12/12/95

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

Bosonização do Modelo de Nambu-Jona-Lasinio $SU(3)$ Generalizado na Expansão $1/N$.

Francisco Antonio Peña Campos

SBI-IFUSP

305M810T2389

Tese de Doutorado
depositada ao Instituto de Física da
Universidade de São Paulo

ORIENTADOR: Prof^a. Dra. Maria Carolina Nemes

BANCA EXAMINADORA

Prof^a. Dra. Maria Carolina Nemes (IFUSP)

Prof. Dr. Marcelo Otavio C. Gomes (IFUSP)

Prof^a. Dra. Maria Teresa Climaco (IFF)

Prof^a. Dra. Eliane Angela Veit (IFRS)

Prof. Dr. Gastão Krein (IFT-UNESP)

São Paulo

1995

M.C. Nemes
Therese Luiz Caldas
Prof. Therese Luiz Caldas
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

530.14
C198b
D
ex. 1

FICHA CATALOGRÁFICA

**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

**Campos, Francisco Antonio Peña
Bosonização do modelo de Nambu-Jona-
Lasinio SU(3) generalizado na expansão 1 / N. São
Paulo, 1995.**

**Tese (Doutoramento) - Universidade de São
Paulo. Instituto de Física. Departamento de
Física Matemática.**

**Área de Concentração: Física Nuclear
Orientador: Profa. Dra. Maria Carolina Nemes**

**Unitermos: 1. Bosonização; 2. Modelo Nambu-Jona-
Lasinio; 3. Expansão 1 / N; 4. Teoria de campos.**

USP/IF/SBI-52/95

ABSTRACT

The present work consists in a $1/N$ expansion of extended version of the $SU(3)$ Nambu-Jona-Lasinio model in the context of the Functional Integral. The gap equations, meson propagators, triangle diagram, etc, appear quite naturally as different orders in the expansion. The new features of this approach is the inclusion of high order corrections in the $1/N$ leading orders, which have never been included in the previous one. The method also allows for the construction of a chiral Lagrangean of interacting mesons based on the $SU(3)$ NJL model, here obtained for the first time.

RESUMO

O presente trabalho consiste na expansão $1/N$ de uma versão estendida do modelo de Nambu-Jona-Lasinio $SU(3)$ no contexto de integrais funcionais. A equação de "gap", propagadores mesônicos, decaimentos e espalhamentos, aparecem naturalmente como ordens diferentes na expansão. A característica nova nesta abordagem é a inclusão de correções de ordem superior à ordem dominante, que nunca foram consideradas anteriormente. O método também permite a construção de uma densidade de Lagrangeana quiral de mésons interagentes baseada no modelo Nambu-Jona-Lasinio $SU(3)$ aqui obtida pela primeira vez.

**"...eres eterno como el tiempo
y florecerás en cada primavera..."**

Alice sonha com o rei Vermelho,
que está sonhando com ela,
e alguém a adverte de que se o rei
despertar,
ela se apagará como uma vela,
porque não é mais do que
um sonho do rei que ela está
sonhando.

JORGE LUIS BORGES.

A minha esposa e filhos, pelo
amor e apoio que sempre me
foi dado.

Dedicatória

Agradecimentos

Chegamos ao final do trabalho e fica a satisfação do dever cumprido, a alegria dos dias vividos e também a tristeza da partida. Foram quatro anos e meio de alegria, saudade, amizade, crises e de muito trabalho. Em geral, foram dias maravilhosos nesta bela terra, como uma fantasia numa noite de fevereiro....

Quero expressar meus sinceros e profundo agradecimentos

À Prof^a. Dra. Maria Carolina Nemes pela orientação e por ter depositado em mim toda sua confiança no desenvolvimento da pesquisa.

Ao Prof. Dr. Marcelo O. C. Gomes pelo incentivo na área de Teoria Quântica de Campos e a sempre boa disposição para comigo a analisar e discutir certos temas durante meus anos de pesquisa levando-me a esclarecer as minhas idéias.

À Professora Dra. Brigitte Hiller e Alex Blin da Universidade de Coimbra que conheci em Belo Horizonte e que, de Portugal, com suas discussões, contribuíram ao meu trabalho.

À minha família, Patricia, Patrícia, Chiquinho e Dona Raquel pelo amor e apoio sempre incondicional e por toda a força que deles recebi e que foram fundamentais em cada linha do trabalho.

À minha mãe e meu pai, ausentes agora, mas interiormente sempre presentes, pelas lições de simplicidade na vida, que deles cultivei e a meus irmãos pela força que sempre me deram.

A este solo brasileiro que tão bem me recebeu e que levo no meu coração , que me deu bons amigos para o resto da vida. Em especial nas figuras de Sérgio, Van Sérgio, Luiz Buffon, Luis Malacarne e Oswaldo, que foram importante para mim neste período, tanto no aspecto pessoal como no profissional, que me incentivaram, principalmente, nos tempos difíceis que vivi.

Aos novos amigos que foram descobertos no decorrer dos anos. Em especial, a Myriam, Yacy-Ara e Mauricio pela amizade solidária, fraterna, plena de carinho e compreensão.

Ao Rênio, José Roberto, Luis Carlos, Ângela, Luis Cabral, Trevisan, Rita, Mazarello, Cecilia, Félix, Paulo Poppe, Maria Augusta, Antônio, Serginho e Bruno pela conversa e ajuda que fizeram parte de nossa amizade.

A Cláudia, Kelma, Solange e Emilio pela amizade e a ajuda nas questões burocráticas.

Ao Departamento de Física de la Universidad de La Frontera, Temuco, pelo apoio, confiança e compreensão .

E a todas as pessoas que de uma ou outra forma me conheceram e compartilharam momentos de descontração .

Peço desculpas pelas tantas vezes que tirei algumas pessoas do sério.

Ao CNPq pelo apoio financeiro que permitiu concretizar esta pesquisa.

Índice

Introdução	3
1 Simetrias da QCD e O Modelo de Nambu e Jona-Lasinio (NJL)	6
1.1 Simetrias da QCD	6
1.2 O Modelo Nambu e Jona-Lasinio (NJL)	14
1.3 O Modelo Nambu-Jona-Lasinio (NJL) $SU(3)$ Sabor Generalizado	16
2 Expansão $1/N$ no Modelo NJL $SU(3)$ Sabor Generalizado	20
2.1 A Expansão $1/N$	20
2.2 Método da Integração Funcional e a Ação Efetiva	31
2.3 Equação de "Gap", Funções de Vértices e Propagadores dos Campos Auxiliares	36
3 Matriz de Espalhamento qq e Constantes de Acoplamento M_{qq}	44
3.1 Matriz de Espalhamento $q\bar{q}$ na Ordem Dominante em $\frac{1}{N}$	45
3.2 Canal Piônico	50
3.3 Mésons $\eta - \eta'$	52
3.4 Resultados Numéricos	55
4 Correções à Equação de "Gap" e aos Propagadores dos Campos Auxiliares na Expansão $1/N$	58
5 Expansão Local dos Campos Auxiliares na Expansão $1/N$	62
5.1 Expansão Local em Torno do Ponto X dos Campos Auxiliares	62
5.2 Interação Vetorial-Pseudoescalar-Pseudoescalar	73
Conclusão	76
A Identidades de Fierz	78
A.1 Transformações de Fierz para interações quárticas pontuais	78
A.2 Transformação de Fierz de interações de seis pontos que quebra a simetria $U_A(1)$	80

B	Elementos de Matriz da Função de Dois Pontos	84
B.1	Função vértice no espaço de momentos	84
B.2	Expresões para as Integrais J	89

Introdução

As teorias não-lineares de quatro-férmions propostas inicialmente por Heisenberg[1] e Nambu e Jona-Lasinio (*NJL*)[2] fornecem-nos uma interessante analogia entre a supercondutividade e modelos de partículas elementares.

Uma característica comum dessa classe de modelos é, além da geração dinâmica de massa dos férmions, a predição de bósons compostos ou coletivos não presente na densidade de Lagrangeana original (uma excelente revisão do modelo *NJL* encontra-se na ref.[3]).

A importância de modelos tipo *NJL* (i.e., com interações quárticas fermiônicas) é que eles nos permite o estudo de algumas propriedades da *QCD* na aproximação de grande comprimento de onda[4-7], e tem sido estudado tanto na linguagem pura de férmions assim como também através de métodos de bosonização .

Portanto, no contexto das interações quárticas fermiônicas, é interessante o estudo das estruturas e propriedades das versões bosonizadas do modelo. A conexão entre o modelo *NJL* e os modelos de bósons se faz empregando as técnicas da integral de caminho obtendo uma forma bosonizada do modelo.

A bosonização da densidade de Lagrangeana do modelo *NJL* original (sabor) $U(1)$ foi primeiramente investigada por Eguchi e Sugawara[8] e Kikkawa[9]. A forma não-abeliana $U(N_f)$ foi estudada por Chakrebari e Hu[10], e as versões $SU(2)$ do modelo foram desenvolvidas por Volkov, Erbert e Reinhardt[11-12]. O problema essencial, que está fora da descrição $SU(2)$ sabor de mésons leves, é a quebra da simetria $U_A(1)$ responsável pela diferença de massa entre os mésons $\eta - \eta'$. Em 1976, 't Hooft mostrou que no âmbito do modelo *NJL*, a interação mais simples possível que contém esses efeitos é o chamado "*determinante de 't Hooft*", uma interação de seis-férmions[13]. Deste modo, seria desejável ter uma versão bosonizada do modelo que inclua esta interação . Porém, para $N_f > 2$ não se aplica a bosonização usual através da integral funcional (resolvida para $N_f = 2$), já que, o termo de 't Hooft da origem a termos de terceira ordem nos campos. A bosonização consiste em linearizar a interação de quatro-férmions por meio de campos auxiliares, que eventualmente seriam os campos mesônicos (compostos). Ao invés disso, manipulações mais sofisticadas são requeridas como é mostrado na ref.[14] para a interação de seis-férmions. A interação de seis-férmions é convertida numa interação quártica, feita primeiramente em 1988 por Bernard, Jaffe e Meissner, para assim usar o formalismo da integral funcional.

Uma extensa literatura sobre o espectro de massa e largura de decaimento mostra que todos os mésons leves são bem descritos em termos de pares $q\bar{q}$ no esquema da equação de Bethe-Salpeter na aproximação de um "loop". Porém mésons pesados, não são bem descritos nesse esquema [15] e experimentalistas tem frequentemente defendido, que alguns desses mésons podem ser vistos como "moléculas" compostas de dois mésons leves além dos pares $q\bar{q}$ [16]. É relevante na física hadrônica obter aproximações para processos que envolvem estruturas mais complicadas que pares $q\bar{q}$. Por exemplo, na descrição de mésons pesados ($\sim 700\text{MeV}$) em processos associados a dois pares que na interação de quarks tem um papel importante.

Um dos propósitos deste trabalho é derivar uma densidade de Lagrangeana efetiva com interações mesônicas vista como uma QCD macroscópica baseada na versão estendida do modelo $SU(3)$ NJL , o qual, preserva as simetrias relevantes da QCD . Nesse contexto, obtém-se uma densidade de Lagrangeana apenas com graus de liberdade mesônicos.

Em 1974, 't Hooft considerou a expansão $1/N$ na QCD usando o método da integral funcional e mostrou que no limite N grande a QCD é considerada como uma teoria efetiva de mésons e glueballs[17].

O objetivo deste trabalho é implementar a expansão $1/N$ no modelo em 4D e introduzir os graus de liberdade bosônicos. A expansão $1/N$ tem sido aplicada à teoria φ^4 e a modelos em duas dimensões com estruturas similares, como por exemplo, os modelos Gross-Neveu e CP^{N-1} . Esses modelos apresentam fenômenos interessantes tais como liberdade assintótica, quebra dinâmica da simetria, transmutação dimensional e confinamento não-perturbativo.

Neste trabalho mostramos como utilizar o método da integral funcional para obter uma expansão sistemática dos processos frequentemente consideradas no contexto do modelo NJL $SU(3)$. A versão $SU(3)$ do modelo já foi abordada por este método, tendo porém os resultados ser restritos à ordem zero (equação de "gap"). A razão disto é a interação "determinante" de seis férmions, difícil de tratar no contexto de integrais gaussianas.

Dentro de nosso esquema, propomos reduzir este termo de interação sextupla a uma interação quártica, e conseguimos então fazer a expansão em todas as ordens. Obtemos a equação de "gap", os propagadores mesônicos, processos de decaimento, espalhamento, etc, de forma sistemática. Uma das consequências importantes desta sistematização é a obtenção de correções à equação de "gap" e aos propagadores, que deveriam ser consideradas por consistência, ao investigar-se ordens superiores de potências $1/N$.

O trabalho foi dividido em 5 partes. A primeira parte, contém uma revisão das propriedades básicas de simetria da QCD e apresenta-se o modelo NJL mais geral, contendo todas as interações quárticas fermiônicas possíveis.

No segundo capítulo, se implementa a expansão $1/N$ e se introduzem os campos auxiliares bosônicos, obtendo uma ação efetiva em série de potências de $\frac{1}{N}$. Se estuda a quebra dinâmica da simetria quiral e suas consequências, obtém-se os propagadores dos campos auxiliares na ordem dominante e suas respectivas massas como sendo a posição do pólo.

No terceiro capítulo, se mostra a equivalência entre a matriz amplitude de espalhamento obtida na expansão $1/N$ com a obtida no esquema Bethe-Salpeter. Se calculam explicitamente algumas amplitudes e as constantes méson-quark-quark e se apresentam os resultados numéricos do espectro de massas, constantes do modelo e as constantes de acoplamento méson-quark-quark.

As correções à equação de "gap" e aos propagadores acima mencionados encontram-se no quarto capítulo de uma maneira esquemática.

No quinto capítulo, se expandem os campos auxiliares para obter uma densidade de Lagrangeana mesônica local, particularmente no setor $\rho\pi\pi$, com o objetivo de determinar a constante de decaimento do méson ρ .

As transformações de Fierz para as interações quárticas pontuais encontram-se no apêndice A, e os elementos de matriz da função de dois pontos encontram-se no apêndice B.

Por último apresenta-se as conclusões e perspectivas a este trabalho.

Capítulo 1

Simetrias da QCD e O Modelo de Nambu e Jona-Lasinio (NJL)

Neste capítulo apresenta-se as propriedades básicas de simetria da QCD , a quebra espontânea de simetria e suas consequências, em particular, da simetria quiral. Apresenta-se também, a versão estendida $SU(3)$ do modelo de Nambu-Jona-Lasinio.

1.1 Simetrias da QCD

A Cromodinâmica Quântica (QCD) é uma teoria de calibre não-abeliana, renormalizável das interações fortes, e os campos de calibre não-abeliano, glúons, de spin 1, mediam as interações de cor entre campos fermiônicos, quarks, de spin 1/2. As propriedades dos glúons relativas diretamente ao caráter não-abeliano do grupo de calibre $SU(3)_{cor}$, são essenciais para que os quarks tenham liberdade assintótica, isto é, o valor da constante de acoplamento decresce com o aumento do momento transferido Q^2 (para distâncias curtas). Outra propriedade relevante da QCD , refere-se ao confinamento da cor, fato que é observado nas interações fortes e que consiste em estados puros de hadrons, ou seja, objetos compostos de singleto de cor ("*estados brancos*"). A propriedade do confinamento é a característica fundamental da QCD , embora ainda não tenha-se demonstrado. Por outra parte, a QCD apresenta varias simetrias e estas representam um papel muito importante, no sentido que ajudam a descobrir os aspectos essenciais dos campos.

Na evolução de um sistema que é descrito por uma densidade de Lagrangeana que dependem de certos campos, se fizermos uma transformação sob o grupo de simetria nesses campos e a densidade de Lagrangeana não se alterar, então essa transformação corresponde a uma simetria do sistema, de maneira que estas simetrias estão sempre associadas a grandezas conservadas. Na teoria de campos, existe um teorema, chamado teorema de Noether, que estabelece essa conexão.

Justamente por causa desse significado especial das propriedades de simetria, os eventos que envolvem quebra de simetria são especialmente interessantes. O exemplo clássico

da quebra espontânea de simetria é o ferromagneto de Heisenberg[17] . A Hamiltoniana do modelo de Heisenberg é invariante por rotações , mas o mesmo não acontece com o estado de menor energia quando todos os spins estão alinhados segundo alguma direção . Como a direção do alinhamento é arbitrária, o vácuo é infinitamente degenerado. Para estudarmos as propriedades do sistema temos que escolher algum desses vácuos e então a simetria é quebrada.

Na Teoria Quântica de Campos, quando se exige que a teoria possua uma dada simetria, ou seja, que sua densidade de Lagrangeana permaneça invariante também sob operações locais de simetria, isto só é possível quando se introduz um novo campo. Transformações de simetria locais são aquelas para as quais os parâmetros de transformação dependem do espaço-tempo. Essas teorias são chamadas de teorias de calibre. As transformações de simetria são então chamadas simetrias de calibre e os novos campos que surgem são os campos de calibre.

Agora se uma simetria contínua for "espontaneamente" quebrada, leva ao aparecimento de bósons sem massa. Aliás, quando campos com simetria espontaneamente quebrada se acoplam a campos de calibre, estes podem-se tornar massivos. As consequências de uma quebra espontânea de simetria, dependem do tipo de simetria que foi quebrada. No caso de uma simetria global, a quebra espontânea, segundo o teorema de Goldstone, provoca o aparecimento de bósons sem massa, os bosons de Goldstone. Se, no entanto, as simetrias forem espontaneamente quebradas através de um acoplamento mínimo a um campo de Higgs, então a partícula adquire massa. Nesse caso, não aparecem bosons sem massa. Esse efeito é chamado mecanismo de Higgs.

Vamos aqui apresentar algumas das simetrias que a QCD possui.

No início dos anos sessenta, o estudo da classificação dos hadrons, espectros de massas e da interação forte, sugeriu que os hadrons sejam feitos de quarks, constituintes fundamentais da matéria. Depois, surgiu a necessidade de introduzir um novo grau de liberdade, chamada cor, associada ao quark para não entrar em contradição com o princípio de Pauli. Assim, os quarks emergem como representações fundamentais de $SU(N_c) \otimes SU(N_f)$ onde $SU(N_c)$ é o grupo de cor e $SU(N_f)$ o grupo sabor. A dinâmica que governa o sistema de quarks se encontra, portanto, na teoria de campos de calibre não-abeliana.

A densidade de Lagrangeana da QCD , é dada por

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a + \bar{\psi}_f \left(\frac{i}{2} \not{D} - m_f \right) \psi_f - \frac{1}{2\alpha} (\partial^\mu W_\mu^a)^2, \quad (1.1)$$

onde o tensor intensidade de campo $G_{\mu\nu}^a$ em termos do campo gluônico W_μ^a é

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g f^{abc} W_{\mu b} W_{\nu c}, \quad (1.2)$$

e a derivada covariante de calibre é

$$(D_\mu)_{cc'} = \delta_{cc'} \partial_\mu - \frac{i}{2} g \lambda_{cc'}^a W_{\mu a}, \quad (1.3)$$

e $\not{D} = \gamma^\mu D_\mu$ sendo λ_a^C as $N_c^2 - 1$ matrizes de Gell-Mann que representam os geradores do grupo $SU(N_c)$ na representação fundamental, isto é

$$T_{\alpha\alpha'}^a = \frac{1}{2} \lambda_{\alpha\alpha'}^a \quad (1.4)$$

e

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c \quad (1.5)$$

A constante de acoplamento forte é g e f_{abc} são as constantes de estrutura $SU(N_c)$, que na representação adjunta são $-if_{abc} = (T_a)_{bc}$.

Na equação (1.1), m_f representa uma matriz diagonal, independente da cor, cujos elementos são as massas correntes dos quarks. Os valores "experimentais" (com a renormalização ao redor do ponto de 1 GeV) são $m_u^0 = 5 \pm 2 \text{ MeV}$, $m_d^0 = 9 \pm 3 \text{ MeV}$ e $m_s^0 = 175 \pm 55 \text{ MeV}$ [18].

No limite em que as massas dos quarks são desprezadas, a densidade de Lagrangeana $\mathcal{L}_{QCD}$, tem algumas propriedades de simetria importantes. É invariante sob as simetrias discretas no espaço-tempo por Conjugação de Carga, Paridade e Inversão Temporal, $C \otimes P \otimes T$. Também é invariante sob as simetrias internas globais,

$$SU(N_c) \otimes SU_L(N_f) \otimes SU_R(N_f) \otimes U_V(N_f) \otimes U_A(N_f) \quad .$$

Desta forma, a transformação de fase $\psi'(x) = e^{-i\alpha} \psi(x)$ que age no índice sabor, implica, de acordo com o teorema de Noether, que se tem uma corrente conservada

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (1.6)$$

A carga associada a essa corrente, definida por

$$Q = \int d^3x j_0(x) \quad (1.7)$$

é constante no tempo. A densidade de Lagrangeana (1.1) também é invariante com relação a cada uma das transformações de 1-parâmetro $\psi_f'(x) = e^{-i\alpha_f} \psi_f(x)$ agindo no índice sabor f . Se o termo de massa é diagonal então tem-se a simetria global,

$$U_u(1) \otimes U_d(1) \otimes U_s(1) \otimes \dots \otimes U_{N_f}(1) \quad ,$$

que corresponde à conservação de cada sabor separadamente. Quando todas as massas são zero, $\mathcal{L}_{QCD}$ é invariante pelas transformações

$$\psi'(x) = e^{-i\theta^a T_a} \psi(x) \quad (1.8)$$

e invariante por

$$\psi'(x) = e^{-i\theta^a T_a \gamma^5} \psi(x), \quad (1.9)$$

que são uma rotação no espaço de isospin e no espaço γ^5 -isospin, respectivamente. A última das transformações acima é chamada de transformação quiral e $\theta^a(x)$ são os parâmetros da transformação. A *simetria quiral*, é a simetria fundamental da QCD e mais importante e respeitada nas interações hadrônicas de baixa energia.

As correntes de Noether vetoriais e axiais são

$$j_\mu^a = \bar{\psi}^b \gamma_\mu T_{bc}^a \psi^c \quad (1.10)$$

$$j_{\mu 5}^a = \bar{\psi}^b \gamma_\mu \gamma_5 T_{bc}^a \psi^c, \quad (1.11)$$

com $a = 1, 2, \dots, 8$ e as cargas associadas

$$Q^a = \int d^3x j_0^a(x) \quad (1.12)$$

$$Q_5^a = \int d^3x j_{05}^a(x) \quad (1.13)$$

que satisfazem, por sua vez, as seguintes regras de comutação

$$[Q^a, Q^b] = i f^{abc} Q^c \quad (1.14)$$

$$[Q^a, Q_5^b] = i f^{abc} Q_{5c} \quad (1.15)$$

$$[Q_5^a, Q_5^b] = i f^{abc} Q^c. \quad (1.16)$$

Quando o termo de massa, na densidade de Lagrangeana, é nulo, podemos separá-la completamente em duas partes com dependências nos campos ψ_L e ψ_R , definidos por

$$\psi_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi \quad (1.17)$$

$$\psi_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi. \quad (1.18)$$

Assim,

$$\mathcal{L}_{QCD}^{(0)} = \frac{i}{2} \bar{\psi}_{La} \not{D}_{cc'} \psi_{La}^{c'} + \frac{i}{2} \bar{\psi}_{Ra} \not{D}_{cc'} \psi_{Ra}^{c'} + \text{termos com } W_\mu^a \quad (1.19)$$

é invariante frente as transformações do grupo de simetria sabor $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ dos campos esquerda e direita de acordo com:

$$\psi'_L(x) = e^{i\frac{\lambda_C}{2}\alpha_L^a}\psi_L(x) \quad (1.20)$$

$$\psi'_R(x) = e^{i\frac{\lambda_C}{2}\alpha_R^a}\psi_R(x) \quad (1.21)$$

Isto permite escrever as seguintes combinações das cargas

$$Q_L^a = Q^a - Q_5^a \quad (1.22)$$

$$Q_R^a = Q^a + Q_5^a, \quad (1.23)$$

que são os geradores da simetria quiral $SU_L(N_f) \otimes SU_R(N_f)$, uma simetria global da $\mathcal{L}_{QCD}$ no limite de massas nulas (limite quiral). Agora temos

$$[Q_L^a, Q_L^b] = if^{abc}Q_{Lc} \quad (1.24)$$

$$[Q_R^a, Q_R^b] = if^{abc}Q_{Rc} \quad (1.25)$$

$$[Q_L^a, Q_R^b] = 0, \quad (1.26)$$

que manifesta o caráter de simetria quiral. As correntes de Noether

$$j_{\mu L}^a = \bar{\psi}_L^b \gamma_\mu T_{bc}^a \psi_L^c \quad (1.27)$$

$$j_{\mu R}^a = \bar{\psi}_R^b \gamma_\mu T_{bc}^a \psi_R^c \quad (1.28)$$

são conservadas

$$\partial^\mu j_{\mu L}^a = \partial^\mu j_{\mu R}^a = 0 \quad (1.29)$$

e podem ser escritas em função das correntes vetoriais e axiais, da forma

$$j_{\mu L}^a = \frac{1}{2} [j_\mu^a - j_{\mu 5}^a] \quad (1.30)$$

$$j_{\mu R}^a = \frac{1}{2} [j_\mu^a + j_{\mu 5}^a]. \quad (1.31)$$

A questão importante é saber sob que forma a simetria da $\mathcal{L}_{QCD}$ é realizada na natureza. Distingue-se dois modos possíveis de se realizar uma simetria: a primeira forma, corresponde ao modo normal, Wigner-Weyl, $Q^a | 0 \rangle = 0$ e $Q_5^a | 0 \rangle = 0$, onde o vácuo tem a mesma simetria da $\mathcal{L}_{QCD}$, ou seja, é invariante frente às transformações do grupo de simetria e a consequência muito importante é o fato de que todos os membros do

estado de multiplete tem a mesma massa, ou seja, as excitações associadas aos campos que transformam-se de maneira irredutível sob o grupo de simetria tem a mesma massa. O outro modo da realização da simetria é o chamado modo de Nambu-Goldstone, $Q^a | 0 \rangle \neq 0$ e $Q_5^a | 0 \rangle \neq 0$, onde o vácuo não é invariante por todo o grupo de simetria. Se a teoria é invariante sob as transformações do grupo de simetria e o vácuo (estado fundamental) não é invariante então, o espectro da teoria tem excitações sem massa, chamados bósons de Goldstone (Teorema de Goldstone). Um exemplo dessa situação é a simetria quiral das interações fortes. Neste último modo, costuma-se dizer que a simetria é quebrada espontaneamente. Há tantos bósons de Goldstone (partículas com massa zero) quanto são os geradores de simetria espontaneamente quebradas. O termo de massa quebra explicitamente a simetria $SU_L(N_f) \otimes SU_R(N_f)$ e a simetria axial $U_A(1)$, portanto, tem-se

$$\partial_\mu j^{\mu a}(x) = i\bar{\psi}(x) \left[m_0, \frac{\lambda^a}{2} \right] \psi(x) \quad (1.32)$$

$$\partial_\mu j_5^{\mu a}(x) = i\bar{\psi}(x) \left\{ m_0, \frac{\lambda^a}{2} \right\} \gamma_5 \psi(x). \quad (1.33)$$

Observa-se que para $m_u^0 = m_d^0 = m_s^0$, as nove correntes j_μ^a são conservadas e a densidade de Lagrangiana só é invariante pelo grupo $SU(N_f)$.

As massas dos quarks u e d , $m_{u,d}^0 \leq 10 \text{ MeV}$ podem ser desprezíveis quando comparadas com as escalas típicas de massas dos hadrons ao redor de 1 GeV , sugerindo que os termos que quebram a simetria quiral sejam tratados como perturbações.

O mecanismo de quebra espontânea da simetria é muito interessante na descrição dos píons. A massa do pión é a menor de todos os hadrons conhecidos. Pode-se explicar isto qualitativamente, ao se interpretar o pión como um bóson de Goldstone proveniente da quebra espontânea da simetria quiral. A massa finita do pión é então explicada dizendo que a simetria quiral não é exata na natureza, mas quase exata, no sentido de que a corrente axial deixa de ser conservada por um valor pequeno, proporcional à massa do pión. Existiria, portanto, uma pequena quebra explícita de simetria, na forma de uma massa dos quarks[19].

Quando há uma pequena quebra explícita a corrente axial é parcialmente conservada, explicando o grande sucesso das relações PCAC.

A evidência substancial da quebra espontânea da simetria quiral vem da fenomenologia hadrônica a baixas energias e da QCD na rede e é manifestada pelo condensado do par de quark $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ não-nulo no vácuo da QCD . Explicitamente isso ocorre através de um ganho de massa dos quarks u , d e s . O valor típico "experimental" é $\langle \bar{u}u \rangle^\dagger \cong \langle \bar{d}d \rangle^\dagger \cong -(240 \pm 25) \text{ MeV}$. Resultados para $\langle \bar{s}s \rangle$ são de magnitudes similares. No limite quiral $m_0 = 0$, temos $\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle = \langle \bar{s}s \rangle$. Se o vácuo fosse invariante sob transformações quirais, o valor esperado da densidade escalar no vácuo seria nulo (modo W-W).

A quebra explícita da simetria quiral através das massas m_0 deve ser comparada com o parâmetro de escala da QCD , $\Lambda_{QCD} \sim 100 - 200 \text{ MeV}$. A quebra explícita da simetria quiral, evidentemente é pequena para os quarks u e d . Espera-se efeitos mais consideráveis no setor da estranheza, onde m_s^0 é comparável com Λ_{QCD} . Um dos propósitos deste trabalho, é investigar o papel da quebra da simetria através da massa do quark estranho de uma maneira não perturbativa.

No limite quiral, a densidade de Lagrangeana (1.19) possui mais uma simetria; a simetria axial $U_A(1)$ que é implementada pela transformação

$$\psi'(x) = e^{-i\beta\gamma_5} \psi(x) . \quad (1.34)$$

A quebra espontânea dessa simetria, de acordo com o teorema de Goldstone, conduziria ao aparecimento de um singleto de sabor sem massa. No caso de $N_f = 2$, o candidato natural é um méson pseudoescalar cuja massa teria de ser compatível com a dos píons. Isto não é aceitável porque, experimentalmente, a massa deste méson η é muito maior que a dos píons. Assim, um bóson de Goldstone associado à quebra espontânea da simetria $U_A(1)$, segundo Weinberg, teria que ter uma massa menor do que $\sqrt{3}m_\pi$.

Por outra parte, a realização Wigner-Weyl implicaria que todos os hádrons massivos apareceriam como doubletos de paridade $(0^-, 0^+)$, $(1^-, 1^+)$, e isto não é assim. Por isto, representa um sério problema e é chamado de problema $U_A(1)$.

O primeiro fato importante de notar é que a corrente de Noether associada à invariância $U_A(1)$ não é conservada na teoria quântica de campos. A presença do termo anômalo natural da identidade de Ward, é do mesmo tipo do que a anomalia Adler-Bell-Jackiw responsável pelo decaimento eletromagnético $\pi \rightarrow 2\gamma$ do pion neutro. Estes termos anômalos são unicamente determinados pelo diagrama triângulo de quark usual.

A quebra desta simetria é conhecida na natureza, e é provavelmente quebrada na QCD pelo efeito INSTANTON[13]. As simetrias da densidade de Lagrangeana clássica que são quebradas, à nível quântico, são chamadas de anomalias.

Considerando o singleto de correntes axiais $SU(3)$:

$$j_5^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi \quad (1.35)$$

relativo à simetria $U_A(1)$, a divergência dessas correntes se anulam no limite quiral $m_0 \rightarrow 0$. Aliás, no estudo a nível quântico, demonstra-se que a anomalia axial da QCD [20] é

$$\partial_\mu j_5^\mu = \frac{g^2 N_f}{8\pi^2} \vec{E} \cdot \vec{B} \quad (1.36)$$

onde

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = \frac{1}{8} \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} F_a^{\mu\nu} F_a^{\lambda\sigma} = \frac{1}{8} \partial^\mu \left(4\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \left[W_a^\nu \partial^\lambda W^{\sigma a} + \frac{g}{3} f_{abc} W^{\nu a} W^{\lambda b} W^{\sigma c} \right] \right) , \quad (1.37)$$

que é o produto escalar dos cromocampos elétricos e magnéticos. A quebra explícita da simetria quiral introduz o termo adicional $2i\bar{\psi}m_0\gamma^5\psi$, assim

$$\partial_\mu j_5^\mu = 2i\bar{\psi}m_0\gamma^5\psi + \frac{g^2 N_f}{64\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} F_a^{\mu\nu} F_a^{\lambda\sigma}, \quad (1.38)$$

e finalmente, temos uma corrente conservada,

$$j_5'^\mu = j_5^\mu - \frac{g^2}{8\pi^2} N_f \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \left[W_a^\nu \partial^\lambda W^{\sigma a} + \frac{g}{3} f_{abc} W^{\nu a} W^{\lambda b} W^{\sigma c} \right], \quad (1.39)$$

mas esta corrente não é invariante calibre. Relembramos que só o índice de Pontryagin é invariante na *QCD*,

$$n = \frac{g^2}{64\pi^2} \int d^4x \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} F_a^{\mu\nu} F_a^{\lambda\sigma} \quad (1.40)$$

o qual depende só das propriedades topológicas globais e é zero na ausência de *instantons*.

As equações Yang-Mills não-abelianas, admitem soluções pela qual a ação clássica

$$S_{cl} = \int d^4x \vec{E} \cdot \vec{B} \quad (1.41)$$

é finita, chamada soluções instantons, que são acopladas aos quarks. Na ausência de instantons, a carga correspondente à corrente $j_5'^\mu$,

$$Q'_5 = \int d^3x j_5'^0(x), \quad (1.42)$$

é invariante de gauge e são os geradores da simetria $U_A(1)$. Isto nos leva de volta ao nosso indesejado bóson de Goldstone. Em presença de instantons ($n = 1, 2, \dots$) a corrente conservada não é invariante de gauge, porém pode resolver o problema $U_A(1)$. G.'t Hooft demonstrou que os correspondentes bósons de Goldstone não aparecem como pólos de massa zero das funções de Green invariantes de calibre, mas só como um único invariante de calibre, e este, não é relevante fisicamente. Estes bósons de Goldstone não são detectados experimentalmente.

Foi demonstrado por 't Hooft[13] que o resultado da existência do instanton, é induzir uma interação efetiva entre quarks que tem a forma de um determinante no espaço de sabor

$$\mathcal{L}_{det} \cong \det \left[\bar{\psi} \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \psi \right] + \det \left[\bar{\psi} \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \psi \right]. \quad (1.43)$$

Esta interação envolve os três sabores simultaneamente. Para o caso $SU_{sabor}(2)$, só com os quarks u e d , existe a quebra $U_A(1)$, e a interação pode ser absorvida pela simetria $SU_L(2) \otimes SU_R(2) \otimes U_V(1)$ na interação quártica.

1.2 O Modelo Nambu e Jona-Lasinio (NJL)

Desejamos ter um modelo cuja densidade de Lagrangeana seja simples de trabalhar, mas que contenha as mesmas estruturas de simetrias que aparecem na *QCD*. Um bom candidato que satisfaz às condições de simetria e que apresenta a quebra dinâmica da simetria quiral numa completa analogia com a supercondutividade na primeira aproximação é o modelo efetivo de Nambu e Jona-Lasinio (NJL). Este modelo surgiu, em 1961, com dois trabalhos intitulados "*Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy With Superconductivity*"[2]. Em sua forma original, foi construído como uma teoria pré-*QCD* de núcleons que interagem via uma interação efetiva de dois corpos e que contém as simetrias $SU_V(2) \otimes SU_A(2) \otimes U_V(1)$ excluindo a simetria $U_A(1)$ de acordo com as observações experimentais.

O termo de interação que foi usado no trabalho original de Nambu-Jona-Lasinio (1961) tem a forma

$$\mathcal{L}_{int} = G [(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5 \vec{\tau} \psi)^2] \quad (1.44)$$

É uma teoria dinâmica de partículas elementares na qual núcleons e anti-núcleons considerados como blocos fundamentais. Os mésons são derivados de uma maneira unificada via um campo espinorial fundamental. Neste modelo, o canal de interação $\bar{N} - N$ é atrativo e, em analogia com a interação efetiva $e - \bar{e}$ num supercondutor, é responsável pela formação de pares de Cooper que são formados por $\bar{N} - N$. A idéia física básica, além da característica fundamental do modelo de partícula-composta, é o tratamento dinâmico das interações constituindo parte essencial da teoria. O esquema é motivado pela observação de uma interessante analogia entre as propriedades das partículas de Dirac e as excitações de quase-partículas, como as que aparecem na teoria da supercondutividade de Bardeen, Cooper and Schrieffer (BCS)[21] em 1957. Posteriormente Bogoliubov deu uma formulação matemática elegante a essa teoria. A característica principal da teoria BCS é que ela produz um "gap" de energia entre o estado fundamental e os estados excitados num supercondutor. O parâmetro que caracteriza o "gap", é obtido essencialmente, como uma equação auto-consistente, Hartree-Fock(HF), da interação efetiva elétron-elétron. O aparecimento da massa do núcleon ocorre através do mesmo mecanismo de aparecimento do "gap" de energia na teoria da supercondutividade. Usa-se a aproximação generalizada de HF, que trata os núcleons como excitações de quase-partículas, e considera-se então um modelo simplificado tipo uma interação quadri-fermiônica não linear, que incorpora a simetria quiral. Como consequência desta simetria surgem, automaticamente, estados ligados pseudo-escalares de massa zero no canal de interação núcleon-antinúcleon, em analogia com a interação efetiva elétron-elétron num supercondutor (responsável pela formação de pares de Cooper), que neste modelo são identificados como píons idealizados. Encontram-se ainda píons de massa finita como estados ligados núcleon-antinúcleon ao se introduzir uma pequena massa fermiônica dentro da densidade de Lagrangiana originando

uma quebra explícita da simetria quiral.

Quando a QCD foi formulada, o modelo de NJL foi criticado e abandonado, primeiro por não ser fundamental e também por não ser renormalizável (interação quártica pontual). Logo depois foi novamente levado em consideração já que ele compartilha algumas características importantes com a QCD a baixas energias (fase não perturbativa). Assim o modelo NJL foi reinterpretado como uma teoria entre quarks, supondo que os graus de liberdade dos glúons podem ser congelados e absorvidos pelas interações efetivas pontuais entre os quarks, isto é, tem-se uma densidade de Lagrangeana efetiva, invariante sob uma transformação quiral, de férmions relativísticos que interagem através de acoplamentos férmion-antiférmion locais.

A principal importância deste modelo é o fato de que a densidade de Lagrangeana que o descreve incorpora as simetrias da QCD que descrevemos antes, e isso permite-nos ver como funciona o mecanismo de quebra dinâmica de simetria. Ele oferece ainda um método para se estudar a quebra espontânea da simetria quiral e as suas manifestações na física de hádrons, tais como a geração dinâmica de massa dos quarks, o surgimento do condensado de quarks e o papel especial dos píons como bósons de Goldstone. Além disso, como consequência das propriedades de simetria, obtém-se resultados bem conhecidos da álgebra de correntes, tais como as relações de Goldberger-Treiman (GT) e Gell-Mann-Oakes-Renner (GOR), sustentadas pela QCD .

Para definir completamente o modelo NJL , como um modelo efetivo, devemos especificar ainda o esquema de regularização. Isto implica em especificar a escala de comprimento da teoria, a qual se expressa por meio de um limite para o momento do quark. Podemos considerar o "cutoff", como uma aproximação bem "grosseira" de maneira que possamos implementar a propriedade de liberdade assintótica da QCD , suprimindo com isso a interação entre quarks para momentos transferidos grandes tipo espaço, simulando assim, a conduta da constante de acoplamento. Outra deficiência do modelo é que ele não apresenta a propriedade do confinamento da cor da QCD (não existem estados de cores livres), portanto a sua aplicabilidade está limitada aos fenômenos hadrônicos que pouco dependem do mecanismo de confinamento. Porém, para muitos aspectos da física de hádrons a baixa energias, as simetrias da QCD são pelo menos tão importantes como o confinamento.

O modelo efetivo NJL na versão $SU(2)$ tem sido pesquisado extensivamente e reproduz bem as características da QCD na fase não perturbativa, isto é, a origem dinâmica da quebra espontânea da simetria quiral, a existência de condensados de pares de quarks no vácuo, a geração dinâmica de massa de quarks e a fenomenologia do pión. A generalização para três sabores, onde a estranheza é introduzida, será nosso estudo seguinte, que faremos em detalhe.

1.3 O Modelo Nambu–Jona–Lasinio (*NJL*) $SU(3)$ Sabor Generalizado

O modelo *NJL* e sua generalização tem sido usado intensamente para estudar as propriedades dos mésons mais leves na escala hadrônica. Baseado nas simetrias da *QCD* e incorporando o termo de quebra da simetria axial $U_A(1)$, a interação entre quarks é descrita pela seguinte densidade de Lagrangeana generalizada:

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi} [i\partial\!\!\!/ - m_0] \psi + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_{tHooft} \quad (1.45)$$

onde $\mathcal{L}_4$ é a interação quártica quark-quark compatível com as simetrias da *QCD*,

$$C \otimes P \otimes T \otimes SU_{cor}(N) \otimes SU_L(3) \otimes SU_R(3) \otimes U_V(1) ,$$

no limite quiral.

O termo $\mathcal{L}_{tHooft}$ é a interação efetiva de seis campos fermiônicos requerida para a quebra da simetria axial.

O campo do quark ψ é um vetor coluna nos espaços de cor, de sabor e de Dirac, ou seja,

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_d \\ \psi_s \end{pmatrix} , \quad (1.46)$$

para cada cor, e

$$m_0 = \begin{pmatrix} m_u^0 & 0 & 0 \\ 0 & m_d^0 & 0 \\ 0 & 0 & m_s^0 \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

é a matriz de massa independente da cor, com as massas correntes dos quarks na diagonal.

Considera-se a interação quadri-fermiônica $\mathcal{L}_4$ mais geral. A densidade de Lagrangeana da interação de quatro-fermions é expressa como uma combinação linear de correntes vectoriais e axiais, de singleto e octeto de sabor e cor. A estrutura tem a forma,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 = & C_1 [(\bar{\psi} 1^C \lambda_0 \gamma^\mu \psi)^2 + (\bar{\psi} 1^C \lambda_0 \gamma^\mu \gamma_5 \psi)^2] + C_2 [(\bar{\psi} 1^C \lambda_a \gamma^\mu \psi)^2 + (\bar{\psi} 1^C \lambda_a \gamma^\mu \gamma_5 \psi)^2] + \\ & C_3 [(\bar{\psi} \lambda_j^C \lambda_0 \gamma^\mu \psi)^2 + (\bar{\psi} \lambda_j^C \lambda_0 \gamma^\mu \gamma_5 \psi)^2] + C_4 [(\bar{\psi} \lambda_j^C \lambda_a \gamma^\mu \psi)^2 + (\bar{\psi} \lambda_j^C \lambda_a \gamma^\mu \gamma_5 \psi)^2] + \\ & C_5 [(\bar{\psi} 1^C \lambda_0 \gamma^\mu \psi)^2 - (\bar{\psi} 1^C \lambda_0 \gamma^\mu \gamma_5 \psi)^2] + C_6 [(\bar{\psi} \lambda_j^C \lambda_0 \gamma^\mu \psi)^2 - (\bar{\psi} \lambda_j^C \lambda_0 \gamma^\mu \gamma_5 \psi)^2] \quad (1.48) \end{aligned}$$

onde λ_a e λ_j^C ($a = 1, 2, \dots, 8$ e $j = 1, 2, \dots, N^2 - 1$) são os geradores do grupo $SU(3)$ sabor e $SU(N)$ cor, com $\text{tr}(\lambda_j \lambda_{j'}) = 2\delta_{jj'}$ e $\text{tr}(\lambda_i^C \lambda_j^C) = 2\delta_{ij}$. A matriz $\lambda_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}1$ está no espaço de sabor e 1^C é a matriz identidade no espaço de cor.

A densidade de Lagrangeana (1.48) deve ser escrita na representação invariante Fierz[22], isto é, invariante sob a permutação das componentes dos campos fermiônicos ψ_a e ψ_b , isto é,

$$\mathcal{F}(\bar{\psi}\Gamma\psi)^2 = -\bar{\psi}_c\psi_a\bar{\psi}_d\psi_b C^{mk}\Gamma_{ca}^m\Gamma_{db}^m, \quad (1.49)$$

onde o sinal menos corresponde à troca do férmion, Γ_{ab}^k corresponde ao produto tensorial das matrizes de Dirac, sabor e cor e C^{mk} , a matriz de transformação com $C_{mk}C_{km} = 1$. Assim, a densidade de Lagrangeana invariante de Fierz $\mathcal{F}\mathcal{L}_{4f}$ é construída da forma:

$$\mathcal{F}\mathcal{L}_{4f} = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{4f} + \mathcal{F}\mathcal{L}_{4f}), \quad (1.50)$$

com

$$\mathcal{F} \cdot \mathcal{F} = 1$$

e

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}\mathcal{L}_{4f}) = \mathcal{F}\mathcal{L}_{4f}$$

A forma invariante de Fierz de $\mathcal{L}_{4f}$ é útil e conveniente, porque evita o cálculo explícito dos termos de troca, isto é, os elementos de matriz da interação tem termos diretos e de troca, que são idênticos na interação invariante Fierz, então só o termo direto passa ser considerado. Usando as transformações de Fierz (Apendice A), obtém-se a interação efetiva quadri-fermiônica invariante pelas simetrias estudadas e simétrica sob a troca dos campos fermiônicos,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\mathcal{L}_{4f} = & \frac{1}{2}G_1 [(\bar{\psi}\lambda_a\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma^5\lambda_a\psi)^2] - \frac{1}{2}G_2 [(\bar{\psi}\gamma^\mu\lambda_a\psi)^2 + (\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\lambda_a\psi)^2] - \\ & \frac{1}{2}G_3 [(\bar{\psi}\gamma^\mu\lambda_0\psi)^2 + (\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\lambda_0\psi)^2] - \frac{1}{2}G_4 [(\bar{\psi}\gamma^\mu\lambda_a\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\lambda_a\psi)^2] + \\ & + \text{ termo com octeto de cor } . \end{aligned} \quad (1.51)$$

A dimensão das constantes de acoplamento G_i é $[L]^2$.

A interação efetiva $\mathcal{L}_{4H\phi f}$ que quebra a simetria $U_A(1)$ pela anomalia axial, mas conserva a simetria quiral e a simetria $SU(N)$, é a interação de seis-férmions no espaço sabor. A interação mínima que quebra $U_A(1)$ é um operador de dimensão mais baixa sem derivadas e fatores de cores explícitos e que é da forma da equação (1.43).

O termo anômalo dado pela equação (1.43), tem uma importância fundamental; permite uma mistura entre diferentes sabores. Com efeito, depois da quebra dinâmica da simetria quiral, induz-se vértices efetivos quárticos, como por exemplo, $(\bar{\psi}_u\psi_u)(\bar{\psi}_u\psi_u)(\bar{\psi}_s\psi_s)$ e $-(\bar{\psi}_d\psi_d)(\bar{\psi}_u i\gamma^5\psi_u)(\bar{\psi}_s i\gamma^5\psi_s)$, isto é, permite uma mistura de sabor nos canais escalar

¹No sistema de unidades naturais, $c = \hbar = 1$, $[L] = M^D$, onde D é a dimensão do espaço-tempo. Então a dimensão canônica do campo fermiônico é $[\psi] = [\bar{\psi}] = M^{\frac{D-1}{2}}$. Assim, para $D = 4$ têm-se que a dimensão da constante de acoplamento G_i é L^2 .

e pseudoescalar. No limite quiral, é o único operador que quebra a simetria $U_A(1)$. Na ausência do limite quiral, têm-se demonstrado que existem outros operadores os quais quebram a simetria $U_A(1)$ mas são proporcionais as massas correntes dos quarks [23]. Fenomenologicamente, tem sido discutidos termos extras que não mudam os resultados qualitativos. No esquema da expansão $1/N$ na QCD , sugere que o termo de quebra $U_A(1)$ na densidade de Lagrangeana efetiva tenha a estrutura $[\ln \det(\bar{\psi}_i \frac{1-\gamma^5}{2} \psi_j)]^2$. Porém, pode-se sempre expandir de forma que os termos sejam invariantes $SU_L(3) \otimes SU_R(3)$ em potências de $[\det(\bar{\psi}_i \frac{1-\gamma^5}{2} \psi_j) + \det(\bar{\psi}_i \frac{1+\gamma^5}{2} \psi_j)]^n$. Aliás, para um número pequeno de campos de quarks e suas derivadas, $\mathcal{L}_{tHooft}^1$ é a nossa única escolha.

Reescrevemos a equação (1.43) como,

$$\mathcal{L}_{tHooft}^1 = \frac{K_1}{2^3 3!} \epsilon_{abc} \epsilon_{def} [(\bar{\psi}_a \Gamma^+ \psi_d)(\bar{\psi}_b \Gamma^+ \psi_e)(\bar{\psi}_c \Gamma^+ \psi_f) + (\bar{\psi}_a \Gamma^- \psi_d)(\bar{\psi}_b \Gamma^- \psi_e)(\bar{\psi}_c \Gamma^- \psi_f)] \quad (1.52)$$

onde ϵ_{abc} é o tensor antisimétrico e $a, b, c, \dots \in u, d, s$.

O termo mais geral que quebra a simetria $U_A(1)$ deve construir-se incluindo também a cor. Os termos com matrizes de cor λ_i^C são :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{tHooft}^2 = & \frac{K_2}{2^3 3!} \frac{1}{3} \epsilon_{abc} \epsilon_{def} [(\bar{\psi} \Gamma^+ \psi)(\bar{\psi} \Gamma^+ \lambda_\alpha^C \psi)(\bar{\psi} \Gamma^+ \lambda^{C\alpha} \psi) + (\bar{\psi} \Gamma^- \psi)(\bar{\psi} \Gamma^- \lambda_\alpha^C \psi)(\bar{\psi} \Gamma^- \lambda^{C\alpha} \psi) + \\ & + (\bar{\psi} \Gamma^+ \lambda_\alpha^C \psi)(\bar{\psi} \Gamma^+ \psi)(\bar{\psi} \Gamma^+ \lambda_\alpha^C \psi) + (\bar{\psi} \Gamma^- \lambda_\alpha^C \psi)(\bar{\psi} \Gamma^- \psi)(\bar{\psi} \Gamma^- \lambda_\alpha^C \psi) + \\ & + (\bar{\psi} \Gamma^+ \lambda_\alpha^C \psi)(\bar{\psi} \Gamma^+ \lambda^{C\alpha} \psi)(\bar{\psi} \Gamma^+ \psi) + (\bar{\psi} \Gamma^- \lambda_\alpha^C \psi)(\bar{\psi} \Gamma^- \lambda^{C\alpha} \psi)(\bar{\psi} \Gamma^- \psi)] \quad (1.53) \end{aligned}$$

Assim, o termo mais geral que quebra a simetria $U_A(1)$ é

$$\mathcal{L}_{tHooft} = \mathcal{L}_{tHooft}^1 + \mathcal{L}_{tHooft}^2 \quad (1.54)$$

Para construir a interação de seis-férmions que quebra $U_A(1)$ simétrica ao intercâmbio fermiônico, é necessário considerar os cinco termos de troca de acordo com $3!$ elementos da permutação do grupo $SU(3)$ sabor. A estrutura "determinantal" de 't Hooft no espaço sabor é por construção invariante sob uma transformação de Fierz. Usando as transformações de Fierz (Apendice A), a densidade de Lagrangeana mais geral invariante de Fierz, $\mathcal{F}\mathcal{L}_{tHooft}$, é,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\mathcal{L}_{tHooft} = & \frac{1}{6} \frac{1}{3} D_{ijk} [K [(\bar{\psi} \lambda^i \psi)(\bar{\psi} \lambda^j \psi)(\bar{\psi} \lambda^k \psi) - (\bar{\psi} \lambda^i \psi)(\bar{\psi} i \gamma^5 \lambda^j \psi)(\bar{\psi} i \gamma^5 \lambda^k \psi) + \\ & - (\bar{\psi} i \gamma^5 \lambda^i \psi)(\bar{\psi} \lambda^j \psi)(\bar{\psi} i \gamma^5 \lambda^k \psi) - (\bar{\psi} i \gamma^5 \lambda^i \psi)(\bar{\psi} i \gamma^5 \lambda^j \psi)(\bar{\psi} \lambda^k \psi)] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + K' \left[(\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \lambda^i \psi) (\bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \lambda^j \psi) (\bar{\psi} \lambda^k \psi) + (\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \lambda^i \psi) (\bar{\psi} \lambda^j \psi) (\bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \lambda^k \psi) + \right. \\
& + (\bar{\psi} \lambda^i \psi) (\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \lambda^j \psi) (\bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \lambda^k \psi) + (\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \gamma^5 \lambda^i \psi) (\bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \lambda^j \psi) (\bar{\psi} i \gamma^5 \lambda^k \psi) + \\
& \left. + (\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \lambda^i \psi) (\bar{\psi} i \gamma^5 \lambda^j \psi) (\bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \gamma^5 \lambda^k \psi) + (\bar{\psi} i \gamma^5 \lambda^i \psi) (\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \gamma^5 \lambda^j \psi) (\bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \lambda^k \psi) \right] . \quad (1.55)
\end{aligned}$$

Temos algumas observações que vale a pena considerar. Primeiro, $\mathcal{F}\mathcal{L}_{tHooft}$ têm uma estrutura não-trivial que mistura os sabores. Segundo, o arranjo de Fierz, conduz a tensores bilineares de Dirac de singlete na cor e um octeto de cor. O termo $\mathcal{F}\mathcal{L}_{tHooft}$ introduz dois acoplamentos K e K' cuja dimensão é $[L]^5$.

A primeira parte de (1.55), controlada por K , é essencial para remover a degenerescência de massa requerida para o sistema $\eta - \eta'$, como veremos mais na frente.

O segundo termo controlado por K' possui interações tensoriais as quais não foram levados em conta na expansão $1/N$ do modelo. Acredita-se que elas têm importância na descrição dos hádrons vetoriais e pseudovetoriais. Os termos de octetos de cor foram desprezados, o que significa, que os estados intermediários coloridos dos campos auxiliares não são considerados.

Capítulo 2

Expansão $1/N$ no Modelo NJL $SU(3)$ Sabor Generalizado

Neste capítulo implementa-se a expansão $1/N$ e obtém-se uma ação efetiva em série de potências de $\frac{1}{\sqrt{N}}$ usando o método da integral funcional.

Obtemos a massa gerada para os quarks a partir das equações de "gap" como consequência da quebra da simetria quiral. Na ordem dominante, obtém-se as correções radiativas aos propagadores livres dos campos auxiliares aparecendo propagadores mistos entre os campos escalar-vetorial e pseudoescalar-axial.

2.1 A Expansão $1/N$

Na Teoria Quântica de Campos e Estatística são interessantes os sistemas que contêm grupos de simetrias interna. Em muitos casos, o número de graus de liberdade interna N do modelo, pode ser tratado como um parâmetro livre. Assim, quando tomamos o limite de N tendendo ao infinito obteremos uma simplificação na dinâmica da teoria. Um desenvolvimento sistemático do esquema de aproximação de estudo para o limite $N \rightarrow \infty$ e as considerações finitas para correções de N , conduzem à expansão em potências de $\frac{1}{\sqrt{N}}$. Frequentemente a aproximação de ordem zero ($N \rightarrow \infty$) é boa para uma teoria com N finito real. No contexto da física de partículas a expansão $\frac{1}{N}$ foi introduzida por 'tHooft [24], que propôs a generalização do grupo de simetria $SU(3)$ cor padrão da QCD pelo grupo de simetria $SU(N)$. Isto proporcionou a obtenção de vários resultados qualitativos que concordam com os dados experimentais. Os gráficos de Feynman dominantes neste limite, são classificados de acordo com simples considerações topológicas [25].

Comparada com a teoria de perturbação na constante de acoplamento, a expansão $\frac{1}{N}$ pode dar resultados que a anterior não exhibe até uma ordem finita. Por exemplo, em Teoria de Campos, temos a geração dinâmica de massa nos modelos sigma não-linear e Gross-Neveu, que são resultados não analíticos na constante de acoplamento.

Os resultados qualitativos da expansão $\frac{1}{N}$ na *QCD* motivam sua implementação no modelo de *NJL* $SU(3)$ sabor generalizado que reúne as simetrias básicas da *QCD* na escala de baixas energias.

O modelo *NJL* generalizado apresentado no primeiro capítulo (1.45), contém um termo de interação de quatro-férmions e um termo de interação com 6-férmions. Para termos um modelo somente com interações quárticas fermiônicas, é necessário que o termo "determinante" $\mathcal{L}_{\text{Hooft}}$, seja reduzido a uma interação quártica (4-férmions). Para conseguir isto, trata-se de uma maneira análoga a supercondutividade e a quebra dinâmica de simetria quiral.

O termo de anomalia $U_A(1)$ é muito importante porque fornece a mistura entre diferentes sabores, i.é, a quebra dinâmica da simetria quiral induz um vértice efetivo quártico resultando na mistura de sabores nos canais escalares e pseudo-escalares, o que faz com que o termo seja essencial para gerar a diferença de massa observada dos mésons pseudoescalares η e η' .

O processo que induz uma interação efetiva de quatro férmions, deve-se ao fato, de que os números quânticos associados aos vértices de quatro-férmions estão relacionados aos modos mesônicos. Assim o processo consiste na contração de um par ψ e $\bar{\psi}$ dentro de um "loop" de quark. Cada um dos "loops" introduz um fator proporcional a um dos condensados de quark $\langle \bar{u}u \rangle$, $\langle \bar{d}d \rangle$, $\langle \bar{s}s \rangle$ ou uma combinação deles.

Na figura 2.1, mostra-se a interação efetiva quártica fermiônica para o modelo *NJL* generalizado.

Figura 2.1: Interação efetiva do modelo *NJL*.

O condensado de quark é determinado por

$$\langle \bar{\psi}_a \psi_a \rangle = -Tr \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{\not{p} - m_a + i\epsilon} \quad (2.1)$$

onde $\psi_a = u, d = u, s$ e Tr é o traço no espaço de Dirac. A integração no espaço dos momentos é limitada por um "cut-off" euclidiano covariante,

$$\int^{\Lambda} d^4p f(p) = \int d^4p_E \Theta(\Lambda^2 - p_E^2) f(p_E) \quad (2.2)$$

com $p_E^2 = p_0^2 + \vec{p}^2$, o que define o esquema de regularização. Assim,

$$\langle \bar{\psi}_a \psi_a \rangle = -4i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{m_a}{p^2 - m_a^2 + i\varepsilon} = -\frac{1}{4\pi^2} m_a \Lambda^2 \left[1 - \frac{m_a^2}{\Lambda^2} \ln\left(1 + \frac{\Lambda^2}{m_a^2}\right) \right] \quad (2.3)$$

é a expressão que determina o condensado do quark ψ_a , cujo valor é constante, uma vez, definida a escala de energia e a massa gerada do quark ψ_a .

Usando o teorema de Wick, a densidade de Lagrangeana $\mathcal{F}\mathcal{L}_{tHooft}$ invariante Fierz se reduz a uma densidade de Lagrangeana efetiva quártica $\mathcal{F}\mathcal{L}_{tHooft}^{(4)}$ ao fazer a contração de um par de operadores de criação e destruição de forma que fiquem só quatro operadores. Os termos que "sobrevivem" são aqueles em que o traço das matrizes de Dirac sejam diferentes de zero.

A contribuição da interação "determinantal" é obtida contraindo qualquer dos produtos $(\bar{\psi}\lambda_a\psi)$. O resultado do traço dos produtos que contribuem são,

$$\langle \bar{\psi}\lambda_0\psi \rangle = 3\sqrt{\frac{2}{3}}[2\langle \bar{u}u \rangle + \langle \bar{s}s \rangle] , \quad (2.4)$$

e

$$\langle \bar{\psi}\lambda_8\psi \rangle = 3\sqrt{\frac{4}{3}}[\langle \bar{u}u \rangle - \langle \bar{s}s \rangle] , \quad (2.5)$$

usando

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{il}\delta_{km}\delta_{jn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}$$

e

$$\text{tr}\lambda^0 = 3\sqrt{\frac{2}{3}} ,$$

$$\text{tr}\lambda^a = 0 \text{ se } a \neq 0 ,$$

a densidade de Lagrangeana efetiva $\mathcal{F}\mathcal{L}_{tHooft}^{(4)}$ invariante Fierz vem dada por,

$$\mathcal{F}\mathcal{L}_{tHooft}^{(4)} = \frac{1}{2}K \left[\left[\frac{1}{4}\langle \bar{u}u \rangle + \langle \bar{s}s \rangle \right] (\bar{\psi}\lambda_0\psi)^2 + \right.$$

$$\left. -\frac{3}{8}\langle \bar{s}s \rangle [(\bar{\psi}\lambda_1\psi)^2 + (\bar{\psi}\lambda_2\psi)^2 + (\bar{\psi}\lambda_3\psi)^2] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{3}{8}\langle\bar{u}u\rangle[(\bar{\psi}\lambda_4\psi)^2 + (\bar{\psi}\lambda_5\psi)^2 + (\bar{\psi}\lambda_6\psi)^2 + (\bar{\psi}\lambda_7\psi)^2] + \\
& -\frac{1}{8}[4\langle\bar{u}u\rangle - \langle\bar{s}s\rangle](\bar{\psi}\lambda_8\psi)^2 + \\
& -\frac{\sqrt{2}}{8}[\langle\bar{u}u\rangle - \langle\bar{s}s\rangle][(\bar{\psi}\lambda_0\psi)(\bar{\psi}\lambda_8\psi) + (\bar{\psi}\lambda_8\psi)(\bar{\psi}\lambda_0\psi)] + \\
& -\frac{1}{4}[2\langle\bar{u}u\rangle + \langle\bar{s}s\rangle](\bar{\psi}\lambda_0i\gamma^5\psi)^2 + (\frac{1}{8}\langle\bar{s}s\rangle)[(\bar{\psi}\lambda_1i\gamma^5\psi)^2 + (\bar{\psi}\lambda_2i\gamma^5\psi)^2 + (\bar{\psi}\lambda_3i\gamma^5\psi)^2] + \\
& \frac{3}{8}\langle\bar{u}u\rangle[(\bar{\psi}\lambda_4i\gamma^5\psi)^2 + (\bar{\psi}\lambda_5i\gamma^5\psi)^2 + (\bar{\psi}\lambda_6i\gamma^5\psi)^2 + (\bar{\psi}\lambda_7i\gamma^5\psi)^2] + \\
& +\frac{1}{8}[4\langle\bar{u}u\rangle + \langle\bar{s}s\rangle](\bar{\psi}\lambda_8i\gamma^5\psi)^2 + \\
& +\frac{\sqrt{2}}{8}[\langle\bar{u}u\rangle - \langle\bar{s}s\rangle](\bar{\psi}\lambda_0i\gamma^5\psi)(\bar{\psi}\lambda_8i\gamma^5\psi) + (\bar{\psi}\lambda_8i\gamma^5\psi)(\bar{\psi}\lambda_0i\gamma^5\psi)] \quad (2.6)
\end{aligned}$$

Assim, o modelo de NJL mais geral em quatro dimensões com interações quárticas fermiônicas envolvendo N campos coloridos de Dirac e possuindo as propriedades de simetria da QCD é dada pela seguinte densidade de Lagrangeana efetiva invariante Fierz,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = \mathcal{L} = & \bar{\psi}[i\partial - m_0]\psi + \frac{1}{2}K_a^-(\bar{\psi}\lambda_a\psi)^2 + \frac{1}{2}K_a^+(\bar{\psi}\lambda_a i\gamma^5\psi)^2 + \\
& +\frac{1}{2}K_{08}^-(\bar{\psi}\lambda_0\psi)(\bar{\psi}\lambda_8\psi) + (\bar{\psi}\lambda_8\psi)(\bar{\psi}\lambda_0\psi)] + \frac{1}{2}K_{08}^+[(\bar{\psi}\lambda_0i\gamma^5\psi)(\bar{\psi}\lambda_8i\gamma^5\psi) + (\bar{\psi}\lambda_8i\gamma^5\psi)(\bar{\psi}\lambda_0i\gamma^5\psi)] \\
& +\frac{1}{2}G_2[(\bar{\psi}\lambda_a\gamma^\mu\psi)^2 + (\bar{\psi}\lambda_a\gamma^\mu\gamma^5\psi)^2] \quad (2.7)
\end{aligned}$$

onde as constantes vem dadas em termos das constantes de acoplamento do modelo original,

$$K_0^\mp = G_1 \pm \frac{K}{4}[2\langle\bar{u}u\rangle + \langle\bar{s}s\rangle]$$

$$K_1^\mp = K_2^\mp = K_3^\mp = G_1 \mp \frac{3}{8}K\langle\bar{u}u\rangle$$

$$K_4^\mp = K_5^\pm = K_6^\pm = K_7^\mp = G_1 \mp \frac{3}{8}K(\bar{u}u)$$

$$K_8^\mp = G_1 \mp \frac{1}{8}K[4(\bar{u}u) - (\bar{s}s)]$$

$$K_{08}^\mp = \frac{\sqrt{2}}{8}K[(\bar{u}u) - (\bar{s}s)]$$

Descrevamos agora, de forma breve, o método da expansão $\frac{1}{N}$ no nosso modelo, considerando somente a parte escalar[26]. Na teoria de perturbação ordinária os primeiros diagramas de Feynman para o espalhamento entre dois férmions, um do tipo a e um do tipo b ($a \neq b$) são mostrados na figura 2.2, 2.3 e 2.4.

Figura 2.2: Ordem de G_1 .

Figura 2.3: Ordem de NG_1^2 .

Figura 2.4: Ordem de G_1^2 .

Na análise perturbativa, o segundo diagrama, figura 2.3, é da ordem NG_1^2 , devido ao "loop" de quark que carrega um fator N , já que este é um "loop" de mesmos campos. O terceiro diagrama, figura 2.4, que também tem dois vértices é da ordem G_1^2 . O segundo diagrama parece contraditório já que este diverge ao se tomar o limite $N \rightarrow \infty$ visto que não podemos tomar a constante G_1^2 como parâmetro de expansão da série perturbativa. Para evitar estes diagramas divergam quando tomamos o limite de $N \rightarrow \infty$, implementaremos a expansão $\frac{1}{N}$ redefinindo as seguintes constantes de acoplamento na densidade de Lagrangeana (2.7) em função do parâmetro livre N ,

$$g_1 = NG_1, g_2 = NG_2, k_a^\mp = NK_a^\mp, k_{08}^\mp = NK_{08}^\mp, k = NK \quad (2.8)$$

de modo que este conjunto de constantes de acoplamento são mantidas fixas no limite de N grande, ou seja, $N \rightarrow \infty$ com $NG_i, NK_a^\mp, NK_{08}^\mp, NK$ fixos.

Então a densidade de Lagrangeana (2.7) fica

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}[i\hat{\partial} - m^a]\psi + \frac{k_a^{(-)}}{2N}(\bar{\psi}\gamma_a\psi)^2 + \frac{k_a^{(+)}}{2N}(\bar{\psi}\lambda_a i\gamma^5\psi)^2 + \\ & \frac{k_{08}^{(-)}}{2N}[(\bar{\psi}\lambda_0\psi)(\bar{\psi}\lambda_8\psi) + (\bar{\psi}\lambda_8\psi)(\bar{\psi}\lambda_0\psi)] + \frac{k_{08}^{(+)}}{2N}[(\bar{\psi}\lambda_0 i\gamma^5\psi)(\bar{\psi}\lambda_8 i\gamma^5\psi) + (\bar{\psi}\lambda_8 i\gamma^5\psi)(\bar{\psi}\lambda_0 i\gamma^5\psi)] + \\ & \frac{g_2}{2N}[(\bar{\psi}\lambda_a\gamma^\mu\psi)^2 + (\bar{\psi}\lambda_a\gamma^\mu\gamma^5\psi)^2] \end{aligned} \quad (2.9)$$

O próximo passo é introduzir campos auxiliares bosônicos S_a (escalar), P_a (pseudoescalar), $V_{\mu a}$ (vetorial) e $A_{\mu 5a}$ (pseudovetorial). É importante considerar que ao introduzirmos esses campos não alteremos a dinâmica do modelo original. Podemos fazer isto da seguinte maneira,

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} - \frac{1}{2k_a^{(-)}}[S_a - \frac{k_a^{(-)}}{\sqrt{N}}\bar{\psi}\lambda_a\psi]^2 - \frac{1}{2k_a^{(+)}}[P_a - \frac{k_a^{(+)}}{\sqrt{N}}\bar{\psi}\lambda_a i\gamma^5\psi]^2 +$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2g_2} [V_a^\mu + \frac{g_2}{\sqrt{N}} \bar{\psi} \lambda_a \gamma^\mu \psi]^2 + \frac{1}{2g_2} [A_a^{\mu 5} + \frac{g_2}{\sqrt{N}} \bar{\psi} \lambda_a \gamma^\mu \gamma^5 \psi]^2 + \\
& - \frac{k_{08}^{(-)}}{2k_0^{(-)} k_8^{(-)}} [(S_8 - \frac{k_8^{(-)}}{\sqrt{N}} \bar{\psi} \lambda_8 \psi) (S_0 - \frac{k_0^{(-)}}{\sqrt{N}} \bar{\psi} \lambda_0 \psi) + \\
& + (S_0 - \frac{k_0^{(-)}}{\sqrt{N}} \bar{\psi} \lambda_0 \psi) (S_8 - \frac{k_8^{(-)}}{\sqrt{N}} \bar{\psi} \lambda_8 \psi)] - \frac{k_{08}^{(+)}}{2k_0^{(+)} k_8^{(+)}} [(P_8 - \frac{k_8^{(+)}}{\sqrt{N}} \bar{\psi} \lambda_8 i \gamma^5 \psi) (P_0 - \frac{k_0^{(+)}}{\sqrt{N}} \bar{\psi} \lambda_0 i \gamma^5 \psi) + \\
& + (P_0 - \frac{k_0^{(+)}}{\sqrt{N}} \bar{\psi} \lambda_0 i \gamma^5 \psi) (P_8 - \frac{k_8^{(+)}}{\sqrt{N}} \bar{\psi} \lambda_8 i \gamma^5 \psi)] \quad (2.10)
\end{aligned}$$

Os termos adicionais em (2.10), como já dissemos, não alteram a dinâmica da teoria, o que é facilmente percebido do ponto de vista da quantização canônica, pois ao utilizarmos as equações de Euler-Lagrange para os campos bosônicos

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi_i} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \varphi_i)} = 0 \quad (2.11)$$

sendo φ_i quaisquer dos campos mencionados anteriormente, obtemos

$$S_a = \frac{k_a^{(-)}}{\sqrt{N}} \bar{\psi} \lambda_a \psi, \quad P_a = \frac{k_a^{(+)}}{\sqrt{N}} \bar{\psi} \lambda_a i \gamma^5 \psi, \quad (2.12)$$

$$V_a^\mu = \frac{g_2}{\sqrt{N}} \bar{\psi} \lambda_a \gamma^\mu \psi, \quad A_a^{\mu 5} = \frac{g_2}{\sqrt{N}} \bar{\psi} \lambda_a \gamma^\mu \gamma^5 \psi,$$

que não são equações de movimento verdadeiras, já que não envolvem derivadas temporais. São equações de vínculo, que podem ser eliminadas substituindo (2.12) em (2.10). Assim o novo formalismo faz com que a dinâmica da teoria não se altere. No entanto, as regras de Feynman são diferentes.

Neste ponto é interessante observar o que ocorre com a introdução dos campos auxiliares. Desenvolvendo e eliminando os termos quadrilineares fermiônicos, obtém-se uma densidade de Lagrangeana com interações entre os campos bosônicos auxiliares e os campos fermiônicos,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -\frac{1}{2k_a^{(-)}} S_a^2 - \frac{1}{2k_a^{(+)}} P_a^2 + \frac{1}{2g_2} (V_a^\mu)^2 + \frac{1}{2g_2} (A_a^{\mu 5})^2 - \frac{k_{08}^{(-)}}{k_0^{(-)} k_8^{(-)}} S_0 S_8 - \frac{k_{08}^{(+)}}{k_0^{(+)} k_8^{(+)}} P_0 P_8 + \\
& \bar{\psi} \left[i \not{\partial} - m_0 + \frac{1}{\sqrt{N}} (S_a \lambda_a + P_a \lambda_a i \gamma^5 + V_{a\mu} \gamma^\mu \lambda^a + A_{a\mu 5} \gamma^\mu \gamma^5 \lambda^a + \frac{k_{08}^{(-)}}{k_0^{(-)}} S_0 \lambda^8 + \right.
\end{aligned}$$

$$\left[\frac{k_{08}^{(-)}}{k_8^{(-)}} S_8 \lambda^0 + \frac{k_{08}^{(+)}}{k_0^{(+)}} P_0 \lambda^8 i \gamma^5 + \frac{k_{08}^{(+)}}{k_8^{(+)}} P_8 \lambda^0 i \gamma^5 \right] \psi \quad (2.13)$$

tendo agora vértices de interação trilineares em lugar de vértices de interação quadrilineares. Desta forma os campos auxiliares são os mediadores nas interações entre férmions e com isto muda a dimensão do vértice. Com efeito, de acordo com o critério de renormalização perturbativa do vértice, cada vértice pode ser classificado como sendo super-renormalizável, renormalizável ou não-renormalizável se respectivamente $d_a < D$, $d_a = D$ ou $d_a > D$, onde D é a dimensão do espaço-tempo, e d_a é conhecido como a dimensão do vértice. No caso geral, em uma teoria em que existem bósons e férmions, d_a é dada por,

$$d_a = D_a + \left(\frac{D-2}{2} \right) \nu_a^B + \left(\frac{D-1}{2} \right) \nu_a^F \quad (2.14)$$

onde D_a é o número de derivadas do termo de interação, ν_a^B , corresponde ao número de linhas de bósons concorrendo ao vértice a e ν_a^F é o número de linhas de férmions concorrendo ao vértice a .

Para o caso original de interação quártica fermiônica, temos que a dimensão do vértice é $d_a = 6$, maior que a dimensão do espaço-tempo, caracterizando uma teoria não-renormalizável perturbativamente. Com a expansão $\frac{1}{N}$ se reduz as divergências do modelo e a dimensão do vértice é igual a 4, e assim, em princípio, a expansão $\frac{1}{N}$ devido a introdução dos campos auxiliares define uma teoria renormalizável[27].

O grau de divergências dos diagramas são ,

$$d(G) = 4 - N_\sigma - N_\pi - N_V - N_A \quad (2.15)$$

onde N_σ , N_π , N_V , e N_A correspondem as linhas externas dos campos escalares, pseudoescalares, vetoriais e axiais. Realmente em $4D$ temos diagramas quadraticamente divergentes. Para evitarmos essas divergências necessitamos incorporar termos proporcionais aos termos cinéticos. Porém, estes termos não estão contidos na densidade de Lagrangeana (2.13) o que reflete claramente a não renormalizabilidade da teoria.

Voltando a nossa densidade de Lagrangeana (2.13), fazendo as seguintes transformações

$$\begin{aligned} \tilde{S}_0 &= S_0 + \frac{k_{08}^{(-)}}{k_8^{(-)}} S_8 \\ \tilde{S}_8 &= S_8 + \frac{k_{08}^{(-)}}{k_0^{(-)}} S_0 \\ \tilde{P}_0 &= P_0 + \frac{k_{08}^{(+)}}{k_9^{(+)}} P_8 \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\tilde{P}_8 = P_8 + \frac{k_{08}^{(+)}}{k_0^{(+)}} P_0$$

nos campos escalares $\tilde{S}_0$, $\tilde{S}_8$ e pseudoescalares $\tilde{P}_0$ e $\tilde{P}_8$ por não estarem na diagonal, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2\tilde{k}_2^{(-)}} \tilde{S}_2^2 - \frac{1}{2\tilde{k}_2^{(+)}} \tilde{P}_2^2 + \frac{1}{2g_2} V_a^{\mu 2} + \frac{1}{2g_2} A_a^{\mu 5 2} + \frac{a^{(-)}k_{08}^{(-)}}{\tilde{k}_0^{(-)}\tilde{k}_8^{(-)}} \tilde{S}_0 \tilde{S}_8 + \frac{a^{(+)}k_{08}^{(+)}}{\tilde{k}_0^{(+)}\tilde{k}_8^{(+)}} \tilde{P}_0 \tilde{P}_8 + \\ & \bar{\psi} [i\partial - m_0 + \frac{1}{\sqrt{N}} (\tilde{S} + \tilde{P} i\gamma^5 + iV + iA_5 \gamma^5)] \psi \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde

$$\begin{aligned} a^{(\mp)} &= 1 - \frac{k_{08}^{(\mp)2}}{k_0^{(\mp)}k_8^{(\mp)}} , \\ \tilde{k}_0^{(\mp)} &= a^{(\mp)} k_0^{(\mp)} , \\ \tilde{k}_8^{(\mp)} &= a^{(\mp)} k_8^{(\mp)} , \\ \tilde{S} &= \tilde{S}_a \lambda^a , \\ \tilde{P} &= \tilde{P}_a \lambda^a , \\ V_\mu &= -iV_{\mu a} \lambda^a , \\ A_{\mu 5} &= -iA_{\mu 5 a} \lambda^a , \\ V &= V_\mu \gamma^\mu , \\ A_5 &= A_{\mu 5} \gamma^\mu . \end{aligned}$$

No nível quântico, em $4D$, existe a possibilidade que os campos $\tilde{S}_0$ e $\tilde{S}_8$ tenham valor esperado no vácuo diferente de zero, ou seja,

$$\langle 0 | \tilde{S}_0 | 0 \rangle = \sqrt{N} s_0 , \quad \langle 0 | \tilde{S}_8 | 0 \rangle = \sqrt{N} s_8 , \quad (2.18)$$

onde s_0 e s_8 , são constantes com dimensão de massa. É conveniente definir o campo $\tilde{S}_0$ e $\tilde{S}_8$ de maneira a contornar esse problema e tornar nulo seus valores esperados no vácuo. Reescrevendo $\tilde{S}_0$ e $\tilde{S}_8$ da seguinte maneira,

$$\tilde{S}_0 = \sigma_0 + \sqrt{N} s_0 , \quad (2.19)$$

$$\tilde{S}_8 = \sigma_8 + \sqrt{N} s_8 ,$$

de tal forma que agora têm-se os valores esperados nulos dos novos campos σ_0 , σ_8 , i.é,

$$\langle 0 | \sigma_0 | 0 \rangle = 0$$

(2.20)

$$\langle 0 | \sigma_8 | 0 \rangle = 0 .$$

Este resultado, valores esperados no vácuo não-nulos para os campos originais S_0 e S_8 , provém de um fenômeno importante causado pelo rearranjo do vácuo devido a quebra espontânea de simetria quiral. Como resultado, as massas "nuas" dos quarks correntes, m_0 , mudam para massas "vestidas" dos quarks constituintes, m . Com a quantização em torno do mínimo (s_0, s_8) implica que a simetria quiral $\psi \rightarrow e^{i\beta\gamma^5} \psi$ na densidade de Lagrangeana (2.17) é espontaneamente quebrada pelos termos de massa $s_0 \bar{\psi} \psi$ e $s_8 \bar{\psi} \psi$.

Redefinindo a matriz massa dos quarks como m , obtêm-se para os campos físicos escalares σ com valor esperado no vácuo nulo,

$$-m_0 + \frac{1}{\sqrt{N}} \tilde{S} = -m + \frac{1}{\sqrt{N}} \sigma , \quad (2.21)$$

assim deste modo aparecem as massas dos quarks constituintes[28] (geração dinâmica de massa).

Da equação (2.21), obtêm-se:

$$\tilde{S}_0 - \sigma_0 = -\sqrt{N} \frac{1}{\sqrt{6}} [2\Delta m_u + \Delta m_s] \quad (2.22)$$

$$\tilde{S}_8 - \sigma_8 = -\sqrt{N} \frac{1}{\sqrt{3}} [\Delta m_u - \Delta m_s]$$

onde

$$\Delta m_u = m_u - m_u^0$$

e

$$\Delta m_s = m_s - m_s^0 .$$

Nossa densidade de Lagrangeana (2.17) fica:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = N & \left[\frac{a^{(-)} k_{08}^{(-)}}{\tilde{k}_0^{(-)} \tilde{k}_8^{(-)}} - \frac{s_0^2}{2\tilde{k}_0^{(-)}} - \frac{s_8^2}{2\tilde{k}_8^{(-)}} \right] + \sqrt{N} \left[\left(\frac{s_0}{\tilde{k}_0^{(-)}} - \frac{k_{08}^{(-)} a^{(-)} s_8}{\tilde{k}_0^{(-)} \tilde{k}_8^{(-)}} \right) \sigma_0 + \right. \\ & \left. \left(\frac{s_8}{\tilde{k}_8^{(-)}} - \frac{a^{(-)} k_{08}^{(-)} s_0}{\tilde{k}_0^{(-)} \tilde{k}_8^{(-)}} \right) \sigma_8 \right] + \\ & - \frac{\sigma_a^2}{2\tilde{k}_a^{(-)}} - \frac{\pi_a^2}{2\tilde{k}_a^{(+)}} + \frac{V_a^{\mu 2}}{2g_2} + \frac{A_a^{\mu 5 2}}{2g_2} + \frac{a^{(+)} k_{08}^{(+)}}{\tilde{k}_0^{(+)} \tilde{k}_8^{(+)}} \pi_0 \pi_8 + \frac{a^{(-)} k_{08}^{(-)}}{\tilde{k}_0^{(-)} \tilde{k}_8^{(-)}} \sigma_0 \sigma_8 + \end{aligned}$$

$$+ \bar{\psi} [i \not{\partial} - m + \frac{1}{\sqrt{N}} (\sigma + i \pi \gamma^5 + i V + i A_5 \gamma^5)] \psi , \quad (2.23)$$

sendo esta a densidade de Lagrangeana sobre a qual efetuaremos a integração funcional. A forma de $\mathcal{L}$ nos mostra que os campos σ_0 e σ_8 induzem uma massa m_u e m_s aos férmions. A condição de que define os campos deslocados de $\tilde{S}_0$ e $\tilde{S}_8$ tenham valores esperados no vácuo nulo implica que,

$$\langle 0 | \sigma_{0,8} | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{T} \sigma_{0,8} e^{i \int d^4 y \mathcal{L}_{int}(y)} : | 0 \rangle = 0$$

onde $\hat{T}$ é o operador de evolução temporal e $\mathcal{L}_{int}$ é a densidade de Lagrangeana de interação, i.é, tudo aquilo que não for a parte quadrática nem a parte livre. As regras de Feynman na teoria livre dos propagadores e vertices são apresentados nas tabelas 2.1 e 2.2.

Tabela 2.1

Propagador	Representação Gráfica
$\langle 0 \hat{T} \psi(x) \bar{\psi}(y) 0 \rangle$
$\langle 0 \hat{T} \sigma(x) \sigma(y) 0 \rangle$
$\langle 0 \hat{T} \pi(x) \pi(y) 0 \rangle$
$\langle 0 \hat{T} V_\mu(x) V_\nu(y) 0 \rangle$
$\langle 0 \hat{T} A_{\mu 5}(x) A_{\nu 5}(y) 0 \rangle$

Tabela 2.2

Vértice	Representação Gráfica
$-\frac{i}{\sqrt{N}}$	
$-\frac{i}{\sqrt{N}}\gamma^5$	
$-\frac{i}{\sqrt{N}}\gamma^\mu$	
$-\frac{i}{\sqrt{N}}\gamma^\mu\gamma^5$	

2.2 Método da Integração Funcional e a Ação Efetiva

O método da integral de trajetória foi introduzida por Feynman, que consiste no cálculo das amplitudes de transição. As funções de Green são objetos básicos no estudo da Teoria Quântica de Campos e são essas funções que fornecem a matriz S e, em princípio, os elementos de matriz de qualquer observável. Uma construção cuidadosa do funcional gerador das funções de Green $Z[\eta, \bar{\eta}]$, nos mostra que esta pode ser vista como uma amplitude de transição. Assim, estudaremos o comportamento da densidade de Lagrangeana (2.23) usando o método da integração funcional. Esse formalismo nos permite obter de maneira sistemática as correções na potência $\frac{1}{N}$ dos diagramas de Feynman.

No formalismo da integração funcional para campos fermiônicos $\bar{\psi}$ e ψ , e para os campos σ_a , π_a , V_a^μ , $A_a^{\mu 5}$ na presença das fontes externas η e $\bar{\eta}$ associadas aos campos fermiônicos, o funcional gerador das funções de Green é dado por

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \mathcal{N}' \int [\mathcal{D}\bar{\psi}][\mathcal{D}\psi] \Pi_{a=0}^8 [\mathcal{D}\sigma_a][\mathcal{D}\pi_a][\mathcal{D}V_a^\mu][\mathcal{D}A_a^{\mu 5}] e^{i(S + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)} \quad (2.24)$$

onde S é a ação clássica dada por

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(x) \quad (2.25)$$

sendo $\mathcal{L}$ a densidade de Lagrangeana (2.23) do modelo. A integração em $[\mathcal{D}\psi]$ ou $[\mathcal{D}\bar{\psi}]$ é definida pela discretização do espaço-tempo em volumes infinitesimais quadridimensionais.

Tanto os campos $\bar{\psi}$ e ψ como também as fontes $\bar{\eta}$ e η são variáveis de Grassmann. $\mathcal{N}'$ é uma constante de normalização que assegura a condição

$$\mathcal{Z}[0] = 1$$

Utilizando a densidade de Lagrangeana (2.23) podemos escrever,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}] &= \mathcal{N}' e^{i \int d^4x N \left[\frac{a^{(-)}_0 k^{(-)}_{03}}{k^{(-)}_0 k^{(-)}_3} - \frac{s^2_0}{2k^{(-)}_0} - \frac{s^2_3}{2k^{(-)}_3} \right]} \\ \Pi_a \int \mathcal{D}\sigma_a \mathcal{D}\pi_a \mathcal{D}V^\mu_a \mathcal{D}A^{\mu 5}_a e^{i \int d^4x N^0 \left[-\frac{1}{2k^{(-)}_2} s^2_2 - \frac{1}{2k^{(+)}_2} \pi^2_2 + \frac{1}{2g^2_2} V^{\mu 2}_a{}^2 + \frac{1}{2g^2_2} A^{\mu 5}_a{}^2 + \frac{a^{(+)}_0 k^{(+)}_{03}}{k^{(+)}_0 k^{(+)}_3} \pi_0 \pi_3 + \frac{a^{(-)}_0 k^{(-)}_{03}}{k^{(-)}_0 k^{(-)}_3} \sigma_0 \sigma_3 \right]} \\ & e^{i \int d^4x \sqrt{N} \left[\left(\frac{s^2_0}{k^{(-)}_0} - \frac{a^{(-)}_0 k^{(-)}_{03}}{k^{(-)}_0 k^{(-)}_3} s_0 \right) \sigma_0 + \left(\frac{s^2_3}{k^{(-)}_3} - \frac{a^{(-)}_0 k^{(-)}_{03}}{k^{(-)}_0 k^{(-)}_3} s_0 \right) \sigma_3 \right]} \mathcal{Z}_F[\eta, \bar{\eta}] \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde

$$\mathcal{Z}_F[\eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i \int d^4x [\bar{\psi} \mathcal{K} \psi + \bar{\eta} \psi - \bar{\psi} \eta]} , \quad (2.27)$$

e $\mathcal{K}$ é o operador

$$\mathcal{K} = i\partial - m_0 + \frac{1}{\sqrt{N}}(\sigma + i\pi\gamma^5 + iV + iA s\gamma^5) , \quad (2.28)$$

Observamos que o primeiro termo é uma constante que pode ser absorvido pela constante de normalização. A parte fermiônica pode ser reduzida fazendo a seguinte transformação ,

$$\psi' = \psi - \mathcal{K}^{-1} \eta \quad (2.29)$$

$$\bar{\psi}' = \bar{\psi} - \bar{\eta} \mathcal{K}^{-1}$$

e a medida $[\mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi]$ permanece invariante, i.é,

$$[\mathcal{D}\bar{\psi}' \mathcal{D}\psi'] = [\mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi] . \quad (2.30)$$

Assim,

$$\bar{\psi}' \mathcal{K} \psi' + \bar{\eta} \psi' + \bar{\psi}' \eta = \bar{\psi} \mathcal{K} \psi - \bar{\eta} \mathcal{K}^{-1} \eta \quad (2.31)$$

então ,

$$Z_F[\eta, \bar{\eta}] = e^{i \int d^4x \bar{\eta} K^{-1} \eta} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i \int d^4x \bar{\psi} K \psi}$$

$$Z_F[\eta, \bar{\eta}] = e^{i \int d^4x \bar{\eta} K^{-1} \eta} [\det K]^N, \quad (2.32)$$

onde usamos o fato de termos N campos fermiônicos coloridos. Existem varios métodos para calcular o determinante fermiônico [29]. Aqui usaremos a simples expansão em potências das linhas mesônicas externas correspondentes à aproximação de "um-loop".

Usando a identidade,

$$\det \hat{O} = e^{\text{Tr} \ln \hat{O}} \quad (2.33)$$

onde Tr é o simbolo do traço funcional

$$\text{Tr} \ln \hat{O} = \text{Tr} \int d^4x \langle x | \hat{O} | x \rangle, \quad (2.34)$$

sendo Tr o traço no espaço de Dirac e de sabor, têm-se que o funcional gerador da parte fermiônica resulta ser,

$$Z_F[\eta, \bar{\eta}] = e^{i \int d^4x \bar{\eta} K^{-1} \eta} e^{N \text{Tr} \ln K}. \quad (2.35)$$

Ao analisar o termo logarítmico da expressão acima, vemos que este pode ser escrito, reescrevendo o operador K (2.28) na forma,

$$K = (i\partial - m) \left[1 + \frac{1}{\sqrt{N}} (i\partial - m)^{-1} (\sigma + i\pi\gamma^5 + iV + iA_5\gamma^5) \right], \quad (2.36)$$

e usando a expansão em série de Taylor

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \mp \dots$$

onde,

$$y = \frac{1}{\sqrt{N}} (i\partial - m)^{-1} (\sigma + i\pi\gamma^5 + iV + iA_5\gamma^5), \quad (2.37)$$

resulta em

$$\text{Tr} \ln K = \text{Tr} \ln(i\partial - m) + \text{Tr} \ln(1+y) = \text{Tr} \ln(i\partial - m) + \text{Tr} y - \text{Tr} \frac{y^2}{2} + \text{Tr} \frac{y^3}{3} \mp \dots \quad (2.38)$$

Substituindo (2.37) em (2.38) obtém-se

$$\text{Tr} \ln K = \text{Tr} \ln(i\partial - m) + \frac{1}{\sqrt{N}} \text{Tr} [(i\partial - m)^{-1} (\sigma + i\pi\gamma^5 + iV + iA_5\gamma^5)] +$$

$$-\frac{1}{2N} \text{Tr}[(i\partial - m)^{-1}(\sigma + i\pi\gamma^5 + iV + iA_s\gamma^5)]^2 + \frac{1}{3N^{\frac{3}{2}}} \text{Tr}[(i\partial - m)^{-1}(\sigma + i\pi\gamma^5 + iV + iA_s\gamma^5)]^3 + \dots \quad (2.39)$$

sendo que o primeiro termo é uma constante, pois não depende dos campos auxiliares.

Lembrando que os termos constantes são irrelevantes, pois a ação clássica adicionada de uma constante não altera a dinâmica do modelo, podemos absorvê-la na constante de normalização $\mathcal{N}'$.

Então, substituindo (2.39) em (2.35) e (2.35) em (2.26) chega-se a seguinte expressão para o funcional gerador

$$\mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}] = \mathcal{N} \Pi_{a=0}^8 \int \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\pi \mathcal{D}V \mathcal{D}A_s e^{i \int d^4x \bar{\eta} K^{-1} \eta} e^{S_{eff}} \quad (2.40)$$

onde a ação efetiva vêm dada como uma série em potências de $\frac{1}{\sqrt{N}}$, ou seja,

$$S_{eff} = \sqrt{N} S_1 + \frac{1}{2} N^0 S_2 + \frac{1}{3\sqrt{N}} S_3 + \frac{1}{4N} S_4 + \dots \quad (2.41)$$

Em termos de diagramas de Feynman a ação efetiva pode ser escrita como uma soma de diagramas com as pernas externas sendo dos campos auxiliares, apresentada na figura 2.5.

Figura 2.5: Ação efetiva em série de potências de $\frac{1}{N^{1/2}}$.

As formas explícitas de S_1 , S_2 , S_3 e S_4 são dadas por

$$S_1 = i \int d^4x [A_0 \sigma_0 + A_8 \sigma_8] + \text{Tr}[(i\partial - m)^{-1}(\sigma + i\pi\gamma^5 + iV + iA_s\gamma^5)] \quad (2.42)$$

$$S_2 = i \int d^4x \left[-\frac{1}{2\tilde{k}_a^{(-)}} \sigma_a^2 - \frac{1}{2\tilde{k}_a^{(+)}} \pi_a^2 + \frac{1}{2g_2} V_a^{\mu 2} + \frac{1}{2g_2} A_a^{\mu 5 2} + \frac{a^{(+)} k_{08}^{(+)}}{\tilde{k}_0^{(+)} \tilde{k}_8^{(+)}} \pi_0 \pi_8 + \frac{a^{(-)} k_{08}^{(-)}}{\tilde{k}_0^{(-)} \tilde{k}_8^{(-)}} \sigma_0 \sigma_8 \right] + \quad (2.43)$$

$$-\frac{1}{2} \text{Tr}[(i\partial - m)^{-1}(\sigma + i\pi\gamma^5 + iV + iA_s\gamma^5)]^2$$

$$S_3 = \text{Tr}[(i\partial - m)^{-1}(\sigma + i\pi\gamma^5 + iV + iA_s\gamma^5)]^3 \quad (2.44)$$

$$S_4 = \text{Tr}[(i\partial - m)^{-1}(\sigma + i\pi\gamma^5 + iV + iA_s\gamma^5)]^4 \quad (2.45)$$

com

$$A_0 = \frac{s_0}{\tilde{k}_0^{(-)}} - \frac{a^{(-)}k_{08}^{(-)}}{\tilde{k}_0^{(-)}\tilde{k}_8^{(-)}}s_8$$

e

$$A_8 = \frac{s_8}{\tilde{k}_8^{(-)}} - \frac{a^{(-)}k_{08}^{(-)}}{\tilde{k}_0^{(-)}\tilde{k}_8^{(-)}}s_0$$

(2.46)

Vejamos os dois primeiros termos da ação efetiva. Aplicando a equação (2.34) a S_1 , temos

$$S_1 = i \int d^4x [A_0\sigma_0 + A_8\sigma_8] + \text{Tr} \int d^4x \langle x | (i\partial - m)^{-1}(\sigma + i\pi\gamma^5 + iV + iA_s\gamma^5) | x \rangle \quad (2.47)$$

e introduzindo uma base completa no espaço dos momentos p e p' ,

$$S_1 = i \int d^4x [A_0\sigma_0 + A_8\sigma_8] + \text{Tr} \int d^4x d^4p d^4p' \langle x | p \rangle \langle p | (\partial - m)^{-1} | p' \rangle \langle p' | \sigma + i\pi\gamma^5 + iV + iA_s\gamma^5 | x \rangle . \quad (2.48)$$

Usando

$$\langle x | p \rangle = \frac{e^{-ip \cdot x}}{(2\pi)^4} ,$$

$$\sigma | x \rangle = \sigma(x) | x \rangle , \pi | x \rangle = \pi(x) | x \rangle , V | x \rangle = V(x) | x \rangle \text{ e } A_s | x \rangle = A_s(x) | x \rangle$$

e que

$$\langle p | (\partial - m)^{-1} | p' \rangle = \frac{(2\pi)^4}{p' - m} \delta(p - p') ,$$

a expressão (2.47) fica

$$S_1 = i \int d^4x [A_0\sigma_0 + A_8\sigma_8] + \text{Tr} \int d^4x \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\sigma(x)}{p - m} \quad (2.49)$$

Analogamente para o termo quadrático,

$$S_2 = \int d^4x d^4y \left[-\frac{i}{2\tilde{k}_a^{(-)}} \sigma_a(x) \delta(x - y) \sigma_a(y) - \frac{i}{2\tilde{k}_a^{(+)}} \pi_a(x) \delta(x - y) \pi_a(y) + \right. \\ \left. \frac{i}{2g_2} V_{a\mu}(x) g^{\mu\nu} \delta(x - y) V_{a\nu}(y) + \frac{i}{2g_2} A_{a\mu 5}(x) g^{\mu\nu} \delta(x - y) A_{a\nu 5}(y) + \right]$$

$$\begin{aligned}
& i \frac{a^{(-)} k_{08}^{(-)}}{\tilde{k}_0^{(-)} \tilde{k}_8^{(-)}} \sigma_0(x) \delta(x-y) \sigma_8(y) + i \frac{a^{(+)} k_{08}^{(+)}}{\tilde{k}_0^{(+)} \tilde{k}_8^{(+)}} \pi_0(x) \delta(x-y) \pi_8(y) + \\
& \frac{1}{2} \Pi_{\sigma\sigma}(x, y) + \frac{i}{2} \Pi_{V\sigma}(x, y) + \frac{i}{2} \Pi_{\sigma V}(x, y) + \\
& + \frac{1}{2} \Pi_{\pi\pi}(x, y) + \frac{i}{2} \Pi_{A\pi}(x, y) - \frac{1}{2} \Pi_{V V}(x, y) + \frac{i}{2} \Pi_{\pi A}(x, y) - \frac{1}{2} \Pi_{A A}(x, y) \Big] \quad (2.50)
\end{aligned}$$

onde a estrutura,

$$\Pi_{\phi\phi'}(x, y) = \text{Tr} \phi(x) S_F(x-y) \phi'(y) S_F(y-x) \quad (2.51)$$

correspondem as polarizações do vácuo e $\phi(x)$ e $\phi'(x)$ os campos auxiliares genéricos escalares, pseudoescalares, vetoriais ou pseudovetoriais no espaço sabor e de Dirac.

2.3 Equação de "Gap", Funções de Vértices e Propagadores dos Campos Auxiliares

Para se ter uma ação efetiva finita no limite de N grande, observa-se da expressão (2.41) que devemos ter $S_1 = 0$. Então ,

$$i \int d^4x [A_0 \sigma_0 + A_8 \sigma_8] + \text{Tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} d^4x \frac{\sigma(x)}{p-m} = 0 \quad (2.52)$$

que é conhecida como equação de "gap" ou equação de "tad-pole", e é usada para gerar as massas dos quarks constituintes m , que correspondem a posição do pólo do propagador

$$S_F^a = \frac{i}{p-m_a} \quad (2.53)$$

A equação de "gap" pode ser representada diagramaticamente pela figura 2.6

Figura 2.6: Equação de "tad-pole".

Outra maneira de argumentarmos o fato de ser nulo o termo S_1 , dentro do contexto da integração funcional, é considerar que a ação efetiva tenha um ponto de equilíbrio estável em $\tilde{S}_0 = \sqrt{N} s_0$ e $\tilde{S}_8 = \sqrt{N} s_8$, e nulo para os outros campos, de forma que S_{eff} é expandida em torno desses pontos. Sendo estes pontos estacionários, devemos ter

$$\frac{\delta S_{eff}}{\delta \tilde{S}_{0,8}} \Big|_{\tilde{S}_{0,8} = \sqrt{N} s_{0,8}} = 0 \quad (2.54)$$

anulando, portanto, o termo linear em $\tilde{S}_a$ na ação efetiva[30].

Vamos calcular agora o traço da equação (2.52),

$$\begin{aligned} Tr \left(\frac{1}{\not{p} - m} \sigma \right) &= Tr \left[\begin{pmatrix} \frac{\not{p} + m_u}{p^2 - m_u^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\not{p} + m_u}{p^2 - m_u^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\not{p} + m_s}{p^2 - m_s^2} \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0 + \sigma_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_8 & \sigma_1 - i \sigma_2 & \sigma_4 - i \sigma_5 \\ \sigma_1 + i \sigma_2 & \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0 - \sigma_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_8 & \sigma_6 - i \sigma_7 \\ \sigma_4 + i \sigma_5 & \sigma_6 + i \sigma_7 & \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0 - \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_8 \end{pmatrix} \right] \\ &= 2 Tr \left(\frac{\not{p} + m_u}{p^2 - m_u^2} \right) \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_8 \right) + Tr \left(\frac{\not{p} + m_s}{p^2 - m_s^2} \right) \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0 - \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_8 \right) \\ &= 2i \left(-Tr \frac{i}{\not{p} - m_u} \right) \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_8 \right) + i \left(-Tr \frac{i}{\not{p} - m_s} \right) \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0 - \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_8 \right) \quad (2.55) \end{aligned}$$

Introduzindo em (2.52), têm-se

$$i \int d^4 x \left[\left(A_0 + 2\sqrt{\frac{2}{3}} \langle \bar{u}u \rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \langle \bar{s}s \rangle \right) \sigma_0 + \left(A_8 + \frac{2}{\sqrt{3}} \langle \bar{u}u \rangle - \frac{2}{\sqrt{3}} \langle \bar{s}s \rangle \right) \sigma_8 \right] = 0 \quad (2.56)$$

satisfazendo-se simultaneamente

$$A_0 + 2\sqrt{\frac{2}{3}} \langle \bar{u}u \rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \langle \bar{s}s \rangle = 0 \quad (2.57)$$

$$A_8 + \frac{2}{\sqrt{3}} \langle \bar{u}u \rangle - \frac{2}{\sqrt{3}} \langle \bar{s}s \rangle = 0$$

De (2.22) temos

$$\sqrt{6} s_0 = 2\Delta m_u + \Delta m_s \quad (2.58)$$

$$\sqrt{3}s_8 = 2\Delta m_u + \Delta m_s$$

e usando (2.46) em (2.57), obtemos as seguintes equações de "gap" para a geração dinâmica de massa dos quarks constituintes m_u e m_s :

$$m_u = m_u^0 - 2g_1 \langle \bar{u}u \rangle - \frac{3}{2}k \langle \bar{u}u \rangle \langle \bar{s}s \rangle \quad (2.59)$$

$$m_s = m_s^0 - 2g_1 \langle \bar{s}s \rangle - \frac{3}{2}k \langle \bar{u}u \rangle^2$$

Deste modo, o fenômeno da geração dinâmica de massa para os campos fermiônicos ψ_α , desempenha um papel importante, já que elimina divergências infravermelhas caso a massa do férmion fosse nula.

A função de dois pontos dos campos auxiliares bosônicos na ordem dominante é obtida da equação (2.50). Usando as matrizes do grupo de simetria $SU(3)$ e tomando o traço no espaço de sabor, o termo quadrático S_2 da ação efetiva resulta ser,

$$S_2 = \int d^4x d^4y I(x, y) \quad (2.60)$$

onde

$$\begin{aligned} I(x, y) = & (\sigma_0 \ \sigma_8 \ V_{0\mu} \ V_{8\mu}) \begin{pmatrix} \Gamma_{\sigma_0\sigma_0} & \Gamma_{\sigma_0\sigma_8} & \Gamma_{\sigma_0 V_0}^\nu & \Gamma_{\sigma_0 V_8}^\nu \\ \Gamma_{\sigma_8\sigma_0} & \Gamma_{\sigma_8\sigma_8} & \Gamma_{\sigma_8 V_0}^\nu & \Gamma_{\sigma_8 V_8}^\nu \\ \Gamma_{V_0\sigma_0}^\mu & \Gamma_{V_0\sigma_8}^\mu & \Gamma_{V_0 V_0}^{\mu\nu} & \Gamma_{V_0 V_8}^{\mu\nu} \\ \Gamma_{V_8\sigma_0}^\mu & \Gamma_{V_8\sigma_8}^\mu & \Gamma_{V_8 V_0}^{\mu\nu} & \Gamma_{V_8 V_8}^{\mu\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_8 \\ V_{0\nu} \\ V_{8\nu} \end{pmatrix} \\ & + (\pi_0 \ \pi_8 \ A_{0\mu 5} \ A_{8\mu 5}) \begin{pmatrix} \Gamma_{\pi_0\pi_0}^5 & \Gamma_{\pi_0\pi_8}^5 & \Gamma_{\pi_0 A_0}^{\nu 5} & \Gamma_{\pi_0 A_8}^{\nu 5} \\ \Gamma_{\pi_8\pi_0}^5 & \Gamma_{\pi_8\pi_8}^5 & \Gamma_{\pi_8 A_0}^{\nu 5} & \Gamma_{\pi_8 A_8}^{\nu 5} \\ \Gamma_{A_0\pi_0}^{\mu 5} & \Gamma_{A_0\pi_8}^{\mu 5} & \Gamma_{A_0 A_0}^{\mu\nu 5} & \Gamma_{A_0 A_8}^{\mu\nu 5} \\ \Gamma_{A_8\pi_0}^{\mu 5} & \Gamma_{A_8\pi_8}^{\mu 5} & \Gamma_{A_8 A_0}^{\mu\nu 5} & \Gamma_{A_8 A_8}^{\mu\nu 5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_8 \\ A_{0\nu 5} \\ A_{8\nu 5} \end{pmatrix} \\ & + \sum_{j=1}^7 \left[(\sigma_j \ V_{j\mu}) \begin{pmatrix} \Gamma_{\sigma_j\sigma_j} & \Gamma_{\sigma_j V_j}^\nu \\ \Gamma_{V_j\sigma_j}^\mu & \Gamma_{V_j V_j}^{\mu\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_j \\ V_{j\nu} \end{pmatrix} + (\pi_j \ A_{j\mu 5}) \begin{pmatrix} \Gamma_{\pi_j\pi_j}^5 & \Gamma_{\pi_j A_j}^{\nu 5} \\ \Gamma_{A_j\pi_j}^{\mu 5} & \Gamma_{A_j A_j}^{\mu\nu 5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_j \\ A_{j\nu 5} \end{pmatrix} \right] \quad (2.61) \end{aligned}$$

Os elementos de matriz, $\Gamma_{\alpha\beta}(x, y)$ representam as funções de vértices no espaço de configurações na aproximação "one-loop" para cada subespaço de sabor. A estrutura desses elementos encontram-se no apêndice B.

É conveniente trabalharmos no espaço dos momentos e para esse efeito, devemos tomar a transformada de Fourier de $\Gamma_{\alpha\beta}$

$$\Gamma(k) = \int d^4x e^{ikx} \Gamma(x) \quad (2.62)$$

com

$$S_F(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} S_F(k) \quad e \quad S_F(k) = \frac{i}{\not{k} - m} \quad (2.63)$$

Em geral, os elementos contidos na ação tem a estrutura

$$I(\phi, \phi') = \int d^4x d^4y \phi(x) [A \delta(x-y) \delta_{\phi\phi'} + \text{Tr}(\Gamma S_F^f(x-y) \Gamma' S_F^{f'}(x-y))] \phi'(y) \quad (2.64)$$

que no espaço dos momentos fica

$$I(\phi, \phi') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{\phi}(p) \Gamma(p) \tilde{\phi}'(p) \quad (2.65)$$

onde

$$\tilde{\Gamma}(p) = A + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr}(\Gamma \tilde{S}_F^f(p+k) \Gamma' \tilde{S}_F^{f'}(k)) \quad (2.66)$$

sendo A uma constante.

Encontramos após fazermos a integração nas coordenadas, os elementos das funções próprias de dois pontos. Esses elementos estão no apêndice B.

Observamos que devido as correções radiativas a contribuição de segunda ordem da ação efetiva (2.60) não é diagonal. Os diagramas das funções de vértices que contribuem na expansão $\frac{1}{N}$ para a parte quadrática na aproximação de "one-loop" são mostradas na figura 2.7.

Assim, no espaço dos momentos, observa-se que a estrutura da matriz função de vértice para cada sub-espaço sabor tem a forma

$$\tilde{\Gamma} = \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}_{\sigma\sigma} & \tilde{\Gamma}_{\sigma V}^\nu & 0 & 0 \\ \tilde{\Gamma}_{V\sigma}^\mu & \tilde{\Gamma}_{VV}^{\mu\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\Gamma}_{\pi\pi}^5 & \tilde{\Gamma}_{\pi A}^{\nu 5} \\ 0 & 0 & \tilde{\Gamma}_{A\pi}^{\mu 5} & \tilde{\Gamma}_{AA}^{\mu\nu 5} \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

que é uma matriz em blocos diagonais que podem ser tratados de forma independentes.

Poderemos observar, que as correções radiativas conduz ao aparecimento de propagadores mixtos dos campos escalar-vetorial e pseudoescalar-axial[31]. Esses termos mixtos poderiam em princípio ser eliminados fazendo uma diagonalização da matriz $\tilde{\Gamma}(p)$. Aqui mantemos os elementos não diagonais.

Os elementos de matriz da função de vértice serão deixados na forma escalar usando os projetores invariantes de Lorentz longitudinal e transversal

Figura 2.7: Funções vértice na ordem dominante $1/N$.

$$L^{\mu\nu} = \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \quad e \quad T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}, \quad (2.68)$$

o que permite separar os elementos de matriz vetorial e pseudovetorial nas componentes longitudinal e transversal.

Os elementos de polarização do vácuo na aproximação de "one-loop" (2.51) se encontram no apêndice B.

A matriz função de vértice se escreve como

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{\sigma\sigma} & \Gamma_{\sigma V}^{(L)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma_{\nu\sigma}^{(L)} & \Gamma_{VV}^{(L)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_{VV}^{(T)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_{AA}^{(T)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_{\pi\pi}^5 & \Gamma_{\pi A}^{5(L)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_{A\pi}^{5(L)} & \Gamma_{AA}^{5(L)} \end{pmatrix}. \quad (2.69)$$

Então a ação (2.60) no espaço dos momentos tem a seguinte estrutura

$$\begin{aligned}
S_2 = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} & \left[\left(\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_0(p) & \tilde{\sigma}_8(p) & \tilde{V}_{0\mu}(p) \frac{ip^\mu}{\sqrt{p^2}} & \tilde{V}_{8\mu}(p) \frac{ip^\mu}{\sqrt{p^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{08}^{SS} & 0 \\ 0 & \Gamma_{08}^{VV(L)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_0(-p) \\ \tilde{\sigma}_8(-p) \\ -i \frac{p^\nu}{\sqrt{p^2}} \tilde{V}_{0\nu}(-p) \\ -i \frac{p^\nu}{\sqrt{p^2}} \tilde{V}_{8\nu}(-p) \end{pmatrix} + \right. \\
& \left(\begin{pmatrix} \tilde{\pi}_0(p) & \tilde{\pi}_8(p) & \tilde{A}_{0\mu 5}(p) \frac{ip^\mu}{\sqrt{p^2}} & \tilde{A}_{8\mu 5}(p) \frac{ip^\mu}{\sqrt{p^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{PP}^S & \Gamma_{PA}^S \\ \Gamma_{AP}^S & \Gamma_{AA}^{S(L)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\pi}_0(-p) \\ \tilde{\pi}_8(-p) \\ -i \frac{p^\nu}{\sqrt{p^2}} \tilde{A}_{0\nu 5}(-p) \\ -i \frac{p^\nu}{\sqrt{p^2}} \tilde{A}_{8\nu 5}(-p) \end{pmatrix} + \right. \\
& \sum_{j=1}^7 \left(\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_j(p) & \tilde{V}_{j\mu}(p) \frac{ip^\mu}{\sqrt{p^2}} \end{pmatrix} \Gamma_{SVj}^{(L)} \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_j(-p) \\ -i \frac{p^\nu}{\sqrt{p^2}} \tilde{V}_{j\nu}(-p) \end{pmatrix} + \right. \\
& \sum_{j=1}^7 \left(\begin{pmatrix} \tilde{\pi}_j(p) & \tilde{A}_{j\mu 5}(p) \frac{ip^\mu}{\sqrt{p^2}} \end{pmatrix} \Gamma_{PAj}^{(L)} \begin{pmatrix} \tilde{\pi}_j(-p) \\ -i \frac{p^\nu}{\sqrt{p^2}} \tilde{A}_{j\nu 5}(-p) \end{pmatrix} + \right. \\
& \left(\tilde{V}_{0\mu}(p) T^{\mu\epsilon} \tilde{V}_{8\mu}(p) T^{\mu\epsilon} \right) \Gamma_{VV08}^{(T)} \begin{pmatrix} T_\epsilon^\nu \tilde{V}_{0\nu}(-p) \\ T_\epsilon^\nu \tilde{V}_{8\nu}(-p) \end{pmatrix} + \\
& \left(\tilde{A}_{0\mu 5}(p) T^{\mu\epsilon} \tilde{A}_{8\mu 5}(p) T^{\mu\epsilon} \right) \Gamma_{AA08}^{(T)} \begin{pmatrix} T_\epsilon^\nu \tilde{A}_{0\nu 5}(-p) \\ T_\epsilon^\nu \tilde{A}_{8\nu 5}(-p) \end{pmatrix} + \\
& \left. \sum_{j=1}^7 \tilde{V}_{j\mu}(p) T^{\mu\epsilon} \Gamma_{VVj}^{(T)} T_\epsilon^\nu \tilde{V}_{j\nu}(-p) + \sum_{j=1}^7 \tilde{A}_{j\mu 5}(p) T^{\mu\epsilon} \Gamma_{AAj}^{(T)} T_\epsilon^\nu \tilde{A}_{j\nu 5}(-p) \right] \quad (2.70)
\end{aligned}$$

onde os elementos matriciais são as seguintes matrizes,

$$\tilde{\Gamma}_{08}^{SS} = \tilde{\Omega}_{08}^{-1SS} \left[1 + \frac{i}{2} \tilde{\Omega}_{08}^{SS} \cdot \tilde{J}_{08}^{SS} \right]$$

$$\tilde{\Gamma}_{08}^{SV} = \tilde{0} \quad \tilde{\Gamma}_{08}^{VS} = \tilde{0}$$

$$\tilde{\Gamma}_{08}^{VV(T)} = \tilde{\Omega}_{08}^{-1VV(T)} \left[1 + \frac{i}{2} \tilde{\Omega}_{08}^{VV(T)} \cdot \tilde{J}_{08}^{VV(T)} \right]$$

$$\tilde{\Gamma}_{08}^{VV(L)} = \tilde{\Omega}_{08}^{-1VV(L)} \left[1 + \frac{i}{2} \tilde{\Omega}_{08}^{VV(L)} \cdot \tilde{J}_{08}^{VV(L)} \right]$$

$$\tilde{\Gamma}_{PP08}^{5(T)} = \tilde{\Omega}_{PP08}^{-15} \left[1 + \frac{i}{2} \tilde{\Omega}_{PP08}^{55} \cdot J_{08}^{VV(T)} \right]$$

$$\tilde{\Gamma}_{08}^{5AP} = -\frac{i}{2} J_{08}^{AP}$$

$$\tilde{\Gamma}_{08}^{5PA} = -\frac{i}{2} J_{08}^{PA}$$

$$\tilde{\Gamma}_{AA08}^{5(T)} = \tilde{\Omega}_{08}^{-1AA(T)} \left[1 + \frac{i}{2} \tilde{\Omega}_{08}^{AA(T)} \cdot J_{08}^{AA(T)} \right]$$

$$\tilde{\Gamma}_{AA08}^{5(L)} = \tilde{\Omega}_{08}^{-1AA(L)} \left[1 + \frac{i}{2} \tilde{\Omega}_{08}^{AA(L)} \cdot J_{08}^{AA(L)} \right]$$

para $j = 1, \dots, 7$ temos :

$$\tilde{\Gamma}_j^{5V(L)} = \tilde{\Omega}_j^{-1SV(L)} \left[1 + \frac{i}{2} \tilde{\Omega}_j^{(L)SV} \cdot J_j^{SV(L)} \right]$$

$$\tilde{\Gamma}_j^{5V(L)} = \frac{i}{2g_2} [1 + g_2 J_{VVj}^{(T)}]$$

$$\tilde{\Gamma}_{PAj}^{5(T)} = \tilde{\Omega}_{5(L)PA}^{-1} \left[1 + \frac{i}{2} \tilde{\Omega}_j^{5PA(L)} \cdot J_j^{PA(L)} \right]$$

$$\tilde{\Gamma}_{PAj}^{5(T)} = \frac{i}{2g_2} [1 + g_2 J_j^{(T)AA}] \quad (2.71)$$

sendo

$$\tilde{\Omega}_{08}^{55} = 2i \begin{pmatrix} k_0^{(-)} & k_{08}^{(-)} \\ k_{08}^{(-)} & k_8^{(-)} \end{pmatrix}, \quad J_{08}^{55} = \begin{pmatrix} J_{00}^{55} & J_{08}^{55} \\ J_{08}^{55} & J_{88}^{55} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\Omega}_{08}^{(T)VV} = -2i \begin{pmatrix} g_2 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}, \quad J_{08}^{VV(T)} = \begin{pmatrix} J_{VV00}^T & J_{VV08}^T \\ J_{VV80}^T & J_{VV88}^T \end{pmatrix},$$

$$\Omega_{08}^{(L)VV} = 2i \begin{pmatrix} g_2 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}, \quad J_{(L)08}^{VV} = \begin{pmatrix} J_{VV00}^L & J_{VV08}^L \\ J_{VV80}^L & J_{VV88}^L \end{pmatrix},$$

$$\Omega_{08}^{5PP} = 2i \begin{pmatrix} k_0^{(+)} & k_{08}^{(+)} \\ k_{08}^{(+)} & k_8^{(+)} \end{pmatrix}, \quad J_{08}^{PP} = \begin{pmatrix} J_{00}^{PP} & J_{08}^{PP} \\ J_{08}^{PP} & J_{88}^{PP} \end{pmatrix},$$

$$\Omega_{08}^{(T)AA} = -2i \begin{pmatrix} g_2 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}, \quad J_{08}^{AA(T)} = \begin{pmatrix} J_{AA00}^T & J_{AA08}^T \\ J_{AA80}^T & J_{AA88}^T \end{pmatrix},$$

$$\Omega_{08}^{(L)AA} = 2i \begin{pmatrix} g_2 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}, \quad J_{(L)08}^{AA} = \begin{pmatrix} J_{AA00}^L & J_{AA08}^L \\ J_{AA80}^L & J_{AA88}^L \end{pmatrix},$$

$$\Omega_j^{(L)SV} = 2i \begin{pmatrix} k_j^{(-)} & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}, \quad J_j^{(L)SV} = \begin{pmatrix} J_j^{SS} & 0 \\ 0 & J_j^{(L)VV} \end{pmatrix},$$

$$\Omega_j^{(L)PA} = 2i \begin{pmatrix} k_j^{(+)} & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}, \quad J_j^{(L)PA} = \begin{pmatrix} J_j^{PP} & -J_j^{PA} \\ -J_j^{AP} & J_j^{(L)AA} \end{pmatrix},$$

onde as integrais J^{ss} para cada canal mesônico específico se encontram no apêndice B.

A estrutura geral das matrizes função de vértice para cada sub-espaco sabor é

$$\vec{\Gamma}_\alpha = \vec{\Omega}_\alpha^{-1} [1 - \vec{\Omega}_\alpha \cdot \vec{J}_\alpha] \quad (2.72)$$

e como a matriz $\vec{\Gamma}$ (2.72) é diagonal por blocos, temos que as matrizes de cada sub-espaco são tratadas de forma independentes, portanto

$$\vec{\Gamma}_\alpha^{-1} = \vec{\Omega}_\alpha [1 - \vec{\Omega}_\alpha \cdot \vec{J}_\alpha]^{-1} \quad (2.73)$$

Os propagadores dos campos auxiliares são dados pelo inverso da função de vértice, ou seja,

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha &= -\Gamma_\alpha^{-1}(p) = \langle 0 | \tilde{\varphi}(p) \tilde{\varphi}(-p) | 0 \rangle = \int [D\varphi] \varphi(x) \varphi(y) e^{\frac{i}{2} \int \varphi \Gamma \varphi} \\ &= \frac{\delta^2}{\delta J(x) \delta J(y)} \int [D\varphi] e^{\frac{i}{2} \int (\varphi - J \Gamma^{-1}) \Gamma (\varphi - \Gamma^{-1} J) - J \varphi} \end{aligned}$$

e as massas associadas aos campos mesônicos auxiliares são determinadas pelo conjunto de condições :

$$\mathcal{D}_\alpha(p^2) = \det(1 - \vec{\Omega}_\alpha \cdot \vec{J}_\alpha) = 0$$

para $p^2 = m_h^2$, onde cada canal é determinado pela forma específica de $\vec{J}_\alpha$ e $\vec{\Omega}_\alpha$ compatível com os números quânticos da partícula.

Capítulo 3

Matriz de Espalhamento qq e Constantes de Acoplamento M_{qq}

Este capítulo se baseará no cálculo da matriz de espalhamento τ , e por conseguinte na amplitude de espalhamento $\mathcal{M}_{fi}$, usando o formalismo de redução, para o espalhamento férmion-férmion no modelo Nambu-Jona-Lasinio $SU(3)$ sabor generalizado em $(3+1)$ dimensões, na ordem dominante da expansão $\frac{1}{N}$. Consideraremos a densidade de Lagrangeana mostrada em (2.23), onde a parte de interação trilinear, é dada por,

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{1}{\sqrt{N}} \bar{\psi}(\sigma + i\gamma^5 \pi + iV + iA_5) \psi \quad (3.1)$$

que é a responsável pela interação entre os campos fermiônicos. Faremos uma expansão perturbativa em $\frac{1}{N}$, e na ordem mais baixa vamos ter a ordem dominante. Neste cálculo, a matriz τ , pode ser fatorizada em termos das matrizes τ de dois corpos. Nesta aproximação, encontraremos os fatores de forma méson-quark-quark como resíduos do pólo do propagador e no limite $q^2 \rightarrow m_\pi^2$ obteremos as constantes de acoplamento da interação $M_{q\bar{q}}$.

Também apresenta-se os resultados numéricos ¹obtidos para as massas geradas fermiônicas, as constantes de acoplamento do modelo e o espectro de massas dos hádrons mais leves na escala de energia até $1[GeV]$ na aproximação de "um-loop".

¹Cálculos numéricos feitos por B. Hiller e A. Blin no Departamento de Física Teórica da Universidade de Coimbra, Portugal

3.1 Matriz de Espalhamento $q\bar{q}$ na Ordem Dominante em $\frac{1}{N}$

A matriz de espalhamento, τ , está relacionada com a probabilidade de transição num processo de colisão entre partículas, e elas, não interagem entre si num tempo remoto ($t \rightarrow \mp\infty$), i.e, as interações consideradas são de curto alcance. A configuração inicial do sistema de partículas ($t \rightarrow -\infty$) é representado por um estado no espaço de Hilbert, $|\alpha\rangle^i$. As partículas evoluem, interagem, trocam os números quânticos e a configuração final do sistema de partículas ($t \rightarrow +\infty$) é descrito por um estado no espaço de Hilbert, $|\beta\rangle^f$. Nosso interesse imediato é conhecer a amplitude de transição ${}^f\langle\beta|\alpha\rangle^i$. No formalismo LSZ é suposto que o conjunto de estados iniciais e finais são conjuntos completos. Assim, existe τ um operador unitário que relaciona esse dois conjuntos de estados,

$$|\alpha\rangle^i = \sum_{\beta} \tau_{\beta\alpha} |\beta\rangle^f = \sum_{\beta} {}^f\langle\beta|\alpha\rangle^i |\beta\rangle^f, \quad (3.2)$$

Uma representação conveniente para a descrição dos estados $|\alpha\rangle^i$ e $|\beta\rangle^f$ é a representação de Fock. Como é necessário termos informações sobre a dinâmica da interação, no formalismo LSZ existe um campo interpolante associado a cada campo assintótico que carrega os mesmos números quânticos e que assintoticamente tende aos campos que descrevem as situações inicial e final. Esta condição assintótica permite-nos expressar os elementos de matriz τ em termos de valores esperados no vácuo do produto cronológico do campo interpolante, que é a chamada fórmula de redução.

Então, a fórmula de redução para o espalhamento férmion-férmion para a densidade de Lagrangeana dada por (3.1), neste caso é

$$\begin{aligned} {}^f\langle p'_1, p'_2 | p_1, p_2 \rangle^i &= {}^i\langle p'_1, p'_2 | p_1, p_2 \rangle^i + \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 \bar{u}_{p'_1}(x_3) \bar{D}_{x_3} \bar{v}_{p'_2}(x_4) \bar{D}_{x_4} \\ &\quad \times \langle 0 | \hat{T} \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \psi(x_3) \bar{\psi}(x_4) | 0 \rangle \\ &\quad \bar{D}_{x_1} u_{p_1}(x_1) \bar{D}_{x_2} v_{p_2}(x_2), \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde p_1 e p_2 são os quadri-momentos iniciais dos férmions e p'_1 e p'_2 os finais. O operador $\hat{T}$ é o operador de ordenação temporal, e $\bar{D}_x$ é o operador de Dirac satisfazendo

$$\bar{\psi}(x) \bar{D}_x = i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + M \bar{\psi}$$

e

$$\bar{D}_x \psi(x) = (-i\partial\!\!\!/ + M) \psi(x).$$

O termo $\langle p'_1, p'_2 | p_1, p_2 \rangle^i$ é um produto de deltas de Dirac e corresponde a parcela das partículas que passam sem interagir.

Como vemos, a matriz τ , fica, em termos da função de Green

$$\langle 0 | \hat{T} \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \psi(x_3) \bar{\psi}(x_4) | 0 \rangle ,$$

e a fórmula de Gell-Mann-Low nos fornece uma relação entre os campos livres e os campos em interação, que é o ponto de partida dos cálculos perturbativos. A função de Green pode ser escrita da seguinte forma,

$$\langle 0 | \hat{T} \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \psi(x_3) \bar{\psi}(x_4) | 0 \rangle = {}^0 \langle 0 | \hat{T} \psi_0(x_1) \bar{\psi}_0(x_2) \psi_0(x_3) \bar{\psi}_0(x_4) e^{i \int d^4 y : \mathcal{L}_{int}(y) :} | 0 \rangle^0 \quad (3.4)$$

onde $|0\rangle$ é o vácuo da teoria livre, $\psi_0(x)$ e $\bar{\psi}_0(x)$ são os campos fermiônicos e $: \mathcal{L}_{int}(x) :$ indica o produto ordenado dos campos (ordenação de Wick) que estão presentes na densidade de Lagrangeana de interação. A exponencial que aparece em (3.4) deve ser escrita em termos de uma expansão em série de potências. Assim, em (3.3), temos

$$\begin{aligned} \langle p'_1, p'_2 | p_1, p_2 \rangle^i - i \langle p'_1, p'_2 | p_1, p_2 \rangle^i &= \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 d^4 x_4 \bar{u}_{p'_1}(x_1) \bar{D}_{x_3} v_{p'_2}(x_4) \bar{D}_{x_4} \\ &\times {}^0 \langle 0 | \hat{T} \psi_0(x_1) \bar{\psi}_0(x_2) \psi_0(x_3) \bar{\psi}_0(x_4) e^{i \int d^4 y : \mathcal{L}_{int}(y) :} | 0 \rangle^0 \\ &\bar{D}_{x_1} u_{p_1}(x_1) \bar{D}_{x_2} v_{p_2}(x_2) , \quad (3.5) \end{aligned}$$

onde os espinores $u_p(x)$ e $v_p(x)$ são soluções da equação de Dirac livre e podemos tomá-las como sendo uma onda plana:

$$u_p = \frac{e^{-ipx}}{(2\pi)^{3/2}} u(p) \quad \text{e} \quad v_p = \frac{e^{ipx}}{(2\pi)^{3/2}} v(p).$$

sendo

$$u(p) = \begin{pmatrix} u^u(p) \\ u^u(p) \\ u^s(p) \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

e

$$v(p) = \begin{pmatrix} v^u(p) \\ v^u(p) \\ v^s(p) \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

A correção de ordem zero anula-se de forma trivial, não há contribuição pois $(p - M)u(p) = 0$ e na primeira ordem, sempre fica um número ímpar de campos auxiliares

livres e ao fazermos as contrações de Wick dos campos, sempre haverá um campo sem estar contraído, e ao tomar o valor esperado deste no vácuo o resultado é nulo. Assim, a ordem mais baixa é a contribuição de segunda ordem em que todos os campos estão contraídos dois a dois. A contribuição de segunda ordem é,

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{T} \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \psi(x_3) \bar{\psi}(x_4) | 0 \rangle &= \frac{1}{2!} \left(\frac{i}{\sqrt{N}} \right)^2 \int d^4 y_1 d^4 y_2 \langle 0 | \psi_0(x_1) \bar{\psi}_0(x_2) \psi_0(x_3) \bar{\psi}_0(x_4) \\ &\quad \times : \bar{\psi}_0(y_1) (\sigma(y_1) + i\pi(y_1)\gamma^5 + iV(y_1) + iA_5(y_1)\gamma^5) \psi_0(y_1) : \\ &\quad : \bar{\psi}_0(y_2) (\sigma(y_2) + i\pi(y_2)\gamma^5 + iV(y_2) + iA_5(y_2)\gamma^5) \psi_0(y_2) : | 0 \rangle^0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Após um pouco de álgebra chega-se a,

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{T} \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \psi(x_3) \bar{\psi}(x_4) | 0 \rangle &= -\frac{1}{2!N} \int d^4 y_1 d^4 y_2 \langle 0 | \psi_0(x_1) \bar{\psi}_0(x_2) \psi_0(x_3) \bar{\psi}_0(x_4) \\ &\quad [: \bar{\psi}_0(y_1) \sigma(y_1) \psi_0(y_1) : : \bar{\psi}_0(y_2) \sigma(y_2) \psi_0(y_2) : + : \bar{\psi}_0(y_1) iV(y_1) \psi_0(y_1) : : \bar{\psi}_0(y_2) \sigma(y_2) \psi_0(y_2) : + \\ &\quad : \bar{\psi}_0(y_1) i\pi(y_1) \gamma^5 \psi_0(y_1) : : \bar{\psi}_0(y_2) i\pi(y_2) \gamma^5 \psi_0(y_2) : + \\ &\quad : \bar{\psi}_0(y_1) iA_5(y_1) \gamma^5 \psi_0(y_1) : : \bar{\psi}_0(y_2) i\pi(y_2) \gamma^5 \psi_0(y_2) : + \\ &\quad : \bar{\psi}_0(y_1) \sigma(y_1) \psi_0(y_1) : : \bar{\psi}_0(y_2) iV(y_2) \psi_0(y_2) : + \\ &\quad : \bar{\psi}_0(y_1) iV(y_1) \psi_0(y_1) : : \bar{\psi}_0(y_2) iV(y_2) \psi_0(y_2) : + \\ &\quad : \bar{\psi}_0(y_1) i\pi(y_1) \gamma^5 \psi_0(y_1) : : \bar{\psi}_0(y_2) iA_5(y_2) \gamma^5 \psi_0(y_2) : + \\ &\quad : \bar{\psi}_0(y_1) iA_5(y_1) \gamma^5 \psi_0(y_1) : : \bar{\psi}_0(y_2) iA_5(y_2) \gamma^5 \psi_0(y_2) :] | 0 \rangle^0 . \end{aligned} \quad (3.9)$$

Como nossa densidade de Lagrangeana de interação (3.1) é invariante de Fierz, só é considerado o termo direto da interação, o termo de troca já está levado em conta, portanto os tipos de diagramas que vamos calcular ao fazer as contrações dos campos fermiônicos e bosônicos são mostradas na fig.3.1.

Calculando o valor esperado (3.9), fazendo as contrações possíveis e usando (3.6) e (3.7) e introduzindo em (3.5) obtemos,

$$\begin{aligned} \langle p'_1, p'_2 | p_1, p_2 \rangle^i - \langle p'_1, p'_2 | p_1, p_2 \rangle^i &= \frac{1}{2!N} \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 d^4 x_4 d^4 y_1 d^4 y_2 e^{i[p'_1 x_3 - p'_2 x_4 - p_1 x_1 + p_2 x_2]} \\ &\quad \frac{1}{(2\pi)^6} \bar{u}(p'_1) \bar{v}(p'_2) \vec{D}_{x_2} \vec{D}_{x_3} [S_F(x_1 - y_1) \lambda_a S_F(y_1 - x_2) \Delta_{\sigma_a \sigma_b}(y_1 - y_2) S_F(x_4 - y_2) \lambda_b S_F(y_2 - x_3) + \\ &\quad S_F(x_1 - y_1) \lambda_a \gamma^\mu S_F(y_1 - x_2) \Delta_{\mu\nu}(y_1 - y_2) S_F(x_4 - y_2) \lambda_b S_F(y_2 - x_3) + \\ &\quad S_F(x_1 - y_1) \lambda_a \gamma^5 S_F(y_1 - x_2) \Delta_{\pi_a \pi_b}(y_1 - y_2) S_F(x_4 - y_2) \lambda_b S_F(y_2 - x_3) + \\ &\quad S_F(x_1 - y_1) \lambda_a \gamma^\mu \gamma^5 S_F(y_1 - x_2) \Delta_{\mu^5}(y_1 - y_2) S_F(x_4 - y_2) \lambda_b \gamma^5 S_F(y_2 - x_3) + \end{aligned}$$

Figura 3.1: Diagramas que contribuem para o termo direto do espalhamento férmion-anti-férmion, todos proporcionais à potencia $1/N$. O quadri-momento transferido é $k = p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2$.

$$\begin{aligned}
& S_F(x_1 - y_1) \lambda_a S_F(y_1 - x_2) \Delta_\mu(y_1 - y_2) S_F(x_4 - y_2) \lambda_b \gamma^\mu S_F(y_1 - x_3) + \\
& S_F(x_1 - y_1) \lambda_a \gamma^\mu S_F(y_1 - x_2) \Delta_{\mu\nu}(y_1 - y_2) S_F(x_4 - y_2) \lambda_b \gamma^\nu S_F(y_1 - x_3) + \\
& S_F(x_1 - y_1) \lambda_a \gamma^5 S_F(y_1 - x_2) \Delta_\mu{}^5(y_1 - y_2) S_F(x_4 - y_2) \lambda_b \gamma^\mu S_F(y_1 - x_3) + \\
& S_F(x_1 - y_1) \lambda_a \gamma^\mu \gamma^5 S_F(y_1 - x_2) \\
& \Delta_{\mu\nu}{}^5(y_1 - y_2) S_F(x_4 - y_2) \lambda_b \gamma^\nu \gamma^5 S_F(y_1 - x_3) \Big] \bar{D}_{x_1} \bar{D}_{x_4} u(p_1) v(p_2) . \quad (3.10)
\end{aligned}$$

Aplicando os operadores $\bar{D}_x$ e $\bar{D}_x$ e expressando os propagadores bosônicos no espaço dos momentos, têm-se,

$${}^i \langle p'_1, p'_2 | p_1, p_2 \rangle^i - {}^i \langle p'_1, p'_2 | p_1, p_2 \rangle^i =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{(2\pi)^4}{N} \delta(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) [\bar{u}(p'_1) \lambda_a u(p_1) \Delta_{\sigma\sigma}(p'_1 - p_1) \bar{v}(p'_2) \lambda_b v(p_2) + \\
& \bar{u}(p'_1) \lambda_a \gamma^\mu u(p_1) \Delta_{\mu}(p'_1 - p_1) \bar{v}(p'_2) \lambda_b v(p_2) + \bar{u}(p'_1) i \lambda_a \gamma^5 u(p_1) \Delta_{\pi\pi}(p'_1 - p_1) \bar{v}(p'_2) i \lambda_b \gamma^5 v(p_2) + \\
& \bar{u}(p'_1) \lambda_a \gamma^\mu \gamma^5 u(p_1) \Delta_{\sigma^5}(p'_1 - p_1) \bar{v}(p'_2) i \lambda_b \gamma^5 v(p_2) + \bar{u}(p'_1) \lambda_a u(p_1) \Delta_{\mu}(p'_1 - p_1) \bar{v}(p'_2) \lambda_b \gamma^\mu v(p_2) + \\
& \bar{u}(p'_1) \lambda_a \gamma^\mu u(p_1) \Delta_{\mu\nu}(p'_1 - p_1) \bar{v}(p'_2) \lambda_b \gamma^\nu v(p_2) + \bar{u}(p'_1) i \lambda_a \gamma^5 u(p_1) \Delta_{\mu^5}(p'_1 - p_1) \bar{v}(p'_2) \lambda_b \gamma^\mu v(p_2) + \\
& \bar{u}(p'_1) \lambda_a \gamma^\mu \gamma^5 u(p_1) \Delta_{\mu\nu^5}(p'_1 - p_1) \bar{v}(p'_2) \lambda_b \gamma^\nu \gamma^5 v(p_2)] , \quad (3.11)
\end{aligned}$$

onde

$$\tau_{fi} = \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{1}{N} \Sigma_{\Gamma, \Gamma'} \Delta_{\Gamma\Gamma'}^{ab}(p_1 - p'_1) [\bar{u} \Gamma \lambda_a u \otimes \bar{v} \Gamma' \lambda_b v] , \quad (3.12)$$

sendo $\Delta_{\Gamma\Gamma'}^{ab}(p_1 - p'_1)$ os propagadores dos campos auxiliares que correspondem ao inverso da função vértice, $(\Gamma_{\Gamma\Gamma'}^{-1})^{ab}$, e portanto a matriz de espalhamento contém matrizes com elementos na diagonal e podem ser tratados de forma independente. Usando os projetores invariantes de Lorentz (2.68) pode-se expressar (3.12) na forma

$$\begin{aligned}
\tau_{fi} = & \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{1}{N} \left[\left(\bar{u} \lambda_{0u} \quad \bar{u} \lambda_{8u} \quad \bar{u} \frac{ip^\mu}{\sqrt{p^2}} \gamma_\mu \lambda_{0u} \quad \bar{u} \frac{ip^\mu}{\sqrt{p^2}} \gamma_\mu \lambda_{8u} \right) \otimes M_{SV}^{08} \begin{pmatrix} \bar{v} \lambda_{0v} \\ \bar{v} \lambda_{8v} \\ -\bar{v} i \frac{p^\nu}{\sqrt{p^2}} \gamma_\nu \lambda_{0v} \\ -\bar{v} i \frac{p^\nu}{\sqrt{p^2}} \gamma_\nu \lambda_{8v} \end{pmatrix} + \right. \\
& \left(\bar{u} i \gamma^5 \lambda_{0u} \quad \bar{u} i \gamma^5 \lambda_{8u} \quad \bar{u} \frac{ip^\mu}{\sqrt{p^2}} \gamma_\mu \gamma^5 \lambda_{0u} \quad \bar{u} \frac{ip^\mu}{\sqrt{p^2}} \gamma_\mu \gamma^5 \lambda_{8u} \right) \otimes M_{PA}^{08} \begin{pmatrix} \bar{v} i \gamma^5 \lambda_{0v} \\ \bar{v} i \gamma^5 \lambda_{8v} \\ -\bar{v} i \frac{p^\nu}{\sqrt{p^2}} \gamma_\nu \gamma^5 \lambda_{0v} \\ -\bar{v} i \frac{p^\nu}{\sqrt{p^2}} \gamma_\nu \gamma^5 \lambda_{8v} \end{pmatrix} + \\
& + \sum_{j=1}^7 \left(\bar{u} \lambda_{ju} \quad \bar{u} \gamma_\mu \frac{ip^\mu}{\sqrt{p^2}} \lambda_{ju} \right) \otimes M_{SV}^{Lj} \begin{pmatrix} \bar{v} \lambda_{jv} \\ -\bar{v} \gamma_\nu i \frac{p^\nu}{\sqrt{p^2}} \lambda_{jv} \end{pmatrix} + \\
& + \sum_{j=1}^7 \left(\bar{u} i \gamma^5 \lambda_{ju} \quad \bar{u} \gamma_\mu \gamma^5 \frac{ip^\mu}{\sqrt{p^2}} \lambda_{ju} \right) \otimes M_{PA}^{Lj} \begin{pmatrix} \bar{v} i \gamma^5 \lambda_{jv} \\ -\bar{v} \gamma_\nu \gamma^5 i \frac{p^\nu}{\sqrt{p^2}} \lambda_{jv} \end{pmatrix} + \\
& (\bar{u} \gamma_\mu T^{\mu\nu} \lambda_{0u} \quad \bar{u} \gamma_\mu T^{\mu\nu} \lambda_{8u}) \otimes M_{VV}^{T08} \begin{pmatrix} \bar{v} T_\epsilon^\nu \gamma_\nu \lambda_{0v} \\ \bar{v} T_\epsilon^\nu \gamma_\nu \lambda_{8v} \end{pmatrix} + \\
& (\bar{u} \gamma_\mu \gamma^5 T^{\mu\nu} \lambda_{0u} \quad \bar{u} \gamma_\mu \gamma^5 T^{\mu\nu} \lambda_{8u}) \otimes M_{AA}^{T08} \begin{pmatrix} \bar{v} T_\epsilon^\nu \gamma_\nu \gamma^5 \lambda_{0v} \\ \bar{v} T_\epsilon^\nu \gamma_\nu \gamma^5 \lambda_{8v} \end{pmatrix} + \\
& \left. + \sum_{j=1}^7 (\bar{u} \gamma_\mu T^{\mu\nu} \lambda_{ju}) \otimes M_{VV}^{Tj} (\bar{v} T^{\nu\epsilon} \gamma_\nu \lambda_{jv}) + \sum_{j=1}^7 (\bar{u} \gamma_\mu \gamma^5 T^{\mu\nu} \lambda_{ju}) \otimes M_{AA}^{Tj} (\bar{v} T^{\nu\epsilon} \gamma_\nu \gamma^5 \lambda_{jv}) \right] \quad (3.13)
\end{aligned}$$

onde as matrizes, amplitude de espalhamento, $\mathcal{M}$, correspondem ao inverso da função de vértice que aparecem na equação (2.70). Como sabemos a estrutura da matriz $\mathcal{M}$ é

$$\mathcal{M} = \mathcal{K}(1 - \mathcal{JK})^{-1} , \quad (3.14)$$

e os zeros de $(1 - \mathcal{JK})$ representam as singularidades da matriz espalhamento quark-quark nos vários canais mesônicos que definem as massas m_h dos hádrons determinados pelo conjunto de equação (2.73). Pode-se achar as constantes de acoplamento méson-quark-quark como residuo do polo da matriz $(1 - \mathcal{JK})^{-1}$. Fazendo uma expansão do determinante $\det(1 - \mathcal{JK})^{-1}$ em torno de $p^2 = m_h^2$, isto é:

$$\mathcal{D}(p^2) = \mathcal{D}(p^2) |_{p^2=m_h^2} + (p^2 - m_h^2) \frac{d}{dp^2} \mathcal{D}(p^2) |_{p^2=m_h^2} + \dots \cong (p^2 - m_h^2) \frac{d}{dp^2} \mathcal{D}(p^2) |_{p^2=m_h^2} , \quad (3.15)$$

e introduzindo em (3.13), compara-se com a matriz de espalhamento na aproximação de árvore, obtém-se os fatores de forma, dependentes do quadrado do momento. Ao tomar o limite $p^2 \rightarrow m_h^2$ consegue-se obter as constantes de acoplamento méson-quark-quark,

$$g_{mqq} = \lim_{p^2 \rightarrow m_h^2} g(p^2) . \quad (3.16)$$

Esses estados ligados formados por um par $q\bar{q}$, têm uma massa real menor que a soma das massas dinâmica do seus quarks constituintes $q\bar{q}$. Os estados quase-ligados encaixam-se no contínuo e com uma massa complexa, cuja parte real de m_h é maior que a soma das massas dos pares $q\bar{q}$ constituintes. Esses estados decaem dentro do contínuo $q\bar{q}$ com uma largura,

$$\Upsilon = -2\text{Im}(\mathcal{M}(m)) ,$$

considerando-se só estados mesônicos para o qual $\Upsilon \ll m$ sendo $\text{Im}(\mathcal{M}(m))$ a parte imaginária da massa. As larguras grandes, não são fisicamente aceitáveis, porque os correspondentes canais de decaimento $q\bar{q}$ não existem como estados assintóticos na natureza.

3.2 Canal Piônico

Como aplicação do formalismo, faremos um exemplo explícito correspondente à parte pseudoescalar e dentro dele, ao setor piônico, é dizer, com os números quânticos associados às matrizes λ_1 , λ_2 e λ_3 . Nesse setor a matriz $\mathcal{M}_{PA}^{L_j}$ é uma matriz 2x2 com a estrutura (3.13) para esse canal. Especificamente, estudaremos o caso do pión neutro (π_0) correspondente aos números quânticos associados à matriz λ_3 . Usando a mesma simbologia para as matrizes $\mathcal{K}$ e $\mathcal{J}$ que na ref.[22] temos,

$$\mathcal{K}_{PA}^{3L} = \begin{pmatrix} k_3^{(+)} & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}$$

e

$$\mathcal{J}_{PA}^{3L} = \begin{pmatrix} J_{PP}^3 & J_{PA}^3 \\ J_{AP}^3 & J_{AA}^{3L} \end{pmatrix}$$

então

$$1 - \mathcal{K}\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 1 - k_3 J_{PP} & -k_3 J_{PA} \\ -g_2 J_{PA} & 1 - g_2 J_{AA}^L \end{pmatrix}$$

no inverso é:

$$(1 - \mathcal{K}\mathcal{J})^{-1} = \frac{1}{\mathcal{D}_{\pi_0}} \begin{pmatrix} 1 - g_2 J_{AA}^L & k_3 J_{PA} \\ g_2 J_{PA} & 1 - k_3 J_{PP} \end{pmatrix}$$

sendo $\mathcal{D}_{\pi_0}$ o determinante associado a essa matriz,

$$\mathcal{D}_{\pi_0} = (1 - k_3 J_{PP})(1 - g_2 J_{AA}^L) - k_3 g_2 J_{PA}^2 ,$$

Agora,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(1 - \mathcal{K}\mathcal{J})^{-1} &= \frac{1}{\mathcal{D}_{\pi_0}} \begin{pmatrix} k_3(1 - g_2 J_{AA}^L) & k_3^2 J_{PA} \\ g_2^2 J_{PA} & g_2^2(1 - k_3 J_{PP}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} M_{PP} & M_{PA} \\ M_{AP} & M_{AA}^L \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A matriz de espalhamento associada correspondente ao pión neutro é:

$$\begin{aligned} \tau_{ji}^{\pi_0} &= \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{M_{PP}}{N} \left[\bar{u} i \gamma^5 \lambda_3 u \otimes \bar{v} i \gamma^5 \lambda_3 v - i \frac{M_{PA}}{M_{PP}} \bar{u} i \gamma^5 \lambda_3 u \otimes \bar{v} \gamma_\nu \gamma_5 \frac{p^\nu}{\sqrt{p^2}} \lambda_3 v + \right. \\ &\quad \left. i \frac{M_{AP}}{M_{PP}} \bar{u} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{p^\mu}{\sqrt{p^2}} \lambda_3 u \otimes \bar{v} i \gamma^5 \lambda_3 v + \frac{M_{AA}^L}{M_{PP}} \bar{u} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{p^\mu}{\sqrt{p^2}} \lambda_3 u \otimes \bar{v} \gamma_\nu \gamma_5 \frac{p^\nu}{\sqrt{p^2}} \lambda_3 v \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{1}{N} M_{PP} \bar{u} \left[i \gamma_5 \lambda_3 + \frac{M_{AP}}{M_{PP}} i p \gamma_5 \lambda_3 \right] u \otimes \bar{v} \left[i \gamma_5 \lambda_3 + \frac{M_{AA}^L}{M_{PP}} - i p \gamma_5 \lambda_3 \right] v \end{aligned}$$

onde

$$\frac{M_{PA}}{M_{PP}} = J_{PA} \frac{g_2}{1 - g_2 J_{AA}^L} ,$$

$$\frac{M_{AA}^L}{M_{PA}} = \frac{1 - k_3 J_{PP}}{k_3 J_{PA}} ,$$

e

$$\frac{M_{AA}^L}{M_{PP}} = \frac{M_{AA}^L}{M_{PA}} \frac{M_{PA}}{M_{PP}} = \frac{g_2}{k_3} \frac{1 - k_3 J_{PP}}{1 - g_2 J_{AA}^L} .$$

Fazendo a expansão do determinante $\mathcal{D}_{\pi_0}(p^2) = (1 - k_3 J_{PP})(1 - g_2 J_{AA}^L) - k_3 g_2 J_{PA}^2$ em torno de $p^2 = m_{\pi_0}^2$, temos

$$\mathcal{D}(p^2) = \mathcal{D}(p^2) |_{p^2=m_{\pi_0}^2} + (p^2 - m_{\pi_0}^2) \frac{d}{dp^2} \mathcal{D}(p^2) |_{p^2=m_{\pi_0}^2} + \dots \cong (p^2 - m_{\pi_0}^2) \frac{d}{dp^2} \mathcal{D}(p^2) |_{p^2=m_{\pi_0}^2} , \quad (3.17)$$

e

$$\frac{M_{PA}}{M_{PP}} = \frac{M_{AA}^L}{M_{PA}} = a_{\pi_0} . \quad (3.18)$$

Então

$$\tau_{fi}^{\pi_0} \cong \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{1}{N} \frac{M_{PP}}{\frac{d}{dp^2} \ln \mathcal{D}_{\pi_0}(p^2) |_{p^2=m_{\pi_0}^2}} \bar{u} [i\gamma_5 \lambda_3 + a_{\pi} i \not{p} \gamma_5 \lambda_3] u \frac{\otimes}{p^2 - m_{\pi_0}^2 + i\epsilon} \bar{v} [i\gamma_5 \lambda_3 - a_{\pi} i \not{p} \gamma_5 \lambda_3] v . \quad (3.19)$$

Comparando este resultado com o termo de Born da matriz τ (aproximação de árvore) da densidade de Lagrangeana fenomenológica quark-píon, definida a partir do acoplamento efetivo de Yukawa, podemos interpretar os fatores na frente de $\frac{1}{p^2 - m_{\pi_0}^2 + i\epsilon}$ como o quadrado da constante de acoplamento méson-quark-anti-quark para o pólo mesônico, isto é,

$$\langle \bar{u} u | \tau_{\pi_0} | \bar{v} u \rangle = \nu_{\pi_0 db}(-p) \frac{1}{p^2 - m_{\pi_0}^2 + i\epsilon} \nu_{\pi_0 ca}(p) ,$$

com

$$\nu_{\pi_0}(p) = g_{\pi_0 qq} i \gamma_5 \lambda_3 + g_{\pi_0 qq} a_{\pi_0} i \not{p} \gamma_5 \lambda_3 ,$$

o fator de forma do pion neutro e

$$g_{\pi_0 qq}^2 = \lim_{p^2 \rightarrow m_{\pi_0}^2} \frac{M_{PP}}{\frac{d}{dp^2} \ln \mathcal{D}_{\pi_0}(p^2) N} .$$

3.3 Mésons $\eta - \eta'$

O procedimento para o canal do isospin $I = 0$ que descreve o sistema $\eta - \eta'$, obtém-se da equação (3.13) correspondente a matriz amplitude de espalhamento que contém não

só termos proporcionais a $\lambda_0 \otimes \lambda_0$ e $\lambda_8 \otimes \lambda_8$ como também termos de mistura $\lambda_0 \otimes \lambda_8$ e $\lambda_8 \otimes \lambda_0$. A matriz completa no setor 0-8 associado ao canal pseudoescalar-pseudovetorial é:

$$\mathcal{M}_{\eta\eta'} = \mathcal{K}_{\eta\eta'}(1 - \mathcal{J}_{\eta\eta'}\mathcal{K}_{\eta\eta'})^{-1} , \quad (3.20)$$

com

$$\mathcal{K}_{\eta\eta'} = \begin{pmatrix} \mathcal{K}^P & 0 \\ 0 & \mathcal{K}^A \end{pmatrix}$$

e

$$\mathcal{J}_{\eta\eta'} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_{PP} & \mathcal{J}_{PA} \\ \mathcal{J}_{AP} & \mathcal{J}_{AA} \end{pmatrix}_{(m_u, m_s)}$$

As massas de η e η' aparecem, em geral, como dois zeros diferentes do determinante,

$$\mathcal{D}_{\eta\eta'}(p^2) = \det(1 - \mathcal{J}_{\eta\eta'}\mathcal{K}_{\eta\eta'})^{-1} . \quad (3.21)$$

Para o canal $I = 0$ é suficiente investigar a submatriz 2x2 $\mathcal{M}_{\eta\eta'}$, referidos aos valores 0 e 8 correspondente a mistura dos estados singletos e octetos.

Assim,

$$\mathcal{M}_{08} = \mathcal{K}_{\eta\eta'}^P(1 - \mathcal{J}_{\eta\eta'}^P\mathcal{K}_{\eta\eta'}^P)^{-1} , \quad (3.22)$$

onde,

$$\mathcal{K}_{\eta\eta'}^P = \begin{pmatrix} K_{00}^P & K_{08}^P \\ K_{80}^P & K_{88}^P \end{pmatrix}$$

e

$$\mathcal{J}_{\eta\eta'}^P = \begin{pmatrix} J_{00}^P & J_{08}^P \\ J_{80}^P & J_{88}^P \end{pmatrix}_{(m_u, m_s)}$$

Portanto a matriz $\mathcal{M}_{08}$ tem elementos da forma,

$$M_{00}^P = \frac{K_{00}^P[1 - J_{88}^P K_{88}^P] + K_{08}^{P2} J_{88}^P}{\mathcal{D}_{\eta\eta'}}$$

$$M_{88}^P = \frac{K_{88}^P[1 - J_{00}^P K_{00}^P] + K_{08}^{P2} J_{00}^P}{\mathcal{D}_{\eta\eta'}}$$

$$M_{08}^P = M_{80}^P = \frac{K_{08}^P + J_{80}^P[K_{88}^P K_{00}^P - K_{08}^{P2}]}{\mathcal{D}_{\eta\eta'}}$$

Então, a matriz amplitude de espalhamento para o sistema $\eta - \eta'$ é,

$$\tau_{fi}^{\eta\eta'} = \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{M_{00}^P}{N} \left[\bar{u}i\gamma^5\lambda_0u \otimes \bar{v}i\gamma^5\lambda_0v + \frac{M_{08}^P}{M_{00}^P} \bar{u}i\gamma^5\lambda_0u \otimes \bar{v}i\gamma^5\lambda_8v + \right. \\ \left. \frac{M_{08}^P}{M_{00}^P} \bar{u}i\gamma^5\lambda_8u \otimes \bar{v}i\gamma^5\lambda_0v + \frac{M_{88}^P}{M_{00}^P} \bar{u}i\gamma^5\lambda_8u \otimes \bar{v}i\gamma^5\lambda_8v \right]$$

Fazendo a expansão do determinante em torno da massa do méson $\eta(\eta')$ têm-se,

$$\tau_{fi}^{\eta\eta'} \cong \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{1}{N} \frac{M_{00}^P}{\frac{d}{dp^2} \ln \mathcal{D}_{\eta\eta'}(p^2) |_{p^2=m_{\eta\eta'}^2}} \left[\bar{u}i\gamma^5\lambda_0u \otimes \bar{v}i\gamma^5\lambda_0v + \frac{M_{08}^P}{M_{00}^P} \bar{u}i\gamma^5\lambda_0u \otimes \bar{v}i\gamma^5\lambda_8v + \right. \\ \left. \frac{M_{08}^P}{M_{00}^P} \bar{u}i\gamma^5\lambda_8u \otimes \bar{v}i\gamma^5\lambda_0v + \frac{M_{88}^P}{M_{00}^P} \bar{u}i\gamma^5\lambda_8u \otimes \bar{v}i\gamma^5\lambda_8v \right] . \quad (3.23)$$

Esta equação pode ser expressa na forma,

$$\tau_{fi}^{\eta\eta'} \cong \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{1}{N} \frac{M_{00}^P}{\frac{d}{dp^2} \ln \mathcal{D}_{\eta\eta'}(p^2) |_{p^2=m_{\eta\eta'}^2}} \bar{u}i\gamma^5(\lambda_0 + a_{\eta\eta'}\lambda_8)u \frac{\otimes}{p^2 - m_{\eta\eta'}^2 + i\epsilon} \bar{v}i\gamma^5(\lambda_0 + a_{\eta\eta'}\lambda_8)v . \quad (3.24)$$

onde $a_{\eta\eta'} = \frac{M_{08}^P}{M_{00}^P}$.

Denotando por $\vartheta_{\eta\eta'}$ o ângulo de mistura $\eta\eta'$ determinado por

$$\tan \vartheta_{\eta\eta'} = -\frac{1}{a_{\eta\eta'}} ,$$

e então o quadrado da constante de acoplamento $mq\bar{q}$ vem dado por,

$$g_{\eta\eta'}^2 = \lim_{p^2 \rightarrow m_{\eta\eta'}^2} \frac{M_{00}^P}{\frac{d}{dp^2} \ln \mathcal{D}_{\eta\eta'}(p^2)} \frac{1}{\sin^2(\vartheta_{\eta\eta'})} .$$

obtida como o resíduo do pólo. A estrutura do fator de forma é

$$\nu_{\eta\eta'}(p) = g_{\eta\eta'} i\gamma^5 (-\sin \vartheta_{\eta\eta'} \lambda_0 + \cos \vartheta_{\eta\eta'} \lambda_8) .$$

A inclusão da interação de 't Hooft que quebra explicitamente a simetria $U_A(1)$ e mantém intacta a simetria quiral levanta a degenerescência das massas $\eta - \eta'$. A quebra explícita da simetria quiral introduzindo pequenas massas dos quarks correntes, faz com que todos os mésons pseudoescalares adquiram massa.

3.4 Resultados Numéricos

Estabelece-se um procedimento autoconsistente para se determinar as constantes do modelo que envolve a equação de "gap", a equação para o pólo no setor vetorial (méson ρ) e a equação que envolve os pólos das partículas $\eta - \eta'$.

Os dados de entrada são as massas dos quarks constituintes, m_u , m_s e o "cutoff" Λ .

O parâmetro g_2 influi decisivamente na massa do méson ρ , uma vez que além dele nenhum dos outros parâmetros entra na equação para o pólo,

$$1 - g_2 \mathcal{J}_V^{(T)} = 0 .$$

Exige-se, então que a massa do méson ρ seja $770[MeV]$ de onde obtém-se o valor para g_2 .

Em seguida, usa-se a equação de "gap". Ela é especialmente sensível a g_1 e pouco sensível a k . Usando o valor obtido para g_2 e algum valor teste de k , obtém-se o valor de g_1 a partir das equações de "gap" ao exigir-se que as massas dos quarks constituintes tenham os valores de entrada, obtendo assim a constante g_1 .

A partir desses dois valores de g_1 e g_2 procura-se a diferença de massa $\eta - \eta'$ que é muito sensível ao determinante de 't Hooft por consequentemente a constante k .

Os valores das massas são obtidas a partir de,

$$\det [1 - \mathcal{J}_{\eta\eta'} \mathcal{K}_{\eta\eta'}] = 0$$

como dois pólos diferentes de zero.

Acertando a diferença das massas η e η' fornece o valor de k .

Com esse valor de k , volta-se à equação de "gap" para verificarmos que o valor de g_1 não se altera.

Com esse procedimento numérico determinou-se quatro (4) conjuntos de parâmetros mostrados na tabela 3.1,

Tabela 3.1

	(a)	(b)	(c)	(d)
Massas "nuas" $m_u^0 = m_d^0 [GeV]$	0.004	0.0041	0.0042	0.0042
Massas "nuas" $m_s^0 [GeV]$	0.115	0.112	0.118	0.112
Massas "vestidas" $m_u^0 = m_d^0 [GeV]$	0.3903	0.3859	0.386	0.386
Massas "vestidas" $m_s^0 [GeV]$	0.5360	0.529	0.506	0.548
$g_1 \Lambda^2$	3.948	3.924	4.678	4.678
$g_2 \Lambda^2$	5.43	5.499	5.514	5.514
$k \Lambda^5$	42	42	0	0
$\Lambda [GeV]$	1	1	1	1

Uma vez fixados os valores das constantes do modelo, calcula-se o espectro de massas dos hádrons mais leves na escala hadrônica.

Com os conjuntos obtidos para as constantes de acoplamento obteve-se os seguintes dados teóricos para as massa hadrônicas e comparados com os valores experimentais, mostrados na tabela 3.2,

Tabela 3.2

<i>Massas [MeV]</i>	<i>(a)</i>	<i>(b)</i>	<i>(c)</i>	<i>(d)</i>	<i>experimental</i>
π	136.5	139.5	140	140	139.56
K	497.5	491.5	447	528	497.67
η	549	545	605	725	548.8
ρ	775	767	767	767	768.3
K^*	898	888	868	902	891.59
ω	764	756	752	753	781.95
ϕ	990	975	937	1005	1019.41
A_0	970	963	775	775	983.3
η'	936	928	985	985	957.5

Observa-se que o conjunto (b) de parâmetros aproxima-se melhor aos resultados experimentais. Também observa-se que para alguns mésons vetoriais, os valores estão muito longe dos experimentais que poderiam ser melhorados considerando a introdução de campos tensoriais desprezados na densidade de Lagrangeana de 't Hooft e também com as correções à equação de "gap" e aos propagadores dos campos auxiliares.

As constantes de acoplamento méson-quark-anti-quark para os estados ligados obtidos pelo resíduo do pólo correspondente ao noneto de pseudoescalares são mostrados na tabela 3.3,

Tabela 3.3

	(a)	(b)	(c)	(d)
$g_{\pi 1}$	4.12	4.09	4.09	4.09
$g_{\pi 2}$	-1.81	-1.83	-1.83	-1.83
$g_{K 1}$	4.34	4.31	4.28	4.34
$g_{K 2}$	-1.86	-1.88	-1.88	-1.89
g_{01}	0.62	0.58	2.14	2.29
g_{81}	3.94	3.92	3.63	3.86
g_{02}	-0.37	-0.364	-0.57	-0.60
g_{82}	-1.73	-1.75	-1.56	-1.52
$g_{K 1}$	4.34	4.31	4.28	4.34
$g_{K 2}$	-1.86	-1.88	-1.88	-1.89
g_{01}	0.62	0.58	2.14	2.29
g_{81}	3.94	3.92	3.63	3.86
g_{02}	-0.37	-0.364	-0.57	-0.60
g_{82}	-1.73	-1.75	-1.56	-1.52
g_{K^*}	1.53	1.51	1.46	1.52

Capítulo 4

Correções à Equação de “Gap” e aos Propagadores dos Campos Auxiliares na Expansão $1/N$

Neste capítulo mostramos a metodologia de obter as correções à equação de “gap” e propagadores entre outros, perturbativamente no esquema da expansão $1/N$.

Seguindo com nossa expansão $1/N$, dentro deste contexto, a expansão nos fornece uma maneira de obter as correções à ordem dominante $1/N$ para a geração dinâmica de massa e os propagadores dos campos auxiliares. O funcional gerador na expansão $1/N$ do nosso modelo incluindo as fontes associadas aos campos auxiliares mesônicos é,

$$Z(\eta, \bar{\eta}, j_\sigma, j_\pi, j_V, j_A) = \mathcal{A} \int [\mathcal{D}\sigma] [\mathcal{D}\pi] [\mathcal{D}V] [\mathcal{D}A_5] e^{-i \int d^4x [\eta K^{-1} \bar{\eta}]} e^{S_{eff}} e^{i \int d^4x [j_\sigma \sigma + j_\pi \pi + j_V V^\mu + j_A A^{\mu 5}]}, \quad (4.1)$$

onde

$$S_{eff} = N^0 S_2 + \frac{1}{\sqrt{N}} S_3 + \frac{1}{N} S_4 + \dots \quad (4.2)$$

Para mostrar o método, faremos um exemplo incluindo só campos escalares e pseudoescalares. Então poderemos escrever (4.1) como

$$Z(\eta, \bar{\eta}, j_\sigma, j_\pi) = \mathcal{A} \int [\mathcal{D}\sigma] [\mathcal{D}\pi] e^{-i \int d^4x [\eta K^{-1} \bar{\eta}]} e^{S_{2\sigma}} e^{S_{2\pi}} e^{S_{int}} e^{i \int d^4x [j_\sigma \sigma + j_\pi \pi]}, \quad (4.3)$$

onde $S_{2\sigma}$ e $S_{2\pi}$, são as partes quadráticas de σ e π se mostram graficamente na figura 4.1, que correspondem aos propagadores do campo σ e π respectivamente na ordem dominante $1/N$ ou seja, contém todas as correções radiativas na ordem de um-“loop”. Os termos de interação que contribuem em primeira ordem, são mostrados na figura 4.2.

Figura 4.1: Propagadores dos campos σ e π na ordem dominante.

Agora poderemos usar teoria de perturbação para obter as correções à equação de "gap" e aos propagadores, isto é, expandir o termo $e^{S_{int}}$ na forma,

$$e^{S_{int}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{N}} S_3 + \frac{1}{N} S_4 + \dots \quad (4.4)$$

A partir do funcional gerador, obtém-se a função de N-pontos através de

$$\frac{1}{i} \frac{\delta Z[\eta, \bar{\eta}, j_\sigma]}{\delta j_\sigma(x_1) \dots \delta j_\sigma(x_N)} \Big|_{\eta=\bar{\eta}=j_\sigma=j_\pi=0} = \langle \phi_\sigma(x_1) \dots \phi_\sigma(x_N) \rangle \quad (4.5)$$

Assim para a função de um ponto, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\delta Z[\eta, \bar{\eta}, j_\sigma, j_\pi]}{\delta j_\sigma(x_1)} &= \mathcal{A} \int [D\sigma] [D\pi] e^{-i \int d^4x [\bar{\eta} K^{-1} \eta]} e^{S_{2\sigma}} e^{S_{2\pi}} \\ &\quad \left[1 + \frac{1}{\sqrt{N}} S_3 + \frac{1}{N} S_4 + \dots \right] i\sigma(x_1) e^{i \int d^4x [j_\sigma \sigma + j_\pi \pi]}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

e ao desligar as fontes, transforma-se

$$\frac{1}{i} \frac{\delta Z[\eta, \bar{\eta}, j_\sigma, j_\pi]}{\delta j_\sigma(x_1)} \Big|_{fontes=0} = \mathcal{A} \int [D\sigma] [D\pi] e^{S_{2\sigma}} e^{S_{2\pi}} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{N}} S_3 + \frac{1}{N} S_4 + \dots \right] \sigma(x_1), \quad (4.7)$$

Graficamente,

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \frac{\delta Z[\eta, \bar{\eta}, j_\sigma, j_\pi]}{\delta j_\sigma(x_1)} \Big|_{fontes=0} &= \langle \sigma(x_1) \rangle + \frac{1}{\sqrt{N}} \int d^4x d^4y d^4z \quad \text{(diagrama de loop)} \\ &\quad \int [D\sigma] e^{S_{2\sigma}} \sigma(x) \sigma(y) \sigma(z) \sigma(x_1) + \frac{1}{\sqrt{N}} \int d^4x d^4y d^4z \quad \text{(diagrama de loop)} \end{aligned}$$

Figura 4.2: Termos S_3 e S_4 que contribuem em primeira ordem.

$$\begin{aligned}
 & \int [D\sigma] e^{\mathcal{S}_2\sigma} \sigma(x)\sigma(x_1) \int [D\pi] e^{\mathcal{S}_2\pi} \pi(y)\pi(z) + \dots \\
 &= \frac{1}{\sqrt{N}} \int d^4x d^4y d^4z \cdot \bigcirc \\
 & [(\sigma(x)\sigma(y)\sigma(z)\sigma(x_1)) + (\sigma(x)\sigma(x_1))(\pi(y)\pi(z))] + \dots
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

onde usa-se o fato que a função de N-pontos pode ser definida por,

$$\langle \phi_\alpha(x_1) \dots \phi_\alpha(x_N) \rangle = \int \frac{[D\phi] e^{\mathcal{S}_2} \phi(x_1) \dots \phi(x_N)}{\int [D\phi] e^{\mathcal{S}_2}} \tag{4.9}$$

o que liga com o teorema de Wick que permite fazer as contrações dois a dois entre os campos ϕ_i .

Vamos incluir na “condição de tadpole” as contribuições que vêm dos gráficos de “dois-loops”. Isto corresponde a acrescentarmos correções de $\mathcal{O}(1/N)$. Assim, na equação de “tadpole” temos graficamente a equação mostrada na figura 4.3, onde os propagadores fermiônicos e bosônicos, já contém as correções radiativas em primeira ordem de $1/N$. Calcula-se estes graficos da maneira usual, utilizando as regras de Feynman.

Analogamente, para a função de Green de dois pontos até “dois-loops”, contribui só a parte de S_4 , vide figura 4.4 , temos

$$\frac{1}{i^2} \frac{\delta Z(\eta, \bar{\eta}, j_\sigma, j_\pi)}{\delta j_\sigma(x_1) \delta j_\sigma(x_2)} \Big|_{\text{sources}=0} =$$

$$x + \text{ Tad Pole } + \frac{1}{N} \sum_{\sigma, \pi} \left[\text{ Tad Pole } + \text{ Tad Pole } + \text{ Tad Pole } \right] = 0$$

Figura 4.3: Correções à equação de Tad-pole.

$$\text{ wavy line } = \text{ wavy line } + \frac{1}{N} \sum_{\sigma, \pi} \left[\text{ Tad Pole } + \text{ Tad Pole } + \text{ Tad Pole } + \text{ Tad Pole } \right]$$

Figura 4.4: Correções ao propagador.

onde é o propagador "vestido" do méson σ ou π .

Podemos dizer, em princípio, que a expansão $1/N$ permite obter correções à massa gerada, propagadores, vértice de interação trilinear, etc, nas ordens seguintes à ordem dominante. Ou seja, dentro do contexto de um método não perturbativo, obtém-se uma expansão consistente ordem a ordem em $1/N$. Devido ao fato que se tem estendido o modelo de NJL para cálculos de espalhamento e diagramas mais complicados, oferecemos com o presente trabalho uma possível estratégia para tratar todos esses processos de maneira consistente.

Capítulo 5

Expansão Local dos Campos Auxiliares na Expansão $1/N$

O objetivo do presente capítulo é obter uma densidade de Lagrangeana efetiva local de campos bosônicos (mesônicos) interagentes baseada no modelo quártico $NJLSU(3)$. Para isto, faremos uma expansão local em série de Taylor nos campos auxiliares bosônicos em torno do ponto x até segunda ordem nos dois primeiros termos da ação efetiva (S_2 e S_3) da expansão $1/N$.

Ao considerarmos as correções radiativas, os campos auxiliares adquirem termos cinéticos tendo-se assim, uma parte livre dos campos. Da mesma forma com a aproximação local em S_3 obtemos os termos de interação trilineares.

5.1 Expansão Local em Torno do Ponto X dos Campos Auxiliares

Depois de feita a expansão $1/N$ no modelo NJL generalizado, obteve-se uma ação efetiva S_{eff} dada pela equação (2.41). Consideraremos só os termos correspondente a S_2 , dada pela equação (2.43), e S_3 , dada pela equação (2.44). Explicitando os campos auxiliares na equação (2.50) o traço funcional na parte quadrática vem dado por,

$$\begin{aligned} \tilde{Tr} \left[(i\partial - m)^{-1} (\sigma + i\gamma^5 \pi + iV + iA_5) \right]^2 = & \int d^4x d^4y [Tr [\sigma(x) S_F(x-y) \sigma(y) S_F(y-x)] + \\ & Tr [iV(x) S_F(x-y) \sigma(y) S_F(y-x)] + Tr [\sigma(x) S_F(x-y) iV(y) S_F(y-x)] + \\ & Tr [i\gamma^5 \pi(x) S_F(x-y) i\gamma^5 \pi(y) S_F(y-x)] + Tr [iA_5(x) \gamma^5 S_F(x-y) i\gamma^5 \pi(y) S_F(y-x)] + \\ & Tr [iV(x) S_F(x-y) iV(y) S_F(y-x)] + Tr [i\gamma^5 \pi(x) S_F(x-y) iA_5(y) \gamma^5 S_F(y-x)] + \\ & Tr [iA_5(x) \gamma^5 S_F(x-y) iA_5(y) \gamma^5 S_F(y-x)]] \end{aligned} \quad (5.1)$$

Considerando novamente dois campos genéricos $\phi_F(x)$ e $\phi_{F'}(x)$, e Γ e Γ' duas matrizes de Dirac quaisquer associadas aos campos genéricos, podemos representar a seguinte estrutura geral,

$$I = \int d^4x d^4y \phi_{a,\Gamma}(x) \text{Tr} [\Gamma \lambda^a S_F(x-y) \Gamma' \lambda^b S_F(y-x)] \phi_{b,\Gamma'}(y) \quad (5.2)$$

O interesse é deduzir uma ação efetiva local com graus de liberdade mesônicos. Devido a que o determinante fermiônico é altamente não-local o procedimento consiste nos termos de uma expansão derivativas nos campos.

Expande-se em série de Taylor $\phi_{b,\Gamma'}(y)$ em torno do ponto x , isto é,

$$\begin{aligned} \phi_{b,\Gamma'}(y) &= \phi_{b,\Gamma'}(x) + (x-y)_\alpha \partial^\alpha \phi_{b,\Gamma'}(x) + \\ &\quad \frac{1}{2} (x-y)_\alpha (x-y)_\beta \partial^\alpha \partial^\beta \phi_{b,\Gamma'}(x) + \dots \end{aligned} \quad (5.3)$$

Introduzindo isto em (4.2) e mantendo os termos até segunda ordem, obtém-se,

$$\begin{aligned} I &= \int d^4x d^4y \phi_{a,\Gamma}(x) \text{Tr} [\Gamma \lambda^a S_F(x-y) \Gamma' \lambda^b S_F(y-x)] \phi_{b,\Gamma'}(y) + \\ &\quad \int d^4x d^4y \phi_{a,\Gamma}(x) \text{Tr} [\Gamma \lambda^a S_F(x-y) \Gamma' \lambda^b S_F(y-x)] (x-y)_\alpha \partial^\alpha \phi_{b,\Gamma'}(x) + \\ &\quad \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi_{a,\Gamma}(x) \text{Tr} [\Gamma \lambda^a S_F(x-y) \Gamma' \lambda^b S_F(y-x)] (x-y)_\alpha (x-y)_\beta \partial^\alpha \partial^\beta \phi_{b,\Gamma'}(x) \end{aligned} \quad (5.4)$$

A primeira integral depois de fazer a mudança de variável $x' \rightarrow x$ e $z \rightarrow x-y$ e de representar o propagador fermiônico,

$$S_F(z) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp -ipz S_F(p)$$

fica

$$A_1(\phi_\Gamma, \phi_{\Gamma'}) = - \int d^4x \phi_{a,\Gamma}(x) \mathcal{I}_1^{ab}(\Gamma, \Gamma') \phi_{b,\Gamma'}(x) \quad (5.5)$$

com

$$\mathcal{I}_1^{ab}(\Gamma, \Gamma') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\Gamma \lambda^a S_F(p) \Gamma' \lambda^b S_F(p)] \quad (5.6)$$

Fazendo a mesma mudança da variável e usando,

$$\partial_\alpha^{p'} \exp^{-i(p-p')z} = iz_\alpha \exp^{-i(p-p')z}$$

$$\int d^4p' S_F(p') \partial_\alpha^{p'} \delta(p-p') = - \int d^4p' \partial_\alpha^{p'} S_F'(p') \delta(p-p')$$

e

$$\partial_\alpha^p S_F(p) = i S_F(p) \gamma_\alpha S_F(p)$$

obtem-se

$$A_2(\phi_\Gamma, \phi_{\Gamma'}) = - \int d^4x \phi_a(x) \mathcal{I}_{2\alpha}^{ab}(\Gamma, \Gamma') \partial^\alpha \phi'_b(x) \quad (5.7)$$

sendo

$$\mathcal{I}_{2\alpha}^{ab}(\Gamma, \Gamma') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\Gamma \lambda^a S_F(p) \Gamma' \lambda^b S_F(p) \gamma_\alpha S_F(p)] \quad (5.8)$$

e a terceira integral é

$$A_3(\phi_\Gamma, \phi_{\Gamma'}) = - \int d^4x \phi_{a,\Gamma}(x) \mathcal{I}_{3\alpha\beta}^{ab}(\Gamma, \Gamma') \partial^\alpha \partial^\beta \phi_{b,\Gamma'}(x) \quad (5.9)$$

onde

$$\mathcal{I}_{3\alpha\beta}^{ab}(\Gamma, \Gamma') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\Gamma \lambda^a S_F(p) \Gamma' \lambda^b S_F(p) \gamma_\alpha S_F(p) \gamma_\beta S_F(p)] \quad (5.10)$$

Vamos definir as seguintes integrais:

$$T_1(\Gamma, \Gamma', m_f, m_{f'}) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\Gamma S_F^f(p) \Gamma' S_F^{f'}(p)]$$

$$T_{2\alpha}(\Gamma, \Gamma', m_f, m_{f'}) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\Gamma S_F^f(p) \Gamma' S_F^{f'}(p) \gamma_\alpha S_F^{f'}(p)] \quad (5.11)$$

$$T_{3\alpha\beta}(\Gamma, \Gamma', m_f, m_{f'}) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\Gamma S_F^f(p) \Gamma' S_F^{f'}(p) \gamma_\alpha S_F^{f'}(p) \gamma_\beta S_F^{f'}(p)]$$

sendo $f, f' = u, s$. Uma vez aplicado o traço no espaço sabor e usando as definições (5.11), as integrais $\mathcal{I}$'s ficam,

$$\mathcal{I}_1^{00}(\Gamma, \Gamma') = \frac{4}{3} T_1(\Gamma, \Gamma', m_u, m_u) + \frac{2}{3} T_1(\Gamma, \Gamma', m_s, m_s)$$

$$\mathcal{I}_1^{11}(\Gamma, \Gamma') = \mathcal{I}_1^{22}(\Gamma, \Gamma') = \mathcal{I}_1^{33}(\Gamma, \Gamma') = 2T_1(\Gamma, \Gamma', m_u, m_u)$$

$$\mathcal{I}_1^{44}(\Gamma, \Gamma') = \mathcal{I}_1^{66}(\Gamma, \Gamma') = 2T_1(\Gamma, \Gamma', m_s, m_u)$$

(5.12)

$$\mathcal{I}_1^{55}(\Gamma, \Gamma') = \mathcal{I}_1^{77}(\Gamma, \Gamma') = 2T_1(\Gamma, \Gamma', m_u, m_s)$$

$$\mathcal{I}_1^{88}(\Gamma, \Gamma') = \frac{2}{3} T_1(\Gamma, \Gamma', m_u, m_u) + \frac{4}{3} T_1(\Gamma, \Gamma', m_s, m_s)$$

$$\mathcal{I}_1^{08}(\Gamma, \Gamma') = \mathcal{I}_1^{80}(\Gamma, \Gamma') = \frac{2\sqrt{2}}{3} [T_1(\Gamma, \Gamma', m_u, m_u) - T_1(\Gamma, \Gamma', m_s, m_s)]$$

e as integrais $\mathcal{I}_{2\alpha}^{ab}$ e $\mathcal{I}_{3\alpha\beta}^{ab}$ satisfazem as mesmas combinações, mudando apenas T_1 por $T_{2\alpha}$ e $T_{3\alpha\beta}$ respectivamente.

Então a ação quadrática S_2 em termos dos campos locais é,

$$S_2 = \int d^4x [\mathcal{L}_2(\sigma_a, \pi_a) + \mathcal{L}_2(V_\mu, A_{\mu 5}) + \mathcal{L}_{2PA}] \quad (5.13)$$

onde a densidade de Lagrangeana correspondente aos campos escalares e pseudoescalares é,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(\sigma_a, \pi_a) = & \sigma_a \left[-\frac{1}{2\tilde{k}_a^{(-)}} + \frac{i}{2}\mathcal{I}_1^{aa}(1,1) \right] \sigma_a + \\ & \sigma_0 \left[\frac{a^{(-)}k_{08}^{(-)}}{\tilde{k}_0^{(-)}\tilde{k}_8^{(-)}} + i\mathcal{I}_1^{08}(1,1) \right] \sigma_8 + \\ & -\frac{i}{2}\partial^\alpha \sigma_a \mathcal{I}_{3\alpha\beta}^{aa}(1,1) \partial^\beta \sigma_a - i\partial^\alpha \sigma_0 \mathcal{I}_{3\alpha\beta}^{08}(1,1) \partial^\beta \sigma_8 + \\ & \pi_a \left[-\frac{1}{2\tilde{k}_a^{(+)}} + \frac{i}{2}\mathcal{I}_1^{aa}(i\gamma^5, i\gamma^5) \right] \pi_a + \\ & \pi_0 \left[\frac{a^{(+)}k_{08}^{(+)}}{\tilde{k}_0^{(+)}\tilde{k}_8^{(+)}} + i\mathcal{I}_1^{08}(i\gamma^5, i\gamma^5) \right] \pi_8 + \\ & -\frac{i}{2}\partial^\alpha \pi_a \mathcal{I}_{3\alpha\beta}^{aa}(i\gamma^5, i\gamma^5) \partial^\beta \pi_a - i\partial^\alpha \pi_0 \mathcal{I}_{3\alpha\beta}^{08}(i\gamma^5, i\gamma^5) \partial^\beta \pi_8 \end{aligned} \quad (5.14)$$

e a densidade de Lagrangeana associada aos campos vetoriais e pseudovetoriais é,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(V_{\mu a}, A_{\mu 5a}) = & V_{a\mu} \left[\frac{g^{\mu\nu}}{2g_2} + \frac{i}{2}\mathcal{I}_1^{aa}(\gamma^\mu, \gamma^\nu) \right] V_{a\nu} + \\ & iV_{0\mu} [\mathcal{I}_1^{08}(\gamma^\mu, \gamma^\nu)] V_{8\nu} - i\frac{1}{2}\partial^\alpha V_{a\mu} \mathcal{I}_{3\alpha\beta}^{aa} \partial^\beta V_{a\nu} + \\ & -i\partial^\alpha V_{0\mu} \mathcal{I}_{3\alpha\beta}^{08}(\gamma^\mu, \gamma^\nu) \partial^\beta V_{8\nu} + A_{a\mu 5} \left[\frac{g^{\mu\nu}}{2g_2} + \frac{i}{2}\mathcal{I}_1^{aa}(\gamma^\mu \gamma^5, \gamma^\nu \gamma^5) \right] A_{a\nu 5} + \\ & iA_{0\mu 5} [\mathcal{I}_1^{08}(\gamma^\mu \gamma^5, \gamma^\nu \gamma^5)] A_{8\nu 5} + \\ & -\frac{i}{2}\partial^\alpha A_{a\mu 5} \mathcal{I}_{3\alpha\beta}^{aa}(\gamma^\mu \gamma^5, \gamma^\nu \gamma^5) \partial^\beta A_{a\nu 5} + \\ & -i\partial^\alpha A_{0\mu 5} \mathcal{I}_{3\alpha\beta}^{08}(\gamma^\mu \gamma^5, \gamma^\nu \gamma^5) \partial^\beta A_{8\nu 5} , \end{aligned} \quad (5.15)$$

e a densidade de Lagrangeana que contém a mistura axial-pseudoescalar é

$$\mathcal{L}_{2PA} = iA_{a\mu 5} \mathcal{I}_{2\alpha}^{aa}(\gamma^\mu \gamma^5, i\gamma^5) \partial^\alpha \pi_a + 2iA_{a\mu 50} \mathcal{I}_{2\alpha}^{08}(\gamma^\mu \gamma^5, i\gamma^5) \partial^\alpha \pi_8 . \quad (5.16)$$

Observa-se da densidade de Lagrangeana (5.13) que se tem uma mistura dos campos pseudoescalares e axiais. As integrais I 's são da forma,

$$I_{2\alpha}^{ab}(\gamma^\mu \gamma^5, i\gamma^5) = I_{2PA}^{ab} g_\alpha^\mu$$

$$I_{3\alpha\beta}^{ab}(1, 1) = I_3^{ab}(1, 1) g_{\alpha\beta}$$

$$I_{3\alpha\beta}^{ab}(i\gamma^5, i\gamma^5) = I_3^{ab}(i\gamma^5, i\gamma^5) g_{\alpha\beta}$$

$$I_{3\alpha\beta}^{ab}(\gamma^\mu, \gamma^\nu) = I_3^{ab}(\gamma^\mu, \gamma^\nu) g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + z_2^{ab} g_\alpha^\mu g_\beta^\nu + z_3^{ab} g_\beta^\mu g_\alpha^\nu$$

$$I_{3\alpha\beta}^{ab}(\gamma^\mu \gamma^5, \gamma^\nu \gamma^5) = I_3^{ab}(\gamma^\mu, \gamma^\nu) g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + z_2^{ab} g_\alpha^\mu g_\beta^\nu + z_3^{ab} g_\beta^\mu g_\alpha^\nu ,$$

onde consideramos o primeiro termo das últimas duas integrais, desprezando assim os termos quadráticos tipo fixação de gauge $(\partial_\mu V^\mu)^2$.

Fazendo a seguinte transformação para o campo axial

$$A_{\mu 5a} = A'_{\mu 5a} - \frac{I_{2PA}^{ab}}{2I_{1AA}^{ab}} \partial_\mu \pi_a$$

a qual diagonaliza o setor pseudoescalar-axial, obtendo uma densidade de Lagrangeana com as mesmas estruturas de (5.14) e (5.15) sem o termo (5.16), mudando só

$$-\frac{1}{2} I_{3\alpha\beta}^{ab}(i\gamma^5, i\gamma^5) \longrightarrow -\frac{i}{2} [I_{3\alpha\beta}^{ab}(i\gamma^5, i\gamma^5) - i \frac{I_{2PA}^{ab}}{I_{1AA}^{ab}}]$$

onde

$$I_{1AA}^{aa} = \frac{1}{2g_2} + \frac{i}{2} I_1^{aa}(\gamma^\mu \gamma^5, \gamma^\nu \gamma^5)$$

e

$$I_{1AA}^{08} = i I_1^{08}(\gamma^\mu \gamma^5, \gamma^\nu \gamma^5) .$$

Observa-se também das densidades de Lagrangeana (5.14) e (5.15), que ainda há uma mistura de isospin nos campos (0-8), pelo que a densidade de Lagrangeana torna-se não-diagonal. No setor escalar-pseudoescalar se faz as seguintes transformações entre os campos (0-8):

$$\sigma_0 = \sigma_0' \cos \theta_\sigma - \sigma_8' \sin \theta_\sigma$$

$$\sigma_8 = \sigma_0' \sin \theta_\sigma + \sigma_8' \cos \theta_\sigma$$

(5.17)

$$\pi_0 = \pi_0' \cos \theta_\pi - \pi_8' \sin \theta_\pi$$

$$\pi_8 = \pi_0' \sin \theta_\pi + \pi_8' \cos \theta_\pi$$

e suas derivadas

$$\partial_\mu \sigma_0 = \partial_\mu \sigma_0' \cos \theta_{0\sigma} - \partial_\mu \sigma_8' \sin \theta_{0\sigma}$$

$$\partial_\mu \sigma_8 = \partial_\mu \sigma_0' \sin \theta_{0\sigma} + \partial_\mu \sigma_8' \cos \theta_{0\sigma} \quad (5.18)$$

$$\partial_\mu \pi_0 = \partial_\mu \pi_0' \cos \theta_{0\pi} - \partial_\mu \pi_8' \sin \theta_{0\pi}$$

$$\partial_\mu \pi_8 = \pi_0' \sin \theta_{0\pi} + \partial_\mu \pi_8' \cos \theta_{0\pi}$$

que deixa a densidade de Lagrangeana $\mathcal{L}_2(\sigma_a, \pi_a)$ diagonal, isto é,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(\sigma_a', \pi_a') = & -\frac{i}{2} \tilde{I}_3^{aa}(1, Y1) (\partial_\mu \sigma_a')^2 + \\ & \tilde{I}_1^{aa}(1, 1) (\sigma_a')^2 - \frac{i}{2} \tilde{I}_3^{aa}(i\gamma^5, i\gamma^5) (\partial_\mu \pi_a')^2 + \\ & \tilde{I}_1^{aa}(i\gamma^5, i\gamma^5) (\pi_a')^2 \end{aligned} \quad (5.19)$$

onde os coeficientes são determinados por,

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1^{00}(1, 1) &= I_1^{00}(1, 1) \cos^2 \theta_\sigma + I_1^{88}(1, 1) \sin^2 \theta_\sigma + \\ & I_1^{08}(1, 1) \cos \theta_\sigma \sin \theta_\sigma \\ \tilde{I}_1^{88}(1, 1) &= I_1^{00}(1, 1) \sin^2 \theta_\sigma + I_1^{88}(1, 1) \cos^2 \theta_\sigma - \\ & I_1^{08}(1, 1) \cos \theta_\sigma \sin \theta_\sigma \\ \tilde{I}_1^{jj}(1, 1) &= I_1^{jj}(1, 1) \end{aligned}$$

onde $j = 1, 2, \dots, 7$ e

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1^{aa}(1, 1) &= -\frac{1}{2k_3^{(-)}} - \frac{i}{2} I_1^{aa}(1, 1) \\ \tilde{I}_1^{08}(1, 1) &= \frac{\alpha^{(-)} k_{08}^{(-)}}{k_0^{(-)} k_8^{(-)}} + i I_1^{08}(1, 1) \\ \tan(2\theta_\sigma) &= \frac{I_1^{08}(1, 1)}{I_1^{00}(1, 1) - I_1^{88}(1, 1)} \\ \tilde{I}_3^{00}(1, 1) &= I_3^{00}(1, 1) \cos^2 \theta_{0\sigma} + I_3^{88}(1, 1) \sin^2 \theta_{0\sigma} + \\ & + 2I_3^{08}(1, 1) \cos \theta_{0\sigma} \sin \theta_{0\sigma} \\ \tilde{I}_3^{88}(1, 1) &= I_3^{00}(1, 1) \sin^2 \theta_{0\sigma} + I_3^{88}(1, 1) \cos^2 \theta_{0\sigma} + \\ & - 2I_3^{08}(1, 1) \cos \theta_{0\sigma} \sin \theta_{0\sigma} \\ \tan 2\theta_{0\sigma} &= \frac{2I_3^{08}(1, 1)}{I_3^{00}(1, 1) - I_3^{88}(1, 1)} \\ \tilde{I}_3^{jj}(1, 1) &= I_3^{jj}(1, 1) . \end{aligned}$$

Para a parte pseudoescalar, se satisfazem as mesmas relações são satisfeitas, mudando apenas $1 \rightarrow i\gamma^5$, $\theta_\sigma \rightarrow \theta_\pi$, $\theta_{0\sigma} \rightarrow \theta_{0\pi}$. No setor vetorial e pseudovetorial as transformações para os campos (0-8) vem dadas por,

$$V_{0\mu} = V'_{0\mu} \cos \theta_V - V'_{8\mu} \sin \theta_V \quad (5.20)$$

$$V_{8\mu} = V'_{0\mu} \sin \theta_V + V'_{8\mu} \cos \theta_V$$

e suas derivadas

$$V_{0\mu\nu} = V'_{0\mu\nu} \cos \theta_{0V} - V'_{8\mu\nu} \sin \theta_{0V} \quad (5.21)$$

$$V_{8\mu\nu} = V'_{0\mu\nu} \sin \theta_{0V} + V'_{8\mu\nu} \cos \theta_{0V}$$

sendo $V_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$ o tensor intensidade do campo vetorial massivo. Relações semelhantes são usadas para os campos axiais $A_{0\mu 5}$ e $A_{8\mu 5}$. Para obter a forma do tensor intensidade de campo e os ângulos de mistura, é só mudar $V \rightarrow A_5$, $\theta_V \rightarrow \theta_A$ e $\theta_{0V} \rightarrow \theta_{0A}$. Então a densidade de Lagrangeana do setor vetorial-axial $\mathcal{L}_2(V_{\alpha\mu}, A_{\alpha\mu 5})$ é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(V'_{\alpha\mu}, A'_{\alpha\mu 5}) = & -\frac{i}{4} \tilde{\mathcal{I}}_3^{aa}(\gamma^\mu, \gamma^\nu) V'_{\alpha\mu\nu} V'^{\alpha\mu\nu} + \\ & + \tilde{\mathcal{I}}_1^{aa}(\gamma^\mu, \gamma^\nu) V'^2_{\alpha\mu} - \frac{i}{4} \tilde{\mathcal{I}}_3^{aa}(\gamma^\mu \gamma^5, \gamma^\nu \gamma^5) A'_{\alpha\mu\nu 5} A'^{\alpha\mu\nu 5} + \\ & \tilde{\mathcal{I}}_1^{aa}(\gamma^\mu \gamma^5, \gamma^\nu \gamma^5) A'^2_{\alpha\mu 5} \end{aligned} \quad (5.22)$$

onde os coeficientes são dados por

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{I}}_1^{00}(\gamma^\mu, \gamma^\nu) = & \mathcal{I}_1^{00}(\gamma^\mu, \gamma^\nu) \cos^2 \theta_V + \mathcal{I}_1^{88}(\gamma^\mu, \gamma^\nu) \sin^2 \theta_V + \\ & + \mathcal{I}_1^{08}(\gamma^\mu, \gamma^\nu) \cos \theta_V \sin \theta_V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{I}}_1^{88}(\gamma^\mu, \gamma^\nu) = & \mathcal{I}_1^{00}(\gamma^\mu, \gamma^\nu) \sin^2 \theta_V + \mathcal{I}_1^{88}(\gamma^\mu, \gamma^\nu) \cos^2 \theta_V + \\ & - \mathcal{I}_1^{08}(\gamma^\mu, \gamma^\nu) \cos \theta_V \sin \theta_V \end{aligned}$$

$$\tilde{\mathcal{I}}_1^{jj}(\gamma^\mu, \gamma^\nu) = \mathcal{I}_1^{jj}(\gamma^\mu, \gamma^\nu)$$

$$\tilde{\mathcal{I}}_1^{aa}(\gamma^\mu, \gamma^\nu) = \frac{1}{2g_2} + \frac{i}{2} \mathcal{I}_1^{iaa}(\gamma^\mu, \gamma^\nu)$$

$$\tan 2\theta_V = \frac{\mathcal{I}_1^{08}(\gamma^\mu, \gamma^\nu)}{\mathcal{I}_1^{00}(\gamma^\mu, \gamma^\nu) - \mathcal{I}_1^{88}(\gamma^\mu, \gamma^\nu)},$$

e

$$\tilde{\mathcal{I}}_3^{00}(\gamma^\mu, \gamma^\nu) = \mathcal{I}_3^{00}(\gamma^\mu, \gamma^\nu) \cos^2 \theta_{0V} + \mathcal{I}_3^{88}(\gamma^\mu, \gamma^\nu) \sin^2 \theta_{0V} + 2\mathcal{I}_3^{08}(\gamma^\mu, \gamma^\nu) \cos \theta_{0V} \sin \theta_{0V}$$

$$\tilde{I}_3^{as}(\gamma^\mu, \gamma^\nu) = I_3^{00}(\gamma^\mu, \gamma^\nu) \sin^2 \theta_{0V} + I_3^{88}(\gamma^\mu, \gamma^\nu) \cos^2 \theta_{0V} - 2I_3^{08}(\gamma^\mu, \gamma^\nu) \cos \theta_{0V} \sin \theta_{0V}$$

$$\tan 2\theta_{0V} = \frac{2I_3^{08}(\gamma^\mu, \gamma^\nu)}{I_3^{00}(\gamma^\mu, \gamma^\nu) - I_3^{88}(\gamma^\mu, \gamma^\nu)}$$

$$\tilde{I}_3^{jj}(\gamma^\mu, \gamma^\nu) = I_3^{jj}(\gamma^\mu, \gamma^\nu)$$

Redefinindo os campos auxiliares na forma,

$$\sigma_a = \sqrt{\tilde{I}_3^{aa}(1,1)} \sigma'_a$$

$$\pi_a = \sqrt{\tilde{I}_3^{aa}(i\gamma^5, i\gamma^5)} \pi'_a$$

(5.23)

$$V_{\mu a} = \sqrt{\tilde{I}_3^{aa}(\gamma^\mu, \gamma^\nu)} V'_{\mu a}$$

$$A_{\mu 5a} = \sqrt{\tilde{I}_3^{aa}(\gamma^\mu \gamma^5, \gamma^\nu \gamma^5)} A'_{\mu 5a}$$

obtem-se a seguinte densidade de Lagrangeana quadrática em termos dos campos normalizados,

$$\mathcal{L}_2(\sigma_a, \pi_a, V_\mu, A_{\mu 5}) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma_a)^2 - \frac{1}{2}m_{\sigma_a}^2(\sigma_a)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi_a)^2 - \frac{1}{2}m_{\pi_a}^2(\pi_a)^2 -$$

(5.24)

$$-\frac{1}{4}V_{a\mu\nu}V^{a\mu\nu} + \frac{1}{2}m_{V_a}^2 V_{a\mu}^2 - \frac{1}{4}A_{a\mu\nu 5}A^{a\mu\nu 5} + \frac{1}{2}m_{A_a}^2 A_{a\mu 5}^2$$

sendo,

$$m_{\sigma_a} = \sqrt{\frac{2\tilde{I}_1^{aa}(1,1)}{i\tilde{I}_3^{aa}(1,1)}} \quad m_{\pi_a} = \sqrt{\frac{2\tilde{I}_1^{aa}(i\gamma^5, i\gamma^5)}{i\tilde{I}_3^{aa}(i\gamma^5, i\gamma^5)}}$$

(5.25)

$$m_{V_a} = \sqrt{\frac{2\tilde{I}_1^{aa}(\gamma^\mu, \gamma^\nu)}{i\tilde{I}_3^{aa}(\gamma^\mu, \gamma^\nu)}} \quad m_{A_{5a}} = \sqrt{\frac{2\tilde{I}_1^{aa}(\gamma^\mu \gamma^5, \gamma^\nu \gamma^5)}{i\tilde{I}_3^{aa}(\gamma^\mu \gamma^5, \gamma^\nu \gamma^5)}}$$

as massas associadas aos campos auxiliares. Obteve-se uma densidade de Lagrangeana quadrática local, característica de campos livres massivos, ou seja, uma parte cinética mais um termo de massa, que corresponde a uma densidade de Lagrangeana que descreve a dinâmica dos campos auxiliares.

Agora, temos que ver como ou de que forma, interagem os campos auxiliares entre si. Para esse efeito, considera-se a parte da ação correspondente a S_3 .

A parte trilinear da ação efetiva nos campos auxiliares depois de desenvolver o traço funcional no espaço de coordenadas da equação (2.44) e ter introduzido conjuntos completos no espaço de momentos fica,

$$\begin{aligned}
S_3 = & Tr \int d^4x d^4y d^4z [\sigma(x) S_F(x-y) \sigma(y) S_F(y-z) \sigma(z) S_F(z-x) + \\
& i\pi(x) \gamma^5 S_F(x-y) i\pi(y) \gamma^5 S_F(y-z) i\pi(z) \gamma^5 S_F(z-x) + \\
& iV(x) S_F(x-y) iV(y) S_F(y-z) iV(z) S_F(z-x) + \\
& iA_5(x) \gamma^5 S_F(x-y) iA_5(y) \gamma^5 S_F(y-z) iA_5(z) \gamma^5 S_F(z-x) + \\
& 3\sigma(x) S_F(x-y) \sigma(y) S_F(y-z) i\pi(z) \gamma^5 S_F(z-x) + \\
& 3\sigma(x) S_F(x-y) \sigma(y) S_F(y-z) iV(z) S_F(z-x) + \\
& 3\sigma(x) S_F(x-y) \sigma(y) S_F(y-z) A_5(z) \gamma^5 S_F(z-x) + \\
& 3\sigma(x) S_F(x-y) i\pi(y) \gamma^5 S_F(y-z) i\pi(z) \gamma^5 S_F(z-x) + \\
& 3i\pi(x) \gamma^5 S_F(x-y) i\pi(y) \gamma^5 S_F(y-z) iV(z) S_F(z-x) + \\
& 3i\pi(x) \gamma^5 S_F(x-y) i\pi(y) \gamma^5 S_F(y-z) iA_5(z) \gamma^5 S_F(z-x) + \\
& 3\sigma(x) S_F(x-y) iV(y) S_F(y-z) iV(z) S_F(z-x) + \\
& 3i\pi \gamma^5(x) S_F(x-y) iV(y) S_F(y-z) iV(z) S_F(z-x) + \\
& 3iA_5(x) \gamma^5 S_F(x-y) iV(y) S_F(y-z) iV(z) S_F(z-x) + \\
& 3\sigma(x) S_F(x-y) iA_5(y) \gamma^5 S_F(y-z) iA_5(z) \gamma^5 S_F(z-x) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 3i\pi(x)\gamma^5 S_F(x-y)iA_5(y)\gamma^5 S_F(y-z)iA_5(z)\gamma^5 S_F(z-x)+ \\
& 3iV(x)S_F(x-y)iA_5(y)\gamma^5 S_F(y-z)iA_5(z)\gamma^5 S_F(z-x)+ \\
& 3\sigma(x)S_F(x-y)i\pi(y)\gamma^5 S_F(y-z)iV(z)S_F(z-x)+ \\
& 3\sigma(x)S_F(x-y)iV(y)S_F(y-z)i\pi(z)\gamma^5 S_F(z-x)+ \\
& 3\sigma(x)S_F(x-y)i\pi(y)\gamma^5 S_F(y-z)iA_5(z)\gamma^5 S_F(z-x)+ \\
& 3\sigma(x)S_F(x-y)iA_5(y)\gamma^5 S_F(y-z)\pi(z)\gamma^5 S_F(z-x)+ \\
& 3\sigma(x)S_F(x-y)iV(y)S_F(y-z)iA_5(z)\gamma^5 S_F(z-x)+ \\
& 3\sigma(x)S_F(x-y)iA_5(y)\gamma^5 S_F(y-z)iV(z)S_F(z-x)+ \\
& 3i\pi(x)\gamma^5 S_F(x-y)iV(y)S_F(y-z)iA_5(z)\gamma^5 S_F(z-x)+ \\
& 3i\pi(x)\gamma^5 S_F(x-y)iA_5(y)\gamma^5 S_F(y-z)iV(z)S_F(z-x) \quad (5.26)
\end{aligned}$$

A estrutura dos elementos de S_3 são do tipo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(\phi_\Gamma, \phi_{\Gamma'}, \phi_{\Gamma''}) = \int d^4x d^4y d^4z \phi_{a,\Gamma}(x) [Tr(\Gamma \lambda^a S_F(x-y) \Gamma' \lambda^b S_F(y-z) \\
\Gamma'' \lambda^c S_F(z-x))] \phi_{b,\Gamma'}(y) \phi_{c,\Gamma''}(z) \quad (5.27)
\end{aligned}$$

onde $\phi_{a,\Gamma}$, $\phi_{b,\Gamma'}$ e $\phi_{c,\Gamma''}$, são três campos quaisquer (escalar, pseudoescalar, vetorial ou pseudovetorial) e expandindo em série de Taylor $\phi_{b,\Gamma'}$ e $\phi_{c,\Gamma''}$ em torno do ponto x , a equação (5.27), até segunda ordem, têm-se nove termos para cada quantidade de S_3 . As quantidades tem a seguinte estrutura,

$$V_l = \int d^4x \phi_{a,\Gamma}(x) \mathcal{Y}_l^{abc}(\Gamma, \Gamma', \Gamma'') \bar{\phi}_{b,\Gamma'}(x) \bar{\phi}_{c,\Gamma''}(x) \quad (5.28)$$

onde os campos $\tilde{\phi}_{b,\Gamma'}(x)$ ou $\tilde{\phi}_{c,\Gamma''}(x)$ podem conter a forma de uma ou duas derivadas nos campos, isto é, $(\partial^\alpha \phi_{b,\Gamma'})\phi_{c,\Gamma''}$, $(\partial^\alpha \partial^\beta \phi_{b,\Gamma'})\phi_{c,\Gamma''}$, etc, e $l = 1, 2, \dots, 9$ o índice correspondente a cada termo feita a expansão. As integrais $\mathcal{Y}_l$ no espaço de momentos contém o traço no sabor e nos índices espinoriais. Depois de realizar o traço no espaço sabor, as integrais $\mathcal{Y}_l$ ficam em termos das integrais com traço no espaço de Dirac,

$$B(\Gamma, \Gamma', \Gamma'', m_f, m_{f'}, m_{f''}) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\Gamma S_F'(p) \Lambda' S_F''(p) \Lambda'' S_F'''(p)] \quad (5.29)$$

onde as matrizes Λ' ou Λ'' podem ser as matrizes de Dirac Γ ou produtos delas segundo a interação considerada. Temos que as combinações resultam ser,

$$\mathcal{Y}_l^{000} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} [2B_l(m_u, m_u, m_u) + B_l(m_s, m_s, m_s)]$$

para $a = 1, 2, 3$

$$\mathcal{Y}_l^{aa0} = \mathcal{Y}_l^{0aa} = \mathcal{Y}_l^{a0a} = 2 \sqrt{\frac{2}{3}} B_l(m_u, m_u, m_u)$$

para $a = 4, 5, 6, 7$

$$\mathcal{Y}_l^{aa0} = \sqrt{\frac{2}{3}} [B_l(m_s, m_u, m_u) + B_l(m_u, m_s, m_s)]$$

$$\mathcal{Y}_l^{a0a} = \sqrt{\frac{2}{3}} [B_l(m_s, m_s, m_u) + B_l(m_u, m_u, m_s)]$$

$$\mathcal{Y}_l^{0aa} = \sqrt{\frac{2}{3}} [B_l(m_u, m_s, m_u) + B_l(m_s, m_u, m_s)]$$

para $a = 8$,

$$\mathcal{Y}_l^{880} = \mathcal{Y}_l^{808} = \mathcal{Y}_l^{088} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} [B_l(m_u, m_u, m_u) + 2B_l(m_s, m_s, m_s)]$$

para $a = 0$

$$\mathcal{Y}_l^{aa8} = \mathcal{Y}_l^{8aa} = \mathcal{Y}_l^{a8a} = \frac{4}{3\sqrt{3}} [B_l(m_u, m_u, m_u) - B_l(m_s, m_s, m_s)]$$

para $a = 1, 2, 3$

$$\mathcal{Y}_l^{aa8} = \mathcal{Y}_l^{8aa} = \mathcal{Y}_l^{a8a} = \frac{2}{\sqrt{3}} B_l(m_u, m_u, m_u)$$

para $a = 4, 5, 6, 7$

$$\mathcal{Y}_l^{aa8} = \frac{1}{\sqrt{3}} [B_l(m_s, m_u, m_u) - 2B_l(m_u, m_s, m_s)]$$

$$\mathcal{Y}_I^{a8a} = \frac{1}{\sqrt{3}} [\mathcal{B}_I(m_u, m_u, m_s) - 2\mathcal{B}_I(m_s, m_s, m_u)]$$

$$\mathcal{Y}_I^{8aa} = \frac{1}{\sqrt{3}} [\mathcal{B}_I(m_u, m_s, m_u) - 2\mathcal{B}_I(m_s, m_u, m_s)]$$

e

$$\mathcal{Y}_I^{888} = \frac{2}{3\sqrt{3}} [\mathcal{B}_I(m_u, m_u, m_u) - 4\mathcal{B}_I(m_s, m_s, m_s)]$$

As relações com $a = 3$ serão escritas no exemplo a continuação. Não devemos esquecer a diagonalização da mistura do isospin (0 - 8) deve ser posta em S_3 e também a transformação do campo axial $A_{\mu 52}$.

5.2 Interação Vetorial-Pseudoescalar-Pseudoescalar

Vamos nos concentrar como exemplo, só na interação vetorial-pseudoescalar-pseudoescalar, mais especificamente a interação $\rho \rightarrow \pi\pi$. Então, da equação (4.25) a ação correspondente a esse setor é,

$$\begin{aligned} S_{\rho \rightarrow \pi\pi} &= 3i \text{Tr} \left[\int d^4x d^4y d^4z \pi(x) \gamma^5 S_F(x-y) i\pi(y) \gamma^5 S_F(y-x) iV(z) S_F(z-x) \right] \\ &\cong i \int d^4x \left[V_{a\mu}(x) \mathcal{Y}_{2a}^{abc}(i\gamma^5, i\gamma^5, \gamma^\mu) \partial^\alpha \pi_b(x) \pi_c(x) + V_{a\mu}(x) \mathcal{Y}_{4a}^{abc}(i\gamma^5, i\gamma^5, \gamma^\mu) \pi_b(x) \partial^\alpha \pi_c(x) \right] \end{aligned} \quad (5.30)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{2a}^{abc}(i\gamma^5, i\gamma^5, \gamma^\mu) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[\text{Tr}(i\gamma^5 \lambda^a S_F(p) i\gamma^5 \lambda^b S_F(p) \gamma_\alpha S_F(p) \gamma^\mu \lambda^c S_F(p)) + \right. \\ &\quad \left. \text{Tr}(i\gamma^5 \lambda^a S_F(p) i\gamma^5 \lambda^b S_F(p) \gamma^\mu \lambda^c S_F(p) \gamma_\alpha S_F(p)) \right] \end{aligned} \quad (5.31)$$

e

$$\mathcal{Y}_{4a}^{abc}(i\gamma^5, i\gamma^5, \gamma^\mu) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr}(i\gamma^5 \lambda^a S_F(p) i\gamma^5 \lambda^b S_F(p) \gamma^\mu \lambda^c S_F(p) \gamma_\alpha S_F(p)) \quad (5.32)$$

No setor $\rho \rightarrow \pi\pi$ vamos ter $a, b, c = 1^+, 3, 1^-$, portanto desenvolvendo a soma nos índices internos temos,

$$S_{\rho \rightarrow \pi\pi} = \int d^4x \mathcal{L}_{\rho\pi\pi}(x)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\rho\pi\pi}(x) &= i \left[V_{1\mu}^+(x) (\mathcal{Y}_{2a}^{123} + \mathcal{Y}_{4a}^{132}) \partial^\alpha \pi_1^-(x) \pi_3(x) + V_{1\mu}^-(x) (\mathcal{Y}_{2a}^{213} + \mathcal{Y}_{4a}^{231}) \partial^\alpha \pi_1^+(x) \pi_3(x) + \right. \\ &\quad \left. V_{3\mu}(x) (\mathcal{Y}_{2a}^{312} + \mathcal{Y}_{4a}^{321}) \partial^\alpha \pi_1^+(x) \pi_1^-(x) + V_{3\mu}(x) (\mathcal{Y}_{2a}^{321} + \mathcal{Y}_{4a}^{312}) \partial^\alpha \pi_1^-(x) \pi_1^+(x) + \right. \end{aligned}$$

$$V_{1\mu}^+(x)(\mathcal{Y}_{2\alpha}^{132} + \mathcal{Y}_{4\alpha}^{123})\partial^\alpha \pi_3(x)\pi_1^-(x) + V_{1\mu}^-(x)(\mathcal{Y}_{2\alpha}^{231} + \mathcal{Y}_{4\alpha}^{213})\partial^\alpha \pi_3(x)\pi_1^+(x) \quad (5.33)$$

Definindo,

$$\mathcal{B}_{2\alpha}(i\gamma^5, i\gamma^5, \gamma^\mu, m_u, m_u, m_u) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} [i\gamma^5 S_F^u(p) i\gamma^5 S_F^u(p) \gamma_\alpha S_F^u(p) \gamma^\mu S_F^u(p)] \quad (5.34)$$

e

$$\mathcal{B}'_{2\alpha}(i\gamma^5, i\gamma^5, \gamma^\mu, m_u, m_u, m_u) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} [i\gamma^5 S_F^u(p) i\gamma^5 S_F^u(p) \gamma^\mu S_F^u(p) \gamma_\alpha S_F^u(p)] \quad (5.35)$$

têm-se,

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{2\alpha}^{123} + \mathcal{Y}_{4\alpha}^{132} &= 2\mathcal{B}_{2\alpha} + 2\mathcal{B}'_{2\alpha} - 2\mathcal{B}'_{2\alpha} = 2\mathcal{B}_{2\alpha} \\ \mathcal{Y}_{2\alpha}^{213} + \mathcal{Y}_{4\alpha}^{231} &= -2\mathcal{B}_{2\alpha} \\ \mathcal{Y}_{2\alpha}^{312} + \mathcal{Y}_{4\alpha}^{321} &= 2\mathcal{B}_{2\alpha} \\ \mathcal{Y}_{2\alpha}^{321} + \mathcal{Y}_{4\alpha}^{312} &= -2\mathcal{B}_{2\alpha} \\ \mathcal{Y}_{2\alpha}^{132} + \mathcal{Y}_{4\alpha}^{123} &= -2\mathcal{B}_{2\alpha} \\ \mathcal{Y}_{2\alpha}^{231} + \mathcal{Y}_{4\alpha}^{213} &= 2\mathcal{B}_{2\alpha} \end{aligned}$$

logo a densidade de Lagrangeana do setor $\rho\pi\pi$ fica,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\rho\pi\pi}(x) &= 6i\mathcal{B}_{2\alpha} [V_{1\mu}^+(\partial^\alpha \pi_1^- \pi_3 - \partial^\alpha \pi_3 \pi_1^+) + \\ &V_{3\mu}(\partial^\alpha \pi_1^+ \pi_1^- - \partial^\alpha \pi_1^- \pi_1^+) + V_{1\mu}^-(\partial^\alpha \pi_3 \pi_1^+ - \partial^\alpha \pi_1^+ \pi_3)] \\ &= 6i\mathcal{B}_{2\alpha} \epsilon_{ijk} V_\mu^i \pi^j \partial^\alpha \pi^k \end{aligned} \quad (5.36)$$

onde $i, j, k = 1^+, 3, 1^-$ e $\mathcal{B}_{2\alpha} = g'_{\rho\pi\pi} g_\alpha^\mu$, sendo $g'_{\rho\pi\pi}$ a constante do decaimento do méson ρ em dois píons, determinada por,

$$\begin{aligned} g'_{\rho\pi\pi} &= - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m_u^2)^4} [2p^4 - 6m_u^2 p^2 + 4m_u^4] \\ &= -2F_4(m_u, \Lambda) + 6m_u^2 F_2(m_u, \Lambda) - 4m_u^4 F_0(m_u, \Lambda) \end{aligned}$$

onde as integrais F_i são ,

$$\begin{aligned} F_4(m_u, \Lambda) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^4}{(p^2 - m_u^2)^4} \\ F_2(m_u, \Lambda) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^2}{(p^2 - m_u^2)^4} \end{aligned}$$

$$F_0(m_u, \Lambda) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m_u^2)^4} .$$

Redefinido a constante de acoplamento como sendo,

$$g_{\rho\pi\pi} = 6i \frac{g'_{\rho\pi\pi}}{\mathcal{I}_3^{33}(i\gamma^5, i\gamma^5) \sqrt{\tilde{\mathcal{I}}_3^{33}(\gamma^\mu, \gamma^\mu)}}$$

então a densidade de Lagrangeana de interação vetor-pseudoescalar -pseudoescalar em termos dos campos normalizados resulta ser,

$$\mathcal{L}_{\rho\pi\pi} = g_{\rho\pi\pi} \epsilon_{ijk} V_\mu^i \pi^j \partial^\mu \pi^k \quad (5.37)$$

Com o valor de "cutoff" $\Lambda = 1[GeV]$ e a massa do quark "u" dado por $m_u = 395[MeV]$ obteve-se o valor para a constante de interação $g_{\rho\pi\pi}$ de 5.76. Comparando com o valor experimental de 5.30, representa um resultado razoável usando esta aproximação local além da aproximação $1/N$ para o termo S_3 .

Conclusão

A implementação formal da expansão $1/N$ com a introdução dos campos auxiliares bosônicos usados para a derivação de uma densidade de Lagrangeana efetiva com interações mesônicas acopladas com campos fermiônicos, tem como teoria "microscópica" fundamental a versão estendida $SU(3)$ do modelo NJL e portanto as apropriadas características da QCD no regime de baixas energias (longas distâncias). Esta implementação permite obter uma densidade de Lagrangeana que preserva a dinâmica original do modelo.

Mostra-se, que na ordem dominante da expansão $1/N$, exibe a geração dinâmica de massa dos campos fermiônicos. As equações de "gap" fornecem uma relação autoconsistente entre as constantes do modelo e as massas fermiônicas geradas.

Os campos bosônicos auxiliares pseudoescalares e alguns vetoriais, na ordem dominante (um-"loop"), mostram ser bem representados por estados ligados $q\bar{q}$. Os campos auxiliares num começo eram campos não-físicos, logo com as correções radiativas passam a ser campos físicos, ou seja, têm uma dinâmica própria e a posição do pólo corresponde a massa associada a esse campo. As interações fermiônicas são bosonizadas, quer dizer, sumem os graus de liberdade fermiônicos e eles são cobertos de bósons que interagem agora entre si.

As massas são obtidas como polos da inversa da matriz função vértice e as constantes de acoplamento méson-quark-quark como resíduos do pólo. Os resultados obtidos estão muito perto dos resultados experimentais. Os mésons vetoriais mais pesados poderiam ser bem descritos incluindo campos auxiliares tensoriais que em nosso caso foram desprezados.

Mostrou-se que o método de bosonização apresentado do ponto de vista matemático realiza-se o mesmo programa que o método Bethe-Salpeter na ordem dominante da expansão $1/N$.

Mostrou-se a equivalência na ordem dominante da matriz amplitude de espalhamento com a matriz de espalhamento Bethe-Salpeter.

No esquema da bosonização aparece um fato interessante ao fazer as correções radiativas aos propagadores. Obtém-se propagadores mistos entre σ e V_μ e π e $A_{\mu 5}$. Esses propagadores mistos poderiam ser eliminados diagonalizando adequadamente nossa densidade de Lagrangeana efetiva, ou seja, fazendo certas transformações entre os campos σ e V_μ e π e $A_{\mu 5}$.

Outra contribuição importante da presente densidade de Lagrangeana é relativo à expansão local dos campos auxiliares em torno do ponto x . Neste caso, obteve-se uma

interação local efetiva dos campos mesônicos incorporando termos cinéticos desses campos. Particularmente, no setor $\rho\pi\pi$, a constante de decaimento do méson ρ obtida nesta aproximação nos dá um valor bastante razoável comparado com o valor experimental.

Tem-se uma densidade de Lagrangeana efetiva só com campos mesônicos com todas as interações possíveis entre eles.

Podemos pensar que as correções aos propagadores mesônicos, perturbativamente nesta aproximação, vem de todas as contribuições de outros estados mesônicos mais leves como campos pontuais.

Temos a confiança de que mésons mais pesados, como por exemplo, o escalar f_0 , " $K-\bar{K}$ molecules" e outros sistemas compostos, sejam bem descritos usando esta densidade de Lagrangeana efetiva mesônica com os coeficientes da interação adequados.

A perspectiva do trabalho refere-se a que a expansão $1/N$ fornece-nos uma maneira sistemática de fazer correções, agora perturbativamente na expansão $1/N$, à equação de "gap", aos propagadores e aos vértices de interação na ordem seguinte à ordem dominante $1/N$. Acredita-se que fazendo correções em "dois-loop", os resultados do espectro de massa dos mésons mais pesados deveriam ser bem melhores incluindo também campos tensoriais e campos bosônicos intermediários coloridos.

Apêndice A

Identidades de Fierz

A.1 Transformações de Fierz para interações quárticas pontuais

A transformação de Fierz é um esquema puramente técnico, que se usa para examinar o efeito da troca dos operadores de Dirac que ocorrem nos produtos quárticos fermiônicos no mesmo ponto espaço-tempo.

O interesse desta transformação no modelo *NJL* é que:

i) uma simples interação corrente-corrente cor local, conduz diretamente a termos quadri-fermiônicos na densidade de Lagrangeana,

ii) auto-energias aparecem da contribuição direta da densidade de Lagrangeana invariante de Fierz e é equivalente ao termo de troca que aparece da densidade de Lagrangeana original. Então a pergunta que surge é, como é que estão ligados os termos diretos e de troca?

A interação pontual de 4-férmions mais geral invariante sob as simetrias $\mathcal{C} \otimes \mathcal{P} \otimes \mathcal{T} \otimes SU_{cor}(3) \otimes SU_L(3) \otimes SU_R(3) \otimes U_V(1) \otimes U_A(1)$ é,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{4f} = & C_1 [(\bar{\psi} 1^C \lambda_0 \gamma^\mu \psi)^2 + (\bar{\psi} 1^C \lambda_0 \gamma^\mu \gamma_5 \psi)^2] + C_2 [(\bar{\psi} 1^C \lambda_a \gamma^\mu \psi)^2 + (\bar{\psi} 1^C \lambda_a \gamma^\mu \gamma_5 \psi)^2] + \\ & C_3 [(\bar{\psi} \lambda_j^0 \lambda_0 \gamma^\mu \psi)^2 + (\bar{\psi} \lambda_j^0 \lambda_0 \gamma^\mu \gamma_5 \psi)^2] + C_4 [(\bar{\psi} \lambda_j^C \lambda_a \gamma^\mu \psi)^2 + (\bar{\psi} \lambda_j^C \lambda_a \gamma^\mu \gamma_5 \psi)^2] + \\ & C_5 [(\bar{\psi} 1^C \lambda_0 \gamma^\mu \psi)^2 - (\bar{\psi} 1^C \lambda_0 \gamma^\mu \gamma_5 \psi)^2] + C_6 [(\bar{\psi} \lambda_j^C \lambda_0 \gamma^\mu \psi)^2 - (\bar{\psi} \lambda_j^C \lambda_0 \gamma^\mu \gamma_5 \psi)^2] \end{aligned} \quad (A.1)$$

onde os índices a e j referem-se ao sabor e à cor. As matrizes λ_a e λ_j^C são os geradores do grupo $SU(3)$ sabor e $SU(N)$ de cor. Reescrevemos $\mathcal{L}_{4f}$ na forma,

$$\mathcal{L}_{4f} = \bar{\psi}_c \psi_a \bar{\psi}_d \psi_b \left[(\gamma_\mu \gamma^\mu + \gamma_\mu \gamma_5 \gamma^\mu \gamma_5) \otimes (c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4) \begin{pmatrix} 1^C 1^C \otimes \lambda_0 \lambda_0 \\ 1^C 1^C \otimes \lambda_i \lambda^i \\ \lambda_a^C \lambda^a \otimes \lambda_0 \lambda_0 \\ \lambda_a^C \lambda^a \otimes \lambda_i \lambda^i \end{pmatrix} \right] +$$

$$\left(\gamma_\mu \gamma^\mu - \gamma_\mu \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^5 \right) \otimes (c_5 \ c_6) \left(\begin{array}{c} 1^c 1^c \otimes \lambda_0 \lambda_0 \\ \lambda_a^c \lambda^c \otimes \lambda_0 \lambda_0 \end{array} \right) \Big|_{ca;db}$$

Seja O o produto tensorial de matrizes no espaço espinorial, sabor e cor. A estrutura é da forma,

$$(\bar{\psi} O \psi)^2 = \bar{\psi}_c \psi_a \bar{\psi}_d \psi_b O_{ca}^i O_{idb}$$

que é uma estrutura invariante Lorentz[32]. Fazendo uma transformação de Fierz sobre esta forma, obtemos,

$$\mathcal{F}(\bar{\psi} O \psi)^2 = -\bar{\psi}_c \psi_a \bar{\psi}_d \psi_b O_{cb}^i O_{ida} \ ,$$

e assim poderemos escrever a transformação ,

$$O_{cb}^i O_{ida} = C_{ik} O_{cb}^k O_{kda} \ .$$

onde C_{ik} é uma certa matriz de transformação e o conjunto a, b, c, d corresponde aos índices para cada um dos espaços, isto é, $a = \alpha, f, c \equiv \text{dirac, sabor, cor}$.

No espaço espinorial sejam as matrizes, $O_S = 1$, $O_P = i\gamma^5$, $O_T = \sigma^{\mu\nu}$, $O_V = \gamma^\mu$, $O_A = \gamma^\mu \gamma_5$, então a matriz C_{ik} é,

$$C_D = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & -1 \\ 4 & -2 & 0 & -2 & 4 \\ 12 & 0 & 2 & 0 & -12 \\ -4 & -2 & 0 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

No espaço sabor $SU(3)$, temos as matrizes $\lambda_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}1$ e os geradores do grupo λ^i com $i = 1, 2, \dots, 8$. A matriz de transformação com os operadores $O_0 = \lambda_0$ e $O_i = \lambda_i$ é

$$C_s = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

e no espaço cor $SU(N)$, com $O_0 = 1^c$ e $O_a = \lambda_a^c$,

$$C_c = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 \frac{N-1}{N^2} & -\frac{1}{N} \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Aplicando o operador de permutação de Fierz em nossa densidade de Lagrangeana $\mathcal{L}_{4f}$ e usando (A.2), (A.3) e (A.4) temos,

$$\mathcal{F}\mathcal{L}_{4f} = -\bar{\psi}_c \psi_a \bar{\psi}_d \psi_b \left[- \left(\gamma_\mu \gamma^\mu + \gamma_\mu \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^5 \right) \otimes (c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4) \right. \\ \left. \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{16}{27} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ \frac{16}{27} & \frac{16}{27} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{128}{27} & -\frac{16}{27} & -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^c 1^c \otimes \lambda_0 \lambda_0 \\ 1^c 1^c \otimes \lambda_i \lambda^i \\ \lambda_a^c \lambda^c \otimes \lambda_0 \lambda_0 \\ \lambda_a^c \lambda^c \otimes \lambda_i \lambda^i \end{pmatrix} \right] +$$

$$2(1 \ 1 - i\gamma_5 \ i\gamma_5) \otimes (c_5 \ c_6) \left(\begin{array}{cccc} \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{16}{27} & \frac{16}{27} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 1^C 1^C \otimes \lambda_0 \lambda_0 \\ 1^C 1^C \otimes \lambda_0 \lambda_0 \\ \lambda_a^C \lambda^{Ca} \otimes \lambda_0 \lambda_0 \\ \lambda_a^C \lambda^{Ca} \otimes \lambda_i \lambda_i \end{array} \right) \Bigg]_{ca;db}$$

A densidade de Lagrangeana invariante de Fierz, se constroee adicionando o termo transformado, isto é,

$$\mathcal{F}\mathcal{L}_{4f} = \frac{1}{2} [\mathcal{L}_{4f} + \mathcal{F}\mathcal{L}_{4f}]$$

então ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{4f} = & \frac{1}{2} G_1 [(\bar{\psi} \lambda_a \psi)^2 + (\bar{\psi} \lambda_a i\gamma_5 \psi)^2] - \frac{1}{2} G_2 [(\bar{\psi} \lambda_a \gamma^\mu \psi)^2 + (\bar{\psi} \lambda_a \gamma^\mu \gamma_5 \psi)^2] - \\ & \frac{1}{2} G_3 [(\bar{\psi} \lambda_0 \gamma^\mu \psi)^2 + (\bar{\psi} \lambda_0 \gamma^\mu \gamma_5 \psi)^2] - \frac{1}{2} G_4 [(\bar{\psi} \lambda_0 \gamma^\mu \psi)^2 - (\bar{\psi} \lambda_0 \gamma^\mu \gamma_5 \psi)^2] + \text{termos com octeto de cor} \end{aligned} \quad (A.5)$$

A.2 Transformação de Fierz de interações de seis pontos que quebra a simetria $U_A(1)$

Para construir a interação de seis-pontos que quebra a simetria axial $U_A(1)$, precisamos considerar os cinco termos de troca de acordo com os $3!$ elementos do grupo de permutação $SU(3)$.

A estrutura mais geral para o termo de interação sexta que quebra a simetria axial e que respeita $SU_L(3) \otimes SU_R(3)$ e $SU(N)$ é a equação (1.53) que a reescrevemos na forma :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{6Hooft} = & D^{ijk} \bar{K}_1 [(\bar{\psi}_a \Gamma^+ \psi_d)(\bar{\psi}_b \Gamma^+ \psi_e)(\bar{\psi}_c \Gamma^+ \psi_f) + \\ & (\bar{\psi}_a \Gamma^- \psi_d)(\bar{\psi}_b \Gamma^- \psi_e)(\bar{\psi}_c \Gamma^- \psi_f)] + \\ & \frac{1}{3} D^{ijk} \bar{K}_2 [(\bar{\psi} \Gamma^+ \lambda_i \psi)(\bar{\psi} \lambda^{Ca} \Gamma^+ \lambda_j \psi)(\bar{\psi} \lambda_a^C \Gamma^+ \lambda_k \psi) + \\ & (\bar{\psi} \Gamma^- \lambda_i \psi)(\bar{\psi} \lambda^{Ca} \Gamma^- \lambda_j \psi)(\bar{\psi} \lambda_a^C \Gamma^- \lambda_k \psi) + \\ & (\bar{\psi} \lambda^{Ca} \Gamma^+ \lambda_i \psi)(\bar{\psi} \Gamma^+ \lambda_j \psi)(\bar{\psi} \lambda_a^C \Gamma^+ \lambda_k \psi) + \\ & (\bar{\psi} \lambda^{Ca} \Gamma^- \lambda_i \psi)(\bar{\psi} \Gamma^- \lambda_j \psi)(\bar{\psi} \lambda_a^C \Gamma^- \lambda_k \psi) + \\ & (\bar{\psi} \lambda^{Ca} \Gamma^+ \lambda_i \psi)(\bar{\psi} \lambda_a^C \Gamma^+ \lambda_j \psi)(\bar{\psi} \Gamma^+ \lambda_k \psi) + \\ & (\bar{\psi} \lambda^{Ca} \Gamma^- \lambda_i \psi)(\bar{\psi} \lambda_a^C \Gamma^- \lambda_j \psi)(\bar{\psi} \Gamma^- \lambda_k \psi)] . \end{aligned} \quad (A.6)$$

A estrutura "determinantal" de $\mathcal{L}_{6Hooft}$ no espaço sabor é por contrução invariante sob uma transformação de Fierz, isto é,

$$\mathcal{F} \bar{\psi}_a \psi_a \bar{\psi}_e \psi_b \bar{\psi}_f \psi_c D^{ijk} [\lambda_i \lambda_j \lambda_k]_{da;eb;fc} = \bar{\psi}_d \psi_a \bar{\psi}_e \psi_b \bar{\psi}_f \psi_c D^{ijk} [\lambda_i \lambda_j \lambda_k]_{da;eb;fc}$$

onde D^{ijk} são constantes totalmente simétricas e as matrizes de helicidades de Dirac são

$$\Gamma^\pm = 1 \mp i\gamma^5.$$

As identidades de Fierz para usar nas expressões de (1) contém combinações de termos com octetos de cor. As interações de octeto de cor puro não contribuem. As relações de transformações de interações entre um singlete e um octeto de cor são expressas em termos das constantes de estrutura do grupo $SU(3)$:

$$[1^C \lambda_a^C]_{cb;da} = \frac{1}{2} [1^C \lambda_a^C + \lambda_a^C 1^C + (d_{abc} - if_{abc}) \lambda^{Cb} \lambda^{Cc}]_{ca;db}$$

Para desenvolver as transformações associadas a $\mathcal{L}_{tHoct}$, temos o operador de permutação $\mathcal{F}^{ijk}$ relacionados com as transformações de Fierz, isto é, $\mathcal{F}^{213}$, $\mathcal{F}^{321}$, $\mathcal{F}^{132}$, $\mathcal{F}^{231}$ e $\mathcal{F}^{312}$. Representando $S = 1$, $P = i\gamma^5$, $T = \sigma^{\mu\nu}$ e $T_5 = -TP$, encontra-se que,

$$[\Gamma^\pm \Gamma^\pm]_{cb;da} = \frac{1}{2} [\Gamma^\pm \Gamma^\pm]_{ca;db} + \frac{1}{8} [(T \pm iT_5)(T \pm iT_5)]_{ca;db} \quad (A.7)$$

assim então para o espaço das matrizes de Dirac resultam,

$$[\Gamma^+ \Gamma^+ \Gamma^+ + \Gamma^- \Gamma^- \Gamma^-]_{da;eb;fc} = 2[SSS - SPP - PSP - PPS]_{da;eb;fc}$$

$$[\Gamma^+ \Gamma^+ \Gamma^+ + \Gamma^- \Gamma^- \Gamma^-]_{db;ca;fc} = \frac{1}{2} [\Gamma^+ \Gamma^+ \Gamma^+ + \Gamma^- \Gamma^- \Gamma^- + TTS + T_5 TP]_{da;eb;fc}$$

$$[\Gamma^+ \Gamma^+ \Gamma^+ + \Gamma^- \Gamma^- \Gamma^-]_{dc;eb;fa} = \frac{1}{2} [\Gamma^+ \Gamma^+ \Gamma^+ + \Gamma^- \Gamma^- \Gamma^- + TST + T_5 PT]_{da;eb;fc}$$

$$[\Gamma^+ \Gamma^+ \Gamma^+ + \Gamma^- \Gamma^- \Gamma^-]_{da;ec;fb} = \frac{1}{2} [\Gamma^+ \Gamma^+ \Gamma^+ + \Gamma^- \Gamma^- \Gamma^- + STT + PT_5 T]_{da;eb;fc}$$

$$[\Gamma^+ \Gamma^+ \Gamma^+ + \Gamma^- \Gamma^- \Gamma^-]_{dc;ea;fb} = \frac{1}{4} [\Gamma^+ \Gamma^+ \Gamma^+ + \Gamma^- \Gamma^- \Gamma^- + TTS + TST + STT + T_5 TP + T_5 PT + PT_5 T]_{da;eb;fc}$$

$$[\Gamma^+ \Gamma^+ \Gamma^+ + \Gamma^- \Gamma^- \Gamma^-]_{db;ec;fa} = \frac{1}{4} [\Gamma^+ \Gamma^+ \Gamma^+ + \Gamma^- \Gamma^- \Gamma^- + TTS + TST + STT +$$

$$T_5TP + T_5PT + PT_5T]_{da;eb;fc} .$$

As transformações no espaço da cor são ,

$$[1^C 1^C 1^C]_{db;ea;fc} = \left[\frac{1}{3} 1^C 1^C 1^C + \frac{1}{2} \lambda_a^C \lambda^{Ca} 1^C \right]_{da;eb;fc}$$

$$[1^C 1^C 1^C]_{dc;eb;fa} = \left[\frac{1}{3} 1^C 1^C 1^C + \frac{1}{2} \lambda_a^C 1^C \lambda^{Ca} \right]_{da;eb;fc}$$

$$[1^C 1^C 1^C]_{da;ec;fb} = \left[\frac{1}{3} 1^C 1^C 1^C + \frac{1}{2} 1^C \lambda_a^C \lambda^{Ca} \right]_{da;eb;fc}$$

$$[1^C 1^C 1^C]_{db;ec;fa} = \left[\frac{1}{9} 1^C 1^C 1^C + \frac{1}{6} \lambda_a^C \lambda^{Ca} 1^C + \frac{1}{4} \lambda_a^C 1^C \lambda^{Ca} + \frac{1}{4} 1^C \lambda_a^C \lambda^{Ca} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} (d_{abc} - i f_{abc}) \lambda^{Ca} \lambda^{Cb} \lambda^{Cc} \right]_{da;eb;fc}$$

$$[1^C 1^C 1^C]_{dc;ea;fb} = \left[\frac{1}{9} 1^C 1^C 1^C + \frac{1}{6} \lambda_a^C \lambda^{Ca} 1^C + \frac{1}{4} \lambda_a^C 1^C \lambda^{Ca} + \frac{5}{12} 1^C \lambda_a^C \lambda^{Ca} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} (d_{abc} - i f_{abc}) \lambda^{Ca} \lambda^{Cb} \lambda^{Cc} \right]_{da;eb;fc} ,$$

e os termos,

$$[1^C \lambda_a^C \lambda^{Ca}]_{db;ea;fc} = \frac{1}{2} [1^C \lambda_a^C \lambda^{Ca} + \lambda_a^C 1^C \lambda^{Ca} + (d_{abc} - i f_{abc}) \lambda^{Ca} \lambda^{Cb} \lambda^{Cc}]_{da;eb;fc}$$

$$[1^C \lambda_a^C \lambda^{Ca}]_{dc;eb;fa} = \frac{1}{2} [1^C \lambda_a^C \lambda^{Ca} + \lambda_a^C \lambda^{Ca} 1^C + (d_{abc} - i f_{abc}) \lambda^{Ca} \lambda^{Cb} \lambda^{Cc}]_{da;eb;fc}$$

$$[1^C \lambda_a^C \lambda^{Ca}]_{da;ec;fb} = \left[-\frac{1}{3} 1^C \lambda_a^C \lambda^{Ca} + \frac{16}{9} 1^C 1^C 1^C \right]_{da;eb;fc}$$

$$[1^C \lambda_a^C \lambda^{Ca}]_{db;eb;fa} = \left[\frac{16}{27} 1^C 1^C 1^C + \frac{8}{9} \lambda_a^C 1^C \lambda^{Ca} - \frac{1}{6} 1^C \lambda_a^C \lambda^{Ca} - \frac{1}{6} \lambda_a^C \lambda^{Ca} 1^C - \right.$$

$$\frac{1}{6}(d_{abc} - if_{abc})\lambda^{C_a}\lambda^{C_b}\lambda^{C_c}\Big]_{da;eb;fc}$$

$$[1^C\lambda_a^C\lambda^{C_a}]_{dc;ea;fb} = \left[\frac{16}{27}1^C1^C1^C + \frac{8}{9}\lambda_a^C\lambda^{C_a}1^C - \frac{1}{6}1^C\lambda_a^C\lambda^{C_a} - \frac{1}{6}\lambda_a^C1^C\lambda^{C_a} - \right.$$

$$\left.\frac{1}{6}(d_{abc} - if_{abc})\lambda^{C_a}\lambda^{C_b}\lambda^{C_c}\right]_{da;eb;fc}.$$

Finalmente, para obter a densidade de Lagrangeana invariante Fierz, devemos somar todos estes operadores ao termo direto, isto é,

$$\mathcal{F}\mathcal{L}_{tH\phi\phi t} = \frac{1}{6}[\mathcal{L}_{tH\phi\phi t} + \mathcal{F}\mathcal{L}_{tH\phi\phi t}] \quad (\text{A.8})$$

onde

$$\mathcal{F}\mathcal{L}_{tH\phi\phi t} = \mathcal{F}^{213}\mathcal{L}_{tH\phi\phi t} + \mathcal{F}^{321}\mathcal{L}_{tH\phi\phi t} + \mathcal{F}^{132}\mathcal{L}_{tH\phi\phi t} + \mathcal{F}^{231}\mathcal{L}_{tH\phi\phi t} + \mathcal{F}^{312}\mathcal{L}_{tH\phi\phi t} \quad (\text{A.9})$$

obtendo como resultado a eq.(1.55).

Apêndice B

Elementos de Matriz da Função de Dois Pontos

B.1 Função vértice no espaço de momentos

Aplicando o traço no espaço sabor na equação (2.49) e usando a transformada de Fourier (2.62) vamos ter os seguintes elementos da matriz função vértice:

$$\Gamma_{\sigma_0\sigma_0} = -\frac{i}{2\tilde{k}_0^{(-)}} + \frac{2}{3}\Pi_{\sigma_0\sigma_0}^{u,u}(p) + \frac{1}{3}\Pi_{\sigma_0\sigma_0}^{s,s}(p) ,$$

$$\Gamma_{\sigma_1\sigma_1}(p) = \Gamma_{\sigma_2\sigma_2}(p) = \Gamma_{\sigma_3\sigma_3}(p) = -\frac{i}{2\tilde{k}_3^{(-)}} + \Pi_{\sigma_3\sigma_3}^{u,u}(p) ,$$

$$\Gamma_{\sigma_4\sigma_4}(p) = \Gamma_{\sigma_6\sigma_6}(p) = -\frac{i}{2\tilde{k}_8^{(-)}} + \frac{1}{2}\Pi_{\sigma_8\sigma_8}^{u,u}(p) ,$$

$$\Gamma_{\sigma_5\sigma_5}(p) = \Gamma_{\sigma_7\sigma_7}(p) = -\frac{i}{2\tilde{k}_5^{(-)}} + \frac{1}{2}\Pi_{\sigma_5\sigma_5}^{u,s}(p) ,$$

$$\Gamma_{\sigma_8\sigma_8}(p) = -\frac{i}{\tilde{k}_8^{(-)}} + \frac{1}{3}\Pi_{\sigma_8\sigma_8}^{u,u}(p) + \frac{2}{3}\Pi_{\sigma_8\sigma_8}^{s,s}(p) ,$$

$$\Gamma_{\sigma_0\sigma_8}(p) = \Gamma_{\sigma_8\sigma_0}(p) = \frac{ia^{(-)}\tilde{k}_{08}^{(-)}}{\tilde{k}_0^{(-)}\tilde{k}_8^{(-)}} + 2\frac{\sqrt{2}}{3}[\Pi_{\sigma_0\sigma_8}^{u,u}(p) - \Pi_{\sigma_0\sigma_8}^{s,s}(p)] ,$$

$$\Gamma_{V_0\sigma_0}^\mu(p) = \Gamma_{\sigma_0 V_0}^\mu(p) = \frac{4}{3}i\Pi_{V_0\sigma_0}^{\mu u,u}(p) + \frac{2}{3}i\Pi_{V_0\sigma_0}^{\mu s,s}(p) ,$$

$$\Gamma_{V_1\sigma_1}^\mu(p) = \Gamma_{\sigma_1 V_1}^{\mu u,u}(p) = \Gamma_{\sigma_2 V_2}^{\mu u,u}(p)\Gamma_{\sigma_3 V_3}^{\mu u,u}(p) = \Gamma_{V_2\sigma_2}^{\mu u,u}(p)\Gamma_{V_3\sigma_3}^{\mu u,u}(p) = i\Pi_{V_1\sigma_1}^{\mu u,u}(p) ,$$

$$\Gamma_{V_4\sigma_4}^\mu(p) = \Gamma_{V_6\sigma_6}^\mu(p) = \Gamma_{\sigma_4 V_4}^\mu(p) = \Gamma_{\sigma_6 V_6}^\mu(p) = \\ \frac{i}{2}\Pi_{V_4\sigma_4}^{\mu s,u}(p) ,$$

$$\Gamma_{V_5\sigma_5}^\mu(p) = \Gamma_{V_7\sigma_7}^\mu(p) = \Gamma_{\sigma_5 V_5}^\mu(p) = \Gamma_{\sigma_7 V_7}^\mu(p) = \\ \frac{i}{2}\Pi_{V_5\sigma_5}^{\mu u,s}(p) ,$$

$$\Gamma_{V_8\sigma_8}^\mu(p) = \Gamma_{\sigma_8 V_8}^\mu(p) = \frac{2i}{3}\Pi_{V_8\sigma_8}^{\mu u,u}(p) + \frac{4i}{3}\Pi_{V_8\sigma_8}^{\mu s,s}(p) ,$$

$$\Gamma_{V_9\sigma_9}^\mu(p) = \Gamma_{\sigma_9 V_9}^\mu(p) = 2\frac{\sqrt{2}i}{3}\Pi_{V_9\sigma_9}^{\mu u,u}(p) - 2\frac{\sqrt{2}i}{3}\Pi_{V_9\sigma_9}^{\mu s,s}(p) ,$$

$$\Gamma_{V_{10}\sigma_{10}}^\mu(p) = \Gamma_{\sigma_{10} V_{10}}^\mu(p) = 2\frac{\sqrt{2}i}{3}\Pi_{V_{10}\sigma_{10}}^{\mu u,u}(p) - 2\frac{\sqrt{2}i}{3}\Pi_{V_{10}\sigma_{10}}^{\mu s,s}(p) ,$$

$$\Gamma_{\pi_0\pi_0}^5(p) = -\frac{i}{2\bar{k}_0^{(+)}} - \frac{2}{3}\Pi_{\pi_0\pi_0}^5(p) - \frac{1}{3}\Pi_{\pi_0\pi_0}^{5 s,s}(p) ,$$

$$\Gamma_{\pi_1\pi_1}^5(p) = \Gamma_{\pi_2\pi_2}^5(p) = \Gamma_{\pi_3\pi_3}^5(p) = -\frac{i}{2\bar{k}_3^{(+)}} - \Pi_{\pi_3\pi_3}^{5 u,u}(p) ,$$

$$\Gamma_{\pi_4\pi_4}^5(p) = \Gamma_{\pi_6\pi_6}^5(p) = -\frac{i}{2\bar{k}_6^{(+)}} - \frac{1}{2}\Pi_{\pi_6\pi_6}^{5 s,u}(p) ,$$

$$\Gamma_{\pi_5\pi_5}^5(p) = \Gamma_{\pi_7\pi_7}^5(p) = -\frac{i}{2\bar{k}_5^{(+)}} - \frac{1}{2}\Pi_{\pi_5\pi_5}^{5 u,s}(p) ,$$

$$\Gamma_{\pi_8 \pi_8}^5(p) = -\frac{i}{\tilde{k}_8^{(+)}} - \frac{1}{3} \Pi_{\pi_8 \pi_8}^{5u,u}(p) - \frac{2}{3} \Pi_{\pi_8 \pi_8}^{5s,s}(p) ,$$

$$\Gamma_{\pi_0 \pi_8}^5(p) = \Gamma_{\pi_8 \pi_0}^5(p) = \frac{ia^{(+)}k_{08}^{(+)}}{\tilde{k}_0^{(+)}\tilde{k}_8^{(+)}} - 2\frac{\sqrt{2}}{3}[\Pi_{\pi_0 \pi_8}^{5u,u}(p) - \Pi_{\pi_8 \pi_0}^{5s,s}(p)] ,$$

$$\Gamma_{A_0 \pi_0}^{\mu 5}(p) = \Gamma_{\pi_0 A_0}^{\mu 5}(p) = \frac{4}{3}i\Pi_{A_0 \pi_0}^{\mu 5u,u}(p) + \frac{2}{3}i\Pi_{A_0 \pi_0}^{\mu 5s,s}(p) ,$$

$$\Gamma_{A_1 \pi_1}^{\mu 5}(p) = \Gamma_{A_2 \pi_2}^{\mu 5}(p) = \Gamma_{A_3 \pi_3}^{\mu 5}(p) = i\Pi_{A_3 \pi_3}^{\mu 5u,u}(p) = \Gamma_{A_1 \pi_1}^{5\mu}(p) = \Gamma_{A_2 \pi_2}^{5\mu}(p) = \Gamma_{A_3 \pi_3}^{6\mu}(p) ,$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{A_4 \pi_4}^{\mu 5}(p) &= \Gamma_{A_6 \pi_6}^{\mu 5}(p) = \Gamma_{\pi_4 A_4}^{5\mu}(p) = \Gamma_{\pi_6 A_6}^{5\mu}(p) \\ &= \frac{i}{2} \Pi_{V_6 \sigma_6}^{\mu s,u}(p) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{A_5 \pi_5}^{\mu 5}(p) &= \Gamma_{A_7 \pi_7}^{\mu 5}(p) = \Gamma_{\pi_5 A_5}^{5\mu}(p) = \Gamma_{\pi_7 A_7}^{5\mu}(p) \\ &= \frac{i}{2} \Pi_{V_7 \sigma_7}^{\mu u,s}(p) , \end{aligned}$$

$$\Gamma_{A_8 \pi_8}^{\mu 5}(p) = \Gamma_{\pi_8 A_8}^{5\mu}(p) = \frac{2i}{3} \Pi_{A_8 \pi_8}^{\mu 5u,u}(p) + \frac{4i}{3} \Pi_{A_8 \pi_8}^{\mu 5s,s}(p) ,$$

$$\Gamma_{A_0 \pi_8}^{\mu 5}(p) = \Gamma_{\pi_8 A_0}^{5\mu}(p) = 2\frac{\sqrt{2}i}{3} \Pi_{A_0 \pi_8}^{\mu 5u,u}(p) - 2\frac{\sqrt{2}i}{3} \Pi_{A_0 \pi_8}^{\mu 5s,s}(p) ,$$

$$\Gamma_{\pi_0 A_8}^{\mu 5}(p) = \Gamma_{A_8 \pi_0}^{5\mu}(p) = 2\frac{\sqrt{2}i}{3} \Pi_{A_8 \pi_0}^{\mu 5u,u}(p) - 2\frac{\sqrt{2}i}{3} \Pi_{A_8 \pi_0}^{\mu 5s,s}(p) ,$$

$$\Gamma_{V_0 V_0}^{\mu\nu}(p) = -\frac{i}{2g_2} g^{\mu\nu} - \frac{4}{3} \Pi_{V_0 V_0}^{\mu\nu u,u}(p) - \frac{2}{3} \Pi_{V_0 V_0}^{\mu\nu s,s}(p) ,$$

$$\Gamma_{V_1 V_1}^{\mu\nu}(p) = \Gamma_{V_2 V_2}^{\mu\nu}(p) = \Gamma_{V_3 V_3}^{\mu\nu}(p) = \frac{i}{2g_2} g^{\mu\nu} - \Pi_{V_3 V_3}^{\mu\nu u,u}(p) ,$$

$$\Gamma_{V_4 V_4}^{\mu\nu}(p) = \Gamma_{V_6 V_6}^{\mu\nu}(p) = -\frac{i}{2g_2} g^{\mu\nu} - \Pi_{V_6 V_6}^{\mu\nu s,u}(p) ,$$

$$\Gamma_{V_5 V_5}^{\mu\nu}(p) = \Gamma_{V_7 V_7}^{\mu\nu}(p) = -\frac{i}{2g_2} g^{\mu\nu} - \Pi_{V_5 V_5}^{\mu\nu u,s}(p) ,$$

$$\Gamma_{V_8 V_8}^{\mu\nu}(p) = -\frac{i}{2g_2} g^{\mu\nu} - \frac{2}{3} \Pi_{V_8 V_8}^{\mu\nu u,u}(p) - \frac{4}{3} \Pi_{V_8 V_8}^{\mu\nu s,s}(p) ,$$

$$\Gamma_{V_0 V_8}^{\mu\nu}(p) = \Gamma_{V_8 V_0}^{\mu\nu}(p) = 2\frac{\sqrt{2}}{3} [\Pi_{V_0 V_8}^{\mu\nu u,u}(p) - \Pi_{V_0 V_8}^{\mu\nu s,s}(p)] ,$$

$$\Gamma_{A_0 A_0}^{\mu\nu 5}(p) = \frac{i}{2g_2} g^{\mu\nu} - \frac{4}{3} \Pi_{A_0 A_0}^{\mu\nu 5 u,u}(p) - \frac{2}{3} \Pi_{A_0 A_0}^{\mu\nu 5 s,s}(p) ,$$

$$\Gamma_{A_1 A_1}^{\mu\nu 5}(p) = \Gamma_{A_2 A_2}^{\mu\nu 5}(p) = \Gamma_{A_3 A_3}^{\mu\nu 5}(p) = \frac{i}{2g_2} g^{\mu\nu} - \Pi_{A_3 A_3}^{\mu\nu 5 u,u}(p) ,$$

$$\Gamma_{A_4 A_4}^{\mu\nu 5}(p) = \Gamma_{A_6 A_6}^{\mu\nu 5}(p) = \frac{i}{2g_2} g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \Pi_{A_6 A_6}^{\mu\nu 5 s,u}(p) ,$$

$$\Gamma_{A_5 A_5}^{\mu\nu 5}(p) = \Gamma_{A_7 A_7}^{\mu\nu 5}(p) = \frac{i}{2g_2} g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \Pi_{A_7 A_7}^{\mu\nu 5 u,s}(p) ,$$

$$\Gamma_{A_8 A_8}^{\mu\nu 5}(p) = \frac{i}{2g_2} g^{\mu\nu} - \frac{2}{3} \Pi_{A_8 A_8}^{\mu\nu 5 u,u}(p) - \frac{4}{3} \Pi_{A_8 A_8}^{\mu\nu 5 s,s}(p) ,$$

$$\Gamma_{A_0 A_8}^{\mu\nu 5}(p) = \Gamma_{A_8 A_0}^{\mu\nu 5}(p) = 2\frac{\sqrt{2}}{3} [\Pi_{A_0 A_8}^{\mu\nu 5 u,u}(p) - \Pi_{A_0 A_8}^{\mu\nu 5 s,s}(p)] ,$$

Usando os projetores longitudinal e transversal, (2.69), a estrutura dos elementos de polarização do vácuo são ,

$$\tilde{\Pi}_{\sigma\sigma}^{ff'}(p) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr}[S_F^f(k+p)S_F^{f'}(k)] = -\frac{i}{2} 2i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr}[S_F^f(k+p)S_F^{f'}(k)]$$

$$= -\frac{i}{2} J_{SS}^{JJ'}(1, 1)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{V\sigma}^{\mu JJ'}(p) &= g^{\mu\sigma} \tilde{\Pi}_{V\sigma\alpha}^{JJ'}(p) = (T^{\mu\alpha} + L^{\mu\alpha}) \tilde{\Pi}_{V\sigma\alpha}^{JJ'}(p) = \\ L^{\mu\alpha} \tilde{\Pi}_{V\sigma\alpha}^{JJ'}(p) &= \frac{p^\mu}{\sqrt{p^2}} \frac{p^\sigma}{\sqrt{p^2}} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[\gamma_\alpha S_F'(p+k) S_F'(k)] \\ &= -\frac{ip^\mu}{\sqrt{p^2}} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}\left[\frac{i\hat{p}}{\sqrt{p^2}} S_F'(p+k) S_F'(k)\right] = -\frac{1}{2} \frac{p^\mu}{\sqrt{p^2}} J_{VS}^{JJ'}\left(\frac{i\hat{p}}{\sqrt{p^2}}, 1\right) \\ \tilde{\Pi}_\sigma^{\nu JJ'}(p) &= \tilde{P}_{\sigma}^{JJ'}(p) L^{\sigma\nu} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[S_F'(k+p) \gamma_\sigma S_F'(k)] \frac{p^\sigma}{\sqrt{p^2}} \frac{p^\nu}{\sqrt{p^2}} \\ &= \frac{1}{2} 2i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[S_F'(k+p) \frac{(-i)\hat{p}}{\sqrt{p^2}} S_F'(k)] \frac{p^\nu}{\sqrt{p^2}} = \frac{1}{2} J_{SV}^{JJ'}\left(1, \frac{-i\hat{p}}{\sqrt{p^2}}\right) \frac{p^\nu}{\sqrt{p^2}} \\ \tilde{\Pi}_{VV}^{\mu\nu JJ'}(p) &= T^{\mu\alpha} \tilde{\Pi}_{VV\alpha\beta}^{JJ'}(p) T^{\beta\nu} + L^{\mu\alpha} \tilde{\Pi}_{\alpha\beta}^{JJ'}(p) L^{\beta\nu} \\ &= -\frac{i}{2} J_{VV}^{\mu\nu JJ'}(T^{\mu\alpha} \gamma_\alpha, T^{\beta\nu} \gamma_\beta) - \frac{i}{2} \frac{p^\mu}{\sqrt{p^2}} J_{VV}^{(L)JJ'}\left(\frac{i\hat{p}}{\sqrt{p^2}}, \frac{-i\hat{p}}{\sqrt{p^2}}\right) \frac{p^\nu}{\sqrt{p^2}} \\ &= -\frac{i}{2} J_{VV}^{(T)JJ'} T^{\mu\nu} - \frac{i}{2} \frac{p^\mu}{\sqrt{p^2}} J_{VV}^{(L)JJ'}\left(\frac{i\hat{p}}{\sqrt{p^2}}, \frac{-i\hat{p}}{\sqrt{p^2}}\right) \frac{p^\nu}{\sqrt{p^2}} \\ &= -\frac{i}{2} T^{\mu\sigma} \left[\frac{1}{3} J_{VV}^{\rho\sigma JJ'}(T^{\rho\alpha} \gamma_\alpha, T^{\beta\sigma} \gamma_\beta) T_{\rho\sigma}\right] T_\epsilon^\nu - \frac{i}{2} \frac{p^\mu}{\sqrt{p^2}} J_{VV}^{(L)JJ'}\left(\frac{i\hat{p}}{\sqrt{p^2}}, \frac{(-i)\hat{p}}{\sqrt{p^2}}\right) \frac{p^\nu}{\sqrt{p^2}} \end{aligned}$$

$$\tilde{\Pi}_{\pi\pi}^{5 JJ'}(p) = \frac{i}{2} J_{PP}^{5 JJ'}(i\gamma^5, i\gamma^5)$$

$$\tilde{\Pi}_{\lambda\pi}^{\mu 5 JJ'}(p) = \frac{i}{2} \frac{p^\mu}{\sqrt{p^2}} J_{\lambda P}^{(L)JJ'}\left(i\frac{\hat{p}}{\sqrt{p^2}} \gamma^5, i\gamma^5\right)$$

$$\tilde{\Pi}_{\pi A}^{\nu 5 JJ'}(p) = -\frac{i}{2} J_{PA}^{JJ'}(i\gamma^5, -i\frac{\hat{p}}{\sqrt{p^2}} \gamma^5) \frac{p^\nu}{\sqrt{p^2}}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{AA}^{\mu\nu 5 JJ'}(p) &= -\frac{i}{2} J_{AA}^{\mu\nu 5 JJ'}(T^{\mu\nu} \gamma_\alpha \gamma_5, T^{\nu\beta} \gamma_\beta \gamma_5) - \frac{i}{2} \frac{p^\mu}{\sqrt{p^2}} J_{AA}^{(L)JJ'}\left(i\frac{\hat{p}}{\sqrt{p^2}} \gamma^5, -i\frac{\hat{p}}{\sqrt{p^2}} \gamma^5\right) \frac{p^\nu}{\sqrt{p^2}} \\ &= -\frac{i}{2} T^{\mu\epsilon} J_{AA}^{(T)JJ'} T_\epsilon^\nu - \frac{i}{2} \frac{p^\mu}{\sqrt{p^2}} J_{AA}^{(L)JJ'}\left(i\frac{\hat{p}}{\sqrt{p^2}} \gamma^5, -i\frac{\hat{p}}{\sqrt{p^2}} \gamma^5\right) \frac{p^\nu}{\sqrt{p^2}} \\ &= -\frac{i}{2} T^{\mu\sigma} \left[\frac{1}{3} J_{AA}^{\rho\sigma 5 JJ'}(T^{\rho\alpha} \gamma_\alpha \gamma_5, T^{\beta\sigma} \gamma_\beta \gamma_5) T_{\rho\sigma}\right] T_\epsilon^\nu - \frac{i}{2} \frac{p^\mu}{\sqrt{p^2}} J_{AA}^{(L)JJ'}\left(i\frac{\hat{p}}{\sqrt{p^2}} \gamma^5, -i\frac{\hat{p}}{\sqrt{p^2}} \gamma^5\right) \frac{p^\nu}{\sqrt{p^2}} \end{aligned}$$

onde as integrais $J^{JJ'}$ são da forma

$$\begin{aligned} J_{ij}^{JJ'}(\Lambda, \Lambda') &= 2i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}\left[\frac{\Lambda}{\not{k} + \not{p} - m_f} \frac{\Lambda'}{\not{k} - \not{p} - m_{f'}}\right] = \\ &= 2i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}\left[\frac{\Lambda}{\not{k} + \frac{\not{p}}{2} - m_f} \frac{\Lambda'}{\not{k} - \frac{\not{p}}{2} - m_{f'}}\right] \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

B.2 Expresões para as Integrais J

As integrais $J_{ij}(\Gamma, \Gamma')$ são explicitamente calculadas em termos das integrais,

$$\mathcal{R}_1(m) = 8i \int^\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{1}{2\pi^2} \left[\Lambda^2 - m^2 \ln\left(1 + \frac{\Lambda^2}{m^2}\right) \right]$$

$$\mathcal{R}_2(p^2, m, m') = 4i \int^\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k + \frac{p}{2})^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(k - \frac{p}{2})^2 - m'^2 + i\epsilon}$$

Definindo

$$M = m' + m \quad \Delta = m' - m$$

$$\mathcal{R}_2^0(m, m') = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{R}_1(m) - \mathcal{R}_1(m')}{m^2 - m'^2}, \quad (\mathcal{R}_2^0)' = \frac{d\mathcal{R}_2(p^2)}{dp^2}$$

e

$$p = \sqrt{p^2}$$

tem-se as seguintes integrais,

$$J_{PP} = \frac{1}{2} [\mathcal{R}_1(m) + \mathcal{R}_1(m')] + (\Delta^2 - p^2) \mathcal{R}_2$$

$$J_{PA} = -\frac{\Delta^2 M}{p} [\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_2^0] + p M \mathcal{R}_2$$

$$J_{AA}^L = \frac{\Delta^2 M^2}{p^2} [\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_2^0] - M^2 \mathcal{R}_2$$

$$J_{SS} = \frac{1}{2} [\mathcal{R}_1(m) + \mathcal{R}_1(m')] + (M^2 - p^2) \mathcal{R}_2$$

$$J_{SV} = \frac{i\Delta M^2}{p} [\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_2^0] - ip\Delta \mathcal{R}_2$$

$$J_{VV}^L = \frac{\Delta^2 M^2}{p^2} [\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_2^0] - \Delta^2 \mathcal{R}_2$$

$$J_{VV}^T = \frac{1}{3} \left[(\Delta^2 + M^2 - \frac{\Delta^2 M^2}{p^2}) (\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_2^0) - (3\Delta^2 - 2p^2) \mathcal{R}_2 + 4\Delta^2 M^2 (\mathcal{R}_2^0) \right]$$

$$J_{VS}(m, m') = -J_{SV}(m, m') = -J_{VS}(m', m)$$

$$J_{VP}(m, m') = J_{PV}(m, m') = J_{VP}(m', m)$$

e as relações de simetria,

$$J_{VA}^T = \frac{1}{3}[(\Delta^2 + M^2 - \frac{\Delta^2 M^2}{p^2})(\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_0^2) - (3M^2 - 2p^2)\mathcal{R}_2 + 4\Delta^2 M^2(\mathcal{R}_0^2)]$$

Referências

- [1] W. Heisenberg Z., Naturforsch, 14, (1959) 441;
- [2] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys.Rev.122 (1961) 345; 124 (1961) 246;
- [3] S. P. Klevansky, Rev.of Mod.Phys., 64 3 (1992) 649;
- [4] R. T. Cahill and C. D. Roberts, Phys. Rev.D32 (1985) 2418;
- [5] R. O. Ball, Int. Jour. Mod. Phys.A5 (1990) 4391;
- [6] D. Dyakonov and V. Yu Petrov, Nuclear Phys.B272 (1986) 457;
- [7] H. Reinhardt, Phys. Lett.B244 (1990) 316; B257(1991) 375;
- [8] T. Eguchi and H. Sagawara, Phys. Rev.D10 (1974) 4257;
- [9] K. Kikkawa, Prog. Theo. Phys. 56 (1976) 947;
- [10] A. Chakrabarti and B. Hu, Phys. Rev.D13 (1976) 2347;
- [11] M. K. Volkov, Ann.Phys.(N.Y) (1984) 157;
- [12] D. Erbert and H. Reinhardt, Nucl. Phys.B271 (1986) 188; Phys. Lett.B173 (1986) 453;
- [13] G. t'Hooft, Phys.Rev.Lett.37, (1976) 8 ;Phys.Rev.D14 (1976) 3432;
- [14] H. Reinhardt and R. Alkofer, Phys. Lett.B207 (1988) 482;
- [15] V. Bernard, A. H. Blin, B. Hiller, U.-G. Meißner, and M. C. Ruivo, Phys. Lett. B305 (1993) 163;
- [16] E. van Beveren, G. Rupp, T.A. Rijken, and C. Dullemond, Phys. Rev. D27 (1983) 1527; E. van Beveren, Nucl.Phys. B21 (proc.suppl.) (1991) 43;
- [17] M. O. C. Gomes, Apostila do Curso de Introdução à Teoria Quântica dos Campos I e II, IFUSP (1995);

- [18] U. Vogl, and W. Weise, Prog. Part. Nucl. Phys. **27**, 1991, 195;
- [19] M. D. Scadron, Rep. Progr. Phys. **44** (1981) 213;
- [20] F. Wilczek, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci., **32**, 1982, 177-209;
- [21] J. Bardeen, L. Cooper, and J. Schrieffer, Phys. Rev. **108**, 1957, 1175;
- [22] S. Klimt, M. Lutz, U. Vogl and W. Weise, Nucl. Phys. **A516** (1990) 429; U. Vogl, M. Lutz, S. Klimt and W. Weise, Nucl. Phys. **A516** (1990) 469;
- [23] T. Hatsuda, and T. Kunihiro, Phys. Reports **247**, 1994, 221-367;
- [24] G. t'Hooft, Nucl. Phys. **B72** (1974) 461; **B75** (1974) 461
- [25] E. Witten, Nucl. Phys. **B160**, 1979, 57; S. Coleman, In Pointlike Structures Inside and Outside Hadrons, Eric Lectures of 1979, 1982, 11, Ed. Zichichi (Plenum);
- [26] R. S. Mendes, Alguns Aspectos da Expansão $1/N$ em Mecânica Quântica e teoria de Campos, Dissertação de Mestrado, IFUSP, 1988;
- [27] M. O. C. Gomes, X Encontro Nacional de Física de Partículas Elementares, Sociedade Brasileira de Física, (1989);
- [28] M. K. Volkov, Phys. Part. Nucl. **24**, 1993, 1;
- [29] D. Ebert, and H. Reinhardt, Nucl. Phys. **B271**, 1986, 188;
- [30] S. V. L. Pinheiro, Estados Ligados dos Modelos Gross-Neveu e Thirring em $2 + 1$ Dimensões, Dissertação de Mestrado, Instituto de Física da USP, 1993;
- [31] V. S. Alves, Estados Ligados em Modelos Bi-Dimensionais: O caso da QED_2 e de um Modelo com Interações Quárticas Fermiônicas, Dissertação de Mestrado, Instituto de Física da USP, 1993;
- [32] C. I. Itzykson, and J. B. Zuber, Quantum Field Theory , 1980, Mc.Graw-Hill, New York.