

Outra quantidade de interesse é a energia de campo médio,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{E}{L} \right\rangle & \equiv \frac{1}{L} \text{Tr } H F_0 \\ & = \frac{\langle \Pi \rangle^2}{2} + \frac{m^2}{2} \langle \phi \rangle^2 + \frac{g}{4!} \langle \phi \rangle^4 + \lambda \langle \phi \rangle + \frac{g}{8L} \langle \phi \rangle^2 \sum_k \left(\frac{1}{\sqrt{k^2 + \mu_\kappa^2}} - \frac{1}{\sqrt{k^2 + m^2}} \right) \\ & + \frac{g}{32L^2} \left[\sum_k \left(\frac{1}{\sqrt{k^2 + \mu_\kappa^2}} - \frac{1}{\sqrt{k^2 + m^2}} \right) \right]^2 - \frac{g}{32L^2} \left(\frac{1}{\sqrt{k^2 + m^2}} \right)^2 \\ & + \frac{1}{4L} \sum_k \left(\frac{k^2 + m^2}{\sqrt{k^2 + \mu_\kappa^2}} + \sqrt{k^2 + \mu_\kappa^2} + \sqrt{k^2 + \mu^2} \tau_\kappa^2 \right), \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde usamos a condição inicial $p_\kappa(0) = 0$. A conservação de energia pode ser verificada explicitamente usando as equações de movimento (3.23), (3.24) e (3.25). Fazendo a expansão $\langle \phi \rangle = \phi_0 + \langle \phi \rangle'$ e usando as condições de equilíbrio $\langle \phi \rangle' = 0$ e $\mu_\kappa = \mu$ temos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{E}{L} \right\rangle_{\substack{\langle \phi \rangle' = 0 \\ \mu_\kappa = \mu \\ \partial_t \langle \phi \rangle' = 0}} &= \lambda \phi_0 + \frac{m^2}{2} \phi_0^2 + \frac{g}{4!} \phi_0^4 + \frac{g}{4L} \phi_0^2 \sum_k \left(\frac{1}{\sqrt{k^2 + \mu^2}} - \frac{1}{\sqrt{k^2 + m^2}} \right) \\ &+ \frac{g}{32L^2} \left[\sum_k \left(\frac{1}{\sqrt{k^2 + \mu^2}} - \frac{1}{\sqrt{k^2 + m^2}} \right) \right]^2 - \frac{g}{32L^2} \left(\frac{1}{\sqrt{k^2 + m^2}} \right)^2 \\ &+ \frac{1}{2L} \sum_k \left(\sqrt{k^2 + \mu^2} + \frac{m^2 - \mu^2}{2\sqrt{k^2 + \mu^2}} \right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

No limite do contínuo ($L \rightarrow \infty$),

$$\sum_k \left(\frac{1}{\sqrt{k^2 + \mu^2}} - \frac{1}{\sqrt{k^2 + m^2}} \right) = \frac{L}{2\pi} \int dk \left(\frac{1}{\sqrt{k^2 + \mu^2}} - \frac{1}{\sqrt{k^2 + m^2}} \right) = \frac{L}{2\pi} \ln \frac{m^2}{\mu^2}. \quad (3.34)$$

Para integrar o último termo de (3.31), precisamos somar e subtrair $\int dk \sqrt{k^2 + m^2}$. A integração é direta,

$$\frac{1}{2L} \sum_k \left(\sqrt{k^2 + \mu^2} + \frac{m^2 - \mu^2}{2\sqrt{k^2 + \mu^2}} \right) = \frac{1}{8\pi} (\mu^2 - m^2) + \frac{m^2}{8\pi} \ln \frac{m^2}{\mu^2} + \frac{1}{4\pi} \int dk \sqrt{k^2 + m^2}. \quad (3.35)$$

Substituindo (3.34) e (3.35) na (3.33) temos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{E}{L} \right\rangle_{\substack{\langle \phi \rangle' = 0 \\ \mu_\kappa = \mu \\ \partial_t \langle \phi \rangle' = 0}} &= \lambda \phi_0 + \frac{m^2}{2} \phi_0^2 + \frac{g}{4!} \phi_0^4 + \frac{g}{16\pi} \phi_0^2 \ln \frac{m^2}{\mu^2} + \frac{g}{128\pi^2} \left(\ln \frac{m^2}{\mu^2} \right)^2 \\ &+ \frac{1}{8\pi} (\mu^2 - m^2) + \frac{m^2}{8\pi} \ln \frac{m^2}{\mu^2} \\ &- \frac{g}{128\pi^2} \left(\int dk \frac{1}{\sqrt{k^2 + m^2}} \right)^2 + \frac{1}{4\pi} \int dk \sqrt{k^2 + m^2}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Como m^2 é massa do vácuo, os dois últimos termos da (3.36) podem ser interpretados como a energia de ponto zero do vácuo. Da equação (3.28) vemos, de fato, que λ é uma força externa. Ela permite ajustar diversos valores de equilíbrio ϕ_0 para $\langle \phi \rangle$. Nessas condições,

podemos definir o potencial efetivo de campo médio como sendo

$$\begin{aligned}
 V_{\text{ef}}(\phi_0) &= \left\langle \frac{E}{L} \right\rangle_{\substack{(\phi) = \phi_0 \\ \mu_k = \mu}} - \lambda \phi_0 - \text{densidade da energia do vácuo} \\
 &= \frac{m^2}{2} \phi_0^2 + \frac{g}{4!} \phi_0^4 + \frac{g}{16\pi} \phi_0^2 \ln \frac{m^2}{\mu^2} + \frac{g}{128\pi^2} \left(\ln \frac{m^2}{\mu^2} \right)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{8\pi} (\mu^2 - m^2) + \frac{m^2}{8\pi} \ln \frac{m^2}{\mu^2},
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

onde μ é a solução da equação (3.31), que pode ser reescrita como

$$\mu^2 = m^2 + \frac{g}{2} \phi_0^2 + \frac{g}{8\pi} \ln \frac{m^2}{\mu^2}. \tag{3.38}$$

As equações (3.37) e (3.38) fixam o potencial efetivo na aproximação de campo médio e reproduzem bem o conhecido^[15] potencial efetivo Gaussiano.

Na renormalização discutida anteriormente, escolhemos a quantidade renormalizada como sendo a massa do vácuo. A redefinição da m_B em termo da relação (3.2) e a escolha do contratermo com (3.22) controlam, de fato, as divergências ultravioletas que aparecem nas equações de movimento (3.23) e (3.25) e da energia (3.36) para o caso em que o campo é espacialmente homogêneo. A pergunta agora é: teremos os mesmos termos divergentes e consequentemente poderemos usar o mesmo contratermo para o caso mais geral de sistemas não uniformes?

Para responder essa pergunta, precisamos lembrar que a diferença do tratamento para o campo não homogêneo é que neste caso os orbitais naturais não são fixos, mas podem ser expandidos instantaneamente em termos de uma base fixa, no caso as ondas planas. Essa descrição é análoga ao tratamento do problema de corpo rígido num referencial fixo. A transformação canônica adicional (2.31), através das matrizes U e V , em relação ao caso do campo homogêneo, não modifica o tipo de divergência. Além disso, podemos ainda considerar o vácuo homogêneo. Dessa maneira, o contratermo pode ser mantido na mesma forma.

CAPÍTULO 4

EQUAÇÕES DE MOVIMENTO COM TERMOS DE COLISÃO PARA A TEORIA ϕ^4 EM 1 + 1 DIMENSÕES

4.1- SISTEMA INHOMOGÊNEO

Nesta seção mostramos a implementação do esquema de aproximação discutido na seção (2.3), campo médio mais correção com termos de colisão, para as expressões gerais obtidas na seção (2.2). Antes é interessante resumir os ingredientes usados. Primeiro lembramos que a dinâmica efetiva das variáveis relevantes é dada pelas seguintes equações:

$$i\dot{A}_k = \sum_{\alpha} U_{k\alpha} \text{Tr}[d_{\alpha}, H] F - \sum_{\alpha} V_{k\alpha}^* \text{Tr}[d_{\alpha}^{\dagger}, H] F, \quad (4.1a)$$

$$i\dot{p}_{\alpha} = \text{Tr}[d_{\alpha}^{\dagger} d_{\alpha}, H] F, \quad (4.1b)$$

$$i\dot{U} = U h + V^* g^*, \quad (4.1c)$$

$$i\dot{V} = V h + U^* g^*. \quad (4.1d)$$

As matrizes h e g das equações (4.1c) e (4.1d) são expressas em termos dos traços

$$(p_{\beta} - p_{\alpha}) h_{\alpha\beta} = \text{Tr}[d_{\beta}^{\dagger} d_{\alpha}, H] F, \quad (\alpha \neq \beta) \quad (4.2a)$$

$$(1 + p_{\alpha} + p_{\beta}) g_{\alpha\beta} = \text{Tr}[d_{\beta} d_{\alpha}, H] F. \quad (4.2b)$$

A matriz densidade do sistema é aproximada por

$$F = F_0(t) - i \int_0^t dt' \mathcal{Q}(t') [H, F_0(t')] \quad (4.3a)$$

com

$$F_0(t) = \prod_{\alpha} \frac{1}{1 + p_{\alpha}(t)} \left[\frac{p_{\alpha}(t)}{1 + p_{\alpha}(t)} \right]^{d_{\alpha}^{\dagger}(t) d_{\alpha}(t)}. \quad (4.3b)$$

As quantidades H e $Q[H, F_0]$ são dadas pelas equações (C.6) e (D.2) respectivamente. Nessa aproximação os operadores em tempos diferentes são relacionados por

$$d_\alpha(t) = \sum_\gamma M_{\alpha\gamma}(t, t') d_\gamma(t'). \quad (4.4)$$

A dinâmica da matriz M é dada no apêndice E. Com esses ingredientes o cálculo das equações de movimento é um exercício algébrico direto e obtivemos os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} i\dot{A}_k = & \frac{k_0}{2}(A_k + A_{-k}^*) + \frac{m^2 + k^2}{2k_0}(A_k - A_{-k}^*) \\ & + \frac{g}{24L} \sum_{k_1 k_2 k_3} \frac{1}{\sqrt{k_{01} k_{02} k_{03} k_0}} \left\{ \right. \\ & \left(\delta_{k_1+k_2+k_3+k,0} A_{k_1}^* A_{k_2}^* A_{k_3}^* + \delta_{k_1+k_2+k_3-k,0} A_{k_1} A_{k_2} A_{k_3} \right) \\ & 3 \left(\delta_{k_1+k_2-k_3+k,0} A_{k_1}^* A_{k_2}^* A_{k_3} + \delta_{k_1+k_2-k_3-k,0} A_{k_1} A_{k_2} A_{k_3}^* \right) \left. \right\} \\ & + \frac{g}{8L} \sum_{k_1 k_2 k_3} \frac{1}{\sqrt{k_{01} k_{02} k_{03} k_0}} \\ & \left(\delta_{k_1+k-k_2+k_3,0} A_{k_1}^* + \delta_{k_1-k-k_2+k_3,0} A_{k_1} \right) \sum_\alpha T_{k_2\alpha} T_{k_3\alpha}^* (1 + 2p_\alpha) \\ & - \frac{g}{8Lk_0} (A_k + A_{-k}^*) \sum_{k'} \frac{1}{\sqrt{k'^2 + m^2}} + i\Gamma_A(t), \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\dot{p}_\alpha = \Gamma_p(t), \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} & (p_\beta - p_\alpha) h_{\alpha\beta} \\ = & \sum_k \left[\frac{k_0}{2} (U_{k\alpha}^* + V_{-k\alpha}^*) (U_{k\beta} + V_{-k\beta}) + \frac{k^2 + m^2}{2k_0} T_{k\alpha}^* T_{k\beta} \right] (p_\beta - p_\alpha) \\ & + \frac{g}{16L} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \frac{1}{\sqrt{k_{01} k_{02} k_{03} k_{04}}} \left\{ \right. \\ & \delta_{k_1+k_2+k_3-k_4,0} \left(A_{k_1}^* A_{k_2}^* T_{k_3\alpha}^* T_{k_4\beta} + A_{k_1} A_{k_2} T_{k_3\beta} T_{k_4\alpha}^* \right) \\ & + \delta_{k_1+k_2-k_3+k_4,0} \left(A_{k_1} A_{k_2} T_{k_3\alpha}^* T_{k_4\beta} + A_{k_1}^* A_{k_2}^* T_{k_3\beta} T_{k_4\alpha}^* \right) \\ & \left. + 2\delta_{k_1-k_2+k_3-k_4,0} \left(A_{k_1}^* A_{k_2} T_{k_3\alpha}^* T_{k_4\beta} + A_{k_1} A_{k_2}^* T_{k_3\beta} T_{k_4\alpha}^* \right) \right\} (p_\beta - p_\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{g}{8L} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \frac{\delta_{k_1+k_2-k_3-k_4,0}}{\sqrt{k_{01}k_{02}k_{03}k_{04}}} T_{k_1\alpha}^* T_{k_3\beta} \sum_{\alpha'} T_{k_2\alpha'}^* T_{k_4\alpha'} (p_\beta - p_\alpha) \\
& - \frac{g}{8L} \sum_{k_1} \frac{1}{k_{01}} T_{k_1\alpha}^* T_{k_1\beta} \sum_{k_2} \frac{1}{\sqrt{k_2^2 + m^2}} (p_\beta - p_\alpha) + i\Gamma_h(t), \tag{4.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1 + p_\alpha + p_\beta) g_{\alpha\beta} \\
& = \sum_k \left[-\frac{k_0}{2} (U_{k\alpha}^* + V_{-k\alpha}^*) (U_{-k\beta}^* + V_{k\beta}^*) + \frac{k^2 + m^2}{2k_0} (U_{k\alpha}^* - V_{-k\alpha}^*) (U_{-k\beta}^* - V_{k\beta}^*) \right] \\
& \quad + \frac{g}{8L} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \frac{1 + p_\alpha + p_\beta}{\sqrt{k_{01}k_{02}k_{03}k_{04}}} \left\{ \right. \\
& \quad \left(\delta_{k_1+k_2+k_3+k_4,0} A_{k_1}^* A_{k_2}^* + \delta_{k_1+k_2-k_3-k_4,0} A_{k_1} A_{k_2} + 2\delta_{k_1-k_2+k_3+k_4,0} A_{k_1}^* A_{k_2} \right) T_{k_3\alpha}^* T_{k_4\beta} \left. \right\} \\
& \quad + \frac{g}{8L} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \delta_{k_1+k_2+k_3-k_4,0} \frac{1 + p_\alpha + p_\beta}{\sqrt{k_{01}k_{02}k_{03}k_{04}}} T_{k_1\alpha}^* T_{k_2\beta}^* \sum_{\alpha'} T_{k_3\alpha'}^* T_{k_4\alpha'} (1 + 2p_{\alpha'}) \\
& \quad - \frac{g}{8L} \sum_{k_1} \frac{1 + p_\alpha + p_\beta}{k_{01}} T_{k_1\alpha}^* T_{k_1\beta}^* \sum_{k_2} \frac{1}{\sqrt{k_2^2 + m^2}} - i\Gamma_g(t). \tag{4.8}
\end{aligned}$$

As integrais de colisão $\Gamma(t)$ são:

$$\begin{aligned}
\Gamma_A(t) = & \frac{g^2}{96L^2} \sum_{k_1 k_2 k_3} \frac{1}{\sqrt{k_{01}k_{02}k_{03}k_0}} \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \left\{ \right. \\
& \delta_{k_1+k_2+k_3+k,0} T_{k_1\alpha_1}^* T_{k_2\alpha_2}^* T_{k_3\alpha_3}^* I_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}^{(4)} \\
& - \delta_{k_1+k_2+k_3-k,0} T_{k_1\alpha_1} T_{k_2\alpha_2} T_{k_3\alpha_3} I_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}^{(4)*} \\
& + 3\delta_{k_1+k_2+k-k_3,0} T_{k_1\alpha_1}^* T_{k_2\alpha_2}^* T_{k_3\alpha_3} I_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}^{(5)} \\
& \left. - 3\delta_{k_1+k_2-k-k_3,0} T_{k_1\alpha_1} T_{k_2\alpha_2} T_{k_3\alpha_3}^* I_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}^{(5)*} \right\}, \tag{4.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_p(t) = & \frac{g^2}{96L^2} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \frac{1}{\sqrt{k_{01}k_{02}k_{03}k_{04}}} \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \left\{ \right. \\
& \delta_{k_1+k_2+k_3+k_4,0} T_{k_1\alpha_1}^* T_{k_2\alpha_2}^* T_{k_3\alpha_3}^* T_{k_4\alpha}^* I_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha}^{(1)} \\
& + 3\delta_{k_1+k_2+k_3-k_4,0} T_{k_1\alpha_1}^* T_{k_2\alpha_2}^* T_{k_3\alpha}^* T_{k_4\alpha_3} I_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha}^{(2)} \\
& - \delta_{k_1+k_2+k_3-k_4,0} T_{k_1\alpha_1}^* T_{k_2\alpha_2}^* T_{k_3\alpha_3}^* T_{k_4\alpha} I_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha}^{(2)} \\
& \left. + 3\delta_{k_1+k_2-k_3-k_4,0} T_{k_1\alpha}^* T_{k_2\alpha_1}^* T_{k_3\alpha_2} T_{k_4\alpha_3} I_{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3}^{(3)} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{g^2}{32L^2} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \frac{1}{\sqrt{k_{01} k_{02} k_{03} k_{04}}} \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \left\{ \right. \\
& \left(\delta_{k_1+k_2+k_3+k_4,0} A_{k_1} + \delta_{-k_1+k_2+k_3+k_4,0} A_{k_1}^* \right) T_{k_2 \alpha_1} T_{k_3 \alpha_2} T_{k_4 \alpha} I_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha}^{(4)} \\
& 2 \left(\delta_{k_1-k_2-k_3+k_4,0} A_{k_1} + \delta_{k_1+k_2+k_3-k_4,0} A_{k_1}^* \right) T_{k_2 \alpha_1}^* T_{k_3 \alpha}^* T_{k_4 \alpha_2} I_{\alpha_1 \alpha_2}^{(5)} \\
& - \left(\delta_{k_1-k_2-k_3+k_4,0} A_{k_1} + \delta_{k_1+k_2+k_3-k_4,0} A_{k_1}^* \right) T_{k_2 \alpha_1}^* T_{k_3 \alpha_2}^* T_{k_4 \alpha} I_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha}^{(5)} \left. \right\} \\
& + \text{c.c.} , \tag{4.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_h(t) = & \frac{g^2}{96L^2} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \frac{1}{\sqrt{k_{01} k_{02} k_{03} k_{04}}} \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \left\{ \right. \\
& \delta_{k_1+k_2+k_3+k_4,0} T_{k_1 \alpha_1}^* T_{k_2 \alpha_2}^* T_{k_3 \alpha_3}^* T_{k_4 \alpha} I_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta}^{(1)} \\
& + 3 \delta_{k_1+k_2+k_3-k_4,0} T_{k_1 \alpha_1}^* T_{k_2 \alpha_2}^* T_{k_3 \alpha}^* T_{k_4 \alpha_3} I_{\alpha_1 \alpha_2 \beta \alpha_3}^{(2)} \\
& - \delta_{k_1+k_2+k_3-k_4,0} T_{k_1 \alpha_1} T_{k_2 \alpha_2} T_{k_3 \alpha_3} T_{k_4 \alpha}^* I_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta}^{(2)*} \\
& + 3 \delta_{k_1+k_2-k_3-k_4,0} T_{k_1 \alpha}^* T_{k_2 \alpha_1}^* T_{k_3 \alpha_2} T_{k_4 \alpha_3} I_{\beta \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}^{(3)} \left. \right\} \\
& + \frac{g^2}{32L^2} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \frac{1}{\sqrt{k_{01} k_{02} k_{03} k_{04}}} \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \left\{ \right. \\
& \left(\delta_{-k_1+k_2+k_3+k_4,0} A_{k_1} + \delta_{k_1+k_2+k_3+k_4,0} A_{k_1}^* \right) T_{k_2 \alpha_1}^* T_{k_3 \alpha_2}^* T_{k_4 \alpha}^* I_{\alpha_1 \alpha_2 \beta}^{(4)} \\
& 2 \left(\delta_{k_1-k_2-k_3+k_4,0} A_{k_1} + \delta_{k_1+k_2+k_3-k_4,0} A_{k_1}^* \right) T_{k_2 \alpha_1}^* T_{k_3 \alpha}^* T_{k_4 \alpha_2} I_{\alpha_1 \beta \alpha_2}^{(5)} \\
& - \left(\delta_{k_1-k_2-k_3+k_4,0} A_{k_1} + \delta_{k_1+k_2+k_3-k_4,0} A_{k_1}^* \right) T_{k_2 \alpha_1} T_{k_3 \alpha_2} T_{k_4 \alpha}^* I_{\alpha_1 \alpha_2 \beta}^{(5)} \left. \right\} \\
& + \text{c.c.} \ (\alpha \leftrightarrow \beta) , \tag{4.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_g(t) = & \frac{g^2}{96L^2} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \frac{1}{\sqrt{k_{01} k_{02} k_{03} k_{04}}} \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \left\{ \right. \\
& \delta_{k_1+k_2+k_3-k_4,0} T_{k_1 \alpha_1} T_{k_2 \alpha_2} T_{k_3 \alpha_3} T_{k_4 \alpha}^* I_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta}^{(1)*} \\
& + 3 \delta_{k_1+k_2-k_3-k_4,0} T_{k_1 \alpha_1} T_{k_2 \alpha_2} T_{k_3 \alpha}^* T_{k_4 \alpha_3} I_{\alpha_1 \alpha_2 \beta \alpha_3}^{(2)*} \\
& - \delta_{k_1+k_2+k_3+k_4,0} T_{k_1 \alpha_1}^* T_{k_2 \alpha_2}^* T_{k_3 \alpha_3}^* T_{k_4 \alpha}^* I_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta}^{(2)} \\
& - 3 \delta_{k_1+k_2+k_3-k_4,0} T_{k_1 \alpha_1}^* T_{k_2 \alpha_2}^* T_{k_3 \alpha}^* T_{k_4 \alpha_3} I_{\alpha_1 \alpha_2 \beta \alpha_3}^{(3)} \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{g^2}{32L^2} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \frac{1}{\sqrt{k_{01} k_{02} k_{03} k_{04}}} \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \left\{ \right. \\
& \quad \left(\delta_{k_1+k_2+k_3-k_4,0} A_{k_1} + \delta_{k_1-k_2-k_3+k_4,0} A_{k_1}^* \right) T_{k_2 \alpha_1} T_{k_3 \alpha_2} T_{k_4 \alpha}^* I_{\alpha_1 \alpha_2 \beta}^{(4)*} \\
& \quad 2 \left(\delta_{k_1-k_2-k_3+k_4,0} A_{k_1} + \delta_{k_1+k_2+k_3-k_4,0} A_{k_1}^* \right) T_{k_2 \alpha_1} T_{k_3 \alpha}^* T_{k_4 \alpha_2}^* I_{\alpha_1 \beta \alpha_2}^{(5)*} \\
& \quad \left. - \left(\delta_{-k_1+k_2+k_3+k_4,0} A_{k_1} + \delta_{k_1+k_2+k_3+k_4,0} A_{k_1}^* \right) T_{k_2 \alpha_1}^* T_{k_3 \alpha_2}^* T_{k_4 \alpha}^* I_{\alpha_1 \alpha_2 \beta}^{(5)} \right\} \\
& \quad + \alpha \leftrightarrow \beta .
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Nessas expressões usamos as notações

c.c. = complexo conjugado,

$\alpha \leftrightarrow \beta$ = expressão análoga a anterior onde α 's são substituídos por β 's e vice versa,

c.c. ($\alpha \leftrightarrow \beta$) = complexo conjugado da expressão anterior onde α 's são substituídos por β 's e vice versa.

Também usamos as abreviações

$$\begin{aligned}
I_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}^{(1)}(t) &= \int_0^t dt' \sum_{k'_1 k'_2 k'_3 k'_4} \frac{\delta_{k'_1+k'_2+k'_3+k'_4,0}}{\sqrt{k'_{01} k'_{02} k'_{03} k'_{04}}} \sum_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4} (T_{k'_1 \gamma_1} T_{k'_2 \gamma_2} T_{k'_3 \gamma_3} T_{k'_4 \gamma_4})_{t'} \\
&\times \left(1 + \sum_i^4 p_{\gamma_i} + \sum_{i<j}^4 p_{\gamma_i} p_{\gamma_j} + \sum_{i<j<\ell}^4 p_{\gamma_i} p_{\gamma_j} p_{\gamma_\ell} \right)_{t'} \\
&\times \left(M_{\alpha_1 \gamma_1}^*(t, t') M_{\alpha_2 \gamma_2}^*(t, t') M_{\alpha_3 \gamma_3}^*(t, t') M_{\alpha_4 \gamma_4}^*(t, t') \right),
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
I_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}^{(2)}(t) &= \int_0^t dt' \sum_{k'_1 k'_2 k'_3 k'_4} \frac{\delta_{k'_1+k'_2+k'_3-k'_4,0}}{\sqrt{k'_{01} k'_{02} k'_{03} k'_{04}}} \sum_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4} (T_{k'_1 \gamma_1} T_{k'_2 \gamma_2} T_{k'_3 \gamma_3} T_{k'_4 \gamma_4}^*)_{t'} \\
&\times \left(p_{\gamma_4} - p_{\gamma_1} p_{\gamma_2} p_{\gamma_3} + p_{\gamma_4} \sum_i^3 p_{\gamma_i} + p_{\gamma_4} \sum_{i<j}^3 p_{\gamma_i} p_{\gamma_j} \right)_{t'} \\
&\times \left(M_{\alpha_1 \gamma_1}^*(t, t') M_{\alpha_2 \gamma_2}^*(t, t') M_{\alpha_3 \gamma_3}^*(t, t') M_{\alpha_4 \gamma_4}(t, t') \right),
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$I_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}^{(3)}(t) = \int_0^t dt' \sum_{k'_1 k'_2 k'_3 k'_4} \frac{\delta_{k'_1+k'_2-k'_3-k'_4,0}}{\sqrt{k'_{01} k'_{02} k'_{03} k'_{04}}} \sum_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4} (T_{k'_1 \gamma_1} T_{k'_2 \gamma_2} T_{k'_3 \gamma_3}^* T_{k'_4 \gamma_4}^*)_{t'}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[p_{\gamma_3} p_{\gamma_4} (1 + p_{\gamma_1}) (1 + p_{\gamma_2}) - p_{\gamma_1} p_{\gamma_2} (1 + p_{\gamma_3}) (1 + p_{\gamma_4}) \right]_{t'} \\
& \times \left(M_{\alpha_1 \gamma_1}^*(t, t') M_{\alpha_2 \gamma_2}^*(t, t') M_{\alpha_3 \gamma_3}^*(t, t') M_{\alpha_4 \gamma_4}^*(t, t') \right), \quad (4.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}^{(4)}(t) &= \int_0^t dt' \sum_{k'_1 k'_2 k'_3 k'_4} \frac{1}{\sqrt{k'_{01} k'_{02} k'_{03} k'_{04}}} \sum_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3} (T_{k'_2 \gamma_1} T_{k'_3 \gamma_2} T_{k'_4 \gamma_3})_{t'} \\
& \times \left(\delta_{k'_1 + k'_2 + k'_3 + k'_4, 0} A_{k'_1} + \delta_{-k'_1 + k'_2 + k'_3 + k'_4, 0} A_{k'_1}^* \right)_{t'} \left(1 + \sum_i^3 p_{\gamma_i} + \sum_{i < j}^3 p_{\gamma_i} p_{\gamma_j} \right)_{t'} \\
& \times \left(M_{\alpha_1 \gamma_1}^*(t, t') M_{\alpha_2 \gamma_2}^*(t, t') M_{\alpha_3 \gamma_3}^*(t, t') \right), \quad (4.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}^{(5)}(t) &= \int_0^t dt' \sum_{k'_1 k'_2 k'_3 k'_4} \frac{1}{\sqrt{k'_{01} k'_{02} k'_{03} k'_{04}}} \sum_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3} (T_{k'_2 \gamma_1} T_{k'_3 \gamma_2} T_{k'_4 \gamma_3}^*)_{t'} \\
& \times \left(\delta_{k'_1 + k'_2 + k'_3 - k'_4, 0} A_{k'_1} + \delta_{k'_1 - k'_2 - k'_3 + k'_4, 0} A_{k'_1}^* \right)_{t'} \left[p_{\gamma_3} (1 + p_{\gamma_1} + p_{\gamma_2}) - p_{\gamma_1} p_{\gamma_2} \right]_{t'} \\
& \times \left(M_{\alpha_1 \gamma_1}^*(t, t') M_{\alpha_2 \gamma_2}^*(t, t') M_{\alpha_3 \gamma_3}^*(t, t') \right). \quad (4.17)
\end{aligned}$$

A presença de g^2 nas integrais de colisão indica, de fato, que a aproximação adotada leva em conta os efeitos de correlação de segunda ordem devidos ao termo em ϕ^4 de H . Vale a pena notar que as integrais definidas pelas equações (4.13)–(4.17) são integrais de memória, que se anulam em $t = 0$. Para calculá-las num certo instante t , precisamos ter memorizado os valores do integrando em todos os instantes t' de 0 até t .

É importante ainda calcular a densidade de energia do sistema, dada por

$$\left\langle \frac{E}{L} \right\rangle = \frac{1}{L} \text{Tr} H F = \frac{1}{L} \text{Tr} H F_0 + \frac{1}{L} \text{Tr} H F'. \quad (4.18)$$

Esse cálculo também é direto, e o resultado é

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{E}{L} \right\rangle &= \frac{1}{4L} \sum_k \left[k_0 \left(2A_k A_k^* - A_k^* A_{-k}^* - A_k A_{-k} \right) + \frac{k^2}{k_0} \left(A_k^* A_{-k}^* + A_k A_{-k} + 2A_k^* A_k \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{m^2}{k_0} \left(A_k^* A_{-k}^* + A_k A_{-k} + 2A_k^* A_k \right) \right] \\
& + \frac{1}{4L} \sum_k \sum_\alpha \left[k_0 (U_{k\alpha}^* + V_{-k\alpha}^*) (U_{k\alpha} + V_{-k\alpha}) + \frac{k^2 + m^2}{k_0} T_{k\alpha}^* T_{k\alpha} \right] (1 + 2p_\alpha)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{g}{96L^2} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \frac{1}{\sqrt{k_{01} k_{02} k_{03} k_{04}}} \left\{ \right. \\
& \quad \delta_{k_1+k_2+k_3+k_4,0} \left[A_{k_1} A_{k_2} A_{k_3} A_{k_4} + A_{k_1}^* A_{k_2}^* A_{k_3}^* A_{k_4}^* \right] \\
& \quad + 4\delta_{k_1+k_2+k_3-k_4,0} \left[A_{k_1} A_{k_2} A_{k_3} A_{k_4}^* + A_{k_1}^* A_{k_2}^* A_{k_3}^* A_{k_4} \right] \\
& \quad \left. + 6\delta_{k_1+k_2-k_3-k_4,0} A_{k_1} A_{k_2} A_{k_3}^* A_{k_4}^* \right\} \\
& + \frac{g}{16L^2} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \frac{1}{\sqrt{k_{01} k_{02} k_{03} k_{04}}} \sum_{\alpha} \left\{ \right. \\
& \quad \delta_{k_1+k_2-k_3+k_4,0} \left[A_{k_1} A_{k_2} T_{k_3\alpha}^* T_{k_4\alpha} p_{\alpha} + A_{k_1}^* A_{k_2}^* T_{k_3\alpha} T_{k_4\alpha}^* (1+p_{\alpha}) \right] \\
& \quad + \delta_{k_1+k_2+k_3-k_4,0} \left[A_{k_1} A_{k_2} T_{k_3\alpha} T_{k_4\alpha}^* (1+p_{\alpha}) + A_{k_1}^* A_{k_2}^* T_{k_3\alpha}^* T_{k_4\alpha} p_{\alpha} \right] \\
& \quad + 2\delta_{k_1-k_2+k_3-k_4,0} \left[A_{k_1} A_{k_2}^* T_{k_3\alpha} T_{k_4\alpha}^* (1+p_{\alpha}) + A_{k_1}^* A_{k_2} T_{k_3\alpha}^* T_{k_4\alpha} p_{\alpha} \right] \left. \right\} \\
& - \frac{g}{16L^2} \sum_{k_1} \frac{1}{k_{01}} \left(A_{k_1}^* A_{-k_1}^* + A_{k_1} A_{-k_1} + 2A_{k_1}^* A_{k_1} \right) \sum_{k_2} \frac{1}{\sqrt{k_2^2 + m^2}} \\
& \quad + \frac{g}{32L^2} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \frac{\delta_{k_1+k_2-k_3-k_4,0}}{\sqrt{k_{01} k_{02} k_{03} k_{04}}} \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \left\{ \right. \\
& \quad 2T_{k_1\alpha_1}^* T_{k_2\alpha_2}^* T_{k_3\alpha_1} T_{k_4\alpha_2} p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} + T_{k_1\alpha_1}^* T_{k_2\alpha_2}^* T_{k_3\alpha_2} T_{k_4\alpha_1} (1+4p_{\alpha_1}+2p_{\alpha_1}p_{\alpha_2}) \left. \right\} \\
& - \frac{g}{16L^2} \sum_{\alpha} \sum_{k_1} \frac{1}{k_{01}} T_{k_1\alpha} T_{k_1\alpha}^* (1+2p_{\alpha}) \sum_{k_2} \frac{1}{\sqrt{k_2^2 + m^2}} + \Gamma_E \tag{4.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_E = & i \frac{g^2}{384L^3} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \frac{1}{\sqrt{k_{01} k_{02} k_{03} k_{04}}} \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \left\{ \right. \\
& \delta_{k_1+k_2+k_3+k_4,0} T_{k_1\alpha_1}^* T_{k_2\alpha_2}^* T_{k_3\alpha_3}^* T_{k_4\alpha_4}^* I_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}^{(1)} \\
& + 4\delta_{k_1+k_2+k_3-k_4,0} T_{k_1\alpha_1}^* T_{k_2\alpha_2}^* T_{k_3\alpha_3}^* T_{k_4\alpha_3}^* I_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}^{(2)} \\
& + 3\delta_{k_1+k_2-k_3-k_4,0} T_{k_1\alpha_1}^* T_{k_2\alpha_2}^* T_{k_3\alpha_3}^* T_{k_4\alpha_4}^* I_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}^{(3)} \left. \right\} \\
& + i \frac{g^2}{96L^3} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \frac{1}{\sqrt{k_{01} k_{02} k_{03} k_{04}}} \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \left\{ \right. \\
& \left(\delta_{-k_1+k_2+k_3+k_4,0} A_{k_1} + \delta_{k_1+k_2+k_3+k_4,0} A_{k_1}^* \right) T_{k_2\alpha_1}^* T_{k_3\alpha_2}^* T_{k_4\alpha_3}^* I_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}^{(4)} \\
& 3 \left(\delta_{k_1-k_2-k_3+k_4,0} A_{k_1} + \delta_{k_1+k_2+k_3-k_4,0} A_{k_1}^* \right) T_{k_2\alpha_1}^* T_{k_3\alpha_2}^* T_{k_4\alpha_3}^* I_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}^{(5)} \left. \right\} + \text{c.c.} .
\end{aligned}$$

Essa expressão contém ainda uma divergência que é a energia do ponto zero do vácuo. Seguindo a discussão feita na seção (3.2), podemos redefinir a densidade da energia com a subtração dessa divergência como

$$\left\langle \frac{E}{L} \right\rangle_F = \left\langle \frac{E}{L} \right\rangle - \frac{1}{4\pi} \int dk \sqrt{k^2 + m^2} + \frac{g}{128\pi^2} \left(\int dk \frac{1}{\sqrt{k^2 + m^2}} \right)^2. \quad (4.20)$$

A conservação da energia $\partial_t \langle E/L \rangle_F = 0$, pode ser verificada diretamente a partir das equações de movimento. Portanto, temos a garantia de que a densidade de energia permanece finita para qualquer instante, se o seu valor para a condição inicial adotada for finito.

4.2- SISTEMA HOMOGÊNEO

Os mesmos cálculos podem ser adaptados ao caso particular do campo uniforme. Nesse caso as equações de movimento são (ver seção (3.1))

$$i\dot{A}_k \delta_{k0} = x_\kappa \text{Tr}[d_k \delta_{k0}, H]F - y_\kappa^* \text{Tr}[d_k^\dagger \delta_{k0}, H]F, \quad (4.21)$$

$$i\dot{p}_\kappa = \text{Tr}[d_k^\dagger d_k, H]F, \quad (4.22)$$

$$i(\dot{x}_\kappa y_\kappa - x_\kappa \dot{y}_\kappa)(1 + 2p_\kappa) = \text{Tr}[d_k^\dagger d_{-k}^\dagger, H]F. \quad (4.23)$$

A expressão de H é dada no apêndice C e os ingredientes de F são dados por (3.13) e (D.3). Os operadores em tempos diferentes são relacionados aqui por uma fase

$$d_k(t) = e^{i\varphi_\kappa(t, t')} d_k(t'),$$

onde $\varphi_\kappa(t, t')$ é dado por (E.12) e (E.14).

A equação complexa (4.21) pode ser reduzida a uma equação de segunda ordem,

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \langle \phi \rangle = & -m^2 \langle \phi \rangle - \frac{g}{3!} \langle \phi \rangle^3 - \frac{g}{4L} \langle \phi \rangle \sum_k \left[\frac{1}{\sqrt{k^2 + \mu_\kappa^2}} - \frac{1}{\sqrt{k^2 + m^2}} \right] \\ & - \frac{g}{2L} \langle \phi \rangle \sum_k \frac{p_\kappa}{\sqrt{k^2 + \mu_\kappa^2}} - \Gamma_{\langle \phi \rangle}(t), \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\dot{p}_\kappa = \Gamma_p(t). \quad (4.25)$$

A equação (4.23), que também é complexa, é separada em duas reais,

$$\dot{\mu}_\kappa = -2(k^2 + \mu^2)^{1/4} \frac{(k^2 + \mu_\kappa^2)^{5/4}}{\mu_\kappa} \tau_\kappa + \frac{2(k^2 + \mu_\kappa^2)}{(1 + 2p_\kappa)} \frac{\dot{p}_\kappa}{\mu_\kappa}, \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{k^2 + \mu^2}{k^2 + \mu_\kappa^2} \right)^{1/4} \left(\frac{1}{2} \frac{\mu_\kappa \dot{\mu}_\kappa}{k^2 + \mu_\kappa^2} \tau_\kappa + \dot{\tau}_\kappa \right) = \sqrt{k^2 + \mu_\kappa^2} - \sqrt{k^2 + \mu^2} \tau_\kappa^2 \\ & - \frac{k^2 + m^2}{\sqrt{k^2 + \mu_\kappa^2}} - \frac{g}{2} \frac{\langle \phi \rangle^2}{\sqrt{k^2 + \mu_\kappa^2}} - \frac{g}{2L} \frac{1}{\sqrt{k^2 + \mu_\kappa^2}} \sum_{k'} \frac{p_{\kappa'}}{\sqrt{k'^2 + \mu_\kappa^2}} \\ & - \frac{g}{4L} \frac{1}{\sqrt{k^2 + \mu_\kappa^2}} \sum_{k'} \left[\frac{1}{\sqrt{k'^2 + \mu_\kappa^2}} - \frac{1}{\sqrt{k'^2 + m^2}} \right] - \frac{\Gamma_\mu(t)}{1 + 2p_\kappa}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

As integrais de colisão são

$$\begin{aligned} \Gamma_{\langle \phi \rangle}(t) &= \frac{g^2}{24L^2} \sum_{k_1 k_2 k_3} \left[\frac{1}{\sqrt{k_1^2 + \mu_{\kappa_1}^2}} \frac{1}{\sqrt{k_2^2 + \mu_{\kappa_2}^2}} \frac{1}{\sqrt{k_3^2 + \mu_{\kappa_3}^2}} \right]^{1/2} \\ &\times \left(\delta_{k_1+k_2+k_3,0} I_{k_1 k_2 k_3}^{(4)} + 3\delta_{k_1+k_2-k_3,0} I_{k_1 k_2 k_3}^{(5)} \right), \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_p(t) &= \frac{g^2}{48L^2} \sum_{k_1 k_2 k_3} \left[\frac{1}{\sqrt{k_1^2 + \mu_{\kappa_1}^2}} \frac{1}{\sqrt{k_2^2 + \mu_{\kappa_2}^2}} \frac{1}{\sqrt{k_3^2 + \mu_{\kappa_3}^2}} \frac{1}{\sqrt{k^2 + \mu_\kappa^2}} \right]^{1/2} \\ &\times \left(\delta_{k_1+k_2+k_3+k,0} J_{k_1 k_2 k_3 k}^{(1)} + 3\delta_{k_1+k_2+k-k_3,0} J_{k_1 k_2 k k_3}^{(2)} \right. \\ &- \left. \delta_{k_1+k_2+k_3-k,0} J_{k_1 k_2 k_3 k}^{(2)} + 3\delta_{k+k_1-k_2-k_3,0} J_{k k_1 k_2 k_3}^{(3)} \right) \\ &+ \frac{g^2}{8L} \langle \phi \rangle \sum_{k_1 k_2} \left[\frac{1}{\sqrt{k_1^2 + \mu_{\kappa_1}^2}} \frac{1}{\sqrt{k_2^2 + \mu_{\kappa_2}^2}} \frac{1}{\sqrt{k^2 + \mu_\kappa^2}} \right]^{1/2} \\ &\times \left(\delta_{k_1+k_2+k,0} J_{k_1 k_2 k}^{(4)} + 2\delta_{k_1+k-k_2,0} J_{k_1 k k_2}^{(5)} - \delta_{k_1+k_2-k,0} J_{k_1 k_2 k}^{(5)} \right), \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu(t) &= \frac{g^2}{24L^2} \sum_{k_1 k_2 k_3} \left[\frac{1}{\sqrt{k_1^2 + \mu_{\kappa_1}^2}} \frac{1}{\sqrt{k_2^2 + \mu_{\kappa_2}^2}} \frac{1}{\sqrt{k_3^2 + \mu_{\kappa_3}^2}} \frac{1}{\sqrt{k^2 + \mu_\kappa^2}} \right]^{1/2} \\ &\times \left(\delta_{k_1+k_2+k_3+k,0} I_{k_1 k_2 k_3 k}^{(1)} + 3\delta_{k_1+k_2+k-k_3,0} I_{k_1 k_2 k k_3}^{(2)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \delta_{k_1+k_2+k_3-k,0} I_{k_1 k_2 k_3 k}^{(2)} + \delta_{k+k_1-k_2-k_3,0} I_{k k_1 k_2 k_3}^{(3)} \\
& + \frac{g^2}{4L} \langle \phi \rangle \sum_{k_1 k_2} \left[\frac{1}{\sqrt{k_1^2 + \mu_{\kappa_1}^2}} \frac{1}{\sqrt{k_2^2 + \mu_{\kappa_2}^2}} \frac{1}{\sqrt{k^2 + \mu_{\kappa}^2}} \right]^{1/2} \\
& \times \left(\delta_{k_1+k_2+k,0} I_{k_1 k_2 k}^{(4)} + 2\delta_{k_1+k-k_2,0} I_{k_1 k k_2}^{(5)} + \delta_{k_1+k_2-k,0} I_{k_1 k_2 k}^{(5)} \right). \quad (4.30)
\end{aligned}$$

As abreviações usadas são

$$\begin{aligned}
I_{k_1 k_2 k_3 k_4}^{(1)}(t) &= \int_0^t dt' \prod_{i=1}^4 \left[\frac{1}{\sqrt{k_i^2 + \mu_{\kappa_i}^2}} \right]_{t'}^{1/2} \\
&\times \left(1 + \sum_i^4 p_{\kappa_i} + \sum_{i<j}^4 p_{\kappa_i} p_{\kappa_j} + \sum_{i<j<\ell}^4 p_{\kappa_i} p_{\kappa_j} p_{\kappa_\ell} \right)_{t'} \\
&\times \sin \left[\varphi_{\kappa_1}(t, t') + \varphi_{\kappa_2}(t, t') + \varphi_{\kappa_3}(t, t') + \varphi_{\kappa_4}(t, t') \right], \quad (4.31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{k_1 k_2 k_3 k_4}^{(2)}(t) &= \int_0^t dt' \prod_{i=1}^4 \left[\frac{1}{\sqrt{k_i^2 + \mu_{\kappa_i}^2}} \right]_{t'}^{1/2} \\
&\times \left(p_{\kappa_4} - p_{\kappa_1} p_{\kappa_2} p_{\kappa_3} + p_{\kappa_4} \sum_i^3 p_{\kappa_i} + p_{\kappa_4} \sum_{i<j}^3 p_{\kappa_i} p_{\kappa_j} \right)_{t'} \\
&\times \sin \left[\varphi_{\kappa_1}(t, t') + \varphi_{\kappa_2}(t, t') + \varphi_{\kappa_3}(t, t') - \varphi_{\kappa_4}(t, t') \right], \quad (4.32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{k_1 k_2 k_3 k_4}^{(3)}(t) &= \int_0^t dt' \prod_{i=1}^4 \left[\frac{1}{\sqrt{k_i^2 + \mu_{\kappa_i}^2}} \right]_{t'}^{1/2} \\
&\times \left[p_{\kappa_3} p_{\kappa_4} (1 + p_{\kappa_1})(1 + p_{\kappa_2}) - p_{\kappa_1} p_{\kappa_2} (1 + p_{\kappa_3})(1 + p_{\kappa_4}) \right]_{t'} \\
&\times \sin \left[\varphi_{\kappa_1}(t, t') + \varphi_{\kappa_2}(t, t') - \varphi_{\kappa_3}(t, t') - \varphi_{\kappa_4}(t, t') \right], \quad (4.33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{k_1 k_2 k_3}^{(4)}(t) &= \int_0^t dt' \prod_{i=1}^3 \left[\frac{1}{\sqrt{k_i^2 + \mu_{\kappa_i}^2}} \right]_{t'}^{1/2} \langle \phi \rangle_{t'} \left(1 + \sum_i^3 p_{\kappa_i} + \sum_{i<j}^3 p_{\kappa_i} p_{\kappa_j} \right)_{t'} \\
&\times \sin \left[\varphi_{\kappa_1}(t, t') + \varphi_{\kappa_2}(t, t') + \varphi_{\kappa_3}(t, t') \right], \quad (4.34)
\end{aligned}$$

$$I_{k_1 k_2 k_3}^{(5)}(t) = \int_0^t dt' \prod_{i=1}^3 \left[\frac{1}{\sqrt{k_i^2 + \mu_{\kappa_i}^2}} \right]_{t'}^{1/2} \langle \phi \rangle_{t'} \left[p_{\kappa_3}(1 + p_{\kappa_1} + p_{\kappa_2}) - p_{\kappa_1} p_{\kappa_2} \right]_{t'} \\ \times \sin \left[\varphi_{\kappa_1}(t, t') + \varphi_{\kappa_2}(t, t') - \varphi_{\kappa_3}(t, t') \right]. \quad (4.35)$$

As abreviações $J^{(i)}$ usadas na equação (4.29) são idênticas às $I^{(i)}$ trocando senos por cossenos. A expressão para a densidade da energia, subtraindo a densidade da energia do vácuo, é

$$\left\langle \frac{E}{L} \right\rangle_F = \frac{\langle \Pi \rangle^2}{2} + \frac{m^2}{2} \langle \phi \rangle^2 + \frac{g}{4!} \langle \phi \rangle^4 + \frac{g}{8L} \langle \phi \rangle^2 \sum_k \left[\frac{1}{\sqrt{k^2 + \mu_{\kappa}^2}} - \frac{1}{\sqrt{k^2 + m^2}} \right] \\ + \frac{g}{4L} \langle \phi \rangle^2 \sum_k \frac{p_{\kappa}}{\sqrt{k^2 + \mu_{\kappa}^2}} + \frac{g}{8L^2} \sum_{k_1} \frac{p_{\kappa_1}}{\sqrt{k_1^2 + \mu_{\kappa_1}^2}} \sum_{k_2} \left[\frac{1}{\sqrt{k_2^2 + \mu_{\kappa_2}^2}} - \frac{1}{\sqrt{k_2^2 + m^2}} \right] \\ + \frac{g}{8L^2} \left[\sum_k \frac{p_{\kappa}}{\sqrt{k^2 + \mu_{\kappa}^2}} \right]^2 + \frac{g}{32L^2} \left[\sum_k \left(\frac{1}{\sqrt{k^2 + \mu_{\kappa}^2}} - \frac{1}{\sqrt{k^2 + m^2}} \right) \right]^2 \\ + \frac{1}{4L} \sum_k \left[\frac{k^2 + m^2}{\sqrt{k^2 + \mu_{\kappa}^2}} + \sqrt{k^2 + \mu_{\kappa}^2} + \sqrt{k^2 + \mu_{\kappa}^2} \tau_{\kappa}^2 \right] - \frac{1}{2L} \sum_k \sqrt{k^2 + m^2} \\ + \frac{g^2}{192L^3} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \left[\frac{1}{\sqrt{k_1^2 + \mu_{\kappa_1}^2}} \frac{1}{\sqrt{k_2^2 + \mu_{\kappa_2}^2}} \frac{1}{\sqrt{k_3^2 + \mu_{\kappa_3}^2}} \frac{1}{\sqrt{k_4^2 + \mu_{\kappa_4}^2}} \right]^{1/2} \\ \times \left(\delta_{k_1+k_2+k_3+k_4,0} I_{k_1 k_2 k_3 k_4}^{(1)} + 4\delta_{k_1+k_2+k_3-k_4,0} I_{k_1 k_2 k_3 k_4}^{(2)} + 3\delta_{k_1+k_2-k_3-k_4,0} I_{k_1 k_2 k_3 k_4}^{(3)} \right) \\ + \frac{g^2}{24L^2} \langle \phi \rangle \sum_{k_1 k_2 k_3} \left[\frac{1}{\sqrt{k_1^2 + \mu_{\kappa_1}^2}} \frac{1}{\sqrt{k_2^2 + \mu_{\kappa_2}^2}} \frac{1}{\sqrt{k_3^2 + \mu_{\kappa_3}^2}} \right]^{1/2} \\ \times \left(\delta_{k_1+k_2+k_3,0} I_{k_1 k_2 k_3}^{(4)} + \delta_{k_1+k_2-k_3,0} I_{k_1 k_2 k_3}^{(5)} \right). \quad (4.36)$$

O paralelismo entre as equações de movimento (4.5), (4.6), (4.8) do sistema inhomogêneo e (4.24), (4.25), (4.26), (4.27) do sistema homogêneo é óbvio no sentido de que as equações do primeiro caso podem ser traduzidas para o segundo conforme a discussão feita em (3.1). No entanto, uma parametrização do tipo (3.17) para os coeficiente de transformação de Bogoliubov x_{κ} e y_{κ} não é óbvia para o caso do sistema inhomogêneo, onde a construção dos orbitais naturais envolve uma transformação matricial de maior dimensão.

A dinâmica desses orbitais naturais que são representados por U e V depende do gerador adicional (4.2a). De fato, a matriz hermitiana h gera a evolução temporal de U e V através das equações (4.1c) e (4.1d), juntamente com g , que gera a dinâmica de emparelhamento através do acoplamento entre U e V . Este último aspecto da dinâmica dos orbitais naturais aparece também no caso espacialmente homogêneo, através da dinâmica da massa efetiva $\mu_\kappa(t)$.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo mostramos os resultados numéricos da integração das equações de movimento obtidas no capítulo anterior para o caso em que o campo é espacialmente homogêneo. Algumas etapas relevantes da programação são dadas no apêndice G. Destacaremos a comparação entre a aproximação de campo médio (ACM) e sua correção com termos de colisão (ACC). Nesse contexto é interessante olhar os resultados correspondentes em $0 + 1$ dimensões, pois além das equações de movimento conterem todos os pontos relevantes da aproximação (ver apêndice A), os resultados numéricos exatos são facilmente obtidos neste último caso (ver apêndice H), o que permite julgar a validade das aproximações.

Uma observação que vale a pena fazer diz respeito ao critério de truncamento nas somatórias sobre k 's. Sabemos das condições periódicas de contorno que $k = \frac{2\pi}{L} N$, onde L e N deveriam se estender ao infinito no limite do contínuo. No entanto, se aumentando L e N os resultados não mudam apreciavelmente para um mesmo valor de k , podemos concluir que as somatórias truncadas para esse N aproximam razoavelmente às soluções do contínuo. Comentamos também que os parâmetros da hamiltoniana e as condições iniciais são escolhidas apenas de forma a ilustrar diferentes regimes dinâmicos, sem pretensões de simular situação física concreta.

Usamos as unidades naturais $c = \hbar = 1$. Para o primeiro caso estudado, os parâmetros são

$$m = 1.2, \quad g = 2. \quad (5.1)$$

Neste caso não há quebra espontânea de simetria e o potencial efetivo com esses parâmetros está dado na figura 1. Os valores do equilíbrio na aproximação de campo médio são

$$\langle \phi \rangle = 0, \quad \langle \dot{\phi} \rangle = 0, \quad p_k = 0, \quad \mu_k = \mu = m \quad (5.2)$$

para todos os k 's considerados. As figuras 2A a 2C correspondem a resultados da integração das equações de movimento com as condições iniciais

$$\langle \phi \rangle(0) = 1, \quad \langle \dot{\phi} \rangle(0) = 0, \quad p_k(0) = 0, \quad \mu_k(0) = \mu = m, \quad (5.3)$$

portanto, temos apenas o condensado fora do equilíbrio de campo médio. O truncamento é feito com $N = 6$ e $L = 40$.

Embora não haja uma sensível diferença entre ACM e ACC para o valor esperado do operador de campo $\langle \phi \rangle$ (figura 2A), a diferença se manifesta para as variáveis p_k e μ_k (figuras 2B e 2C). Para ACM, o grau de liberdade das ocupações é ignorado e $p_k = 0$ sempre. Este vínculo distorce fortemente a dinâmica da densidade estendida $R_k(t)$ (ver seção (3.1)), e consequentemente a evolução de $\mu_k(t)$. Esses comportamentos são observados também nos resultados correspondentes em $0 + 1$ dimensões, incluindo nesse caso a solução exata, como estão mostrados nas figuras (3A) a (3C). Os parâmetros e as condições iniciais usadas nesse caso são:

$$\begin{aligned} m = \mu = 1.1914879 \quad (m_B = 1), \quad g = 2 \\ q(0) = 1, \quad \dot{q}(0) = 0, \quad p_t(0) = 0, \quad \mu_t(0) = \mu. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Temos, portanto, a evolução temporal do estado coerente no potencial do oscilador anarmônico. O comportamento semelhante dos resultados mostra a utilidade do caso de $0 + 1$ dimensões como protótipo para estudar o esquema de aproximações. A comparação com a solução exata mostra a necessidade de incluir os efeitos colisionais à aproximação de campo médio para se obter uma melhor descrição do comportamento dos parâmetros de massa.

O segundo caso estudado é quando temos quebra espontânea de simetria. Usamos os seguintes parâmetros

$$m = 0.05, \quad g = 0.155. \quad (5.5)$$

O potencial efetivo com esses parâmetros está mostrado na figura 4. Uma maneira de estudar a dinâmica da quebra de simetria é olhar a evolução do desvio quadrático do campo mantendo o valor esperado do campo nulo^[16,17]. Essa grandeza é dada para os

casos $1 + 1$ e $0 + 1$ dimensões respectivamente como

$$\langle \phi^2 \rangle - \langle \phi \rangle^2 = \frac{1}{2L} \sum_k \frac{1 + 2p_k}{\sqrt{k^2 + \mu_k^2}}, \quad (5.6)$$

$$\langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2 = \frac{1 + 2\rho}{2\mu_t}. \quad (5.7)$$

Note que o desvio do campo definido pela equação (5.6) é a rigor divergente. Para uma discussão da solução numérica, no entanto, essa divergência é tratada simplesmente pelo truncamento numérico natural da somatória. Observe também que o desvio quadrático do campo é caracterizado na aproximação de campo médio por parâmetro de massa. A primeira condição inicial usada para os parâmetros dados por (5.5) tem os seguintes valores:

$$\langle \phi \rangle(0) = 0, \quad \langle \dot{\phi} \rangle(0) = 0, \quad p_k(0) = 0, \quad \mu_0(0) = 0.08, \quad \mu_{k \neq 0}(0) = 0.05 = \mu = m \quad (5.8)$$

Os resultados nas figuras 5A e 5B mostram uma diferença dramática nas evoluções de $\mu_k(t)$ para as duas aproximações: $\mu_k(t)$ decresce na aproximação de campo médio e cresce com a correção colisional. No caso da aproximação de campo médio, para essa condição inicial, μ_k é o único grau de liberdade ativo. O que se espera é que μ_k evolua no sentido do seu valor de equilíbrio, $\mu = 0.05$. Isso não é porém o que ocorre quando ativamos o grau de liberdade das ocupações na aproximação. Portanto, vemos que novamente o vínculo $p_k = 0$ causa distorção para a dinâmica da massa do campo. É interessante analisar em detalhe o desvio quadrático do campo. Na figura 5E observamos que o crescimento de $\mu_k(t)$ na aproximação com colisão é compensado pela presença de $p_k(t)$, resultando a evolução positiva do desvio quadrático do campo. Esses comportamentos são observados novamente nos resultados correspondentes em $0 + 1$ dimensões, figuras 6A a 6C, onde usamos

$$m = \mu = 0.05, \quad g = 0.004 \quad (5.9)$$

$$q(0) = 0, \quad \dot{q}(0) = 0, \quad p_t(t) = 0, \quad \mu_t(0) = 0.055.$$

A comparação com a solução exata mostra que é imprescindível incluir o grau de liberdade das ocupações para a descrição correta do parâmetro de massa.

Como segunda condição inicial para esse caso, modificamos apenas μ_0 , $\mu_0(0) = 0.15$, mantendo os demais valores dados por (5.8). As figuras 7A, 7B mostram que quando μ_0

está mais longe do valor de equilíbrio de campo médio, $\mu = 0.05$, ele evolui no sentido do valor de equilíbrio para as duas aproximações, enquanto os demais parâmetros de massa, que inicialmente estão no valor de equilíbrio, mantem o comportamento do caso anterior, isto é, decrescem para aproximação de campo médio e crescem quando é incluída a correção colisional. As evoluções para as variáveis $p_\kappa(t)$ e $\sqrt{\langle \phi^2 \rangle}(t)$ estão mostrados nas figuras 7C a 7E. Os correspondentes resultados em $0 + 1$ dimensões estão nas figuras 8A a 8C, onde usamos $\mu_t(0) = 0.15$, mantendo os demais valores como no caso anterior. No entanto, a nossa aproximação também apresenta problema para tempos longos. A falha se manifesta como um crescimento exagerado dos valores das ocupações. Esse problema ainda está sendo estudado.

Como observação final, comentamos que um problema delicado para se obter os resultados numéricos das equações de movimento é o grande número de equações diferenciais envolvido, por causa do número de possíveis combinações de índices na somatória (ver apêndice G). Por exemplo, para obter os resultados no caso da quebra de simetria, foi necessário restringir as somatórias a $N = 12$ (com $L = 420$), com o que, porém, é possível já atender ao critério de convergência discutido no começo do capítulo. Com $N = 12$, tem-se 5708 equações a serem resolvidas simultaneamente. Esse número é fornecido pelo programa desenvolvido.

Figura 1 – Potencial efetivo em $1 + 1$ dimensões. Os parâmetros são:
 $m = 1.2$, $g = 2$.

Figura 2A - Evolução temporal de $\langle \phi \rangle(t)$ em $1 + 1$ dimensões. Os parâmetros e as condições iniciais são dados por (5.1) e (5.3) respectivamente. Linha cheia: ACC; linha tracejada: ACM.

Figura 2B – Idem à figura 2A com $\langle \phi \rangle$ substituído por $p_\kappa(t)$. Os índices indicam os modos κ de $p_\kappa(t)$.

Figura 2C – Idem à figura 2A com $\langle \phi \rangle$ substituído por $\mu_\kappa(t)$. Os índices indicam os modos κ de $\mu_\kappa(t)$.

Figura 3A – Evolução temporal de $\langle q \rangle(t)$ em $0 + 1$ dimensões. As condições iniciais são dadas por (5.4). Linha cheia: solução exata; linha tracejada: ACC; linha pontilhada: ACM.

Figura 3B – Idem à figura 3A com $\langle q \rangle(t)$ substituído por $p(t)$.

Figura 3C – Idem à figura 3A com $\langle q \rangle(t)$ substituído por $\mu_t(t)$.

Figura 4 – Potencial efetivo com quebra de simetria em 1+1 dimensões.
Os parâmetros são: $m = 0.05$, $g = 0.155$.

Figura 5A – Evolução temporal de $\mu_\kappa(t)$ em $1 + 1$ dimensões. Os parâmetros e condições iniciais são dados por (5.5) e (5.8) respectivamente. Linha cheia: ACC; linha tracejada: ACM. Os índices indicam os modos κ de $\mu_\kappa(t)$.

Figura 5B – Idem à figura 5A para os modos $\kappa = 6$ a $\kappa = 11$.

Figura 5C – Idem à figura 5A com $\mu_\kappa(t)$ substituídos por $p_\kappa(t)$.

Figura 5D – Idem à figura 5A com $\mu_\kappa(t)$ substituídos por $p_\kappa(t)$.

Figura 5E – Idem à figura 5A para a evolução temporal de $\sqrt{\langle \phi^2 \rangle}(t)$.

Figura 6A – Evolução temporal de $\mu_t(t)$ em $0 + 1$ dimensões. As condições iniciais são dadas por (5.9). Linha cheia: solução exata; linha tracejada: ACC; linha pontilhada: ACM.

Figura 6B – Idem à figura 6A com $\mu_t(t)$ substituído por $p(t)$.

Figura 6C – Idem à figura 6A com $\mu_t(t)$ substituído por $\sqrt{\langle q^2 \rangle}(t)$.

Figura 7A - Evolução temporal de $\mu_\kappa(t)$ em $1+1$ dimensões. Os parâmetros e as condições iniciais são dadas por (5.5) e (5.8) respectivamente com modificação para μ_0 , $\mu_0(0) = 0.15$. Linha cheia: ACC; linha tracejada: ACM. Os índices indicam os modos κ de μ_κ .

Figura 7B - Idem à figura 7A para os modos $\kappa = 6$ a $\kappa = 11$.

Figura 7C – Idem à figura 7A com $\mu_\kappa(t)$ substituídos por $p_\kappa(t)$.

Figura 7D – Idem à figura 7A com $\mu_\kappa(t)$ substituídos por $p_\kappa(t)$.

Figura 7E – Idem à figura 7A para a evolução temporal de $\sqrt{\langle \phi^2 \rangle}(t)$.

Figura 8A – Evolução temporal de $\mu_t(t)$ em $0 + 1$ dimensões. As condições iniciais são dadas por (5.9). Linha cheia: solução exata; linha tracejada: ACC; linha pontilhada: ACM.

Figura 8B – Idem à figura 8A com $\mu_i(t)$ substituído por $p(t)$.

Figura 8C – Idem à figura 8A com $\mu_t(t)$ substituído por $\sqrt{\langle q^2 \rangle}(t)$.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÃO

Mostramos com esse trabalho uma forma alternativa de tratar o problema de condição inicial na teoria quântica de campo. A técnica havia sido desenvolvida anteriormente no contexto da teoria relativística de muitos férmions. A aproximação usada permite incluir as correlações dinâmicas às equações usuais de campo médio.

O ponto crucial da formulação do problema é a redução dos graus de liberdades do campo a partir de um operador de projeção Liouvilliano. A expansão no espaço de Liouville permite, de fato, que os termos colisionais presentes nas equações de movimento se tornem calculáveis. Uma vantagem dessa técnica é que os cálculos são diretos, e as equações resultantes também são numericamente tratáveis.

Embora o formalismo seja bastante geral, consideramos o caso simples do modelo ϕ^4 em $1 + 1$ dimensões. Uma das vantagens desse modelo é seu paralelismo óbvio com o problema de oscilador anarmônico na mecânica quântica, que funcionou como protótipo para avaliar o nosso esquema de aproximações. Os resultados dos capítulos mostram, de fato, o vínculo criado pelo congelamento da dinâmica das ocupações por parte das aproximações de campo médio distorce a dinâmica de outras variáveis do campo.

Alguns problemas surgidos no desenvolvimento do trabalho ainda não foram resolvidos. Um deles é a falha da aproximação para tempos longos, quando ela leva a um crescimento exagerado das possibilidades de ocupação. Uma tentativa no sentido de melhorar a aproximação foi tentar obter as equações de movimento para a ordem seguinte da expansão (ver apêndice F). Não concluímos o trabalho por se tratar de um cálculo excessivamente longo mesmo para o caso de $0 + 1$ dimensões, uma vez que esse cálculo envolve terceira ordem em H . Pretendemos retomar esse trabalho mas com a ajuda de métodos da computação algébrica.

Também estudamos uma maneira quantitativa de controlar o domínio de validade da aproximação, visando casos em que não há análogo em $0+1$ dimensões. A idéia é estudar a conservação da coerência de F . Primeiro lembramos que, para uma matriz densidade qualquer D , se

$$\text{Tr } D^2 = \text{Tr } D$$

então D representa um estado puro. Para a densidade reduzida dada por (A.18), é imediato verificar que

$$\text{Tr } F_0^2 = \frac{1}{1+2p}, \quad \text{Tr } F_0 = 1.$$

Portanto, $F_0(0)$ representa um estado puro se $p(0) = 0$. Para a densidade de Heisenberg F , é fácil ver que as condições iniciais $p(0) = 0$ e $F'(0) = 0$ implicam que F é um estado puro em qualquer instante, isto é,

$$\text{Tr } F^2 = \text{Tr } F = 1.$$

O problema, portanto, se resume em saber se o afastamento de $\text{Tr } F^2$ de 1, com F_0 e F' dadas respectivamente por (A.18) e (A.33), e a deterioração da aproximação guardam alguma relação direta. O sucesso dessa idéia foi parcial. De fato, foi possível verificar diretamente que a perda da coerência em $F_0(t)$ não é suficientemente compensada pelos termos de correlação. No entanto, o exame de uma série de condições iniciais para o problema numericamente solúvel, em $0+1$ dimensões, não mostrou uma correlação quantitativa clara entre a perda de coerência global e a qualidade da aproximação, levando assim a crer que esta não é suficientemente caracterizada pelo grau de perda de coerência global apenas.

Pretendemos voltar a tratar esses problemas futuramente. De imediato, queremos investir na solução numérica para as equações de movimento do campo inhomogêneo dadas no capítulo 4. O paralelismo entre as equações de movimento nos casos do campo homogêneo e inhomogêneo indica que a solução do segundo pode ser obtida com um algoritmo parecido com o do primeiro, embora mais sofisticado na sua estrutura lógica.

APÊNDICE A

TRATAMENTO CINÉTICO DO OSCILADOR ANARMÔNICO^[18]

Este apêndice resume a aplicação do esquema de aproximação desenvolvido aqui ao contexto da teoria ϕ^4 em $0 + 1$ dimensões, isto é, ao oscilador anarmônico. O tratamento nesse contexto ilustra todos os pontos relevantes da teoria desenvolvida, sem porém, envolver as complicações técnicas próprias a um sistema de muitos graus de liberdades, o que permite expor de forma mais objetiva o esquema adotado. Outro ponto importante desse caso simples é a possibilidade de se obter para ele a solução numérica exata (ver apêndice H). Uma comparação com a solução exata permite julgar a qualidade das aproximações feitas.

A hamiltoniana do oscilador anarmônico é

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{m^2}{2}q^2 + \frac{g}{4!}q^4 - \frac{g}{8m}q^2 \quad (A.1)$$

Note que mantemos a redefinição da massa nua, $m_B = m^2 - g/4m$, como no caso de $1 + 1$ dimensões, embora a teoria aqui seja finita. O estado do sistema é associado à matriz densidade F na representação de Heisenberg. Por exemplo, o valor esperado de $q(t)$ é $\langle q \rangle = \text{Tr } qF$.

A relação usual de comutação canônica, $[q, p] = i$, permite definir os operadores

$$a(t) = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \left[q(t) + \frac{ip(t)}{\mu} \right], \quad a^\dagger(t) = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \left[q(t) - \frac{ip(t)}{\mu} \right] \quad (A.2)$$

que satisfazem as seguintes relações de comutação:

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad [a, a] = 0, \quad [a^\dagger, a^\dagger] = 0. \quad (A.3)$$

Escolhemos as variáveis relevantes como sendo

$$\langle a(t) \rangle = \text{Tr } a(t)F \equiv A(t), \quad \text{Tr } F = 1, \quad (\text{A.4a})$$

$$\langle a^\dagger(t)a(t) \rangle = \text{Tr } a^\dagger(t)a(t)F, \quad (\text{A.4b})$$

$$\langle a(t)a(t) \rangle = \text{Tr } a(t)a(t)F. \quad (\text{A.4c})$$

É mais conveniente trabalhar com o operador deslocamento $b(t)$ definido por

$$b(t) = a(t) - A(t). \quad (\text{A.5})$$

Podemos tratar dinamicamente o parâmetro de massa μ a partir da transformação de Bogoliubov

$$d(t) = x^*(t)b(t) + y^*(t)b^\dagger(t), \quad (\text{A.6})$$

onde $x^*(t)$ e $y^*(t)$ são fixados a partir da solução do problema secular

$$GRX = XGN \quad (\text{A.7})$$

onde

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \langle b^\dagger b \rangle & \langle bb \rangle \\ \langle b^\dagger b^\dagger \rangle & \langle bb^\dagger \rangle \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x & y^* \\ y & x^* \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix}.$$

É possível verificar facilmente que X satisfaz as relações de normalização e completeza

$$X^\dagger GX = XGX^\dagger = G \quad (\text{A.8a})$$

ou

$$|x|^2 - |y|^2 = 1. \quad (\text{A.8b})$$

É conveniente ainda parametrizar x e y , consistentemente com a (A.8b), como

$$x = \text{ch } \sigma + i \frac{\tau}{2} \quad (\text{A.9a})$$

$$y = \text{sh } \sigma + i \frac{\tau}{2} \quad (\text{A.9b})$$

Em termos dos operadores $d(t)$, $d^\dagger(t)$ podemos escrever o operador $q(t)$ como

$$q(t) = \left(\frac{1}{2\mu}\right)^{1/2} e^{-\sigma(t)} [d(t) + d^\dagger(t)] . \quad (A.10)$$

Portanto, o parâmetro de massa dinâmico é dado por

$$\mu_t(t) = e^{2\sigma(t)} \mu . \quad (A.11)$$

A equação dinâmica para A resulta diretamente da equação de Heisenberg

$$i\dot{A} = \text{Tr}[a, H]F = x \text{Tr}[d, H]F - y^* \text{Tr}[d^\dagger, H]F . \quad (A.12)$$

Para as outras variáveis relevantes, precisamos estudar a dinâmica da densidade estendida. Primeiro reescrevemos (A.7) como

$$X^\dagger R X = N . \quad (A.13)$$

Derivando em relação ao tempo temos

$$\begin{aligned} X^\dagger \dot{R} X &= \dot{N} - \dot{X}^\dagger R X - X^\dagger R \dot{X} \\ &= \dot{N} - \dot{X}^\dagger G X G N - N G X^\dagger G \dot{X} . \end{aligned} \quad (A.14)$$

Essa equação matricial resulta em duas equações independentes

$$i\dot{p} = \text{Tr}[d^\dagger d, H]F , \quad (A.15)$$

$$i(\dot{x}y - x\dot{y})(1 + 2p) = \text{Tr}[d^\dagger d^\dagger, H]F . \quad (A.16)$$

A próxima etapa é encontrar uma maneira de exprimir F , e também a dinâmica dos operadores de Heisenberg, em termos das variáveis relevantes. Para isso, primeiro dividimos F em duas partes,

$$F = F_0(t) + F'(t) , \quad (A.17)$$

onde

$$F_0(t) = \frac{1}{1+p(t)} \left[\frac{p(t)}{1+p(t)} \right]^{d^\dagger(t)d(t)} \quad (A.18)$$

é a parte de F que descreve a aproximação de campo médio. Portanto, as correlações dinâmicas serão descritas através de $F'(t)$. A maneira de exprimir $F'(t)$ em termos de $F_0(t)$ envolve a construção de um projetor dependente do tempo, a partir de F_0 (ver apêndice B), de tal maneira que

$$F_0(t) = \mathcal{P}(t)F. \quad (A.19)$$

As condições exigidas para a construção $\mathcal{P}(t)$ são, além de (A.17),

$$\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}(t), \quad (A.20)$$

$$i\dot{F}_0(t) = [F_0(t), \mathcal{L}]F, \quad (A.21)$$

onde

$$\mathcal{L}X = [H, X]. \quad (2.22)$$

De (A.17) e (A.21) obtemos a equação diferencial para $F'(t)$,

$$\left(i\frac{d}{dt} + \mathcal{P}(t)\mathcal{L} \right) F'(t) = \mathcal{Q}(t)\mathcal{L}F_0(t), \quad (A.23)$$

$\mathcal{Q}(t)$ é o projetor complementar $\mathcal{I} - \mathcal{P}(t)$. Essa equação tem como solução formal

$$F'(t) = \mathcal{G}(t, 0)F'(0) - i \int_0^t dt' \mathcal{G}(t, t') \mathcal{Q}(t')\mathcal{L}F_0(t') \quad (A.24)$$

$$\mathcal{G}(t, t') = T \exp i \int_{t'}^t d\tau \mathcal{P}(\tau)\mathcal{L} \quad (A.25)$$

A aproximação começa com o truncamento da dinâmica dos operadores de Heisenberg, restringindo sua evolução de modo que seja dada pela hamiltoniana “de um corpo” escolhida como

$$\begin{aligned} H_0 = & \mathcal{P}^\dagger H + d^\dagger \text{Tr}[d, H]F' - d \text{Tr}[d^\dagger, H]F' \\ & + \frac{d^\dagger d^\dagger}{2(1+2p)} \text{Tr}[dd, H]F' - \frac{dd}{2(1+2p)} \text{Tr}[d^\dagger d^\dagger, H]F'. \end{aligned} \quad (A.26)$$

(para a forma de $\mathcal{P}^\dagger$ vide apêndice B). A equação de Heisenberg com essa hamiltoniana é

$$i\dot{d}(t) = [d, H_0] + i(\dot{x}^*x - \dot{y}^*y)d - i(\dot{x}^*y^* - x^*\dot{y}^*)d^\dagger - \text{Tr}[d, H]F, \quad (\text{A.27})$$

onde os últimos termos são as dependências explícitas do operador $d(t)$ com a amplitude de deslocamento e a transformação de Bogoliubov. Desenvolvendo $\mathcal{P}^\dagger H$ e substituindo (A.26) em (A.27) chegamos à seguinte equação para o operador $d(t)$:

$$\begin{aligned} i\dot{d}(t) &= \left\{ \frac{\mu_t}{2} + \frac{\mu\tau^2}{2} + \frac{1}{2\mu_t} \left(m^2 - \frac{g}{4m} \right) + \frac{g}{8} \frac{1+2p}{\mu_t^2} + \frac{g}{4} \frac{q^2}{\mu} + \sqrt{\frac{\mu}{\mu_t}} \left(\frac{\tau}{4} \frac{\dot{\mu}_t}{\mu_t} + \frac{\dot{\tau}}{2} \right) \right\} d(t) \\ &\equiv F(t)d(t). \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Portanto, os operadores que estão em tempos diferentes estão relacionados através de uma fase nessa aproximação:

$$d(t) = e^{i\varphi(t,t')} d(t') \quad (\text{A.29})$$

$$\varphi(t,t') = - \int_{t'}^t d\tau F(\tau) \quad (\text{A.30})$$

O truncamento para a dinâmica dos operadores implica que possamos exprimir $\mathcal{G}(t,t')$ em série de potência de H_0 , cujo termo de mais baixa ordem é (ver apêndice F)

$$\mathcal{G}(t,t') = \mathcal{I}. \quad (\text{A.31})$$

Além disso, restringimos a condição inicial impondo que

$$F'(0) = 0. \quad (\text{A.32})$$

Portanto, a densidade de correlação $F'(t)$ dentro da nossa aproximação é

$$F'(t) = -i \int_0^t dt' Q(t') \mathcal{L}F_0(t'). \quad (\text{A.33})$$

Usando as equações (A.29) e (A.33), o cálculo dos traços para as equações de movimento, (A.12), (A.15) e (A.16), é direto. Obtemos os seguintes resultados:

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle q \rangle = - \left(m^2 - \frac{g}{4m} \right) \langle q \rangle - \frac{g}{3!} \langle q \rangle^3 - \frac{g}{4\mu_t} (1+2p) \langle q \rangle + \Gamma_{\langle q \rangle}(t) \quad (\text{A.34})$$

$$\dot{\mu}_t = -2(\mu\mu_t^3)^{1/2}\tau + \frac{2\mu_t}{1+2p}\dot{p} \quad (\text{A.35})$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{\mu_t}}\dot{\tau} + \frac{\tau}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\mu_t^3}}\dot{\mu}_t = \mu_t - \mu\tau^2 - \frac{1}{\mu_t} \left(m^2 - \frac{g}{4m} \right) - \frac{g}{4} \frac{1+2p}{\mu_t^2} - \frac{g}{2} \frac{\langle q \rangle^2}{\mu_t} + \frac{\Gamma_\mu(t)}{1+2p} \quad (\text{A.36})$$

$$\dot{p} = \Gamma_p(t) \quad (\text{A.37})$$

As equações (A.35) e (A.36) são respectivamente a parte imaginária e a parte real da equação (A.16). Os termos de colisão são

$$\Gamma_q(t) = -\frac{g^2}{4!} \mu_t^{-3/2} [I_3(t) + 3I_4(t)] , \quad (A.37)$$

$$\Gamma_\mu(t) = -\frac{g^2}{4!} \mu_t^{-3/2} \left\{ 6\langle q \rangle [I_3(t) + 3I_4(t)] + \mu_t^{-1/2} [I_1(t) + 4I_2(t)] \right\} , \quad (A.38)$$

$$\Gamma_p(t) = \frac{g^2}{4!} \mu_t^{-3/2} \left\{ 3\langle q \rangle [J_3(t) + J_4(t)] + \mu_t^{-1/2} [1/2 J_1(t) + J_2(t)] \right\} , \quad (A.39)$$

onde as abreviações são

$$I_1(t) = \int_0^t dt' \mu_{t'}^{-2} (1 + 4p_{t'} + 6p_{t'}^2 + 4p_{t'}^3) \text{sen } 4\varphi(t, t') , \quad (A.40)$$

$$I_2(t) = \int_0^t dt' \mu_{t'}^{-2} (p_{t'} + 3p_{t'}^2 + 2p_{t'}^3) \text{sen } 2\varphi(t, t') , \quad (A.41)$$

$$I_3(t) = \int_0^t dt' \mu_{t'}^{-3/2} \langle q \rangle_{t'} (1 + 3p_{t'} + 3p_{t'}^2) \text{sen } 3\varphi(t, t') , \quad (A.42)$$

$$I_4(t) = \int_0^t dt' \mu_{t'}^{-3/2} \langle q \rangle_{t'} (p_{t'} + p_{t'}^2) \text{sen } \varphi(t, t') . \quad (A.43)$$

As abreviações $J_i(t)$ em (A.39) são idênticas às $I_i(t)$ substituindo senos por cossenos nos integrandos.

APÊNDICE B

A TÉCNICA DA CONSTRUÇÃO DOS PROJETORES $\mathcal{P}(t)$ e $\mathcal{P}^\dagger(t)$

Para evitar complicações algébricas desnecessárias na exposição, vamos mostrar a construção do operador de projeção usado no nosso esquema no caso de $0+1$ dimensões. O procedimento seguido no caso de $1+1$ dimensões é uma extensão imediata dessa construção.

Na seção (2.3) são mencionadas as propriedades exigidas para a construção de $\mathcal{P}(t)$ como sendo:

$$F_0(t) = \mathcal{P}(t)F, \quad (B.1)$$

$$\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}(t), \quad (B.2)$$

$$i\dot{F}_0(t) = [F_0, H] + \mathcal{P}(t)[H, F]; \quad (B.3)$$

onde a densidade reduzida em $0+1$ dimensões é

$$F_0(t) = \frac{1}{1+p(t)} \left[\frac{p(t)}{1+p(t)} \right]^{d^\dagger(t)d(t)}. \quad (B.4)$$

Antes de deduzir o projetor, é conveniente resumir a notação para as várias transformações introduzidas no apêndice A para os operadores a , $a^\dagger$, além de algumas outras que serão úteis abaixo:

$$c(t) = x^*(t)a(t) + y^*(t)a^\dagger(t), \quad (B.5a)$$

$$d(t) = c(t) - C(t), \quad (B.5b)$$

$$C = x^*(t)A(t) + y^*(t)A^*(t). \quad (B.5c)$$

A construção de $\mathcal{P}(t)$ começa pelo cálculo da derivada de $F_0(t)$ em relação ao tempo,

$$i\dot{F}_0 = \frac{dd^\dagger - p}{p(1+p)} F_0 \text{Tr } d^\dagger d [H, F] + \frac{i}{1+p} \frac{d'}{dt} \left(\frac{p}{1+p} \right)^{dd^\dagger}, \quad (B.6)$$

onde usamos a equação de movimento $i\dot{p} = \text{Tr}[d^\dagger d, H]F$; no último termo d'/dt age apenas em relação aos operadores d e $d^\dagger$. Para desenvolver o último termo, é mais conveniente reescrever $(\frac{p}{1+p})^{d^\dagger d}$ como:

$$\left[\frac{p(t)}{1+p(t)} \right]^{d^\dagger(t)d(t)} = e^{m(t)d^\dagger(t)d(t)} \quad (B.7)$$

A derivada de (B.6) é escrita sob forma de série como

$$i \frac{d'}{dt} e^{m d^\dagger d} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^n}{n!} \left[i \frac{d}{dt} (d^\dagger d) (d^\dagger d)^{n-1} + \dots + (d^\dagger d)^{n-1} i \frac{d}{dt} (d^\dagger d) \right]. \quad (B.8)$$

Usando a equação de Heisenberg e tomando cuidado com a dependência explícita dos operadores $d(t)$ e $d^\dagger(t)$ temos

$$i \frac{d}{dt} (d^\dagger d) = [d^\dagger d, H] - i\dot{C}^* d^\dagger - i\dot{C} d - i(\dot{x}y - x\dot{y})dd - i(\dot{x}^*y^* - x^*\dot{y}^*)d^\dagger d^\dagger, \quad (B.9)$$

onde $C(t)$ é dado pela (B.5). Substituindo (B.9) em (B.8), o último termo de (B.6) fica

$$\begin{aligned} \frac{i}{1+p} \frac{d'}{dt} e^{m d^\dagger d} &= \frac{1}{1+p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^n}{n!} \{ [d^\dagger d, H] (d^\dagger d)^{n-1} + \dots + (d^\dagger d)^{n-1} [d^\dagger d, H] \} \\ &- \frac{1}{1+p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^n}{n!} \dot{C}^* \{ i d (d^\dagger d)^{n-1} + \dots + (d^\dagger d)^{n-1} i d \} \\ &- \frac{1}{1+p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^n}{n!} \dot{C} \{ i d^\dagger (d^\dagger d)^{n-1} + \dots + (d^\dagger d)^{n-1} i d^\dagger \} \\ &- \frac{1}{1+p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^n}{n!} (\dot{x}y - x\dot{y}) \{ i d d (d^\dagger d)^{n-1} + \dots + (d^\dagger d)^{n-1} i d d \} \\ &- \frac{1}{1+p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^n}{n!} (\dot{x}y - x\dot{y})^* \{ i d^\dagger d^\dagger (d^\dagger d)^{n-1} + \dots + (d^\dagger d)^{n-1} i d^\dagger d^\dagger \}. \end{aligned} \quad (B.10)$$

A próxima etapa é reobter a forma exponencial $e^{m d^\dagger d}$ para os termos do segundo membro. Para o primeiro termo, essa operação é imediata. Para os outros termos, precisamos remover os operadores d , $d^\dagger$, dd , $d^\dagger d^\dagger$ para a esquerda. Após alguma álgebra chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{i}{1+p} \frac{d'}{dt} e^{m d^\dagger d} &= [F_0, H] + i\dot{C}^* \frac{d}{p} F_0 + i\dot{C} \frac{d^\dagger}{1+p} F_0 \\ &+ i(\dot{x}y - x\dot{y})(1+2p) \frac{dd}{2p^2} F_0 + (\dot{x}y - x\dot{y})^*(1+2p) \frac{d^\dagger d^\dagger}{2(1+p)^2} F_0 \end{aligned} \quad (B.11)$$

Usando as equações (B.5) e (A.16) obtemos para a derivada de $F_0(t)$

$$\begin{aligned} i\dot{F}_0(t) = & \frac{dd^\dagger - p}{p(1+p)} F_0 \text{Tr} d^\dagger d [H, F] + [F_0, H] + \frac{d}{p} F_0 \text{Tr} d^\dagger [H, F] \\ & + \frac{d^\dagger}{1+p} F_0 \text{Tr} d [H, F] + \frac{dd}{2p^2} F_0 \text{Tr} d^\dagger d^\dagger [H, F] + \frac{d^\dagger d^\dagger}{2(1+p)^2} F_0 \text{Tr} dd [H, F] . \end{aligned} \quad (B.12)$$

Portanto, um operador $\overline{\mathcal{P}}(t)$ que satisfaz a condição (B.3) é

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{P}}X = & \frac{dd^\dagger - p}{p(1+p)} F_0 \text{Tr}(d^\dagger dX) + \frac{d}{p} F_0 \text{Tr}(d^\dagger X) + \frac{d^\dagger}{1+p} F_0 \text{Tr}(dX) \\ & + \frac{dd}{2p^2} F_0 \text{Tr}(d^\dagger d^\dagger X) + \frac{d^\dagger d^\dagger}{2(1+p)^2} F_0 \text{Tr}(ddX) , \end{aligned} \quad (B.13)$$

onde X é um vetor do espaço de Liouville. No entanto, $\overline{\mathcal{P}}(t)$ falha para as condições (B.1) e (B.2). De fato,

$$\overline{\mathcal{P}}F = \frac{d^\dagger d - p}{1+p} F_0 .$$

Isso pode ser corrigido facilmente, pondo

$$\mathcal{P}(t)X = \overline{\mathcal{P}}X - \frac{d^\dagger d - p}{1+p} F_0 \text{Tr} X + F_0 \text{Tr} X .$$

Rearranjando os termos, temos finalmente

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(t)X = & \left(1 - \frac{d^\dagger d - p}{1+p}\right) F_0 \text{Tr} X + \frac{d^\dagger d - p}{p(1+p)} \text{Tr}(d^\dagger dX) F_0 \\ & + \left(\frac{d}{p} \text{Tr} d^\dagger X + \frac{d^\dagger}{1+p} \text{Tr} dX\right) F_0 + \left(\frac{dd}{2p^2} \text{Tr} d^\dagger d^\dagger X + \frac{d^\dagger d^\dagger}{2(1+p)^2} \text{Tr} ddX\right) F_0 . \end{aligned} \quad (B.14)$$

A construção de $\mathcal{P}^\dagger(t)$ segue imediatamente das definições do produto escalar e operador adjunto

$$(Y, \mathcal{P}X) = \text{Tr}[Y^\dagger(\mathcal{P}X)] = \text{Tr}[(\mathcal{P}Y)^\dagger X] . \quad (B.15)$$

Usando (B.14) temos

$$\begin{aligned}
 \text{Tr } Y^\dagger(\mathcal{P}X) &= \text{Tr} \left[Y^\dagger \left(1 - \frac{d^\dagger d - p}{1+p} \right) F_0 \right] \text{Tr } X + \text{Tr} \left[Y^\dagger \frac{d^\dagger d - p}{p(1+p)} F_0 \right] \text{Tr}(d^\dagger d X) \\
 &+ \text{Tr} \left[Y^\dagger \frac{d}{p} F_0 \right] \text{Tr}(d^\dagger X) + \text{Tr} \left[Y^\dagger \frac{d^\dagger}{1+p} F_0 \right] \text{Tr}(d X) \\
 &+ \text{Tr} \left[Y^\dagger \frac{dd}{2p^2} F_0 \right] \text{Tr}(d^\dagger d^\dagger X) + \text{Tr} \left[Y^\dagger \frac{d^\dagger d^\dagger}{2(1+p)^2} F_0 \right] \text{Tr}(dd X) \\
 &= \text{Tr} \left\{ \text{Tr} \left[Y^\dagger \left(1 - \frac{d^\dagger d - p}{1+p} \right) F_0 \right] X \right\} + \text{Tr} \left\{ d^\dagger d \text{Tr} \left[Y^\dagger \frac{d^\dagger d - p}{p(1+p)} F_0 \right] X \right\} \\
 &+ \text{Tr} \left\{ d^\dagger \text{Tr} \left[Y^\dagger \frac{d}{p} F_0 \right] X \right\} + \text{Tr} \left\{ d \text{Tr} \left[Y^\dagger \frac{d^\dagger}{1+p} F_0 \right] X \right\} \\
 &+ \text{Tr} \left\{ d^\dagger d^\dagger \text{Tr} \left[Y^\dagger \frac{dd}{2p^2} F_0 \right] X \right\} + \text{Tr} \left\{ dd \text{Tr} \left[Y^\dagger \frac{d^\dagger d^\dagger}{2(1+p)^2} F_0 \right] X \right\} .
 \end{aligned}$$

Comparando com a última igualdade de (B.15) e rearranjando os termos chegamos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}^\dagger(t)X &= \left(1 - \frac{d^\dagger d - p}{1+p} \right) \text{Tr}(F_0 X) + \frac{d^\dagger d - p}{p(1+p)} \text{Tr}(F_0 d^\dagger d X) \\
 &+ \frac{d}{p} \text{Tr}(F_0 d^\dagger X) + \frac{d^\dagger}{1+p} \text{Tr}(F_0 d X) + \frac{dd}{2p^2} \text{Tr}(F_0 d^\dagger d^\dagger X) + \frac{d^\dagger d^\dagger}{2(1+p)^2} \text{Tr}(F_0 dd X) . \quad (B.16)
 \end{aligned}$$

A extensão dessa técnica para 1+1 dimensões é imediata. Os operadores $\mathcal{P}(t)$ e $\mathcal{P}^\dagger(t)$ nesse caso são respectivamente:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(t)X &= \left\{ \sum_{\alpha} \left(1 - \frac{d_{\alpha}^\dagger d_{\alpha} - p_{\alpha}}{1+p_{\alpha}} \right) \text{Tr } X \right. \\
 &+ \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \frac{d_{\alpha_1}^\dagger d_{\alpha_2} - p_{\alpha_1} \delta_{\alpha_1 \alpha_2}}{p_{\alpha_2}(1+p_{\alpha_1})} \text{Tr}(d_{\alpha_2}^\dagger d_{\alpha_1} X) \\
 &+ \sum_{\alpha} \left[\frac{d_{\alpha}}{p_{\alpha}} \text{Tr}(d_{\alpha}^\dagger X) + \frac{d_{\alpha}^\dagger}{1+p_{\alpha}} \text{Tr}(d_{\alpha} X) \right] \\
 &\left. + \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \left[\frac{d_{\alpha_1} d_{\alpha_2}}{2p_{\alpha_1} p_{\alpha_2}} \text{Tr}(d_{\alpha_2}^\dagger d_{\alpha_1}^\dagger X) + \frac{d_{\alpha_1}^\dagger d_{\alpha_2}^\dagger}{2(1+p_{\alpha_1})(1+p_{\alpha_2})} \text{Tr}(d_{\alpha_2} d_{\alpha_1} X) \right] \right\} F_0 , \quad (B.17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^\dagger(t)X &= \sum_{\alpha} \left(1 - \frac{d_{\alpha}^\dagger d_{\alpha} - p_{\alpha}}{1 + p_{\alpha}} \right) \text{Tr}(F_0 X) \\
&+ \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \frac{d_{\alpha_1}^\dagger d_{\alpha_2} - p_{\alpha_1} \delta_{\alpha_1 \alpha_2}}{p_{\alpha_2}(1 + p_{\alpha_1})} \text{Tr}(F_0 d_{\alpha_2}^\dagger d_{\alpha_1} X) \\
&+ \sum_{\alpha} \left[\frac{d_{\alpha}}{p_{\alpha}} \text{Tr}(F_0 d_{\alpha}^\dagger X) + \frac{d_{\alpha}^\dagger}{1 + p_{\alpha}} \text{Tr}(F_0 d_{\alpha} X) \right] \\
&+ \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \left[\frac{d_{\alpha_1} d_{\alpha_2}}{2p_{\alpha_1} p_{\alpha_2}} \text{Tr}(F_0 d_{\alpha_2}^\dagger d_{\alpha_1}^\dagger X) + \frac{d_{\alpha_1}^\dagger d_{\alpha_2}^\dagger}{2(1 + p_{\alpha_1})(1 + p_{\alpha_2})} \text{Tr}(F_0 d_{\alpha_2} d_{\alpha_1} X) \right].
\end{aligned} \tag{B.18}$$

Da discussão da seção (3.1), é fácil ver que os projetores $\mathcal{P}(t)$ e $\mathcal{P}^\dagger(t)$ para o caso de sistema homogêneo têm forma idêntica a essa, onde o índice de somatória α se refere aos valores do momento k com a última somatória restrita pela condição $k_1 + k_2 = 0$.

APÊNDICE C

EXPANSÃO DA HAMILTONIANA

A hamiltoniana da teoria ϕ^4 em $1 + 1$ dimensões é dada por

$$H = \int dx \mathcal{H} \quad (C.1)$$

$$\mathcal{H} = \frac{\Pi^2}{2} + \frac{1}{2}(\partial_x \phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{g}{4!}\phi^4 + \frac{\delta m^2}{2}\phi^2. \quad (C.2)$$

Seguindo as discussões feitas na seção (2.1) podemos expressar os operadores de campo e de momento respectivamente como, (ver equações (2.7), (2.19), (2.37))

$$\begin{aligned} \phi(x) = & \sum_k [f_k(x) A_k(t) + f_k^*(x) A_k^*(t)] \\ & + \sum_{k\alpha} f_k(x) [U_{k\alpha}(t) - V_{-k\alpha}(t)] d_\alpha \\ & + \sum_{k\alpha} f_k^*(x) [U_{k\alpha}^*(t) - V_{-k\alpha}^*(t)] d_\alpha^\dagger, \end{aligned} \quad (C.3)$$

$$\begin{aligned} \Pi(x) = & \sum_k ik_0 [f_k^*(x) A_k^*(t) - f_k(x) A_k(t)] \\ & + \sum_{k\alpha} ik_0 f_k^*(x) [U_{k\alpha}^*(t) + V_{-k\alpha}^*(t)] d_\alpha^\dagger \\ & + \sum_{k\alpha} ik_0 f_k(x) [U_{k\alpha}(t) + V_{k\alpha}(t)] d_\alpha; \end{aligned} \quad (C.4)$$

onde usamos o fato de que para as ondas planas (ver (2.4))

$$f_k^*(x) = f_{-k}(x). \quad (C.5)$$

A expansão de (C.2) em termos de d_α , $d_\alpha^\dagger$ é imediata a partir de (C.3) e (C.4). A integração em x da expansão também não oferece dificuldade, usando a relação de ortogonalidade,

$$\int dx f_k(x) f_{k'}^*(x) = \frac{1}{2k_0} \delta_{kk'}.$$

chegamos assim à seguinte expressão para H :

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{1}{4} \sum_k \left\{ k_0 (2A_k^* A_k - A_k^* A_{-k}^* - A_k A_{-k}) + \frac{k^2 + m^2}{k_0} (2A_k^* A_k + A_k A_{-k} + A_k^* A_{-k}^*) \right\} \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{k\alpha} \left\{ k_0 [A_k^* (U_{k\alpha} + V_{-k\alpha}) - A_k (U_{-k\alpha} + V_{k\alpha})] d_\alpha \right. \\
 & \quad + k_0 [A_k (U_{k\alpha}^* + V_{-k\alpha}^*) - A_k^* (U_{-k\alpha}^* + V_{k\alpha}^*)] d_\alpha^\dagger \\
 & \quad + \frac{k^2 + m^2}{k_0} [A_k (U_{-k\alpha} - V_{k\alpha}) + A_k^* (U_{k\alpha} - V_{-k\alpha})] d_\alpha \\
 & \quad \left. + \frac{k^2 + m^2}{k_0} [A_k^* (U_{-k\alpha}^* - V_{k\alpha}^*) + A_k (U_{k\alpha}^* - V_{-k\alpha}^*)] d_\alpha^\dagger \right\} \\
 & + \frac{1}{4} \sum_k \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \left\{ k_0 [(U_{k\alpha_1}^* + V_{-k\alpha_1}^*)(U_{k\alpha_2} + V_{-k\alpha_2}) d_{\alpha_1}^\dagger d_{\alpha_2} \right. \\
 & \quad + (U_{k\alpha_1} + V_{-k\alpha_1})(U_{k\alpha_2}^* + V_{-k\alpha_2}^*) d_{\alpha_1} d_{\alpha_2}^\dagger \\
 & \quad - (U_{k\alpha_1}^* + V_{-k\alpha_1}^*)(U_{-k\alpha_2}^* + V_{k\alpha_2}^*) d_{\alpha_1}^\dagger d_{\alpha_2}^\dagger \\
 & \quad \left. - (U_{k\alpha_1} + V_{-k\alpha_1})(U_{-k\alpha_2} + V_{k\alpha_2}) d_{\alpha_1} d_{\alpha_2}] \right. \\
 & \quad + \frac{k^2 + m^2}{k_0} [(U_{k\alpha_1}^* - V_{-k\alpha_1}^*)(U_{k\alpha_2} - V_{-k\alpha_2}) d_{\alpha_1}^\dagger d_{\alpha_2} \\
 & \quad + (U_{k\alpha_1} - V_{-k\alpha_1})(U_{k\alpha_2}^* - V_{-k\alpha_2}^*) d_{\alpha_1} d_{\alpha_2}^\dagger \\
 & \quad + (U_{k\alpha_1}^* - V_{-k\alpha_1}^*)(U_{-k\alpha_2}^* - V_{k\alpha_2}^*) d_{\alpha_1}^\dagger d_{\alpha_2}^\dagger \\
 & \quad \left. + (U_{k\alpha_1} - V_{-k\alpha_1})(U_{-k\alpha_2} - V_{k\alpha_2}) d_{\alpha_1} d_{\alpha_2}] \right\} \\
 & + \frac{g}{96L} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \frac{1}{\sqrt{k_{01} k_{02} k_{03} k_{04}}} \left\{ \right. \\
 & \quad \delta_{k_1+k_2+k_3+k_4,0} [A_{k_1} A_{k_2} A_{k_3} A_{k_4} + A_{k_1}^* A_{k_2}^* A_{k_3}^* A_{k_4}^*] \\
 & \quad + 4\delta_{k_1+k_2+k_3-k_4,0} [A_{k_1} A_{k_2} A_{k_3} A_{k_4}^* + A_{k_1}^* A_{k_2}^* A_{k_3}^* A_{k_4}] \\
 & \quad \left. + 6\delta_{k_1+k_2-k_3-k_4,0} A_{k_1} A_{k_2} A_{k_3}^* A_{k_4}^* \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{g}{24L} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \frac{1}{\sqrt{k_{01} k_{02} k_{03} k_{04}}} \sum_{\alpha} \left\{ \right. \\
& \quad \delta_{k_1+k_2+k_3+k_4,0} \left[A_{k_1} A_{k_2} A_{k_3} T_{k_4\alpha} d_{\alpha} + A_{k_1}^* A_{k_2}^* A_{k_3}^* T_{k_4\alpha}^* d_{\alpha}^{\dagger} \right] \\
& \quad + \delta_{k_1+k_2+k_3-k_4,0} \left[A_{k_1}^* A_{k_2}^* A_{k_3}^* T_{k_4\alpha} d_{\alpha} + A_{k_1} A_{k_2} A_{k_3} T_{k_4\alpha}^* d_{\alpha}^{\dagger} \right] \\
& \quad + 3\delta_{k_1+k_2-k_3+k_4,0} \left[A_{k_1} A_{k_2} A_{k_3}^* T_{k_4\alpha} d_{\alpha} + A_{k_1}^* A_{k_2}^* A_{k_3} T_{k_4\alpha}^* d_{\alpha}^{\dagger} \right] \\
& \quad + 3\delta_{k_1+k_2-k_3-k_4,0} \left[A_{k_1}^* A_{k_2}^* A_{k_3} T_{k_4\alpha} d_{\alpha} + A_{k_1} A_{k_2} A_{k_3}^* T_{k_4\alpha}^* d_{\alpha}^{\dagger} \right] \left. \right\} \\
& + \frac{g}{16L} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \frac{1}{\sqrt{k_{01} k_{02} k_{03} k_{04}}} \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \left\{ \right. \\
& \quad \delta_{k_1+k_2+k_3+k_4,0} \left[A_{k_1} A_{k_2} T_{k_3\alpha_1} T_{k_4\alpha_2} d_{\alpha_1} d_{\alpha_2} + A_{k_1}^* A_{k_2}^* T_{k_3\alpha_1}^* T_{k_4\alpha_2}^* d_{\alpha_1}^{\dagger} d_{\alpha_2}^{\dagger} \right] \\
& \quad + \delta_{k_1+k_2-k_3-k_4,0} \left[A_{k_1} A_{k_2} T_{k_3\alpha_1}^* T_{k_4\alpha_2}^* d_{\alpha_1}^{\dagger} d_{\alpha_2}^{\dagger} + A_{k_1}^* A_{k_2}^* T_{k_3\alpha_1} T_{k_4\alpha_2} d_{\alpha_1} d_{\alpha_2} \right] \\
& \quad + \delta_{k_1+k_2-k_3+k_4,0} \left[A_{k_1} A_{k_2} T_{k_3\alpha_1}^* T_{k_4\alpha_2} d_{\alpha_1}^{\dagger} d_{\alpha_2} + A_{k_1}^* A_{k_2}^* T_{k_3\alpha_1} T_{k_4\alpha_2}^* d_{\alpha_1} d_{\alpha_2}^{\dagger} \right] \\
& \quad + \delta_{k_1+k_2+k_3-k_4,0} \left[A_{k_1} A_{k_2} T_{k_3\alpha_1} T_{k_4\alpha_2}^* d_{\alpha_1} d_{\alpha_2}^{\dagger} + A_{k_1}^* A_{k_2}^* T_{k_3\alpha_1}^* T_{k_4\alpha_2} d_{\alpha_1}^{\dagger} d_{\alpha_2} \right] \\
& \quad + 2\delta_{k_1-k_2+k_3+k_4,0} \left[A_{k_1} A_{k_2}^* T_{k_3\alpha_1} T_{k_4\alpha_2} d_{\alpha_1} d_{\alpha_2} + A_{k_1}^* A_{k_2} T_{k_3\alpha_1}^* T_{k_4\alpha_2}^* d_{\alpha_1}^{\dagger} d_{\alpha_2}^{\dagger} \right] \\
& \quad + 2\delta_{k_1-k_2+k_3-k_4,0} \left[A_{k_1} A_{k_2}^* T_{k_3\alpha_1} T_{k_4\alpha_2}^* d_{\alpha_1} d_{\alpha_2}^{\dagger} + A_{k_1}^* A_{k_2} T_{k_3\alpha_1}^* T_{k_4\alpha_2} d_{\alpha_1}^{\dagger} d_{\alpha_2} \right] \left. \right\} \\
& + \frac{g}{24L} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \frac{1}{\sqrt{k_{01} k_{02} k_{03} k_{04}}} \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \left\{ \right. \\
& \quad \delta_{k_1+k_2+k_3+k_4,0} \left[A_{k_1} T_{k_2\alpha_1} T_{k_3\alpha_2} T_{k_4\alpha_3} d_{\alpha_1} d_{\alpha_2} d_{\alpha_3} + A_{k_1}^* T_{k_2\alpha_1}^* T_{k_3\alpha_2}^* T_{k_4\alpha_3}^* d_{\alpha_1}^{\dagger} d_{\alpha_2}^{\dagger} d_{\alpha_3}^{\dagger} \right] \\
& \quad + \delta_{-k_1+k_2+k_3+k_4,0} \left[A_{k_1}^* T_{k_2\alpha_1} T_{k_3\alpha_2} T_{k_4\alpha_3} d_{\alpha_1} d_{\alpha_2} d_{\alpha_3} + A_{k_1} T_{k_2\alpha_1}^* T_{k_3\alpha_2}^* T_{k_4\alpha_3}^* d_{\alpha_1}^{\dagger} d_{\alpha_2}^{\dagger} d_{\alpha_3}^{\dagger} \right] \\
& \quad + 3\delta_{k_1-k_2-k_3+k_4,0} \left[A_{k_1} T_{k_2\alpha_1}^* T_{k_3\alpha_2}^* T_{k_4\alpha_3} (d_{\alpha_1}^{\dagger} d_{\alpha_2}^{\dagger} d_{\alpha_3}^{\dagger} + d_{\alpha_1}^{\dagger} \delta_{\alpha_2\alpha_3}) \right. \\
& \quad \quad \left. + A_{k_1}^* T_{k_2\alpha_1} T_{k_3\alpha_2} T_{k_4\alpha_3}^* (d_{\alpha_3}^{\dagger} d_{\alpha_1} d_{\alpha_2} + d_{\alpha_1} \delta_{\alpha_2\alpha_3}) \right] \\
& \quad + 3\delta_{k_1+k_2+k_3-k_4,0} \left[A_{k_1}^* T_{k_2\alpha_1}^* T_{k_3\alpha_2}^* T_{k_4\alpha_3} (d_{\alpha_1}^{\dagger} d_{\alpha_2}^{\dagger} d_{\alpha_3} + d_{\alpha_1}^{\dagger} \delta_{\alpha_2\alpha_3}) \right. \\
& \quad \quad \left. + A_{k_1} T_{k_2\alpha_1} T_{k_3\alpha_2} T_{k_4\alpha_3}^* (d_{\alpha_3}^{\dagger} d_{\alpha_1} d_{\alpha_2} + d_{\alpha_1} \delta_{\alpha_2\alpha_3}) \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{g}{96L} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \frac{1}{\sqrt{k_{01} k_{02} k_{03} k_{04}}} \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \left\{ \right. \\
& \delta_{k_1+k_2+k_3+k_4,0} \left[T_{k_1 \alpha_1}^* T_{k_2 \alpha_2}^* T_{k_3 \alpha_3}^* T_{k_4 \alpha_4}^* d_{\alpha_1}^\dagger d_{\alpha_2}^\dagger d_{\alpha_3}^\dagger d_{\alpha_4}^\dagger \right. \\
& \quad \left. + T_{k_1 \alpha_1} T_{k_2 \alpha_2} T_{k_3 \alpha_3} T_{k_4 \alpha_4} d_{\alpha_1} d_{\alpha_2} d_{\alpha_3} d_{\alpha_4} \right] \\
& + \delta_{k_1+k_2+k_3-k_4,0} \left[T_{k_1 \alpha_1}^* T_{k_2 \alpha_2}^* T_{k_3 \alpha_3}^* T_{k_4 \alpha_4} (4d_{\alpha_1}^\dagger d_{\alpha_2}^\dagger d_{\alpha_3}^\dagger d_{\alpha_4} + 6d_{\alpha_1}^\dagger d_{\alpha_2}^\dagger \delta_{\alpha_3 \alpha_4}) \right. \\
& \quad \left. + T_{k_1 \alpha_1} T_{k_2 \alpha_2} T_{k_3 \alpha_3} T_{k_4 \alpha_4}^* (4d_{\alpha_4}^\dagger d_{\alpha_1} d_{\alpha_2} d_{\alpha_3} + 6d_{\alpha_1} d_{\alpha_2} \delta_{\alpha_3 \alpha_4}) \right] \\
& + \delta_{k_1+k_2-k_3-k_4,0} T_{k_1 \alpha_1}^* T_{k_2 \alpha_2}^* T_{k_3 \alpha_3} T_{k_4 \alpha_4} (6d_{\alpha_1}^\dagger d_{\alpha_2}^\dagger d_{\alpha_3} d_{\alpha_4} + 12d_{\alpha_1}^\dagger d_{\alpha_4} \delta_{\alpha_2 \alpha_3} + 3\delta_{\alpha_1 \alpha_4} \delta_{\alpha_2 \alpha_3}) \left. \right\} \\
& + \frac{\delta m^2}{4} \sum_k \frac{1}{k_0} (A_{-k} A_k + A_k^* A_{-k}^* + 2A_k A_k^*) \\
& + \frac{\delta m^2}{2} \sum_{k\alpha} \frac{1}{k_0} \left\{ [A_k (U_{-k\alpha} - V_{k\alpha}) + A_k^* (U_{k\alpha} - V_{-k\alpha})] d_\alpha \right. \\
& \quad \left. + [A_k^* (U_{-k\alpha}^* - V_{k\alpha}^*) + A_k (U_{k\alpha}^* - V_{-k\alpha}^*)] d_\alpha^\dagger \right\} \\
& + \frac{\delta m^2}{4} \sum_k \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \frac{1}{k_0} [(U_{k\alpha_1} - V_{-k\alpha_1})(U_{-k\alpha_2} - V_{k\alpha_2}) d_{\alpha_1} d_{\alpha_2} \\
& \quad + (U_{k\alpha_1}^* - V_{-k\alpha_1}^*)(U_{-k\alpha_2}^* - V_{k\alpha_2}^*) d_{\alpha_1}^\dagger d_{\alpha_2}^\dagger \\
& \quad + (U_{k\alpha_1} - V_{-k\alpha_1})(U_{k\alpha_2}^* - V_{-k\alpha_2}^*) d_{\alpha_1} d_{\alpha_2}^\dagger \\
& \quad + (U_{k\alpha_1}^* - V_{-k\alpha_1}^*)(U_{k\alpha_2} - V_{-k\alpha_2}) d_{\alpha_1}^\dagger d_{\alpha_2}] , \tag{C.6}
\end{aligned}$$

onde usamos a abreviação

$$T_{k\alpha} = U_{k\alpha} - V_{-k\alpha} . \tag{C.7}$$

A expansão de H se reduz facilmente para o caso particular em que o campo é espacialmente homogêneo seguindo a discussão feita na seção (3.1). Para os operadores de campo e de momento temos

$$\phi(x) = \langle \phi \rangle + \sum_k \left[f_k(x_\kappa - y_\kappa) d_k + f_k^*(x_\kappa - y_\kappa)^* d_k^\dagger \right] , \tag{C.8}$$

$$\Pi(x) = \langle \Pi \rangle + i \sum_k k_0 \left[f_k^*(x_\kappa - y_\kappa)^* d_k^\dagger - f_k(x_\kappa - y_\kappa) d_k \right] , \tag{C.9}$$

onde

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2L\mu}}(A + A^*), \quad \langle \Pi \rangle = i\sqrt{\frac{\mu}{2L}}(A^* - A).$$

Parametrizamos x_κ e y_κ , obedecendo as relações de normalização $|x_\kappa|^2 - |y_\kappa|^2 = 1$, como sendo:

$$x_\kappa = \text{ch } \sigma_\kappa + i\frac{\tau_\kappa}{2}, \quad y_\kappa = \text{sh } \sigma_\kappa + i\frac{\tau_\kappa}{2} \quad (C.10)$$

Em termos desse ingredientes, temos a seguinte expressão para H no caso espacialmente homogêneo:

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2} \sum_k \left[\frac{k^2 + m^2}{2k_0} e^{-2\sigma_\kappa} + \frac{k_0}{2} (e^{2\sigma_\kappa} + \tau_\kappa^2) \right] (1 + 2d_k^\dagger d_k) \\ & + \frac{1}{2} \sum_k \left[\frac{k^2 + m^2}{2k_0} e^{-2\sigma_\kappa} - \frac{k_0}{2} (e^{\sigma_\kappa} + i\tau_\kappa)^2 \right] d_k d_{-k} \\ & + \frac{1}{2} \sum_k \left[\frac{k^2 + m^2}{2k_0} e^{-2\sigma_\kappa} - \frac{k_0}{2} (e^{\sigma_\kappa} - i\tau_\kappa)^2 \right] d_k^\dagger d_{-k}^\dagger \\ & + i\langle \Pi \rangle \sqrt{\frac{\mu}{2}} [(e^{\sigma_0} - i\tau_0)d_0 - (e^{\sigma_0} + i\tau_0)d_0^\dagger] + \frac{L}{2} \langle \Pi \rangle^2 \\ & + m^2 \langle \phi \rangle \sqrt{\frac{\mu}{2L}} e^{\sigma_0} (d_0^\dagger + d_0) + \frac{m^2}{2} \langle \phi \rangle^2 L \\ & + \frac{g}{96L} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \frac{e^{-(\sigma_{k_1} + \sigma_{k_2} + \sigma_{k_3} + \sigma_{k_4})}}{\sqrt{k_{01} k_{02} k_{03} k_{04}}} \left[\delta_{k_1 + k_2 + k_3 + k_4, 0} (d_{k_1}^\dagger d_{k_2}^\dagger d_{k_3}^\dagger d_{k_4}^\dagger + d_{k_1} d_{k_2} d_{k_3} d_{k_4}) \right. \\ & + \delta_{k_1 + k_2 + k_3 - k_4, 0} (4d_{k_1}^\dagger d_{k_2}^\dagger d_{k_3}^\dagger d_{k_4} + 6d_{k_1}^\dagger d_{k_2}^\dagger \delta_{k_3 k_4} + 4d_{k_4}^\dagger d_{k_1} d_{k_2} d_{k_3} + 6d_{k_1} d_{k_2} \delta_{k_3 k_4}) \\ & \left. + \delta_{k_1 + k_2 - k_3 - k_4, 0} (6d_{k_1}^\dagger d_{k_2}^\dagger d_{k_3} d_{k_4} + 12d_{k_1}^\dagger d_{k_4} \delta_{k_2 k_3} + 3\delta_{k_1 k_4} \delta_{k_2 k_3}) \right] \\ & + \frac{g\langle \phi \rangle}{12\sqrt{2L}} \sum_{k_1 k_2 k_3} \frac{e^{-(\sigma_{k_1} + \sigma_{k_2} + \sigma_{k_3})}}{\sqrt{k_{01} k_{02} k_{03}}} \left[\delta_{k_1 + k_2 + k_3, 0} (d_{k_1}^\dagger d_{k_2}^\dagger d_{k_3}^\dagger + d_{k_1} d_{k_2} d_{k_3}) \right. \\ & \left. + 3\delta_{k_1 + k_2 - k_3, 0} (d_{k_1}^\dagger d_{k_2}^\dagger d_{k_3} + d_{k_1}^\dagger \delta_{k_2 k_3} + d_{k_3}^\dagger d_{k_1} d_{k_2} + d_{k_1} \delta_{k_2 k_3}) \right] \\ & + \frac{g\langle \phi \rangle^2}{8} \sum_{k_1 k_2} \frac{e^{-(\sigma_{k_1} + \sigma_{k_2})}}{\sqrt{k_{01} k_{02}}} \left[\delta_{k_1 + k_2, 0} (d_{k_1}^\dagger d_{k_2}^\dagger + d_{k_1} d_{k_2}) + \delta_{k_1 k_2} (2d_{k_1}^\dagger d_{k_2} + 1) \right] \\ & + \frac{g}{3!} \langle \phi \rangle^3 \sqrt{\frac{L}{2\mu}} e^{-\sigma_0} (d_0 + d_0^\dagger) + \frac{g}{4!} \langle \phi \rangle^4 L \\ & + \frac{\delta m^2}{2} \sum_k \frac{e^{-2\sigma_\kappa}}{k_0} (d_k^\dagger d_{-k}^\dagger + d_k d_{-k} + d_k^\dagger d_k + d_k d_k^\dagger) \end{aligned}$$

$$+\delta m^2 \langle \phi \rangle \sqrt{\frac{L}{2\mu}} e^{-\sigma_0} (d_0^\dagger + d_0) + \frac{\delta m^2}{2} \langle \phi \rangle^2 L. \quad (C.11)$$

APÊNDICE D

CÁLCULO DA DENSIDADE $\mathcal{Q}(t') [H, F_0(t')]$

Os ingredientes de $\mathcal{Q}$, H e F_0 são dados respectivamente por (2.63), (C.6) e (2.58). O cálculo do comutador $[H, F_0]$ envolve operações do tipo $[d, F_0]$, onde

$$F_0 = \frac{1}{1+p} \left(\frac{p}{1+p} \right)^{d^\dagger d} \quad (D.1)$$

Definimos

$$\left(\frac{p}{1+p} \right)^{d^\dagger d} \equiv e^{md^\dagger d}.$$

O cálculo do comutador de d com $e^{md^\dagger d}$ pode ser feito escrevendo o último em forma de série

$$[d, F_0] = \frac{1}{1+d} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^n}{n!} [d, (d^\dagger d)^n].$$

Calcular o último comutador e depois reescrever o segundo membro na forma exponencial $e^{md^\dagger d}$ é imediato, e obtemos para esse exemplo

$$[d, F_0] = -\frac{d}{p} F_0.$$

Dessa forma, o cálculo do comutador $[H, F_0]$ e depois o da projeção $\mathcal{Q}$ é direto, embora bastante longo. Obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}[H, F_0] = & \frac{g}{96L} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \frac{\delta_{k_1+k_2+k_3+k_4,0}}{\sqrt{k_{01} k_{02} k_{03} k_{04}}} \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \left[\right. \\ & \frac{T_{k_1 \alpha_1}^* T_{k_2 \alpha_2}^* T_{k_3 \alpha_3}^* T_{k_4 \alpha_4}^*}{(1+p_{\alpha_1})(1+p_{\alpha_2})(1+p_{\alpha_3})(1+p_{\alpha_4})} \frac{d_{\alpha_1}^\dagger d_{\alpha_2}^\dagger d_{\alpha_3}^\dagger d_{\alpha_4}^\dagger}{p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} p_{\alpha_3} p_{\alpha_4}} \\ & \left. - T_{k_1 \alpha_1} T_{k_2 \alpha_2} T_{k_3 \alpha_3} T_{k_4 \alpha_4} \frac{d_{\alpha_1} d_{\alpha_2} d_{\alpha_3} d_{\alpha_4}}{p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} p_{\alpha_3} p_{\alpha_4}} \right] \left(1 + \sum_i^4 p_{\alpha_i} + \sum_{i<j}^4 p_{\alpha_i} p_{\alpha_j} + \sum_{i<j<\ell}^4 p_{\alpha_i} p_{\alpha_j} p_{\alpha_\ell} \right) F_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{g}{24L} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \frac{\delta_{k_1+k_2+k_3-k_4,0}}{\sqrt{k_{01}k_{02}k_{03}k_{04}}} \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \left[\right. \\
& \quad T_{k_1 \alpha_1}^* T_{k_2 \alpha_2}^* T_{k_3 \alpha_3}^* T_{k_4 \alpha_4} \frac{d_{\alpha_1}^\dagger d_{\alpha_2}^\dagger d_{\alpha_3}^\dagger d_{\alpha_4}}{(1+p_{\alpha_1})(1+p_{\alpha_2})(1+p_{\alpha_3})p_{\alpha_4}} \\
& \quad \left. - T_{k_1 \alpha_1} T_{k_2 \alpha_2} T_{k_3 \alpha_3} T_{k_4 \alpha_4}^* \frac{d_{\alpha_4}^\dagger d_{\alpha_1} d_{\alpha_2} d_{\alpha_3}}{(1+p_{\alpha_4})p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} p_{\alpha_3}} \right] \\
& \times \left(p_{\alpha_4} - p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} p_{\alpha_3} + p_{\alpha_4} \sum_i^3 p_{\alpha_i} + p_{\alpha_4} \sum_{i<j}^3 p_{\alpha_i} p_{\alpha_j} \right) F_0 \\
& + \frac{g}{24L} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \frac{1}{\sqrt{k_{01}k_{02}k_{03}k_{04}}} \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \left\{ \right. \\
& \quad \delta_{k_1+k_2+k_3+k_4,0} \left[A_{k_1}^* T_{k_2 \alpha_1}^* T_{k_3 \alpha_2}^* T_{k_4 \alpha_3}^* \frac{d_{\alpha_1}^\dagger d_{\alpha_2}^\dagger d_{\alpha_3}^\dagger}{(1+p_{\alpha_1})(1+p_{\alpha_2})(1+p_{\alpha_3})} \right. \\
& \quad \left. - A_{k_1} T_{k_2 \alpha_1} T_{k_3 \alpha_2} T_{k_4 \alpha_3} \frac{d_{\alpha_1} d_{\alpha_2} d_{\alpha_3}}{p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} p_{\alpha_3}} \right] \left(1 + \sum_i^3 p_{\alpha_i} + \sum_{i<j}^3 p_{\alpha_i} p_{\alpha_j} \right) \\
& + \delta_{-k_1+k_2+k_3+k_4,0} \left[A_{k_1} T_{k_2 \alpha_1}^* T_{k_3 \alpha_2}^* T_{k_4 \alpha_3}^* \frac{d_{\alpha_1}^\dagger d_{\alpha_2}^\dagger d_{\alpha_3}^\dagger}{(1+p_{\alpha_1})(1+p_{\alpha_2})(1+p_{\alpha_3})} \right. \\
& \quad \left. - A_{k_1}^* T_{k_2 \alpha_1} T_{k_3 \alpha_2} T_{k_4 \alpha_3} \frac{d_{\alpha_1} d_{\alpha_2} d_{\alpha_3}}{p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} p_{\alpha_3}} \right] \left(1 + \sum_i^3 p_{\alpha_i} + \sum_{i<j}^3 p_{\alpha_i} p_{\alpha_j} \right) \\
& + 3\delta_{k_1-k_2-k_3+k_4,0} \left[A_{k_1} T_{k_2 \alpha_1}^* T_{k_3 \alpha_2}^* T_{k_4 \alpha_3}^* \frac{d_{\alpha_1}^\dagger d_{\alpha_2}^\dagger d_{\alpha_3}}{(1+p_{\alpha_1})(1+p_{\alpha_2})p_{\alpha_3}} \right. \\
& \quad \left. - A_{k_1}^* T_{k_2 \alpha_1} T_{k_3 \alpha_2} T_{k_4 \alpha_3} \frac{d_{\alpha_3}^\dagger d_{\alpha_1} d_{\alpha_2}}{p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} (1+p_{\alpha_3})} \right] [p_{\alpha_3} (1+p_{\alpha_1}+p_{\alpha_2}) - p_{\alpha_1} p_{\alpha_2}] \\
& + 3\delta_{k_1+k_2+k_3-k_4,0} \left[A_{k_1}^* T_{k_2 \alpha_1}^* T_{k_3 \alpha_2}^* T_{k_4 \alpha_3}^* \frac{d_{\alpha_1}^\dagger d_{\alpha_2}^\dagger d_{\alpha_3}}{(1+p_{\alpha_1})(1+p_{\alpha_2})p_{\alpha_3}} \right. \\
& \quad \left. - A_{k_1} T_{k_2 \alpha_1} T_{k_3 \alpha_2} T_{k_4 \alpha_3} \frac{d_{\alpha_3}^\dagger d_{\alpha_1} d_{\alpha_2}}{p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} (1+p_{\alpha_3})} \right] [p_{\alpha_3} (1+p_{\alpha_1}+p_{\alpha_2}) - p_{\alpha_1} p_{\alpha_2}] \left. \right\} F_0 \\
& - \frac{g}{8L} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \frac{\delta_{k_1+k_2+k_3,k_4}}{\sqrt{k_{01}k_{02}k_{03}k_{04}}} \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \left[T_{k_1 \alpha_1}^* T_{k_2 \alpha_2}^* T_{k_3 \alpha_3}^* T_{k_4 \alpha_3} \frac{d_{\alpha_1}^\dagger d_{\alpha_2}^\dagger}{(1+p_{\alpha_1})(1+p_{\alpha_2})} \right. \\
& \quad \left. - T_{k_1 \alpha_1} T_{k_2 \alpha_2} T_{k_3 \alpha_3} T_{k_4 \alpha_3}^* \frac{d_{\alpha_1} d_{\alpha_2}}{p_{\alpha_1} p_{\alpha_2}} \right] (1+p_{\alpha_1}+p_{\alpha_2}) p_{\alpha_3} F_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{g}{4L} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \frac{1}{\sqrt{k_{01} k_{02} k_{03} k_{04}}} \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \left\{ \right. \\
& \delta_{k_1 - k_2 - k_3 + k_4, 0} \left[A_{k_1} T_{k_2 \alpha_1}^* T_{k_3 \alpha_2}^* T_{k_4 \alpha_2} \frac{d_{\alpha_1}^\dagger}{1 + p_{\alpha_1}} - A_{k_1}^* T_{k_2 \alpha_1} T_{k_3 \alpha_2} T_{k_4 \alpha_2}^* \frac{d_{\alpha_1}}{p_{\alpha_1}} \right] p_{\alpha_2} \\
& + \delta_{k_1 + k_2 + k_3 - k_4, 0} \left[A_{k_1}^* T_{k_2 \alpha_1}^* T_{k_3 \alpha_2}^* T_{k_4 \alpha_2} \frac{d_{\alpha_1}^\dagger}{1 + p_{\alpha_1}} - A_{k_1} T_{k_2 \alpha_1} T_{k_3 \alpha_2} T_{k_4 \alpha_2}^* \frac{d_{\alpha_1}}{p_{\alpha_1}} \right] p_{\alpha_2} \left. \right\} F_0 \\
& + \frac{g}{16L} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \frac{\delta_{k_1 + k_2 - k_3 - k_4, 0}}{\sqrt{k_{01} k_{02} k_{03} k_{04}}} \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} T_{k_1 \alpha_1}^* T_{k_2 \alpha_2}^* T_{k_3 \alpha_3} T_{k_4 \alpha_4} \\
& \times \left(1 - \frac{p_{\alpha_1}}{1 + p_{\alpha_1}} \frac{p_{\alpha_2}}{1 + p_{\alpha_2}} \frac{1 + p_{\alpha_3}}{p_{\alpha_3}} \frac{1 + p_{\alpha_4}}{p_{\alpha_4}} \right) d_{\alpha_1}^\dagger d_{\alpha_2}^\dagger d_{\alpha_3} d_{\alpha_4} F_0 \\
& - \frac{g}{4L} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \frac{\delta_{k_1 + k_2 - k_3 - k_4, 0}}{\sqrt{k_{01} k_{02} k_{03} k_{04}}} \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} T_{k_1 \alpha_1}^* T_{k_2 \alpha_2}^* T_{k_3 \alpha_2} T_{k_4 \alpha_3} \\
& \times \left(1 - \frac{p_{\alpha_1}}{1 + p_{\alpha_1}} \frac{1 + p_{\alpha_2}}{p_{\alpha_2}} \right) p_{\alpha_3} d_{\alpha_1}^\dagger d_{\alpha_2} F_0 \tag{D.2}
\end{aligned}$$

Da mesma maneira, obtivemos o seguinte resultado para o sistema uniforme a partir das equações (2.63), (C.11) e (3.13):

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}[H, F_0] = & \frac{g}{96L} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \frac{e^{-(\sigma_{\kappa_1} + \sigma_{\kappa_2} + \sigma_{\kappa_3} + \sigma_{\kappa_4})}}{\sqrt{k_{01} k_{02} k_{03} k_{04}}} \delta_{k_1 + k_2 + k_3 + k_4, 0} \left[\right. \\
& \frac{d_{k_1}^\dagger d_{k_2}^\dagger d_{k_3}^\dagger d_{k_4}^\dagger}{(1 + p_{\kappa_1})(1 + p_{\kappa_2})(1 + p_{\kappa_3})(1 + p_{\kappa_4})} - \frac{d_{k_1} d_{k_2} d_{k_3} d_{k_4}}{p_{\kappa_1} p_{\kappa_2} p_{\kappa_3} p_{\kappa_4}} \left. \right] \\
& \times \left(1 + \sum_i^4 p_{\kappa_i} + \sum_{i < j}^4 p_{\kappa_i} p_{\kappa_j} + \sum_{i < j < \ell}^4 p_{\kappa_i} p_{\kappa_j} p_{\kappa_\ell} \right) F_0 \\
& + \frac{g}{24L} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \frac{e^{-(\sigma_{\kappa_1} + \sigma_{\kappa_2} + \sigma_{\kappa_3} + \sigma_{\kappa_4})}}{\sqrt{k_{01} k_{02} k_{03} k_{04}}} \delta_{k_1 + k_2 + k_3, k_4} \left[\right. \\
& \frac{d_{k_1}^\dagger d_{k_2}^\dagger d_{k_3}^\dagger d_{k_4}}{(1 + p_{\kappa_1})(1 + p_{\kappa_2})(1 + p_{\kappa_3}) p_{\kappa_4}} - \frac{d_{k_4}^\dagger d_{k_1} d_{k_2} d_{k_3}}{(1 + p_{\kappa_4}) p_{\kappa_1} p_{\kappa_2} p_{\kappa_3}} \left. \right] \\
& \times \left(p_{\kappa_4} - p_{\kappa_1} p_{\kappa_2} p_{\kappa_3} + p_{\kappa_4} \sum_i^3 p_{\kappa_i} + p_{\kappa_4} \sum_{i < j}^3 p_{\kappa_i} p_{\kappa_j} \right) F_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{g}{16L} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \frac{e^{-(\sigma_{\kappa_1} + \sigma_{\kappa_2} + \sigma_{\kappa_3} + \sigma_{\kappa_4})}}{\sqrt{k_{01} k_{02} k_{03} k_{04}}} \delta_{k_1 + k_2, k_3 + k_4} \\
& \times \left(1 - \frac{p_{\kappa_1}}{1 + p_{\kappa_1}} \frac{p_{\kappa_2}}{1 + p_{\kappa_2}} \frac{1 + p_{\kappa_3}}{p_{\kappa_3}} \frac{1 + p_{\kappa_4}}{p_{\kappa_4}} \right) d_{k_1}^\dagger d_{k_2}^\dagger d_{k_3} d_{k_4} F_0 \\
& + \frac{g\langle\phi\rangle}{12\sqrt{2}L} \sum_{k_1 k_2 k_3} \frac{e^{-(\sigma_{\kappa_1} + \sigma_{\kappa_2} + \sigma_{\kappa_3})}}{\sqrt{k_{01} k_{02} k_{03}}} \delta_{k_1 + k_2 + k_3, 0} \left[\right. \\
& \left. \frac{d_{k_1}^\dagger d_{k_2}^\dagger d_{k_3}^\dagger}{(1 + p_{\kappa_1})(1 + p_{\kappa_2})(1 + p_{\kappa_3})} - \frac{d_{k_1} d_{k_2} d_{k_3}}{p_{\kappa_1} p_{\kappa_2} p_{\kappa_3}} \right] \left(1 + \sum_i^3 p_{\kappa_i} + \sum_{i < j}^3 p_{\kappa_i} p_{\kappa_j} \right) F_0 \\
& + \frac{g\langle\phi\rangle}{4\sqrt{2}L} \sum_{k_1 k_2 k_3} \frac{e^{-(\sigma_{\kappa_1} + \sigma_{\kappa_2} + \sigma_{\kappa_3})}}{\sqrt{k_{01} k_{02} k_{03}}} \delta_{k_1 + k_2 - k_3, 0} \left[\right. \\
& \left. \frac{d_{k_1}^\dagger d_{k_2}^\dagger d_{k_3}}{(1 + p_{\kappa_1})(1 + p_{\kappa_2})p_{\kappa_3}} - \frac{d_{k_3}^\dagger d_{k_1} d_{k_2}}{p_{\kappa_1} p_{\kappa_2} (1 + p_{\kappa_3})} \right] [p_{\kappa_3} (1 + p_{\kappa_1} + p_{\kappa_2}) - p_{\kappa_1} p_{\kappa_2}] F_0 \\
& - \frac{g}{4L} \sum_{k_1 k_2} \frac{e^{-2(\sigma_{\kappa_1} + \sigma_{\kappa_2})}}{k_{01} k_{02}} \left[\frac{d_{-k_2}^\dagger d_{k_2}^\dagger}{(1 + p_{\kappa_2})^2} - \frac{d_{k_2} d_{-k_2}}{p_{\kappa_2}^2} \right] p_{\kappa_1} (1 + 2p_{\kappa_2}) F_0 \\
& - \frac{g\langle\phi\rangle}{\sqrt{8}L\mu} e^{-\sigma_0} \sum_k \frac{e^{-2\sigma_\kappa} p_\kappa}{k_0} \left[\frac{d_0^\dagger}{1 + p_0} - \frac{d_0}{p_0} \right] F_0
\end{aligned} \tag{D.3}$$

APÊNDICE E

APROXIMAÇÃO PARA A EVOLUÇÃO TEMPORAL DOS OPERADORES DE HEISENBERG

Na seção (2.3), discutimos a aproximação para a evolução de $d_\alpha(t)$, que consiste em substituir a hamiltoniana total H por uma H_0 dada por

$$\begin{aligned}
 H_0 = & \mathcal{P}^\dagger H + \sum_{\alpha} d_{\alpha}^{\dagger} \text{Tr}[d_{\alpha}, H] F'(t) - \sum_{\alpha} d_{\alpha} \text{Tr}[d_{\alpha}^{\dagger}, H] F'(t) \\
 & + \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \frac{d_{\alpha_1}^{\dagger} d_{\alpha_2}^{\dagger}}{2(1 + p_{\alpha_1} + p_{\alpha_2})} \text{Tr}[d_{\alpha_1} d_{\alpha_2}, H] F'(t) \\
 & - \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \frac{d_{\alpha_1} d_{\alpha_2}}{2(1 + p_{\alpha_1} + p_{\alpha_2})} \text{Tr}[d_{\alpha_1}^{\dagger} d_{\alpha_2}^{\dagger}, H] F'(t) .
 \end{aligned} \tag{E.1}$$

Mostramos agora que H_0 , escolhida dessa maneira, permite a solução da equação de Heisenberg (2.73),

$$i\dot{d}_{\alpha} = [d_{\alpha}, H_0] - \sum_{\gamma} h_{\alpha\gamma} d_{\gamma} - \sum_{\gamma} g_{\gamma\alpha} d_{\gamma}^{\dagger} - \text{Tr}[d_{\alpha}, H] F . \tag{E.2}$$

Os últimos termos dessa equação dão as dependências explícitas dos operadores $d_{\alpha}(t)$ com as amplitudes de deslocamento e os efeitos de emparelhamento, e podem ser obtidos a partir das relações de transformações descritas na seção (2.1). As matrizes h e g são expressas em termos dos traços de (2.52a) e (2.52b).

Usando a equação obtida para o projetor adjunto $\mathcal{P}^\dagger(t)$ (B.17) , podemos escrever o

primeiro termo de (E.1) como

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}^\dagger H &= \left(1 - \sum_{\alpha} \frac{d_{\alpha}^\dagger d_{\alpha} - p_{\alpha}}{1 + p_{\alpha}}\right) \text{Tr}(H F_0) + \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \frac{d_{\alpha_1}^\dagger d_{\alpha_2} - p_{\alpha_1} \delta_{\alpha_1 \alpha_2}}{p_{\alpha_2}(1 + p_{\alpha_1})} \text{Tr}(d_{\alpha_2}^\dagger d_{\alpha_1} H F_0) \\
 &+ \sum_{\alpha} \frac{d_{\alpha}}{p_{\alpha}} \text{Tr}(d_{\alpha}^\dagger H F_0) + \sum_{\alpha} \frac{d_{\alpha}^\dagger}{1 + p_{\alpha}} \text{Tr}(d_{\alpha} H F_0) \\
 &+ \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \frac{d_{\alpha_1} d_{\alpha_2}}{2 p_{\alpha_1} p_{\alpha_2}} \text{Tr}(d_{\alpha_2}^\dagger d_{\alpha_1}^\dagger H F_0) + \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \frac{d_{\alpha_1}^\dagger d_{\alpha_2}^\dagger}{2(1 + p_{\alpha_1})(1 + p_{\alpha_2})} \text{Tr}(d_{\alpha_2} d_{\alpha_1} H F_0) \\
 &= \left(1 - \sum_{\alpha} \frac{d_{\alpha}^\dagger d_{\alpha} - p_{\alpha}}{1 + p_{\alpha}}\right) \text{Tr}(H F_0) + \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \frac{d_{\alpha_1}^\dagger d_{\alpha_2} - p_{\alpha_1} \delta_{\alpha_1 \alpha_2}}{p_{\alpha_2}(1 + p_{\alpha_1})} \text{Tr}(d_{\alpha_2}^\dagger d_{\alpha_1} H F_0) \\
 &- \sum_{\alpha} d_{\alpha} \text{Tr}[d_{\alpha}^\dagger, H] F_0 + \sum_{\alpha} d_{\alpha}^\dagger \text{Tr}[d_{\alpha}, H] F_0 \\
 &- \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \frac{d_{\alpha_1} d_{\alpha_2}}{2(1 + p_{\alpha_1} + p_{\alpha_2})} \text{Tr}[d_{\alpha_2}^\dagger d_{\alpha_1}^\dagger, H] F_0 + \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \frac{d_{\alpha_1}^\dagger d_{\alpha_2}^\dagger}{2(1 + p_{\alpha_1} + p_{\alpha_2})} \text{Tr}[d_{\alpha_2} d_{\alpha_1}, H] F_0 .
 \end{aligned} \tag{E.3}$$

Na última passagem, usamos a propriedade cíclica do traço. Juntando (E.2) e (E.1) temos

$$\begin{aligned}
 H_0 &= \left(1 - \sum_{\alpha} \frac{d_{\alpha}^\dagger d_{\alpha} - p_{\alpha}}{1 + p_{\alpha}}\right) \text{Tr}(H F_0) + \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \frac{d_{\alpha_1}^\dagger d_{\alpha_2} - p_{\alpha_1} \delta_{\alpha_1 \alpha_2}}{p_{\alpha_2}(1 + p_{\alpha_1})} \text{Tr}(d_{\alpha_2}^\dagger d_{\alpha_1} H F_0) \\
 &- \sum_{\alpha} d_{\alpha} \text{Tr}[d_{\alpha}^\dagger, H] F + \sum_{\alpha} d_{\alpha}^\dagger \text{Tr}[d_{\alpha}, H] F \\
 &- \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \frac{d_{\alpha_1} d_{\alpha_2}}{2(1 + p_{\alpha_1} + p_{\alpha_2})} \text{Tr}[d_{\alpha_2}^\dagger d_{\alpha_1}^\dagger, H] F + \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \frac{d_{\alpha_1}^\dagger d_{\alpha_2}^\dagger}{2(1 + p_{\alpha_1} + p_{\alpha_2})} \text{Tr}[d_{\alpha_2} d_{\alpha_1}, H] F .
 \end{aligned} \tag{E.4}$$

Substituindo (E.4) em (E.2) temos

$$i\dot{d}_{\alpha} = -\frac{\text{Tr}(H F_0)}{1 + p_{\alpha}} d_{\alpha} + \sum_{\alpha'} \frac{d_{\alpha'}}{p_{\alpha'}(1 + p_{\alpha})} \text{Tr}(d_{\alpha'}^\dagger, d_{\alpha} H F_0) - \sum_{\gamma} h_{\alpha\gamma} d_{\gamma} . \tag{E.5}$$

O cálculo dos dois primeiros termos é direto, dando

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \sum_{\alpha'} \sum_k \left[k_0 (U_{k\alpha}^* + V_{-k\alpha}^*) (U_{k\alpha'} + V_{-k\alpha'}) + \frac{k^2 + m^2}{k_0} T_{k\alpha}^* T_{k\alpha'} \right] d_{\alpha'} \\
 &+ \frac{g}{16L} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \frac{1}{\sqrt{k_{01} k_{02} k_{03} k_{04}}} \sum_{\alpha'} \left\{
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta_{k_1+k_2-k_3+k_4,0} \left(A_{k_1} A_{k_2} T_{k_3\alpha}^* T_{k_4\alpha'} + A_{k_1}^* A_{k_2}^* T_{k_3\alpha'} T_{k_4\alpha} \right) \\
& + \delta_{k_1+k_2+k_3-k_4,0} \left(A_{k_1} A_{k_2} T_{k_3\alpha'} T_{k_4\alpha}^* + A_{k_1}^* A_{k_2}^* T_{k_3\alpha}^* T_{k_4\alpha'} \right) \\
& + 2\delta_{k_1-k_2+k_3-k_4,0} \left(A_{k_1}^* A_{k_2} T_{k_3\alpha}^* T_{k_4\alpha'} + A_{k_1} A_{k_2}^* T_{k_3\alpha'} T_{k_4\alpha}^* \right) \Big\} d_{\alpha'} \\
& + \frac{g}{4L} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \frac{\delta_{k_1+k_2-k_3-k_4,0}}{\sqrt{k_{01} k_{02} k_{03} k_{04}}} \sum_{\alpha_1 \alpha_2} T_{k_1\alpha}^* T_{k_2\alpha_2}^* T_{k_3\alpha_1} T_{k_4\alpha_2} p_{\alpha_2} d_{\alpha_1} \\
& + \frac{g}{8L} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \frac{\delta_{k_1+k_2-k_3-k_4,0}}{\sqrt{k_{01} k_{02} k_{03} k_{04}}} \sum_{\alpha_1 \alpha_2} T_{k_1\alpha_1}^* T_{k_2\alpha_2}^* T_{k_3\alpha_2} T_{k_4\alpha_1} d_{\alpha_1} \\
& - \frac{g}{8L} \sum_{k_1 k_2} \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + m^2}} \frac{1}{k_{02}} \sum_{\alpha_1} T_{k_2\alpha}^* T_{k_2\alpha_1} d_{\alpha_1} \\
& \equiv \sum_{\gamma} B_{\alpha\gamma} d_{\gamma} .
\end{aligned} \tag{E.6}$$

Temos finalmente a equação de Heisenberg a ser resolvida,

$$\begin{aligned}
i\dot{d}_{\alpha} &= \sum_{\gamma} B_{\alpha\gamma} d_{\gamma} - \sum_{\gamma} h_{\alpha\gamma} d_{\gamma} \\
&\equiv \sum_{\gamma} F_{\alpha\gamma} d_{\gamma}
\end{aligned} \tag{E.7}$$

ou, na forma matricial,

$$i\dot{d} = Fd . \tag{E.8}$$

A equação (E.7) tem a solução da forma

$$d(t) = M(t, t') d(t') , \tag{E.9}$$

sendo M a solução da equação matricial

$$iM(t, t') = F(t)M(t, t') \tag{E.10a}$$

com a condição inicial

$$M(t', t') = 1 . \tag{E.10b}$$

De fato

$$\begin{aligned}
i\dot{d}(t) &= i\dot{M}(t, t') d(t') = F(t)M(t, t') d(t') \\
&= F(t)d(t) .
\end{aligned}$$

Dessa forma, os operadores em tempos diferentes são relacionados através da equação

$$d_\alpha(t) = \sum_\gamma M_{\alpha\gamma}(t, t') d_\gamma(t') \quad (E.11)$$

A transcrição dessa discussão para o sistema uniforme é direta. A equação de Heisenberg a ser resolvida nesse caso, é

$$\begin{aligned} i\dot{d}_k(t) = & \left\{ \left[\frac{k^2 + m^2}{2} + \frac{k^2 + \mu_\kappa^2}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{k^2 + \mu^2} \sqrt{k^2 + \mu_\kappa^2} \tau_\kappa^2 + \frac{g}{4} \langle \phi \rangle^2 \right. \right. \\ & + \frac{g}{4L} \sum_{k'} \frac{p_{\kappa'}}{\sqrt{k'^2 + \mu_{\kappa'}^2}} + \frac{g}{8L} \sum_{k'} \left(\frac{1}{\sqrt{k'^2 + \mu_{\kappa'}^2}} - \frac{1}{\sqrt{k'^2 + m^2}} \right) \left. \right] \frac{1}{\sqrt{k^2 + \mu_\kappa^2}} \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{k^2 + \mu^2}{k^2 + \mu_\kappa^2} \right)^{1/4} \left(\frac{1}{2} \frac{\mu_\kappa \dot{\mu}_\kappa}{k^2 + \mu_\kappa^2} \tau_\kappa + \dot{\tau}_\kappa \right) \Big\} d_k \\ & \equiv F_\kappa(t) d_k(t) , \end{aligned} \quad (E.12)$$

cuja solução é

$$d_k(t) = e^{-i \int_{t'}^t d\tau F_\kappa(\tau)} d_k(t') . \quad (E.13)$$

Definindo ainda

$$\varphi_k(t, t') = -i \int_{t'}^t d\tau F_\kappa(\tau) , \quad (E.14)$$

temos finalmente

$$d_k(t) = e^{i\varphi_k(t, t')} d_k(t') . \quad (E.15)$$

APÊNDICE F

APROXIMAÇÃO PARA $F'(t)$ NA REPRESENTAÇÃO DE HEISENBERG

Neste apêndice, mostramos que a aproximação feita para $F'(t)$ (equação (2.77)) na representação de Heisenberg é o termo de mais baixa ordem de uma série de potências em H_0 (equação (2.75)) na qual $F'(t)$ pode ser escrita. Essa expansão foi desenvolvida na referência [14] usando a representação de Schrödinger.

Discutimos na seção (2.3) que o cálculo de efeitos colisionais das equações de movimento consiste em desenvolver traços do tipo

$$\text{Tr} \int_0^t dt' O_H(t) \mathcal{L}_H \mathcal{G}_H(t, t') \mathcal{Q}_H(t') \mathcal{L}_H F_{0H}(t'), \quad (F.1)$$

onde o rótulo H indica a representação de Heisenberg e

$$\mathcal{G}_H(t, t') = T \exp i \int_{t'}^t d\tau \mathcal{P}_H(\tau) \mathcal{L}_H. \quad (F.2)$$

Na representação de Schrödinger, temos a mesma expressão para o cálculo do traço

$$\text{Tr} \int_0^t dt' O_S(t) \mathcal{L}_S \mathcal{G}_S(t, t') \mathcal{Q}_S(t') \mathcal{L}_S F_{0S}(t'), \quad (F.3)$$

porém, a função de Green é dada agora por

$$\mathcal{G}_S(t, t') = T \exp -i \int_{t'}^t d\tau \mathcal{Q}_S(\tau) \mathcal{L}_S, \quad (F.4)$$

onde S indica a representação de Schrödinger. Os operadores da densidade $\mathcal{Q}_S(t') \mathcal{L}_S F_{0S}(t')$ são propagados de t' até t por meio de $\mathcal{G}_S(t, t')$. É fácil ver que a complexidade de $\mathcal{G}(t, t')$ impede um cálculo a cabo do traço de (F.3). Os autores da referência

[14] mostraram que uma maneira de aproximar o propagador $\mathcal{G}(t, t')$ é expandí-lo em série de potência de um propagador mais simples definido por

$$\mathcal{G}_0(t, t') = T \exp -i \int_{t'}^t d\tau \mathcal{L}_{0s}(\tau) , \quad (F.5)$$

onde dividimos

$$H = H_0 + H_1 \quad (F.6)$$

e L_{0s} é um operador de Liouville definido como

$$\mathcal{L}_{0s}X = [H_{0s}, X] .$$

Os primeiros termos dessa série são

$$\mathcal{G}_s^{(0)}(t, t') = \mathcal{G}_{0s}(t, t') \quad (F.6a)$$

$$\mathcal{G}_s^{(1)}(t, t') = \mathcal{G}_{0s}(t, t') - i \int_{t_1}^t dt_2 \mathcal{G}_{0s}(t, t_2) \mathcal{Q}_s(t_2) \mathcal{L}_1(t_2) \mathcal{G}_{0s}(t_2, t_1) \quad (F.6b)$$

$\vdots$

A transcrição para a representação de Heisenberg pode ser feita da seguinte maneira. Primeiro lembramos que

$$O_s \simeq e^{-iH_0 t} O_H e^{iH_0 t} . \quad (F.8)$$

Note que aproximamos a evolução do operador por meio de H_0 . A aproximação de mais baixa ordem dessa série para (F.3) é

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \int_0^t dt_1 O_s(t) \mathcal{L}_s(t) \mathcal{G}_{0s}(t, t_1) \mathcal{Q}_s(t_1) \mathcal{L}_s(t_1) F_{0s}(t_1) \\ &= \text{Tr} \int_0^t dt_1 O_H(t) \mathcal{L}_H(t) e^{iH_0 t} \mathcal{G}_{0s}(t, t_1) e^{-iH_0 t_1} \mathcal{Q}_H(t_1) \mathcal{L}_H(t_1) F_{0H}(t_1) e^{iH_0 t_1} e^{-iH_0 t} , \end{aligned} \quad (F.9)$$

na última passagem usamos a propriedade cíclica do traço e a equação (F.8). A próxima etapa é definir

$$A(t, t_1) \equiv e^{iH_0 t} \mathcal{G}_{0s}(t, t_1) e^{-iH_0 t_1} \mathcal{Q}_H(t_1) \mathcal{L}_H(t_1) F_{0H}(t_1) e^{iH_0 t_1} e^{-iH_0 t} , \quad (F.10)$$

portanto,

$$A(t_1, t_1) = \mathcal{Q}_H(t_1) \mathcal{L}_H(t_1) F_{0H}(t_1) . \quad (F.11)$$

Derivamos agora a relação (F.10) usando (F.5), temos

$$i\dot{A}(t, t_1) = 0 .$$

A solução dessa equação com a condição inicial (F.11) é

$$A(t, t_1) = \mathcal{Q}_H(t_1) \mathcal{L}_H(t_1) F_{0H}(t_1) . \quad (F.12)$$

Portanto, a aproximação de ordem mais baixa para $\mathcal{G}_H(t, t')$ de (F.1) é

$$\mathcal{G}_H^{(0)}(t, t') = \mathcal{I} \quad (F.13)$$

A transcrição para as ordens mais altas da série (F.6) pode ser feita da mesma maneira. A densidade de correlação $F'(t)$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} F'(t) = & -i \int_0^t dt_1 \mathcal{Q}(t_1) \mathcal{L} F_0(t_1) \\ & - \int_0^t dt_1 \left(\int_{t_1}^t dt_2 \mathcal{Q}(t_2) \mathcal{L}_1(t_2) \right) \mathcal{Q}(t_1) \mathcal{L} F_0(t_1) + \dots . \end{aligned} \quad (F.14)$$

Portanto, a densidade das correlações $F'(t)$ pode ser escrita como uma expansão em H_0 , onde cada ordem acrescenta correlações envolvendo uma potência adicional de H em relação à ordem anterior.

APÊNDICE G

PROGRAMA NUMÉRICO

As equações de movimento (4.24), (4.25), (4.26) e (4.27) são equações ordinárias, e podem ser integradas facilmente usando o método de Runge-Kutta, bastando para isso calcular o segundo membro em cada instante dessas equações. A primeira dificuldade encontrada para esse cálculo é saber como tratar convenientemente as integrais de memória. Por exemplo, seja a integral

$$I_{k_1 k_2 k_3}(t) = \int_0^t dt' \prod_{i=1}^3 \left[\frac{1}{\sqrt{k_i^2 + \mu_{\kappa_i}^2}} \right]_{t'}^{1/2} \left(1 + \sum_i^3 p_{\kappa_i} + \sum_{i<j}^3 p_{\kappa_i} p_{\kappa_j} \right)_{t'} \langle \phi \rangle_{t'} \times \sin \left[\varphi_{\kappa_1}(t, t') + \varphi_{\kappa_2}(t, t') + \varphi_{\kappa_3}(t, t') \right]. \quad (G.1)$$

Essa integral pode ser escrita usando a equação da fase (E.14), sob a forma

$$I_{k_1 k_2 k_3}(t) = -\sin [I_f(t)] I_c(t) + \cos [I_f(t)] I_s(t), \quad (G.2)$$

onde

$$I_f(t) = \int_0^t dt' \left[F_{\kappa_1}(t') + F_{\kappa_2}(t') + F_{\kappa_3}(t') \right] \quad (G.3)$$

com $F_{\kappa}(t)$ dada pela equação (E.12) e

$$I_c(t) = \int_0^t dt' \prod_{i=1}^3 \left[\frac{1}{\sqrt{k_i^2 + \mu_{\kappa_i}^2}} \right]_{t'}^{1/2} \left(1 + \sum_i^3 p_{\kappa_i} + \sum_{i<j}^3 p_{\kappa_i} p_{\kappa_j} \right)_{t'} \langle \phi \rangle_{t'} \times \cos \left[\varphi_{\kappa_1}(t', 0) + \varphi_{\kappa_2}(t', 0) + \varphi_{\kappa_3}(t', 0) \right], \quad (G.4)$$

$$I_s(t) = \int_0^t dt' \prod_{i=1}^3 \left[\frac{1}{\sqrt{k_i^2 + \mu_{\kappa_i}^2}} \right]_{t'}^{1/2} \left(1 + \sum_i^3 p_{\kappa_i} + \sum_{i<j}^3 p_{\kappa_i} p_{\kappa_j} \right)_{t'} \langle \phi \rangle_{t'} \times \sin \left[\varphi_{\kappa_1}(t', 0) + \varphi_{\kappa_2}(t', 0) + \varphi_{\kappa_3}(t', 0) \right]. \quad (G.5)$$

Observe que essas integrais são tais que, para poder integrar até um certo instante t , precisamos ter memorizado todos os valores do integrando em todos os instantes t' de 0 até t , o que torna o cálculo impraticável de uma forma direta.

Uma maneira de tratar numericamente esse problema de uma forma mais eficiente é definirmos uma equação diferencial para cada uma dessas integrais,

$$\dot{I}_f(t) = F_{\kappa_1}(t) + F_{\kappa_2}(t) + F_{\kappa_3}(t), \quad (G.6)$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_c(t) = \prod_{i=1}^3 \left[\frac{1}{\sqrt{k_i^2 + \mu_{\kappa_i}^2}} \right]_t^{1/2} & \left(1 + \sum_i^3 p_{\kappa_i} + \sum_{i<j}^3 p_{\kappa_i} p_{\kappa_j} \right) \langle \phi \rangle_t \\ & \times \cos \left[\varphi_{\kappa_1}(t, 0) + \varphi_{\kappa_2}(t, 0) + \varphi_{\kappa_3}(t, 0) \right], \end{aligned} \quad (G.7)$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_s(t) = \prod_{i=1}^3 \left[\frac{1}{\sqrt{k_i^2 + \mu_{\kappa_i}^2}} \right]_t^{1/2} & \left(1 + \sum_i^3 p_{\kappa_i} + \sum_{i<j}^3 p_{\kappa_i} p_{\kappa_j} \right) \langle \phi \rangle_t \\ & \times \sin \left[\varphi_{\kappa_1}(t, 0) + \varphi_{\kappa_2}(t, 0) + \varphi_{\kappa_3}(t, 0) \right]. \end{aligned} \quad (G.8)$$

Essas equações são ordinárias de primeira ordem, portanto facilmente integradas, conjuntamente com as demais equações dinâmicas, usando o mesmo algoritmo.

A outra dificuldade para o cálculo do segundo membro das equações de movimento é saber como tratar somas do tipo

$$\sum_{k_1 k_2 k_3}^N \delta_{k_1 + k_2 + k_3} \prod_{i=1}^3 \left[\frac{1}{\sqrt{k_i^2 + \mu_{\kappa_i}^2}} \right]^{1/2} I_{k_1 k_2 k_3},$$

onde N é o truncamento que somos obrigados a fazer no tratamento numérico. Da técnica descrita anteriormente de definir uma equação diferencial para cada integral de memória, percebemos facilmente que de cada combinação possível de $k_1 + k_2 + k_3 = 0$ resultará uma equação diferencial distinta. Como a ordem dos índices $k_1 k_2 k_3$ não é importante, as permutações desses índices correspondem à mesma integral. Lembramos ainda que por simetria de reflexão $p_{-k} = p_k$ e $\mu_{-k} = \mu_k$. Dessa forma, as combinações de índices a serem consideradas pode se restringir apenas a $k_1 k_2 k_3$ positivos. Portanto, o que precisamos fazer para calcular a somatória é desenvolver uma lógica que encontre todas as combinações possíveis e as respectivas multiplicidades para um certo N dado.

É fácil de ver que em geral não temos a forma explícita das equações a serem integradas, pois cada N de truncamento resulta em diferentes combinações possíveis entre os índices $k_1 k_2 k_3$, portanto equações diferentes. O programa utilizado é capaz de encontrar as possíveis combinações entre os índices e suas respectivas multiplicidades para qualquer N dado e ele constrói as equações a serem integradas a partir desses dados.

APÊNDICE H

SOLUÇÃO EXATA EM 0 + 1 DIMENSÕES

O problema consiste em estudar a evolução de um estado $|v\rangle$ dado com a hamiltoniana do oscilador anarmônico dada por (A.1). Isso pode ser feito a partir da equação de Schrödinger

$$|t\rangle = e^{-iHt}|v\rangle. \quad (H.1)$$

Inserindo o conjunto completo de autoestados do oscilador harmônico

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| \quad (H.2)$$

temos

$$|t\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-iE_n t} |n\rangle\langle n|v\rangle, \quad (H.3)$$

onde E_n são os autovalores de H . Assim, a evolução do valor esperado de qualquer operador é dado por

$$\langle O \rangle(t) = \langle t|O|t \rangle. \quad (H.4)$$

Portanto, tudo que precisamos fazer é expandir a condição inicial e diagonalizar H na base do oscilador harmônico.

O problema numérico óbvio diz respeito ao critério de truncamento da dimensão da matriz a ser diagonalizada. Se aumentarmos o tamanho da matriz N e, no entanto, os resultados não mudam apreciavelmente, podemos concluir que o truncamento da matriz para esse N aproxima razoavelmente do resultado exato, que seria uma matriz infinita. Para obter os resultados mostrados no capítulo 5, foi necessário uma matriz de dimensão 100×100 para H .

Uma maneira alternativa de tratar esse problema consiste em integrar diretamente a equação de Heisenberg, usando o algoritmo de Runge-Kutta adaptado para matrizes^[19].

Comentamos que o tempo de processamento é neste caso cerca de dez ou mais vezes maior que o necessário quando usarmos o método citado acima.

- [1] J. D. Matar, *Ann. Phys.* **83**, 333 (1974).
- [2] P. Borge, *J. Phys. Chem.* **77**, 1270 (1973).
- [3] A. J. Wings & J. L. Luedig, *Proc. 1st Workshop on Nuclear Dynamics, Chicago and High Energy* (Nat. Phys. **2**, 1974).
- [4] O. E. L. F. de Almeida & J. L. Luedig, *Ann. Phys.* **157**, 1 (1979).
- [5] M. J. M. de Almeida & J. L. Luedig, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 1270 (1979).
- [6] J. L. Luedig, *Swiss School of Physics, Zurich, and J. L. Luedig, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 1270 (1979).*
- [7] A. J. Matar & D. V. de Almeida, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 1270 (1979).
- [8] A. J. Matar & D. V. de Almeida, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 1270 (1979).
- [9] M. J. Matar & A. J. Matar, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 1270 (1979).
- [10] A. J. Matar, H. Matar & M. J. Matar, "Theoretical Study of the Dynamics of the System", *Phys. Rev. Lett.* **43**, 1270 (1979).
- [11] J. L. Luedig, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 1270 (1979).
- [12] J. L. Luedig, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 1270 (1979).
- [13] H. J. Matar, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 1270 (1979).
- [14] P. Borge, H. J. Matar & J. L. Luedig, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 1270 (1979).
- [15] J. L. Luedig, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 1270 (1979).
- [16] J. L. Luedig, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 1270 (1979).
- [17] J. L. Luedig, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 1270 (1979).
- [18] J. L. Luedig, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 1270 (1979).
- [19] C. M. Borge, J. L. Luedig, J. L. Luedig & M. J. Matar, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 1270 (1979).

REFERÊNCIAS

- [1] J. D. Walecka, *Ann. Phys.(N.Y.)* **83**, 491(1974).
- [2] P. Bouche, S. Koonin e J. W. Negele, *Phys. Rev.* **C13**, 1226(1976).
- [3] S. J. Wang e W. Cassing, Proc. Int. Workshop on Nuclear Dynamics at Medium and High Energies, (Nucl. Phys. A) 1988.
- [4] O. Éboli, R. Jackiw e So-Young Pi, *Phys. Rev.* **D37**, 3557(1988).
- [5] M. Samiulhah, O. Éboli e So-Young Pi, MIT Preprint CTP#1916, nov 1990.
- [6] V Jorge André Swieca Summer School, Field Theory and Particle Physics (1989), World Scientific.
- [7] A. K. Kerman e D. Vautherin, *Ann. Phys.(N.Y.)* **192**, 408(1989).
- [8] A. F. R. de Toledo Piza, Notas de aula para a primeira Escola de pós-graduação em Física no Nordeste, Publicação IFUSP/P-659, Agosto 1987.
- [9] M. C. Nemes e A. F. R. de Toledo Piza, *Phys. Rev.* **C27**, 862(1983).
- [10] H. Umezawa, H. Matsumoto e M. Tachiki, "Thermo Field Dynamics and Condensed States", North-Holland 1982.
- [11] P. Ring, P. Schuck, "The Nuclear Many-Body Problem", Springer-Verlag.
- [12] A. Kerman e T. Troudet, *Ann. Phys.(N.Y.)* **154**, 456(1984).
- [13] H. Grabert, "Projection Operator Techniques in Nonequilibrium Statistical Mechanics", Springer Tracts in Modern Physics.
- [14] P. Buck, H. Feldmeier e M. C. Nemes, *Ann. Phys.(N.Y.)* **185**, 170(1988).
- [15] P. M. Stevenson, *Phys. Rev.* **D32**, 1389(1985).
- [16] J. M. Cornwall, R. Jackiw e E. Tomboulis, *Phys. Rev.* **D10**, 2428(1974).
- [17] Fred Cooper, So-Young Pi e P. N. Stancioff, *Phys. Rev.* **D34**, 3831(1986).
- [18] L. C. Yong e A. F. R. de Toledo Piza, *Mod. Phys. Lett.* **A5**, 1605(1990).
- [19] C. M. Bender, F. Cooper, J. E. O'Dell e L. M. Simmon, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 901(1985).