Universidade de São Paulo
Instituto de Física

SBI-IFUSP

305M810T3123

A Interação Nucleon-Nucleon no Modelo de Skyrme

Isabela Porto Cavalcante

Orientador: Prof. Dr. Manoel Roberto Robilotta

Banca examinadora:

Prof. Dr. Abraham H. Zimerman (IFT - UNESP)
Prof. Dr. Adriano Antonio Natale (IFT - UNESP)
Prof. Dr. José de Sá Borges (UERJ)
Prof. Dr. Manoel Roberto Robilotta (IFUSP)
Prof. Dr. Tobias Frederico (ITA)

Tese de doutorado
submetida ao Instituto de
Física da Universidade de
São Paulo.

Isabela Porto Cavalcante
Prof. Dr. Manoel Roberto Robilotta
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

São Paulo
1999

Manoel Roberto Robilotta

539.725
C 376 i
D
ex. 1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Cavalcante, Isabela Porto

A Interação Nucleon-Nucleon no Modelo de Skyrme.
São Paulo, 1999.

Tese (Doutoramento) - Universidade de São Paulo.
Instituto de Física - Departamento de Física Nuclear.

Orientador: Prof. Dr. Manoel Roberto Robilotta
Área de Concentração: Física Nuclear

Unitermos: 1. Modelo de Skyrme;
2. Interação nucleon-nucleon;
3. Lagrangianas efetivas; 4. Simetria quiral.

USP/IF/SBI-043/99

Ao Paulo Freire e ao Betinho.

Agradecimentos

Ao Mané, pela orientação impecável, séria e dedicada, e por todo o apoio que sempre recebi, tão importante para trilhar o caminho. Obrigada pela amizade.

A todo o pessoal do corredor do FINPE, pela camaradagem e pelo ambiente de trabalho agradável. Ao Joel, Mané e Arnaldo por toda a física que discutimos. À Raquel, por ter lido a tese.

A todas as pessoas do IFUSP que facilitam e, tantas vezes, possibilitam nosso trabalho.

To Lombard, Meissner, Loiseau and Tjon, for the precious comments about my work.

Ao Hamilton, Mané, mãe, Ana, Helena, Lu, Tânia, Aninha, Elô, Cíntia, Rê, Joel, Raquel, Ricardo, Fred, Wal, Claudinha, Ana Célia, Leca, Vanderlei, Suzi, Van, Marilice, Odair, June, Oscar e todos os que me ajudaram a segurar tantas barras ao longo da caminhada. Also to Michaela and Vincent for the support in so many moments along this journey. A vocês e tantos outros, so many others, muito obrigada pela amizade e carinho. *Thank you all, my friends.*

Ao pessoal do futebol, pelos momentos lúdicos e por todo o cuidado e carinho, naquele fatídico mês de janeiro de 98... Ao Kita, pelas caminhadas.

To Larry Wilets, Dominique Vautherin, Jean-Louis Ballot, Rui da Silveira and Jean-Paul Blaizot for the hospitality. My warmest regards.

À FAPESP, ao Hamilton e minha mãe, pelo apoio financeiro.

Resumo

A interação forte a baixas energias pode ser abordada por meio de lagrangianas efetivas. Neste contexto, o modelo de Skyrme representa uma forma de descrever bárions, que emergem como sólitons topológicos de uma lagrangiana mesônica quirial. A interação nucleon-nucleon (NN) é comumente tratada neste modelo de maneira aproximada, através do chamado *Ansatz* Produto (AP), cujo problema mais sério é não reproduzir a atração de alcance intermediário no canal escalar-isoescalar do potencial NN.

O objetivo deste trabalho é construir um novo *ansatz* para o cálculo da interação NN no modelo de Skyrme. Para isso, analisamos o AP, investigando as causas deste problema fenomenológico, e concluímos que deve-se à componente azimutal de seu campo piônico. A partir disto, construímos o *Ansatz* Novo (AN), com o qual calculamos o novo potencial. Comparando os resultados com outros potenciais existentes, mostramos que o AN constitui uma solução plausível para o problema.

Palavras-chave: modelo de Skyrme, interação nucleon-nucleon, simetria quirial, lagrangianas efetivas.

Abstract

Strong interactions at low energies can be treated by means of effective lagrangians. In this context, the Skyrme model is regarded as a way to describe baryons as topological solitons from a chiral mesonic lagrangian. In the framework of this model, nucleon-nucleon (NN) interaction is usually derived in the sudden approximation, by means of the so called Product Ansatz (PA). Its most serious problem is the absence of the intermediate range attraction in the scalar-isoscalar channel of the NN potential.

We construct a new ansatz to derive the NN interaction in the Skyrme model. At first, we analyse the PA and investigate the causes of its phenomenological problem. We conclude it is due to the azimuthal component of its pionic field. With this result we build the New Ansatz (NA) and calculate the new potential. Comparisons of the results with other existent potentials show that NA constitutes a plausible solution to the problem.

Keywords: Skyrme model, nucleon-nucleon interaction, chiral symmetry, effective lagrangians.

Sumário

1	Introdução	1
2	A simetria quiral nas interações fortes	5
2.1	Simetrias e correntes de Noether	6
2.2	A simetria quiral	9
2.3	O modelo σ linear	13
2.4	Modelo σ não-linear e skyrmions	18
3	O modelo de Skyrme	21
3.1	A corrente bariônica	21
3.2	A lagrangiana de Skyrme	22
3.3	Soluções solitônicas e o ouriço	23
3.4	A quantização do sóliton	27
3.5	Cálculo das propriedades estáticas do skyrmion	29
4	A interação NN	33

4.1	Introdução	33
4.2	A interação NN no modelo de Skyrme	40
4.2.1	Procedimento para o cálculo do potencial NN na aproximação instantânea	42
4.3	O Ansatz Produto	45
4.3.1	O número bariônico	46
4.3.2	O cálculo do potencial NN	47
4.3.3	Comparação com a troca de um pión	57
4.3.4	O potencial escalar	59
4.3.5	A função de perfil	68
4.4	Problemas do Ansatz Produto e tentativas de solução	79
5	O Novo Ansatz	85
5.1	O Número Bariônico	88
5.2	A Quantização	90
5.3	Cálculo do potencial NN	96
5.4	O potencial NN: resultados	119
5.5	Avaliação dos resultados	130
6	Conclusões	135
A	Cálculo das correntes de isospin do skyrmion	139

B Componentes do potencial NN	143
C Valores esperados do operador de rotação do skyrmion	145
D Integrais no ângulo azimutal	167
E O espalhamento píon-nucleon a baixas energias	171

Capítulo 1

Introdução

A interação nucleon-nucleon (NN) é o elemento básico da física nuclear, o que justifica todo o esforço realizado ao longo de décadas, buscando uma teoria que possa descrevê-la com precisão. O desejável seria fazê-lo da mesma forma com que a Eletrodinâmica Quântica (QED) descreve a interação eletromagnética. Entretanto, o caso da interação NN é muito mais complexo, porque os nucleons não podem ser considerados partículas fundamentais.

O largo espectro dos hádrons conhecidos é compreendido admitindo-se que eles sejam compostos por quarks. A Cromodinâmica Quântica (QCD), que descreve a interação entre quarks e glúons, é tida, atualmente, como a teoria fundamental das interações fortes. Entretanto, resultados do cálculo da constante de acoplamento da QCD, usando técnicas do grupo de renormalização [Mut 87], indicam que seu valor cresce muito com a diminuição da energia para valores tipicamente menores que 1 GeV, inviabilizando a aplicação de teoria de perturbação neste regime. Esta característica e o fato de o vácuo da QCD conter condensados fazem com que a dinâmica seja dominada pela estrutura coletiva dos quarks, representada por mésons e bárions.

Existem, basicamente, duas formas de abordar a interação forte no regime não perturbativo. Uma delas, mais fundamental, consiste em cálculos de teoria de campos na rede. Este tipo de tratamento é limitado pelo alcance dos recursos computacionais existentes. A outra abordagem é baseada em modelos efetivos, que incorporam as simetrias presentes na QCD e os

graus de liberdade relevantes a baixas energias. Nosso trabalho se insere neste contexto.

As características da QCD são discutidas no capítulo 2, onde falamos sobre a simetria quiral e como ela é incorporada nas lagrangianas mesônicas do modelo σ . Embora esta discussão possa ser estendida para o grupo $SU(3)$, que considera os três tipos, ou sabores, de quarks com massas pequenas, restringimo-nos ao setor $SU(2)$, pois a grande maioria dos fenômenos nucleares é dominada apenas pelos quarks mais leves, de sabores u e d .

Neste trabalho, estudamos a interação NN no modelo de Skyrme, que é baseado numa lagrangiana de mésons com simetria quiral do tipo σ não-linear. Apesar de ter sido proposto no início da década de 60, ele só teve destaque no meio acadêmico a partir da década de 80, após os trabalhos de 't Hooft e Witten, que salientam aspectos da QCD a baixas energias, compatíveis com características do modelo de Skyrme. Trata-se de um modelo essencialmente não perturbativo, onde os bárions são construídos como sólitons. A eles associa-se uma corrente que se conserva devido a propriedades geométricas dos campos e, por isso, eles são denominados sólitons topológicos. No capítulo 3, apresentamos o modelo e a construção do nucleon, que corresponde à solução das equações de movimento com número bariônico $B = 1$. O sólito de Skyrme é clássico, não possui propriedades como spin e isospin e, por isso, a sua quantização é apresentada na seção 3.4.

Após uma introdução geral sobre a interação NN, na seção 4.1, discutimos as maneiras como ela é tratada no âmbito do modelo de Skyrme, na seção 4.2. A resolução das equações de movimento do modelo para o caso $B = 2$ apresenta várias dificuldades, que persistem até os dias de hoje. Isto faz com que o problema seja comumente tratado de maneira aproximada, através do chamado *Ansatz* Produto (AP). Esta abordagem apresenta algumas vantagens indiscutíveis, mas, também, o sério problema de não reproduzir a atração de alcance intermediário no canal escalar-isoescalar do potencial NN.

O objetivo deste trabalho é encontrar um outro *ansatz*, para substituir o AP, numa tentativa de solucionar este problema fenomenológico do potencial NN no modelo de Skyrme. Para isso, partimos da análise detalhada do AP, que é apresentada ao longo da seção 4.3 e concluída na seção 4.4, onde descrevemos, também, as tentativas de solução dos problemas

encontrados.

O estudo resultou na construção de um *Ansatz* Novo (AN), que é apresentado no capítulo 5, na forma de uma nova função dos campos. Associada a ela, existe a questão de saber como proceder a sua quantização, que é discutida na seção 5.2. Apresentamos, em seguida, o cálculo do potencial NN com o AN e analisamos os resultados, comparando-os com o AP e outros potenciais existentes.

No capítulo 6, apresentamos uma síntese dos resultados obtidos na tese, com as conclusões do trabalho e as perspectivas futuras.

O trabalho inclui, finalmente, cinco apêndices, contendo cálculos auxiliares ou complementares aos assuntos apresentados no corpo da tese.

Capítulo 2

A simetria quiral nas interações fortes

Atualmente acredita-se que a teoria das interações fortes seja a Cromodinâmica Quântica (QCD), que descreve sistemas de quarks interagindo por meio de trocas de glúons. A lagrangiana da QCD envolve seis tipos, ou sabores, de quarks, dentre os quais os dois mais leves, u e d , são responsáveis pela enorme maioria dos processos nucleares. No limite em que as massas destes quarks podem ser desprezadas, a lagrangiana da QCD torna-se invariante por transformações do grupo $SU(2) \times SU(2)$ quiral.

No contexto da física nuclear, constata-se a invariância das interações fortes pela troca entre prótons e nêutrons, com boa precisão (cerca de 1%). Além disso, o próton e o nêutron têm massas muito parecidas e formam um dubleto de isospin, enquanto que os píons formam um tripleto, com $m_{\pi^0} \simeq m_{\pi^\pm}$. Esta é a chamada simetria de isospin, que caracteriza o grupo $SU(2)_V$. Adicionando a este grupo as transformações axiais, que envolvem a paridade, obtém-se o grupo quiral. A idéia intuitiva associada a este grupo é a simetria entre pares de objetos que são um a imagem no espelho do outro, como, por exemplo, as mãos esquerda e direita, de onde vem a denominação “quiral”.

No mundo real não são encontrados os dubletos de paridade degenerados exigidos pela simetria axial que, não obstante, está presente na lagrangiana. A isto chamamos quebra dinâmica (ou espontânea) da simetria, ou a sua realização no modo de Nambu-Goldstone. Neste caso, surgem bósons sem massa, representados pelos píons. A simetria é, ainda, quebrada

explicitamente, devido à massa não-nula dos quarks e, por isso, a massa dos píons também não é nula.

Como não é possível aplicar a QCD perturbativamente no nível hadrônico, lança-se mão de teorias efetivas, onde os graus de liberdade são associados a mésons e nucleons. Para uma descrição da realidade consoante com a teoria fundamental, é preciso que as características acima descritas estejam presentes nestas teorias efetivas.

Neste capítulo, introduzimos o tratamento formal da simetria quiral e sua incorporação em lagrangianas efetivas. Primeiramente, na seção 2.1, estabelecemos a linguagem do formalismo lagrangiano e a maneira de calcular cargas conservadas devido a simetrias do problema. Em seguida, na seção 2.2, falamos da simetria quiral, no contexto da QCD. Historicamente, a partir das teorias que explicavam os decaimentos fracos, foram construídos modelos que incorporavam a simetria quiral, para aplicação em sistemas piônicos. Na seção 2.3, descrevemos o modelo básico, que incorpora esta simetria de maneira linear e, na seção 2.4, a sua versão não-linear, que se tornou a mais aplicada a cálculos de interação forte e constitui a base do modelo de Skyrme.

2.1 Simetrias e correntes de Noether

Em teoria de campos, a dinâmica dos campos $\phi_i(x)$ é descrita por uma densidade de lagrangiana $\mathcal{L}(\phi_i(x), \partial_\mu \phi_i(x))$. O princípio de mínima ação determina que, para os campos físicos,

$$\delta S = 0, \quad (2.1)$$

sendo S a ação,

$$S \doteq \int dt L(t) \doteq \int dt \int d^3x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i), \quad (2.2)$$

onde L é a lagrangiana do sistema, propriamente dita*. Obtêm-se, assim, as equações de movimento de Euler-Lagrange

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0. \quad (2.3)$$

*Entretanto, como trabalharemos praticamente todo o tempo apenas com a *densidade* $\mathcal{L}$, chamaremos esta somente por *lagrangiana*.

A quantização canônica é feita transformando-se os campos $\phi_i(x)$ e seus momentos conjugados

$$\pi_i(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_i(x)} \quad (2.4)$$

em operadores $\hat{\phi}_i(x)$ e $\hat{\pi}_i(x)$, respectivamente, e impondo-se relações de comutação adequadas. Para bósons, temos as relações de comutação

$$[\hat{\phi}_i(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}_j(\mathbf{y}, t)] = i\delta_{ij}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [\hat{\phi}_i(\mathbf{x}, t), \hat{\phi}_j(\mathbf{y}, t)] = [\hat{\pi}_i(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}_j(\mathbf{y}, t)] = 0, \quad (2.5)$$

e para férmions, relações de anticomutação

$$\{\hat{\psi}_{i\mu}(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}_{j\nu}^\dagger(\mathbf{y}, t)\} = \delta_{ij}\delta_{\mu\nu}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \{\hat{\psi}_{i\mu}(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}_{j\nu}(\mathbf{y}, t)\} = \{\hat{\psi}_{i\mu}^\dagger(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}_{j\nu}^\dagger(\mathbf{y}, t)\} = 0, \quad (2.6)$$

sendo $i\psi_i^\dagger$ o momento canonicamente conjugado a $\psi_i(x)$ e μ, ν , os índices de Dirac dos spinors ψ_i .

O teorema de Noether diz que a cada simetria da lagrangiana por uma determinada transformação contínua está associada uma quantidade conservada. Vamos descrever aqui como obter este resultado e a corrente associada à invariância por uma transformação unitária.

A cada tipo de transformação associa-se um grupo. De modo geral, podemos representar uma transformação unitária local e infinitesimal por

$$U = e^{i\alpha_a(x)G_a} \simeq 1 + i\alpha_a G_a, \quad (2.7)$$

onde $\alpha_a(x)$ são parâmetros infinitesimais reais da transformação e G_a são os geradores do grupo, que obedecem à álgebra

$$[G_i, G_j] = ic_{ijk}G_k, \quad (2.8)$$

sendo c_{ijk} as constantes de estrutura do grupo. Por exemplo, no caso da simetria de isospin entre prótons e nêutrons, o grupo é $SU(2)$, com três geradores[†], e as constantes de estrutura representadas pelo tensor de Levi-Civita, ϵ_{ijk} .

Uma transformação genérica dos operadores de campo é dada por

$$\phi_i(x) \rightarrow \phi'_i(x) = U\phi_i(x)U^\dagger \simeq \phi_i(x) + i\alpha_a[G_a, \phi_i(x)], \quad (2.9)$$

[†]O número de geradores do grupo $SU(n)$ é $n^2 - 1$.

ou seja, a variação é

$$\delta\phi_i \simeq i\alpha_a[G_a, \phi_i] \doteq i\alpha_a F_{ai}(\phi(x)), \quad (2.10)$$

sendo $F_{ai}(\phi(x))$ uma função dos campos $\phi = (\phi_1, \phi_2 \dots \phi_n)$ no ponto x .

As transformações nos campos induzem variações em $\mathcal{L}$, que podem ser escritas como

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}\delta\phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\delta(\partial_\mu\phi_i).$$

Utilizando as equações de Euler-Lagrange (2.3), e o fato de as operações ∂_μ e δ comutarem, temos

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\delta\phi_i \right\}.$$

Utilizando, agora, (2.10), podemos escrever

$$\delta\mathcal{L} = (\partial_\mu\alpha_a) \left\{ i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} F_{ai}(\phi) \right\} + \alpha_a \partial_\mu \left\{ i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} F_{ai}(\phi) \right\}.$$

Este resultado motiva a definição de uma corrente,

$$j_a^\mu = i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} F_{ai}(\phi) \quad (2.11)$$

e a variação de $\mathcal{L}$ pode ser escrita como

$$\delta\mathcal{L} = (\partial_\mu\alpha_a)j_a^\mu + \alpha_a(\partial_\mu j_a^\mu). \quad (2.12)$$

No caso de uma lagrangiana invariante pela transformação global correspondente, onde os parâmetros α_a independem de x , o primeiro termo da expressão acima se anula, e a corrente, dada por (2.11), é conservada,

$$\partial_\mu j_a^\mu = 0.$$

Integrando este resultado em todo o espaço, temos

$$\int_{V_\infty} d^3x \partial_\mu j_a^\mu = \int_{V_\infty} d^3x (\partial_t j_a^0 + \nabla \cdot \mathbf{j}_a) = \partial_t \int_{V_\infty} d^3x j_a^0 + \int_{S_\infty} d\sigma \cdot \mathbf{j}_a = 0. \quad (2.13)$$

Supondo que os campos e correntes tendam a zero suficientemente rápido no infinito, a integral de superfície se anula e a carga

$$Q_a = \int_{V_\infty} d^3x j_a^0 \quad (2.14)$$

é conservada.

Utilizando a definição da corrente, Eq. 2.11, temos

$$Q_a = i \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi_i)} F_{ai}(\phi) = i \int d^3x \pi_i(x) F_{ai}(\phi(x)). \quad (2.15)$$

O comutador da carga com o campo é

$$\begin{aligned} [Q_a, \phi_i(x)] &= i \int d^3y [\pi_j(\mathbf{y}, t) F_{aj}(\phi(\mathbf{y}, t)), \phi_i(\mathbf{x}, t)] \\ &= i \int d^3y [\pi_j(\mathbf{y}, t), \phi_i(\mathbf{x}, t)] F_{aj}(\phi(\mathbf{y}, t)) \\ &= F_{ai}(\phi(\mathbf{x}, t)), \end{aligned} \quad (2.16)$$

mostrando, pela comparação com (2.10), que as cargas conservadas são precisamente os geradores do grupo de simetria.

No caso de quebra da simetria, a divergência da corrente (2.11) pode ser calculada a partir de (2.12) como

$$\partial_\mu j_a^\mu = \frac{\partial(\delta \mathcal{L})}{\partial \alpha_a(x)}. \quad (2.17)$$

2.2 A simetria quiral

A simetria quiral surgiu no contexto das interações fracas, em estudos de decaimentos leptônicos e semileptônicos[†]. Vamos abordá-la, aqui, sob o ponto de vista das interações fortes, partindo da lagrangiana da QCD. Para isso, tomamos a lagrangiana de férmions sem massa

$$\mathcal{L}(\psi) = i \bar{\psi} \gamma_\mu \partial^\mu \psi. \quad (2.18)$$

No setor $SU(2)$ consideramos apenas dois sabores de férmions[§], representados pelos spinores u e d . O campo ψ é, então, dado por

$$\psi \doteq \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

sendo $\bar{\psi} \doteq (\bar{u} \ \bar{d})$.

[†]Para uma abordagem histórica, veja o item 2.2 da Ref. [Mae 96], ou a Ref. [Cam 78].

[§]A discussão completa envolve três sabores de quarks, mas aqui estamos nos restringindo aos dois mais leves, que são os mais relevantes a baixas energias.

A rotação infinitesimal de isospin é dada por

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi - i\boldsymbol{\alpha} \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\psi, \quad (2.20)$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi}^\dagger \gamma^0 = \bar{\psi} + i\psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\gamma^0 = \bar{\psi} + i\bar{\psi}\boldsymbol{\alpha} \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}. \quad (2.21)$$

A variação da lagrangiana (2.18) por esta transformação é

$$\delta^V \mathcal{L} = i \left(i\bar{\psi}\boldsymbol{\alpha} \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \right) \not{\partial}\psi + i\bar{\psi} \not{\partial} \left(-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\psi \right) = 0. \quad (2.22)$$

Usando a Eq. 2.11, obtemos a corrente de isospin ou vetorial

$$V_a^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu \frac{\tau_a}{2}\psi, \quad (2.23)$$

e a carga conservada,

$$Q_a^V = \int d^3x V_a^0(x) = \int d^3x \psi^\dagger \frac{\tau_a}{2}\psi. \quad (2.24)$$

As cargas são os geradores de $SU(2)$ e obedecem à álgebra

$$[Q_a^V, Q_b^V] = i\epsilon_{abc}Q_c^V. \quad (2.25)$$

A transformação axial combina isospin e paridade e corresponde a

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi - i\boldsymbol{\beta} \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\gamma_5\psi, \quad (2.26)$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} + i\psi^\dagger \boldsymbol{\beta} \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\gamma_5\gamma^0 = \bar{\psi} - i\bar{\psi}\boldsymbol{\beta} \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\gamma_5. \quad (2.27)$$

Esta transformação está relacionada com a helicidade do férmion, que indica se a projeção do spin na direção do momento é paralela ou antiparalela a ele. A operação de paridade inverte o sentido do momento, mas não o do spin e, portanto, muda a helicidade.

A variação da lagrangiana fermiônica (2.18) por transformações axiais é

$$\begin{aligned} \delta^A \mathcal{L} &= i \left(-i\bar{\psi}\boldsymbol{\beta} \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\gamma_5 \right) \not{\partial}\psi + i\bar{\psi} \not{\partial} \left(-i\boldsymbol{\beta} \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\gamma_5\psi \right) \\ &= \bar{\psi}\boldsymbol{\beta} \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\gamma_5 \not{\partial}\psi + \bar{\psi}\boldsymbol{\beta} \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\gamma_5 (-\not{\partial})\psi = 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Portanto, a corrente axial

$$A_a^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu \gamma_5 \frac{\tau_a}{2}\psi \quad (2.29)$$

também é conservada, sendo a carga dada por

$$Q_a^A = \int d^3x A_a^0(x) = \int d^3x \psi^\dagger \frac{\tau_a}{2} \gamma_5 \psi. \quad (2.30)$$

Como $\gamma_5^2 = 1$, temos

$$[Q_a^A, Q_b^A] = [Q_a^V, Q_b^V] = i\epsilon_{abc} Q_c^V, \quad (2.31)$$

$$[Q_a^A, Q_b^V] = i\epsilon_{abc} Q_c^A. \quad (2.32)$$

O conjunto das relações de comutação (2.31,2.32) constitui a álgebra de cargas do grupo quiral. A propriedade quiral pode ser explicitada se considerarmos, ao invés das cargas Q^V e Q^A , as cargas esquerda (L) e direita (R), dadas por

$$Q_a^L = \frac{1}{2} (Q_a^V - Q_a^A), \quad (2.33)$$

$$Q_a^R = \frac{1}{2} (Q_a^V + Q_a^A). \quad (2.34)$$

Elas definem dois espaços separados, esquerdo (L) e direito (R), tais que

$$[Q_a^L, Q_b^L] = i\epsilon_{abc} Q_c^L, \quad (2.35)$$

$$[Q_a^R, Q_b^R] = i\epsilon_{abc} Q_c^R, \quad (2.36)$$

$$[Q_a^L, Q_b^R] = 0. \quad (2.37)$$

Estas relações indicam que estados de cada tipo (L ou R) transformam-se independentemente, não se relacionando com os do outro tipo. O grupo correspondente é $SU(2)_L \times SU(2)_R$.

Como a simetria axial é realizada no modo de Nambu-Goldstone, o vácuo, ou estado de mais baixa energia, designado por $|V\rangle$, não é simétrico por esta transformação. Isto significa que

$$U^A |V\rangle = e^{i\beta_a Q_a^A} |V\rangle \simeq |V\rangle + i\beta_a Q_a^A |V\rangle \neq |V\rangle, \quad (2.38)$$

ou seja, a carga axial não aniquila o vácuo. O operador de carga é composto por campos de férmions (Eq. 2.24), com seus operadores de criação e aniquilação de partículas. Assim, a Eq. 2.38 indica que o vácuo da QCD não é vazio e sim, um estado contendo partículas e antipartículas - um condensado de Bose. Portanto, para o vácuo da QCD, temos

$$\langle V | : \bar{\psi} \psi : | V \rangle \neq 0, \quad (2.39)$$

onde os dois pontos indicam o ordenamento normal[¶].

Como Q^A comuta com a hamiltoniana, H , temos

$$\begin{aligned} H|V\rangle &= E_0|V\rangle, \\ H(Q_a^A|V\rangle) &= Q_a^A H|V\rangle = Q_a^A E_0|V\rangle = E_0(Q_a^A|V\rangle), \end{aligned} \quad (2.40)$$

onde E_0 é a energia do vácuo. Este resultado mostra que a carga axial conecta o vácuo com outros estados de mesma energia e de paridade oposta (devido ao operador γ_5). Estes outros estados correspondem a bósons sem massa e com os mesmos números quânticos de Q^A , ou seja, isovetores pseudo-escalares. Eles são os chamados bósons de Goldstone, associados a excitações do vácuo.

Os quarks u e d , que formam o setor $SU(2)$ da QCD, têm massas pequenas, da ordem de 5-10 MeV, enquanto a escala típica de energia é da ordem de 1 GeV. No limite em que o isospin é exato, estas massas são consideradas iguais, representadas por m e incorporadas na lagrangiana (2.18) através do termo

$$\mathcal{L}_m = -m\bar{\psi}\psi. \quad (2.41)$$

A variação de $\mathcal{L}_m$ correspondente a uma rotação de isospin dos campos é nula, bem como a contribuição de $\mathcal{L}_m$ à corrente de isospin. Entretanto, a variação devida à transformação axial é

$$\delta^A \mathcal{L}_m = 2im\bar{\psi}\boldsymbol{\beta} \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\gamma_5\psi. \quad (2.42)$$

Portanto, a massa não-nula dos quarks quebra a simetria axial e a divergência da corrente (2.29) é dada por

$$\partial_\mu A_a^\mu = im\bar{\psi}\tau_a\gamma_5\psi. \quad (2.43)$$

Se esta massa é pequena, a divergência também o é e a simetria é aproximada. A afirmação de que a massa pequena dos quarks quebra levemente a conservação da corrente axial é conhecida como hipótese de PCAC (*partial conservation of axial current*).

[¶]Ordenamento normal significa que operadores de aniquilação são aplicados antes de operadores de criação.

Em resumo, na QCD a simetria axial é quebrada tanto explicitamente quanto pela estrutura do vácuo. Por isso, dizemos que a QCD tem simetria quiral aproximada e espontaneamente quebrada.

No mundo hadrônico, não são observados quarks livres, mas sim bárions e mésons. Os bósons de Goldstone correspondem a mésons pseudo-escalares que, no caso de $SU(2)$, são os píons.

2.3 O modelo σ linear

O modelo σ linear é a forma mais simples de implementar a simetria quiral na escala hadrônica e foi proposto por Gell-Mann e Lévy [GL 60], baseado em trabalhos de outros autores. As definições de campos e transformações do modelo decorrem naturalmente da seção anterior [Koc 97], se fizermos a associação formal

$$\phi \leftrightarrow iG\bar{\psi}\boldsymbol{\tau}\gamma_5\psi, \quad (2.44)$$

$$\sigma \leftrightarrow -G\bar{\psi}\psi, \quad (2.45)$$

sendo G uma constante com dimensão do inverso do quadrado da energia, ϕ o isotripleto de píons e σ um campo escalar-isoescalar, chamado parceiro quiral dos píons.

A parte cinética da lagrangiana puramente mesônica do modelo σ linear, invariante pelas transformações quirais, é dada por

$$\mathcal{L}_{\sigma l} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \partial_\mu \phi \cdot \partial^\mu \phi). \quad (2.46)$$

Para os campos do modelo, as transformações vetoriais são

$$\begin{aligned} \delta^V \phi_i &\leftrightarrow iG\alpha_j \left[\left(i\bar{\psi} \frac{\tau_j}{2} \right) \tau_i \gamma_5 \psi + \bar{\psi} \tau_i \gamma_5 \left(-i \frac{\tau_j}{2} \psi \right) \right] \\ &= \alpha_j G \bar{\psi} \frac{1}{2} [\tau_i, \tau_j] \gamma_5 \psi \leftrightarrow (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\phi})_i, \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\delta^V \sigma = 0, \quad (2.48)$$

onde usamos o comutador $[\tau_i, \tau_j] = 2i\epsilon_{ijk}\tau_k$.

Usando (2.11), escrevemos a corrente vetorial em termos dos campos mesônicos,

$$\mathbf{V}^\mu = \boldsymbol{\phi} \times \partial^\mu \boldsymbol{\phi}. \quad (2.49)$$

As transformações axiais são

$$\begin{aligned} \delta^A \phi_i &\leftrightarrow iG\beta_j \left[\left(-i\bar{\psi} \frac{\tau_j}{2} \gamma_5 \right) \tau_i \gamma_5 \psi + \bar{\psi} \tau_i \gamma_5 \left(-i\frac{\tau_j}{2} \gamma_5 \psi \right) \right] \\ &= G\beta_j \bar{\psi} \frac{1}{2} \{ \tau_i, \tau_j \} \psi \leftrightarrow -(\boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\sigma})_i, \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\delta^A \sigma \leftrightarrow iG\bar{\psi} \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\tau} \gamma_5 \psi \leftrightarrow \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\phi}, \quad (2.51)$$

uma vez que $\{ \tau_i, \tau_j \} = 2\delta_{ij}$. Vários autores adotam, para as transformações axiais, sinais opostos aos apresentados aqui. Os nossos coincidem, por exemplo, com os da Ref. [Cam 78].

A corrente axial é

$$\mathbf{A}^\mu = \boldsymbol{\phi} \partial^\mu \sigma - \sigma \partial^\mu \boldsymbol{\phi}. \quad (2.52)$$

O modo de realização da simetria está conectado com o vácuo da teoria e, para estudá-lo, analisamos V , o potencial de interação entre os campos. A forma $\boldsymbol{\phi}^2 + \sigma^2$ é invariante quiral, pois

$$\delta^V (\boldsymbol{\phi}^2 + \sigma^2) = \delta^A (\boldsymbol{\phi}^2 + \sigma^2) = 0. \quad (2.53)$$

Para que o potencial tenha simetria quiral e um mínimo não trivial, tomamos a forma

$$V = \frac{\lambda}{4} [(\boldsymbol{\phi}^2 + \sigma^2) - c^2]^2, \quad (2.54)$$

sendo λ e c constantes reais positivas indeterminadas. O caso $c = 0$ origina um vácuo trivial e corresponde à simetria explícita, realizada no modo de Wigner-Weyl. O modo de Nambu-Goldstone corresponde a $c \neq 0$, que consideramos aqui. Neste caso, o potencial tem a forma do chapéu mexicano da Fig. 2.1a, se considerarmos a variável $|\boldsymbol{\phi}|$ num outro eixo, perpendicular a σ . Considerando o potencial (2.54) totalmente clássico, o mínimo corresponde ao vale do chapéu, onde

$$\boldsymbol{\phi}^2 + \sigma^2 = c^2, \quad (2.55)$$

ou seja, os campos σ e $\boldsymbol{\pi}$ são restritos a uma quadri-esfera de raio igual a c . A condição acima é proveniente das condições (2.53), que são exigidas pela simetria quiral, e por isso o raio desta esfera é denominado raio quiral.

O campo ϕ é um pseudo-escalar e, portanto, o seu valor esperado no vácuo é nulo. Neste caso, a condição análoga a (2.39) é escrita como

$$\langle V|\sigma|V\rangle = v \neq 0.$$

Procuramos o valor de v minimizando a energia potencial

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} = 0. \quad (2.56)$$

Obtemos, então, a equação

$$\lambda\sigma(\sigma^2 - c^2) = 0, \quad (2.57)$$

cujas soluções são

$$\sigma = 0 \quad \text{ou} \quad \sigma^2 = c^2. \quad (2.58)$$

Como se vê na Fig. 2.1a, $\sigma = 0$ corresponde a um ponto de máximo local. Os mínimos ocorrem em $v = \pm c$, com $E_0 \doteq \langle V \rangle = 0$. Podemos redefinir σ , separando sua parte clássica,

$$\tilde{\sigma} = \sigma - v, \quad (2.59)$$

de forma que $\langle V|\tilde{\sigma}|V\rangle = 0$. Reescrevendo o potencial, em termos de $\tilde{\sigma}$, temos

$$V = \frac{\lambda}{4} (\phi^2 + \tilde{\sigma}^2)^2 \pm \lambda c \tilde{\sigma} (\phi^2 + \tilde{\sigma}^2) + \lambda c^2 \tilde{\sigma}^2, \quad (2.60)$$

sendo o sinal $\pm$ dependente da escolha $v = \pm c$. Esta expressão nos permite identificar as massas $m_{\tilde{\sigma}} = \sqrt{2\lambda c^2}$ e $m_{\pi} = 0$. Note que o potencial acima ainda é invariante quiral.

Para que o pión adquira massa, a lagrangiana deve possuir um termo de quebra explícita de simetria. Adicionando

$$V_{SB} = -\epsilon\sigma \quad (2.61)$$

ao potencial (2.54), o novo mínimo é dado pela equação

$$\sigma^3 - c^2\sigma - \frac{\epsilon}{\lambda} = 0. \quad (2.62)$$

A inclusão de V_{SB} , com $\epsilon \ll c, \lambda$, apenas deforma o gráfico da Fig. 2.1a para a Fig. 2.1b, cujos mínimos $v_{\pm}$ não são mais degenerados. As soluções aproximadas da equação acima são

$$v_{\pm} \simeq \pm c + \frac{\epsilon}{2c^2\lambda} \quad (2.63)$$

Fig. 2.1: Potencial clássico do modelo σ linear, em função de σ , (a) sem e (b) com quebra explícita de simetria quiral.

e os valores do potencial correspondentes são

$$E_{\pm} = \frac{\lambda}{4} (v_{\pm}^2 - c^2)^2 - \epsilon v_{\pm} \simeq \mp \epsilon c. \quad (2.64)$$

Portanto, o mínimo agora é único, caracterizado por

$$(\langle \sigma \rangle = v_+, \langle \phi \rangle = 0). \quad (2.65)$$

Reescrevendo o potencial (2.54) com a quebra de simetria (2.61), em termos de

$$\tilde{\sigma} = \sigma - v_+, \quad (2.66)$$

e usando a Eq. 2.62 para v_+ , temos

$$V = \frac{\lambda}{4} (\phi^2 + \tilde{\sigma}^2)^2 + \lambda v_+ \tilde{\sigma} (\phi^2 + \tilde{\sigma}^2) + \left(\lambda v_+^2 + \frac{\epsilon}{2v_+} \right) \tilde{\sigma}^2 + \frac{\epsilon}{2v_+} \phi^2 + E_+. \quad (2.67)$$

Podemos, então, identificar as novas massas dos campos,

$$m_\pi^2 = \frac{\epsilon}{v_+}, \quad (2.68)$$

$$m_\sigma^2 = 2\lambda v_+^2 + m_\pi^2. \quad (2.69)$$

No nível hadrônico, a hipótese de PCAC está associada ao decaimento do pión e é dada por

$$\partial_\mu \mathbf{A}^\mu = f_\pi m_\pi^2 \phi, \quad (2.70)$$

onde f_π é a constante de decaimento. Para satisfazer esta hipótese, o termo de quebra explícita de simetria $\mathcal{L}_{SB}$ deve ser tal que

$$\partial_\mu A_a^\mu = \frac{\partial (\delta^A \mathcal{L}_{SB})}{\partial \beta_a} = f_\pi m_\pi^2 \phi_a. \quad (2.71)$$

De (2.61), temos

$$\mathcal{L}_{SB} = \epsilon \sigma \quad (2.72)$$

e, portanto,

$$\delta^A \mathcal{L}_{SB} = \epsilon \beta \cdot \phi. \quad (2.73)$$

Comparando a expressão acima com (2.71) e usando (2.68), temos

$$\epsilon = f_\pi m_\pi^2, \quad (2.74)$$

$$v_+ = f_\pi. \quad (2.75)$$

Isto mostra que a massa do pión está associada, no modelo σ , à quebra explícita de simetria quiral, e sua constante de decaimento é igual ao valor esperado de σ no vácuo.

Os nucleons são incluídos no modelo sem problemas. Designando o campo do nucleon por N , a lagrangiana completa do modelo σ linear [Mae 96] é

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} (\partial_\mu \tilde{\sigma} \partial^\mu \tilde{\sigma} + \partial_\mu \phi \cdot \partial^\mu \phi) + V \\ & + i \bar{N} \gamma_\mu \partial^\mu N - g \bar{N} (\sigma + i \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\phi} \gamma_5) N, \end{aligned} \quad (2.76)$$

onde o campo N se transforma como (2.20) e (2.26).

2.4 Modelo σ não-linear e skyrmions

Alguns dos problemas do modelo σ linear devem-se ao fato de não se encontrar, na natureza, uma partícula que possa ser associada a este campo^{||}. Neste caso, é conveniente considerarmos apenas lagrangianas com píons e esta foi uma das motivações para a construção de modelos que implementassem a simetria quiral de maneira não-linear. Aqui denotamos o campo do pión por um novo símbolo (π), para enfatizar que se trata de uma outra versão do modelo. O novo campo do pión tem a transformação de isospin usual,

$$\delta^V \pi = \alpha \times \pi, \quad (2.77)$$

enquanto que a transformação axial leva o campo do pión numa função escalar dele mesmo,

$$\delta^A \pi_i = -\beta_j f_{ij}(\pi^2). \quad (2.78)$$

Na realidade, segundo Weinberg [Wei 68], a versão não-linear pode ser obtida a partir da linear, através de uma rotação quiral dependente do campo, que cria um acoplamento derivativo não-linear do vetor de rotação quiral.

A função f_{ij} da nova transformação axial, Eq. 2.78, é par e sua forma mais geral é

$$f_{ij}(\pi^2) = f(\pi^2) \delta_{ij} + g(\pi^2) \pi_i \pi_j, \quad (2.79)$$

onde $f(\pi^2)$ é uma função arbitrária de π^2 . Utilizando as identidades de Jacobi entre o campo do pión e as cargas, Weinberg obteve que

$$g(\pi^2) = \frac{1 + 2f(\pi^2)f'(\pi^2)}{f(\pi^2) - 2\pi^2 f'(\pi^2)}, \quad (2.80)$$

onde $f'(\pi^2) = \frac{\partial f(\pi^2)}{\partial \pi^2}$.

O modelo σ não-linear corresponde à escolha

$$f(\pi^2) = \sqrt{f_\pi^2 - \pi^2}, \quad (2.81)$$

^{||}Este problema ainda está aberto e existem sugestões que a ressonância larga $f^0(400 - 1200)$ represente o campo de σ [TR 96].

de forma que

$$g(\pi^2) = 0. \quad (2.82)$$

Neste caso, a função $f(\pi^2)$ faz o papel do campo σ antigo e escrevemos

$$f(\pi^2) \equiv \sigma(\pi^2). \quad (2.83)$$

As transformações vetoriais e axiais adquirem a mesma forma da versão linear,

$$\delta^V \pi = \alpha \times \pi, \quad (2.84)$$

$$\delta^V \sigma = 0, \quad (2.85)$$

$$\delta^A \pi = -\beta \sigma, \quad (2.86)$$

$$\delta^A \sigma = \beta \cdot \pi, \quad (2.87)$$

e por este motivo o modelo é chamado σ não-linear. A lagrangiana puramente mesônica (termo cinético e de quebra de simetria) deste modelo é formalmente idêntica à da versão linear e dada por

$$\mathcal{L}_{\sigma nl} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \partial_\mu \pi \cdot \partial^\mu \pi) + f_\pi m_\pi^2 \sigma. \quad (2.88)$$

As interações dos píons, no regime perturbativo, podem ser obtidas pela expansão da função $\sigma(\pi^2)$ em série de Taylor.

Como a função $\sigma(\pi^2)$ está relacionada com o campo do pión por

$$\sigma^2 + \pi^2 = f_\pi^2, \quad (2.89)$$

é conveniente usar a variável dinâmica U , dada por

$$U = \frac{1}{f_\pi} (\sigma + i \tau \cdot \pi). \quad (2.90)$$

Ela é uma matriz unitária que envolve de forma compacta o campo do pión π e a função σ . O vínculo (2.89) permite-nos utilizar a seguinte parametrização angular:

$$\sigma = f_\pi \cos F, \quad \pi = f_\pi \hat{\pi} \sin F, \quad (2.91)$$

e escrever

$$U(\mathbf{r}) = e^{i \tau \cdot \hat{\pi} F(\mathbf{r})}. \quad (2.92)$$

O vínculo (2.89) define o raio quiral como sendo f_π .

Em termos de U , a lagrangiana do modelo σ não-linear é escrita como

$$\mathcal{L}_{\sigma nl} = \frac{f_\pi^2}{4} \text{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) + m_\pi^2 \frac{f_\pi^2}{4} \text{Tr}(U + U^\dagger - 2). \quad (2.93)$$

É conveniente definir as seguintes formas, denominadas, respectivamente, esquerda e direita:

$$\begin{aligned} L^\mu &= U^\dagger \partial^\mu U \Rightarrow L^{\mu\dagger} = -L^\mu, \\ R^\mu &= U \partial^\mu U^\dagger \Rightarrow R^{\mu\dagger} = -R^\mu. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Substituindo a expressão de U em termos de π e σ , temos:

$$K^\mu = \frac{1}{f_\pi^2} i\tau \cdot [\pi \times \partial^\mu \pi + \lambda(\sigma \partial^\mu \pi - \pi \partial^\mu \sigma)] \doteq i\tau \cdot \mathbf{K}^\mu, \quad (2.95)$$

de modo que

$$\begin{aligned} \lambda = +1 &\Rightarrow K^\mu = L^\mu, \\ \lambda = -1 &\Rightarrow K^\mu = R^\mu. \end{aligned} \quad (2.96)$$

É fácil verificar que

$$\begin{aligned} \delta^V \mathbf{K}^\mu &= \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{K}^\mu, \\ \delta^A \mathbf{K}^\mu &= -\lambda \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{K}^\mu. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Em termos da forma esquerda ou direita, o termo de energia cinética do modelo é dado por

$$\mathcal{L}_2 = \frac{f_\pi^2}{2} \mathbf{K}_\mu \cdot \mathbf{K}^\mu. \quad (2.98)$$

O modelo σ não-linear é utilizado na grande maioria dos cálculos de interações fortes em baixas energias. A teoria de perturbação quiral, por exemplo, explora as interações entre píons, provenientes da expansão de $\sigma(\pi^2)$, em potências do campo do pión, e de *loops* piônicos.

O modelo de Skyrme é baseado em soluções solitônicas da lagrangiana não-linear, à qual Skyrme adicionou um termo com quatro derivadas de U , para obter soluções de tamanho finito. Estas soluções são identificadas a nucleons e deltas. Trata-se de um modelo essencialmente não perturbativo, onde os píons são considerados campos clássicos.

Capítulo 3

O modelo de Skyrme

O modelo de Skyrme foi publicado no início da década de 60 [Sky 61, Sky 62], mas foram os trabalhos de 't Hooft, em 1974 [Hoo 74], e Witten, em 1979 [Wit 79], que chamaram a atenção sobre ele. Estes trabalhos sugerem que, no limite em que o número de cores (N_c) é grande, é possível uma expansão perturbativa no parâmetro $1/N_c$, e a Cromodinâmica Quântica (QCD) mostra-se uma teoria local de mésons (e *glueballs*) fracamente interagentes entre si [Bha 88]. Neste contexto, o modelo de Skyrme pode ser considerado como uma tentativa de se utilizar a QCD para descrever bárions, que emergem como sólitons topológicos, a partir de uma lagrangiana mesônica com simetria quiral.

3.1 A corrente bariônica

O modelo de Skyrme apresenta uma corrente conservada B^μ , identificada à corrente bariônica:

$$B^\mu = -\frac{1}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \text{Tr}[L_\alpha L_\beta L_\gamma], \quad (3.1)$$

onde $\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}$ é o tensor totalmente antissimétrico, com $\epsilon^{0123} = 1$.

Pode-se mostrar que $\partial_\mu B^\mu = 0$, utilizando-se a antissimetria do tensor e a identidade de Maurer-Cartan*, $\partial_\mu L_\alpha - \partial_\alpha L_\mu = [L_\alpha, L_\mu]$. É importante notar que a conservação de B^μ não depende da forma da lagrangiana, decorrendo apenas da estrutura interna da corrente.

*Esta identidade decorre diretamente da definição de L_μ (Eq. 2.94) e da unitariedade de U .

Uma demonstração alternativa deste resultado pode ser obtida escrevendo a corrente bariônica em termos do campo π e da função σ :

$$B^\mu = -\frac{1}{12\pi^2 f_\pi^4} \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \{ \sigma (\partial_\alpha \pi \times \partial_\beta \pi) \cdot \partial_\gamma \pi - 3\pi \cdot (\partial_\alpha \pi \times \partial_\beta \pi) \partial_\gamma \sigma \}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \partial_\mu B^\mu &= -\frac{1}{12\pi^2 f_\pi^4} \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \{ \partial_\mu \sigma (\partial_\alpha \pi \times \partial_\beta \pi) \cdot \partial_\gamma \pi - 3 \partial_\mu \pi \cdot (\partial_\alpha \pi \times \partial_\beta \pi) \partial_\gamma \sigma \} \\ &= -\frac{1}{3\pi^2 f_\pi^4} \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \partial_\mu \sigma \partial_\alpha \pi \cdot (\partial_\beta \pi \times \partial_\gamma \pi). \end{aligned}$$

A condição $\partial_\mu \sigma = -\frac{1}{\sigma} \pi_d \partial_\mu \pi_d$ permite escrever

$$\partial \cdot B = -\frac{1}{3\pi^2 f_\pi^4} \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \epsilon_{abc} \left(-\frac{1}{\sigma}\right) \pi_d \partial_\mu \pi_d \partial_\alpha \pi_a \partial_\beta \pi_b \partial_\gamma \pi_c.$$

Como só existem três tipos de píons, o índice d é necessariamente igual a a , b ou c , e o termo das derivadas é simétrico pela troca de μ por um dos outros índices gregos, fazendo com que a divergência se anule. Assim, observamos que a causa da conservação da corrente é geométrica, pois existem quatro graus de liberdade no espaço-tempo e apenas três no espaço de isospin, uma vez que σ não é um grau de liberdade independente.

3.2 A lagrangiana de Skyrme

A lagrangiana de Skyrme é uma lagrangiana clássica do tipo σ não-linear, dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_\sigma + \mathcal{L}_4 \\ &= \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_{SB} \\ &= \frac{f_\pi^2}{4} \text{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) + \frac{1}{32e^2} \text{Tr}[\partial_\mu U U^\dagger, \partial_\nu U U^\dagger]^2 + m_\pi^2 \frac{f_\pi^2}{4} \text{Tr}(U + U^\dagger - 2), \end{aligned} \quad (3.2)$$

sendo $\mathcal{L}_2$ o termo cinético, $\mathcal{L}_4$, o termo de estabilização de curto alcance, e $\mathcal{L}_{SB}$, o termo de quebra de simetria, que possibilita uma massa não-nula para os píons. A soma $\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_{SB}$, denominada $\mathcal{L}_\sigma$, designa a contribuição do modelo σ não-linear propriamente dito, dado pela Eq. 2.93. O termo $\mathcal{L}_4$, com quatro derivadas do campo U , foi adicionado por Skyrme para garantir soluções de tamanho finito.

Esta lagrangiana pode ser reescrita em termos da forma L^μ (ou R^μ) como

$$\mathcal{L} = \frac{f_\pi^2}{2} \mathbf{L}_\mu \cdot \mathbf{L}^\mu + \frac{1}{4e^2} \{ \mathbf{L}_\mu \cdot \mathbf{L}_\nu \mathbf{L}^\mu \cdot \mathbf{L}^\nu - \mathbf{L}_\mu \cdot \mathbf{L}^\mu \mathbf{L}_\nu \cdot \mathbf{L}^\nu \} + m_\pi^2 f_\pi (\sigma - f_\pi) \quad (3.3)$$

e, ainda, em termos de π e σ , como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \partial_\mu \pi \cdot \partial^\mu \pi) + m_\pi^2 f_\pi (\sigma - f_\pi) \\ & + \frac{1}{4e^2 f_\pi^4} [(\partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma + \partial_\mu \pi \cdot \partial_\nu \pi) (\partial^\mu \sigma \partial^\nu \sigma + \partial^\mu \pi \cdot \partial^\nu \pi) \\ & - (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \partial_\mu \pi \cdot \partial^\mu \pi) (\partial_\nu \sigma \partial^\nu \sigma + \partial_\nu \pi \cdot \partial^\nu \pi)]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

No modelo de Skyrme, as soluções são baseadas em configurações estáticas do campo U . Desprezando-se as derivadas temporais, é obtida a lagrangiana estática:

$$\mathcal{L}_e = -\frac{f_\pi^2}{2} \mathbf{L}_i \cdot \mathbf{L}_i - \frac{1}{4e^2} \{ \mathbf{L}_i \cdot \mathbf{L}_i \mathbf{L}_j \cdot \mathbf{L}_j - \mathbf{L}_i \cdot \mathbf{L}_j \mathbf{L}_i \cdot \mathbf{L}_j \} + m_\pi^2 f_\pi (\sigma - f_\pi), \quad (3.5)$$

ou

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_e = & -\frac{1}{2} (\partial_i \sigma \partial_i \sigma + \partial_i \pi \cdot \partial_i \pi) + m_\pi^2 f_\pi (\sigma - f_\pi) \\ & - \frac{1}{4e^2 f_\pi^4} [(\partial_i \sigma \partial_i \sigma + \partial_i \pi \cdot \partial_i \pi) (\partial_j \sigma \partial_j \sigma + \partial_j \pi \cdot \partial_j \pi) \\ & - (\partial_i \sigma \partial_j \sigma + \partial_i \pi \cdot \partial_j \pi) (\partial_i \sigma \partial_j \sigma + \partial_i \pi \cdot \partial_j \pi)]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

3.3 Soluções solitônicas e o ouriço

Skyrme fez a hipótese de que a direção do isospin num determinado ponto $\mathbf{r}$ fosse paralela à coordenada desse ponto,

$$\hat{\pi} = \hat{\mathbf{r}},$$

e supôs que F , definido pela parametrização (2.91), fosse uma função do módulo de $\mathbf{r}$, apenas. Este é o chamado ouriço (*hedgehog ansatz*).

Utilizando esta hipótese em (3.5) e as abreviações $F' = F'(r)$, $c = \cos F$, $s = \sin F$ e $t = \frac{\sin F}{r}$, obtemos a lagrangiana estática com o ouriço:

$$\mathcal{L}_e = -\frac{f_\pi^2}{2} (F'^2 + 2t^2) - \frac{1}{2e^2} t^2 (2F'^2 + t^2) + m_\pi^2 f_\pi^2 (c - 1). \quad (3.7)$$

Utilizando, ainda, a variável adimensional† $x = 2ef_\pi r$, obtemos

$$\mathcal{L} = -4e^2 f_\pi^4 \left\{ \frac{1}{2} F'^2 + t^2 + 4t^2 F'^2 + 2t^4 - \frac{m_\pi^2}{4e^2 f_\pi^2} (c - 1) \right\},$$

sendo, agora, $F = F(x)$. A lagrangiana do problema é

$$L = \int d^3r \mathcal{L}(x) = -\frac{f_\pi}{2e} 4\pi \int dx \mathcal{L},$$

sendo $\mathcal{L}$ a chamada densidade unidimensional de lagrangiana, dada por

$$\mathcal{L} = x^2 \left\{ \frac{1}{2} F'^2 + t^2 + 4t^2 F'^2 + 2t^4 - \frac{m_\pi^2}{4e^2 f_\pi^2} (c - 1) \right\}. \quad (3.8)$$

A equação de Euler-Lagrange para $\mathcal{L}(x)$ é

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F'} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F} = 0,$$

de onde se obtém

$$\left(\frac{x^2}{4} + 2s^2 \right) F'' + \frac{x F'}{2} - \frac{cs}{2} + 2cs F'^2 - 2cst^2 - \frac{m_\pi^2}{16e^2 f_\pi^2} x^2 s = 0. \quad (3.9)$$

As condições de contorno para a função F são obtidas impondo-se o confinamento de energia ($U(r \rightarrow \infty) = 1$) e que U seja definido de maneira única na origem, o que leva a

$$F(r \rightarrow \infty) = n\pi,$$

$$F(r \rightarrow 0) = m\pi,$$

m, n inteiros. Pode-se mostrar que a carga topológica do sólito, que é, neste caso, associada ao número bariônico, é a diferença entre as condições de contorno na origem e no infinito,

$$B = m - n.$$

Tomando $n = 0$, a condição de contorno para o nucleon ($B = 1$) na origem é

$$F(0) = \pi.$$

A equação diferencial (3.9) deve ser resolvida numericamente. Do ponto de vista técnico, trata-se de uma equação de segunda ordem, vinculada em dois pontos diferentes, na origem e no infinito.

†Utilizamos esta forma para a variável adimensional, com o fator 2, por ser comum na literatura.

O comportamento assintótico de F pode ser calculado analiticamente, supondo que F e suas derivadas sejam pequenas no infinito. No caso de píons de massa nula, obtém-se

$$F_\infty = \frac{A}{r^2}$$

e, no caso de píons massivos,

$$F_\infty = \alpha \left(1 + \frac{1}{m_\pi r}\right) \frac{e^{-m_\pi r}}{m_\pi r}, \quad (3.10)$$

$$F'_\infty = -\alpha \left(1 + \frac{2}{m_\pi r} + \frac{2}{m_\pi^2 r^2}\right) \frac{e^{-m_\pi r}}{r}, \quad (3.11)$$

onde A e α são constantes arbitrárias, relacionadas entre si por $\alpha = Am_\pi^2$. A constante α é adimensional.

Para determinar F , seguimos o método descrito por Adkins [Adk 87], que consiste em resolver numericamente a equação (3.9), com a condição de contorno para F na origem, atribuindo valores arbitrários para sua derivada neste ponto, até que o comportamento para valores grandes de r seja o do limite assintótico. Nesse limite, as razões entre a solução encontrada e F_∞ , e entre as respectivas derivadas, determinam a constante inicialmente arbitrária α ou, equivalentemente, A . Devido a imprecisões numéricas, a solução só converge até um certo valor de r , a partir do qual os valores de F e F' passam a ser expressos pelas respectivas formas assintóticas. A convergência no caso de píons não massivos é obtida mais facilmente. Nós a obtivemos até $r = 8.0$ fm ($x = 30$), sendo que a constante $A = 0.60767$ fm² tem imprecisão numérica de 0.005 %. No caso de píons massivos, a convergência foi até $r = 4.8$ fm ($x = 18$), e $\alpha = 0.27373$ (ou $A = 0.55937$ fm²) tem imprecisão de 0.02 %. Os resultados obtidos para as funções de perfil, no caso de píons sem massa e massivos, e para as suas derivadas, estão apresentados nas Figs. 3.1 e 3.2, respectivamente. Os parâmetros utilizados foram $f_\pi = 93$ MeV, $e = 4.0$ e $m_\pi = 138.039$ MeV, e o fator de conversão $\hbar c = 197.3271$ MeV fm. Estas soluções representam a configuração de energia mínima do *skyrmion* estático, geralmente representado por

$$U_e = e^{i\mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{r}} F(r)}, \quad (3.12)$$

sendo que $\hat{\mathbf{r}}$ aparece devido ao ouriço e $F(r)$ é a solução obtida.

Fig. 3.1: Solução da equação diferencial de Skyrme para $B = 1$: função de perfil $F(x)$, com $m_\pi = 0$ (linha contínua) e $m_\pi = 138.039$ MeV (tracejado); $x = 2ef_\pi r$.

Fig. 3.2: Solução da equação diferencial de Skyrme para $B = 1$: derivada da função de perfil, $F'(x)$, com $m_\pi = 0$ (linha contínua) e $m_\pi = 138.039$ MeV (tracejado); $x = 2ef_\pi r$.

3.4 A quantização do sóliton

O sóliton obtido na seção anterior é um objeto clássico e, portanto, não tem spin ou isospin. Para incorporar estas propriedades ao sóliton, é preciso quantizá-lo, o que é feito através de coordenadas coletivas, dependentes do tempo. Para tanto, emprega-se um operador unitário $A(t)$, tal que

$$U = A(t)U_e A^\dagger(t), \quad (3.13)$$

e cuja forma mais geral é

$$A(t) = a_0(t) + i\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{a}(t),$$

sendo que a condição de unitariedade corresponde a $a_0^2 + \mathbf{a}^2 = 1$. Pode-se parametrizar A da seguinte forma,

$$\begin{aligned} a_0 &= \cos \alpha, & 0 \leq \alpha \leq \pi, \\ a_z &= \sin \alpha \cos \theta, & 0 \leq \theta \leq \pi, \\ a_x &= \sin \alpha \sin \theta \cos \phi, & 0 \leq \phi \leq 2\pi, \\ a_y &= \sin \alpha \sin \theta \sin \phi. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Utilizando estas definições, podemos escrever os campos com dependência temporal como

$$U^q = c + i\tau_\alpha D_{\alpha i} \hat{r}_i s, \quad (3.15)$$

$$\pi_\alpha^q = D_{\alpha i} \pi_i, \quad (3.16)$$

$$\sigma^q = \sigma, \quad (3.17)$$

$$K_{\alpha j}^q = D_{\alpha i} K_{ij}, \quad (3.18)$$

onde o rótulo q indica os campos rodados e $\hat{r}_i$ é a componente i do versor $\hat{\mathbf{r}}$. A matriz D é responsável pela dependência angular e temporal dos *skyrmions*, representando a sua rotação. Expressando os parâmetros de rotação do *skyrmion* a_0 e $\mathbf{a}$ em termos dos ângulos de Euler, verifica-se que a matriz D é a própria matriz de rotação de um corpo extenso [Gol 50]. Em termos das coordenadas coletivas,

$$D_{\alpha i} = 2 \left[\epsilon_{\alpha ij} a_0 a_j + a_\alpha a_i + \left(\frac{1}{2} - \mathbf{a}^2 \right) \delta_{\alpha i} \right].$$

Com a rotação, e a substituição dos campos rodados em (3.5), a densidade de lagrangiana pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_e + \left[\frac{f_\pi^2}{2} + \frac{1}{2e^2} (t^2 + F'^2) \right] s^2 \dot{D}_{\alpha j} \dot{D}_{\alpha k} \hat{r}_j \hat{r}_k, \quad (3.19)$$

sendo $\mathcal{L}_e$ a densidade de lagrangiana estática. Utilizando as coordenadas coletivas, e após algumas manipulações algébricas, obtém-se

$$L = L_{estática} + L_{temporal} = -M + 2I (\dot{a}_0^2 + \dot{\mathbf{a}}^2), \quad (3.20)$$

com

$$M = \frac{2\pi f_\pi}{e} \int_0^\infty dx \left\{ x^2 \left[\frac{1}{2} F'^2 + t^2 + 4t^2 F'^2 + 2t^4 + \frac{m_\pi^2}{4e^2 f_\pi^2} (1 - c) \right] \right\}, \quad (3.21)$$

a massa estática, e

$$I = \frac{1}{2e^3 f_\pi} \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty dx \left\{ x^2 \left[\frac{1}{2} + 2(t^2 + F'^2) \right] s^2 \right\}, \quad (3.22)$$

o momento de inércia do *skyrmion*.

O resultado (3.20) permite escrever o momento canonicamente conjugado à coordenada a_α como

$$\pi_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_\alpha} = 4I \dot{a}_\alpha.$$

Quantizar o *skyrmion* significa impor a relação de comutação

$$[a_\alpha, \pi_\beta] = i\delta_{\alpha\beta},$$

o que corresponde a fazer

$$\pi_\alpha = -i \frac{\partial}{\partial a_\alpha}.$$

A hamiltoniana é

$$H = \sum_\alpha \pi_\alpha \dot{a}_\alpha - L = M + \frac{1}{8I} \sum_\alpha \pi_\alpha^2, \quad (3.23)$$

com

$$\sum_\alpha \pi_\alpha^2 = - \left(\frac{\partial^2}{\partial a_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial a_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial a_y^2} + \frac{\partial^2}{\partial a_z^2} \right).$$

Com o vínculo $a_0^2 + \mathbf{a}^2 = 1$, a expressão entre parênteses é o laplaciano em uma superfície esférica tridimensional, S^3 [ANW 83]. Os operadores de momento angular ($\mathbf{J}$) e isospin ($\mathbf{T}$) são dados por

$$\mathbf{J}^2 = \mathbf{T}^2 = -\frac{1}{4} \sum_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial a_\alpha} \right)^2, \quad (3.24)$$

com

$$J_i = \frac{i}{2} \left\{ a_i \frac{\partial}{\partial a_0} - a_0 \frac{\partial}{\partial a_i} - \epsilon_{ijk} a_j \frac{\partial}{\partial a_k} \right\}, \quad (3.25)$$

$$T_i = \frac{i}{2} \left\{ a_0 \frac{\partial}{\partial a_i} - a_i \frac{\partial}{\partial a_0} - \epsilon_{ijk} a_j \frac{\partial}{\partial a_k} \right\}, \quad (3.26)$$

sendo que $J_i = -D_{ai}T_a$. A hamiltoniana é, pois,

$$H = M + \frac{\mathbf{J}^2}{2I} = M + \frac{\mathbf{T}^2}{2I}. \quad (3.27)$$

Os auto-estados têm $\mathbf{J}^2 = \mathbf{T}^2$, com autovalores

$$J(J+1) = T(T+1).$$

As massas do nucleon e da delta, correspondentes a $T = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$, respectivamente, são

$$M_N = M + \frac{3}{8I}, \quad (3.28)$$

$$M_\Delta = M + \frac{15}{8I}. \quad (3.29)$$

Os auto-estados são construídos em analogia aos harmônicos esféricos e têm a forma geral

$$(a_\alpha + ia_\beta)^l,$$

com $l = 1$ para nucleons e $l = 3$ para deltas. A dedução detalhada das expressões desta seção pode ser encontrada em [Bat 94], ou em [ANW 83, AN 84]. As funções de onda normalizadas para nucleons e deltas estão listadas no apêndice C.

3.5 Cálculo das propriedades estáticas do skyrmion

Reescrevemos, abaixo, as expressões da massa estática M (3.21) e do momento de inércia I (3.22) do *skyrmion* em termos da coordenada radial r , ao invés da variável adimensional x :

$$M = \int_0^\infty dr \left\{ 4\pi r^2 \left[\frac{f_\pi^2}{2} (F'^2 + 2t^2) + \frac{t^2}{2e^2} (2F'^2 + t^2) + m_\pi^2 f_\pi^2 (1 - c) \right] \right\}, \quad (3.30)$$

$$I = \int_0^\infty dr \left\{ \frac{8\pi}{3} \left[f_\pi^2 r^2 s^2 + \frac{1}{e^2} r^2 s^2 (F'^2 + t^2) \right] \right\}. \quad (3.31)$$

Identificamos os integrandos destas expressões como sendo, respectivamente, as densidades radiais de massa estática, $\rho(r)$, e de momento de inércia, $\lambda(r)$. $\rho(r)$ é composto por três termos, provenientes de $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_4$ e $\mathcal{L}_{SB}$, respectivamente; $\lambda(r)$ recebe contribuições de $\mathcal{L}_2$ e $\mathcal{L}_4$, apenas. O momento de inércia é proveniente da parte temporal da lagrangiana. Como σ não é rodado por $A(t)$, $\mathcal{L}_{SB}$ não contribui para I .

As Figs. 3.3 e 3.4 mostram, respectivamente, as densidades radiais de massa e de momento de inércia, totais e parciais, relativas a $\mathcal{L}_\sigma$ e $\mathcal{L}_4$, obtidas pela substituição da solução F da equação diferencial (seção 3.3), nos integrandos das expressões (3.30) e (3.31).

Fig. 3.3: Densidade radial de massa estática do *skyrmion*. Densidade total (linha contínua) e contribuições parciais de $\mathcal{L}_\sigma$ (tracejado) e $\mathcal{L}_4$ (pontilhado).

Além da densidade de massa estática, podemos definir uma densidade de massa rotacional do *skyrmion*, dependente do momento angular, $\omega_J(r)$, multiplicando e dividindo o termo cinético da hamiltoniana (3.27) por I . Obtemos

$$\omega_J(r) = \frac{J(J+1)}{2I^2} \lambda(r). \quad (3.32)$$

A contribuição desta densidade na massa total dos nucleons e deltas pode ser observada na Fig. 3.5, que apresenta a densidade de massa estática, e a soma desta com as densidades $\omega_{\frac{1}{2}}$ e $\omega_{\frac{3}{2}}$, respectivamente.

Fig. 3.4: Densidade radial de momento de inércia (massa de rotação) do *skyrmion*. Densidade total (linha contínua) e contribuições parciais de $\mathcal{L}_\sigma$ (tracejado) e $\mathcal{L}_4$ (pontilhado); os valores foram multiplicados por 10^4 .

Fig. 3.5: Densidades de massa do nucleon (tracejado) e da delta (pontilhado), comparadas à densidade de massa estática (linha contínua).

Utilizados os valores fenomenológicos para f_π e e , apresentados anteriormente, os valores obtidos para as integrais (3.30) e (3.31) são, respectivamente,

$$M = 1756.5 \text{ MeV},$$
$$I = (166.3 \text{ MeV})^{-1},$$

que fornecem os seguintes valores para as massas dos bárions:

$$M_N = 1818.9 \text{ MeV},$$
$$M_\Delta = 2068.4 \text{ MeV}.$$

Capítulo 4

A interação NN

4.1 Introdução

A interação nucleon-nucleon (NN) é o elemento básico da física nuclear. Do ponto de vista experimental, ela é conhecida através das seções de choque e defasagens do espalhamento NN, e dos observáveis estáticos do dêuteron. A partir destes dados e, também, de experimentos com núcleos maiores, foram determinadas as principais características fenomenológicas da interação NN, resumidas a seguir [Mac 89].

1. A interação é de curto alcance. Em núcleos grandes, isto dá origem à saturação nuclear. A densidade nuclear e a energia de ligação por nucleon são praticamente independentes do número de nucleons, pois cada nucleon interage efetivamente apenas com os seus vizinhos mais próximos.
2. A interação é bastante dependente de spin.
3. Nas ondas S , livres da barreira centrífuga, observa-se que, a baixas energias, as defasagens são grandes e positivas*, havendo uma mudança de comportamento para energias do laboratório entre 200 e 300 MeV, em que as defasagens trocam de sinal. Esta é a evidência de que, a distâncias pequenas, da ordem de 1 fm, o potencial é repulsivo, enquanto que, para distâncias grandes e intermediárias, ele é atrativo.

*Na análise de defasagens, valores positivos indicam atração, enquanto valores negativos, repulsão.

4. O dêuteron possui um momento de quadrupolo não-nulo, que indica uma mistura de ondas S ($l = 0$) e D ($l = 2$), sugerindo a presença de uma força tensorial.
5. O potencial tem uma componente de acoplamento spin-órbita, que manifesta-se na separação entre as diferentes ondas P . É uma componente de curto alcance, uma vez que ondas F , por exemplo, já não apresentam este efeito.
6. Os dados experimentais dependem, em geral, do isospin total, mas não da sua orientação. Em particular, subtraindo-se a interação eletromagnética, as interações nn e pp são equivalentes.[†]

Do ponto de vista teórico, procura-se escrever um potencial que reproduza estas características ou forneça, em cálculos, estes resultados. Começa-se por separar o potencial NN nos vários canais de spin (S) e isospin (T). Cada um destes espaços tem uma estrutura $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, que resulta num canal singlete (S ou $T = 0$) e num tripleto (S ou $T = 1$). São, portanto, quatro canais distintos, quando combinados S e T . O potencial pode ser escrito em termos dos operadores de projeção destes estados, P_σ^α e P_τ^β , com $\alpha, \beta = 0, 1$:

$$V_{NN} = V^{00} P_\sigma^0 P_\tau^0 + V^{01} P_\sigma^0 P_\tau^1 + V^{10} P_\sigma^1 P_\tau^0 + V^{11} P_\sigma^1 P_\tau^1. \quad (4.1)$$

No espaço de configuração, cada termo $V^{\alpha\beta}$ pode ser expandido numa base de operadores que envolvem combinações da coordenada relativa $\mathbf{r}$, do momento $\mathbf{p}$, do momento angular orbital $\mathbf{L}$ e do spin $\mathbf{S}$, combinações estas invariantes por rotações e por transformações de paridade. Em termos dos operadores básicos, cada termo do potencial pode ser escrito da seguinte maneira:

$$V^{\alpha\beta} = V_C^{\alpha\beta} O_C + V_{L2}^{\alpha\beta} O_{L2} + V_{LS}^{\alpha\beta} O_{LS} + V_Q^{\alpha\beta} O_Q + V_T^{\alpha\beta} O_T, \quad (4.2)$$

onde

$$O_C = 1, \quad (4.3)$$

$$O_{L2} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}, \quad (4.4)$$

[†]Existem estudos da violação desta simetria [LT 98], a altíssimas energias, que fogem do âmbito deste trabalho.

$$O_{LS} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{L} \cdot \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)}), \quad (4.5)$$

$$O_Q \equiv Q = 3 \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{L} \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot \mathbf{L} - \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)} L^2, \quad (4.6)$$

$$O_T \equiv S_{12} = 3 \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \hat{\mathbf{r}} \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot \hat{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \quad (4.7)$$

são os operadores central[†], de momento angular orbital, spin-órbita, spin-órbita quadrático e tensor, respectivamente. Convém observar que $V_T^{0\beta} (\beta = 0, 1) = 0$, pois $S_{12} P_\sigma^0 = 0$.

Existem, ainda, outras escolhas possíveis para os operadores da base. Por exemplo, ao invés de Q , o potencial dTRS [TRS 75] utiliza outro operador quadrático spin-órbita, dado por $L_{12} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{L} \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{L} + \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{L} \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{L})$, enquanto que o potencial v_{14} de Argonne [WSA 84] utiliza $(\mathbf{L} \cdot \mathbf{S})^2$. De qualquer maneira, os operadores mais relevantes a baixas energias são O_C e O_T , seguidos por O_{LS} . As componentes dos outros operadores são pequenas para energias não relativísticas, por serem eles quadráticos no momento $\mathbf{p}$.

Para efeito de cálculos teóricos, particularmente os do presente trabalho, convém relacionar os operadores de projeção às matrizes de Pauli, de spin ($\boldsymbol{\sigma}$) ou isospin ($\boldsymbol{\tau}$). As matrizes $\boldsymbol{\sigma}$ estão relacionadas aos operadores de projeção de spin por

$$P_\sigma^0 = \frac{1}{4} [1 - \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)}], \quad 1 = P_\sigma^0 + P_\sigma^1, \quad (4.8)$$

$$P_\sigma^1 = \frac{1}{4} [3 + \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)}], \quad \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)} = -3P_\sigma^0 + P_\sigma^1. \quad (4.9)$$

As expressões para os operadores de isospin são idênticas, bastando substituir σ por τ .

Reescrevemos a expressão para o potencial genérico em termos dessas matrizes, obtendo

$$V_{NN} = V^S + \boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)} V^V, \quad (4.10)$$

com

$$V^{S,V} = V_C^{S,V} I + V_{SS}^{S,V} \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)} + V_{L^2}^{S,V} L^2 + V_{L^2 SS}^{S,V} L^2 \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)} + V_{LS}^{S,V} O_{LS} + V_Q^{S,V} O_Q + V_T^{S,V} O_T. \quad (4.11)$$

A relação entre as componentes do potencial em termos dos projetores de spin e isospin $V^{a\beta}$ e as escritas em termos das matrizes de Pauli $V^{S,V}$ são explicitadas no Apêndice B.

[†]Este operador indica, mais propriamente, a parte escalar-isoescalar do potencial; entretanto, por estar associado à simetria esférica do nucleon, é tradicionalmente chamado de central.

A tarefa de dar conteúdo a cada um dos termos do potencial, de modo a reproduzir as várias defasagens do espalhamento NN e as propriedades do dêuteron, não é fácil. Na década de 30, Yukawa [Yuk 35] propôs que a interação nuclear fosse devida à troca de uma partícula de massa aproximadamente 100 MeV, combinando a analogia com a interação eletromagnética, que é mediada por fótons, com o fato de a força nuclear ter alcance curto. A diversidade de canais da interação obrigou, entretanto, que se utilizassem várias funções de Yukawa, além de *cutoffs* para distâncias curtas. Estas funções eram escolhidas em conformidade com as características gerais da força. Eram utilizados muitos parâmetros livres, ajustados para a reprodução dos resultados experimentais.

O trabalho de Taketani, Nakamura e Sasaki [TNS 51] estabeleceu a sistemática de trabalho que norteia até hoje os esforços na determinação do potencial NN em bases teóricas mais sólidas. Segundo este grupo, o potencial pode ser dividido em regiões físicas distintas, que podem (e devem!) ser tratadas independentemente. A parte de longo alcance ($r > 2$ fm) é devida ao OPEP e não há ambigüidades teóricas na sua determinação. A região intermediária ($1 \text{ fm} < r < 2 \text{ fm}$) é essencialmente atrativa, e devida a trocas de dois píons e outros mésons mais pesados. Finalmente, o caroço duro (repulsivo) de curto alcance, onde começa a haver interpenetração entre os nucleons, é tratado fenomenologicamente.

O pión foi descoberto em 1947 [LOP 47, GL 48]. Nos anos 60, a parte de longo alcance foi estabelecida teoricamente, como sendo devida, microscopicamente, à troca de um pión virtual entre dois nucleons [HJ 62, HNT 65, Las+62]. A amplitude deste processo é calculada em teoria de campos a partir do diagrama de Feynman correspondente, e é feita uma redução não relativística para trazer o resultado para o espaço de configuração, na forma de um potencial [Rob 87]. Este é o chamado OPEP (*one pion exchange potential*), incluído em todos os potenciais a partir de então. A expressão do OPEP puro é dada por

$$V_{\pi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{3} \left(\frac{gm_{\pi}}{2M} \right)^2 \frac{m_{\pi}}{4\pi} \boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)} \left\{ \left[U(r) - \frac{4\pi}{m_{\pi}^3} \delta^3(\mathbf{r}) \right] \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)} + S_{12} U_2(r) \right\}, \quad (4.12)$$

onde g é a constante de acoplamento do vértice pión-nucleon, M é a massa do nucleon, m_{π} é a massa do pión,

$$U(r) = \frac{e^{-m_{\pi}r}}{m_{\pi}r}, \quad (4.13)$$

$$U_2(r) = \left(1 + \frac{3}{m_\pi r} + \frac{3}{m_\pi^2 r^2}\right) \frac{e^{-m_\pi r}}{m_\pi r}. \quad (4.14)$$

Com o OPEP, consegue-se reproduzir quase a totalidade das defasagens de $l \geq 5$ e as propriedades assintóticas do dêuteron. Em vários canais da reação NN, a contribuição do OPEP é dominante, possibilitando que várias ondas não precisem de parâmetros ajustáveis [BR 94].

A partir da inclusão do OPEP, abriram-se duas linhas na busca de uma descrição satisfatória da interação NN. Uma delas tinha o compromisso de reproduzir com exatidão os dados experimentais. Utilizando ao mesmo tempo o OPEP e funções fenomenológicas, construíram-se potenciais que reproduzem bem os dados experimentais, com o ajuste de um número relativamente reduzido de parâmetros, limitados às partes de médio e curto alcance. Estes potenciais, bastante fenomenológicos, são úteis para cálculos de estrutura nuclear, embora não tenham bases teóricas claras. Exemplos deste tipo de potencial são o SSC (*super soft core*) [TS 73], o dTRS [TRS 75] e o de Argonne [WSA 84].

A outra linha segue a idéia proposta por Taketani e colaboradores, tentando estabelecer as bases teóricas das outras camadas do potencial, que não a do OPEP. Neste caso, os problemas teóricos começam logo. Avançando da parte de longo alcance para a região intermediária, a complexidade aumenta rapidamente, e existem ambigüidades teóricas até os dias atuais. O problema principal desta região do potencial ($1 \text{ fm} < r < 2 \text{ fm}$) é a obtenção da atração no canal escalar-isoescalar, ou central.

Existem, hoje, basicamente, duas maneiras principais de abordar o problema. Uma delas é a do grupo de Paris [Lac+80], que utilizou, através de relações de dispersão, dados experimentais dos espalhamentos πN e $\pi\pi$ para o cálculo da troca de dois píons. Isto elimina algumas ambigüidades, pois leva em conta todos os processos dinâmicos entre os píons e o nucleon, nos vértices considerados, tornando uma boa parte dos cálculos independente de modelo. Em contrapartida, não fornece a compreensão microscópica destes processos.

A abordagem alternativa trata a região de médio alcance do potencial através da teoria de campos. Este método utiliza lagrangianas efetivas, que fornecem os vértices para o cálculo

de diagramas de trocas de dois píons, com a inclusão de estados intermediários Δ , e de trocas de mésons mais pesados, tais como ρ e ω .

O tratamento do problema no contexto da teoria de campos subdivide-se, ainda, em duas linhas. Uma delas, representada principalmente pelos grupos de Bonn [MHE 87] e de Nijmegen [NRS 78, Sto+94], segue basicamente a fórmula do OPEP, estendendo os cálculos para a troca dos outros mésons mais pesados. Estes potenciais são chamados, tradicionalmente, pelo nome de *one boson exchange potential* (OBEP). Nos primeiros trabalhos nesta linha, outros grupos obtinham a atração no canal central com um méson denominado σ , com massa 400-800 MeV, que não é observado experimentalmente [Mac 89]. O grupo de Bonn avançou neste problema, substituindo a troca deste méson fictício pelo cálculo explícito dos diagramas de troca de dois píons em onda S considerados mais relevantes. O conjunto de tais diagramas, agora definidos de maneira precisa, produzem os efeitos antes atribuídos ao méson escalar fictício.

Foi discutido no capítulo 2 que a QCD apresenta simetria quiral aproximada. No nível hadrônico, os graus de liberdade não são quarks e glúons, mas mésons e bárions. Ainda assim, como reflexo da teoria fundamental, a dinâmica dos sistemas compostos incorpora a simetria quiral, que é espontaneamente quebrada a baixas energias. Por isso, os bósons de Goldstone, representados pelos mésons pseudo-escalares, dominam as interações, neste regime.

A teoria de perturbação quiral (CHPT) [GL 84][§] apresenta-se como uma teoria efetiva consistente da QCD no regime de baixas energias. Ela propõe, basicamente, uma expansão nos quadrimomentos dos píons, que são pequenos, relativamente à escala hadrônica $M_H \simeq 1$ GeV. Apesar de funcionar muito bem no setor piônico, há dificuldades sérias na aplicação da CHPT a sistemas envolvendo nucleons, pois sua massa é da ordem de M_H . Assim, apenas os trimomentos dos nucleons podem ser tratados perturbativamente. Isto é feito na formulação de bárion pesado, que é possível graças a uma redução não relativística e, portanto, esta aproximação só é válida a energias muito pequenas. Neste contexto, o estudo do potencial NN em teoria de campos pode ser feito com o auxílio de lagrangianas efetivas que levam em conta a simetria quiral. Ordoñez, Ray e Van Kolck [ORK 96] foram os pioneiros neste tipo de abordagem e desenvolveram, com uma lagrangiana não relativística, um potencial NN para baixas energias.

[§]Veja [BKM 95] para uma boa revisão sobre a aplicação da CHPT em sistemas com nucleons.

Seus resultados reproduzem as defasagens do espalhamento NN até energias no laboratório da ordem de 100 MeV. Cálculos mais recentes foram efetuados por Kaiser, Gerstendörfer e Weise [KGW 98].

Apesar de todos os potenciais semifenomenológicos modernos reproduzirem bem os dados experimentais, o comportamento assintótico dos mesmos diverge bastante. O emprego da simetria quiral permite eliminar parte dessas ambigüidades, à luz da QCD. Neste espírito, é interessante determinar a forma que a simetria quiral prescreve para a cauda do potencial. Usando a simetria quiral e todos os graus de liberdade do processo πN , Robilotta e Da Rocha [RR 97] estabeleceram que a parte de longo alcance do potencial pela troca de dois píons (TPEP) é responsável pelo comportamento assintótico do potencial no canal central. O TPEP, construído desta maneira, com simetria quiral e dependência mínima de modelo, tem poucas ambigüidades teóricas. A parte de longo alcance do canal central do TPEP obtida [Rob 95] tem a forma aproximada

$$V_{\pi\pi}(r) = -\frac{3}{(4\pi)^2} \left\{ 2 \left(1 - \frac{5}{8} \right) \frac{g^2}{M} [a_{0n}^+(4m_\pi^2)^n] + [a_{0n}^+(4m_\pi^2)^n]^2 \right\} U_1(x), \quad (4.15)$$

com

$$U_1(x) = \frac{m_\pi^3}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2x}}{x^2 \sqrt{x}} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) \right], \quad (4.16)$$

$n = 0, 1, 2$ e $x = 2m_\pi r$. A informação experimental sobre o espalhamento πN está contida nos coeficientes de Höhler, Jacob e Strauss (HJS) a_{0n}^+ , da Ref. [Hoh 83], enquanto que a função U_1 tem o comportamento aproximado de uma Yukawa ao quadrado.

Com base no relato acima, é importante salientar alguns pontos, relacionados ao problema da compreensão da camada de alcance intermediário do potencial NN:

1. Sob o ponto de vista da teoria de campos, a complexidade dos processos envolvidos indica limitações na abordagem perturbativa do problema.
2. Qualquer formulação para tratar o problema deve contemplar a simetria quiral, que é essencial para a obtenção dos resultados corretos nos processos envolvendo muitos píons.

Neste cenário, a estrutura de campos mesônicos clássicos com simetria quiral da lagrangiana de Skyrme consiste numa abordagem alternativa às apresentadas até aqui. Ela

incorpora a interação entre as nuvens de píons dos nucleons e pode levar em consideração, não perturbativamente, muitos processos de troca de mésons.

Na seção seguinte, fazemos um breve relato sobre as abordagens da interação NN neste modelo e indicamos a linha seguida no presente trabalho.

4.2 A interação NN no modelo de Skyrme

O cerne do problema do cálculo da interação NN no modelo de Skyrme é determinar a forma do campo U para o sistema NN. Independentemente da maneira de se construir este campo, ele deve ser unitário e fornecer número bariônico igual a dois. Isto assegurado, o campo U é substituído na lagrangiana de Skyrme e é feita uma integração em todo o espaço, para a obtenção do potencial. A energia desta configuração de campo é dada por

$$E = - \int d^3r \mathcal{L}(U). \quad (4.17)$$

O potencial NN corresponde à energia de interação do sistema, que é obtida subtraindo-se as auto-energias dos nucleons,

$$V_{NN} \equiv E_{int} = E - 2M. \quad (4.18)$$

O campo U empregado na Eq. 4.17 é quantizado e, portanto, V_{NN} é um operador nos espaços de spin e isospin. Comparando o potencial assim calculado à estrutura geral dada nas Eqs. 4.10 e 4.11, obtemos o conteúdo das várias componentes geradas pelo modelo de Skyrme.

Encontramos na literatura diversas maneiras de determinar U . Uma delas consiste em obter a solução exata do problema, através da resolução das equações de Euler-Lagrange do modelo de Skyrme, com as condições de contorno de $B = 2$. Com a hipótese do ouriço, este procedimento gera um objeto com o triplo da massa do *skyrmion* [JR 83] e que, portanto, é instável. Este resultado é coerente com o fato de o estado ligado de mais baixa energia com dois nucleons não ser esféricamente simétrico.

Cálculos sem o ouriço, efetuados em uma rede espacial discreta, fornecem uma solução estática de mínima energia com massa 1660 MeV (usando a massa física do nucleon, $M_N =$

938 MeV, como um dos parâmetros que fixam as constantes da lagrangiana) [WW 92]. Tal solução foi obtida independentemente por vários autores e apresenta uma densidade bariônica toroidal. O tratamento exato das coordenadas coletivas desse *skyrmion* toroidal, para a incorporação de spin e isospin, é bastante complexo, sendo necessárias muitas aproximações.

No contexto das soluções aproximadas, a idéia é construir o campo U como um objeto composto pelos campos $U^{(1)}$ e $U^{(2)}$, de dois *skyrmions* com $B = 1$, descritos no capítulo 3. Isto corresponde à aproximação instantânea (*sudden approximation*).

Uma primeira vantagem deste tipo de solução é a manutenção da identidade dos *skyrmions*. Uma outra é que a incorporação de spin e isospin é automática, bastando rodar e quantizar os ouriços individuais.

Como a função de perfil $F(r)$ cai rapidamente com r , é razoável esperar que o campo U do sistema NN para distâncias médias e grandes não seja muito diferente da superposição de dois *skyrmions* com $B = 1$. Isto significa que a aproximação instantânea deve descrever bem o espalhamento NN periférico e o dêuteron, cuja energia de ligação é baixa, em relação à massa do nucleon[¶].

Quando Skyrme propôs sua lagrangiana (Eq. 3.2) para o tratamento dos bárions como sólitons topológicos, propôs também um modo para o cálculo aproximado da interação entre dois sólitons, baseado no chamado *Ansatz* Produto (AP) [Sky 62, JJP 85], que consiste em escrever

$$U = U^{(1)}U^{(2)}. \quad (4.19)$$

O AP, que será descrito na seção 4.3, tornou-se a hipótese (*ansatz*) para o sistema de dois *skyrmions* mais utilizada e pesquisada, devido à sua grande simplicidade algébrica. Entretanto, no caso do potencial NN, o AP não fornece nem a atração de alcance intermediário no canal central (escalar-isoescalar) e nem termos spin-órbita.

Na literatura são encontradas várias versões refinadas do modelo, cujo objetivo é obter alguma atração no canal escalar do potencial com o AP [EK 96]. Tais refinamentos são, por

[¶]Utilizando as massas do próton (m_p), nêutron (m_n) e dêuteron (m_D) da Ref. [PDG 98], obtém-se a energia de ligação do dêuteron $EL = m_p + m_n - m_D = 2.224\,55(69)$ MeV.

exemplo, novos termos acrescentados à lagrangiana de Skyrme, inclusão de trocas de mésons, uso de *instantons* e introdução de flutuações quânticas do campo σ (*dilaton*).

O campo U do AP não é simétrico pela troca das coordenadas dos *skyrmions* 1 e 2. Por isso, Nyman e Riska [NR 88] propuseram a seguinte versão simetrizada:

$$U = \frac{1}{2D} [U^{(1)}U^{(2)} + U^{(2)}U^{(1)}], \quad (4.20)$$

sendo D um fator necessário para manter a unitariedade. Os resultados apontam na direção da obtenção de um potencial central atrativo, mas houve críticas [SK 89, LE 93] relativas à violação do número bariônico a curtas distâncias.

O termo spin-órbita (LS) requer a inclusão da energia cinética do bárion (*dragging*), ou seja, de termos dependentes da velocidade, que possam contribuir para o operador $\mathbf{L}$ [EK 96]. Este procedimento pode gerar atração no canal spin-órbita e também no central, mas com o uso de parâmetros não realísticos. Existem dificuldades técnicas sérias nesta abordagem, e os resultados não podem ser olhados de maneira conclusiva.

A proposta desta tese é investigar o AP na sua versão original, identificar problemas de sua estrutura e procurar formas de eliminar estes problemas, buscando um novo *ansatz* para substituir o AP.

4.2.1 Procedimento para o cálculo do potencial NN na aproximação instantânea

Nesta seção descrevemos as etapas utilizadas no cálculo do potencial NN na aproximação instantânea, a partir de um *ansatz* genérico para o campo U . Sugerimos que a sua leitura seja concomitante com a da seção 4.3.2, onde estes passos serão aplicados ao cálculo do potencial com o AP. O mesmo procedimento será utilizado também para o novo *ansatz*, na seção 5.3.

Neste processo construtivo, é conveniente representar os campos dos ouriços individuais em termos de coordenadas $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, com origens em dois pontos, $X = (0, 0, -\frac{d}{2})$ e $Y = (0, 0, \frac{d}{2})$, respectivamente, conforme esquematizado na Fig. 4.1. Desta forma, a distância entre os centros

dos ouriços é $d = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$. A simetria esférica dos ouriços favorece a utilização de coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) para as integrações necessárias à obtenção do potencial. Assim, definimos $\mathbf{d} = d\hat{\mathbf{z}}$, $\mathbf{x} = \mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{d}$ e $\mathbf{y} = \mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{d}$. Em geral, representamos os ouriços com centros nos pontos X e Y por $U(\mathbf{x})$ e $U(\mathbf{y})$, respectivamente.

Fig. 4.1: Definição das coordenadas $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, dos campos dos dois *skyrmions*. O eixo vertical indica a direção radial (ρ) no plano xy .

Um *ansatz* é uma prescrição do tipo

$$U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f[U(\mathbf{x}), U(\mathbf{y})], \quad (4.21)$$

onde f é uma função escolhida segundo critérios físicos e $U(\mathbf{x})$ e $U(\mathbf{y})$ são os campos constituintes. Esta prescrição nos permite também escrever o campo $U(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ em termos de $(\mathbf{L}_\mu, \mathbf{R}_\mu)$ ou (σ, π) constituintes, alternativamente. Em conformidade com as definições da seção 3.3, utilizamos as seguintes abreviações: $F'_x = F'(x)$, $s_x = \sin F(x)$, $c_x = \cos F(x)$, $t_x = \frac{s_x}{x}$, sendo $x = |\mathbf{x}|$, com expressões equivalentes para y ; usamos, ainda, $\gamma = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ e $\alpha = \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \frac{\gamma}{xy}$, onde $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{y}}$ são, respectivamente, os versores de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

O passo seguinte consiste em tomar a lagrangiana estática, (3.5) ou (3.6), e usar o campo $U(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ escrito em termos dos campos individuais quantizados pelas Eqs. 3.15-3.18:

$$\mathcal{L}_e(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{L}_e[f(U^q(\mathbf{x}), U^q(\mathbf{y}))]. \quad (4.22)$$

Esta lagrangiana fornece a densidade $\mathcal{L}(\mathbf{r})$ em cada ponto P , para cada distância d entre os centros dos dois *skyrmions*.

Esta substituição dos campos individuais quantizados na lagrangiana estática dá origem a termos envolvendo produtos de matrizes D . Estes produtos são simplificados de acordo com as seguintes regras, aplicadas separadamente aos espaços dos *skyrmions* 1 e 2:

$$D_{\alpha a} D_{\alpha b} = \delta_{ab}, \quad (4.23)$$

$$D_{\alpha a} D_{\beta b} = \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \delta_{ab} + \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} D_{\gamma c} \epsilon_{cab} + \text{isotensores}, \quad (4.24)$$

sendo que o último termo indicado em (4.24) corresponde a trocas de duas unidades de isospin e, portanto, não contribui para a interação entre dois nucleons. Estas expressões podem ser usadas livremente em produtos com até três matrizes D em cada espaço. No caso de produtos de quatro matrizes D , os termos isotensores combinam-se em contribuições isoescalares não-nulas e, portanto, devem ser levados em conta. A expressão deste termo isotensorial e uma discussão sobre os estados intermediários envolvidos são apresentadas no Apêndice C.

A lagrangiana que se obtém é da forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^S + D_{\alpha m}^{(1)} D_{\alpha n}^{(2)} \mathcal{L}_{mn}^V. \quad (4.25)$$

Os índices S e V fazem referência aos utilizados na definição (4.10). Em seguida, fazemos a integração da densidade de lagrangiana de interação em todo o espaço, para a obtenção do potencial,

$$\begin{aligned} V(d) &= - \int d^3 \mathbf{r} \mathcal{L}_{int}(\mathbf{r}; d) \\ &= - \int d^3 \mathbf{r} \left\{ \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathcal{L}^{(1)}(\mathbf{x}) - \mathcal{L}^{(2)}(\mathbf{y}) \right\}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

sendo $\mathcal{L}^{(1)}(\mathbf{x})$ e $\mathcal{L}^{(2)}(\mathbf{y})$ as auto-energias dos *skyrmions* individuais, calculadas no capítulo 3. Obtemos, então, a forma

$$V(d) = V^S + D_{\alpha m}^{(1)} D_{\alpha n}^{(2)} V_{mn}^V, \quad (4.27)$$

que tem uma parte escalar-isoescalar, proveniente de $\mathcal{L}^S$ e que fornece V_C^S , e outra proveniente de $\mathcal{L}_{mn}^V$ e proporcional às matrizes D , que contêm a dependência de spin e isospin.

Utilizando coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) , efetuamos, primeiramente, a integração analítica no ângulo azimutal ϕ . A integral da contribuição escalar (S) é trivial. A dependência em ϕ está apenas nas componentes dos versores $\hat{x}_k, \hat{y}_k$, que aparecem em $\mathcal{L}_{mn}^V$. As integrais básicas estão apresentadas no apêndice D e seus resultados são arranjados em termos dos tensores δ_{mn} e $T_{mn} = 3\delta_{m3}\delta_{n3} - \delta_{mn}$. As expressões finais para os vários termos do potencial são integradas numericamente em ρ e z . Trata-se de expressões sempre pares ou ímpares em z e, portanto, a integral em z pode ser efetuada apenas na parte positiva do eixo.

Conforme descrito no apêndice C, o valor esperado da matriz D entre estados de um nucleon é

$$\langle N' | D_{\alpha a} | N \rangle = -\frac{1}{3} \langle N' | \tau_{\alpha} \sigma_a | N \rangle, \quad (4.28)$$

onde τ e σ são as matrizes de Pauli de isospin e spin, respectivamente. Isto nos permite projetar a estrutura $D_{\alpha m}^{(1)} D_{\alpha n}^{(2)}$ nos estados de nucleons. Temos

$$\langle N^{(1)'} N^{(2)'} | D_{\alpha m}^{(1)} D_{\alpha n}^{(2)} | N^{(1)} N^{(2)} \rangle = \frac{1}{9} \langle N^{(1)'} N^{(2)'} | \tau_{\alpha}^{(1)} \tau_{\alpha}^{(2)} \sigma_m^{(1)} \sigma_n^{(2)} | N^{(1)} N^{(2)} \rangle. \quad (4.29)$$

Deste modo, substituímos, na expressão do potencial,

$$D_{\alpha m}^{(1)} D_{\alpha n}^{(2)} \rightarrow \frac{1}{9} \tau^{(1)} \cdot \tau^{(2)} \sigma_m^{(1)} \sigma_n^{(2)}. \quad (4.30)$$

Combinando os tensores δ_{mn} e T_{mn} com a expressão acima, em (4.27), obtemos a estrutura final do potencial,

$$V(d) = V_C^S + \tau^{(1)} \cdot \tau^{(2)} \left[\sigma^{(1)} \cdot \sigma^{(2)} V_{SS}^V + S_{12}(\hat{k}) V_T^V \right]. \quad (4.31)$$

4.3 O Ansatz Produto

A prescrição do *Ansatz* Produto (AP) [JR 83, JJP 85, Vin+85], para calcular a interação NN no modelo de Skyrme, na aproximação instantânea, é escrever o campo composto $U(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ como o **produto** dos campos de dois *skyrmions* com $B = 1$, $U(\mathbf{x})$ e $U(\mathbf{y})$, centrados, respectivamente, em X e Y definidos na Fig. 4.1,

$$U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = U(\mathbf{x})U(\mathbf{y}). \quad (4.32)$$

O campo $U(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ é unitário e pode ser escrito em termos dos campos dos *skyrmions* individuais, empregando a forma (2.90) para $U(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{f_\pi} \left(\sigma^{(1)} + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}^{(1)} \right) \frac{1}{f_\pi} \left(\sigma^{(2)} + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}^{(2)} \right) \\ &\doteq \frac{1}{f_\pi} (S + i\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{P}) \end{aligned} \quad (4.33)$$

e identificamos

$$S = \frac{1}{f_\pi} \left(\sigma^{(1)} \sigma^{(2)} - \boldsymbol{\pi}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\pi}^{(2)} \right), \quad (4.34)$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{f_\pi} \left(\sigma^{(1)} \boldsymbol{\pi}^{(2)} + \sigma^{(2)} \boldsymbol{\pi}^{(1)} - \boldsymbol{\pi}^{(1)} \times \boldsymbol{\pi}^{(2)} \right). \quad (4.35)$$

A unitariedade de U faz com que os campos compostos S e $\mathbf{P}$ satisfaçam a relação

$$S^2 + \mathbf{P}^2 = f_\pi^2. \quad (4.36)$$

No AP, a forma esquerda é

$$L_\mu = U^\dagger \partial_\mu U = U^{(2)\dagger} \left[L_\mu^{(1)} - R_\mu^{(2)} \right] U^{(2)}. \quad (4.37)$$

4.3.1 O número bariônico

O número bariônico do campo $U(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ é a soma dos números bariônicos dos seus componentes e, portanto, é igual a dois. A demonstração deste fato [ZB 86] é feita por substituição direta de (4.37) na expressão da corrente bariônica,

$$B^\mu = -\frac{1}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \text{Tr}[L_\alpha L_\beta L_\gamma]. \quad (4.38)$$

Utilizando propriedades do traço de matrizes e do tensor ϵ , obtemos

$$B^\mu = B^{(1)\mu} + B^{(2)\mu} + \frac{1}{8\pi^2} \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \text{Tr}[L_\alpha^{(1)} L_\beta^{(1)} R_\gamma^{(2)} - L_\alpha^{(1)} R_\beta^{(2)} R_\gamma^{(2)}]. \quad (4.39)$$

Com o auxílio das identidades de Maurer-Cartan,

$$\begin{aligned} \partial_\mu L_\alpha - \partial_\alpha L_\mu &= [L_\alpha, L_\mu], \\ \partial_\mu R_\alpha - \partial_\alpha R_\mu &= [R_\alpha, R_\mu], \end{aligned} \quad (4.40)$$

fazemos

$$\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} L_\alpha L_\beta = \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \frac{1}{2} (L_\alpha L_\beta - L_\beta L_\alpha) = \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \frac{1}{2} (\partial_\beta L_\alpha - \partial_\alpha L_\beta) = \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \partial_\beta L_\alpha. \quad (4.41)$$

Com transformações deste tipo para $L^{(1)}$ e $R^{(2)}$, rearranjamos o último termo de (4.39) e obtemos

$$B^\mu = B^{(1)\mu} + B^{(2)\mu} - \frac{1}{8\pi^2} \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \text{Tr} \partial_\alpha [L_\beta^{(1)} R_\gamma^{(2)}], \quad (4.42)$$

ou seja, a corrente bariônica é aditiva, a menos de uma divergência. O número bariônico é

$$B = \int d^3\mathbf{r} B^0 = B^{(1)} + B^{(2)} - \frac{1}{8\pi^2} \text{Tr} \int_{V_\infty} d^3\mathbf{r} [\nabla \cdot L^{(1)} \times R^{(2)}], \quad (4.43)$$

mas

$$\int_{V_\infty} d^3\mathbf{r} [\nabla \cdot L^{(1)} \times R^{(2)}] = \oint_{S_\infty} [L^{(1)} \times R^{(2)}] \cdot d\sigma = 0, \quad (4.44)$$

uma vez que os campos tendem a zero no infinito. Mostramos, assim, que o número bariônico no AP é aditivo,

$$B = B^{(1)} + B^{(2)}.$$

Portanto, o AP gera automaticamente $B = 2$, sendo este um dos seus grandes pontos positivos, que motivaram o seu uso no estudo da interação NN no modelo de Skyrme. Um outro ponto positivo é a relativa simplicidade dos cálculos do potencial, que serão descritos na seção seguinte.

4.3.2 O cálculo do potencial NN

Para construir o potencial, seguimos as etapas descritas na seção 4.2.1. Primeiramente, tomamos a lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{f_\pi^2}{2} \mathbf{L}_i \cdot \mathbf{L}_i - \frac{1}{4e^2} \{ \mathbf{L}_i \cdot \mathbf{L}_i \mathbf{L}_j \cdot \mathbf{L}_j - \mathbf{L}_i \cdot \mathbf{L}_j \mathbf{L}_i \cdot \mathbf{L}_j \} + m_\pi^2 f_\pi (\sigma - f_\pi)$$

e substituímos, usando (4.37) e (4.34),

$$L_{ik} \rightarrow L_{\alpha k}^{(1)q} - R_{\alpha k}^{(2)q} = D_{\alpha i}^{(1)} L_{ik}^{(1)} - D_{\alpha i}^{(2)} R_{ik}^{(2)}, \quad (4.45)$$

$$\sigma \rightarrow S^q = \frac{1}{f_\pi} (\sigma^{(1)} \sigma^{(2)} - D_{\alpha i}^{(1)} D_{\alpha j}^{(2)} \pi_i^{(1)} \pi_j^{(2)}). \quad (4.46)$$

A simplificação dos produtos de matrizes D fornece

$$\mathcal{L}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{L}_2^{(1)}(\mathbf{x}) + \mathcal{L}_2^{(2)}(\mathbf{y}) + f_\pi^2 D_{\alpha a}^{(1)} D_{\alpha b}^{(2)} L_{ai}^{(1)} R_{bi}^{(2)}, \quad (4.47)$$

$$\mathcal{L}_{SB}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = m_\pi^2 \left[\sigma^{(1)} \sigma^{(2)} - D_{\alpha i}^{(1)} D_{\alpha j}^{(2)} \pi_i^{(1)} \pi_j^{(2)} - f_\pi^2 \right], \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = & \mathcal{L}_4^{(1)}(\mathbf{x}) + \mathcal{L}_4^{(2)}(\mathbf{y}) + \frac{1}{e^2} \left\{ \frac{1}{3} \left(L_{ai}^{(1)} L_{aj}^{(1)} R_{bi}^{(2)} R_{bj}^{(2)} - L_{ai}^{(1)} L_{ai}^{(1)} R_{bj}^{(2)} R_{bj}^{(2)} \right) \right. \\ & - D_{\alpha a}^{(1)} D_{\alpha b}^{(2)} \left[\frac{3}{4} \epsilon_{aec} \epsilon_{bfd} L_{ei}^{(1)} L_{cj}^{(1)} R_{fi}^{(2)} R_{dj}^{(2)} \right. \\ & + L_{ai}^{(1)} R_{bj}^{(2)} L_{ci}^{(1)} L_{cj}^{(1)} - L_{ai}^{(1)} R_{bi}^{(2)} L_{cj}^{(1)} L_{cj}^{(1)} \\ & \left. \left. + L_{ai}^{(1)} R_{bj}^{(2)} R_{ci}^{(2)} R_{cj}^{(2)} - L_{ai}^{(1)} R_{bi}^{(2)} R_{cj}^{(2)} R_{cj}^{(2)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Convém observar, ainda, que apareceram produtos de, no máximo, três matrizes D , no espaço do *skyrmion* 1 ou 2, que correspondem aos quatro últimos termos de $\mathcal{L}_4(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, acima.

Usando

$$L_{ai}^{(1)} = -\epsilon_{aik} \hat{x}_k s_x t_x + [t_x c_x \delta_{ai} + (F'_x - t_x c_x) \hat{x}_a \hat{x}_i], \quad (4.50)$$

$$R_{ai}^{(2)} = -\epsilon_{aik} \hat{y}_k s_y t_y - [t_y c_y \delta_{ai} + (F'_y - t_y c_y) \hat{y}_a \hat{y}_i], \quad (4.51)$$

obtemos, para cada termo da lagrangiana composta, a forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{S(PP)} + D_{\alpha m}^{(1)} D_{\alpha n}^{(2)} \left(\mathcal{L}_{mn}^{V(II)} + \mathcal{L}_{mn}^{V(PP)} + \mathcal{L}_{mn}^{V(IP)} \right), \quad (4.52)$$

onde separamos, na parte dependente de spin e isospin, as contribuições pares e ímpares, em cada ouriço, pela operação $F \rightarrow -F$. Em cada termo, esta paridade é dada por $(-1)^{S+D}$, onde S e D são, respectivamente, o número de senos e de derivadas de F ($F(x)$ ou $F(y)$) presentes. II e PP indicam, respectivamente, as contribuições ímpares e pares nos dois ouriços e IP indica as contribuições pares em um dos ouriços e ímpares no outro e que, portanto, têm paridade global negativa. A parte escalar ($\mathcal{L}^S$) só apresenta contribuição do tipo PP.

A lagrangiana de interação $\mathcal{L}_{int}$ é obtida segundo a Eq. 4.26. Nos termos $\mathcal{L}_2$ (4.47) e $\mathcal{L}_4$ (4.49) do AP, as auto-energias desacoplam-se, podendo ser automaticamente subtraídas, para a obtenção da lagrangiana de interação. Como isto não acontece em $\mathcal{L}_{SB}$ (4.48), as auto-energias permanecem explícitas em sua contribuição a $\mathcal{L}_{int}$. Os vários termos da lagrangiana de interação são

$$\mathcal{L}_2^{S(PP)} = 0, \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2^{V(II)}{}_{mn} &= -f_\pi^2 \left\{ t_x c_x t_y c_y \delta_{mn} + (F'_x - t_x c_x) t_y c_y \hat{x}_m \hat{x}_n + t_x c_x (F'_y - t_y c_y) \hat{y}_m \hat{y}_n \right. \\ &\quad \left. + \alpha (F'_x - t_x c_x) (F'_y - t_y c_y) \hat{x}_m \hat{y}_n \right\},\end{aligned}\quad (4.54)$$

$$\mathcal{L}_2^{V(PP)}{}_{mn} = f_\pi^2 s_x t_x s_y t_y (\alpha \delta_{mn} - \hat{y}_m \hat{x}_n), \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2^{V(IP)}{}_{mn} &= f_\pi^2 \{ s_x t_x t_y c_y \epsilon_{mnp} \hat{x}_p + t_x c_x s_y t_y \epsilon_{mnp} \hat{y}_p \\ &\quad - s_x t_x (F'_y - t_y c_y) (\hat{x} \times \hat{y})_m \hat{y}_n - (F'_x - t_x c_x) s_y t_y \hat{x}_m (\hat{x} \times \hat{y})_n \},\end{aligned}\quad (4.56)$$

$$\mathcal{L}_{SB}^{S(PP)} = m_\pi^2 f_\pi^2 (1 - c_x)(1 - c_y), \quad (4.57)$$

$$\mathcal{L}_{SB}^{V(II)}{}_{mn} = -m_\pi^2 f_\pi^2 s_x s_y \hat{x}_m \hat{y}_n, \quad (4.58)$$

$$\mathcal{L}_{SB}^{V(PP)} = 0, \quad (4.59)$$

$$\mathcal{L}_{SB}^{V(IP)} = 0, \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_4^{S(PP)} &= -\frac{1}{e^2} \left\{ \frac{1}{3} [F_x'^2 F_y'^2 + t_x^2 F_y'^2 + F_x'^2 t_y^2 + 3t_x^2 t_y^2] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} \alpha^2 [F_x'^2 F_y'^2 - t_x^2 F_y'^2 - F_x'^2 t_y^2 + t_x^2 t_y^2] \right\},\end{aligned}\quad (4.61)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_4^{V(II)}{}_{mn} &= \frac{1}{e^2} \left\{ - (F_x'^2 + t_x^2 + F_y'^2 + t_y^2) [t_x c_x t_y c_y \delta_{mn} \right. \\ &\quad + (F'_x - t_x c_x) t_y c_y \hat{x}_m \hat{x}_n + t_x c_x (F'_y - t_y c_y) \hat{y}_m \hat{y}_n \\ &\quad + \alpha (F'_x - t_x c_x) (F'_y - t_y c_y) \hat{x}_m \hat{y}_n] \\ &\quad + F'_x (F_x'^2 - t_x^2) t_y c_y \hat{x}_m \hat{x}_n + \alpha F'_x (F_x'^2 - t_x^2) (F'_y - t_y c_y) \hat{x}_m \hat{y}_n \\ &\quad + t_x c_x F'_y (F_y'^2 - t_y^2) \hat{y}_m \hat{y}_n + \alpha (F'_x - t_x c_x) F'_y (F_y'^2 - t_y^2) \hat{x}_m \hat{y}_n \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} t_x t_y s_x s_y F'_x F'_y (\alpha \delta_{mn} - \hat{y}_m \hat{x}_n) \right\},\end{aligned}\quad (4.62)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_4^{V(PP)}{}_{mn} &= \frac{1}{e^2} \left\{ (F_x'^2 + t_x^2 + F_y'^2 + t_y^2) (\alpha \delta_{mn} - \hat{y}_m \hat{x}_n) s_x t_x s_y t_y \right. \\ &\quad - \frac{3}{2} t_x t_y [\alpha (c_x F'_x - t_x) (c_y F'_y - t_y) \hat{x}_m \hat{y}_n + c_x c_y F'_x F'_y \delta_{mn} \\ &\quad \left. - (c_x F'_x - t_x) c_y F'_y \hat{x}_m \hat{x}_n - c_x F'_x (c_y F'_y - t_y) \hat{y}_m \hat{y}_n] \right\},\end{aligned}\quad (4.63)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_4^{V(IP)}{}_{mn} &= \frac{1}{e^2} \left\{ (F_x'^2 + t_x^2 + F_y'^2 + t_y^2) [t_x c_x s_y t_y \epsilon_{mnp} \hat{y}_p - (F'_x - t_x c_x) s_y t_y \hat{x}_m (\hat{x} \times \hat{y})_n \right. \\ &\quad + s_x t_x t_y c_y \epsilon_{mnp} \hat{x}_p - s_x t_x (F'_y - t_y c_y) (\hat{x} \times \hat{y})_m \hat{y}_n] \\ &\quad + F'_x (F_x'^2 - t_x^2) s_y t_y \hat{x}_m (\hat{x} \times \hat{y})_n + s_x t_x F'_y (F_y'^2 - t_y^2) (\hat{x} \times \hat{y})_m \hat{y}_n \\ &\quad - \frac{3}{2} [s_x^2 t_x^2 s_y t_y F'_y \hat{x}_m (\hat{x} \times \hat{y})_n + s_x t_x F'_x s_y^2 t_y^2 (\hat{x} \times \hat{y})_m \hat{y}_n \\ &\quad - s_x t_x F'_x t_y^2 c_y^2 \epsilon_{mnp} \hat{x}_p - t_x^2 c_x^2 s_y t_y F'_y \epsilon_{mnp} \hat{y}_p \\ &\quad \left. - s_x t_x F'_x (F'_y - c_y t_y) t_y c_y (\alpha \epsilon_{mnp} \hat{y}_p + \hat{y}_m (\hat{x} \times \hat{y})_n) \right\}\end{aligned}\quad (4.64)$$

$$- (F'_x - c_x t_x) t_x c_x s_y t_y F'_y (\alpha \epsilon_{mnp} \hat{x}_p + (\hat{x} \times \hat{y})_m \hat{x}_n)] \}.$$

Inicialmente, mostraremos que os termos $\mathcal{L}^{V(IP)}$ não contribuem ao potencial. Para tanto, integramos em ϕ e obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\phi \mathcal{L}_2^{V(IP)}{}_{mn} &= f_\pi^2 \{ 2\pi \epsilon_{mn3} t_x t_y (t_x c_y x_z + c_x t_y y_z) \\ &- \pi \rho^2 d \epsilon_{mn3} \left[-\frac{t_x^2}{y^2} (F'_y - t_y c_y) + (F'_x - t_x c_x) \frac{t_y^2}{x^2} \right] \}, \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\phi \mathcal{L}_4^{V(IP)}{}_{mn} &= \frac{1}{e^2} \left\{ (F_x'^2 + t_x^2 + F_y'^2 + t_y^2) [2\pi \epsilon_{mn3} t_x t_y (t_x c_y x_z + c_x t_y y_z) \right. \\ &- \pi \rho^2 d \epsilon_{mn3} \left[-\frac{t_x^2}{y^2} (F'_y - t_y c_y) + (F'_x - t_x c_x) \frac{t_y^2}{x^2} \right]] \\ &+ \pi \rho^2 d \epsilon_{mn3} \left[F'_x (F_x'^2 - t_x^2) \frac{t_y^2}{x^2} - \frac{t_x^2}{y^2} F'_y (F_y'^2 - t_y^2) \right] \\ &- \frac{3}{2} \pi \epsilon_{mn3} t_x t_y [\rho^2 d t_x t_y (t_x^2 F'_y - F'_x t_y^2) - 2 t_x t_y (F'_x c_y^2 x_z + c_x^2 F'_y y_z) \\ &- s_x t_x F'_x (F'_y - c_y t_y) t_y c_y \left(2\alpha \hat{y}_z + \frac{\rho^2 d}{xy^2} \right) \\ &- (F'_x - c_x t_x) t_x c_x s_y t_y F'_y \left(2\alpha \hat{x}_z - \frac{\rho^2 d}{x^2 y} \right)] \}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Para analisar a paridade em z das expressões acima, trocamos z por $-z$, o que é equivalente a trocar $x \leftrightarrow y$, $x_z \leftrightarrow -y_z$. Observamos, então, que os resultados destas integrais são funções ímpares de z e, portanto, se anulam.

Consideramos, em seguida, os termos $\mathcal{L}^{S(PP)}$, que contribui para V_C^S - ou simplesmente V_C - e $\mathcal{L}^{V(II)}$ e $\mathcal{L}^{V(PP)}$, que contribuem para V_{SS}^V e V_T^V - ou V_{SS} e V_T . Após a integração em ϕ e a projeção nos estados de dois nucleons, as contribuições da lagrangiana do modelo σ e do termo de estabilização são, separadamente, para o potencial escalar V_C ,

$$V_{C,2}(d) = 0, \quad (4.67)$$

$$V_{C,SB}(d) = -\frac{\pi f_\pi}{2e} \int_0^\infty dz \int_0^\infty \rho d\rho \frac{m_\pi^2}{e^2 f_\pi^2} (1 - c_x)(1 - c_y), \quad (4.68)$$

$$V_{C,4}(d) = \frac{2f_\pi}{e} \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty dz \int_0^\infty \rho d\rho \left\{ (F_x'^2 + t_x^2) (F_y'^2 + t_y^2) + 2t_x^2 t_y^2 - \alpha^2 (F_x'^2 - t_x^2) (F_y'^2 - t_y^2) \right\}, \quad (4.69)$$

para o potencial spin-spin ímpar V_{SS}^{II} ,

$$\begin{aligned} V_{SS,2}^{II}(d) &= \frac{2f_\pi}{9e} \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty dz \int_0^\infty \rho d\rho \left\{ \frac{1}{4}(1 + \alpha^2) t_x c_x t_y c_y \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4}(1 - \alpha^2) (F'_x t_y c_y + t_x c_x F'_y) + \frac{1}{4} \alpha^2 F'_x F'_y \right\}, \end{aligned} \quad (4.70)$$

$$V_{SS,SB}^{II}(d) = \frac{\pi f_\pi}{54e} \int_0^\infty dz \int_0^\infty \rho d\rho \frac{m_\pi^2}{e^2 f_\pi^2} \alpha s_x s_y, \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned} V_{SS,4}^{II}(d) &= \frac{2f_\pi}{9e} \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty dz \int_0^\infty \rho d\rho \left\{ (F_x'^2 + t_x^2 + F_y'^2 + t_y^2) (1 + \alpha^2) t_x c_x t_y c_y \right. \\ &\quad + (1 - \alpha^2) [(2t_x^2 + F_y'^2 + t_y^2) F'_x t_y c_y + (F_x'^2 + t_x^2 + 2t_y^2) t_x c_x F'_y] \\ &\quad \left. + \alpha^2 (2t_x^2 + 2t_y^2) F'_x F'_y - 3\alpha t_x t_y s_x F'_x s_y F'_y \right\}, \end{aligned} \quad (4.72)$$

para o potencial tensor ímpar V_T^{II} ,

$$\begin{aligned} V_{T,2}^{II}(d) &= \frac{2f_\pi}{9e} \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty dz \int_0^\infty \rho d\rho \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{1}{4} \left(-2 + \alpha^2 + \beta \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} - \alpha \right) \right) t_x c_x t_y c_y \right. \\ &\quad + \frac{1}{4} \left(1 - \alpha^2 + \beta \left(-\frac{y}{x} + \alpha \right) \right) F'_x t_y c_y + \frac{1}{4} \left(1 - \alpha^2 + \beta \left(-\frac{x}{y} + \alpha \right) \right) t_x c_x F'_y \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \alpha (\alpha - \beta) F'_x F'_y \right\}, \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$V_{T,SB}^{II}(d) = \frac{\pi f_\pi}{54e} \int_0^\infty dz \int_0^\infty \rho d\rho \frac{m_\pi^2}{e^2 f_\pi^2} (\alpha - \beta) s_x s_y, \quad (4.74)$$

$$\begin{aligned} V_{T,4}^{II}(d) &= \frac{2f_\pi}{9e} \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty dz \int_0^\infty \rho d\rho \left\{ (F_x'^2 + t_x^2 + F_y'^2 + t_y^2) \right. \\ &\quad \cdot \left(-2 + \alpha^2 + \beta \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} - \alpha \right) \right) t_x c_x t_y c_y \\ &\quad + \left(1 - \alpha^2 + \beta \left(-\frac{y}{x} + \alpha \right) \right) (2t_x^2 + F_y'^2 + t_y^2) F'_x t_y c_y \\ &\quad + \left(1 - \alpha^2 + \beta \left(-\frac{x}{y} + \alpha \right) \right) (F_x'^2 + t_x^2 + 2t_y^2) t_x c_x F'_y \\ &\quad \left. + \alpha (\alpha - \beta) (2t_x^2 + 2t_y^2) F'_x F'_y + \frac{3}{2} (\alpha - \beta) t_x t_y s_x F'_x s_y F'_y \right\}, \end{aligned} \quad (4.75)$$

para o potencial spin-spin par V_{SS}^{PP} ,

$$V_{SS,2}^{PP}(d) = \frac{2f_\pi}{9e} \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty dz \int_0^\infty \rho d\rho \left\{ -\frac{1}{2} \alpha s_x t_x s_y t_y \right\}, \quad (4.76)$$

$$V_{SS,SB}^{PP}(d) = 0, \quad (4.77)$$

$$\begin{aligned} V_{SS,4}^{PP}(d) &= \frac{2f_\pi}{9e} \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty dz \int_0^\infty \rho d\rho \left\{ - (F_x'^2 + t_x^2 + F_y'^2 + t_y^2) 2\alpha s_x t_x s_y t_y \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} t_x t_y [\alpha^2 t_x t_y + (1 - \alpha^2) t_x F'_y c_y + (1 - \alpha^2) F'_x c_x t_y + (1 + \alpha^2) c_x F'_x c_y F'_y] \right\}, \end{aligned} \quad (4.78)$$

e para o potencial tensor par V_T^{PP} ,

$$V_{T,2}^{PP}(d) = \frac{2f_\pi}{9e} \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty dz \int_0^\infty \rho d\rho \left\{ \frac{1}{4}(\alpha - \beta) s_x t_x s_y t_y \right\}, \quad (4.79)$$

$$V_{T,SB}^{PP}(d) = 0, \quad (4.80)$$

$$\begin{aligned} V_{T,4}^{PP}(d) = & \frac{2f_\pi}{9e} \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty dz \int_0^\infty \rho d\rho \left\{ (F_x'^2 + t_x^2 + F_y'^2 + t_y^2) (\alpha - \beta) s_x t_x s_y t_y \right. \\ & + \frac{3}{2} t_x t_y \left[\alpha(\alpha - \beta) t_x t_y + \left(1 - \alpha^2 + \beta \left(-\frac{y}{x} + \alpha \right) \right) t_x F_y' c_y \right. \\ & + \left. \left(1 - \alpha^2 + \beta \left(-\frac{x}{y} + \alpha \right) \right) F_x' c_x t_y \right. \\ & \left. \left. + \left(-2 + \alpha^2 + \beta \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} - \alpha \right) \right) c_x F_x' c_y F_y' \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Nas expressões acima, além das abreviações da seção 4.2.1, utilizamos também $\beta = \frac{3\rho^2}{2xy}$. As variáveis de integração (ρ, z) foram feitas adimensionais, pelo fator $2ef_\pi$. Para evitar grandes imprecisões numéricas na execução dos programas de integração, para valores elevados de d , fazemos as aproximações

$$t_x = -F_x, \quad \text{para } x < 10^{-4}, \quad (4.82)$$

$$t_y = -F_y, \quad \text{para } y < 10^{-4}, \quad (4.83)$$

$$1 - c_x = \frac{F_x^2}{2}, \quad \text{para } F_x < 2 \cdot 10^{-6}. \quad (4.84)$$

O resultado da integração numérica para os termos V_C , V_{SS}^{II} , V_T^{II} , V_{SS}^{PP} e V_T^{PP} é apresentado nas Figs. 4.2-4.6. Cada figura mostra também as contribuições dos termos $\mathcal{L}_{SB}$, $\mathcal{L}_2$ e $\mathcal{L}_4$, separadamente.

Como vimos nesta seção, os termos $\mathcal{L}^{V(IP)}$, ímpares pela operação global $F_x \rightarrow -F_x$ e $F_y \rightarrow -F_y$, estão presentes na lagrangiana de interação (4.56, 4.64), mas não contribuem para o potencial. Fisicamente, estes termos são proibidos pela paridade G, que conta o número de píons num dado processo. A paridade G é conservada nas interações fortes e, como os píons têm paridade negativa, transições do tipo

$$\langle \pi_1' \pi_2' \pi_3' | \pi_1 \pi_2 \rangle, \quad (4.85)$$

onde este número é ímpar, são proibidas.

Fig. 4.2: Potencial NN com o *Ansatz* Produto: termo central V_C (linha contínua), com contribuições parciais de $\mathcal{L}_{SB}$ (pontilhado) e $\mathcal{L}_4$ (tracejado).

Fig. 4.3: Potencial NN com o *Ansatz* Produto: termo spin-spin ímpar V_{SS}^{II} (linha contínua), com contribuições parciais de $\mathcal{L}_{SB}$ (pontilhado), $\mathcal{L}_2$ (tracejado longo) e $\mathcal{L}_4$ (tracejado). A grandes distâncias, $V_{SS,4}^{II}$ e V_{SS}^{II} são indistinguíveis.

Fig. 4.4: Potencial NN com o *Ansatz* Produto: termo tensor ímpar V_T^{II} (linha contínua), com contribuições parciais de $\mathcal{L}_{SB}$ (pontilhado), $\mathcal{L}_2$ (tracejado longo) e $\mathcal{L}_4$ (tracejado). A grandes distâncias, $V_{T,4}^{II}$ e V_T^{II} são indistinguíveis.

Fig. 4.5: Potencial NN com o *Ansatz* Produto: termo spin-spin par V_{SS}^{PP} (linha contínua), com contribuições parciais de $\mathcal{L}_2$ (pontilhado) e $\mathcal{L}_4$ (tracejado).

Fig. 4.6: Potencial NN com o Ansatz Produto: termo tensor par V_T^{PP} (linha contínua), com contribuições parciais de $\mathcal{L}_2$ (pontilhado) e $\mathcal{L}_4$ (tracejado).

No presente caso, a operação $F \rightarrow -F$ individual permite descobrir o número par ou ímpar de campos do pión individuais, associados a cada nucleon e, por isso, separamos as contribuições II e PP. Isto é útil para compararmos as previsões do AP com resultados conhecidos da teoria de campos. Assim, a contribuição ao OPEP provém apenas de $\mathcal{L}^{V(II)}$, enquanto que os termos $\mathcal{L}^{PP}$ (S e V) incluem trocas de dois pions, algumas das quais associadas ao méson ρ , no caso V .

d (fm)	V_C	V_{SS}^{II}	V_{SS}^{PP}	V_T^{II}	V_T^{PP}
2.0	5.853	0.399	0.2304	1.786	-0.192
3.0	0.237	0.128	0.0110	0.397	-0.00824
5.0	0.00175	0.0189	8.86×10^{-5}	0.0398	-5.98×10^{-5}

Tabela 4.1: Alguns valores dos termos do potencial NN com o AP, em MeV.

A tabela 4.1 apresenta os valores dos diversos termos do potencial a algumas distâncias. Observamos que, a $d = 2$ fm, os potenciais SS e T pares têm magnitudes menores que as demais, enquanto que o canal central é o mais intenso - ele é o mais intenso para distâncias pequenas. A $d = 3$ fm, V_C já é comparável aos canais ímpares. As magnitudes destes a $d = 5$ fm são

Fig. 4.7: Razão entre os valores absolutos das contribuições parciais de $\mathcal{L}_\sigma$ e $\mathcal{L}_4$ ao potencial central.

uma ordem de grandeza maiores que o canal central e duas maiores que os canais SS e T pares. Com isto, observamos que os alcances de V_{SS}^{II} e V_T^{II} , dominados pelo OPEP, são claramente maiores. No caso dos modelos baseados em teoria de campos, esse tipo de comportamento deve-se ao fato de, assintoticamente, os termos II e PP serem proporcionais a $e^{-m_\pi d}$ e $e^{-2m_\pi d}$, respectivamente.

Observamos uma mudança de comportamento do canal SS par, para $d \simeq 0.8$ fm, na Fig. 4.5. Isto pode ser explicado por uma competição entre as contribuições de diferentes números de mésons a $\mathcal{L}^{PP}$, neste particular canal, de forma que, para distâncias menores, o comportamento atrativo de uma determinada contribuição passe a dominar sobre a repulsão gerada por outra, correspondente a uma massa efetiva menor.

No canal central, Fig. 4.2, observamos que, em termos absolutos, a contribuição de $\mathcal{L}_4$ é bem maior que a de $\mathcal{L}_\sigma$. Entretanto, estas contribuições tornam-se comparáveis a distâncias maiores, como se observa na Fig. 4.7. Como as contribuições têm sinais contrários, isto significa que assintoticamente ocorre um grande cancelamento entre elas, com um resultado líquido

relativamente pequeno, para este canal.

4.3.3 Comparação com a troca de um pión

A parte de longo alcance do potencial NN é teoricamente bem estabelecida, através da teoria quântica de campos, como sendo devida à troca de um pión (OPEP). As expressões das suas componentes são

$$V_{\pi}^{SS}(\mathbf{r}) = \frac{1}{3} \left(\frac{g m_{\pi}}{2M} \right)^2 \frac{m_{\pi}}{4\pi} \left[\frac{e^{-m_{\pi}r}}{m_{\pi}r} - \frac{4\pi}{m_{\pi}^3} \delta^3(\mathbf{r}) \right], \quad (4.86)$$

$$V_{\pi}^T(\mathbf{r}) = \frac{1}{3} \left(\frac{g m_{\pi}}{2M} \right)^2 \frac{m_{\pi}}{4\pi} \frac{e^{-m_{\pi}r}}{m_{\pi}r} \left(1 + \frac{3}{m_{\pi}r} + \frac{3}{m_{\pi}^2 r^2} \right), \quad (4.87)$$

onde M é a massa do nucleon e g é a constante de acoplamento entre o pión e o nucleon.

No contexto do modelo de Skyrme, Yabu e Andou [YA 85] mostraram analiticamente que os termos spin-spin e tensor do potencial NN, como calculado na seção anterior, correspondem assintoticamente aos termos respectivos do OPEP. Aqui, para fazermos a comparação com o potencial calculado na teoria de campos, utilizamos a expressão para g no modelo de Skyrme obtida na Ref. [Bat 94], Eq. 5.43,

$$g = \frac{8\pi M f_{\pi}}{3} A,$$

fazendo a identificação

$$\frac{g}{M} = \frac{8\pi f_{\pi} \alpha}{3m_{\pi}^2}.$$

Utilizamos, da seção 3.3, os parâmetros $f_{\pi} = 93$ MeV, $m_{\pi} = 138.039$ MeV e a solução da equação diferencial $\alpha = 0.27373$.

As Figs. 4.8 e 4.9 mostram, respectivamente, os termos spin-spin e tensor do OPEP e os termos correspondentes da parte ímpar (II) do AP. Observamos que a partir de $d = 2$ fm as curvas coincidem. O desvio da unidade, da razão entre os potenciais calculados e os das expressões (4.86) e (4.87), é aproximadamente 1% em $d = 2.0$ fm, no caso de V_T , e em $d = 2.4$ fm, no caso V_{SS} . Esta comparação mostra que os cálculos do AP reproduzem o OPEP, como esperado.

Fig. 4.8: Comparação entre V_{SS}^{II} (linha contínua) e V_{SS} do OPEP (tracejado).

Fig. 4.9: Comparação entre V_T^{II} (linha contínua) e V_T do OPEP (tracejado).

Estas figuras exibem também uma característica importante dos *skyrmions*. Os termos do OPEP puro são singulares na origem. O uso de fatores de forma do nucleon, por outro lado, tornam V_{SS}^{OPEP} finito e V_T^{OPEP} nulo neste ponto. O modelo de Skyrme incorpora automaticamente um fator de forma πN , porque gera nucleons de tamanho finito. Embora haja alguma ambigüidade na determinação desse fator de forma [BR 93], sua presença garante que as características do OPEP na origem, com o uso de fatores de forma, manifestem-se automaticamente no potencial com o AP, Figs. 4.3 e 4.4.

Em resumo, mostramos que os termos ímpares do potencial com o AP reproduzem o OPEP a grandes distâncias e apresentam, na origem, os efeitos da inclusão de fatores de forma no OPEP puro. Portanto, no que se refere à troca de um pión, o modelo fornece a fenomenologia correta.

4.3.4 O potencial escalar

O modelo de Skyrme gera um termo escalar, designado também por central, que não depende de spin ou isospin. Entretanto, ao contrário dos canais ímpares, analisados na seção anterior, este termo não descreve bem a fenomenologia, que exige um potencial atrativo a distâncias médias e grandes. No caso do AP, este canal é sempre repulsivo (Fig. 4.2).

Segundo a teoria de campos, o termo escalar do potencial NN deve-se a trocas de números pares de píons e, em particular, a grandes distâncias, ele é dominado pela troca de dois píons. Esta troca não é tão facilmente tratada como a de um pión, porque os diagramas apresentam *loops*, onde diversos estados intermediários diferentes podem contribuir. A amplitude total da troca de dois píons (*two pion exchange* - TPE) pode ser atribuída a dois grupos de diagramas, mostrados na Fig. 4.10. A linha superior corresponde à contribuição quiral mínima, que contém unicamente nucleons e píons. Os demais diagramas necessários para compor a amplitude total incluem estados intermediários Δ , efeitos associados ao vácuo da QCD e correlações entre os píons trocados. Todos estes processos estão contidos nos vértices extensos indicados pela letra R, na segunda linha da figura.

Fig. 4.10: Amplitude da troca de dois píons, baseada na amplitude píon-nucleon.

A estrutura apresentada na Fig. 4.10 resulta da construção da amplitude TPE a partir dos diagramas do espalhamento πN , que são mostrados na Fig. 4.11. O tratamento em teoria de campos desta amplitude é discutido no apêndice E. Os três primeiros diagramas contêm apenas píons e nucleons, e correspondem à contribuição quiral mínima, calculada através das lagrangianas do modelo σ não-linear. As contribuições restantes, contidas no vértice extenso R, provêm dos dados do espalhamento πN a baixas energias, estendidos a regiões abaixo do limiar da reação por meio de relações de dispersão, e parametrizados pelos coeficientes HJS [Hoh 83]. Cada um dos diagramas da Fig. 4.10 pode ser obtido escolhendo dois diagramas da Fig. 4.11 e unindo as linhas de píons de um deles com as do outro.

Fig. 4.11: Amplitude de espalhamento píon-nucleon. Os três primeiros diagramas constituem a contribuição quiral mínima e o vértice extenso R indica todas as contribuições restantes.

Utilizando os coeficientes HJS nos vértices R, o potencial pela troca de dois píons (TPEP), a distâncias médias e grandes, pode ser determinado com dependência mínima de modelo. Da Rocha e Robilotta realizaram este tipo de cálculo [RR 94, RR 95, RR 97] e obtiveram o TPEP a grandes distâncias na forma de uma expansão multipolar, cujos coeficientes contêm a informação sobre o espalhamento πN . A contribuição quiral mínima (primeira linha da Fig. 4.10) apresenta vários cancelamentos entre os diversos diagramas, não fornecendo suficiente atração de alcance intermediário ao canal escalar do potencial. Esta atração é, pois, proveniente das outras contribuições ao espalhamento πN .

A forma aproximada do TPEP é dada pela Eq. 4.15, sendo que a informação sobre o espalhamento πN está contida na magnitude do potencial. Sua função de perfil (4.16) é essencialmente a amplitude do OPEP ao quadrado, a menos do fator $\sqrt{2m_\pi r}$, no denominador. Forma similar para a função de perfil foi obtida por Kaiser, Gerstendörfer e Weise [KGW 98], no contexto da teoria de perturbação quiral. O grupo de Argonne utilizou explicitamente a forma de um OPEP ao quadrado para descrever a troca de dois píons no seu potencial fenomenológico [WSA 84]. A parte de longo alcance do canal escalar é dada, em MeV, por

$$\mathcal{V}_C(d) = -4.801125 T_\pi^2(d), \quad (4.88)$$

onde

$$T_\pi(d) = \left(1 + \frac{3}{m_\pi d} + \frac{3}{m_\pi^2 d^2}\right) \frac{e^{-m_\pi d}}{m_\pi d}. \quad (4.89)$$

Uma vez que a troca de um pión é bem descrita pelo modelo de Skyrme no AP, esperamos que o potencial escalar a distâncias grandes apresente uma geometria parecida com as citadas acima, e seja proporcional à exponencial $e^{-2m_\pi d}$ multiplicada por um polinômio de potências negativas da distância d . Portanto, o fato de os resultados no AP serem repulsivos deve estar associado a um coeficiente inadequado, de sinal positivo. Para estudar este aspecto do problema, construímos uma expressão analítica para o termo escalar-isoescalar do AP, a grandes distâncias, na forma de multipolos, extraindo a sua dependência em d , conforme discutido a seguir.

O termo escalar é dado pela soma das Eqs. 4.68 e 4.69, que são integrais de expressões que envolvem senos e cossenos das funções F_x e F_y , e suas derivadas, bem como o produto escalar dos versores $\hat{x}$ e $\hat{y}$. Procuramos primeiramente expansões em d para estas funções, que são, em seguida, substituídas em (4.68) e (4.69), para a obtenção da expressão analítica desejada para estes termos do potencial.

O *skyrmion* é um objeto finito, ou seja, de existência significativa somente numa região próxima a seu centro. Assim, as integrais efetuadas na seção 4.3.2 recebem contribuição efetiva somente da região central de cada ouriço. Este fato é ilustrado nas Figs. 4.12 e 4.13, onde é apresentada a densidade de potencial $\frac{dV_C}{dz}$, obtida como a soma das expressões (4.68) e (4.69), após a integração numérica em ρ e antes da integração em z , para alguns valores de d . Obser-

vamos que a contribuição significativa para o potencial vem das regiões com x_z, y_z pequenos, até pouco mais de 1 fm.

Como indicado em (4.68) e (4.69), as integrais são efetuadas na região positiva do eixo z , onde está situado o ouriço 2, representado por $U(y)$ (ver Fig. 4.1). Para distâncias grandes, a região significativa do ouriço 2 está em presença apenas da assíntota do ouriço 1, $U(x)$. A região no entorno de 2 é caracterizada por $|y| \ll d$. Para realizar a decomposição multipolar, expandimos o módulo de $\mathbf{x}$, que aparece nas expressões assintóticas de F_x e F'_x , dadas respectivamente por (3.10) e (3.11), em potências de $\frac{1}{d}$, usando

$$x = |\mathbf{x}| = \sqrt{\rho^2 + x_z^2} = \sqrt{\rho^2 + (d + y_z)^2}. \quad (4.90)$$

No limite de ρ e y_z pequenos em relação a d , temos

$$x = d + y_z + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{d} - \frac{1}{2} \frac{\rho^2 y_z}{d^2} + \frac{1}{2} \frac{\rho^2 y_z^2}{d^3} - \frac{1}{8} \frac{\rho^4}{d^3} + \dots \quad (4.91)$$

Utilizando esta expansão nas Eqs. (3.10) e (3.11), obtemos as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} F_x &\simeq \alpha e^{-m_\pi y_z} \left(1 + f_1 \frac{1}{m_\pi d} + f_2 \frac{1}{m_\pi^2 d^2} \right) \frac{e^{-m_\pi d}}{m_\pi d}, \\ F'_x &\simeq -\alpha e^{-m_\pi y_z} \left(1 + g_1 \frac{1}{m_\pi d} + g_2 \frac{1}{m_\pi^2 d^2} \right) \frac{e^{-m_\pi d}}{d}, \\ \hat{x} \cdot \hat{y} &\simeq \frac{y_z}{\sqrt{\rho^2 + y_z^2}} \left(1 + \frac{m_\pi \rho^2}{y_z} \frac{1}{m_\pi d} - \frac{3}{2} m_\pi^2 \rho^2 \frac{1}{m_\pi^2 d^2} \right), \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 - m_\pi y_z - \frac{m_\pi^2 \rho^2}{2}, \\ f_2 &= m_\pi^2 y_z^2 - m_\pi^2 \rho^2 - 2 m_\pi y_z + m_\pi^3 \rho^2 y_z + \frac{m_\pi^4 \rho^4}{8}, \\ g_1 &= 2 - m_\pi y_z - \frac{m_\pi^2 \rho^2}{2}, \\ g_2 &= 2 + m_\pi^2 y_z^2 - \frac{3}{2} m_\pi^2 \rho^2 - 4 m_\pi y_z + m_\pi^3 \rho^2 y_z + \frac{m_\pi^4 \rho^4}{8}. \end{aligned}$$

Ao proceder a expansão, as expressões foram testadas passo a passo, ordem a ordem, observando-se a razão entre as formas aproximadas e as equações do capítulo 3. Constatamos que é necessário expandir até ordem d^{-2} no polinômio, para a obtenção de razões assintoticamente constantes.

Fig. 4.12: Função-integrando, em z , para obtenção do potencial escalar $V_C(d)$, para $d = 1$ fm (a) e para $d = 3$ fm (b); unidades arbitrárias. Os limites de integração em z são, na prática, zero e ∞ (infinito) devido à paridade da função, observada nestes gráficos.

Fig. 4.13: Função-integrando, em z , para obtenção do potencial escalar $V_C(d)$, para $d = 5$ fm (a) e para $d = 10$ fm (b); unidades arbitrárias.

Substituindo as expressões acima em (4.68) e (4.69), obtemos

$$V_{C,\sigma}(d) \simeq \left\{ A_0 + \frac{A_1}{m_\pi d} + \frac{A_2}{m_\pi^2 d^2} \right\} \frac{e^{-2m_\pi d}}{(m_\pi d)^2}, \quad (4.92)$$

$$V_{C,4}(d) \simeq \left\{ B_0 + \frac{B_1}{m_\pi d} + \frac{B_2}{m_\pi^2 d^2} \right\} \frac{e^{-2m_\pi d}}{(m_\pi d)^2}, \quad (4.93)$$

onde

$$A_0 = -\alpha^2 f_\pi^2 m_\pi^2 4\pi \frac{1}{2} \int_0^\infty dz e^{-2m_\pi y_z} \int_0^\infty \rho d\rho (1 - c_y), \quad (4.94)$$

$$A_1 = -\alpha^2 f_\pi^2 m_\pi^2 4\pi \frac{1}{2} \int_0^\infty dz e^{-2m_\pi y_z} \int_0^\infty \rho d\rho [2 f_1] (1 - c_y), \quad (4.95)$$

$$A_2 = -\alpha^2 f_\pi^2 m_\pi^2 4\pi \frac{1}{2} \int_0^\infty dz e^{-2m_\pi y_z} \int_0^\infty \rho d\rho [f_1^2 + 2 f_2] (1 - c_y), \quad (4.96)$$

$$B_0 = \alpha^2 \frac{4\pi}{3 e^2} m_\pi^2 \int_0^\infty dz e^{-2m_\pi y_z} \int_0^\infty \rho d\rho \left\{ (F_y'^2 + t_y^2) - \frac{y_z^2}{\rho^2 + y_z^2} (F_y'^2 - t_y^2) \right\}, \quad (4.97)$$

$$B_1 = \alpha^2 \frac{4\pi}{3 e^2} m_\pi^2 \int_0^\infty dz e^{-2m_\pi y_z} \int_0^\infty \rho d\rho \left\{ [2 g_1] (F_y'^2 + t_y^2) - \frac{y_z^2}{\rho^2 + y_z^2} \left[2 g_1 + 2 \frac{m_\pi \rho^2}{y_z} \right] (F_y'^2 - t_y^2) \right\}, \quad (4.98)$$

$$B_2 = \alpha^2 \frac{4\pi}{3 e^2} m_\pi^2 \int_0^\infty dz e^{-2m_\pi y_z} \int_0^\infty \rho d\rho \left\{ [g_1^2 + 2g_2 + 1] (F_y'^2 + t_y^2) + 2t_y^2 - \frac{y_z^2}{\rho^2 + y_z^2} \left[g_1^2 + 2g_2 - 1 + \frac{m_\pi^2 \rho^4}{y_z^2} - 3m_\pi^2 \rho^2 + 4 \frac{m_\pi \rho^2}{y_z} g_1 \right] (F_y'^2 - t_y^2) \right\}. \quad (4.99)$$

Observando gráficos dos integrandos em z dos coeficientes B para vários valores elevados de d (a partir de $d \simeq 15$ fm), verificamos que são praticamente independentes de d , confirmando a validade das aproximações realizadas^{||}. As integrais para os coeficientes A , entretanto, possuem uma pequena dependência em d , que vem do fato de a função $(1 - c_y)$ não ser suficiente amortecida em $z = 0$. Redefinindo os coeficientes maiúsculos A_i em termos de outros coeficientes, minúsculos, a_i , supostamente sem dependência em d , como

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0 + \frac{a'_0}{m_\pi d} + \frac{a''_0}{m_\pi^2 d^2}, \\ a'_0 + A_1 &= a_1 + \frac{a'_1}{m_\pi d}, \\ a''_0 + a'_1 + A_2 &= a_2. \end{aligned}$$

calculamos (a_0, a'_0, a''_0) a partir de A_0 para três valores (elevados) de d (no caso, $d = 20, 25, 30$ fm); (a_1, a'_1) a partir de A_1 para dois valores de d (no caso, $d = 25, 30$ fm); e a_2 a partir de A_2

^{||}Estes gráficos não são apresentados aqui.

obtido com $d = 30$ fm. O novo potencial escalar proveniente de $\mathcal{L}_\sigma$ é

$$V_{C,\sigma}(d) = \left\{ a_0 + \frac{a_1}{m_\pi d} + \frac{a_2}{m_\pi^2 d^2} \right\} \frac{e^{-2m_\pi d}}{(m_\pi d)^2}. \quad (4.100)$$

A soma das expressões (4.100) e (4.93) determina V_C ,

$$V_C(d) = \left\{ C_0 + \frac{C_1}{m_\pi d} + \frac{C_2}{m_\pi^2 d^2} \right\} \frac{e^{-2m_\pi d}}{(m_\pi d)^2}, \quad (4.101)$$

com $C_i = a_i + B_i$ ($i = 0, 1, 2$). A expressão, assim obtida, é uma parametrização do potencial escalar a grandes distâncias e sua geometria é a mesma do termo escalar do potencial fenomenológico de Argonne, dado pelas Eqs. 4.88 e 4.89. Em outras palavras, o potencial escalar do modelo de Skyrme tem a mesma dependência com a distância que o fenomenológico.

Fig. 4.14: Razão entre a expansão em multipolos e o potencial escalar de Skyrme exato (linha contínua). As razões referentes às contribuições de $\mathcal{L}_\sigma$ (tracejado) e de $\mathcal{L}_4$ (pontilhado), separadamente, são também apresentadas.

A Fig. 4.14 apresenta a razão entre as contribuições das lagrangianas $\mathcal{L}_\sigma$ e $\mathcal{L}_4$ ao potencial e o potencial total, expandidos da maneira apresentada acima, e os respectivos resultados exatos. Notamos, na Fig. 4.2, que $\mathcal{L}_\sigma$ (através de $\mathcal{L}_{SB}$) e $\mathcal{L}_4$ contribuem com sinais diferentes

para o potencial escalar, de modo que a razão referente ao potencial escalar total apresenta uma convergência para a unidade mais lenta que as referentes às partes V_σ e V_4 . A convergência à unidade não é perfeita, o que se justifica pela imprecisão dos cálculos numéricos envolvidos e pelo truncamento da série na ordem $\frac{1}{d^2}$.

Estes resultados confirmam nossa suposição inicial de que o potencial escalar do modelo de Skyrme possui a geometria própria da troca de dois píons, a grandes distâncias. Queremos ressaltar que esta característica não é particular do *Ansatz* Produto, mas inerente ao modelo, pois a geometria obtida provém exclusivamente da expansão de F_x , que é a solução com $B = 1$.

A outra parte do resultado diz respeito aos motivos pelos quais o potencial de Skyrme não é atrativo. Os coeficientes da expansão obtida são apresentados na tabela 4.2. Podemos olhar apenas para o coeficiente do termo dominante, pois os demais seguem o mesmo comportamento. Observamos que a soma da repulsão de $\mathcal{L}_4 (B_n)$ com a atração de $\mathcal{L}_\sigma (a_n)$ resulta numa pequena repulsão. Isto sugere que o resultado incorreto provém de uma contribuição inadequada do termo de estabilização. Podemos dizer que a atração não está presente porque o termo de estabilização de curto alcance $\mathcal{L}_4$ tem, na realidade, alcance demasiadamente longo. Além disso, observamos, nas Eqs. 4.94-4.99, que os coeficientes dependem tanto de características do modelo em si quanto do AP, pois as integrais envolvem também a forma das expressões do potencial.

n	a_n	B_n	C_n
0	-7.29	8.52	1.23
1	-6.79	36.73	29.94
2	-12.99	110.07	97.08

Tabela 4.2: Coeficientes da expansão em multipolos do termo escalar do potencial NN no modelo de Skyrme, em MeV. a indica os termos de (4.100), B , de (4.93) e C , o coeficiente total.

Outra sugestão de que existe, de alguma forma, um conteúdo atrativo no potencial central do modelo de Skyrme pode ser observada nos gráficos das Figs. 4.12 e 4.13. Para $d = 10$ fm, a função é negativa na região entre os dois ouriços e fornece, portanto, uma contribuição atrativa para o potencial escalar. Isto sugere novamente que poderíamos ter um

resultado atrativo a distâncias intermediárias, caso os *skyrmions* fossem mais estreitos, ou seja, se o alcance do termo de estabilização fosse mais curto.

Estas últimas observações indicam que o alcance excessivo de $\mathcal{L}_4$ é responsável pelo conteúdo incorreto do modelo. As razões do problema podem ser uma mistura de características tanto do modelo de Skyrme quanto do *Ansatz* Produto.

4.3.5 A função de perfil

O *Ansatz* Produto corresponde a uma hipótese sobre o campo U com $B = 2$. Para investigar a causa da falta de atração no potencial escalar, estudamos a função de perfil F associada à configuração U do AP. Juntamente com a seção anterior, este estudo nos sugeriu os passos para a construção do novo *ansatz*.

O campo composto U é o produto de duas matrizes unitárias, sendo ele, portanto, também unitário. Da mesma maneira que o campo com $B = 1$, ele pode ser escrito na forma

$$U(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}} F(\mathbf{r})}. \quad (4.102)$$

A função de perfil F está diretamente ligada ao número bariônico da configuração de campos a que está associada. Ela representa o ângulo quiral em função da posição e é tal que

$$\begin{aligned} \cos F &= \frac{S}{f_\pi}, \\ \sin F &= \frac{1}{f_\pi} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}, \end{aligned}$$

onde S e $\mathbf{P}$ são os campos físicos, dados pelas Eqs. 4.34 e 4.35,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{f_\pi} \left(\sigma^{(1)} \sigma^{(2)} - \boldsymbol{\pi}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\pi}^{(2)} \right), \\ \mathbf{P} &= \frac{1}{f_\pi} \left(\sigma^{(1)} \boldsymbol{\pi}^{(2)} + \sigma^{(2)} \boldsymbol{\pi}^{(1)} - \boldsymbol{\pi}^{(1)} \times \boldsymbol{\pi}^{(2)} \right). \end{aligned}$$

e $\hat{\mathbf{n}}$ é a direção das linhas de campo de $\mathbf{P}$. As convenções usadas na definição de $\hat{\mathbf{n}}$ e de $\sin F$ são explicitadas no decorrer desta seção.

O caso $B = 1$, com o ouriço, é esfericamente simétrico, $F = F(r)$ e o problema é unidimensional, uma vez que F é função de uma única variável. No caso $B = 2$ do AP há, em geral, apenas simetria azimutal, em relação ao eixo que une os centros dos dois *skyrmions* e devemos ter $F = F(\rho, z)$. Para determinar as características principais deste ângulo quiral, estudamos as componentes do campo U ao longo dos eixos ρ e z .

Quando $d = 0$, temos $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{r}$ e, portanto, $F_x = F_y$. Definimos a variável F_1 , com $B = 1$, para indicar F_x ou F_y , quando ambos são iguais. As expressões (4.34) e (4.35) fornecem

$$S = f_\pi \cos(2F_1), \quad (4.103)$$

$$\mathbf{P} = f_\pi \sin(2F_1) \hat{\mathbf{r}} \quad (4.104)$$

e correspondem a um ouriço com ângulo quiral igual ao dobro de F_1 . Observamos que, de acordo com os valores deste ângulo na origem (2π) e no infinito (zero), temos um objeto semelhante ao *skyrmion* do Cap. 3, mas com número bariônico $B = 2$, como mostra a Fig. 4.16, partes II.

No caso $B = 1$, a magnitude do campo π é uma curva suave, com derivada contínua, e aponta sempre para fora, pois $\sin F$ é sempre maior ou igual a zero. Já no caso do AP, $\mathbf{P}$ pode apontar para o centro do *skyrmion* também, pois F assume valores maiores que π em algumas regiões. Os campos $\mathbf{P}$ e S são definidos sem ambigüidades e seus valores ao longo dos eixos z e ρ são apresentados, respectivamente, em I(a) e I(b) da Fig. 4.16. Para o campo $\mathbf{P}$, convencionamos $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{r}}$ e, portanto, o sentido de $\mathbf{P}$ está incorporado na magnitude $P = \sin F$. Os ângulos quirais correspondentes a I(a) e I(b), com a convenção $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{r}}$, são apresentados em II(a) e II(b), respectivamente. Observamos que, se a magnitude P fosse mantida positiva, deveríamos ter $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{r}}$ na região em que $\mathbf{P}$ aponta radialmente para dentro, $\sin F$ ficaria restrito à região entre zero e um e, portanto, F não adquiriria valores na região entre π e 2π .

Quando $d \neq 0$, no eixo z , temos $\rho = 0$, $\mathbf{x} = (0, 0, z + \frac{d}{2})$ e $\mathbf{y} = (0, 0, z - \frac{d}{2})$. Os campos são dados por

$$S = \begin{cases} f_\pi \cos(F_x - F_y), & -\frac{d}{2} \leq z \leq \frac{d}{2}, \\ f_\pi \cos(F_x + F_y), & z \geq \frac{d}{2} \text{ ou } z \leq -\frac{d}{2}, \end{cases} \quad (4.105)$$

$$\mathbf{P} = \begin{cases} -f_\pi \sin(F_x + F_y)\hat{\mathbf{z}}, & z \leq -\frac{d}{2}, \\ f_\pi \sin(F_x - F_y)\hat{\mathbf{z}}, & -\frac{d}{2} \leq z \leq \frac{d}{2}, \\ f_\pi \sin(F_x + F_y)\hat{\mathbf{z}}, & z \geq \frac{d}{2}. \end{cases} \quad (4.106)$$

No eixo ρ , temos $z = 0$, $|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}| = \sqrt{\frac{d^2}{4} + \rho^2}$ e, portanto, novamente $F_x = F_y = F_1$. Os campos são dados por

$$S = f_\pi [\cos^2 F_1 + \cos(2\theta) \sin^2 F_1], \quad (4.107)$$

$$\mathbf{P} = f_\pi [2 \sin F_1 \sin \theta (\cos F_1 \hat{\rho} - \sin F_1 \cos \theta \hat{\phi})], \quad (4.108)$$

onde $\hat{\phi}$ é o versor da direção azimutal e θ é o ângulo agudo entre $\mathbf{x}$ (ou $\mathbf{y}$) e o eixo z , dado por

$$\theta = \arctg \left(\frac{\rho}{d/2} \right),$$

com $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, mostrado na Fig. 4.15.

Fig. 4.15: Definição do ângulo θ , uma parametrização para pontos no eixo ρ .

Na situação com $d = 0$, para que $F = 2F_1$, a magnitude de $\mathbf{P}$ deve ter um sinal negativo no entorno do centro dos *skyrmions* e, portanto, o versor $\hat{\mathbf{n}}$ deve ser centrífugo. Tomando esta situação como limite, definimos, para qualquer valor de d , o versor da direção do campo do pión $\hat{\mathbf{n}}$ apontando sempre para fora, em relação à origem. Assim, convencionamos

$$\mathbf{P} = P \hat{\mathbf{n}} = \sin F \hat{\mathbf{n}},$$

tal que

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} \geq 0,$$

sendo o sentido de $\mathbf{P}$ incorporado no sinal da magnitude P e, portanto, no valor de F .

Observando as Figs. 4.17 - 4.19, parte II(b), vemos que, para manter o limite $F \rightarrow 2\pi$ quando $\rho \rightarrow 0$, existem descontinuidades no ângulo quiral, que correspondem a descontinuidades na magnitude do campo $\mathbf{P}$, observadas nas partes I(b) das figuras. Elas devem-se ao fato de a componente do campo na direção ρ anular-se num ponto onde a componente azimutal é diferente de zero. No eixo z , o campo sempre aponta para a origem, no seu entorno, ou seja, $\sin F$ é negativo. Portanto, F tende a 2π na origem e o ângulo quiral tem as propriedades características de um sistema com $B = 2$.

Quando $d = d_{cr} = 2F_1^{-1} \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0.860$ fm, ocorre uma mudança de comportamento, no eixo ρ . Se $d > d_{cr}$, então F_1 é sempre menor que $\frac{\pi}{2}$, a componente de $\mathbf{P}$ na direção ρ (4.108) não assume valores negativos e F não assume valores maiores que π . Neste caso, o ângulo quiral ao longo desta direção tende a zero, e não a 2π , na origem. Esta mudança de comportamento pode ser observada comparando-se as partes (b) da Fig. 4.19, onde $d = 0.8$ fm, com as da Fig. 4.20, onde $d = 0.9$ fm. Por outro lado, o comportamento ao longo do eixo z permanece praticamente inalterado, não havendo diferença qualitativa quando d ultrapassa d_{cr} . Para termos um ângulo quiral bem definido na origem, tanto a partir do eixo z como do eixo ρ , admitimos que, para $d \geq d_{cr}$, ocorre a dissociação do sistema. Por isso, $\hat{\mathbf{n}}$ é redefinido para esses valores de d , de tal modo que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x} &> 0 & \text{para } z < 0, \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{y} &> 0 & \text{para } z > 0. \end{aligned} \quad (4.109)$$

Estas definições mudam o sinal de $\sin F$, na Eq. 4.106, no intervalo $-\frac{d}{2} < z < \frac{d}{2}$, de forma que F tende a zero quando nos aproximamos da origem, pelo eixo z .

A convenção (4.109) coloca-nos a questão da definição dos centros dos *skyrmions*. Ao longo do eixo z , os pontos $z = \pm \frac{d}{2}$ passam a ser pontos de inversão do sentido de $\mathbf{P}$. Entretanto, estes pontos não coincidem com aqueles onde $\sin F$ é nulo, que têm, por sua vez, coordenadas z iguais a $z_{ef}^y > \frac{d}{2}$ e $z_{ef}^x < -\frac{d}{2}$, onde $F_x + F_y = \pi$. Para que as curvas de P sejam contínuas, definimos os centros efetivos dos *skyrmions* dissociados como

$$\begin{aligned} X_{ef} &= (0, 0, z_{ef}^x), \\ Y_{ef} &= (0, 0, z_{ef}^y), \end{aligned} \quad (4.110)$$

e redefinimos as prescrições (4.109), substituindo

$$\begin{array}{ll} \mathbf{x} & \text{por } \mathbf{x}_{\text{ef}} = \mathbf{r} - z_{\text{ef}}^x \hat{\mathbf{z}}, \\ \mathbf{y} & \text{por } \mathbf{y}_{\text{ef}} = \mathbf{r} - z_{\text{ef}}^y \hat{\mathbf{z}}, \end{array} \quad (4.111)$$

Para grandes distâncias entre os *skyrmions*, temos $z_{\text{ef}}^y \rightarrow \frac{d}{2}$, $z_{\text{ef}}^x \rightarrow -\frac{d}{2}$ e $\mathbf{x}_{\text{ef}} \rightarrow \mathbf{x}$, $\mathbf{y}_{\text{ef}} \rightarrow \mathbf{y}$. A mudança de convenção de $\hat{\mathbf{n}}$ pode ser observada nas partes (a) da Fig. 4.19 para a 4.20.

Assim, o problema deve ser olhado sob duas perspectivas complementares. De modo geral, o potencial do sistema $B = 2$ é definido em (4.26) a partir da distância de construção d entre os dois *skyrmions* que formam o AP. Entretanto, para $d < d_{cr}$ este sistema representa um único objeto com referência na origem, enquanto que para $d > d_{cr}$ ele corresponde a dois subsistemas distintos, cada um deles com $B = 1$. Para distâncias maiores do que d_{cr} , mas não muito grandes, cada um destes subsistemas é deformado, já que o seu centro não coincide com o da solução original com $B = 1$. Neste caso, temos a distância física entre os nucleons dada por $d_{\text{ef}} = z_{\text{ef}}^y - z_{\text{ef}}^x$. Por outro lado, para separações muito grandes, estas deformações desaparecem.

Em resumo, as Figs. 4.16 a 4.21 mostram, para vários valores da distância de construção d , entre zero e 2 fm, as magnitudes $\frac{S}{f_\pi}$ e $\frac{\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{f_\pi}$, nos eixos z e ρ , e os ângulos quirais correspondentes, sendo que o versor $\hat{\mathbf{n}}$ indica a direção de $\mathbf{P}$ e é tal que

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} \geq 0, \quad (4.112)$$

se $\frac{d}{2} < d_{cr}$, e

$$\begin{array}{ll} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}_{\text{ef}} > 0, & z < 0, \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{y}_{\text{ef}} > 0, & z > 0, \end{array} \quad (4.113)$$

se $\frac{d}{2} \geq d_{cr}$, com $x_{\text{ef}}, y_{\text{ef}}$ definidos em (4.110, 4.111).

A descontinuidade no campo do pión ao longo do eixo ρ (na realidade, fora do eixo z), que se observa nas Figs. 4.17 - 4.19, é devida a uma componente azimutal não-nula do vetor $\mathbf{P}$. Ela é proveniente do produto vetorial da Eq. 4.35, que é nulo no eixo z .

Este produto vetorial é precisamente um dos problemas conceituais mais graves do AP. Ele possui paridade G positiva e é responsável pelos termos da lagrangiana de interação que violam esta simetria, designados por $\mathcal{L}^{V(IP)}$, Eqs. 4.56 e 4.64, cujas integrais são nulas. Portanto, estes termos não contribuem para os canais V_{SS} e V_T do potencial. Entretanto,

Fig. 4.16: Campos S (pontilhado) e P (linha contínua) do campo composto de dois *skyrmions*, em unidades de f_π (I) e função de perfil correspondente, em unidades de π (II), para $d = 0$, sendo (a) ao longo do eixo z e (b) ao longo do eixo ρ (z e ρ em fm).

a parte escalar da lagrangiana, que precisa ser modificada, também recebe contribuição do produto vetorial, e seria, de fato, afetada se o eliminássemos. Assim, modificamos o AP de forma a apresentar os números quânticos corretos, eliminando o produto vetorial do campo $\mathbf{P}$ e mantendo a unitariedade de U , como veremos a seguir.

Fig. 4.17: Campos S e P do campo composto de dois *skyrmions* e função de perfil correspondente, para $d = 0.1$ fm. Mesmas convenções da Fig. 4.16.

Fig. 4.18: Campos S e P do campo composto de dois *skyrmions* e função de perfil correspondente, para $d = 0.5$ fm. Mesmas convenções da Fig. 4.16.

Fig. 4.19: Campos S e P do campo composto de dois *skyrmions* e função de perfil correspondente, para $d = 0.8$ fm. Mesmas convenções da Fig. 4.16.

Fig. 4.20: Campos S e P do campo composto de dois *skyrmions* e função de perfil correspondente, para $d = 0.9$ fm. Mesmas convenções da Fig. 4.16.

Fig. 4.21: Campos S e P do campo composto de dois *skyrmions* e função de perfil correspondente, para $d = 2.0$ fm. Mesmas convenções da Fig. 4.16.

4.4 Problemas do Ansatz Produto e tentativas de solução

A proposta básica deste trabalho é construir, a partir de *skyrmions* com $B = 1$, uma solução que represente de maneira aproximada um sistema de dois nucleons e que seja capaz de reproduzir a atração no canal escalar-isoescalar do potencial. Na formulação de uma proposta de composição, ou *ansatz*, para a interação NN, esperamos que

1. o número bariônico da configuração seja igual a dois;
2. os campos $\mathbf{P}$ e S tenham os números quânticos corretos: $\mathbf{P}$ deve ser um isovetor pseudo-escalar, com paridade G negativa, e S , um isoescalar escalar.

Além disso, a lagrangiana composta deve

3. respeitar a paridade G , que impede a presença de termos com números ímpares de píons;
4. ser invariante pela permutação entre os ouriços 1 e 2;
5. ter simetria quiral.

No caso do AP, o número bariônico de um sistema composto é sempre identicamente igual ao número de *skymions* componentes, sendo esta uma de suas vantagens, como apontado na seção 4.3.1. O cálculo do potencial NN, apresentado na seção 4.3.2, é relativamente simples e a troca de um pión é bem reproduzida, como mostrado na seção 4.3.3. Entretanto, esta abordagem apresenta também vários problemas.

Na seção 4.3.4, investigamos o primeiro deles, de caráter fenomenológico: o canal central do potencial NN não é atrativo. Como resultado daquela discussão, vimos que o comportamento assintótico deste canal tem a geometria correta da troca de dois píons, mas com coeficientes (em MeV) positivos, ainda que com um termo dominante pequeno:

$$V_C(d) \simeq \left\{ 1.23 + 29.9 \frac{1}{m_\pi d} + 97.1 \frac{1}{m_\pi^2 d^2} \right\} \frac{e^{-2m_\pi d}}{(m_\pi d)^2}. \quad (4.114)$$

Em seguida, determinando a função de perfil F do AP, na seção 4.3.5, encontramos a primeira violação de princípio e as dificuldades a ela associadas, devidas ao fato de o campo $\mathbf{P}$ conter uma componente azimutal. O campo piônico é dado por

$$\mathbf{P} = \frac{1}{f_\pi} \left(\sigma^{(1)} \boldsymbol{\pi}^{(2)} + \sigma^{(2)} \boldsymbol{\pi}^{(1)} - \boldsymbol{\pi}^{(1)} \times \boldsymbol{\pi}^{(2)} \right).$$

O produto vetorial tem paridade G positiva e é o responsável pela violação do requisito (2). Além disso, o campo $\mathbf{P}$ não é invariante pela troca entre os ouriços 1 e 2, pois

$$\mathbf{P} \xrightarrow{1 \leftrightarrow 2} \frac{1}{f_\pi} \left(\sigma^{(1)} \boldsymbol{\pi}^{(2)} + \sigma^{(2)} \boldsymbol{\pi}^{(1)} + \boldsymbol{\pi}^{(1)} \times \boldsymbol{\pi}^{(2)} \right) \neq \mathbf{P} \quad (4.115)$$

e, novamente, observamos que a parte problemática do AP é o produto vetorial $\boldsymbol{\pi}_1 \times \boldsymbol{\pi}_2$. Daí decorrem as violações das condições (3) e (4), como pode ser verificado nas Eqs. 4.56 e 4.64. Este problema é grave, mesmo que estes termos se anulem na integração sobre todo o espaço e não contribuam ao potencial NN, como apontado anteriormente.

Com respeito à simetria quiral, podemos olhar o resultado (4.37),

$$L_\mu = U_2^\dagger \left[L_\mu^{(1)} - R_\mu^{(2)} \right] U_2,$$

ou seja, a forma esquerda composta é efetivamente dada por $\mathbf{L}_\mu^{(1)} - \mathbf{R}_\mu^{(2)}$. As transformações axiais individuais são,

$$\begin{aligned} \text{para } \mathbf{L}_\mu^{(1)}, \quad \delta^A \mathbf{L}_\mu^{(1)} &= -\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{L}_\mu^{(1)}, \\ \text{para } \mathbf{R}_\mu^{(2)}, \quad \delta^A \mathbf{R}_\mu^{(2)} &= \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{R}_\mu^{(2)}. \end{aligned}$$

Assim, se considerarmos válidas estas transformações, a forma esquerda do AP não pode se transformar corretamente, pois

$$\delta^A \mathbf{L}_\mu = \delta^A \left(\mathbf{L}_\mu^{(1)} - \mathbf{R}_\mu^{(2)} \right) = -\boldsymbol{\beta} \times \left(\mathbf{L}_\mu^{(1)} + \mathbf{R}_\mu^{(2)} \right) \neq -\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{L}_\mu. \quad (4.116)$$

Ou seja, a transformação axial de $\mathbf{L}_\mu$ leva esta forma num objeto de natureza diferente.

Convém lembrar que, de modo geral, na formulação de um *ansatz* para o caso $B = 2$, os campos constituintes $\boldsymbol{\pi}^{(1)}$ e $\boldsymbol{\pi}^{(2)}$ não existem independentemente. Eles correspondem a peças usadas na construção do novo campo, que é uma solução aproximada das equações de movimento com $B = 2$. Assim, $\mathbf{P}$ e S são os campos físicos e devem obedecer às transformações

quais corretas, definidas no capítulo 2. Por isso, se não for possível implementar simultaneamente as transformações quais dos campos (π, σ) e $(\mathbf{P}, S)$, são estas últimas que devem ser privilegiadas.

Em geral, é difícil implementar simultaneamente as cinco condições necessárias a um bom *ansatz*. Por exemplo, há algum tempo foi proposto um *ansatz* [Rob 89] que enfatizava a simetria quiral e supunha que a forma esquerda composta fosse dada por

$$L_\mu = L_\mu^{(1)} + L_\mu^{(2)}. \quad (4.117)$$

Entretanto, esta proposta viola a condição (1). Isto pode ser observado, por exemplo, no caso de dois ouriços superpostos ($d = 0$), em que temos $L_\mu^{(1)} = L_\mu^{(2)}$ e $L_\mu = 2L_\mu^{(1)}$, o que gera $B = 8$.

Uma outra proposta, que tentava corrigir a violação das simetrias por parte do AP, construía a função de perfil F a partir de F_x e F_y [GR 9?]. Este procedimento resolve algumas questões, mas gera problemas de cálculo suficientemente sérios para desaconselhá-lo como alternativa.

Neste trabalho, optamos por fazer uma hipótese sobre os campos S e $\mathbf{P}$. Inicialmente, tentamos obter uma prescrição para o campo $\mathbf{P}$ e determinar S a partir do vínculo

$$S^2 = f_\pi^2 - \mathbf{P}^2. \quad (4.118)$$

A hipótese mais simples para o campo $\mathbf{P}$, com amplitude f_π , corresponde simplesmente à média entre os campos individuais,

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2) \quad (4.119)$$

e, portanto, temos

$$S^2 = f_\pi^2 - \frac{1}{4}(\pi_1^2 + \pi_2^2) - \frac{1}{2}\pi_1 \cdot \pi_2. \quad (4.120)$$

Entretanto, particularizando para a situação de dois *skyrmions* superpostos, $d = 0$, temos

$$\mathbf{P} = f_\pi \sin F_1 \hat{\mathbf{r}} \quad \text{e} \quad (4.121)$$

$$S^2 = f_\pi^2 (1 - \sin^2 F_1). \quad (4.122)$$

Assim, $\mathbf{P}$ e S descrevem campos idênticos aos do *skyrmion* com $B = 1$ e, portanto, geram um número bariônico incorreto. Este resultado sugere que é preciso, de fato, misturar σ e π individuais, para construir um objeto com $B = 2$.

Por este motivo, nossa primeira tentativa foi seguir a orientação da seção 4.3.5 e apenas eliminar o produto vetorial do campo $\mathbf{P}$ do AP. Desta maneira, propusemos

$$\mathbf{P} = \frac{1}{f_\pi} \left(\sigma^{(1)} \boldsymbol{\pi}^{(2)} + \sigma^{(2)} \boldsymbol{\pi}^{(1)} \right), \quad (4.123)$$

onde $\sigma^{(i)}$ e $\pi^{(i)}$ são os campos dos ouriços individuais. Esta proposta tem a conveniência de permitir a extensão natural para o caso $B = 3$, onde o campo do pión do objeto composto seria dado por

$$\mathbf{P} = \frac{1}{f_\pi^2} \left(\sigma^{(1)} \sigma^{(2)} \boldsymbol{\pi}^{(3)} + \sigma^{(1)} \sigma^{(3)} \boldsymbol{\pi}^{(2)} + \sigma^{(2)} \sigma^{(3)} \boldsymbol{\pi}^{(1)} \right). \quad (4.124)$$

Entretanto, a determinação de S mostrou-se difícil. Seu módulo era dado por

$$|S| = \sqrt{f_\pi^2 - \mathbf{P}^2}, \quad (4.125)$$

mas a definição de seu sinal envolve certos problemas. Para garantir o número bariônico $B = 2$, tentamos utilizar o que aprendemos no estudo do AP. Por isso, para definir o sinal de S , fizemos os novos campos coincidirem com os do AP sobre o eixo z , onde o termo do produto vetorial não contribui. Este requisito obriga o campo S a ser negativo em certa região do eixo z . Da mesma forma que no AP, são introduzidas descontinuidades em S para alguns pontos fora do eixo z . Apenas a partir de separações muito grandes entre os ouriços, $d \simeq 4.0$ fm, estas descontinuidades desaparecem.

O principal problema é que esta proposta não reproduz corretamente o número bariônico. Calculamos explicitamente a corrente bariônica e o resultado da integral numérica para o número bariônico é apresentado na Fig. 4.22, que indica que o número bariônico varia entre zero e dois, no intervalo $0 \leq d < 5.0$ fm. Assim, esta última distância corresponde ao limiar de validade do *ansatz*. Não é aceitável que ele seja válido somente para distâncias maiores que 5 fm, quando estamos investigando a camada de alcance intermediário do potencial e sabemos que o alcance dos *skyrmions* individuais é bem menor que esse valor, situando-se entre 1 e 2 fm.

Este resultado, obtido após um estudo bastante completo, realizado ao longo de vários meses, sugere que definir S apenas através do vínculo quiral (4.118) gera tanto problemas na

Fig. 4.22: Número bariônico em função da distância (em fm) entre os *skyrmions*, para a proposta dada pelas Eqs. 4.123 e 4.125.

definição do sinal de S quanto dificuldades na obtenção da topologia correta. Assim, é mais adequado fornecer também uma prescrição para S , além da prescrição para $\mathbf{P}$, mas alterando-se as amplitudes de S e de $\mathbf{P}$ para garantir a unitariedade de U .

A discussão apresentada nesta seção é a base para a construção do novo *ansatz* para o cálculo da interação NN no modelo de Skyrme, apresentado no capítulo seguinte.

Capítulo 5

O Novo Ansatz

Como resultado das investigações apresentadas na seção 4.4, construímos o *Ansatz* Novo (AN) a partir da definição (4.123) para o campo piônico:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{f_\pi} \left(\sigma^{(1)} \boldsymbol{\pi}^{(2)} + \sigma^{(2)} \boldsymbol{\pi}^{(1)} \right).$$

Naquela seção, concluímos ser preciso fazer também uma prescrição para S , ao invés de utilizar simplesmente o vínculo quiral. Esta solução torna necessária a alteração das amplitudes de S e $\mathbf{P}$, para garantirmos a unitariedade de U . Por isso, adotamos a idéia de mudar estas amplitudes através da variação do raio quiral, que é originalmente fixo em f_π . Isto equivale a substituir o requisito $S^2 + \mathbf{P}^2 = f_\pi^2$ por

$$S^2 + \mathbf{P}^2 = \eta^2,$$

sendo η um invariante quiral que pode diferir de f_π . Esta modificação é permitida porque este tipo de vínculo existe para a garantia da simetria quiral, que depende apenas da restrição de S e de $\mathbf{P}$ a uma quadri-esfera, e não do valor do raio desta.

Como se pode apreender das tentativas de *ansätze* citadas anteriormente, obter a topologia adequada não é uma tarefa trivial. Por outro lado, este problema é muito bem resolvido no *Ansatz* Produto (AP). Por isso, adotamos, para S , exatamente a forma do AP. Assim, os campos do AN são definidos por

$$S = \frac{1}{f_\pi} \left(\sigma^{(1)} \sigma^{(2)} - \boldsymbol{\pi}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\pi}^{(2)} \right), \quad (5.1)$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{f_\pi} \left(\sigma^{(1)} \boldsymbol{\pi}^{(2)} + \sigma^{(2)} \boldsymbol{\pi}^{(1)} \right), \quad (5.2)$$

onde, em relação ao AP, eliminamos apenas o termo com o produto vetorial de $\mathbf{P}$. O vínculo quiral tornou-se

$$S^2 + \mathbf{P}^2 = \eta^2, \quad (5.3)$$

sendo o novo raio quiral dado por

$$\begin{aligned} \eta^2 &= S^2 + \mathbf{P}^2 \\ &= \frac{1}{f_\pi^2} \left[\sigma^{(1)2} \sigma^{(2)2} + \sigma^{(1)2} \boldsymbol{\pi}^{(2)2} + \sigma^{(2)2} \boldsymbol{\pi}^{(1)2} + (\boldsymbol{\pi}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\pi}^{(2)})^2 \right] \\ &= f_\pi^2 - \frac{1}{f_\pi^2} \left(\boldsymbol{\pi}^{(1)} \times \boldsymbol{\pi}^{(2)} \right)^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\eta = \sqrt{\eta^2} = f_\pi \sqrt{1 + \frac{1}{f_\pi^4} \left[(\boldsymbol{\pi}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\pi}^{(2)})^2 - \boldsymbol{\pi}^{(1)2} \boldsymbol{\pi}^{(2)2} \right]}. \quad (5.4)$$

Esta proposta elimina os problemas de violação de simetrias descritos na seção 4.4, para o caso do AP, onde o campo $\mathbf{P}$ não é simétrico pela permutação entre os ouriços 1 e 2 e não possui a paridade G correta. Estes problemas são devidos à componente azimutal do campo $\mathbf{P}$ do AP, que foi eliminada na construção do AN.

O campo U é dado por

$$U = \frac{1}{\eta} (S + i\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{P}). \quad (5.5)$$

e a forma esquerda, por

$$L^\mu = U^\dagger \partial^\mu U = i\boldsymbol{\tau} \cdot \frac{1}{\eta^2} (\mathbf{P} \times \partial^\mu \mathbf{P} + S \partial^\mu \mathbf{P} - \mathbf{P} \partial^\mu S). \quad (5.6)$$

Para os cálculos deste capítulo, convém definir as formas adimensionais

$$s = \frac{S}{\eta}, \quad (5.7)$$

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{P}}{\eta}, \quad (5.8)$$

de modo que

$$s^2 + \mathbf{p}^2 = \frac{S^2 + \mathbf{P}^2}{\eta^2} = 1. \quad (5.9)$$

Desta maneira, temos

$$U = s + i\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{p}, \quad (5.10)$$

$$L^\mu = i\boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{p} \times \partial^\mu \mathbf{p} + s \partial^\mu \mathbf{p} - \mathbf{p} \partial^\mu s) \quad (5.11)$$

$$\doteq i\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{L}^\mu. \quad (5.12)$$

Para finalizar a apresentação do AN, fazemos algumas considerações sobre ele. Formalmente, as duas únicas modificações do AN em relação ao AP foram (i) eliminar o produto vetorial de $\mathbf{P}$ e (ii) mudar a normalização de U , através da função η . Entretanto, temos também diferenças conceituais, além das vantagens de eliminar as violações de simetria geradas pelo produto vetorial no AP.

Um ponto positivo é que a forma (5.2), proposta para $\mathbf{P}$, possui um significado físico explícito. Por construção, S e σ não são campos independentes, mas sim, funções de $\mathbf{P}^2$ e π^2 , respectivamente. No modelo σ linear, a parte clássica do campo escalar está associada ao seu valor esperado no vácuo, que coincide com o raio quiral. Fazendo uma analogia com a versão linear do modelo, admitimos que as funções σ , no modelo de Skyrme, representem o conteúdo clássico do vácuo na presença dos respectivos *skyrmions*. Nesta perspectiva, a forma (5.2) representa a soma dos campos piônicos de cada ouriço individual, sendo o peso de cada parcela igual ao vácuo modificado pelo outro ouriço. Quando $d \rightarrow \infty$, este vácuo (σ) é igual a f_π e os *skyrmions* se desacoplam.

Estas considerações fornecem, também, uma interpretação para a função S , do caso $B = 2$. Passando do modelo σ linear ($B = 0$) para o modelo de Skyrme com $B = 1$, o vácuo, representado pela função σ , passa a depender da coordenada espacial r . Ou seja, o *skyrmion* modifica o vácuo à sua volta. Da mesma maneira, no caso $B = 2$, o fato de S ser escrito como uma combinação entre os campos constituintes $\sigma^{(i)}$ e $\pi^{(i)}$, representa a possibilidade de a interação entre dois *skyrmions* também modificar significativamente o vácuo.

5.1 O Número Bariônico

A corrente bariônica é dada por (3.1),

$$B^\mu = -\frac{1}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \text{Tr}[L_\alpha L_\beta L_\gamma]. \quad (5.13)$$

Substituindo L_μ pela forma vetorial $\mathbf{L}_\mu$, definida em (5.12), e usando a identidade de Maurer-Cartan expressa como

$$\partial_\alpha \mathbf{L}_\beta - \partial_\beta \mathbf{L}_\alpha = 2 \mathbf{L}_\alpha \times \mathbf{L}_\beta, \quad (5.14)$$

temos

$$\begin{aligned} \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \text{Tr}[L_\alpha L_\beta L_\gamma] &= 2 \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \mathbf{L}_\alpha \times \mathbf{L}_\beta \cdot \mathbf{L}_\gamma \\ &= \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} (\partial_\alpha \mathbf{L}_\beta - \partial_\beta \mathbf{L}_\alpha) \cdot \mathbf{L}_\gamma \\ &= 2 \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \partial_\alpha \mathbf{L}_\beta \cdot \mathbf{L}_\gamma \end{aligned}$$

e a corrente é dada por

$$B^\mu = -\frac{1}{12\pi^2} \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \partial_\alpha \mathbf{L}_\beta \cdot \mathbf{L}_\gamma. \quad (5.15)$$

Substituindo (5.11) na expressão acima, escrevemos a componente zero da corrente como

$$B^0 = -\frac{1}{12\pi^2} \epsilon_{\mu\alpha\beta} (s \partial_\mu \mathbf{p} \cdot \partial_\alpha \mathbf{p} \times \partial_\beta \mathbf{p} - 3 \partial_\mu s \mathbf{p} \cdot \partial_\alpha \mathbf{p} \times \partial_\beta \mathbf{p}). \quad (5.16)$$

Esta expressão pode ser simplificada usando o resultado

$$\epsilon_{\mu\alpha\beta} (-3s \partial_\mu \mathbf{p} \cdot \partial_\alpha \mathbf{p} \times \partial_\beta \mathbf{p}) = \epsilon_{\mu\alpha\beta} \mathbf{p}^2 \partial_\mu \mathbf{p} \cdot \partial_\alpha \mathbf{p} \times \partial_\beta \mathbf{p}, \quad (5.17)$$

obtido a partir da identidade vetorial

$$\mathbf{p} \times \partial_\mu \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} \times (\partial_\alpha \mathbf{p} \times \partial_\beta \mathbf{p}) = \mathbf{p}^2 \partial_\mu \mathbf{p} \cdot \partial_\alpha \mathbf{p} \times \partial_\beta \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \partial_\mu \mathbf{p} \mathbf{p} \cdot \partial_\alpha \mathbf{p} \times \partial_\beta \mathbf{p} \quad (5.18)$$

e da igualdade

$$\epsilon_{\mu\alpha\beta} \mathbf{p} \times \partial_\mu \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} \times (\partial_\alpha \mathbf{p} \times \partial_\beta \mathbf{p}) = 2 \epsilon_{\mu\alpha\beta} \mathbf{p} \cdot \partial_\mu \mathbf{p} \mathbf{p} \cdot \partial_\alpha \mathbf{p} \times \partial_\beta \mathbf{p}. \quad (5.19)$$

Comparando as duas últimas expressões, temos

$$\epsilon_{\mu\alpha\beta} \mathbf{p}^2 \partial_\mu \mathbf{p} \cdot \partial_\alpha \mathbf{p} \times \partial_\beta \mathbf{p} = \epsilon_{\mu\alpha\beta} (3 \mathbf{p} \cdot \partial_\mu \mathbf{p} \mathbf{p} \cdot \partial_\alpha \mathbf{p} \times \partial_\beta \mathbf{p}), \quad (5.20)$$

que é equivalente ao resultado (5.17), uma vez que o vínculo quiral (5.9) fornece

$$\mathbf{p} \cdot \partial_\mu \mathbf{p} + s \partial_\mu s = 0. \quad (5.21)$$

Podemos, então, fazer a substituição

$$\epsilon_{\mu\alpha\beta} (-3 \partial_\mu s \mathbf{p} \cdot \partial_\alpha \mathbf{p} \times \partial_\beta \mathbf{p}) = \epsilon_{\mu\alpha\beta} \frac{\mathbf{p}^2}{s} \partial_\mu \mathbf{p} \cdot \partial_\alpha \mathbf{p} \times \partial_\beta \mathbf{p} \quad (5.22)$$

na expressão (5.16), e obtemos

$$B^0 = -\frac{1}{12\pi^2} \epsilon_{\mu\alpha\beta} \frac{1}{s} \partial_\mu \mathbf{p} \cdot \partial_\alpha \mathbf{p} \times \partial_\beta \mathbf{p}. \quad (5.23)$$

Usando as Eqs. 5.7 e 5.8, e definindo a derivada de η como

$$\partial_\mu \eta \doteq \frac{1}{\eta} \nu_\mu, \quad (5.24)$$

obtemos a expressão de B^0 em função dos campos propriamente ditos,

$$B^0 = -\frac{1}{12\pi^2} \frac{1}{\eta^2} \frac{1}{S} \epsilon_{\mu\alpha\beta} \left\{ \partial_\mu \mathbf{p} \cdot \partial_\alpha \mathbf{p} \times \partial_\beta \mathbf{p} - \frac{3}{\eta^2} \nu_\mu \mathbf{p} \cdot \partial_\alpha \mathbf{p} \times \partial_\beta \mathbf{p} \right\}. \quad (5.25)$$

Calculamos a densidade bariônica (5.25) em termos das funções F_x e F_y dos ouriços individuais utilizando as abreviações introduzidas na seção 4.2.1 e obtemos

$$\begin{aligned} B^0 = & -\frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{\sigma \zeta^2} \left\{ \sigma (c_x t_y + c_y t_x)^2 (F'_x + F'_y) \right. \\ & + (1 - \alpha^2) (c_x t_y + c_y t_x) [c_x c_y (c_x F'_x - t_x) (c_y F'_y - t_y) - s_x^2 s_y^2 F'_x F'_y] \\ & - \frac{s_x s_y}{\zeta^2} ((c_x t_y + c_y t_x)^2 [J_x (c_y s_x + \alpha c_x s_y) + J_y (c_x s_y + \alpha c_y s_x)] \\ & \left. + (1 - \alpha^2) (c_x t_y + c_y t_x) [s_y c_y J_y F'_x + s_x c_x J_x F'_y - c_x c_y (s_y J_y t_x + s_x J_x t_y)] \right\}, \end{aligned} \quad (5.26)$$

onde

$$\sigma \doteq \frac{S}{f_\pi} = c_x c_y - \alpha s_x s_y, \quad (5.27)$$

$$\zeta \doteq \frac{\eta}{f_\pi} = \sqrt{1 + (\alpha^2 - 1) s_x^2 s_y^2}, \quad (5.28)$$

$$J_x = (\alpha^2 - 1) c_x F'_x s_y + \alpha (s_x t_y - \alpha s_y t_x), \quad (5.29)$$

$$J_y = (\alpha^2 - 1) c_y F'_y s_x + \alpha (s_y t_x - \alpha s_x t_y). \quad (5.30)$$

Os vários termos de B^0 podem ser rearranjados, produzindo

$$\begin{aligned}
 B^0 = & -\frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{\zeta^2} \left\{ (c_x t_y + c_y t_x)^2 (F'_x + F'_y) \right. \\
 & + \frac{1}{\sigma} (1 - \alpha^2) \left[(c_x t_y + c_y t_x) \left[c_x c_y (c_x F'_x - t_x) (c_y F'_y - t_y) - s_x^2 s_y^2 F'_x F'_y \right] \right. \\
 & + \frac{1}{\zeta^2} s_x s_y (c_x t_y + c_y t_x) \left[(c_x t_y + c_y t_x) (s_x s_y c_x c_y (F'_x + F'_y) + \alpha c_x s_y^2 (c_x F'_x - t_x) + \alpha c_y s_x^2 (c_y F'_y - t_y)) \right. \\
 & \left. \left. - \left[(s_y c_y J_y (F'_x - c_x t_x) + s_x c_x J_x (F'_y - c_y t_y)) \right] \right] \right\}. \tag{5.31}
 \end{aligned}$$

O número bariônico é dado pela integral

$$\begin{aligned}
 B = & -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty dz \int_0^\infty \rho d\rho \frac{1}{\zeta^2} \left\{ (c_x t_y + c_y t_x)^2 (F'_x + F'_y) \right. \\
 & + \frac{1}{\sigma} (1 - \alpha^2) \left[(c_x t_y + c_y t_x) \left[c_x c_y (c_x F'_x - t_x) (c_y F'_y - t_y) - s_x^2 s_y^2 F'_x F'_y \right] \right. \\
 & + \frac{1}{\zeta^2} s_x s_y (c_x t_y + c_y t_x) \left[(c_x t_y + c_y t_x) (s_x s_y c_x c_y (F'_x + F'_y) + \alpha c_x s_y^2 (c_x F'_x - t_x) + \alpha c_y s_x^2 (c_y F'_y - t_y)) \right. \\
 & \left. \left. - \left[(s_y c_y J_y (F'_x - c_x t_x) + s_x c_x J_x (F'_y - c_y t_y)) \right] \right] \right\}. \tag{5.32}
 \end{aligned}$$

Calculando numericamente a integral acima*, notamos que os termos das três últimas linhas apresentam singularidades (devido a σ no denominador), porém, a sua soma é regular, como mostra a Fig. 5.1. O número bariônico total é identicamente igual a dois, para todos os valores de d . Isto indica que o problema da tentativa de *Ansatz* apresentada na seção 4.4 foi resolvido e que o AN é um bom candidato para o estudo da interação NN no modelo de Skyrme.

5.2 A Quantização

A quantização dos campos, necessária para dotar o *skyrmion* de spin e isospin, apresenta alguns problemas na abordagem utilizada neste trabalho. Eles surgem devido ao fato de estarmos construindo o caso $B = 2$ de maneira aproximada, a partir das soluções com $B = 1$. O procedimento de quantização correto seria utilizar um único operador unitário C , análogo à

*Na realidade, o programa de cálculo foi desenvolvido usando a expressão para o integrando na forma da Eq. 5.26.

Fig. 5.1: Número bariônico em função da distância (em fm) entre os *skyrmions* (linha contínua), para o *Ansatz* Novo; contribuições da primeira (tracejado) e das três últimas (pontilhado) linhas da Eq. 5.26, separadamente.

matriz A da Eq. 3.13, que rodasse o operador U :

$$U^q = C(t) U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) C^\dagger(t) = \frac{1}{\eta} (S + iC\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{P}C^\dagger). \quad (5.33)$$

Neste caso, os seis graus de liberdade associados ao sistema de dois nucleons podem ser rodados de modo parcialmente acoplado. No caso da solução aproximada, por outro lado, os campos constituintes $\pi^{(i)}$ possuem quantizações bem definidas, através da multiplicação pela matriz D , como mostrado na Eq. 3.15:

$$U^{(i)q} = \frac{1}{f_\pi} (\sigma^{(i)} + i\tau_\alpha D_{\alpha j}^{(i)} \pi_j^{(i)}).$$

Portanto, ao usarmos esta fórmula em um *ansatz* para a interação NN, o processo de quantização também passa a ser aproximado. Este procedimento é usado no AP, onde a quantização é realizada rodando-se independentemente os campos $U^{(1)}$ e $U^{(2)}$,

$$U^q = A^{(1)}U^{(1)}A^{(1)\dagger}A^{(2)}U^{(2)}A^{(2)\dagger}, \quad (5.34)$$

o que equivale a rodar todos os campos $\pi^{(i)}$ de S e $\mathbf{P}$, multiplicando-os por $D^{(i)}$.

Nossa primeira tentativa de quantização consistiu em aplicar este procedimento ao AN, multiplicando todos os campos $\pi^{(i)}$ pela matriz $D^{(i)}$, **inclusive** aqueles presentes em η . Entretanto, a função η aparece no denominador dos campos e a lagrangiana composta envolve também a sua derivada, no numerador das expressões, o que causa dois tipos de problema:

1. a existência de operadores D no denominador;
2. o aparecimento de produtos de um grande número de matrizes D no numerador.

O primeiro problema pode ser contornado por meio da expansão de $\frac{1}{\eta}$ numa série de potências de π ou, equivalentemente, de matrizes D . Em princípio, pode-se esperar que esta série seja convergente, uma vez que o alcance de π é curto. Entretanto, as matrizes D decorrentes desta expansão agravam ainda mais o segundo problema. Ele foi, na realidade, a motivação para o cálculo dos elementos de matriz apresentado no apêndice C. Conforme o resultado deste apêndice, produtos de quatro operadores D envolvem multipletos intermediários de isospin $\frac{5}{2}$ e os cálculos envolvidos são muito extensos. No caso de seis matrizes D , por exemplo, o volume de cálculo seria muitas vezes maior. Este estudo mostrou que adotar este procedimento de quantização seria inviável, sendo muito mais razoável modificá-lo.

A segunda fórmula de quantização utilizada foi inspirada na dada pela Eq. 5.33, que é exata. Nós não sabemos como escrever a matriz C , mesmo porque ela se baseia na solução exata para os campos, mas sabemos que seu efeito é rodar o campo $\mathbf{P}$, apenas. Então, decidimos usar este princípio e rodar apenas os campos π presentes em $\mathbf{P}$, mantendo S e η clássicos. Utilizando esta fórmula de quantização, realizamos o cálculo da componente de paridades G individuais negativas do potencial NN, que deve reproduzir o OPEP e, portanto, permite uma avaliação preliminar do resultado[†]. Com isto, verificamos que este procedimento de quantização é fenomenologicamente desastroso, pois a quantização dos campos piônicos individuais presentes em S contribui significativamente para o resultado correto da troca de um pión. Aprendemos,

[†]O cálculo detalhado do potencial NN no AN é apresentado na seção 5.3, para a fórmula de quantização final, descrita adiante.

assim, que manter S clássico faz com que certas contribuições genuinamente pertencentes ao OPEP sejam “desviadas” para o canal escalar, devido à ausência das matrizes D no termo $\pi_1 \cdot \pi_2$ de S .

Depois de vários meses dedicados às tentativas de quantização descritas acima, a solução encontrada para permitir simultaneamente a execução dos cálculos e a obtenção da estrutura fenomenológica do potencial (OPEP) foi manter a quantização do AP para os campos S e $\mathbf{P}$, multiplicando todos os campos constituintes $\pi^{(i)}$ ($i = 1, 2$) pela matriz $D^{(i)}$, e tratando η de maneira diferenciada.

Notamos que o raio quiral quadrático η^2 , dado pela Eq. 5.4,

$$\eta^2 = f_\pi^2 \left\{ 1 - \frac{1}{f_\pi^4} [(\pi^{(1)} \cdot \pi^{(2)})^2 - \pi^{(1)2} \pi^{(2)2}] \right\}, \quad (5.35)$$

é um polinômio dos campos $\pi^{(i)}$ e o valor esperado do operador correspondente em estados de dois nucleons $\langle N_1 N_2 | \eta^2 | N_1 N_2 \rangle$ não apresenta ambigüidades. Aqui, novamente, buscamos simplificar o problema encontrado na primeira tentativa de quantização. Por isso, calculamos este valor esperado **antes** de introduzir η no cálculo da lagrangiana composta. Assim, na lagrangiana, que é quantizada posteriormente, η não é mais um operador, mas apenas uma função escalar de F_x, F_y . Isto corresponde a tratar η como um campo de fundo, cujos efeitos quânticos não se acoplam com os de S e $\mathbf{P}$.

Adotando este procedimento, fica ainda uma questão em aberto: se, ao calcular o valor esperado, devemos ou não proceder a rotação dos campos $\pi^{(i)}$ presentes em η^2 . Em ambos os casos, as funções η resultantes são escalares e representam soluções em princípio viáveis. Entretanto, como mostramos na seqüência, estas duas escolhas fornecem valores numéricos diferentes. Para distinguir as duas opções, chamamos η *clássico* o caso em que os campos $\pi^{(i)}$ de η^2 não são rodados,

$$\eta^2 = f_\pi^2 [1 + (\alpha^2 - 1) s_x^2 s_y^2], \quad (5.36)$$

e η *quantizado* o caso em que se procede a rotação,

$$\begin{aligned} \eta^2 &= f_\pi^2 \langle N_1 N_2 | 1 - s_x^2 s_y^2 + D_{\alpha i}^{(1)} D_{\alpha j}^{(2)} D_{\beta k}^{(1)} D_{\beta l}^{(2)} \frac{1}{f_\pi^4} \pi_i^{(1)} \pi_j^{(2)} \pi_k^{(1)} \pi_l^{(2)} | N_1 N_2 \rangle \\ &= f_\pi^2 \left[1 - \frac{2}{3} s_x^2 s_y^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Apresentamos os perfis de η clássico e quantizado, em unidades de f_π , para alguns valores da distância d entre os ouriços, na Fig. 5.2. De cima para baixo, a primeira linha corresponde a $d = 0.3$ fm, a segunda a $d = 0.7$ fm e a última, $d = 1.6$ fm. η é uma função de duas variáveis, ρ e z , além de d , por isso a figura apresenta os perfis ao longo do eixo z , na primeira coluna, do eixo ρ , na segunda, e do eixo $z = 0.4$ fm, paralelo a ρ , na terceira. Ao longo do eixo z , apresentamos apenas η quantizado, porque η clássico vale sempre f_π , uma vez que $\alpha^2 = 1$.

No caso η clássico, comparando a segunda coluna com a terceira, observamos que, para qualquer valor de d , a função varia menos, em relação a f_π , conforme nos afastamos do eixo ρ . No caso quantizado, isto não é evidente para $d = 0.3$ fm, mas, de acordo com o perfil no eixo z , figura I(a), constatamos que o alcance das variações é pouco maior que 1 fm. Por outro lado, independentemente da direção observada, η varia cada vez menos conforme d aumenta, como se pode observar comparando a última linha da figura com as duas primeiras.

Com isto, constatamos que η é uma função de curto alcance, tendendo a f_π para $r \rightarrow \infty$ ou, para qualquer valor de $\mathbf{r}$, quando os *skyrmions* se afastam.

Na próxima seção, apresentamos o cálculo do potencial NN com o AN. Além das versões clássica e quantizada de η , consideramos também, para fins de comparação, o caso $\eta = f_\pi$, que corresponde exatamente ao AP sem a contribuição do termo do produto vetorial de $\mathbf{P}$, discutido na seção 4.4. A fim de estudar em conjunto todas as possibilidades, a parte analítica é desenvolvida sem explicitarmos a forma de η . Em seguida, o cálculo numérico é efetuado para cada um dos três casos. As funções adimensionais $\zeta = \frac{\eta}{f_\pi}$ correspondentes às diferentes opções são, respectivamente,

$$\zeta = \begin{cases} \sqrt{1 + (\alpha^2 - 1) s_x^2 s_y^2}, \\ \sqrt{1 - \frac{2}{3} s_x^2 s_y^2}, \\ 1. \end{cases} \quad (5.38)$$

Fig. 5.2: Função η , nas versões clássica (tracejado) e quantizada (linha contínua), em unidades de f_π , ao longo (a) do eixo z , (b) do eixo ρ e (c) do eixo $z = 0.4$ fm, para (I) $d = 0.3$ fm, (II) $d = 0.7$ fm e (III) $d = 1.6$ fm. η clássico é sempre igual a f_π , ao longo do eixo z .

5.3 Cálculo do potencial NN

Para o cálculo do potencial NN com o AN, seguimos o procedimento descrito na seção 4.2.1, como fizemos no caso do AP. Partimos da lagrangiana (3.6), cujas partes são reescritas em termos dos campos adimensionais s e $\mathbf{p}$ como

$$\mathcal{L}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{f_\pi^2}{2} (\partial_m s \partial_m s + \partial_m \mathbf{p} \cdot \partial_m \mathbf{p}), \quad (5.39)$$

$$\mathcal{L}_{SB}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = m_\pi^2 f_\pi^2 (s - 1), \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{1}{4e^2} [(\partial_m s \partial_m s + \partial_m \mathbf{p} \cdot \partial_m \mathbf{p}) (\partial_n s \partial_n s + \partial_n \mathbf{p} \cdot \partial_n \mathbf{p}) \\ &\quad - (\partial_m s \partial_n s + \partial_m \mathbf{p} \cdot \partial_n \mathbf{p}) (\partial_m s \partial_n s + \partial_m \mathbf{p} \cdot \partial_n \mathbf{p})] \\ &= -\frac{1}{4e^2} [2 (\partial_m s \partial_m s \partial_n \mathbf{p} \cdot \partial_n \mathbf{p} - \partial_m s \partial_n s \partial_m \mathbf{p} \cdot \partial_n \mathbf{p}) \\ &\quad + \partial_m \mathbf{p} \cdot \partial_m \mathbf{p} \partial_n \mathbf{p} \cdot \partial_n \mathbf{p} - \partial_m \mathbf{p} \cdot \partial_n \mathbf{p} \partial_m \mathbf{p} \cdot \partial_n \mathbf{p}], \end{aligned} \quad (5.41)$$

sendo que os índices m, n repetidos indicam a somatória nas coordenadas espaciais. As versões quantizadas dos campos considerados neste trabalho são representadas por

$$s = \frac{S}{\eta} = \mathcal{S}^P - \mathcal{S}^I, \quad (5.42)$$

$$\mathcal{S}^P = S^P = \frac{c_x c_y}{\zeta}, \quad (5.43)$$

$$\mathcal{S}^I = D_{\alpha i}^{(1)} D_{\alpha j}^{(2)} S^I x_i y_j = D_{\alpha i}^{(1)} D_{\alpha j}^{(2)} \frac{t_x t_y}{\zeta} x_i y_j, \quad (5.44)$$

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{P}}{\eta} = \mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(2)}, \quad (5.45)$$

$$\mathcal{P}_\alpha^{(1)} = D_{\alpha i}^{(1)} P_1 x_i = D_{\alpha i}^{(1)} \frac{c_y t_x}{\zeta} x_i, \quad (5.46)$$

$$\mathcal{P}_\alpha^{(2)} = D_{\alpha j}^{(2)} P_2 y_j = D_{\alpha j}^{(2)} \frac{c_x t_y}{\zeta} y_j, \quad (5.47)$$

onde ζ representa coletivamente as três opções apresentadas na Eq. 5.38. Em termos de paridade G individual, o campo s é misto e os rótulos P e I designam, respectivamente, as suas partes par e ímpar.

Substituindo os campos quantizados na lagrangiana dada pelas Eqs. 5.39 - 5.41, separamos cada uma destas nas suas partes com paridades G individuais positivas (PP) e negativas (II),

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{PP} + \mathcal{L}^{II}, \quad (5.48)$$

escritas em termos de $\mathcal{S}^P$, $\mathcal{S}^I$, $\mathcal{P}^{(1)}$ e $\mathcal{P}^{(2)\dagger}$, e obtemos

$$\mathcal{L}_2^{PP} = -\frac{f_\pi^2}{2} \left\{ \partial_m \mathcal{S}^P \partial_m \mathcal{S}^P + \partial_m \mathcal{S}^I \partial_m \mathcal{S}^I + \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(1)} \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(1)} + \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(2)} \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(2)} \right\}, \quad (5.49)$$

$$\mathcal{L}_2^{II} = -f_\pi^2 \left\{ \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(1)} \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(2)} - \partial_m \mathcal{S}^P \partial_m \mathcal{S}^I \right\}, \quad (5.50)$$

$$\mathcal{L}_{SB}^{PP} = m_\pi^2 f_\pi^2 (\mathcal{S}^P - 1), \quad (5.51)$$

$$\mathcal{L}_{SB}^{II} = -m_\pi^2 f_\pi^2 \mathcal{S}^I, \quad (5.52)$$

$$\mathcal{L}_4^{PP} = -\frac{1}{4e^2} \left\{ 2 \left[\partial_m \mathcal{S}^P \partial_m \mathcal{S}^P \left(\partial_n \mathcal{P}_\alpha^{(1)} \partial_n \mathcal{P}_\alpha^{(1)} + \partial_n \mathcal{P}_\alpha^{(2)} \partial_n \mathcal{P}_\alpha^{(2)} \right) \right. \right. \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} & + \partial_m \mathcal{S}^I \partial_m \mathcal{S}^I \left(\partial_n \mathcal{P}_\alpha^{(1)} \partial_n \mathcal{P}_\alpha^{(1)} + \partial_n \mathcal{P}_\alpha^{(2)} \partial_n \mathcal{P}_\alpha^{(2)} \right) \\ & - 4 \partial_m \mathcal{S}^P \partial_m \mathcal{S}^I \partial_n \mathcal{P}_\alpha^{(1)} \partial_n \mathcal{P}_\alpha^{(2)} \\ & - \partial_m \mathcal{S}^P \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(1)} \partial_n \mathcal{S}^P \partial_n \mathcal{P}_\alpha^{(1)} - \partial_m \mathcal{S}^P \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(2)} \partial_n \mathcal{S}^P \partial_n \mathcal{P}_\alpha^{(2)} \\ & - \partial_m \mathcal{S}^I \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(1)} \partial_n \mathcal{S}^I \partial_n \mathcal{P}_\alpha^{(1)} - \partial_m \mathcal{S}^I \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(2)} \partial_n \mathcal{S}^I \partial_n \mathcal{P}_\alpha^{(2)} \\ & + 2 \partial_m \mathcal{S}^P \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(1)} \partial_n \mathcal{S}^I \partial_n \mathcal{P}_\alpha^{(2)} + 2 \partial_m \mathcal{S}^P \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(2)} \partial_n \mathcal{S}^I \partial_n \mathcal{P}_\alpha^{(1)} \Big] \\ & + \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(1)} \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(1)} \partial_n \mathcal{P}_\beta^{(1)} \partial_n \mathcal{P}_\beta^{(1)} + \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(2)} \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(2)} \partial_n \mathcal{P}_\beta^{(2)} \partial_n \mathcal{P}_\beta^{(2)} \\ & + 2 \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(1)} \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(1)} \partial_n \mathcal{P}_\beta^{(2)} \partial_n \mathcal{P}_\beta^{(2)} + 4 \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(1)} \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(2)} \partial_n \mathcal{P}_\beta^{(1)} \partial_n \mathcal{P}_\beta^{(2)} \\ & - \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(1)} \partial_m \mathcal{P}_\beta^{(1)} \partial_n \mathcal{P}_\alpha^{(1)} \partial_n \mathcal{P}_\beta^{(1)} - \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(2)} \partial_m \mathcal{P}_\beta^{(2)} \partial_n \mathcal{P}_\alpha^{(2)} \partial_n \mathcal{P}_\beta^{(2)} \\ & - 2 \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(1)} \partial_m \mathcal{P}_\beta^{(1)} \partial_n \mathcal{P}_\alpha^{(2)} \partial_n \mathcal{P}_\beta^{(2)} \\ & - 2 \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(1)} \partial_m \mathcal{P}_\beta^{(2)} \left(\partial_n \mathcal{P}_\alpha^{(1)} \partial_n \mathcal{P}_\beta^{(2)} + \partial_n \mathcal{P}_\beta^{(1)} \partial_n \mathcal{P}_\alpha^{(2)} \right) \Big\}, \\ \mathcal{L}_4^{II} & = -\frac{1}{4e^2} \left\{ 2 \left[2 \left(\partial_m \mathcal{S}^P \partial_m \mathcal{S}^P + \partial_m \mathcal{S}^I \partial_m \mathcal{S}^I \right) \partial_n \mathcal{P}_\alpha^{(1)} \partial_n \mathcal{P}_\alpha^{(2)} \right. \right. \quad (5.54) \\ & - 2 \partial_m \mathcal{S}^P \partial_m \mathcal{S}^I \left(\partial_n \mathcal{P}_\alpha^{(1)} \partial_n \mathcal{P}_\alpha^{(1)} + \partial_n \mathcal{P}_\alpha^{(2)} \partial_n \mathcal{P}_\alpha^{(2)} \right) \\ & + 2 \partial_m \mathcal{S}^P \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(1)} \partial_n \mathcal{S}^I \partial_n \mathcal{P}_\alpha^{(1)} + 2 \partial_m \mathcal{S}^P \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(2)} \partial_n \mathcal{S}^I \partial_n \mathcal{P}_\alpha^{(2)} \\ & - 2 \partial_m \mathcal{S}^P \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(1)} \partial_n \mathcal{S}^P \partial_n \mathcal{P}_\alpha^{(2)} - 2 \partial_m \mathcal{S}^I \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(1)} \partial_n \mathcal{S}^I \partial_n \mathcal{P}_\alpha^{(2)} \Big] \\ & + 4 \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(1)} \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(1)} \partial_n \mathcal{P}_\beta^{(1)} \partial_n \mathcal{P}_\beta^{(2)} + 4 \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(2)} \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(2)} \partial_n \mathcal{P}_\beta^{(1)} \partial_n \mathcal{P}_\beta^{(2)} \\ & - 4 \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(1)} \partial_m \mathcal{P}_\beta^{(1)} \partial_n \mathcal{P}_\alpha^{(1)} \partial_n \mathcal{P}_\beta^{(2)} - 4 \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(2)} \partial_m \mathcal{P}_\beta^{(2)} \partial_n \mathcal{P}_\beta^{(1)} \partial_n \mathcal{P}_\alpha^{(2)} \Big\}. \end{aligned}$$

Substituindo as Eqs. 5.43, 5.44, 5.46 e 5.47, nas expressões acima, simplificamos os produtos de matrizes D e reescrevemos as lagrangianas (5.39 - 5.41) numa forma análoga à Eq.

[†]É interessante notar que, no AN, não aparecem termos do tipo IP, com paridades G individuais negativa num dos ouriços e positiva no outro, como acontecia no AP, Eqs. 4.56 e 4.64.

4.52, dada por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{S(PP)} + \mathcal{L}^{S(II)} + D_{\alpha m}^{(1)} D_{\alpha n}^{(2)} \left(\mathcal{L}_{mn}^{V(II)} + \mathcal{L}_{mn}^{V(PP)} \right). \quad (5.55)$$

O cálculo de $\mathcal{L}_{SB}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, a partir das Eqs. 5.51 e 5.52, é direto. Já os cálculos de $\mathcal{L}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e, principalmente, $\mathcal{L}_4(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ são bastante extensos. Por isso, calculamos preliminarmente os produtos escalares entre os vetores $\partial_m \mathcal{S}^P$, $\partial_m \mathcal{S}^I$, $\partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(1)}$ e $\partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(2)}$, uma vez que as expressões (5.49, 5.50, 5.53, 5.54) são combinações destes produtos.

As componentes dos vetores $\partial_m \mathcal{S}^P$, $\partial_m \mathcal{S}^I$, $\partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(1)}$ e $\partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(2)}$ são dadas por

$$\partial_m \mathcal{S}^P = \left(S_\rho^P \frac{r_1}{\rho}, S_\rho^P \frac{r_2}{\rho}, S_z^P \right), \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned} \partial_m \mathcal{S}^I = D_{\alpha i}^{(1)} D_{\alpha j}^{(2)} & \left(S_\rho^I \frac{r_1}{\rho} x_i y_j + S^I (\delta_{i1} y_j + x_i \delta_{j1}), S_\rho^I \frac{r_2}{\rho} x_i y_j + S^I (\delta_{i2} y_j + x_i \delta_{j2}), \right. \\ & \left. S_z^I x_i y_j + S^I (\delta_{i3} y_j + x_i \delta_{j3}) \right), \end{aligned} \quad (5.57)$$

$$\partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(1)} = D_{\alpha i}^{(1)} \left(P_{1,\rho} \frac{r_1}{\rho} x_i + P_1 \delta_{i1}, P_{1,\rho} \frac{r_2}{\rho} x_i + P_1 \delta_{i2}, P_{1,z} x_i + P_1 \delta_{i3} \right), \quad (5.58)$$

$$\partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(2)} = D_{\alpha j}^{(2)} \left(P_{2,\rho} \frac{r_1}{\rho} y_j + P_2 \delta_{j1}, P_{2,\rho} \frac{r_2}{\rho} y_j + P_2 \delta_{j2}, P_{2,z} y_j + P_2 \delta_{j3} \right), \quad (5.59)$$

sendo

$$r_1 \equiv x_1 \equiv y_1 = \rho \cos \phi,$$

$$r_2 \equiv x_2 \equiv y_2 = \rho \sin \phi,$$

$$S_\rho^P \doteq \frac{\partial}{\partial \rho} S^P = -\frac{1}{\zeta} \left[\rho (t_x F'_x c_y + t_y F'_y c_x) + \frac{1}{\zeta} S^P \nu_\rho \right], \quad (5.60)$$

$$S_z^P \doteq \frac{\partial}{\partial z} S^P = -\frac{1}{\zeta} \left[x_z t_x F'_x c_y + y_z t_y F'_y c_x + \frac{1}{\zeta} S^P \nu_z \right], \quad (5.61)$$

$$S_\rho^I \doteq \frac{\partial}{\partial \rho} S^I = \frac{1}{\zeta} \left[\rho \left((c_x F'_x - t_x) \frac{t_y}{x^2} + (c_y F'_y - t_y) \frac{t_x}{y^2} \right) - \frac{1}{\zeta} S^I \nu_\rho \right], \quad (5.62)$$

$$S_z^I \doteq \frac{\partial}{\partial z} S^I = \frac{1}{\zeta} \left[\frac{x_z}{x^2} (c_x F'_x - t_x) t_y + \frac{y_z}{y^2} (c_y F'_y - t_y) t_x - \frac{1}{\zeta} S^I \nu_z \right], \quad (5.63)$$

$$P_{1,\rho} \doteq \frac{\partial}{\partial \rho} P_1 = \frac{1}{\zeta} \left[\rho \left(\frac{c_y}{x^2} (c_x F'_x - t_x) - t_x t_y F'_y \right) - \frac{1}{\zeta} P_1 \nu_\rho \right], \quad (5.64)$$

$$P_{1,z} \doteq \frac{\partial}{\partial z} P_1 = \frac{1}{\zeta} \left[\frac{x_z}{x^2} (c_x F'_x - t_x) c_y - y_z t_x t_y F'_y - \frac{1}{\zeta} P_1 \nu_z \right], \quad (5.65)$$

$$P_{2,\rho} \doteq \frac{\partial}{\partial \rho} P_2 = \frac{1}{\zeta} \left[\rho \left(\frac{c_x}{y^2} (c_y F'_y - t_y) - t_x t_y F'_x \right) - \frac{1}{\zeta} P_2 \nu_\rho \right], \quad (5.66)$$

$$P_{2,z} \doteq \frac{\partial}{\partial z} P_2 = \frac{1}{\zeta} \left[\frac{y_z}{y^2} (c_y F'_y - t_y) c_x - x_z t_x t_y F'_x - \frac{1}{\zeta} P_2 \nu_z \right], \quad (5.67)$$

com

$$\nu_\rho = \frac{1}{2} \partial_\rho \zeta^2 = \zeta \partial_\rho \zeta, \quad (5.68)$$

$$\nu_z = \frac{1}{2} \partial_z \zeta^2 = \zeta \partial_z \zeta. \quad (5.69)$$

Para as diversas possibilidades de η , ou ζ , dadas pela Eq. 5.38, temos,

$$\text{para } \eta = f_\pi, \quad \nu_\rho = \nu_z = 0,$$

$$\text{para } \eta \text{ clássico,} \quad \begin{cases} \nu_\rho = \rho \left[2\alpha s_x s_y t_x t_y - \alpha^2 (t_x^2 s_y^2 + t_y^2 s_x^2) + (\alpha^2 - 1) (n_x + n_y) \right], \\ \nu_z = 2\alpha z s_x s_y t_x t_y - \alpha^2 (x_z t_x^2 s_y^2 + y_z t_y^2 s_x^2) + (\alpha^2 - 1) (n_x x_z + n_y y_z), \end{cases}$$

$$\text{para } \eta \text{ quantizado,} \quad \begin{cases} \nu_\rho = -\frac{2}{3} \rho (n_x + n_y), \\ \nu_z = -\frac{2}{3} (n_x x_z + n_y y_z), \end{cases} \quad (5.70)$$

com

$$n_x = c_x t_x F'_x s_y^2, \quad (5.71)$$

$$n_y = c_y t_y F'_y s_x^2. \quad (5.72)$$

Utilizando as componentes dos vetores dadas pelas Eqs. 5.56 - 5.59, calculamos os produtos escalares elementares dados abaixo:

$$\partial_m S^P \partial_m S^P = S_\rho^{P2} + S_z^{P2}, \quad (5.73)$$

$$\partial_m S^I \partial_m S^I = D_{\beta k}^{(1)} D_{\beta l}^{(2)} D_{\gamma p}^{(1)} D_{\gamma q}^{(2)} \quad (5.74)$$

$$\cdot \left\{ (S_\rho^{I2} + S_z^{I2}) x_k y_l x_p y_q + S^{I2} (\delta_{kp} y_l y_q + \delta_{lq} x_k x_p + 2\delta_{kq} x_p y_l) \right. \\ + \frac{2}{\rho} S^I S_\rho^I x_k y_l [(x_p - x_z \delta_{p3}) y_q + x_p (y_q - y_z \delta_{q3})] \\ \left. + 2S^I S_z^I x_k y_l (\delta_{p3} y_q + x_p \delta_{q3}) \right\},$$

$$\partial_m S^P \partial_m S^I = D_{\beta k}^{(1)} D_{\beta l}^{(2)} \left\{ (S_\rho^P S_\rho^I + S_z^P S_z^I) x_k y_l \right. \\ \left. + \frac{1}{\rho} S^I S_\rho^P [(x_k - x_z \delta_{k3}) y_l + x_k (y_l - y_z \delta_{l3})] + S^I S_z^P (\delta_{k3} y_l + x_k \delta_{l3}) \right\}, \quad (5.75)$$

$$\begin{aligned} \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(1)} \partial_m \mathcal{P}_\beta^{(1)} &= D_{\alpha i}^{(1)} D_{\beta k}^{(1)} \left\{ (P_{1,\rho}^2 + P_{1,z}^2) x_i x_k + P_1^2 \delta_{ik} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\rho} P_1 P_{1,\rho} [x_i (x_k - x_z \delta_{k3}) + (x_i - x_z \delta_{i3}) x_k] + P_1 P_{1,z} (x_i \delta_{k3} + x_k \delta_{i3}) \right\}, \end{aligned} \quad (5.76)$$

$$\partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(1)} \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(1)} = x^2 (P_{1,\rho}^2 + P_{1,z}^2) + 3P_1^2 + 2P_1 (\rho P_{1,\rho} + x_z P_{1,z}), \quad (5.77)$$

$$\begin{aligned} \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(2)} \partial_m \mathcal{P}_\beta^{(2)} &= D_{\alpha j}^{(2)} D_{\beta l}^{(2)} \left\{ (P_{2,\rho}^2 + P_{2,z}^2) y_j y_l + P_2^2 \delta_{jl} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\rho} P_2 P_{2,\rho} [y_j (y_l - y_z \delta_{l3}) + (y_j - y_z \delta_{j3}) y_l] + P_2 P_{2,z} (y_j \delta_{l3} + y_l \delta_{j3}) \right\}, \end{aligned} \quad (5.78)$$

$$\partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(2)} \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(2)} = y^2 (P_{2,\rho}^2 + P_{2,z}^2) + 3P_2^2 + 2P_2 (\rho P_{2,\rho} + y_z P_{2,z}), \quad (5.79)$$

$$\begin{aligned} \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(1)} \partial_m \mathcal{P}_\beta^{(2)} &= D_{\alpha p}^{(1)} D_{\beta q}^{(2)} \left\{ (P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z}) x_p y_q + P_1 P_2 \delta_{pq} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\rho} P_1 P_{2,\rho} (x_p - x_z \delta_{p3}) y_q + P_1 P_{2,z} \delta_{p3} y_q \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\rho} P_2 P_{1,\rho} x_p (y_q - y_z \delta_{q3}) + P_2 P_{1,z} x_p \delta_{q3} \right\}, \end{aligned} \quad (5.80)$$

$$\begin{aligned} \partial_m \mathcal{S}^P \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(1)} &= D_{\alpha p}^{(1)} \left\{ (S_\rho^P P_{1,\rho} + S_z^P P_{1,z}) x_p \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\rho} P_1 S_\rho^P (x_p - x_z \delta_{p3}) + P_1 S_z^P \delta_{p3} \right\}, \end{aligned} \quad (5.81)$$

$$\begin{aligned} \partial_m \mathcal{S}^P \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(2)} &= D_{\alpha q}^{(2)} \left\{ (S_\rho^P P_{2,\rho} + S_z^P P_{2,z}) y_q \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\rho} P_2 S_\rho^P (y_q - y_z \delta_{q3}) + P_2 S_z^P \delta_{q3} \right\}, \end{aligned} \quad (5.82)$$

$$\begin{aligned} \partial_m \mathcal{S}^I \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(1)} &= D_{\alpha p}^{(1)} D_{\beta k}^{(1)} D_{\beta l}^{(2)} \\ &\quad \cdot \left\{ (S_\rho^I P_{1,\rho} + S_z^I P_{1,z}) x_p x_k y_l + S^I P_1 (\delta_{pk} y_l + x_k \delta_{pl}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\rho} P_1 S_\rho^I (x_p - x_z \delta_{p3}) x_k y_l + P_1 S_z^I \delta_{p3} x_k y_l \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\rho} S^I P_{1,\rho} x_p [(x_k - x_z \delta_{k3}) y_l + x_k (y_l - y_z \delta_{l3})] \right. \\ &\quad \left. + S^I P_{1,z} x_p (\delta_{k3} y_l + x_k \delta_{l3}) \right\}, \end{aligned} \quad (5.83)$$

$$\begin{aligned} \partial_m \mathcal{S}^I \partial_m \mathcal{P}_\alpha^{(2)} &= D_{\alpha q}^{(1)} D_{\beta k}^{(1)} D_{\beta l}^{(2)} \\ &\quad \cdot \left\{ (S_\rho^I P_{2,\rho} + S_z^I P_{2,z}) y_q x_k y_l + S^I P_2 (\delta_{qk} y_l + x_k \delta_{ql}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\rho} P_2 S_\rho^I (y_q - y_z \delta_{q3}) x_k y_l + P_2 S_z^I \delta_{q3} x_k y_l \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\rho} S^I P_{2,\rho} y_q [(x_k - x_z \delta_{k3}) y_l + x_k (y_l - y_z \delta_{l3})] \right. \\ &\quad \left. + S^I P_{2,z} y_q (\delta_{k3} y_l + x_k \delta_{l3}) \right\}. \end{aligned} \quad (5.84)$$

A forma final da lagrangiana composta $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ é obtida pela substituição dos resultados

acima nas Eqs. 5.49 - 5.54. A lagrangiana de interação é definida pela Eq. 4.26,

$$\mathcal{L}_{int}(\mathbf{r}; d) = \left\{ \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathcal{L}^{(1)}(\mathbf{x}) - \mathcal{L}^{(2)}(\mathbf{y}) \right\} \quad (5.85)$$

e, após manipulações algébricas, o resultado é escrito na forma (5.55), onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2^{S(PP)} = & -\frac{f_\pi^2}{2} \left\{ S_\rho^{P^2} + S_z^{P^2} \right. \\ & + \frac{1}{3} \left[x^2 y^2 (S_\rho^{I^2} + S_z^{I^2}) + S^{I^2} (3x^2 + 3y^2 + 2\gamma) \right. \\ & \quad \left. + 2\rho (x^2 + y^2) S^I S_\rho^I + 4z\gamma S^I S_z^I \right] \\ & + x^2 (P_{1,\rho}^2 + P_{1,z}^2) + 3P_1^2 + 2P_1 (\rho P_{1,\rho} + x_z P_{1,z}) \\ & + y^2 (P_{2,\rho}^2 + P_{2,z}^2) + 3P_2^2 + 2P_2 (\rho P_{2,\rho} + y_z P_{2,z}) \left. \right\} \\ & - \mathcal{L}_2(\mathbf{x}) - \mathcal{L}_2(\mathbf{y}), \end{aligned} \quad (5.86)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2^{V(II)}_{mn} = & -f_\pi^2 \left\{ (P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z} - S_\rho^P S_\rho^I - S_z^P S_z^I) x_m y_n + P_1 P_2 \delta_{mn} \right. \\ & + \frac{1}{\rho} (P_2 P_{1,\rho} - S^I S_\rho^P) (x_m y_n - y_z x_m \delta_{n3}) + \frac{1}{\rho} (P_1 P_{2,\rho} - S^I S_\rho^P) (x_m y_n - x_z \delta_{m3} y_n) \\ & \left. + (P_1 P_{2,z} - S^I S_z^P) \delta_{m3} y_n + (P_2 P_{1,z} - S^I S_z^P) x_m \delta_{n3} \right\}, \end{aligned} \quad (5.87)$$

$$\mathcal{L}_2^{V(PP)}_{mn} = -\frac{f_\pi^2}{2} S^{I^2} (x_n y_m - \gamma \delta_{mn}), \quad (5.88)$$

$$\mathcal{L}_{SB}^{S(PP)} = m_\pi^2 f_\pi^2 (S^P - 1) - \mathcal{L}_{SB}(\mathbf{x}) - \mathcal{L}_{SB}(\mathbf{y}), \quad (5.89)$$

$$\mathcal{L}_{SB}^{V(II)}_{mn} = -m_\pi^2 f_\pi^2 S^I x_m y_n, \quad (5.90)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4^{S(PP)} = & -\frac{1}{4e^2} \left\{ 2 (S_\rho^{P^2} + S_z^{P^2}) \left[x^2 (P_{1,\rho}^2 + P_{1,z}^2) + y^2 (P_{2,\rho}^2 + P_{2,z}^2) \right. \right. \\ & \quad \left. + 3 (P_1^2 + P_2^2) + 2P_1 (\rho P_{1,\rho} + x_z P_{1,z}) + 2P_2 (\rho P_{2,\rho} + y_z P_{2,z}) \right] \\ & - 2 \left[x^2 (S_\rho^P P_{1,\rho} + S_z^P P_{1,z})^2 + P_1^2 (S_\rho^{P^2} + S_z^{P^2}) \right. \\ & \quad + 2P_1 (S_\rho^P P_{1,\rho} + S_z^P P_{1,z}) (\rho S_\rho^P + x_z S_z^P) \\ & \quad + y^2 (S_\rho^P P_{2,\rho} + S_z^P P_{2,z})^2 + P_2^2 (S_\rho^{P^2} + S_z^{P^2}) \\ & \quad \left. + 2P_2 (S_\rho^P P_{2,\rho} + S_z^P P_{2,z}) (\rho S_\rho^P + y_z S_z^P) \right] \\ & + \frac{2}{3} \left[x^2 y^2 (S_\rho^{I^2} + S_z^{I^2}) + S^{I^2} (3x^2 + 3y^2 + 2\gamma) \right. \\ & \quad \left. + 2\rho (x^2 + y^2) S^I S_\rho^I + 4z\gamma S^I S_z^I \right] \end{aligned} \quad (5.91)$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left[x^2 (P_{1,\rho}^2 + P_{1,z}^2) + y^2 (P_{2,\rho}^2 + P_{2,z}^2) \right. \\
& \quad \left. + 3 (P_1^2 + P_2^2) + 2P_1 (\rho P_{1,\rho} + x_z P_{1,z}) + 2P_2 (\rho P_{2,\rho} + y_z P_{2,z}) \right] \\
- & \frac{2}{3} \left[x^2 (S_\rho^I P_{1,\rho} + S_z^I P_{1,z})^2 x^2 y^2 + (3x^2 + 3y^2 + 2\gamma) S^{I^2} P_1^2 \right. \\
& \quad + x^2 y^2 P_1^2 (S_\rho^{I^2} + S_z^{I^2}) \\
& \quad + x^2 (x^2 + y^2 + 2\rho^2) S^{I^2} P_{1,\rho}^2 + x^2 (x^2 + y^2 + 2x_z y_z) S^{I^2} P_{1,z}^2 \\
& \quad + 2 (S_\rho^I P_{1,\rho} + S_z^I P_{1,z}) \left[x^2 (y^2 + \gamma) S^I P_1 + x^2 y^2 P_1 (\rho S_\rho^I + x_z S_z^I) \right. \\
& \quad \left. + \rho x^2 (x^2 + y^2) S^I P_{1,\rho} + 2z\gamma x^2 S^I P_{1,z} \right] \\
& \quad + 2\rho (x^2 + y^2) P_1^2 S^I S_\rho^I + 4z\gamma P_1^2 S^I S_z^I \\
& \quad + 2\rho (2x^2 + y^2 + \gamma) S^{I^2} P_1 P_{1,\rho} + 2 (2z\gamma + x_z (x^2 + \gamma)) S^{I^2} P_1 P_{1,z} \\
& \quad + 2S^I P_1 (\rho S_\rho^I + x_z S_z^I) \left[\rho (x^2 + y^2) P_{1,\rho} + 2z\gamma P_{1,z} \right] \\
& \quad + 4z\rho x^2 S^{I^2} P_{1,\rho} P_{1,z} \\
& \quad + y^2 (S_\rho^I P_{2,\rho} + S_z^I P_{2,z})^2 x^2 y^2 + (3x^2 + 3y^2 + 2\gamma) S^{I^2} P_2^2 \\
& \quad + x^2 y^2 P_2^2 (S_\rho^{I^2} + S_z^{I^2}) \\
& \quad + y^2 (x^2 + y^2 + 2\rho^2) S^{I^2} P_{2,\rho}^2 + y^2 (x^2 + y^2 + 2x_z y_z) S^{I^2} P_{2,z}^2 \\
& \quad + 2 (S_\rho^I P_{2,\rho} + S_z^I P_{2,z}) \left[y^2 (x^2 + \gamma) S^I P_2 + x^2 y^2 P_2 (\rho S_\rho^I + y_z S_z^I) \right. \\
& \quad \left. + \rho y^2 (x^2 + y^2) S^I P_{2,\rho} + 2z\gamma y^2 S^I P_{2,z} \right] \\
& \quad + 2\rho (x^2 + y^2) P_2^2 S^I S_\rho^I + 4z\gamma P_2^2 S^I S_z^I \\
& \quad + 2\rho (x^2 + 2y^2 + \gamma) S^{I^2} P_2 P_{2,\rho} + 2 (2z\gamma + y_z (y^2 + \gamma)) S^{I^2} P_2 P_{2,z} \\
& \quad + 2S^I P_2 (\rho S_\rho^I + y_z S_z^I) \left[\rho (x^2 + y^2) P_{2,\rho} + 2z\gamma P_{2,z} \right] \\
& \quad + 4z\rho y^2 S^{I^2} P_{2,\rho} P_{2,z} \Big] \\
+ & \frac{4}{3} \left[x^2 y^2 (S_\rho^P P_{1,\rho} + S_z^P P_{1,z}) (S_\rho^I P_{2,\rho} + S_z^I P_{2,z}) \right. \\
& \quad + (S_\rho^P P_{1,\rho} + S_z^P P_{1,z}) \left[(\gamma + 3x^2) S^I P_2 + x^2 P_2 (\rho S_\rho^I + y_z S_z^I) \right. \\
& \quad \left. + \rho (x^2 + y^2) S^I P_{2,\rho} + 2z\gamma S^I P_{2,z} \right] \\
& \quad + y^2 P_1 (S_\rho^I P_{2,\rho} + S_z^I P_{2,z}) (\rho S_\rho^P + x_z S_z^P) \\
& \quad + 2P_1 P_2 S^I \left[2\rho S_\rho^P + (z + x_z) S_z^P \right] + P_1 P_2 (\rho S_\rho^I + y_z S_z^I) (\rho S_\rho^P + x_z S_z^P) \\
& \quad + S^I P_1 P_{2,\rho} \left[(y^2 + \rho^2) S_\rho^P + \rho x_z S_z^P \right] + S^I P_1 P_{2,z} \left[\rho y_z S_\rho^P + (y^2 + x_z y_z) S_z^P \right] \\
& \quad \left. + x^2 y^2 (S_\rho^P P_{2,\rho} + S_z^P P_{2,z}) (S_\rho^I P_{1,\rho} + S_z^I P_{1,z}) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (S_\rho^P P_{2,\rho} + S_z^P P_{2,z}) \left[(\gamma + 3y^2) S^I P_1 + y^2 P_1 (\rho S_\rho^I + x_z S_z^I) \right. \\
& + \rho (x^2 + y^2) S^I P_{1,\rho} + 2z\gamma S^I P_{1,z} \left. \right] \\
& + x^2 P_2 (S_\rho^I P_{1,\rho} + S_z^I P_{1,z}) (\rho S_\rho^P + y_z S_z^P) \\
& + 2P_1 P_2 S^I \left[2\rho S_\rho^P + (z + y_z) S_z^P \right] + P_1 P_2 (\rho S_\rho^I + x_z S_z^I) (\rho S_\rho^P + y_z S_z^P) \\
& + S^I P_2 P_{1,\rho} \left[(x^2 + \rho^2) S_\rho^P + \rho y_z S_z^P \right] + S^I P_2 P_{1,z} \left[\rho x_z S_\rho^P + (x^2 + x_z y_z) S_z^P \right] \\
& - \frac{8}{3} \left[(S_\rho^P S_\rho^I + S_z^P S_z^I) \left[x^2 y^2 (P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z}) + \gamma P_1 P_2 \right. \right. \\
& + y^2 P_1 (\rho P_{2,\rho} + x_z P_{2,z}) + x^2 P_2 (\rho P_{1,\rho} + y_z P_{1,z}) \left. \right] \\
& + \left[\rho (x^2 + y^2) S_\rho^P + 2z\gamma S_z^P \right] S^I (P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z}) \\
& + 2S^I P_1 P_2 (\rho S_\rho^P + z S_z^P) \\
& + S^I S_\rho^P \left[(y^2 + \rho^2) P_1 P_{2,\rho} + (x^2 + \rho^2) P_2 P_{1,\rho} \right] \\
& + S^I S_z^P \left[(y^2 + x_z y_z) P_1 P_{2,z} + (x^2 + x_z y_z) P_2 P_{1,z} \right] \\
& + \rho S^I S_z^P (y_z P_1 P_{2,\rho} + x_z P_2 P_{1,\rho}) + \rho S^I S_\rho^P (x_z P_1 P_{2,z} + y_z P_2 P_{1,z}) \left. \right] \\
& + \left[x^2 (P_{1,\rho}^2 + P_{1,z}^2) + 3P_1^2 + 2P_1 (\rho P_{1,\rho} + x_z P_{1,z}) \right]^2 \\
& + \left[y^2 (P_{2,\rho}^2 + P_{2,z}^2) + 3P_2^2 + 2P_2 (\rho P_{2,\rho} + y_z P_{2,z}) \right]^2 \\
& - \left[x^4 (P_{1,\rho}^2 + P_{1,z}^2)^2 + 3P_1^4 \right. \\
& + 2(x^2 + \rho^2) P_1^2 P_{1,\rho}^2 + 2(x^2 + x_z^2) P_1^2 P_{1,z}^2 \\
& + 2x^2 (P_{1,\rho}^2 + P_{1,z}^2) \left[P_1^2 + 2P_1 (\rho P_{1,\rho} + x_z P_{1,z}) \right] \\
& + 4P_1^3 (\rho P_{1,\rho} + x_z P_{1,z}) + 4\rho x_z P_1^2 P_{1,\rho} P_{1,z} \\
& + y^4 (P_{2,\rho}^2 + P_{2,z}^2)^2 + 3P_2^4 \\
& + 2(y^2 + \rho^2) P_2^2 P_{2,\rho}^2 + 2(y^2 + y_z^2) P_2^2 P_{2,z}^2 \\
& + 2y^2 (P_{2,\rho}^2 + P_{2,z}^2) \left[P_2^2 + 2P_2 (\rho P_{2,\rho} + y_z P_{2,z}) \right] \\
& + 4P_2^3 (\rho P_{2,\rho} + y_z P_{2,z}) + 4\rho y_z P_2^2 P_{2,\rho} P_{2,z} \left. \right] \\
& + \frac{4}{3} \left[x^2 (P_{1,\rho}^2 + P_{1,z}^2) + 3P_1^2 + 2P_1 (\rho P_{1,\rho} + x_z P_{1,z}) \right] \\
& \cdot \left[y^2 (P_{2,\rho}^2 + P_{2,z}^2) + 3P_2^2 + 2P_2 (\rho P_{2,\rho} + y_z P_{2,z}) \right] \\
& - \frac{4}{3} \left[x^2 y^2 (P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z})^2 + 3P_1^2 P_2^2 \right. \\
& + y^2 P_1^2 (P_{2,\rho}^2 + P_{2,z}^2) + x^2 P_2^2 (P_{1,\rho}^2 + P_{1,z}^2) \\
& + 2(P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z}) \left. \right] [\gamma P_1 P_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +y^2 P_1 (\rho P_{2,\rho} + x_z P_{2,z}) + x^2 P_2 (\rho P_{1,\rho} + y_z P_{1,z})] \\
& +2P_1 P_2 [P_1 (\rho P_{2,\rho} + y_z P_{2,z}) + P_2 (\rho P_{1,\rho} + x_z P_{1,z})] \\
& +2P_1 P_2 (\rho^2 P_{1,\rho} P_{2,\rho} + x_z y_z P_{1,z} P_{2,z} + \rho y_z P_{2,\rho} P_{1,z} + \rho x_z P_{1,\rho} P_{2,z})] \} \\
& - \mathcal{L}_4(\mathbf{x}) - \mathcal{L}_4(\mathbf{y}),
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_4^{S(II)} = \frac{1}{2e^2} \{ \gamma S^{I^2} P_1 P_2 \}, \quad (5.92)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_4^{V(II)}{}_{mn} = & -\frac{1}{e^2} \{ (S_\rho^P P_{2,z} - S_z^P P_{2,\rho}) (S_\rho^P P_{1,z} - S_z^P P_{1,\rho}) x_m y_n \\
& + (S_\rho^{P^2} + S_z^{P^2}) [P_1 P_2 \delta_{mn} + P_1 P_{2,z} \delta_{m3} y_n + P_2 P_{1,z} x_m \delta_{n3}] \\
& - \frac{1}{\rho^2} P_1 P_2 S_\rho^{P^2} (x_m y_n - y_z x_m \delta_{n3} - x_z \delta_{m3} y_n + x_z y_z \delta_{m3} \delta_{n3}) - P_1 P_2 S_z^{P^2} \delta_{m3} \delta_{n3} \\
& - (S_\rho^P P_{1,\rho} + S_z^P P_{1,z}) P_2 S_z^P x_m \delta_{n3} - (S_\rho^P P_{2,\rho} + S_z^P P_{2,z}) P_1 S_z^P \delta_{m3} y_n \\
& + \frac{1}{\rho} P_1 S_z^P (S_z^P P_{2,\rho} - S_\rho^P P_{2,z}) (x_m y_n - x_z \delta_{m3} y_n) \\
& + \frac{1}{\rho} P_2 S_z^P (S_z^P P_{1,\rho} - S_\rho^P P_{1,z}) (x_m y_n - y_z x_m \delta_{n3}) \\
& - \frac{1}{\rho} P_1 P_2 S_\rho^P S_z^P (x_m \delta_{n3} + \delta_{m3} y_n - 2z \delta_{m3} \delta_{n3}) \\
& + \frac{1}{4} S^{I^2} \{ 2 (P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z}) (y^2 x_m x_n + x^2 y_m y_n - \gamma x_m y_n - x^2 y^2 \delta_{mn}) \\
& + P_1 P_2 (3x_m y_n + y_m x_n - 2\gamma \delta_{mn}) \\
& + \frac{2}{\rho} P_1 P_{2,\rho} [y^2 (x_m x_n - x_z x_m \delta_{n3} - \rho^2 \delta_{mn}) + \rho^2 (y_m y_n - x_m y_n)] \\
& + \frac{2}{\rho} P_2 P_{1,\rho} [x^2 (y_m y_n - y_z \delta_{m3} y_m - \rho^2 \delta_{mn}) + \rho^2 (x_m x_n - x_m y_n)] \\
& + 2P_1 P_{2,z} [y^2 (x_m \delta_{n3} - x_z \delta_{mn}) + x_z y_m y_n - y_z x_m y_n] \\
& + 2P_2 P_{1,z} [x^2 (\delta_{m3} y_n - y_z \delta_{mn}) + y_z x_m x_n - x_z x_m y_n] \\
& + \frac{1}{\rho} P_1 P_{2,\rho} [x_z (\gamma \delta_{m3} y_n - y^2 \delta_{m3} x_n) + (2z + y_z) (y^2 x_m \delta_{n3} - y_z x_m y_n)] \\
& + \frac{1}{\rho} P_2 P_{1,\rho} [y_z (\gamma x_m \delta_{n3} - x^2 y_m \delta_{n3}) + (2z + x_z) (x^2 \delta_{m3} y_n - x_z x_m y_n)] \\
& - P_1 P_{2,z} [y^2 (3x_m \delta_{n3} - \delta_{m3} x_n) + \gamma \delta_{m3} y_n - 3y_z x_m y_n] \\
& - P_2 P_{1,z} [x^2 (3\delta_{m3} y_n - y_m \delta_{n3}) + \gamma x_m \delta_{n3} - 3x_z x_m y_n] \\
& + 2 \left[\frac{z}{\rho} (P_{1,\rho} P_{2,z} + P_{1,z} P_{2,\rho}) - \left(\frac{1}{\rho^2} P_{1,\rho} P_{2,\rho} x_z y_z + P_{1,z} P_{2,z} \right) \right] \}
\end{aligned} \quad (5.93)$$

$$\begin{aligned}
& \cdot (x_z y^2 x_m \delta_{n3} + y_z x^2 \delta_{m3} y_n - x_z y_z x_m y_n - x^2 y^2 \delta_{m3} \delta_{n3}) \} \\
& + \frac{1}{3} \left\{ [x^2 y^2 (S_\rho^{I^2} + S_z^{I^2}) + (3x^2 + 3y^2 + 2\gamma) S^{I^2} + 2\rho (x^2 + y^2) S^I S_\rho^I + 4z\gamma S^I S_z^I] \right. \\
& \cdot [(P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z}) x_m y_n + P_1 P_2 \delta_{mn} + P_1 P_{2,z} \delta_{m3} y_n + P_2 P_{1,z} x_m \delta_{n3} \\
& + \frac{1}{\rho} P_1 P_{2,\rho} (x_m y_n - x_z \delta_{m3} y_n) + \frac{1}{\rho} P_2 P_{1,\rho} (x_m y_n - y_z x_m \delta_{n3})] \\
& - [x^2 y^2 (S_\rho^I P_{1,\rho} + S_z^I P_{1,z}) (S_\rho^I P_{2,\rho} + S_z^I P_{2,z}) x_m y_n \\
& + P_1 P_2 S^{I^2} [x_m y_n + y_m x_n + \delta_{mn} (x^2 + y^2)] + x^2 y^2 P_1 P_2 S_z^{I^2} \delta_{m3} \delta_{n3} \\
& + \frac{1}{\rho^2} P_1 P_2 S_\rho^{I^2} x^2 y^2 (x_m y_n - y_z x_m \delta_{n3} - x_z \delta_{m3} y_n + x_z y_z \delta_{m3} \delta_{n3}) \\
& + S^{I^2} [(x^2 + y^2 + 2\rho^2) P_{1,\rho} P_{2,\rho} + (x^2 + y^2 + 2x_z y_z) P_{1,z} P_{2,z}] x_m y_n \\
& + S^I P_2 (S_\rho^I P_{1,\rho} + S_z^I P_{1,z}) (y^2 x_m x_n + x^2 x_m y_n) \\
& + S^I P_1 (S_\rho^I P_{2,\rho} + S_z^I P_{2,z}) (y^2 x_m y_n + x^2 y_m y_n) \\
& + \frac{1}{\rho} x^2 y^2 S_\rho^I [P_2 (S_\rho^I P_{1,\rho} + S_z^I P_{1,z}) (x_m y_n - y_z x_m \delta_{n3}) \\
& + P_1 (S_\rho^I P_{2,\rho} + S_z^I P_{2,z}) (x_m y_n - x_z \delta_{m3} y_n)] \\
& + x^2 y^2 S_z^I [P_2 (S_\rho^I P_{1,\rho} + S_z^I P_{1,z}) x_m \delta_{n3} + P_1 (S_\rho^I P_{2,\rho} + S_z^I P_{2,z}) \delta_{m3} y_n] \\
& + \rho (x^2 + y^2) S^I [P_{2,\rho} (S_\rho^I P_{1,\rho} + S_z^I P_{1,z}) + P_{1,\rho} (S_\rho^I P_{2,\rho} + S_z^I P_{2,z})] x_m y_n \\
& + 2z\gamma S^I [P_{2,z} (S_\rho^I P_{1,\rho} + S_z^I P_{1,z}) + P_{1,z} (S_\rho^I P_{2,\rho} + S_z^I P_{2,z})] x_m y_n \\
& + \frac{1}{\rho} S^I S_\rho^I P_1 P_2 [y^2 (x_m y_n - y_z x_m \delta_{n3}) + x^2 (y_m y_n - y_z y_m \delta_{n3})] \\
& + \frac{1}{\rho} S^I S_\rho^I P_1 P_2 [y^2 (x_m x_n - x_z \delta_{m3} x_n) + x^2 (x_m y_n - x_z \delta_{m3} y_n)] \\
& + P_1 P_2 S^I S_z^I [y^2 (x_m \delta_{n3} + \delta_{m3} x_n) + x^2 (y_m \delta_{n3} + \delta_{m3} y_n)] \\
& + \frac{1}{\rho} P_1 P_{2,\rho} S^{I^2} [(\rho^2 + y^2) x_m y_n + (\rho^2 + x^2) y_m y_n - 2z\gamma \delta_{m3} y_n] \\
& + \frac{1}{\rho} P_2 P_{1,\rho} S^{I^2} [(\rho^2 + y^2) x_m x_n + (\rho^2 + x^2) x_m y_n - 2z\gamma x_m \delta_{n3}] \\
& + P_1 P_{2,z} S^{I^2} [(x^2 + y^2) \delta_{m3} y_n + y_z x_m y_n + x_z y_m y_n] \\
& + P_2 P_{1,z} S^{I^2} [(x^2 + y^2) x_m \delta_{n3} + y_z x_m x_n + x_z x_m y_n] \\
& + \frac{1}{\rho} x^2 y^2 P_1 P_2 S_\rho^I S_z^I (x_m \delta_{n3} + \delta_{m3} y_n - 2z\gamma \delta_{m3} \delta_{n3}) \\
& + (x^2 + y^2) S^I S_\rho^I [P_1 P_{2,\rho} (x_m y_n - x_z \delta_{m3} y_n) + P_2 P_{1,\rho} (x_m y_n - y_z x_m \delta_{n3})] \\
& + \frac{2}{\rho} z\gamma S^I S_\rho^I [P_1 P_{2,z} (x_m y_n - x_z \delta_{m3} y_n) + P_2 P_{1,z} (x_m y_n - y_z x_m \delta_{n3})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\rho \left(x^2 + y^2 \right) S^I S_z^I \left(P_1 P_{2,\rho} \delta_{m3} y_n + P_2 P_{1,\rho} x_m \delta_{n3} \right) \\
& + 2z\gamma S^I S_z^I \left(P_1 P_{2,z} \delta_{m3} y_n + P_2 P_{1,z} x_m \delta_{n3} \right) \\
& + 2z\rho S^{I^2} \left(P_{1,\rho} P_{2,z} + P_{2,\rho} P_{1,z} \right) x_m y_n \Big\} \\
+ & \left[x^2 \left(P_{1,\rho}^2 + P_{1,z}^2 \right) + y^2 \left(P_{2,\rho}^2 + P_{2,z}^2 \right) + 3 \left(P_1^2 + P_2^2 \right) + 2\rho \left(P_1 P_{1,\rho} + P_2 P_{2,\rho} \right) \right. \\
& + 2x_z P_1 P_{1,z} + 2y_z P_2 P_{2,z} \Big] \\
& \cdot \left[\left(P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z} - S_\rho^P S_\rho^I - S_z^P S_z^I \right) x_m y_n + P_1 P_2 \delta_{mn} \right. \\
& + \frac{1}{\rho} \left[P_1 P_{2,\rho} \left(x_m y_n - x_z \delta_{m3} y_n \right) + P_2 P_{1,\rho} \left(x_m y_n - y_z x_m \delta_{n3} \right) \right] \\
& - \frac{1}{\rho} S^I S_\rho^P \left(2x_m y_n - x_z \delta_{m3} y_n - y_z x_m \delta_{n3} \right) \\
& + P_1 P_{2,z} \delta_{m3} y_n + P_2 P_{1,z} x_m \delta_{n3} - S^I S_z^P \left(\delta_{m3} y_n + x_m \delta_{n3} \right) \Big] \\
+ & \left[x^2 \left(S_\rho^P P_{1,\rho} + S_z^P P_{1,z} \right) \left(S_\rho^I P_{1,\rho} + S_z^I P_{1,z} \right) \right. \\
& + y^2 \left(S_\rho^P P_{2,\rho} + S_z^P P_{2,z} \right) \left(S_\rho^I P_{2,\rho} + S_z^I P_{2,z} \right) \Big] x_m y_n \\
& + 2S^I \left[P_1 \left(S_\rho^P P_{1,\rho} + S_z^P P_{1,z} \right) x_m r_n + P_2 \left(S_\rho^P P_{2,\rho} + S_z^P P_{2,z} \right) r_m y_n \right] \\
& + \rho P_1 \left[S_\rho^I \left(S_\rho^P P_{1,\rho} + S_z^P P_{1,z} \right) + S_\rho^P \left(S_\rho^I P_{1,\rho} + S_z^I P_{1,z} \right) \right] x_m y_n \\
& + \rho P_2 \left[S_\rho^I \left(S_\rho^P P_{2,\rho} + S_z^P P_{2,z} \right) + S_\rho^P \left(S_\rho^I P_{2,\rho} + S_z^I P_{2,z} \right) \right] x_m y_n \\
& + x_z P_1 \left[S_z^I \left(S_\rho^P P_{1,\rho} + S_z^P P_{1,z} \right) + S_z^P \left(S_\rho^I P_{1,\rho} + S_z^I P_{1,z} \right) \right] x_m y_n \\
& + y_z P_2 \left[S_z^I \left(S_\rho^P P_{2,\rho} + S_z^P P_{2,z} \right) + S_z^P \left(S_\rho^I P_{2,\rho} + S_z^I P_{2,z} \right) \right] x_m y_n \\
& + \frac{1}{\rho} S^I \left[x^2 P_{1,\rho} \left(S_\rho^P P_{1,\rho} + S_z^P P_{1,z} \right) + y^2 P_{2,\rho} \left(S_\rho^P P_{2,\rho} + S_z^P P_{2,z} \right) \right] \\
& \cdot \left(2x_m y_n - x_z \delta_{m3} y_n - y_z x_m \delta_{n3} \right) \\
& + S^I \left[x^2 P_{1,z} \left(S_\rho^P P_{1,\rho} + S_z^P P_{1,z} \right) + y^2 P_{2,z} \left(S_\rho^P P_{2,\rho} + S_z^P P_{2,z} \right) \right] \left(\delta_{m3} y_n + x_m \delta_{n3} \right) \\
& + \frac{1}{\rho} S^I S_\rho^P \left[P_1^2 \left(x_m y_n - x_z \delta_{m3} y_n + x_m x_n - x_z x_m \delta_{n3} \right) \right. \\
& + P_2^2 \left(y_m y_n - y_z \delta_{m3} y_n + x_m y_n - y_z x_m \delta_{n3} \right) \Big] \\
& + \left(P_1^2 + P_2^2 \right) \left(S_\rho^I S_\rho^P + S_z^I S_z^P \right) x_m y_n \\
& + S^I S_\rho^P \left(P_1 P_{1,\rho} + P_2 P_{2,\rho} \right) \left(2x_m y_n - x_z \delta_{m3} y_n - y_z x_m \delta_{n3} \right) \\
& + \rho S^I S_\rho^P \left(P_1 P_{1,z} + P_2 P_{2,z} \right) \left(\delta_{m3} y_n + x_m \delta_{n3} \right) \\
& + S^I S_z^P \left(P_1^2 + P_2^2 + x_z P_1 P_{1,z} + y_z P_2 P_{2,z} \right) \left(\delta_{m3} y_n + x_m \delta_{n3} \right) \\
& + \frac{1}{\rho} S^I S_z^P \left(x_z P_1 P_{1,\rho} + y_z P_2 P_{2,\rho} \right) \left(2x_m y_n - x_z \delta_{m3} y_n - y_z x_m \delta_{n3} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[x^2 (P_{1,\rho}^2 + P_{1,z}^2) + P_1^2 \right] (P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z}) x_m y_n \\
& + P_1 P_2 \left[P_1^2 \delta_{mn} + (P_{1,\rho}^2 + P_{1,z}^2) x_m x_n \right] \\
& + P_1 (P_{1,\rho}^2 + P_{1,z}^2) (\rho P_{2,\rho} + x_z P_{2,z}) x_m y_n \\
& + \frac{1}{\rho} P_2 P_{1,\rho} \left[x^2 (P_{1,\rho}^2 + P_{1,z}^2) + P_1^2 \right] (x_m y_n - y_z x_m \delta_{n3}) \\
& + P_2 P_{1,z} \left[x^2 (P_{1,\rho}^2 + P_{1,z}^2) + P_1^2 \right] x_m \delta_{n3} \\
& + \frac{1}{\rho} P_1^3 P_{2,\rho} (x_m y_n - x_z \delta_{m3} y_n) + P_1^3 P_{2,z} \delta_{m3} y_n \\
& + \frac{1}{\rho} P_1 P_{1,\rho} (P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z}) \left[(x^2 + \rho^2) x_m y_n - x_z x^2 \delta_{m3} y_n \right] \\
& + \frac{1}{\rho} P_1^2 P_2 P_{1,\rho} [2x_m x_n - x_z (x_m \delta_{n3} + \delta_{m3} x_n)] \\
& + P_1^2 P_{1,\rho} \left[P_{2,\rho} (2x_m y_n - x_z \delta_{m3} y_n) + \frac{x_z}{\rho} P_{2,z} (x_m y_n - x_z \delta_{m3} y_n) \right] \\
& + \frac{1}{\rho^2} P_1 P_2 P_{1,\rho}^2 \left[(x^2 + \rho^2) (x_m y_n - y_z x_m \delta_{n3}) - x_z x^2 (\delta_{m3} y_n - y_z \delta_{m3} \delta_{n3}) \right] \\
& + \frac{1}{\rho} P_1 P_2 P_{1,\rho} P_{1,z} \left[(2\rho^2 + dx_z) x_m \delta_{n3} - 2x_z x^2 \delta_{m3} \delta_{n3} + x^2 \delta_{m3} y_n + x_z x_m y_n \right] \\
& + P_1 P_{1,z} (P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z}) (x^2 \delta_{m3} y_n + x_z x_m y_n) \\
& + P_1^2 P_2 P_{1,z} (x_m \delta_{n3} + \delta_{m3} x_n) + \rho P_1^2 P_{1,z} P_{2,\rho} \delta_{m3} y_n \\
& + P_1^2 P_{1,z} P_{2,z} (x_m y_n + x_z \delta_{m3} y_n) + P_1 P_2 P_{1,z}^2 (x^2 \delta_{m3} \delta_{n3} + x_z x_m \delta_{n3}) \\
& + \left[y^2 (P_{2,\rho}^2 + P_{2,z}^2) + P_2^2 \right] (P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z}) x_m y_n \\
& + P_1 P_2 \left[P_2^2 \delta_{mn} + (P_{2,\rho}^2 + P_{2,z}^2) y_m y_n \right] \\
& + P_2 (P_{2,\rho}^2 + P_{2,z}^2) (\rho P_{1,\rho} + y_z P_{1,z}) x_m y_n \\
& + \frac{1}{\rho} P_1 P_{2,\rho} \left[y^2 (P_{2,\rho}^2 + P_{2,z}^2) + P_2^2 \right] (x_m y_n - x_z \delta_{m3} y_n) \\
& + P_1 P_{2,z} \left[y^2 (P_{2,\rho}^2 + P_{2,z}^2) + P_2^2 \right] \delta_{m3} y_n \\
& + \frac{1}{\rho} P_2^3 P_{1,\rho} (x_m y_n - y_z x_m \delta_{n3}) + P_2^3 P_{1,z} x_m \delta_{n3} \\
& + \frac{1}{\rho} P_2 P_{2,\rho} (P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z}) \left[(y^2 + \rho^2) x_m y_n - y_z y^2 x_m \delta_{n3} \right] \\
& + \frac{1}{\rho} P_1 P_2^2 P_{2,\rho} [2y_m y_n - y_z (y_m \delta_{n3} + \delta_{m3} y_n)] \\
& + P_2^2 P_{2,\rho} \left[P_{1,\rho} (2x_m y_n - y_z x_m \delta_{n3}) + \frac{y_z}{\rho} P_{1,z} (x_m y_n - y_z x_m \delta_{n3}) \right] \\
& + \frac{1}{\rho^2} P_1 P_2 P_{2,\rho}^2 \left[(y^2 + \rho^2) (x_m y_n - x_z \delta_{m3} y_n) - y_z y^2 (x_m \delta_{n3} - x_z \delta_{m3} \delta_{n3}) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\rho} P_1 P_2 P_{2,\rho} P_{2,z} \left[(2\rho^2 - dy_z) \delta_{m3} y_n - 2zy^2 \delta_{m3} \delta_{n3} + y_z x_m y_n + y^2 x_m \delta_{n3} \right] \\
& + P_2 P_{2,z} (P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z}) (y^2 x_m \delta_{n3} + y_z x_m y_n) \\
& + P_1 P_2^2 P_{2,z} (\delta_{m3} y_n + y_m \delta_{n3}) + \rho P_2^2 P_{1,\rho} P_{2,z} x_m \delta_{n3} \\
& + P_2^2 P_{1,z} P_{2,z} (x_m y_n + y_z x_m \delta_{n3}) + P_1 P_2 P_{2,z}^2 (y^2 \delta_{m3} \delta_{n3} + y_z \delta_{m3} y_n) \Big] \Big\} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_4^{V(PP)}{}_{mn} = & -\frac{1}{4e^2} \epsilon_{mkp} \epsilon_{nlq} \left\{ 2S^{I^2} \cdot \left\{ x^2 (P_{1,\rho}^2 + P_{1,z}^2) + y^2 (P_{2,\rho}^2 + P_{2,z}^2) + 3 (P_1^2 + P_2^2) \right. \right. \\
& + 2P_1 (\rho P_{1,\rho} + x_z P_{1,z}) + 2P_2 (\rho P_{2,\rho} + y_z P_{2,z}) \Big\} \delta_{kq} x_p y_l \\
& - 2S^{I^2} \left\{ (P_1^2 + P_2^2) \delta_{kq} x_p y_l \right. \\
& + x^2 \left(P_{1,z} - \frac{x_z}{\rho} P_{1,\rho} \right) \left(P_{1,z} - \frac{y_z}{\rho} P_{1,\rho} \right) x_k \delta_{p3} \delta_{l3} y_q \\
& + y^2 \left(P_{2,z} - \frac{x_z}{\rho} P_{2,\rho} \right) \left(P_{2,z} - \frac{y_z}{\rho} P_{2,\rho} \right) x_k \delta_{p3} \delta_{l3} y_q \\
& + \left(P_{1,z} - \frac{x_z}{\rho} P_{1,\rho} \right) P_1 x_k \delta_{p3} x_l y_q + \left(P_{2,z} - \frac{y_z}{\rho} P_{2,\rho} \right) P_2 x_k y_p \delta_{l3} y_q \Big\} \\
& + 2 \left\{ S^I \left[P_2 (S_\rho^P P_{1,\rho} + S_z^P P_{1,z}) + P_1 (S_\rho^P P_{2,\rho} + S_z^P P_{2,z}) \right] \delta_{kq} x_p y_l \right. \\
& + \frac{1}{\rho} P_1 P_2 S^I S_\rho^P \delta_{kq} [(x_p - x_z \delta_{p3}) y_l + x_p (y_l - y_z \delta_{l3})] \\
& + P_1 P_2 S^I S_z^P \delta_{kq} (\delta_{p3} y_l + x_p \delta_{l3}) \\
& + P_1 \left(S_z^P - \frac{x_z}{\rho} S_\rho^P \right) \left[S^I \left(P_{2,z} - \frac{y_z}{\rho} P_{2,\rho} \right) - P_2 \left(S_z^I - \frac{y_z}{\rho} S_\rho^I \right) \right] x_k \delta_{p3} \delta_{l3} y_q \\
& + P_2 \left(S_z^P - \frac{y_z}{\rho} S_\rho^P \right) \left[S^I \left(P_{1,z} - \frac{x_z}{\rho} P_{1,\rho} \right) - P_1 \left(S_z^I - \frac{x_z}{\rho} S_\rho^I \right) \right] x_k \delta_{p3} \delta_{l3} y_q \Big\} \\
& - 4 \left\{ P_1 P_2 \delta_{pq} \left[(S_\rho^P S_\rho^I + S_z^P S_z^I) x_k y_l \right. \right. \\
& + \frac{1}{\rho} S^I S_\rho^P [(x_k - x_z \delta_{k3}) y_l + x_k (y_l - y_z \delta_{l3})] + S^I S_z^P (\delta_{k3} y_l + x_k \delta_{l3}) \Big] \\
& + S^I P_1 \left(S_z^P - \frac{y_z}{\rho} S_\rho^P \right) \left(P_{2,z} - \frac{x_z}{\rho} P_{2,\rho} \right) x_k \delta_{l3} \delta_{p3} y_q \\
& + S^I P_2 \left(S_z^P - \frac{x_z}{\rho} S_\rho^P \right) \left(P_{1,z} - \frac{y_z}{\rho} P_{1,\rho} \right) x_k \delta_{l3} \delta_{p3} y_q \Big\} \\
& + 3 \left\{ P_1^2 P_2^2 \delta_{kl} \delta_{pq} + 2P_1 P_2 \delta_{pq} [(P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z}) x_k y_l \right. \\
& + \frac{1}{\rho} P_1 P_{2,\rho} (x_k - x_z \delta_{k3}) y_l + P_1 P_{2,z} \delta_{k3} y_l \\
& + \frac{1}{\rho} P_2 P_{1,\rho} x_k (y_l - y_z \delta_{l3}) + P_2 P_{1,z} x_k \delta_{l3} \Big] \Big\}
\end{aligned} \tag{5.94}$$

$$+2P_1P_2 \left(P_{2,z} - \frac{x_z}{\rho} P_{2,\rho} \right) \left(P_{1,z} - \frac{y_z}{\rho} P_{1,\rho} \right) x_k \delta_{p3} \delta_{l3} y_q \Bigg\} \Bigg\}.$$

Nestes resultados, convém notar que a subtração das auto-energias para o cálculo da lagrangiana de interação escalar no AN não é simples, como no caso do AP.

O potencial é calculado como a integral da lagrangiana de interação em todo o espaço,

$$V = - \int d^3r \mathcal{L}_{int}, \quad (5.95)$$

realizada em coordenadas cilíndricas. As integrais no ângulo azimutal básicas, utilizadas para a integração dos diversos termos do potencial, são apresentadas no Apêndice D. O resultado da integração dos termos $\mathcal{L}_{mn}^V$ é escrito em termos dos operadores δ_{mn} e $T_{mn} = 3\delta_{m3}\delta_{n3} - \delta_{mn}$, que geram, respectivamente, os termos spin-spin e tensor do potencial.

Apresentamos abaixo as expressões dos diversos termos do potencial. As integrais que aparecem nestes resultados são calculadas numericamente. As variáveis de integração foram tornadas adimensionais, pelo fator $2ef_\pi$. Temos, para o potencial escalar V_C ,

$$\begin{aligned} V_{C,2}^{PP} = & \frac{\pi f_\pi}{e} \int_0^\infty dz \int_0^\infty \rho d\rho \left\{ \left(\frac{c_x^2}{\zeta^2} - 1 \right) (F_y'^2 + 2t_y'^2) - (F_x'^2 + 2t_x'^2) \right. \\ & + \frac{1}{\zeta^2} \left[s_x^2 F_x'^2 + \frac{2}{\zeta^2} c_x t_y F_x' (\rho \nu_\rho + x_z \nu_z) + \frac{1}{\zeta^4} c_x^2 (\nu_\rho^2 + \nu_z^2) \right] \\ & + \frac{1}{3} \left[x^2 y^2 (S_\rho'^2 + S_z'^2) + S'^2 (3x^2 + 3y^2 + 2\gamma) \right. \\ & \quad \left. + 2\rho (x^2 + y^2) S^I S_\rho^I + 4z\gamma S^I S_z^I \right] \\ & \left. + x^2 (P_{1,\rho}^2 + P_{1,z}^2) + 3P_1^2 + 2P_1 (\rho P_{1,\rho} + x_z P_{1,z}) \right\}, \end{aligned} \quad (5.96)$$

$$V_{C,SB}^{PP} = -\frac{\pi m_\pi^2}{2e^3 f_\pi} \int_0^\infty dz \int_0^\infty \rho d\rho \left[\left(\frac{c_x}{\zeta} - 1 \right) c_y - (c_x - 1) \right], \quad (5.97)$$

$$\begin{aligned} V_{C,4}^{PP} = & \frac{2\pi f_\pi}{e} \int_0^\infty dz \int_0^\infty \rho d\rho \left\{ 4P_1^2 (S_\rho^{P2} + S_z^{P2}) \right. \\ & + 2 (S_\rho^P P_{1,z} - S_z^P P_{1,\rho}) \left[x^2 (S_\rho^P P_{1,z} - S_z^P P_{1,\rho}) - 2P_1 (\rho S_z^P - x_z S_\rho^P) \right] \\ & - \left[x^4 (P_{1,\rho}^2 + P_{1,z}^2)^2 + 3P_1^4 \right. \\ & \quad + 2(x^2 + \rho^2) P_1^2 P_{1,\rho}^2 + 2(x^2 + x_z^2) P_1^2 P_{1,z}^2 \\ & \quad + 2x^2 (P_{1,\rho}^2 + P_{1,z}^2) \left[P_1^2 + 2P_1 (\rho P_{1,\rho} + x_z P_{1,z}) \right] \\ & \quad \left. \left. + 4P_1^3 (\rho P_{1,\rho} + x_z P_{1,z}) + 4\rho x_z P_1^2 P_{1,\rho} P_{1,z} \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.98)$$

$$\begin{aligned}
& - 2t_x^2 (2F_x'^2 + t_x^2) + \left(\frac{c_x^4}{\zeta^4} - 1 \right) \cdot 2t_y^2 (2F_y'^2 + t_y^2) \\
& + 2 (S_\rho^P P_{2,z} - S_z^P P_{2,\rho}) \left[y^2 (S_\rho^P P_{2,z} - S_z^P P_{2,\rho}) - 2P_2 (\rho S_z^P - y_z S_\rho^P) \right] \\
& + \frac{1}{\zeta^4} c_x^2 t_y^2 \left\{ 2 (1 + c_y^2 + \alpha^2 s_y^2) s_x^2 F_y'^2 \right. \\
& + \frac{2}{\zeta^2} c_x t_x F_x' \left[(c_y^2 + 1) (\rho \nu_\rho + x_z \nu_z) + \gamma t_y^2 (\rho \nu_\rho + y_z \nu_z) \right] \\
& + \left. \frac{2}{\zeta^4} c_x^2 \left[(c_y^2 + 1) (\nu_\rho^2 + \nu_z^2) + t_y^2 (\rho \nu_\rho + y_z \nu_z)^2 \right] \right\} \\
& + \frac{2}{3} \left[x^2 y^2 (S_\rho^{I^2} + S_z^{I^2}) + S^{I^2} (3x^2 + 3y^2 + 2\gamma) \right. \\
& + 2\rho (x^2 + y^2) S^I S_\rho^I + 4z\gamma S^I S_z^I \left. \right] \\
& \cdot \left[x^2 (P_{1,\rho}^2 + P_{1,z}^2) + y^2 (P_{2,\rho}^2 + P_{2,z}^2) \right. \\
& + 3 (P_1^2 + P_2^2) + 2P_1 (\rho P_{1,\rho} + x_z P_{1,z}) + 2P_2 (\rho P_{2,\rho} + y_z P_{2,z}) \left. \right] \\
& - \frac{2}{3} \left\{ x^2 (S_\rho^I P_{1,\rho} + S_z^I P_{1,z})^2 x^2 y^2 + (3x^2 + 3y^2 + 2\gamma) S^{I^2} P_1^2 \right. \\
& + x^2 y^2 P_1^2 (S_\rho^{I^2} + S_z^{I^2}) \\
& + x^2 (x^2 + y^2 + 2\rho^2) S^{I^2} P_{1,\rho}^2 + x^2 (x^2 + y^2 + 2x_z y_z) S^{I^2} P_{1,z}^2 \\
& + 2 (S_\rho^I P_{1,\rho} + S_z^I P_{1,z}) \cdot \left[x^2 (y^2 + \gamma) S^I P_1 + x^2 y^2 P_1 (\rho S_\rho^I + x_z S_z^I) \right. \\
& + \rho x^2 (x^2 + y^2) S^I P_{1,\rho} + 2z\gamma x^2 S^I P_{1,z} \left. \right] \\
& + 2\rho (x^2 + y^2) P_1^2 S^I S_\rho^I + 4z\gamma P_1^2 S^I S_z^I + 4z\rho x^2 S^{I^2} P_{1,\rho} P_{1,z} \\
& + 2\rho (2x^2 + y^2 + \gamma) S^{I^2} P_1 P_{1,\rho} + 2 (2z\gamma + x_z (x^2 + \gamma)) S^{I^2} P_1 P_{1,z} \\
& + 2S^I P_1 (\rho S_\rho^I + x_z S_z^I) \left[\rho (x^2 + y^2) P_{1,\rho} + 2z\gamma P_{1,z} \right] \\
& + y^2 (S_\rho^I P_{2,\rho} + S_z^I P_{2,z})^2 x^2 y^2 + (3x^2 + 3y^2 + 2\gamma) S^{I^2} P_2^2 \\
& + x^2 y^2 P_2^2 (S_\rho^{I^2} + S_z^{I^2}) \\
& + y^2 (x^2 + y^2 + 2\rho^2) S^{I^2} P_{2,\rho}^2 + y^2 (x^2 + y^2 + 2x_z y_z) S^{I^2} P_{2,z}^2 \\
& + 2 (S_\rho^I P_{2,\rho} + S_z^I P_{2,z}) \cdot \left[y^2 (x^2 + \gamma) S^I P_2 + x^2 y^2 P_2 (\rho S_\rho^I + y_z S_z^I) \right. \\
& + \rho y^2 (x^2 + y^2) S^I P_{2,\rho} + 2z\gamma y^2 S^I P_{2,z} \left. \right] \\
& + 2\rho (x^2 + y^2) P_2^2 S^I S_\rho^I + 4z\gamma P_2^2 S^I S_z^I + 4z\rho y^2 S^{I^2} P_{2,\rho} P_{2,z} \\
& + 2\rho (x^2 + 2y^2 + \gamma) S^{I^2} P_2 P_{2,\rho} + 2 (2z\gamma + y_z (y^2 + \gamma)) S^{I^2} P_2 P_{2,z} \\
& + 2S^I P_2 (\rho S_\rho^I + y_z S_z^I) \left[\rho (x^2 + y^2) P_{2,\rho} + 2z\gamma P_{2,z} \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4}{3} \left[x^2 y^2 (S_\rho^P P_{1,\rho} + S_z^P P_{1,z}) (S_\rho^I P_{2,\rho} + S_z^I P_{2,z}) \right. \\
& + (S_\rho^P P_{1,\rho} + S_z^P P_{1,z}) [(\gamma + 3x^2) S^I P_2 + x^2 P_2 (\rho S_\rho^I + y_z S_z^I) \\
& + \rho (x^2 + y^2) S^I P_{2,\rho} + 2z\gamma S^I P_{2,z}] \\
& + y^2 P_1 (S_\rho^I P_{2,\rho} + S_z^I P_{2,z}) (\rho S_\rho^P + x_z S_z^P) \\
& + 2P_1 P_2 S^I [2\rho S_\rho^P + (z + x_z) S_z^P] + P_1 P_2 (\rho S_\rho^I + y_z S_z^I) (\rho S_\rho^P + x_z S_z^P) \\
& + S^I P_1 P_{2,\rho} [(y^2 + \rho^2) S_\rho^P + \rho x_z S_z^P] + S^I P_1 P_{2,z} [\rho y_z S_\rho^P + (y^2 + x_z y_z) S_z^P] \\
& + x^2 y^2 (S_\rho^P P_{2,\rho} + S_z^P P_{2,z}) (S_\rho^I P_{1,\rho} + S_z^I P_{1,z}) \\
& + (S_\rho^P P_{2,\rho} + S_z^P P_{2,z}) [(\gamma + 3y^2) S^I P_1 + y^2 P_1 (\rho S_\rho^I + x_z S_z^I) \\
& + \rho (x^2 + y^2) S^I P_{1,\rho} + 2z\gamma S^I P_{1,z}] \\
& + x^2 P_2 (S_\rho^I P_{1,\rho} + S_z^I P_{1,z}) (\rho S_\rho^P + y_z S_z^P) \\
& + 2P_1 P_2 S^I [2\rho S_\rho^P + (z + y_z) S_z^P] + P_1 P_2 (\rho S_\rho^I + x_z S_z^I) (\rho S_\rho^P + y_z S_z^P) \\
& + S^I P_2 P_{1,\rho} [(x^2 + \rho^2) S_\rho^P + \rho y_z S_z^P] + S^I P_2 P_{1,z} [\rho x_z S_\rho^P + (x^2 + x_z y_z) S_z^P] \Big] \\
& - \frac{8}{3} \left[(S_\rho^P S_\rho^I + S_z^P S_z^I) [x^2 y^2 (P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z}) + \gamma P_1 P_2 \right. \\
& + y^2 P_1 (\rho P_{2,\rho} + x_z P_{2,z}) + x^2 P_2 (\rho P_{1,\rho} + y_z P_{1,z})] \\
& + [\rho (x^2 + y^2) S_\rho^P + 2z\gamma S_z^P] S^I (P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z}) \\
& + 2S^I P_1 P_2 (\rho S_\rho^P + z S_z^P) \\
& + S^I S_\rho^P [(y^2 + \rho^2) P_1 P_{2,\rho} + (x^2 + \rho^2) P_2 P_{1,\rho}] \\
& + S^I S_z^P [(y^2 + x_z y_z) P_1 P_{2,z} + (x^2 + x_z y_z) P_2 P_{1,z}] \\
& + \rho S^I S_z^P (y_z P_1 P_{2,\rho} + x_z P_2 P_{1,\rho}) + \rho S^I S_\rho^P (x_z P_1 P_{2,z} + y_z P_2 P_{1,z}) \Big] \\
& + [x^2 (P_{1,\rho}^2 + P_{1,z}^2) + 3P_1^2 + 2P_1 (\rho P_{1,\rho} + x_z P_{1,z})]^2 \\
& + \frac{4}{3} [x^2 (P_{1,\rho}^2 + P_{1,z}^2) + 3P_1^2 + 2P_1 (\rho P_{1,\rho} + x_z P_{1,z})] \\
& \cdot [y^2 (P_{2,\rho}^2 + P_{2,z}^2) + 3P_2^2 + 2P_2 (\rho P_{2,\rho} + y_z P_{2,z})] \\
& - \frac{4}{3} [x^2 y^2 (P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z})^2 + 3P_1^2 P_2^2 \\
& + y^2 P_1^2 (P_{2,\rho}^2 + P_{2,z}^2) + x^2 P_2^2 (P_{1,\rho}^2 + P_{1,z}^2) \\
& + 2(P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z}) [\gamma P_1 P_2 \\
& + y^2 P_1 (\rho P_{2,\rho} + x_z P_{2,z}) + x^2 P_2 (\rho P_{1,\rho} + y_z P_{1,z})] \\
& + 2P_1 P_2 [P_1 (\rho P_{2,\rho} + y_z P_{2,z}) + P_2 (\rho P_{1,\rho} + x_z P_{1,z})]
\end{aligned}$$

$$+2P_1P_2 \left(\rho^2 P_{1,\rho} P_{2,\rho} + x_z y_z P_{1,z} P_{2,z} + \rho y_z P_{2,\rho} P_{1,z} + \rho x_z P_{1,\rho} P_{2,z} \right) \Big] \Big\},$$

$$V_{C,4}^{II} = \frac{2\pi f_\pi}{e} \left\{ \gamma S^I{}^2 P_1 P_2 \right\}, \quad (5.99)$$

para o potencial spin-spin ímpar V_{SS}^{II} ,

$$V_{SS,2}^{II} = \frac{2\pi f_\pi}{27e} \int_0^\infty dz \int_0^\infty \rho d\rho \left\{ \gamma \left(P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z} - S_\rho^P S_\rho^I - S_z^P S_z^I \right) + 3P_1 P_2 \right. \\ \left. + \rho \left(P_1 P_{2,\rho} + P_2 P_{1,\rho} - 2S^I S_\rho^P \right) + y_z P_1 P_{2,z} + x_z P_2 P_{1,z} - 2z S^I S_z^P \right\}, \quad (5.100)$$

$$V_{SS,SB}^{II} = \frac{\pi m_\pi^2}{54e^3 f_\pi} \int_0^\infty dz \int_0^\infty \rho d\rho \alpha s_x s_y, \quad (5.101)$$

$$V_{SS,4}^{II} = \frac{2f_\pi}{9e} \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty dz \int_0^\infty \rho d\rho \left\{ \left(S_\rho^P P_{2,z} - S_z^P P_{2,\rho} \right) \left(S_\rho^P P_{1,z} - S_z^P P_{1,\rho} \right) \gamma \right. \\ \left. + \left(S_\rho^{P^2} + S_z^{P^2} \right) \left[2P_1 P_2 + y_z P_1 P_{2,z} + x_z P_2 P_{1,z} \right] \right. \\ \left. - x_z P_2 S_z^P \left(S_\rho^P P_{1,\rho} + S_z^P P_{1,z} \right) - y_z P_1 S_z^P \left(S_\rho^P P_{2,\rho} + S_z^P P_{2,z} \right) \right. \\ \left. + \rho P_1 S_z^P \left(S_z^P P_{2,\rho} - S_\rho^P P_{2,z} \right) + \rho P_2 S_z^P \left(S_z^P P_{1,\rho} - S_\rho^P P_{1,z} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{4} S^I{}^2 \left\{ -2 \left(\gamma^2 + x^2 y^2 \right) \left(P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z} \right) - 2\gamma P_1 P_2 \right. \right. \\ \left. - 2\rho \left[\left(y^2 + \gamma \right) P_1 P_{2,\rho} + \left(x^2 + \gamma \right) P_2 P_{1,\rho} \right] \right. \right. \\ \left. - 4 \left[P_1 P_{2,z} \left(z\rho^2 + x_z y_z^2 \right) + P_2 P_{1,z} \left(z\rho^2 + x_z^2 y_z \right) \right] \right. \\ \left. + 2\rho d \left(y_z P_1 P_{2,\rho} - x_z P_2 P_{1,\rho} - \rho P_1 P_{2,z} + \rho P_2 P_{1,z} \right) \right. \\ \left. + 2 \left[\frac{z}{\rho} \left(P_{1,\rho} P_{2,z} + P_{1,z} P_{2,\rho} \right) - \left(\frac{1}{\rho^2} P_{1,\rho} P_{2,\rho} x_z y_z + P_{1,z} P_{2,z} \right) \right] \left(-\rho^2 y^2 + y_z^2 x^2 - x_z y_z \gamma \right) \right\} \\ \left. + \frac{1}{3} \left\{ \left[x^2 y^2 \left(S_\rho^I{}^2 + S_z^I{}^2 \right) + \left(3x^2 + 3y^2 + 2\gamma \right) S^I{}^2 + 2\rho \left(x^2 + y^2 \right) S^I S_\rho^I + 4z\gamma S^I S_z^I \right] \right. \right. \\ \left. \cdot \left[\left(P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z} \right) \gamma + 3P_1 P_2 + \rho \left(P_1 P_{2,\rho} + P_2 P_{1,\rho} \right) + y_z P_1 P_{2,z} + x_z P_2 P_{1,z} \right] \right. \\ \left. - \left[\gamma x^2 y^2 \left(S_\rho^I P_{1,\rho} + S_z^I P_{1,z} \right) \left(S_\rho^I P_{2,\rho} + S_z^I P_{2,z} \right) \right. \right. \\ \left. + \left(3x^2 + 3y^2 + 2\gamma \right) P_1 P_2 S^I{}^2 + x^2 y^2 P_1 P_2 \left(S_z^I{}^2 + S_\rho^I{}^2 \right) \right. \\ \left. + S^I{}^2 \left[\left(x^2 + y^2 + 2\rho^2 \right) P_{1,\rho} P_{2,\rho} + \left(x^2 + y^2 + 2x_z y_z \right) P_{1,z} P_{2,z} \right] \gamma \right. \\ \left. + x^2 \left(y^2 + \gamma \right) S^I P_2 \left(S_\rho^I P_{1,\rho} + S_z^I P_{1,z} \right) + y^2 \left(x^2 + \gamma \right) S^I P_1 \left(S_\rho^I P_{2,\rho} + S_z^I P_{2,z} \right) \right. \\ \left. + \rho x^2 y^2 S_\rho^I \left[P_2 \left(S_\rho^I P_{1,\rho} + S_z^I P_{1,z} \right) + P_1 \left(S_\rho^I P_{2,\rho} + S_z^I P_{2,z} \right) \right] \right. \\ \left. + x^2 y^2 S_z^I \left[x_z P_2 \left(S_\rho^I P_{1,\rho} + S_z^I P_{1,z} \right) + y_z P_1 \left(S_\rho^I P_{2,\rho} + S_z^I P_{2,z} \right) \right] \right. \\ \left. + \rho\gamma \left(x^2 + y^2 \right) S^I \left[P_{2,\rho} \left(S_\rho^I P_{1,\rho} + S_z^I P_{1,z} \right) + P_{1,\rho} \left(S_\rho^I P_{2,\rho} + S_z^I P_{2,z} \right) \right] \right. \\ \left. + 2z\gamma S^I \left[P_{2,z} \left(S_\rho^I P_{1,\rho} + S_z^I P_{1,z} \right) + P_{1,z} \left(S_\rho^I P_{2,\rho} + S_z^I P_{2,z} \right) \right] \right. \\ \left. + 2\rho \left(x^2 + y^2 \right) S^I S_\rho^I P_1 P_2 + 4z\gamma P_1 P_2 S^I S_z^I \right\} \quad (5.102)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\rho} P_1 P_{2,\rho} S^{I^2} \left[y^2 (x^2 + \gamma) + \rho^2 (y^2 + \gamma) - 2zy_z \gamma \right] \\
& + \frac{1}{\rho} P_2 P_{1,\rho} S^{I^2} \left[x^2 (y^2 + \gamma) + \rho^2 (x^2 + \gamma) - 2zx_z \gamma \right] \\
& + P_1 P_{2,z} S^{I^2} \left[2z\gamma + y_z (y^2 + \gamma) \right] + P_2 P_{1,z} S^{I^2} \left[2z\gamma + x_z (x^2 + \gamma) \right] \\
& + \rho^2 (x^2 + y^2) S^I S_\rho^I (P_1 P_{2,\rho} + P_2 P_{1,\rho}) + 2\rho z \gamma S^I S_\rho^I (P_1 P_{2,z} + P_2 P_{1,z}) \\
& + \rho (x^2 + y^2) S^I S_z^I (y_z P_1 P_{2,\rho} + x_z P_2 P_{1,\rho}) \\
& + 2z\gamma S^I S_z^I (y_z P_1 P_{2,z} + x_z P_2 P_{1,z}) + 2z\rho\gamma S^{I^2} (P_{1,\rho} P_{2,z} + P_{2,\rho} P_{1,z}) \Big\} \\
& + \left[x^2 (P_{1,\rho}^2 + P_{1,z}^2) + y^2 (P_{2,\rho}^2 + P_{2,z}^2) + 3(P_1^2 + P_2^2) + 2\rho(P_1 P_{1,\rho} + P_2 P_{2,\rho}) \right. \\
& \quad \left. + 2x_z P_1 P_{1,z} + 2y_z P_2 P_{2,z} \right] \\
& \cdot \left[\gamma (P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z} - S_\rho^P S_\rho^I - S_z^P S_z^I) + 3P_1 P_2 \right. \\
& \quad \left. + \rho (P_1 P_{2,\rho} + P_2 P_{1,\rho}) - 2\rho S^I S_\rho^P + y_z P_1 P_{2,z} + x_z P_2 P_{1,z} - 2z S^I S_z^P \right] \\
& + \gamma \left[x^2 (S_\rho^P P_{1,\rho} + S_z^P P_{1,z}) (S_\rho^I P_{1,\rho} + S_z^I P_{1,z}) + y^2 (S_\rho^P P_{2,\rho} + S_z^P P_{2,z}) (S_\rho^I P_{2,\rho} + S_z^I P_{2,z}) \right] \\
& + 2S^I \left[P_1 (S_\rho^P P_{1,\rho} + S_z^P P_{1,z}) (\rho^2 + zx_z) + P_2 (S_\rho^P P_{2,\rho} + S_z^P P_{2,z}) (\rho^2 + zy_z) \right] \\
& + \rho\gamma P_1 \left[S_\rho^I (S_\rho^P P_{1,\rho} + S_z^P P_{1,z}) + S_\rho^P (S_\rho^I P_{1,\rho} + S_z^I P_{1,z}) \right] \\
& + \rho\gamma P_2 \left[S_\rho^I (S_\rho^P P_{2,\rho} + S_z^P P_{2,z}) + S_\rho^P (S_\rho^I P_{2,\rho} + S_z^I P_{2,z}) \right] \\
& + x_z \gamma P_1 \left[S_z^I (S_\rho^P P_{1,\rho} + S_z^P P_{1,z}) + S_z^P (S_\rho^I P_{1,\rho} + S_z^I P_{1,z}) \right] \\
& + y_z \gamma P_2 \left[S_z^I (S_\rho^P P_{2,\rho} + S_z^P P_{2,z}) + S_z^P (S_\rho^I P_{2,\rho} + S_z^I P_{2,z}) \right] \\
& + 2\rho S^I \left[x^2 P_{1,\rho} (S_\rho^P P_{1,\rho} + S_z^P P_{1,z}) + y^2 P_{2,\rho} (S_\rho^P P_{2,\rho} + S_z^P P_{2,z}) \right] \\
& + 2z S^I \left[x^2 P_{1,z} (S_\rho^P P_{1,\rho} + S_z^P P_{1,z}) + y^2 P_{2,z} (S_\rho^P P_{2,\rho} + S_z^P P_{2,z}) \right] \\
& + 2\rho S^I S_\rho^P (P_1^2 + P_2^2) + \gamma (P_1^2 + P_2^2) (S_\rho^I S_\rho^P + S_z^I S_z^P) \\
& + 2\rho^2 S^I S_\rho^P (P_1 P_{1,\rho} + P_2 P_{2,\rho}) + 2z\rho S^I S_\rho^P (P_1 P_{1,z} + P_2 P_{2,z}) \\
& + 2z S^I S_z^P (P_1^2 + P_2^2 + x_z P_1 P_{1,z} + y_z P_2 P_{2,z}) \\
& + 2\rho S^I S_z^P (x_z P_1 P_{1,\rho} + y_z P_2 P_{2,\rho}) \\
& - \left\{ \gamma \left[x^2 (P_{1,\rho}^2 + P_{1,z}^2) + P_1^2 \right] (P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z}) \right. \\
& \quad + P_1 P_2 \left[3P_1^2 + x^2 (P_{1,\rho}^2 + P_{1,z}^2) \right] + \gamma P_1 (P_{1,\rho}^2 + P_{1,z}^2) (\rho P_{2,\rho} + x_z P_{2,z}) \\
& \quad + (\rho P_2 P_{1,\rho} + x_z P_2 P_{1,z}) \left[x^2 (P_{1,\rho}^2 + P_{1,z}^2) + P_1^2 \right] + \rho P_1^3 P_{2,\rho} + y_z P_1^3 P_{2,z} \\
& \quad \left. + \rho (x^2 + \gamma) P_1 P_{1,\rho} (P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z}) + 2\rho P_1^2 P_2 P_{1,\rho} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + P_1^2 P_{1,\rho} \left[P_{2,\rho} (\rho^2 + \gamma) + x_z \rho P_{2,z} \right] + P_1 P_2 P_{1,\rho}^2 (x^2 + \rho^2) \\
& + 2x_z \rho P_1 P_2 P_{1,\rho} P_{1,z} + P_1 P_{1,z} (P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z}) (y_z x^2 + x_z \gamma) \\
& + 2x_z P_1^2 P_2 P_{1,z} + y_z \rho P_1^2 P_{1,z} P_{2,\rho} + (\gamma + x_z y_z) P_1^2 P_{1,z} P_{2,z} + P_1 P_2 P_{1,z}^2 (x^2 + x_z^2) \\
& + \gamma \left[y^2 (P_{2,\rho}^2 + P_{2,z}^2) + P_2^2 \right] (P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z}) \\
& + P_1 P_2 \left[3P_2^2 + y^2 (P_{2,\rho}^2 + P_{2,z}^2) \right] + \gamma P_2 (P_{2,\rho}^2 + P_{2,z}^2) (\rho P_{1,\rho} + y_z P_{1,z}) \\
& + (\rho P_1 P_{2,\rho} + y_z P_1 P_{2,z}) \left[y^2 (P_{2,\rho}^2 + P_{2,z}^2) + P_2^2 \right] + \rho P_2^3 P_{1,\rho} + x_z P_2^3 P_{1,z} \\
& + \rho (y^2 + \gamma) P_2 P_{2,\rho} (P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z}) + 2\rho P_1 P_2^2 P_{2,\rho} \\
& + P_2^2 P_{2,\rho} \left[P_{1,\rho} (\rho^2 + \gamma) + y_z \rho P_{1,z} \right] + P_1 P_2 P_{2,\rho}^2 (y^2 + \rho^2) \\
& + 2y_z \rho P_1 P_2 P_{2,\rho} P_{2,z} + P_2 P_{2,z} (P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z}) (x_z y^2 + y_z \gamma) \\
& + 2y_z P_1 P_2^2 P_{2,z} + x_z \rho P_2^2 P_{1,\rho} P_{2,z} + (\gamma + x_z y_z) P_2^2 P_{1,z} P_{2,z} + P_1 P_2 P_{2,z}^2 (y^2 + y_z^2) \} \},
\end{aligned}$$

para o potencial tensor ímpar V_T^{II} ,

$$\begin{aligned}
V_{T,2}^{II} &= \frac{2\pi f_\pi}{27e} \int_0^\infty dz \int_0^\infty \rho d\rho \left\{ \left(x_z y_z - \frac{1}{2} \rho^2 \right) (P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z} - S_\rho^P S_\rho^I - S_z^P S_z^I) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \rho (P_1 P_{2,\rho} + P_2 P_{1,\rho} - 2S^I S_\rho^P) + y_z P_1 P_{2,z} + x_z P_2 P_{1,z} - 2z S^I S_z^P \right\}, \quad (5.103)
\end{aligned}$$

$$V_{T,SB}^{II} = \frac{\pi m_\pi^2}{54e^3 f_\pi} \int_0^\infty dz \int_0^\infty \rho d\rho (\alpha - \beta) s_x s_y, \quad (5.104)$$

$$\begin{aligned}
V_{T,4}^{II} &= \frac{2f_\pi}{9e} \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty dz \int_0^\infty \rho d\rho \left\{ (S_\rho^P P_{2,z} - S_z^P P_{2,\rho}) (S_\rho^P P_{1,z} - S_z^P P_{1,\rho}) \left(x_z y_z - \frac{1}{2} \rho^2 \right) \right. \\
&\quad + (S_\rho^{P^2} + S_z^{P^2}) (y_z P_1 P_{2,z} + x_z P_2 P_{1,z}) + P_1 P_2 \left(\frac{1}{2} S_\rho^{P^2} - S_z^{P^2} \right) \\
&\quad - x_z P_2 S_z^P (S_\rho^P P_{1,\rho} + S_z^P P_{1,z}) - y_z P_1 S_z^P (S_\rho^P P_{2,\rho} + S_z^P P_{2,z}) \\
&\quad - \frac{1}{2} \rho P_1 S_z^P (S_z^P P_{2,\rho} - S_\rho^P P_{2,z}) - \frac{1}{2} \rho P_2 S_z^P (S_z^P P_{1,\rho} - S_\rho^P P_{1,z}) \\
&\quad + \frac{1}{4} S^{I^2} \left\{ (y_z^2 x^2 + x_z^2 y^2 - \rho^2 \gamma) (P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z}) + 4 \left(x_z y_z - \frac{1}{2} \rho^2 \right) P_1 P_2 \right. \\
&\quad + \rho \left[(y^2 - 2\gamma) P_1 P_{2,\rho} + (x^2 - 2\gamma) P_2 P_{1,\rho} \right] \\
&\quad + P_1 P_{2,z} (2x_z y^2 - d\rho^2) + P_2 P_{1,z} (2y_z x^2 + d\rho^2) \\
&\quad + y_z \rho \left(2d + 3z + \frac{3}{2} y_z \right) P_1 P_{2,\rho} + x_z \rho \left(-2d + 3z + \frac{3}{2} x_z \right) P_2 P_{1,\rho} \\
&\quad - \rho^2 \left(2d + \frac{9}{2} y_z \right) P_1 P_{2,z} - \rho^2 \left(-2d + \frac{9}{2} x_z \right) P_2 P_{1,z} \\
&\quad + 2 \left[\frac{z}{\rho} (P_{1,\rho} P_{2,z} + P_{1,z} P_{2,\rho}) - \left(\frac{1}{\rho^2} P_{1,\rho} P_{2,\rho} x_z y_z + P_{1,z} P_{2,z} \right) \right] \\
&\quad \cdot \left. \left(-\rho^2 y^2 + y_z^2 x^2 - x_z y_z \left(x_z y_z - \frac{1}{2} \rho^2 \right) \right) \right\} \quad (5.105)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3} \left\{ \left[x^2 y^2 (S_\rho^{I^2} + S_z^{I^2}) + (3x^2 + 3y^2 + 2\gamma) S^{I^2} + 2\rho (x^2 + y^2) S^I S_\rho^I + 4z\gamma S^I S_z^I \right] \right. \\
& \quad \cdot \left[(P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z}) \left(x_z y_z - \frac{1}{2} \rho^2 \right) - \frac{1}{2} \rho (P_1 P_{2,\rho} + P_2 P_{1,\rho}) \right. \\
& \quad \quad \left. \left. + y_z P_1 P_{2,z} + x_z P_2 P_{1,z} \right] \right. \\
& - \left[\left(x_z y_z - \frac{1}{2} \rho^2 \right) x^2 y^2 (S_\rho^I P_{1,\rho} + S_z^I P_{1,z}) (S_\rho^I P_{2,\rho} + S_z^I P_{2,z}) \right. \\
& \quad + 2 \left(x_z y_z - \frac{1}{2} \rho^2 \right) P_1 P_2 S^{I^2} + x^2 y^2 P_1 P_2 \left(S_z^{I^2} - \frac{1}{2} S_\rho^{I^2} \right) \\
& \quad + S^{I^2} \left[(x^2 + y^2 + 2\rho^2) P_{1,\rho} P_{2,\rho} + (x^2 + y^2 + 2x_z y_z) P_{1,z} P_{2,z} \right] \left(x_z y_z - \frac{1}{2} \rho^2 \right) \\
& \quad + \left[x^2 (y^2 + \gamma) - \frac{3}{2} \rho^2 (x^2 + y^2) \right] S^I P_2 (S_\rho^I P_{1,\rho} + S_z^I P_{1,z}) \\
& \quad + \left[y^2 (x^2 + \gamma) - \frac{3}{2} \rho^2 (x^2 + y^2) \right] S^I P_1 (S_\rho^I P_{2,\rho} + S_z^I P_{2,z}) \\
& \quad - \frac{1}{2} \rho x^2 y^2 S_\rho^I \left[P_2 (S_\rho^I P_{1,\rho} + S_z^I P_{1,z}) + P_1 (S_\rho^I P_{2,\rho} + S_z^I P_{2,z}) \right] \\
& \quad + x^2 y^2 S_z^I \left[x_z P_2 (S_\rho^I P_{1,\rho} + S_z^I P_{1,z}) + y_z P_1 (S_\rho^I P_{2,\rho} + S_z^I P_{2,z}) \right] \\
& \quad + \rho \left(x_z y_z - \frac{1}{2} \rho^2 \right) (x^2 + y^2) S^I \left[P_{2,\rho} (S_\rho^I P_{1,\rho} + S_z^I P_{1,z}) + P_{1,\rho} (S_\rho^I P_{2,\rho} + S_z^I P_{2,z}) \right] \\
& \quad + 2z\gamma \left(x_z y_z - \frac{1}{2} \rho^2 \right) S^I \left[P_{2,z} (S_\rho^I P_{1,\rho} + S_z^I P_{1,z}) + P_{1,z} (S_\rho^I P_{2,\rho} + S_z^I P_{2,z}) \right] \\
& \quad - \rho (x^2 + y^2) S^I S_\rho^I P_1 P_2 + 4z\gamma P_1 P_2 S^I S_z^I \\
& \quad + \frac{1}{\rho} P_1 P_{2,\rho} S^{I^2} \left[(\rho^2 + y^2) \left(x_z y_z - \frac{1}{2} \rho^2 \right) + (\rho^2 + x^2) \left(y_z^2 - \frac{1}{2} \rho^2 \right) - 2z y_z \gamma \right] \\
& \quad + \frac{1}{\rho} P_2 P_{1,\rho} S^{I^2} \left[(\rho^2 + x^2) \left(x_z y_z - \frac{1}{2} \rho^2 \right) + (\rho^2 + y^2) \left(x_z^2 - \frac{1}{2} \rho^2 \right) - 2z x_z \gamma \right] \\
& \quad + P_1 P_{2,z} S^{I^2} \left[2z \left(x_z y_z - \frac{1}{2} \rho^2 \right) + y_z (y^2 + \gamma) \right] + P_2 P_{1,z} S^{I^2} \left[2z \left(x_z y_z - \frac{1}{2} \rho^2 \right) + x_z (x^2 + \gamma) \right] \\
& \quad - \frac{1}{2} \rho^2 (x^2 + y^2) S^I S_\rho^I (P_1 P_{2,\rho} + P_2 P_{1,\rho}) - \rho z \gamma S^I S_\rho^I (P_1 P_{2,z} + P_2 P_{1,z}) \\
& \quad + \rho (x^2 + y^2) S^I S_z^I (y_z P_1 P_{2,\rho} + x_z P_2 P_{1,\rho}) + 2z\gamma S^I S_z^I (y_z P_1 P_{2,z} + x_z P_2 P_{1,z}) \\
& \quad \left. \left. + 2z\rho \left(x_z y_z - \frac{1}{2} \rho^2 \right) S^{I^2} (P_{1,\rho} P_{2,z} + P_{2,\rho} P_{1,z}) \right] \right\} \\
& + \left[x^2 (P_{1,\rho}^2 + P_{1,z}^2) + y^2 (P_{2,\rho}^2 + P_{2,z}^2) + 3 (P_1^2 + P_2^2) + 2\rho (P_1 P_{1,\rho} + P_2 P_{2,\rho}) \right. \\
& \quad \left. + 2x_z P_1 P_{1,z} + 2y_z P_2 P_{2,z} \right] \\
& \quad \cdot \left[\left(x_z y_z - \frac{1}{2} \rho^2 \right) (P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z} - S_\rho^P S_\rho^I - S_z^P S_z^I) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \rho (P_1 P_{2,\rho} + P_2 P_{1,\rho}) + \rho S^I S_\rho^P + y_z P_1 P_{2,z} + x_z P_2 P_{1,z} - 2z S^I S_z^P \right] \\
& + \left(x_z y_z - \frac{1}{2} \rho^2 \right) \left[x^2 (S_\rho^P P_{1,\rho} + S_z^P P_{1,z}) (S_\rho^I P_{1,\rho} + S_z^I P_{1,z}) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +y^2 (S_\rho^P P_{2,\rho} + S_z^P P_{2,z}) (S_\rho^I P_{2,\rho} + S_z^I P_{2,z}) \\
& +2S^I \left[P_1 (S_\rho^P P_{1,\rho} + S_z^P P_{1,z}) \left(xz - \frac{1}{2}\rho^2 \right) + P_2 (S_\rho^P P_{2,\rho} + S_z^P P_{2,z}) \left(zy - \frac{1}{2}\rho^2 \right) \right] \\
& +\rho \left(xzy - \frac{1}{2}\rho^2 \right) P_1 [S_\rho^I (S_\rho^P P_{1,\rho} + S_z^P P_{1,z}) + S_\rho^P (S_\rho^I P_{1,\rho} + S_z^I P_{1,z})] \\
& +\rho \left(xzy - \frac{1}{2}\rho^2 \right) P_2 [S_\rho^I (S_\rho^P P_{2,\rho} + S_z^P P_{2,z}) + S_\rho^P (S_\rho^I P_{2,\rho} + S_z^I P_{2,z})] \\
& +x_z \left(xzy - \frac{1}{2}\rho^2 \right) P_1 [S_z^I (S_\rho^P P_{1,\rho} + S_z^P P_{1,z}) + S_z^P (S_\rho^I P_{1,\rho} + S_z^I P_{1,z})] \\
& +y_z \left(xzy - \frac{1}{2}\rho^2 \right) P_2 [S_z^I (S_\rho^P P_{2,\rho} + S_z^P P_{2,z}) + S_z^P (S_\rho^I P_{2,\rho} + S_z^I P_{2,z})] \\
& -\rho S^I [x^2 P_{1,\rho} (S_\rho^P P_{1,\rho} + S_z^P P_{1,z}) + y^2 P_{2,\rho} (S_\rho^P P_{2,\rho} + S_z^P P_{2,z})] \\
& +2zS^I [x^2 P_{1,z} (S_\rho^P P_{1,\rho} + S_z^P P_{1,z}) + y^2 P_{2,z} (S_\rho^P P_{2,\rho} + S_z^P P_{2,z})] \\
& -\rho S^I S_\rho^P (P_1^2 + P_2^2) + \left(xzy - \frac{1}{2}\rho^2 \right) (P_1^2 + P_2^2) (S_\rho^I S_\rho^P + S_z^I S_z^P) \\
& -\rho^2 S^I S_\rho^P (P_1 P_{1,\rho} + P_2 P_{2,\rho}) + 2z\rho S^I S_\rho^P (P_1 P_{1,z} + P_2 P_{2,z}) \\
& +2zS^I S_z^P (P_1^2 + P_2^2 + x_z P_1 P_{1,z} + y_z P_2 P_{2,z}) - \rho S^I S_z^P (x_z P_1 P_{1,\rho} + y_z P_2 P_{2,\rho}) \\
- & \left[\left(xzy - \frac{1}{2}\rho^2 \right) [x^2 (P_{1,\rho}^2 + P_{1,z}^2) + P_1^2] (P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z}) \right. \\
& +P_1 P_2 \left(x_z^2 - \frac{1}{2}\rho^2 \right) (P_{1,\rho}^2 + P_{1,z}^2) \\
& +\left(xzy - \frac{1}{2}\rho^2 \right) P_1 (P_{1,\rho}^2 + P_{1,z}^2) (\rho P_{2,\rho} + x_z P_{2,z}) \\
& +\left(x_z P_2 P_{1,z} - \frac{1}{2}\rho P_2 P_{1,\rho} \right) [x^2 (P_{1,\rho}^2 + P_{1,z}^2) + P_1^2] - \frac{1}{2}\rho P_1^3 P_{2,\rho} + y_z P_1^3 P_{2,z} \\
& +\rho \left(\left(xzy - \frac{1}{2}\rho^2 \right) - \frac{1}{2}x^2 \right) P_1 P_{1,\rho} (P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z}) - \rho P_1^2 P_2 P_{1,\rho} \\
& +P_1^2 P_{1,\rho} \left[P_{2,\rho} (\gamma - 2\rho^2) - \frac{1}{2}x_z \rho P_{2,z} \right] \\
& -\frac{1}{2}P_1 P_2 P_{1,\rho}^2 (x^2 + \rho^2) + \frac{1}{2}x_z \rho P_1 P_2 P_{1,\rho} P_{1,z} \\
& +P_1 P_{1,z} (P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z}) \left(y_z x^2 + x_z \left(xzy - \frac{1}{2}\rho^2 \right) \right) \\
& +2x_z P_1^2 P_2 P_{1,z} + y_z \rho P_1^2 P_{1,z} P_{2,\rho} + \left(-\frac{1}{2}\rho^2 + 2xzy \right) P_1^2 P_{1,z} P_{2,z} \\
& +P_1 P_2 P_{1,z}^2 (x^2 + x_z^2) \\
+ & \left(xzy - \frac{1}{2}\rho^2 \right) [y^2 (P_{2,\rho}^2 + P_{2,z}^2) + P_2^2] (P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z}) \\
& +P_1 P_2 \left(y_z^2 - \frac{1}{2}\rho^2 \right) (P_{2,\rho}^2 + P_{2,z}^2) \\
& +\left(xzy - \frac{1}{2}\rho^2 \right) P_2 (P_{2,\rho}^2 + P_{2,z}^2) (\rho P_{1,\rho} + y_z P_{1,z})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(y_z P_1 P_{2,z} - \frac{1}{2} \rho P_1 P_{2,\rho} \right) \left[y^2 (P_{2,\rho}^2 + P_{2,z}^2) + P_2^2 \right] - \frac{1}{2} \rho P_2^3 P_{1,\rho} + x_z P_2^3 P_{1,z} \\
& + \rho \left(\left(x_z y_z - \frac{1}{2} \rho^2 \right) - \frac{1}{2} y^2 \right) P_2 P_{2,\rho} (P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z}) - \rho P_1 P_2^2 P_{2,\rho} \\
& + P_2^2 P_{2,\rho} \left[P_{1,\rho} (\gamma - 2\rho^2) - \frac{1}{2} y_z \rho P_{1,z} \right] \\
& - \frac{1}{2} P_1 P_2 P_{2,\rho}^2 (y^2 + \rho^2) + \frac{1}{2} y_z \rho P_1 P_2 P_{2,\rho} P_{2,z} \\
& + P_2 P_{2,z} (P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z}) \left(x_z y^2 + y_z \left(x_z y_z - \frac{1}{2} \rho^2 \right) \right) \\
& + 2 y_z P_1 P_2^2 P_{2,z} + x_z \rho P_2^2 P_{1,\rho} P_{2,z} + \left(-\frac{1}{2} \rho^2 + 2 x_z y_z \right) P_2^2 P_{1,z} P_{2,z} \\
& + P_1 P_2 P_{2,z}^2 (y^2 + y_z^2) \Big] \Big\} ,
\end{aligned}$$

para o potencial spin-spin par V_{SS}^{PP} ,

$$V_{SS,2}^{PP} = \frac{\pi f_\pi}{27e} \int_0^\infty dz \int_0^\infty \rho d\rho \left[-2\gamma S^{I^2} \right], \quad (5.106)$$

$$\begin{aligned}
V_{SS,4}^{PP} = & \frac{2\pi f_\pi}{3 \cdot 9e} \int_0^\infty dz \int_0^\infty \rho d\rho \left\{ -4\gamma S^{I^2} \cdot \left\{ x^2 (P_{1,\rho}^2 + P_{1,z}^2) + y^2 (P_{2,\rho}^2 + P_{2,z}^2) + 3 (P_1^2 + P_2^2) \right. \right. \\
& \left. \left. + 2P_1 (\rho P_{1,\rho} + x_z P_{1,z}) + 2P_2 (\rho P_{2,\rho} + y_z P_{2,z}) \right\} \right. \quad (5.107)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2S^{I^2} \left\{ 2\gamma (P_1^2 + P_2^2) + \rho d (\rho P_{1,z} - x_z P_{1,\rho}) P_1 - \rho d (\rho P_{2,z} - y_z P_{2,\rho}) P_2 \right. \\
& + x^2 (\rho P_{1,z} - x_z P_{1,\rho}) (\rho P_{1,z} - y_z P_{1,\rho}) \\
& + y^2 (\rho P_{2,z} - x_z P_{2,\rho}) (\rho P_{2,z} - y_z P_{2,\rho}) \Big\} \\
& - 2 \left\{ 2\gamma S^I \left[P_2 (S_\rho^P P_{1,\rho} + S_z^P P_{1,z}) + P_1 (S_\rho^P P_{2,\rho} + S_z^P P_{2,z}) \right] \right. \\
& + 4P_1 P_2 S^I (\rho S_\rho^P + z S_z^P) \\
& + P_1 (\rho S_z^P - x_z S_\rho^P) \left[S^I (\rho P_{2,z} - y_z P_{2,\rho}) - P_2 (\rho S_z^I - y_z S_\rho^I) \right] \\
& + P_2 (\rho S_z^P - y_z S_\rho^P) \left[S^I (\rho P_{1,z} - x_z P_{1,\rho}) - P_1 (\rho S_z^I - x_z S_\rho^I) \right] \Big\} \\
& - 4 \left\{ P_1 P_2 \left[2\gamma (S_\rho^P S_\rho^I + S_z^P S_z^I) + 4S^I (\rho S_\rho^P + z S_z^P) \right] \right. \\
& - S^I P_1 (\rho S_z^P - y_z S_\rho^P) (\rho P_{2,z} - x_z P_{2,\rho}) \\
& - S^I P_2 (\rho S_z^P - x_z S_\rho^P) (\rho P_{1,z} - y_z P_{1,\rho}) \Big\} \\
& + 6P_1 P_2 \left\{ 3P_1 P_2 + 2\gamma (P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z}) \right. \\
& + 2P_1 (\rho P_{2,\rho} + y_z P_{2,z}) + 2P_2 (\rho P_{1,\rho} + x_z P_{1,z}) \\
& \left. \left. - (\rho P_{2,z} - x_z P_{2,\rho}) (\rho P_{1,z} - y_z P_{1,\rho}) \right\} \right\} ,
\end{aligned}$$

e para o potencial tensor par V_T^{PP} ,

$$V_{T,2}^{PP} = \frac{\pi f_\pi}{27e} \int_0^\infty dz \int_0^\infty \rho d\rho \left(x_z y_z - \frac{1}{2} \rho^2 \right) S^{I^2}, \quad (5.108)$$

$$\begin{aligned} V_{T,4}^{PP} = & \frac{2\pi f_\pi}{3 \cdot 9e} \int_0^\infty dz \int_0^\infty \rho d\rho \left\{ 2 \left(x_z y_z - \frac{1}{2} \rho^2 \right) S^{I^2} \cdot \left\{ x^2 (P_{1,\rho}^2 + P_{1,z}^2) + y^2 (P_{2,\rho}^2 + P_{2,z}^2) \right. \right. \\ & + 3 (P_1^2 + P_2^2) + 2P_1 (\rho P_{1,\rho} + x_z P_{1,z}) + 2P_2 (\rho P_{2,\rho} + y_z P_{2,z}) \left. \right\} \\ & - S^{I^2} \left\{ 2 \left(x_z y_z - \frac{1}{2} \rho^2 \right) (P_1^2 + P_2^2) \right. \\ & + x^2 (\rho P_{1,z} - x_z P_{1,\rho}) (\rho P_{1,z} - y_z P_{1,\rho}) \\ & + y^2 (\rho P_{2,z} - x_z P_{2,\rho}) (\rho P_{2,z} - y_z P_{2,\rho}) \\ & + \rho d (\rho P_{1,z} - x_z P_{1,\rho}) P_1 - \rho d (\rho P_{2,z} - y_z P_{2,\rho}) P_2 \left. \right\} \\ & + 2 \left(x_z y_z - \frac{1}{2} \rho^2 \right) S^I \left[P_2 (S_\rho^P P_{1,\rho} + S_z^P P_{1,z}) + P_1 (S_\rho^P P_{2,\rho} + S_z^P P_{2,z}) \right] \\ & + 2P_1 P_2 S^I (2z S_z^P - \rho S_\rho^P) \\ & + P_1 (\rho S_z^P - x_z S_\rho^P) [S^I (\rho P_{2,z} - y_z P_{2,\rho}) - P_2 (\rho S_z^I - y_z S_\rho^I)] \\ & + P_2 (\rho S_z^P - y_z S_\rho^P) [S^I (\rho P_{1,z} - x_z P_{1,\rho}) - P_1 (\rho S_z^I - x_z S_\rho^I)] \\ & - 2 \left\{ P_1 P_2 \left[-2 \left(x_z y_z - \frac{1}{2} \rho^2 \right) (S_\rho^P S_\rho^I + S_z^P S_z^I) + 2S^I (\rho S_\rho^P - 2z S_z^P) \right] \right. \\ & + S^I P_1 (\rho S_z^P - y_z S_\rho^P) (\rho P_{2,z} - x_z P_{2,\rho}) \\ & + S^I P_2 (\rho S_z^P - x_z S_\rho^P) (\rho P_{1,z} - y_z P_{1,\rho}) \left. \right\} \\ & + 3P_1 P_2 \left\{ -2 \left(x_z y_z - \frac{1}{2} \rho^2 \right) (P_{1,\rho} P_{2,\rho} + P_{1,z} P_{2,z}) \right. \\ & + P_1 (\rho P_{2,\rho} - 2y_z P_{2,z}) + P_2 (\rho P_{1,\rho} - 2x_z P_{1,z}) \\ & \left. \left. + (\rho P_{2,z} - x_z P_{2,\rho}) (\rho P_{1,z} - y_z P_{1,\rho}) \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (5.109)$$

No AN, as subtrações das auto-energias têm de ser feitas numericamente. A integração é realizada apenas na parte positiva do eixo z , onde se situa o *skyrmion* 2, cujas lagrangianas de auto-energia contribuem com valores muito elevados, mesmo a distâncias grandes. Como acarretam diferenças entre números muito grandes, é produzida muita imprecisão a grandes distâncias, onde o resultado líquido é relativamente muito pequeno. Por isso, separamos analiticamente, nas lagrangianas escalares compostas, os termos que também contribuem com valores elevados a grandes distâncias e que cancelam a auto-energia, quase que na sua totalidade. Identificamos, nas Eqs. 5.96 - 5.98, a fonte das imprecisões numéricas como sendo o

fator

$$\frac{c_x}{\zeta} - 1. \quad (5.110)$$

Fazendo uma expansão em série de potências de F_x , em torno de $F_x = 0$, adicionamos aos programas de integração a aproximação

$$\frac{c_x}{\zeta} - 1 = \frac{1}{2\zeta} (As_x^2 s_y^2 - F_x^2), \quad (5.111)$$

onde

$$\zeta = \sqrt{1 - As_x^2 s_y^2}, \quad (5.112)$$

com $A = 0$, $A = 1 - \alpha^2$ e $A = \frac{2}{3}$ correspondendo aos casos ζ igual a um, clássico e quantizado, respectivamente.

Para a integração numérica foram adaptados os programas desenvolvidos para o AP. Ao todo, foram usados cinco programas, sendo empregado o método de integração de Gauss-Legendre, com cerca de 900 pontos de integração para cada valor de d . Numa estação Alpha 2000 (Digital), a execução de cada programa leva em média 30 minutos para cobrir cerca de 80 valores distintos de d . As expressões do AP são menores e a execução dos programas leva cerca de um terço do tempo gasto pelos do AN.

5.4 O potencial NN: resultados

Apresentamos, nesta seção, os resultados numéricos para os potenciais calculados na seção anterior, que foram realizados para as três formas explícitas para o raio quiral: os casos $\eta = f_\pi$, clássico,

$$\eta = f_\pi \sqrt{1 + (\alpha^2 - 1) s_x^2 s_y^2},$$

e quantizado,

$$\eta = f_\pi \sqrt{1 - \frac{2}{3} s_x^2 s_y^2}.$$

Primeiramente, apresentamos os resultados para o caso $\eta = f_\pi$, que corresponde ao AP, sem a contribuição da componente azimutal de $\mathbf{P}$, dada por $-\boldsymbol{\pi}^{(1)} \times \boldsymbol{\pi}^{(2)}$. Este caso não representa uma solução para o potencial com o AN, mas permite identificar a contribuição da

componente azimutal no AP. Além disso, estes resultados não devem diferir muito dos do AN a grandes distâncias, uma vez que o alcance de η , clássico ou quantizado, é curto. Na Fig. 5.3, é apresentado o potencial escalar V_C e as contribuições parciais provenientes de $\mathcal{L}_2^{S(P)}$, Eq. 5.96, de $\mathcal{L}_{SB}^{S(P)}$, Eq. 5.97, de $\mathcal{L}_4^{S(P)}$, Eq. 5.98, e de $\mathcal{L}_4^{S(II)}$, Eq. 5.99. Na Fig. 5.4, o potencial spin-spin ímpar V_{SS}^{II} , com paridades G individuais negativas, e as contribuições de $\mathcal{L}_2^{V(II)}$, Eq. 5.100, de $\mathcal{L}_{SB}^{V(II)}$, Eq. 5.101, e de $\mathcal{L}_4^{V(II)}$, Eq. 5.102. Na Fig. 5.5, o potencial tensor ímpar V_T^{II} e as contribuições de $\mathcal{L}_2^{V(II)}$, Eq. 5.103, de $\mathcal{L}_{SB}^{V(II)}$, Eq. 5.104, e de $\mathcal{L}_4^{V(II)}$, Eq. 5.105. Na Fig. 5.6, o potencial spin-spin par V_{SS}^{PP} e as contribuições de $\mathcal{L}_2^{V(PP)}$, Eq. 5.106, e de $\mathcal{L}_4^{S(PP)}$, Eq. 5.107. Na Fig. 5.7, o potencial tensor par V_T^{PP} e as contribuições de $\mathcal{L}_2^{V(PP)}$, Eq. 5.108, e de $\mathcal{L}_4^{S(PP)}$, Eq. 5.109.

Comparando as Figs. 5.4 e 5.5, respectivamente, com as Figs. 4.3 e 4.4, observamos que eliminar a componente azimutal de $\mathbf{P}$ do AP não muda qualitativamente os potenciais SS e T ímpares, a não ser pela contribuição de $\mathcal{L}_4$ a V_{SS}^{II} , que passa a apresentar valores negativos, na região de distâncias em torno de 1 fm. Já as Figs. 5.6 e 5.7 apresentam potenciais SS e T pares que são qualitativamente parecidos com os respectivos potenciais do AP, Figs. 4.5 e 4.6, mas algumas vezes menores, em magnitude. A mudança mais significativa, em relação ao AP, entretanto, está no canal V_C , Fig. 5.3. Ela mostra que a grande contribuição repulsiva de $\mathcal{L}_4$ do AP, Fig. 4.2, é substituída por uma contribuição predominantemente atrativa. Este é o aspecto essencial deste primeiro bloco de resultados: a eliminação da componente azimutal do campo $\mathbf{P}$ do AP torna o potencial escalar atrativo. O potencial recebe, também, uma significativa contribuição atrativa de $\mathcal{L}_2$ e uma pequena contribuição de curto alcance, da lagrangiana ímpar, que não apareciam no AP.

Passamos, agora, para a apresentação do AN propriamente dito, nos mesmos moldes do que foi feito para o caso $\eta = f_\pi$. Os resultados para η clássico são apresentados nas Figs. 5.8 - 5.12. Comparando-as com as Figs. 5.3 - 5.7, respectivamente, observamos que os valores de todos os potenciais do caso clássico coincidem com os de $\eta = f_\pi$, em $d = 0$, onde os ouriços individuais estão superpostos e, portanto, $\alpha = 1$. A comparação das Figs. 5.9 e 5.10 com as Figs. 4.3 e 4.4 mostra, novamente, que a grandes distâncias os potenciais SS e T ímpares do AN são qualitativamente parecidos com os do AP. O mesmo acontece com os potenciais SS e T

Fig. 5.3: Potencial NN no modelo de Skyrme, com o *Ansatz* Novo, e tomando $\eta = f_\pi$: termo escalar V_C (linha contínua), com contribuições parciais de $\mathcal{L}_2$ (pontilhado), $\mathcal{L}_{SB}$ (tracejado), $\mathcal{L}_4^{S(PP)}$ (traço e ponto) e $\mathcal{L}_4^{S(II)}$ (tracejado longo).

Fig. 5.4: Potencial NN no modelo de Skyrme, com o *Ansatz* Novo, e tomando $\eta = f_\pi$: termo spin-spin ímpar V_{ss}^{II} (linha contínua), com contribuições parciais de $\mathcal{L}_2$ (pontilhado), $\mathcal{L}_{SB}$ (tracejado) e $\mathcal{L}_4$ (traço e ponto). A grandes distâncias, $V_{ss,4}^{II}$ e V_{ss}^{II} são indistinguíveis.

Fig. 5.5: Potencial NN no modelo de Skyrme, com o *Ansatz* Novo, e tomando $\eta = f_\pi$: termo tensor ímpar V_T^{II} (linha contínua), com contribuições parciais de $\mathcal{L}_2$ (pontilhado), $\mathcal{L}_{SB}$ (tracejado) e $\mathcal{L}_4$ (traço e ponto). A grandes distâncias, $V_{T,4}^{II}$ e V_T^{II} são indistinguíveis.

Fig. 5.6: Potencial NN no modelo de Skyrme, com o *Ansatz* Novo, e tomando $\eta = f_\pi$: termo spin-spin par V_{SS}^{PP} (linha contínua), com contribuições parciais de $\mathcal{L}_2$ (pontilhado) e $\mathcal{L}_4$ (tracejado).

Fig. 5.7: Potencial NN no modelo de Skyrme, com o Ansatz Novo, e tomando $\eta = f_\pi$: termo tensor par V_T^{PP} (linha contínua), com contribuições parciais de $\mathcal{L}_2$ (pontilhado) e $\mathcal{L}_4$ (tracejado).

pares, das Figs. 5.11 e 5.12, em relação aos respectivos potenciais do AP, Figs. 4.5 e 4.6. Por outro lado, há uma nítida diferença, em relação ao AP e ao caso $\eta = f_\pi$, pois agora aparecem singularidades em torno de $d \simeq 0.6$ fm, em todos os canais. Elas devem-se a zeros da função η , que aparece no denominador. Segundo a expressão de η clássico,

$$\eta = f_\pi \sqrt{1 + (\alpha^2 - 1) s_x^2 s_y^2},$$

isto acontece quando $\alpha = 0$ e $s_x = s_y = 1$. A primeira condição acontece na esfera onde $\mathbf{x}$ é perpendicular a $\mathbf{y}$. A segunda, quando $F_x = F_y = \frac{\pi}{2}$, o que requer $x = y = 0.430$ fm[§]. A situação onde estas duas condições se combinam é o ponto no eixo ρ , com $d = 0.608$ fm e $\rho = 0.304$ fm. Isto explica a forma obtida para os potenciais, neste caso. Observamos que as singularidades são mais pronunciadas nas contribuições parciais de $\mathcal{L}_4$ que nas de $\mathcal{L}_\sigma$. Nos potenciais SS, Figs. 5.9 e 5.11, a inversão de sinal ocorrida no ponto de singularidade está associada aos fatores $\gamma = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \alpha xy$, que aparecem em vários termos, na integração em ϕ , e que mudam de sinal, quando os pontos atravessam a esfera onde $\gamma = 0$.

O canal V_C , Fig. 5.8, apresenta-se atrativo a grandes distâncias, a partir do valor

[§]Esta condição já foi discutida na seção 4.3.5.

Fig. 5.8: Potencial NN no modelo de Skyrme, com o *Ansatz* Novo, e tomando η clássico: termo escalar V_C . Convenções como na Fig. 5.3.

Fig. 5.9: Potencial NN no modelo de Skyrme, com o *Ansatz* Novo, e tomando η clássico: termo spin-spin ímpar V_{ss}^{II} . Convenções e comentários como na Fig. 5.4.

Fig. 5.10: Potencial NN no modelo de Skyrme, com o *Ansatz* Novo, e tomando η clássico: termo tensor ímpar V_T^{II} . Convenções e comentários como na Fig. 5.5.

Fig. 5.11: Potencial NN no modelo de Skyrme, com o *Ansatz* Novo, e tomando η clássico: termo spin-spin par V_{SS}^{PP} . Convenções como na Fig. 5.6.

Fig. 5.12: Potencial NN no modelo de Skyrme, com o *Ansatz* Novo, e tomando η clássico: termo tensor par V_T^{PP} . Convenções como na Fig. 5.7.

$d \simeq 2.4$ fm, com mínimo de aproximadamente -0.07 MeV. Este resultado complementa o do primeiro bloco ($\eta = f_\pi$), mostrando que a introdução do raio quiral variável modera a atração gerada pela eliminação da componente azimutal do AP. Na figura, observamos que as contribuições tanto de $\mathcal{L}_2$ quanto de $\mathcal{L}_4$ apresentam repulsão a distâncias pequenas, proveniente das singularidades de η clássico. A contribuição de $\mathcal{L}_2$ apresenta um poço atrativo na região intermediária, a partir de $d \simeq 1$ fm. Entretanto, o efeito das singularidades é maior na contribuição de $\mathcal{L}_4$, fazendo a atração no canal escalar aparecer a distâncias maiores que o requerido pela fenomenologia. Da mesma maneira que no caso $\eta = f_\pi$, este canal recebe, também, uma pequena contribuição de curto alcance, da lagrangiana ímpar.

Os resultados para η quantizado são apresentados nas Figs. 5.13 - 5.17. Observamos que os potenciais SS e T, Figs. 5.14 - 5.17, são próximos dos respectivos potenciais do AP, Figs. 4.3 - 4.6. As singularidades do caso η clássico não aparecem no caso quantizado, pois o fator $(\alpha^2 - 1)$ é substituído por $-\frac{2}{3}$ e, assim, a função η não mais apresenta zeros.

O potencial escalar V_C obtido neste último bloco de resultados, Fig. 5.13, apresenta

Fig. 5.13: Potencial NN no modelo de Skyrme, com o *Ansatz* Novo, e tomando η quantizado: termo escalar V_C . Convenções como na Fig. 5.3.

Fig. 5.14: Potencial NN no modelo de Skyrme, com o *Ansatz* Novo, e tomando η quantizado: termo spin-spin ímpar V_{SS}^{II} . Convenções e comentários como na Fig. 5.4.

Fig. 5.15: Potencial NN no modelo de Skyrme, com o *Ansatz* Novo, e tomando η quantizado: termo tensor ímpar V_T^{II} . Convenções e comentários como na Fig. 5.5.

Fig. 5.16: Potencial NN no modelo de Skyrme, com o *Ansatz* Novo, e tomando η quantizado: termo spin-spin par V_{SS}^{PP} . Convenções como na Fig. 5.6.

Fig. 5.17: Potencial NN no modelo de Skyrme, com o *Ansatz* Novo, e tomando η quantizado: termo tensor par V_T^{PP} . Convenções como na Fig. 5.7.

um poço atrativo, a partir de $d \simeq 1.2$ fm, com mínimo de aproximadamente -12.5 MeV. Além do alcance da atração, existem outras diferenças em relação ao caso η clássico. A contribuição de $\mathcal{L}_2$ é sempre atrativa, sendo a repulsão a curtas distâncias proveniente totalmente de $\mathcal{L}_4$, que mantém-se positivo até valores bastante elevados de d . Entretanto, as contribuições negativas do modelo σ predominam já na região de alcance intermediário, como exigido pela fenomenologia. Da mesma maneira que nos outros casos de η , este canal também recebe uma pequena contribuição de curto alcance, da lagrangiana ímpar.

A forma do AP simetrizado de Nyman e Riska [NR 88], Eq. 4.20, coincide com o AN. Estes autores adotaram a versão quantizada de η e calcularam a parte de longo alcance do potencial escalar considerando $\eta = f_\pi$ no denominador[¶] e desprezando suas derivadas. Eles usaram os valores $e = 4.84$ e $f_\pi = 54$ MeV, da Ref. [AN 84], que ajusta a massa do nucleon, enquanto nós utilizamos o valor experimental $f_\pi = 93$ MeV. Desta maneira eles obtêm, para $m_\pi = 0$, um poço atrativo de mínimo aproximadamente igual a -7 MeV em $d \simeq 1.8$ fm e, para $m_\pi = 139$ MeV, um mínimo de aproximadamente -3 MeV em $d \simeq 2$ fm.

[¶]O valor exato de η só é considerado no numerador dos termos de subtração da auto-energia.

Este último resultado pode ser comparado com o do AN, no caso η quantizado. Observamos que a escolha de parâmetros do nosso trabalho gera um resultado mais adequado fenomenologicamente, no que se refere à largura e localização do poço de potencial.

5.5 Avaliação dos resultados

Para avaliar as características dos modelos discutidos neste trabalho, comparamos as suas previsões, nesta seção. No caso do AN, consideramos somente η clássico e η quantizado, uma vez que o caso $\eta = f_\pi$ é apenas ilustrativo.

Fig. 5.18: Comparação entre V_{SS}^{II} do AN, com η clássico (pontilhado) e com η quantizado (tracejado), do AP (tracejado longo) e V_{SS} do OPEP (linha contínua).

Primeiramente, consideramos os potenciais SS e T ímpares, Figs. 5.18 e 5.19, que incluem também os respectivos termos do AP e do OPEP, com os parâmetros dados de acordo com a seção 4.3.3. Conforme discutido naquela seção, o potencial NN deve reproduzir o OPEP a longas distâncias. Observamos que, tanto no AP como no AN, isto ocorre, sendo que todos os resultados coincidem para distâncias maiores que 2 fm. As razões entre os resultados do AN e o OPEP a grandes distâncias tendem à unidade com a mesma precisão que o AP, como

Fig. 5.19: Comparação entre V_T^{II} do AN, com η clássico (pontilhado) e com η quantizado (tracejado), do AP (tracejado longo) e V_T do OPEP (linha contínua).

era esperado. Observamos, também, que os potenciais do AN, como os do AP, são regulares na origem, enquanto que, em teoria de campos, este efeito é obtido apenas com a inclusão de fatores de forma. Isto mostra que os dois *ansätze* fornecem a fenomenologia correta no caso da troca de um pión.

As Figs. 5.20 e 5.21 mostram a comparação entre as diversas escolhas de η e entre estas e o AP, para os potenciais SS e T pares. Observamos que, no âmbito do AN, as duas possibilidades para η coincidem a distâncias maiores que 2 fm. Notamos, também, que as magnitudes dos potenciais permanecem significativamente menores que as do AP, a grandes distâncias.

Nas Figs. 5.22 e 5.23, comparamos os potenciais escalares do AN, para η clássico e quantizado, com os potenciais fenomenológico de Argonne [WSA 84] e quiral [RR 97]. Na Fig. 5.22, podemos observar que os perfis dos vários modelos a curtas distâncias são bastante diferentes entre si. Isto não é surpreendente, no que diz respeito ao AN, uma vez que se trata

Fig. 5.20: Potencial spin-spin par do *Ansatz* Novo, com η clássico (pontilhado) e η quantizado (tracejado), e do *Ansatz* Produto (tracejado longo).

Fig. 5.21: Potencial tensor par do *Ansatz* Novo, com η clássico (pontilhado) e η quantizado (tracejado), e do *Ansatz* Produto (tracejado longo).

de soluções obtidas por meio da aproximação instantânea, que deve fornecer bons resultados a distâncias grandes, apenas. A parte de médio e longo alcances das interações são mostradas na Fig. 5.23. Observamos que o caso com η quantizado apresenta um poço visível, com mínimo em 1.4 fm; no caso com η clássico, o poço é bem menos saliente e o potencial fica negativo somente a partir de 2.4 fm. O mínimo do caso η quantizado tem magnitude próxima à do potencial fenomenológico, embora ocorram em valores de d bem diferentes. Observamos também que, para distâncias maiores que 2 fm, o potencial com η quantizado apresenta uma geometria parecida com as dos potenciais fenomenológico de Argonne e quiral. Para distâncias maiores que as apresentadas na figura, o potencial com η clássico também apresenta uma geometria semelhante a essas.

Com estes resultados, concluímos que o AN corresponde a uma solução plausível para o problema da atração de alcance intermediário no canal escalar do potencial NN. Quanto às duas opções para η , há argumentos em favor de cada uma delas, baseados na discussão sobre a quantização, na seção 5.2. Podemos pensar em adotar η clássico baseados no fato de o termo tratado como um campo clássico de fundo. Por outro lado, é razoável rodar os campos constituintes π de η , uma vez que concluímos ser essencial fazê-lo em S , que também é um campo escalar. Isto elimina as singularidades existentes no caso η clássico que, mesmo representando efeitos de curto alcance, indicam a presença de problemas. Um outro ponto a favor de η quantizado é que, mesmo a distâncias médias, o potencial escalar está próximo ao quiral, que possui uma base teórica sólida, e ao de Argonne, que descreve bem a fenomenologia.

Fig. 5.22: Potencial escalar do *Ansatz* Novo, com η clássico (pontilhado) e η quantizado (tracejado), fenomenológico de Argonne (tracejado longo) e quiral (linha contínua).

Fig. 5.23: Potencial escalar - detalhe da Fig. 5.22.

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho, nós partimos dos resultados do *Ansatz* Produto (AP), que constitui a aproximação usual para o cálculo da interação NN no modelo de Skyrme. Na revisão feita, vimos que, apesar de descrever com sucesso a troca de um pión, o potencial escalar com o AP não apresenta a atração de médio e longo alcances exigida pela fenomenologia. Determinando uma expressão analítica para este termo do potencial a longas distâncias, apresentada na seção 4.3.4, concluímos que a sua forma é compatível com a da troca de dois píons, porém, com coeficientes inadequados. O conteúdo repulsivo do termo de estabilização domina sobre a contribuição atrativa do termo de quebra de simetria, sendo que o termo cinético da lagrangiana não contribui, neste caso.

Na seção 4.3.5, estudamos a função de perfil F associada ao AP. Observamos que, até a distância de separação $d_{cr} = 0.86$ fm, o sistema com $B = 2$ comporta-se como um único sólito. A partir daí, admitimos que o sistema se dissocia em dois *skyrmions* com $B = 1$. Para $d < d_{cr}$, encontramos descontinuidades na função de perfil, que se devem à componente azimutal do campo piônico $\mathbf{P}$ do AP, que é dado por

$$\mathbf{P} = \frac{1}{f_\pi} \left(\sigma^{(1)} \boldsymbol{\pi}^{(2)} + \sigma^{(2)} \boldsymbol{\pi}^{(1)} - \boldsymbol{\pi}^{(1)} \times \boldsymbol{\pi}^{(2)} \right).$$

Conforme discutido na seção 4.4, esta componente azimutal é responsável por violações da paridade G e, além disso, não é invariante pela permutação entre os ouriços 1 e 2. Por este motivo, o ponto de partida para a construção do novo *ansatz* foi a eliminação desta componente

azimutal. Por outro lado, mantivemos o restante da forma de $\mathbf{P}$, que corresponde à soma dos campos dos ouriços constituintes, cada um deles em presença do vácuo modificado pelo outro. Os resultados finais dessa seção mostraram que definir um *ansatz* apenas a partir de uma forma para $\mathbf{P}$ não é suficiente, pois a obtenção do número bariônico igual a dois não é trivial.

No capítulo 5, consideramos, para o campo S , a mesma forma do AP, que fornece a topologia adequada. Esta escolha leva ao *Ansatz* Novo (AN), definido por

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{f_\pi} \left(\sigma^{(1)} \sigma^{(2)} - \boldsymbol{\pi}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\pi}^{(2)} \right), \\ \mathbf{P} &= \frac{1}{f_\pi} \left(\sigma^{(1)} \boldsymbol{\pi}^{(2)} + \sigma^{(2)} \boldsymbol{\pi}^{(1)} \right), \end{aligned}$$

com

$$S^2 + \mathbf{P}^2 = \eta^2, \quad (6.1)$$

onde η representa uma amplitude variável dos campos, sendo dada por

$$\eta = f_\pi \sqrt{1 + \frac{1}{f_\pi^4} \left[(\boldsymbol{\pi}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\pi}^{(2)})^2 - \boldsymbol{\pi}^{(1)2} \boldsymbol{\pi}^{(2)2} \right]}.$$

Este *ansatz* fornece $B = 2$ para qualquer distância entre os ouriços constituintes e apresenta, também, paridade G correta, simetria quiral e invariância pela permutação entre os ouriços 1 e 2.

Desta maneira, a primeira conclusão principal deste trabalho é que o AN representa uma possível solução para os problemas conceituais do AP.

Os resultados para o potencial NN calculado com o AN foram apresentados e discutidos nas seções 5.4 e 5.5. A parte de longo alcance dos canais spin-spin e tensor de paridades G individuais negativas reproduzem bem o potencial pela troca de um pión (OPEP) a longas distâncias, como também acontece com o AP. A grande diferença em relação a este último é encontrada nos resultados para o potencial escalar V_C . Observamos, primeiramente, que a simples eliminação da componente azimutal de $\mathbf{P}$, considerando $\eta = f_\pi$, gera atração neste canal. Esta atração é moderada pela amplitude variável η do AN.

Conforme discutido na seção 5.2, os resultados foram obtidos para duas versões de η , no que se refere ao procedimento de quantização. Num deles, todos os campos $\boldsymbol{\pi}$ constituintes são

multiplicados pela matriz de rotação D . No outro, simplesmente adota-se a forma estática, ou clássica, para η . Um primeiro ponto contra a versão clássica é o aparecimento de singularidades nos vários termos do potencial, na região de $d = 0.6$ fm, devidas a zeros na função η . Este problema não aparece na versão quantizada. Na região de médio alcance do potencial escalar, são obtidos valores bem distintos para as duas versões de η . Embora ambos os casos apresentem atração, os valores numéricos são mais compatíveis com a fenomenologia quando η é quantizado, como se observa na Fig. 5.23. Podemos dizer, então, que existem mais pontos a favor da versão quantizada de η . Em geral, os resultados a grandes distâncias para as duas versões são comparáveis entre si e, também, com os potenciais fenomenológico de Argonne e quiral.

Assim, temos a segunda conclusão importante do trabalho, de que o AN representa uma solução plausível para o problema fenomenológico da atração no potencial escalar.

A lagrangiana de Skyrme representa um modelo único no tratamento não perturbativo da física hadrônica a baixas energias. Nossa perspectiva é continuar a explorá-la, partindo, primeiramente, da análise de outras conseqüências do *ansatz* proposto neste trabalho, estudando a forma analítica para o potencial escalar a longas distâncias. A médio prazo, pretendemos investigar a força de três corpos com o AN.

Apêndice A

Cálculo das correntes de isospin do skyrmion

Utilizando o procedimento descrito na seção 2.1, calculamos as correntes de Noether associadas às transformações quirais da lagrangiana de Skyrme.

Cálculo da corrente vetorial

Considerando a transformação vetorial de $\mathbf{K}^\mu$, Eq. 2.97, para α constante, a variação na lagrangiana (3.3) é dada por

$$\begin{aligned}\delta^V \mathcal{L} &= \frac{f_\pi^2}{2} [\alpha \times \mathbf{L}_\mu \cdot \mathbf{L}^\mu + \mathbf{L}_\mu \cdot \alpha \times \mathbf{L}^\mu] \\ &+ \frac{1}{4e^2} \{ [\alpha \times \mathbf{L}_\mu \cdot \mathbf{L}_\nu + \mathbf{L}_\mu \cdot \alpha \times \mathbf{L}_\nu] \mathbf{L}^\mu \cdot \mathbf{L}^\nu + \mathbf{L}_\mu \cdot \mathbf{L}_\nu [\alpha \times \mathbf{L}^\mu \cdot \mathbf{L}^\nu + \mathbf{L}^\mu \cdot \alpha \times \mathbf{L}^\nu] \\ &- [\alpha \times \mathbf{L}_\mu \cdot \mathbf{L}^\mu + \mathbf{L}_\mu \cdot \alpha \times \mathbf{L}^\mu] \mathbf{L}_\nu \cdot \mathbf{L}^\nu - \mathbf{L}_\mu \cdot \mathbf{L}^\mu [\alpha \times \mathbf{L}_\nu \cdot \mathbf{L}^\nu + \mathbf{L}_\nu \cdot \alpha \times \mathbf{L}^\nu] \} = 0.\end{aligned}$$

Então, a corrente calculada a partir de (2.11) é conservada. Para calculá-la, precisamos saber como $\mathbf{L}^\mu$ se transforma com $\partial^\mu \alpha \neq 0$:

$$\begin{aligned}\delta^{V(x)} \mathbf{K}^\mu &= \frac{1}{f_\pi^2} \{ (\alpha \times \pi) \times \partial^\mu \pi + \pi \times \partial^\mu (\alpha \times \pi) \\ &+ \lambda [\sigma \partial^\mu (\alpha \times \pi) - \alpha \times \pi \partial^\mu \sigma] \} \\ &= \alpha \times \mathbf{K}^\mu + \frac{1}{f_\pi^2} \pi \times \{ \partial^\mu \alpha \times \pi - \lambda \sigma \partial^\mu \alpha \} \\ &= \alpha \times \mathbf{K}^\mu + \delta^{V'} \mathbf{K}^\mu.\end{aligned}$$

Agora, calculamos a variação de $\mathcal{L}$ devido a $\delta^{V(x)}\mathbf{L}^\mu$:

$$\begin{aligned}
 \delta^{V(x)}\mathcal{L} &= \delta^V\mathcal{L} + \delta^{V'}\mathcal{L} = \delta^{V'}\mathcal{L}, \\
 \delta^{V'}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\{\boldsymbol{\pi} \times (\partial_\mu \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\pi} - \sigma \partial_\mu \boldsymbol{\alpha}) \cdot \mathbf{L}^\mu + \mathbf{L}_\mu \cdot \boldsymbol{\pi} \times (\partial^\mu \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\pi} - \sigma \partial^\mu \boldsymbol{\alpha})\} \\
 &+ \frac{1}{4e^2 f_\pi^2} \{ [\boldsymbol{\pi} \times (\partial_\mu \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\pi} - \sigma \partial_\mu \boldsymbol{\alpha}) \cdot \mathbf{L}_\nu + \mathbf{L}_\mu \cdot \boldsymbol{\pi} \times (\partial_\nu \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\pi} - \sigma \partial_\nu \boldsymbol{\alpha})] \mathbf{L}^\mu \cdot \mathbf{L}^\nu \\
 &+ \mathbf{L}_\mu \cdot \mathbf{L}_\nu [\boldsymbol{\pi} \times (\partial^\mu \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\pi} - \sigma \partial^\mu \boldsymbol{\alpha}) \cdot \mathbf{L}^\nu + \mathbf{L}^\mu \cdot \boldsymbol{\pi} \times (\partial^\nu \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\pi} - \sigma \partial^\nu \boldsymbol{\alpha})] \\
 &- [\boldsymbol{\pi} \times (\partial_\mu \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\pi} - \sigma \partial_\mu \boldsymbol{\alpha}) \cdot \mathbf{L}^\mu + \mathbf{L}_\mu \cdot \boldsymbol{\pi} \times (\partial^\mu \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\pi} - \sigma \partial^\mu \boldsymbol{\alpha})] \mathbf{L}_\nu \cdot \mathbf{L}^\nu \\
 &- \mathbf{L}_\mu \cdot \mathbf{L}^\mu [\boldsymbol{\pi} \times (\partial_\nu \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\pi} - \sigma \partial_\nu \boldsymbol{\alpha}) \cdot \mathbf{L}^\nu + \mathbf{L}_\nu \cdot \boldsymbol{\pi} \times (\partial^\nu \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\pi} - \sigma \partial^\nu \boldsymbol{\alpha})] \}.
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Consideramos o termo

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\pi} \times [\partial_\mu \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\pi} - \sigma \partial_\mu \boldsymbol{\alpha}] \cdot \mathbf{L}^\mu &= \\
 &= \frac{1}{f_\pi^2} \{ \boldsymbol{\pi} \times [\partial_\mu \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\pi} - \sigma \partial_\mu \boldsymbol{\alpha}] \cdot [\boldsymbol{\pi} \times \partial^\mu \boldsymbol{\pi} + \sigma \partial^\mu \boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\pi} \partial^\mu \sigma] \} \\
 &= \boldsymbol{\pi} \times \partial^\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\alpha},
 \end{aligned}$$

onde utilizamos a relação $\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2 = f_\pi^2$. Temos, ainda,

$$\boldsymbol{\pi} \times [\partial_\mu \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\pi} - \sigma \partial_\mu \boldsymbol{\alpha}] \cdot \mathbf{L}_\nu = \boldsymbol{\pi} \times \partial_\nu \boldsymbol{\pi} \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\alpha} \text{ etc.}$$

Substituindo estes resultados em (A.1), obtemos

$$\begin{aligned}
 \delta^{V'}\mathcal{L} &= \boldsymbol{\pi} \times \partial^\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\alpha} + \frac{1}{2e^2 f_\pi^2} \{ [\boldsymbol{\pi} \times \partial_\nu \boldsymbol{\pi} \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\pi} \times \partial_\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \partial_\nu \boldsymbol{\alpha}] \mathbf{L}^\mu \cdot \mathbf{L}^\nu \\
 &- 2 \mathbf{L}_\nu \cdot \mathbf{L}^\nu \boldsymbol{\pi} \times \partial^\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\alpha} \} \\
 &= \epsilon_{bac} \pi_a \partial^\mu \pi_c \partial_\mu \alpha_b + \frac{1}{2e^2 f_\pi^2} \{ \epsilon_{bac} \pi_a \partial_\nu \pi_c L_d^\mu L_d^\nu - 2 \epsilon_{bac} \pi_a \partial^\mu \pi_c L_{d\nu} L_d^\nu \} \partial_\mu \alpha_b \\
 &+ \frac{1}{2e^2 f_\pi^2} \epsilon_{bac} \pi_a \partial_\lambda \pi_c L_d^\lambda L_d^\nu \partial_\nu \alpha_b.
 \end{aligned}$$

Utilizando o resultado

$$j_a^\mu = \frac{\partial(\delta^{V'}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu \alpha_a(x))}, \tag{A.2}$$

que decorre da seção 2.1, temos a corrente procurada:

$$\begin{aligned}
 j_b^\mu &= (1 - \frac{1}{e^2 f_\pi^2} L_{d\nu} L_d^\nu) \epsilon_{bac} \pi_a \partial^\mu \pi_c + \frac{1}{2e^2 f_\pi^2} \epsilon_{bac} \pi_a \partial_\nu \pi_c L_d^\mu L_d^\nu + \frac{1}{2e^2 f_\pi^2} \epsilon_{bac} \pi_a \partial_\lambda \pi_c L_d^\lambda L_d^\mu \\
 &= (1 - \frac{1}{e^2 f_\pi^2} L_{d\nu} L_d^\nu) \epsilon_{bac} \pi_a \partial^\mu \pi_c + \frac{1}{e^2 f_\pi^2} \epsilon_{bac} \pi_a \partial_\nu \pi_c L_d^\nu L_d^\mu
 \end{aligned}$$

ou

$$\mathbf{j}^\mu = \left(1 - \frac{1}{e^2 f_\pi^2} \mathbf{L}_\nu \cdot \mathbf{L}^\nu\right) \boldsymbol{\pi} \times \partial^\mu \boldsymbol{\pi} + \frac{1}{e^2 f_\pi^2} \boldsymbol{\pi} \times \partial_\nu \boldsymbol{\pi} \mathbf{L}^\nu \cdot \mathbf{L}^\mu.$$

Cálculo da corrente axial

De (2.97), sabemos que

$$\delta^A \mathbf{L}^\mu = -\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{L}^\mu$$

e, assim, podemos calcular a respectiva variação em $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned} \delta^A \mathcal{L} &= -\frac{f_\pi^2}{2} [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{L}_\mu \cdot \mathbf{L}^\mu + \mathbf{L}_\mu \cdot \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{L}^\mu] \\ &\quad - \frac{1}{4e^2} \{ [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{L}_\mu \cdot \mathbf{L}_\nu + \mathbf{L}_\mu \cdot \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{L}_\nu] \mathbf{L}^\mu \cdot \mathbf{L}^\nu + \mathbf{L}_\mu \cdot \mathbf{L}_\nu [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{L}^\mu \cdot \mathbf{L}^\nu + \mathbf{L}^\mu \cdot \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{L}^\nu] \\ &\quad - [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{L}_\mu \cdot \mathbf{L}^\mu + \mathbf{L}_\mu \cdot \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{L}^\mu] \mathbf{L}_\nu \cdot \mathbf{L}^\nu - \mathbf{L}_\mu \cdot \mathbf{L}^\mu [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{L}_\nu \cdot \mathbf{L}^\nu + \mathbf{L}_\nu \cdot \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{L}^\nu] \} + m_\pi^2 f_\pi \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\pi} \\ &= m_\pi^2 f_\pi \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\pi}. \end{aligned}$$

Vemos, então, a partir de (2.17), que a corrente axial $\mathbf{a}^\mu$ não é conservada, devido ao termo de quebra de simetria da lagrangiana, e sua divergência vale

$$\partial_\mu \mathbf{a}^\mu = m_\pi^2 f_\pi \boldsymbol{\pi}.$$

A variação de $\mathbf{K}^\mu$ para $\partial^\mu \boldsymbol{\beta} \neq 0$ é dada por

$$\begin{aligned} \delta^{A(x)} \mathbf{K}^\mu &= -\frac{1}{f_\pi^2} \{ \boldsymbol{\beta} \sigma \times \partial^\mu \boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\pi} \times \partial^\mu (\boldsymbol{\beta} \sigma) + \lambda [-\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\pi} \partial^\mu \boldsymbol{\pi} + \sigma \partial^\mu (\boldsymbol{\beta} \sigma) - \boldsymbol{\beta} \sigma \partial^\mu \sigma + \boldsymbol{\pi} \partial^\mu (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\pi})] \} \\ &= -\frac{1}{f_\pi^2} \{ \sigma \boldsymbol{\beta} \times \partial^\mu \boldsymbol{\pi} + \sigma \boldsymbol{\pi} \times \partial^\mu \boldsymbol{\beta} + \partial^\mu \sigma \boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\beta} \\ &\quad + \lambda [-\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\pi} \partial^\mu \boldsymbol{\pi} + \sigma^2 \partial^\mu \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta} \sigma \partial^\mu \sigma - \boldsymbol{\beta} \sigma \partial^\mu \sigma + \partial^\mu \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\pi} \boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\beta} \cdot \partial^\mu \boldsymbol{\pi} \boldsymbol{\pi}] \} \\ &= -\lambda \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{K}^\mu - \frac{1}{f_\pi^2} [\sigma \boldsymbol{\pi} \times \partial^\mu \boldsymbol{\beta} + \lambda \sigma^2 \partial^\mu \boldsymbol{\beta} + \lambda \boldsymbol{\pi} \boldsymbol{\pi} \cdot \partial^\mu \boldsymbol{\beta}]. \end{aligned}$$

Assim, temos

$$\delta^{A(x)} \mathbf{L}^\mu = -\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{L}^\mu - \frac{1}{f_\pi^2} [\sigma \boldsymbol{\pi} \times \partial^\mu \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\pi} \boldsymbol{\pi} \cdot \partial^\mu \boldsymbol{\beta} + \sigma^2 \partial^\mu \boldsymbol{\beta}] \doteq \delta^A \mathbf{L}^\mu + \delta^{A'} \mathbf{L}^\mu.$$

Calculamos, agora, os termos do tipo

$$\delta^{A'} \mathbf{L}^\mu \cdot \mathbf{L}^\nu = -\frac{1}{f_\pi^4} [\sigma \boldsymbol{\pi} \times \partial^\mu \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\pi} \boldsymbol{\pi} \cdot \partial^\mu \boldsymbol{\beta} + \sigma^2 \partial^\mu \boldsymbol{\beta}] \cdot [\boldsymbol{\pi} \times \partial^\nu \boldsymbol{\pi} + \sigma \partial^\nu \boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\pi} \partial^\nu \sigma]$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{f_\pi^4} \{ \sigma \pi \times \partial^\mu \beta \cdot \pi \times \partial^\nu \pi + \sigma^2 \partial^\nu \pi \cdot \pi \times \partial^\mu \beta + \sigma \pi \cdot \partial^\nu \pi \pi \cdot \partial^\mu \beta \\
&\quad - \pi^2 \partial^\nu \sigma \pi \cdot \partial^\mu \beta + \sigma^2 \pi \times \partial^\nu \pi \cdot \partial^\mu \beta + \sigma^3 \partial^\nu \pi \cdot \partial^\mu \beta - \sigma^2 \partial^\nu \sigma \pi \cdot \partial^\mu \beta \} \\
&= -\frac{1}{f_\pi^2} (\sigma \partial^\nu \pi - \pi \partial^\nu \sigma) \cdot \partial^\mu \beta.
\end{aligned}$$

Calculamos, finalmente, a variação de $\mathcal{L}$ devida à transformação local:

$$\begin{aligned}
\delta^{A(x)} \mathcal{L} &= m_\pi^2 f_\pi \pi \cdot \beta - \frac{1}{2} [(\sigma \partial^\mu \pi - \pi \partial^\mu \sigma) \cdot \partial_\mu \beta + (\sigma \partial_\mu \pi - \pi \partial_\mu \sigma) \cdot \partial^\mu \beta] \\
&\quad - \frac{1}{4e^2 f_\pi^2} \{ [(\sigma \partial_\nu \pi - \pi \partial_\nu \sigma) \cdot \partial_\mu \beta + (\sigma \partial_\mu \pi - \pi \partial_\mu \sigma) \cdot \partial_\nu \beta] \mathbf{L}^\mu \cdot \mathbf{L}^\nu \\
&\quad + \mathbf{L}_\mu \cdot \mathbf{L}_\nu [(\sigma \partial^\nu \pi - \pi \partial^\nu \sigma) \cdot \partial^\mu \beta + (\sigma \partial^\mu \pi - \pi \partial^\mu \sigma) \cdot \partial^\nu \beta] \\
&\quad - 2 [(\sigma \partial^\mu \pi - \pi \partial^\mu \sigma) \cdot \partial_\mu \beta + (\sigma \partial_\mu \pi - \pi \partial_\mu \sigma) \cdot \partial^\mu \beta] \mathbf{L}_\nu \cdot \mathbf{L}^\nu \} \\
&= m_\pi^2 f_\pi \pi \cdot \beta \\
&\quad - (\sigma \partial^\mu \pi - \pi \partial^\mu \sigma) \cdot \partial_\mu \beta - \frac{1}{2e^2 f_\pi^2} \mathbf{L}^\alpha \cdot \mathbf{L}^\nu [(\sigma \partial_\nu \pi - \pi \partial_\nu \sigma) \cdot \partial_\alpha \beta + (\sigma \partial_\alpha \pi - \pi \partial_\alpha \sigma) \cdot \partial_\nu \beta] \\
&\quad + \frac{1}{e^2 f_\pi^2} \mathbf{L}_\nu \cdot \mathbf{L}^\nu (\sigma \partial^\mu \pi - \pi \partial^\mu \sigma) \cdot \partial_\mu \beta
\end{aligned}$$

e, de (A.2), temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}^\mu &= -\{ \sigma \partial^\mu \pi - \pi \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2e^2 f_\pi^2} [\mathbf{L}^\mu \cdot \mathbf{L}^\nu (\sigma \partial_\nu \pi - \pi \partial_\nu \sigma) + \mathbf{L}^\alpha \cdot \mathbf{L}^\mu (\sigma \partial_\alpha \pi - \pi \partial_\alpha \sigma)] \\
&\quad - \frac{1}{e^2 f_\pi^2} \mathbf{L}_\nu \cdot \mathbf{L}^\nu (\sigma \partial^\mu \pi - \pi \partial^\mu \sigma) \}
\end{aligned}$$

ou

$$\mathbf{a}^\mu = \left[\frac{1}{e^2 f_\pi^2} \mathbf{L}_\nu \cdot \mathbf{L}^\nu - 1 \right] (\sigma \partial^\mu \pi - \pi \partial^\mu \sigma) - \frac{1}{e^2 f_\pi^2} \mathbf{L}^\mu \cdot \mathbf{L}^\nu (\sigma \partial_\nu \pi - \pi \partial_\nu \sigma).$$

Apêndice B

Componentes do potencial NN

Em termos dos projetores de spin P_σ^α e isospin P_τ^β , o potencial NN é escrito como

$$V_{NN} = V^{00} P_\sigma^0 P_\tau^0 + V^{01} P_\sigma^0 P_\tau^1 + V^{10} P_\sigma^1 P_\tau^0 + V^{11} P_\sigma^1 P_\tau^1, \quad (\text{B.1})$$

com

$$V^{\alpha\beta} = V_C^{\alpha\beta} O_C + V_{L2}^{\alpha\beta} O_{L2} + V_{LS}^{\alpha\beta} O_{LS} + V_Q^{\alpha\beta} O_Q + V_T^{\alpha\beta} O_T. \quad (\text{B.2})$$

Escrevendo os projetores em termos das matrizes de Pauli, conforme (4.8) e (4.9), obtemos

$$\begin{aligned} V_{NN} = & \frac{1}{16} \left\{ (V^{00} + 3V^{01} + 3V^{10} + 9V^{11}) + (-V^{00} - 3V^{01} + V^{10} + 3V^{11}) \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \right. \\ & + \left. (-V^{00} + V^{01} - 3V^{10} + 3V^{11}) \boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)} + (V^{00} - V^{01} - V^{10} + V^{11}) \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)} \right\}. \end{aligned}$$

Arranjando a expressão acima em termos dos operadores de isospin, obtemos a relação entre os $V^{\alpha\beta}$ e os $V^{S,V}$ da Eq. 4.10,

$$\begin{aligned} V^S &= \frac{1}{16} \left[(V^{00} + 3V^{01} + 3V^{10} + 9V^{11}) + (-V^{00} - 3V^{01} + V^{10} + 3V^{11}) \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \right], \\ V^V &= \frac{1}{16} \left[(-V^{00} + V^{01} - 3V^{10} + 3V^{11}) + (V^{00} - V^{01} - V^{10} + V^{11}) \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \right]. \end{aligned}$$

Quando combinamos o operador spin-spin $\sigma^{(1)} \cdot \sigma^{(2)}$ com os operadores da base, temos

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \quad \sigma^{(1)} \cdot \sigma^{(2)} &= \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{L} \cdot (\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)}) \sigma^{(1)} \cdot \sigma^{(2)} = \frac{1}{2} L_i (\sigma_i^{(1)} + \sigma_i^{(2)}) \sigma_j^{(1)} \sigma_j^{(2)} = \\
 &= \frac{1}{2} L_i \left[(\delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k^{(1)}) \sigma_j^{(2)} + \sigma_j^{(1)} (\delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k^{(2)}) \right] = \\
 &= \frac{1}{2} L_i \left[\sigma_i^{(2)} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k^{(1)} \sigma_j^{(2)} + \sigma_i^{(1)} + i\epsilon_{ijk} \sigma_j^{(1)} \sigma_k^{(2)} \right] = \\
 &= \frac{1}{2} L_i (\sigma_i^{(1)} + \sigma_i^{(2)}) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{S},
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

$$\begin{aligned}
 O_Q \quad \sigma^{(1)} \cdot \sigma^{(2)} &= \\
 &= (3L_i L_j - L^2 \delta_{ij}) \sigma_i^{(1)} \sigma_j^{(2)} \sigma_k^{(1)} \sigma_k^{(2)} = \\
 &= (3L_i L_j - L^2 \delta_{ij}) (\delta_{ik} + i\epsilon_{ikm} \sigma_m^{(1)}) (\delta_{jk} + i\epsilon_{jkn} \sigma_n^{(2)}) = \\
 &= (3L_i L_j - L^2 \delta_{ij}) (\delta_{ij} + i\epsilon_{ijm} \sigma_m^{(1)} + i\epsilon_{jin} \sigma_n^{(2)} - \epsilon_{imk} \epsilon_{jnk} \sigma_m^{(1)} \sigma_n^{(2)}) = \\
 &= (3L_i L_j - L^2 \delta_{ij}) (\delta_{in} \delta_{jm} - \delta_{ij} \delta_{mn}) \sigma_m^{(1)} \sigma_n^{(2)} = (3L_i L_j - L^2 \delta_{ij}) \sigma_j^{(1)} \sigma_i^{(2)} = O_Q
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

e, da mesma maneira,

$$O_T \sigma^{(1)} \cdot \sigma^{(2)} = O_T.$$

Com estes resultados, podemos relacionar as componentes de (4.11) com as de (4.2), obtendo, para $A = LS, Q, T$,

$$V_A^S = \frac{1}{4} (V_A^{10} + 3V_A^{11}), \tag{B.5}$$

$$V_A^V = \frac{1}{4} (-V_A^{10} + V_A^{11}), \tag{B.6}$$

para $A = C, L2$,

$$V_A^S = \frac{1}{16} (V_A^{00} + 3V_A^{01} + 3V_A^{10} + 9V_A^{11}). \tag{B.7}$$

$$V_A^V = \frac{1}{16} (-V_A^{00} + V_A^{01} - 3V_A^{10} + 3V_A^{11}) \tag{B.8}$$

e para $A = SS, L2SS$,

$$V_A^S = \frac{1}{16} (-V_A^{00} - 3V_A^{01} + V_A^{10} + 3V_A^{11}). \tag{B.9}$$

$$V_A^V = \frac{1}{16} (V_A^{00} - V_A^{01} - V_A^{10} + V_A^{11}). \tag{B.10}$$

Apêndice C

Valores esperados do operador de rotação do skyrmion

Neste apêndice apresentamos os valores esperados das matrizes de rotação do *skyrmion* em estados do nucleon. Para que o *skyrmion* adquira spin e isospin é preciso, primeiramente, rodar a solução correspondente ao sóliton estático, o que é feito através da matriz D , cujas propriedades são apresentadas a seguir.

A solução estática da equação de Skyrme é denotada por $U_e = e^{i\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F} \hat{\boldsymbol{\pi}}}$. Para quantizá-la, ela é rodada por parâmetros dependentes do tempo, $(a_0, \mathbf{a})$, restritos a uma quadri-esfera de raio unitário, ou seja,

$$a_0^2 + \mathbf{a}^2 = 1, \quad (\text{C.1})$$

para garantir a unitariedade da transformação. O campo rodado é dado por

$$U = A(t) U_e A^\dagger(t),$$

com

$$A = a_0 + i\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{a}.$$

Usando o ouriço, obtemos

$$U = A U_e A^\dagger = \cos F + i\tau_\alpha D_{\alpha\beta} \hat{r}_\beta \sin F, \quad (\text{C.2})$$

sendo D a matriz 3×3 dada por

$$D_{\alpha\beta} = 2 \left[\epsilon_{\alpha\beta k} a_0 a_k + a_\alpha a_\beta + \left(\frac{1}{2} - \mathbf{a}^2 \right) \delta_{\alpha\beta} \right]. \quad (\text{C.3})$$

Esta mesma matriz também aparece em mecânica geral, na cinemática de corpo rígido, onde representa a inversa da matriz de transformação dos eixos espaciais para um sistema de referência fixo no corpo tratado. Os elementos da matrix 2×2 A são denominados parâmetros de Cayley-Klein [Gol 50].

Devido ao vínculo (C.1), os parâmetros $(a_0, \mathbf{a})$ podem ser descritos por três ângulos:

$$\begin{aligned} a_0 &= \cos \alpha, & 0 \leq \alpha \leq \pi, \\ a_z &= \sin \alpha \cos \theta, & 0 \leq \theta \leq \pi, \\ a_x &= \sin \alpha \sin \theta \cos \phi, & 0 \leq \phi \leq 2\pi, \\ a_y &= \sin \alpha \sin \theta \sin \phi. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

A integral de ângulo sólido neste espaço é

$$V = \int d^4 a \delta(a^2 - 1) = \int_{-1}^1 da_x \int_{-1}^1 da_y \int_{-1}^1 da_z \int_{-1}^1 da_0 \delta[a_0^2 - (1 - \mathbf{a}^2)] = \int d^3 \mathbf{a} \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{a}^2}}. \quad (\text{C.5})$$

Usando os ângulos definidos acima, temos

$$\begin{aligned} V &= \int_0^\pi \sin^2 \alpha d\alpha \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\cos \alpha}{|\cos \alpha|} \\ &= 4\pi \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \sin^2 \alpha + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi d\alpha (-) \sin^2 \alpha \right] = 2\pi^2. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Para obter os elementos de matriz de operadores de rotação D atuando em estados de bárions, são necessárias, também, integrais de potências dos a_i 's ($i = 0, 1, 2, 3$), listadas abaixo. As integrais envolvendo números ímpares de um ou mais a_i 's valem zero. Em todas as integrais,

os índices dos a 's não são somados, e variam de 0 a 3.

$$\begin{aligned}
C_2 &\doteq \frac{1}{2\pi^2} \int d^4a \delta(a^2 - 1) a_i^2 = \frac{1}{4}, \\
C_{22} &\doteq \frac{1}{2\pi^2} \int d^4a \delta(a^2 - 1) a_i^2 a_j^2 = \frac{1}{24}, \quad i \neq j, \\
C_4 &\doteq \frac{1}{2\pi^2} \int d^4a \delta(a^2 - 1) a_i^4 = \frac{1}{8}, \\
C_{222} &\doteq \frac{1}{2\pi^2} \int d^4a \delta(a^2 - 1) a_i^2 a_j^2 a_k^2 = \frac{1}{192}, \quad i \neq j \neq k, \\
C_{42} &\doteq \frac{1}{2\pi^2} \int d^4a \delta(a^2 - 1) a_i^4 a_j^2 = \frac{1}{64}, \quad i \neq j, \\
C_6 &\doteq \frac{1}{2\pi^2} \int d^4a \delta(a^2 - 1) a_i^6 = \frac{5}{64}, \\
C_{2222} &\doteq \frac{1}{2\pi^2} \int d^4a \delta(a^2 - 1) a_i^2 a_j^2 a_k^2 a_l^2 = \frac{1}{1920}, \quad i \neq j \neq k \neq l, \\
C_{422} &\doteq \frac{1}{2\pi^2} \int d^4a \delta(a^2 - 1) a_i^4 a_j^2 a_k^2 = \frac{1}{640}, \quad i \neq j \neq k, \\
C_{44} &\doteq \frac{1}{2\pi^2} \int d^4a \delta(a^2 - 1) a_i^4 a_j^4 = \frac{3}{640}, \quad i \neq j, \\
C_{62} &\doteq \frac{1}{2\pi^2} \int d^4a \delta(a^2 - 1) a_i^6 a_j^2 = \frac{1}{128}, \quad i \neq j, \\
C_8 &\doteq \frac{1}{2\pi^2} \int d^4a \delta(a^2 - 1) a_i^8 = \frac{7}{128}, \\
C_{4222} &\doteq \frac{1}{2\pi^2} \int d^4a \delta(a^2 - 1) a_i^4 a_j^2 a_k^2 a_l^2 = \frac{1}{7680}, \quad i \neq j \neq k \neq l, \\
C_{442} &\doteq \frac{1}{2\pi^2} \int d^4a \delta(a^2 - 1) a_i^4 a_j^4 a_k^2 = \frac{1}{2560}, \quad i \neq j \neq k, \\
C_{622} &\doteq \frac{1}{2\pi^2} \int d^4a \delta(a^2 - 1) a_i^6 a_j^2 a_k^2 = \frac{1}{1536}, \quad i \neq j \neq k, \\
C_{64} &\doteq \frac{1}{2\pi^2} \int d^4a \delta(a^2 - 1) a_i^6 a_j^4 = \frac{1}{512}, \quad i \neq j, \\
C_{82} &\doteq \frac{1}{2\pi^2} \int d^4a \delta(a^2 - 1) a_i^8 a_j^2 = \frac{7}{1536}, \quad i \neq j, \\
C_{10} &\doteq \frac{1}{2\pi^2} \int d^4a \delta(a^2 - 1) a_i^{10} = \frac{21}{512}.
\end{aligned} \tag{C.7}$$

As integrais contendo até oito a_i 's estão calculadas na Ref. [Rob 88]. Obtivemos as integrais de dez a_i 's a partir das de oito, multiplicando as mesmas por (C.1), o que fornece um sistema de equações. Para determiná-lo, calculamos um dos coeficientes (C_{10}) através de uma integral específica ($\int d^4a \delta(a^2 - 1) a_x^{10}$), utilizando a parametrização angular dos a 's.

Estados de bárions

Os vetores de estado dos bárions são compostos de harmônicos esféricos, aqui reescritos com as componentes do quadrivetor a [Rob 88].

$$\begin{aligned}
|p \frac{1}{2}\rangle &= -\frac{i}{\pi} (a_x + ia_y), \\
|p -\frac{1}{2}\rangle &= -\frac{1}{\pi} (a_0 - ia_z), \\
|n \frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\pi} (a_0 + ia_z), \\
|n -\frac{1}{2}\rangle &= \frac{i}{\pi} (a_x - ia_y), \\
|\Delta^{++} \frac{3}{2}\rangle &= \frac{i\sqrt{2}}{\pi} (a_x + ia_y)^3, \\
|\Delta^{++} \frac{1}{2}\rangle &= \frac{\sqrt{6}}{\pi} (a_0 - ia_z) (a_x + ia_y)^2, \\
|\Delta^{++} -\frac{1}{2}\rangle &= -\frac{i\sqrt{6}}{\pi} (a_0 - ia_z)^2 (a_x + ia_y), \\
|\Delta^{++} -\frac{3}{2}\rangle &= -\frac{\sqrt{2}}{\pi} (a_0 - ia_z)^3, \\
|\Delta^+ \frac{3}{2}\rangle &= -\frac{\sqrt{6}}{\pi} (a_0 + ia_z) (a_x + ia_y)^2, \\
|\Delta^+ \frac{1}{2}\rangle &= -\frac{i\sqrt{2}}{\pi} [1 - 3(a_0^2 + a_z^2)] (a_x + ia_y), \\
|\Delta^+ -\frac{1}{2}\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} [1 - 3(a_x^2 + a_y^2)] (a_0 - ia_z), \\
|\Delta^+ -\frac{3}{2}\rangle &= \frac{i\sqrt{6}}{\pi} (a_0 - ia_z)^2 (a_x - ia_y), \\
|\Delta^0 \frac{3}{2}\rangle &= -\frac{i\sqrt{6}}{\pi} (a_0 + ia_z)^2 (a_x + ia_y), \\
|\Delta^0 \frac{1}{2}\rangle &= -\frac{\sqrt{2}}{\pi} [1 - 3(a_x^2 + a_y^2)] (a_0 + ia_z), \\
|\Delta^0 -\frac{1}{2}\rangle &= \frac{i\sqrt{2}}{\pi} [1 - 3(a_0^2 + a_z^2)] (a_x - ia_y), \\
|\Delta^0 -\frac{3}{2}\rangle &= \frac{\sqrt{6}}{\pi} (a_0 - ia_z) (a_x - ia_y)^2, \\
|\Delta^- \frac{3}{2}\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} (a_0 + ia_z)^3, \\
|\Delta^- \frac{1}{2}\rangle &= \frac{i\sqrt{6}}{\pi} (a_0 + ia_z)^2 (a_x - ia_y), \\
|\Delta^- -\frac{1}{2}\rangle &= -\frac{\sqrt{6}}{\pi} (a_0 + ia_z) (a_x - ia_y)^2, \\
|\Delta^- -\frac{3}{2}\rangle &= -\frac{i\sqrt{2}}{\pi} (a_x - ia_y)^3.
\end{aligned} \tag{C.8}$$

Cálculo dos elementos de matriz

Valores esperados do tipo $\langle B|D...D|B\rangle$, onde $|B\rangle$ representa um bárion, podem ser calculados explicitamente, utilizando-se os a 's, para elementos $D_{\alpha\beta}$'s específicos - dados por (C.3) - e estados particulares de isospin e spin do bárion, listados em (C.8) para nucleons e deltas.

Por exemplo, o valor esperado de D_{11} entre um próton e um Δ^{++} com terceiras componentes de spin iguais a $-\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$, respectivamente, é dado pela seguinte integral:

$$\langle \Delta^{++} \frac{3}{2} | D_{11} | p \frac{1}{2} \rangle = \int d^4 a \delta(a^2 - 1) \left(-\frac{i\sqrt{2}}{\pi} \right) (a_x - ia_y)^3 (1 - 2a_y^2 - 2a_z^2) \left(-\frac{i}{\pi} \right) (a_x + ia_y). \quad (C.9)$$

Apesar de não apresentar problemas técnicos, o cálculo dos elementos de matriz por este método é extremamente longo e tedioso, pois tem de ser realizado caso a caso. Por isso, é conveniente o uso de uma notação mais compacta, baseada em matrizes.

Estrutura matricial

A matriz D representa o pión e, portanto, sua atuação nos estados de bárions corresponde a transições no setor de isospin com $I = 1$. Por este motivo, a atuação da matriz D sobre o nucleon só pode transformá-lo num estado de nucleon ou delta:

$$D|N\rangle = K_{NN}|N\rangle + K_{N\Delta}|\Delta\rangle. \quad (C.10)$$

No caso da delta, temos

$$D|\Delta\rangle = K_{\Delta N}|N\rangle + K_{\Delta\Delta}|\Delta\rangle + K_{\Delta\frac{5}{2}}|\frac{5}{2}\rangle, \quad (C.11)$$

sendo $|\frac{5}{2}\rangle$ um estado de isospin $I = \frac{5}{2}$. Este estado é desprovido de interpretação fenomenológica, mas apresenta-se aqui como uma possibilidade teórica, exigida por questão de completeza. Em geral, as constantes K dependem das terceiras componentes de spin e isospin dos nucleons e deltas, e do elemento D considerado.

Devido à estrutura de grupo dos multipletos de isospin, a dependência nos índices que representam as terceiras componentes de isospin e spin é fornecida pelas matrizes τ , M e S , que representam transições NN , $N\Delta$ e $\Delta\Delta$, respectivamente. Elas têm as seguintes formas explícitas:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (C.12)$$

$$M_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ -\sqrt{\frac{1}{3}} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i\sqrt{\frac{1}{3}} \\ i\sqrt{\frac{1}{3}} & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad M_3 = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (C.13)$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = i \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad (C.14)$$

sendo

$$|p \ -\frac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_\tau \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_\sigma, \quad |\Delta^0 \ \frac{3}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_\tau \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_\sigma \text{ etc.} \quad (C.15)$$

Elas correspondem a representações do grupo $SU(2)$ nos diferentes setores e satisfazem as seguintes relações:

$$\tau_\alpha \tau_\beta = \delta_{\alpha\beta} + i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \tau_\gamma, \quad (C.16)$$

$$M_\alpha^\dagger M_\beta = \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} + \frac{i}{3} \epsilon_{\beta\alpha\gamma} \tau_\gamma, \quad (C.17)$$

$$S_\alpha M_\beta = M_\beta \frac{\tau_\alpha}{2} + i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} M_\gamma, \quad (C.18)$$

$$M_\alpha^\dagger S_\beta = \frac{\tau_\beta}{2} M_\alpha^\dagger + i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} M_\gamma^\dagger. \quad (C.19)$$

Estas matrizes permitem-nos reescrever as Eqs. (C.10) e (C.11), respectivamente, como

$$D_{\alpha i} |N\rangle = A_{NN} \tau_\alpha \sigma_i |N\rangle + A_{N\Delta} M_\alpha^t M_i^s |N\rangle, \quad (C.20)$$

$$D_{\alpha i} |\Delta\rangle = A_{N\Delta} M_\alpha^{t\dagger} M_i^{s\dagger} |\Delta\rangle + A_{\Delta\Delta} S_\alpha^t S_i^s |\Delta\rangle + A_{\Delta\frac{5}{2}} Q_\alpha^t Q_i^s |\Delta\rangle, \quad (C.21)$$

sendo que os índices t e s indicam os espaços de isospin e spin, respectivamente; no setor do nucleon, τ são as matrizes de Pauli de isospin e σ , as de spin. As matrizes $\mathbf{Q}$ têm dimensão 6×4 e relacionam os espaços de $\frac{5}{2}$ e $\frac{3}{2}$; suas formas explícitas não são apresentadas aqui.

A partir do cálculo explícito de elementos de matriz com apenas um elemento D particular, são determinadas as constantes A . Por exemplo, o cálculo de (C.9) fornece o valor de $A_{N\Delta}$. Obtemos, assim,

$$A_{NN} = -\frac{1}{3}, \quad (\text{C.22})$$

$$A_{N\Delta} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (\text{C.23})$$

$$A_{\Delta\Delta} = -\frac{4}{15}. \quad (\text{C.24})$$

Valores Esperados

Com os coeficientes dados por (C.22-C.24), obtemos os seguintes valores esperados de um único operador D , em estados de nucleons e deltas:

$$\langle N|D_{\alpha i}|N\rangle = -\frac{1}{3}\langle N|\tau_{\alpha}\sigma_i|N\rangle, \quad (\text{C.25})$$

$$\langle \Delta|D_{\alpha i}|N\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\langle \Delta|M_{\alpha}^t M_i^s|N\rangle, \quad (\text{C.26})$$

$$\langle N|D_{\alpha i}|\Delta\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\langle N|M_{\alpha}^{t\dagger} M_i^{s\dagger}|\Delta\rangle, \quad (\text{C.27})$$

$$\langle \Delta|D_{\alpha i}|\Delta\rangle = -\frac{4}{15}\langle \Delta|S_{\alpha}^t S_i^s|\Delta\rangle. \quad (\text{C.28})$$

Em geral, nos cálculos, aparecem produtos de operadores D . No caso do produto de dois operadores, temos

$$D_{\alpha i}D_{\beta j} = \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij} + \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}D_{\gamma k}\epsilon_{ijk} + \frac{1}{9}T_{\lambda\theta}^{\alpha\beta}D_{\lambda r}D_{\theta s}T_{rs}^{ij}, \quad (\text{C.29})$$

com $T_{ij}^{\alpha\beta} = \frac{3}{2}(\delta_{\alpha i}\delta_{\beta j} + \delta_{\alpha j}\delta_{\beta i}) - \delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}$. Este resultado pode ser verificado por cálculo analítico explícito, utilizando (C.3). O valor esperado do terceiro termo desta expressão em estados inicial e final de um nucleon é nulo, porque corresponde à troca de duas unidades de isospin.

Usando este resultado e a Eq. C.25, obtemos

$$\langle N|D_{\alpha i}D_{\beta j}|N\rangle = \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij} - \frac{1}{6}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{ijk}\langle N|\tau_{\gamma}\sigma_k|N\rangle. \quad (C.30)$$

Em geral é possível, também, calcular o valor esperado do produto de dois ou mais operadores D através da inclusão de um conjunto intermediário completo de estados de bárions. No caso da Eq. C.30, por exemplo, temos

$$\langle N|D_{\alpha i}D_{\beta j}|N\rangle = \langle N|D_{\alpha i}|B\rangle\langle B|D_{\beta j}|N\rangle, \quad (C.31)$$

onde $|B\rangle\langle B| = |N\rangle\langle N| + |\Delta\rangle\langle\Delta| + |\frac{5}{2}\rangle\langle\frac{5}{2}| + \dots$. Neste particular elemento de matriz, apenas os estados intermediários com nucleons e deltas contribuem. O cálculo explícito nos fornece

$$\langle N|D_{\alpha i}|N\rangle\langle N|D_{\beta j}|N\rangle = \langle N|\frac{1}{9}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij} + i\delta_{\alpha\beta}\epsilon_{ijk}\sigma_k + i\delta_{ij}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\tau_{\gamma} - \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{ijk}\tau_{\gamma}\sigma_k)|N\rangle, \quad (C.32)$$

$$\langle N|D_{\alpha i}|\Delta\rangle\langle\Delta|D_{\beta j}|N\rangle = \langle N|\frac{1}{9}\left(2\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij} - i\delta_{\alpha\beta}\epsilon_{ijk}\sigma_k - i\delta_{ij}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\tau_{\gamma} - \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{ijk}\tau_{\gamma}\sigma_k\right)|N\rangle. \quad (C.33)$$

A soma dos dois resultados anteriores fornece novamente o resultado total, (C.30). Os elementos de matriz acima são esquematicamente representados na Fig. C.1a.

Fig. C.1: Possibilidades de transição pela atuação dos operadores D . Cada traço indica a atuação de um operador D ; símbolos entre dois traços indicam a soma sobre todos os estados intermediários possíveis do multiplete em questão. (a) Estados inicial e final de um nucleon; (b) transição delta-nucleon.

Não calcularemos explicitamente os elementos de matriz correspondentes à Fig. C.1b, pois não estamos interessados em estados finais de deltas. Entretanto, para a utilização em cálculo posterior, indicamos, abaixo, a estrutura matricial do complexo conjugado destes elementos:

$$\langle\Delta|D_{\beta j}D_{\gamma k}|N\rangle = \langle\Delta|D_{\beta j}|N\rangle\langle N|D_{\gamma k}|N\rangle + \langle\Delta|D_{\beta j}|\Delta\rangle\langle\Delta|D_{\gamma k}|N\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3\sqrt{2}} [M_\beta \tau_\gamma] [M_j \sigma_k] \\
&+ \frac{1}{3\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{5} [M_\gamma \tau_\beta] [M_k \sigma_j] \right. \\
&\quad \left. + \frac{2i}{5} ([M_\gamma \tau_\beta] [\epsilon_{jkm} M_m] + [\epsilon_{\beta\gamma\lambda} M_\lambda] [M_k \sigma_j]) - \frac{4}{5} [\epsilon_{\beta\gamma\lambda} M_\lambda] [\epsilon_{jkm} M_m] \right\}.
\end{aligned} \tag{C.34}$$

Os valores esperados do produto de três operadores D em estados de um nucleon não apresentam novidades, pois envolvem, ainda, apenas estados intermediários de nucleons e deltas. As quatro possíveis contribuições são representadas no diagrama da Fig. C.2.

Fig. C.2: Possibilidades de transição pela atuação de três operadores D em estados de um nucleon. (Ver legenda da Fig. C.1.)

Calculamos estes valores esperados utilizando a inclusão de estados intermediários. Assim, por exemplo,

$$\langle N | D_{\alpha i} D_{\beta j} D_{\gamma k} | N \rangle = \langle N | D_{\alpha i} | N \rangle \langle N | D_{\beta j} D_{\gamma k} | N \rangle + \langle N | D_{\alpha i} | \Delta \rangle \langle \Delta | D_{\beta j} D_{\gamma k} | N \rangle. \tag{C.35}$$

O primeiro termo é o produto de (C.25) por (C.30) e fornece

$$\begin{aligned}
\langle N | D_{\alpha i} | N \rangle \langle N | D_{\beta j} D_{\gamma k} | N \rangle &= \frac{1}{18} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{ijk} \\
&+ \frac{i}{18} [- (\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \delta_{ij} \sigma_k + \delta_{\alpha\beta} \tau_\gamma \epsilon_{ijk}) + (\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \delta_{ik} \sigma_j + \delta_{\alpha\gamma} \tau_\beta \epsilon_{ijk})] \\
&+ \frac{1}{18} [- (\delta_{\alpha\beta} \tau_\gamma \delta_{ij} \sigma_k + \delta_{\alpha\gamma} \tau_\beta \delta_{ik} \sigma_j) + (\delta_{\alpha\beta} \tau_\gamma \delta_{ik} \sigma_j + \delta_{\alpha\gamma} \tau_\beta \delta_{ij} \sigma_k)] \\
&- \frac{1}{9} \delta_{\beta\gamma} \tau_\alpha \delta_{jk} \sigma_i.
\end{aligned} \tag{C.36}$$

Neste resultado*, observamos que a base para o produto de três operadores D entre estados de um nucleon são os quatro operadores

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma},$$

*Para simplificar a notação, a partir da Eq. C.36, escrevemos apenas $\tau_\alpha \sigma_i$, ao invés de $\langle N | \tau_\alpha \sigma_i | N \rangle$.

$$\delta_{\alpha\beta}\tau_\gamma, \delta_{\alpha\gamma}\tau_\beta, \delta_{\beta\gamma}\tau_\alpha,$$

no espaço de isospin, combinados com os correspondentes no espaço de spin.

Para calcular o segundo termo de (C.35), multiplicamos (C.27) por (C.34), ainda separadamente nos espaços de isospin e spin, e obtemos

$$\begin{aligned} \langle N|D_{\alpha i}|\Delta\rangle\langle\Delta|D_{\beta j}D_{\gamma k}|N\rangle &= -\frac{1}{6}\left\{[M_\alpha^\dagger M_\beta\tau_\gamma][M_i^\dagger M_j\sigma_k] + \frac{1}{5}[M_\alpha^\dagger M_\gamma\tau_\beta][M_i^\dagger M_k\sigma_j]\right. \\ &+ \frac{2i}{5}\left([M_\alpha^\dagger M_\gamma\tau_\beta][\epsilon_{jkm}M_i^\dagger M_m] + [\epsilon_{\beta\gamma\lambda}M_\alpha^\dagger M_\lambda][M_i^\dagger M_k\sigma_j]\right) \\ &\left.- \frac{4}{5}[\epsilon_{\beta\gamma\lambda}M_\alpha^\dagger M_\lambda][\epsilon_{jkm}M_i^\dagger M_m]\right\}. \end{aligned} \quad (C.37)$$

As estruturas de matrizes básicas presentes acima são

$$M_\alpha^\dagger M_\beta\tau_\gamma = -\frac{i}{3}\epsilon_{\alpha\beta\gamma} + \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\tau_\gamma + \frac{1}{3}\delta_{\alpha\gamma}\tau_\beta - \frac{1}{3}\delta_{\beta\gamma}\tau_\alpha, \quad (C.38)$$

$$M_\alpha^\dagger M_\gamma\tau_\beta = +\frac{i}{3}\epsilon_{\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\tau_\gamma + \frac{2}{3}\delta_{\alpha\gamma}\tau_\beta - \frac{1}{3}\delta_{\beta\gamma}\tau_\alpha, \quad (C.39)$$

$$\epsilon_{\beta\gamma\lambda}M_\alpha^\dagger M_\lambda = \frac{2}{3}\epsilon_{\alpha\beta\gamma} + \frac{i}{3}\delta_{\alpha\beta}\tau_\gamma - \frac{i}{3}\delta_{\alpha\gamma}\tau_\beta. \quad (C.40)$$

Substituindo adequadamente estas estruturas em (C.37), obtemos

$$\begin{aligned} \langle N|D_{\alpha i}|\Delta\rangle\langle\Delta|D_{\beta j}D_{\gamma k}|N\rangle &= \frac{1}{9}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{ijk} \\ &+ \frac{i}{18}[(\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\delta_{ij}\sigma_k + \delta_{\alpha\beta}\tau_\gamma\epsilon_{ijk}) - (\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\delta_{ik}\sigma_j + \delta_{\alpha\gamma}\tau_\beta\epsilon_{ijk})] \\ &- \frac{7}{90}(\delta_{\alpha\beta}\tau_\gamma\delta_{ij}\sigma_k + \delta_{\alpha\gamma}\tau_\beta\delta_{ik}\sigma_j) - \frac{1}{45}\delta_{\beta\gamma}\tau_\alpha\delta_{jk}\sigma_i \\ &- \frac{1}{45}(\delta_{\alpha\beta}\tau_\gamma\delta_{ik}\sigma_j + \delta_{\alpha\gamma}\tau_\beta\delta_{ij}\sigma_k) \\ &+ \frac{1}{30}[\delta_{\beta\gamma}\tau_\alpha(\delta_{ij}\sigma_k + \delta_{ik}\sigma_j) + (\delta_{\alpha\beta}\tau_\gamma + \delta_{\alpha\gamma}\tau_\beta)\delta_{jk}\sigma_i]. \end{aligned} \quad (C.41)$$

Podemos, agora, escrever o resultado geral de produtos de três operadores D , que é a soma de (C.36) e (C.41),

$$\begin{aligned} \langle N|D_{\alpha i}D_{\beta j}D_{\gamma k}|N\rangle &= \frac{1}{6}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{ijk} \\ &- \frac{2}{15}(\delta_{\alpha\beta}\tau_\gamma\delta_{ij}\sigma_k + \delta_{\alpha\gamma}\tau_\beta\delta_{ik}\sigma_j + \delta_{\beta\gamma}\tau_\alpha\delta_{jk}\sigma_i) \\ &+ \frac{1}{30}(\delta_{\alpha\beta}\tau_\gamma\delta_{ik}\sigma_j + \delta_{\alpha\gamma}\tau_\beta\delta_{ij}\sigma_k \\ &+ \delta_{\alpha\beta}\tau_\gamma\delta_{jk}\sigma_i + \delta_{\beta\gamma}\tau_\alpha\delta_{ij}\sigma_k + \delta_{\alpha\gamma}\tau_\beta\delta_{jk}\sigma_k + \delta_{\beta\gamma}\tau_\alpha\delta_{ik}\sigma_j). \end{aligned} \quad (C.42)$$

Os estados $\frac{5}{2}$ aparecem nos elementos de matriz de quatro operadores D . Os nove valores esperados com todos os estados intermediários que podem contribuir neste caso são representados na Fig. C.3.

Fig. C.3: Possibilidades de transição pela atuação de quatro operadores D em estados de um nucleon. (Ver legenda da Fig. C.1.) $\frac{5}{2}$ é o multiplete de $I = \frac{5}{2}$.

A Fig. C.3 indica que o elemento de matriz total pode ser decomposto em três elementos, cada um representado pela inclusão de um conjunto completo intermediário central, de N , Δ e $\frac{5}{2}$, respectivamente.

O resultado do elemento de matriz correspondente à Fig. C.3 pode conter elementos do tipo

$$\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}, \quad (C.43)$$

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\delta_{\delta\lambda}\tau_{\lambda}, \quad (C.44)$$

com todas as permutações de índices possíveis, nos espaços de isospin e spin. Em cada espaço, há um total de três operadores do primeiro tipo e dez do segundo. Com o auxílio das identidades tensoriais abaixo,

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\delta_{\delta\lambda} = \epsilon_{\beta\gamma\lambda}\delta_{\alpha\delta} - \epsilon_{\alpha\gamma\lambda}\delta_{\beta\delta} + \epsilon_{\alpha\beta\lambda}\delta_{\gamma\delta},$$

$$\epsilon_{\alpha\beta\delta}\delta_{\gamma\lambda} = \epsilon_{\beta\delta\lambda}\delta_{\alpha\gamma} - \epsilon_{\alpha\delta\lambda}\delta_{\beta\gamma} + \epsilon_{\alpha\beta\lambda}\delta_{\gamma\delta},$$

$$\epsilon_{\alpha\gamma\delta}\delta_{\beta\lambda} = \epsilon_{\gamma\delta\lambda}\delta_{\alpha\beta} - \epsilon_{\alpha\delta\lambda}\delta_{\beta\gamma} + \epsilon_{\alpha\gamma\lambda}\delta_{\beta\delta},$$

$$\epsilon_{\beta\gamma\delta}\delta_{\alpha\lambda} = \epsilon_{\gamma\delta\lambda}\delta_{\alpha\beta} - \epsilon_{\beta\delta\lambda}\delta_{\alpha\gamma} + \epsilon_{\beta\gamma\lambda}\delta_{\alpha\delta},$$

$$\epsilon_{ijk}\delta_{lm} = \epsilon_{jkm}\delta_{il} - \epsilon_{ikm}\delta_{jl} + \epsilon_{ijm}\delta_{kl},$$

$$\epsilon_{ijl}\delta_{km} = \epsilon_{jlm}\delta_{ik} - \epsilon_{ilm}\delta_{jk} + \epsilon_{ijm}\delta_{kl},$$

$$\epsilon_{ikl}\delta_{jm} = \epsilon_{klm}\delta_{ij} - \epsilon_{ilm}\delta_{jk} + \epsilon_{ikm}\delta_{jl},$$

$$\epsilon_{jkl}\delta_{im} = \epsilon_{klm}\delta_{ij} - \epsilon_{jlm}\delta_{ik} + \epsilon_{jkm}\delta_{il},$$

os operadores do tipo (C.44) com o índice da matriz τ no delta de Kronecker são eliminados, restando seis operadores independentes deste tipo.

Usamos também a simetria entre os espaços de spin e isospin, e escrevemos a forma geral para o valor esperado de quatro operadores D ,

A tabela C.1 apresenta o conjunto dos coeficientes b_{pq} definidos em (C.45). Os valores ali apresentados foram calculados com o auxílio de várias simetrias, como indicado na parte final deste Apêndice. Assim, a forma (C.45) reduz-se a

$$\begin{aligned}
 & \langle N | D_{\alpha i} D_{\beta j} D_{\gamma k} D_{\delta l} | N \rangle \\
 &= \frac{2}{15} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \delta_{il} \delta_{jk}) \\
 &- \frac{1}{30} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} \delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \delta_{ij} \delta_{kl} \\
 &+ \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} \delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \delta_{ik} \delta_{jl}) \\
 &- \frac{1}{10} (\epsilon_{\alpha\beta\lambda} \delta_{\gamma\delta} \tau_{\lambda} \epsilon_{ijm} \delta_{kl} \sigma_m + \epsilon_{\alpha\gamma\lambda} \delta_{\beta\delta} \tau_{\lambda} \epsilon_{ikm} \delta_{jl} \sigma_m + \epsilon_{\alpha\delta\lambda} \delta_{\beta\gamma} \tau_{\lambda} \epsilon_{ilm} \delta_{jk} \sigma_m \\
 &+ \epsilon_{\beta\gamma\lambda} \delta_{\alpha\delta} \tau_{\lambda} \epsilon_{jkm} \delta_{il} \sigma_m + \epsilon_{\beta\delta\lambda} \delta_{\alpha\gamma} \tau_{\lambda} \epsilon_{jlm} \delta_{ik} \sigma_m + \epsilon_{\gamma\delta\lambda} \delta_{\alpha\beta} \tau_{\lambda} \epsilon_{klm} \delta_{ij} \sigma_m) \\
 &+ \frac{1}{30} (\epsilon_{\alpha\beta\lambda} \delta_{\gamma\delta} \tau_{\lambda} \epsilon_{ikm} \delta_{jl} \sigma_m + \epsilon_{\alpha\gamma\lambda} \delta_{\beta\delta} \tau_{\lambda} \epsilon_{ijm} \delta_{kl} \sigma_m + \epsilon_{\alpha\beta\lambda} \delta_{\gamma\delta} \tau_{\lambda} \epsilon_{ilm} \delta_{jk} \sigma_m + \epsilon_{\alpha\delta\lambda} \delta_{\beta\gamma} \tau_{\lambda} \epsilon_{ijm} \delta_{kl} \sigma_m \\
 &- \epsilon_{\alpha\beta\lambda} \delta_{\gamma\delta} \tau_{\lambda} \epsilon_{jkm} \delta_{il} \sigma_m - \epsilon_{\beta\gamma\lambda} \delta_{\alpha\delta} \tau_{\lambda} \epsilon_{ijm} \delta_{kl} \sigma_m - \epsilon_{\alpha\beta\lambda} \delta_{\gamma\delta} \tau_{\lambda} \epsilon_{jlm} \delta_{ik} \sigma_m - \epsilon_{\beta\delta\lambda} \delta_{\alpha\gamma} \tau_{\lambda} \epsilon_{ijm} \delta_{kl} \sigma_m \\
 &+ \epsilon_{\alpha\gamma\lambda} \delta_{\beta\delta} \tau_{\lambda} \epsilon_{ilm} \delta_{jk} \sigma_m + \epsilon_{\alpha\delta\lambda} \delta_{\beta\gamma} \tau_{\lambda} \epsilon_{ikm} \delta_{jl} \sigma_m + \epsilon_{\alpha\gamma\lambda} \delta_{\beta\delta} \tau_{\lambda} \epsilon_{jkm} \delta_{il} \sigma_m + \epsilon_{\beta\gamma\lambda} \delta_{\alpha\delta} \tau_{\lambda} \epsilon_{ikm} \delta_{jl} \sigma_m \\
 &- \epsilon_{\alpha\gamma\lambda} \delta_{\beta\delta} \tau_{\lambda} \epsilon_{klm} \delta_{ij} \sigma_m - \epsilon_{\gamma\delta\lambda} \delta_{\alpha\beta} \tau_{\lambda} \epsilon_{ikm} \delta_{jl} \sigma_m + \epsilon_{\alpha\delta\lambda} \delta_{\beta\gamma} \tau_{\lambda} \epsilon_{jlm} \delta_{ik} \sigma_m + \epsilon_{\beta\delta\lambda} \delta_{\alpha\gamma} \tau_{\lambda} \epsilon_{ilm} \delta_{jk} \sigma_m \\
 &+ \epsilon_{\alpha\delta\lambda} \delta_{\beta\gamma} \tau_{\lambda} \epsilon_{klm} \delta_{ij} \sigma_m + \epsilon_{\gamma\delta\lambda} \delta_{\alpha\beta} \tau_{\lambda} \epsilon_{ilm} \delta_{jk} \sigma_m + \epsilon_{\beta\gamma\lambda} \delta_{\alpha\delta} \tau_{\lambda} \epsilon_{jlm} \delta_{ik} \sigma_m + \epsilon_{\beta\delta\lambda} \delta_{\alpha\gamma} \tau_{\lambda} \epsilon_{jkm} \delta_{il} \sigma_m \\
 &- \epsilon_{\beta\gamma\lambda} \delta_{\alpha\delta} \tau_{\lambda} \epsilon_{klm} \delta_{ij} \sigma_m - \epsilon_{\gamma\delta\lambda} \delta_{\alpha\beta} \tau_{\lambda} \epsilon_{jkm} \delta_{il} \sigma_m + \epsilon_{\beta\delta\lambda} \delta_{\alpha\gamma} \tau_{\lambda} \epsilon_{klm} \delta_{ij} \sigma_m + \epsilon_{\gamma\delta\lambda} \delta_{\alpha\beta} \tau_{\lambda} \epsilon_{jlm} \delta_{ik} \sigma_m) .
 \end{aligned}
 \tag{C.46}$$

Na realidade, a estrutura (C.45) é geral, e cada uma das linhas da Fig. C.3 pode ser escrita naquela forma. Calculamos também os coeficientes b_{pq} dos elementos de matriz

$$\langle N | D_{\alpha i} D_{\beta j} | N \rangle \langle N | D_{\gamma k} D_{\delta l} | N \rangle,$$

$$\langle N | D_{\alpha i} D_{\beta j} | \Delta \rangle \langle \Delta | D_{\gamma k} D_{\delta l} | N \rangle,$$

$$\langle N | D_{\alpha i} D_{\beta j} | \frac{5}{2} \rangle \langle \frac{5}{2} | D_{\gamma k} D_{\delta l} | N \rangle,$$

representados, respectivamente, pelas linhas de N , Δ e $\frac{5}{2}$ intermediários centrais da Fig. C.3. Os resultados são apresentados nas tabelas C.2, C.3 e C.4, respectivamente. O primeiro destes elementos de matriz foi calculado a partir do resultado (C.30). O segundo, de maneira semelhante. O terceiro foi calculado como a subtração da tabela C.1 pela soma das tabelas C.2 e C.3.

$p \backslash q$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	$\frac{2}{15}$	$-\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{30}$	0	0	0	0	0	0
2		$\frac{2}{15}$	$-\frac{1}{30}$	0	0	0	0	0	0
3			$\frac{2}{15}$	0	0	0	0	0	0
4				$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{30}$	0
5					$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	0	$-\frac{1}{30}$
6						$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$
7							$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{30}$
8								$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{30}$
9									$-\frac{1}{10}$

Tabela C.1: Coeficientes b_{pq} da expressão (C.45), para o cálculo de $\langle N | D_{\alpha i} D_{\beta j} D_{\gamma k} D_{\delta l} | N \rangle$.

Aplicação: estados intermediários no caso $B = 1$

Consideramos a lagrangiana de Skyrme na forma (3.5). A quantização de $\mathcal{L}_2$ pode ser escrita como

$$\mathcal{L}_2^q = -\frac{f_\pi^2}{2} D_{\alpha a} D_{\beta b} L_{a i} L_{b i} \delta_{\alpha \beta}, \quad (\text{C.47})$$

envolvendo o produto de dois operadores D e, portanto, as duas linhas do esquema da Fig. C.1a, quando calculado o seu valor esperado em estados de um nucleon.

A linha de N intermediário é obtida multiplicando-se (C.32) por $\delta_{\alpha \beta}$. Fazendo o mesmo em (C.33), obtém-se a linha de Δ intermediário. Os resultados são

$$\langle N | D_{\alpha a} | N \rangle \langle N | D_{\alpha b} | N \rangle = \frac{1}{3} \delta_{ab} + \frac{i}{3} \epsilon_{abm} \sigma_m. \quad (\text{C.48})$$

$p \backslash q$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	$\frac{1}{9}$	0	0	0	0	0	0	0	0
2		$\frac{1}{36}$	$-\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{36}$	$-\frac{1}{36}$	$-\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0
3			$\frac{1}{36}$	0	$-\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$-\frac{1}{36}$	0
4				$-\frac{1}{18}$	0	0	0	0	0
5					$-\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$-\frac{1}{36}$	0
6						$-\frac{1}{36}$	$-\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0
7							$-\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0
8								$-\frac{1}{36}$	0
9									$-\frac{1}{18}$

Tabela C.2: Coeficientes b_{pq} da expressão (C.45), para o cálculo da linha de nucleon intermediário central da Fig. C.3, $\langle N | D_{\alpha i} D_{\beta j} | N \rangle \langle N | D_{\gamma k} D_{\delta l} | N \rangle$.

$p \backslash q$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	$\frac{2}{225}$	$-\frac{1}{75}$	$-\frac{1}{75}$	0	$-\frac{1}{150}$	$-\frac{1}{150}$	$-\frac{1}{150}$	$-\frac{1}{150}$	0
2		$\frac{17}{225}$	$-\frac{8}{225}$	0	$-\frac{4}{225}$	$\frac{17}{450}$	$\frac{17}{450}$	$-\frac{4}{225}$	0
3			$\frac{17}{225}$	0	$\frac{17}{450}$	$-\frac{4}{225}$	$-\frac{4}{225}$	$\frac{17}{450}$	0
4				$-\frac{2}{45}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{30}$	0
5					$-\frac{31}{450}$	$\frac{2}{225}$	$\frac{2}{225}$	$\frac{7}{225}$	$-\frac{1}{30}$
6						$-\frac{31}{450}$	$\frac{7}{225}$	$\frac{2}{225}$	$\frac{1}{30}$
7							$-\frac{31}{450}$	$\frac{2}{225}$	$-\frac{1}{30}$
8								$-\frac{31}{450}$	$\frac{1}{30}$
9									$-\frac{2}{45}$

Tabela C.3: Coeficientes b_{pq} da expressão (C.45), para o cálculo da linha de delta intermediário central, da Fig. C.3, $\langle N | D_{\alpha i} D_{\beta j} | \Delta \rangle \langle \Delta | D_{\gamma k} D_{\delta l} | N \rangle$.

$p \backslash q$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	$\frac{1}{75}$	$-\frac{1}{50}$	$-\frac{1}{50}$	0	$\frac{1}{150}$	$\frac{1}{150}$	$\frac{1}{150}$	$\frac{1}{150}$	0
2		$\frac{3}{100}$	$\frac{3}{100}$	0	$-\frac{1}{100}$	$-\frac{1}{100}$	$-\frac{1}{100}$	$-\frac{1}{100}$	0
3			$\frac{3}{100}$	0	$-\frac{1}{100}$	$-\frac{1}{100}$	$-\frac{1}{100}$	$-\frac{1}{100}$	0
4				0	0	0	0	0	0
5					$-\frac{1}{300}$	$-\frac{1}{300}$	$-\frac{1}{300}$	$-\frac{1}{300}$	0
6						$-\frac{1}{300}$	$-\frac{1}{300}$	$-\frac{1}{300}$	0
7							$-\frac{1}{300}$	$-\frac{1}{300}$	0
8								$-\frac{1}{300}$	0
9									0

Tabela C.4: Coeficientes b_{pq} da expressão (C.45), para o cálculo da linha de $I = \frac{5}{2}$ intermediário, da Fig. C.3, $\langle N | D_{\alpha i} D_{\beta j} | \frac{5}{2} \rangle \langle \frac{5}{2} | D_{\gamma k} D_{\delta l} | N \rangle$.

$$\langle N|D_{\alpha a}|\Delta\rangle\langle\Delta|D_{\alpha b}|N\rangle = \frac{2}{3}\delta_{ab} - \frac{i}{3}\epsilon_{abm}\sigma_m. \quad (\text{C.49})$$

A partir das expressões acima, vemos que o resultado correto para o caso $\mathcal{L}_2$ provém da soma das contribuições de estados intermediários de nucleons e deltas.

No caso de $\mathcal{L}_4$, temos o produto de quatro operadores D :

$$\mathcal{L}_4^q = -\frac{1}{4e^2} [D_{\alpha a}D_{\beta b}D_{\gamma c}D_{\delta d} - D_{\alpha a}D_{\beta c}D_{\gamma b}D_{\delta d}] L_{ai}L_{bi}L_{cj}L_{dj}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}, \quad (\text{C.50})$$

e chamaremos $\Theta_{abcd}^{\alpha\beta\gamma\delta}$ a expressão entre colchetes.

Em termos dos parâmetros b_{pq} , definidos em (C.45), temos

$$\begin{aligned} \Theta_{abcd}^{\alpha\beta\gamma\delta}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} = & 3\{(3b_{11} - 2b_{12} - b_{22} + b_{13} - b_{23})(\delta_{ab}\delta_{cd} - \delta_{ac}\delta_{bd}) \\ & + i\sigma_m[(3b_{14} - 3b_{15} + b_{24} - b_{25} + b_{34} - b_{35})(\epsilon_{abm}\delta_{cd} - \epsilon_{acm}\delta_{bd}) \\ & + 2(3b_{17} + b_{27} + b_{37})\epsilon_{bcm}\delta_{ad} \\ & + (3b_{18} - 3b_{19} + b_{28} - b_{29} + b_{38} - b_{39})(\epsilon_{bdm}\delta_{ac} - \epsilon_{cdm}\delta_{ab})\}. \end{aligned} \quad (\text{C.51})$$

O resultado correto para a expressão acima é $(\delta_{ab}\delta_{cd} - \delta_{ac}\delta_{bd})$, que é de fato obtido usando os coeficientes da tabela C.1. Por outro lado, utilizando os coeficientes da tabela C.2, que incorporam os diagramas com nucleon central, apenas, a expressão correta também é obtida; os resultados com os coeficientes das tabelas C.3 e C.4 são ambos nulos, mostrando que estados intermediários centrais de delta e $I = \frac{5}{2}$ não contribuem. Podemos considerar, ainda, a contribuição da primeira linha do diagrama da Fig. C.3, que só contém nucleons intermediários. Este diagrama vale

$$\begin{aligned} \langle N|D_{\alpha i}|N\rangle\langle N|D_{\beta j}|N\rangle\langle N|D_{\gamma k}|N\rangle\langle N|D_{\delta l}|N\rangle &= \frac{1}{81} [\tau_\alpha\tau_\beta\tau_\gamma\tau_\delta] [\sigma_i\sigma_j\sigma_k\sigma_l] \\ &= \frac{1}{81} [\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} - \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} + i(\epsilon_{\gamma\delta\lambda}\delta_{\alpha\beta}\tau_\lambda + \epsilon_{\alpha\beta\lambda}\delta_{\gamma\delta}\tau_\lambda + \epsilon_{\beta\gamma\delta}\tau_\alpha - \epsilon_{\alpha\gamma\delta}\tau_\beta)] \\ &\times [\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} + i(\epsilon_{klm}\delta_{ij}\sigma_m + \epsilon_{ijm}\delta_{kl}\sigma_m + \epsilon_{jkl}\sigma_i - \epsilon_{ikl}\sigma_j)]. \end{aligned} \quad (\text{C.52})$$

Aplicando o resultado acima em (C.50), temos

$$\begin{aligned} \Theta_{abcd}^{\alpha\beta\gamma\delta}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} = & \frac{2}{9} \{(\delta_{ab}\delta_{cd} - \delta_{ac}\delta_{bd}) \\ & + i\sigma_m(\epsilon_{abm}\delta_{cd} - \epsilon_{acm}\delta_{bd} + \epsilon_{bcm}\delta_{ad} - \epsilon_{bdm}\delta_{ac} + \epsilon_{cdm}\delta_{ab})\}, \end{aligned}$$

que também difere do resultado correto. Isto mostra que, apesar de apenas a linha total de nucleon intermediário central - a primeira das três linhas básicas da Fig. C.3 - contribuir para a quantização de $\mathcal{L}_4$, nos produtos de dois operadores D as transições para Δ também são relevantes, como no caso de $\mathcal{L}_2$.

Mostramos assim que, no caso $B = 1$, os estados não-físicos de $I = \frac{5}{2}$ realmente não contribuem, o que reforça a coerência do modelo.

Cálculo de $\langle N | D_{\alpha i} D_{\beta j} D_{\gamma k} D_{\delta l} | N \rangle$

Para o cálculo dos coeficientes da tabela C.1, foram utilizadas as simetrias do produto de quatro operadores D e o resultado conhecido para o valor esperado de dois operadores D . Apresentamos resumidamente o procedimento realizado.

A ordem do produto dos D 's não altera o valor esperado. Assim, escolhemos elementos $D_{\lambda m}$'s específicos, calculamos as várias permutações, a partir de (C.45), e igualamos os resultados. As várias operações realizadas são indicadas a seguir.

1. por exemplo, $\langle N | D_{12} D_{13} D_{12} D_{13} | N \rangle$ deve ser equivalente a $\langle N | D_{12} D_{12} D_{13} D_{13} | N \rangle$; substituindo estes índices em (C.45), temos

$$b_{22} + b_{23} = b_{11} + b_{13};$$

outras permutações deste tipo fornecem, também,

$$b_{11} + b_{12} = b_{33} + b_{23},$$

$$b_{22} + b_{12} = b_{33} + b_{13};$$

2. usando a igualdade entre permutações de $\langle N | D_{11} D_{11} D_{22} D_{22} | N \rangle$, obtemos

$$b_{11} = b_{22} = b_{33} = C,$$

C uma constante. Associando este resultado aos do item anterior, temos

$$b_{12} = b_{13} = b_{23} = D,$$

D uma constante;

3. por exemplo,

$$\langle N|D_{12}D_{13}D_{21}D_{23}|N\rangle = \langle N|D_{12}D_{21}D_{13}D_{23}|N\rangle$$

fornece

$$b_{15} = b_{24};$$

fazendo todas as permutações possíveis, obtemos

$$b_{15} = b_{16} = b_{17} = b_{18} = 0,$$

$$b_{24} = b_{26} = b_{27} = b_{29} = 0,$$

$$b_{34} = b_{35} = b_{38} = b_{39} = 0;$$

4. da igualdade entre as permutações de $\langle N|D_{11}D_{11}D_{22}D_{23}|N\rangle$, obtemos

$$b_{14} = b_{25} = b_{36} = b_{37} = b_{28} = b_{19} = 0;$$

5. da igualdade entre as permutações de $\langle N|D_{12}D_{12}D_{21}D_{33}|N\rangle$, obtemos

$$b_{pp} = A, \quad p = 4 \dots 9,$$

A uma constante;

6. idem para $\langle N|D_{12}D_{21}D_{13}D_{31}|N\rangle$, obtemos

$$b_{49} = b_{58} = b_{67} = 0, \quad p = 4, 5, 6;$$

7. combinando os itens 5 e 6 com as permutações de $\langle N|D_{11}D_{11}D_{12}D_{23}|N\rangle$, obtemos

$$b_{45} = b_{46} = -b_{47} = -b_{48} = B,$$

$$b_{56} = b_{57} = b_{68} = b_{78} = B,$$

$$-b_{59} = b_{69} = -b_{79} = b_{89} = B,$$

B uma constante.

Multiplicando (C.45) por $\delta_{\gamma\delta}\delta_{kl}$, obtemos

$$3\langle N|D_{\alpha i}D_{\beta j}|N\rangle = (11C + 14D)\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij} + (13A + 24B)\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{ijk}\tau_{\lambda}\sigma_m.$$

Comparando com (C.30), temos

$$11C + 14D = 1, \quad (C.53)$$

$$13A + 24B = -\frac{1}{2}. \quad (C.54)$$

Multiplicando (C.45) por $\epsilon_{\alpha\beta\varphi}\epsilon_{rij}\epsilon_{\gamma\delta\mu}\epsilon_{skl}$, e usando a expressão (C.29), obtemos

$$\frac{2}{3}[2\delta_{\varphi\mu}\delta_{rs} - \epsilon_{\varphi\mu\lambda}\epsilon_{mrs}\tau_{\lambda}\sigma_m] = 8(C - D)\delta_{\varphi\mu}\delta_{rs} + 4(A - 2B)\epsilon_{\varphi\mu\lambda}\epsilon_{mrs}\tau_{\lambda}\sigma_m,$$

ou seja,

$$C - D = \frac{1}{6}, \quad (C.55)$$

$$A - 2B = -\frac{1}{6}. \quad (C.56)$$

Resolvendo este sistema, obtemos

$$A = -\frac{1}{10}, \quad B = -D = \frac{1}{30}, \quad C = \frac{2}{15},$$

que fornecem os valores da tabela C.1.

Apêndice D

Integrais no ângulo azimutal

As integrais das componentes de

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z), \\ \mathbf{x} &= \left(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z + \frac{d}{2} \right), \\ \mathbf{y} &= \left(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z - \frac{d}{2} \right)\end{aligned}$$

e seus produtos têm de ser feitas componente a componente, e seus resultados são

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} d\phi x_m &= 2\pi x_z \delta_{m3}, \\ \int_0^{2\pi} d\phi y_m &= 2\pi y_z \delta_{m3}, \\ \int_0^{2\pi} d\phi x_m y_n &= \int_0^{2\pi} d\phi y_m x_n \\ &= \pi \rho^2 (\delta_{mn} - \delta_{m3} \delta_{n3}) + 2\pi x_z y_z \delta_{m3} \delta_{n3}, \\ \int_0^{2\pi} d\phi x_m x_n &= \pi \rho^2 (\delta_{mn} - \delta_{m3} \delta_{n3}) + 2\pi x_z^2 \delta_{m3} \delta_{n3}, \\ \int_0^{2\pi} d\phi y_m y_n &= \pi \rho^2 (\delta_{mn} - \delta_{m3} \delta_{n3}) + 2\pi y_z^2 \delta_{m3} \delta_{n3}, \\ \int_0^{2\pi} d\phi x_m r_n &= \int_0^{2\pi} d\phi r_m x_n \\ &= \pi \rho^2 (\delta_{mn} - \delta_{m3} \delta_{n3}) + 2\pi z x_z \delta_{m3} \delta_{n3}, \\ \int_0^{2\pi} d\phi y_m r_n &= \int_0^{2\pi} d\phi r_m y_n \\ &= \pi \rho^2 (\delta_{mn} - \delta_{m3} \delta_{n3}) + 2\pi z y_z \delta_{m3} \delta_{n3}.\end{aligned}$$

Considerando o tensor

$$T_{mn} = 3 \delta_{m3} \delta_{n3} - \delta_{mn} \tag{D.1}$$

e usando

$$\delta_{m3}\delta_{n3} = \frac{1}{3}(\delta_{mn} + T_{mn}), \quad (\text{D.2})$$

reescrevemos as integrais acima como

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\phi x_m \delta_{n3} &= \int_0^{2\pi} d\phi \delta_{m3} x_n = \frac{2}{3}\pi x_z (\delta_{mn} + T_{mn}), \\ \int_0^{2\pi} d\phi y_m \delta_{n3} &= \int_0^{2\pi} d\phi \delta_{m3} y_n = \frac{2}{3}\pi y_z (\delta_{mn} + T_{mn}), \\ \int_0^{2\pi} d\phi x_m y_n &= \frac{2}{3}\pi \left(\gamma \delta_{mn} + \left(\gamma - \frac{3}{2}\rho^2 \right) T_{mn} \right), \\ \int_0^{2\pi} d\phi x_m x_n &= \frac{2}{3}\pi \left(x^2 \delta_{mn} + \left(x^2 - \frac{3}{2}\rho^2 \right) T_{mn} \right), \\ \int_0^{2\pi} d\phi y_m y_n &= \frac{2}{3}\pi \left(y^2 \delta_{mn} + \left(y^2 - \frac{3}{2}\rho^2 \right) T_{mn} \right), \\ \int_0^{2\pi} d\phi x_m r_n &= \frac{2}{3}\pi \left((\rho^2 + zx_z) \delta_{mn} + \left(zx_z - \frac{1}{2}\rho^2 \right) T_{mn} \right), \\ \int_0^{2\pi} d\phi x_m r_n &= \frac{2}{3}\pi \left((\rho^2 + zy_z) \delta_{mn} + \left(zy_z - \frac{1}{2}\rho^2 \right) T_{mn} \right), \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

onde $\gamma = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \rho^2 + x_z y_z$. Note-se que todas as expressões são simétricas nos índices m, n .

Considerando o produto vetorial

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \rho d (-\sin \phi, \cos \phi, 0), \quad (\text{D.4})$$

calculamos as integrais

$$\int_0^{2\pi} d\phi x_m (\mathbf{x} \times \mathbf{y})_n = \int_0^{2\pi} d\phi y_m (\mathbf{x} \times \mathbf{y})_n = \pi \rho^2 d \epsilon_{mn3}. \quad (\text{D.5})$$

As integrais que envolvem os tensores de Levi-Civita são reduzidas a combinações das integrais apresentadas acima, pelo uso da forma explícita do produto dos tensores,

$$\begin{aligned} \epsilon_{ikm} \epsilon_{jln} &= \delta_{ij} (\delta_{kl} \delta_{mn} - \delta_{kn} \delta_{lm}) \\ &+ \delta_{il} (\delta_{kn} \delta_{jm} - \delta_{jk} \delta_{mn}) \\ &+ \delta_{in} (\delta_{jk} \delta_{lm} - \delta_{kl} \delta_{jm}). \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Os vários termos podem ser reduzidos às seguintes integrais, pela propriedade antissimétrica

dos tensores:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ikm}\epsilon_{jln} \int_0^{2\pi} d\phi x_i x_j y_k y_l &= \frac{2}{3}\pi \left[(x^2 y^2 - \gamma^2) \delta_{mn} \right. \\
&\quad \left. + \left(2\gamma \left(\gamma - \frac{3}{2}\rho^2 \right) - x^2 \left(y^2 - \frac{3}{2}\rho^2 \right) - y^2 \left(x^2 - \frac{3}{2}\rho^2 \right) \right) T_{mn} \right], \\
\epsilon_{ikm}\epsilon_{jln} \int_0^{2\pi} d\phi x_i \delta_{j3} y_k y_l &= \frac{2}{3}\pi \left(\rho^2 d\delta_{mn} - \frac{1}{2}\rho^2 dT_{mn} \right), \\
\epsilon_{ikm}\epsilon_{jln} \int_0^{2\pi} d\phi x_i x_j \delta_{k3} y_l &= \frac{2}{3}\pi \left(-\rho^2 d\delta_{mn} + \frac{1}{2}\rho^2 dT_{mn} \right), \\
\epsilon_{ikm}\epsilon_{jln} \int_0^{2\pi} d\phi x_i \delta_{j3} \delta_{k3} y_l &= \frac{2}{3}\pi \left[(x_z y_z - \rho^2) \delta_{mn} + \frac{1}{2} \left(x_z y_z + \frac{1}{2}\rho^2 \right) T_{mn} \right].
\end{aligned} \tag{D.7}$$

Utilizando as integrais (D.3), calculamos as seguintes integrais auxiliares:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} d\phi (\gamma \delta_{mn} - x_n y_m) &= \frac{2}{3}\pi \left[2\gamma \delta_{mn} - \left(x_z y_z - \frac{1}{2}\rho^2 \right) T_{mn} \right], \\
\int_0^{2\pi} d\phi [(\rho^2 + z x_z) \delta_{mn} - x_n r_m] &= \frac{2}{3}\pi \left[2(\rho^2 + z x_z) \delta_{mn} - \left(z x_z - \frac{1}{2}\rho^2 \right) T_{mn} \right], \\
\int_0^{2\pi} d\phi [(\rho^2 + z y_z) \delta_{mn} - r_n y_m] &= \frac{2}{3}\pi \left[2(\rho^2 + z y_z) \delta_{mn} - \left(z y_z - \frac{1}{2}\rho^2 \right) T_{mn} \right], \\
\int_0^{2\pi} d\phi (x_z \delta_{mn} - x_n \delta_{m3}) &= \frac{2}{3}\pi [2x_z \delta_{mn} - x_z T_{mn}], \\
\int_0^{2\pi} d\phi (y_z \delta_{mn} - y_m \delta_{n3}) &= \frac{2}{3}\pi [2y_z \delta_{mn} - y_z T_{mn}], \\
\int_0^{2\pi} d\phi (x_m y_n - x_z \delta_{m3} y_n) &= \int_0^{2\pi} d\phi (x_m y_n - y_z x_m \delta_{n3}) \\
&= \int_0^{2\pi} d\phi (x_m x_n - x_z x_m \delta_{n3}) = \int_0^{2\pi} d\phi (y_m y_n - y_z \delta_{m3} y_n) = \frac{2}{3}\pi \rho^2 \left[\delta_{mn} - \frac{1}{2} T_{mn} \right], \\
\int_0^{2\pi} d\phi (x_m \delta_{n3} + \delta_{m3} y_n - 2z \delta_{m3} \delta_{n3}) &= 0, \\
\int_0^{2\pi} d\phi (x_m y_n - y_z x_m \delta_{n3} - x_z \delta_{m3} y_n + x_z y_z \delta_{m3} \delta_{n3}) &= \frac{2}{3}\rho^2 \pi \left[\delta_{mn} - \frac{1}{2} T_{mn} \right], \\
\int_0^{2\pi} d\phi (x_m y_n + x_z \delta_{m3} y_n) &= \int_0^{2\pi} d\phi (x_m y_n + y_z x_m \delta_{n3}) \\
&= \frac{2}{3}\pi \left[(\gamma + x_z y_z) \delta_{mn} + \left(2x_z y_z - \frac{1}{2}\rho^2 \right) T_{mn} \right].
\end{aligned} \tag{D.8}$$

Apêndice E

O espalhamento píon-nucleon a baixas energias

Apresentamos, neste apêndice, o estudo da amplitude de espalhamento píon-nucleon (πN) no contexto da teoria de campos e uma análise das amplitudes de ondas parciais*. Ele permitiu, principalmente, a compreensão do papel da simetria quiral nos cancelamentos que ocorrem no setor do nucleon do espalhamento πN . Os outros setores são incorporados via os coeficientes HJS [Hoh 83], que são obtidos dos dados experimentais por meio de relações de dispersão.

A interação πN é básica para a física nuclear por ser o píon o méson mais leve e o nucleon, o mais leve dos bárions. Consideramos, aqui, o espalhamento πN no regime elástico, ou seja, abaixo do limiar de produção de um píon, correspondente ao processo $\pi N \rightarrow \pi \pi N$. No referencial do centro de massa, isto ocorre a partir de momentos iguais a 215 MeV. Segundo a teoria de campos, o espalhamento na região predominantemente elástica é dominado por poucos processos, envolvendo nucleons, deltas e ressonâncias mesônicas [Men 85]. O uso da simetria quiral é fundamental para o tratamento teórico do problema. Ela é especialmente relevante nos processos envolvendo apenas píons e nucleons, que tratamos em maior detalhe.

*Os programas para os cálculos apresentados neste apêndice foram desenvolvidos em colaboração com Varese Salvador Timóteo (Instituto de Física, Universidade de São Paulo).

Cinemática

Os momentos e as componentes z de isospin dos píons incidente e emergente são representados por k , α , k' e β , respectivamente, sendo p e p' os momentos dos nucleons incidente e emergente.

Fig. E.1: Variáveis do espalhamento elástico πN . p, p' são os quadrimomentos dos nucleons, k, k' , dos píons e α, β , as terceiras componentes de isospin destes.

No referencial do centro de massa (CMS), as variáveis cinemáticas para partículas na camada de massa são dadas por

$$p = (E, \mathbf{p}),$$

$$p' = (E, \mathbf{p}'),$$

$$k = (\omega, \mathbf{k}),$$

$$k' = (\omega, \mathbf{k}'),$$

onde

$$\mathbf{k} = -\mathbf{p},$$

$$\mathbf{k}' = -\mathbf{p}',$$

$$|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| = |\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'| = q,$$

$$E = \sqrt{M^2 + q^2},$$

$$\omega = \sqrt{\mu^2 + q^2}$$

e M e μ são as massas do nucleon e píon, respectivamente, para as quais adotamos os valores [Hoh 83] $M = 938.28$ MeV, $\mu = 139.57$ MeV. A energia do centro de massa é

$$W = \sqrt{s} = E + \omega.$$

É conveniente a utilização dos invariantes de Mandelstam

$$s = (p + k)^2 = (p' + k')^2,$$

$$t = (p - p')^2 = (k - k')^2,$$

$$u = (p - k')^2 = (p' - k)^2$$

e do invariante simétrico por cruzamento (troca de píons inicial e final),

$$\nu = \frac{s - u}{4M} = \frac{(p + p') \cdot (k + k')}{4M}.$$

O limiar da reação πN ocorre para $W = M + \mu = 1078$ MeV e a produção de um pión, a partir de $W = M + 2\mu = 1217$ MeV ($q \sim 215$ MeV). Portanto, este estudo restringe-se à região de momento no centro de massa $0 < q < 250$ MeV, em que o espalhamento pode ser considerado elástico. Os resultados apresentados para momentos acima deste limite são apenas ilustrativos, pois aí passam a ser importantes os canais inelásticos.

Formalismo

No sistema do centro de massa, a seção de choque para o espalhamento πN é dada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(8\pi W)^2} |T|^2, \quad (\text{E.1})$$

onde T é a amplitude. De modo muito geral, podemos escrever:

$$T_{\beta\alpha} = \bar{N}(p') M_{\beta\alpha} N(p), \quad (\text{E.2})$$

onde $N(p')$ e $N(p)$ representam as funções de onda dos nucleons e $M_{\beta\alpha}$ é uma matriz 4×4 no espaço de spin e 2×2 no espaço de isospin (do nucleon).

Utilizando a equação de Dirac e as conservações de energia-momento e paridade, podemos mostrar [Gas 66] que a forma geral da matriz $M_{\beta\alpha}$, no espaço de spin, é

$$M_{\beta\alpha} = A_{\beta\alpha} + \frac{k + k'}{2} B_{\beta\alpha}, \quad (\text{E.3})$$

onde $\not{k}$ é a contração do quadrivetor k com as matrizes de Dirac, dada por

$$\not{k} = k_\mu \gamma^\mu = \begin{pmatrix} k_0 & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} & -k_0 \end{pmatrix}.$$

No espaço de isospin, as amplitudes A e B são escritas como

$$\begin{aligned} A_{\beta\alpha} &= A^+ \delta_{\beta\alpha} + A^- \frac{1}{2} [\tau_\beta, \tau_\alpha], \\ B_{\beta\alpha} &= B^+ \delta_{\beta\alpha} + B^- \frac{1}{2} [\tau_\beta, \tau_\alpha], \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

onde as amplitudes escalares A^+ , B^+ e A^- , B^- representam, respectivamente, as partes pares e ímpares pela troca dos índices α e β .

A amplitude πN é invariante pela troca dos píons inicial e final, ou seja, pela operação $(k, \alpha) \leftrightarrow (k', \beta)$. Sendo as amplitudes resultantes desta troca indicadas pelo rótulo cr , temos as seguintes paridades por cruzamento para as amplitudes escalares:

$$\begin{aligned} A^{cr+} &= A^+, \\ A^{cr-} &= -A^-, \\ B^{cr+} &= -B^+, \\ B^{cr-} &= B^-. \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

As amplitudes também podem ser expressas em canais de isospin total bem definido, que pode valer $\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{2}$, neste problema. Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} A_{\beta\alpha} &= A^{\frac{1}{2}} \hat{P}_{\beta\alpha}^{\frac{1}{2}} + A^{\frac{3}{2}} \hat{P}_{\beta\alpha}^{\frac{3}{2}}, \\ B_{\beta\alpha} &= B^{\frac{1}{2}} \hat{P}_{\beta\alpha}^{\frac{1}{2}} + B^{\frac{3}{2}} \hat{P}_{\beta\alpha}^{\frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

onde $\hat{P}^{\frac{1}{2}}$ e $\hat{P}^{\frac{3}{2}}$ são projetores de isospin. Estes operadores podem ser obtidos notando-se que o isospin total é a soma dos isospins do píon e do nucleon:

$$\mathbf{T} = \mathbf{t}_\pi + \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau},$$

onde $(t_\pi^k)_{ij} = -i \epsilon_{ijk}$ e $\boldsymbol{\tau}$ são as matrizes de Pauli. Tomando-se o quadrado da expressão de T , obtém-se $\mathbf{t}_\pi \cdot \boldsymbol{\tau}$ em função dos autovalores de T , o que permite escrever os operadores de

projeção dos canais de isospin total da seguinte maneira:

$$P_{\beta\alpha}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}(\delta_{\beta\alpha} + \frac{1}{2}[\tau_{\beta}, \tau_{\alpha}]),$$

$$P_{\beta\alpha}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(2\delta_{\beta\alpha} - \frac{1}{2}[\tau_{\beta}, \tau_{\alpha}]),$$

onde cada elemento $(\beta\alpha)$ é uma matriz 2×2 no espaço de isospin do nucleon. Comparando com (E.4), obtemos as seguintes relações entre as amplitudes escalares $(+, -)$ e $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$:

$$X^{\frac{1}{2}} = X^{+} + 2X^{-},$$

$$X^{\frac{3}{2}} = X^{+} - X^{-}, \quad (\text{E.6})$$

onde X é A ou B . O mesmo tipo de decomposição vale para a matriz M e a amplitude T .

Para o estudo do espalhamento acima do limiar, é conveniente o uso das amplitudes normalizadas $F^{\frac{1}{2}}$ e $F^{\frac{3}{2}}$, definidas de tal modo que a seção de choque diferencial para o canal de isospin I seja dada por

$$\frac{d\sigma^I}{d\Omega} = |F^I(W, \theta)|^2. \quad (\text{E.7})$$

Comparando com (E.1), obtemos

$$F^I = \frac{1}{8\pi W} T^I. \quad (\text{E.8})$$

Os dados de um experimento de espalhamento são normalmente analisados em canais de momento angular bem definido, pois aí se observam as ressonâncias. Eles são expressos em termos das chamadas amplitudes de ondas parciais, que são funções apenas da energia. Como o nucleon tem spin $\frac{1}{2}$, temos duas amplitudes de ondas parciais para cada valor de l , correspondentes a momentos angulares totais $J = l \pm \frac{1}{2}$. A expansão da amplitude $F^I(W, \theta)$ em ondas parciais é dada por

$$F^I(W, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [f_{l-}^I(W) \hat{P}_{J=l-\frac{1}{2}} + f_{l+}^I(W) \hat{P}_{J=l+\frac{1}{2}}] P_l(\cos \theta), \quad (\text{E.9})$$

onde $P_l(\cos \theta)$ são os polinômios de Legendre e os $\hat{P}_{J=l\pm\frac{1}{2}}$ correspondem a operadores de projeção em canais de momento angular bem definido. As amplitudes de ondas parciais são usualmente denominadas por uma letra correspondente ao momento angular orbital l ($l = 0, 1, 2, 3, \dots$ correspondem às letras $l = S, P, D, F, \dots$) e por $2J$, para o momento angular total[†]. Explicitando

[†]Por exemplo, a amplitude f_{1+} é representada por $P3$.

a forma dos projetores acima e considerando a sua atuação sobre os polinômios de Legendre, podemos escrever a amplitude F^I na forma

$$F^I(W, \theta) = G^I(W, \theta) + i \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} H^I(W, \theta), \quad (\text{E.10})$$

sendo $\hat{\mathbf{n}}$ o versor normal ao plano de espalhamento e

$$\begin{aligned} G^I(W, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} [l f_{l-}^I(W) + (l+1) f_{l+}^I(W)] P_l(\cos \theta), \\ H^I(W, \theta) &= - \sum_{l=0}^{\infty} [f_{l-}^I(W) - f_{l+}^I(W)] P_l'(\cos \theta) \sin \theta. \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

Invertendo estes resultados, podemos obter as amplitudes de ondas parciais a partir de G e H :

$$f_{l\pm}^I(W) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \left\{ \left[G^I(W, \theta) + \frac{H^I(W, \theta)}{\tan \theta} \right] P_l(\cos \theta) - \frac{H^I(W, \theta)}{\sin \theta} P_{l\pm 1}(\cos \theta) \right\}. \quad (\text{E.12})$$

Os cálculos teóricos da amplitude πN são, em geral, baseados em modelos covariantes, de onde é fácil obter as amplitudes escalares $A^\pm$ e $B^\pm$. Para calcular as amplitudes de ondas parciais a partir destas amplitudes escalares, relacionamo-las com as amplitudes G e H . Para isso, é conveniente escrevermos $T_{\beta\alpha}$ em função dos spinores de duas componentes, usando as expressões explícitas das funções de onda dos nucleons, dadas por

$$N(p) = u(p) \otimes \eta = \frac{1}{\sqrt{E+M}} \begin{pmatrix} E+M \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \end{pmatrix} \chi \otimes \eta,$$

onde

$$\chi, \eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

χ no espaço de spin e η no de isospin. Usamos, ainda,

$$\bar{N}(p') = \bar{u}(p') \otimes \eta^\dagger = u^\dagger(p') \gamma^0 \otimes \eta^\dagger.$$

No centro de massa, obtemos

$$T^I(W, \theta) = 8\pi W \left[G^I(W, \theta) + i \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} H^I(W, \theta) \right],$$

com

$$\begin{aligned} G^I &= \frac{1}{8\pi W} \{ (E+M)[A^I + (W-M)B^I] + (E-M)[-A^I + (W+M)B^I] \cos \theta \}, \\ H^I &= \frac{1}{8\pi W} (E-M)[A^I - (W+M)B^I] \sin \theta. \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

Invertendo esta relação, obtemos

$$\begin{aligned}
 A^I(W, \theta) &= 4\pi \left\{ \frac{W + M}{E + M} G^I(W, \theta) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{(E - M) \sin \theta} \left[2W - (W + M) \left(1 - \frac{E - M}{E + M} \cos \theta \right) \right] H^I(W, \theta) \right\}, \quad (\text{E.14}) \\
 B^I(W, \theta) &= \frac{4\pi}{E + M} \left\{ G^I(W, \theta) - \left[\frac{E + M}{(E - M) \sin \theta} - \frac{1}{\tan \theta} \right] H^I(W, \theta) \right\}.
 \end{aligned}$$

A expressão que relaciona o modelo com as ondas parciais é

$$\begin{aligned}
 f_{l\pm}^I(W) &= \frac{1}{16\pi W} \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \left\{ (E + M) [A^I(W, \theta) + (W - M) B^I(W, \theta)] P_l(\cos \theta) \right. \\
 &\quad \left. + (E - M) [-A^I(W, \theta) + (W + M) B^I(W, \theta)] P_{l\pm 1}(\cos \theta) \right\}. \quad (\text{E.15})
 \end{aligned}$$

As amplitudes escalares A^I , B^I podem ser reconstruídas a partir das amplitudes de ondas parciais, substituindo-se as expressões (E.11) nas (E.14).

Outra definição conveniente para o estudo de espalhamentos em baixas energias é o comprimento de espalhamento. Ele é definido para cada momento angular l , a partir da expansão das amplitudes de ondas parciais perto do limiar ($q = 0$) como

$$a_{l\pm}^I = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{f_{l\pm}^I}{q^{2l}}. \quad (\text{E.16})$$

No caso da onda S ($l = 0$), o comprimento de espalhamento é a própria amplitude no limiar:

$$a^I = f_{0+}^I(q = 0).$$

Nesta energia, só existe a onda S (todas as outras amplitudes valem zero). Assim, o significado deste comprimento de espalhamento é o próprio raio da seção de choque (ou seja, o tamanho do nucleon visto pelo píon) no limite em que ambos estão parados. A seção de choque é $4\pi a^2$.

Dados experimentais e unitarização

O espalhamento elástico πN é bastante bem conhecido experimentalmente, através das reações $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p$; $\pi^- p \rightarrow \pi^- p$ e $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$. A partir de medidas de seção de choque diferencial, polarização, assimetria e rotação [Men 85], determinam-se as amplitudes G e H . a

partir das quais se obtêm as ondas parciais (Eq. E.12). Neste trabalho, utilizamos os dados compilados por Höhler [Hoh 83].

Os dados experimentais descrevem a interação na região física, acima do limiar da reação. Entretanto, gostaríamos de estender estas amplitudes para o estudo de processos como a força de três corpos pela troca de dois píons, a interação NN pela troca de dois píons (parte de médio alcance do potencial NN) e a quebra do dêuteron pelo píon (Fig. E.2).

Fig. E.2: A amplitude πN (desenho escuro) em outros processos: da esquerda para a direita, (a) componente de médio alcance do potencial NN (troca de dois píons); (b) espalhamento do dêuteron pelo píon; (c) força de três corpos pela troca de dois píons.

Nestes processos, píons virtuais participam da amplitude πN . Experimentalmente, esta amplitude está na região não-física, abaixo do limiar. Portanto, a amplitude experimental não pode ser aplicada diretamente nestes processos. Descrevemos a seguir o tratamento dado ao problema, acima e abaixo do limiar.

Acima do limiar

Da condição de unitariedade da matriz de espalhamento S , decorre que as amplitudes de ondas parciais, no regime elástico, podem ser escritas na forma

$$f_{l\pm}^I = \frac{e^{i\delta_{l\pm}^I}}{q} \sin \delta_{l\pm}^I,$$

onde $\delta_{l\pm}^I$ são chamadas defasagens. As amplitudes de ondas parciais obtidas a partir dos dados experimentais são apresentadas por meio das defasagens, ou por suas partes real e imaginária. Os cálculos efetuados neste trabalho, entretanto, por envolverem apenas diagramas de primeira ordem (árvore), fornecem amplitudes reais, que não podem ser descritas por meio

das defasagens. Ao invés de calcularmos os diagramas de ordem superior (com *loops*), eles são incluídos de uma maneira efetiva, através de métodos de unitarização.

O teorema óptico identifica a seção de choque total com a parte imaginária da amplitude de espalhamento, dando origem ao método das defasagens. A parte imaginária da amplitude seria dada pelo diagrama de segunda ordem, que é o diagrama de primeira ordem dobrado. Assim, ela é calculada como o quadrado da parte real. A inexatidão deste cálculo está no fato de que o diagrama de primeira ordem dobrado difere do de segunda ordem porque neste as partículas intermediárias (do *loop*) são virtuais. O método utilizado neste trabalho é o da matriz K . A idéia é semelhante, mas são incluídos todos os diagramas de ordem superior, numa soma infinita.

$$iqf = iqm + (iqm)^2 + (iqm)^3 + \dots$$

onde f é a amplitude unitarizada e m é a amplitude (real) calculada pelo modelo, apenas em primeira ordem. Assim,

$$f = \frac{m}{1 - iqm}. \quad (\text{E.17})$$

Para efeito de comparação, é preferível efetuar a “desunitarização” das amplitudes experimentais (complexas). Chamando a amplitude f de e e a amplitude real m de d , uma inversão de (E.17) fornece a seguinte relação entre a amplitude experimental e e a amplitude experimental desunitarizada d , que só possui parte real, uma vez que seja válida a relação de unitariedade:

$$d = \frac{e}{1 + iqe}. \quad (\text{E.18})$$

Escrevendo as partes real e imaginária de e , identificamos $K = \text{tg } \delta_{exp}$ com qd , que é comparado a qm . A razão entre as partes imaginária e real de f (ou e) é qm (ou K). A primeira consequência deste fato é que a unitarização não altera a amplitude no limiar. Além disso, os efeitos da unitarização são sensíveis apenas se a amplitude real calculada não é muito pequena. Isto pode ser observado na Fig. E.3 da primeira ressonância delta (onda P , spin $+\frac{1}{2}$, isospin $\frac{3}{2}$), que mostra a amplitude experimental (complexa) e a amplitude desunitarizada, que explode no pólo. Observamos que a amplitude desunitarizada se afasta da parte real da amplitude unitária (e) à medida que a parte imaginária começa a ser diferente de zero. A ressonância é caracterizada por um máximo na parte imaginária e parte real pequena. Esta ressonância

Fig. E.3: Onda $P3$: Ressonância $\Delta 1232$. Partes real (círculos) e imaginária (triângulos) da onda parcial experimental e a amplitude desunitarizada (losangos), em unidades do inverso da massa do píon μ , em função do momento no CMS, em MeV.

é particularmente muito bem definida, de modo que a parte real vai a zero na sua energia característica.

Perto do limiar, só as ondas parciais com l pequeno (S e P) contribuem. Para avaliar de maneira mais adequada o comportamento das ondas parciais nesta região, é feita uma expansão a baixos momentos:

$$\text{Re} \left(\frac{f_{l\pm}(q)}{q^{2l}} \right) = a_{l\pm} + b_{l\pm} q^2 + \dots \quad (\text{E.19})$$

onde os $a_{l\pm}$ são os comprimentos de espalhamento e os $b_{l\pm}$ os chamados alcances efetivos. Para estes cálculos, utilizamos os valores de a e b apresentados na Ref. [Hoh 83].

Abaixo do limiar

A região abaixo do limiar, ou seja, para valores de $W < M + \mu$, não pode ser atingida experimentalmente. Por isso, o teorema óptico não se aplica e as amplitudes não precisam ser unitárias, nesta região. Para usar as propriedades das funções analíticas, as amplitudes são estendidas para o plano complexo (das variáveis de Mandelstam) e supostas reais sobre o eixo real. No método escolhido [Hoh 83], as amplitudes escalares são expandidas em uma série de potências de ν e t , e o valor dos coeficientes dessa expansão são obtidos a partir dos dados acima do limiar, através de relações de dispersão. O método, entretanto, não pode ser aplicado diretamente às amplitudes experimentais porque na região abaixo do limiar existe o pólo do nucleon ($s = M^2$), que impossibilita a expansão em série de potências. O que se faz, então, é subtrair das amplitudes acima do limiar os diagramas que envolvem um nucleon intermediário. É preciso escolher um modelo teórico para o cálculo destes diagramas. No caso, subtraímos a chamada contribuição quiral mínima, representada por diagramas que envolvem apenas o pión e o nucleon, no contexto do modelo σ não-linear. O modelo teórico e o cálculo da contribuição quiral mínima são discutidos a seguir.

A lagrangiana do modelo

Antes do desenvolvimento da simetria quiral, na década de 60, a interação pión-nucleon costumava ser descrita pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = \bar{N}(i\not{\partial} - M)N - ig\bar{N}\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}\gamma_5 N + \mathcal{L}_{\text{mésons}}, \quad (\text{E.20})$$

onde o acoplamento πN é pseudo-escalar (PS) e g é a constante de acoplamento ($g \sim 13.50$).

Um dos modos de tornar esta lagrangiana invariante quiral consiste em se introduzir um outro méson, isoescalar, denominado σ , na lagrangiana. Neste caso, o termo de interação passa a ser

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -g\bar{N}[\sigma + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}\gamma_5]N. \quad (\text{E.21})$$

O estudo das conseqüências deste modelo, conhecido como σ linear, mostrou que a

simetria quiral é muito importante no espalhamento πN . Por outro lado, o méson σ nunca foi identificado experimentalmente. Este fato motivou a busca de uma outra realização da simetria quiral, que não envolvesse o méson σ , e que fornecesse os mesmos resultados. Isso foi conseguido com as realizações não-lineares, que podem ser obtidas a partir de uma transformação dos campos da lagrangiana do modelo σ linear. Uma possibilidade para a nova lagrangiana é

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}[i\not{\partial} - M]\psi - \bar{\psi}\gamma^\mu \frac{1}{4f_\pi^2(1 + \frac{\phi^2}{4f_\pi^2})} \boldsymbol{\tau} \cdot (\boldsymbol{\phi} \times \partial_\mu \boldsymbol{\phi}) \psi + \frac{g}{2M} \bar{\psi}\gamma^\mu \gamma_5 \frac{1}{1 + \frac{\phi^2}{4f_\pi^2}} \boldsymbol{\tau} \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\phi} \psi + \mathcal{L}_{\text{mésons}}, \quad (\text{E.22})$$

onde ψ e $\boldsymbol{\phi}$ são os campos do nucleon e do pión, respectivamente. Nesta representação, o campo do sigma não contribui para a realização da simetria quiral e, portanto, não precisa ser considerado. Nesta lagrangiana, o acoplamento πN , dado pelo terceiro termo, é pseudo-vetorial (PV).

Desta lagrangiana extraímos as seguintes regras de Feynman, que são utilizadas nos nossos cálculos. O propagador do nucleon e as funções de onda são

$$\begin{array}{ccc} \bullet \text{-----} \bullet & \bullet \text{-----} & \bullet \text{-----} \\ \frac{\not{p} + M}{p^2 - M^2}, & u(p) \otimes \eta_t, & 1, \end{array}$$

onde o índice t é a componente z de isospin do nucleon. Os vértices são

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} k \\ \alpha \end{array} \text{---} \text{---} \text{---} & \begin{array}{c} k \quad k' \\ \alpha \quad \beta \end{array} \\ \frac{g}{2M} \not{k} \gamma_5 \tau_\alpha, & -\frac{1}{4f_\pi^2} (\not{k} + \not{k}') \epsilon_{\beta\alpha\kappa} \tau_\kappa. \end{array}$$

A constante de decaimento do pión f_π relaciona-se com o fator de forma da corrente axial g_A através da relação de Goldberger-Treiman $gf_\pi = g_A M$.

Cálculo da contribuição quiral mínima

No contexto da simetria quiral, o espalhamento πN a baixas energias é bastante bem representado pelo modelo da Fig. E.4, onde os três primeiros diagramas entre colchetes correspondem à contribuição quiral mínima, proveniente das interações envolvendo apenas píons e núcleons, as únicas a serem consideradas aqui. O primeiro diagrama é chamado de direto, o segundo, cruzado e o terceiro, de contato.

Fig. E.4: Amplitude do espalhamento πN a baixas energias.

Estritamente falando, a contribuição quiral mínima, que chamamos setor do nucleon quiral mínimo, é dada pelos três primeiros diagramas da figura, no contexto da lagrangiana do modelo σ linear. Este cálculo é equivalente ao cálculo dos mesmos diagramas a partir da realização não-linear apresentada na seção anterior, e utilizada neste trabalho, com $g_A = 1$. Esta contribuição mínima pode ser estendida ao que chamamos simplesmente setor do nucleon quiral, para descrever mais realisticamente os dados experimentais. No contexto da realização não-linear, isto pode ser feito de maneira natural, através de um ajuste adequado da constante g_A (no modelo σ linear este ajuste é feito de maneira mais artificial).

Utilizando as regras de Feynman, apresentadas anteriormente, calculamos o elemento de matriz iT , identificando as amplitudes (A, B) , para cada diagrama. Obtemos:

1. Diagrama direto:

$$A^+ = A^- = \frac{g^2}{2M},$$

$$B^+ = B^- = -g^2 \left(\frac{1}{4M^2} + \frac{1}{s - M^2} \right).$$

2. Diagrama cruzado: o resultado para este diagrama pode ser obtido a partir das relações (E.5) e, assim,

$$A^+ = -A^- = \frac{g^2}{2M},$$

$$B^+ = -B^- = g^2 \left(\frac{1}{4M^2} + \frac{1}{u - M^2} \right).$$

3. Diagrama de contato:

$$A^+ = A^- = B^+ = 0,$$

$$B^- = \frac{1}{2f_\pi^2} = \frac{g^2}{2M^2 g_A^2},$$

onde utilizamos a relação de Goldberger-Treiman $g_A M = g f_\pi$.

As amplitudes provenientes de cada diagrama são somadas, fornecendo

$$\begin{aligned} A^+ &= \frac{g^2}{M}, & A^- &= 0, \\ B^+ &= -g^2 \left(\frac{1}{s - M^2} - \frac{1}{u - M^2} \right), & B^- &= \frac{g^2}{2M^2 g_A^2} - \frac{g^2}{2M^2} - g^2 \left(\frac{1}{s - M^2} + \frac{1}{u - M^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{E.23})$$

As amplitudes com canais de isospin bem definido são calculadas a partir de (E.6).

O papel da simetria quiral

Antes de discutir a fenomenologia, é interessante deixar claro o papel da simetria quiral. Fazemos esta discussão baseada nos comprimentos de espalhamento, que nos dão a escala do espalhamento πN .

Até a década de 50, utilizando-se o acoplamento pseudo-escalar entre o pión e o núcleon, sem simetria quiral (E.20), os valores calculados para as amplitudes escalares eram dados por

$$\begin{aligned} A^+ &= 0, & A^- &= 0, \\ B^+ &= -g^2 \left(\frac{1}{s - M^2} - \frac{1}{u - M^2} \right), & B^- &= -g^2 \left(\frac{1}{s - M^2} + \frac{1}{u - M^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{E.24})$$

Destes resultados, usando as Eqs. E.15 e E.16, obtemos, para a onda S ,

$$a^+ = -1.84 \mu^{-1},$$

$$a^- = +0.136 \mu^{-1},$$

sendo que os valores experimentais são

$$a^+ = (-0.015 \pm 0.015) \mu^{-1},$$

$$a^- = \left(+0.097^{+0.003}_{-0.007} \right) \mu^{-1}.$$

A discrepância entre os valores de a^+ , principalmente, é muito grande: o valor calculado é mais de duas ordens de grandeza maior.

No contexto da relatividade, o propagador do nucleon é dado por

$$\frac{\not{p} + M}{p^2 - M^2},$$

onde

$$\not{p} + M = \underbrace{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{p_0}{E} \right) \bar{u}(\mathbf{p}) u(\mathbf{p})}_{(\not{p} + M)_F} - \underbrace{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{p_0}{E} \right) \bar{v}(-\mathbf{p}) v(-\mathbf{p})}_{(\not{p} + M)_B},$$

ou seja, o propagador leva em conta nucleons se propagando para a frente e antinucleons se propagando para trás. Em baixas energias, espera-se que a contribuição dos antinucleons seja pequena. O que se observou, no entanto, é que, no limiar, esta é, na realidade, a responsável pela magnitude de a^+ . O que se fazia, então, na época, era calcular as amplitudes levando em conta apenas a primeira parte do propagador, que envolve o nucleon. Esta maneira de se resolver o problema é chamada de Supressão de Pares. Deste modo, reproduzem-se satisfatoriamente os dados experimentais fora do limiar e os comprimentos de espalhamento vão a zero, tornando o resultado mais próximo do experimental. O preço para isto, entretanto, é desconsiderar as exigências da relatividade.

A simetria quiral foi a alternativa teórica a este problema, mantendo a relatividade e calibrando adequadamente o espalhamento a baixas energias, como se pode ver nas Figs. E.7 e E.8. O modelo σ linear fornece os seguintes valores para as amplitudes de espalhamento:

$$a^+ = -0.010 \mu^{-1},$$

$$a^- = +0.138 \mu^{-1},$$

dando a escala correta para a^+ .

Observamos, então, duas soluções teóricas não-equivalentes para a discrepância nos valores dos comprimentos de espalhamento, utilizando acoplamento πN pseudo-escalar. A supressão dos antinucleons, feita *ad hoc*, fornece valores diferentes da introdução da simetria quiral, realizada através da introdução do campo σ .

No modelo não-linear, para $g_A = 1.256$, os valores dos comprimentos de espalhamento são

$$a^+ = -0.010 \mu^{-1},$$

$$a^- = +0.088 \mu^{-1}.$$

Apresentação e discussão dos resultados

Setor do nucleon quiral ($g_A = 1.256$), acima do limiar

Apresentamos, aqui, os resultados teóricos obtidos a partir dos três diagramas da contribuição quiral mínima, da Fig. E.2, calculados no modelo PV, com um valor realístico para g_A .

A Fig. E.5 apresenta a seção de choque diferencial no limiar ($q = 0$) para os canais de isospin $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$. A seção de choque diferencial é calculada através de (E.7). A amplitude F (E.10) é obtida a partir de (E.13). O gráfico é polar, sendo que, para cada ângulo de espalhamento, o ponto correspondente na curva representa a magnitude da seção de choque diferencial, naquele ângulo. Como no limiar só existe a onda S , que é esfericamente simétrica, assim também a seção de choque diferencial. Para as demais energias, a seção de choque diferencial normalizada pelo valor do limiar, no seu respectivo canal de isospin, é apresentada na Fig. E.6. Cada curva corresponde a um valor diferente de momento no centro de massa, indicado em MeV na figura. À medida que as ondas parciais de momentos angulares diferentes de zero vão se tornando importantes, observamos deformações na seção de choque.

Analizamos a importância das ondas parciais de ordens mais altas em função do aumento da energia (ou momento), reconstituindo as amplitudes A e B a partir das ondas parciais, truncando-se a soma em l , em (E.9), e utilizando as expressões (E.11). Para $q = 0$ (estritamente no limiar), essa inversão é problemática, pois a amplitude F é uma parametrização que não é relativística na sua forma. A inversão em $q = 0$ não funciona e, ainda, a soma não pode ser truncada em $l = 0$. Fizemos, então, um estudo para $q \neq 0$ e truncando a soma a partir de

Fig. E.5: Seção de choque diferencial, em coordenadas polares, no limiar ($W = 1077$ MeV; $q = 0$), para $l = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$; valores em μ^{-2} .

$l_{máx} = 1$. Os resultados são apresentados na Tabela E.1. Observamos que as ondas com $l = 2$ só são importantes a partir de $q = 35$ MeV, sendo que a variação em A e B em relação aos valores corretos (calculados pelos diagramas) é de 1%. Até $q = 280$ MeV, que já está acima do limite elástico, basta somar as ondas até $l = 3$, para a mesma variação em A e B . Para se obter uma precisão melhor que 0.1%, até o limite de 250 MeV, é preciso somar até $l = 4$.

$l_{máx}$	variação < 1%	variação < 0.1%
1	35	~ 10
2	140	70
3	280	~ 150
4	380	~ 250
5	450	> 300

Tabela E.1: Para cada valor de $l_{máx}$, são apresentados os valores aproximados limites de momento no CMS, em MeV, para os quais a variação nas amplitudes escalares, em relação aos valores corretos, é menor que 1% (segunda coluna) e 0.1% (terceira coluna).

As Figs. E.7 e E.8 apresentam as amplitudes de ondas parciais calculadas pelo modelo (m), a parte real da amplitude unitarizada (f), e a amplitude experimental desunitarizada (d), todas em unidades do inverso a massa do píon (μ^{-1}). Apresentamos, também, os resultados

Fig. E.6: Seção de choque diferencial, em coordenadas polares, em unidades das seções de choque do limiar: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = 0.0275 \mu^{-2}$ ($l = \frac{1}{2}$) e $\frac{d\sigma}{d\Omega} = 0.00963 \mu^{-2}$ ($l = \frac{3}{2}$). Em cada curva está indicado o valor do momento do pión no CMS, em MeV.

calculados por supressão de pares (ps).

Comparando m e $\text{Re}(f)$, observamos os efeitos da unitarização somente quando m e q crescem. Assim, para momentos muito baixos ($q < 150$ MeV), ou para momentos angulares grandes, a unitarização não é percebida e, portanto, dispensável.

Existem grandes discrepâncias entre os valores calculados (m) e os experimentais (d), para valores de momento fora da região do limiar. Isto se deve a pelo menos dois fatores: por um lado, só foi calculado o pólo do nucleon, deixando-se de lado a contribuição da delta e outras correções que precisam também ser feitas neste modelo e que são essenciais, fora do limiar (Fig. E.4). O outro problema são as ressonâncias (ondas $P1$, $D3$, no canal de isospin $\frac{1}{2}$; onda $P3$, no canal $\frac{3}{2}$) que, por representarem estados ligados, não podem ser obtidas a partir da teoria de perturbação. No modelo utilizado, elas têm de ser introduzidas “a mão”, através de suas larguras e localizações, conhecidas previamente. Observa-se, entretanto, que a descrição do problema na região do limiar pode ser feita satisfatoriamente apenas com o setor do nucleon quiral.

Os resultados da supressão de pares para o pólo do nucleon são até mais próximos dos experimentais que os do modelo utilizado, com exceção das ondas S , onde se percebe nitidamente a importância da introdução da simetria quiral no modelo.

Avaliando a série abaixo do limiar

Nosso interesse na região abaixo do limiar são as amplitudes que envolvem píons virtuais, que aparecem em processos como os da Fig. E.2. Assim, na série, os valores de ν e t estarão abaixo do limiar se retirarmos o pión da camada de massa. Isto é obtido substituindo a energia do pión $\omega = \sqrt{\mu^2 + q^2}$ por $e\omega$, onde e é um parâmetro variável, $0 < e < 1$. Entretanto, esta série é obtida a partir dos dados experimentais e, portanto, se ela vale logo abaixo do limiar, deveria valer também no limiar. Nas Figs. E.9 ($I = \frac{1}{2}$) e E.10 ($I = \frac{3}{2}$), comparamos as amplitudes de ondas parciais calculadas a partir da série com as amplitudes experimentais e as calculadas a partir de (E.19), subtraído o setor do nucleon quiral mínimo ($g_A = 1$). A partir da

Fig. E.7: Amplitudes de ondas parciais ($I = \frac{1}{2}$) para o setor do nucleon quiral; m é a amplitude real (linha contínua), calculada pelo modelo, f é a amplitude m unitarizada, cuja parte real é apresentada (tracejado), e d é a amplitude experimental desunitarizada (losangos); comparação com os cálculos por supressão de pares ps (traço e ponto). Amplitudes em μ^{-1} , em função do momento no CMS, em MeV.

Fig. E.8: Amplitudes de ondas parciais ($I = \frac{3}{2}$) para o setor do nucleon quiral. Mesmas convenções da Fig. E.7.

onda P , todas as ondas são muito pequenas na região do limiar. Para uma melhor comparação entre as diversas abordagens, os dados estão divididos por q^{2l} .

A série dos comprimentos de espalhamento é útil para descrever os dados experimentais a energias bem baixas (pelas figuras, para momentos até pouco menos de 100 MeV), onde as incertezas são bastante grandes. A série abaixo do limiar concorda com os dados acima do limiar (série dos comprimentos de espalhamento) na região bem próxima de $q = 0$, para todas as ondas, com exceção da onda S , nos dois canais de isospin. Uma vez conhecidas estas defasagens, entretanto, podemos utilizar os resultados da série para situações estritamente abaixo do limiar (Figs. E.13 e E.14) de maneira coerente.

Amplitudes abaixo do limiar

As amplitudes de ondas parciais para o setor do nucleon quiral mínimo e para a série abaixo do limiar são calculadas para valores das variáveis de Mandelstam abaixo do limiar. Como citado anteriormente, neste trabalho, isto foi feito tirando os píons da camada de massa, através do parâmetro e . Nas Figs. E.11 ($I = \frac{1}{2}$) e E.12 ($I = \frac{3}{2}$), são apresentados os resultados para o setor do nucleon. Observamos que essa contribuição se altera gradativamente com a diminuição da energia dos píons virtuais.

As Figs. E.13 ($I = \frac{1}{2}$) e E.14 ($I = \frac{3}{2}$) apresentam os resultados para a série, que não contém a contribuição do setor do nucleon. Nestes gráficos, também se observam as variações na amplitude em função das variações em e . A amplitude completa, abaixo do limiar, é a soma do resultado da série com a contribuição do nucleon.

Fig. E.9: Amplitudes de ondas parciais provenientes da série abaixo do limiar (traço e ponto), mas calculadas acima do limiar ($I = \frac{1}{2}$); comparação com os dados experimentais (círculos) e a série dos comprimentos de espalhamento (linha contínua), subtraído o setor do nucleon quiral mínimo. Eixo horizontal: momento no CMS, em MeV. Eixo vertical: amplitudes de ondas parciais, em μ^{-2l-1} , porque normalizadas por q^{2l} (ondas P e D).

Fig. E.10: Amplitudes de ondas parciais provenientes da série abaixo do limiar, mas calculadas acima do limiar ($I = \frac{3}{2}$). Mesmas convenções da Fig. E.9.

Fig. E.11: Setor do nucleon quiral mínimo para píons fora da camada de massa ($I = \frac{1}{2}$). Eixo horizontal: momento q no CMS, em MeV. Eixo vertical: amplitudes de ondas parciais, em μ^{-1} . m (linha contínua) é a amplitude calculada para píons na camada de massa ($e = 1$). Resultados para píons fora da camada de massa, com energia $e\omega$, são apresentados para $e = 0.8$ (tracejado), $e = 0.6$ (pontilhado), $e = 0.4$ (traço e ponto) e $e = 0.2$ (tracejado longo).

Fig. E.12: Setor do nucleon quiral mínimo para píons fora da camada de massa ($I = \frac{3}{2}$). Mesmas convenções da Fig. E.11.

Fig. E.13: Série abaixo do limiar, calculada para píons fora da camada de massa ($I = \frac{1}{2}$). Eixo horizontal: momento q no CMS, em MeV. Eixo vertical: amplitudes de ondas parciais, em μ^{-1} . A energia do píon é dada por $e\omega$. São apresentados os resultados para $e = 1$ (traço e ponto), $e = 0.8$ (tracejado longo), $e = 0.6$ (tracejado), $e = 0.4$ (pontilhado) e $e = 0.2$ (linha contínua).

Fig. E.14: Série abaixo do limiar, calculada para píons fora da camada de massa ($I = \frac{3}{2}$). Mesmas convenções da Fig. E.13.

Referências

- [Adk 87] G.S. ADKINS. Static properties of skyrmions. In K.F. LIU. *Chiral Solitons*. Singapore, World Scientific, 1987. p.99-170.
- [AN 84] G.S. ADKINS; C.R. NAPPI. The Skyrme model with pion masses. *Nucl. Phys. B* **233**, 109-15 (1984).
- [ANW 83] G.S. ADKINS; C.R. NAPPI; E. WITTEN. Static properties of nucleons in the Skyrme model. *Nucl. Phys. B* **228**, 552-66 (1983).
- [Bat 94] O.L. BATTISTEL. *Fenomenologia hadrônica no modelo de Skyrme*. São Paulo, 1994. 196p. Tese - Instituto de Física, Universidade de São Paulo.
- [Bha 88] R.K. BHADURI. *Models of the Nucleon, From Quarks to Solitons*. Redwood City, CA, Addison-Wesley, 1988. 360p.
- [BKM 95] V. BERNARD; N. KAISER; U.-G. MEISSNER. Chiral dynamics in nucleons and nuclei. *Int. J. Mod. Phys. E* **4**, 193-344 (1995).
- [BR 93] O.L. BATTISTEL; M.R. ROBILOTTA. One-pion exchange potential and πN form factors in the Skyrme model. *Phys. Rev. C* **48**, 920-3 (1993).
- [BR 94] J.L. BALLOT; M.R. ROBILOTTA. Pionic background for nucleon-nucleon observables. *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **20**, 1599-613 (1994).
- [Cam 78] D.K. CAMPBELL. *Field theory, chiral symmetry, and pion-nucleus interactions*. In R. BALIAN; M. RHO; G. RIPKA. XXX ÉCOLE D'ÉTÉ DE PHYSIQUE THÉORIQUE, 1977, Nuclear Physics with Heavy Ions and Mesons. Amsterdam, North-Holland, 1978. p.549-672.

- [EK 96] J.M. EISENBERG; G. KÄLBERMANN. The nucleon-nucleon force from skyrmions. *Int. J. Mod. Phys. E* **5**, 423-58 (1996).
- [Gas 66] S. GASIOROWICZ. *Elementary Particle Physics*. New York, John Wiley & Sons, 1966. Caps.23-24.
- [GL 48] E. GARDNER; C.M. LATTES. Production of mesons by the 184-inch Berkeley Cyclotron. *Science* **107**, 270-1 (1948).
- [GL 60] M. GELL-MANN; M. LÉVY. The axial vector current in beta decay. *Nuovo Cimento* **16**, 705-26 (1960).
- [GL 84] J. GASSER; H. LEUTWYLER. Chiral perturbation theory to one loop. *Ann. Phys. (N.Y.)* **158**, 142-210 (1984).
- [Gol 50] H. GOLDSTEIN. *Classical Mechanics*. Reading, Addison-Wesley, 1950 (impr. 1972). Cap.4.
- [GR 9?] A. GAMMAL; M.R. ROBILOTTA. Comunicação particular. 199-.
- [HJ 62] T. HAMADA; I.D. JOHNSTON. A potential model representation of two-nucleon data below 315 MeV. *Nucl. Phys.* **34**, 382-403 (1962).
- [HNT 65] T. HAMADA; Y. NAKAMURA; R. TAMAGAKI. Modification of Hamada-Johnston potential. *Progr. Theor. Phys.* **33**, 769-70 (1965).
- [Hoh 83] G. HÖHLER. Pion Nucleon Scattering. In H. SCHOPPER, *Numerical Data and Functional Relationships in Science and Technology*. Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag, 1983. v.9b, part 2, 601p.
- [Hoo 74] G. 't HOOFT. A planar diagram theory for strong interactions. *Nucl. Phys. B* **72**, 461-73 (1974).
- [JJP 85] A. JACKSON; A.D. JACKSON; V. PASQUIER. The skyrmion-skyrmion interaction. *Nucl. Phys. A* **432**, 567-609 (1985).
- [JR 83] A.D. JACKSON; M. RHO. Baryons as chiral solitons. *Phys. Rev. Lett.* **51**, 751-4 (1983).

- [KGW 98] N. KAISER; S. GERSTENDÖRFER; W. WEISE. Peripheral NN-scattering: role of delta-excitation, correlated two-pion and vector meson exchange. *Nucl. Phys. A* **637**, 395-420 (1998).
- [Koc 97] V. KOCH. Aspects of chiral symmetry. *Preprint nucl-th/9706075 v2* (ou *Int. J. Mod. Phys. E* **6**, 203-50 (1997)).
- [Lac+80] M. LACOMBE et al. Parametrization of the Paris N-N potential. *Phys. Rev. C* **21**, 861-73 (1980).
- [Las+62] K.E. LASSILA et al. Note on a nucleon-nucleon potential. *Phys. Rev.* **126**, 881-2 (1962).
- [LE 93] R. LEVY-NATHANSOHN; J.M. EISENBERG. A symmetrized ansatz for the dibaryon skyrmion. *Int. J. Mod. Phys. E* **2**, 587-95 (1993).
- [LOP 47] C.M.G. LATTES; G.P.S. OCCHIALINI; C.F. POWELL. Observations on the tracks of slow mesons in photographic emulsions. *Nature* **160**, 453-6, 486-92 (1947).
- [LT 98] J.T. LONDERGAN; A.W. THOMAS. The validity of charge symmetry for parton distributions. *Preprint hep-ph/9806510* (ou *Prog. Part. Nucl. Phys.* **41**, 49-124 (1998)).
- [Mac 89] R. MACHLEIDT. The meson theory of nuclear forces and nuclear structure. *Adv. Nucl. Phys.* **19**, 189-376 (1989).
- [Mae 96] C.M. MAEKAWA. *O fator de forma pión-nucleon: simetria quiral e quarks constituintes*. São Paulo, 1996. 171p. Tese - Instituto de Física, Universidade de São Paulo.
- [Men 85] A.M.M. MENEZES. *Espalhamento πN a baixas energias*. São Paulo, 1985. 143 p. Dissertação - Instituto de Física, Universidade de São Paulo.
- [MHE 87] R. MACHLEIDT; K. HOLINDE; Ch. ELSTER. The Bonn meson-exchange model for the nucleon-nucleon interaction. *Phys. Rep.* **149**, 1-89 (1987).

- [Mut 87] T. MUTA. *Foundations of Quantum Chromodynamics*. Singapore, World Scientific, 1987. Sec. 3.4.
- [NR 88] M. NYMAN; D.O. RISKA. Symmetrized product ansatz in the Skyrme model. *Phys. Lett. B* **203**, 13-7 (1988).
- [NRS 78] M.M. NAGELS; T.A. RIJKEN; J.J. DE SWART. Low-energy nucleon-nucleon potential from Regge-pole theory. *Phys. Rev. D* **17**, 768-76 (1978).
- [ORK 96] C. ORDÓÑEZ; L. RAY; U. VAN KOLCK. Two-nucleon potential from chiral lagrangians. *Phys. Rev. C* **53**, 2086-105 (1996).
- [PDG 98] PARTICLE DATA GROUP. Rev. Part. Phys. C. CASO et al. *The European Physical Journal C* **3**, 1-794 (1998).
- [Rob 87] M.R. ROBILOTTA. Notas de aula do curso *Processos Mesônicos em Física Nuclear*, III ESCOLA DE VERÃO JORGE ANDRÉ SWIECA, Petrópolis, 1987.
- [Rob 88] M.R. ROBILOTTA. Notas de aula do curso *Física de Hádrons*, Instituto de Física - USP, 1988.
- [Rob 89] M.R. ROBILOTTA. Nucleon-nucleon interactions in the Skyrme model - the role of chiral symmetry. 1989. Não publicado.
- [Rob 95] M.R. ROBILOTTA. Pion-nucleon scattering and the tail of the two-pion exchange nucleon-nucleon potential. *Nucl. Phys. A* **595**, 171-88 (1995).
- [RR 94] C.A. DA ROCHA; M.R. ROBILOTTA. Two pion exchange nucleon-nucleon potential: the minimal chiral model. *Phys. Rev. C* **49**, 1818-26 (1994).
- [RR 95] C.A. DA ROCHA; M.R. ROBILOTTA. Chiral background for the two-pion exchange nuclear potential: a parametrized version. *Phys. Rev. C* **52**, 531-8 (1995).
- [RR 97] M.R. ROBILOTTA; C.A. DA ROCHA. Two-pion exchange nucleon-nucleon potential - model independent features. *Nucl. Phys. A* **615**, 391-416 (1997).
- [SK 89] M. STERNHEIM; G. KÄLBERMANN. Baryon number ambiguities in the symmetrized product ansatz for the Skyrme model. *Phys. Lett. B* **225**, 27-30 (1989).

- [Sky 61] T.H.R. SKYRME. A non-linear field theory. *Proc. Roy. Soc. A* **260**, 127-38 (1961).
- [Sky 62] T.H.R. SKYRME. A unified field theory of mesons and baryons. *Nucl. Phys.* **31**, 556-69 (1962).
- [Sto+94] V.G.J. STOKS; R.A.M. KLOMP; C.P.F. TERHEGGEN; J.J. DE SWART. Construction of high-quality NN potential models. *Phys. Rev. C* **49**, 2950-62 (1994).
- [TNS 51] M. TAKETANI; S. NAKAMURA; M. SASAKI. On the method of the theory of nuclear forces. *Prog. Theor. Phys. (Kyoto)* **6**, 581-6 (1951).
- [TR 96] N.A. TÖRNQVIST; M. ROOS. Confirmation of the sigma meson. *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1575-8 (1996).
- [TRS 75] R. DE TOURREIL; B. ROUBEN; D.W.L. SPRUNG. Super-soft-core nucleon-nucleon interaction with π -, ρ - and ω -exchange contributions. *Nucl. Phys. A* **242**, 445-60 (1975).
- [TS 73] R. DE TOURREIL; D.W.L. SPRUNG. Construction d'un potentiel nucléon-nucléon à cœur très mou (SSC). *Nucl. Phys. A* **201**, 193-214 (1973).
- [Vin+85] R. VINH MAU et al. The static baryon-baryon potential in the Skyrme model. *Phys. Lett. B* **150**, 259-64 (1985).
- [Wei 68] S. WEINBERG. Nonlinear realizations of chiral symmetry. *Phys. Rev.* **166**, 1568-77 (1968).
- [Wit 79] E. WITTEN. Baryons in the $1/N$ expansion. *Nucl. Phys. B* **160**, 57-115 (1979).
- [WSA 84] R.B. WIRINGA; R.A. SMITH; T.L. AINSWORTH. Nucleon-nucleon potentials with and without $\Delta(1232)$ degrees of freedom. *Phys. Rev. C* **29**, 1207-21 (1984).
- [WW 92] T.S. WALHOUT; J. WAMBACH. From skyrmions to the nucleon-nucleon potential. *Int. J. Mod. Phys. E* **1**, 665-738 (1992).
- [YA 85] H. YABU; K. ANDOU. Static N-N and N- $\bar{N}$ interactions in the Skyrme model. *Progr. Theor. Phys.* **74**, 750-64 (1985).

- [Yuk 35] H. YUKAWA. On the interactions of elementary particles. *Proc. Phys. Math. Soc. Japan* **17**, 48-57 (1935).
- [ZB 86] I. ZAHED; G.E. BROWN. The Skyrme model. *Phys. Rep.* **142**, 1-102 (1986).

Com o intuito de reunir os diversos grupos que trabalham ou trabalharam com o modelo de Skyrme no Brasil, apresentamos uma relação de teses versando sobre o tema:

- HÉRCULES BORGES RODRIGUES. *Movimento coletivo relativístico de skyrmion*. Dissertação (Mestrado). Orientador: Michel Betz. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1991.
- FERNANDO MONTI STEFFENS. *Efeitos de vibração no skyrmion*. Dissertação (Mestrado). Orientadora: Victoria Herscovitz. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1992.
- STENIO WULK ALVES DE MELO. *Estudos sobre os sólitons bariônicos no modelo de Skyrme*. Tese (Doutorado). Orientador: Juan Alberto Mignaco. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1992.
- JORGE ANANIAS NETO. *Propriedades analíticas do sóliton de Skyrme*. Tese (Doutorado). Orientador: Erasmo Ferreira. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1992.
- ORILDO LUIS BATTISTEL. *Fenomenologia hadrônica no modelo de Skyrme*. Tese (Doutorado). Orientador: Manoel Roberto Robilotta. Universidade de São Paulo, São Paulo, 1994.
- ARNALDO GAMMAL. *O termo sigma nuclear no modelo de Skyrme*. Tese (Doutorado). Orientador: Tobias Frederico. Universidade de São Paulo, São Paulo, 1997.

Agradeço ao Prof. José de Sá Borges por esta sugestão, bem como por inúmeras e valiosas contribuições para a versão final da tese.