

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA

SBI-IFUSP



305M810T0630

Birrefringência linear e atividade ótica na propagação
de radiação infravermelha distante num tokamak

ADITAR0001A001

Tese apresentada à

Congregação do Instituto de Física

da Universidade de São Paulo para

obtenção do título de

Doutor em Ciências

JOSE HENRIQUE VUOLO

OUTUBRO/1983



530.44
V 994b
D
ex. 1

obras sobre um assunto específico e possui bibliografia
referente ao assunto selecionado. Disponível em

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pela Biblioteca do
Instituto de Física da Universidade de São Paulo.

Vuolo, José Henrique
Birrefrigênci linear e atividade ótica
na propagação de radiação infravermelha dis-
tante num tokamak. São Paulo, 1983.

Tese (Doutoramento) - Universidade de
São Paulo. Instituto de Física. Departamen-
to de Física Nuclear.

Área de Concentração: Física Nuclear
Orientador: Ricardo Magnus Osório Galvão

Unitermos: 1.Ondas em plasma. 2.Diagnós-
tico em plasma. 3.Infravermelho distante.

USP/IF-B25/83

IRENE E ADALBERTO

Ao final de cada mês, quando o meu salário é depositado na minha conta bancária, eu sempre faço um depósito de parte desse dinheiro em uma conta que pertence ao meu marido, Adalberto.

Este é o meu trabalho de casa, que é o que eu faço para ajudar a manter a casa e os filhos.

Eu gosto de trabalhar, porque eu gosto de trabalhar, mas eu também gosto de estar em casa com meus filhos.

Eu gosto de trabalhar, porque eu gosto de trabalhar, mas eu também gosto de estar em casa com meus filhos.

Trabalho dedicado a meus pais,

IRENE E ADALBERTO

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Ricardo Magnus Osório Galvão, orientador
deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Ivan Cunha Nascimento, chefe do Grupo de
Física de Plasmas do IFUSP.

Aos colegas do Grupo de Física de Plasmas do IFUSP.

À Sra. Rita Lavinia Torriani, secretária de Pós-Gra-
duação do IFUSP.

A todos que direta ou indiretamente contribuiram para
a realização deste trabalho.

São Paulo, outubro de 1983

José Henrique Vuolo

R E S U M O

Uma teoria simples é desenvolvida para estudar a evolução da polarização de ondas eletromagnéticas de altas frequências em um plasma magnetizado. A birrefringência elíptica é separada nos efeitos de birrefringência linear e atividade ótica para frequências bem acima da frequência de plasma. É mostrado que birrefringência linear e atividade ótica são fenômenos essencialmente independentes, relacionados respectivamente com os campos magnéticos transversal e longitudinal. A teoria é aplicada ao estudo de diagnósticos de densidade eletrônica e corrente de plasma em tokamaks, baseados na polarimetria de um feixe de radiação infravermelha distante. As condições para birrefringência linear pura ou atividade ótica pura são deduzidas.

Um método diferente é proposto para medir densidade eletrônica de plasma em um tokamak. A propagação de um feixe de radiação infravermelha distante é analisada para um percurso tangencial à uma linha de campo toroidal. É mostrado que o efeito sobre a polarização do feixe é uma rotação de Faraday pura dependente da densidade eletrônica de plasma e do campo magnético toroidal. Resultados de cálculos detalhados são apresentados para o caso do Tokamak TBR do IFUSP.

Uma equação para a evolução na esfera de Poincaré do estado de polarização da onda eletromagnética se propagando em um plasma, é deduzida incluindo o efeito da atenuação em primeira ordem.

A B S T R A C T

A simple theory is developed to study the polarization of high-frequency electromagnetic waves in plasmas. The elliptical birefringence is separated into the effects of linear birefringence and optical activity for frequencies much above the plasma frequency. It is shown that linear birefringence and optical activity are essentially independent phenomena related respectively to the transversal and longitudinal magnetic fields. The theory is applied to study polarimetric methods for the measurement of electron density and plasma current in tokamaks. The conditions for pure linear birefringence or pure optical activity are derived.

A different method is proposed for the measurement of the electron density in a tokamak. The propagation direction is considered tangential to a toroidal field line and it is shown that the effect on the polarization of the wave is reduced to pure optical activity related only to the toroidal field and to the electron density. Detailed calculations are presented for the TBR Tokamak.

An equation is obtained for the polarization evolution on the Poincaré sphere including attenuation to first order.

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO.

1.a. Diagnósticos de densidade eletrônica e corrente de plasma num tokamak.	1.
1.b. Diagnósticos por polarimetria de radiação infravermelha (Teoria).	2.
1.c. Diagnósticos por polarimetria de radiação infravermelha (Experiências).	4.
1.d. Birrefringência linear e atividade ótica.	6.
1.e. Efeito da atenuação.	9.
1.f. Resumos dos capítulos.	10.
1.g. Contribuições originais.	13.
1.h. Considerações sobre notação.	15.

2. TENSOR DIELÉTRICO EQUIVALENTE E ESTADOS CARACTERÍSTICOS DE PROPAGAÇÃO.

2.a. Tensor dielétrico equivalente.	18.
2.b. Coeficiente de polarização e fórmula de Appleton-Hartree.	25.
2.c. Estados característicos na ausência de atenuação.	28.
2.d. Estados característicos em presença de atenuação.	30.
2.e. Expressões aproximadas para altas frequências.	32.

3. BIRREFRINGÊNCIA ELÍPTICA COM ATENUAÇÃO.

3.a. Birrefringência elíptica na esfera de Poincaré.	34.
3.b. Evolução da polarização incluindo a atenuação.	36.
3.c. Efeito da atenuação em altas frequências.	43.

4. BIRREFRINGÊNCIA LINEAR E ATIVIDADE ÓTICA NO PLASMA MAGNETIZADO.

- 4.a. Birrefringência linear e atividade ótica. 46.
4.b. Birrefringência e dicroismo lineares. 47.
4.c. Atividade ótica e dicroismo circular. 53.
4.d. Birrefringência elíptica como superposição de birrefringência linear e atividade ótica. 56.
4.e. Rotação de Faraday e efeito Cotton-Mouton. 60.

5. ANÁLISE DE EXPERIMENTOS EM TOKAMAKS.

- 5.a. Birrefringência linear e atividade ótica num plasma de tokamak. 63.
5.b. Propagação ao longo de uma corda vertical da seção do plasma. 67.
5.c. Diagnóstico de densidade eletrônica. 71.
5.d. Diagnóstico do campo magnético poloidal. 76.

6. MEDIDA DE DENSIDADE ELETRÔNICA NUM TOKAMAK POR ROTAÇÃO DE FARADAY.

- 6.a. Rotação de Faraday pura em tokamaks. 78.
6.b. Medida de densidade no Tokamak TBR. 85.

7. CONCLUSÕES.

- 7.a. Discussão dos resultados. 89.
7.b. Alguns desenvolvimentos possíveis. 92.

Apêndice A. PROPAGAÇÃO DE UMA ONDA ELETROMAGNÉTICA NUM MEIO CONDUTOR ANISOTRÓPICO. 94.

Apêndice B. ESFERA DE POINCARÉ. 98.

Apêndice C. MEIO NÃO HOMOGÊNEO.

- a. Efeito de refração na deflexão do feixe de radiação infravermelha 106.

b. Aproximação ótica geométrica

111.

Apêndice D. EXPANSÕES EM SÉRIES

113.

Referências

117.

Capítulo 1. Introdução

a. Diagnósticos de densidade eletrônica e corrente de plasma num tokamak.

A determinação direta das distribuições de densidade eletrônica e corrente de plasma é de grande importância na compreensão dos diversos aspectos da dinâmica do plasma num tokamak. Os métodos mais importantes de diagnóstico de tais distribuições são revisados pela Equipe TFR⁽¹⁾.

A medida mais direta de densidade eletrônica é feita por interferômetros de microondas (comprimento de onda $\lambda \gtrsim 2\text{ mm}$) que, no caso dos tokamaks de densidades maiores que os atuais, deverão ser substituídos por interferômetros de radiação infravermelha distante ($\lambda \lesssim 1\text{ mm}$).

Os métodos para determinação da distribuição de corrente de plasma se baseiam na medida do campo magnético poloidal. Nenhum dos métodos já tentados se mostrou suficientemente simples e preciso para ser considerado uma técnica padrão de medida. Neste sentido, um dos métodos mais promissores é o proposto por De Marco e Segre⁽²⁾ que se baseia na mudança da polarização da radiação infravermelha distante se propagando no plasma.

As principais técnicas de produção e detecção de radiação infravermelha distante são revisadas em texto editado por

Button⁽³⁾. O grande desenvolvimento recente de tais técnicas e as limitações dos diagnósticos atuais indicam que os métodos utilizando infravermelho deverão desempenhar um importante papel em diagnósticos de densidade eletrônica e corrente de plasma nos futuros tokamaks. Assim, se justifica o interesse no estudo detalhado da propagação da radiação infravermelha num tokamak. Em particular, o presente trabalho é dedicado ao estudo da evolução da polarização da onda no plasma, tendo em vista a aplicação em diagnósticos de tokamaks.

b. Diagnósticos por polarimetria de radiação infravermelha (teoria)

A evolução do estado de polarização de uma onda eletromagnética num meio é descrita de maneira simples utilizando-se a esfera de Poincaré (Apêndice B). De Marco e Segre⁽²⁾ obtêm uma equação que descreve esta evolução para um plasma magnetizado. Eles consideram uma onda se propagando perpendicularmente à coluna de plasma (direção-z na Figura 5.1) e mostram que se o estado inicial de polarização for linear e paralelo ou perpendicular ao campo magnético toroidal (\vec{B}_t), o efeito será atividade ótica pura diretamente relacionada com o campo magnético poloidal e com a densidade eletrônica. Entretanto, a análise feita por De Marco e Segre é

limitada a frequências suficientemente altas de forma que o efeito sobre a polarização da onda seja pequeno.

A experiência proposta por De Marco e Segre é novamente analisada por Craig⁽⁴⁾ utilizando método mais convencional (isto é, a esfera de Poincaré não é utilizada). Ele considera frequências mais baixas ($\lambda \approx 1\text{ mm}$) para as quais as aproximações de De Marco e Segre não são válidas e obtém resultados numéricos. Em particular, ele mostra (numericamente) que se o estado inicial de polarização for linear e orientado em 45° com a direção toroidal a potência transferida para o estado ortogonal de polarização é independente do campo magnético poloidal. Assim, tal experiência seria adequada para medida de densidade eletrônica do plasma.

Em trabalho posterior, De Marco e Segre⁽⁵⁾ apresentam soluções na forma de séries para a equação de evolução da polarização proposta anteriormente⁽²⁾. Mais recentemente, Segre⁽⁶⁾ apresenta um método numérico para solução desta equação em condições mais gerais e obtém resultados que concordam com aqueles obtidos por Craig⁽⁴⁾.

c. Diagnósticos por polarimetria de radiação infravermelha (experiências).

A interferometria de radiação infravermelha distante é revisada por Véron⁽⁷⁾. A Tabela 1.1⁽⁸⁾ mostra como ilustração, algumas dentre o grande número de linhas que podem ser obtidas com lasers de infravermelho.

Um interferômetro polarimétrico (polarímetro) foi desenvolvido por Dodel e Kunz^(9,10) para medir densidade eletrônica e corrente de plasma num tokamak pelo método proposto por De Marco e Segre e Craig. A sensibilidade do polarímetro para medir rotação de Faraday foi estimada em 9 mrad, tendo sido utilizado o comprimento de onda $\lambda = 0.337$ (ver Tabela 1.1). O polarímetro foi utilizado por Kunz e Equipe TFR⁽¹¹⁾ em experiência preliminar para medida do campo poloidal do Tokamak TFR 600.

Um polarímetro similar, com sensibilidade estimada em 1 mrad e $\lambda = 0.393$ mm foi construído por Hutchinson et al.⁽¹²⁾. O dispositivo foi utilizado ($\lambda = 0.381$ mm) em experiência preliminar para determinação de densidade eletrônica e corrente de plasma no Tokamak ISX-B⁽¹³⁾.

Grolli e Maddaluno⁽¹⁴⁾ introduziram modificações no interferômetro de infravermelho (laser de HCN) do Tokamak FT, para medida de densidade eletrônica pelo método proposto por Craig (polarimetria).

Os resultados preliminares obtidos nas experiências realizadas demons-

Tabela 1.1 - Lasers de infravermelho de bombeamento óptico (B) e excitação direta (D).

Molécula	λ (mm)	Potência típica (mW)
CH_3OH (B)	0.042	55
CH_3OH (B)	0.119	200
CH_2F_2 (B)	0.185	33
DCN (D)	0.190	250
CH_2F_2 (B)	0.215	24
HCN (D)	0.337	200
DCOOD (B)	0.381	14
HCOOH (B)	0.393	30
CH_3I (B)	0.447	40
CH_3F (B)	0.496	11
CH_3OH (B)	0.570	8
CH_2CF_2 (B)	0.890	3.5
$\text{C}^{13}\text{H}_3\text{F}$ (B)	1.222	10

tram, na opinião de seus autores, a viabilidade técnica do método de diagnóstico.

Os polarímetros utilizados nas experiências acima referidas se limitam a medir a potência da radiação transferida ao estado de polarização ortogonal ao inicial (ver Apêndice B). Os possíveis erros de interpretação seriam eliminados com um polarímetro para determinação completa do estado final de polarização (elipsômetro). O princípio teórico de tal elipsômetro com alta sensibilidade foi apresentado por Segre^(15,16).

d. Birrefringência linear e atividade ótica

Nos trabalhos anteriores de De Marco e Segre^(2,5,6) e Craig⁽⁴⁾ a evolução da polarização da onda é obtida a partir do efeito (infinitesimal) de birrefringência elíptica numa espessura infinitesimal dz do plasma. No presente trabalho um procedimento mais detalhado de análise é apresentado. A evolução da polarização é estudada a partir dos efeitos (infinitesimais) de birrefringência linear e atividade ótica. O procedimento é baseado na teoria de propagação^(17,18) num cristal anisotrópico e oticamente ativo, de acordo com a qual as partes simétrica e anti-simétrica do tensor dielétrico inverso descrevem respectivamente a birrefringência linear e a atividade ótica.

O efeito de birrefringência elíptica na esfera de Poincaré pode ser obtido somando-se os deslocamentos (infinitesimais) devidos à birrefringência linear e à atividade ótica, conforme o método de superposição⁽¹⁸⁾ na esfera de Poincaré. Tais deslocamentos correspondem a rotações infinitesimais e não podem ser integrados separadamente para se obter a variação total no estado de polarização da onda. No sentido de se obter numericamente esta variação, o método de análise proposto é equivalente aos que tem sido utilizados^(2,4,5,6). Entretanto existem vantagens significativas no método, que resultam da relativa independência dos efeitos (infinitesimais) de birrefringência linear e de atividade ótica. Conforme será mostrado, esses efeitos são relacionados respectivamente com o campo magnético transversal e com o campo magnético longitudinal, para frequências suficientemente altas.

A possibilidade de integrar separadamente os efeitos de birrefringência linear e atividade ótica permite obter alguns resultados de interesse. Tais integrações serão usualmente muito mais simples que a integração do efeito de birrefringência elíptica e os resultados serão relacionados com campos magnéticos distintos (transversal e longitudinal). Resultados qualitativos de fácil interpretação podem assim ser obtidos, quando os deslocamentos (finitos) na esfera de Poincaré para birrefringência linear e atividade ótica não são muito grandes. E os resultados serão corretos

quando um dos deslocamentos for suficiente - mente pequeno.

Em particular as condições para birrefringência linear pura e para atividade ótica pura podem ser obtidas analiticamente e de maneira simples. Essas condições são importantes do ponto de vista experimental. Isto porque os polarímetros desenvolvidos até o momento (para infravermelho) permitem determinar apenas a potência transferida ao estado de polarização ortogonal ao estado inicial. Assim, a determinação do estado final (necessária em última análise) depende de alguma hipótese de trabalho. A experiência⁽¹³⁾ realizada no Tokamak ISX-B é baseada na hipótese de atividade ótica pura, enquanto que a experiência⁽¹⁴⁾ do Tokamak FT é baseada na hipótese de birrefringência linear pura. A eventual falha de tais hipóteses leva a erros de interpretação.

A teoria simples desenvolvida para birrefringência linear e atividade ótica é utilizada na análise dos diagnósticos de densidade eletrônica e corrente de plasma em tokamaks pelo método proposto por De Marco e Segre, e Craig. Além disso, uma experiência diferente é proposta para diagnóstico de densidade eletrônica num tokamak. Será mostrado detalhadamente que para a onda se propagando numa direção horizontal (direção-z na Figura 6.1) o efeito sobre a polarização e atividade ótica pura independente da corrente de plasma. Resultados de cálculos detalhados são apresentados para o Tokamak TBR⁽¹⁵⁾.

e. Efeito da atenuação.

O efeito de atenuação na evolução da polarização da onda não foi considerado nos trabalhos anteriores de De Marco e Segre e de Craig. No presente trabalho a equação que descreve a evolução da polarização da onda na esfera de Poincaré é obtida incluindo o efeito de atenuação em primeira ordem.

O efeito da atenuação na birrefringência elíptica (dicroismo elíptico) é exibido claramente na equação obtida. Além disso, o resultado se presta a dar mais consistência à teoria desenvolvida para a birrefringência linear (com atenuação) e atividade ótica (com atenuação). Isto porque o efeito de dicroismo elíptico pode ser obtido pelo método de superposição⁽¹⁸⁾ na esfera de Poincaré a partir dos efeitos de atenuação na birrefringência linear (dicroismo linear) e na atividade ótica (dicroismo circular).

A condição de frequências suficientemente altas (equação 2.64) não é utilizada na dedução da equação para birrefringência elíptica com atenuação. Assim, esta equação tem uma validade muito mais ampla que os casos específicos considerados no presente trabalho. Entretanto, outras possíveis aplicações desta equação não serão investigadas.

E. Resumos dos capítulos

Seção 1-h. A notação utilizada é apresentada nesta seção para referência mais rápida.

Capítulo 2. O tensor dielétrico equivalente, a equação de Appleton-Hartree e os estados característicos de propagação na ausência de atenuação são deduzidos para o plasma frio magnetizado.

Um método simples é apresentado para se obter em primeira ordem, os estados característicos em presença de atenuação a partir do procedimento usual na ausência de atenuação.

O tensor dielétrico inverso é obtido por cálculo direto e separado em partes simétrica e anti-simétrica.

Os índices de atenuação dos estados característicos são obtidos em primeira ordem na atenuação.

As diferenças nos índices de refração e de atenuação são obtidas em aproximações para altas frequências (acima da frequência de plasma).

Capítulo 3. O efeito da atenuação é incluído na equação para evolução na esfera de Poincaré, do estado de polarização da onda. O termo que descreve a atenuação depende (como parâmetros) de certos estados característicos para dicroismo elíptico e respectivos índices de atenuação.

huacão que são obtidos em primeira ordem na atenuação. O efeito da atenuação é discutido no caso de propagação de radiação infravermelha distante num plasma de tokamak.

Capítulo 4. Os estados característicos, índices de refracção e de atenuação são obtidos separadamente para birrefringência linear e para atividade ótica a partir das partes simétrica e anti-simétrica do tensor dielétrico inverso.

Os deslocamentos (infinitesimais) na esfera de Poincaré devidos a birrefringência linear, atividade ótica, dicroismo linear e dicroismo circular são obtidos explicitamente para altas frequências. A partir de tais deslocamentos, são obtidos os efeitos de birrefringência elíptica e dicroismo elíptico que são comparados com os resultados obtidos diretamente (Capítulo 3). A consistência do procedimento é assim demonstrada para altas frequencias.

Capítulo 5. A propagação da radiação infravermelha em tokamaks é discutida, sendo mostrado que birrefringência linear e atividade ótica se relacionam respectivamente com os campos magnéticos transversal e longitudinal. As condições de interesse experimental para atividade ótica pura e birrefringência linear pura são deduzidas. Resultados conhecidos de trabalhos anteriores são novamente obtidos de maneira mais simples e de forma mais abrangente.

Capítulo 6. A evolução da polarização da onda num tokamak para um percurso horizontal é analisada, utilizando os resultados obtidos no Capítulo 4. É mostrado que o efeito se reduz à atividade ótica pura (rotação de Faraday) relacionada somente com a densidade eletrônica do plasma e com o campo toroidal. Resulta assim, um método diferente para medida de densidade eletrônica num tokamak. Resultados de cálculos mais detalhados são apresentados para o tokamak TBR.

Capítulo 7. As principais conclusões são discutidas, sendo apresentadas algumas sugestões.

Apêndice A. O formalismo do tensor dielétrico equivalente para estudo da propagação de ondas num meio condutor anisotrópico é apresentado, reunindo conceitos e procedimentos de alguns textos básicos. A equação para onda plana homogênea é deduzida, bem como a expressão para a energia dissipada no meio em termos do tensor dieletrico inverso.

Apêndice B. A descrição do estado de polarização de uma onda eletromagnética utilizando a esfera de Poincaré é apresentada. Resultados conhecidos a respeito de estados ortogonais na esfera de Poincaré são apresentados. É deduzida a relação entre o coeficiente de polarização da onda e as coordenadas na esfera de Poincaré.

Apêndice C. O efeito de refração na direção de propagação de um feixe de radiação e a aproximação WKB são discutidos.

Apêndice D. Expansões em séries e outros desenvolvimentos algébricos diretos foram omitidos por serem longos e não contribuirem significativamente para a compreensão do texto. Como exemplos, dois tipos de expansões em séries são apresentadas neste apêndice. Expansões similares foram efetuadas em outros casos, mas somente os resultados foram apresentados no texto.

g. Contribuições originais.

As contribuições originais mais importantes do presente trabalho podem ser resumidas como segue.

- Separação do efeito infinitesimal de birrefringência elíptica em efeitos infinitesimais de birrefringência linear e atividade ótica. Isto nunca havia sido feito para um plasma magnetizado, embora a teoria fenomenológica correspondente para um cristal birrefringente e óticamente ativo seja muito antiga. O procedimento básico é idêntico ao da ótica de cristais. Entretanto o critério 4.13, necessário para tornar isotrópica a parte simétrica do ten-

sor dielétrico inverso é diferente.

- Como resultado da teoria desenvolvida, são deduzidas algumas limitações definidas aos métodos propostos por De Marco e Segre^(2,5,6) e Craig⁽⁴⁾ para se medir densidade eletrônica e distribuição de corrente de plasma num tokamak.

- Um método diferente é proposto (com base em cálculos detalhados) para se medir densidade eletrônica num tokamak. É mostrado, em particular, que a medida é viável no Tokamak TBR.

- O efeito da atenuação da onda é incluído na equação que descreve, na esfera de Poincaré, a evolução do estado de polarização da onda.

h. Considerações sobre notação.

O Sistema Internacional de Unidades é empregado em todo o texto, exceto quando as unidades são mencionadas explicitamente.

A notação, bem como as definições básicas são essencialmente as mesmas adotadas por Heald e Wharton⁽²⁰⁾. Entretanto, é feito um uso mais extensivo de alguns símbolos (X, Y, Z, Y_L, Y_T) convencionais em teoria magneto-iônica. A Tabela 1.2 reune alguns dos símbolos utilizados e as referências para definições mais detalhadas. Alguns detalhes de caráter geral sobre a notação são apresentados a seguir.

O símbolo \cup indica uma grandeza complexa (por exemplo, o índice de refração complexo $\tilde{\mu}$) e a ausência do símbolo indica a parte real correspondente (μ). Entretanto o símbolo só é utilizado quando houver possibilidade de confusão entre uma grandeza e sua parte real. Por exemplo, os campos elétrico e magnético oscilantes são representados por complexos \vec{E} e \vec{B} e dados sempre pela parte real de tais grandezas. Numa relação não linear envolvendo os campos, há a necessidade de indicar os complexos por \tilde{E} e \tilde{B} , tal como ocorre no Apêndice A.

Nenhum símbolo é utilizado para identificar um tensor, uma vez que a possibilidade de confusão com uma grandeza escalar parece remota. As matrizes que representam as componentes de um tensor são indi-

Tabela 1.2

Símbolos e definições sumárias	Referência no texto
$\omega_p = \left(\frac{ne^2}{\epsilon_0 m}\right)^{\frac{1}{2}}$	Frequência de plasma para elétrons
$\omega_c = \frac{eB_0}{m}$	Frequência ciclotrônica para elétrons
$X = \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2$	
$Y = \frac{\omega_c}{\omega}$	
$Z = \frac{\omega_c}{\omega}$	ω_c é a frequência de colisão elétron-íon
$Y_L = Y \cos \theta$	θ é o ângulo entre \vec{B}_0 e o eixo-z
$Y_T = Y \sin \theta$	
$A = 1 - iZ$	
$A_x = 1 - X$	
$A_i = A - X = A_x - iZ = 1 - X - iZ$	
$\hat{\gamma}$	constante de propagação, $\exp(i\omega t - \vec{\gamma} \cdot \vec{r}_s)$ - fator de fase
$\hat{\mu} = -\frac{ic}{\omega} \hat{\gamma}$	índice de refração vetorial complexo
$\check{\mu} = \mu - i\chi$	índice de refração real (μ) e índice de atenuação (χ)
β	ângulo entre o eixo-y e o plano \vec{B}_0 -z
\vec{B}_0	campo magnético estático

cadas pelo mesmo símbolo que o próprio tensor. Assim, por exemplo, o tensor dielétrico equivalente é indicado por \tilde{K} e as matrizes que o representam são indicadas sucessivamente por $\tilde{K}, \tilde{K}', \tilde{K}''$ em diferentes sistemas de coordenadas.

Equações duplas são frequentemente utilizadas, tais como

$$g_{1,2} = \pm \frac{1}{A_x Q_{2,1}} Z \cos 2\Phi_2$$

e ao primeiro índice à esquerda correspondem sempre o primeiro índice e o sinal superior à direita.

Nos capítulos 2 e 3, o símbolo \doteq foi utilizado para indicar expansão em série de potências de X . Nos demais capítulos, o símbolo seria redundante.

Em algumas deduções apresentadas nos Apêndices são utilizados símbolos que não correspondem aos do texto. Entretanto, os resultados finais são escritos em termos dos símbolos do texto.

Capítulo 2. Tensor dielétrico equivalente e estados característicos de propagação.

a. Tensor dielétrico equivalente

Um plasma homogêneo será considerado em presença de um campo magnético estático \vec{B}_0 . Os campos oscilantes são supostos fracos e com dependência temporal proporcional a $\exp(i\omega t)$.

As densidades de carga e de corrente num meio condutor podem ser formalmente eliminadas das equações de Maxwell (Apêndice A) definindo-se o tensor dielétrico equivalente^(21,22)

$$\tilde{\kappa} = 1 - \frac{i\sigma}{\epsilon_0 \omega} \quad (2.1)$$

onde $\tilde{\sigma}$ é o tensor de condutividade. No que segue, este tensor será obtido para o plasma considerado frio, incluindo-se entretanto o efeito de colisão elétron-íon por meio da força de Langevin na equação de movimento^(23,20). Para elétrons, tem-se

$$m\ddot{\vec{v}} = -e\vec{E} - e\vec{v}\times\vec{B}_0 - \Sigma_c m\vec{v} \quad (2.2)$$

onde \vec{E} é o campo elétrico oscilante e Σ_c a frequência de colisão elétron-íon para transferência de momento.

A equação A11 mostra que a força devida ao campo magnético oscilante é de ordem v/c em relação à força elétrica e assim é desprezada para um plasma frio. A dependência de Σ com a velocidade total do elétron (soma da velocidade média \vec{v} e da velocidade térmica \vec{v}_T) transforma a equação 2.2 numa complicada equação não linear, exceto se \vec{v} for pequena ($v \ll v_T$). Neste caso, o efeito de colisões

é incluído em média, utilizando na equação 2.2, o valor efetivo^(23,20) de σ para a distribuição térmica de velocidades. Além disso, a variação espacial do campo elétrico \vec{E} não é considerada na equação 2.2. Essa dificuldade desaparece, se o deslocamento do elétron devido à velocidade térmica for desprezível comparado com o comprimento de onda, durante um período de oscilação. Assim, a validade da equação 2.2 é limitada pelas condições⁽²³⁾

$$\omega \ll \omega_T \ll \omega_\phi \quad (2.3)$$

Onde ω_ϕ é a velocidade de fase da onda. Para frequências distantes de ressonâncias ($\omega_\phi \gtrsim c$) tais condições serão corretas para plasmas não relativísticos e campos elétricos suficientemente fracos. E ainda, para frequências distantes das ressonâncias o amortecimento de Landau e o amortecimento de Landau ciclotrônico podem ser considerados irrelevantes.

A solução estacionária⁽²⁴⁾ da equação 2.2 pode ser escrita na forma

$$i\omega A \vec{\sigma} = -\frac{e}{m} \vec{E} - \frac{e}{m} \vec{\sigma} \times \vec{B}_0$$

Onde

$$A = 1 - iZ \quad \text{e} \quad Z = \frac{\omega_c}{\omega} \quad (2.4)$$

A solução explícita para $\vec{\sigma}$ pode ser obtida efetuando-se os produtos escalar e

vetorial da equação por \vec{B}_0 . Obtém-se

$$\vec{\varphi} = \frac{e}{m} \frac{iA}{\omega(A^2 - y^2)} \left(\vec{E} - \frac{1}{A^2} \vec{y} (\vec{y} \cdot \vec{E}) - \frac{i}{A} \vec{y} \times \vec{E} \right) \quad (2.5)$$

onde

$$y = \frac{\omega_c}{\omega}, \quad \vec{y} = y \frac{\vec{B}_0}{B_0} \quad (2.6)$$

e $\omega_c = eB_0/m$ é a frequência ciclotrônica para elétrons.

A densidade de corrente de elétrons é dada por

$$\vec{J} = ne\vec{\varphi}$$

onde n é a densidade eletrônica. Para frequências na região ótica e de microondas, a contribuição dos íons pode ser desprezada. Assim, obtém-se

$$\vec{J} = -\epsilon_0 \frac{i\omega A X}{(A^2 - y^2)} \left(\vec{E} - \frac{1}{A^2} \vec{y} (\vec{y} \cdot \vec{E}) - \frac{i}{A} \vec{y} \times \vec{E} \right) \quad (2.7)$$

onde

$$X = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (2.8)$$

Sendo ω_p a frequência de plasma para elétrons

$$\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\epsilon_0}$$

A lei de Ohm é assim obtida na forma linear

$$\vec{J} = \tilde{\sigma} \cdot \vec{E}$$

onde a expressão para o tensor de condutividade é obtida diretamente de 2.7. Assim, $\tilde{\sigma}$ pode ser escrito na forma

$$\tilde{\sigma} = -i\epsilon_0\omega f A^2 + i\epsilon_0\omega f N_s + i\epsilon_0\omega f A N_A \quad (2.9)$$

onde

$$f = \frac{X}{A(A^2 - Y^2)} \quad (2.10)$$

e, N_s e N_A são operadores respectivamente simétrico e anti-simétrico definidos simbolicamente por

$$N_s = \vec{Y}(\vec{Y} \cdot) \quad \text{e} \quad N_A = \vec{Y} \times \quad (2.11)$$

O sistema de referência xyz é escolhido com \vec{B}_0 numa direção arbitrária definida pelos ângulos θ e β (Figura 2.1). As componentes de \vec{Y} são dadas por

$$Y_x = -Y_T \sin \beta, \quad Y_y = Y_T \cos \beta \quad \text{e} \quad Y_z = Y_L$$

onde

$$Y_L = Y \cos \theta \quad \text{e} \quad Y_T = Y \sin \theta \quad (2.12)$$

As componentes de N_s e N_A são obtidas diretamente de 2.11, a partir das componentes de \vec{Y} . Assim, obtém-se

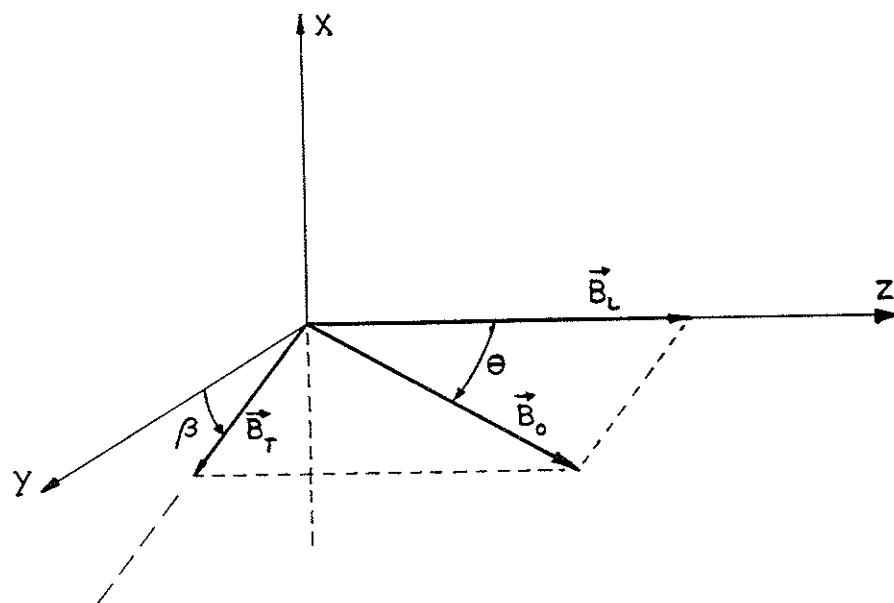


Figura 2.1 - O campo magnético estático \vec{B}_o tem orientação arbitrária definida por θ e β .

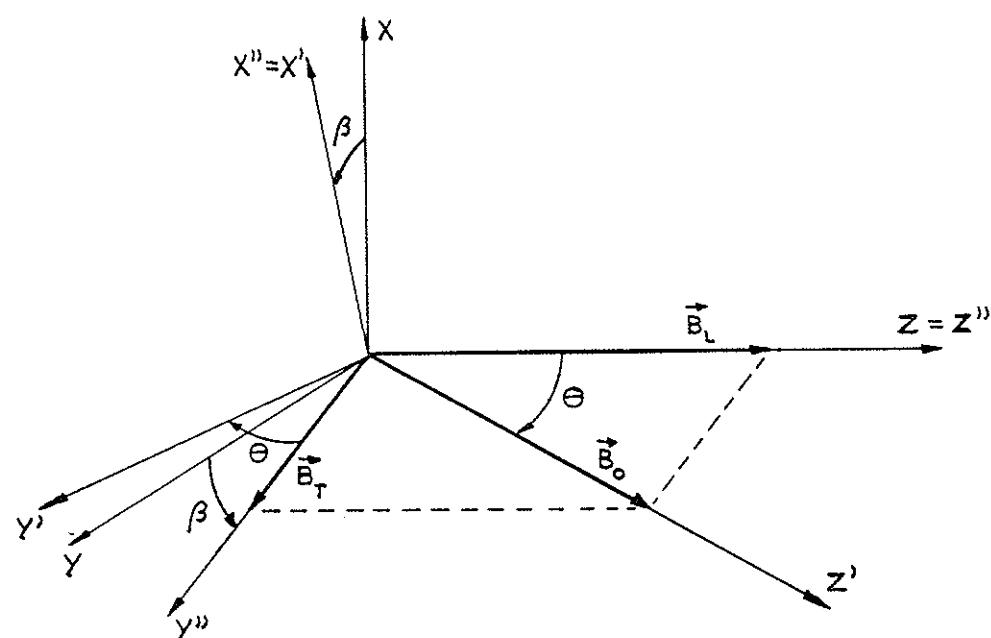


Figura 2.2 - O sistema de referência $x''y''z''$ é obtido de xyz por uma rotação β em torno de z . E $x'y'z'$ é obtido de $x''y''z''$ por uma rotação θ em torno de x'' .

$$N_s = \begin{bmatrix} Y_T^2 \sin^2 \beta & -Y_T^2 \sin \beta \cos \beta & -Y_L Y_T \sin \beta \\ -Y_T^2 \sin \beta \cos \beta & Y_T^2 \cos^2 \beta & Y_L Y_T \cos \beta \\ -Y_L Y_T \sin \beta & Y_L Y_T \cos \beta & Y_L^2 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

e

$$N_A = \begin{bmatrix} 0 & -Y_L & Y_T \cos \beta \\ Y_L & 0 & Y_T \sin \beta \\ -Y_T \cos \beta & -Y_T \sin \beta & 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

O tensor dielétrico é dado pela equação 2.1

$$\check{\kappa} = 1 - \epsilon A^2 + \epsilon N_s + i \epsilon A N_A \quad (2.15)$$

e suas partes simétrica e anti-simétrica são dadas respectivamente por

e

$$\begin{aligned} \check{\kappa}_s &= 1 - \epsilon A^2 + \epsilon N_s \\ \check{\kappa}_A &= i \epsilon A N_A \end{aligned} \quad (2.16)$$

O tensor dielétrico inverso $\check{\kappa}^{-1}$ é mais conveniente no estudo de polarização de uma onda eletromagnética. A diagonalização de $\check{\kappa}$ permite obter facilmente o tensor $\check{\kappa}^{-1}$. A transformação para diagonalização completa de $\check{\kappa}$ não é real e resulta em coordenadas girantes (23,20). A diagonalização de $\check{\kappa}_s$ é mais conveniente no estudo que se seguirá. As equações 2.15 e 2.13 mostram que $\check{\kappa}_s$ pode ser diagonalizado escolhendo-se um eixo z' alinhado com a direção de \vec{B}_0 (ou \vec{y}). O sistema de referência $x'y'z'$ é definido na Figura 22. Neste sistema de referência o tensor dielétrico é re-

presentado por

$$\check{K}^u = \begin{bmatrix} 1 - fA^2 & -ifAY & 0 \\ ifAY & 1 - fA^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - fA^2 + fy^2 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

A expressão \check{K}'^{-1} para o tensor inverso é obtida por cálculo direto e, após fatoração dos termos, obtém-se

$$\check{K}'^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - f_i A_i^2 & -if_i A_i y & 0 \\ if_i A_i y & 1 - f_i A_i^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - f_i A_i^2 + f_i y^2 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

onde

$$A_i = A - X \quad \text{e} \quad f_i = -\frac{X}{A_i(A_i^2 - y^2)} \quad (2.19)$$

A matriz \check{K}'^{-1} (no sistema de referência xyz) pode então ser obtida por rotações convenientes. Entretanto, deve ser observado que a matriz \check{K}' é idêntica à matriz \check{K}'^{-1} , quando se troca A por A_i e f por f_i . Resulta que é suficiente efetuar tais trocas na equação 2.15 para se obter \check{K}'^{-1} :

$$\check{K}'^{-1} = 1 - f_i A_i^2 + f_i N_s + if_i A_i N_A \quad (2.20)$$

As partes simétrica e anti-simétrica de \check{K}'^{-1} são dadas respectivamente por

$$\check{K}_s^{-1} = 1 - f_i A_i^2 + f_i N_s \quad (2.21)$$

e

$$\check{K}_A^{-1} = if_i A_i N_A \quad (2.22)$$

b. Coeficiente de polarização e fórmula de Appleton - Hartree

Uma onda plana homogênea será considerada se propagando no plasma com fator de fase dado por (ver Apêndice A)

$$\exp(i\omega t - \vec{\gamma} \cdot \vec{F}_s) \quad (2.23)$$

Os estados característicos de propagação (ondas características) podem ser obtidas pelo método usual⁽²⁰⁾ à partir da equação de onda plana A15:

$$\epsilon_0 \vec{\nu} \times (\vec{\nu} \times \vec{E}) + \vec{D} = 0 \quad (2.24)$$

onde

$$\vec{\nu} = - \frac{iC}{\omega} \vec{\gamma} \quad (2.25)$$

e

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{\kappa} \cdot \vec{E} \quad (2.26)$$

é o deslocamento elétrico. A equação 2.24 mostra que \vec{D} é transversal em relação à direção de propagação ($\vec{\nu}$ ou $\vec{\gamma}$). Para propagação na direção z, obtém-se de 2.24

$$D_x = \epsilon_0 \check{\nu}^z E_x \quad \text{e} \quad D_y = \epsilon_0 \check{\nu}^z E_y \quad (2.27)$$

onde $\check{\nu}$ é o índice de refração complexo. Substituindo em

$$\epsilon_0 \vec{E} = \check{\kappa}^{-1} \vec{D} \quad (2.28)$$

e utilizando 2.20, obtém-se

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\check{\nu}^z} - 1 + f_i A_i^2 \right) E_x'' + i f_i A_i Y_L E_y'' &= 0 \\ -i f_i A_i Y_L E_x'' + \left(\frac{1}{\check{\nu}^z} - 1 + f_i A_i^2 - f_i Y_i^2 \right) E_y'' &= 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde

$$E_x'' = \cos\beta E_x + \sin\beta E_y \quad \text{e} \quad E_y'' = -\sin\beta E_x + \cos\beta E_y$$

são as componentes de \vec{E} num sistema de referência $x''y''z'$ para o qual $\beta = 0$. A condição de solução não trivial das equações 2.29 para E_x'' e E_y'' pode ser escrita como

$$\frac{1}{\tilde{\mu}^2} + \frac{Y_T^2}{A_i Y_L} \frac{1}{\tilde{Q}} - 1 = 0 \quad (2.30)$$

onde

$$\frac{1}{\tilde{Q}} = i \frac{E_y''}{E_x''} = - \frac{\frac{1}{\tilde{\mu}^2} - 1 + f_i A_i^2}{f_i A_i Y_L} \quad (2.31)$$

As duas soluções satisfazem às equações

$$\tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_2 = \frac{Y_T^2}{A_i Y_L} \quad \text{e} \quad \tilde{Q}_1 \tilde{Q}_2 = -1 \quad (2.32)$$

e são dadas por

$$\tilde{Q}_{1,2} = - \frac{1}{\tilde{Q}_{2,1}} = \frac{Y_T^2}{2A_i Y_L} \mp \frac{1}{Y_L} \sqrt{\left(\frac{Y_T^2}{2A_i}\right)^2 + Y_L^2} \quad (2.33)$$

A equação 2.31 pode então ser resolvida para o índice de refração obtendo-se

$$\frac{1}{\tilde{\mu}_{1,2}^2} = 1 + \frac{X}{A_i^2 - Y^2} \left[A_i - \frac{Y_T^2}{2A_i} \mp \sqrt{\left(\frac{Y_T^2}{2A_i}\right)^2 + Y_L^2} \right]$$

Pode ser mostrado que esta equação é equivalente à forma usual da relação de dispersão de Appleton-Hartree⁽²⁰⁾

$$\frac{\tilde{\mu}_{1,2}^2}{1} = 1 - \frac{X}{A - \frac{Y_T^2}{2A_i} \pm \sqrt{\left(\frac{Y_T^2}{2A_i}\right)^2 + Y_L^2}} \quad (2.34)$$

O coeficiente de polarização da onda é dado por

$$\tilde{R} = \frac{E_x}{E_y} = \frac{\cos\beta E_x'' - \sin\beta E_y''}{\sin\beta E_x'' + \cos\beta E_y''} \quad (2.35)$$

Substituindo $E_x''/E_y'' = i \tilde{Q}$, obtém-se

$$\tilde{R} = \frac{i \operatorname{tg} \beta + \tilde{Q}}{\tilde{Q} \operatorname{tg} \beta - i} \quad (2.36)$$

onde os valores de \tilde{Q} dados por 2.33 podem ser expandidos em série de potências de $Z = V_c/\omega$. Em primeira ordem em Z obtém-se

$$\tilde{Q}_{1,2} = Q_{1,2} + i g_{1,2} \quad (2.37)$$

onde $Q_{1,2}$ são os valores de \tilde{Q} na ausência de atenuação e $g_{1,2}$ são de ordem Z . Os valores explícitos de Q e g podem ser escritos na forma

$$Q_{1,2} = \frac{\sin \alpha \mp 1}{\cos \alpha} \quad (2.38)$$

e

$$g_{1,2} = \mp \frac{Q_{1,2} \sin \alpha}{A_x} Z \quad (2.39)$$

onde

$$A_x = 1 - X \quad (2.40)$$

e

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Y_T^2}{2 A_x Y_L} \quad (2.41)$$

O estado de polarização da onda é completamente definido pelo coeficiente de polarização 2.36. Entretanto, é conveniente especificar o estado de polarização em termos da longitude 2Ψ e da latitude 2Φ na esfera de Poincaré. No Apêndice B é mostrado que o coeficiente de polarização pode ser escrito na forma (equação B11):

$$\check{R} = \frac{i \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \Psi + 1}{\operatorname{tg} \Psi - i \operatorname{tg} \varphi} \quad (2.42)$$

c. Estados característicos na ausência de atenuação

A ausência de atenuação será considerada inicialmente. Neste caso, o coeficiente de polarização 2.36 se reduz a

$$\check{R} = \frac{i \operatorname{tg} \beta + Q}{Q \operatorname{tg} \beta - i} \quad (2.43)$$

Identificando com 2.42 e resolvendo as equações resultantes obtém-se

$$\operatorname{tg} \varphi = Q \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} \Psi = -\frac{1}{\operatorname{tg} \beta} \quad (2.44)$$

OU

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{Q} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} \Psi = \operatorname{tg} \beta \quad (2.45)$$

As equações 2.32 são válidas em particular na ausência de atenuação, isto é

$$Q_1 + Q_2 = 2 \operatorname{tg} \alpha \quad \text{e} \quad Q_1 Q_2 = -1 \quad (2.46)$$

e uma vez que por definição $|\operatorname{tg} \varphi| \leq 1$, resulta de 2.46 que cada uma das soluções (2.44 ou 2.45) corresponde a um dos valores possíveis de Q . Pode ser mostrado da definição 2.41 que o ângulo α tem o mesmo intervalo de variação que θ para $X < 1$. Assim

$$0 \leq \alpha \leq \pi \quad \text{para } X < 1 \quad (2.47)$$

e resulta de 2.38 que $|Q_2| \geq 1$. Os índices 1 e 2 definidos na equação 2.34 podem então ser identificados respectivamente com

as equações 2.44 e 2.45 para $X < 1$. Os estados característicos P_1 e P_z na ausência de atenuação são assim dados por

$$\operatorname{tg} \Psi_1 = Q_1, \quad , \quad \Psi_1 = \beta + \frac{\pi}{2} \quad (2.48)$$

$$\operatorname{tg} \Psi_z = \frac{1}{Q_z} = -Q_1 \quad e \quad \Psi_z = \beta \quad (2.49)$$

As equações acima mostram que P_1 e P_z são pontos opostos na esfera de Poincaré como esperado, uma vez que na ausência de atenuação os estados característicos são ortogonais. Os índices de refração (reais) correspondentes são dados por 2.34 na ausência de atenuação

$$\mu_{1,2}^z = 1 - \frac{X}{1 - y_L Q_{1,2}} \quad (2.50)$$

O ângulo α definido na equação 2.41 é relacionado de forma simples com Ψ_z . Expandido $\operatorname{tg} 2\Psi_z$ e utilizando as equações 2.49, 2.46 e 2.41 obtém-se

$$\operatorname{tg} 2\Psi_z = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \quad \text{ou} \quad 2\Psi_z = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad (2.51)$$

e as expressões 2.38 e 2.39 podem ser escritas na forma

$$Q_{1,2} = \frac{\cos 2\Psi_z \mp 1}{\sin 2\Psi_z} \quad (2.52)$$

e

$$g_{1,2} = \mp \frac{Q_{1,2}}{A_x} \cos 2\Psi_z Z \quad (2.53)$$

d. Estados característicos em presença de atenuação

Os estados característicos S_1 e S_2 em presença de atenuação (Figura 3.3) podem ser deduzidos dos resultados na ausência de atenuação, como mostrado a seguir. Substituindo 2.37 em 2.36, obtém-se em primeira ordem em Z ,

$$\ddot{R} = \frac{i(\operatorname{tg}\beta + g) + Q}{Q\operatorname{tg}\beta - i(1 - g\operatorname{tg}\beta)}$$

e pode ser demonstrado diretamente que este coeficiente pode ser escrito na forma

$$\ddot{R} = \frac{i\operatorname{tg}\beta_a + Q_a}{Q_a\operatorname{tg}\beta_a - i} \quad (2.54)$$

se forem satisfeitas as condições

$$\frac{Q - Q_a}{gQ_a} \equiv \frac{g}{1 - QQ_a} \equiv \operatorname{tg}(\beta_a - \beta) \quad (2.55)$$

A primeira condição mostra que em primeira ordem em g (e Z) é suficiente considerar

$$Q_a = Q \quad (2.56)$$

e assim

$$\operatorname{tg}(\beta_a - \beta) = \frac{g}{1 - Q^2} \quad (2.57)$$

Utilizando as equações 2.53, 2.46 e 2.51, obtém-se

$$\operatorname{tg}(\beta_{a1,2} - \beta) = \pm \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen} 2\Phi_2}{A_x} Z \quad (2.58)$$

Uma vez que o coeficiente de polarização 2.43 na ausência de atenuação é idêntico com 2.54, resulta que em presença de atenuação, os estados característicos S_1 e S_2 serão dados por 2.48 e 2.49, substituindo-se Q por Q_a , e β por β_a . Assim, resulta em primeira ordem em Z

$$\operatorname{tg} \Psi_{S1} = \operatorname{tg} \Psi_1 = Q_1, \quad \Psi_{S1} = \beta + \frac{\pi}{2} + S, \quad (2.59)$$

$$\operatorname{tg} \Psi_{S2} = \operatorname{tg} \Psi_2 = -Q_1, \quad e \quad \Psi_{S2} = \beta - S \quad (2.60)$$

onde

$$S = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen} 2\Psi_2}{A_x} Z \approx \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen} 2\Psi_2}{A_x} Z \quad (2.61)$$

Os estados característicos S_1 e S_2 estão de acordo com resultados conhecidos (ver equações B14 e B15).

O índice de refração real μ e o índice de atenuação χ são definidos⁽²⁰⁾ pela relação

$$\check{\mu} = \mu - i\chi \quad \text{ou} \quad \check{\mu}^2 = \mu^2 - \chi^2 - 2\mu\chi i \quad (2.62)$$

A equação 2.34 pode ser expandida em série de potências de Z (ver Apêndice D), obtendo-se em primeira ordem

$$\check{N}_{1,2}^2 = \mu_{1,2}^2 - \frac{(1 - N_{1,2}^2)^2}{X A_x} \left(A_x + \frac{Y_L}{\operatorname{tg} 2\Psi_2} \mp \frac{Y_L \cos 2\Psi_2}{\operatorname{tg} 2\Psi_2} \right) iZ$$

E comparando com 2.62, obtém-se os índices de atenuação para os estados S_1 e S_2 , dados por

$$\chi_{1,2} = \frac{(1 - \mu_{1,2}^2)^2}{2X A_x \mu_{1,2}} \left(A_x + \frac{Y_L}{\tan 2\Phi_2} + \frac{Y_L \cos 2\Phi_2}{\tan 2\Phi_2} \right) Z \quad (2.63)$$

A equação 2.62 mostra que em primeira ordem em Z os índices de refração reais de S_1 e S_2 são idênticos aos de P_1 e P_2 dados por 2.50.

e. Expressões aproximadas para altas frequências

No que segue serão obtidas algumas expressões aproximadas para ondas de altas frequências ($X \ll 1$). Além disso, as frequências serão supostas suficientemente distantes da ressonância ciclotrônica de forma que vale a condição

$$\frac{X}{1 - y^2} \ll 1 \quad (2.64)$$

A diferença nos índices de refração reais pode ser obtida da relação

$$\Delta\mu = \mu_1 - \mu_2 = \frac{\mu_1^2 - \mu_2^2}{\mu_1 + \mu_2}$$

onde $(\mu_1^2 - \mu_2^2)$ é obtido diretamente de 2.50 e $(\mu_1 + \mu_2)$ pode ser obtido em expansão em série de potências de X , uma ordem abaixo da desejada para $\Delta\mu$. A álgebra é bastante simplificada se forem utilizadas as relações seguintes (obtidas de 2.12, 2.41, 2.46 e 2.51):

$$y^2 = Y_L^2 + Y_T^2 \quad (2.65)$$

$$Q_1 Q_2 = -1 \quad , \quad Y_L (Q_1 + Q_2) = \frac{Y_T^2}{A_x} \quad (2.66)$$

e

$$\operatorname{tg} 2\Phi_z = \frac{2A_x Y_L}{Y_T^2} \quad (2.67)$$

Considerando termos até ordem X^2 , obtém-se (ver Apêndice D)

$$\begin{aligned} \Delta\mu = \mu_1 - \mu_2 &\doteq \frac{XY_L}{(1-y^2) \sin 2\Phi_z} \left[1 + \frac{X}{2(1-y^2)} \left(1 + \frac{3}{2} Y_T^2 \right) \right] \\ &= \frac{XY_T^2}{2(1-y^2) \cos 2\Phi_z} \left[1 + \frac{X}{2(1-y^2)} \left(3 - 2y^2 + \frac{3}{2} Y_T^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (2.68)$$

Onde o símbolo \doteq indica expansão em série de potências de X .

Os índices de atenuação são obtidos de 2.63 e 2.50 em ordem mais baixa em X e Z

$$\chi_{1,2} \doteq \frac{XZ}{2} \frac{\left[1 + \frac{Y_T^2}{2} \mp \frac{Y_T^2}{2} \cos 2\Phi_z \right]}{\left[1 - \frac{Y_T^2}{2} \pm \frac{Y_T^2}{2 \cos 2\Phi_z} \right]^2} \quad (2.69)$$

e a diferença $(\chi_1 - \chi_2)$ pode ser escrita na forma

$$\Delta\chi = \chi_1 - \chi_2 \doteq -\Delta\mu Z \frac{(3-y^2)}{(1-y^2)} \cos^2 2\Phi_z \left[1 + \operatorname{tg} 2\Phi_z \frac{4Y_L}{Y_T^2(3-y^2)} \right] \quad (2.70)$$

Capítulo 3. Birrefringência elíptica com atenuação

a. Birrefringência elíptica na esfera de Poincaré

A evolução da polarização de uma onda eletromagnética num meio anisotrópico pode ser descrita de forma simples na esfera de Poincaré. O método é extensivamente revisado por Ramachandran e Ramaseshan⁽¹⁸⁾ tendo em vista sua aplicação em ótica de cristais. A utilização do método para um plasma magnetizado foi feita por De Marco e Segre⁽²⁾, que deduziram uma equação para evolução da polarização da onda no meio, desprezando entretanto o efeito da atenuação. No que segue, o efeito da atenuação será incluído nesta equação em primeira ordem.

Na ausência de atenuação, o efeito de birrefringência elíptica sobre um estado de polarização P se propagando num meio homogêneo pode ser descrito⁽¹⁸⁾ na esfera de Poincaré como uma rotação de P em torno do eixo P_1P_z (Figura 3.1) definido pelos estados característicos. A rotação é anti-horária em torno de P_z e o ângulo de rotação dado por

$$\frac{\omega}{c} \Delta\mu dz = \frac{\omega}{c} (\mu_1 - \mu_z) dz \quad (3.1)$$

onde dz é a distância percorrida no meio. Assim, o deslocamento de P devido à birrefringência elíptica pode ser escrito na forma

$$d\vec{P} = \vec{\Omega} \times \vec{P} dz \quad (3.2)$$

onde

$$\vec{\Omega} = \frac{\omega}{c} \Delta\mu \vec{e}_2 = \frac{\omega}{c} (\mu_1 - \mu_z) \vec{e}_2 \quad (3.3)$$

Sendo \vec{e}_2 e \vec{P} respectivamente os versores posição de P_z e P na esfera de Poincaré (Figura 3.1).

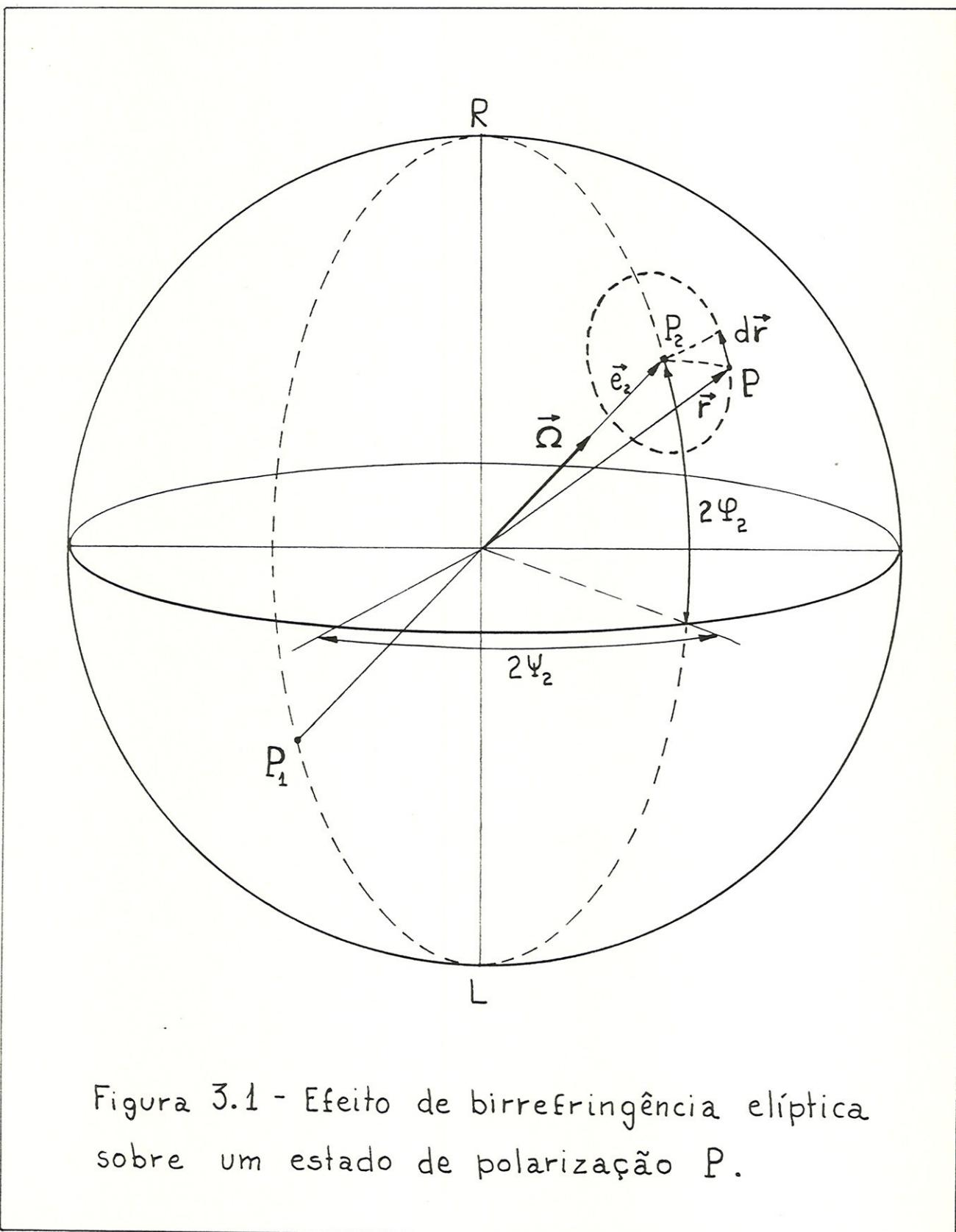


Figura 3.1 - Efeito de birrefringência elíptica sobre um estado de polarização P .

A equação para evolução da polarização num meio homogêneo pode ser escrita como

$$\frac{d\vec{r}}{dz} = \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (3.4)$$

De Marco e Segre⁽²⁾ assumem esta equação para o meio não homogêneo nas condições de validade⁽²⁵⁾ da aproximação WKB. O vetor instantâneo de rotação $\vec{\Omega}$ é definido localmente pela equação 3.3, onde $\mu_{1,z}$ e \vec{e}_z são dados por 2.50 e 2.49, respectivamente.

b. Evolução da polarização incluindo a atenuação

O efeito da atenuação (dicroismo) pode ser incluído na equação 3.4 como descrito a seguir.

Os estados característicos D_1 e D_2 para dicroismo elíptico são definidos como estados que se propagam invariantes sob efeito de atenuação, se for suposta a ausência de birrefringência. O efeito do dicroismo elíptico sobre um estado de polarização P é descrito⁽¹⁸⁾ na esfera de Poincaré como um deslocamento deste ponto ao longo de um grande círculo de D_1 para D_2 (Figura 3.2) dando por

$$\frac{\omega}{c} \sin 2s \Delta \chi_d dz \equiv \frac{\omega}{c} \sin 2s (\chi_{D_1} - \chi_{D_2}) dz \quad (3.5)$$

onde χ_{D_1} e χ_{D_2} são os índices de atenuação dos estados $D_{1,2}$ e $2s$ é o ângulo entre P e D_2 . O deslocamento de P devido ao dicroismo elíptico pode ser escrito na forma

$$d\vec{r}_d = \vec{r} \times \vec{\Omega}_d \times \vec{r} \quad (3.6)$$

onde

$$\vec{\Omega}_d = \frac{\omega}{c} (\chi_{D_1} - \chi_{D_2}) \vec{e}_{D_2} = \frac{\omega}{c} \Delta \chi_d \vec{e}_{D_2} \quad (3.7)$$

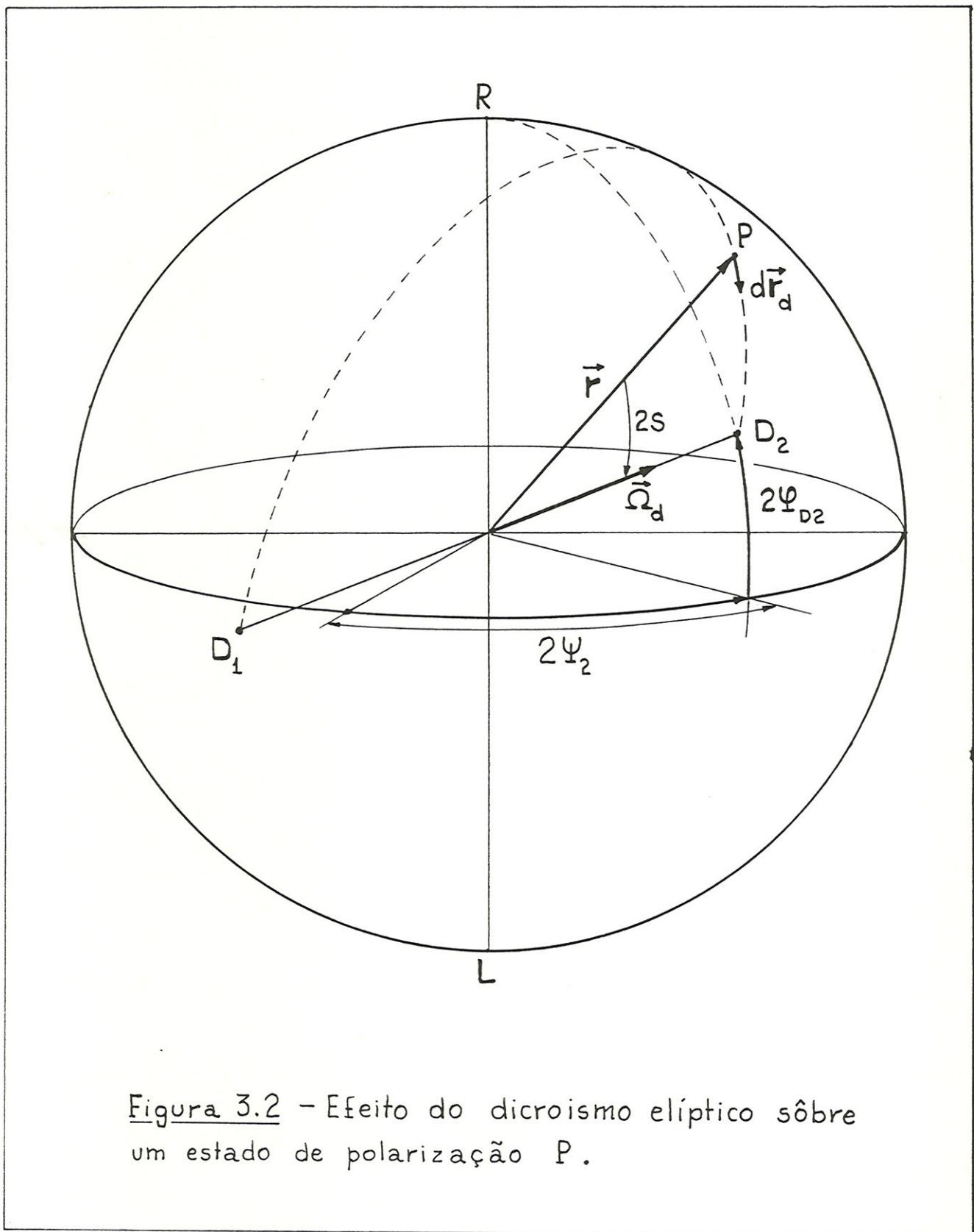


Figura 3.2 - Efeito do dicroismo elíptico sobre um estado de polarização P.

Sendo \vec{e}_{D_2} o versor posição do estado D_2 .

Os deslocamentos devidos à birrefringência elíptica (na ausência de atenuação) e ao cleroismo elíptico (na ausência de birrefringência) podem ser supostos independentes e somados. Este procedimento constitui o método de superposição na esfera de Poincaré⁽¹⁸⁾.

Assim, os deslocamentos 3.2 e 3.6 podem ser somados. Obtém-se uma equação para evolução do estado de polarização da onda no meio, incluindo-se o efeito da atenuação

$$\frac{d\vec{r}}{dz} = \vec{\Omega} \times \vec{r} + \vec{r} \times \vec{\Omega}_d \times \vec{r} \quad (3.8)$$

Para um meio não homogêneo esta equação será limitada pela condição de que $\vec{\Omega}$ e $\vec{\Omega}_d$ sejam grandezas lentamente variáveis no meio. Isto corresponde às mesmas condições da aproximação WKB. No que segue, o meio será suposto homogêneo, e a equação 3.8 será utilizada para se obter os estados D_1 e D_2 , e respectivos índices de atenuação.

Os estados característicos S_1 e S_2 (obtidos no capítulo anterior) podem também ser obtidos como soluções da equação

$$\frac{d\vec{r}}{dz} = \vec{\Omega} \times \vec{r} + \vec{r} \times \vec{\Omega}_d \times \vec{r} = 0 \quad (3.9)$$

As soluções em primeira ordem em z podem ser obtidas por método perturbativo. Escrevendo a solução na forma

$$\vec{e}_S = \vec{r}_0 + S\vec{r}$$

onde \vec{SF} é uma perturbação de primeira ordem, resulta para ordem zero as soluções $\vec{r}_0 = \mp \vec{e}_z$. Substituindo 3.3 e 3.7, obtém-se em primeira ordem

$$\vec{\Omega} \times \vec{SF} + (\mp \vec{e}_z) \times \vec{\Omega}_d \times (\mp \vec{e}_z) =$$

$$\vec{e}_z \times (\Delta\mu \vec{SF} + \Delta\chi_d \vec{e}_{Dz} \times \vec{e}_z) = 0$$

E uma vez que \vec{SF} é perpendicular a \vec{e}_z resulta

$$\vec{SF} = \frac{\Delta\chi_d}{\Delta\mu} \vec{e}_z \times \vec{e}_{Dz} \quad (3.10)$$

e as soluções de primeira ordem dadas por

$$\vec{e}_{S1,z} = \mp \vec{e}_z + \vec{SF} \quad (3.11)$$

O estado S_z tem mesma latitude que P_z (equação 2.60) o que significa que \vec{SF} é perpendicular a um plano meridiano passando por P_z (Figura 3.3). Assim, resulta da equação 3.10 que D_z tem a mesma longitude do estado P_z . Para $\varphi_z > 0$ e $\chi < 1$ o sentido de \vec{SF} é o indicado na Figura 3.3 (equações 2.60 e 2.61). Assim, resulta de 3.10

$$|SF| = -\frac{\Delta\chi_d}{\Delta\mu} \sin(2\varphi_z - 2\varphi_{Dz}) \quad (3.12)$$

onde $2\varphi_{Dz}$ é a latitude do estado D_z . Indicando por ϵ o ângulo entre P_z e S_z , resulta da lei dos senos para o triângulo esférico $P_z S_z R$ que

$$\frac{\sin \epsilon}{\sin 2\delta} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - 2\varphi_z)}{\sin \hat{S}_z}$$

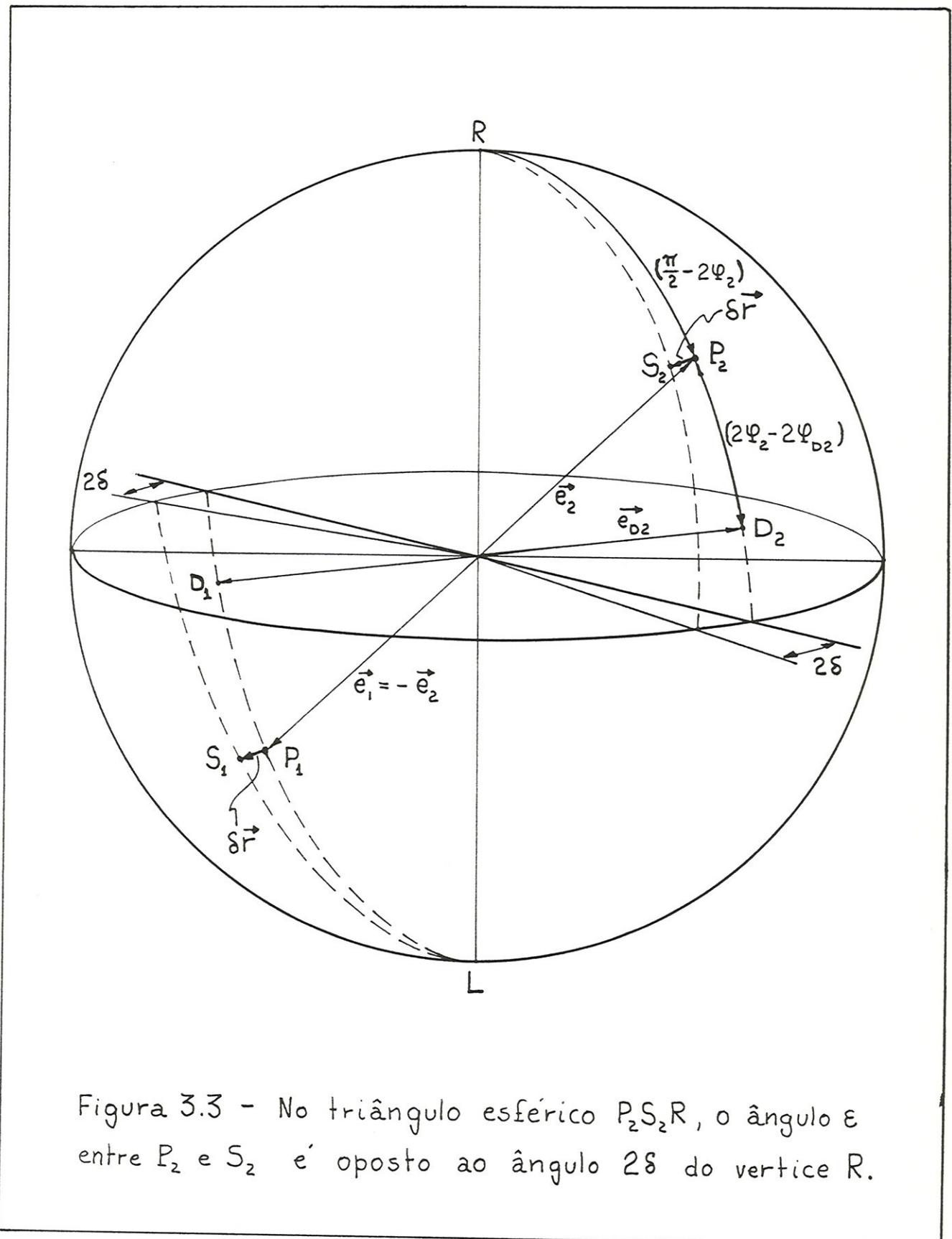


Figura 3.3 - No triângulo esférico P_2S_2R , o ângulo ε entre P_2 e S_2 é oposto ao ângulo 2δ do vértice R .

onde \hat{S}_z é o ângulo do vértice S_z e s é dado por 2.61. Em aproximação de primeira ordem

$$\hat{S}_z \approx \frac{\pi}{2}, \quad s \approx \tan S \quad \text{e} \quad |\vec{SF}| \approx \varepsilon \approx \sin S$$

e resulta

$$2s \Delta n \cos 2\Phi_z = - \Delta \chi_D \sin(2\Phi_z - 2\Phi_{Dz}) \quad (3.13)$$

Os coeficientes de atenuação χ_{D_1} , χ_{D_2} (e $\Delta \chi_d$) podem ser obtidos dos índices de atenuação χ_1 , χ_2 (e $\Delta \chi = \chi_1 - \chi_2$) relativos aos estados característicos S_1 e S_2 , como é mostrado a seguir.

Uma onda de intensidade inicial I_0 , num estado de polarização S_z é suposta atravessando uma espessura infinitesimal dz do meio. Uma vez que S_z é um estado característico, o único efeito do meio sobre a onda será uma atenuação da intensidade I descrita por

$$I = I_0 e^{-2\eta_z dz} = I_0 - 2\eta_z I_0 dz \quad (3.14)$$

onde η_z é o coeficiente de atenuação do estado S_z definido por

$$\eta_z = \frac{\omega}{c} \chi_z \quad (3.15)$$

O estado S_z pode ser decomposto segundo os estados ortogonais D_1 e D_2 (Apêndice B). As intensidades iniciais das componentes serão (equações B12 e B13)

$$I_{10} = I_0 \sin^2 s \quad \text{e} \quad I_{20} = I_0 \cos^2 s \quad (3.16)$$

onde $2s$ é o ângulo entre S_z e D_z .

Se for considerada a propagação de cada uma das componentes no meio, dois efei-

tos podem ser distinguidos. Um deles é a atenuação de cada uma das componentes descrita por

$$I_1 = I_{10} - 2\eta_{D_1} I_{10} dz \quad e \quad I_2 = I_{20} - 2\eta_{D_2} I_{20} dz \quad (3.17)$$

E o outro efeito é a birrefringência elíptica de cada uma das componentes descrita como uma rotação em torno do eixo $P_1 P_2$ (equação 3.2). Não há deslocamento devido ao dicroismo para os estados D_1 e D_2 . Assim, as componentes nos estados D_1 e D_2 permanecem ortogonais, não havendo troca de energia entre uma componente e outra. Resulta que o único efeito sobre a intensidade das componentes será a atenuação descrita por 3.17. Considerando que

$$I_0 = I_{10} + I_{20} \quad e \quad I = I_1 + I_2$$

resulta de 3.17, 3.16, 3.14 e 3.15 que

$$\chi_2 = \chi_{D_1} \sin^2 s + \chi_{D_2} \cos^2 s$$

Para o estado S_1 , obtém-se de maneira análoga

$$\chi_1 = \chi_{D_1} \cos^2 s + \chi_{D_2} \sin^2 s$$

e assim, obtém-se

$$\Delta\chi = \chi_1 - \chi_2 = (\chi_{D_1} - \chi_{D_2}) \cos 2s$$

Substituindo-se $2s = 2\Phi_2 - 2\Phi_{D_2}$, obtém-se

$$\Delta\chi_d = \frac{\Delta\chi}{\cos(2\Phi_2 - 2\Phi_{D_2})} \quad (3.18)$$

onde χ_1 e χ_2 são dados por 2.63.

A latitude do estado D₂ pode finalmente ser obtida de 3.13, 3.18 e 2.61 na forma

$$\operatorname{tg}(2\Phi_{Bz} - 2\Phi_z) = \frac{\Delta\mu}{\Delta\chi} \operatorname{sen} 2\Phi_z \cos 2\Phi_z \quad \frac{Z}{A_x} \quad (3.19)$$

A longitude do estado D_z , conforme já mostrado é igual à do estado P_z , dada por 249

$$2\Psi_{Dz} = 2\Psi_z = 2\beta \quad (3.20)$$

c. Efeito da atenuação em altas frequências

Expressões explícitas simples podem ser obtidas no caso $X \ll 1$ (condição 2.64). Substituindo 2.70 e 2.67 em 3.19, obtém-se em ordem mais baixa em X

$$\operatorname{tg}(2\varphi_{D_2} - 2\varphi_z) \doteq -\frac{(1-y^2)}{(3-y^2)} \frac{\operatorname{tg} 2\varphi_z}{\left[1 + \frac{2\operatorname{tg}^2 2\varphi_z}{(3-y^2)}\right]} \doteq \frac{\frac{2\operatorname{tg} 2\varphi_z}{(3-y^2)} - \operatorname{tg} 2\varphi_z}{\left[1 + \operatorname{tg} 2\varphi_z \frac{2\operatorname{tg} 2\varphi_z}{(3-y^2)}\right]}$$

e assim resulta

$$\operatorname{tg} 2\varPhi_{D2} \doteq \frac{2 \operatorname{tg} 2\varPhi_2}{(3 - y^2)} \doteq \frac{4y_L}{y_T^2(3 - y^2)} \quad (3.21)$$

Substituindo este resultado em 2.70,
obtém-se

$$\Delta \chi = - \frac{\Delta N Z}{(1-y^2)} \cdot \frac{2 \sin 2\Phi_2 \cos 2\Phi_2}{\tan 2\Phi_{D2}} (1 + \tan 2\Phi_2 \tan 2\Phi_{D2})$$

E observando que

$$\cos(2\varphi_2 - 2\varphi_{D2}) = \cos 2\varphi_2 \cos 2\varphi_{D2} (1 + \tan 2\varphi_2 \tan 2\varphi_{D2})$$

resulta de 3.18 que

$$\Delta \chi_d = - \frac{\Delta \mu Z}{(1-y^2)} \frac{2 \sin 2\varphi_2}{\sin 2\varphi_{D2}} = - \frac{\Delta \mu Z}{(1-y^2)} \frac{\cos 2\varphi_2}{\cos 2\varphi_{D2}} (3-y^2) \quad (3.22)$$

onde $\Delta \mu$ é dado explicitamente por 2.68.

O parâmetro Z pode ser obtido a partir da frequência efetiva de colisão elétron-íon para um plasma de hidrogênio⁽²⁰⁾

$$\omega_{ei} = \frac{4}{3} \left(\frac{2\pi}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \ln \Lambda \frac{n}{(k_B T)^{3/2}}$$

onde k_B é a constante de Boltzmann, T a temperatura dos elétrons e $\ln \Lambda$ (logaritmo coulombiano) é uma função complicada dos diversos parâmetros do plasma. Entretanto, a variação global de $\ln \Lambda$ para uma grande variedade de plasmas ocorre entre 5 e 20⁽²⁶⁾. Para $\ln \Lambda = 15$, obtém-se

$$Z \approx \frac{\omega_{ei}}{\omega} \approx 2 \times 10^{-3} \frac{n(10^{14} \text{ cm}^{-3}) \lambda(\text{mm})}{[T(\text{eV})]^{3/2}} \quad (3.23)$$

Neste trabalho será analisada a propagação de radiação infravermelha distante ($\lambda \lesssim 1 \text{ mm}$) num plasma de tokamak e valem as condições

$$X \ll 1, \quad n \lesssim 10^{14} \text{ cm}^{-3} \quad \text{e} \quad Z \lesssim 10^{-4} \quad (3.24)$$

Por outro lado, o efeito de birrefringência elíptica sobre um estado de polarização P se propagando no plasma não é muito grande. O deslocamento de P na esfera de Poincaré será

ho máximo da ordem de π , como mostrado nos capítulos 5 e 6. A comparação entre as equações 3.2 e 3.6 mostra que neste caso, a razão entre os deslocamentos de P devidos ao dielétrismo e à birrefringência é no máximo da ordem de

$$\frac{|\vec{\Omega}_d|}{|\vec{\Omega}|} = \left| \frac{\Delta \chi_d}{\Delta \mu} \right| \approx Z$$

Assim, resulta que o termo que descreve a atenuação na equação 3.8 não tem interesse prático nas condições 3.24 para propagação da onda num tokamak. De um ponto de vista mais acadêmico, esta equação permite justificar mais satisfatoriamente o procedimento usual^(2,4,6) de se desprezar a priori o efeito de atenuação.

Os resultados obtidos até a equação 3.19 inclusive, não são limitados pela condição $X \ll 1$ e assim, têm uma validade bem mais geral que a situação de interesse no presente trabalho. Mesmo no caso $X \ll 1$, o efeito de atenuação pode se tornar significativo se o caminho ótico for suficientemente longo. Uma análise um pouco mais detalhada do efeito de atenuação é apresentada em outro texto⁽²⁷⁾.

Capítulo 4. Birrefringência linear e atividade ótica no plasma magnetizado

a. Birrefringência linear e atividade ótica

A propagação de uma onda eletromagnética num plasma pode ser estudada por métodos idênticos aos da ótica de cristais. Isto se deve à identidade formal das equações de Maxwell nos dois casos, quando se utiliza o tensor dielétrico equivalente (ver Apêndice A).

A relação constitutiva 2.28,

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \tilde{\kappa}^{-1} \cdot \vec{D} = \frac{1}{\epsilon_0} \tilde{\kappa}_s^{-1} \cdot \vec{D} + \frac{1}{\epsilon_0} \tilde{\kappa}_A^{-1} \cdot \vec{D} \quad (4.1)$$

é a mesma de um cristal que além de birrefringência linear exibe atividade ótica. Isto significa que a birrefringência elíptica num plasma magnetizado pode, pelo menos formalmente ser separada nos fenômenos de birrefringência linear e atividade ótica. Será mostrado que para frequências suficientemente altas, esta separação tem sentido físico e simplifica a análise da evolução da polarização da onda no meio.

A nomenclatura e os métodos básicos empregados a seguir são os mesmos da teoria fenomenológica de propagação num cristal birrefringente e óticamente ativo⁽¹⁸⁾.

A birrefringência linear é descrita pela parte simétrica $\tilde{\kappa}_s^{-1}$ de $\tilde{\kappa}^{-1}$, enquanto que a atividade ótica (birrefringência circular) é descrita por $\tilde{\kappa}_A^{-1}$. A atenuação é descrita pela parte anti-hermitiana de $\tilde{\kappa}^{-1}$ (Apêndice A). Assim, as partes real simétrica e imaginária anti-simétrica de $\tilde{\kappa}^{-1}$ descrevem respectivamente

te a birrefringência linear e a atividade ótica na ausência de atenuação. As atenuações correspondentes (dicroismo linear e circular) são descritas respectivamente pelas partes imaginária simétrica e real anti-simétrica de \check{K}^{-1} .

Os estados característicos para birrefringência e dicroismo lineares e respectivos índices de refração e atenuação podem então ser obtidos da parte simétrica de \check{K}^{-1} . Analogamente, podem ser obtidos os índices de refração e atenuação para atividade ótica a partir da parte anti-simétrica de \check{K}^{-1} . Na esfera de Poincaré, cada um dos quatro efeitos (birrefringência linear, dicroismo linear, birrefringência circular e dicroismo circular) corresponde a um deslocamento independente. O efeito global de birrefringência elíptica com atenuação é obtido somando-se tais deslocamentos, de acordo com o método de superposição na esfera de Poincaré⁽¹⁸⁾.

b. Birrefringência e dicroismo lineares

Os estados característicos e índices de refração e atenuação para birrefringência linear e dicroismo linear podem ser obtidos supondo-se a ausência de atividade ótica. Isto é, supondo-se $N_A = 0$ na equação 2.20, e assim

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \check{K}_s^{-1} \cdot \vec{D} \quad (4.2)$$

Os elipsóides de índice e de ab-

sorção são definidos da maneira usual com relação às partes real e imaginária de \tilde{K}_s^1 , respectivamente. A equação 2.18 mostra que os autovalores de K_s^1 e de $\text{Im } \tilde{K}_s^1$ correspondentes às direções perpendiculares ao campo magnético estático são degenerados. Resulta assim que os elipsóides de índice e de absorção são elipsóides de rotação em torno do campo magnético estático \vec{B}_0 .

As ondas características na ausência de atenuação são ondas linearmente polarizadas nas direções dos eixos principais da seção elíptica do elipsóide de índice normal à direção de propagação^(18,28). Os estados característicos para dicroismo linear são dados da mesma maneira com relação ao elipsóide de absorção. Resulta que os estados característicos para birrefringência linear e dicroismo linear são coincidentes. Tais estados característicos são as ondas linearmente polarizadas ordinária (L_o) e extraordinária (L_x) definidas da maneira usual⁽²⁰⁾ mas com relação à componente transversal \vec{B}_T do campo magnético estático.

A figura 2.1 mostra que para os estados L_x e L_o as longitudes na esfera de Poincaré serão dadas por

$$2\Psi_x = 2\Psi_2 = 2\beta \quad \text{e} \quad 2\Psi_o = 2\Psi_1 = 2\beta + \pi \quad (4.3)$$

Os índices de refração complexos para L_x e L_o são obtidos da mesma maneira que no ítem 2-b, substituindo-se a re-

lação constitutiva completa 2.28 por 4.2. Isso equivale a eliminar nas equações 2.29 os termos envolvendo $i f_i A_i$ como mostram 2.20, 2.21 e 2.22. Para a onda extraordinária $E_y'' = 0$ em 2.29, enquanto que para a onda ordinária $E_x'' = 0$. Assim, obtém-se respectivamente para L_x e L_o

$$\check{\mu}_x^2 = \frac{1}{1 - f_i A_i^2} \quad \text{e} \quad \check{\mu}_o^2 = \frac{1}{1 - f_i A_i^2 + f_i y_T^2} \quad (4.4)$$

Os correspondentes índices de refração real e índices de atenuação são obtidos utilizando-se 2.62. Em primeira ordem em $Z = \Sigma c_i / u$ obtém-se

$$\mu_x^2 = 1 - \frac{XA_x}{A_x - y^2}, \quad \mu_o^2 = 1 - \frac{X}{1 - \frac{A_x y_L^2}{A_x^2 - y_T^2}} \quad (4.5)$$

$$\chi_x = \frac{(1 - \mu_x^2)^2}{2X\mu_x} \frac{(A_x^2 + y^2)}{A_x^2} Z \quad (4.6)$$

$$\text{e} \quad \chi_o = \frac{(1 - \mu_o^2)^2}{2X\mu_o} \left[\frac{A_x^2 y_L^2 + y_T^2 y_L^2}{(A_x^2 - y_T^2)^2} + 1 \right] Z$$

Na esfera de Poincaré a birrefringência e o dicroísmo lineares são descritos de maneira idêntica à birrefringência e ao dicroísmo elípticos (equações 3.2 e 3.6). Assim, o deslocamento na esfera de Poincaré devido à birrefringência linear na ausência de atenuação é dado por

$$d\vec{r}_b = \vec{\Omega}_b \times \vec{r} dz \quad (4.7)$$

onde

$$\vec{\Omega}_b = \frac{\omega}{c} (\mu_0 - \mu_x) \vec{e}_x \equiv \frac{\omega}{c} \Delta \mu_b \vec{e}_x \quad (4.8)$$

Sendo \vec{e}_x a posição do estado L_x na esfera de Poincaré. O efeito da birrefringência linear é mostrado na figura 4.1.

O deslocamento na esfera de Poincaré devido ao dicroismo linear é dado por (ver equação 3.6)

$$d\vec{r}_{db} = \vec{r} \times \vec{\Omega}_{db} \times \vec{r} \quad (4.9)$$

onde

$$\vec{\Omega}_{db} = \frac{\omega}{c} (\chi_0 - \chi_x) \vec{e}_x \equiv \frac{\omega}{c} \Delta \chi_b \vec{e}_x \quad (4.10)$$

O efeito do dicroismo linear é mostrado na figura 4.2.

Expressões explícitas simples para $\Delta \mu_b$ e $\Delta \chi_b$ podem ser obtidas de 4.5 e 4.6, por meio de expansões em séries de X , de maneira análoga ao item 2-e. Considerando termos até ordem X^2 , obtém-se

$$\Delta \mu_b = \mu_0 - \mu_x \doteq \frac{XY_T^2}{2(1-Y^2)} \left[1 + \frac{X}{2(1-Y^2)} \left(3 - 2Y^2 + \frac{3}{2} Y_T^2 \right) \right] \quad (4.11)$$

e em primeira ordem em X (e Z)

$$\Delta \chi_b \doteq \chi_0 - \chi_x = - \Delta \mu_b \frac{(3-Y^2)}{(1-Y^2)} Z \quad (4.12)$$

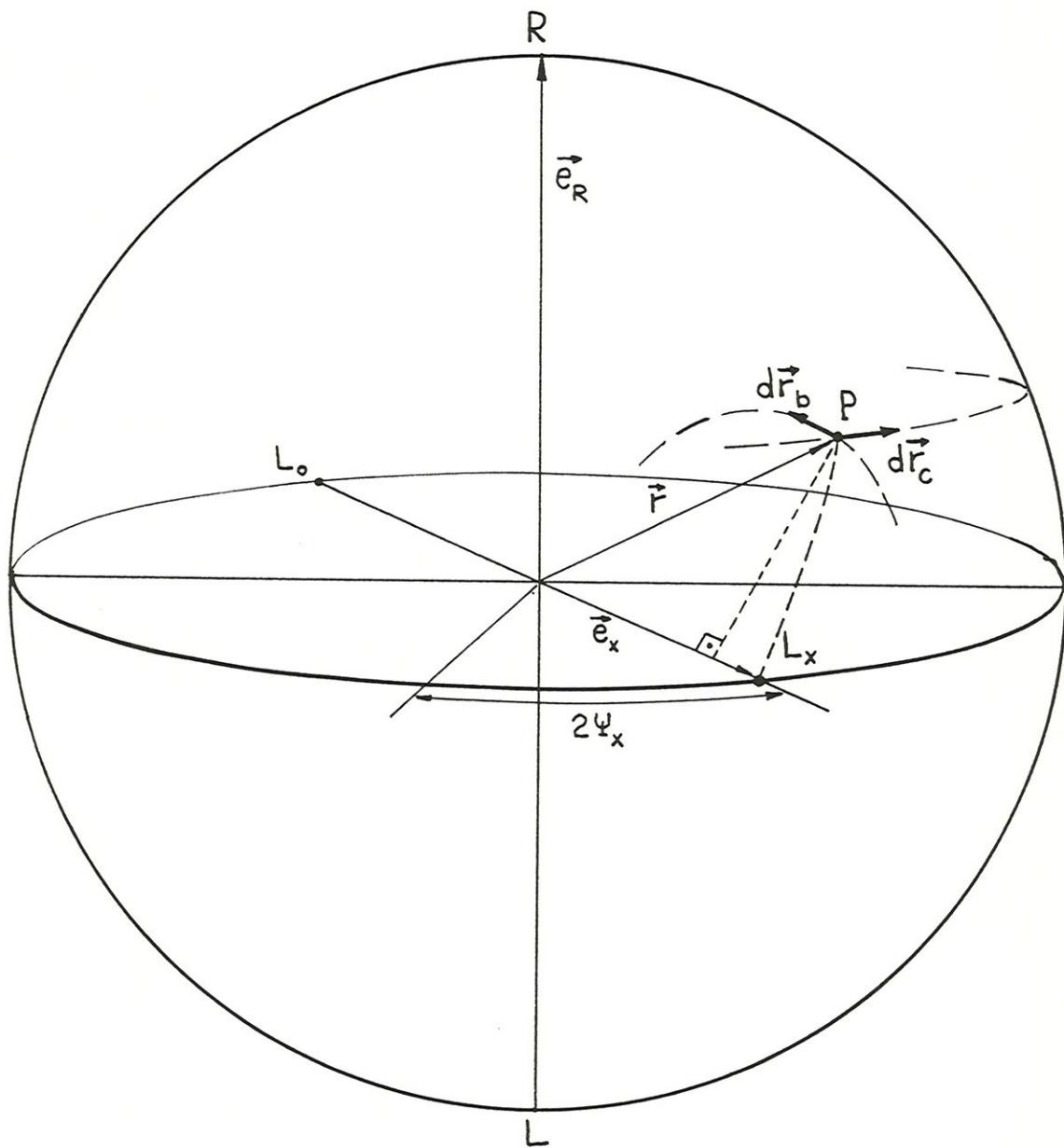


Figura 4.1 - Efeito da birrefringência linear ($d\vec{r}_b$) e da atividade ótica ($d\vec{r}_c$) na esfera de Poincaré.

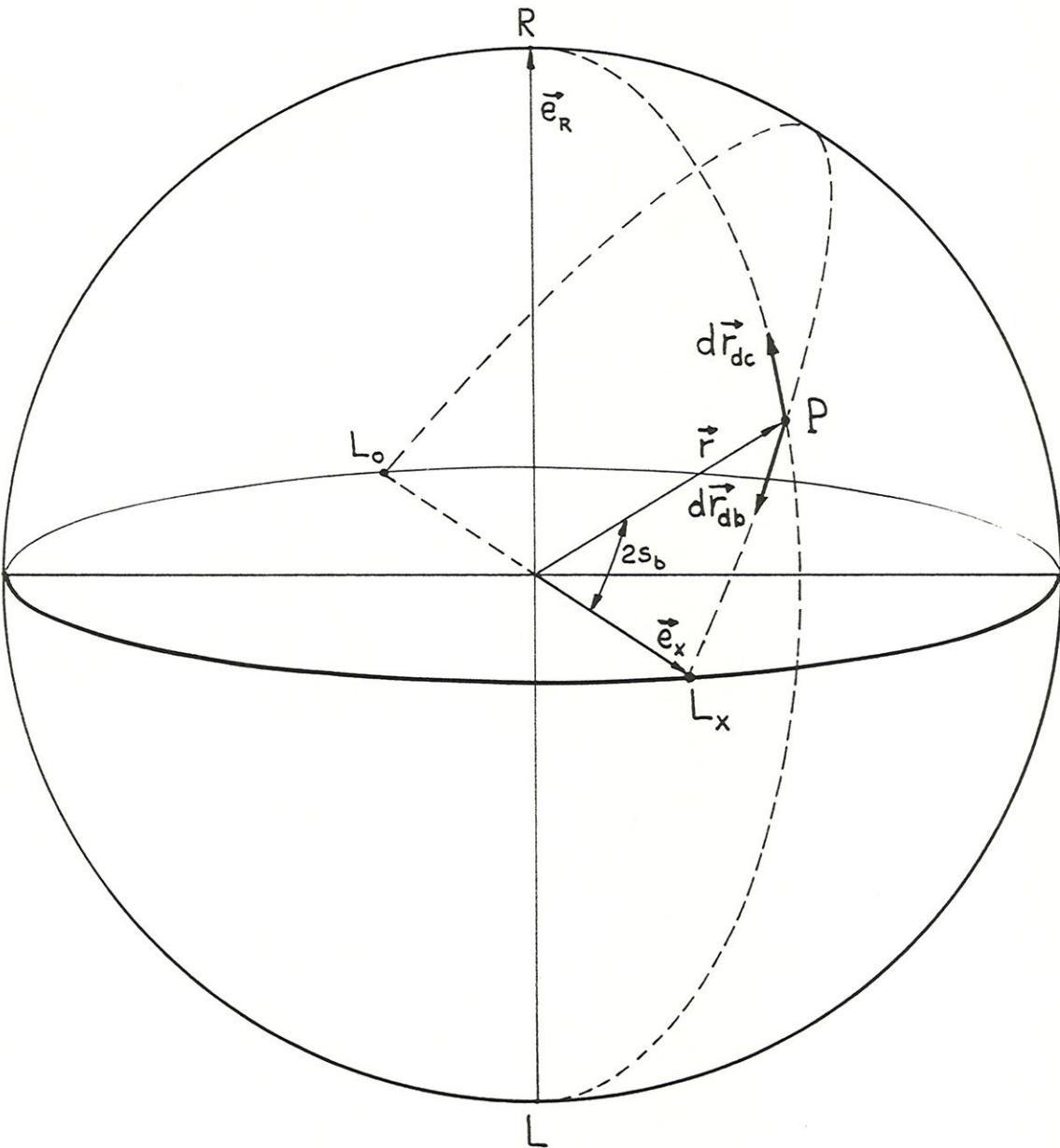


Figura 4.2 - Efeito do dicroismo linear ($d\vec{r}_{db}$) e circular ($d\vec{r}_{dc}$) na esfera de Poincaré.

c. Atividade ótica e dicroismo circular

Para se estudar o efeito da atividade ótica separadamente deve ser suposta a ausência de birrefringência linear. Assim, a parte simétrica de \tilde{K}^{-1} deve ser suposta isotrópica com base em algum critério consistente. O critério mais adequado no caso é o de eliminar ou minimizar os erros do método de superposição para se obter o efeito global de birrefringência elíptica. Um índice de refração médio para birrefringência linear será admitido na forma

$$\frac{1}{\tilde{\mu}_m^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tilde{\mu}_x^2} + \frac{1}{\tilde{\mu}_o^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{\tilde{\mu}_x^2 + \tilde{\mu}_o^2}{\tilde{\mu}_x^2 \tilde{\mu}_o^2} \quad (4.13)$$

e será mostrado que os resultados do método de superposição assim obtidos são exatos pelo menos até ordem X^2 para birrefringência elíptica e até ordem X para dicroismo elíptico. A forma 4.13 foi escolhida por sua simplicidade algébrica e não corresponde exatamente ao índice de refração médio aplicável no caso que é dado por Ramachandran e Ramaeshan⁽¹⁸⁾.

Substituindo as expressões 4.4 em 4.13, obtém-se

$$\frac{1}{\tilde{\mu}_m^2} = 1 - f_i A_i^2 + \frac{1}{2} f_i Y_r^2 \quad (4.14)$$

Consistentemente com a definição 4.13, \tilde{K}_s^{-1} deve ser tal que (ver equações 2.27 e 4.2)

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \tilde{K}_s^{-1} \cdot \vec{D} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{\tilde{\mu}_m^2} \vec{D}$$

Assim resulta que \check{K}_s^{-1} deve ser dado por

$$\check{K}_s^{-1} = 1 - f_i A_i^2 + \frac{1}{2} f_i Y_T^2 \quad (4.15)$$

para se ter ausência de birrefringência linear consistente com a definição 4.13.

Os índices de refração complexos para atividade ótica são obtidos da mesma maneira que no ítem 2-b, substituindo-se 2.21 por 4.15. As equações 2.29 podem ser reescritas como

$$\left(\frac{1}{\check{\mu}^2} - 1 + f_i A_i^2 - \frac{1}{2} f_i Y_T^2 \right) E_x'' + i f_i A_i Y_L E_y'' = 0$$

$$-i f_i A_i Y_L E_x'' + \left(\frac{1}{\check{\mu}^2} - 1 + f_i A_i^2 - \frac{1}{2} f_i Y_T^2 \right) E_y'' = 0$$

e da condição de solução não trivial para E_x'' e E_y'' , obtém-se

$$\left(\frac{1}{\check{\mu}^2} - 1 + f_i A_i^2 - \frac{1}{2} f_i Y_T^2 \right) = \mp f_i A_i Y_L \quad (4.16)$$

e os coeficientes de polarização correspondentes são dados por

$$\check{R} = \pm i \quad (4.17)$$

Tais coeficientes correspondem às ondas circularmente polarizadas, como esperado. Para a onda circularmente polarizada R, $\tan \Psi = 1$ (ver equação B6 e sequência) e a equação B11 mostra que $\check{R} = i$. Assim, os sinais superior e inferior na equação 4.16 correspondem respectivamente às ondas circularmente polarizadas R e L. Os índices de refração

complexos são dados explicitamente por

$$\tilde{\mu}_{R,L}^2 = \frac{1}{1 - f_i A_i^2 + \frac{1}{2} f_i Y_T^2 \mp f_i A_i Y_L} \quad (4.18)$$

Os índices de refração reais e os índices de atenuação podem ser obtidos de 2.62. Em primeira ordem em $Z = \omega_c / \omega$, obtém-se

$$\mu_{R,L}^2 = \frac{1}{1 + \frac{X}{A_x^2 - Y^2} \left(A_x - \frac{Y^2}{2A_x} \pm Y_L \right)} \quad (4.19)$$

e

$$\chi_{R,L} = \mu_{R,L}^3 \frac{XZ}{2(A_x^2 - Y^2)} \left[\frac{2A_x(A_x \pm Y_L)}{A_x^2 - Y^2} - \frac{Y^2(3A_x^2 - Y^2)}{2A_x(A_x^2 - Y^2)} - 1 \right] \quad (4.20)$$

Na esfera de Poincaré, a atividade ótica e o dicroismo circular são descritos como casos particulares de birrefringência e dicroismo elípticos (equações 3.2 e 3.6). Assim, o deslocamento na esfera de Poincaré devido à atividade ótica na ausência de atenuação é dado por (ver figura 4.1)

$$d\vec{r}_c = \vec{\Omega}_c \times \vec{r} dz \quad (4.21)$$

onde

$$\vec{\Omega}_c = \frac{\omega}{c} (\mu_L - \mu_R) \vec{e}_R \equiv \frac{\omega}{c} \Delta \mu_c \vec{e}_R \quad (4.22)$$

sendo \vec{e}_R a onda circularmente polarizada R.

O deslocamento devido ao dicroismo circular é dado por (ver equação 3.6)

$$d\vec{r}_{dc} = \vec{r} \times \vec{\Omega}_{dc} \times \vec{r} \quad (4.23)$$

onde

$$\vec{\Omega}_{dc} = \frac{\omega}{c} (\chi_L - \chi_R) \vec{e}_R \equiv \frac{\omega}{c} \Delta \chi_c \vec{e}_R \quad (4.24)$$

O efeito do dicroismo circular é mostrado na figura 4.2.

Expressões explícitas simples para $\Delta \mu_c$ e $\Delta \chi_c$ podem ser obtidas de 4.19 e 4.20 no caso $X \ll 1$. Considerando termos até ordem X^2 , obtém-se

$$\Delta \mu_c \doteq \frac{XY_L}{(1-y^2)} \left[1 + \frac{X}{2(1-y^2)} \left(\frac{3}{2} y_T^2 + 1 \right) \right] \quad (4.25)$$

e em primeira ordem em X (e Z)

$$\Delta \chi_c \doteq -\Delta \mu_c \frac{2}{(1-y^2)} Z \quad (4.26)$$

d. Birrefringência elíptica como superposição de birrefringência linear e atividade ótica

Os deslocamentos infinitesimais devidos à birrefringência linear e circular e ao dicroismo linear e circular podem ser somados, de acordo com o método de superposição na esfera de Poincaré⁽¹⁸⁾. Assim, somando os deslocamentos 4.7, 4.9, 4.21 e 4.23, a equação 3.8 para a evolução da polarização da onda no meio é novamente obtida,

$$\frac{d\vec{r}}{dz} = \vec{\Omega} \times \vec{r} + \vec{r} \times \vec{\Omega}_d \times \vec{F} \quad 4.27$$

onde

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_b + \vec{\Omega}_c \quad (4.28)$$

e

$$\vec{\Omega}_d = \vec{\Omega}_{db} + \vec{\Omega}_{dc} \quad (4.29)$$

O índice de refração médio para birrefringência linear foi escolhido arbitrariamente na forma 4.13, devido à sua simplicidade algébrica. Para demonstrar a consistência desta escolha, é necessário demonstrar que $\vec{\Omega}$ e $\vec{\Omega}_d$ obtidos pelo método de superposição (equações 4.28 e 4.29) são consistentes com aqueles obtidos diretamente (equações 3.3 e 3.7). Esta demonstração é feita a seguir para o caso $X \ll 1$ (ver 2.64).

Identificando 3.3 e 4.28, obtém-se

$$\Delta\mu \vec{e}_z = \Delta\mu_b \vec{e}_x + \Delta\mu_c \vec{e}_R \quad (4.30)$$

Resulta desta equação que a longitude de \vec{e}_z (P_z) na esfera de Poincaré é a mesma de \vec{e}_x e sua latitude é dada por

$$\operatorname{tg} 2\Psi_z = \frac{\Delta\mu_c}{\Delta\mu_b} = \frac{2A_x Y_L}{y_T^2} \quad (4.31)$$

Onde $\Delta\mu_b$ e $\Delta\mu_c$ foram substituídos pelas aproximações 4.11 e 4.25 válidas até 2º ordem em X . As coordenadas $2\Psi_z$ e $2\Psi_z$ de P_z obtidas pelo método de superposição são exatas (ver 2.49 e 2.51), apesar de terem sido obtidas em aproximações de 2ª ordem. Uma vez que $|\vec{e}_z| = |\vec{e}_x| = |\vec{e}_R| = 1$, resulta ainda de 4.30 que

$$\Delta\mu^2 = \Delta\mu_b^2 + \Delta\mu_c^2 \quad (4.32)$$

e substituindo $\Delta\mu_b$ e $\Delta\mu_c$ (equações 4.11 e 4.25) deve-se obter para $\Delta\mu$ o mesmo resultado que o obtido diretamente (equações 2.68).

Deve ser observado entretanto que as equações 2.68 foram escritas em forma que permite uma verificação mais simples. Comparando 4.11 e 4.25 com 2.68 resulta

$$\Delta\mu_b = \Delta\mu \cos 2\Phi_z \quad \text{e} \quad \Delta\mu_c = \Delta\mu \sin 2\Phi_z \quad (4.32)$$

o que mostra mais claramente que $\Delta\mu$, obtido diretamente da equação de Appleton-Hartree e o obtido pelo método de superposição são idênticos até ordem X^2 .

Analogamente, comparando 4.29 e 3.7, obtém-se

$$\Delta\chi_d \vec{e}_{D2} = \Delta\chi_b \vec{e}_x + \Delta\chi_c \vec{e}_R \quad (4.34)$$

Resulta que a longitude de \vec{e}_{D2} é a mesma que de \vec{e}_z e sua latitude é dada por

$$\tan 2\Phi_{D2} = \frac{\Delta\chi_c}{\Delta\chi_b} \quad (4.35)$$

E substituindo-se $\Delta\chi_b$ e $\Delta\chi_c$ pelas aproximações 4.12 e 4.26 obtém-se em primeira ordem em X e Z

$$\tan 2\Phi_{D2} = \frac{2}{(3-y^2)} \frac{\Delta\mu_c}{\Delta\mu_b} = \frac{2\tan 2\Phi_z}{(3-y^2)} \quad (4.36)$$

isto é, o mesmo resultado que é obtido diretamente (equação 3.21). Resulta ainda de 4.34 que

$$\Delta\chi_d^2 = \Delta\chi_b^2 + \Delta\chi_c^2 \quad (4.37)$$

Substituindo $\Delta\chi_b$ e $\Delta\chi_c$ pelas expressões 4.12 e 4.26 deve-se obter o mesmo resultado para $\Delta\chi_d$ que o obtido diretamente (equações 3.22). Esta verificação é mais simples e direta se os resultados 4.33 são substituídos em 3.22, obtendo-se

$$\Delta\chi_d = - \frac{\Delta\mu_c}{\sin 2\Phi_{D2}} \frac{2Z}{(1-y^2)} = - \frac{\Delta\mu_b}{\cos 2\Phi_{D2}} \frac{(3-y^2)Z}{(1-y^2)} \quad (4.38)$$

e comparando com 4.12 e 4.26, resulta

$$\Delta\chi_b = \Delta\chi_d \cos 2\Phi_{D2} \quad \text{e} \quad \Delta\chi_c = \Delta\chi_d \sin 2\Phi_{D2} \quad (4.39)$$

o que mostra que $\Delta\chi_d$ obtido diretamente (3.22) é idêntico ao obtido pelo método de superposição (4.37) em primeira ordem em X e Z .

Os resultados para birrefringência elíptica com atenuação obtidos a partir do método de superposição para birrefringência linear e atividade ótica são portanto equivalentes aos obtidos diretamente (capítulo 3). Isto demonstra a consistência da teoria simples desenvolvida para birrefringência linear e atividade ótica no plasma frio magnetizado em altas frequências (condição 2.64).

e. Rotação de Faraday e efeito Cotton-Mouton.

O efeito Faraday^(17,18) é o fenômeno descoberto por Faraday em 1845. Quando uma substância transparente é colocada num campo magnético intenso ocorre uma rotação, proporcional ao campo magnético longitudinal, no plano de polarização da luz que atravessa a substância. O sentido da rotação é associado ao sentido do campo e por isso a rotação de Faraday é geralmente distinguida da atividade ótica natural.

A birrefringência num vapor, para propagação transversal a um campo magnético, foi descoberta por Voigt em 1902. Jenkins e White⁽²⁹⁾ descrevem o fenômeno como proporcional ao campo magnético e o denominam efeito Voigt. O mesmo efeito foi estudado num líquido por Cotton e Mouton em 1907, sendo entrando um efeito quadrático no campo⁽²⁹⁾.

A denominação efeito Cotton-Mouton tem sido^(17,29,30) geralmente empregada para descrever a birrefringência linear no caso de propagação transversal ao campo magnético.

No caso de propagação num plasma magnetizado numa direção arbitrária, a denominação efeito Cotton-Mouton tem sido^(11,14) empregada para indicar de forma um pouco vaga o efeito proporcional a λ^3 que compete com a rotação de Faraday (proporcional a λ^2).

Segre⁽¹⁶⁾ descreve a variação

ha elipticidade (variação em Ψ) como efeito Cotton-Mouton e a variação $\Delta\Psi$ na inclinação Ψ como rotação de Faraday (ver Figura 4.3).

A Figura 4.3 mostra como exemplo o efeito da birrefringência linear pura (efeito Cotton-Mouton na denominação usual) sobre um estado de polarização P ao atravessar um meio homogêneo. Ocorre que a variação $\Delta\Psi$ é geralmente entendida como rotação de Faraday de forma que a terminologia usual não é muito consistente. A inconsistência entretanto desaparece no caso em a polarização inicial é linear e o efeito de birrefringência linear é pequeno.

Neste trabalho será adotada a terminologia geral de Ramachandran e Ramaeshan⁽¹⁸⁾. Isto é, os fenomenos serão denominados birrefringência linear ou atividade ótica, de preferência a efeito Cotton-Mouton ou efeito Faraday. O termo rotação de Faraday será empregado para a variação $\Delta\Psi$ na inclinação Ψ do estado de polarização.

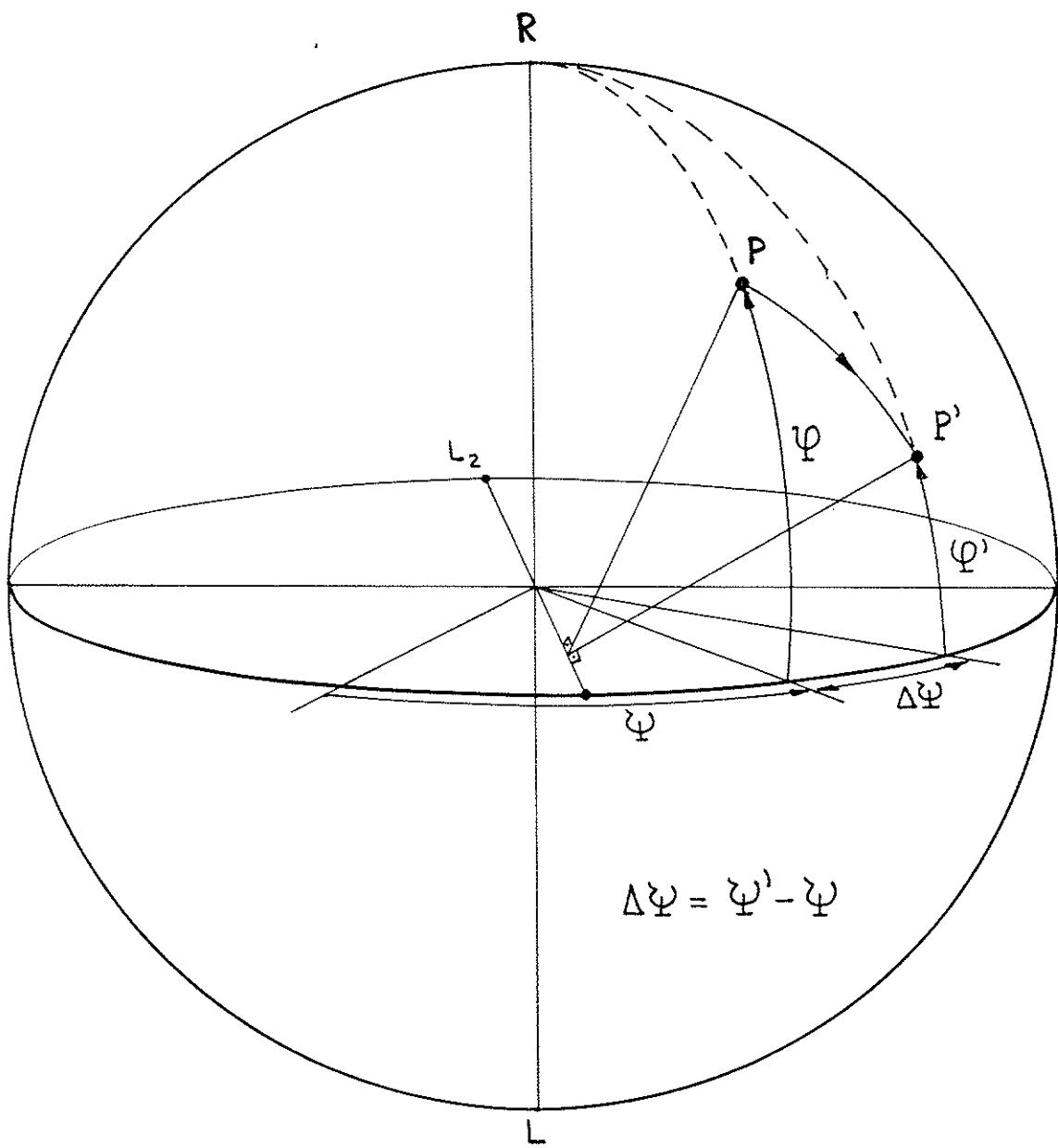


Figura 4.3 - Efeito de birefringência linear sobre um estado P num meio homogêneo. L_2 é o estado característico mais rápido.

Capítulo 5. Análise de experimentos em tokamaks.

a. Birrefringência linear e atividade ótica num plasma de tokamak.

As experiências para diagnósticos de densidade eletrônica e corrente de plasma num tokamak (seções 1.b e 1.c) são analisadas neste capítulo utilizando os resultados obtidos para birrefringência linear e atividade ótica. As condições a seguir são usualmente satisfeitas num tokamak para propagação de radiação infravermelha distante ($\lambda \lesssim 1\text{mm}$):

$$X = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 0.090 n(10^{14}\text{cm}^{-3}) \lambda^2(\text{mm}^2) \ll 1 \quad (5.1)$$

$$\text{e } Y^2 = \frac{\omega_c^2}{\omega^2} = 0.0087 [B_o(T) \lambda(\text{mm})]^2 \ll 1 \quad (5.2)$$

Os efeitos infinitesimais de birrefringência linear e atividade ótica são dados por 4.7, 4.11, 4.21 e 4.25. Em primeira ordem em X tem-se respectivamente

$$d\vec{r}_b = \frac{\omega}{c} \frac{XY_T^2}{2(1-Y^2)} \vec{e}_x \times \vec{r} dz \quad (5.3)$$

$$\text{e } d\vec{r}_c = \frac{\omega}{c} \frac{XY_L}{(1-Y^2)} \vec{e}_R \times \vec{r} dz \quad (5.4)$$

Esses deslocamentos são mostrados na Figura 4.1. Os parâmetros Y_L e Y_T podem ser escritos na forma

$$Y_L = Y \cos \theta = \frac{eB_L}{m\omega} \quad \text{e} \quad Y_T = Y \sin \theta = \frac{eB_T}{m\omega} \quad (5.5)$$

Onde \vec{B}_L e \vec{B}_T são respectivamente as componentes longitudinal e transversal do campo magnético estático \vec{B}_0 em relação à direção de propagação (direção z na Figura 2.1).

As equações 5.3 e 5.4 podem ser reescritas na forma

$$d\vec{r}_b = \frac{\omega}{c(1-y^2)} \frac{n}{n_c B_R} \frac{B_T^2}{2B_R} \vec{e}_x \times \vec{r} dz \quad (5.6)$$

e

$$d\vec{r}_c = \frac{\omega}{c(1-y^2)} \frac{n}{n_c B_R} B_L \vec{e}_R \times \vec{r} dz \quad (5.7)$$

onde os parâmetros n_c e B_R são definidos por

$$n_c = \frac{\epsilon_0 m}{e^2} \omega^2 = \frac{11.2}{\lambda^2 (\text{mm}^2)} \quad (10^{14} \text{cm}^{-3}) \quad (5.8)$$

e

$$B_R = \frac{m}{e} \omega = \frac{10.7}{\lambda (\text{mm})} \quad (\text{T}) \quad (5.9)$$

O parâmetro n_c é a densidade crítica de propagação enquanto B_R é o valor do campo magnético que resultaria numa frequência ciclotrônica igual à da onda considerada. É de interesse observar que as condições 5.1 e 5.2 são equivalentes a

$$X = \frac{n}{n_c} \ll 1 \quad \text{e} \quad \left(\frac{B_0}{B_R}\right)^2 \ll 1 \quad (5.10)$$

As equações para birrefringência linear e atividade ótica (5.6 e 5.7) mostram que ambos os efeitos são proporcionais à densidade eletrônica do plasma.

Os efeitos de birrefringência linear

e atividade ótica são essencialmente proporcionais respectivamente à λ^3 e λ^2 , como resulta das equações 5.6 e 5.7. Estas proporcionalidades têm sido mencionadas em alguns trabalhos^(14, 11), mas com um sentido mais vagão que o definido acima. Elas resultam da análise do problema nos casos limites de propagação longitudinal e transversal, isto é dos efeitos Faraday e Cotton-Mouton, respectivamente (ver seção 4-e).

O estado \vec{e}_x é determinado unicamente em função do campo transversal \vec{B}_T (equação 4.3). Assim, resulta de 5.6 e 5.7 que birrefringência linear e atividade ótica são fenômenos essencialmente independentes no sentido de que são relacionados com os campos magnéticos transversal e longitudinal respectivamente. A expressão 5.6 para birrefringência linear depende do campo longitudinal por meio do termo

$$\frac{1}{(1-y^2)} = \frac{1}{(1 - Y_T^2 - Y_L^2)} \quad (5.11)$$

onde Y_L é dado por 5.5. Se a condição 5.2 é razoavelmente satisfeita, a dependência com B_L pode ser considerada desprezível. O mesmo ocorre na expressão 5.7 para a atividade ótica com relação ao campo magnético transversal.

As equações para evolução da polarização na esfera de Poincaré foram obtidas para o plasma considerado homogêneo e serão admitidas como corretas para o plas-

ma não homogêneo se forem satisfeitas as condições da aproximação WKB. Isto equivale a supor os estados característicos e índices de refração variam muito pouco em distâncias da ordem do comprimento de onda. Além disso, será desprezada a mudança na direção de propagação devida à refração. As duas aproximações serão justificadas mais detalhadamente no Apêndice C.

A variação total no estado de polarização não pode, obviamente, ser obtida integrando-se separadamente as equações 5.6 e 5.7. Isto, entretanto, pode ser feito como recurso de cálculo. Se, independentemente de singularidades, um dos efeitos resultar desprezível, o outro resultado será quantitativamente correto. Em particular, as condições para atividade ótica pura ou birrefringência linear pura podem ser diretamente obtidas de 5.6 e 5.7, bem como os erros cometidos ao se desprezar um ou outro efeito. Além disso, resultados qualitativos de interpretação mais simples podem ser obtidos no caso em que os deslocamentos na esfera de Poincaré não são muito grandes.

b. Propagação ao longo de uma corda vertical da secção do plasma.

A propagação da onda será considerada (neste capítulo) ao longo da direção z na Figura 5.1, isto é, direção de simetria do tokamak. O estado inicial de polarização será suposto linear. O campo magnético transversal neste caso é dado por

$$\vec{B}_T = \vec{B}_t + \vec{B}_{pT} \quad (5.12)$$

onde $\vec{B}_t = B_t \vec{e}_y$ e $\vec{B}_{pT} = B_{pT} \vec{e}_x$ são os campos toroidal e poloidal transversal respectivamente. O campo longitudinal é dado de forma análoga por

$$\vec{B}_L = \vec{B}_{pL} + \vec{B}_v \quad (5.13)$$

onde $\vec{B}_{pL} = B_{pL} \vec{e}_z$ e $\vec{B}_v \approx B_v \vec{e}_z$ são os campos poloidal longitudinal e vertical externo. \vec{B}_v tem, à rigor, uma pequena componente transversal que foi desprezada em 5.12. O campo magnético poloidal pode ser estimado por meio da aproximação cilíndrica e desprezando-se o campo vertical externo. As duas aproximações são consistentes no sentido que o campo vertical necessário ao equilíbrio do plasma leva a uma configuração de campos mais próxima da simetria cilíndrica. Para uma distribuição uniforme de corrente de raio a e corrente total I , obtém-se da lei de Ampère que (ver Figura 5.1)

$$B_{pT} = B_{pm} \frac{\pi}{a} \quad B_{pL} = B_L = B_{pm} \cos\gamma_0 \quad (5.14)$$

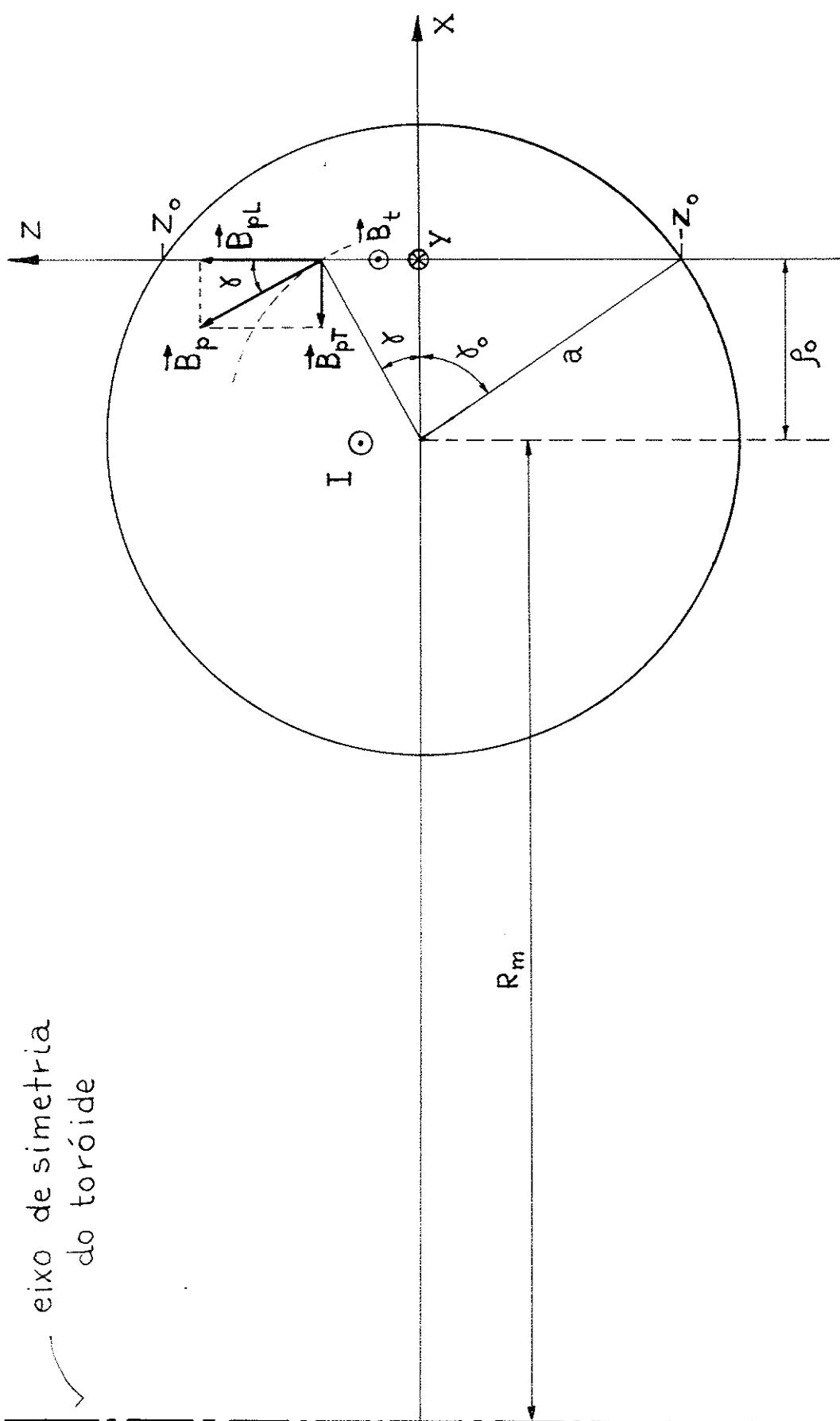


Figura 5.1 - Secção transversal da coluna de plasma num tokamak.

onde

$$\cos \delta_0 = \frac{p_0}{a}$$

e

$$B_{pm} = \frac{N_0 I}{2\pi a} \quad (5.15)$$

é o campo poloidal máximo, que ocorre na borda do plasma.

A Tabela 5.1 mostra valores típicos para tokamaks de vários tamanhos, desde os menores até os ITR's (Ignition Test Reactors) e EPR's (Experimental Power Reactors) que têm sido projetados. Do ponto de vista prático pode ser admitida a condição

$$0.2 \lesssim \frac{I(\text{MA})}{a(\text{m}) B_t(\text{T})} \lesssim 1$$

e resulta a condição

$$\left(\frac{B_{pm}}{B_t} \right)^2 = 0.04 \left[\frac{I(\text{MA})}{a(\text{m}) B_t(\text{T})} \right]^2 \ll 1 \quad (5.16)$$

Considerando ainda que o campo poloidal diminui no interior do plasma, resulta que este campo pode ser desprezado na determinação da intensidade do campo transversal total. A contribuição poloidal pode eventualmente se tornar significativa (mas pequena) na determinação da direção do campo transversal, dependendo dos parâmetros do tokamak. No que segue, o campo poloidal transversal será completamente desprezado e assim

$$\vec{B}_T \approx \vec{B}_t \quad (5.17)$$

Tabela 5.1

Tokamak	B_t (T)	a (m)	I (MA)	$\frac{I(\text{MA})}{a(\text{m}) B_t(\text{T})}$
TBR ⁽¹⁹⁾	0.5	0.08	0.02	0.50
T-5 ⁽³¹⁾	1.2	0.15	0.040	0.22
ALCATOR ⁽³¹⁾	10	0.10	0.15	0.15
ISX-B ⁽¹³⁾	1.2	0.27	0.14	0.43
DITE ⁽⁴⁾	3	0.24	0.20	0.28
TFR600 ⁽¹¹⁾	4.3	0.23	0.20	0.20
FT ⁽¹⁴⁾	8	0.20	0.40	0.25
T-10 ⁽³²⁾	5	~0.3	0.80	0.5
PLT ⁽³²⁾	4.6	~0.4	1.2	0.6
TFTR ⁽³²⁾	5.2	~1.0	2.5	0.5
JET ⁽³²⁾	~3	~1.5	3.5	0.8
ITR's e EPR's ⁽³³⁾ ~ 4 (projetos)		~1.5	~7	1.2

c. Diagnóstico de densidade eletrônica.

Para medida de densidade, o efeito sobre a polarização da onda não deve depender do campo magnético poloidal. Considerando que o campo poloidal transversal é desprezível, resulta que o efeito deve ser independente do campo magnético longitudinal. As equações 5.6 e 5.7 mostram que a experiência deve ser realizada na condição de birrefringência linear pura. Isto é, o efeito da atividade ótica deve ser desprezível e muito menor que o efeito de birrefringência linear. Para obter a condição de atividade ótica desprezível, é válido integrar separadamente a equação 5.7. Assim, obtém-se

$$2\Psi_c = \frac{\omega}{c(1-y^2)n_c B_R} \int_{-z_0}^{z_0} n(z) B_L(z) dz \ll 1, \quad (5.18)$$

onde a pequena dependência em z do fator $1/(1-y^2)$ foi desprezada. A integral (em 5.18) pode ser estimada usando 5.14. Obtém-se

$$2\Psi_c = \frac{\mu_0 I}{\lambda n_c B_R} \bar{n} \sin 2\gamma. \quad (5.19)$$

$$= 10 \lambda^2 (\text{mm}) I (\text{MA}) \bar{n} (10^{14} \text{cm}^{-3}) \sin 2\gamma,$$

onde

$$\bar{n} = \frac{1}{2z_0} \int_{-z_0}^{z_0} n(z) dz \quad (5.20)$$

A equação 5.19 mostra que a

condição 5.18 pode ser facilmente satisfeita para tokamaks não muito grandes, especialmente para valores de γ_0 próximos de $\pi/2$.

No caso dos grandes tokamaks ($I > 1\text{MA}$ e $\bar{n} \sim 1 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$) não será possível satisfazer esta condição (ver Tabela 5.2). Deve ser observado que, devido às limitações da aproximação cilíndrica, a condição 5.18 deve ser satisfeita de forma razoavelmente independente da condição $\gamma_0 = \pi/2$. Em outros termos, a condição $\sin 2\gamma_0 = 0$ sómente poderá ser utilizada em sentido bastante aproximado.

A condição de atividade ótica muito menor que birrefringência linear é obtida diretamente de 5.6 e 5.7, e pode ser escrita na forma

$$B_L \ll \frac{B_T^2}{2B_R} \sin(2\Psi - 2\Psi_x) \quad (5.21)$$

Onde $(2\Psi - 2\Psi_x)$ é o ângulo entre \vec{e}_x e \vec{r} na esfera de Poincaré. Utilizando 5.14, a condição acima pode ser escrita na forma estimativa

$$\bar{\Gamma} = \frac{4.28}{B_t(T)} \left[\frac{I(\text{MA})}{\lambda(\text{m}) B_t(T)} \right] \frac{\cos \gamma_0}{\lambda(\text{mm})} \ll \sin(2\Psi - 2\Psi_x) \quad (5.22)$$

Para $\lambda < 1\text{ mm}$ esta condição é difícil de ser satisfeita (ver Tabela 5.1), sendo praticamente necessário que

$$\Psi = \Psi_x \pm 45^\circ \quad (5.23)$$

Deve ser observado que se esta condição for

Tabela 5.2

Comentário	n_o (10^4 cm^{-3})	λ (mm)	$2\psi_c$ (rad)	T
Cálculos de Craig ⁽⁴⁾ para o Tokamak DITE	0.6	1	2.0 $\bar{n} \sin 2\chi_0$	0.40 $\cos \chi_0$
Experiência de Grolli e Maddaluno ⁽¹⁴⁾ no FT	~ 1.5	0.337	0.45 $\bar{n} \sin 2\chi_0$	0.40 $\cos \chi_0$
Exemplo: Exp. de Hutchinson et al. ⁽⁴³⁾ no ISX-B	~ 0.6	0.381	0.20 $\bar{n} \sin 2\chi_0$	4.0 $\cos \chi_0$
Exemplo: Parâmetros do JET	0.337	4.0 $\bar{n} \sin 2\chi_0$	3.3 $\cos \chi_0$	
Exemplo: Parâmetros dos ITTR's e EPR's	~ 1	0.337	8.0 $\bar{n} \sin 2\chi_0$	3.7 $\cos \chi_0$

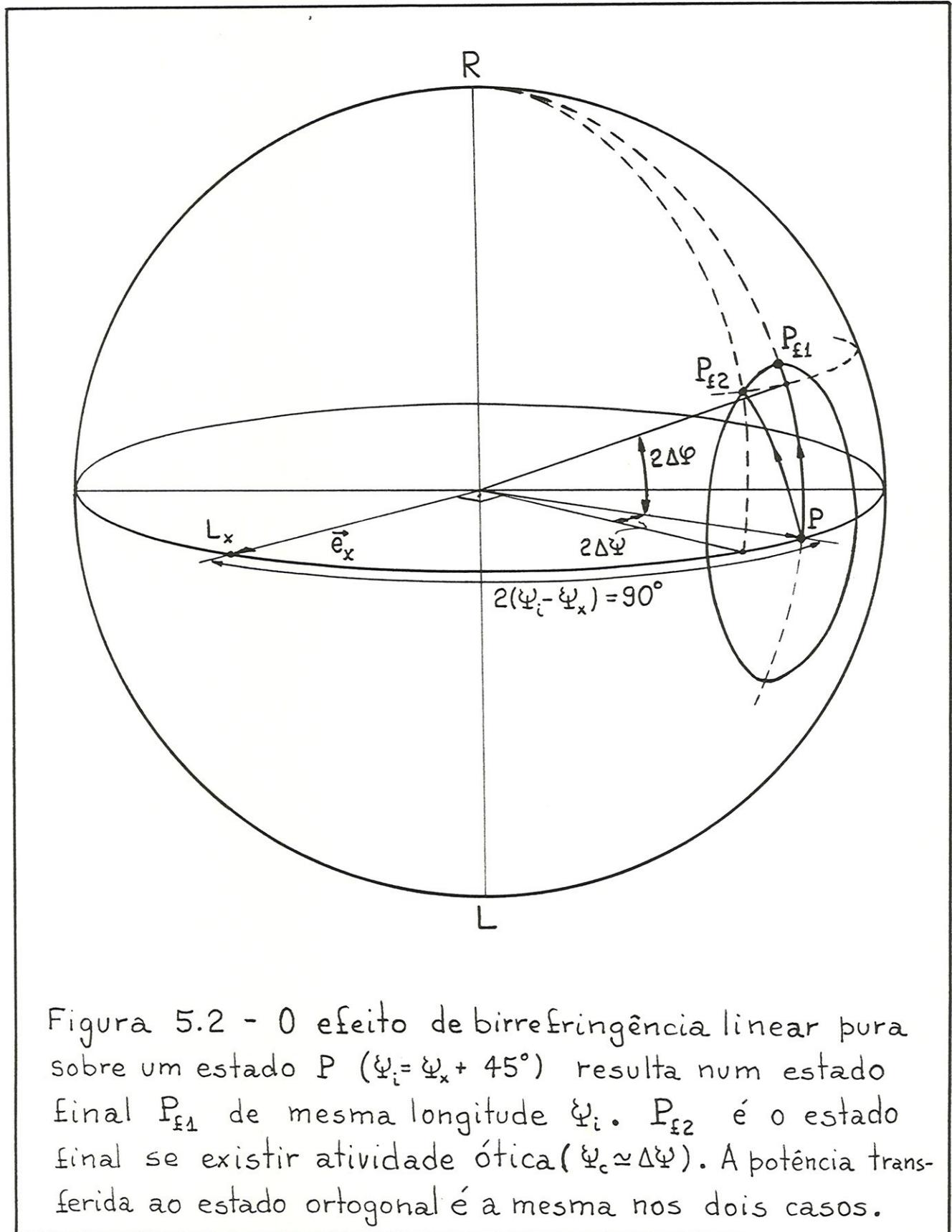
Obs.: Parâmetros α , I e B_t na Tabela 5.1.

estabelecida para o estado inicial e a atividade ótica for desprezível, se mantém constante, sendo assim mantida a condição inicial (ver Figura 5.2).

Craig⁽⁴⁾, a partir de resultados obtidos numericamente, conclui que para polarização inicial da onda orientada em 45° com a direção toroidal, a potência transferida ao estado de polarização ortogonal ao inicial é relacionada somente com a densidade eletrônica, sendo independente da distribuição de corrente. Os cálculos foram efetuados para o Tokamak DITE, com $\lambda = 1 \text{ mm}$. As condições 5.18 e 5.21 podem ser consideradas aceitáveis neste caso (ver Tabela 5.2), para valores de $\cos\chi_0$ próximos de 1. O mesmo pode ser dito a respeito da experiência de Grolli e Maddaluno⁽¹⁴⁾.

As condições 5.18 e 5.21 não serão satisfeitas entretanto, no caso geral. Em particular, no caso dos grandes tokamaks, o efeito de atividade ótica poderá ser suficientemente grande para tornar inviável a interpretação da experiência sem o conhecimento do campo magnético poloidal. Deve ser observado que, além disso, a condição inicial 5.23 é destruída para $2\Psi_c \gtrsim \pi/2$.

E' importante observar que a impossibilidade acima descrita de interpretar o resultado experimental, decorre da limitação básica dos atuais interferômetros polarimétricos que consiste em medir apenas a potência transferida ao estado de polarização ortogonal ao estado inicial. Na esfera de Poincaré, isto



significa que sómente será determinado o ângulo entre o estado final e o estado inicial conhecido P (ver Figura 5.2). Na ausência de um critério seguro para se determinar a trajetória de deslocamento do ponto, a determinação da densidade se torna impossível se o campo poloidal é desconhecido.

d. Diagnóstico do campo poloidal.

A determinação do campo magnético poloidal longitudinal (ver Equação 5.18) pode ser feita a partir do efeito de atividade ótica, supondo-se conhecida a densidade eletrônica. A interpretação da experiência é muito mais simples no caso de atividade ótica pura. Uma vez que, em casos de interesse prático, o efeito de atividade ótica não será muito grande (ver estimativa 5.19), isto é,

$$2\Psi_c \lesssim \pi. \quad (5.24)$$

Resulta que é suficiente impor a condição de birefringência linear muito menor que a atividade ótica. Esta condição, a oposta de 5.21, é satisfeita para

$$B_L \gtrsim \frac{B_T^2}{2B_R} \quad (\text{ou} \quad T \gtrsim 1) \quad (5.25)$$

e

$$\Psi = \Psi_x \quad \text{ou} \quad \Psi = \Psi_x + 90^\circ \quad (5.26)$$

Esta última condição estabelece que a onda seja polarizada na direção paralela ou perpendicular ao campo magnético transversal. Este resultado corresponde aproximadamente ao obtido por De Marco e Segre⁽²⁾, estabelecendo que se a polarização inicial for paralela ou perpendicular ao campo toroidal, o efeito sobre a polarização da onda será uma rotação de Faraday pura. Entretanto, a restrição adicional 5.25 deve ser imposta porque um efeito grande de atividade ótica destrói a condição 5.26 estabelecida inicialmente. Além disso, esta condição só pode ser considerada em sentido aproximado, uma vez que o campo magnético poloidal transversal pode contribuir de forma significativa na determinação da direção do campo magnético transversal ($\Psi_x + \pi/2$).

Capítulo 6. Medida de densidade eletrônica num tokamak por rotação de Faraday.

a. Rotação de Faraday pura em tokamaks.

Uma experiência para medida de densidade eletrônica por rotação de Faraday foi realizada por Tutter et al.⁽³⁴⁾ numa máquina de plasma linear sem eletrodos. Num tokamak, a única proposta definida é a de Craig⁽⁴⁾, que não corresponde à rotação de Faraday conforme mostrado no capítulo anterior. No que segue será considerado um feixe de radiação infravermelha distante se propagando na direção horizontal (direção z na Figura 6.1) e será mostrado que o efeito sobre a polarização da onda é atividade ótica pura dependente apenas do campo magnético toroidal e da densidade eletrônica.

O estado inicial de polarização será suposto linear e as condições 5.1, 5.2 e 5.16 serão admitidas para o tokamak. O efeito de deflexão do feixe por refração não será considerado. Os resultados do Apêndice C-a indicam que para densidades não muito altas e comprimentos de onda suficientemente curtos, a deflexão do feixe será desprezível.

O campo magnético transversal é dado por

$$\vec{B}_T = \vec{B}_P + \vec{B}_V + \vec{B}_{tT} \quad (6.1)$$

onde \vec{B}_{tT} é a componente transversal do campo magnético toroidal.

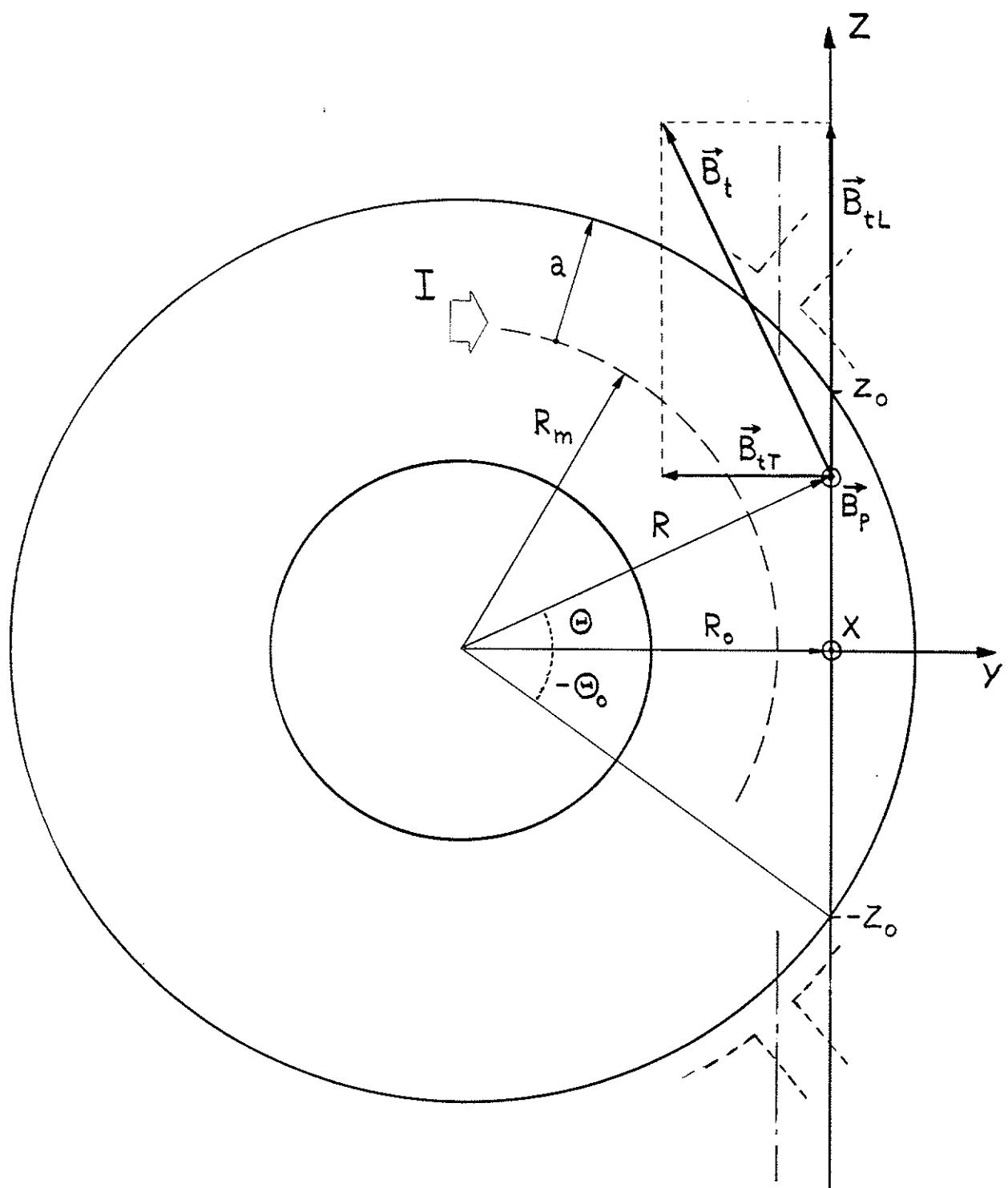


Figura 6.1 - Seção do tokamak no plano médio.

O campo vertical externo \vec{B}_v pode ser desprezado na aproximação cilíndrica, sendo o campo poloidal dado por

$$B_p = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} (R - R_m) = B_{pm} \frac{(R - R_m)}{a} \quad (6.2)$$

onde R e R_m são definidos na Figura 6.1. O campo toroidal é dado por

$$B_t = \frac{B_o R_o}{R} = B_o \cos \Theta \quad (6.3)$$

onde B_o é o valor máximo do campo toroidal ao longo do percurso da onda e R_o o valor correspondente de R . Assim, obtém-se

$$B_T = (B_t^2 \sin^2 \Theta + B_p^2)^{\frac{1}{2}} = B_o \cos \Theta \left[\sin^2 \Theta + \left(\frac{B_p}{B_t} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.4)$$

onde

$$\left(\frac{B_p}{B_t} \right)^2 = \left(\frac{B_{pm}}{B_t} \right)^2 \left(\frac{R - R_m}{a} \right)^2 \ll 1 \quad (6.5)$$

conforme mostra a condição 5.16.

O campo magnético longitudinal é dado por

$$B_L = B_t \cos \Theta = B_o \cos^2 \Theta \quad (6.6)$$

As definições 5.5 e 5.9 mostram que

$$y_L = y_o \cos^2 \Theta \quad (6.7)$$

e

$$y_T^2 = y_o^2 \cos^2 \Theta \left[\sin^2 \Theta + \left(\frac{B_p}{B_t} \right)^2 \right] \quad (6.8)$$

onde

$$y_o = \frac{e B_o}{\omega m} = \frac{B_o}{B_R} \quad (6.9)$$

No que segue, o efeito de atividida ótica será estimado independentemente da birrefringência linear, como recurso

de cálculo. O ângulo de rotação $2\Psi_F$ na esfera de Poincaré é obtido integrando-se a equação 5.4

$$2\Psi_F = \frac{\omega}{c} \int_{-z_0}^{z_0} \frac{XY_L}{(1-y^2)} dz \quad (6.10)$$

A densidade eletrônica pode ser escrita na forma

$$n(R_0, \Theta) = n_0 F(R_0, \Theta) \quad (6.11)$$

onde n_0 é a densidade para $\Theta=0$ e $R=R_0$. Utilizando as relações 5.1, 5.2, 6.7 em 6.10, obtém-se

$$\Psi_F \approx 26.3 B_0(T) \lambda^2 (\text{mm}) R_0 (\text{m}) n_0 (10^{14} \text{cm}^{-3}) I_F(R_0) \quad (6.12)$$

onde

$$I_F(R_0) = \int_{-\Theta_0}^{\Theta_0} F(R_0, \Theta) d\Theta \quad (6.13)$$

A integral pode ser estimada por meio de uma função simples tal como

$$F(R_0, \Theta) = \cos \frac{\pi}{2\Theta_0} \Theta \quad (6.14)$$

uma vez que $F(R_0, 0) = 1$ e $F(R_0, \Theta_0) = 0$. Obtem-se

$$I_F(R_0) \approx \frac{4\Theta_0}{\pi} = \frac{\Theta_0 (\text{graus})}{45} \lesssim 1 \quad (6.15)$$

Para tokamaks não muito grandes, resulta assim de 6.12 que

$$\Psi_F \lesssim \pi \quad (6.16)$$

para $\lambda < 1 \text{ mm}$. Em qualquer caso, o resulta-

do vale para comprimentos de onda suficientemente curtos.

O deslocamento infinitesimal na esfera de Poincaré devido à birrefringência linear é dado em módulo por (equação 5.3)

$$2d\alpha_{bo} = \frac{\omega}{2c(1-y^2)} XY_T^2 \sin \hat{PL}_x dz \quad (6.17)$$

onde \hat{PL}_x é o ângulo entre o estado de polarização \vec{F} e o estado L_x (ver Figura 4.1). Um ângulo α_b será definido por

$$2\alpha_b = \frac{\omega}{2c} \int_{-z_0}^{z_0} XY_T^2 dz \quad (6.18)$$

Uma vez que o deslocamento na esfera de Poincaré é uma grandeza vetorial, resulta da desigualdade triangular que o ângulo de deslocamento real α_{bo} será

$$\alpha_{bo} < \int_{-z_0}^z d\alpha_{bo} \quad (6.19)$$

A condição

$$\sin \hat{PL}_x \approx 0 \quad (6.20)$$

Será suposta como condição inicial, o que equivale a uma polarização inicial linear e paralela ou perpendicular ao campo magnético toroidal transversal. Neste caso, a comparação entre 6.17, 6.18 e 6.19 mostra que

$$\alpha_{bo} \ll \alpha_b \quad (6.21)$$

pode ser admitida pelo menos como razoavelmente satisfeita. Deve ser observado que a atividade ótica destrói a condição inicial

6.20 ao longo do percurso da onda, mas não o suficiente para invalidar 6.21 como condição razoável.

As equações 6.7, 6.8 e as condições 5.2 e 5.16 mostram que

$$\frac{1}{2} \frac{y_T^2}{y_L} = \frac{1}{2} y_0 \left[\sin^2 \Theta + \left(\frac{B_P}{B_t} \right)^2 \right] \ll 1 \quad (6.22)$$

é uma condição pelo menos razoavelmente satisfeita no pior caso que ocorre na borda da coluna de plasma. Neste caso, X tende a se anular (com a densidade) e as contribuições para as integrais 6.10 e 6.18 serão comparativamente menores. Assim resulta

$$\alpha_b \ll \Psi_F \quad (6.23)$$

A comparação deste resultado com 6.21 e 6.16 mostra que o efeito de birrefringência linear é completamente desprezível. O efeito sobre a polarização da onda será assim uma rotação de Faraday pura dada pela equação 6.10 ou 6.12. Uma melhor aproximação que 6.12 pode ser escrita como

$$\Psi_F = \frac{26.3 B_0(T) \lambda^2 (\text{mm}) R_0(\text{m})}{(1 - y_0^2)} n_0 (10^{14} \text{cm}^{-3}) I_F(R_0) \quad (6.24)$$

A determinação do perfil de densidade depende de medidas de Ψ_F para diversos valores de R_0 . Para um tokamak com simetria axial, o procedimento de inversão para determinação de $n_0(R_0)$ seria simples e preciso. Isto porque em 6.24, $I_F(R_0)$ deve depender muito pouco da forma exata do perfil de densidade. Uma primeira aproximação para

$n_o(R_o)$ seria obtida diretamente de 6.24, utilizando para $I_F(R_o)$ em 6.13, uma função simples tal como 6.14. O resultado permitiria uma reavaliação de $I_F(R_o)$ e nova determinação de $n_o(R_o)$. Uma única reavaliação de $I_F(R_o)$ provavelmente seria suficiente.

Existem limitações práticas na variação do parâmetro R_o . Entretanto, para um determinado valor de R_o a experiência geralmente será possível.

A grande vantagem que deve ser destacada no método proposto para medir densidade é o fato que resultam grandes ângulos de rotação de Faraday para comprimentos de onda relativamente mais curtos. Considerando por exemplo, $B_o = 4T$, $R_o = 0.5m$ e $n_o = 1 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$, obtém-se de 6.12

$$\Psi_F \approx 53 \lambda^2 (\text{mm})$$

Assim, mesmo para comprimentos de onda abaixo de 0.1 mm resultam grandes ângulos de rotação de Faraday. O efeito de deflexão no feixe por refração (ver equação C4) é completamente eliminado neste caso.

b. Medida de densidade no Tokamak TBR.

A medida de densidade no Tokamak TBR⁽¹⁹⁾ pode ser feita pelo método proposto, utilizando as duas janelas para diagnósticos indicadas na Figura 6.1. O percurso da onda no caso passa pelo centro geométrico da coluna de plasma. Os principais parâmetros do Tokamak são reunidos na Tabela 6.1. Para $\lambda = 1 \text{ mm}$, resulta

$$X \approx 0.009, \quad y_0^2 \lesssim 0.0022$$

$$\left(\frac{B_{pm}}{B_t} \right)^2 \approx 0.01 \quad \text{e} \quad \frac{y_T^2}{2Y_L} \lesssim 0.01$$

Assim, as condições 5.1, 5.2, 5.16 e 6.22 são completamente satisfeitas.

O ângulo de rotação de Faraday é dado por 6.24 onde

$$I_F(R_0) = \int_{-\Theta_0}^{\Theta_0} f(R_0, \Theta) d\Theta \quad (6.25)$$

O perfil de densidade pode ser admitido na forma usual

$$n(R) = n_m \left[1 - \frac{(R - R_m)^2}{a^2} \right]^l \quad (6.26)$$

onde n_m é a máxima densidade no tokamak. Da Figura 6.1, obtém-se

$$f(R_0, \Theta) = \left[1 - \frac{R_0^2}{a^2} \left(\sec \Theta - \frac{R_m}{R_0} \right)^2 \right]^l \frac{n_m}{n_0} \quad (6.27)$$

Tabela 6.1. Parâmetros do Tokamak TBR.

Raio maior	R_m	0.30 m
Raio do plasma	a	0.08 m
Corrente de plasma	I	≤ 20 kA
Campo toroidal	B_t	≤ 0.5 T
Campo poloidal	B_p	≤ 0.05 T
Densidade eletrônica	n_m	$\sim 10^{13} \text{ cm}^{-3}$
Θ máximo	Θ_0	$\sim 38^\circ$

onde

$$\frac{n_0}{n_m} = \left[1 - \frac{(R_0 - R_m)^2}{a^2} \right]^l \quad (6.28)$$

Os valores de I_F calculados numericamente são apresentados na Tabela 6.2, para diversos valores de R_0 e l . A dependência relativamente fraca com a forma exata do perfil de densidade é mostrada. A estimativa 6.15 é apresentada na Tabela para comparação.

Para $n_0 = 0.1 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$, $R_0 = R_m$ e $l = 1$, obtém-se

$$\Psi_F = 24.7^\circ$$

o que mostra que a medida é perfeitamente viável no Tokamak TBR. Medidas para diferentes valores de R_0 , que permitiriam determinar l não são possíveis devido às dimensões e geometria das janelas de diagnóstico. Entretanto deve ser observado que a interferometria de microondas sofre a mesma limitação neste tokamak. Por outro lado, a tecnologia de radiação infravermelha distante é mais acessível que a de microondas, no caso.

Tabela 6.2. Valores calculados para $I_F(R_o)$

R_o (cm)	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$	$\ell = 4$	$\ell = 5$	$\frac{Eq.}{6.15}$
30	1.09	0.98	0.91	0.86	0.82	0.84
31	0.97	0.85	0.78	0.72	0.68	0.79
32	0.87	0.75	0.67	0.61	0.57	0.73
33	0.77	0.65	0.58	0.52	0.48	0.66
34	0.67	0.56	0.49	0.44	0.41	0.59
35	0.56	0.46	0.40	0.36	0.33	0.51
36	0.45	0.37	0.32	0.28	0.26	0.41
37	0.31	0.25	0.22	0.19	0.18	0.29

Capítulo 7. Conclusões.

a. Discussão de resultados.

O efeito da atenuação foi incluído em primeira ordem na equação que descreve, na esfera de Poincaré, a evolução da polarização da onda no meio. O resultado mostra explicitamente o fato que o deslocamento do estado de polarização na esfera de Poincaré é de ordem ω_c/ω em relação ao deslocamento devido à própria birrefringência elíptica. No caso de um plasma de tokamak, o efeito da atenuação não é significativo para radiação infravermelha devido ao fato que o caminho ótico e ω_c/ω são pequenos. Expressões explícitas simples para os parâmetros da equação só foram obtidas para o caso $X \ll 1$. Entretanto as equações 3.18 e 3.19 determinam completamente tais parâmetros no caso geral. Assim, as únicas restrições à validade da equação são as inerentes ao modelo utilizado (ver seção 2.2), atenuação pequena e meio lentamente variável.

A teoria para birrefringência linear e atividade ótica no plasma magnetizado foi desenvolvida em estreita analogia com a de um cristal birrefringente e óticamente ativo. Entretanto, o critério 4.13 para tornar isotrópica a parte simétrica do tensor dielétrico inverso, não corresponde exatamente ao que é derivado⁽¹⁸⁾

no método de superposição em ótica de cristais. Em lugar de mostrar a equivalência dos critérios (até ordem X^2) pareceu mais instrutivo mostrar a equivalência dos resultados finais. Isto é, foi demonstrado que o efeito de birrefringência elíptica é corretamente obtido até ordem X^2 a partir dos efeitos de birrefringência linear e atividade ótica, utilizando o método de superposição. O mesmo foi demonstrado em primeira ordem em X e Z para o dicroismo elíptico, com relação ao dicroismo linear e circular.

Em resumo, a mesma equação para birrefringência elíptica com atenuação é obtida diretamente (Capítulo 3) ou pelo método de superposição (Capítulo 4). Isto mostra a consistência da teoria desenvolvida para birrefringência linear e atividade ótica.

Do ponto de vista mais geral de propagação de uma onda no plasma, a teoria simples desenvolvida para birrefringência linear e atividade ótica é bastante limitada. Exceto nos casos de longos caminhos óticos, ela se aplica a uma reduzida faixa de frequências para as quais $X \ll 1$, mas suficientemente grande para que os efeitos sejam significativos. Entretanto, os resultados são importantes para diagnósticos num plasma, uma vez que esta reduzida faixa de frequências é justamente a de interesse.

Os efeitos infinitesimais de birrefringência linear e atividade ótica

não podem ser integrados separadamente. Resulta que para se obter o efeito total de birrefringência elíptica, o método aqui desenvolvido é equivalente aos utilizados por De Marco e Segre^(2,5,6) e Craig⁽⁴⁾. Entretanto, o método simplifica bastante a análise das experiências e ainda permite avaliar de maneira simples e direta os erros cometidos ao se desprezar um ou outro efeito.

Conforme mostrado no Capítulo 5, as principais conclusões de De Marco e Segre, e Craig sobre a polarimetria de infravermelho num tokamak são obtidas de maneira mais simples e em formas mais abrangentes. Um outro exemplo da simplicidade do método desenvolvido é a análise da propagação da onda em um tokamak para um percurso horizontal. É mostrado que o efeito sobre a polarização da onda é uma rotação de Faraday pura relacionada somente com a densidade de plasma e com o campo magnético toroidal. Assim, resulta um método de medida que do ponto de vista teórico pode ser considerado equivalente à técnica usual de interferometria. Do ponto de vista prático, existem dificuldades relacionadas com a geometria das janelas do tokamak. Entretanto, em alguns casos a experiência pode ser viável e de interesse, como no caso do tokamak TBR.

A utilização de microondas para medir densidade eletrônica num tokamak pequeno é satisfatória, mas se torna in-

dequada para tokamaks grandes e de altas densidades (ver Equações 5.1 e C4). Nestes casos deve-se utilizar radiação infravermelha distante para interferometria. Isto significa que pode ser mais interessante e promissor o domínio de técnicas de produção e detecção de radiação infravermelha distante do que microondas. Este aspecto deveria ser levado em consideração se for o caso de se decidir realizar uma experiência tal como a proposta acima em um tokamak pequeno.

b. Alguns desenvolvimentos possíveis.

A expressão 5.7 (ou 5.18) para a rotação de Faraday é bem conhecida (o termo $(1-y^2)$ no denominador geralmente não é considerado). O que geralmente nem sequer é mencionado é o efeito de birrefringência linear descrito pela equação 5.6. Este efeito, proporcional a B_T^2 e λ^3 pode se tornar significativo em alguns casos. As equações 5.6 e 5.7 podem ser utilizadas para investigar a possibilidade de se ter um efeito significativo de birrefringência linear, no caso de outros tipos de plamas, além de tokamaks. Os resultados podem ser de interesse para diagnósticos.

A variação no estado de polarização influí na medida usual de densidade, baseada em interferometria. Véron⁽⁷⁾ estuda o problema, considerando que o efei-

to sobre a polarização da onda é uma rotação de Faraday pura. Um estudo do problema considerando um eventual efeito de birefringência linear é certamente de interesse devido à importância da medida interferométrica de densidade.

O efeito de atenuação da onda pode se tornar significativo no caso de caminhos ópticos muito longos. A utilização da equação 3.8 pode ser sugerida para investigar estes casos.

Apêndice A. Propagação de uma onda eletromagnética num meio condutor anisotrópico.

As densidades de carga e corrente livres (ρ e \vec{J}) podem ser formalmente eliminadas das equações de Maxwell definindo-se uma densidade de polarização \vec{P}_L pelas relações⁽³⁵⁾

$$\frac{\partial \vec{P}_L}{\partial t} = \vec{J} \quad \text{e} \quad \nabla \cdot \vec{P}_L = -\rho \quad (\text{A1})$$

A compatibilidade da definição é assegurada pela condição de continuidade de carga. Assim, tem-se para um meio condutor

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (\text{A2}) \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{A4})$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{A3}) \quad \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{A5})$$

onde

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} + \vec{P}_L \quad \text{e} \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

e, \vec{P} e \vec{M} são as densidades de polarização e magnetização usuais. Na ausência de propriedades dielétricas e magnéticas usuais ($\vec{P} = \vec{M} = 0$),

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad \text{e} \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_L \quad (\text{A6})$$

A lei de Ohm é admitida numa forma linear geral, isto é

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \quad (\text{A7})$$

onde σ é o tensor de condutividade.

No que segue, será considerada uma onda plana homogênea na frequência angular ω e se propagando na direção \vec{x} . O fator de fase da onda é considerado da forma

$$\exp(i\omega t - \vec{\gamma} \cdot \vec{r}_s) \quad (A8)$$

Onde \vec{r}_s é a coordenada de posição e $\vec{\gamma}$ a constante de propagação.

Para uma onda plana homogênea⁽²⁵⁾, as partes real e imaginária de $\vec{\gamma}$ são paralelas e as equações de Maxwell podem ser reescritas na forma⁽³⁶⁾

$$\vec{\gamma} \cdot \epsilon_0 \vec{D} = 0 \quad (A9)$$

$$\vec{\gamma} \times \vec{E} = i\omega \mu_0 \vec{H} \quad (A11)$$

$$\vec{\gamma} \cdot \mu_0 \vec{H} = 0 \quad (A10)$$

$$\vec{\gamma} \times \vec{H} = -i\omega \vec{D} \quad (A12)$$

Utilizando as equações A1, A6 e A7, obtém-se

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad \text{e} \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{K} \cdot \vec{E} \quad (A13)$$

onde

$$\vec{K} = 1 - \frac{i\vec{\gamma}}{\epsilon_0 \omega} \quad (A14)$$

é o tensor dielétrico equivalente^(21,22)

Uma equação de onda para o meio pode ser obtida das equações A11, A12 e A13, na forma

$$\vec{N} \times (\vec{N} \times \vec{E}) + \vec{K} \cdot \vec{E} = 0 \quad (A15)$$

onde

$$\vec{N} = -\frac{ic}{\omega} \vec{\gamma} \quad (A16)$$

é o índice de refração vetorial complexo. A relação $(\epsilon_0 \mu_0)^{-\frac{1}{2}} = c$ foi utilizada na obtenção da equação A15.

Uma expressão para a conservação da energia pode ser obtida diretamente das equações de Maxwell. Multiplicando-se A4 e A5 por \vec{H} e \vec{E} respectivamente, obtém-se⁽³⁶⁾

$$Q = -\nabla \cdot \vec{S} = \left[\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{H} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right] \quad (\text{A17})$$

onde $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ é o vetor de Poynting. Da definição de divergência resulta que Q é a potência por unidade de volume que entra num volume infinitesimal. Em regime estacionário o valor médio de Q deve portanto ser a potência média dissipada no meio por unidade de volume.

O valor médio \bar{Q} é obtido diretamente de A17, sendo entretanto necessário considerar explicitamente os campos reais

$$\vec{E} = \operatorname{Re} \breve{E} = \frac{1}{2} (\breve{E} + \breve{E}^*) \quad \text{e} \quad \vec{H} = \operatorname{Re} \breve{H} = \frac{1}{2} (\breve{H} + \breve{H}^*)$$

onde \breve{E} e \breve{H} são os campos complexos. Expressões análogas são válidas para os campos \vec{D} e \vec{B} . Considerando os fatores de fase A8 e as relações A13, obtém-se

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{i\omega\mu_0}{2} (\breve{H} - \breve{H}^*) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{i\omega\epsilon_0}{2} (\breve{E} - \breve{E}^*)$$

Os termos proporcionais a $\exp(\pm 2i\omega t)$ se anulam em média e obtém-se para o valor médio de A17

$$\bar{Q} = \frac{i\omega\epsilon_0}{4} (\breve{E}^* \cdot \breve{K} \cdot \breve{E} - \breve{E} \cdot \breve{K}^* \cdot \breve{E}^*) \quad (\text{A18})$$

Indicando por \breve{K}^t o adjunto de \breve{K} , tem-se

$$\breve{E}^* \cdot \breve{K}^t \cdot \breve{E} = (\breve{E} \cdot \breve{K}^* \cdot \breve{E}^*)^t = \breve{E} \cdot \breve{K}^* \cdot \breve{E}^*$$

onde t indica transposição. Substituindo em

A18, resulta^(35, 37, 38)

$$\bar{Q} = \frac{i\omega\epsilon_0}{4} \vec{E}^* \cdot (\check{\kappa} - \check{\kappa}^\dagger) \cdot \vec{E} \quad (\text{A19})$$

Assim, a dissipação de energia é diretamente relacionada com a parte anti-hermitiana de $\check{\kappa}$. A mesma conclusão vale a respeito do tensor dielétrico inverso $\check{\kappa}^{-1}$. Substituindo a relação $\vec{E} = \epsilon_0^{-1} \check{\kappa}^{-1} \vec{D}$ em A18, obtém-se de maneira análoga

$$\bar{Q} = \frac{i\omega}{4\epsilon_0} \vec{D}^* \cdot (\check{\kappa}^{-1\dagger} - \check{\kappa}^{-1}) \cdot \vec{D} \quad (\text{A20})$$

Separando $\check{\kappa}^{-1}$ em partes simétrica $\check{\kappa}_s^{-1}$ e anti-simétrica $\check{\kappa}_A^{-1}$,

$$\check{\kappa}^{-1\dagger} = (\check{\kappa}_s^{-1} + \check{\kappa}_A^{-1})^\dagger = \check{\kappa}_s^{-1*} - \check{\kappa}_A^{-1*}$$

e assim

$$\check{\kappa}^{-1\dagger} - \check{\kappa}^{-1} = -2\text{Im } \check{\kappa}_s^{-1} - 2\text{Re } \check{\kappa}_A^{-1} \quad (\text{A21})$$

Assim, resulta que a dissipação de energia (atenuação da onda) é descrita pelas partes imaginária simétrica e real anti-simétrica do tensor dielétrico inverso.

Apêndice B. Esfera de Poincaré.

Uma onda plana homogênea será considerada, no que segue, se propagando na direção-z com fator de fase dado por A8. As componentes do campo elétrico podem ser escritas na forma

$$\ddot{E}_x = E_1 e^{i\alpha} e^{i\phi} \quad \text{e} \quad \ddot{E}_y = E_2 e^{i\beta} e^{i\phi} \quad (\text{B1})$$

onde $\phi = \omega t - \text{Im}\vec{\gamma} \cdot \vec{r}_s$, E_1 e E_2 são reais positivos que podem depender de \vec{r}_s e, α e β são constantes reais. As componentes reais E_x e E_y dos campo elétrico podem ser escritas na forma

$$E_x = E_1 \sin \theta \quad \text{e} \quad E_y = E_2 \sin(\theta + \delta) \quad (\text{B2})$$

onde $\theta = \phi + \alpha + \pi/2$ e $\delta = \beta - \alpha$. Eliminando θ das equações, obtém-se

$$\frac{E_x^2}{E_1^2} - 2 \frac{E_x E_y}{E_1 E_2} + \frac{E_y^2}{E_2^2} = \sin^2 \delta \quad (\text{B3})$$

onde E_1 , E_2 e δ são constantes para z fixado. A equação B3 descreve uma elipse (Figura B1) com parâmetros Ψ e Φ dados por (39,40)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\Psi &= \operatorname{tg} 2\gamma_0 \cos \delta & \operatorname{tg} 2\Phi &= -\sin 2\Psi \operatorname{tg} \delta \\ \text{ou} \quad \cos 2\gamma_0 &= \cos 2\Phi \cos 2\Psi & \sin 2\gamma_0 &= -\frac{\sin 2\Psi}{\operatorname{sen} \delta} \end{aligned} \quad (\text{B4})$$

onde $\operatorname{tg} \gamma_0 = E_2/E_1$. O ângulo Ψ é a inclinação do semieixo maior a da elipse (Fig. B1) e

$$\operatorname{tg} \Phi = \pm \frac{b}{a} \quad (\text{B5})$$

onde b é o semieixo menor. O sinal positivo é escolhido para campo elétrico girando no sentido antihorário quando a onda é observada se

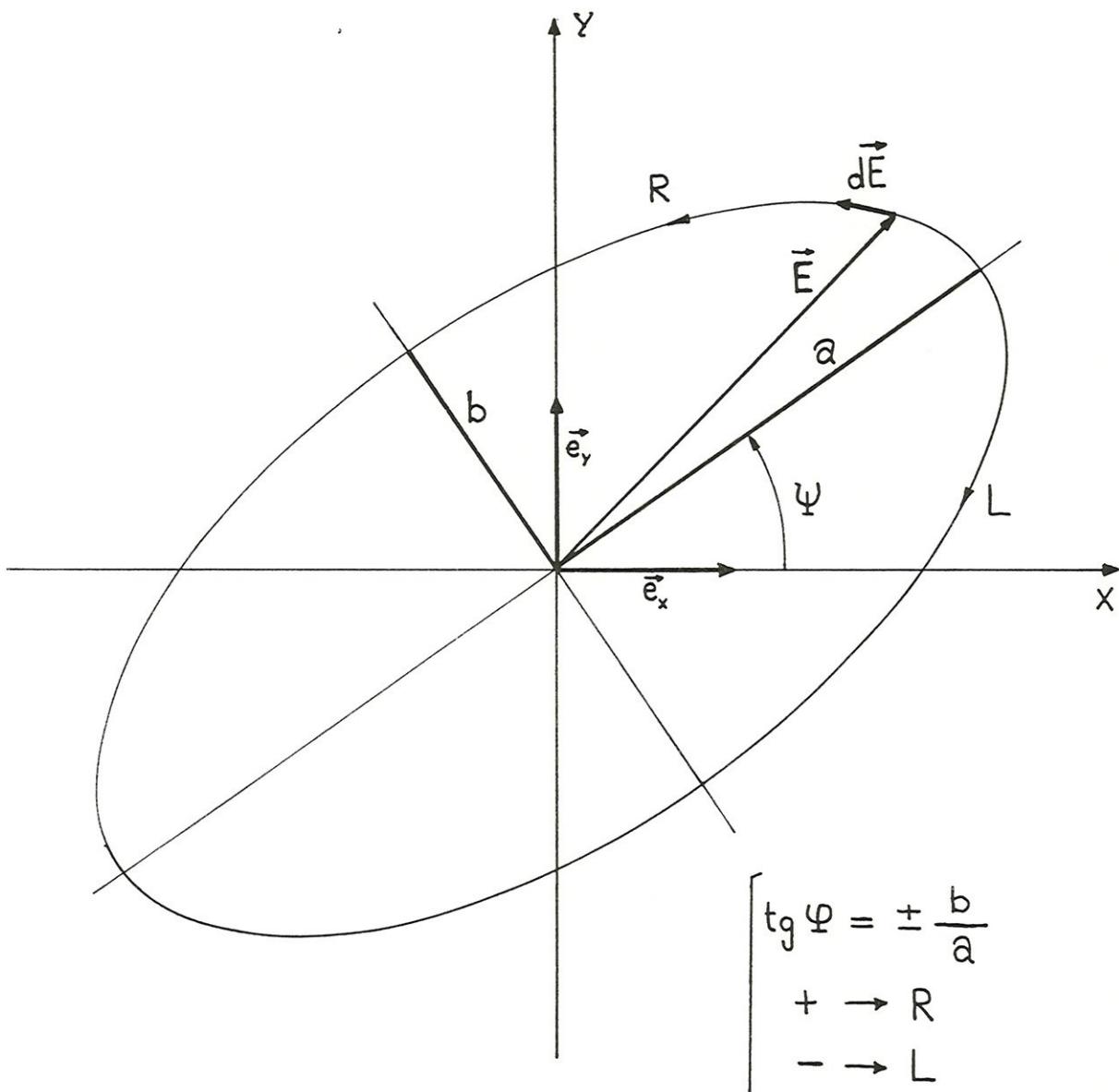


Figura B1 - Elipse de polarização e a definição dos ângulos Ψ e φ . Os sentidos de rotação do campo elétrico para ondas R e L estão indicados por setas na elipse.

aproximando. Este é um estado elipticamente polarizado direito (R) conforme a convenção do IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineering). O sinal negativo corresponde a um estado elipticamente polarizado esquerdo (L). A convenção do IEEE é oposta à da ótica clássica.

O sentido de rotação do campo elétrico pode ser obtido de $d\vec{E} \times \vec{E}$, onde $d\vec{E}$ é a variação de \vec{E} num intervalo de tempo dt . Considerando por simplicidade $\theta=0$ nas equações B2,

$$\vec{E} = E_z \sin \delta \hat{e}_y \quad \text{e} \quad d\vec{E} = \omega (E_x \hat{e}_x + E_z \cos \delta \hat{e}_y) dt$$

e assim

$$d\vec{E} \times \vec{E} = \omega E_x E_z \sin \delta dt \hat{e}_z \quad (\text{B6})$$

Para rotação anti-horária, $d\vec{E} \times \vec{E}$ é oposto à direção de propagação (\hat{e}_z). Assim, de acordo com a convenção IEEE,

$$\sin \delta < 0 \quad (\text{estado R}) \quad (\text{B7})$$

para um estado elipticamente polarizado R. No caso

$$\sin \delta > 0 \quad (\text{estado L}) \quad (\text{B8})$$

deve-se ter um estado elipticamente polarizado L.

O coeficiente de polarização transversal é definido (20) a partir das componentes complexas do campo

$$\check{R} = \frac{\check{E}_x}{\check{E}_y} \quad (\text{B9})$$

ou

$$\check{R} = \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma_0 e^{i\delta}} \quad (\text{B10})$$

onde foram substituídas as equações B1 e a definição de γ_0 .

E' conveniente obter \check{R} em função dos ângulos Ψ e φ . Resolvendo para $\operatorname{tg} \delta_0$, a equação

$$\operatorname{tg} 2\delta_0 = \frac{2 \operatorname{tg} \delta_0}{1 - \operatorname{tg}^2 \delta_0}$$

obtém-se

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \delta_0} = \frac{\operatorname{tg} 2\delta_0}{\sec 2\delta_0 - 1}$$

e resulta da equação B9 que

$$\check{R} = \frac{(\cos \delta_0 \operatorname{tg} 2\delta_0) \cos 2\delta_0 - i \sin \delta_0 \sin 2\delta_0}{(1 - \cos 2\delta_0)}$$

E utilizando as relações B4, obtém-se

$$\check{R} = \frac{\sin 2\Psi \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi}{(1 - \cos 2\Psi \cos 2\varphi)}$$

Substituindo as funções de 2φ e 2Ψ em termos de funções simples de φ e Ψ , obtém-se após fatorar os termos

$$\check{R} = \frac{(\operatorname{tg} \Psi + i \operatorname{tg} \varphi)(1 + i \operatorname{tg} \Psi \operatorname{tg} \varphi)}{\operatorname{tg}^2 \Psi + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{i \operatorname{tg} \Psi \operatorname{tg} \varphi + 1}{\operatorname{tg} \Psi - i \operatorname{tg} \varphi} \quad (\text{BII})$$

Na esfera de Poincaré^(18,40,41) cada estado de polarização é univocamente representado por um ponto de latitude 2φ e longitude 2Ψ (Fig. B2). Os estados linearmente polarizados são representados no equador da esfera de Poincaré, enquanto que seus polos superior e inferior representam respectivamente os estados circularmente polarizados R e L.

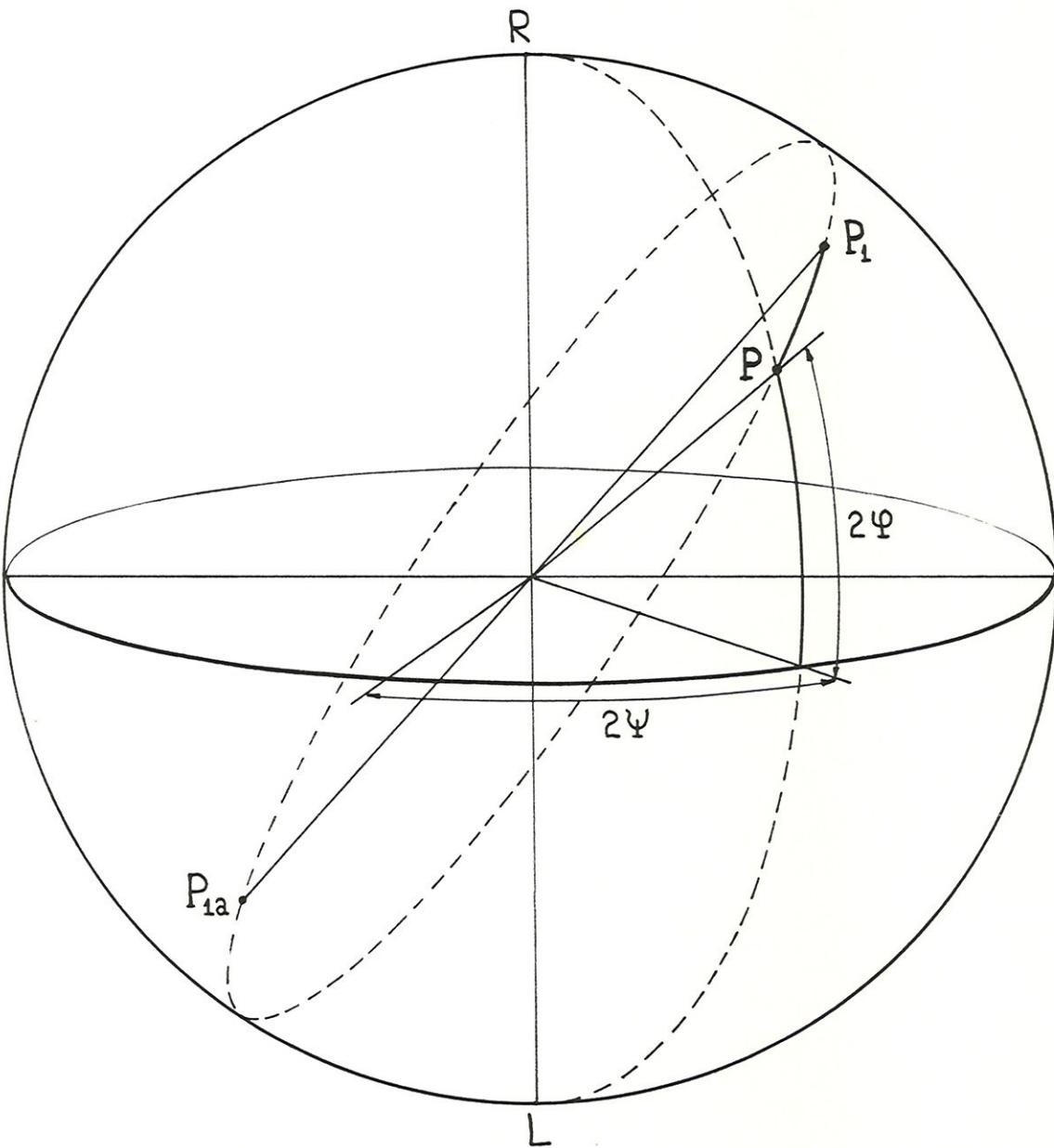


Figura B2 - Esfera de Poincaré. Um estado arbitrário de polarização P pode ser decomposto em estados ortogonais arbitrários P_1 e P_{1a} .

Estados ortogonais são representados por pontos opostos na esfera de Poincaré. Um estado arbitrário de polarização P pode ser decomposto em estados ortogonais P_1 e P_{1a} (Fig.B2) e a fração da intensidade I de P no estado P_1 é dada por⁽¹⁸⁾

$$\frac{I_1}{I} = \cos^2 \frac{1}{2} \hat{P} \hat{P}_1 \quad (\text{B12})$$

Onde, $\hat{P} \hat{P}_1$ é o ângulo entre P e P_1 na esfera de Poincaré.

Estados característicos num meio homogêneo são estados que se propagam invariantes no meio. Tais estados serão representados por pontos (P_1 e P_2) fixos na esfera de Poincaré para um meio homogêneo. Um estado arbitrário de polarização P pode ser decomposto em estados característicos e as intensidades das componentes serão dadas por B12:

$$\frac{I_1}{I} = \cos^2 \frac{1}{2} \hat{P} \hat{P}_1 \quad \frac{I_2}{I} = \cos^2 \frac{1}{2} \hat{P} \hat{P}_2 \quad (\text{B13})$$

O estado P (não característico) será representado por um ponto P móvel na esfera de Poincaré, conforme a onda se propaga no meio. Na ausência de atenuação, a soma das intensidades B13 deve ser sempre unitária, e assim $\hat{P} \hat{P}_1 + \hat{P} \hat{P}_2 = \pi$, uma vez que P é um ponto móvel. Assim, os estados característicos de propagação, não ausência de atenuação, serão estados ortogonais.

Quando existe atenuação, os estados característicos não serão ortogonais. Para propagação num meio magneto-iônico, pode ser mostrado⁽²⁵⁾ que as elipses de polarização correspondentes a estados característicos são imagens

especulares uma da outra, sendo que o plano de simetria forma 45° com o campo magnético transversal. Assim, se $2\Psi_1, 2\Psi_1$ e $2\Psi_2, 2\Psi_2$ são as coordenadas dos estados característicos na esfera de Poincaré, resulta que

$$\Psi_2 = -\Psi_1 \quad (B14)$$

uma vez que as elipses tem mesma forma e giram em sentidos opostos. Além disso, a direção de simetria forma um ângulo ($\beta \pm \pi/4$) com o eixo-y (Figura B3) e assim

$$2\Psi_1 = 2\Psi + \delta\Psi \quad \text{e} \quad 2\Psi_2 = 2\Psi + \frac{\pi}{2} - \delta\Psi \quad (B15)$$

onde $\Psi = \beta$ ou $\Psi = \beta + \pi/2$, e $\delta\Psi$ um valor que depende da atenuação.

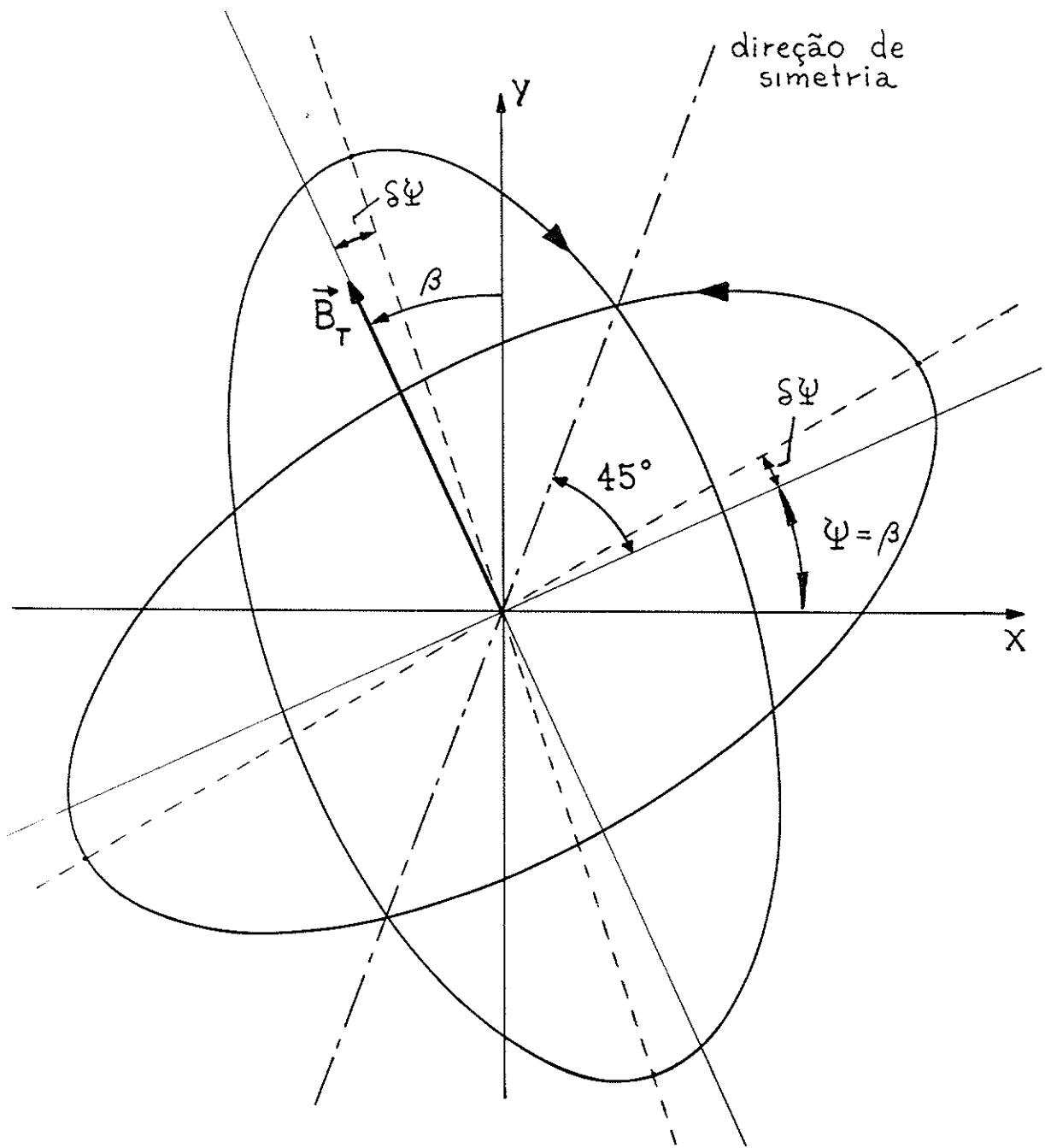


Figura B3 - As elipses de polarização são imagens espelho uma da outra. \vec{B}_T é a componente transversal do campo magnético.

Apêndice C. Meio não homogêneo.

a. Efeito de refração na deflexão do feixe de radiação infravermelha.

A deflexão de um feixe de radiação numa coluna cilíndrica de plasma foi estudada por Shmoys⁽⁴²⁾ em aproximação de ótica geométrica. Para um perfil parabólico simples de densidade eletrônica, ele obtém que a deflexão máxima Θ_0 do feixe de radiação (ver Figura C1) é dada com boa aproximação por

$$\operatorname{sen}\Theta_0 \approx V_0 \quad (C1)$$

onde V_0 é o valor máximo de $V(r)$ definido por

$$\mu^2 = 1 - V(r) \quad (C2)$$

O campo magnético não é considerado no trabalho de Shmoys, de forma que a relação de dispersão é dada por (Equação 2.50 com $V=0$)

$$\mu^2 = 1 - X \quad \text{ou} \quad V(r) = X \quad (C3)$$

Assim, utilizando 5.1, resulta que a deflexão máxima do feixe é dada por

$$\operatorname{sen}\Theta_0 \approx \Theta_0 = 0.09 n_0 (10^{14} \text{cm}^{-3}) \lambda^2 (\text{mm}) \quad (C4)$$

onde n_0 é a densidade eletrônica máxima do perfil parabólico.

Véron⁽⁷⁾, a partir do resultado acima e considerações sobre geometria e estabilidade mecânica para medida interferomé-

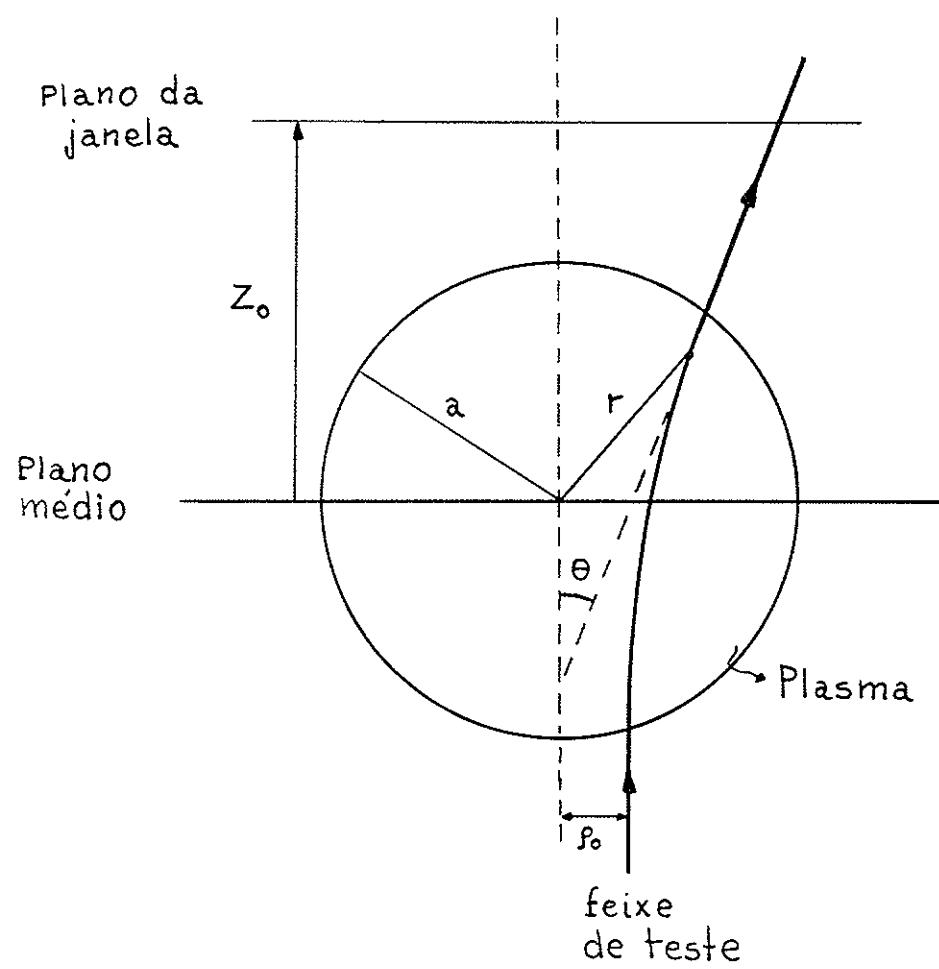


Figura C1 - Deflexão do feixe por refração. O valor máximo de θ ocorre para um valor intermedio de p_0 entre 0 e a .

trica, mostra que a faixa de valores aceitáveis para o comprimento de onda é dada por

$$\frac{0.41}{[a(\text{cm}) n_0 (10^{14} \text{cm}^{-3})]^{\frac{1}{2}}} \lesssim \lambda (\text{mm}) \lesssim \frac{2.5}{[Z_0(\text{cm}) n_0^2 (10^{14} \text{cm}^{-3})]^{\frac{1}{3}}} \quad (C5)$$

onde a é o raio do plasma e Z_0 a distância do plano médio do tokamak até o plano da janela para interferometria (Figura C1). O limite superior em C5 é devido a efeito de refração e mostra a inconveniência de microondas no caso de tokamaks grandes. Para radiação infravermelha distante ($\lambda < 1 \text{ mm}$) a deflexão do feixe é pequena e perfeitamente aceitável para interferometria.

Os resultados de Shmoys e Véron se baseiam na relação de dispersão D3, sendo de interesse mostrar que esta relação ainda é satisfatória quando se considera a presença do campo magnético estático. Isto será feito no que segue.

A partir da equação 2.50, obtém-se em primeira ordem em X

$$N_1^2 - N_2^2 = \frac{XY_L}{(1-Y^2)} (Q_2 - Q_1) \quad (C6)$$

$$= \frac{XY_T^2}{(1-Y^2)} \left[1 + \left(\frac{2Y_L}{Y_T} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (C7)$$

onde 2.65, 2.66 e 2.67 foram utilizadas. Definindo $V_1(r)$ e $V_2(r)$ por meio da relação C2,

$$V_1 = 1 - N_1^2 \quad , \quad V_2 = 1 - N_2^2$$

e assim,

$$V_2 - V_1 = \frac{XY_T^2}{(1-Y^2)} \left[1 + \left(\frac{2Y_L}{Y_T} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (C8)$$

Considerando o plasma de tokamak em aproximação cilíndrica, obtém-se de 5.14 e 5.17 que

$$Y_L = \frac{B_L}{B_R} \approx \frac{B_{pm} \cos \gamma_0}{B_R} \quad \text{e} \quad Y_T = \frac{B_T}{B_R} \approx \frac{B_t}{B_R} \quad (C9)$$

onde

$$B_R = \frac{m\omega}{e} = \frac{10.7}{\lambda(\text{mm})} \quad (\text{T}) \quad (C10)$$

Substituindo em C8 e desprezando Y^2 no denominador, obtém-se

$$V_2 - V_1 = X \left(\frac{B_t}{B_R} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{B_R}{B_t} \right)^2 4 \cos^2 \gamma_0 \left(\frac{B_{pm}}{B_t} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (C11)$$

As condições abaixo geralmente serão corretas para $\lambda < 1 \text{ mm}$ (ver equação 5.16 e Tabela 5.1).

$$\left(\frac{B_t}{B_R} \right)^2 = 0.0087 \lambda^2(\text{mm}) B_t^2(\text{T}) \ll 1 \quad (C12)$$

$$\text{e} \quad \left(\frac{B_R}{B_t^2} \right) \left[\left(\frac{B_{pm}}{B_t} \right)^2 B_R \right] = \left[\frac{10.7}{\lambda(\text{mm}) B_t^2(\text{T})} \right] \left[\frac{0.43}{\lambda(\text{mm})} \left\{ \frac{I(\text{MA})}{a(\text{m}) B_t(\text{T})} \right\}^2 \right] \lesssim 1 \quad (C13)$$

A equação C13 pode não ser satisfeita para pequenos valores de B_t e λ . Entretanto neste caso, a equação C12 será muito bem satisfeita. Em qualquer caso, resulta que a raiz quadrada em C11 é um número da ordem de grandeza da unidade (2 ou 3). Assim, resulta de C11, C12 e C13

$$V_2 - V_1 \approx X \left(\frac{B_t}{B_R} \right)^2 \ll X \quad (C14)$$

A comparação entre as equações C6 e 2.50 mostra que neste caso

$$V_1 \approx V_2 \approx X \quad (C15)$$

Se fosse admitida a propagação independente de dois feixes correspondentes aos dois estados característicos, o resultado acima (C14) indicaria que a diferença na deflexão dos dois feixes é desprezível. Uma maneira simples de examinar a questão de propagação independente dos feixes é apresentada a seguir.

Considerando um meio lentamente variável, será admitido que um estado característico P_2 varia de um estado P_{2i} a P_{2f} ao longo de um percurso e que um estado de polarização P inicialmente coincide com P_{2i} . O efeito de birefringência sobre P é uma rotação em torno de P_2 . Se a diferença nos índices de refração é suficientemente grande, o estado P tende a acompanhar o estado P_2 como no percurso I da Figura C₂. Caso contrário, o ponto P se afasta de P_2 (percurso II). Neste caso o estado não se mantém como estado característico e não tem sentido falar em propagação independente dos feixes. As estimativas dos capítulos 5 e 6 indicam que a propagação ocorre nesta última condição (percurso II). A diferença C14 deve estar relacionada a um pequeno alargamento do feixe. De qualquer modo, a estimativa C4 deve ser correta, inclusive porque está de acordo com o que é observado experimentalmente.

b. Aproximação ótica geométrica.

Quando as propriedades do meio variam muito pouco numa distância igual ao comprimento de onda, pode ser considerada a aproximação de ótica geométrica, também chamada aproximação WKB. A solução da equação de onda é procurada na forma⁽⁴³⁾ $\vec{E}(\vec{r}_s) = \vec{E}_o(\vec{r}_s) e^{i(\omega t - \phi(\vec{r}_s))}$

onde $\vec{E}_o(\vec{r}_s)$ é escrito como uma série de potências de c/ω . A aproximação de ordem mais baixa ($\omega \rightarrow \infty$) é chamada⁽⁴⁴⁾ de aproximação assintótica. Neste caso, pode ser mostrado⁽⁴⁴⁾ que os campos são dados por A11 e A12, onde

$$\nabla\phi = \frac{\omega}{c}\vec{N}$$

Assim, se o meio é variável de modo suficientemente lento, a equação de onda A15 é correta e o meio pode ser considerado localmente homogêneo. Equações para um meio homogêneo, tal como a equação 3.8, podem ser admitidas para o meio não homogêneo, sendo os parâmetros das equações lentamente variáveis.

A utilização da aproximação WKB para um plasma magnetizado não homogêneo é extensamente discutida por Budden⁽²⁵⁾ e Ginzburg⁽⁴³⁾, para o caso de camadas de estratificação planas. No caso de um tokamak, o problema é mais complicado ainda, uma vez que as camadas de estratificação nem sequer são circulares. A questão da validade da aproximação é um problema extenso e complicado, e não será abordada aqui. Uma discussão do problema, no caso de um tokamak é apresentada por Brambilla e Cardinali⁽⁴⁵⁾, em trabalho recente.

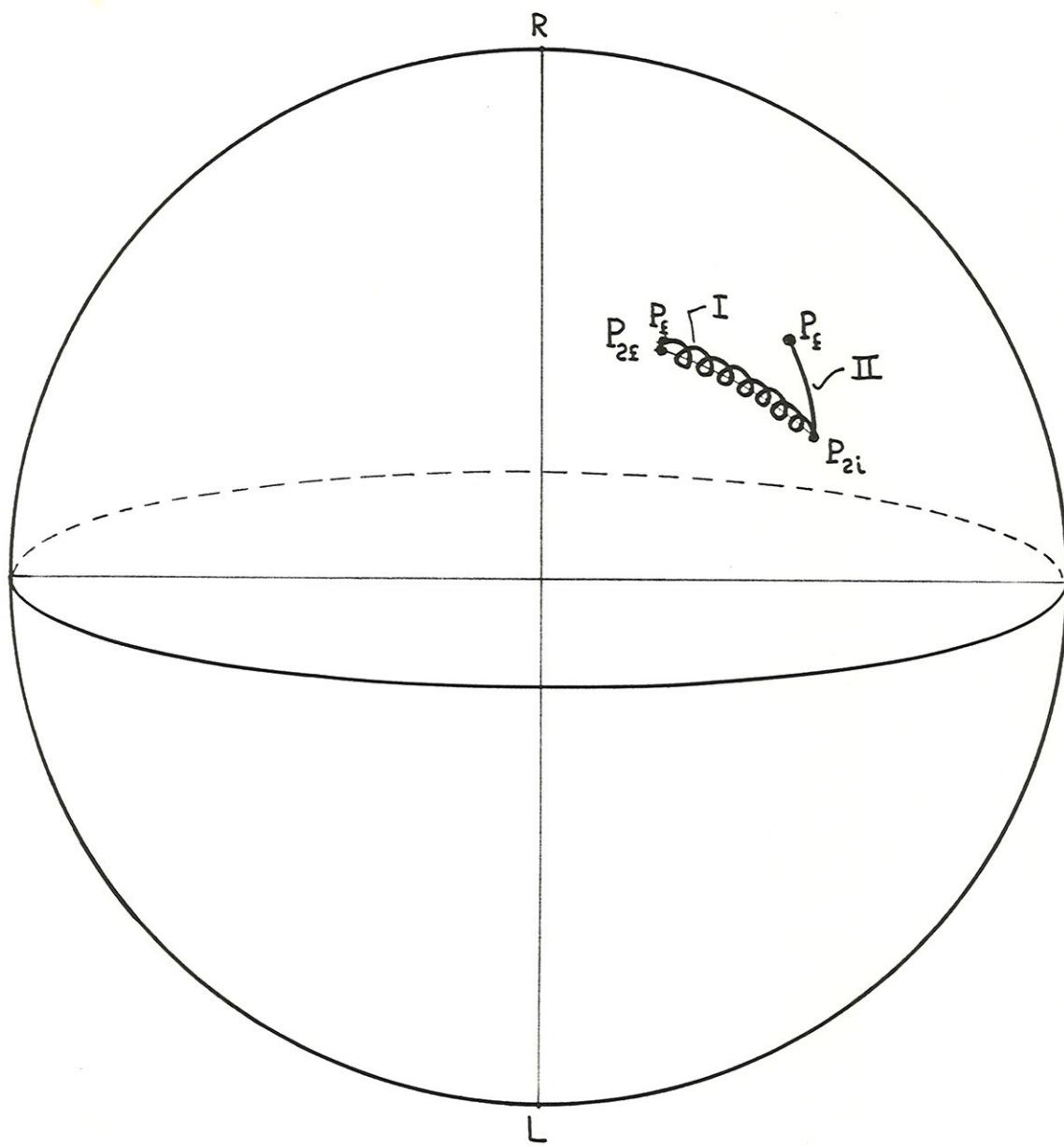


Figura C2 - O estado característico P_2 varia de P_{2i} a P_{2e} no meio não homogêneo. No caso I, o estado P_1 , inicialmente coincidente com P_{2i} se mantém como estado característico ao longo do percurso.

Apêndice D. Expansões em séries.

a. Índices de atenuação.

Os índices de atenuação definidos pela equação 2.62 podem ser obtidos diretamente da equação de Appleton-Hartree (2.34) em primeira ordem. Utilizando as definições

$$A_i = A - X \quad , \quad A = 1 - i \frac{v_c}{\omega} = 1 - \Delta$$

e

$$M_{1,2}^2 = \tilde{N}_{1,2}^2 - 1 \quad (D1)$$

obtém-se de 2.34 que

$$A + \frac{X}{M_{1,2}^2} = \frac{y_T^2}{2(1-X-\Delta)} + \left[\left(\frac{y_T^2}{2(1-X-\Delta)} \right)^2 + y_L^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (D2)$$

Em primeira ordem em Δ , obtém-se

$$\frac{y_T^2}{2(1-X-\Delta)} = C + \frac{C}{1-X} \Delta \quad , \quad \text{onde } C = \frac{y_T^2}{2(1-X)} \quad (D3)$$

e

$$\left[\left(\frac{y_T^2}{2(1-X-\Delta)} \right)^2 + y_L^2 \right]^{\frac{1}{2}} = (C^2 + y_L^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{D}{(1-X)} \Delta$$

onde

$$D = \frac{C^2}{(C^2 + y_L^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (D4)$$

Substituindo D3 e D4 em D2, obtém-se

$$A + \frac{X}{M^2} = C \mp (C^2 + Y_L^2)^{\frac{1}{2}} + (C \mp D) \frac{\Delta}{(1-X)} \quad (D5)$$

e resolvendo as equações D1 e D5 para $\tilde{\mu}^2$, obtém-se

$$\tilde{\mu}_{1,2}^2 = 1 - \frac{X}{1 - C \pm (C^2 + Y_L^2)^{\frac{1}{2}} - (1-X+C \mp D) \frac{\Delta}{1-X}}$$

E após nova expansão em Δ , obtém-se

$$\tilde{\mu}_{1,2}^2 = 1 - \frac{X}{1 - C \pm (C^2 + Y_L^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{X(1-X+C \mp D)}{\left[1 - C \pm (C^2 + Y_L^2)^{\frac{1}{2}}\right]^2} \frac{\Delta}{1-X} \quad (D6)$$

Indicando por n o índice de refração na ausência de atenuação ($\Delta=0$), resulta de 2.34

$$n_{1,2}^2 = 1 - \frac{X}{1 - C \pm (C^2 + Y_L^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (D7)$$

e a equação D6 pode ser escrita como

$$\tilde{\mu}_{1,2}^2 = n_{1,2}^2 - (1 - n_{1,2}^2)^2 \frac{(1-X+C \mp D)}{X} \frac{\Delta}{(1-X)} \quad (D8)$$

Comparando com a definição 2.62, isto é,

$$\tilde{\mu}^2 = \mu^2 - \chi^2 - 2\mu\chi i$$

resulta que em primeira ordem na atenuação,

$$\mu_{1,2}^2 = n_{1,2}^2 = 1 - \frac{X}{1 - C \pm (C^2 + Y_L^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (D9)$$

e ainda

$$\chi_{1,2} = \frac{(1 - N_{1,z})^2}{\mu_{1,z}} \frac{(1 - X + C \mp D)}{2X(1 - X)} \quad (\text{D10})$$

E, finalmente, efetuando as substituições D9,

$$C = \frac{Y_L}{\operatorname{tg} 2\varphi_z} \quad \text{e} \quad D = C \cos 2\varphi_z \quad (\text{D11})$$

obtém-se os resultados do final da seção 2.d.

b. Expansões em X.

Utilizando na equação D9 a substituição

$$\alpha_{1,z} = \frac{1}{1 - C \pm (C^2 + Y_L^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{1 - C \pm \frac{C}{\cos 2\varphi_z}} \quad (\text{D12})$$

resulta

$$N_{1,z}^2 = 1 - \alpha_{1,z} X \quad (\text{D13})$$

Para se obter $\Delta N = \mu_1 - \mu_2$ em 2ª ordem em X , é suficiente obter na expressão

$$\Delta N = \frac{N_1^2 - N_2^2}{\mu_1 + \mu_2} \quad (\text{D14})$$

o denominador em primeira ordem. Assim,

$$N_1^2 - N_2^2 = (\alpha_z - \alpha_1) X \quad (\text{D15})$$

e

$$\mu_1 + \mu_2 = \left[2 - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_z) X \right] \quad (\text{D16})$$

onde $(\alpha_1 + \alpha_2)$ deve ser substituído em ordem mais baixa. Obtém-se

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2 \frac{\left(1 - \frac{y_T^2}{2}\right)}{(1 - y^2)}$$

e

$$\frac{1}{\mu_1 + \mu_2} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\left(1 - \frac{y_T^2}{2}\right)}{(1 - y^2)} X \right] \quad (D17)$$

A diferença $(\alpha_2 - \alpha_1)$ deve ser substituída em D15 em primeira ordem. Obtém-se

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{y_T^2}{\cos 2\varphi_z} \frac{\frac{1}{1-X}}{1 - y_L^2 - \frac{y_T^2}{1-X}}$$

$$= \frac{y_T^2}{\cos 2\varphi_z} \frac{1}{(1-y^2)} \left(1 + \frac{1-y_L^2}{1-y^2} X \right)$$

e

$$\mu_1^2 - \mu_2^2 = \frac{XY_T^2}{(1-y^2) \cos 2\varphi_z} \left(1 + \frac{1-y_L^2}{1-y^2} X \right) \quad (D18)$$

Substituindo D17 e D18 em D14, obtém-se finalmente o resultado 2.68. Deve ser observado que, utilizando as relações

$$\operatorname{tg} 2\varphi_z = \frac{\operatorname{sen} 2\varphi_z}{\cos 2\varphi_z} = \frac{2(1-X)Y_L}{y_T^2} \quad \text{e} \quad y^2 = y_L^2 + y_T^2$$

as equações (tais como 2.68 e 2.70) podem ser escritas com formas algébricas bastante diferentes.

Referências

1. Equipe TFR, "Tokamak Plasma Diagnostics (Review paper)", Nucl. Fusion 18/5 (1978) 647.
2. F. De Marco and S.E. Segre, Plasma Phys., 14 (1972) 245.
3. K.J. Button (Editor), "Infrared and Millimeter Waves", Academic Press, New York (1979).
4. A.D. Craig, Plasma Phys., 18 (1976) 777.
5. F. De Marco and S.E. Segre, Opt. Commun. 23 (1977) 125.
6. S.E. Segre, Plasma Phys. 20 (1978) 295.
7. D. Véron, "Submillimeter Interferometry of High-Density Plasmas", in Ref. 3.
8. N.C. Luhman, "Instrumentation and Techniques for Plasma Diagnostics", in Ref. 3
9. W. Kunz and G. Dodel, Plasma Phys. 20 (1978) 171.
10. W. Kunz and G. Dodel, Infrared Phys. 18 (1978) 773.
11. W. Kunz and Equipe TFR, Nucl. Fusion, 18/12 (1978) 1729.
12. C.H. Ma, D.P. Hutchinson and K.L. Vandersluis, Appl. Phys. Lett. 34 (1979) 218.
13. D.P. Hutchinson, C.H. Ma, P.A. Staats and K.L. Van-

derSluis, Nucl. Fusion, 21/12 (1981) 1535.

14. M. Grolli and G. Maddaluno, Nucl. Fusion, 22/7 (1982) 961.
15. S.E. Segre, J. Opt. Soc. Am. 72/1 (1982) 167.
16. S.E. Segre, Report - 82.19, Centro Ricerche Energia Frascati (ENEA), Frascati (1982).
17. L. Landau et E. Lifchitz, "Électrodynamique des milieux continus", Editions MIR, Moscou (1969).
18. G.N. Ramachandran and S. Ramaseshan, "Crystal Optics", Encyclopedia of Physics, Vol. 25/1, Springer, Berlin (1963).
19. S.W. Simpson, I.C. Nascimento, R.M.O. Galvão, R.P. Silva, R.M.P. Drozak, A.N. Fagundes e J.H. Vuolo, "Design of the TBR Tokamak", Report IFUSP P-155 (1978)
20. M.A. Heald and C.B. Wharton, "Plasma Diagnostic with Microwave", John Wiley & Sons Inc., New York (1965).
21. J.A. Ratcliffe, "The Magneto-Ionic Theory and its Application to the Ionosphere", University Press, Cambridge (1959).
22. T.H. Stix, "The theory of Plasma Waves", Mac-Graw-Hill, New York (1962).

23. W.P. Allis, S.J. Buchsbaum and A. Bers, "Waves in Anisotropic Plasmas", M.I.T. Press, Cambridge, Mass. (1963).
24. K.R. Symon, "Mechanics", Addison-Wesley Pub. Co., 2nd Ed. (1963).
25. K.G. Budden, "Radio Waves in the Ionosphere", University Press, Cambridge (1961)
26. I.R. Gekker, "Interaction of Strong Electromagnetic Fields with Plasmas", Clarendon Press Oxford (1982).
27. J.H. Vuolo and R.M.O. Galvão, a ser publicado em Plasma Phys.
28. G. Salmon, "Analytical Geometry of three Dimensions", Dublin (1881).
29. F.A. Jenkins and H.E. White, "Fundamentals of Physical Optics", 1st Ed, MacGraw-Hill Book Co., New York (1937)
30. R.W. Ditchburn, "Light", 2nd Ed., Blackie and Son Lim., Glasgow (1963).
31. H.P. Furth, Nucl. Fusion 15 (1975) 487.
32. D.C. Robinson, Volume Especial da Rev. Bras. de Física sobre o "Latin-American Workshop on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, Vol. I (1982) 69.

33. R.W. Conn, T.G. Frank, R. Hancox, G.L. Kulcinski, K.H. Schmitter and W.M. Stacey Jr., Nucl. Fusion. 18-7 (1978) 985.
34. Von Gierke, G. Lisitano, G. Müller, H. Schlüter, M. Tutter and H. Wulff, Proc. 5th Int. Conf. Ionization Phenomena in Gases, Munich (1962) 380.
35. E.M. Lifshitz et L.P. Pitaevskii, "Physical Kinetics", Pergamon Press, Oxford (1981).
36. W.K.H. Panofsky and M. Phillips, "Classical Electricity and Magnetism", 2nd Ed., Addison-Wesley Pub. Co. (1962)
37. V.D. Shafranov, Rev. Plasma Phys. 3(1967) 1.
38. A.I. Akhiezer, I.A. Akhiezer, R.V. Polovin, A. G. Sitenko and K.N. Stepanov, "Plasma Electrodynamics", Pergamon Press, Oxford (1975).
39. M. Born and E. Wolf, "Principles of Optics", Macmillan Co., New York (1964).
40. J.D. Kraus and K.R. Carver, "Electromagnetics", 2nd Ed., MacGraw-Hill-Kogakusha, Tokyo (1973)
41. H. Poincaré, "Théorie Mathématique de la Lumière", G. Carré, Paris (1892).

42. J. Shmoys, J. Appl. Phys. 32 (1961) 689.
43. V.L. Ginzburg, "The Propagation of Electro-Magnetic Waves in Plasmas", Pergamon Press Oxford (1964).
44. J.J. Brandstatter, "An Introduction to Waves, Rays and Radiation in Plasma Media", McGraw-Hill Book Co., New York (1963).
45. M. Brambilla and A. Cardinali, Plasma Phys. 24 (1982) 1187.