SBH-FUSP

305M810T2331

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

**CONSEQUÊNCIAS MACROSCÓPICAS DE
ALGUMAS PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS
DA QCD**

FABIANE AVENA DE OLIVEIRA

Tese de Doutorado
submetida ao Instituto de Física
da Universidade de São Paulo

Banca Examinadora:
Maria Carolina Nemes(UFMG)
Marina Nielsen(USP)
Eliane Veit(UFRGS)
Maria Teresa Climaco Thomaz(UFF)
Sandra dos Santos Padula(IFT)

ORIENTADORA: Profa.Dra Maria Carolina Nemes

M. C. Nemes

SÃO PAULO
1995

Iberê Luiz Caldas
Prof. Iberê Luiz Caldas
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

539.7548
048 C
D
C-1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Oliveira, Fabiane Avena de

Conseqüências macroscópicas de algumas propriedades da QCD. São Paulo, 1995.

Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo.
Instituto de Física. Departamento de Física Matemática.
Area de Concentração: Física das Partículas
Elementares.

Orientador: Profa. Dra. Maria Carolina Nemes.

Unitermos: 1. Propriedades da QCD; 2. Simetria quiral 3.
Estrelas de nêutrons; 4. Modelos renormalizáveis.

USP/IF/SBI - 34/95

Agradecimentos

à Maria Carolina Nemes(carol) pela orientação segura e tranquila neste trabalho e por ter me feito gostar novamente de física,

aos professores Marina Nielsen, Fernando Navarra e Frederique Grassi por terem proposto e auxiliado em alguns dos temas que resultaram neste trabalho,

ao Alex e Brigitte que vieram de longe e com os quais tive discussões esclarecedoras sobre meu trabalho,

ao Orimar pelo auxílio e por ter me apresentado formalmente à renormalização ,

aos meus pais e irmãos pelo apoio e dedicação ,

à Lígia que me hospedou em sua casa e teve que aguentar meus altos e baixos,

à Andréia pela amizade e companherismo,

à Nelmara, Sâmia, Rosane, Mirian e a todo o pessoal do departamento de Física Matemática da USP,

à Suely pela convivência agradável em Belo Horizonte e por ter me dado a chance de trabalhar com ela no mestrado,

ao waguinho, Sérgio Lúcio, Sílvia, Sérgio, André, Diego, Fabiano e Ivone do departamento de Física da UFMG pelo auxílio em computação , sem o qual este trabalho não teria saído do computador,

ao departamento de Física da UFMG em cujas dependências grande parte deste trabalho foi realizado,

à CAPES e CNPq que financiaram este trabalho.

Índice

1	Introdução	1
1.1	Simetrias da Cromodinâmica Quântica e sua Relação com Lagrangeanas Efetivas	1
2	Modelos Efetivos	11
2.1	Modelo de Walecka	13
2.1.1	Equações de Estado para Temperatura Zero	19
2.1.2	Equações de Estado para Temperatura Finita	22
2.2	Modelo Sigma Linear	26
2.2.1	Equações de Estado para Temperatura Zero	31
2.2.2	Equações de Estado para Temperatura Finita	33
3	Aspectos Microscópicos dos Modelos Efetivos e Renormalização	39
3.1	Espalhamento Pion-Nucleon a Baixas Energias	39
3.2	O Papel da Renormalização	50
3.2.1	Teoria de Campo Médio	57
3.2.2	Correções de Flutuação de Vácuo	61
4	Tempo de Vida do Pion na Matéria Quente e Densa	73
4.1	Modelo Sigma no Setor Mesônico e o Vácuo	73
4.2	Vibrações do Vácuo Físico	75

4.3	Quantização dos Campos e a Definição dos Mesons como Partículas	79
4.4	Tempo de Vida do Pion no Vácuo	80
4.5	Matéria Densa e Quente	87
4.5.1	Decaimentos do Pion num Meio Denso e Quente	91
5	Estrelas de Nêutrons	94
5.1	Evolução Nuclear de Estrelas	94
5.2	Estrelas de Nêutrons	96
5.2.1	Estrutura de Estrelas de Nêutrons	96
5.2.2	Equilíbrio e Estabilidade de Estrelas	99
5.2.3	Estabilidade de Estrelas de Nêutrons	100
5.2.4	Equações de Estado para Estrelas de Nêutrons	103
A		118
A.1	Regularização Dimensional	118
A.1.1	Cálculo dos Contratermos	120
	Referências	121

Lista de Figuras

2.1	Varição da massa efetiva em função de k_F	21
2.2	Energia por nucleon vrs k_F para a matéria nuclear e de nêutrons	22
2.3	Massa efetiva vrs temperatura para baixas densidades-Modelo de Walecka .	25
2.4	Pressão vrs temperatura para baixas densidades-Modelo de Walecka	25
2.5	Energia do sistema vrs temperatura para baixas densidades- Modelo de Walecka	26
2.6	Massa efetiva vrs k_F para o modelo Sigma Quiral e com quebra de simetria	32
2.7	Energia por nucleon vrs k_F para o modelo quiral e com quebra de simetria	33
2.8	Massa efetiva vrs temperatura para o modelo Sigma Quiral	34
2.9	Energia vrs temperatura para baixas densidades-modelo Sigma Quiral . . .	35
2.10	Pressão vrs temperatura para baixas densidades-modelo Sigma Quiral . . .	35
2.11	Massa efetiva vrs temperatura para o modelo Sigma ($m_\pi = 138MeV$) . . .	37
2.12	Energia vrs temperatura para o modelo Sigma ($m_\pi = 138MeV$)	37
2.13	Pressão vrs temperatura para o modelo Sigma Quiral ($m_\pi = 138MeV$) . .	38
3.1	Gráficos do espalhamento pion-nucleon em nível árvore	42
3.2	Regras de Feynman para o espalhamento pion-nucleon em nível árvore . .	43
3.3	Varição da massa em função da temperatura na aproximação de Hartree-modelo de Walecka	66
3.4	Varição da energia em função da temperatura na aproximação de Hartree-modelo de Walecka	67

3.5	Varição da pressão em função da temperatura na aproximação de Hartree-modelo de Walecka	68
3.6	Saturação da matéria nuclear-Aproximação de Hartree para os modelos Walecka e Sigma Quiral	70
3.7	Varição da massa em função da temperatura na aproximação de Hartree-modelo Sigma Quiral	71
3.8	Varição da energia em função da temperatura na aproximação de Hartree-modelo Sigma Quiral	72
3.9	Varição da pressão em função da temperatura na aproximação de Hartree-modelo Sigma Quiral	72
4.1	Parametrização de f_π em função da temperatura, modelo NJL	88
4.2	Parametrização de f_π em função da densidade-modelo NJL	88
4.3	Massas dos mesons π e σ em função da temperatura	89
4.4	Massas dos mesons π e σ em função da densidade	90
4.5	Massas dos mesons π e σ em função da temperatura	90
4.6	Massas dos mesons π e σ em função da densidade	91
4.7	Tempo de vida do pion como função da temperatura para dois canais de decaimento	92
4.8	Tempo de vida do pion como função da densidade para dois canais de decaimento	92
4.9	Razão entre o tempo de vida do pion como função da temperatura para dois canais de decaimento	93
4.10	Razão entre o tempo de vida do pion como função da densidade para dois canais de decaimento	93
5.1	Razão entre a massa da estrela e a massa do sol ($M_{sol} = M_\odot$) em função da densidade central da estrela-Modelo de Walecka	104
5.2	Razão entre a massa da estrela e a massa do sol ($M_{sol} = M_\odot$) em função do raio da estrela-Modelo de Walecka	104

5.3	Massa vrs densidade para matéria de nêutrons-Aproximações de Campo médio e Hartree	105
5.4	Razão entre a massa da estrela e a massa do sol ($M_{sol} = M_{\odot}$) em função da densidade central da estrela-Modelo de Walecka na aproximação de Hartree	106
5.5	Razão entre a massa da estrela e a massa do sol ($M_{sol} = M_{\odot}$) em função do raio da estrela-Modelo de Walecka na aproximação de Hartree	106
5.6	Massa vrs densidade para matéria de nêutrons-Aproximações de Campo médio e Hartree	109
5.7	Razão entre a massa da estrela e a massa do sol ($M_{sol} = M_{\odot}$) em função da densidade central da estrela-Modelo Sigma Quiral	109
5.8	Razão entre a massa da estrela e a massa do sol ($M_{sol} = M_{\odot}$) em função do raio da estrela-Modelo Sigma Quiral	110
5.9	Razão entre a massa da estrela e a massa do sol ($M_{sol} = M_{\odot}$) em função da densidade central da estrela-Modelo Sigma com quebra de simetria quiral	110
5.10	Razão entre a massa da estrela e a massa do sol ($M_{sol} = M_{\odot}$) em função do raio da estrela-Modelo Sigma com quebra de simetria quiral	111
5.11	Razão entre a massa da estrela e a massa do sol ($M_{sol} = M_{\odot}$) em função do raio da estrela-Modelo Sigma quiral na aproximação de Hartree	111
5.12	Massa em função da densidade central da estrela-Modelo de sacola	114
5.13	Razão entre a massa da estrela e a massa do sol ($M_{sol} = M_{\odot}$) em função do raio da estrela-Modelo de sacola	115
5.14	Massa da estrela em função da densidade central-Vários modelos investigados na literatura	116
5.15	Massa da estrela(em unidades de massa solar ($M_{sol} = M_{\odot}$) em função do raio -Vários modelos já estudados na literatura	117

Lista de Tabelas

3.1	Valores para as Massas e Raios de Estrelas	50
5.1	Valores para as Massas e Raios de Estrelas	115

Resumo

No presente trabalho, investigamos algumas propriedades da QCD quando incorporadas aos modelos efetivos. Mostramos que muitas propriedades da matéria densa quente ou fria podem ser melhor descritas a partir do modelo quiral σ - ω . Mostramos que, em contraste com o modelo renormalizado de Walecka, as correções de vácuo são cruciais para uma adequada descrição da matéria nuclear densa. Estes resultados também são confirmados a partir das previsões feitas para estrelas de nêutrons. Uma possível sinal da transição de fase em colisões de íons pesados relativísticos é também calculada pela observação das taxas de decaimento do pión nos canais $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ e $\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$. Mostramos que as propriedades de confinamento e liberdade assintótica, incorporadas pelo modelo de sacola do M.I.T., dão suporte para a especulação da possível existência de estrelas híbridas.

Abstract

In this work we investigate some properties of QCD as incorporated in effective models. We show that several properties of cold or hot and dense nuclear matter can be well described in the context of the chiral $\sigma - \omega$ model. We show that, in contrast to the non chiral Walecka model vacuum renormalization corrections are crucial to provide for an adequate description. This result is also confirmed in the description of neutron stars. A possible signature of chiral phase transition in RHIC collisions is also pointed out in the observation of the ratio of pion decay in the two channels $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ and $\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$. We also show that the properties of confinement and asymptotic freedom as incorporated by the Bag model give support to the speculation on the existence of hybrid stars.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Simetrias da Cromodinâmica Quântica e sua Relação com Lagrangeanas Efetivas

A teoria da Cromodinâmica Quântica(QCD) é atualmente aceita como a teoria das interações fortes. Para a sua construção muito contribui o conceito fundamental de simetrias no seu sentido mais abrangente. A identificação das diversas invariâncias e a forma através da qual elas são realizadas, aproximadamente realizadas ou mesmo violadas é essencial para o estudo das interações fundamentais. Uma prova disto é o sucesso da álgebra de correntes e da invariância quiral. Faremos na próxima secção uma breve abordagem da QCD, detendo-nos em aspectos para os quais, modelos efetivos (modelo NJL ou Sigma Linear) podem ser uma boa aproximação.

Na década de 60 os dados experimentais conhecidos sobre hadrons leves (cuja massa é até da ordem de 1GeV) permitiram concluir que tais partículas poderiam ser classificadas de acordo com o grupo $SU(3)$ ^[1, 2]. Surgia assim, pela primeira vez, o conceito de quark como constituinte fundamental. Os 3 estados de sabor então considerados foram chamados u (up), d (down), s (strange). A introdução de um número quântico chamado *cor* surgiu da necessidade de evitar a violação do Princípio de Pauli para os quarks no esquema proposto.

Os quarks surgem assim, como representações fundamentais de $SU_c(3) \times SU_f(3)$, onde c identifica o grupo de cor e f o de sabor. Os hadrons são singletos de cor, isto é, não possuem cor. Nos barions, que são compostos de 3 quarks, isto é conseguido exigindo-se que as três cores estejam igualmente representadas e nos mesons, compostos de 2 quarks, combinando-se uma cor e a antícor correspondente.

No início da década de 70, Gell-Mann e outros^[3, 4, 5] propuseram a QCD como a teoria das interações fortes. Trata-se de uma teoria de gauge (padrão) tal como a Eletrodinâmica Quântica (QED), com a qual tem outros pontos em comum.

Enquanto a QED descreve as interações entre partículas eletricamente carregadas, a QCD descreve as interações entre partículas caracterizadas pelo número quântico de cor. A principal diferença entre estas duas teorias de gauge está no fato de que a QCD é uma teoria não abeliana. Isto implica que os campos de gauge, no caso os gluons, podem interagir consigo próprios. A teoria contém oito campos de gauge e o grupo associado é o grupo de cor $SU_c(3)$.

Por simplicidade, vamos continuar a discussão a partir da densidade de lagrangeana da QCD no setor $SU(2)$ de sabor, mesmo porque usaremos, no presente trabalho, apenas este setor. Esta lagrangeana pode ser escrita na seguinte forma

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\psi}_s(x)(i\gamma_\mu D^\mu - m_s)\psi_s(x) - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^j(x)G_j^{\mu\nu}(x) \quad (1.1)$$

onde

$$\psi_s(x) = \begin{pmatrix} \psi_u(x) \\ \psi_d(x) \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

são os campos dos quarks. Nestas equações, x representa o quadrivetor $(\vec{x}, t)$ e γ_μ são as matrizes de Dirac. Cada um dos quarks u e d tem $N_c = 3$ componentes cujo índice foi omitido na eq. (1.1), $\bar{\psi}(x)$ é o adjunto do operador de campo dos quarks ($\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\beta$). A quantidade $D^\mu = \partial^\mu - ig(\lambda^j/2)G_j^\mu(x)$ incorpora o acoplamento de gauge com o campo dos gluons. O tensor $G_{\mu\nu}^j(x)$ é o tensor de campo dos gluons, não abeliano. As oito matrizes de Gell-Mann, os λ^j , são os geradores do grupo $SU_c(3)$, g é a constante de acoplamento das interações fortes e m_s representa uma matriz diagonal cujos elementos são as massas dos quarks.

Do ponto de vista teórico, as características mais atraentes da QCD resultam do fato desta teoria ser renormalizável^[6], com liberdade assintótica^[7, 8, 9]. Além disto possui uma simetria quiral global no limite $m_u = m_d = 0$.

Para escalas de comprimento de cerca de $0.1 fm$ ou para quantidades de momento transferido na região do ultravioleta, a QCD é uma teoria perturbativa de quarks e gluons. Nesta fase, os acoplamentos são fracos e os quarks e gluons propagam-se quase que livremente, isto é, possuem a propriedade de liberdade assintótica^[7, 8, 9]. Os desvios do comportamento da teoria livre podem ser calculados perturbativamente. As evidências mais inequívocas

da liberdade assintótica resultam de experiências de espalhamento inelástico de elétrons em prótons.

No vácuo perturbativo os quarks possuem massas correntes no setor (u, d) que são^[10, 11]

$$m_u = (5.1 \pm 1.5) MeV \quad (1.3)$$

$$m_d = (8.9 \pm 2.6) MeV \quad (1.4)$$

Por outro lado, para escalas de comprimento da ordem de $1 fm$ (região do infravermelho), fenômenos altamente não lineares desempenham um papel importante. É a fase não perturbativa em que o vácuo é relevante para o estudo dos hádrons leves e da física nuclear tradicional. O estado não perturbativo é caracterizado pela existência de condensados, isto é, valores esperados não nulos da densidade escalar $\bar{\psi}\psi$, e de pares de glúons $G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}$.

No contexto do presente trabalho, é de particular interesse o condensado de pares de quarks, usualmente chamado parâmetro de ordem, com o valor empírico^[12]

$$\langle 0 | \bar{\psi}\psi | 0 \rangle \approx -(225 \pm 25 MeV)^3 \quad (1.5)$$

Nestas condições, a constante de acoplamento efetiva é grande e acredita-se que seja responsável pelo confinamento. De acordo com esta propriedade a massa de quark isolado deve ser infinita. Devido à complexidade das propriedades não perturbativas da QCD, não foi ainda possível demonstrar que esta teoria conduza à explicação do confinamento de quarks. Do mesmo modo e pela mesma razão, não foi possível ainda obter cálculos quantitativos de processos hadrônicos relevantes para a física nuclear a partir da QCD.

Alguns destes aspectos não perturbativos da QCD tem sido abordados a partir de diferentes aproximações com resultados importantes que servem de guia na construção de modelos efetivos. Vamos listar alguns deles sumariamente.

Os cálculos de Monte Carlo em rede, iniciados por Wilson^[13] tem dado uma grande contribuição para a compreensão qualitativa do confinamento. Resultados, usando estas técnicas, indicam que a QCD exibe uma transição de fase de primeira ordem a temperaturas e densidades finitas^[14]. Uma vez que o inverso da temperatura determina o tamanho da rede na direção temporal, as previsões de tais cálculos só dão previsões confiáveis no regime de altas temperaturas.

As regras de soma da QCD constituem uma outra aproximação à QCD que consiste em estudar o vácuo e é baseada na expansão de variáveis físicas em termos dos valores não nulos dos condensados de quarks e glúons. Este método tem sido utilizado para investigar as propriedades dos hádrons^[11, 12, 15].

Os desvios da simetria quiral tem sido estudados dentro do contexto das teorias quirais perturbativas^[16, 17, 18] e constituem um tratamento alternativo ao tratamento baseado na hipótese de PCAC, que abordaremos no presente trabalho, e em álgebra de correntes.

Uma outra hipótese para estudar a QCD foi proposta por 'tHooft^[16] ao introduzir o parâmetro de expansão $1/N_c$ no limite em que N_c é grande. Este tratamento permite ultrapassar as dificuldades inerentes à resolução das equações de movimento da QCD na ausência de um pequeno parâmetro de expansão. Neste limite, a QCD reduz-se a uma teoria efetiva não linear^[17] com interessantes consequências para propriedades hadrônicas.

A existência de parâmetros de ordem diferentes de zero implica que a simetria quiral seja espontaneamente quebrada no vácuo físico, uma vez que o escalar $\bar{\psi}\psi$ não é um invariante sob uma transformação quiral.

A simetria quiral é uma das simetrias fundamentais mais importantes, devido ao papel que a sua quebra espontânea desempenha na física hadrônica de baixas energias.

Algumas de suas implicações já foram referidas e muitas mais poderiam ser apontadas. Daí a importância da construção de modelos que respeitam esta invariância ou que apenas a violem ligeiramente.

Para entender o significado da massa dos quarks em QCD é importante estudar o limite no qual estes parâmetros são nulos. A lagrangeana da QCD, eq.(1.1) é invariante sob a transformação de fase

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \psi(x) \quad (1.6)$$

onde α é um parâmetro e, desde que $m_u = m_d = 0$, sob uma rotação de isospin

$$\psi(x) \rightarrow e^{(i\vec{a}\cdot\vec{\tau})} \psi(x) \quad (1.7)$$

onde $\vec{\tau}$ são as matrizes de rotação do grupo SU(2).

De acordo com o teorema de Noether^[18] as correntes vetoriais

$$V_\mu^b(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \frac{\tau^b}{2} \psi(x) \quad b = 1, 2, 3 \quad (1.8)$$

são conservadas

$$\partial^\mu V_\mu^b = 0 \quad (1.9)$$

As cargas associadas, que verificam a condição $\partial Q^b / \partial t = 0$, são dadas por

$$Q^b = \int d^3x V_0^b(x) \quad (1.10)$$

$$= \int d^3x \psi^\dagger(x) \frac{\tau^b}{2} \psi \quad (1.11)$$

Neste caso, a simetria de sabor da lagrangeana (1.1) é designada por $SU(2) \times U_V(1)$, uma vez que estamos considerando o caso em que as massas correntes são iguais. O grupo $U_V(1)$ diz respeito a conservação do número bariônico e traduz a invariância.

A densidade de lagrangeana (1.1) possui também outra invariância no limite $m_s = m_d = 0$. Isto é, ela é invariante sob a transformação quiral

$$\psi(x) \rightarrow e^{(i\gamma_5 \vec{a} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2})} \psi(x) \quad (1.12)$$

As quantidades conservadas são as três correntes axiais

$$A_\mu^c(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^c}{2} \psi \quad c = 1, 2, 3 \quad (1.13)$$

isto é,

$$\partial^\mu A_\mu^c(x) = 0 \quad (1.14)$$

As cargas correspondentes independentes do tempo são dadas por:

$$Q_5^c = \int d^3x \psi^\dagger(x) \gamma_5 \frac{\tau^c}{2} \psi(x) \quad (1.15)$$

As cargas axiais e vetoriais obedecem as seguintes relações de comutação [3]

$$[Q^a, Q^b] = i\epsilon^{abc}Q^c \quad (1.16)$$

$$[Q_5^a, Q_5^b] = i\epsilon^{abc}Q^c \quad (1.17)$$

$$[Q^a, Q_5^b] = i\epsilon^{abc}Q_5^c \quad (1.18)$$

onde ϵ^{abc} são as constantes de estrutura (símbolo de Levi Civita) do grupo $SU(2)$.

A esta simetria, característica da lagrangeana de partícula livre de massa nula, dá-se o nome de simetria quiral.

A simetria do grupo da hamiltoniana da QCD é, neste setor, comumente designada por $SU_V(2) \times SU_A(2) \times U_V(1)$.

Uma questão importante refere-se ao fato de saber sob que forma a simetria da lagrangeana (1.1) se manifesta no vácuo do sistema. Para a QCD ser uma aproximação ao mundo real, o estado fundamental não pode ser invariante com relação ao grupo $SU_V(2) \times SU_A(2)$.

De fato, se o vácuo verifica as condições

$$Q^a|0\rangle = 0|0\rangle \quad (1.19)$$

$$Q_5^a|0\rangle = 0|0\rangle \quad (1.20)$$

a simetria quiral do tipo manifesto^[19] seria realizada segundo o modo de Wigner-Weyl e os multipletos de isospin deveriam ter, pelo menos, um par degenerado de paridade oposta, as transformações axiais alteram a paridade associada ao estado sobre o qual atuam. Portanto, uma manifestação direta da $SU_A(2)$ na natureza exigiria que cada multipletto de isospin fosse acompanhado por um multipletto espelho de paridade oposta. Como tais multipletos não são observados na natureza, concluímos que $SU_A(2)$ não deve ser diretamente realizado na QCD. Por conseguinte

$$Q_5^a|0\rangle \neq 0 \quad (1.21)$$

e o vácuo não é invariante sob o grupo $SU_V(2) \times SU_A(2)$ mas sob o subgrupo dos geradores isovetores $SU_V(2)$. Isto implica, em particular, que os estados hadrônicos devem ser classificados segundo a simetria $SU_V(2)$.

O teorema de Goldstone^[19] é aplicável a quebra espontânea de simetria quiral se alguns geradores T^a de $SU_V(2) \times SU_A(2)$ não deixam o vácuo invariante, isto é, se $T^a|0\rangle \neq |0\rangle$, então existem estados físicos $T^a|0\rangle$, com a mesma energia própria do vácuo.

Resumindo, as simetrias associadas às cargas vetoriais não são quebradas espontaneamente: (i) não existem indícios de partículas escalares leves no espectro dos mesons (as partículas mais leves do espectro com número quântico de um escalar tem uma massa superior a do proton); (ii) há forte evidência para que a simetria do subgrupo $SU_V(2)$ seja a simetria normal do espectro de massa. Os hadrons ocorrem em multipletos (quase) degenerados que correspondem a representação do subgrupo $SU_V(2)$.

O elemento de matriz da corrente axial entre o estado do vácuo $|0\rangle$ e um estado piônico $|\pi^a(k)\rangle$ é dado por

$$\langle 0 | A_\mu^b | \pi^a(k) \rangle = i k_\mu f_\pi e^{-ikx} \delta_{ab} \quad (1.22)$$

Este elemento de matriz determina a taxa de decaimento $\pi \rightarrow \mu + \bar{\nu}$ e permite calcular f_π cujo valor experimental é $f_\pi \sim 93 \text{ MeV}$.

Da eq. (1.22), o elemento de matriz

$$\langle 0 | \partial^\mu A_\mu^b | \pi^a(k) \rangle = m_\pi^2 f_\pi e^{-ikx} \delta_{ab} \quad (1.23)$$

A conservação da corrente axial implica que

$$f_\pi m_\pi^2 = 0 \quad \text{então ou } m_\pi = 0 \text{ ou } f_\pi = 0 \quad (1.24)$$

ambos os resultados estão em contradição com a experiência.

Tendo esclarecido a questão de como se realiza a simetria quiral da QCD, podemos agora discutir as implicações de sua quebra explícita.

Sabemos que as partículas físicas com os números quânticos dos bosons de Goldstone não são excitações de massa nula e a simetria quiral deve ser quebrada explicitamente, por um valor pequeno já que a quebra, como podemos ver pela expressão (1.23), é pequena, deste modo as correntes axiais não se conservam.

Dado o exposto, vimos que a simetria $SU_V(2) \times SU_A(2)$ não é verdadeiramente exata. Isto pode ser formulado ao nível dos quarks, através de termos do hamiltoniano com quebra de simetria $\mathcal{H}'$, em que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}'$ tais que para $a = 1, 2, 3$

$$[Q_3^a, \mathcal{H}_0] = 0, \quad [Q_3^a, \mathcal{H}'] \neq 0 \quad (1.25)$$

onde $\mathcal{H}' \rightarrow 0$ no limite quiral.

A corrente axial é conservada apenas parcialmente(PCAC).As consequências físicas da hipótese de PCAC estão diretamente associadas com o fato da massa do pion ser pequena.Definindo

$$\partial^\mu A_\mu^a = D^a \neq 0 \quad (1.26)$$

obtemos

$$\langle 0 | D^a | \pi^b \rangle = m_\pi^2 f_\pi e^{-ikx} \delta_{ab} \quad (1.27)$$

onde $m_\pi^2 \neq 0$.

A álgebra de correntes^[21],as teorias quirais perturbativas^[22] e as regras de soma da QCD^[23] fornecem,por exemplo,a relação

$$m_\pi^2 f_\pi^2 = -(m_u + m_d) \langle 0 | \bar{\psi}_u \psi_u | 0 \rangle \quad (1.28)$$

usualmente conhecido por relação de Gell-Mann-Oakes-Renner(GMOR),que envolve a constante de decaimento do pion, f_π e reflete o fato de $m_\pi \rightarrow 0$ quando $m_{u,d} \rightarrow 0$.Trata-se de outra forma segundo a qual a simetria quiral se manifesta. Dado que esta relação é válida no limite quiral,o desvio desta fórmula para a massa corrente dos quarks não nula, pode ser usada como medida do relaxamento da condição quiral. De fato,de acordo com a experiência,sabe-se que os desvios da simetria quiral são bem pequenos.

A Cromodinâmica Quântica tem tido enorme sucesso na descrição de processos que envolvem grandes transferências de momento.É o chamado regime perturbativo onde a utilização de técnicas perturbativas é não apenas pertinente como também bastante efetiva.Por outro lado para energias mais baixas(até da ordem de alguns GeV),devido à natureza do acoplamento dos gluons, torna-se extremamente difícil obter resultados diretamente a partir da lagrangeana da QCD.Existem cálculos na rede que nos fornecem informações importantes sobre o vácuo da teoria,informações estas,que são incorporadas em modelos efetivos que pretendem ser representantes adequados da QCD para o regime não perturbativo.É dentro deste contexto que o conceito de teorias efetivas adquirem fundamental importância.

Este conceito não é novo dentro da física nuclear.O problema das propriedades estruturais do núcleo frio viveu um avanço considerável após a década de 60,quando J.Negele

introduziu a idéia de potenciais efetivos dependentes da densidade que, ao serem utilizados conjuntamente com determinantes de Slater reproduziam de forma espetacular energias de ligação e raio dos núcleos. Obviamente este procedimento funcionou por ter incorporado os ingredientes essenciais de uma física mais fundamental.

Na área de física de hádrons encontramos-nos em uma situação parecida com a diferença de que a interpretação dos vários modelos efetivos propostos e sua utilização ainda não atingiram o mesmo nível de compreensão.

O objetivo do presente trabalho é contribuir neste sentido fazendo um estudo detalhado de vários modelos efetivos que incorporem propriedades da QCD e investigando propriedades da matéria nuclear e como estas propriedades se comportam quando usamos estes modelos em várias aproximações.

No capítulo 2 realizamos um estudo comparativo entre o modelo de Walecka^[20] e o modelo Sigma-Linear. O primeiro já foi extensivamente estudado, e embora renormalizável, na aproximação de campo médio dentro da qual o modelo obtém seu maior sucesso, efeitos de renormalização não são qualitativamente importantes. O modelo Sigma-Linear, em contrapartida, foi bem menos explorado no contexto da matéria nuclear. A diferença fundamental com o modelo de Walecka é a simetria quiral (e sua quebra). Nossa contribuição vem do fato de estudarmos o comportamento de quantidades termodinâmicas em temperaturas diferentes de zero e densidades baixas. Mostraremos as diferenças existentes entre os modelos e as transições de fase.

Apresentamos no capítulo 3, resultados já conhecidos na literatura que mostram que o modelo Sigma-Linear^[24, 25] pode produzir excelentes resultados no que se refere a propriedades da matéria hadrônica (saturação da matéria nuclear), sendo para isto absolutamente fundamental os efeitos da renormalização. Nosso resultado vem a dar suporte a cálculos recentes feitos no contexto deste modelo para o espectro hadrônico^[26], onde se mostra que resultados fisicamente razoáveis e consistentes só podem ser obtidos mediante a inclusão de efeitos provenientes da renormalização. Esta é a conclusão principal desta primeira análise: o modelo de Walecka, não quiral, pode ser tratado com sucesso como uma teoria efetiva de nucleons e mesons interagentes na aproximação de campo médio sem necessariamente levar em conta efeitos de renormalização. Por outro lado, o modelo Sigma-Linear (com inclusão de mesons vetoriais) não pode prescindir destas correções para dar uma descrição adequada da matéria nuclear e suas propriedades termodinâmicas. Efeitos observáveis desta afirmação são mostrados no capítulo 5 onde estudamos, em particular, a adequação dos dois modelos para reproduzir massas máximas e raios de estrelas de nêutrons.

Uma vez estabelecida a importância da renormalização no modelo Sigma-Linear, estudamos, no capítulo 4 efeitos provenientes unicamente da simetria quiral, utilizando para isto apenas o setor mesônico do modelo. Neste caso efeitos de renormalização estão ausentes e as consequências da simetria quiral tornam-se mais aparentes. Mostramos em particular

que, caso o equilíbrio termodinâmico seja atingido em colisões entre íons pesados ultra-relativísticos, a razão entre a taxa de decaimento do pion nos dois canais poderia sinalizar a ocorrência da transição quiral.

Dedicamos o capítulo 5 ao estudo de sistemas físicos extremamente densos, que podem ser considerados como tendo temperatura zero, as estrelas de nêutrons. Estas estrelas foram exaustivamente estudadas desde a descoberta dos pulsares. O interesse neste caso vem do fato de que estas estrelas tornam-se um laboratório onde é possível, indiretamente testar as equações de estado de vários modelos e observar através das previsões de massa máxima e raio das estrelas, se estes modelos descrevem, qualitativamente, a matéria sob densidade muito alta. Na década de 70, o modelo de Walecka foi estudado e os resultados para este modelo são bem conhecidos na literatura. Nosso objetivo neste capítulo é fazer previsões para a massa e o raio das estrelas de nêutrons usando o modelo Sigma-Linear, com e sem quebra de simetria quiral e nas aproximações de campo médio e Hartree e comparar estas previsões com os resultados observacionais. Por fim, e para efeitos de comparação, estudamos ainda consequências observáveis (em princípio) das propriedades de confinamento e liberdade assintótica da QCD, incorporados no modelo de sacola. Mostramos que este modelo dá suporte à conjectura feita nos anos 60 sobre a possível existência de estrelas de nêutrons híbridas, isto é, estrelas com um caroço de matéria de quarks e uma camada externa de nucleons. Mostramos também que dentro do contexto de modelos efetivos e com base nos dados observacionais existentes não se pode decidir entre a existência de estrelas híbridas previstas pelo modelo de sacola e destas mesmas estrelas constituídas por nêutrons interagentes com simetria quiral quebrada e efeitos de flutuação do vácuo.

Capítulo 2

Modelos Efetivos

Após ter discutido a teoria fundamental das interações fortes, o próximo passo é discutir que tipos de fenômenos queremos descrever a partir de uma interação. Precisamos ter uma idéia clara sobre quanto da física fundamental estará realmente refletida nos dados experimentais aos quais temos acesso. Podemos nos perguntar, qual a influência da simetria quiral, das propriedades de confinamento e liberdade assintótica na descrição de propriedades hadrônicas envolvendo a interação entre bárions e mésons. Uma forma interessante de iniciar esta discussão talvez seja revendo um dos problemas fundamentais da física nuclear que é a interação nucleon-nucleon (NN). Existe informação teórica^[21] indicando que a teoria mesônica, ou mais precisamente um modelo efetivo de mésons, conduz a um tratamento apropriado para a interação NN. Além disto, há forte evidência fenomenológica para a imagem de troca de mésons em núcleos^[22]. Uma representação das forças nucleares deste tipo é necessária como ponto de partida para uma descrição consistente de um longo campo da estrutura nuclear, onde se incluem também efeitos devidos a graus de liberdade mesônicos e bariônicos. Neste sentido, tem sido desenvolvidos modelos para a interação NN em que o principal objetivo consiste em determinar em que medida a troca de mésons, só por si, é capaz de constituir um modelo quantitativo para a interação NN. Este ponto de vista tem sido encarado por uma parcela da comunidade de físicos como forma de ultrapassar as dificuldades que se colocam devido ao caráter não perturbativo da QCD, considerada como o pilar das idéias modernas de física nuclear.

O ponto de partida para estes conceitos remonta a década de 30. Em 1935, Yukawa estabelecia a hipótese segundo a qual as forças nucleares são mediadas por trocas de partículas com massa^[22]. Esta idéia original foi estendida para incorporar mésons pseudoescalares e pseudovetoriais. A partir de então, começou um trabalho mais sistemático que culminou com a proposta^[23] de subdividir o alcance da força nuclear em três regiões: a região clássica ($r \geq 2fm$, em que r designa a distância relativa entre os nucleons), a região

dinâmica ($1\text{fm} \leq r \leq 2\text{fm}$) e a região fenomenológica ($r \leq 1\text{fm}$). A região clássica é dominada pela troca de um pion que desempenha um papel importante na origem das forças nucleares. Na região intermediária a troca de 2 pions e a troca de mesons ω são os processos mais importantes. Finalmente, na região fenomenológica, processos de vários tipos desempenham papel importante: troca de muitos pions, mesons pesados e trocas que envolvem graus de liberdade de quarks e gluons. O caráter físico desta subdivisão é ainda hoje significativo, particularmente na construção de lagrangeanas efetivas inspiradas na QCD.

Em resumo, embora a interação NN e o núcleo em especial, sejam um tema de várias décadas, existe ainda um número de questões fundamentais sem resposta, como por exemplo, qual a origem das forças nucleares, em que medida o núcleo pode ser descrito por um sistema de nucleons elementares, quais as transições de fase que ocorrem numa matéria nuclear superdensa. Estas questões são importantes para o estudo de núcleos pesados e também de estrelas de nêutrons e outros problemas em astrofísica.

Em comparação com o conhecimento do potencial nucleon-nucleon e sua aplicabilidade à descrição das propriedades do núcleo finito, a pesquisa do papel de graus de liberdade subnucleônicos encontra-se ainda em sua infância. Provavelmente o modelo efetivo relativístico mais estudado, que inclui explicitamente a dinâmica mesônica é o modelo de Walecka. Este modelo é renormalizável mas, como mostraremos a seguir a partir de resultados bem conhecidos, o papel da renormalização, isto é, a inclusão de termos de flutuação do vácuo, não tem influência qualitativa nos resultados que nos propomos a investigar: a saturação da matéria nuclear, massas e raios de estrelas de nêutrons e propriedades termodinâmicas. Dado o exposto, um ponto de vista que nos parece adequado é encarar o modelo de Walecka como um modelo efetivo no mesmo sentido que os determinantes de Slater em conjunção com forças dependentes da densidade foi encarado, com tanto sucesso na década de 60. Como proposto por J. Negele nesta época, excelentes resultados para propriedades estruturais do núcleo atômico poderiam ser obtidos a partir do uso simultâneo da força nucleon-nucleon dependentes da densidade e determinantes de Slater para o estado fundamental. No caso do modelo de Walecka, podemos afirmar com segurança, que ele é um modelo adequado para descrição das propriedades a que nos referimos (matéria nuclear, matéria de neutrons, termodinâmica) na aproximação de campo médio sem correções de flutuação de vácuo. Como veremos no capítulo 3 elas podem ser facilmente incluídas, porém não são quantitativamente relevantes.

O objetivo do presente capítulo é estabelecer uma comparação entre o modelo de Walecka e um outro modelo bastante análogo, no que se refere aos campos interagentes, mas que exhibe uma diferença fundamental: o modelo Sigma-linear, que nos propomos a estudar carrega um ingrediente essencial da teoria das interações fortes, a Simetria Quiral (e sua quebra eventual). A relação do modelo Sigma linear com a Cromodinâmica Quântica é bem estabelecida, embora exija várias aproximações. No limite de comprimentos de onda grandes foi mostrado por Eguchi^[27] que a lagrangeana da QCD pode ser tratada como

uma lagrangeana efetiva da quarks interagentes, onde o papel dos gluons é assumido por autointerações quárticas entre os fermions^[28]. Esta lagrangeana, assim relacionada com a QCD pode ser bosonizada para produzir (na aproximação de campos locais) precisamente a lagrangeana do modelo sigma linear. Neste sentido, a lagrangeana do modelo σ -linear é mais fundamental que a do modelo de Walecka.

O objetivo deste capítulo é investigar de forma comparativa a relevância da simetria quiral para descrição de propriedades da matéria nuclear. Para isto trataremos o modelo sigma quiral da mesma forma efetiva como é usualmente tratado o modelo de Walecka, isto é, sem incluir flutuações de vácuo.

A conclusão principal do presente capítulo é que o modelo Sigma linear não deve ser tratado na mesma aproximação que o modelo de Walecka. Quando o fazemos, obtemos resultados pouco razoáveis fisicamente, já começando pela saturação da matéria nuclear, que não é possível dentro deste contexto para o modelo Sigma linear.

Tendo em vista a (remota) relação entre o modelo Sigma e QCD, vamos tratá-lo como uma teoria renormalizável e incluir as flutuações do vácuo. Mostraremos então no capítulo 3 que, ao contrário do modelo de Walecka, as flutuações de vácuo são, para os resultados do modelo quiral, fundamentais.

Ao serem incluídas as flutuações do vácuo, todos os resultados melhoram sensivelmente produzindo para massas máximas de estrelas de neutrons, um resultado melhor do que o do modelo de Walecka.

2.1 Modelo de Walecka

Este modelo descreve os nucleons e suas interações dentro do núcleo através de campos bariônicos(ψ) com massa M , interagindo com mésons escalares(ϕ) de massa m_σ e mésons vetoriais(ω) de massa m_ω . Trabalharemos na aproximação de campo médio, onde os nucleons interagem com mésons, cujos campos são considerados como clássicos. Neste caso, o campo bariônico é acoplado ao campo escalar através da densidade escalar($\bar{\psi}\psi$) e ao campo vetorial mesônico através da corrente bariônica conservada ($\bar{\psi}\gamma_\lambda\psi$) para reproduzir o carácter atrativo e repulsivo, respectivamente, que são responsáveis pela saturação nuclear.

A densidade de lagrangeana do modelo é dada por:

$$\mathcal{L}_{QHD} = \bar{\psi} [\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_\omega V^\mu) - (M - g_\sigma \phi)] \psi + \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_\sigma^2 \phi^2]$$

$$-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_v^2 V^\mu V_\mu \quad (2.1)$$

onde $F^{\mu\nu}$ é definido por

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu \quad (2.2)$$

e a métrica usada neste trabalho é a da ref.[29].

As equações de movimento dos campos podem ser calculadas através da lagrangeana da maneira usual:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial q_i / \partial x^\mu)} - \partial \mathcal{L} / \partial q_i = 0 \quad (2.3)$$

onde q_i é uma das coordenadas generalizadas(ψ, ϕ, V_μ) e tem como resultado

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_s^2) \phi = g_s \bar{\psi} \psi \quad (2.4)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m_v^2 V^\nu = g_v \bar{\psi} \gamma^\nu \psi \quad (2.5)$$

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - g_v V_\mu) - (M - g_s \phi)] \psi = 0 \quad (2.6)$$

onde as equações dos mésons são as equações de Klein-Gordon e para o fermion a equação de Dirac.

Para encontrarmos as equações de estado para este modelo partimos do tensor momento-energia que é dado por:

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \mathcal{L} + \frac{\partial q_i}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial q_i / \partial x_\mu)} \quad (2.7)$$

Neste caso o tensor é descrito como

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[-\partial_\lambda \phi \partial^\lambda \phi + m_s^2 \phi^2 + \frac{1}{2} F_{\lambda\sigma} F^{\lambda\sigma} - m_v^2 V_\lambda V^\lambda \right] g_{\mu\nu} + i\bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\nu \psi + \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \partial_\nu V^\lambda F_{\lambda\mu} \quad (2.8)$$

As equações de estado podem ser obtidas pelas seguintes relações (29)

$$\begin{aligned} e &= \langle T_{00} \rangle \\ p &= \frac{1}{3} \langle T_{ii} \rangle \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde e e p são respectivamente a densidade de energia e a pressão do sistema.

Podemos agora usar o modelo de Walecka para a matéria nuclear infinita. Para isto, utilizamos a aproximação de campo médio que é válida para um sistema uniforme com alta densidade bariônica ρ_B . Substituiremos os campos dos mésons por seus valores médios, $\hat{\phi} \rightarrow \langle \phi \rangle \equiv \phi_0$ e $V_\mu \rightarrow \langle V_\mu \rangle \equiv \delta_{\mu 0} V_0$ onde as três componentes espaciais do campo vetorial são zero, pois o meio é considerado isotrópico.

As equações dos campos dos mésons, eq.(2.4) e eq.(2.5), podem ser resolvidas para ϕ_0 e V_0

$$\phi_0 = \frac{g_s}{m_s^2} \langle \bar{\psi} \psi \rangle \equiv \frac{g_s}{m_s^2} \rho_s \quad (2.10)$$

$$V_0 = \frac{g_v}{m_v^2} \langle \psi^\dagger \psi \rangle \equiv \frac{g_v}{m_v^2} \rho_B \quad (2.11)$$

onde $\rho_B = \langle \psi^\dagger \psi \rangle$ é a densidade bariônica e $\rho_s = \langle \bar{\psi} \psi \rangle$ é a densidade escalar.

Como a densidade bariônica é conservada, pode-se encontrar diretamente o valor de V_0 . Quanto ao méson escalar, seu valor dependerá das interações e a equação para ϕ_0 deve ser resolvida autoconsistentemente.

Então, a lagrangeana que descreve este sistema na aproximação de campo médio é dada por:

$$\mathcal{L}_{QHD} = \bar{\psi} [i\gamma_\mu \partial^\mu - g_v \gamma_0 V_0 - (M - g_s \phi_0)] \psi - \frac{1}{2} m_s^2 \phi_0^2 + \frac{1}{2} m_v^2 V_0^2 \quad (2.12)$$

Então nesta aproximação, a equação de movimento do campo fermiônico (2.6) pode ser resolvida exatamente:

$$[i\gamma_\mu \partial^\mu - g_v \gamma^0 V_0 - M^*] \psi = 0 \quad (2.13)$$

onde

$$M^* = M - g_s \phi_0 = M - \frac{g_s^2}{m_s^2} \rho_s \quad (2.14)$$

onde usamos a relação dada em (2.11). Neste caso, a massa do nucleon irá variar de acordo com a densidade escalar.

A equação que descreve os campos bariônicos quantizados é a equação de Dirac, onde a massa original dos nucleons é modificada pela relação $M^* = M - g_s \phi_0$, e a solução para esta equação em termos de ondas planas é dada por

$$\psi(x, t) = U(k, \lambda) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\epsilon(k)t} \quad (2.15)$$

onde $U(k, \lambda)$ representa uma das componentes de spin do campo fermiônico e λ representa o índice de spin.

Substituindo ψ na eq.(2.13) teremos

$$[\alpha \cdot k + \beta M^*] U(k, \lambda) = (\epsilon(k) - g_v V_0) U(k, \lambda) \quad (2.16)$$

onde $\alpha = \gamma_0 \gamma$ e $\beta = \gamma_0$.

Para encontrar os autovalores de energia devemos elevar ao quadrado a expressão acima e usar as relações de anticomutação das matrizes de Pauli ($\alpha\beta + \beta\alpha = 0$)

$$\epsilon^{(\pm)}(k) = g_v V_0 \pm \epsilon^* \quad (2.17)$$

onde $\epsilon^* = (k^2 + M^{*2})^{1/2}$.

A forma explícita para a componente de spin do campo pode agora ser escrita como

$$U(k, \lambda) = \left[\frac{\epsilon^* + M^*}{2M^*} \right]^{1/2} \left[\frac{1}{\epsilon^* + M^*} \right] X_\lambda \quad (2.18)$$

onde X_λ é uma das componentes dos spinores de Pauli.

A equação (2.18) depende apenas do campo escalar ϕ_0 , o campo vetorial V_0 desloca o valor da energia mas não muda a autofunção.

A autofunção pode ser expandida num conjunto completo de estados que incluem as antipartículas. A forma geral fica

$$\hat{\psi}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{k, \lambda} \left[\hat{A}_{k\lambda} U(k, \lambda) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \epsilon^+(k)t)} + \hat{B}_{k\lambda}^\dagger V(k, \lambda) e^{(-i\vec{k} \cdot \vec{x} - \epsilon^-(k)t)} \right] \quad (2.19)$$

onde V é o volume, λ representa números quânticos intrínsecos e $\epsilon^\pm$ é dada pela expressão (2.17). O operador de campo bariônico pode ser escrito em termos dos operadores aniquilação e criação de quasifermions (antifermions) $\hat{A}_k(\hat{B}_k)$. Estes operadores obedecem as relações de anticomutação

$$\{\hat{A}_{k,\lambda}^\dagger, \hat{A}_{k',\lambda'}\} = \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'} \quad (2.20)$$

o mesmo ocorrendo para $\hat{B}, \hat{B}^\dagger$.

O tensor momento-energia pode ser calculado nesta aproximação a partir da lagrangeana (2.12), tendo como resultado:

$$T^{\mu\nu} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2}m_v^2V_0^2 - \frac{1}{2}m_s^2\phi_0^2 \right) \quad (2.21)$$

Usando as relações dadas na eq.(2.9) podemos encontrar a expressão para a densidade de energia e a pressão deste modelo

$$\epsilon = \psi^\dagger [-i\alpha \cdot \nabla + \beta M^* + g_v V_0] \psi - \frac{1}{2}m_v^2V_0^2 + \frac{1}{2}m_s^2\phi_0^2 \quad (2.22)$$

$$p = \psi^\dagger [i\partial^t - \beta M^* - g_v V_0] \psi + \frac{1}{2}m_v^2V_0^2 - \frac{1}{2}m_s^2\phi_0^2 \quad (2.23)$$

Com a expressão acima é possível construir a hamiltoniana do sistema lembrando que

$$H = \int d^3x \quad e \quad (2.24)$$

$$P = \int d^3x \quad p \quad (2.25)$$

Usando as eqs.(2.19),(2.22),(2.23) podemos escrever $\hat{H}$ e $\hat{P}$ em termos dos operadores $\hat{A}$ e $\hat{B}$

$$\hat{H} = \sum_{k,\lambda} \epsilon^*(k) \left[\hat{A}_k^\dagger \hat{A}_k - \hat{B}_k \hat{B}_k^\dagger \right] + g_v V_0 \hat{B} + V \frac{1}{2} \left[m_s^2 \phi_0^2 - m_V^2 V_0^2 \right] \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \hat{P} = & \frac{1}{3} \sum_{k,\lambda} \epsilon^*(k) \left[\hat{A}_k^\dagger \hat{A}_k - \hat{B}_k \hat{B}_k^\dagger \right] - \frac{1}{3} \sum_{k,\lambda} \frac{M^{*2}}{\epsilon^*} \left[\hat{A}_k^\dagger \hat{A}_k - \hat{B}_k \hat{B}_k^\dagger \right] \\ & - V \frac{1}{2} \left[m_s^2 \phi_0^2 - m_V^2 V_0^2 \right] \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde $\hat{B}$ (densidade bariônica) é escrito em termos dos operadores de aniquilação e criação como

$$\hat{B} = \sum_{k,\lambda} \left(\hat{A}_k^\dagger \hat{A}_k + \hat{B}_k \hat{B}_k^\dagger \right) = \sum_{k,\lambda} \left(\hat{A}_k^\dagger \hat{A}_k - \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k \right) + \sum_{k,\lambda} 1 \quad (2.28)$$

O último termo da expressão acima pode ser desprezado, o que equivale a ignorarmos contribuições infinitas do vácuo nesta aproximação

$$\hat{B} = \int d^3x (\psi^\dagger \psi - \langle 0 | \psi^\dagger \psi | 0 \rangle) = \sum_{k,\lambda} \left(\hat{A}_k^\dagger \hat{A}_k - \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k \right) \quad (2.29)$$

Para o cálculo da energia teremos o termo

$$\sum_{k,\lambda} \epsilon^*(k) (\hat{A}_k^\dagger \hat{A}_k - \hat{B}_k \hat{B}_k^\dagger) = \sum_{k,\lambda} \epsilon^*(k) (\hat{A}_k^\dagger \hat{A}_k + \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k) + \sum_{k,\lambda} \sqrt{k^2 + M^{*2}} \quad (2.30)$$

Aqui, o vácuo ainda deixa uma contribuição infinita já que o vácuo livre contém partículas de massa M , com isto $\epsilon^* \neq \epsilon$. A contribuição das flutuações do vácuo para a hamiltoniana do sistema é dada por

$$\delta H = \sum_{k,\lambda} (\sqrt{k^2 + M^2} - \sqrt{k^2 + M^{*2}}) \quad (2.31)$$

A hamiltoniana que trabalharemos a partir de agora não levará em conta as contribuições do vácuo. Estas contribuições serão levadas em conta em cálculos posteriores contidos no cap.(3). Então, neste caso

$$\hat{H}_{QHD} = \hat{H} - \delta \hat{H} \quad (2.32)$$

$$\hat{H}_{QHD} = \sum_{k,\lambda} \epsilon^*(k) [\hat{A}_k^\dagger \hat{A}_k + \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k] + g_v V_0 \hat{B} + V \frac{1}{2} [m_s^2 \phi_0^2 - m_v^2 V_0^2] \quad (2.33)$$

$$\hat{P}_{QHD} = \frac{1}{3} \sum_{k,\lambda} \frac{k^2}{\epsilon^*(k)} [\hat{A}_k^\dagger \hat{A}_k + \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k] - V \frac{1}{2} [m_s^2 \phi_0^2 - m_v^2 V_0^2] \quad (2.34)$$

2.1.1 Equações de Estado para Temperatura Zero

À temperatura zero, o estado fundamental do sistema $|F\rangle$ pode ser encontrado^[20], preenchendo-se os estados de momento k até o estado k_F , que é associado a energia de Fermi do sistema. É suposto que cada estado pode conter γ fermions $\gamma = 4$ ($\gamma = 2$) para matéria nuclear (matéria de neutrons). Então, neste caso, as expressões ficam

$$\rho_B = \frac{1}{V} \langle F | \psi^\dagger \psi | F \rangle = \frac{1}{V} \sum_{k,\lambda}^{k_F} U^\dagger U \quad (2.35)$$

$$\rho_s = \frac{1}{V} \langle F | \bar{\psi} \psi | F \rangle = \frac{1}{V} \sum_{k,\lambda}^{k_F} \bar{U} U \quad (2.36)$$

$$e = \frac{1}{V} \langle F | \hat{H} | F \rangle = g_v V_0 \rho_B - \frac{1}{2} m_v^2 V_0^2 + \frac{1}{2} m_s^2 \phi_0^2 + \frac{1}{V} \sum_{k,\lambda}^{k_F} \epsilon^* U^\dagger U \quad (2.37)$$

$$p = \frac{1}{V} \langle F | \hat{P} | F \rangle = +\frac{1}{2} m_v^2 V_0^2 - \frac{1}{2} m_s^2 \phi_0^2 + \frac{1}{V} \sum_{k,\lambda}^{k_F} \frac{k^2}{\epsilon^*} U^\dagger U \quad (2.38)$$

Utilizamos para chegar nestes resultados as relações $\bar{U}U = \frac{M^*}{\epsilon^*} U^\dagger U$ e $\bar{v}v = -\frac{M^*}{\epsilon^*} v^\dagger v$. Para temperatura zero, estas expressões tem como resultado:

$$\rho_B = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k = \frac{\gamma k_F^3}{6\pi^2} \quad (2.39)$$

$$\rho_s = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \frac{M^*}{\epsilon^*} \quad (2.40)$$

$$e = \frac{1}{2} \frac{g_v^2}{m_v^2} \rho_B^2 + \frac{1}{2} m_s^2 g_s^2 (M - M^*)^2 + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \epsilon^* \quad (2.41)$$

$$p = \frac{1}{2} \frac{g_v^2}{m_v^2} \rho_B^2 - \frac{1}{2} m_s^2 g_s^2 (M - M^*)^2 + \frac{\gamma}{3(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \frac{k^2}{\epsilon^*} \quad (2.42)$$

onde V_0 e ϕ_0 foram substituídos pelos respectivos valores, dados pela eq.(2.11). Substituindo o valor de ρ_s na eq.(2.14) para a massa do fermion teremos uma expressão final para a variação de M^* em função de k_F

$$M^* = M - \frac{g_s^2}{m_s^2} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \frac{M^*}{\epsilon^*} \quad (2.43)$$

No limite de altas densidades $k_F \rightarrow \infty$ a equação autoconsistente para a massa mostra que os nucleons tornam-se sem massa [30].

$$M^* \rightarrow M \left[1 + \frac{g_s^2}{m_s^2} \frac{\gamma k_F^2}{4\pi^2} \right]^{-1} \quad (2.44)$$

e a energia fica sendo

$$e/\rho_B \rightarrow \frac{1}{2} \frac{g_v^2}{m_v^2} \rho_B + \frac{3}{4} k_F + \dots \quad (2.45)$$

neste limite a energia é dominada pela repulsão vetorial(primeiro termo) e o próximo termo é a energia cinética de um gás de Fermi sem massa.

A pressão torna-se

$$P \rightarrow e \quad (2.46)$$

Figura 2.1: Massa efetiva vs densidade para o modelo de Walecka

Figura 2.2: Saturação da matéria nuclear para o modelo de Walecka

2.1.2 Equações de Estado para Temperatura Finita

Nosso objetivo é descrever o sistema à temperatura finita, para isto devemos construir o potencial termodinâmico e a função partição que são dados por

$$Z = \text{Tr} \exp \left[-(\hat{H} - \mu \hat{B})/T \right] \quad (2.47)$$

$$\equiv \exp [-\Omega(T, V, \mu)/T] \quad (2.48)$$

onde $k_B = 1$.

O potencial termodinâmico pode ser construído sabendo-se que^[31]

$$\Omega(T, V, \mu) = -pV = E - TS - \mu B \quad (2.49)$$

$$d\Omega = -SdT - pdV - Bd\mu \quad (2.50)$$

Usando a relação para a função partição dada em eq.(2.48) o potencial termodinâmico pode ser calculado na aproximação de campo médio. O resultado encontrado é:

$$\Omega(T, V, \mu) = -T \ln Z = \frac{1}{2} (m_s^2 \phi_0^2 - m_v^2 V_0^2) V - T \sum_{k, \lambda} [\ln (1 + e^{-(\epsilon^* - \nu)/T}) + \ln (1 + e^{-(\epsilon^* + \nu)/T})] \quad (2.51)$$

onde o potencial efetivo ν é definido por

$$\nu \equiv \mu - g_v V_0 \quad (2.52)$$

O valor médio de qualquer operador neste caso pode ser calculado sabendo-se que

$$A \equiv \langle\langle \hat{A} \rangle\rangle = Z^{-1} T \text{Tr}(\hat{A} e^{-(\hat{H} - \mu \hat{B})/T}) \quad (2.53)$$

Usando a expressão para o potencial termodinâmico dada em (2.51) podemos encontrar o valor das funções já calculadas para temperatura zero. Neste caso teremos

$$\rho_B = \frac{\langle\langle \hat{B} \rangle\rangle}{V} = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right) = \frac{1}{V} \sum_{k, \lambda} (f_+ - f_-) \quad (2.54)$$

$$\rho_s = \frac{\langle\langle \partial \hat{H} / \partial M \rangle\rangle}{V} = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial M} \right) = \frac{1}{V} \sum_{k, \lambda} \frac{M^*}{\epsilon^*} (f_+ + f_-) \quad (2.55)$$

onde $f_{\pm}$ são funções distribuição para partículas e antipartículas, respectivamente e a forma explícita das funções é encontrada minimizando o potencial termodinâmico com relação a estas funções. Estas funções tem a seguinte forma

$$f_{\pm} = \frac{1}{1 + \exp(\epsilon^* \mp \nu)/T} \quad (2.56)$$

onde $\epsilon^* = (k^2 + M^{*2})^{1/2}$ e M^* é dada pela expressão (2.14).

Com estes resultados podemos encontrar as equações que determinam os valores dos campos. Usamos para isto $\partial \Omega / \partial \phi_0 = 0$ e $\partial \Omega / \partial V_0 = 0$,

$$\phi_0 = \frac{g_s}{m_s^2} \frac{1}{V} \sum_{k, \lambda} \frac{M^*}{\epsilon^*} (f_+ + f_-) = \frac{g_s}{m_s^2} \langle\langle \hat{\rho}_s \rangle\rangle \quad (2.57)$$

$$V_0 = \frac{g_v}{m_v^2} \frac{1}{V} \sum_{k, \lambda} (f_+ - f_-) = \frac{g_v}{m_v^2} \langle\langle \hat{\rho}_B \rangle\rangle \quad (2.58)$$

As demais variáveis podem ser encontradas a partir do potencial termodinâmico usando as relações [32]

$$S = - \left(\frac{\partial \Omega(T, V, \mu)}{\partial T} \right)_{V, \mu} \quad (2.59)$$

$$p = - \left(\frac{\partial \Omega(T, V, \mu)}{\partial V} \right)_{T, \mu} \quad (2.60)$$

onde S é a entropia do sistema.

A partir das relações dadas acima, podemos deduzir diretamente as equações de estado para o modelo de Walecka com temperatura finita, sem correções de flutuação do vácuo^[31]:

$$e_{\text{QHD}} = \frac{1}{V} \langle F|H|F \rangle = \frac{1}{2} \frac{C_V^2}{M^2} \rho_B^2 + \frac{1}{2} \frac{M^2}{C_S^2} (M^* - M)^2 + \frac{\gamma}{8\pi^3} \int d^3k \epsilon^* (f_+ + f_-) \quad (2.61)$$

$$p_{\text{QHD}} = \frac{1}{V} \langle F|P|F \rangle = \frac{1}{2} \frac{C_V^2}{M^2} \rho_B^2 - \frac{1}{2} \frac{M^2}{C_S^2} (M^* - M)^2 + \frac{\gamma}{24\pi^3} \int d^3k \frac{k^2}{\epsilon^*} (f_+ + f_-) \quad (2.62)$$

$$s_{\text{QHD}} = - \frac{\gamma}{8\pi^3} \int d^3k \left[f_+ \ln \left(\frac{f_+}{1 - f_+} \right) + \ln(1 - f_+) + f_- \ln \left(\frac{f_-}{1 - f_-} \right) + \ln(1 - f_-) \right] \quad (2.63)$$

$$\rho_s = \frac{\gamma}{8\pi^3} \int d^3k \frac{M^*}{\epsilon^*} (f_+ + f_-) \quad (2.64)$$

$$\rho_B = \frac{1}{V} \langle F|B|F \rangle = \frac{\gamma}{8\pi^3} \int d^3k (f_+ - f_-); \quad (2.65)$$

E a equação autoconsistente para a massa é deduzida a partir da eq.(2.55)

$$M^* = M - \frac{g_s^2}{m_s^2} \rho_s = M - \frac{\gamma}{8\pi^3} \frac{C_S^2}{M^2} \int d^3k \frac{M^*}{\epsilon^*} (f_+ + f_-) \quad (2.66)$$

onde $C_S^2 = M^2 g_s^2 / m_s^2$ e $C_V^2 = M^2 g_v^2 / m_v^2$ são os dois parâmetros da teoria, cujos valores serão ajustados para reproduzir a propriedade de saturação nuclear à temperatura zero com $k_F = 1.42 \text{ fm}^{-1}$. Os valores usados neste trabalho são os mesmos da ref.[20] com $C_V^2 = 195.7$ e $C_S^2 = 266.9$.

Figura 2.3: Massa Efetiva vs temperatura para densidades baixas-Modelo de Walecka

Figura 2.4: Pressão vs temperatura para densidades baixas-Modelo de Walecka

Figura 2.5: A razão entre a energia do sistema e a energia dos fermions sem interação vs temperatura para densidades baixas-Modelo de Walecka

2.2 Modelo Sigma Linear

A lagrangeana mais geral deste modelo é dada por^[33]:

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0(x) + \mathcal{L}_{SB}(x) \quad (2.67)$$

A lagrangeana $\mathcal{L}_0$ descreve um isodoubleto $\psi = (p, n)$ interagindo com um isotripleto de pions ($\pi^i = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$) via um acoplamento de Yukawa pseudoescalar e com um isoescalar méson σ via um acoplamento de Yukawa escalar. A lagrangeana simétrica tem a seguinte forma^[34]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = & \bar{\psi} [i\gamma_\mu \partial_\mu - g(\sigma + i\tau \cdot \pi \gamma_5)] \psi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \cdot \partial^\mu \sigma + \partial_\mu \pi^i \cdot \partial^\mu \pi^i) \\ & - \frac{1}{4} \lambda (\sigma^2 + \pi \cdot \pi - v^2)^2 \end{aligned} \quad (2.68)$$

Esta lagrangeana é simétrica tanto por transformações de isospin quanto por axiais. A lagrangeana $\mathcal{L}_{SB}$ contém o termo de quebra de simetria e tem a forma:

$$\mathcal{L}_{SB} = \epsilon \mathcal{L}_{SB}^{(1)} = \epsilon \sigma \quad (2.69)$$

A única restrição ao termo de quebra de simetria é que ele seja pequeno e que não quebre a simetria de isospin, então poderíamos ter outros tipos de lagrangeanas igualmente válidas.

$$\begin{aligned}\epsilon_2 \mathcal{L}_{SB}^{(2)} &= \epsilon_2 \bar{\psi} \psi \\ \epsilon_3 \mathcal{L}_{SB}^{(3)} &= \epsilon_3 \pi \cdot \pi\end{aligned}\quad (2.70)$$

A lagrangeana de quebra de simetria escolhida na eq.(2.69) vem do fato de querermos reproduzir PCAC.[35]

Para encontrarmos o valor do vácuo neste modelo consideramos a lagrangeana simétrica. Um campo quântico descreve partículas que aparecem ou somem no vácuo, neste sentido, o vácuo é o que sobra quando desligamos todos os campos quânticos. Para minimizarmos a energia, consideramos apenas o termo da energia potencial, ou seja

$$V = \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \pi \cdot \pi - v^2)^2 \quad (2.71)$$

devemos minimizar a energia potencial em termos dos campos σ e π

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} = \frac{\partial V}{\partial \pi} = 0 \quad (2.72)$$

tendo como resultado as expressões

$$\lambda \sigma (\sigma^2 + \pi \cdot \pi - v^2) = 0 \quad (2.73)$$

$$\lambda \pi (\sigma^2 + \pi \cdot \pi - v^2) = 0 \quad (2.74)$$

Neste caso, o modelo admite duas soluções dependendo do valor de v^2 . No primeiro caso $v^2 < 0$ e tem como única solução para minimizar a energia potencial $\sigma = \pi = 0$ e o vácuo da teoria também é simétrico em relação a estes campos. Podemos agora definir o valor da constante v como sendo $v^2 \equiv -u^2/\lambda$, onde u^2 é positivo, e então, a energia potencial fica

$$V = \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \pi \cdot \pi)^2 + \frac{1}{2}u^2(\sigma^2 + \pi \cdot \pi) + cte \quad (2.75)$$

Se substituirmos este resultado na lagrangeana $\mathcal{L}_0$ (2.68) teremos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 = & \bar{\psi} [i\gamma_\mu \partial_\mu - g(\sigma + i\tau \cdot \pi \gamma_5)] \psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - u^2 \sigma^2) \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi \cdot \partial^\mu \pi - u^2 \pi \cdot \pi) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \pi^2)^2 + cte\end{aligned}\quad (2.76)$$

Os coeficientes dos termos quadráticos dos campos podem ser interpretados como sendo suas massas, os mésons tem então massas iguais e com valor de $m_\pi = m_\sigma = \sqrt{\lambda|v|^2}$, podemos concluir que estamos no modo de Wigner-Weyl de realização de simetria. O vácuo não contém flutuações dos campos, o que faz com que o valor esperado da componente quântica de um campo neste estado seja nula, ou seja, um campo pode ser escrito como uma soma de uma componente clássica e uma quântica. Então, é possível determinar o valor da componente clássica a partir do vácuo. Neste modo de simetria o valor clássico dos campos é $\langle \sigma \rangle = \langle \pi \rangle = 0$. Notamos pela lagrangeana do modelo que neste caso o nucleon não tem massa, por isto este modo de simetria é não físico já que sabemos que o nucleon possui massa e que não há uma partícula escalar com a mesma massa do pion.

O segundo caso para o valor do vácuo é quando consideramos $v^2 > 0$. Neste caso, o estado de mínima energia é degenerado e pode ocorrer em qualquer ponto da circunferência (círculo quiral) dada por:

$$\sigma^2 + \pi \cdot \pi = v^2 \quad (2.77)$$

Entre as muitas escolhas possíveis para os campos escolhemos, por critérios físicos (ou seja escolheremos os pions como sendo os bosons sem massa) $\sigma = v$ e $\pi = 0$. Então, se separarmos os campos nas componentes clássica e quântica como descrito acima teremos para estes campos:

$$\sigma = \sigma' + v, \quad \pi = \pi' \quad (2.78)$$

onde σ' e π' são as componentes quânticas dos campos escalar e do campo pseudoescalar, respectivamente.

Com isto a lagrangeana simétrica fica

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 = & \bar{\psi} [i\gamma_\mu \partial_\mu - gv - g(\sigma' + i\tau \cdot \pi' \gamma_5)] \psi + \frac{1}{2}[\partial_\mu \sigma' \partial^\mu \sigma' + \partial_\mu \pi' \cdot \partial^\mu \pi'] \\ & - \frac{\lambda}{4}(\sigma'^2 + \pi' \cdot \pi')^2 - \lambda v \sigma'(\sigma'^2 + \pi' \cdot \pi') - \lambda v^2 \sigma'^2\end{aligned}\quad (2.79)$$

Neste caso as massas das partículas podem ser interpretadas como sendo

$$M = gv, \quad m_\sigma = \sqrt{2\lambda}v, \quad m_\pi = 0 \quad (2.80)$$

Este modo de simetria é conhecido como modo de Nambu-Goldstone ou modo espontaneamente quebrado por que, neste caso, as massas dos mésons não são iguais e o vácuo da teoria deixa de ser simétrico em relação aos campos. É a existência do modo de Nambu-Goldstone que torna o modelo sigma particularmente interessante^[36].

Apesar da massa do pion ser pequena ela não pode ser considerada zero. Esta disparidade desaparece quando introduzimos o termo de quebra de simetria. Com este termo a energia potencial é dada por

$$V = \frac{1}{4}\lambda(\sigma^2 + \pi \cdot \pi - v^2)^2 - \epsilon\sigma \quad (2.81)$$

Encontramos o mínimo da energia através da eq.(2.72) e obtemos para este caso

$$\lambda\sigma(\sigma^2 + \pi \cdot \pi - v^2) - \epsilon = 0 \quad (2.82)$$

$$\lambda\pi(\sigma^2 + \pi \cdot \pi - v^2) = 0 \quad (2.83)$$

Vemos que o valor do campo do pion continua como no caso anterior, ou seja, $\pi = 0$ é solução da segunda equação. Para a primeira equação podemos encontrar uma solução aproximada já que o parâmetro ϵ é pequeno. Se ϵ fosse zero, a solução para a equação seria $\langle \sigma \rangle = \pm v$, então soluções da forma $\langle \sigma_+ \rangle = v + \beta\epsilon$, $\langle \sigma_- \rangle = -v + \beta\epsilon$, seriam soluções da primeira equação. Substituindo na equação $\partial V / \partial \sigma = 0$ teremos:

$$2\lambda v^2 \beta \epsilon - \epsilon = 0, \quad \beta = \frac{1}{2\lambda v^2} \quad (2.84)$$

onde termos não lineares em ϵ foram desprezados.

Com isto teremos os valores para o campo escalar no vácuo

$$\sigma = v + \frac{\epsilon}{2\lambda v^2} + O(\epsilon^2) \quad (2.85)$$

Neste caso também, o campo σ pode ser escrito

$$\sigma = s + f \quad (2.86)$$

onde s é a componente quântica do campo escalar e

$$f = v + \frac{\epsilon}{2\lambda v^2} + O(\epsilon^2) \quad (2.87)$$

Assim a lagrangeana mais geral para o modelo sigma linear fica sendo descrita por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} [i\gamma_\mu \partial_\mu - g(s + f + i\tau \cdot \pi \gamma_5)] \psi + \frac{1}{2} [\partial_\mu s \partial^\mu s + \partial_\mu \pi \cdot \partial^\mu \pi] - \lambda \frac{1}{4} (s^2 + \pi \cdot \pi)^2 \\ & - \frac{1}{2} \lambda s^2 (3f^2 - v^2) - \frac{1}{2} \lambda \pi \cdot \pi (f^2 - v^2) - \lambda s f (s^2 + \pi \cdot \pi) \end{aligned} \quad (2.88)$$

Na lagrangeana acima podemos agora identificar a massa das partículas

$$M = gf \approx g(v + \frac{\epsilon}{2\lambda v^2} + \dots) \quad (2.89)$$

$$m_\pi^2 = \lambda(f^2 - v^2) \approx \epsilon/v + \dots \quad (2.90)$$

$$m_\sigma^2 = \lambda(3f^2 - v^2) \approx \lambda(2v^2 + 3\epsilon/\lambda v + \dots) \quad (2.91)$$

Substituindo estes valores na lagrangeana da eq.(2.88) teremos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\sigma = & \bar{\psi} [i\gamma_\mu \partial_\mu - M - g s - i g \tau \cdot \pi \gamma_5] \psi + \frac{1}{2} [\partial_\mu s \partial^\mu s - m_\sigma^2] \\ & + \frac{1}{2} [\partial_\mu \pi \cdot \partial^\mu \pi - m_\pi^2] - g_2 (s^2 + \pi \cdot \pi)^2 - g_1 s [s^2 + \pi \cdot \pi] \end{aligned} \quad (2.92)$$

onde $g_1 = g(m_\sigma^2 - m_\pi^2)/2M$ e $g_2 = g^2(m_\sigma^2 - m_\pi^2)/8M^2$.

Então, com o termo de quebra de simetria, o pion adquire uma massa que é proporcional ao termo de quebra da simetria, a corrente axial não é conservada e as massas do méson escalar e do nucleon são deslocadas de seu valor no caso quiral por termos da ordem de $O(\epsilon)$. Como era esperado, no limite $\epsilon \rightarrow 0, m_\pi \rightarrow 0$ e retornamos ao caso com simetria quiral.

2.2.1 Equações de Estado para Temperatura Zero

Para podermos fazer uma comparação adequada com o modelo de Walecka e analisarmos a propriedade de saturação nuclear neste modelo, devemos acrescentar à lagrangeana original do modelo sigma quiral uma lagrangeana com campos vetoriais neutros (representando o meson ω). Desta forma a lagrangeana com a qual trabalharemos é dada por^[37]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\sigma\omega} = & \bar{\psi} [i\gamma_\mu \partial_\mu - M - g_s - ig\tau \cdot \pi \gamma_5 - g_v \gamma_\mu V_\mu] \psi + \frac{1}{2} [\partial_\mu s \partial^\mu s - m_s^2] + \frac{1}{2} [\partial_\mu \pi \cdot \partial^\mu \pi - m_\pi^2] \\ & - g_2 (s^2 + \pi \cdot \pi)^2 - g_1 s [s^2 + \pi \cdot \pi] + \frac{1}{2} m_v^2 V_\mu V^\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.93)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$ é dado pela mesma expressão que no modelo de Walecka.

Como no caso anterior, as equações de estado para o modelo sigma-linear quiral e com quebra de simetria podem ser encontradas na aproximação de campo médio, usando os mesmos procedimentos que no modelo de Walecka e usando na lagrangeana acima o limite de $m_\pi = 0$, teremos os seguintes resultados:

$$\rho_s = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \frac{M^*}{\epsilon^*} \quad (2.94)$$

$$e_\sigma = \frac{1}{2} \frac{C_V^2}{M^2} \rho_B^2 + \frac{1}{8} \frac{1}{C_S^2} (M^2 - M^{*2})^2 + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \epsilon^* \quad (2.95)$$

$$p_\sigma = \frac{1}{2} \frac{C_V^2}{M^2} \rho_B^2 - \frac{1}{8} \frac{1}{C_S^2} (M^2 - M^{*2})^2 + \frac{\gamma}{3(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \frac{k^2}{\epsilon^*} \quad (2.96)$$

e a relação para a massa é dada por

$$M^* (M^{*2} - M^2) = -2C_S^2 \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \frac{M^*}{\epsilon^*} \quad (2.97)$$

No caso de quebra de simetria quiral, teremos as seguintes expressões para as equações de estado:

$$e_{SB} = \frac{1}{2} \frac{C_V^2}{M^2} \rho_B^2 + \frac{1}{2} \frac{M^2}{C_S^2} (M - M^*)^2 + \frac{(m_\sigma^2 - m_\pi^2)}{8C_S^2 m_\sigma^2} (M^* - M)^3 (3M + M^*)$$

$$+ \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3 k \epsilon^*$$
(2.98)

$$p_{SB} = \frac{1}{2} \frac{C_V^2}{M^2} \rho_B^2 - \frac{1}{2} \frac{M^2}{C_S^2} (M - M^*)^2 - \frac{(m_\sigma^2 - m_\pi^2)}{8C_S^2 m_\sigma^2} (M^* - M)^3 (3M + M^*)$$

$$+ \frac{\gamma}{3(2\pi)^3} \int d^3 k \frac{k^2}{\epsilon^*}$$
(2.99)

E a equação auto-consistente para a massa é dada por

$$M^*(M^{*2} - M^2 - \frac{m_\pi^2}{m_\sigma^2}(M^{*2} - 3M^2)) + \frac{2M^3 m_\pi^2}{m_\sigma^2} = -2 \frac{\gamma}{(2\pi)^3} C_S^2 \int d^3 k \frac{M^*}{\epsilon^*} \quad (2.100)$$

Com estes resultados é possível encontrar a variação da massa (M^*) em função da densidade (k_F), para os dois casos. Podemos observar que no modelo Sigma-Linear, a equação autoconsistente para a massa admite tres soluções matemáticas em contraste com o modelo de Walecka (ver eq.(2.43)). Isto está diretamente relacionado as autointerações mesônicas, ausentes no primeiro caso. Destas três soluções apenas uma é física. A solução física é escolhida calculando-se a energia livre e verificando qual delas produz um mínimo.

Figura 2.6: Massa efetiva vs k_F para o modelo Sigma Quiral e com quebra de simetria

Observamos da figura 2.6 que o modelo sigma apresenta, em comparação com o modelo de Walecka, uma variação da massa efetiva com k_F muito mais abrupta. A quebra de simetria quiral tem pouca influência no que se refere a este aspecto. A principal consequência da quebra de simetria, como era de se esperar é no comportamento assintótico da curva, o qual é aqui atingido para valores de k_F muito menores do que no caso da fig. 2.1.

Figura 2.7: Saturação da matéria nuclear- modelo Sigma Quiral e com quebra de simetria

Os resultados usados para $C_S^2 = 269.7$ e $C_V^2 = 36.12$ foram retirados do artigo de Matsui e Serot^[38] e são valores onde há saturação nuclear usando a aproximação de Hartree.

Observe que a saturação nuclear ocorre no modelo sigma sem correções de vácuo, para valores pouco razoáveis da energia de ligação e densidades (comparação com a fig.(2.2) que mostra a saturação para o modelo de Walecka). Como observamos na introdução deste capítulo, a inclusão de flutuações de vácuo tem um papel fundamental na saturação nuclear. Isto será feito no capítulo 3.

2.2.2 Equações de Estado para Temperatura Finita

Na aproximação de campo médio podemos também, seguindo os procedimentos utilizados para o modelo de Walecka, encontrar as equações de estado quando a temperatura é diferente de zero e é o caso em que estamos interessados neste capítulo. Seguindo os passos

descritos em detalhes nas secções anteriores encontramos os resultados para o modelo sigma linear quiral:

$$\rho_s = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{M^*}{\epsilon^*} (f_+ + f_-) \quad (2.101)$$

$$e_\sigma = \frac{1}{2} \frac{C_V^2}{M^2} \rho_B^2 + \frac{1}{8} \frac{1}{C_S^2} (M^2 - M^{*2})^2 + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k \epsilon^* (f_+ + f_-) \quad (2.102)$$

$$p_\sigma = \frac{1}{2} \frac{C_V^2}{M^2} \rho_B^2 - \frac{1}{8} \frac{1}{C_S^2} (M^2 - M^{*2})^2 - \frac{\gamma}{3(2\pi)^3} \int d^3k \frac{k^2}{\epsilon^*} (f_+ + f_-) \quad (2.103)$$

e a relação para a massa é dada por

$$M^* (M^{*2} - M^2) = -2C_S^2 \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{M^*}{\epsilon^*} (f_+ + f_-) \quad (2.104)$$

Com estas expressões é possível produzir os seguintes gráficos que mostram o comportamento do sistema a temperatura e densidade finitas.

Figura 2.8: Massa efetiva vs temperatura para baixas densidades -modelo Sigma Quiral

Figura 2.9: A razão entre energia do sistema e a energia de fermions sem interação vrs temperatura para baixas densidades-modelo Sigma Quiral

Figura 2.10: Pressão vrs temperatura para baixas densidades -modelo Sigma Quiral

Observamos aqui novamente que a transição quiral reflete-se no gráfico de $M^* \times T$. O decréscimo da massa é mais abrupto que no caso do modelo não quiral (ver fig. 2.3). Além disto, o valor para o qual a massa atinge valores da ordem de $M^*/2$ é da ordem de 200 MeV no modelo de Walecka enquanto que no modelo quiral ele ocorre antes.

Para o caso com quebra de simetria quiral as expressões são dadas por

$$\rho_B = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k (f_+ - f_-) \quad (2.105)$$

$$\rho_s = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{M^*}{\epsilon^*} (f_+ + f_-) \quad (2.106)$$

$$\begin{aligned} e_{sb} = & \frac{1}{2} \frac{C_V^2}{M^2} \rho_B^2 + \frac{1}{2} \frac{M^2}{C_S^2} (M - M^*)^2 + \frac{(m_\sigma^2 - m_\pi^2)}{8C_S^2 m_\sigma^2} (M^* - M)^3 (3M + M^*) \\ & + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k \epsilon^* (f_+ + f_-) \end{aligned} \quad (2.107)$$

$$\begin{aligned} p_{sb} = & \frac{1}{2} \frac{C_V^2}{M^2} \rho_B^2 - \frac{1}{2} m_\sigma^2 g^2 (M - M^*)^2 - \frac{(m_\sigma^2 - m_\pi^2)}{8C_S^2 m_\sigma^2} (M^* - M)^3 (3M + M^*) \\ & + \frac{\gamma}{3(2\pi)^3} \int d^3k \frac{k^2}{\epsilon^*} (f_+ + f_-) \end{aligned} \quad (2.108)$$

E a equação auto-consistente para a massa é dada por

$$\begin{aligned} & M^* (M^{*2} - M^2 - \frac{m_\pi^2}{m_\sigma^2} (M^{*2} - 3M^2)) + \frac{2M^3 m_\pi^2}{m_\sigma^2} \\ = & -2 \frac{\gamma}{(2\pi)^3} C_S^2 \int d^3k \frac{M^*}{\epsilon^*} (f_+ + f_-) \end{aligned} \quad (2.109)$$

Os resultados deste caso são mostrados abaixo

Figura 2.11: Massa efetiva vrs temperatura para baixas densidades -modelo Sigma com quebra de simetria, onde $m_\pi = 138 MeV$

Figura 2.12: A razão entre a energia do sistema e a energia dos fermions sem interação vrs temperatura para baixas densidades -modelo Sigma com quebra de simetria, onde $m_\pi = 138 MeV$

Figura 2.13: Pressão vrs temperatura para a baixas densidades -modelo Sigma com quebra de simetria, onde $m_\pi = 138 \text{ MeV}$

Concluimos então, a partir dos gráficos do modelo de Walecka (figs.2.3 a 2.6) e do modelo Sigma-Linear (figs.2.7 a 2.10) que podemos observar a partir do comportamento das quantidades termodinâmicas em função da temperatura que a transição de fase para o modelo Sigma quiral é bem mais abrupta e ocorre a temperaturas mais baixas que no modelo de Walecka. Observando os gráficos podemos notar, pelo comportamento da massa em função da temperatura, que a quebra de simetria quiral diminui a temperatura de transição e faz com que a massa a temperaturas altas seja pequena mas diferente de zero. Além disto o termo de quebra de simetria faz uma diferença muito grande na variação da pressão em função da temperatura, vemos pelos gráficos (2.10) e (2.13) que o comportamento neste caso muda muito e no caso com quebra de simetria teremos valores negativos para a pressão. Além disto, como observado por Furnstahl^[31], usando o modelo de Walecka, este comportamento com transições de fase vale somente para densidades baixas. Para altas densidades, a qualquer temperatura, a massa dos hádrons permanecerá praticamente constante em um valor baixo. Este é o comportamento esperado também para o modelo Sigma-Linear.

Capítulo 3

Aspectos Microscópicos dos Modelos Efetivos e Renormalização

Neste capítulo reproduziremos os resultados encontrados, usando os modelos do capítulo anterior, para as amplitudes do espalhamento πN em baixas energias em nível árvore.

Além disto, como os modelos estudados são renormalizáveis, podemos encontrar as equações de estado destes modelos na aproximação de um loop. Com isto, os resultados obtidos para aproximação de campo médio podem ser generalizados para incluírmos correções de flutuação de vácuo nas equações de estado (aproximação de Hartree).

Nosso trabalho, neste capítulo, consiste em usar as equações de estado na aproximação de Hartree para temperatura e densidade finita. Mostraremos os gráficos obtidos para esta aproximação e as diferenças encontradas em relação aos resultados do capítulo anterior.

3.1 Espalhamento Pion-Nucleon a Baixas Energias

Dado que as propriedades termodinâmicas calculadas na capítulo anterior não podem ser testadas diretamente, é impossível, com base nelas, decidir sobre a qualidade dos resultados. Neste capítulo vamos então usar os dois modelos para ver como reproduzem a fenomenologia do espalhamento pion-nucleon no vácuo em baixas energias, esta sim, podendo ser testada experimentalmente.

As amplitudes deste espalhamento serão calculadas em nível árvore usando gráficos de Feynman que não contenham loops fechados. Os resultados obtidos em nível árvore devem ser significativos a baixas energias se forem expressos em termos de acoplamentos e massas

renormalizadas. Como a aproximação de um loop para o propagador do pion soma as interações de nível árvore de pions com nucleons no mar de Fermi, interações πN deveriam ser reproduzidas no espaço livre no mesmo nível de aproximação. Se considerarmos o meio, loops de nucleon no propagador introduzirão efeitos adicionais vindos da presença de pares virtuais de $N\bar{N}$.

Para analisarmos o espalhamento πN usaremos as variáveis de Mandelstam, dadas por:

$$\begin{aligned} s &\equiv (P_1 + q_1)^2 = (P_2 + q_2)^2 \\ t &\equiv (q_1 - q_2)^2 = (P_1 - P_2)^2 \\ u &\equiv (P_1 - q_2)^2 = (q_1 - P_2)^2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde P_1 e P_2 são os momentos referentes ao nucleon, antes e depois do espalhamento e do mesmo modo, q_1 e q_2 são os momentos referentes aos pions.

A matriz espalhamento pode ser escrita como

$$\langle \pi' N' | S | \pi N \rangle = \bar{u}(2) T_{ab} u(1) \quad (3.2)$$

onde os spinores u do nucleon tem 8 componentes (quatro componentes de spinor de Dirac para cada proton e neutron)

$$T_{ab} = [A^{(+)} + \frac{1}{2} (q_1^\mu + q_2^\mu) \gamma_\mu B^{(+)}] \delta_{ab} + [A^{(-)} + \frac{1}{2} (q_1^\mu + q_2^\mu) \gamma_\mu B^{(-)}] i \epsilon_{bac} \tau_c \quad (3.3)$$

onde γ_μ são as matrizes de Dirac e τ_c é a matriz de isospin de Pauli. Na equação acima os índices 1 e 2 denotam números quânticos do nucleon e os símbolos (+) e (-) indicam o canal t, de isospin zero e um, respectivamente. Na forma dada em (3.3) os fatores que aparecem com δ_{ab} , acoplam o isospin de dois pions em um isoescalar ($I = 0$) pois $\pi^a \pi^b \delta_{ab} = \pi \cdot \pi = \pi^2$ e os fatores que aparecem com $\epsilon_{bac} \tau_c$, descrevem um isovetor formado de dois isovetores ($\pi \times \pi$).

Estamos interessados em encontrar os valores de $A^{(\pm)}$ e $B^{(\pm)}$ para a aproximação árvore. Estes parâmetros são definidos a partir das amplitudes de onda parcial $f_{l\pm}$, onde o símbolo $(\pm)$ denota $j = l \pm 1/2$. Para pequenos momentos transferidos de centro de massa q_{cm}^2 teremos a seguinte expressão para as amplitudes parciais: [38]

$$Re f_0^{(\pm)}(s) \equiv a_0^{(\pm)} + r_0^{(\pm)} q_{cm}^2 + O(q_{cm}^4) \quad (3.4)$$

$$Re f_{1\pm}^{(\pm)}(s) \equiv a_{1\pm}^{(\pm)} q_{cm}^2 + O(q_{cm}^4) \quad (3.5)$$

Aqui $a_0^{(\pm)}$ são os comprimentos de espalhamento da onda s , $r_0^{(\pm)}$ são os alcances efetivos de onda s e $a_{1\pm}^{(\pm)}$ são os volumes de espalhamento da onda p . Estes parâmetros de baixa energia podem ser expressos em termos de $A^{(\pm)}$ e $B^{(\pm)}$ primeiro projetando em amplitudes de onda parcial e depois expandindo em potências de q_{cm}^2 .

Com isto obtemos as seguintes expressões para as amplitudes^[38]

$$a_0^{(\pm)} = \eta \left[A_0^{(\pm)} + m_\pi B_0^{(\pm)} \right] \quad (3.6)$$

$$a_{1+}^{(\pm)} = \frac{2}{3}\eta C_0^{(\pm)} \quad (3.7)$$

$$a_{1-}^{(\pm)} = \frac{2}{3}\eta C_0^{(\pm)} - \frac{\eta}{4M^2} \left[A_0^{(\pm)} - (2M + m_\pi) B_0^{(\pm)} \right] \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} r_0^{(\pm)} = \eta \left\{ -2C_0^{(\pm)} + \frac{(M + m_\pi)^2}{Mm_\pi} D_0^{(\pm)} \right\} \\ - \eta \left\{ \frac{1}{2Mm_\pi} \left[\left(1 - \frac{m_\pi}{2M}\right) A_0^{(\pm)} - \left(M + \frac{m_\pi^2}{2M}\right) B_0^{(\pm)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde $C_0 \equiv [\partial(A + m_\pi B)/\partial t]_{t=0}$, $D_0 \equiv [\partial(A + m_\pi B)/\partial s]_{t=0}$ e $\eta \equiv [4\pi(1 + m_\pi/M)]^{-1}$. O índice zero indica que todas as amplitudes e suas derivadas devem ser resolvidas no limite $t = 0$, $s = (M + m_\pi)^2$.

A partir destas expressões podemos calcular as amplitudes do espalhamento πN . Usamos para isto os dois modelos estudados no capítulo 2, onde o modelo de Walecka original foi estendido para incluir mesons π e ρ ^[38]. Ainda assim, a lagrangeana desse modelo é renormalizável. No modelo de Walecka os resultados para as amplitudes de espalhamento são bem conhecidos^[39] e uma das razões de se procurar outros modelos que descrevam a matéria nuclear densa é que, apesar de reproduzir os valores de saturação nuclear, as amplitudes de espalhamento calculadas a partir das interações dadas pelo modelo de Walecka, são muito maiores que os valores obtidos experimentalmente. É possível mostrar que um simples acoplamento pseudo-escalar πN dado na lagrangeana do modelo de Walecka ($\psi \gamma_5 \tau \psi \cdot \pi$) não pode qualitativamente reproduzir a fenomenologia πN . Para resolver este problema é necessário adicionar um termo de interação não linear pion-meson escalar ($\frac{1}{2} g_{\phi\pi} m_\pi \phi \pi^2$). Com isto, a lagrangeana deste modelo fica sendo descrita por

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \bar{\psi} [\gamma_\mu (iD^\mu - g_v V^\mu) - (M - g_s \phi) - ig_\pi \gamma_5 \tau \cdot \pi] \psi + \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_\pi^2 \phi^2] \\
& - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 V^\mu V_\mu - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 b^\mu b_\mu \\
& + \frac{1}{2} [d_\mu \pi d^\mu \pi - m_\pi^2 \pi^2] + \frac{1}{2} g_{\phi\pi} m_\pi \phi \pi^2
\end{aligned} \tag{3.10}$$

onde o campo b_μ representa o meson vetorial carregado (ρ) e onde

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu \tag{3.11}$$

$$B_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu b_\nu - \partial_\nu b_\mu - g_\rho b_\mu \times b_\nu \tag{3.12}$$

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + i\frac{1}{2}g_\rho \tau \cdot b_\mu \tag{3.13}$$

$$d_\mu \equiv \partial_\mu - g_\rho b_\mu \times \tag{3.14}$$

Neste modelo as correntes bariônicas isoescalares e isovetoriais são conservadas.

$$J_{esc}^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \tag{3.15}$$

$$J_{vet}^\mu = \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \tau \psi + b_\nu \times B^{\nu\mu} + \pi \times [\partial^\mu \pi + g_\rho (\pi \times b^\mu)] \tag{3.16}$$

Em nível árvore, os vértices que contribuem para o espalhamento pion-nucleon são dados a partir da lagrangeana (3.10), juntamente com os gráficos que contribuem para este espalhamento.

Figura 3.1: Gráficos em nível árvore do espalhamento pion-nucleon, estes gráficos são resolvidos usando os vértices dados na figura 3.2

Pela observação dos diagramas mostrados acima, podemos notar que existem duas amplitudes de Born que correspondem a troca de nucleon nos canais s e u , no canal t há troca de meson σ ($I=0$) e meson ρ ($I=1$).

Figura 3.2: Regras de Feynman. Estes vértices são necessários para calcular o espalhamento pion-nucleon em nível árvore. Os índices a, b, e c referem-se a isospin e μ é o índice de Lorentz. Setas nas linhas dos mesons indicam as direções dos quadrimomentos denotados por p, q e r .

Para resolver estes diagramas, começaremos com o canal t dado pelo diagrama (3.1b). Neste caso, pelas regras de Feynman, teremos a seguinte expressão para a matriz de transição T

$$iT_{ab} = \bar{u}(P_2) V_{\psi\psi\sigma} G_\sigma V_{\pi\pi\sigma} u(P_1) \quad (3.17)$$

onde $V_{\psi\psi\sigma} = ig_s$ e $V_{\pi\pi\sigma} = ig_{\phi\pi} m_s \delta_{ab}$ são os vértices do acoplamento de dois nucleons com um sigma e dois pions com um meson sigma, respectivamente. Os vértices são mostrados nas fig(3.2a) e (3.2d), respectivamente. O propagador do meson sigma é dado por

$$G_\sigma = \frac{i}{(l^2 - m_s^2)} \quad (3.18)$$

Lembrando que existe uma relação entre os momentos das partículas,teremos neste caso

$$P_1 = l + P_2 \quad ; q_1 + l = q_2 \quad ; l^2 = t \quad (3.19)$$

onde P_1 e P_2 são os momentos inicial e final do nucleon, q_1 e q_2 são os momentos inicial e final do pion e l é o momento da partícula sigma. Usando estas relações podemos calcular a matriz transição para este diagrama ,o resultado sendo dado por:

$$T_{ab} = -g_s g_{\phi\pi} m_s \delta_{ab} \frac{1}{(t - m_s^2)} \quad (3.20)$$

Observando a forma geral da matriz de transição (3.3) podemos identificar o valor da amplitude de espalhamento para este diagrama.

$$A^{(+)} = -g_s g_{\phi\pi} m_s \frac{1}{(t - m_s^2)} \quad (3.21)$$

Neste caso,podemos notar que,no canal t ,a troca de partícula sigma contribui apenas para as amplitudes (+).Usando o mesmo procedimento,calculamos a matriz de transição para cada diagrama,segundo a ordem dada nas figuras teremos para os diagramas:

Fig.(3.1a)

$$k = q_2 - q_1 \quad ; P_1 = k + P_2; \quad k^2 = t \quad (3.22)$$

onde k é o momemto associado a partícula vetorial

$$\begin{aligned} iT_{ab} &= \bar{u}(P_2) V_{\psi\psi\rho} G_\rho V_{\pi\pi\rho} u(P_1) \\ &= -\bar{u}(P_2) \left(\frac{ig_\rho \tau_c \gamma_\nu}{2} \right) \left(ig_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m_\rho^2} \right) \\ &\quad \frac{1}{(k^2 - m_\rho^2)} g_\rho (2\pi)^4 \delta^4(q_2 - k - q_1) \epsilon_{bca} (q_1 + q_2) \gamma_\mu u(P_1) \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde $V_{\psi\psi\rho} = -i\frac{1}{2}g_\rho \tau_a \gamma_\mu$ e $V_{\pi\pi\rho} = (2\pi)^4 \delta^4(p + q + r) \epsilon_{abc} g_\rho (q - r)_\mu$ são os vértices dos acoplamentos de dois nucleons com um meson vetorial ρ e o acoplamento de dois pions

com um meson ρ , respectivamente. O propagador do meson ρ definido aqui como G_ρ é dado por

$$G_\rho = \frac{1}{(k^2 - m_\rho^2)} \left(i g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m_\rho^2} \right) \quad (3.24)$$

Usando as relações dadas acima teremos como resultado para a matriz T

$$iT_{ab} = -g_\rho^2 \frac{(\not{a}_1 + \not{a}_2)}{2} \frac{\tau_c \epsilon_{bca}}{(t - m_\rho^2)} \quad (3.25)$$

onde $\not{a} \equiv a^\mu \gamma_\mu$.

Observando o valor acima, vemos que este diagrama contribuirá para a amplitude $B^{(-)}$.

$$B^{(-)} = -\frac{g_\rho^2}{(t - m_\rho^2)} \quad (3.26)$$

Neste caso, teremos que a troca de partículas vetoriais contribuirá para o canal t apenas com amplitudes $(-)$.

Para a Fig.(3.1c) teremos a contribuição do canal s

$$k = q_2 + P_2 \quad k = q_1 + P_1 \quad k^2 = s \quad (3.27)$$

Com isto a matriz transição é dada por

$$iT_{ab} = \bar{u}(P_2) V_{\psi\psi\pi} G_\psi(k) V_{\psi\psi\pi} u(P_1) \quad (3.28)$$

$$= \bar{u}(P_2) (g_\pi \gamma_5 \tau_b) \left(\frac{i}{\not{k} - M} \right) (g_\pi \gamma_5 \tau_a) u(P_1) \quad (3.29)$$

onde o propagador do nucleon é dado por

$$G_\psi(k) = \frac{i}{(\not{k} - M)} \quad (3.30)$$

Lembrando que γ_5 anticomuta com γ_μ e que $\tau_b \tau_a = \delta_{ab} + i\epsilon_{bca} \tau_c$, teremos a seguinte expressão para T

$$iT_{ab} = -ig_\pi^2 \frac{\tau_b \tau_a}{(s - M^2)} [\bar{u}(P_2) \not{k} u(P_1) + M] \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} iT_{ab} &= -ig_\pi^2 \frac{\tau_b \tau_a}{(s - M^2)} \bar{u}(P_2) \left[\frac{(\not{q}_1 + \not{q}_2)}{2} + \frac{(\not{P}_1 + \not{P}_2)}{2} - M \right] u(P_1) \\ &= -\frac{g_\pi^2}{(s - M^2)} \frac{(\not{q}_1 + \not{q}_2)}{2} (\delta_{ab} + i\epsilon_{bca} \tau_c) \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde, pela equação de Dirac

$$\bar{u}(P_2) \frac{(\not{P}_2 + \not{P}_1)}{2} u(P_1) = M \bar{u}(P_2) u(P_1) \quad (3.33)$$

Com isto teremos, como contribuição deste diagrama ao canal s

$$B^{(\pm)} = -\frac{g_\pi^2}{(s - M^2)} \quad (3.34)$$

O diagrama da Fig.(3.1d) contribuirá para o canal u, onde

$$k = P_2 - q_1 \quad k = P_1 - q_2 \quad k^2 = u \quad (3.35)$$

$$iT_{ab} = \bar{u}(P_2) V_{\psi\psi\pi} G_\psi(k) V_{\psi\psi\pi} u(P_1) \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} &= \bar{u}(P_2) (g_\pi \gamma_5 \tau_a) \left(\frac{i}{\not{k} - M} \right) (g_\pi \gamma_5 \tau_b) u(P_1) \\ &= -\frac{ig_\pi^2}{(u - M^2)} \tau_a \tau_b \bar{u}(P_2) \left[\frac{(\not{P}_1 + \not{P}_2)}{2} - \frac{(\not{q}_1 + \not{q}_2)}{2} - M \right] u(P_1) \\ &= \frac{ig_\pi^2}{(u - M^2)} \tau_a \tau_b \frac{(\not{q}_1 + \not{q}_2)}{2} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Usamos, neste caso, a relação

$$\not{k} = \frac{(\not{P}_1 + \not{P}_2)}{2} - \frac{(\not{q}_1 + \not{q}_2)}{2} \quad (3.38)$$

O resultado final é dado por

$$T_{ab} = \frac{g_\pi^2}{(u - M^2)} \frac{(\not{a}_1 + \not{a}_2)}{2} [\delta_{ab} + i\epsilon_{abc}] \quad (3.39)$$

Com isto as amplitudes ficam sendo dadas por

$$B^{(\pm)} = \pm \frac{g_\pi^2}{(u - M^2)} \quad (3.40)$$

A soma de todas as contribuições dos diagramas em nível árvore, nos dará como resultado as seguintes amplitudes^[40]

$$A^{(+)} = -\frac{g_s g_{\phi\pi} m_s}{(t - m_s^2)}; \quad A^{(-)} = 0 \quad (3.41)$$

$$B^{(+)} = g_\pi^2 \left(\frac{1}{(u - M^2)} - \frac{1}{(s - M^2)} \right); \quad (3.42)$$

$$B^{(-)} = -g_\pi^2 \left(\frac{1}{(s - M^2)} + \frac{1}{(u - M^2)} \right) - \frac{g_\rho^2}{(t - m_\rho^2)} \quad (3.43)$$

Para encontrar os parâmetros de espalhamento a baixas energias, primeiro devemos reescrever as amplitudes dadas acima em termos de s e t usando a relação $u - M^2 = M^2 + 2m_\pi^2 - s - t$, que é válida quando as partículas externas estão na camada de massa. Usando as relações para C_0 e D_0 e resolvendo estas expressões na camada de massa onde $s = (M + m_\pi)^2, t = 0$, teremos

$$\begin{aligned} C_0^{(+)} &= \{ \partial [A^{(+)} + m_\pi B^{(+)}] / \partial t \}_{t=0} \\ &= \frac{g_s g_{\phi\pi}}{m_s^3} + \frac{g_\pi^2}{4M^2 m_\pi^2 (1 - \nu)^2} \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} C_0^{(-)} &= \{ \partial [A^{(-)} + m_\pi B^{(-)}] / \partial t \}_{t=0} \\ &= -\frac{g_\pi^2}{4M^2 m_\pi^2 (1 - \nu)^2} + \frac{g_\rho^2 m_\pi}{m_\rho^4} \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} D_0^{(+)} &= \{ \partial [A^{(+)} + m_\pi B^{(+)}] / \partial s \}_{t=0} \\ &= \frac{g_\pi^2}{2M^2 m_\pi} \frac{(1 + \nu^2)}{(1 - \nu^2)^2} \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned}
D_0^{(-)} &= \{ \partial [A^{(-)} + m_\pi B^{(-)}] / \partial s \}_{t=0} \\
&= -\frac{g_\pi^2}{2M^3(1-\nu^2)^2}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

onde $\nu \equiv (m_\pi/2M) \simeq 0.0735$.

A partir destes resultados podemos obter os comprimentos de espalhamento da onda s , que nos interessa quando tratamos de espalhamento a baixas energias. Usando a relação dada em (3.6) teremos para o modelo de Walecka

$$a_0^{(+)} = \frac{1}{4\pi(1+m_\pi/M)} \left[\frac{g_s g_{\phi\pi}}{m_s} - \frac{g_\pi^2}{M(1-\nu^2)} \right] \tag{3.48}$$

O primeiro termo vem da troca de meson sigma no canal t , enquanto o segundo origina-se dos termos de Born do nucleon. Cada uma destas contribuições é cerca de duas ordens de grandeza maior do que o valor experimental de $a_0^{(+)}$. Com a inclusão de termos não lineares na lagrangeana do modelo, temos liberdade de escolher o valor da constante de acoplamento. Então, escolhemos um valor para $g_{\phi\pi}$ que possa cancelar a expressão deixando o comprimento de espalhamento pequeno. Por simplicidade fazemos $a_0^{(+)} \rightarrow 0$ quando $m_\pi \rightarrow 0$, neste limite encontramos a seguinte relação entre as constantes de acoplamento

$$g_{\phi\pi} = g_\pi \left(\frac{g_\pi}{g_s} \right) \left(\frac{m_s}{M} \right) \tag{3.49}$$

Para m_π finito, teremos um comprimento de espalhamento pequeno

$$m_\pi a_0^{(+)} = \frac{-g_\pi^2}{4\pi(1+m_\pi/M)} \left(\frac{m_\pi}{2M} \right)^2 \left(\frac{m_\pi}{M} \right) + O \left(\frac{m_\pi^5}{M^5} \right) \tag{3.50}$$

Pelas expressões acima, fica claro que incluímos o termo $\phi\pi^2$ na lagrangeana para cancelar as contribuições vindas dos termos de Born. Ao invés de usar este artifício poderíamos usar outros métodos. Como veremos abaixo poderíamos impôr a simetria quiral e encontraríamos resultados similares sem a necessidade de incluirmos termos extras na lagrangeana. Para observarmos os resultados para as amplitudes de espalhamento considerando a simetria quiral, usamos o modelo Sigma-Linear. É possível comparar os resultados do modelo de Walecka dado pela lagrangeana (3.10) em relação ao modelo Sigma-Linear considerando o caso com e sem quebra de simetria quiral. Podemos generalizar, encontrando

as amplitudes de espalhamento para o caso onde existe um termo pequeno de quebra de simetria quiral. Para fazermos isto usamos a lagrangeana do modelo Sigma-linear dada no capítulo anterior, incluindo os mesons vetoriais neutros (ω). Esta lagrangeana é dada por :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\sigma\omega} = & \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - g\sigma - i\gamma_5\tau\cdot\pi - g_v\gamma_\mu V_\mu)\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \partial_\mu\pi\partial^\mu\pi) \\ & - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \pi^2 + v^2)^2 - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_v^2 V_\mu V^\mu + e\sigma\end{aligned}\quad (3.51)$$

Como no caso anterior quando trabalhamos com o modelo Sigma-Linear, faremos a substituição do meson escalar $\sigma = u - s$ e com isto teremos a seguinte lagrangeana

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\sigma\omega} = & \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - M + g_\pi s + i\gamma_5\tau\cdot\pi - g_v\gamma_\mu V_\mu)\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu s\partial^\mu s - m_s^2) \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\mu\pi\partial^\mu\pi - m_\pi^2) - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_v^2 V_\mu V^\mu \\ & - g_\pi \frac{(m_s^2 - m_\pi^2)}{2M} s (s^2 + \pi^2) - g_\pi^2 \frac{(m_s^2 - m_\pi^2)}{8M^2} (s^2 + \pi^2)^2\end{aligned}\quad (3.52)$$

Neste caso, os diagramas que devemos considerar para encontrar as amplitudes de espalhamento em nível árvore são os mesmos que o caso anterior, a diferença está nos valores dos vértices dos diagramas. Neste caso, temos que usar $g = g_\pi$ e a constante de acoplamento de pions com mesons escalares envolve a massa dos pions $i\delta_{ab}g_\pi \frac{(m_s^2 - m_\pi^2)}{2M}$. É fácil ver que teremos as mesmas expressões para as amplitudes, que as encontradas no caso anterior, considerando os resultados do modelo de Walecka e fazendo $g_p = 0$ e $m_\pi \neq 0$.

$$A^{(+)} = -\frac{g_\pi^2}{2M} \frac{(m_s^2 - m_\pi^2)}{(t - m_s^2)}; \quad A^{(-)} = 0 \quad (3.53)$$

$$B^{(+)} = g_\pi^2 \left(\frac{1}{(u - M^2)} - \frac{1}{(s - M^2)} \right); \quad (3.54)$$

$$B^{(-)} = -g_\pi^2 \left(\frac{1}{(s - M^2)} + \frac{1}{(u - M^2)} \right) \quad (3.55)$$

Se considerarmos o caso quiral, teremos que fazer $m_\pi = 0$ nas expressões acima e teremos como resultado

$$A^{(+)} = -\frac{g_\pi^2}{2M} \frac{m_s^2}{(t - m_s^2)}; \quad A^{(-)} = 0 \quad (3.56)$$

$$B^{(+)} = g_\pi^2 \left(\frac{1}{(u - M^2)} - \frac{1}{(s - M^2)} \right); \quad (3.57)$$

$$B^{(-)} = -g_\pi^2 \left(\frac{1}{(s - M^2)} + \frac{1}{(u - M^2)} \right) \quad (3.58)$$

Como não teremos interação π - ω , não há troca de mesons vetoriais neutros no espalhamento pion-nucleon.

Os parâmetros de espalhamento pion-nucleon a baixas energias são mostrados na tabela abaixo, o modelo sigma é mostrado sem quebra de simetria quiral em dois casos possíveis, considerando $m_s = M$ e $m_s = 770 \text{ MeV}$.

Tabela 3.1: Valores das amplitudes de espalhamento para os modelos efetivos^[38]

Modelos	$m_\pi a_0^{(+)}$	$m_\pi a_0^{(-)}$	$m_\pi^3 r_0^{(+)}$	$m_\pi^3 r_0^{(-)}$	$m_\pi^3 a_{1-}^{(+)}$	$m_\pi^3 a_{1-}^{(-)}$	$m_\pi^3 a_{1+}^{(+)}$	$m_\pi^3 a_{1+}^{(-)}$
Modelo Sigma ($m_s = M$)	-0.010	0.136	-0.067	0.047	-0.077	-0.042	0.079	-0.053
Modelo Sigma ($m_s = 770 \text{ MeV}$)	-0.010	0.136	-0.106	0.047	-0.064	-0.042	0.092	-0.053
Modelo Walecka	-0.010	0.218	-0.248	0.083	-0.017	-0.034	0.139	-0.051
Experimental	-0.015	0.097	-0.06	0.007	-0.056	-0.013	0.133	-0.081
	± 0.015	± 0.003	± 0.02	± 0.005	± 0.010	± 0.003	± 0.003	± 0.002

Os parâmetros usados para fazer esta tabela foram: $M = 939 \text{ MeV}$, $m_\rho = 770 \text{ MeV}$ e $m_\pi = 138 \text{ MeV}$, além disto $g_\pi^2/4\pi = 14.4$, determinado da relação de dispersão πN ou do espalhamento NN em ondas parciais periféricas. No modelo Sigma, a tabela mostra os valores para $m_s = M$ e $m_s = 770 \text{ MeV}$, onde este último valor foi determinado pelas propriedades de saturação da matéria nuclear. No modelo de Walecka foi escolhido $m_s = 520 \text{ MeV}$ sendo este valor tirado de cálculos de Dirac-Hartree para núcleos finitos. Combinado com as propriedades de saturação nuclear, encontra-se os valores das constantes de acoplamento $g_s = 8.36$, $g_{\phi\pi} = 11.99$. O valor de $g_\rho = 6.07$ é escolhido para que cálculos em nível árvore do decaimento $\rho \rightarrow \pi\pi$, reproduzam os valores experimentais da largura de decaimento do méson ρ , $\Gamma_\rho = 152 \text{ MeV}$. Pela observação dos valores mostrados na tabela acima, vemos que no modelo Sigma-Linear os parâmetros ajustam-se automaticamente, sem precisar adicionar termos não lineares na lagrangeana, por causa da simetria quiral.

3.2 O Papel da Renormalização

Neste capítulo vimos que os modelos estudados reproduzem qualitativamente a fenomenologia do espalhamento πN a baixas energias no espaço livre, ou seja, sem considerarmos a contribuição dos antinúcleons. Sendo estes modelos renormalizáveis podemos encontrar as equações de estado, levando em conta estas contribuições. Esta é a aproximação de Hartree e é possível mostrar que nesta aproximação encontramos os mesmos resultados de campo médio calculados para os modelos mas, com correções vindas da flutuação do vácuo, vindas do fato de termos considerado o vácuo como estando cheio de antipartículas (mar de Dirac). Nesta secção trataremos os modelos efetivos de Walecka e Sigma-Linear na aproximação de Hartree e analisaremos as diferenças de comportamento das quantidades termodinâmicas nesta aproximação e na aproximação de campo médio apresentada no capítulo 2.

As contribuições vindas do mar de Dirac podem ser incluídas no propagador dos núcleons. Antes de encontrarmos as correções de flutuações do vácuo para as equações de estado é interessante encontrarmos a forma final do propagador de Feynman do nucleon. Começaremos considerando o propagador de um sistema de fermions não interagentes a densidade finita^[39]. O estado fundamental $|\Psi_0\rangle$ contém os níveis de energia dos fermions preenchido até um momento k_F e não contém antipartículas.

$$B_{ks}|\Psi_0\rangle = 0 \quad \text{para todo } k \quad (3.59)$$

$$A_{ks}^\dagger|\Psi_0\rangle = 0 \quad \text{para } |k| < k_F \quad (3.60)$$

$$A_{ks}|\Psi_0\rangle = 0 \quad \text{para } |k| > k_F \quad (3.61)$$

onde A_{ks} e B_{ks} são, respectivamente, operadores de destruição de partículas e antipartículas. O índice s refere-se ao spin. O propagador do fermion é definido por

$$\begin{aligned} iG_{\alpha\beta}^0(x' - x) &= \langle \Psi_0 | T(\psi_\alpha(x') \bar{\psi}_\beta(x)) | \Psi_0 \rangle \\ &= \langle \Psi_0 | \psi_\alpha(x') \bar{\psi}_\beta(x) | \Psi_0 \rangle \theta(t' - t) \\ &\quad - \langle \Psi_0 | \bar{\psi}_\beta(x) \psi_\alpha(x') | \Psi_0 \rangle \theta(t - t') \end{aligned} \quad (3.62)$$

onde o produto ordenado temporalmente envolve o sinal menos para fermions e onde

$$\theta(t - t') = i \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega + i\epsilon} \quad (3.63)$$

é a função Heaviside e ϵ é um número positivo infinitesimal. Usando esta função na expressão para o propagador e lembrando que

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{ks} [A_{ks} u(k, s) e^{-ik \cdot x} + B_{ks}^\dagger v(k, s) e^{ik \cdot x}] \quad (3.64)$$

$$\bar{\psi}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{ks} [A_{ks}^\dagger \bar{u}(k, s) e^{ik \cdot x} + B_{ks} \bar{v}(k, s) e^{-ik \cdot x}] \quad (3.65)$$

onde x e k são quadrivetores de posição e momento, respectivamente

$$iG_{\alpha\beta}^0(x' - x) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} G_{\alpha\beta}^0(k) e^{-ik \cdot (x' - x)} \quad (3.66)$$

Como expressão para o propagador no espaço dos momentos^[39]

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}^0 &= \frac{1}{2E(k)} \left\{ (\gamma_\mu K^\mu + M)_{\alpha\beta} \left[\frac{1 - \theta(k_F - |k|)}{k_0 - E(k) + i\epsilon} + \frac{\theta(k_F - |k|)}{k_0 - E(k) - i\epsilon} \right] \right\} \\ &- \frac{1}{2E(k)} \left\{ (\gamma_\mu \tilde{K}_\mu + M)_{\alpha\beta} \left[\frac{1}{k_0 + E(k) - i\epsilon} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.67)$$

com

$$E(k) = (k^2 + M^2)^{1/2} \quad (3.68)$$

$$\gamma_\mu K_\mu \equiv E(k) \gamma_0 - \gamma \cdot k \quad (3.69)$$

$$\gamma_\mu \tilde{K}_\mu \equiv -E(k) \gamma_0 - \gamma \cdot k \quad (3.70)$$

Chegamos a este resultado usando as relações

$$\sum_s u(k, s) \bar{u}(k, s') = \frac{(\not{k} + M)}{2E(k)} \quad (3.71)$$

$$\sum_s v(k, s) \bar{v}(k, s') = \frac{(\not{k} - M)}{2E(k)} \quad (3.72)$$

$$\langle \Psi_0 | B^\dagger B | \Psi_0 \rangle = 0 \quad (3.73)$$

$$\langle \Psi_0 | A^\dagger A | \Psi_0 \rangle = \theta(k_F - |k|) \quad (3.74)$$

Os três primeiros termos da eq.(3.67) podem ser facilmente interpretados, o primeiro corresponde ao propagador do fermion acima da superfície de Fermi, enquanto o segundo descreve a propagação de buracos no mar de Fermi. O último termo permite a propagação de buracos no mar de Dirac e pode ser interpretado como sendo as anti-partículas. Podemos chegar a uma fórmula final usando a identidade abaixo nos termos proporcionais a $\theta(k_F - |k|)$

$$\frac{1}{\omega \pm i\eta} = \mathcal{P} \frac{1}{\omega} \mp i\pi \delta(\omega) \quad (3.75)$$

onde $\mathcal{P}$ denota o valor principal de Cauchy. Com isto o propagador dos nucleons é dado por

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}^0 &= (\not{k} + M)_{\alpha\beta} \left\{ \frac{1}{k_\mu^2 - M^2 + i\epsilon} + \frac{i\pi}{E(k)} \delta(k_0 - E(k)) \theta(k_F - |k|) \right\} \\ &= G_F^0(k)_{\alpha\beta} + G_D^0(k)_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (3.76)$$

onde $\not{k} \equiv \gamma_0 k^0 - \gamma \cdot \mathbf{k}$. No limite de densidade bariônica baixa ($k_F \rightarrow 0$) o segundo termo do propagador desaparece e apenas o propagador de Feynman não interagente permanece, descrevendo a propagação livre de barions e antibarions. À densidade bariônica finita, o segundo termo da expressão permite que buracos se propaguem no mar de Fermi e corrige a propagação de partículas, levando em conta o princípio de exclusão de Pauli. Para fazermos um tratamento usando os propagadores devemos conhecer os vértices meson-barion e os propagadores não-interagentes dos barions, dos mesons escalares e vetoriais. Podemos definir o estado fundamental como sendo um estado onde as partículas não interagem e este estado é composto exclusivamente por barions (estamos tratando a temperatura como zero). As funções de Green não interagentes que correspondem as partículas são dadas por

$$\begin{aligned} i\Delta^0(x' - x) &= \langle \Psi_0 | T[\phi(x') \phi(x)] | \Psi_0 \rangle \\ &= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x' - x)} \Delta^0(k) \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$\begin{aligned} iG_{\alpha\beta}^0(x' - x) &= \langle \Psi_0 | T[\psi_\alpha(x') \bar{\psi}_\beta(x)] | \Psi_0 \rangle \\ &= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x' - x)} G_{\alpha\beta}^0(k) \end{aligned} \quad (3.78)$$

$$\begin{aligned}
iD_{\mu\nu}^0(x' - x) &= \langle \Psi_0 | T[V_\mu(x') V_\nu(x)] | \Psi_0 \rangle \\
&= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x' - x)} D_{\mu\nu}^0(k)
\end{aligned} \tag{3.79}$$

onde $i\Delta^0$, $iG_{\alpha\beta}^0$ e $iD_{\mu\nu}^0$ são as funções de Green dos mesons escalares, dos fermions e dos mesons vetoriais, respectivamente. Os propagadores no espaço dos momentos são dados por^[39]

$$\Delta^0(k) = \frac{1}{k_\mu^2 - m_\sigma^2 + i\epsilon} \tag{3.80}$$

$$D_{\mu\nu}^0 = \left[-g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m_\rho^2} \right] \frac{1}{k_\lambda^2 - m_\rho^2 + i\epsilon} \tag{3.81}$$

$$\begin{aligned}
G_{\alpha\beta}^0 &= (\gamma_\mu k_\mu + M)_{\alpha\beta} \left\{ \frac{1}{k_\lambda^2 - M^2 + i\epsilon} + \frac{i\pi}{E(k)} \delta(k_0 - E(k)) \theta(k_F - |k|) \right\} \\
&\tag{3.82}
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
G_F^0(k)_{\alpha\beta} &= (\gamma_\mu k_\mu + M)_{\alpha\beta} \left(\frac{1}{k_\lambda^2 - M^2 + i\epsilon} \right) \\
G_D^0(k)_{\alpha\beta} &= (\gamma_\mu k_\mu + M)_{\alpha\beta} \left(\frac{i\pi}{E(k)} \delta(k_0 - E(k)) \theta(k_F - |k|) \right)
\end{aligned} \tag{3.83}$$

onde $G_F^0(k)_{\alpha\beta}$ é o propagador de Feynman para a partícula livre e $G_D^0(k)_{\alpha\beta}$ é a parte do propagador que depende da densidade. Nas expressões acima o termo $k_\mu k_\nu$ não contribui para quantidades físicas já que o meson vetorial acopla-se a corrente conservada e será omitido nos cálculos a seguir.

Os propagadores interagentes são definidos analogamente ao caso não interagente e envolvem os campos de Heisenberg e o estado fundamental com interação

$$iG_{\alpha\beta}(x' - x) = \langle \Psi | T[\psi_{H\alpha}(x') \bar{\psi}_{H\beta}(x)] | \Psi \rangle \tag{3.84}$$

onde $\psi_{H\alpha}$ e $\bar{\psi}_{H\beta}$ são os campos de Heisenberg. As regras de Feynman permitem que expressemos os propagadores interagentes como expansões ordem a ordem nas constantes de acoplamento e nos propagadores não interagentes. Para somarmos as contribuições ordem a ordem, algumas regras devem ser seguidas:

(1) desenhar todos os diagramas com duas linhas de propagador externas e n vértices conectados com as linhas internas. Não incluir diagramas com pedaços completamente desconectados, isto é, não conectados a qualquer linha externa.

(2) assinalar a direção de cada linha. Em cada vértice deve ser conservado o momento e a energia.

(3) Cada linha deve ser multiplicada por um fator i vezes um dos propagadores $(\Delta^0, G_{\alpha\beta}^0, D_{\mu\nu}^0)$.

(4) somar sobre todos os índices repetidos

(5) integrar $\int d^4q/(2\pi)^4$ sobre todos os quadrimomentos independentes

(6) incluir um fator (-1) para cada loop fechado de fermion

(7) qualquer linha de um fermion que forme um loop de "tadpole" deve ser interpretada como $e^{i\omega\eta} i G_{\alpha\beta}^0(k, \omega)$, onde $\eta \rightarrow 0^+$ no final do cálculo.

A vantagem principal de se calcular os propagadores interagentes é que eles nos permitem encontrar quantidades observáveis. Como exemplo teremos que o valor esperado de qualquer produto bilinear de operadores de fermions na representação de Heisenberg pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \bar{\psi}(x) \Gamma \psi(x) | \Psi \rangle &= - \lim_{y \rightarrow x} \lim_{y^0 \rightarrow x^0} \langle \Psi | T[\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y)] | \Psi \rangle \Gamma_{\beta\alpha} \\ &= -i \lim_{y \rightarrow x} \lim_{y^0 \rightarrow x^0+} \text{Tr}[\Gamma G(x, y)] \end{aligned} \quad (3.85)$$

onde o traço é sobre os índices de matriz e o limite $y^0 \rightarrow x^0+$ envolve o ordenamento temporal dos operadores. Relações entre os propagadores e observáveis podem ser encontradas usando também os propagadores dos mesons e operadores construídos a partir dos campos dos mesons.

Podemos também calcular observáveis a partir do operador tensor de energia-momento, onde os elementos de matriz determinam a densidade de energia, pressão e outras quantidades termodinâmicas.

O operador já foi definido no capítulo 2 para os dois modelos e podemos separar as contribuições que cada tipo de partícula fornece ao tensor deste modo

$$\hat{T}^{\mu\nu} = \hat{T}_B^{\mu\nu} + \hat{T}_s^{\mu\nu} + \hat{T}_v^{\mu\nu} \quad (3.86)$$

Na expressão acima $\hat{T}_B^{\mu\nu}$ refere-se as contribuições dos barions, $\hat{T}_s^{\mu\nu}$ as contribuições dos mesons escalares e $\hat{T}_v^{\mu\nu}$ as contribuições dos mesons vetoriais. No primeiro modelo estudado, o modelo de Walecka, estas contribuições são descritas por

$$\hat{T}_B^{\mu\nu} = i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\nu\psi \quad (3.87)$$

$$\hat{T}_s^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}[\partial_\sigma\phi\partial^\sigma\phi - m_s^2\phi^2]g^{\mu\nu} + \partial^\mu\phi\partial^\nu\phi \quad (3.88)$$

$$\hat{T}_v^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}[\partial_\sigma V_\lambda\partial^\sigma V^\lambda - m_v^2 V_\sigma V^\sigma]g^{\mu\nu} - \partial^\mu V_\lambda\partial^\nu V^\lambda \quad (3.89)$$

Os valores esperados dos operadores dados em (3.87), (3.88), (3.89), podem ser escritos em termos dos propagadores da teoria

$$\langle \Psi | \hat{T}_B^{\mu\nu} | \Psi \rangle = -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[\gamma_\mu G(k)] k^\nu e^{ik^0\eta} \quad (3.90)$$

$$\langle \Psi | \hat{T}_s^{\mu\nu} | \Psi \rangle = -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{2}(k^2 - m_s^2)g^{\mu\nu} - k_\mu k_\nu \right] \Delta(k) \quad (3.91)$$

$$\langle \Psi | \hat{T}_v^{\mu\nu} | \Psi \rangle = -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{2}(k^2 - m_v^2)g^{\mu\nu} - k_\mu k_\nu \right] D_\sigma^\sigma(k) \quad (3.92)$$

Em uma teoria quântica de campos as expressões acima geralmente divergirão. Para extrair a parte finita, ou seja, os resultados físicos, devemos fazer uma renormalização que consiste dos seguintes passos:

(1) renormalize os propagadores interagentes, vértices e amplitudes de espalhamento usando um conjunto de condições impostas a densidade zero. Isto determina os contratermos

$\delta\mathcal{L}$ na lagrangeana do modelo e gera um correspondente conjunto de contratermos no tensor momento-energia.

(2) inclua estes contratermos no cálculo do valor esperado do tensor momento-energia a densidade finita. Isto leva a adicionais contribuições de contratermos(CTC)

$$CTC \equiv \langle \Psi | \delta \hat{T}^{\mu\nu} | \Psi \rangle \quad (3.93)$$

(3) defina o tensor momento-energia físico $T^{\mu\nu}$, subtraindo o valor esperado deste tensor no vácuo(VEV) do tensor total ($\hat{T}^{\mu\nu} + \delta \hat{T}^{\mu\nu}$)

$$VEV \equiv \lim_{k_F \rightarrow 0} \langle \Psi | \hat{T}^{\mu\nu} + \delta \hat{T}^{\mu\nu} | \Psi \rangle \quad (3.94)$$

então

$$T^{\mu\nu} = \langle \Psi | \hat{T}^{\mu\nu} + \delta \hat{T}^{\mu\nu} | \Psi \rangle - \lim_{k_F \rightarrow 0} \langle \Psi | \hat{T}^{\mu\nu} + \delta \hat{T}^{\mu\nu} | \Psi \rangle \quad (3.95)$$

$$= \langle \Psi | \hat{T}^{\mu\nu} | \Psi \rangle + CTC - VEV \quad (3.96)$$

3.2.1 Teoria de Campo Médio

Os resultados de teoria de campo médio alcançados no capítulo anterior para o modelo de Walecka dados pela lagrangiana (2.12), podem ser encontrados somando os diagramas de Feynman chamados "tadpoles". Estes resultados foram mostrados por Chin^[41] e começamos calculando as contribuições de "tadpole" de segunda ordem para o propagador do barion. As regras de Feynman permitem escrever o propagador de segunda ordem como

$$iG^{(2)}(k) = iG^{(0)}(k)\Sigma^{(2)}G^{(0)}(k) \quad (3.97)$$

onde

$$\Sigma^{(2)} = \Sigma_s^{(2)} - \gamma_\mu \Sigma_v^{(2)\mu} \quad (3.98)$$

é a auto-energia de segunda ordem

$$\Sigma_s^{(2)} = -ig_s^2 \Delta^0(0) \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \text{Tr}[G^0(q)] e^{iq^0 \eta} \quad (3.99)$$

$$\Sigma_v^{(2)\mu} = ig_v^2 D^{0\mu\nu}(0) \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \text{Tr}[G^0(q) \gamma_\mu] e^{iq^0 \eta} \quad (3.100)$$

Os resultados de Σ de segunda ordem, podem ser somados para todas as ordens pela equação de Dyson

$$G(k) = G^0(k) + G^0(k) \Sigma^{(2)} G(k) \quad (3.101)$$

As auto-energias são determinadas até agora a partir dos propagadores não interagentes, se usarmos para calcular as auto-energias os propagadores interagentes estaremos trabalhando na aproximação relativística de Hartree, nesta aproximação o propagador dos barions é dado por

$$G^H(k) = G^0(k) + G^0(k) \Sigma_H G^H(k) \quad (3.102)$$

Nesta aproximação as auto-energias são definidas por

$$\begin{aligned} \Sigma_H &= \Sigma_H^s - \gamma_\mu \Sigma_H^{v\mu} \\ \Sigma_H^{v\mu} &= i \frac{g_v^2}{m_v^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \text{Tr}[G^H(q) \gamma_\mu] e^{iq^0 \eta} \\ \Sigma_H^s &= i \frac{g_s^2}{m_s^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \text{Tr}[G^H(q)] e^{iq^0 \eta} + \Sigma_{GTC}^s \end{aligned} \quad (3.103)$$

A eq.(3.102) pode ser calculada formalmente, encontrando

$$[G^H(k)]^{-1} = [G^0(k)]^{-1} - \Sigma_H = \gamma_\mu k^\mu - M - \Sigma_H \quad (3.104)$$

Como Σ_H é independente de k , a estrutura de pólos em $G^H(k)$ é a mesma que no caso não interagente. Então

$$\begin{aligned} G^H(k) &= (\gamma_\mu \bar{k}_\mu + M^*) \left\{ \frac{1}{k_\lambda^2 - M^{*2} + i\epsilon} + \frac{i\pi}{\epsilon^*(k)} \delta(k_0 - E(k)) \theta(k_F - |\bar{k}|) \right\} \\ &= G_F^H(k) + G_D^H(k) \end{aligned} \quad (3.105)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{k}_\mu &\equiv k_\mu + \Sigma_H^{\nu\mu}, & \epsilon^* &\equiv (\bar{k}^2 + M^{*2})^{1/2} \\ M^* &\equiv M + \Sigma_H^s, & E(k) &\equiv \epsilon^* - \Sigma_H^{v0} \end{aligned} \quad (3.106)$$

Nesta aproximação o propagador interagente tem a mesma forma que G^0 , ou seja, G_F^H representa a propagação de quasinucleons de energia positiva e negativa enquanto G_D^H representa a propagação de buracos dentro do mar de Fermi e corrige G_F^H do princípio de exclusão de Pauli. Neste caso quasinucleons são barions cuja energia, massa e função de onda são modificadas pela auto-energia.

A contribuição do termo G_F^H na integral da eq.(3.103) torna esta integral divergente, então é necessária a soma de contratermos dados por Σ_{CTC}^s para tornar Σ_H^s finita.

Se ignorarmos as contribuições vindas das antipartículas, ou seja, não considerarmos as integrais divergentes que envolvem o termo G_F^H e considerarmos apenas as contribuições vindas do mar de Fermi preenchido (G_D^H), encontraremos os resultados de campo médio obtidos no capítulo anterior. Se substituirmos a expressão de $G^H(q)$ por G_D^H as integrais dadas em (3.103) serão finitas

$$\begin{aligned} \Sigma^{\nu\mu} &= i \frac{g_v^2}{m_v^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \text{Tr}[G_D^H(q) \gamma_\mu] e^{iq^0 \eta} \\ &= -\delta^{\mu 0} \frac{g_v^2}{m_v^2} \rho_B \equiv -g_v V_0 \delta^{\mu 0} \end{aligned} \quad (3.107)$$

$$\begin{aligned} \Sigma^s &= i \frac{g_s^2}{m_s^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \text{Tr}[G^D(q)] e^{iq^0 \eta} \\ &= -\frac{g_s^2}{m_s^2} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3 q \frac{M^*}{\epsilon^*(q)} \\ &= -\frac{g_s^2}{m_s^2} \rho_s(\Sigma^s) \end{aligned} \quad (3.108)$$

onde ρ_s é identificado como na aproximação de campo médio. A equação auto-consistente para a massa é encontrada usando a relação $M + \Sigma^s = M^*$ e a equação acima, então teremos

$$\Sigma^s \equiv -g_s \phi_0 \quad (3.109)$$

Para calcular a densidade de energia, devemos conhecer os propagadores dos mesons. Nesta aproximação eles são dados por

$$\begin{aligned} \Delta^H(k) &= \Delta^0(k) - i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k) (\Sigma_H^s)^2 / g_s^2 \\ D_{\mu\nu}^H(k) &= D_{\mu\nu}^0(k) - i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k) (\Sigma_{H\mu}^s \Sigma_{H\nu}^s)^2 / g_v^2 \end{aligned} \quad (3.110)$$

As contribuições para a energia dos mesons vindas de Δ^0 e $D_{\mu\nu}^0$ são independentes da densidade e podem ser removidas pela subtração das contribuições do vácuo (VEV). Usando a relação $e = \langle T_{00} \rangle$ teremos como expressão para a energia

$$\begin{aligned} e_s &= \langle \Psi | \hat{T}_s^{00} | \Psi \rangle - VEV = \frac{1}{2} m_s^2 \phi_0^2 \\ e_v &= \langle \Psi | \hat{T}_v^{00} | \Psi \rangle - VEV = -\frac{1}{2} m_v^2 V_0^2 \end{aligned} \quad (3.111)$$

Para a calcular a contribuição dos barions usamos a eq.(3.105), considerando apenas o termo que contém G_D^H . Não há subtração dos termos do vácuo já que, neste caso, $G_D^H \rightarrow 0$ quando $k_F \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} e_B &= \langle \Psi | \hat{T}_B^{00} | \Psi \rangle = -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} T \tau [\gamma^0 G_D^H(k)] k^0 \\ e_B &= \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3 k \epsilon''(k) - \rho_B \Sigma^{v0} \end{aligned} \quad (3.112)$$

A combinação destas equações dará

$$\begin{aligned} e &= e_s + e_v + e_B \\ &= \frac{1}{2} m_v^2 V_0^2 + \frac{1}{2} m_s^2 \phi_0^2 + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3 k (k^2 + M^{*2})^{1/2} \end{aligned} \quad (3.113)$$

onde V_0 é dado pela expressão (3.107) e $\Sigma^* = M^* - M = -g_s \phi_0$. Na expressão acima a densidade de energia é exatamente a mesma que a calculada para o campo médio no capítulo anterior. A pressão pode ser calculada analogamente chegando aos mesmos resultados do capítulo 2. Então, a conclusão que podemos tirar destes cálculos é que os resultados de campo médio podem ser encontrados se somarmos autoconsistentemente os diagramas de "tadpole" na matéria nuclear, considerando apenas as contribuições dos nucleons no mar de Fermi preenchido. A condição de autoconsistência vem como uma equação transcendental que deve ser satisfeita pela auto-energia escalar Σ_s .

3.2.2 Correções de Flutuação de Vácuo

Retornaremos agora à aproximação de Hartree relativística a qual envolve integrais divergentes sobre os estados ocupados de energia negativa. Estas divergências podem ser feitas finitas se incluírmos contratermos na lagrangeana do modelo de Walecka e definirmos um conjunto de condições de renormalização. Nesta secção investigaremos as correções de flutuações de vácuo para a aproximação de campo médio da secção anterior.

Consideremos a auto-energia do meson vetorial dada em (3.103). Usaremos agora o propagador G_H dado em (3.105), a contribuição de G_D^H foi calculada na secção anterior (3.107).

Então a forma final é dada por

$$\Sigma_H^{v\mu} = i \frac{g_v^2}{m_v^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu (\gamma_\nu \bar{q}^\nu + M^*)] e^{iq^0 \eta}}{\bar{q}_\nu^2 - M^{*2} + i\epsilon} - \frac{g_v^2}{m_v^2} \rho_B \delta^{\mu 0} \quad (3.114)$$

onde $\bar{q}^\nu = q^\nu + \Sigma^{v\mu}$.

A integral acima é divergente por contagem de potência e trataremos esta integral pelas técnicas de regularização dimensional mostradas em detalhes no apêndice(A). A equação acima pode ser escrita como

$$\Sigma_H^{v\mu} = 8i \frac{g_v^2}{m_v^2} \int \frac{d^n q}{(2\pi)^4} \frac{\bar{q}^\mu}{\bar{q}_\nu^2 - M^{*2} + i\epsilon} - \frac{g_v^2}{m_v^2} \rho_B \delta^{\mu 0} \quad (3.115)$$

onde a integração é agora em n dimensões e o resultado final é colocado no limite físico $n \rightarrow 4$. Desde que a integral agora é finita, pode-se fazer um 'shift' na variável de integração

$q^\mu \rightarrow \bar{q}^\mu$. Uma comparação com a eq.(A6) mostra então que esta integral desaparece por integração simétrica. Então como visto na secção anterior nenhum contratermo é necessário para fazer $\Sigma_H^{\nu\mu}$ finito e o resultado nesta aproximação é o mesmo que na aproximação de campo médio.

Se considerarmos a auto-energia escalar Σ_H^s (3.103), notaremos que tanto $G_F^H(k)$ quanto $G_D^H(k)$ contribuirão para esta equação. A contribuição de $G_F^H(k)$ é divergente e sua renormalização é afetada por Σ_{CTC}^s para ser tornada finita.

O método que iremos seguir para encontrar os contratermos da lagrangeana está descrito em detalhes na ref.[39] o qual difere do método utilizado por Chin^[41] mas que chega aos mesmos resultados.

Começaremos somando todas as contribuições de "tadpole" de $\Sigma_H^{\nu\mu}$ para o propagador dado em (3.102), para isto utilizamos a eq.(3.103). O resultado será

$$G^H(k) = G^0(\bar{k}) + G^0(\bar{k})\Sigma_H^s G^H(k) \quad (3.116)$$

onde a mudança ocorre com $\bar{k}^\mu = k_\mu + \Sigma_H^{\nu\mu}$ e $G^0 = G_F^0 + G_D^0$. Expandindo G^H em uma série de potências no "tadpole" escalar renormalizado Σ_H^s teremos

$$G^H(k) = \sum_{m=0}^{\infty} [G^0(\bar{k})]^{m+1} [\Sigma_H^s]^m \quad (3.117)$$

Inserindo esta expressão dentro de eq.(3.103) encontramos a equação implícita para a auto-energia escalar renormalizada

$$\begin{aligned} \Sigma_H^s = & i \frac{g_s^2}{m_s^2} \int \frac{d^n q}{(2\pi)^4} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ [\Sigma_H^s]^m \text{Tr}[(G_F^0(\bar{q}))^{m+1}] e^{i\bar{q}^0 \eta} \right\} \\ & + \Sigma_{CTC}^s + \text{termos finitos} \end{aligned} \quad (3.118)$$

Os termos finitos vem de todas as contribuições com ao menos um fator de $G_D^0(\bar{q})$. Estes termos desaparecem a densidade zero e são irrelevantes para renormalização. Desde que agora a equação acima é finita, os 'shifts' na variável de integração são permitidos. Então, $\bar{q}_\mu$ pode ser trocado por q_μ e com isto o "tadpole" vetorial é eliminado da renormalização

Para a dimensão física $n = 4$ torna-se claro que apenas termos com $0 \leq m \leq 3$ na equação acima são divergentes. Estas divergências serão removidas incluindo contratermos na lagrangeana dada em (3.10)

$$\delta\mathcal{L} = \alpha_1\phi + \frac{1}{2!}\alpha_2\phi^2 + \frac{1}{3!}\alpha_3\phi^3 + \frac{1}{4!}\alpha_4\phi^4 \quad (3.119)$$

e incorporando estas novas contribuições dentro de Σ_{CTC}^s , cuja forma analítica é dada por^[39]

$$\Sigma_{CTC}^s = \sum_{m=0}^3 \frac{1}{m!} \left(\frac{-g_s}{m_s^2} \right) \left(\frac{-\Sigma_H^s}{g_s} \right)^m \alpha_{m+1} \quad (3.120)$$

Os coeficientes α_i serão determinados de modo a tornar a expressão dada em (3.118) finita, para isto usamos a identidade $\partial G_F^0(q)/\partial M = [G_F^0(q)]^2$

$$\begin{aligned} \Sigma_H^s &= i \frac{g_s^2}{m_s^2} \int \frac{d^n q}{(2\pi)^4} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m!} [\Sigma_H^s]^m \text{Tr} \left[\frac{\partial^m}{\partial M^m} G_F^0(q) \right] \right\} e^{iq^0 \eta} \\ &+ \Sigma_{CTC}^s + \text{termos finitos} \end{aligned} \quad (3.121)$$

Para que cancelemos os quatro termos divergentes da expressão acima, os coeficientes α_i terão a forma

$$\alpha_m = -i(-g_s)^m \int \frac{d^n q}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\frac{\partial^{m-1}}{\partial M^{m-1}} G_F^0(q) \right] e^{iq^0 \eta}, \quad 1 \leq m \leq 4 \quad (3.122)$$

O resultado final para a auto-energia escalar renormalizada, em termos do propagador interagente $G^H(q)$ será

$$\Sigma_H^s = i \frac{g_s^2}{m_s^2} \int \frac{d^n q}{(2\pi)^4} \text{Tr} [G^H(q)] e^{iq^0 \eta} + \sum_{m=0}^3 \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \frac{g_s^{1-m}}{m_s^2} \alpha_{m+1} [\Sigma_H^s]^m \quad (3.123)$$

e é agora finita.

Os contratermos dados em (3.122) são calculados no vácuo mas, analisando a eq(3.123) vemos que estes valores de α_m deixam Σ_H^s finita em qualquer densidade. Se a eq(3.123) for calculada para densidade zero, $G^H = G_F^0$, o resultado será

$$[\Sigma_H^*]_{\rho_B=0} = \sum_{m=4}^{\infty} c_m [\Sigma_H^*]_{\rho_B=0}^m \quad (3.124)$$

onde c_m são coeficientes finitos. Obtemos, então a solução trivial $[\Sigma_H^*]_{\rho_B=0} = 0$.

Para encontrarmos a forma final da expressão (3.123) usaremos as técnicas de regularização dimensional e a expressão final para os coeficientes α_i é calculada no apêndice A. Usando a expressão (A.11) teremos

$$\begin{aligned} i \frac{g_s^2}{m_s^2} \int \frac{d^n q}{(2\pi)^4} \text{Tr}[G^H(q)] e^{iq^2 \eta} &= \frac{g_s^2}{2\pi^2 m_s^2} M^{*3} \Gamma\left(1 - \frac{n}{2}\right) \\ + \frac{g_s^2}{2\pi^2 m_s^2} [2M^{*3} \ln M^* + O(n-4)] &- \frac{g_s^2}{m_s^2} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3 q \frac{M^*}{(q^2 + M^{*2})^{1/2}} \end{aligned} \quad (3.125)$$

o resultado para a eq.(3.123) é encontrado fazendo o limite $n \rightarrow 4$

$$\begin{aligned} \Sigma_H^* &= \frac{g_s^2}{2\pi^2 m_s^2} \Gamma\left(1 - \frac{n}{2}\right) \{M^{*3} - M^3 - 3M^2(M^* - M)\} \\ &+ \frac{g_s^2}{2\pi^2 m_s^2} \Gamma\left(1 - \frac{n}{2}\right) \{-3M(M^* - M)^2 - (M^* - M)^3\} \\ &+ \frac{g_s^2}{\pi^2 m_s^2} \left[M^{*3} \ln\left(\frac{M^*}{M}\right) - M^2(M^* - M) - \frac{5}{2}M(M^* - M)^2 \right] \\ &+ \frac{g_s^2}{\pi^2 m_s^2} \left[-\frac{11}{6}(M^* - M)^3 \right] + O(n-4) \\ &- \frac{g_s^2}{m_s^2} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3 q \frac{M^*}{(q^2 + M^{*2})^{1/2}} \end{aligned} \quad (3.126)$$

Podemos notar que a divergência $n \rightarrow 4$ foi isolada nos pólos da função Γ e os termos entre chaves são identicamente zero e independentes de n . Então o termo divergente desaparece e Σ_H^* é finita no limite físico. A equação autoconsistente para a massa, nesta aproximação é dada por

$$\begin{aligned} \Sigma_H^* &= M^* - M = -\frac{g_s^2}{m_s^2} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3 q \frac{M^*}{(q^2 + M^{*2})^{1/2}} \\ &+ \frac{g_s^2}{\pi^2 m_s^2} \left[M^{*3} \ln\left(\frac{M^*}{M}\right) - M^2(M^* - M) \right] \\ &+ \frac{g_s^2}{\pi^2 m_s^2} \left[\frac{5}{2}M(M^* - M)^2 - \frac{11}{6}(M^* - M)^3 \right] \end{aligned} \quad (3.127)$$

Vamos agora calcular a densidade de energia nesta aproximação. As expressões que devemos calcular são (3.90), (3.91), (3.92) e usaremos os procedimentos de renormalização dados em (3.93), (3.94), (3.96). A contribuição dos mesons pode ser calculada usando a nova expressão para Σ_H^* e lembrando que podemos ainda usar a relação $\Sigma_H^* = -g_s \phi_0$ e $\Sigma_H^{*\mu} = -g_v V_0 \delta^{\mu 0}$. A contribuição dos barions, T_B^{00} , é dada pela eq.(3.112) que é finita, e também por uma contribuição divergente de G_F^H . Então, a expressão para a densidade de energia do sistema é dada por

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \hat{T}_B^{00} | \Psi \rangle &= \frac{1}{2} m_v^2 V_0^2 + \frac{1}{2} m_s^2 \phi_0^2 + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3 k (k^2 + M^{*2})^{1/2} \\ &- \frac{8i}{(2\pi)^4} \int d^4 k \frac{(k^0 - g_v V_0) k^0 e^{ik^0 \eta}}{(k^0 - g_v V_0)^2 - k^2 - M^{*2} + i\epsilon} \end{aligned} \quad (3.128)$$

O termo final desta expressão é divergente e representa a soma sobre todos os estados ocupados do mar de Dirac. Este termo contém divergências que podem ser isoladas usando regularização dimensional. Podemos calcular a integral usando os resultados do apêndice A:

$$\begin{aligned} e_{Dirac}(M^*) &= -\frac{8i}{(2\pi)^4} \int d^n k \frac{(k^0 - g_v V_0) k^0 e^{ik^0 \eta}}{(k^0 - g_v V_0)^2 - k^2 - M^{*2} + i\epsilon} \\ &= -\frac{8i}{(2\pi)^4} g_0^\mu g_0^\nu \int d^n k \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - M^{*2} + i\epsilon} \\ &= -\frac{8i}{(2\pi)^4} \left[i\pi^{n/2} \frac{1}{2} \Gamma\left(-\frac{n}{2}\right) M^* \right] \end{aligned} \quad (3.129)$$

onde $g_0^\mu = (1, 0, 0, 0)$ e a segunda linha foi encontrada, definindo o deslocamento $k^0 \rightarrow k^0 + g_v V_0$. A subtração do vácuo $\lim_{k_F \rightarrow 0} \langle \Psi | \hat{T}^{00} | \Psi \rangle$ é simplesmente $e_{Dirac}(M)$, já que os três primeiros termos em (3.128) desaparecem quando a densidade vai a zero. As correções de contratermo são dadas por (3.119) e são justamente $(-\langle \Psi | \delta \mathcal{L} | \Psi \rangle)$. As correções de flutuação de vácuo para a densidade de energia tornam-se

$$\begin{aligned} \Delta e_{FQHD} &\equiv e_{Dirac}(M^*) - e_{Dirac}(M) - \alpha_1 \phi - \frac{1}{2!} \alpha_2 \phi^2 - \frac{1}{3!} \alpha_3 \phi^3 - \frac{1}{4!} \alpha_4 \phi^4 \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \left[M^{*4} \ln\left(\frac{M^*}{M}\right) + M^3(M^* - M) - \frac{7}{2} M^2(M^* - M)^2 \right] \\ &- \frac{1}{4\pi^2} \left[\frac{13}{3} M(M^* - M)^3 - \frac{25}{12} (M^* - M)^4 \right] \end{aligned} \quad (3.130)$$

$$e_{\text{QHD}} = \frac{g_v^2}{2m_v^2} \rho_B^2 + \frac{2m_s^2}{g_s^2} (M^* - M)^2 + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k (k^2 + M^{*2})^{1/2} \quad (3.131)$$

então

$$\begin{aligned} e_{\text{HQHD}} &= e_{\text{QHD}} + \Delta e_{\text{FQHD}} \\ p_{\text{HQHD}} &= p_{\text{QHD}} - \Delta e_{\text{FQHD}} \end{aligned} \quad (3.132)$$

onde o índice inferior H indica a aproximação de Hartree, QHD indica campo médio e Δe_F indica as correções de vácuo nesta aproximação. Pelas relações acima podemos extrapolar para o caso onde a temperatura seja diferente de zero. Neste caso, usamos as expressões encontradas no capítulo 2 para a aproximação de campo médio. Com isto as equações de estado para $T \neq 0$ na aproximação de Hartree são dadas por

$$e_{\text{HQHD}} = \frac{1}{2} \frac{C_V^2}{M^2} \rho_B^2 + \frac{1}{2} \frac{M^2}{C_S^2} (M^* - M)^2 + \frac{\gamma}{8\pi^3} \int d^3k \epsilon^*(f_+ + f_-) + \Delta e_{\text{FQHD}} \quad (3.133)$$

$$p_{\text{HQHD}} = \frac{1}{2} \frac{C_V^2}{M^2} \rho_B^2 - \frac{1}{2} \frac{M^2}{C_S^2} (M^* - M)^2 + \frac{\gamma}{24\pi^3} \int d^3k \frac{k^2}{\epsilon^*} (f_+ + f_-) - \Delta e_{\text{FQHD}} \quad (3.134)$$

$$\begin{aligned} M^* &= M - \frac{\gamma}{8\pi^3} \frac{C_S^2}{M^2} \int d^3k \frac{M^*}{\epsilon^*} (f_+ + f_-) \\ &+ \frac{g_s^2}{\pi^2 m_s^2} \left[M^{*3} \ln \left(\frac{M^*}{M} \right) - M^2 (M^* - M) \right] \\ &+ \frac{g_s^2}{\pi^2 m_s^2} \left[\frac{5}{2} M (M^* - M)^2 - \frac{11}{6} (M^* - M)^3 \right] \end{aligned} \quad (3.135)$$

Figura 3.3: Massa efetiva vrs temperatura para baixas densidades na aproximação de Hartree-modelo de Walecka

Figura 3.4: Razão entre a energia do sistema e a energia de fermions sem interação vrs temperatura para baixas densidades na aproximação de Hartree-modelo de Walecka

Figura 3.5: Pressão vrs temperatura para baixas densidades na aproximação de Hartree-modelo de Walecka

Como podemos ver pelas figuras acima, no modelo de Walecka as flutuações de vácuo tendem a suavizar as curvas em relação a aproximação de campo médio (capítulo 2).

O modelo Sigma-Linear também é renormalizável, com isto é possível, com a soma de um conjunto de contratermos na lagrangeana deste modelo, encontrarmos as correções das flutuações do vácuo. O procedimento é o mesmo que no modelo de Walecka, lembrando que no modelo sigma existem interações de ordem mais alta nos campos escalares. O procedimento é feito em detalhes no artigo de Matsui e Serot (ref. ([39])), discutiremos aqui somente o caso quiral quando $\epsilon = 0$. Para isto usaremos a lagrangeana do modelo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\sigma\omega} = & \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - g(\sigma + i\gamma_5\tau\cdot\pi) - g_v\gamma_\mu V_\mu)\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \partial_\mu\pi\partial^\mu\pi) \\ & - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \pi^2 - v^2)^2 - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_v^2V_\mu V^\mu \end{aligned} \quad (3.136)$$

Para preservar a simetria quiral adicionamos os contratermos na lagrangeana antes de quebrarmos espontaneamente a simetria. Os contratermos da lagrangeana devem então, ser explicitamente quirais e de dimensão $d \geq 4$. Para a aproximação de Hartree e a renormalização do propagador do pion é suficiente adicionar a lagrangeana original do modelo^[38]

$$\delta\mathcal{L}_{\sigma\omega} = aM^2(\sigma^2 + \pi^2) + b(\sigma^2 + \pi^2)^2 + c(\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \partial_\mu\pi\partial^\mu\pi) \quad (3.137)$$

Podemos agora fazer a mudança $\sigma = u - s = v - s$. A lagrangeana de contratermos resultante depois desta mudança é da forma

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_{\sigma\omega} = & \alpha_1 s + \frac{1}{2!}\alpha_2 s^2 + \frac{1}{3!}\alpha_3 s^3 + \frac{1}{4!}\alpha_4 s^4 \\ & + \frac{1}{2!}\beta_2 \pi^2 + \frac{1}{2!}\beta_3 s \pi^2 + \frac{1}{2!2!}\beta_4 s^2 \pi^2 - \frac{1}{2!}\zeta \pi \cdot \partial^2 \pi + \dots\end{aligned}\quad (3.138)$$

Mas os novos contratermos dependem apenas das tres variáveis independentes a, b, c . Esta dependência pode ser vista pela forma explícita dos coeficientes^[38]

$$\alpha_1 = -\frac{2M^3}{g_\pi} \left(a + \frac{2b}{g_\pi^2} \right) \quad (3.139)$$

$$\alpha_2 = 2M^2 \left(a + \frac{6b}{g_\pi^2} \right) \quad (3.140)$$

$$\alpha_3 = -\frac{24Mb}{g_\pi^2} \quad (3.141)$$

$$\alpha_4 = 24b \quad (3.142)$$

$$\beta_2 = 2M^2 \left(a + \frac{2b}{g_\pi^2} \right) \quad (3.143)$$

$$\beta_3 = -\frac{8Mb}{g_\pi} \quad (3.144)$$

$$\beta_4 = 8b \quad (3.145)$$

$$\zeta = 2c \quad (3.146)$$

Usando os procedimentos de renormalização todos os contratermos podem ser especificados em termos de

$$a = \frac{g_\pi^2}{4\pi^2} + O(n-4) \quad (3.147)$$

$$b = -\frac{g_\pi^4}{8\pi^2} \Gamma\left(1 - \frac{n}{2}\right) - \frac{g_\pi^4}{8\pi^2} - \frac{g_\pi^4}{4\pi^2} \ln M + O(n-4) \quad (3.148)$$

$$c = \frac{g_\pi^2}{8\pi^2} \Gamma\left(1 - \frac{n}{2}\right) + \frac{g_\pi^2}{8\pi^2} + \frac{g_\pi^2}{4\pi^2} \ln M + O(n-4) \quad (3.149)$$

Note que a é finito quando $n \rightarrow 4$ e todas as divergências são removidas por b e c .

Encontramos então a expressão para a densidade de energia no modelo quiral levando em conta as correções vindas do vácuo

$$e_{H\sigma} = \frac{g_\sigma^2}{2m_\sigma^2} \rho_B^2 + \frac{m_\sigma^2 (M^{*2} - M^2)^2}{8g_\pi^2 M^2} + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k (k^2 + M^{*2})^{1/2} + \Delta e_{p\sigma} \quad (3.150)$$

$$p_{H\sigma} = p_{\sigma} - \Delta e_{\sigma} \quad (3.151)$$

onde

$$\Delta e_{\sigma} = -\frac{\gamma}{16\pi^2} \left\{ \frac{1}{2} M^{*4} \ln \left(\frac{M^*}{M} \right)^2 - \frac{M^4}{4} + M^2 M^{*2} - \frac{3M^{*4}}{4} \right\} \quad (3.152)$$

onde $M^* = M - g_{\pi} \langle s \rangle = M - g_{\pi} s_0$

A equação autoconsistente para a massa é corrigida e a forma final fica sendo

$$M^*(M^{*2} - M^2) + 2C_S^2 \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \frac{M^*}{(k^2 + M^{*2})^{1/2}} - \frac{\gamma}{2\pi^2} C_S^2 M^{*3} \ln \left(\frac{M^*}{M} \right) - \frac{\gamma}{4\pi^2} C_S^2 M^*(M^{*2} - M^2) = 0 \quad (3.153)$$

Neste caso podemos obter saturação nuclear com o modelo sigma linear. Os valores dos parâmetros $C_V^2 = 36.12$ e $C_S^2 = 226.12$ para o modelo Sigma Quiral e $C_V^2 = 228.2$, $C_S^2 = 147.8$ para o modelo de Walecka, correspondem a saturação nuclear considerando $k_F = 1.30 \text{ fm}^{-1}$ e $(e/\rho_B) - M = -15.75 \text{ MeV}$. A saturação nuclear é mostrada no gráfico abaixo para os dois modelos na aproximação de Hartree.

Figura 3.6: Saturação da matéria nuclear-Modelos Sigma Quiral e Walecka na Aproximação de Hartree

Novamente podemos extrapolar para o caso onde a temperatura é diferente de zero. Neste caso as expressões para o modelo sigma quiral com correções de flutuação de vácuo e com $T \neq 0$ serão

$$e_{H\sigma} = \frac{1}{2} \frac{C_V^2}{M^2} \rho_B^2 + \frac{1}{8} \frac{1}{C_S^2} (M^2 - M^{*2})^2 + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k \epsilon^* (f_+ + f_-) + \Delta e_{F\sigma} \quad (3.154)$$

$$p_{H\sigma} = \frac{1}{2} \frac{C_V^2}{M^2} \rho_B^2 - \frac{1}{8} \frac{1}{C_S^2} (M^2 - M^{*2})^2 + \frac{\gamma}{3(2\pi)^3} \int d^3k \frac{k^2}{\epsilon^*} (f_+ + f_-) - \Delta e_{F\sigma} \quad (3.155)$$

e a relação para a massa é dada por

$$\begin{aligned} & M^* (M^{*2} - M^2) - 2C_S^2 \frac{\gamma}{8\pi^3} \int d^3k \frac{M^*}{\epsilon^*} (f_+ + f_-) \\ & - \frac{\gamma}{2\pi^2} C_S^2 M^{*3} \ln \left(\frac{M^*}{M} \right) - \frac{\gamma}{4\pi^2} C_S^2 M^* (M^2 - M^{*2}) = 0 \end{aligned} \quad (3.156)$$

Figura 3.7: Massa efetiva vrs temperatura para baixas densidades na aproximação de Hartree-modelo Sigma Quiral

A partir da comparação dos gráficos mostrados neste capítulo com os obtidos no capítulo anterior, podemos ver que as flutuações de vácuo tendem a suavizar as curvas, tanto da

Figura 3.8: Razão entre a energia do sistema e a energia de fermions sem interações temperatura para baixas densidades na aproximação de Hartree-modelo Sigma Quiral

Figura 3.9: Pressão vs temperatura para baixas densidades na aproximação de Hartree-modelo Sigma Quiral

massa efetiva quanto das outras quantidades termodinâmicas. Além disto, as flutuações são imprescindíveis no modelo sigma quiral se quisermos obter a curva de saturação nuclear.

Um teste quantitativo pode ser feito em relação as equações de estado dos modelos até aqui apresentados e os diferentes níveis de aproximação em que calculamos estes modelos. A partir das equações de estado veremos, no capítulo 5, que o modelo sigma com flutuações apresenta melhores previsões para as massa máximas e raios de estrelas de nêutrons.

Capítulo 4

Tempo de Vida do Pion na Matéria Quente e Densa

No capítulo anterior vimos como as flutuações do vácuo são fundamentais se quisermos reproduzir, para o modelo sigma quiral, as propriedades de saturação nuclear. Então, usaremos o modelo quiral na aproximação de Hartree para encontrarmos melhores resultados.

Neste capítulo pretendemos estudar algumas propriedades vindas essencialmente da simetria quiral que são independentes da renormalização.

Estudaremos a adequação do modelo Sigma-Linear apenas com seu setor mesônico para descrever propriedades estáticas do espectro hadrônico, ou seja, as massas do meson pion e do sigma. Uma comparação com cálculos microscópicos baseados na Cromodinâmica Quântica^[42, 43] nos mostra que nossos resultados para m_π e m_σ em condições extremas estão em excelente concordância. Utilizamos então, as expressões analíticas obtidas para m_π e m_σ para estudar o tempo de vida do pion em condições extremas. Mostramos também que a observação da razão $\frac{\tau(\pi^- \rightarrow \mu^- + \nu_\mu)}{\tau(\pi^- \rightarrow e^- + \nu_e)}$ pode sinalizar a transição quiral, caso as condições idealizadas de equilíbrio venham a ser atingidas numa colisão de íons pesados relativísticos.

4.1 Modelo Sigma no Setor Mesônico e o Vácuo

Para determinar a massa dos mesons pseudoescalares(π) e escalares(σ) e o tempo de vida destas partículas usaremos o modelo Sigma-Linear estudado nos capítulos anteriores. Neste caso estaremos interessados somente no setor mesônico deste modelo assim, a lagrangeana neste caso é dada por

$$\mathcal{L}_{\sigma\pi} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) - \frac{K^2}{8}(\varphi^2 - f_\pi^2)^2 \quad (4.1)$$

onde $\varphi = (\sigma, \vec{\pi})$, K é uma constante positiva real f_π é a constante de decaimento do pion no vácuo e a métrica usada é a da referência [18]. A lagrangeana acima pode ser escrita explicitamente em termos dos campos mesônicos. Então

$$\mathcal{L}_{\sigma\pi} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)(\partial^\mu\sigma) + \frac{1}{2}(\partial_\mu\vec{\pi})(\partial^\mu\vec{\pi}) - \frac{K^2}{8}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - f_\pi^2)^2 \quad (4.2)$$

A lagrangeana acima tem relação com a lagrangeana obtida para o modelo sigma linear do capítulo 2. As relações são dadas por

$$\begin{aligned} f_\pi &= v \\ \frac{K^2}{2} &= \lambda \end{aligned} \quad (4.3)$$

A equação de movimento para este campo é dada por

$$\partial_\mu\partial^\mu\varphi^a + \frac{K^2}{2}\varphi^a(\varphi^2 - f_\pi^2)^2 = 0 \quad (4.4)$$

Podemos ver que a lagrangeana acima é invariante sobre transformações de isospin nos campos mesônicos

$$\sigma \rightarrow \sigma, \quad \vec{\pi} \rightarrow \vec{\pi} + \vec{\alpha} \times \vec{\pi} \quad (4.5)$$

A corrente vetorial é definida por:

$$V_i^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\alpha_i)} = \epsilon^{ijk}\pi^j(\partial^\mu\pi_k) \quad (4.6)$$

A corrente vetorial é conservada pois

$$\partial_\mu V_i^\mu = 0 \quad (4.7)$$

Outra propriedade fundamental da lagrangeana deste modelo é a invariância em rotações quirais

$$\sigma \rightarrow \sigma - \vec{\beta} \cdot \vec{\pi}, \quad \vec{\pi} \rightarrow \vec{\pi} + \vec{\beta} \sigma \quad (4.8)$$

A corrente axial associada a esta transformação é dada por

$$A_i^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \beta_i)} = \sigma (\partial^\mu \pi_i) - \pi_i (\partial^\mu \sigma) \quad (4.9)$$

Com a ajuda das equações de movimento podemos encontrar

$$\partial_\mu A_i^\mu = 0 \quad (4.10)$$

Como já vimos no capítulo 2, este modelo se caracteriza por apresentar valor do meson escalar σ diferente de zero no vácuo e o valor para as três componentes do meson pseudoescalar sendo zero, caracterizando assim o modo de Nambu Goldstone.

$$\varphi_0 = (f_\pi, 0, 0, 0) \quad (4.11)$$

onde $\sigma_0 = f_\pi$ sendo o valor de sigma no vácuo e $\vec{\pi}_0 = 0$.

Como vimos esta escolha dos valores no vácuo é arbitrária mas uma vez feita, diferencia o campo σ das outras três componentes $\vec{\pi}^a$, no sentido de que, no vácuo físico o campo σ terá uma componente clássica não nula enquanto que o valor para os pions será zero.

4.2 Vibrações do Vácuo Físico

Podemos encontrar a forma do campo φ^a em torno do seu valor no vácuo, se considerarmos que a forma do campo não varia muito em relação a este valor, então

$$\varphi^a(\vec{r}, t) = \varphi_0^a + \tilde{\varphi}^a(\vec{r}, t) \quad (4.12)$$

onde $\tilde{\varphi}^a(\vec{r}, t)$ representa as vibrações .

Desenvolvendo a equação de movimento (4.4) até primeira ordem em $\tilde{\varphi}^a$ teremos

$$\partial_\mu \partial^\mu \tilde{\varphi}^a + K^2 \varphi_0^a (\varphi_0^b \tilde{\varphi}^b) = 0 \quad (4.13)$$

A invariança por translação de φ_0 nos sugere como forma para $\tilde{\varphi}^a$

$$\tilde{\varphi}^a(\vec{r}, t) = e^{ik_\mu x^\mu} \tilde{\varphi}^a \quad (4.14)$$

onde $k^\mu = (w, \vec{k})$, $x^\mu = (t, \vec{r})$.

Obtemos para a amplitude $\tilde{\varphi}^a$

$$(-\omega^2 + k^2) \tilde{\varphi}^a + K^2 \varphi_0^a (\varphi_0^b \tilde{\varphi}^b) = 0 \quad (4.15)$$

Podemos então ,distinguir dois tipos de solução ,em uma delas $\tilde{\varphi}^a$ é paralelo a φ_0 e na outra é perpendicular.

A solução paralela a φ_0 pode ser escrita como

$$\tilde{\varphi}^{(0)} = \beta \varphi_0 = \beta (f_\pi, 0, 0, 0) \quad (4.16)$$

Se substituirmos a eq.(4.16) na eq.(4.15) encontraremos

$$\begin{aligned} (-\omega^2 + k^2) \beta \varphi_0^{(0)} + K^2 \varphi_0^{(0)} (\beta f_\pi^2) &= 0 \\ -\omega^2 + k^2 + K^2 f_\pi^2 &= 0 \\ w_{k,0}^2 = k^2 + K^2 f_\pi^2 &= k^2 + m_\sigma^2 \end{aligned} \quad (4.17)$$

As soluções perpendiculares a φ_0 são dadas por

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}^{(i=1)} &= \beta(0, 1, 0, 0) \\
\tilde{\varphi}^{(i=2)} &= \beta(0, 0, 1, 0) \\
\tilde{\varphi}^{(i=3)} &= \beta(0, 0, 0, 1)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Se substituirmos estas expressões em (4.15) teremos

$$\begin{aligned}
(-\omega^2 + k^2)\tilde{\varphi}^{(i=1,2,3)} &= 0 \\
w_{k,i}^2 &= k^2 = k^2 + m_\pi^2 \quad i=1,2,3
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Os modos normais de vibração eq.(4.16) e (4.18) representam, respectivamente o meson σ de massa $m_\sigma = K f_\pi$ e os pions de massa $m_\pi = 0$.

Vamos agora obter as propriedades do vácuo e as vibrações na amplitude deste vácuo, conectados com a definição de partícula física e suas massas. Para obter valores realistas e levando em conta o fato de simetria quiral não ser conservada exatamente na natureza, como visto no capítulo 2 podemos introduzir um termo de quebra de simetria no modelo sigma quiral, com isto o modelo fica sendo, em seu setor mesônico, descrito pela seguinte lagrangeana

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - \frac{K^2}{8}(\varphi^2 - f_\pi^2)^2 + c\sigma \tag{4.20}$$

onde c é uma constante com dimensão de *(energia)*³. A densidade de lagrangeana eq.(4.20) é ainda invariante com respeito a rotações de isospin, mas não em relação a rotações quirais. A equação de movimento é dada por

$$\begin{aligned}
\partial_\mu(\partial^\mu \pi^i) + \frac{K^2}{2}\pi^i(\varphi^2 - f_\pi^2) &= 0 \quad i=1,2,3 \\
\partial_\mu(\partial^\mu \sigma) + \frac{K^2}{2}\sigma(\varphi^2 - f_\pi^2) &= c \quad i=0
\end{aligned} \tag{4.21}$$

O vácuo físico corresponde a uma solução que é estacionária e invariante por translação, então os valores dos campos no vácuo, são dados por

$$\begin{aligned}
\pi_0^i &= 0 \\
\frac{K^2}{2}\sigma_0(\sigma_0^2 - f_\pi^2) &= c
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Sabendo que o valor de c é pequeno, em primeira ordem de aproximação o valor de sigma no vácuo tem como expressão

$$\sigma_0 = f_\pi + \frac{c}{K^2 f_\pi^2} \quad (4.23)$$

Usando a definição do caso quiral teremos a forma do campo dada

$$\varphi^i(\vec{r}, t) = \varphi_0 + \tilde{\varphi}^i \quad (4.24)$$

Se considerarmos termos até segunda ordem em $\tilde{\varphi}^i(\vec{r}, t)$ obteremos soluções, de pequena amplitude, das equações de movimento. A invariança sugere a seguinte forma para $\tilde{\varphi}^i(\vec{r}, t)$

$$\tilde{\varphi}^i(\vec{r}, t) = e^{ik_\mu x^\mu} \tilde{\varphi}^i \quad (4.25)$$

Inserindo esta expressão na eq.(4.21) obteremos

$$\omega_{k,i} = \sqrt{k^2 + K^2 f_\pi^2}; \quad \text{para } i=0 \quad (4.26)$$

$$\omega_{k,i} = \sqrt{k^2 + c/f_\pi}; \quad \text{para } i=1,2,3 \quad (4.27)$$

Podemos identificar a massa do meson escalar pela eq.(4.26)

$$m_\sigma^2 = K^2 f_\pi^2 = K^2 \sigma_0^2 \left(1 + \frac{c\sigma_0}{K^2 \sigma_0^4} \right) \quad (4.28)$$

e a massa do pion através da eq.(4.27)

$$m_\pi^2 = \frac{c}{f_\pi} \cong \frac{c}{\sigma_0} \quad (4.29)$$

Neste caso, como esperado o pion adquire massa através da quebra explícita de simetria quiral. Os resultados obtidos acima são independentes do modelo se lembrarmos que

as relações de Goldberg-Treiman e Gell-Mann-Oakes-Renner ditam uma relação entre as massas dos mesons sigma e pion como^[28]

$$m_\sigma^2 = 4m^{*2} + m_\pi^2 \quad (4.30)$$

onde m^* é o condensado de quarks no vácuo. Notamos que a eq.(4.28) pode ser reescrita com a ajuda da eq.(4.29), até primeira ordem em c

$$m_\sigma^2 = K^2 \sigma_0^2 + m_\pi^2 \quad (4.31)$$

A relação contida na eq.(4.31) reflete o poder da simetria quiral. As propriedades do vácuo da QCD e os resultados da álgebra de correntes para as massas dos pions e sigma são respeitados. Podemos observar que todas as propriedades físicas relevantes são dadas em termos de f_π que é um ingrediente básico do modelo. Vamos assumir que estas relações são igualmente válidas se o vácuo está sujeito a temperaturas e densidades diferentes de zero. Nestes casos, f_π como função destas variáveis é o que determina as massas dos mesons e as propriedades de decaimento. Antes de mostrar a parametrização de f_π como função da densidade e da temperatura no modelo de Nambu-Jona-Lasinio, vamos calcular o tempo de vida dos pions.

4.3 Quantização dos Campos e a Definição dos Mesons como Partículas

A quantização do campo clássico $\tilde{\varphi}^i(\vec{r}, t)$ pode ser feita postulando a relação de comutação

$$\begin{aligned} [\tilde{\varphi}_i(\vec{r}), p_j(\vec{r}')] &= i\delta_{ij}\delta(\vec{r} - \vec{r}') \\ p_j(\vec{r}) &= \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial_i \tilde{\varphi}^j} \end{aligned} \quad (4.32)$$

e os campos $\tilde{\varphi}$ e p podem ser expandidos em termos dos operadores c_k e $c_k^\dagger$

$$\tilde{\varphi}^a(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{k_i}}} \left[\frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{\sqrt{V}} c_{\vec{k}a} + c_{\vec{k}a}^\dagger \frac{e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{\sqrt{V}} \right] \quad (4.33)$$

$$p^a(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{i} \sqrt{\frac{\omega_{ka}}{2}} \left[\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{V}} c_{\vec{k}a} - c_{\vec{k}a}^\dagger \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{V}} \right] \quad (4.34)$$

com

$$[c_{\vec{k}i}, c_{\vec{k}j}^\dagger] = \delta_{ij} \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \quad (4.35)$$

Para definirmos pions físicos teremos que levar em conta a carga elétrica, podemos fazer isto identificando a carga elétrica com a terceira componente do operador isospin definida como

$$T_i = \int d^3r V_i^\mu = \int d^3r \epsilon_{ijk} \Pi_j(\vec{r}) p_k(\vec{r}) \quad (4.36)$$

Os pions carregados são construídos como autoestados de T_3 da seguinte maneira

$$|\pi^0, \vec{k}\rangle = c_{\vec{k}i=3}^\dagger |0\rangle \quad (4.37)$$

$$|\pi^\pm, \vec{k}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[c_{\vec{k}i=1}^\dagger \pm i c_{\vec{k}i=2}^\dagger \right] |0\rangle \quad (4.38)$$

onde $|0\rangle$ é o vácuo definido a partir de $c_{\vec{k}i}|0\rangle = 0$

4.4 Tempo de Vida do Pion no Vácuo

Para calcular o tempo de vida no vácuo usaremos a lagrangeana que descreve a interação fraca, isto por que o tempo de vida do pion está ligado, como veremos adiante, quase que somente ao decaimento fraco. Então a lagrangeana deste caso é da seguinte forma^[18]

$$L_I = -G J_i^\mu J_{\mu i}^\dagger \quad (4.39)$$

com a constante de acoplamento de Fermi $G=(1.026 \pm 0.001) \times 10^{-5} / m_p^2$ é determinada pela reação $\mu^\pm = e^\pm + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$.

A corrente J^μ é a soma de uma contribuição leptônica(l_i^μ) e uma parte vinda da interação forte(h_i^μ).Então

$$J_i^\mu = \bar{\psi}^l \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \tau_i \psi^l + V_i^\mu - A_i^\mu \quad (4.40)$$

onde $l_i^\mu = \bar{\psi}^l \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \tau_i \psi^l$ e $h_i^\mu = V_i^\mu - A_i^\mu$.

Na expressão acima ψ representa o campo fermiônico de um lepton. Simbolicamente

$$\psi^{l=1} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \quad \psi^{l=2} = \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix} \quad \psi^{l=3} = \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

O estado inicial é dado por

$$|\pi^-, \vec{k}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[c_{\vec{k},a=1}^\dagger - i c_{\vec{k},a=2}^\dagger \right] |0\rangle \quad (4.42)$$

e o estado final corresponde ao muon de energia positiva com momento $\vec{k}_1$, spin σ_1 e um neutrino de energia negativa com $\vec{k}_2$ e σ_2 . Isto será representado por

$$|f\rangle = a_{\vec{k}_1, \sigma_1}^\dagger b_{\vec{k}_2, \sigma_2} |0\rangle \quad (4.43)$$

A autofunção normalizada do muon é dada por^[44]

$$\langle \vec{r} | \vec{k}, \sigma_1^+ \rangle = \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{E_1 + m}{2E_1}} \begin{pmatrix} |\sigma_1\rangle \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{E_1 + m_1} |\sigma_1\rangle \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

onde $|\sigma_1\rangle$ corresponde a parte de spin da autofunção . Para o neutrino teremos

$$\langle \vec{r} | \vec{k}_2, \sigma_2^- \rangle = \frac{e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}}}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\vec{\sigma} \cdot \hat{k}_2 |\sigma_2\rangle \\ |\sigma_2\rangle \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

com $\hat{k}_2 \equiv \vec{k}_2/k_2$.

Consideraremos agora o elemento de matriz $\langle f|V|i\rangle$ onde

$$V = \frac{G}{\sqrt{2}} \int d^3r J_i^\mu J_{i\mu} \quad (4.46)$$

com $i=2$, pois a componente $i=3$ refere-se a partícula π^0 que não tem carga e por isto não contribui para a corrente

Definindo $J_\pm = J_1 \pm iJ_2$ teremos

$$J_i^\mu J_{i\mu} = [(l_-^\mu h_{\mu+} + l_+^\mu h_{\mu-}) + (h_+^\mu h_{\mu-} + l_+^\mu l_{\mu-})] \quad (4.47)$$

Dos operadores responsáveis pelo decaimento usaremos apenas as seguintes combinações leptônicas hadrônicas

$$J_i^\mu J_{i\mu} = l_-^\mu h_{\mu+} + l_+^\mu h_{\mu-} \quad (4.48)$$

pois os operadores hh e ll só participam em um processo que envolva apenas hadrons ou leptons nos estados inicial e final.

Levando em conta apenas os termos de V que vão contribuir para a transição entre os estados inicial e final podemos escrever

$$V \rightarrow \frac{G}{\sqrt{2}} \int d^3r [l_-^\mu h_{\mu+} + l_+^\mu h_{\mu-}] \quad (4.49)$$

Com isto, o elemento de matriz $\langle f|V|i\rangle$ será da forma

$$\langle f|V|i\rangle = \frac{G}{\sqrt{2}} \int d^3r [\langle f|l_-^\mu h_{\mu+}|i\rangle + \langle f|l_+^\mu h_{\mu-}|i\rangle] \quad (4.50)$$

O segundo termo dentro do integrando da eq.(4.50) é facilmente calculado e dá como resultado zero, então $\langle f|l_+^\mu h_{\mu-}|i\rangle = 0$. A parte de V que irá contribuir para a transição é

$$\frac{G}{\sqrt{2}} \int d^3r l_{\mu+}^{\mu} h_{\mu+} = \frac{G}{\sqrt{2}} \int d^3r [\bar{\psi} \gamma^{\mu} (1 - \gamma_5) \tau_i \psi] (V_{+}^{\mu} - A_{+}^{\mu}) \quad (4.51)$$

Podemos escrever o elemento da matriz de transição usando a eq.(4.43)

$$\langle f|V|i\rangle = \frac{G}{\sqrt{2}} \int d^3r \langle 0|a_{\vec{k}_1, \sigma_1^+} b_{\vec{k}_2, \sigma_2^+}^{\dagger} [\bar{\psi} \gamma^{\mu} (1 - \gamma_5) \tau_i \psi] |0\rangle \langle 0|V_{+}^{\mu} - A_{+}^{\mu}|\pi^{-}, \vec{k}\rangle \quad (4.52)$$

Primeiramente, calcularemos o elemento de matriz hadrônico $\langle 0|V_{+}^{\mu} - A_{+}^{\mu}|\pi^{-}, \vec{k}\rangle = \langle 0|h_{\mu+}|i\rangle$ da expressão acima.

A corrente vetorial é da forma $V = e^{ijk} \pi^k (\partial^{\mu} \pi^i)$, observando esta expressão vemos que esta corrente não contribuirá para esta transição já que esta componente é quadrática em termos de c e $c^{\dagger}$. Pela forma de A_i^{μ} ($A_i^{\mu} = -\pi^i (\partial^{\mu} \sigma) + \sigma (\partial^{\mu} \pi^i)$) vemos que ela contribuirá para esta transição. Levando em conta que $\sigma = f_{\pi} + s$ teremos que

$$A_i^{\mu} = -f_{\pi} (\partial^{\mu} \pi^i) + \pi^i (\partial^{\mu} s) - s (\partial^{\mu} \pi^i) \quad (4.53)$$

Apenas o primeiro termo da eq.(4.53) é linear nos operadores c e $c^{\dagger}$ e assim apenas ele contribuirá para o elemento de transição. Após alguma álgebra encontramos o seguinte resultado

$$\langle 0|V_{+}^{\mu} - A_{+}^{\mu}|\pi^{-}, \vec{k}\rangle = -\langle 0|A_{+}^{\mu}|\pi^{-}, \vec{k}\rangle = \frac{2if_{\pi}}{\sqrt{2}} \frac{k_{\mu}}{\sqrt{2\omega}} \langle \vec{r}|\vec{k}\rangle \quad (4.54)$$

onde $k^{\mu} = (\omega_k, \vec{k})$, $\omega^k \equiv \sqrt{k^2 + m_{\pi}^2}$. Faremos o cálculo para o referencial de repouso do pion, ou seja $\vec{k} = 0$ e $\omega^k = m_{\pi}$. O único termo que contribui é $\mu = 0$ então, teremos

$$\langle 0|V_{+}^{\mu} - A_{+}^{\mu}|\pi^{-}, \vec{k} = 0\rangle = -\langle 0|A_{+}^{\mu}|\pi^{-}, \vec{k} = 0\rangle = -\frac{if_{\pi}\sqrt{m_{\pi}}}{\sqrt{\omega}} \quad (4.55)$$

Agora calcularemos o elemento de matriz leptônico, para isto escreveremos os spinors ψ em termos de ondas planas

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}, \sigma} \left[\langle \vec{r}|\vec{k}, \sigma^{+}\rangle b_{\vec{k}, \sigma^{+}} + \langle \vec{r}|\vec{k}, \sigma^{-}\rangle b_{\vec{k}, \sigma^{-}} \right] \quad (4.56)$$

Para $\mu = 0$ necessitaremos apenas de $\bar{\psi} = \gamma^0 \psi^\dagger$. Com isto o elemento de matriz leptônico tem a seguinte forma

$$\begin{aligned}\langle f | l_-^\mu | 0 \rangle &= \langle f | \bar{\psi} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \tau_i \psi | 0 \rangle = \langle f | \psi^\dagger (1 - \gamma_5) \psi | 0 \rangle \\ &= \langle \vec{k}_1 | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \vec{k}_2 \rangle \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \langle \sigma_1 | -1 - \vec{\sigma} \cdot \hat{k}_2 + \frac{\vec{\sigma} \cdot \hat{k}_1}{E+m} \vec{\sigma} \cdot \hat{k}_2 + \frac{\vec{\sigma} \cdot \hat{k}_1}{E+m} | \sigma_2 \rangle\end{aligned}\quad (4.57)$$

onde $m = m_\mu$ e $E = \sqrt{k_1^2 + m_\mu^2}$. Para obtermos a expressão acima usamos as regras de comutação e as expressões para as funções de onda do muon e do neutrino, eq.(4.44), eq.(4.45).

Podemos agora encontrar a forma para a matriz de transição

$$\begin{aligned}\langle f | V | i \rangle &= \frac{G}{\sqrt{2}} \int d^3r \langle f | l_-^\mu h_{\mu+} | i \rangle \\ &= \frac{G}{\sqrt{2}} \langle 0 | h_{\mu+} | i \rangle \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \int d^3r \langle \vec{k}_1 | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \vec{k}_2 \rangle \\ &\quad \langle \sigma_1 | -1 - \vec{\sigma} \cdot \hat{k}_2 + \frac{\vec{\sigma} \cdot \hat{k}_1}{E+m} \vec{\sigma} \cdot \hat{k}_2 + \frac{\vec{\sigma} \cdot \hat{k}_1}{E+m} | \sigma_2 \rangle\end{aligned}\quad (4.58)$$

Como $\int d^3r \langle \vec{k}_1 | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \vec{k}_2 \rangle = \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_2}$ teremos que $\vec{k}_1 = \vec{k}_2 = \vec{k}$. Utilizando o resultado para a matriz hadrônica teremos como resultado final

$$\langle f | V | i \rangle = \frac{-iGf_\pi\sqrt{m_\pi}}{2\sqrt{\Omega}} \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \left(\frac{k}{E+m} - 1 \right) \langle \sigma_1 | (1 + \vec{\sigma} \cdot \hat{k}) | \sigma_2 \rangle\quad (4.59)$$

O número de desintegrações por unidade de tempo é dado pela regra áurea de Fermi

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_f \langle f | V | i \rangle \langle i | V | f \rangle \delta(E_i - E_f)\quad (4.60)$$

Esta probabilidade de transição por unidade de tempo pode ser relacionada com a vida média do estado inicial, através da hipótese de um decaimento exponencial dos pions inicialmente disponíveis. Então, o número de pions existentes depois de um certo tempo t será dado por

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}\quad (4.61)$$

onde N_0 é o número de pion inicialmente disponíveis e τ é a vida média destes pions. Então ,
temos a relação

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\Gamma N(t) \rightarrow -\frac{N(t)}{\tau} = -\Gamma N(t) \rightarrow \Gamma = \frac{1}{\tau} \quad (4.62)$$

Podemos escrever a regra áurea da seguinte forma

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_f \langle f|V|i\rangle \langle i|V|f\rangle \delta(E_i - E_f) \quad (4.63)$$

Teremos também que $E_i = m_\pi$ e $E_f = k + \sqrt{k^2 + m_\mu^2} = k + E$. Usando estas expressões a forma da regra áurea, será

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} = & \frac{2\pi^2 G^2 f_\pi^2 m_\pi}{(2\pi)^3 \hbar} \int_0^\infty dk \, k^2 \left(\frac{E - k}{E} \right) \delta(E_i - E_f) \\ & \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \langle \sigma_1 | (1 + \vec{\sigma} \cdot \hat{k}) | \sigma_2 \rangle \langle \sigma_2 | (1 + \vec{\sigma} \cdot \hat{k}) | \sigma_1 \rangle \end{aligned} \quad (4.64)$$

onde usamos

$$\left(\frac{E + m_\mu}{2E} \right) \left(\frac{k}{E + m_\mu} - 1 \right)^2 = \frac{E - k}{E} \quad \text{e} \quad \sum_f = \sum_{\vec{k}} \sum_{\sigma_1, \sigma_2} = \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \int d^3k \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \quad (4.65)$$

A soma sobre os spins dará

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \langle \sigma_1 | (1 + \vec{\sigma} \cdot \hat{k}) | \sigma_2 \rangle \langle \sigma_2 | (1 + \vec{\sigma} \cdot \hat{k}) | \sigma_1 \rangle \\ &= \sum_{\sigma_1} 1 + \sum_{\sigma_1} 2(\vec{\sigma} \cdot \hat{k})_{\sigma_1} + \sum_{\sigma_1} (\vec{\sigma} \cdot \hat{k})_{\sigma_1}^2 \\ &= Tr 1 + Tr 2(\vec{\sigma} \cdot \hat{k}) + Tr (\vec{\sigma} \cdot \hat{k})^2 = 4 \end{aligned} \quad (4.66)$$

Neste caso podemos escrever

$$\frac{1}{\tau} = \frac{G^2 f_\pi^2 m_\pi}{\hbar} \int_0^\infty dk k^2 \left(\frac{E-k}{E} \right) \delta(k+E-m_\pi) \quad (4.67)$$

Lembrando que $k = (m_\pi^2 - m_\mu^2)/2m_\pi$ e $E - k = m_\mu^2/m_\pi$, obtemos que o número de desintegrações por unidade de tempo para o processo tem a forma

$$\frac{1}{\tau} = \frac{G^2 f_\pi^2 (m_\pi^2 - m_\mu^2)^2 m_\mu^2}{\hbar 4\pi m_\pi^3} \quad (4.68)$$

O valor experimental de τ é $\tau_{\text{exp}} = (2.603 \pm 0.002) \times 10^{-8} s$. Podemos usar a expressão (4.68) para determinar f_π . Para isto dispomos dos seguintes valores experimentais

$$\begin{aligned} G &= \frac{1.026 \times 10^{-5}}{m_p^2} \\ m_p &= 938,28 \text{ MeV} & m_{\pi^-} &= 139.57 \text{ MeV} \\ m_\mu &= 105.66 \text{ MeV} & m_e &= 0.511 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (4.69)$$

Usando estes valores obtêm-se

$$f_\pi = 95.66 \text{ MeV} \quad (4.70)$$

A partir das expressões acima podemos notar que a vida média do pion depende, neste modelo, somente de f_π e da massa do lepton.

Se considerarmos o processo $\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$ veremos que os cálculos são idênticos, a menos da massa do eletrôn. A razão entre as probabilidades de decaimento é^[45]

$$\frac{\tau(\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu)}{\tau(\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e)} = \frac{m_e^2 (m_\pi^2 - m_e^2)^2}{m_\mu^2 (m_\pi^2 - m_\mu^2)^2} = 1.283 \times 10^{-4} \quad (4.71)$$

O valor experimental para esta razão é^[46]

$$\frac{\tau_{\text{exp}}(\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu)}{\tau_{\text{exp}}(\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e)} = (1.232 \pm 0.024) \times 10^{-4} \quad (4.72)$$

4.5 Matéria Densa e Quente

Podemos ver que as massas dos mesons assim como as constantes de decaimento dependem essencialmente de f_π . Estamos interessados então, em determinar o valor de f_π quando tratamos com matéria densa e a temperaturas diferentes de zero. Usamos para isto os valores determinados pelo modelo de Nambu-Jona-Lasinio que acreditamos ser um modelo mais fundamental que trata da interação entre os quarks^[42, 43]. Neste modelo foram feitos cálculos para encontrar as funções $f_\pi = f_\pi(T)$ e $f_\pi = f_\pi(\rho)$. Usaremos uma parametrização de f_π como a que foi feita na versão SU(2) do modelo de NJL^[47, 48]

As expressões são dadas por

$$f_\pi(T) = \frac{a_0}{1 + e^{a_1(T-a_2)}} + a_3 \quad (4.73)$$

$$f_\pi(\rho/\rho_0) = \frac{b_0 + b_4\rho/\rho_0}{1 + e^{b_1(\rho/\rho_0+b_2)}} + b_3 \quad (4.74)$$

onde

$$\begin{array}{ll} a_0 = 95,91 MeV & b_0 = 100,66 MeV \\ a_1 = 0,04 MeV^{-1} & b_1 = 3,24 \\ a_2 = 198,61 MeV & b_2 = -6,13 \\ a_3 = 3,48 MeV & b_3 = 1,95 MeV \\ & b_4 = -9,38 MeV \end{array}$$

Figura 4.1: Parametrização de f_π como função da temperatura, calculada em uma versão SU(2) do modelo de NJL^[28]

Figura 4.2: Parametrização de f_π como função da densidade, calculada em uma versão SU(2) do modelo de NJL^[28]

As massas dos mesons também podem ser encontradas através das eq.(4.28) e eq.(4.29). Podemos então encontrar as massas do pion e do sigma como função da densidade e da temperatura. Os resultados obtidos são mostrados nas figuras abaixo. As curvas encontradas para as massas estão muito próximas daquelas obtidas usando o modelo de NJL^[28]. Com isto mostramos que a eq.(4.28) e eq.(4.29) são independentes dos modelos escolhidos e refletem o poder do resultado da álgebra de correntes^[49].

Figura 4.3: Massas dos mesons π e σ como função da temperatura T

Figura 4.4: Massas dos mesons π e σ como função da razão entre a densidade e a densidade nuclear $\rho_0 = 0.17 fm^3$.

Figura 4.5: Massas dos mesons π e σ em função da temperatura utilizando-se o modelo de NJL^[28]

Figura 4.6: Massas dos mesons π e σ em função da densidade, obtidas utilizando-se o modelo de NJL^[50], onde $\rho_c = 2 - 6\rho_0$

4.5.1 Decaimentos do Pion num Meio Denso e Quente

Se considerarmos do canais de decaimento

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad (4.75)$$

$$\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e \quad (4.76)$$

Podemos notar que em colisões de íons ultra-relativísticos os pions são uma fonte de informação importante a respeito da matéria hadrônica, já que são produzidos em abundância.

As figuras abaixo mostram o comportamento da vida média do pion para o caso dado pela eq.(4.75) e pela eq.(4.76). Na fig.4.7, vemos que a vida média do pion permanece a mesma como no vácuo até que a temperatura de transição de fase seja alcançada, a partir desta temperatura a vida média do pion cresce rapidamente. O mesmo comportamento pode ser notado na fig.4.8 onde a vida média é função da densidade. Nestes dois casos o ingrediente básico é f_π que é parametrizado pelo modelo de Nambu-Jona-Lasinio.

Figura 4.7: Tempo de vida do pion como função da temperatura para o decaimento $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ e $\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$.

Figura 4.8: Tempo de vida do pion como função da densidade para o decaimento $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ e $\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$.

Nas figuras abaixo estão plotadas a razão entre a vida média do pion nos dois canais de decaimento quando a temperatura ou a densidade variam. Nestes casos, podemos notar que para temperaturas acima de 100 MeV o segundo canal de decaimento ($\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$) será desfavorável e o pion preferirá decair pelo canal dado em ($\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$). Este mesmo comportamento pode ser visto para o caso onde a densidade é finita.

Figura 4.9: Razão entre o tempo de vida do pion nos dois canais de decaimento como função da temperatura

Figura 4.10: Razão entre o tempo de vida do pion nos dois canais de decaimento como função da densidade

Capítulo 5

Estrelas de Nêutrons

O objetivo deste capítulo é apresentar uma aplicação para as equações de estado calculadas nos capítulos 2 e 3. Neste caso específico, usaremos as equações de estado para descrever as estrelas de nêutrons que são sistemas físicos extremamente densos. Nestes objetos, como veremos adiante, as densidades podem chegar a algumas ordens da densidade nuclear e o comportamento da matéria, nestas densidades, ainda é motivo de controvérsia. Apresentamos neste capítulo um breve revisão sobre a evolução nuclear das estrelas e o surgimento de estrelas de nêutrons. Em seguida, são mostradas as equações de equilíbrio e estabilidade para estas estrelas, assim como as equações T.O.V. (Tolman, Oppenheimer e Volkoff), vindas da relatividade geral. Nosso trabalho, consiste em resolver as equações T.O.V para os modelos de Walecka e Sigma-Linear, nas aproximações de campo médio e Hartree. Para discutir o quanto é determinante a interação entre os hádrons estudamos ainda, dentro do contexto do modelo de sacola do M.I.T, a equação de estado que contém a transição de gás livre de nêutrons para plasma de quarks e glúons. Este último modelo permite ainda que estudemos o papel das propriedades de liberdade assintótica e confinamento da QCD, no que se a possíveis consequências macroscópicas.

5.1 Evolução Nuclear de Estrelas

A evolução nuclear das estrelas inicia-se quando núcleos de hidrogênio se fundem e formam hélio no interior destas estrelas, esta reação por sua vez libera energia, já que o núcleo de hélio é menos massivo que os quatro prótons que se fundem para produzi-lo. A diferença de massa é liberada na forma de radiação gama e de neutrinos. Esta radiação é retida no centro da estrela que permanece quente enquanto as camadas mais frias se resfriam, cria-se assim, um gradiente de pressão que exerce uma força de dentro para fora na estrela

opondo-se a gravidade.

Quando o hidrogênio começa a acabar, o núcleo se compõe basicamente de hélio. Menos energia e calor são produzidos, a pressão diminui e o equilíbrio entre pressão e gravidade acaba. A estrela começa a entrar em colapso e por consequência aquece o núcleo central. Com o núcleo aquecido, os núcleos de hélio começam a se fundir e produzir carbono. Para sintetizar o carbono, a temperatura necessária é maior do que para sintetizar o hélio. Este processo volta a liberar energia, pois como no processo anterior, três núcleos de hélio são mais massivos do que o núcleo de carbono sintetizado e nesta fase volta a existir o equilíbrio.

Em estrelas suficientemente massivas, a queima do hélio é seguida pela queima do carbono, produzindo oxigênio, que será queimado para a produção de outros elementos. Este processo ocorrerá até que o elemento sintetizado seja o ferro. O ferro é o núcleo com menor energia de ligação e para que o ferro possa sintetizar outros elementos mais pesados do que ele é necessário um suprimento de energia, ou seja, os núcleos restantes pesam mais do que seus elementos constituintes. Quando um núcleo de ferro se estabelece na estrela, o destino desta é inevitável, depois que o suprimento de energia nuclear se esgotar, ocorrerá o colapso gravitacional.

Quando uma estrela queima todo seu combustível termonuclear, ela pode se tornar tanto uma anã branca quanto uma estrela de nêutrons, dependendo de fatores como a massa inicial da estrela.

A estrela colapsa até que a matéria fique tão compacta que se transforme em matéria degenerada, ou seja, as partículas fermiônicas presentes na estrela ocuparão os níveis energéticos disponíveis, tornando impossível colocar mais partículas nestes níveis (Princípio de Pauli) o que acaba gerando uma pressão de degenerescência que se opõe a diminuição do tamanho da estrela. Esta pressão de degenerescência é um efeito puramente quântico e nesta pressão não há dependência com a temperatura, como a pressão normal de um gás.

As primeiras partículas a serem afetadas pelo colapso são os elétrons, que passam a resistir a isto, exercendo uma pressão adicional, contrária ao colapso. Quando o núcleo estelar é mantido somente pela pressão de degenerescência dos elétrons, a estrela torna-se uma anã branca.

As anãs brancas são estrelas de aproximadamente uma massa solar e raio de 5000 Km. O nome "branca" vem do fato de, inicialmente esta estrela ser muito quente devido a enorme compressão. Acredita-se que estrelas cuja massa inicial é equivalente a pelo menos seis massas solares tornar-se-ão anãs brancas.

As estrelas mais massivas tem um destino mais catastrófico pois, quando o combustível nuclear termina, a força gravitacional torna-se grande demais para ser contida pela pressão de degenerescência dos elétrons e a estrela colapsa até que em densidades muito maiores, os

elétrons e os prótons se combinam para formar os nêutrons que se degeneram. Se a pressão de degenerescência dos nêutrons for suficiente para conter o colapso, forma-se então a estrela de nêutrons.

5.2 Estrelas de Nêutrons

Em 1932, Landau fez previsões para estrelas, que no final de sua evolução, se transformariam em um tipo de núcleo gigantesco. Estas estrelas, após a queima de seu combustível nuclear, iriam entrar em colapso e formariam caroços de matéria superdensa e fria.

Desde a primeira identificação de estrelas de nêutrons, em pulsares, na década de 60, o conhecimento teórico e observacional destes objetos tem aumentado rapidamente. Os pulsares, que acredita-se serem estrelas de nêutrons que giram rapidamente, já foram observados em nossa galáxia^[51, 52].

A associação dos pulsares de Caranguejo e Vela com supernovas remanescentes, indica a possível formação de estrelas de nêutrons a partir de supernovas. Observações ópticas e de raio X de fontes binárias possibilitam a determinação das massas das estrelas de nêutrons nestes objetos. Os resultados são consistentes com as teorias de estrutura e formação de estrelas de nêutrons. Os resultados experimentais, já levando em conta erros estatísticos, apontam as massas destes pulsares como sendo $M_{\text{CarX-1}} = 1.33 \pm 0.2 M_{\odot}$ ^[53] e $M_{\text{VelX-1}} = 1.5 \pm 0.2 M_{\odot}$ ^[54], onde $M_{\odot} = 1.989 \times 10^{33} \text{g}$ é a massa do sol. Entretanto erros sistemáticos na determinação destas massas poderiam levar a incertezas nos valores até agora encontrados.

Medidas da luminosidade térmica da superfície de uma estrela de nêutrons dão uma estimativa de sua temperatura de superfície, T_e . Por este método, Wolff^[55] foi capaz de estimar o limite superior desta temperatura, $T_e \leq 4.6 \times 10^6 \text{K}$ ou $\leq 4.6 \times 10^{-4} \text{MeV}$ para a estrela de nêutrons na nebulosa de Caranguejo. Como podemos ver dado o valor baixo da temperatura em relação as energias de ligação dos nucleons, efeitos de temperatura podem ser desprezados para altas densidades.

5.2.1 Estrutura de Estrelas de Nêutrons

A natureza dos constituintes internos de uma estrela de nêutrons está intimamente ligada a explosão da supernova que provavelmente a originou.

Podemos, entretanto, encarar o problema do ponto de vista do jogo de forças que estão envolvidas no interior destas estrelas.

Em densidades da ordem de 10^6g/cm^3 , a energia total da estrela é minimizada por ter

apenas núcleos como únicos componentes, o ferro sendo o mais abundante. Além disto, nesta densidade os elétrons já estão separados dos núcleos e são relativísticos. O sistema então é formado por núcleos, que se arranjam numa estrutura cristalina e um gás de elétrons relativísticos. Para estas densidades a equação de estado tem pouca influência na estrutura da estrela.

Aumentando-se ainda mais a densidade, começa um processo chamado neutronização [56]. Neste processo, elétrons livres relativísticos são capturados pelos prótons nos núcleos e são transformados em nêutrons numa reação inversa do decaimento β

Consideramos que os neutrinos escapam da estrela sem interagir. Para que a reação acima ocorra é necessário que os níveis de energia dos elétrons estejam ocupados, pois não há nêutrons livres estáveis na natureza e eles tendem a decair em elétrons, prótons e antineutrinos

Pelo princípio de exclusão de Pauli, se todos os estados estão ocupados a reação acima fica proibida de ocorrer e os nêutrons tornam-se estáveis.

A neutronização ocorre para

$$2 \times 10^7 \leq \rho \leq 10^{11} \text{ g/cm}^3 \quad (5.3)$$

Quando a densidade atinge o valor de $4.3 \times 10^{11} \text{ g/cm}^3$, ocorre um processo chamado 'neutron drip'. Os núcleos são ricos em nêutrons por consequência da neutronização e eles já não conseguem permanecer juntos como uma entidade. Se considerarmos o fato de que a força nn é menos atrativa do que a força np e sabendo-se que um di-nêutron não existe, veremos que núcleos com $N \gg Z$ onde N é o número de nêutrons e Z o número de prótons, não conseguirão manter os nêutrons em uma região definida do espaço, estes nêutrons então,

começam a escapar do núcleo. Este domínio de altas densidades, onde $\rho \geq \rho_{\text{drip}}$ é que existe no interior de estrelas de nêutrons e estamos interessados neste trabalho.

O regime de densidades acima do 'neutron drip' pode ser dividido em duas regiões :

(a) quando $\rho_{\text{drip}} \leq \rho \leq \rho_{\text{nuc}}$:

Este é o regime de densidade intermediária, que se estende do 'neutron drip' até a densidade nuclear $\rho_{nuc} = 2.8 \times 10^{16} \text{ g/cm}^3$, que é a densidade onde o núcleo desaparece. Neste caso, as propriedades e as equações de estado que descrevem a matéria são razoavelmente bem entendidas. O sistema consistirá, basicamente, de três componentes: elétrons, núcleos ricos em nêutrons e nêutrons livres.

Os mais detalhados cálculos feitos para estrelas de nêutrons nesta região foram feitos por Negele e Vautherin^[57]. Nestes cálculos eles usam para a energia do gás de nêutrons as energias calculadas a partir da interação de Reid^[58]. Para densidades baixas tais energias descrevem bem o sistema mas, a medida que a densidade aumenta a energia da matéria de nêutrons não pode mais ser descrita pela interação de Reid.

Os trabalhos recentes neste regime de densidade restringem-se a uma melhor descrição das propriedades da matéria próxima da superfície da estrela na presença de campos magnéticos intensos^[59].

(b) quando $\rho > \rho_{nuc}$:

Neste regime, as propriedades da matéria nuclear ainda não são bem entendidas, pois a pressão no interior das estrelas é dominada pelos nucleons, principalmente nêutrons, que interagem via força forte. A importância de se obter um maior entendimento sobre as propriedades da matéria neste caso é que as estimativas para os raios das estrelas de nêutrons,

são sensíveis as equações de estado consideradas. Estados de maior densidade já foram pesquisados para estes objetos, entre eles se incluem a condensação de pions^[21], matéria de quarks^[61] e modelos efetivos^[20, 62, 63].

É neste regime de densidade que pretendemos incluir nosso trabalho. Proporemos como equações de estado que descrevem as interações entre nucleons no interior das estrelas de nêutrons, as equações de estado encontradas para os modelos de Walecka, Sigma-linear e o modelo de sacolas do M.I.T. Para os dois primeiros modelos, as equações de estado, como vimos nos capítulos anteriores, descrevem as interações de nucleons via mesons escalares e vetoriais e foram usadas para a matéria superdensa e quente. O modelo de Bag descreve a transição de fase de um gás de fermions para um gás de quarks que interagem via a constante de Bag. Neste caso, os modelos serão considerados para a temperatura zero e somente compostos de nêutrons ($\gamma = 2$). Para densidades $\rho > 3.4 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$ foi sugerido que o aparecimento dos hyperons Λ, Σ^- etc... poderia modificar as equações de estado. Entretanto, cálculos posteriores^[64] levando em conta que a interação nêutron-hyperon é menos atrativa que a interação nêutron-nêutron, encontrou que a contribuição dos hyperons tem pouco efeito sobre a equação de estado se compararmos com a contribuição dos nêutrons.

Então, uma boa equação de estado para a matéria de nêutrons é o ingrediente chave para produzir uma equação que descreva bem as estrelas de nêutrons.

Antes de apresentarmos os resultados usando estes modelos, faremos algumas considerações sobre condições de estabilidade e equilíbrio.

5.2.2 Equilíbrio e Estabilidade de Estrelas

Em um estágio normal, costuma-se considerar uma estrela como uma esfera de gás em equilíbrio térmico e hidrostático. Entende-se por equilíbrio térmico a igualdade entre a energia produzida em cada elemento da massa e a energia irradiada pela superfície de cada elemento de massa. Equilíbrio hidrostático indica a igualdade entre a força gravitacional e a pressão que age em cada elemento de massa. Se alguma condição de equilíbrio não é satisfeita, a estrutura da estrela muda. A condição de equilíbrio hidrostático é equivalente à condição de haver um extremo na energia total de uma estrela para um dado número de bárions e uma dada distribuição de entropia. A condição de equilíbrio pode ser dada pela relação

$$-\frac{dP}{dr} = \frac{GM(r)\rho}{r^2} \quad (5.4)$$

onde o lado esquerdo é a pressão que atua num volume unitário e o lado direito da equação é a força gravitacional que age neste volume pela massa $M(r)$ contida numa esfera de raio r .

Usando-se valores médios para as estrelas e a condição de equilíbrio hidrostático dada acima teremos

$$M \approx \frac{4}{3}\pi R^3 \langle \rho \rangle \quad (5.5)$$

$$\frac{\langle P \rangle}{R} = \langle \rho \rangle \frac{GM}{R^2} \quad (5.6)$$

onde, pode-se encontrar uma relação para a densidade média $\langle \rho \rangle$ e a pressão, com a massa e o raio da estrela. Usando-se as expressões acima, podemos estimar a pressão no interior da estrela. Encontrar a configuração da densidade e pressão que satisfaçam o equilíbrio hidrostático é um dos objetivos principais em teoria de estrelas.

A equação de equilíbrio hidrostático nos dá também a massa máxima de uma estrela de nêutrons, desde que tenhamos uma equação de estado, isto é, uma relação $p = p(\epsilon)$ ou $p = p(\rho)$ já que a altas densidades $\epsilon = \rho c^2$.

Entretanto, isto não é suficiente, uma vez que a massa encontrada pode representar uma configuração instável. Então, além de termos equilíbrio hidrostático devemos observar se este resultado é aceitável por condições de estabilidade. A estabilidade é conferida verificando-se a desigualdade^[65]:

$$\int p \left(\gamma - \frac{4}{3} \right) dV \geq 0 \quad (5.7)$$

onde V é o volume e γ é o índice adiabático que é dado por

$$\gamma = \frac{\rho \, dp}{p \, d\rho} \quad (5.8)$$

Pode ser mostrado (ver em detalhes na ref. [[65]]) que regiões onde $\gamma < 4/3$ são regiões onde a massa da estrela diminui com o aumento de densidade sendo portanto regiões instáveis.

5.2.3 Estabilidade de Estrelas de Nêutrons

Os eletrons em uma anã branca se tornam relativísticos quando a massa da estrela se torna comparável ao limite máximo teórico previsto para anãs brancas, ou seja, em torno de $1M_{\odot}$. Esperamos então, que para estrelas de nêutrons, os nêutrons se tornem relativísticos para os mesmos valores da massa, ou seja, $M \approx M_{\odot}$ ^[56]. Neste ponto, a analogia entre estrelas de nêutrons e anãs brancas acaba. A densidade total ρ de uma anã branca é sempre dominada pela densidade da massa de repouso de seus nucleons não relativísticos, enquanto que uma estrela de nêutrons com massa da ordem de uma massa solar consiste basicamente de nucleons cuja energia cinética é comparável a suas massas de repouso. Uma outra diferença que podemos citar é que enquanto uma anã branca, cujos eletrons são moderadamente relativísticos, tem um potencial gravitacional na superfície da ordem de m_e/m_n , uma estrela de nêutrons tem um potencial gravitacional da ordem de 1 na superfície. Logo, a relatividade geral tem um importante papel na teoria de estrelas de nêutrons mais massivas.

Para formularmos quantitativamente a teoria destas estrelas, devemos fazer um tratamento relativístico do problema.

Sistema de equações T.O.V

Na relatividade geral, para reduzir o número de equações de Einstein e chegar a resolvê-las é necessário fazer algumas hipóteses. Para uma estrela é natural fazer hipóteses de

isotropia e estabilidade, com isto podemos escrever

$$ds^2 = -e^{\nu(r)} dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (5.9)$$

Podemos ainda supôr que o fluido no interior da estrela seja ideal, neste caso o tensor momento-energia é dado por

$$T_{\mu\nu} = (\epsilon + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu} \quad (5.10)$$

onde p é a pressão e ϵ é a densidade de energia. No referencial de repouso do fluido teremos

$$u_r = u_\theta = u_\phi = 0 \quad e \quad u_{tt} = -\sqrt{-g^{tt}} = -e^{\nu(r)/2} \quad (5.11)$$

e as equações de Einstein podem ser escritas simplesmente por

$$\nu' = \frac{2p'}{\epsilon + p} \quad (5.12)$$

que representa a equação de equilíbrio hidrostático relativístico

$$e^{\lambda(r)} = \frac{1}{1 - \frac{2GM(r)}{r}} \quad (5.13)$$

com $M(r)$ definido tal que

$$\frac{dM(r)}{dr} \equiv 4\pi r^2 \epsilon(r) \quad (5.14)$$

Se considerarmos $e^{\lambda(0)}$ finito e

$$-r^2 \frac{dp}{dr} = GM(r)\epsilon(r) \left[1 + \frac{p(r)}{\epsilon(r)} \right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{M(r)} \right] \left[\frac{1}{1 - 2GM(r)/r} \right] \quad (5.15)$$

Na expressão acima, os termos entre colchetes são correções relativísticas à mecânica newtoniana.

Em geral, a pressão p é uma função que depende da densidade de energia ϵ , da entropia por barion e dos potenciais químicos. Para uma estrela de nêutrons, a temperatura é suposta ser zero, portanto a entropia por barion é também nula. Então, podemos dividir a estrela em camadas de densidades diferentes e supor que a composição é constante dentro desta camada. Portanto p será função apenas de ϵ ou de ρ se lembrarmos que para grandes densidades $\epsilon = \rho c^2$.

Para resolver as equações (5.12), (5.13), (5.14), (5.15), é necessário conhecer a dependência em r de p , ϵ e M .

Isto pode ser obtido integrando-se, com relação a r , as equações acima, usando as condições iniciais^[66]

$$\epsilon(r=0) \equiv \epsilon_c \quad (5.16)$$

$$p(r=0) \equiv p(\epsilon_c) \quad (5.17)$$

$$M(r=0) \equiv 0 \quad (5.18)$$

onde ϵ_c se refere à densidade central de energia. Note que e^λ é calculável diretamente a partir de (5.13) e somente as expressões (5.12), (5.14) e (5.15) devem ser integradas numericamente. A integração é terminada quando $p(r=R)=0$ onde R é o raio total da estrela. Portanto, teremos um conjunto de soluções parametrizadas por ϵ_c .

Fora da estrela, como $p=0$ e $\epsilon = cte$, a eq. (5.12) pode ser integrada para dar como resultado

$$e^{\nu(r)} = 1 - 2GM(r)/R = e^{-\lambda(r)}, \quad \text{se } r \geq R \quad (5.19)$$

No interior da estrela, integra-se a eq. (5.12) junto com as eqs. (5.14), (5.15), com a condição inicial

$$e^{\nu(0)} = 0 \quad (5.20)$$

depois efetua-se a mudança de variável

$$\nu(r) = \nu(r) + \nu_0 \quad (5.21)$$

e escolhe-se ν_0 tal que

$$e^{\nu(r)+\nu_0} = 1 - \frac{2GM}{R} \quad (5.22)$$

Isto permite que a solução dada em (5.19) seja satisfeita.

Este sistema de equações é fundamental para os resultados apresentados neste trabalho.

5.2.4 Equações de Estado para Estrelas de Nêutrons

Em densidades acima da densidade nuclear a equação de estado que descreve a matéria no interior de estrelas de nêutrons não é bem definida. Com isto, temos a possibilidade de usarmos os resultados obtidos no capítulo 2 para os modelos de Walecka e Sigma-Linear e obtermos estimativas para a massa e o raio de estrelas de nêutrons. Consideraremos somente a matéria composta por nêutrons, com isto $\gamma = 2$ ^[67]. Além disto, incluiremos os resultados obtidos para o modelo de sacola do M.I.T que pretende descrever transições de fase entre um gás de fermions não interagentes e matéria de quarks.

Modelo de Walecka

As equações de estado para o modelo de Walecka, na aproximação de campo médio, são dadas por:

$$\rho_B = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k = \frac{\gamma k_F^3}{6\pi^2} \quad (5.23)$$

$$\rho_s = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \frac{M^*}{\epsilon^*} \quad (5.24)$$

$$\epsilon_{\text{QHD}} = \frac{1}{2} \frac{g_v^2}{m_v^2} \rho_B^2 + \frac{1}{2} m_s^2 g_s^2 (M - M^*)^2 + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \epsilon^* \quad (5.25)$$

$$p_{\text{QHD}} = \frac{1}{2} \frac{g_v^2}{m_v^2} \rho_B^2 - \frac{1}{2} m_s^2 g_s^2 (M - M^*)^2 + \frac{\gamma}{3(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \frac{k^2}{\epsilon^*} \quad (5.26)$$

onde $\epsilon^* = (k^2 + M^{*2})^{1/2}$ e a equação auto-consistente é dada por

$$M^* = M - \frac{g_s^2}{m_s^2 (2\pi)^3} \gamma \int_0^{k_F} d^3k \frac{M^*}{\epsilon^*} \quad (5.27)$$

Os resultados encontrados para a massa da estrela em função da densidade prevista no centro da estrela e a massa em função do raio são mostrados abaixo.

Figura 5.1: Razão entre a massa da estrela e a massa do sol ($M_{\text{sol}} = M_{\odot}$) em função da densidade da estrela- Modelo de Walecka.

Figura 5.2: Razão entre a massa da estrela e a massa do sol ($M_{\text{sol}} = M_{\odot}$) em função do raio da estrela-Modelo de Walecka

As equações de estado do modelo de Walecka na aproximação de Hartree:

$$\epsilon_{\text{HQHD}} = \frac{1}{2} \frac{C_V^2}{M^2} \rho_B^2 + \frac{1}{2} \frac{M^2}{C_S^2} (M^* - M)^2 + \frac{\gamma}{8\pi^3} \int d^3k \epsilon^* + \Delta \epsilon_{\text{FQHD}} \quad (5.28)$$

$$p_{\text{HQHD}} = \frac{1}{2} \frac{C_V^2}{M^2} \rho_B^2 - \frac{1}{2} \frac{M^2}{C_S^2} (M^* - M)^2 + \frac{\gamma}{24\pi^3} \int d^3k \frac{k^2}{\epsilon^*} - \Delta \epsilon_{\text{FQHD}} \quad (5.29)$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon_{\text{FQHD}} = & -\frac{1}{8\pi^2} \left[M^{*4} \ln \left(\frac{M^*}{M} \right) + M^3 (M^* - M) - \frac{7}{2} M^2 (M^* - M)^2 \right] \\ & - \frac{1}{4\pi^2} \left[\frac{13}{3} M (M^* - M)^3 - \frac{25}{12} (M^* - M)^4 \right] \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} M^* = & M - \frac{\gamma}{8\pi^3} \frac{C_S^2}{M^2} \int d^3k \frac{M^*}{\epsilon^*} + \frac{g_s^2}{\pi^2 m_s^2} \left[M^{*3} \ln \left(\frac{M^*}{M} \right) - M^2 (M^* - M) \right] \\ & + \frac{g_s^2}{\pi^2 m_s^2} \left[\frac{5}{2} M (M^* - M)^2 - \frac{11}{6} (M^* - M)^3 \right] \end{aligned} \quad (5.31)$$

Figura 5.3: Massa efetiva em função da densidade para a matéria de nêutrons nas aproximações de campo médio e Hartree-modelo de Walecka

As previsões para este modelo na aproximação de Hartree são mostradas nos gráficos abaixo. Vemos que em relação ao modelo de Walecka, a previsão para a massa máxima nesta aproximação diminui um pouco em relação a aproximação de campo médio, ou seja, neste modelo as flutuações não alteram sensivelmente as previsões para a massa máxima e o raio de estrelas de nêutrons.

Figura 5.4: Razão entre a massa da estrela e a massa do sol ($M_{sol} = M_{\odot}$) em função da densidade da estrela-Modelo de Walecka na aproximação de Hartree

Figura 5.5: Razão entre a massa da estrela e a massa do sol ($M_{sol} = M_{\odot}$) em função do raio da estrela-Modelo de Walecka na aproximação de Hartree

Modelo Sigma-Linear

As equações de estado para este modelo já foram encontradas no cap.2, estas equações são mostradas abaixo para o caso com simetria quiral e com quebra de simetria quiral, na aproximação de campo médio.

Caso quiral:

$$\rho_B = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k \quad (5.32)$$

$$\rho_s = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \frac{M^*}{\epsilon^*} \quad (5.33)$$

$$e_\sigma = \frac{1}{2} \frac{C_V^2}{M^2} \rho_B^2 + \frac{1}{8} \frac{1}{C_S^2} (M^2 - M^{*2})^2 + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \epsilon^* \quad (5.34)$$

$$p_\sigma = \frac{1}{2} \frac{C_V^2}{M^2} \rho_B^2 - \frac{1}{8} \frac{1}{C_S^2} (M^2 - M^{*2})^2 + \frac{\gamma}{3(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \frac{k^2}{\epsilon^*} \quad (5.35)$$

e a relação para a massa é dada por

$$M^* (M^{*2} - M^2) = -2C_S^2 \frac{\gamma}{8\pi^3} \int_0^{k_F} d^3k \frac{M^*}{\epsilon^*} \quad (5.36)$$

As equações de estado para o modelo Sigma-Linear com quebra de simetria quiral são dadas por:

$$\rho_B = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k \quad (5.37)$$

$$\rho_s = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{M^*}{\epsilon^*} \quad (5.38)$$

$$e_{sn} = \frac{1}{2} \frac{C_V^2}{M^2} \rho_B^2 + \frac{1}{2} \frac{M^2}{C_S^2} (M - M^*)^2 + \frac{(m_\sigma^2 - m_\pi^2)}{8C_S^2 m_\sigma^2} (M^* - M)^3 (3M + M^*)$$

$$+ \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3 k \epsilon^*$$
(5.39)

$$p_{sn} = \frac{1}{2} \frac{C_V^2}{M^2} \rho_B^2 - \frac{1}{2} \frac{M^2}{C_S^2} (M - M^*)^2 - \frac{(m_\sigma^2 - m_\pi^2)}{8C_S^2 m_\sigma^2} (M^* - M)^3 (3M + M^*)$$

$$+ \frac{\gamma}{3(2\pi)^3} \int d^3 k \frac{k^2}{\epsilon^*}$$
(5.40)

E a equação auto-consistente para a massa é dada por

$$M^*(M^{*2} - M^2 - \frac{m_\pi^2}{m_\sigma^2}(M^{*2} - 3M^2)) + \frac{2M^3 m_\pi^2}{m_\sigma^2} = -2 \frac{\gamma}{(2\pi)^3} C_S^2 \int d^3 k \frac{M^*}{\epsilon^*} \quad (5.41)$$

Na aproximação de Hartree, as equações de estado foram encontradas no cap.3, e são apresentadas abaixo

$$e_{ns} = \frac{1}{2} \frac{C_V^2}{M^2} \rho_B^2 + \frac{1}{8} \frac{1}{C_S^2} (M^2 - M^{*2})^2 + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3 k \epsilon^* + \Delta e_{ns} \quad (5.42)$$

$$p_{ns} = \frac{1}{2} \frac{C_V^2}{M^2} \rho_B^2 - \frac{1}{8} \frac{1}{C_S^2} (M^2 - M^{*2})^2 + \frac{\gamma}{3(2\pi)^3} \int d^3 k \frac{k^2}{\epsilon^*} - \Delta e_{ns} \quad (5.43)$$

onde,

$$\Delta e_{ns} = -\frac{1}{8\pi^2} \left\{ \frac{1}{2} M^{*4} \ln \left(\frac{M^*}{M} \right)^2 - \frac{M^4}{4} + M^2 M^{*2} - \frac{3M^{*4}}{4} \right\} \quad (5.44)$$

E a relação para a massa é dada por

$$M^* (M^{*2} - M^2) = -2C_S^2 \frac{\gamma}{8\pi^3} \int d^3 k \frac{M^*}{\epsilon^*}$$

$$- \frac{\gamma}{2\pi^2} C_S^2 M^{*3} \ln \left(\frac{M^*}{M} \right) - \frac{\gamma}{4\pi^2} C_S^2 M^* (M^{*2} - M^2) = 0 \quad (5.45)$$

Figura 5.6: Massa efetiva em função da densidade para a matéria de nêutrons nas aproximações de campo médio(Sigma Linear) e Hartree(Sigma Linear(Hartree))-modelo Sigma Quiral

Os resultados para estrelas de nêutrons usando o modelo Sigma são mostrados nos gráficos abaixo. Nestes gráficos podemos ver que os efeitos da quebra de simetria quiral aparecem como uma diminuição da massa máxima estimada para a estrela.

Figura 5.7: Razão entre a massa da estrela e a massa do sol ($M_{sol} = M_{\odot}$) em função da densidade da estrela-Modelo Sigma Quiral

Figura 5.8: Razão entre a massa da estrela e a massa do sol ($M_{sol} = M_{\odot}$) em função do raio da estrela-Modelo Sigma Quiral

Figura 5.9: Razão entre a massa da estrela e a massa do sol ($M_{sol} = M_{\odot}$) em função da densidade da estrela-Modelo Sigma com quebra de simetria quiral

Figura 5.10: Razão entre a massa da estrela e a massa do sol ($M_{sol} = M_{\odot}$) em função do raio da estrela-Modelo Sigma com quebra de simetria quiral

Figura 5.11: Razão entre a massa da estrela e a massa do sol ($M_{sol} = M_{\odot}$) em função do raio da estrela-Modelo Sigma com flutuações de vácuo (aproximação de Hartree)

Vemos pelos gráficos mostrados acima que, para o modelo Sigma-Linear, o termo de quebra de simetria quiral não tem um papel muito relevante (fig. 5.7 e 5.9) uma vez que, para as densidades envolvidas, a restauração da simetria quiral já ocorreu e se levarmos em conta que o termo de quebra de simetria é pequeno veremos que as previsões para a massa máxima variam muito pouco neste caso. Por outro lado, as flutuações do vácuo tem um papel relevante, como podemos ver comparando as figs. 5.7 e 5.11. Os efeitos de se introduzir

as flutuações são mostrados pela grande diferença entre os estimativas de massa máxima para a aproximação de campo médio e a aproximação de Hartree(flutuações).

Modelo de Sacola do M.I.T

Espera-se que a transição para a matéria de quarks ocorra quando a matéria nuclear foi comprimida tanto,que seus constituintes hadrônicos se sobrepõem uns aos outros.Nestas circunstâncias,quarks em diferentes hadrons podem ser trocados livremente e os graus de liberdade da matéria ficam sendo os dos quarks. A matéria fica então melhor descrita por quarks que constituem os hadrons.

Apresentaremos agora um modelo simples para a transição de matéria hadrônica(nucleons,pions,etc..)para quarks e gluons.Este modelo é baseado no modelo de bag do M.I.T.,ou modelo de sacola^[68]. Ele tem a vantagem de não conter parâmetros livres,a constante de sacola é fixa e os valores obtidos são consistentes com os dados experimentais^[69] e com dados calculados através da QCD^[69]. A teoria de quarks e gluons,a cromodinâmica quântica(QCD),contém dois aspectos fundamentais:liberdade assintótica e confinamento.Esses dois aspectos são incorporados ao modelo de sacola da seguinte maneira:

-dentro da sacola as interações não são consideradas(ou são tratadas com teoria de perturbação de ordem mais baixa)

-fora da sacola,quarks são proibidos de existir como partículas livres.Isto é alcançado, dando-se ao vácuo uma densidade de energia constante B que mantém quarks e gluons confinados em pequenas regiões do espaço.

O modelo de sacola propõe dois conjuntos de expressões para a densidade de energia e pressão .Existem duas fases distintas,uma fase de gás de hadrons não interagentes e uma fase de plasma de quarks e gluons. A transição de fase pode ser encontrada sabendo que na transição ,a pressão e o potencial químico das duas fases é o mesmo.As equações de estado para este modelo são encontradas a partir da função partição ,neste caso é usada a função de partição de um gás de fermions sem interação para a fase de hadrons e um gás de fermions sem massa para a fase de plasma. As expressões finais são encontradas a partir da função partição .No caso dos fermions usamos a função partição de um sistema de fermions sem interação com massa e para o caso do plasma usamos a de um sistema de fermions sem interação e sem massa.As equações são dadas por^[68]:

Para os hadrons:

$$P_h = \frac{M^4}{6\pi^2} \left[\frac{\mu}{M} \left(\sqrt{\frac{\mu^2}{M^2} - 1} \right) \left(\frac{\mu^2}{M^2} - \frac{5}{2} \right) + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{\mu}{M} + \sqrt{\frac{\mu^2}{M^2} - 1} \right) \right] \quad (5.46)$$

$$e_h = \frac{2\mu}{3\pi^2} (\mu^2 - M^2)^{3/2} - P_h \quad (5.47)$$

$$n_{Bh} = \frac{2}{3\pi^2} (\mu^2 - M^2)^{3/2} \quad (5.48)$$

Para o plasma:

$$p_p = \frac{\mu_q^4}{2\pi^2} - B \quad (5.49)$$

$$e_p = \frac{3}{2\pi^2} \mu_q^4 + B \quad (5.50)$$

$$n_{Bp} = \frac{2}{3\pi^2} \mu_q^3 \quad (5.51)$$

Na transição teremos a relação $p_h = p_p = p_c$ e $\mu = 3\mu_q = \mu_c$, além disto o calor latente $(e_p - e_h)$ não pode ser negativo para ocorrer uma transição estável.

Teremos então que

$$\Delta e = e_p - e_h \quad (5.52)$$

$$\Delta e = \frac{2\mu_c}{3\pi^2} \left[\left(\frac{\mu_c}{3} \right)^3 - (\mu_c^2 - M^2)^{3/2} \right] \quad (5.53)$$

Como Δe deve ser um número real, positivo, logo

$$\frac{2\mu_c}{3\pi^2} \left[\left(\frac{\mu_c}{3} \right)^3 - (\mu_c^2 - M^2)^{3/2} \right] \geq 0 \quad \left(\frac{\mu_c}{3} \right)^3 \leq (\mu_c^2 - M^2)^{3/2} \quad (5.54)$$

Observando a expressão acima veremos que os valores possíveis para μ_c são dados por

$$M \leq \mu_c \leq \frac{3M}{2\sqrt{2}}, \quad \text{com } M = 0.94 \text{ GeV} \quad (5.55)$$

Levando estes limites nas pressões teremos um intervalo possível para os valores de B

$$\frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{M}{3} \right)^4 \leq B \leq \left(\frac{3}{4} - \ln 2 \right) \frac{M^4}{8\pi^2}. \quad (5.56)$$

Se $M = 0.94 \text{ GeV}$ é a massa do nêutron teremos:

$$0.94 \text{ MeV} \leq \mu_c \leq 0.997020561 \text{ GeV} \quad (5.57)$$

$$0.149 \text{ GeV} \leq B^{1/4} \leq 0.154 \text{ GeV} \quad (5.58)$$

O modelo de bag prevê transições de fase de primeira ordem quando $B^{1/4}$ é menor que 0.154 GeV e maior que 0.149 GeV . Isto corresponde a termos um valor positivo para Δe . Para transição de fase de segunda ordem, $B^{1/4}$ tem que ser igual a 0.154 GeV , pois com isto $\Delta e = 0$.

Figura 5.12: Razão entre a massa da estrela e a massa do sol ($M_{sol} = M_{\odot}$) em função da densidade central da estrela para o modelo de sacola^[70]-primeira ordem, $B=5.319 \times 10^{-04} \text{ GeV}^4$ e segunda ordem, $B=5.6218 \times 10^{-04} \text{ GeV}^4$

Para os modelos estudados, vemos que as previsões para a massa máxima de uma estrela de nêutrons aumentam quando usamos os modelos efetivos onde os hadrons interagem via

Figura 5.13: Razão entre a massa da estrela e a massa do sol ($M_{sol} = M_{\odot}$) em função do raio da estrela para o modelo de sacola-primeira ordem, $B=5.319 \times 10^{-04} \text{ GeV}^4$ e segunda ordem, $B=5.6218 \times 10^{-04} \text{ GeV}^4$

meson escalares e vetoriais. O modelo de sacola é um modelo muito simples para descrever a matéria densa no interior das estrelas, por outro lado, ele dá bons resultados quanto aos valores possíveis de massa e raio, além disto as vantagens deste modelo vem do fato de podermos, variando o parâmetro B , controlarmos a densidade de energia de transição entre as duas fases, além do que podemos também controlar o tipo de transição que ocorrerá^[71].

Na tabela abaixo mostramos os valores dos parâmetros usados nos modelos, bem como os resultados para a massa máxima de uma estrela de nêutrons e o raio correspondente ao valor desta massa.

Tabela 5.1: Parâmetros dos Modelos

Modelos	C_V^2	C_S^2	$B(\text{GeV})^4$	$K(\text{MeV})$	$M_{max}/M_{\odot}$	$R(\text{km})$
Walecka-Campo Médio	195.7	266.9	_____	550.62	2.59	12.3
Walecka-Aprox.Hartree	228.2	147.8	_____	469.6	2.11	10.2
Sigma Quiral-Campo Médio	36.12	226.12	_____	1961.8	2.95	13.8
Sigma Quiral-Aprox.Hartree	36.12	226.12	_____	109.2	1.65	10.0
Sigma Quebra-Campo Médio	36.12	226.12	_____	2041.1	2.89	13.9
M.I.T Bag Model	_____	_____	5.319×10^{-04}	_____	1.70	10.4
Observacional	_____	_____	_____	200-300	1.40	10.0

A quantidade K é chamada imcompressibilidade que é dada pela seguinte expressão

$$K = k_F^2 \frac{d^2(\epsilon/\rho_B)}{d^2 k_F} \Big|_{k_F=k_F^0} \quad (5.59)$$

onde o ponto $k_F = k_F^0$ é o ponto de saturação nuclear.

Podemos notar, observando na tabela que os valores para a incompressibilidade variam muito de um modelo para o outro, se incluirmos flutuações de vácuo ou não. Equações de estado com K muito grandes prevêem massas máximas para estrelas de nêutrons muito grandes.

A previsão para outros modelos é mostrada nos gráficos dados abaixo, onde temos as relações para a massa e o raio de estrelas de nêutrons^[72].

Figura 5.14: Massa da estrela, em unidades de massa solar ($M_{sol} = M_\odot$), vs densidade central para uma variedade de equações de estado. MF-cálculo de campo médio^[73], TI-modelo de interação tensorial^[74], BJ-potencial incluindo efeitos de hyperons^[75], R-neutron interagindo via potencial de Reid^[76], π -equação de estado de Reid modificada pela condensação de pions carregados, π' -condensação de pions levando em conta transições de fase de primeira ordem^[77]

Figura 5.15: Massa da estrela (em unidades de massa solar, $M_{sol} = M_\odot$) em função do raio-Várias equações de estado.

Os valores possíveis para a massa máxima de uma estrela de nêutrons são muito sensíveis a equação de estado considerada, permanecendo menor do que 3 massas solares e acima da massa $1.4 M_\odot$ observada em Her X-1 e Vela X-1.

Capítulo 6

Conclusão

O objetivo do presente trabalho como discutido na Introdução foi a investigação detalhada de modelos efetivos utilizados para descrever propriedades da matéria hadrônica. Como primeira conclusão podemos enfatizar as diferenças encontradas nas variáveis termodinâmicas quando variamos a temperatura para os vários modelos apresentados neste trabalho. O modelo Sigma-Linear, tanto o caso quiral como com quebra, apresenta uma variação mais abrupta da massa efetiva em relação ao modelo de Walecka. Esta é uma característica puramente quiral. Uma das vantagens de se propor o modelo efetivo Sigma-Linear para descrever as interações hadrônicas é que quando calculamos as amplitudes do espalhamento pion-núcleon a baixas energias, o modelo Sigma apresenta resultados mais próximos dos medidos experimentalmente, ao contrário do modelo de Walecka que necessita de um termo a mais na lagrangeana para descrever corretamente as amplitudes de espalhamento.

Apesar dos dois modelos efetivos estudados neste trabalho serem renormalizados vimos que no caso do modelo Sigma-Linear a aproximação que trabalhamos parece fazer muita diferença. Podemos ver isto mais claramente quando fazemos uma previsão, usando estes modelos, para as massas máximas e raios de estrelas de nêutron. No modelo de Walecka, a inclusão de flutuações de vácuo (aproximação de Hartree) não faz muita diferença, ao contrário para o modelo quiral esta inclusão é fundamental para a obtenção de resultados fisicamente razoáveis.

Estudamos ainda, isoladamente, uma consequência em princípio mensurável da transição de fase quiral no setor mesônico do modelo quiral, apontando que a taxa relativa de decaimento do pion nos dois possíveis canais pode sinalizar a transição quiral.

O último capítulo enfoca ainda as propriedades de confinamento e liberdade assintótica

previstas pela QCD. Dentro do contexto simples do modelo de sacola mostramos que este modelo prevê transições de fase de primeira e segunda ordem para valores de densidade central da estrela sugeridos na literatura e dá suporte à existência de estrelas híbridas, ou seja, estrelas compostas de um caroço de quarks envolto por um gás de nêutrons altamente relativísticos. A largura deste envoltório varia conforme a transição de fase que ocorrer na matéria no interior da estrela. Apesar das equações de estado neste modelo serem muito simples, as previsões de massa máxima e raio estão em perfeito acordo com observações recentes.

Apêndice A

A.1 Regularização Dimensional

Cálculos em teoria quântica de campos relativística envolve integrais de loops que aparecem em diagramas de Feynman. Se os parâmetros na lagrangeana são considerados físicos, as contribuições dos loops devem ser removidas por valores das variáveis cinemáticas que definem estes parâmetros, esta é a base da renormalização. Em muitas aplicações as integrais de loops são divergentes e devem ser manipuladas para poder realizar a renormalização.

Um esquema conhecido para isto é a regularização dimensional, descrita por 't Hooft e Veltman^[78]. A idéia básica é transformar uma integral divergente com $n = 4$ para um valor genérico n onde ela é finita e pode ser calculada, voltando-se depois para o valor físico de $n = 4$. Expressando o resultado como uma série de Laurent em n em torno do ponto $n = 4$, os termos dos pólos divergentes podem ser isolados e removidos como parte do procedimento de renormalização.

Esta técnica pode ser ilustrada com um exemplo simples. Considere a integral

$$I(n) = \int d^n q \frac{1}{q^2 - M^2 + i\epsilon} = \int d^n q \frac{1}{q_0^2 - \vec{q}^2 - M^2 + i\epsilon} \quad (\text{A.1})$$

na qual é divergente no limite ultravioleta ($q^2 \rightarrow \infty$) para $n = 4$, mas pode ser considerada uma função de n . No caso geral, a parte espacial $\vec{q}$ é definida para ter $n - 1$ componentes.

Separando a integral em q^0 encontraremos

$$\begin{aligned}
I(n) &= \int d^{n-1}q \int_{-\infty}^{\infty} dq^0 \frac{1}{q_0^2 - \vec{q}^2 - M^2 + i\epsilon} \\
&= \int d^{n-1}q \int_{-i\infty}^{i\infty} dq^0 \frac{1}{q_0^2 - \vec{q}^2 - M^2}
\end{aligned} \tag{A.2}$$

Podemos agora mudar a variável $iq_n = q^0$ e reescrever (A.2) em termos do quadrado do momento Euclidiano

$$q_E^2 \equiv \sum_{i=1}^n (q^i)^2 \tag{A.3}$$

Então

$$\begin{aligned}
I(n) &= -i \int d^n q_E \frac{1}{q_E^2 + M^2} = -i \int_0^\infty q_E^{n-1} dq_E \frac{1}{q_E^2 + M^2} \int d\Omega_n \\
&= -i \left[\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \right] \int_0^\infty q_E^{n-1} dq_E \frac{1}{q_E^2 + M^2} \\
&= -i \left[\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \right] \frac{\Gamma(n/2)\Gamma(1-n/2)}{2M^{2-n}}
\end{aligned} \tag{A.4}$$

A dependência no parâmetro n agora é explícita e a expressão para $I(n)$ pode ser calculada para $n = 4$, onde há um pólo. O resíduo pode ser extraído expandindo $M^{n-2}\Gamma(1-n/2)$ em série de Laurent. A vantagem deste procedimento é que teremos expressões bem definidas em cada passo do cálculo. As divergências aparecem como pólos da função Γ . Além disto, a regularização dimensional respeita as simetrias globais e locais da teoria, desde que estas sejam independentes do número de dimensões do espaço-tempo. Manipulações levam para resultados úteis que utilizaremos [78]

$$\int d^n k \frac{(k^2)^\beta}{[k^2 - M^2 + \lambda^2 x(1-x)]^\alpha} = \frac{i\pi^{n/2}(-1)^{\beta-\alpha}\Gamma(\beta+n/2)\Gamma(\alpha-\beta-n/2)}{\Gamma(n/2)\Gamma(\alpha)[M^2 - \lambda^2 x(1-x)]^{\alpha-\beta-n/2}} \tag{A.5}$$

$$\int d^n k \frac{k^\mu}{[k^2 - M^2 + \lambda^2 x(1-x)]^\alpha} = 0 \tag{A.6}$$

$$\int d^n k \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 - M^2 + \lambda^2 x(1-x)]^\alpha} = \frac{g^{\mu\nu}}{n} \int d^n k \frac{k^2}{[k^2 - M^2 + \lambda^2 x(1-x)]^\alpha} \tag{A.7}$$

Aqui k^2 é escrito na métrica de Minkowski $k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2$.

A.1.1 Cálculo dos Contratermos

Para calcularmos explicitamente os valores dos contratermos, usamos a relação abaixo e as técnicas de regularização dimensional.

$$\alpha_m = -i(-g_s)^m \int \frac{d^n q}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\frac{\partial^{m-1}}{\partial M^{m-1}} G_F^0(q) \right] e^{iq^0 \eta}, \quad 1 \leq m \leq 4 \quad (\text{A.8})$$

Usando a expressão (A.5) teremos como resultado

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= ig_s \int \frac{d^n q}{(2\pi)^4} \text{Tr} [G_F^0(q)] \\ &= \frac{g_s^2}{2\pi^2} \left[M^3 \Gamma \left(1 - \frac{n}{2} \right) + 2M^3 \ln M + O(n-4) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= (-g_s) \frac{\partial}{\partial M} \alpha_1 \\ &= -ig_s^2 \int \frac{d^n q}{(2\pi)^4} \text{Tr} [G_F^0(q)]^2 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \left(-g_s \frac{\partial}{\partial M} \right)^2 \alpha_1 \\ &= ig_s^3 2! \int \frac{d^n q}{(2\pi)^4} \text{Tr} [G_F^0(q)]^3 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= \left(-g_s \frac{\partial}{\partial M} \right)^3 \alpha_1 \\ &= ig_s^4 3! \int \frac{d^n q}{(2\pi)^4} \text{Tr} [G_F^0(q)]^4 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Referências

- [1] M.Gell-Mann, *Phys.Rev.***125**,1067(1962)
- [2] G.Zweig, CERN preprint, (1964)
- [3] M.Gell-Mann, *Acta Physica Austriaca Suppl.***IX**,733(1972)
- [4] H.Fritzsch, M.Gell-Mann and H.Leutwyler, *Phys.Lett.***47B**,365(1973)
- [5] J.C.Pati and A.Salam, *Phys.Rev.***D8**,1240(1973)
- [6] G.'tHooft, *Nucl.Phys.***B33**,173(1971)
- [7] H.D.Politzer, *Phys.Rev.Lett***30**,1346(1973)
- [8] D.J.Gross and F.Wilczek, *Phys.Rev.Lett.***30**,1343(1973)
- [9] S.Weinberg, *Phys.Rev.***D8**,4482(1973)
- [10] J.Gasser and H.Leutwyler, *Phys.Rep.***87**,77(1982)
- [11] L.J.Reinders, H.Rubinstein, S.Yazaki, *Phys.Rep.***127**,1(1985)
- [12] M.A.Schifman, A.I.Veinshtein and V.I.Zakharov, *Phys.Rev.Lett.***42**,297(1979)
- [13] K.G.Wilson, *Phys.Rev.***D10**,2445(1975)
- [14] J.Kogut et al, *Phys.Rev.Lett.***50**,393(1983)
- [15] B.L.Ioffe, *Nucl.Phys.***B188**,317(1981)
- [16] G.'tHooft, *Nucl.Phys.***B75**,461(1974)
- [17] E.Witten, *Nucl.Phys.***B160**,57(1979)
- [18] C.Itzykson and J.B.Zuber, *Quantum Field Theory*, (Mc Graw-Hill, N. Y.)1981.
- [19] J.Goldstone, *Nuovo Cimento***19**,159(1961)
- [20] J.D.Walecka, *Annals of Physics***83**,491(1974)
- [21] G.E.Brown, I.Zched, *Phys.Rep.***142**,1(1986)

- [22] H. Yukawa, *Proc. Phys. Math. Soc. Japan* **17**, 48 (1935)
- [23] M. Takenaki, S. Nakamuri and S. Sasaki, *Progr. Theor. Phys.* **6**, 581 (1951)
- [24] W. Lin e B. D. Serot, *Nucl. Phys.*, **A524**, 601 (1991)
- [25] B. D. Serot e J. D. Walecka, *Acta Phys. Pol.* **B23**, 655 (1992)
- [26] S.P. Flego, A.H. Blin, B. Hiller, M.C. Nemes, *Zeit. Phys.* **A352**, 197 (1995)
- [27] T. Eguchi, *Phys. Rev.* **D14**, 2755 (1976)
- [28] S.P. Klevansky, *Rev. Mod. Phys.* **64**, 649 (1992).
- [29] J.D. Bjorken and S.D. Drell, *Relativistic Quantum Fields* (Mc Graw-Hill, N.Y.) 1965
- [30] C.J. Horowitz and B.D. Serot, *Nucl. Phys.* **A368**, 503 (1981)
- [31] R.J. Furnstahl and B.D. Serot, *Phys. Rev.* **C41** No 1, 262 (1990)
- [32] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Statistical Physics-part I* (Oxford, Pergamon) 1980
- [33] B.W. Lee, *Chiral Dynamics-Documents on Modern Physics* (Gordon and Breach Science Publishers, N.Y.) 1972
- [34] W. Lin e B. D. Serot, *Nucl. Phys.* **A512**, 637 (1990)
- [35] D.K. Campbell, *Nuclear Physics with Heavy Ions and Mesons* (North-Holland Publishing Company) 1978
- [36] R. J. Furnstahl e B. D. Serot, *Phys. Rev.* **B316**, 12 (1993)
- [37] M. D. Scadron, *Phys. At. Nucl.* **56**, 1595 (1993)
- [38] B.D. Serot and T. Matsui, *Annals of Physics* **144**, 107 (1982)
- [39] B.D. Serot and J.D. Walecka, *Advances in Nuclear Physics*, **16** Editora Negele-Vogt
- [40] A.L. Fetter and J.D. Walecka, *Quantum Theory of Many Particle Systems* (McGraw-Hill, N.Y.) 1971
- [41] S.A. Chin, *Annals of Physics* **108**, 301 (1977)
- [42] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **122**, 354 (1961)
- [43] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **124**, 246 (1961)
- [44] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe, *Quantum Mechanics*, vol 1 e 2, (John Wiley and Sons, N.Y.) 1977

- [45] F.A.Oliveira,H.C.G.Caldas,D.H.T.Franco,A.L.Mota,M.C.Nemes- Submetido a Nuclear Physics
- [46] Particle Data Booklet,(1994)
- [47] T.Hatsuda and T.Kunishiro,*Phys.Lett***B198**,304(1987)
- [48] T.Hatsuda and T.Kunishiro,*Phys.Lett***B198**,126(1987)
- [49] Tese de Mestrado de Heron Carlos de Godoy Caldas-Consequências da Simetria Quiral e sua Quebra a Temperatura e Densidade Finitas-UFMG(1995)
- [50] V.Bernard,U.Meissner,I.Zahed,*Phys.Rev.Lett***59**,966(1987)
- [51] R.N.Manchester et al,*MNRAS***185**,409(1978)
- [52] F.G.Smith,Pulsars(Cambridge Univ.Press ,N.Y)(1976)
- [53] J.Middleditch,J.Nelson,*Appl.J*.bf 208,567(1976)
- [54] J.A.van Paradijs et al,*Nature***259**,547(1976)
- [55] R.S.Wolff,H.L.,Kestenbaum,W.Ku,R.Novick,*Apl. J.***202**L22(1975)
- [56] L.Shapiro and S.A.Teukolsky,Black Holes,White Dwarfs and Neutron Stars (John Wiley and Sons,N.Y)1983.
- [57] J.W.Negele,D.Vauterin,*Nucl.Phys.***A207**,298(1973)
- [58] R.V.Reid,*Ann.Phys.***50**,411(1968)
- [59] G.Baym,C.Pethick,*Ann.Rev.Astron.Astrophys.***17**,415(1979)
- [60] G.E.Brown,W.Weise,*Phys. Rep.***C27**,1(1976)
- [61] G.Chapline,*Nature***261**,550(1976)
- [62] S.A.Chin,J.D.Walecka,*Phys.Lett.***B78**,24(1974)
- [63] T.D.Lee,G.C.Wick,*Phys.Rev.***D9**,2291(1974)
- [64] V.R.Pandharipande,V.K.Garde,*Phys.Lett***B39**,608(1972)
- [65] R.Giacconi,R.Ruffini, Phys. and Astrophys. of Neutrons Stars and Black Holes(North-Holland of the It. Phys.Soc)1978
- [66] J.R.Oppenheimer and G.M.Volkoff,*Phys.Rev.***55**,734(1939)
- [67] S.A.Chin,*Phys. Lett.***B62**,263(1976)
- [68] J.Cleymans,*Phys.Rep.***130**,217(1986)

- [69] T.de Grand,R.L.Jaffe,K.Johnson,J.Kiskis,*Phys.Rev.D***12**,2060(1975)
 - [70] ,S.Epsztein Grynberg,F.A.Oliveira,A.Blin,B.Hiller and M.C.Nemes- Artigo aceito na revista Helvetica Phys. Acta-outubro de 1995
 - [71] Tese de Mestrado de Suely Epsztein Grinberg-Fenomenologia Estelar em Modelo de Quarks-UFMG(1995)
 - [72] W.D.Arnett and R.L.Bowers,*Ap. J.Suppl.***33**,411(1977)
 - [73] V.R.Pandharipande,R.A.Smith,*Phys.Lett.B***59**,15(1975)
 - [74] V.R.Pandharipande,R.A.Smith,*Nucl.Phys.A***237**,507(1975)
 - [75] R.C.Malone,M.B.Johnson,H.A.Bethe *Ap.J.***199**,741(1975)
 - [76] V.R.Pandharipande,*Nucl.Phys.A***178**,123(1971)
 - [77] O.Maxwell and W.Weise,*Phys.LettB***62**,159(1976)
 - [78] G.'t Hooft and M.Veltman,*Nucl.Phys.B***44**(1972)189
-