**Universidade de São Paulo
Instituto de Física**

**Auto calibração e determinação de matrizes
de covariância em medidas de energia
em espectroscopia gama**

Theotonio Mendes Pauliquevis Júnior

Dissertação apresentada
ao Instituto de Física da
Universidade de São
Paulo para a obtenção do
título de Mestre em
Ciências

Comissão examinadora:

Prof. Dr. Otaviano Augusto Marcondes Helene (orientador)
Prof. Dr. Mauro da Silva Dias (IPEN)
Prof. Dr. Thereza Borello Lewin (IFUSP)

São Paulo

2000

Agradecimentos

Este trabalho, como tantos outros, foi feito por muitas mãos, sem as quais eu jamais teria chegado tão longe. Muitos são aqueles que me deram suporte, desde os mais tenros anos de idade até minha fase adulta, sem os quais eu poderia, hoje, estar muito aquém.

Assim, devo muito a minha mãe, que corajosamente enfrentou tantos problemas em nossa vida e mesmo quando tudo parecia perdido, mostrou forças e prosseguiu. A ela, agradeço pelo exemplo de força.

Ao professor Otaviano, não apenas pela orientação neste trabalho, mas principalmente pelo exemplo permanente de retidão de postura, de ética, e de amor pela ciência. Mais do que tudo, é a pessoa a qual se não tivesse conhecido quando o conheci, talvez não tivesse o interesse e paixão pela ciência que trago, hoje, dentro de mim.

Ao longo de meus estudos, alguns professores marcaram mais que outros, mostrando seu conhecimento de uma forma extremamente elegante e bela.

Sem dúvida, o professor Sylvio Canuto, pelo seu excelente curso de mecânica quântica, e pelo seu apoio quando membro da CPG; e o professor Manoel Tiago Freitas da Cruz, que abriu meus olhos para a física experimental em meu primeiro ano de graduação.

Neste trabalho, também devo agradecer a todos os professores do Laboratório do Acelerador Linear, que sempre se mostraram solícitos, especialmente o professores Vito Vanin e Paulo Pascholati.

Agradeço também a todos os colegas bolsistas do laboratório, que proporcionam um clima de cordialidade e permanente cooperação. Agradeço especialmente ao Zwinglio, pelas excelentes observações e leitura atenta deste trabalho; ao Ruy, por tantas vezes ter interrompido seu trabalho para me explicar detalhes experimentais do sistema de aquisição; ao David, pelo apoio na parte computacional; ao Tramontano, pelo auxílio na parte gráfica.

Agradeço as secretárias Vera, Inês, e Tereza, pela eterna boa vontade em resolver problemas burocráticos do dia a dia.

Fora da academia, agradeço de coração a minha namorada, Janete, por seu carinho e companheirismo, e por sua compreensão, além de sua obstinação ser um exemplo como poucos.

Agradeço a meu irmão Gustavo, pelo companheirismo nos problemas da vida que juntos enfrentamos.

Agradeço a meus avós Urbana, Duílio, Leocádia e Clóvis, pelo carinho que sempre me dispensaram, desde que nasci até hoje.

Aos meus amigos, que são como irmãos, André e Renê, aos quais, agradecer pelo companheirismo, seria dizer pouco. Sem dúvida, são amigos para toda a vida que muito representam para mim.

À amiga do peito, Luena, que junto com Alex, proporcionaram por um longo período uma convivência extremamente enriquecedora, aguentando meus descabimentos domésticos, e mostrando pontos de vista nunca antes imaginados por mim.

Agradeço a Fapesp, pois sem seu apoio financeiro jamais teria sido possível ter executado este trabalho.

Agradeço a Universidade de São Paulo por não apenas me dar conhecimento, mas por ter me dado moradia numa época que muito precisei, sem a qual jamais teria podido estudar.

E a todos que porventura tenham me escapado a memória, mas não por isso menos importantes.

RESUMO

Foram medidas as energias de 21 transições gama dos nuclídeos ^{57}Co , ^{60}Co , ^{133}Ba , ^{137}Cs e ^{192}Ir , utilizando um detetor HPGe de 75cm^3 . Na análise dos dados foi aplicado o procedimento de auto calibração, baseado no Método dos Mínimos Quadrados, no qual as informações experimentais e dos dados de entrada são incluídas em um único passo. Como consequência do procedimento estatístico adotado, foi possível atualizar os valores de 309 outras transições gama não medidas, mas covariantes com aquelas que foram medidas, bem como de sua matriz de covariância. Assim, certas transições tiveram redução de variâncias superiores a 80% em relação aos dados então disponíveis na bibliografia e 50% em relação aos dados reanalisados considerando toda a matriz de covariância.

ABSTRACT

We measured 21 gamma-ray energies from ^{57}Co , ^{60}Co , ^{133}Ba , ^{137}Cs and ^{192}Ir decay, with a 75 cm³ HPGe detector. The data analysis was performed using a self calibration procedure, based on the Least Square Method, where experimental and input data are included in a single step. As result of this statistical procedure, 309 other gamma-ray energies not measured, but covariant with the measured ones, as well the covariance matrix were updated. Some transitions got a variance reduction over than 80% when compared with the bibliography, and of 50% when compared with the reanalyzed data that consider all the covariance matrix.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	8
CAPÍTULO 1: AUTO-CALIBRAÇÃO	10
1.1 CALIBRAÇÃO: O MODO USUAL	10
1.2 AUTO CALIBRAÇÃO [2].....	12
1.3 A AUTO-CALIBRAÇÃO E O MÉTODO DO AJUSTE ÚNICO (MAU) [4]	16
CAPÍTULO 2: ARRANJO EXPERIMENTAL E ESTRATÉGIA DE MEDIDA	19
2.1 ESTRATÉGIA DE MEDIDA.....	19
2.2 EQUIPAMENTO UTILIZADO E AJUSTES	20
2.3 FONTES.....	21
2.4 ARRANJO E CONDIÇÕES EXPERIMENTAIS	22
CAPÍTULO 3: METODOLOGIA DE ANÁLISE DOS DADOS EXPERIMENTAIS	24
3.1 RELOCAÇÃO DOS ESPECTROS.....	25
3.1.1 <i>Relocação de espectros</i>	26
3.1.2 <i>Relocação por análise de evolução temporal</i>	29
3.1.3 <i>Resultados da relocação</i>	36
3.1.4 <i>Componente de 24 horas</i>	38
3.1.5 <i>Ajuste do resíduo</i>	41
3.1.6 <i>Ajuste final</i>	43
3.1.7 <i>A relocação dos espectros utilizando o programa RELOCA</i>	46
3.2 METODOLOGIA DE ANÁLISE DOS PICOS.	51
3.2.1 <i>Ajuste de picos com parâmetros livres</i>	52
3.2.2 <i>Ajuste de picos sobre estruturas complexas sob o fundo</i>	56
3.2.3 <i>Picos sobre patamares e/ou bordas Compton</i>	56
3.2.4 <i>Ajuste de picos usando a fixação de parâmetros</i>	60
3.2.5 <i>Ajuste por gaussiana simples com posterior correção do erro sistemático</i>	61
3.2.6 <i>Exemplos de aplicação</i>	62

3.2.7 <i>Picos sobre patamares e/ou bordas Compton do mesmo nuclídeo</i>	69
3.3 CALIBRAÇÃO DE ENERGIA.....	72
CAPÍTULO 4: RESULTADOS EXPERIMENTAIS E DISCUSSÃO	74
4.1 VALORES NOVOS DAS TRANSIÇÕES.....	74
4.2 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	78
CAPÍTULO 5: CONCLUSÃO	82
APÊNDICE 1: DEDUÇÃO DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA	
□(EQUAÇÃO 1-11)	85
APÊNDICE 2: CÁLCULO DO χ^2 DE UM CONJUNTO DE DADOS	
COM MATRIZ DE COVARIÂNCIA SINGULAR	89
APÊNDICE 3: MÉTODO DE DETERMINAÇÃO DE COVARIÂNCIAS	
ENTRE ENERGIAS DE TRANSIÇÕES GAMA	92
APÊNDICE 4: VALORES DE TRANSIÇÕES GAMA.....	96
REFERÊNCIAS	104

Introdução

Espectroscopia gama é uma técnica experimental de física nuclear que tem encontrado aplicações em vários ramos de atividade; como exemplos (mas não únicos) podemos citar monitoramento ambiental, análise de materiais, salvaguardas nucleares, além de aplicações em física básica. A confiabilidade dessas aplicações está intimamente ligada a precisão de valores de energia e intensidade de transições gama usadas como padrões de calibração [1].

Nos últimos anos tem sido feito um esforço constante no sentido de melhorar este conjunto de energias de referência pela comunidade especializada. Um pequeno histórico pode ser traçado.

Em 1971, no *4th International Congress on Atomic Masses and Fundamental Constants*, constatou-se que a espectroscopia gama de precisão estava tendo seu progresso impedido por uma falta de uniformidade e precisão do conjunto de energias usadas até então. Dessa forma, foi designado um grupo de trabalho para estudar o problema e, em 1979, Helmer, van Asshe e van der Leun [3] publicaram a primeira e extensa revisão de dados de energias gama de diversos núclídeos, usados em procedimentos de calibração, com os dados disponíveis até então.

Desde então, vários dados experimentais novos foram publicados, além de um novo conjunto de constantes fundamentais ter sido publicado em 1986 [6].

Recentemente (agosto/2000), Helmer e van der Leun publicaram uma nova revisão de energias [5], de acordo com as constantes fundamentais de 1986. Neste mesmo ano, Mohr e Taylor publicaram nova revisão de constantes fundamentais, o que gera a necessidade de nova revisão dos valores das transições gama, adequando-os aos novos valores de constantes fundamentais.

Há que considerar-se que as energias de transições gama são covariantes tanto entre si como com as constantes fundamentais (h , c , e , parâmetro de rede do Si). Todavia, o trabalho de Helmer e van der Leun não disponibiliza a matriz de covariância das transições e, para a nova

atualização de seus valores é necessário o conhecimento da totalidade da matriz de covariância, bem como sua atualização quando da realização de novas medidas. Assim, as etapas para que tal esforço se efetue são a determinação da matriz de covariância e a realização de novas medidas, com a correspondente atualização da mesma matriz. Dentro desse contexto, insere-se esse trabalho.

Neste trabalho foi feita uma revisão de energias gama utilizando como base os dados de Helmer e van der Leun [5], mas recalculados e adicionados de sua matriz de covariância [15,22], e incluídas medidas feitas com um detetor HPGe de 75 cm³ dos núclídeos ¹⁹²Ir, ¹³⁷Cs, ¹³³Ba, ⁶⁰Co e ⁵⁷Co.

Nos dados obtidos, foi aplicado o método da autocalibração [2], modificado de acordo com a referência [4], aplicando o Método do Ajuste Único (MAU).

Sendo o objetivo da medida uma alta precisão em energia, a estratégia experimental foi feita visando o conhecimento das estruturas sob o fundo do espectro, para que pudessem ser descontados seus efeitos, além de metodologias de ajuste dos picos que fossem confiáveis, mesmo em situações aonde houvesse sobreposição de vários efeitos secundários do fundo na região de interesse (p.ex. uma borda Compton na mesma região espectral de um fotopico).

Ao longo da medida o sistema de aquisição sofreu instabilidades, mudando seu comportamento de acordo com a temperatura; para corrigi-las, foi feita uma relocação dos espectros, para então efetuar a soma destes.

Como resultado final, foram obtidas melhoras sensíveis nas precisões das energias em várias transições, tanto daquelas medidas no experimento como de várias não medidas, mas covariantes com as medidas. Além disso, o resultado como um todo avaliza a matriz de covariância, testando sua consistência e coerência para seu uso em novos experimentos.

Capítulo 1: Auto-calibração

1.1 Calibração: o modo usual

O processo usual para fazer uma calibração de energia num experimento de espectroscopia gama a partir do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) consiste do ajuste de uma função $y(x)$ aos dados (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$ obtidos experimentalmente. Os parâmetros verdadeiros se relacionam com a função $y(x)$ na forma:

$$y_i = a_1^{(0)} \cdot f_1(x_i^{(0)}) + a_2^{(0)} \cdot f_2(x_i^{(0)}) + \dots + a_m^{(0)} \cdot f_m(x_i^{(0)}) + e_i \quad (1-1)$$
$$i = 1, 2, \dots, n$$

aonde $a_j^{(0)}$, com $j = 1, \dots, m$, são os m valores verdadeiros dos parâmetros a serem ajustados, $f_j(x_i^{(0)})$, $j = 1, \dots, m$, são m funções conhecidas calculadas em valores também conhecidos de x_i , e e_i é o erro (desconhecido) da medida y_i . Destes, somente seus valores quadráticos médios $\langle e_i^2 \rangle$, que são suas variâncias, são conhecidos.

A equação (1-1) pode ser escrita na forma usual do tratamento matricial do MMQ:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}_0 \cdot \mathbf{A}_0 + \mathbf{e} \quad (1-2)$$

aonde

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (1-3)$$

é o vetor que contém os dados e

$$\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} f_1(x_1^{(0)}) & f_2(x_1^{(0)}) & \dots & f_m(x_1^{(0)}) \\ f_1(x_2^{(0)}) & f_2(x_2^{(0)}) & \dots & f_m(x_2^{(0)}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(x_n^{(0)}) & f_2(x_n^{(0)}) & \dots & f_m(x_n^{(0)}) \end{pmatrix} \quad (1-4)$$

é a matriz de planejamento. $\mathbf{e}$ é o vetor (coluna) que contém os erros e $\mathbf{A}_0$ o vetor (coluna) que contém o valor verdadeiro dos parâmetros.

Os parâmetros ajustados pelo MMQ são dados por [17]

$$\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{X}_0^t \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{X}_0)^{-1} \mathbf{X}_0^t \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{Y} \quad (1-5)$$

aonde $\mathbf{V}$ é a matriz de covariância dos dados, e $\mathbf{V}_{ij} = \langle e_i \cdot e_j \rangle$. Os dados ajustados terão em $\mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}}$ sua matriz de covariância, dada por [17]

$$\mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} = (\mathbf{X}_0^t \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{X}_0)^{-1}. \quad (1-6)$$

Os valores da variável dependente calculados nos pontos correspondentes aos mesmos valores da variável independente usados na calibração são dados por [17]

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{X}_0 \cdot \tilde{\mathbf{A}} \quad (1-7)$$

Se os dados obedecem funções de densidade de probabilidade gaussianas, então temos que a variável

$$\chi^2 = (\mathbf{Y} - \tilde{\mathbf{Y}})^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{Y} - \tilde{\mathbf{Y}}) \quad (1-8)$$

obedece a uma distribuição de qui-quadrado e pode ser usada para testar a qualidade do ajuste.

Em situações práticas, é comum existirem erros não apenas nas variáveis dependentes y_i , mas também nas variáveis independentes x_i .

Nesse caso, denominamos $\mathbf{V}_0$ a matriz de covariância associada aos dados dependentes e $\mathbf{V}_x$ à associada aos dados independentes. Se a relação entre as duas variáveis é aproximadamente linear, a matriz de covariância $\mathbf{V}$ pode então ser aproximada por

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + b^2 \cdot \mathbf{V}_x \quad (1-9)$$

aonde b é a derivada de y em relação à x . Nesse caso, devemos substituir a matriz $\mathbf{X}_0$ por $\mathbf{X}$ nas equações (1-5) à (1-7), aonde $\mathbf{X}$ é a matriz de planejamento calculada usando os valores experimentais

1.2 Auto calibração [2]

O procedimento descrito acima é utilizado para obter a calibração de um determinado instrumento de medição; a partir dessa calibração obtida, pode-se interpolar o valor da variável dependente para determinados valores da variável independente.

Comumente, os valores y_i utilizados para efetuar a calibração são os com menor desvio padrão conhecidos na literatura, não se utilizando dos valores com grandes desvios padrões (baixa precisão)*. Estes são, numa segunda etapa, interpolados, com precisão do ajuste calculado.

Todavia, não há perda de qualidade estatística em utilizar-se também desses dados de baixa precisão para efetuar a calibração de energia: eles apenas terão pouco peso na determinação dos parâmetros ajustados devido a suas variâncias serem muito grandes.

Na etapa posterior podemos, sem perda de generalidade, interpolar valores da variável dependente correspondentes aos mesmos valores da variável independente utilizados como dados de entrada para a calibração. Assim, os valores interpolados corresponderiam ao vetor coluna $\tilde{\mathbf{Y}}$, da equação (1-7). Deste modo, usando as equações (1-7) e (1-5), temos

---

* Note que estamos supondo a inexistência de possíveis erros sistemáticos. A precisão de um certo dado de entrada é, neste trabalho, unicamente relacionada ao valor do seu desvio padrão.

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{X} \cdot (\mathbf{X}^t \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{Y} \quad (1-10)$$

Esta equação mostra como os valores interpolados $\tilde{\mathbf{Y}}$ (que poderíamos chamar de auto-interpolados) dependem dos dados de calibração $\mathbf{Y}$

A matriz de covariância dos dados interpolados é dada por (v. Apêndice 1):

$$\mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{Y}}} = \mathbf{X}\mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}}\mathbf{X}^t + b^2\mathbf{V}_{\mathbf{x}} - b^2\mathbf{X}\mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}}\mathbf{X}^t\mathbf{V}_{\mathbf{x}} - b^2\mathbf{V}_{\mathbf{x}}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}}\mathbf{X}^t \quad (1-11)$$

Após essa interpolação dos dados nas mesmas posições da variável independente dos dados de entrada, temos um conjunto de $2n$ pontos experimentais, para um conjunto de n energias a serem ajustadas. Portanto, qual conjunto de dados deve ser adotado? Mais que isso, como escolher um conjunto final de dados que leve em conta todas as covariâncias envolvidas no processo?

De acordo com a referência [2], a determinação do conjunto final dos n valores de energia é feita conforme descrito abaixo.

A relação entre $\mathbf{Y}$ e $\tilde{\mathbf{Y}}$ com o vetor $\mathbf{Y}_0$ (dos valores verdadeiros e desconhecidos da variável dependente) pode ser escrita formalmente como

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y} \\ \dots \\ \tilde{\mathbf{Y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \\ \dots \\ \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbf{Y}_0 + \mathbf{e}'_T \quad (1-12)$$

Nessa forma, o novo vetor de dados é

$$\mathbf{Y}_T = \begin{pmatrix} \mathbf{Y} \\ \dots \\ \tilde{\mathbf{Y}} \end{pmatrix}$$

e a matriz de planejamento é

$$\mathbf{X}_T = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \\ \dots \\ \mathbf{I}_n \end{pmatrix}$$

onde $\mathbf{I}_n$ é uma matriz identidade de ordem n . A matriz de covariância de $\mathbf{Y}_T$ é dada por

$$\mathbf{V}_T = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_0 & \vdots & \mathbf{C}^t \\ \dots & & \dots \\ \mathbf{C} & \vdots & \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{Y}}} \end{pmatrix} \quad (1-13)$$

onde $\mathbf{V}_0$ é a matriz de covariância dos dados de entrada $\mathbf{Y}$ usados na calibração, $\mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{Y}}}$ é a matriz de covariância de $\tilde{\mathbf{Y}}$ dada pela equação (1-11), e $\mathbf{C}$ é a matriz de covariância entre $\mathbf{Y}$ e $\tilde{\mathbf{Y}}$.

A matriz $\mathbf{C}$ pode ser calculada a partir de

$$\mathbf{C} = \left\langle (\tilde{\mathbf{Y}} - \mathbf{Y}_0)(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0)^t \right\rangle. \quad (1-14)$$

Usando a equação (1-10), podemos escrever a relação entre $\mathbf{Y}$ e $\tilde{\mathbf{Y}}$ como sendo

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{M}\mathbf{Y} \quad (1-15)$$

onde $\mathbf{M} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1}$. Somando e subtraindo $\mathbf{M}\mathbf{Y}_0$ no primeiro termo do lado direito da equação (1-14), e usando a equação (1-15) encontramos que

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} \cdot \left\langle (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0)(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0)^t \right\rangle + (\mathbf{M} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{Y}_0 \cdot \left\langle (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0)^t \right\rangle. \quad (1-16)$$

O último termo dessa equação é nulo (pois $\langle \mathbf{Y} \rangle = \mathbf{Y}_0$) e, como $\left\langle (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0)(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0)^t \right\rangle$ é a matriz de covariância de $\mathbf{Y}$, $\mathbf{V}_0$, temos finalmente que

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{V}_0. \quad (1-17)$$

$\mathbf{V}_T$, $\mathbf{Y}_T$ e $\mathbf{X}_T$ nos permitem obter novas estimativas de $\mathbf{Y}_0$.

Todavia, no processo de obtenção do conjunto final de n parâmetros ajustados é impedido o uso das equações (1-5) e (1-6), pois $\mathbf{V}_T$ é uma matriz singular. Em [2], para contornar tal problema foi utilizada a rotina *lscov*, do programa Matlab [18], que faz uma transformação QR na matriz $\mathbf{X}$.

O fato de uma matriz de covariância ser singular não significa que ela esteja errada.

A interpretação de singularidades de matrizes de covariâncias nos leva a conclusão de que trata-se da existência de vínculos entre as variáveis.

Por exemplo, se dois dados tem correlação $\rho = 1$, isso significa que representam o mesmo dado experimental. A matriz de covariância de 3 dados, sendo que dois tem correlação igual à 1 é da forma

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e é singular.

Esse tipo de singularidade não invalida procedermos com o MMQ, pois trata-se de uma singularidade não essencial. Observando a equação (1-5)

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left(\mathbf{X}_0^t \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{X}_0 \right)^{-1} \mathbf{X}_0^t \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{Y} \quad (1-5)$$

vê-se que a matriz $\mathbf{V}$ aparece invertida dentro do parênteses e, depois de sofrer uma transformação linear, é reinvertida e multiplicada por sua inversa ou seja, sua singularidade desaparece.

Numericamente, para efetuar esse tipo de cálculo computacionalmente, deve-se acrescentar um valor extremamente pequeno à diagonal principal da matriz de covariância, de modo a, numericamente, retirar sua singularidade.

No cálculo do qui-quadrado aparece somente $\mathbf{V}^{-1}$. Mesmo neste caso, é possível obter um valor válido do qui-quadrado através desse pequeno incremento na diagonal. No Apêndice 2 mostra-se um caso simples desse problema, para o caso de uma matriz 3 x 3.

1.3 A Auto-calibração e o Método do Ajuste Único (MAU) [4]

Na auto-calibração, conforme descrito na seção anterior, tem-se n energias de referência que são auto interpoladas nas mesmas posições de variável independente.

A referência [4] propõe um novo modo de efetuar o ajuste, tendo como parâmetros as energias, as quais inclui não apenas as usadas no experimento mas também todo o universo de energias de referência disponíveis na literatura. A conexão entre as energias presentes e as não presentes no experimento é feita através da matriz de covariância entre elas. O método parte de duas equações matriciais. A primeira, relaciona os dados da literatura com os valores verdadeiros das grandezas,

$$\mathbf{Y}_{lit} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{e}_{lit} \quad (1-18)$$

aonde $\mathbf{Y}_{lit}$ é o vetor coluna das energias presentes na literatura que serão usadas como referência, $\mathbf{E}_0$ é o vetor coluna com os valores verdadeiros (e desconhecidos) dessas energias e $\mathbf{e}_{lit}$ é o erro (desconhecido) das energias apresentadas pela literatura. A segunda equação relaciona os mesmos valores verdadeiros com dados e parâmetros do experimento

$$\mathbf{0} = \mathbf{E}_0 - \mathbf{X}_c \cdot \mathbf{A}_0 + \mathbf{e}_c \quad (1-19)$$

aonde $\mathbf{X}_C$ é a matriz de planejamento com n linhas e m colunas, correspondendo a n dados experimentais, e m parâmetros de calibração a serem ajustados; $\mathbf{A}_0$ é o vetor coluna contendo os m parâmetros da curva de calibração do equipamento e $\mathbf{e}_C$ é o vetor com erros (desconhecidos) devidos exclusivamente às posições dos picos no espectro.

O ajuste dos parâmetros (energias e parâmetros de calibração) é feito dessa forma pelo MMQ em sua forma matricial, escrevendo as duas equações matriciais (1-18) e (1-19) em uma única expressão,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{lit} \\ \dots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \vdots & \mathbf{0} \\ \dots & & \dots \\ \mathbf{1} & \vdots & -\mathbf{X}_C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{E}_0 \\ \mathbf{A}'_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{lit} \\ \mathbf{e}_C \end{pmatrix} \quad (1-20)$$

ou seja, equivalente a equação (1-2):

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}_0 \cdot \mathbf{A}_0 + \mathbf{e}$$

e portanto solúvel pelo MMQ. Uma comparação desta com a equação (1-20) permite identificar $\mathbf{Y}_0$, $\mathbf{X}_0$, $\mathbf{A}_0$ e $\mathbf{e}$.

A sub-matriz $\mathbf{1}$, presente em $\mathbf{X}_C$ é uma matriz composta de elementos binários (0 ou 1).

Como exemplo de aplicação, temos a seguinte situação: um experimento com 6 energias de referência ($E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$) e 4 energias medidas experimentalmente por exemplo, E_1, E_2, E_4, E_5 . A curva de calibração, uma reta. A equação matricial fica então:

$$\begin{pmatrix} E_1^{lit} \\ E_2^{lit} \\ E_3^{lit} \\ E_4^{lit} \\ E_5^{lit} \\ E_6^{lit} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 & -x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 & -x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & -1 & -x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 & -x_5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_1^0 \\ E_2^0 \\ E_3^0 \\ E_4^0 \\ E_5^0 \\ E_6^0 \\ a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{lit} \\ \varepsilon_2^{lit} \\ \varepsilon_3^{lit} \\ \varepsilon_4^{lit} \\ \varepsilon_5^{lit} \\ \varepsilon_6^{lit} \\ \varepsilon_1^C \\ \varepsilon_2^C \\ \varepsilon_4^C \\ \varepsilon_5^C \end{pmatrix}.$$

Os parâmetros ajustados são dados por

$$\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{X}^t \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{Y}. \quad (1-5)$$

A matriz de covariância $\mathbf{V}$ dos dados de entrada fica sendo então

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{lit} & \vdots & \mathbf{0} \\ \dots & & \dots \\ \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{V}_C \end{pmatrix} \quad (1-21)$$

aonde $\mathbf{V}_C$ é a matriz de covariância devido as posições dos picos no espectro e $\mathbf{V}_{lit}$ devido as referências da literatura. Ao final, temos a matriz $\mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}}$, que representa as variâncias e covariâncias do conjunto das energias de referência e dos parâmetros da curva de calibração, com o acréscimo de informação proporcionado pelo experimento.

$$\mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} = (\mathbf{X}^t \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{X})^{-1}. \quad (1-22)$$

Este último procedimento, chamado de Método do Ajuste Único, foi adotado neste trabalho. Verificou-se também que o resultado obtido coincide com o método descrito na seção 1-2.

Capítulo 2: Arranjo experimental e estratégia de medida

O objetivo deste trabalho foi medir as energias das transições gama que seguem o decaimento do ^{192}Ir , ^{133}Ba , ^{137}Cs , ^{60}Co e ^{57}Co e atualizar os dados da literatura recentemente reavaliados e medidos por Helmer e van der Leun [5]. Também é objetivo do trabalho estão a determinação precisa de energias gama e a verificação do processo de alteração de valores e incertezas de outras transições não medidas neste trabalho, mas correlacionadas com as medidas.

2.1 Estratégia de medida

Foi obtido um espectro composto pelas transições dos seguintes núclídeos: ^{192}Ir , ^{133}Ba , ^{137}Cs , ^{60}Co e ^{57}Co , ocupando um intervalo energético de 53 keV até 1332 keV. A medida teve duração de 87 horas. Dentro das transições observadas nesse espectro, 21 são presentes na literatura [5] e foram efetivamente utilizadas no procedimento de calibração.

Visando a análise de picos sobrepostos sobre uma mesma região do espectros, foi adotada uma estratégia experimental que inclui, além da medida simultânea dos cinco núclídeos de interesse, também espectros individuais do ^{133}Ba , do ^{192}Ir , de uma medida somente com ^{137}Cs , ^{60}Co e ^{57}Co e uma medida de fundo. Dessa forma, pode-se identificar e substituir sobreposições indesejadas que alterem a precisão da análise dos dados como, por exemplo, quando um fotopico de um núclídeo localiza-se sobre a borda Compton de outro núclídeo. O detalhamento dos métodos de análise dos espectros está discutido na 2ª parte do capítulo 3.

2.2 Equipamento utilizado e ajustes

No arranjo experimental, que objetivou a obtenção de espectros gama unidimensionais, utilizou-se um detetor HPGe de 75 cm³, fonte de alta tensão (0-3000 V), amplificador, conversor analógico digital (tipo Wilkinson) e o sistema REGULUS [20] de aquisição de dados (placa e interface)

O ajuste do equipamento de aquisição visou escolher parâmetros que se mantivessem inalterados ao longo de todo o experimento, pela necessidade de comparação entre os espectros. Assim, os parâmetros escolhidos foram:

- a) Número de canais: 4096
- b) Intervalo de energia: 0 - 1.5 MeV
- c) Distância fonte - detetor: 13.4 cm. O valor foi escolhido para proporcionar uma taxa de contagens de aproximadamente 1000/s, prevenindo empilhamentos.
- d) Tempo de formação de pulso no amplificador (shapping time): 6 µs

Além disso, foi utilizado o modo de inibição empilhamento; foi utilizada a saída unipolar do amplificador.

O número de medidas e os tempos de medida dos espectros, em relação aos núclídeos presentes, foram:

- ¹³³Ba: 96 x 1 hora
- ¹³⁷Cs + ⁶⁰Co + ⁵⁷Co: 36 x ½ hora
- ¹⁹²Ir: 9 x 1 hora
- Espectro de fundo: 12 x 1 hora
- Espectro composto total (todos os núclídeos juntos): 87 x 1 hora

Não foi feita uma medida dos núclídeos ¹³⁷Cs, ⁶⁰Co, ⁵⁷Co isoladamente pois, devido ao pequeno número de fotopicos destes e por serem bastante dispersos no espectro, tornou-se desnecessário: não há

nenhum caso de superposição de um fotopico desses nuclídeos com efeitos secundários provocados por transições de outro nuclídeo.

2.3 Fontes

Foram utilizadas cinco fontes, uma de cada nuclídeo medido. Com exceção do ^{192}Ir , todas as fontes foram produzidas pela *Amershan*.

A fonte de ^{192}Ir foi cedida pelo IPEN (Instituto de Pesquisas Energéticas Nucleares), e trata-se de um remanescente de rejeitos industriais. Em seu formato original, é um pequeno fio metálico com cerca de 1 cm de comprimento, com atividade estimada em 210 μCi . Deste fio, foi cortado um pedaço que proporcionasse uma atividade de cerca de 5 μCi , a qual foi estimada pela medida relativa da área de um mesmo pico antes e depois do corte. Este pedaço foi o utilizado no experimento. As demais fontes, de acordo com sua data de produção, atividade inicial medida e suas meia-vidas, tinham atividades de 3 μCi para o ^{133}Ba , 6 μCi para o ^{137}Cs e de 1.5 μCi para o ^{60}Co .

Não estava disponível a data de fabricação nem a atividade inicial para a fonte de ^{57}Co e, portanto, a determinação de sua atividade não foi possível. Para os objetivos do experimento, que é uma medida com precisão em energia, o critério de sua escolha foi o fato que a transição de 122 keV mostrou-se visível e ajustável. A transição de 136 keV não estava visível. Atividades próximas entre as diversas fontes foi um objetivo do planejamento do experimento, visto que uma fonte com atividade muito maior que as outras dificultaria a análise dos dados, principalmente dos dados provenientes das fontes mais fracas. Dentro deste contexto, com exceção da fonte de ^{57}Co , o objetivo foi atingido.

2.4 Arranjo e condições experimentais

O diagrama de blocos abaixo esquematiza o experimento como um todo:

figura 2-1: diagrama de blocos do experimento

Foi utilizada blindagem de chumbo em torno de todo o sistema de detecção, com uma pequena abertura acima (conforme figura 2-2), para reduzir o retroespalhamento de gamas no chumbo.

Na medida com todos os nuclídeos, a geometria das medidas individuais não pôde ser reproduzida com exatidão, pelo fato de que as fontes precisam ser agrupadas num mesmo local, e a dimensão da sua própria embalagem limita isto. Foram então, para essa medida, empilhadas umas sobre as outras numa seqüência escolhida de forma que as mais fracas ficassem mais próximas do detetor.

As figuras 2-2 e 2-3, abaixo, nos mostram, respectivamente, uma perspectiva expandida do sistema de detecção e a ordem que as fontes foram agrupadas.

figura 2-2: perspectiva expandida do sistema de detecção

figura 2-3: ordem na qual as fontes foram colocadas para a medida com todos os nuclídeos.

Todavia, na circunstância desta medida, o sistema de ar-condicionado estava danificado, e a medida foi efetuada sem refrigeração. O único equipamento de estabilidade utilizado foi um desumidificador, para minimizar a umidade da Sala de Medidas.

A medida foi feita no período de janeiro de 1999, e observou-se que a temperatura não alterou-se demasiadamente, o que favoreceu a estabilidade do equipamento de aquisição. As instabilidades decorrentes da oscilação térmica foram corrigidas posteriormente, através de relocação (ver capítulo 3, seção 1 - relocação por análise temporal)

Capítulo 3: Metodologia de análise dos dados experimentais

A análise dos dados foi feita em 3 etapas. Primeiramente, o conjunto de 87 espectros foi somado, de modo a ter-se um único espectro para análise. Esta soma, todavia, não pode ser uma soma simples ou seja, das contagens canal a canal pois, devido ao fato da medida ter sido longa temporalmente, sujeitou-se as instabilidades do sistema de aquisição, sendo necessário efetuar uma relocação [7,8] de toda a série de espectros (antes de somá-los) para corrigir este efeito.

A relocação dos espectros foi feita de um modo diferente do usual: foi utilizado um método que denominamos “relocação por análise temporal”, que utiliza um número menor de parâmetros, para determinar os parâmetros da relocação (ver seção 1 deste capítulo).

A segunda etapa é quando, já de posse do espectro final (soma dos espectros parciais relocados), procedeu-se o ajuste das posições dos picos neste espectro, utilizando-se do programa IDF [13].

Todavia, alguns picos são de análise mais complexa devido a estrutura do fundo: por exemplo, por localizar-se sobre a borda Compton de outra transição ou sobre um espalhamento de outro fóton gama na blindagem, situações as quais o ajuste de uma parábola para o fundo mostrou-se insuficiente para preservar a precisão desejada.

Para descontar tais efeitos, optou-se por uma estratégia que foi fazer medidas parciais ou seja, um espectro do ^{192}Ir somente, um do ^{133}Ba , e um espectro com $^{137}\text{Cs} + ^{60}\text{Co} + ^{57}\text{Co}$. Estes três últimos foram feitos juntos devido ao fato de terem, no total, apenas 5 transições relativamente fortes. Dessa forma, pode-se separar os efeitos do fundo através de subtrações de espectros, além de conhecer melhor a origem das estrutura do fundo sob os picos, pelo menos quando esse fundo tem origem em um gama de outro espectro parcial.

A terceira e última etapa é a calibração propriamente dita, usando os dados ajustados na segunda etapa.

3.1 Relocação dos espectros

Foram utilizadas ao todo, 87 medidas de 1 hora cada com o espectro composto pelos núclídeos ^{192}Ir , ^{133}Ba , ^{137}Cs , ^{60}Co e ^{57}Co .

A relocação dos espectros foi necessária, pois ocorreu o “passeio” das posições centrais dos picos. Esse passeio foi causado por variações no comportamento do sistema de aquisição (v. arranjo experimental), que é sensível a variações da temperatura ambiente. Todavia, apesar da medida ter sido feita sem ar condicionado, o “passeio” foi pouco para esta condição, devido ao experimento ter sido feito numa época de relativa estabilidade climática. Por exemplo, a transição de 1332 keV tem uma resolução de 1,8 keV (4,7 canais), e o passeio foi de 0,3 keV (0,75 canais). Considerando que as duas grandezas irão compor-se quadraticamente, a contribuição do “passeio” é pequena.

Os gráficos da figura 3-1 mostram-nos a posição ajustada para alguns picos em função do tempo: são 99 espectros de uma hora cada. Posteriormente, para efetivar a relocação, foram utilizados um total de 87 espectros, pois o 1º da série e os 11 últimos apresentaram problemas de aquisição dos dados.

Como observa-se, a amplitude da variação causada pelo passeio é significativamente maior que a incerteza estatística do ajuste da posição. A não aplicação de um procedimento de relocação implicaria em uma perda de informação estatística na precisão da posição dos picos.

figura 3-1: posição central dos picos de 295, 308, 356, 661 e 1332 keV em função do tempo.

3.1.1 Relocação de espectros

A relocação de espectros é um procedimento que nos permite alterar a calibração destes de um modo conveniente, preservando a forma do espectro e sua flutuação estatística [7]. Em nosso caso, estamos interessados em descontar o passeio da posição central do pico. As causas desse passeio são a flutuação da curva de calibração *energia x canal* do sistema de aquisição (tanto o termo linear como o passeio de zero). Note que distingue-se aqui o passeio, que é a variação sistemática

da posição central do pico, da flutuação estatística, que é a variação aleatória da posição.

Assim, levando em conta esse passeio, cada espectro de uma dada série tem uma calibração distinta. Podemos então escrever a relação entre dois espectros da seguinte forma:

$$c_i = a_j + b_j c_j \quad (3-1)$$

Ou seja, o canal c_j do espectro j corresponde, no espectro i , ao canal $c_i = a_j + b_j c_j$. Dito de outra forma, um fotopico cuja centróide localiza-se no canal c_j do espectro j , estará no canal c_i do espectro i . Os termos a_j e b_j são chamados de termos de relocação. Neste caso, podemos dizer que, caso apliquemos a equação (3-1), o espectro i foi relocado para o espectro j .

O método comum de relocação consiste em montar um conjunto de $(n-1)$ equações de relocação (para n espectros). Se, por exemplo, formos relocar todos os espectros para o espectro número 1, teremos

$$\begin{aligned} c_2^{\text{relocado}} &= a_2 + b_2 \cdot c_2^{\text{experimental}} \\ c_3^{\text{relocado}} &= a_3 + b_3 \cdot c_3^{\text{experimental}} \\ c_4^{\text{relocado}} &= a_4 + b_4 \cdot c_4^{\text{experimental}} \\ &\vdots \\ c_{n-1}^{\text{relocado}} &= a_{n-1} + b_{n-1} \cdot c_{n-1}^{\text{experimental}} \\ c_n^{\text{relocado}} &= a_n + b_n \cdot c_n^{\text{experimental}} \end{aligned}$$

Assim, um determinado canal no espectro não relocado corresponderá a um canal diferente no espectro relocado, segundo a sua equação de relocação.

A determinação dos termos de relocação é feita comumente da seguinte forma: tomando-se um conjunto de fotopicos previamente escolhidos, teremos que cada um deles terá uma posição distinta em cada espectro (devido a flutuação). Tomando os espectros aos pares, podemos

criar gráficos (como o abaixo) que representam a posição desses picos escolhidos em cada um dos espectros.

figura 3-2: posições dos picos nos espectros 1 e 2

Obtem-se assim a relação linear entre as posições centrais dos fotopicos (correspondente as mesmas transições gama) nos referidos espectros. Como exemplo, no gráfico acima temos

$$(posição\ no\ espectro\ 1) = a_2.(posição\ no\ espectro\ 2) + b_2$$

Cada um dos $n-1$ gráficos como esse tem m pontos experimentais, aonde m é o número de picos ajustados. a e b são chamados de “termos de relocação”. Ao final teremos um conjunto de $n-1$ termos de relocação a ’s e b ’s para cada par de espectros.

3.1.2 Relocação por análise de evolução temporal

Neste trabalho optamos por obter os parâmetros da curva de relocação (a_i , b_i) dos espectros de um modo diferente do usual (descrito na seção 3.1.1). Observando os gráficos da figura 3-1 nota-se que o “passeio” segue um padrão oscilatório, com um período (visual) de 24 horas. Apresenta, portanto, uma regularidade. Somando-se a essa observação o fato de que o “passeio” é causado pela variação da temperatura ambiente, temos a hipótese de que a existência desses máximos e mínimos é decorrente de variação de temperatura no período dia/noite. A relocação por evolução temporal que propomos aqui sustenta-se, parcialmente, nessa hipótese.

Além desta a outra hipótese é de que as variações do sistema de aquisição ocorre de forma suave, e não bruscamente. No método convencional de se determinar os termos de relocação esta hipótese não é considerada, visto que os espectros são analisados aos pares, sem nenhuma conexão entre eles.

Supôs-se que a variação na posição é causada pela variação na função resposta do sistema de aquisição (relação *energia x canal*) ou seja, tanto no coeficiente linear (ganho) quanto no coeficiente constante (passeio de zero).

Variações no termo linear (ganho) causam “passeio” maior em fotopicos localizados no final do espectro, e menor no começo do espectro. Todavia, a forma geral, a função que descreve o passeio, será a mesma, em qualquer posição do espectro. A amplitude do passeio tem comportamento linear em função da posição no espectro (em canais)

Dessa forma, espera-se então uma mesma forma geral no padrão da variação na posição ao longo do tempo, sendo apenas que a amplitude dessa variação (o padrão) seja uma função da posição, e linear, em acordo com a função resposta do amplificador.

Neste tratamento considerou-se que a variação na posição é composta por duas partes: uma componente de 24 horas (termo

oscilatório), que é ajustada através do harmônico de 24 horas da série de Fourier e, a outra parte (resíduo), para a qual ajusta-se um polinômio.

Ao optarmos por ajustar o resíduo restante do termo oscilatório usando um polinômio (em nosso caso, o grau usado foi 10) escolhemos um critério linear, coerente com o método dos mínimos quadrados e que ajustou-se com um número adequado de parâmetros. O resíduo tem uma quantidade enorme de fatores que influenciam em sua forma: flutuações da rede elétrica, fluxo de pessoas no laboratório (que é diferente de dia e de noite, além dos finais de semana), etc. Em não havendo um modelo para tais causas, optamos por um ajuste polinomial. Além disso, preserva-se também a hipótese da variação suave nas posições dos picos no espectro.

Foram utilizados 14 picos para fazer a relocação por análise temporal; o critério de escolha destes é ter a incerteza na posição menor que 10% da amplitude máxima da oscilação. As energias desses picos vão de 80 keV até 1332 keV.

Desenvolvimento matemático

Um dado canal c_i , que representa a posição central de um certo pico, tem uma variação em torno de sua posição média. Assim temos, de acordo com a hipótese apresentada,

$$c_i(t) = \langle c_i(t) \rangle + [\text{oscilação de 24 horas}] + [\text{resíduo polinomial}] \quad (3-2)$$

O termo oscilatório é o harmônico de 24 horas da série de Fourier na forma

$$A_{\omega_{24}} \cdot \cos(\omega_{24} \cdot t) + B_{\omega_{24}} \cdot \text{sen}(\omega_{24} \cdot t) \quad (3-3)$$

aonde ω_{24} representa a frequência correspondente ao harmônico de 24 horas, e tem valor de

$$\omega_{24} = \frac{n_{24} \cdot \pi}{T} = \frac{7.183 \cdot \pi}{T}$$

Aqui, n_{24} caracteriza o número de ciclos de 24 horas no período da medida (87 horas); seu valor é $n_{24} = 7,183$. Ele não é um número inteiro pois foram utilizados, ao final, 87 espectros que não é um múltiplo inteiro de 12. T é o período total de medida.

Como dito anteriormente, nossa hipótese é de que a amplitude do padrão da variação da posição seja linear em função do canal. Assim, cada um dos termos que são responsáveis pelo passeio em torno da posição média será da seguinte forma:

Termo oscilatório:

$$(a_{24} + b_{24} \cdot canal) \times (termo\ oscilatório\ da\ componente\ de\ 24\ horas) \quad (3-4)$$

Termo polinomial:

$$(a_p + b_p \cdot canal) \times (termo\ do\ resíduo\ polinomial) \quad (3-5)$$

aonde a_p e b_p são os parâmetros que dão a variação linear da amplitude do termo polinomial .

Em ambos os casos (oscilatório e polinomial) teremos um passeio que será proporcional ao canal, o que está representado nos primeiros termos entre parênteses dos termos acima.

Quem são os termos oscilatório e residual polinomial? Eles representam o padrão, a forma a qual a variação na posição obedece.

Para determiná-los foi procedido como se segue.

Para o termo oscilatório foi determinada a amplitude do termo de 24 horas para cada um dos 14 picos estudados; a forma geral da oscilação é

$$c_i(t) = \langle c_i \rangle + A_{\omega_{24}} \cdot \cos(\omega_{24} \cdot t) + B_{\omega_{24}} \cdot \sin(\omega_{24} \cdot t) \quad (3-6)$$

aonde $\langle c_i \rangle$ é a posição média (em canais) que o *i-ésimo* pico assumiu na série completa dos n espectros obtidos.

Os termos $A_{\omega_{24}}$ e $B_{\omega_{24}}$ são os valores que determinam a amplitude da oscilação e são determinados na forma abaixo:

$$A_{\omega_{24}} = \frac{2}{T} \int_{t=0}^T \cos(\omega_{24} \cdot t) [c_i(t) - \langle c_i \rangle] dt \quad (3-7)$$

e

$$B_{\omega_{24}} = \frac{2}{T} \int_{t=0}^T \sin(\omega_{24} \cdot t) [c_i(t) - \langle c_i \rangle] dt \quad (3-8)$$

Sendo os termos $A_{\omega_{24}}$ e $B_{\omega_{24}}$ as amplitudes da oscilação do termo de 24 horas e tendo em vista a equação (3-4), vemos que na verdade os próprios $A_{\omega_{24}}$ e $B_{\omega_{24}}$ tem um valor para cada canal do espectro. Assim, na verdade, foi feito um ajuste linear para $A_{\omega_{24}}$ e outro para $B_{\omega_{24}}$ em função da posição do pico: $A_{\omega_{24}}(canal)$ e $B_{\omega_{24}}(canal)$.

Portanto, neste trabalho o ajuste foi feito em duas etapas: primeiramente ajustou-se para cada pico os seus respectivos $A_{\omega_{24}}$ e $B_{\omega_{24}}$. Em seqüência, foi feito um ajuste linear para cada um deles de modo que

$$A_{\omega_{24}}(canal) = a_c + b_c \cdot canal$$

$$B_{\omega_{24}}(canal) = a_s + b_s \cdot canal$$

Assim, a equação (3-4) é decomposta na equação (3-9), abaixo:

$$\text{Termo oscilatório} = (a_c + b_c \cdot canal) \times (\text{termo oscilatório em cosseno}) + (a_s + b_s \cdot canal) \times (\text{termo oscilatório em seno}). \quad (3-9)$$

Do mesmo modo operou-se para o resíduo polinomial: foi feito um ajuste de grau 10 para o resíduo ou seja, para o resultado da subtração

entre o valor experimental e o ajuste do termo oscilatório de 24 horas. Fez-se um ajuste para cada pico. Assim, para o j -ésimo pico teremos um ajuste polinomial $polin_j$ do tipo

$$Polin_j = a_0^j + a_1^j t + a_2^j t^2 + a_3^j t^3 + a_4^j t^4 + a_5^j t^5 + a_6^j t^6 + a_7^j t^7 + a_8^j t^8 + a_9^j t^9 + a_{10}^j t^{10}. \quad (3-10)$$

Assim, teremos 14 ajustes, cada um com 11 coeficientes. A hipótese aqui é a mesma: existe uma forma fundamental para a forma do resíduo e sua amplitude é linear com o canal do espectro que se deseja relocar. Portanto, para cada uma dos coeficientes a_i é feito um ajuste linear. A forma geral para o resíduo polinomial fica então:

$$Polin(t, canal) = (a_0 + b_0 \cdot canal) + (a_1 + b_1 \cdot canal)t + (a_2 + b_2 \cdot canal)t^2 + \dots + (a_{10} + b_{10} \cdot canal)t^{10} \quad (3-11)$$

Temos assim um resíduo polinomial que é tanto função do tempo (termo fundamental) como também do canal.

Portanto a equação final que representa a oscilação temporal de um dado pico no i -ésimo canal é

$$c_i(t) = \langle c_i \rangle + (a_c + b_c \cdot \langle c_i \rangle) \cdot \cos(\omega_{24} \cdot t) + (a_s + b_s \cdot \langle c_i \rangle) \cdot \sin(\omega_{24} \cdot t) + \sum_{j=0}^{10} (a_j + b_j \cdot \langle c_i \rangle) \cdot t^j. \quad (3-12)$$

Deve-se observar que apesar do alto grau do polinômio e dos parâmetros do termo oscilatório de 24 horas, há um total de 26 parâmetros para 1218 pontos experimentais (as posições dos 14 picos nos 87 espectros observados) e, portanto, 1192 graus de liberdade.

Determinação dos termos de relocação

A partir da equação (3-12) devemos chegar aos termos de relocação. Para obtê-los temos que efetuar algumas operações algébricas.

Manipulando-a, podemos separar os termos que são proporcionais à posição (canal) e os termos que são independentes. Separando os termos podemos rescrever a equação na forma abaixo,

$$c_{\text{exp}}(t) = c_{\text{relocado}} \cdot \left[1 + b_0 + b_1 t + \dots + b_{10} \cdot t^{10} + b_c \cdot \cos(\omega_{24} \cdot t) + b_s \cdot \text{sen}(\omega_{24} \cdot t) \right] + \\ + \left[a_0 + a_1 t + \dots + a_{10} \cdot t^{10} + a_c \cdot \cos(\omega_{24} \cdot t) + a_s \cdot \text{sen}(\omega_{24} \cdot t) \right]. \quad (3-13)$$

É muito importante notar a mudança de variável aqui feita: relocaremos todos os canais para a média de seus valores, o que significa que agora, o termo $\langle c_i \rangle$ passa a ser chamado de c_{relocado} . Isso se deve ao fato de que enquanto $\langle c_i \rangle$ se referia ao canal médio de um certo pico, agora generalizado ele se torna um canal qualquer do espectro. Do mesmo modo, c_i passa a ser $c_{\text{experimental}}$, aqui chamado simplesmente de c_{exp} .

Na equação (3-13) acima, temos um termo que é proporcional ao canal e outro que não é. Seus coeficientes são dependentes do tempo ou, também pode dizer-se, dependentes do espectro pois no caso experimental o tempo t representa simultaneamente o “ t -ésimo” espectro, visto que todos espectros têm o mesmo tempo de medida (1hora).

Chamando o termo proporcional ao c_{relocado} de $B(t)$ e o outro de $A(t)$, a equação de relocação fica sendo

$$c_{\text{reloc}}(t) = \frac{c_{\text{exp}}(t)}{B(t)} - \frac{A(t)}{B(t)} \quad (3-14)$$

E temos então a equação que nos permite determinar os termos de relocação para todos os espectros.

3.1.3 Resultados da relocação

Para determinar os parâmetros de relocação foram usadas 14 transições, num tempo total de 87 horas:

<u>Transições (keV)</u>	<u>Nuclídeo</u>
80, 302, 356	¹³³ Ba
295, 308, 316, 468, 484, 588, 604, 612	¹⁹² Ir
661	¹³⁷ Cs
1173, 1332	⁶⁰ Co

tabela 3-1: transições usadas para o processo de relocação.

O critério para a escolha dessas energias para serem utilizadas para relocação foi o de serem picos com boa estatística, em particular aqueles com desvio padrão da posição central do pico menor que 10% da amplitude máxima observada no passeio. Assim, evitam-se picos nos quais a forma e a intensidade do passeio pudessem ser mascaradas pela incerteza dos dados.

O ajuste dos picos para definir os termos de relocação foi feito utilizando uma gaussiana simples, o que não altera o resultado, visto que a relocação vai nos fornecer o quanto o pico deslocou-se em relação a média, e a adição de uma constante as posições dos picos, na forma de um erro sistemático, não influencia isso.

Em cada pico individualmente calculou-se a amplitude do termo oscilatório, que foi feito obedecendo-se as equações (3-7) e (3-8). Porém, numericamente, foram utilizadas as equações (3-15) e (3-16) (abaixo), que correspondem ao modo numérico de se operacionalizar a integração das equações (3-7) e (3-8). Temos então, para o termo em cosseno que

$$A_{\omega_{24}}^i = \frac{2}{3} \frac{1}{T} \sum_{j=1}^{87} \left[P_j \cdot \cos(\omega_{24} \cdot T_j) (c_i(T_j) - \langle c_i \rangle) \right] \quad (3-15)$$

e para o termo em seno

$$B_{\omega_{24}}^i = \frac{2}{3} \frac{1}{T} \sum_{j=1}^{87} \left[P_j \cdot \text{sen}(\omega_{24} \cdot T_j) \left(c_i(T_j) - \langle c_i \rangle \right) \right] \quad (3-16)$$

aonde T_j é o instante em que teve início a medida do j -ésimo espectro e P_j é um vetor com os valores 1, 4, 2, ..., 4, 2, 4, 1, que são os pesos a serem atribuídos a cada valor, um artifício para efetuar numericamente as integrais das equações (3-7) e (3-8) [10]. A variância desses valores é

$$\sigma_{A_{\omega_{24}}^i}^2 = \sum_j \left[2 \cdot P_j \cdot \cos(\omega_{24} \cdot T_j) \cdot \frac{88 \cdot \sigma_i^2}{87} \right] \quad (3-17)$$

e

$$\sigma_{B_{\omega_{24}}^i}^2 = \sum_j \left[2 \cdot P_j \cdot \text{sen}(\omega_{24} \cdot T_j) \cdot \frac{88 \cdot \sigma_i^2}{87} \right] \quad (3-18)$$

aonde σ_i é o desvio padrão da posição do pico i , que é o mesmo para todos os espectros.

3.1.4 Componente de 24 horas

Os gráficos da figura 3-3 abaixo nos mostram os valores de $A_{\omega_{24}}^i$ e $B_{\omega_{24}}^i$ para cada pico, no seu respectivo canal médio .

figura 3-3: amplitude dos termo de 24 horas em cosseno e em seno, em função do canal

Os valores ajustados para $A_{\omega_{24}}(canal)$ e $B_{\omega_{24}}(canal)$ são

$$A_{\omega_{24}}(canal) = 2,50(9) \cdot 10^{-2} + 8,54(82) \cdot 10^{-6} \cdot canal$$

com $\chi^2_{red} = 1,37$ (12 graus de liberdade), e

$$B_{\omega_{24}}(canal) = - 3,01(84) \cdot 10^{-3} + 2,38(8) \cdot 10^{-5} \cdot canal$$

com $\chi^2_{red} = 2,01$ (12 graus de liberdade)

Fica claro pelos gráficos acima e pelas retas sobre os pontos experimentais a linearidade de $A_{\omega_{24}}(canal)$ e $B_{\omega_{24}}(canal)$. Essa constatação é extremamente importante para a hipótese proposta ou seja, da influência da variação da temperatura na resposta do amplificador. Os gráficos a seguir nos mostram o termo oscilatório ajustado (componente de 24 horas) junto com os dados experimentais:

figura 3-4: componente de 24 horas ajustada para os picos de 80, 295, 302, 308, 316 e 356 keV (respectivamente, picos 1, 2, 3, 4, 5 e 6)

figura 3-5: componente de 24 horas ajustada para os picos de 468, 484, 588, 604, 612 e 661 keV (respectivamente picos 7, 8, 9, 10, 11 e 12)

figura 3-6: componente de 24 horas ajustada para os picos de 1173 e 1332 keV (respectivamente , picos 13 e 14)

Observa-se nos gráficos que ocorre uma simultaneidade no tempo dos máximos e mínimos tanto dos dados experimentais quanto do termo oscilatório de 24 horas ajustado, o que confirma nossa hipótese de existência de um termo oscilatório igual para a variação de todos os picos.

3.1.5 Ajuste do resíduo

Evidentemente, a componente de 24 horas não consegue responder a toda a variação da posição dos picos devido ao passeio. Ao resíduo da componente de 24 horas em relação aos dados experimentais foi ajustado um polinômio de 10^o grau para cada um dos picos envolvidos. Teríamos então um conjunto de funções como se segue:

$$\begin{aligned}
 c_1(t) &= a_0^{(1)} + a_1^{(1)} \cdot t + a_2^{(1)} \cdot t + \dots + a_{10}^{(1)} \cdot t^{10} \\
 c_2(t) &= a_0^{(2)} + a_1^{(2)} \cdot t + a_2^{(2)} \cdot t + \dots + a_{10}^{(2)} \cdot t^{10} \\
 &\bullet \\
 &\bullet \\
 &\bullet \\
 c_{14}(t) &= a_0^{(14)} + a_1^{(14)} \cdot t + a_2^{(14)} \cdot t + \dots + a_{10}^{(14)} \cdot t^{10}
 \end{aligned}$$

De acordo com nossa hipótese, cada um dos coeficientes a_i deve ter uma dependência linear com a energia. Foram feitos os gráficos de

cada um dos parâmetros e seus respectivos valores em função do canal dos picos estudados ($a_i^j \times \langle c_j \rangle$) e pode-se comprovar a linearidade dos parâmetros, conforme pode ser visto nos gráficos abaixo.

figura 3-7: valor dos parâmetros de grau 0 até grau 7, em função do canal.

figura 3-8: valor dos parâmetros de grau 8 até grau 10, em função do canal.

3.1.6 Ajuste final

Somando as duas partes ajustadas (oscilatória e polinomial) chegamos ao ajuste final. Os gráficos a seguir nos mostram os dados experimentais e o ajuste final da variação de posição de cada pico. Como pode-se observar, a variação oscilatória no tempo mais a variação representada pelo polinômio de 10° grau reproduzem suficientemente bem os passeios observados dos 14 picos. Supõem-se, portanto, que essas funções representem bem a variação da calibração ao longo das 87 horas de medida.

Tempo
(horas)

***figura 3-9:** valores experimentais e ajustados para os picos 1 até 8 (respectivamente: 80, 295, 302, 308, 316, 356, 468 e 484 keV)*

figura 3-10: valores experimentais e ajustados para os picos 9, 10, 11, 12, 13 e 14 (respectivamente: 588, 604, 612, 661, 1173 e 1332 keV)

Como pode-se observar, o ajuste do passeio de cada pico é, visualmente muito bom. Embora pequenas variações não sejam explicadas pelo modelo, estas devem ter pouco efeito no resultado final. Note-se que o ajuste foi feito com 26 parâmetros sobre um universo de 1218 dados, o que resulta em 1192 graus de liberdade.

3.1.7 A relocação dos espectros utilizando o programa RELOCA

De posse dos termos de relocação para cada espectro, a relocação propriamente dita ou seja, a construção dos novos espectros relocados, foi feita utilizando o programa RELOCA [7,8]. O programa utiliza uma forma de relocação que, com o objetivo de manter a forma do pico, introduz um sorteio quando o canal relocado é não inteiro, para distribuir as contagens entre os canais contíguos.

Nesse caso, o RELOCA ajusta uma função de distribuição de probabilidade (F.D.P.) por três pontos e distribui as contagens de modo que mantenha a forma do pico e, conseqüentemente, do espectro como um todo [7,8].

Os gráficos a seguir nos mostram as posições dos 14 picos após a relocação: posição central do pico relocado em função do tempo.

figura 3-11: posição central dos picos de 80, 295, 302 e 308 keV após relocação, em função do tempo

Erro! Vínculo não válido.

Erro! Vínculo não válido.

Erro! Vínculo não válido.

figura 3-12: posição central dos picos de 316, 356, 468, 484, 588 e 604 keV após relocação, em função do tempo

Erro! Vínculo não válido.

Erro! Vínculo não válido.

Erro! Vínculo não válido.

*figura 3-13: posição central dos picos de 316, 356, 468, 484, 588 e 604 keV após
relocação, em função do tempo*

De acordo com os resultados obtidos comprovou-se a hipótese proposta: a flutuação nos canais centrais dos picos ajustados é efetivamente linear com a posição no espectro, pois a forma do passeio é a mesma em todos os picos, e a amplitude do passeio é linear com o canal.

Todos os parâmetros ajustados, tanto os coeficientes da parte trigonométrica da função como os parâmetros do polinômio têm um comportamento linear com a energia, como se pode visualizar nos gráficos das figuras 3-3, 3-7 e 3-8.

Comparando os gráficos da figura 3-1 (sem relocar) com os gráficos da figura 3-11 à 3-13 (relocados) observa-se uma redução clara na dispersão dos pontos, o que nos mostra que os termos de relocação calculados estão corretos. Por exemplo, os gráficos da figura 3-13 mostram os picos de 1173 keV e 1332 keV do ^{60}Co , que tem uma correção a primeira vista mal comportada, tem uma distância máxima entre picos de 0,15 canais, quando antes era de 0,6 ou 0,8 canais.

Comparativamente ao método convencional de relocação de espectros [7], a relocação por análise temporal tem duas vantagens. Primeiro, ela traz consigo um modelo físico: a suavidade das variações do sistema de aquisição, possibilitando interpretar as origens destas variações: a alternância de temperatura dia/noite. A segunda é que tem-se um número maior de graus de liberdade, por ter um número muito menor de parâmetros a ajustar.

O número de parâmetros de uma relocação convencional é, no mínimo, para o caso linear, de $2.(m-1)$ parâmetros, aonde m é o número de espectros. No nosso caso, temos $m = 87$ e o número de parâmetros $N_p = 172$; como temos $87 \times 14 = 1218$ dados, teremos 1064 graus de liberdade (g.l.). Relocando por análise temporal temos apenas 26

parâmetros, bem menos que os 172 parâmetros do caso convencional sendo: 4 da parte trigonométrica e 22 da parte polinomial do ajuste. Isso significa que temos, nesse caso 1192 g.l.

Comparando o número de graus de liberdade em cada caso (1192 x 1064) percebe-se que a diferença é pequena. Isso deve-se ao fato de que usamos um número grande de picos para realizar a relocação (14 no total).

Uma diferença mais significativa apareceria nos casos de espectros com poucos picos. Se, por exemplo, fossemos relocar 100 espectros com 3 picos em cada, a vantagem seria muito maior:

Relocação convencional:

n.g.l. = 100 espectros x 3/espectro - 2(100-1) = 300 - 198 = 102 g.l.

Relocação por análise de evolução temporal

n.g.l. = 300 pontos experimentais - 26 parâmetros = 274 g.l.

O fato da relocação por análise de evolução temporal ter um menor número de parâmetros é consequência da hipótese da suavidade.

Ao considerarmos que o comportamento do passeio é função do tempo estamos acrescentando uma informação que não existia no método convencional de se determinar os termos de relocação. Lá, não há nenhuma relação entre, por exemplo, o 2º e o 3º espectro do conjunto que foi medido, e a rigor, o tratamento convencional permitiria uma variação completamente aleatória nos parâmetros de relocação.

Finalmente, surge inevitavelmente uma questão: já que todos os dados foram relocados para a média, não bastaria calcular a média das posições dos picos de interesse? Na verdade, para os picos intensos poderíamos ter feito assim. Porém, só seria possível analisar alguns picos, pois outros mais fracos seriam de difícil análise nos espectros parciais. A vantagem de relocar os espectros é que se fez a relocação de todos os canais de todos os espectros e não apenas dos picos mais intensos. Isso simplifica o trabalho e, principalmente no caso de espectros que contenham muitos picos (alguns inclusive de difícil visualização e identificação) também torna disponível o restante das informações contidas no espectro e que não se localizam somente nos picos, mas no espectro como um todo.

3.2 Metodologia de análise dos picos.

Todo o processo de ajuste dos picos do espectro final resultado da soma dos 87 espectros relocados, foi feito através do programa IDF [13]. A função utilizada para ajustar os picos tem a forma de uma gaussiana, acrescentada de um degrau a esquerda – o step – um efeito devido a coleção incompleta de cargas pelo detetor, e uma cauda exponencial a esquerda do pico [9]. A figura 3-1, abaixo, nos mostra cada uma das funções que, somadas, formam o pico. Os parâmetros a serem ajustados ficam sendo portanto: posição central do pico, resolução (largura a meia altura), área, step e a junção (posição aonde juntam-se a gaussiana e a cauda exponencial). Para o fundo, na região, o ajuste é uma parábola.

figura 3-14: funções que compõem o ajuste de um pico

Ajuste de picos: duas etapas

Dentro do conjunto dos picos obtidos experimentalmente e que passaram por procedimento de ajuste de seus parâmetros, há os que não tinham nenhuma estrutura especial no fundo, situando-se em regiões do espectro distantes de quaisquer efeitos que alterassem a forma do pico

da descrita pela figura 3-1, e que as funções básicas utilizadas pelo programa IDF foram suficientes para efetuar o ajuste.

Porém, quando o fundo apresentou uma estrutura mais complexa, foram utilizados alguns artifícios específicos para cada caso, aos quais entraremos em detalhes mais a frente.

O programa IDF permite que selecionemos dentro do conjunto dos parâmetros necessários para a caracterização do pico, alguns que sejam fixados em um valor escolhido pelo usuário, e os parâmetros restantes serem ajustados sob essa condição (de um ou mais deles estar fixado). Assim, essa foi uma das formas de ajustar picos em regiões mais complexas (v. seção 3.2.2).

3.2.1 Ajuste de picos com parâmetros livres

Vários picos puderam ser ajustados sem a necessidade de fixar qualquer dos parâmetros, por situarem-se em regiões do espectro com um fundo “bem comportado”.

De acordo com a referência [11], a relação funcional esperada entre o quadrado da resolução w^2 e a energia é uma reta.

Entretanto, por causa da instabilidade do ganho, essa dependência é parabólica. O gráfico da figura 3-14, abaixo, nos mostra os valores experimentais para w^2 , e o ajuste de uma parábola pelos pontos experimentais.

figura 3-15:
*quadrado da
resolução dos
picos ajustados
com todos os
parâmetros
livres, em
função do
canal ajustado.*

Os valores ajustados para w^2 foram:

$$w^2 = 7,07(2) + 4,34(3).10^{-2}.\text{canal} + 1,503(8).10^{-5}.\text{(canal)}^2$$

e o qui-quadrado reduzido foi de 8,3 com 11 graus de liberdade

Tal valor excessivamente alto do qui-quadrado reduzido foi causado por 3 picos: os localizados nas posições 516 (205 keV), 752 (295 keV) e 784 (308 keV), este último com resíduo de 6,9 desvios padrões fora (v. gráfico de resíduos, a seguir).

Apesar do valor alto de qui-quadrado, para sabermos se o ajuste era ou não confiável, ajustamos os referidos picos fixando suas resoluções nos valores interpolados, e suas posições não se alteraram dentro do desvio padrão. Portanto, ainda que possa haver erros sistemáticos nas larguras ajustadas de alguns picos, eles não afetam significativamente a posição central do pico.

*figura 3-16:
Diferença entre
valor ajustado e
experimental para
o quadrado da
resolução*

O gráfico da figura 3-17 abaixo nos mostra os valores de step obtidos para picos ajustados com parâmetros livres.

*figura 3-17:
step por
amplitude dos
picos ajustados
com todos os
parâmetros
livres, em
função do
canal ajustado.*

O step, sendo um fenômeno decorrente da coleção incompleta de carga, pode também ser observado pela área do degrau produzido, o que corresponde a quantidade de carga coletada incompletamente. O gráfico da figura 3-18, abaixo, nos mostra os valores das áreas dos degraus dos picos, calculado pelo produto do step pelo canal do pico, e o ajuste feito nesse conjunto de pontos. A curva ajustada foi uma reta.

*figura 3-18:
área do step
dos picos
ajustados com
parâmetros
livres e função
ajustada*

Os valores ajustados são, para uma reta:

$$\text{Área} = 5,39(13) + 9,8(11) \cdot 10^{-3} \cdot \text{canal}$$

e qui-quadrado reduzido de 1,3 com 12 graus de liberdade

Para o valor da junção, a referência [13], sugere que seu comportamento obedece a relação

$$J = (ax^2 + bx + c)^2 \quad (3-19)$$

*figura 3-19:
posição da
junção nos
picos ajustados
com todos os
parâmetros
livres, em
função do
canal ajustado.*

O ajuste para a junção, da forma colocada em [13] teve um qui-quadrado reduzido de 7,2. O gráfico 3-20, abaixo, nos mostra o resíduo do ajuste.

*figura 3-20:
Diferença entre
valor ajustado
e experimental
para junção*

Apesar do qui-quadrado ser alto, isto não chega a ser um motivo de preocupação, pois ao contrário do ajuste de w^2 em que há razões físicas para o comportamento parabólico de sua curva, para a junção o modelo é empírico. E, analogamente à análise de $w^2 \times canal$, não houve alteração significativa nas posições centrais dos picos quando as junções eram fixadas nos valores interpolados.

3.2.2 Ajuste de picos sobre estruturas complexas sob o fundo

Havendo picos com estruturas mais complexas na forma do fundo ao qual se sobrepõem, estes apresentaram dificuldade para serem ajustados da forma descrita anteriormente. Dessa forma, caso a caso, foram utilizados artifícios para contornar tais problemas.

3.2.3 Picos sobre patamares e/ou bordas Compton

Num espectro com várias transições representadas, muitos picos estão sobre a borda Compton gerada por outros picos. Através da equação (3-20), abaixo, podemos determinar a posição central da borda Compton gerada por um certo pico.

$$E_{BC} = E_{\gamma} \left(\frac{2E_{\gamma}/511}{1 + 2E_{\gamma}/511} \right) \quad (3-20)$$

aonde, E_{BC} (keV) é a energia aonde se localiza a posição central da borda Compton, e E_{γ} (keV) é a energia do gama que o gerou.

A tabela 3-1, abaixo, nos mostra para as energias tabeladas [12] dos nuclídeos medidos o valor da energia da borda Compton. Não apenas a posição da borda Compton é relevante: a intensidade do pico que a originou determina sua amplitude e, portanto, sua influência no ajuste da posição do pico em questão.

A fonte de maior atividade entre todas é o ^{192}Ir ($\approx 10 \mu\text{Ci}$), seguida pelo ^{137}Cs ($6 \mu\text{Ci}$), ^{133}Ba ($3 \mu\text{Ci}$), ^{60}Co ($1.5 \mu\text{Ci}$) e ^{57}Co , este último bastante fraco, com fração de μCi . Portanto, a influência do patamar/borda Compton na posição do pico a ajustar é resultado da

mistura de vários fatores: atividade da fonte, intensidade relativa dos picos que se quer medir e do que gerou o patamar, além das posições de ambos.

Quando falamos em métodos de subtrair os efeitos de bordas Compton há também que se diferenciar quando trata-se de um Compton proveniente do mesmo nuclídeo o qual gerou a transição que se quer conhecer a posição, e quando foi gerado por um outro nuclídeo, conforme descrito nas próximas seções.

E_{γ} (keV) [12]	E_{BC} (keV)	Nuclídeo de origem	Intensidade relativa (% do maior pico) [12]
53,16	9,16	¹³³ Ba	3,5
79,62	18,92	¹³³ Ba	4,2
81,00	19,50	¹³³ Ba	54,8
160,61	61,99	¹³³ Ba	1,0
223,23	104,09	¹³³ Ba	0,8
276,40	143,63	¹³³ Ba	11,6
302,85	164,27	¹³³ Ba	29,5
356,02	207,27	¹³³ Ba	100
383,85	230,45	¹³³ Ba	14,3
661,66	476,83	¹³⁷ Cs	100
110,10	33,16	¹⁹² Ir	0,01
136,34	47,44	¹⁹² Ir	0,2
176,98	72,42	¹⁹² Ir	0,005
182,92	76,32	¹⁹² Ir	n/d
201,31	88,71	¹⁹² Ir	0,6
205,80	91,81	¹⁹² Ir	4,0
219,24	101,25	¹⁹² Ir	n/d
280,04	146,44	¹⁹² Ir	0,03
283,27	148,94	¹⁹² Ir	0,3
295,96	158,84	¹⁹² Ir	34,6
308,46	168,71	¹⁹² Ir	36,2
316,51	175,13	¹⁹² Ir	100
329,31	185,44	¹⁹² Ir	0,02
374,48	222,60	¹⁹² Ir	0,9
416,47	258,12	¹⁹² Ir	0,8
420,53	261,59	¹⁹² Ir	0,09
468,07	302,79	¹⁹² Ir	57,8
484,58	317,29	¹⁹² Ir	3,9
485,30	317,92	¹⁹² Ir	0,003
489,04	321,22	¹⁹² Ir	0,5
588,58	410,42	¹⁹² Ir	5,5
593,37	414,77	¹⁹² Ir	0,05
599,35	420,21	¹⁹² Ir	0,005
604,41	424,83	¹⁹² Ir	9,9
612,46	432,17	¹⁹² Ir	6,4
703,98	516,52	¹⁹² Ir	0,006
765,80	574,22	¹⁹² Ir	0,002
884,54	686,30	¹⁹² Ir	0,353
1061,48	855,55	¹⁹² Ir	0,07
1089,70	882,73	¹⁹² Ir	0,001
1378,30	1162,76	¹⁹² Ir	0,002
122,1	39,43	⁵⁷ Co	12,5
136,47	47,51	⁵⁷ Co	100
1173,74	963,70	⁶⁰ Co	99,9
1332,50	1117,62	⁶⁰ Co	100

tabela 3-2: valores de energia para a posição da borda Compton, energias das transições que a geraram, nuclídeo de origem e intensidade relativa (com relação ao pico mais forte de cada nuclídeo)

a) Picos sobre patamares e/ou bordas Compton de outros núclídeos

Alguns picos estavam sobre a borda Compton de picos de outros núclídeos. Assim, por exemplo, a transição de 468 keV do ^{192}Ir localiza-se, no espectro, no canal 1201, e o centro da borda Compton da transição de 661 keV do ^{137}Cs , tem posição central no canal 1225, correspondente a uma energia de 476 keV, com uma largura de cerca de 50 canais (19 keV). A amplitude da borda Compton é da ordem de 0,5 - 1% da amplitude do pico que a gerou. Assim, o pico de 661 keV, que tem uma amplitude de cerca de 750 mil contagens, tem uma borda Compton com amplitude aproximada de 7 mil contagens. A figura 3-21, abaixo, mostra o aspecto da borda desse pico.

figura 3-21: Borda Compton da transição de 661 keV (espectro parcial)

A amplitude do pico de 468 keV é de $1,8 \cdot 10^6$ contagens e seu degrau (step) é de $5,6 \cdot 10^{-3}$ por amplitude, o que significa que a amplitude do degrau é de cerca de 9500 contagens. Portanto, o patamar Compton deve ser descontado, sob pena de um ajuste errado do step, e conseqüentemente a posição do pico: o programa interpretaria a borda Compton como parte do degrau, e a posição poderia ser alterada.

Para descontar tais efeitos utilizou-se como espectro de fundo o espectro parcial do núclídeo que gerou a borda Compton. Assim, casos em que a borda Compton é um fator de distorção do fundo, essa técnica foi utilizada para ajustar a posição do pico de interesse. O IDF tem como opção a utilização de um outro espectro para ajustar o fundo. Como os espectros parciais não têm o mesmo tempo de medida que o espectro

soma (de todos nuclídeos), eles foram multiplicados por uma constante de normalização, que é a razão entre as áreas dos picos dos espectros parcial e total.

3.2.4 Ajuste de picos usando a fixação de parâmetros

Alguns picos, devido a uma pequena área e uma estrutura de fundo mais complexa não permitiram que o programa de ajustes convergisse para um resultado se todos os parâmetros fossem deixados livres. Nestes casos, usou-se a fixação de um ou mais deles para efetuar o ajuste.

A estimativa do valor a ser utilizado para o parâmetro e de sua incerteza provém dos ajustes dos parâmetros, conforme descrito na seção 2.1. Pode-se fixar a resolução, a junção e o step. Temos então, desse ajuste, um valor $\tilde{c}$, e seu desvio padrão $\sigma_{\tilde{c}}^0$.

Esse valor de desvio padrão entretanto é subestimado, pois ao fixarmos o parâmetro estamos desprezando sua incerteza. Para sua correção, estima-se o valor da incerteza da estimativa (δ) a partir dos resultados dos ajustes dos parâmetros. Efetua-se então um novo ajuste, com o parâmetro fixado agora em $p_0 + \delta$. Obtemos desse novo ajuste um novo valor do canal ajustado ($\tilde{c}'$).

De posse desses novos valores, utilizamo-nos da equação (3-21), de propagação de incertezas:

$$\sigma_{\tilde{c}}^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \tilde{c}}{\partial p_i} \right)^2 \sigma_{p_i}^2 \quad (3-21)$$

aonde p_i é o i -ésimo
parâmetro
fixado, e $\tilde{c}$ é o canal ajustado

Para estimar o valor numérico da derivada, temos que o numerador será $(\tilde{c}' - \tilde{c})$, e o denominador será $[(p_i + \delta) - p_i] = \delta$. Então, corrigindo o desvio padrão da posição teremos que

$$\sigma_{\tilde{c}}^2 = (\sigma_{\tilde{c}}^0)^2 + \left(\frac{\tilde{c}' - \tilde{c}}{\delta} \right)^2 (\delta)^2 = (\sigma_{\tilde{c}}^0)^2 + (\tilde{c}' - \tilde{c})^2 \quad (3-22)$$

Essa nova incerteza contém tanto a parte relativa à flutuação estatística do número de contagens como a incerteza do parâmetro fixado.

3.2.5 Ajuste por gaussiana simples com posterior correção do erro sistemático

Em alguns casos os picos foram ajustados por uma gaussiana simples. Para corrigir o erro sistemático proveniente quando comparado com o ajuste da função mais geral, uma constante aditiva foi estimada.

Este erro sistemático provém do fato que se, ao invés de ajustarmos pela função representada na figura 3-1, utilizarmos apenas uma curva gaussiana, estaremos desconsiderando o degrau a esquerda do pico (step) e a curva exponencial, o que deslocaria sistematicamente todas as posições ajustadas dos picos para a esquerda. Este erro pode ser calculado e corrigido. O gráfico da figura 3-22, abaixo, nos mostra a diferença entre o ajuste por uma gaussiana simples e o feito pela função completa usando-se os picos de 276, 296, 316, 356, 468, 661, 1173 e 1332 keV:

*figura 3-22:
diferença entre
ajuste com função
completa e
gaussiana simples*

A esses dados, ajustou-se bem o valor de uma constante. O valor final obtido para essa diferença é de 0,01170(37), e o qui-quadrado reduzido para o ajuste é 0,42.

Assim em alguns picos foram testados mais de um método de ajuste, e a compatibilidade entre estes foi um critério para aceitar o valor obtido.

3.2.6 Exemplos de aplicação

• O dubleto 201/205 keV do ^{192}Ir como um exemplo de aplicação

O dubleto 201/205 keV encontra-se numa região em que o fundo é composto pela soma de um espalhamento na blindagem de chumbo em torno do detetor, e de uma borda Compton originado pelo pico de 356 keV do ^{133}Ba (v. tabela 3-1). A figura a seguir nos mostra esses efeitos, disponíveis pelos espectros parciais.

Conhecendo essas estruturas, presentes no fundo, subtraíram-se os espectros parciais do ^{133}Ba e do conjunto $^{137}\text{Cs} + ^{60}\text{Co} + ^{57}\text{Co}$ normalizados pelas áreas dos picos, respectivamente, 356 keV e 661 keV. Gerou-se assim, um novo espectro com as subtrações. Foram feitos 3 ajustes nesse espectro:

- 1) Ajuste do pico de 205 keV isoladamente, com todos os parâmetros livres.
- 2) Ajuste do dubleto 201/205 keV fixando o valor do step (método da fixação dos parâmetros). O valor foi estimado pelo gráfico 3-17, em $\text{step} = 0,0117$, e seu desvio padrão em 0,0020. A incerteza nas posições foi propagada de acordo com as equações (3-21) e (3-22).
- 3) Ajuste do pico de 205 keV utilizando como função de ajuste apenas uma gaussiana, e posteriormente feita a correção do erro sistemático.

figura 3-23: dubleto 201/205 keV e efeitos secundários na estrutura do fundo.

Além desses ajustes, também foi feito o ajuste do dubleto 201/205 keV no espectro parcial do ^{192}Ir , para se medir a distância entre os picos.

O programa não convergiu para o ajuste de dubleto com todos os parâmetros livres no espectro de subtração (espectro soma menos espectros parciais do ^{133}Ba e do ^{137}Cs). Os resultados são mostrados na tabela 3-2, aonde a posição ajustada é dada em canais.

Método utilizado	Posição ajustada (canais)
Pico de 205 keV isolado, com parâmetros livres	516,345(6)
Ajuste do dubleto 201/205 keV fixando o step e propagando incertezas de acordo com a equação (3-22)	504,624(13) [201 keV] 516,340(4) [205 keV]
Ajuste do pico de 205 keV por uma função gaussiana e corrigido	516,345(3)
Ajuste do dubleto 201/205 keV no espectro do ^{192}Ir sozinho	504,595(15) [201 keV] 516,315(4) [205 keV]

tabela 3-2: valores ajustados para as posições dos picos 201 e 205 keV

Observa-se que os valores obtidos para a posição do pico de 205 keV (3 primeiras linhas da tabela) são todos compatíveis entre si.

No caso da segunda e quarta linha da tabela (ajuste do dubleto) deve ser comparada a distância entre os picos, que é compatível. Os valores não são os mesmos pois trata-se de espectros com relação *energia x canal* distintas: com todos núclídeos e o outro apenas com o ^{192}Ir .

Nota-se então que a distância entre os dois picos (em canais) para os dois métodos está compatível. Para o espectro total (vide 2ª linha da tabela) a distância foi de 11,716(14) canais, e de 11,720(16) para o espectro com o espectro do ^{192}Ir sozinho (vide 4ª linha da tabela).

O valor adotado para as posições dos picos é então a média dos valores obtidos (1ª, 2ª e 3ª linhas) e o desvio padrão do resultado adotado será a média dos respectivos desvios padrões. Portanto:

$$\tilde{c}(201) = 504,624(13)$$

$$\tilde{c}(205) = 516,343(4)$$

Aqui usou-se a média dos desvios padrões e não a propagação de incertezas, pelo fato de que os dados não são independentes, e sim três maneiras diferentes de se obter a posição estimada do pico.

• O dubleto 79/80 keV (^{133}Ba)

O ajuste mais complexo desse espectro foi o dubleto 79/80 keV, transições originárias do ^{133}Ba , e que está completamente circundada por transições de fluorescência de Raio X, causadas pela blindagem de chumbo utilizada, bem como de emissões de Raio X dos próprios núclídeos usados no experimento. A figura 3-24, abaixo, nos mostra para o intervalo entre os canais 130 - 220, o aspecto geral do espectro total nessa região.

figura 3-24: espectro da medida total, canais 130 à 220.

Os picos do dubleto estão nas posições 187/190. Todos os outros picos são emissões de Raio X. Isso fica bastante claro ao observarmos o espectro de fundo (figura 3-25) e o que contém apenas ^{192}Ir (figura 3-26).

figura 3-25: espectro de fundo, canais 130 à 220, sem normalização.

figura 3-26: espectro do ^{192}Ir , canais 130 à 220, sem normalização

Para efetuar o ajuste, foram fixados como parâmetros a resolução, o step e a junção, através de interpolação. Os dados interpolados são:

$$\text{resolução}(\text{canal} = 190,2) = 2,8102(26)$$

$$\text{step}(\text{canal} = 190,2) = 0,0312(14)$$

$$\text{junção}(\text{canal} = 190,2) = 3,593(88)$$

Como observa-se, a região é bastante complexa. Todavia, o dubleto está numa estreita região ausente de Raio X (canais 184 à 195 - entre 78 e 85 keV). O ajuste foi feito então restringido a esta faixa de canais, pois apesar de não estarem na região do dubleto (as emissões de Raio X), estavam bastante próximas. Assim, a restrição de região usada no ajuste tornou-se necessária para excluir ao máximo influências dos picos de Raio X.

Optou-se por fazer os ajustes de quatro modos (todos restritos a região dos canais 184-195): utilizando o espectro da medida total sem descontar o fundo; na medida total utilizando o espectro do ^{192}Ir como espectro de fundo, através do programa IDF, para descontar os picos e Raio X da vizinhança. Em cada um deles ajustou-se, ou com a função completa, ou com ajuste somente por uma gaussiana, corrigindo-se a posteriori o erro sistemático. A figura 3-27, abaixo, nos mostra o espectro total, e o espectro do ^{192}Ir utilizado como espectro de fundo.

figura 3-27: espectro total e espectro de fundo utilizados para ajustar o dubleto 79/80 keV

Nota-se que o espectro de fundo não acompanha o espectro total em todos os picos. Isso deve-se ao fato de que a razão entre as áreas dos picos de Raio X nos dois espectros não são a mesma para todos, havendo a necessidade de optar-se por um certo pico (de Raio X) para efetivar a normalização do espectro de fundo, através da razão entre as áreas dos picos de Raio X dos dois espectros.

Observa-se também que há uma resolução diferente nos dois espectros para os mesmos picos. Esse fato pode ser observado claramente quando observamos o pico 79/80 keV no espectro do ^{133}Ba sozinho, aonde distingue-se mais claramente um pico do outro (figura 3-28).

figura 3-28: espectro do ^{133}Ba , canais 130 à 220, sem normalização.

Os resultados para os ajustes feitos são os seguintes:

Espectro	Método utilizado	Posição ajustada
Espectro total sem descontar o fundo	Função completa	186,804(17) 190,2620(14)
	Função gaussiana e posterior correção	186,812(15) 190,254(1)
Espectro total considerand o o fundo	Função completa	186,577(36) 190,2580(24)
	Função gaussiana e posterior correção	186,612(32) 190,251(2)

tabela 3-3: posições ajustadas (em canais) para o dubleto 201/205 keV.

Podemos observar que os resultados do ajuste para a posição do pico de 79 keV (canal ~ 186.6) são completamente incompatíveis entre si. Realmente, o pico de 79 keV está muito próximo de transições de Raio X, além de ser um pico com uma área pequena, o que o torna particularmente sensível ao fundo.

Já os valores de posição para o pico de 80 keV estão compatíveis entre si. Porém, em nosso ponto de vista, sua incerteza está subestimada, pois seu valor ajustado ($\sigma_{\tilde{c}}$) é da ordem de milésimo de canal, e a flutuação dos dados ajustados ($\tilde{c}$) é da ordem de centésimo de canal.

O Bureau Internacional de Pesos e Medidas [14] recomenda que, quando deseja-se considerar incertezas que não são provenientes de

cálculos, porém para as quais existem fortes razões que as justificassem, devem ser combinadas da seguinte forma:

$$\sigma_f^2 = \sigma_{estatístico}^2 + \sigma_{estimado}^2 \quad (3-23)$$

Em nosso caso, o $\sigma_{estimado}$ é o desvio padrão do conjunto dos dados, e seu valor numérico é de 0,0048 de canal. O valor final, adotado para a posição do pico de 80 keV, já com o desvio padrão conforme a equação (3-23), é de 190.256(5). Todavia, mesmo utilizando esse método, este valor adotado para a incerteza do ajuste pode estar errado.

3.2.7 Picos sobre patamares e/ou bordas Compton do mesmo nuclídeo

Neste caso, não é possível utilizar um espectro parcial como espectro de fundo. O artifício que usamos foi usar uma série de dados experimentais do Compton do 661 keV (que está numa região livre de outros efeitos, conforme a figura 3-21) e construir empiricamente a estrutura do fundo.

Os únicos picos que apresentaram esse problema foram os do duplete 416/420 keV (^{192}Ir), que (v. tabela 3-1) estava na região de Compton de três transições significativas do mesmo nuclídeo: 588 keV, 604 keV e 612 keV, com intensidades relativas de 5,5%, 9,9% e 6,4%.

A figura 3-29, abaixo, nos mostra a parte inferior do duplete 416/420 keV e o aspecto geral da estrutura sobre seu fundo. O duplete está na posição 1067/1077, em canais.

figura 3-29: dubleto 416/420 keV e estrutura Compton no fundo

Sabendo as intensidades relativas de cada transição, e a distância entre as bordas Compton das três transições envolvidas, foi então construída a estrutura sob o dubleto. Para tal, de posse da seqüência dos dados experimentais do Compton do 661 keV, repetiu-se essa estrutura nas três posições (calculadas) para as bordas Compton do 588, 604 e 612 keV, ponderando a amplitude em cada uma pela intensidade relativa das transições e somou-se o conjunto.

Assim, foi colocada uma estrutura na posição 1050, correspondente ao Compton da transição do 588 keV (peso = 1). Deslocado em 40 canais a direita na posição 1090, com peso 9,9/5,5 (proporção entre as intensidades relativas), a mesma estrutura, correspondente ao Compton do 604 keV. Por último, o mesmo procedimento, com posição 1108 e pelo 6,4/5,5. Todos esses valores para os pesos foram obtidos a partir dos dados da tabela 3-1. O resultado final é a soma de 3 Comptons com amplitudes diferentes.

O resultado obtido é mostrada na figura 3-30, abaixo.

Estrutura do fundo sob dubleto 416/420 keV

figura 3-30: estrutura de soma de bordas Compton sob o dubleto 416/420 keV

Observando a figura 3-32 e comparando-a com a figura 3-21, podemos perceber que houve, na região do dubleto (canais 1060-1080), uma suavização da inclinação do espectro na região decorrente da soma das bordas Compton.

O ajuste foi feito de dois modos: utilizando a estrutura acima como fundo, e também um ajuste utilizando apenas um fundo parabólico. As posições ajustadas dos picos são mostradas na tabela 3-2:

	Com espectro de fundo	Fundo parabólico
Parâmetros livres	1066,829(14) 1077,496(83)	1066,829(13) 1077,467(84)
Parâmetros fixados	1066,840(10) 1077,487(79)	1066,842(10) 1077,457(82)

tabela 3-4-: resultados para dubleto 416/420 keV

O que observa-se é que apesar de estarem na borda Compton, o programa IDF consegue ajustar uma parábola para descrever o fundo, o que foi suficiente para descontar o efeito da borda Compton, visto que os valores ajustados para as posições, usando ou não a estrutura de soma dos Comptons como fundo, apresentaram resultados compatíveis entre si.

Como valores adotados para as posições dos picos, tomamos a média entre os dados e a média dos desvios padrões. Então temos:

$$\begin{aligned}\tilde{\epsilon}(416) &= 1066,835(12) && \text{para o pico de 416 keV} \\ \tilde{\epsilon}(420) &= 1077,477(82) && \text{para o pico de 420 keV}\end{aligned}$$

3.3 Calibração de energia

Como última etapa e objetivo final, foi feita a calibração e ajuste em energia do espectro através do Método do Ajuste Único.

Como dados de entrada para as energias, para efetuar o procedimento de calibração, foram utilizados todos os disponíveis da referência [15], que nos fornece uma revisão dos dados da referência [5], que por sua vez é a mais recente compilação de energias para processos de calibração. A única exceção é a transição de 53 keV do ^{133}Ba , pois essa apresentou uma estrutura no fundo a qual não foi possível determinar sua origem. Optamos por excluí-lo do processo de calibração.

Dados de entrada

Para efetuar o ajuste foi utilizado o Método do Ajuste Único (MAU), descrito no capítulo 1, terceira parte. Conforme descrito anteriormente nesta mesma parte do texto, o MAU permite-nos utilizar não apenas as transições que foram utilizadas para efetuar a calibração, mas também outras que não estão presentes no experimento. A vantagem de utilizá-las é que se temos disponível a matriz de covariância completa entre as transições presentes e as não presentes no experimento, podemos prover melhora na incerteza de ambas.

Foram utilizados 330 dados de entrada, presentes na referência [15]. Estes dividem-se em 4 categorias:

- Medidas absolutas do comprimento de onda das transições, em cristal curvo;

- Medidas relativas do comprimento de onda das transições, comparados ao comprimento de onda da transição de 411 keV do ^{198}Au .

- Diferenças de energias medidas em detectores de Ge;

- Energias medidas em detectores de Ge.

O valor em energia (keV) das transições as quais foram medidos os comprimentos de onda são obtidos pela equação

$$E = \frac{hc}{e\lambda} \quad (3-24)$$

Assim, a incerteza da constante fundamental $f = \frac{hc}{e}$ é um fator a mais no cálculo da incerteza da energia que se quer determinar.

Utilizando a metodologia da referência [22], a referência [15] nos fornece a matriz de covariância das transições presentes na referência [5], a covariância destas com a constante fundamental f , e os novos valores de energia também.

A forma pela qual a matriz foi determinada é descrita no Apêndice 3.

Capítulo 4: Resultados experimentais e discussão

4.1 Valores novos das transições

Foi obtido o espectro composto pelas transições dos núclídeos ^{57}Co , ^{60}Co , ^{133}Ba , ^{137}Cs e ^{192}Ir . O gráfico 4-1 nos mostra o espectro soma, que inclui as transições de todos os núclídeos juntos.

gráfico 4-1: espectro soma, com todos núclídeos

As transições medidas, suas posições no espectro (em canais) e as respectivas incertezas experimentais podem ser vistas na tabela 4-1, abaixo.

Energia da transição (keV)	Posição no espectro (canais)	Nuclídeo
80	190.2563(49)	¹³³ Ba
122	297.541(53)	⁵⁷ Co
160	398.292(63)	¹³³ Ba
205	516.345(6)	¹⁹² Ir
223	561.878(48)	¹³³ Ba
276	700.830(6)	¹³³ Ba
295	751.930(1)	¹⁹² Ir
302	769.948(9)	¹³³ Ba
308	784.588(1)	¹⁹² Ir
316	805.6240(4)	¹⁹² Ir
356	908.859(1)	¹³³ Ba
383	981.587(5)	¹³³ Ba
468	1201.673(1)	¹⁹² Ir
484	1244.8067(30)	¹⁹² Ir
588	1516.609(3)	¹⁹² Ir
604	1557.977(1)	¹⁹² Ir
612	1579.014(2)	¹⁹² Ir
661	1707.587(1)	¹³⁷ Cs
884	2290.149(24)	¹⁹² Ir
1173	3044.818(3)	⁶⁰ Co
1332	3461.294(3)	⁶⁰ Co

tabela 4-1: posição no espectro, em canais, das transições usadas no processo de calibração

Para efetuar o ajuste foram utilizados como dados de entrada 330 transições presentes na referência [15] que, ao contrário da referência [5], disponibiliza a matriz de covariância completa de todas as transições. A lista completa de todas as transições usadas está no Apêndice 4.

Dessa forma então foram obtidos novos valores para todas as 330 transições (medidas e não medidas). Pode-se ver na tabela 4-2 a mudança no valor e nas incertezas das transições medidas no experimento em relação a referência [5], e a sua reanálise, a referência [15].

	Ref. [5] (sem covariâncias)		Ref. [15] (com covariâncias)		Após experimento	
Nuclídeo	E(keV)	Incerteza	E(keV)	Incerteza	E(keV)	Incerteza
¹³³ Ba	80.999	0.002	80.9967	0.0009	80.9962	0.0008
⁵⁷ Co	122.06065	0.00012	122.06063	0.00013	122.06063	0.00013
¹³³ Ba	160.6120	0.0016	160.6110	0.0015	160.6104	0.0013
¹⁹² Ir	205.79430	0.00009	205.79430	0.00008	205.79430	0.00008
¹³³ Ba	223.2368	0.0013	223.2369	0.0013	223.2371	0.0012
¹³³ Ba	276.3989	0.0012	276.3989	0.0012	276.3994	0.0011
¹⁹² Ir	295.95650	0.00015	295.95650	0.00014	295.9565	0.00014
¹³³ Ba	302.8508	0.0005	302.8511	0.0005	302.8512	0.0005
¹⁹² Ir	308.45507	0.00017	308.45509	0.00015	308.45513	0.00015
¹⁹² Ir	316.50618	0.00017	316.50610	0.00015	316.50602	0.00015
¹³³ Ba	356.0129	0.0007	356.01316	0.00064	356.01344	0.00037
¹³³ Ba	383.8485	0.0012	383.8476	0.0010	383.8472	0.0008
¹⁹² Ir	468.06885	0.00026	468.06880	0.00026	468.06877	0.00025
¹⁹² Ir	484.5751	0.0004	484.5752	0.0004	484.5751	0.0004
¹⁹² Ir	588.5810	0.0007	588.5818	0.0005	588.5819	0.0005
¹⁹² Ir	604.41105	0.00025	604.41108	0.00026	604.41116	0.00025
¹⁹² Ir	612.46215	0.00026	612.46208	0.00026	612.46203	0.00026
¹³⁷ Cs	661.657	0.003	661.657	0.001	661.65773	0.00055
¹⁹² Ir	884.5365	0.0007	884.53735	0.00057	884.53745	0.00055
⁶⁰ Co	1173.228	0.003	1173.2255	0.0021	1173.2227	0.0016
⁶⁰ Co	1332.492	0.004	1332.4940	0.0023	1332.4962	0.0021

tabela 4-2: valores de energia e suas incertezas das referências [5] (sem covariâncias), referência [15] (com covariâncias) e após o experimento.

A mudança na variância no conjunto das transições presente nos dados de entrada pode ser visualizada no gráfico 4-1, que mostra-nos a razão entre o valor da variância antes e depois do experimento.

Pode observar-se uma melhora no conjunto como um todo. As 3 transições que obtiveram maior redução em suas variâncias foram: 356 keV (¹³³Ba), 661 keV (¹³⁷Cs) e 1173 keV (⁶⁰Co). Como esperado, nenhuma transição sofreu piora no valor da incerteza, e um número significativo de transições tiveram redução em suas variâncias para menos de 90% do valor original.

gráfico 4-2: razão entre nova e antiga variância, obtida após o experimento, em relação aos dados reanalisados (com covariâncias incluídas).

Junto com os novos valores das transições obteve-se também no procedimento de ajuste pelo MAU os parâmetros de calibração do detetor. Foi ajustado um polinômio de grau 3. O valor dos parâmetros ajustados ($\text{keV}/\text{canal}^{\text{grau}}$) foram:

grau 0 (constante):	0,0081784(25)
grau 1 (linear):	0,3827338(55)
grau 2 (parabólico):	-0,0000132(35)
grau 3 (cúbico):	-0,00000670(63)

O cálculo do qui-quadrado para o ajuste como um todo (energias das transições e parâmetros de calibração ajustados) foi de 16,4, para 17 graus de liberdade, com uma probabilidade do qui-quadrado ser excedido igual a 50%.

4.2 Discussão dos resultados

Pode-se observar que, dentro do conjunto das transições que obtiveram melhora em sua incerteza temos dois tipos distintos.

O primeiro conjunto é o das transições que melhoraram o valor da incerteza predominantemente pela consideração das covariâncias entre as energias ou seja, o trabalho realizado na referência [15]. O outro conjunto é o das transições que obtiveram melhora nas incertezas em relação aos dados da referência [15], com as covariâncias já consideradas ou seja, são transições cujo acréscimo de informação proveniente do experimento foi significativo. Podemos destacar entre essas as transições de 661 keV (^{137}Cs), 1173 keV (^{60}Co), 160 keV, 356 keV e 383 keV (^{133}Ba). Pequenas contribuições também são observadas nas transições de 80 keV, 223 keV e 276 keV (^{133}Ba).

A melhoria das incertezas dessas transições causou alterações nas outras transições presentes nos dados de entrada mas que todavia não fizeram parte do experimento. Isso é possível pois no procedimento de ajuste foram consideradas todas as covariâncias. Assim, transições não medidas que sejam covariantes com as transições medidas que melhoraram o valor de sua incerteza também são beneficiadas.

Por exemplo, a transição de 661 keV foi uma transição cujo valor da incerteza reduziu-se para 55% do valor anterior ao experimento. Assim, aquelas transições cujas energias foram medidas a partir de diferença em relação a esta transição (661 keV) tiveram suas incertezas reduzidas.

A tabela 4-3 nos mostra as transições que não foram medidas no experimento, mas que obtiveram redução na variância para 90% ou menos do valor original.

Pode-se observar um grande número de transições (de vários núclídeos) na região próxima da transição de 661 keV (^{137}Cs) que reduziram suas incertezas. Também na região do espectro próxima das transições 1173 keV e 1332 keV (^{60}Co) observa-se redução nas incertezas das transições do ^{169}Tb , ^{182}Ta , ^{82}Br e ^{110}Ag .

Ao considerarmos transições que tiveram uma redução de no mínimo 10% em suas variâncias podemos dizer que estas tiveram, cada uma, melhora mínima de 11% na quantidade de informação obtida.

Podemos justificar o raciocínio acima considerando o exemplo em que desejamos reduzir o desvio padrão de um certo dado experimental a sua metade, Para tal, deve-se efetuar um novo experimento com um tempo de medida 4 vezes maior que o do primeiro experimento. Nesse caso, podemos dizer que houve um aumento de 4 vezes na quantidade de informação. Analogamente, em nossos dados experimentais, a grandeza que teve sua variância reduzida para 0,9 do valor original teve um acréscimo de informação em um fator $(0,9)^{-1}$ ou seja, 11% .

A transição de 661 keV do ^{137}Cs , por exemplo, teve um aumento de informação de um fator

$$\left(\frac{\sigma_{\text{velho}}}{\sigma_{\text{novo}}}\right)^2 = \left(\frac{0.001}{0.00055}\right)^2 = 3.3$$

ou seja, um aumento de 230%.

Nuclídeo	Antes [15]		Depois	
	Energia (keV)	Incerteza (keV)	Energia (keV)	Incerteza(keV)
⁰⁴⁴ Ti	78,3236	0,0010	78,3232	0,0009
⁰⁸² Br	1317,4688	0,0020	1317,4698	0,0019
⁰⁹⁴ Nb	702,6446	0,0011	702,6452	0,0009
¹⁰⁸ Ag	614,2813	0,0013	614,2818	0,0011
¹¹⁰ Ag	620,3565	0,0013	620,3571	0,0012
¹¹⁰ Ag	657,7599	0,0010	657,7604	0,0009
¹¹⁰ Ag	677,6210	0,0011	677,6215	0,0010
¹¹⁰ Ag	1384,2943	0,0017	1384,2953	0,0015
^{110A} g	1475,7793	0,0019	1475,7799	0,0018
¹¹⁰ Ag	1505,0298	0,0019	1505,0303	0,0018
¹¹⁰ Ag	1562,2938	0,0019	1562,2942	0,0018
¹²⁴ Sb	645,8504	0,0013	645,8511	0,0010
¹²⁴ Sb	722,7832	0,0014	722,7838	0,0013
¹²⁴ Sb	1436,5561	0,0034	1436,5573	0,0032
¹²⁴ Sb	1690,9682	0,0027	1690,9692	0,0025
¹²⁵ Sb	600,6000	0,0013	600,6003	0,0013
¹²⁵ Sb	635,9511	0,0012	635,9518	0,0010
¹²⁵ Sb	671,4421	0,0017	671,4427	0,0015
¹³² Cs	667,7159	0,0012	667,7165	0,0010
¹³² Cs	1985,6314	0,0046	1985,6340	0,0044
¹³³ Ba	53,1622	0,0006	53,1624	0,0005
¹³³ Ba	79,6144	0,0012	79,6142	0,0011
¹⁴⁴ Ce	696,5097	0,0012	696,5103	0,0009
¹⁴⁴ Ce	2185,6511	0,0030	2185,6522	0,0028
¹⁵² Eu	344,2778	0,0008	344,2779	0,0007
¹⁶⁰ Tb	962,3076	0,0020	962,3063	0,0019
¹⁶⁰ Tb	1177,9514	0,0017	1177,9502	0,0016
¹⁸² Ta	1121,2882	0,0018	1121,2872	0,0017
¹⁸² Ta	1157,3000	0,0018	1157,2990	0,0017
¹⁸² Ta	1189,0374	0,0018	1189,0364	0,0017
¹⁸² Ta	1221,3934	0,0018	1221,3924	0,0017
¹⁸² Ta	1231,0025	0,0018	1231,0015	0,0017
¹⁸² Ta	1257,4052	0,0019	1257,4043	0,0018
¹⁸² Ta	1273,7171	0,0018	1273,7161	0,0017
¹⁸² Ta	1289,1427	0,0018	1289,1417	0,0017
¹⁸² Ta	1373,8223	0,0018	1373,8213	0,0017
¹⁸² Ta	1387,3879	0,0018	1387,3869	0,0017
¹⁸⁵ Os	646,1268	0,0013	646,1273	0,0012

tabela 4-3: transições ausentes do experimento e que reduziram suas variância para 90% (ou menos) do valor original

Observando-se o conjunto de todas as transições envolvidas no procedimento de ajuste feito neste trabalho, percebe-se que não apenas as transições presentes no experimento obtiveram melhora na sua incerteza: também grandezas que não estavam presentes foram alteradas devido ao fato de serem covariantes com as transições presentes no experimento. Alguns casos, inclusive, são de transições de núclídeos que constam na lista dos utilizados no experimento, mas que não foram utilizadas no processo de calibração devido a questões experimentais. Exemplos são as transições de 53 keV e de 79 keV do ^{133}Ba .

Na tabela 4-3 vê-se todas as transições que obtiveram melhora em sua variância em um fator 0,9 ou menos, devido ao experimento, em relação aos dados de entrada (já covariantes, referência [15]). Não apenas medidas de energia por diferenças energéticas entre transições são causadoras dessa melhora, mas vínculos do tipo *cascata cross-over* também são dados que foram incluídos na matriz de covariância. Assim, as transições 79/80 keV estão em *cascata cross-over* e somadas são a transição de 160 keV. A melhora, ainda que pequena, na incerteza da transição de 80 keV colaborou no sentido de reduzir a incerteza do 79 keV.

Capítulo 5: Conclusão

A consideração da totalidade da matriz de covariância foi elemento chave neste trabalho. Sem sua consideração, somente as transições medidas (21) teriam sido alteradas quando, como consequência de seu uso, todo o universo das 330 energias de referência foi influenciado. Uma parcela significativa de informação teria sido perdida se as covariâncias não fossem levadas em conta.

O fato de que tanto transições medidas no experimento, como também transições não medidas, mas covariantes com as medidas, terem sofrido alteração, é de fácil compreensão se entendermos o conceito de covariância.

A covariância é uma fonte de erro em comum ou seja, duas ou mais grandezas têm seus valores influenciados por uma ou mais fontes de erro em comum.

Assim, considerando a mesma metodologia experimental do trabalho de Helmer e van der Leun [5] e considerando as covariâncias, uma nova medida do parâmetro de rede do Si alteraria as medidas absolutas de comprimento de onda. Consequentemente, as medidas de energia através de medidas relativas de comprimento de onda se alterariam, e também as medidas de diferença de energias. As medidas de energias em detectores de germânio também seriam influenciadas, pois as curvas de calibração seriam alteradas pelos novos valores de referência.

Assim, todo o universo de transições de referência seria alterado. Raciocínio análogo pode ser desenvolvido para novas medidas de um conjunto menor de transições, em detectores de germânio.

Além de informações concernentes ao planejamento do experimento, a matriz de covariância também traz consigo informação do esquema de níveis dos núclídeos, incluídos sob a forma de vínculos do tipo *cascata-crossover*.

Como exemplo, temos a transição de 79 keV (vide diagrama de decaimento abaixo do ^{133}Ba), que participa de duas dessas relações *cascata-crossover*:

$$79,61 \text{ keV} + 81,00 \text{ keV} = 160,61 \text{ keV} \quad (^{133}\text{Ba})$$

$$276,40 \text{ keV} + 79,61 \text{ keV} = 356,01 \text{ keV} \quad (^{133}\text{Ba})$$

figura 5-1: diagrama de decaimento do ^{133}Ba

Todas essas informações são consideradas e aplicadas quando do uso do Método do Ajuste Único.

Além disso, sendo fundamental a precisão dos ajustes das posições dos picos, o desenvolvimento das metodologias expostas nesse trabalho trouxe confiabilidade a esses ajustes na medida em que foi possível rejeitar ou não resultados de regiões controversas (respectivamente, dubleto 79/80 keV e dubleto 201/205 keV). A compatibilidade entre os resultados obtidos por diversas medidas diferentes foi assim um teste para saber se as hipóteses sobre a estrutura do fundo estava correta. Em outras palavras, a posição de um certo pico não pode ser influenciada pela metodologia de ajuste. Caso isso ocorra, as hipóteses sobre o fundo estão insatisfatórias e insuficientes.

No tocante aos testes estatísticos, o ajuste foi considerado satisfatório, com uma probabilidade de χ^2 ser excedido de 50%. Para tal, não foi necessário incluir a hipótese da *não linearidade diferencial* do ADC. É possível que isto seja decorrente da aplicação da relocação aos espectros. Durante o processo de relocação, a variação da largura do canal teria sido minimizada, já que os espectros foram todos relocados para um valor médio de suas posições.

Este experimento poderia ter obtido uma maior precisão, principalmente na região de baixas energias, se tivesse sido usado um colimador, de modo diminuir os espalhamento na blindagem. Para minimizar as emissões de Raio X provenientes do chumbo da blindagem, esta poderia ser feita com materiais cujo número atômico diminui conforme nos aproximamos do detetor, absorvendo assim parte destas emissões.

As informações provenientes dos espectros parciais não foram consideradas na análise dos dados. Todavia, sua inclusão é possível e, para tanto, é necessário apenas uma mudança na matriz de planejamento e na matriz de parâmetros.

APÊNDICE 1:

Dedução da matriz de covariância $\mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{Y}}}$ (equação 1-11)

A matriz de covariância de $\mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{Y}}}$ (equação 1-11) dos dados interpolados no procedimento de auto-calibração é determinada a partir de sua relação com $\mathbf{Y}$, explicitada na equação 1-10. Vamos a seguir demonstrar esse resultado.

Expandindo $\mathbf{Y}$ e $\mathbf{X}$ em torno de seus valores verdadeiros, $\mathbf{Y}_0$ e $\mathbf{X}_0$ teremos, termo a termo,

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= (\mathbf{X}_0 + \delta\mathbf{X}) \\ \mathbf{X}^t &= (\mathbf{X}_0 + \delta\mathbf{X})^t = \mathbf{X}_0^t + \delta\mathbf{X}^t \\ \mathbf{Y} &= (\mathbf{Y}_0 + \delta\mathbf{Y}) \\ \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} &= (\mathbf{X}_0^t \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{X}_0)^{-1}\end{aligned}\tag{A1-1}$$

A equação 1-10 fica então

$$\tilde{\mathbf{Y}} = (\mathbf{X}_0 + \delta\mathbf{X}) \left[(\mathbf{X}_0 + \delta\mathbf{X})^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{X}_0 + \delta\mathbf{X}) \right]^{-1} (\mathbf{X}_0 + \delta\mathbf{X})^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{Y}_0 + \delta\mathbf{Y}). \tag{A1-2}$$

O termo entre colchetes pode ser desenvolvido como segue, desprezando termos de 2ª ordem em $\delta\mathbf{X}$ e $\delta\mathbf{Y}$:

$$\begin{aligned}\left[(\mathbf{X}_0 + \delta\mathbf{X})^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{X}_0 + \delta\mathbf{X}) \right]^{-1} &= \left[\mathbf{X}_0^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_0^t \mathbf{V}^{-1} \delta\mathbf{X} + \delta\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_0 + \delta\mathbf{X}^t \cdot \mathbf{V}^{-1} \delta\mathbf{X} \right]^{-1} \\ &\cong \left[\mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}}^{-1} + (\mathbf{X}_0^t \mathbf{V}^{-1} \delta\mathbf{X} + \delta\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_0) \right]^{-1} \\ &= \left[\mathbf{I} + \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} (\mathbf{X}_0^t \mathbf{V}^{-1} \delta\mathbf{X} + \delta\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_0) \right]^{-1} \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}}.\end{aligned}$$

Inserindo este na equação (A-2), teremos

$$\tilde{\mathbf{Y}} \cong (\mathbf{X}_0 + \delta\mathbf{X}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} (\delta\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_0^t \mathbf{V}^{-1} \delta\mathbf{X}) \right]^{-1} \cdot \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} (\mathbf{X}_0 + \delta\mathbf{X})^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{Y}_0 + \delta\mathbf{Y}) \quad (\text{A1-3})$$

aonde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade, e $\mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}}$ é dada pela equação 1-6.

Tendo esta equação para $\tilde{\mathbf{Y}}$, podemos expandir a matriz entre colchetes e usando a propriedade de que $(\mathbf{I} + \Delta\mathbf{M})^{-1} \cong \mathbf{I} - \Delta\mathbf{M}$ temos que a equação (A-3) fica:

$$\tilde{\mathbf{Y}} \cong (\mathbf{X}_0 + \delta\mathbf{X}) \left[\mathbf{I} - \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \delta\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_0 - \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t \mathbf{V}^{-1} \delta\mathbf{X} \right] \cdot \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} (\mathbf{X}_0 + \delta\mathbf{X})^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{Y}_0 + \delta\mathbf{Y}).$$

Com alguma manipulação adicional e preservando apenas termos de primeira ordem em $\delta\mathbf{X}$ e $\delta\mathbf{Y}$ temos

$$\tilde{\mathbf{Y}} \cong (\mathbf{X}_0 + \delta\mathbf{X} - \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \delta\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \delta\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \delta\mathbf{X}) \cdot \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} (\mathbf{X}_0 + \delta\mathbf{X})^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{Y}_0 + \delta\mathbf{Y})$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Y}} &\cong \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} (\mathbf{X}_0 + \delta\mathbf{X})^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{Y}_0 + \delta\mathbf{Y}) + \delta\mathbf{X} \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y}_0 \\ &- \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \delta\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y}_0 - \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t \mathbf{V}^{-1} \delta\mathbf{X} \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y}_0 \end{aligned}$$

Desenvolvendo os produtos dos dois primeiros termos e identificando que $\mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y}_0 = \mathbf{A}_0$ temos

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Y}} &\cong \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y}_0 + \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t \mathbf{V}^{-1} \delta\mathbf{Y} + \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \delta\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y}_0 + \\ &+ \delta\mathbf{X} \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y}_0 - \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \delta\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_0 \mathbf{A}_0 - \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t \mathbf{V}^{-1} \delta\mathbf{X} \mathbf{A}_0 \end{aligned}$$

Escrevendo $\delta\mathbf{X} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_0$ e $\delta\mathbf{Y} = \mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0$ temos

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Y}} &\cong \mathbf{X}_0 \mathbf{A}_0 + \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0) + \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y}_0 + \\ &+ (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y}_0 - \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_0 \mathbf{A}_0 - \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \mathbf{A}_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Y}} - \mathbf{Y}_0 &\cong \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0) + \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y}_0 + \\ &+ (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \mathbf{A}_0 - \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y}_0 - \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \mathbf{A}_0 \end{aligned}$$

e finalmente,

$$\tilde{\mathbf{Y}} - \mathbf{Y}_0 \cong \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0) + (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \mathbf{A}_0 - \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \mathbf{A}_0. \quad (\text{A1-4})$$

A matriz de covariância $\mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{Y}}}$ pode então ser calculada por

$$\mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{Y}}} = \left\langle (\tilde{\mathbf{Y}} - \mathbf{Y}_0)(\tilde{\mathbf{Y}} - \mathbf{Y}_0)^t \right\rangle. \quad (\text{A1-5})$$

Usando as equações (A1-4) e (A1-5) e assumindo que $y(x)$ é aproximadamente linear em x , podemos desenvolver a equação para $\mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{Y}}}$:

$$\mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{Y}}} = \left\langle \left[\mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0) - \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) + (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \mathbf{A}_0 \right] \cdot \left[(\tilde{\mathbf{Y}} - \mathbf{Y}_0)^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t - \mathbf{A}_0^t (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t + \mathbf{A}_0^t (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^t \right] \right\rangle$$

Desenvolvendo produtos, teremos que

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{Y}}} = & \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_0 \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t - \\ & - \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t \mathbf{V}^{-1} \left\langle (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0) \mathbf{A}_0^t (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^t \right\rangle \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t \\ & + \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t \mathbf{V}^{-1} \left\langle (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0) \mathbf{A}_0^t (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^t \right\rangle \\ & - \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t \mathbf{V}^{-1} \left\langle (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \mathbf{A}_0 (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0)^t \right\rangle \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t \\ & + \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t \mathbf{V}^{-1} \left\langle (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_0^t (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^t \right\rangle \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t \\ & - \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t \mathbf{V}^{-1} \left\langle (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_0^t (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^t \right\rangle \\ & + \left\langle (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \mathbf{A}_0 (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0)^t \right\rangle \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t \\ & - \left\langle (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_0^t (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^t \right\rangle \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t \\ & + \left\langle (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_0^t (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^t \right\rangle. \end{aligned}$$

Somando o 1º com o 5º termo, o 2º com o 4º termo, e identificando que $\left\langle (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_0^t (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^t \right\rangle = b^2 \mathbf{V}_x$, continuamos o desenvolvimento da equação de forma que

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{Y}}} = & \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{V}_0 + \mathbf{b}^2 \mathbf{V}_x) \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t - \\
& - \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t \mathbf{V}^{-1} \left\langle (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0) \mathbf{A}_0^t (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^t + (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \mathbf{A}_0 (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0)^t \right\rangle \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t \\
& + \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t \mathbf{V}^{-1} \left\langle (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0) \mathbf{A}_0^t (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^t \right\rangle \\
& - \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t \mathbf{V}^{-1} \left\langle (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_0^t (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^t \right\rangle \\
& + \left\langle (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \mathbf{A}_0 (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0)^t \right\rangle \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t \\
& - b^2 \mathbf{V}_x \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t \\
& + \mathbf{b}^2 \mathbf{V}_x
\end{aligned}$$

Considerando que $\left\langle (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \mathbf{A}_0 (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0)^t \right\rangle = \left\langle (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0) \mathbf{A}_0^t (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^t \right\rangle = 0$, pois o erro em $\mathbf{x}$ é estatisticamente independente do erro em $\mathbf{y}$, temos que

$$\mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{Y}}} = \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t + b^2 \mathbf{V}_x - b^2 \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t \mathbf{V}_x - b^2 \mathbf{V}_x \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_0 \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}_0^t \quad (\text{A1-6})$$

Esta é a expressão exata para a variância de $\tilde{\mathbf{Y}}$. Entretanto, como $\mathbf{X}_0$ não é conhecida, essa equação pode ser aproximada substituindo $\mathbf{X}$ por $\mathbf{X}_0$:

$$\mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{Y}}} = \mathbf{X} \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}^t + b^2 \mathbf{V}_x - b^2 \mathbf{X} \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}^t \mathbf{V}_x - b^2 \mathbf{V}_x \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{X}^t$$

que é a equação (1-11).

APÊNDICE 2:

Cálculo do χ^2 de um conjunto de dados com matriz de covariância singular

O cálculo do qui-quadrado de um conjunto de dados cuja relação é regida por uma matriz de covariância singular é possível numericamente, através de um pequeno incremento na diagonal principal, retirando assim a singularidade da matriz. Estudaremos aqui o caso simples da média de dois dados, provando que neste caso chega-se ao mesmo resultado.

Para este caso, a matriz que contém os dados é simplesmente

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

e a matriz de planejamento $\mathbf{X}$ é dada por

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A grandeza qui-quadrado é definida pela equação (1-8)

$$\chi^2 = (\mathbf{Y} - \mathbf{X} \cdot \mathbf{A})^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}) \quad (1-8)$$

aonde a matriz

$$\mathbf{Y} - \mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$$

representa a diferença entre o valor ajustado e experimental para cada dado.

Supondo a matriz de covariância desses dados como sendo a matriz identidade $\mathbf{I}_{2 \times 2}$, temos que o qui-quadrado assumirá o valor

$$\chi^2 = \delta_1 + \delta_2 \quad (\text{A2-1})$$

Para considerarmos o caso de uma matriz de covariância distinta desta e que seja singular, consideremos o caso da matriz $\mathbf{V}$, que assume o valor de

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sendo desta forma, percebe-se que sendo a correlação entre o primeiro e o segundo dado é $\rho_{12} = 1$, ou seja, estes dados representam na verdade o mesmo dado experimental. Assim, a matriz de dados pode ser escrita como

$$\mathbf{Y}' = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Para calcular numericamente o valor do χ^2 deste ajuste, deve-se acrescentar um pequeno incremento ε na diagonal principal, afim de retirar a singularidade da matriz e viabilizar o cálculo. Assim, $\mathbf{V}$ é substituída por

$$\mathbf{V}' = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon & 1 & 0 \\ 1 & 1 + \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \varepsilon \end{pmatrix}$$

cuja inversa é

$$(\mathbf{V}')^{-1} = \frac{1}{(1 + \varepsilon)^3 - (1 + \varepsilon)} \begin{pmatrix} (1 + \varepsilon)^2 & -(1 + \varepsilon) & 0 \\ -(1 + \varepsilon) & (1 + \varepsilon)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1 + \varepsilon)^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

O cálculo do qui-quadrado é então determinado conforme escrito abaixo, de acordo com a equação (1-8)

$$\chi^2 = \frac{1}{(1+\varepsilon)^3 - (1+\varepsilon)} \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_1 & \delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+\varepsilon)^2 & -(1+\varepsilon) & 0 \\ -(1+\varepsilon) & (1+\varepsilon)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1+\varepsilon)^2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$$

cujo resultado é

$$\chi^2 = \frac{2\delta_1[(1+\varepsilon)^2 - (1+\varepsilon)] + \delta_2[(1+\varepsilon)^2 - 1]}{(1+\varepsilon)^3 - (1+\varepsilon)}.$$

Retendo apenas termos de 1^a ordem, teremos que o qui-quadrado será então

$$\chi^2 = \frac{2\delta_1\varepsilon + 2\delta_2\varepsilon}{2\varepsilon} = \delta_1 + \delta_2 \quad (\text{A2-2})$$

que é resultado idêntico ao caso de dois dados independentes estatisticamente, dado pela equação (A2-1).

APÊNDICE 3

Método de determinação de covariâncias entre energias de transições gama

No procedimento de ajuste pelo MMQ foram utilizados como dados de entrada as energias de 330 transições fornecidas pela referência [15], junto da matriz de covariância, calculada a partir dos dados fornecidos pela referência [5]. Neste apêndice discutiremos o modo pelo qual determina-se covariâncias entre transições através de um caso mais simples.

Em [5] temos quatro categorias de dados:

- 1) Medidas absolutas do comprimento de onda da transição através de cristal curvo de Si, aonde o fator de conversão é o parâmetro de rede do Si;
- 2) Medidas relativas de comprimento de onda da transição de interesse em relação ao comprimento de onda da transição de 411 keV do ^{198}Au , em cristal curvo;
- 3) Medidas de diferenças de energia entre transições usando detetores de Germânio;
- 4) Medidas das energias das transições de interesse em detetores de Germânio.

Vamos exemplificar o cálculo da matriz de covariância com o caso das transições do ^{161}Tb , ^{172}Hf e ^{241}Am .

As transições desses núclídeos são:

^{161}Tb : 25 keV (E_1^{Tb}), 49 keV (E_2^{Tb}), 74 keV (E_3^{Tb})

^{172}Hf : 24 keV (E^{Hf})

^{241}Am : 26 keV (E_1^{Am}), 59 keV (E_2^{Am})

A referência [5] nos fornece os seguintes dados:

- $f = \frac{hc}{e}$
- λ (comprimento de onda da transição de 411keV do ^{198}Au)
- r_i (fator multiplicativo das energias do ^{161}Tb em relação a transição de 411 keV do ^{198}Au ; ver equação A3-1)
- K1: diferença de energia entre E_1^{Tb} e E_1^{Am}
- K2: diferença de energia entre E_1^{Tb} e E^{Hf}
- K3: diferença de energia entre E_1^{Hf} e E_1^{Am}
- K4: diferença de energia entre E_2^{Tb} e E_2^{Am}
- K5: diferença de energia entre E_3^{Tb} e E_2^{Am}

As energias de transição do ^{161}Tb tornam-se acessíveis pela equação:

$$E_i = r_i \frac{f}{\lambda} \quad \{A3-1\}$$

O esquema abaixo torna mais claro quais são os dados experimentais e como as energias das transições se relacionam com eles

Esquema de energias: K1, K2...etc. representam as diferenças entre as energias indicadas e $r_1, r_2 \dots$ as razões entre as energias.

Método dos Mínimos Quadrados

Para obter os valores desejados aplicamos o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) na sua forma matricial. Escreve-se

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{A} + \boldsymbol{\varepsilon},$$

aonde o vetor $\mathbf{Y}$ contém os dados experimentais [5], $\mathbf{A}$ é o vetor com as energias a serem ajustadas, $\mathbf{X}$ a matriz de planejamento e $\boldsymbol{\varepsilon}$ representa o vetor erro (desconhecido).

Escrevendo a equação acima de forma explícita temos

$$\begin{pmatrix} E^{Au} \\ r_1 \bullet E^{Au} \\ r_2 \bullet E^{Au} \\ r_3 \bullet E^{Au} \\ K1 \\ K2 \\ K3 \\ K4 \\ K5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} E^{Au} \\ E_1^{Tb} \\ E_2^{Tb} \\ E_3^{Tb} \\ E^{Hf} \\ E_1^{Am} \\ E_2^{Am} \end{pmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

De acordo com o MMQ, o valor ajustado para as energias será a matriz $\tilde{\mathbf{A}}$, calculada da seguinte forma:

$$\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y}$$

e a matriz de covariância dos parâmetros ajustados é

$$\mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1}.$$

$\mathbf{V}$ é a matriz de covariância dos dados experimentais representados por $\mathbf{Y}$ e pode ser calculada a partir de uma propagação de incertezas dos dados fornecidos na referência [5].

Resultados

A tabela abaixo nos mostra um comparativo dos resultados para as energias através do MMQ bem como os mesmos resultados da referência [5].

Transição	Energia(keV) - MMQ	Energia(keV) - ref. [4]
E^{Au}	411.80205(17)	411.80205(17)
E_1^{Tb}	25.651348(31)	25.65135(3)
E_2^{Tb}	48.915319(53)	48.91533(5)
E_3^{Tb}	74.566695(67)	74.56669(6)
E^{Hf}	23.93294(20)	23.9330(2)
E_1^{Am}	26.34465(20)	26.3446(2)
E_2^{Am}	59.54087(10)	59.5409(1)

tabela 1: valores de energia das transições antes de depois da aplicação do MMQ

A matriz de covariância obtida é:

$$V_{\bar{A}} = \begin{vmatrix} 3,02 \cdot 10^{-8} & 1,88 \cdot 10^{-9} & 3,70 \cdot 10^{-9} & 5,18 \cdot 10^{-9} & 1,88 \cdot 10^{-9} & 1,88 \cdot 10^{-9} & 4,00 \cdot 10^{-9} \\ 1,88 \cdot 10^{-9} & 1,20 \cdot 10^{-9} & 2,31 \cdot 10^{-10} & 3,23 \cdot 10^{-10} & 1,20 \cdot 10^{-9} & 1,20 \cdot 10^{-9} & 2,49 \cdot 10^{-10} \\ 3,70 \cdot 10^{-9} & 2,31 \cdot 10^{-10} & 4,04 \cdot 10^{-9} & 1,22 \cdot 10^{-9} & 2,31 \cdot 10^{-10} & 2,31 \cdot 10^{-10} & 3,48 \cdot 10^{-9} \\ 5,18 \cdot 10^{-9} & 3,23 \cdot 10^{-10} & 1,22 \cdot 10^{-9} & 9,16 \cdot 10^{-9} & 3,23 \cdot 10^{-10} & 3,23 \cdot 10^{-10} & 2,81 \cdot 10^{-9} \\ 1,88 \cdot 10^{-9} & 1,20 \cdot 10^{-9} & 2,31 \cdot 10^{-10} & 3,23 \cdot 10^{-10} & 3,94 \cdot 10^{-8} & 1,10 \cdot 10^{-7} & 2,49 \cdot 10^{-10} \\ 1,88 \cdot 10^{-9} & 1,20 \cdot 10^{-9} & 2,31 \cdot 10^{-10} & 3,23 \cdot 10^{-10} & 1,10 \cdot 10^{-7} & 3,94 \cdot 10^{-8} & 2,49 \cdot 10^{-10} \\ 4,00 \cdot 10^{-9} & 2,49 \cdot 10^{-10} & 3,48 \cdot 10^{-9} & 2,81 \cdot 10^{-9} & 2,49 \cdot 10^{-10} & 2,49 \cdot 10^{-10} & 1,13 \cdot 10^{-9} \end{vmatrix}$$

O valor do qui-quadrado deste ajuste é de 1,14, o que para 2 graus de liberdade corresponde a um nível de significância entre 50% e 75%, portanto bastante satisfatório.

Podemos observar comparando as colunas 2 e 3 da tabela 1 que os resultados obtidos são basicamente os mesmos da referência [5], com uma pequena diferença na 2ª transição do ^{161}Tb (49 keV), aonde há uma pequena discrepância da ordem de 10^{-2} eV. A variância da 3ª transição do ^{161}Tb (75 keV) foi recalculada e é um pouco maior que o indicado na referência [5]

APÊNDICE 4

Valores de transições gama

O conjunto completo com os valores das energias fornecidas pela referência [15] (já após terem sido recalculados a partir da referência [5], e com as covariâncias incluídas) e os valores modificados após o acréscimo de informação obtido com o experimento é listado abaixo.

		Dados de entrada [15]		Resultados após experimento	
Nuclídeo	Transição	Energia (keV)	Incerteza (keV)	Energia (keV)	Incerteza (keV)
⁷ Be	477	477,60337	0,00197	477,60336	0,00197
²² Na	1274	1274,53590	0,00481	1274,53555	0,00480
²⁴ Na	1368	1368,62620	0,00276	1368,62774	0,00262
²⁴ Na	2754	2754,00980	0,01072	2754,00993	0,01068
⁴⁴ Ti	67	67,86761	0,00158	67,86713	0,00153
⁴⁴ Ti	78	78,32357	0,00096	78,32319	0,00090
⁴⁶ Sc	889	889,27326	0,00136	889,27323	0,00134
⁴⁶ Sc	1120	1120,53670	0,00286	1120,53656	0,00285
⁵¹ Cr	320	320,08237	0,00043	320,08237	0,00043
⁵⁴ Mn	834	834,83970	0,00202	834,83985	0,00200
⁵⁶ Co	733	733,50943	0,00237	733,50980	0,00234
⁵⁶ Co	787	787,73977	0,00248	787,74009	0,00246
⁵⁶ Co	846	846,76421	0,00205	846,76418	0,00203
⁵⁶ Co	896	896,49573	0,00533	896,49513	0,00532
⁵⁶ Co	977	977,36542	0,00333	977,36598	0,00329
⁵⁶ Co	996	996,93840	0,00397	996,93889	0,00394
⁵⁶ Co	1037	1037,83530	0,00221	1037,83595	0,00215
⁵⁶ Co	1140	1140,35100	0,00567	1140,35055	0,00566
⁵⁶ Co	1159	1159,92390	0,00570	1159,92340	0,00568
⁵⁶ Co	1175	1175,08610	0,00241	1175,08522	0,00234
⁵⁶ Co	1238	1238,27360	0,00211	1238,27273	0,00203
⁵⁶ Co	1335	1335,38120	0,02916	1335,38226	0,02916
⁵⁶ Co	1360	1360,19820	0,00309	1360,19926	0,00300
⁵⁶ Co	1640	1640,44910	0,00443	1640,44807	0,00437
⁵⁶ Co	1771	1771,33020	0,00322	1771,33126	0,00311
⁵⁶ Co	1810	1810,72720	0,00393	1810,72699	0,00388
⁵⁶ Co	1963	1963,71470	0,00505	1963,71563	0,00496
⁵⁶ Co	2015	2015,18140	0,00424	2015,18262	0,00413
⁵⁶ Co	2034	2034,75400	0,00438	2034,75515	0,00426
⁵⁶ Co	2113	2113,10240	0,00520	2113,10317	0,00510
⁵⁶ Co	2212	2212,89820	0,00335	2212,89795	0,00326
⁵⁶ Co	2598	2598,43980	0,00384	2598,43993	0,00373
⁵⁶ Co	3009	3009,56210	0,00415	3009,56224	0,00400
⁵⁶ Co	3201	3201,95160	0,00866	3201,95238	0,00858
⁵⁶ Co	3253	3253,40750	0,00502	3253,40785	0,00487
⁵⁶ Co	3272	3272,97970	0,00517	3272,97992	0,00501

		Dados de entrada [15]		Resultados após experimento	
Nuclídeo	Transição	Energia (keV)	Incerteza (keV)	Energia (keV)	Incerteza (keV)
⁵⁶ Co	3451	3451,11970	0,00475	3451,11852	0,00457
⁵⁷ Co	122	122,06063	0,00013	122,06063	0,00013
⁵⁷ Co	136	136,47353	0,00029	136,47353	0,00029
⁵⁸ Co	810	810,75988	0,00219	810,76011	0,00217
⁵⁸ Co	863	863,94815	0,00169	863,94807	0,00167
⁵⁸ Co	1674	1674,72220	0,00659	1674,72318	0,00651
⁵⁹ Fe	142	142,65166	0,00233	142,65166	0,00233
⁵⁹ Fe	192	192,34821	0,00290	192,34802	0,00290
⁵⁹ Fe	1099	1099,24450	0,00288	1099,24435	0,00288
⁵⁹ Fe	1291	1291,58890	0,00376	1291,58855	0,00375
⁶⁰ Co	1173	1173,22550	0,00212	1173,22268	0,00158
⁶⁰ Co	1332	1332,49400	0,00232	1332,49615	0,00206
⁶⁵ Zn	1115	1115,54070	0,00199	1115,54069	0,00199
⁶⁶ Ga	686	686,08247	0,00555	686,08305	0,00553
⁶⁶ Ga	833	833,53345	0,00181	833,53346	0,00180
⁶⁶ Ga	853	853,03298	0,00591	853,03297	0,00591
⁶⁶ Ga	1039	1039,22160	0,00285	1039,22164	0,00284
⁶⁶ Ga	1148	1147,89820	0,00999	1147,89802	0,00999
⁶⁶ Ga	1190	1190,28470	0,00722	1190,28455	0,00721
⁶⁶ Ga	1333	1333,11580	0,00422	1333,11632	0,00417
⁶⁶ Ga	1419	1418,75650	0,00514	1418,75686	0,00511
⁶⁶ Ga	1459	1458,66200	0,01106	1458,66297	0,01102
⁶⁶ Ga	1508	1508,15600	0,00677	1508,15498	0,00671
⁶⁶ Ga	1741	1740,90610	0,01652	1740,90658	0,01650
⁶⁶ Ga	1899	1898,83490	0,00684	1898,83582	0,00677
⁶⁶ Ga	1918	1918,33410	0,00487	1918,33500	0,00477
⁶⁶ Ga	2066	2065,78210	0,00688	2065,78247	0,00684
⁶⁶ Ga	2173	2173,32940	0,01494	2173,33017	0,01490
⁶⁶ Ga	2189	2189,62980	0,00742	2189,63050	0,00735
⁶⁶ Ga	2213	2213,19430	0,00958	2213,19498	0,00954
⁶⁶ Ga	2393	2393,12870	0,00729	2393,12790	0,00721
⁶⁶ Ga	2423	2422,52650	0,00738	2422,52664	0,00734
⁶⁶ Ga	2752	2751,84170	0,00510	2751,84263	0,00496
⁶⁶ Ga	2780	2780,09840	0,01657	2780,09899	0,01655
⁶⁶ Ga	2933	2933,36110	0,00901	2933,36124	0,00894
⁶⁶ Ga	2977	2977,08610	0,04320	2977,08624	0,04319
⁶⁶ Ga	2993	2993,21110	0,03227	2993,21124	0,03225
⁶⁶ Ga	3047	3046,69790	0,00973	3046,69864	0,00967
⁶⁶ Ga	3229	3228,81460	0,00812	3228,81538	0,00803
⁶⁶ Ga	3381	3380,85140	0,00662	3380,85047	0,00650
⁶⁶ Ga	3422	3422,04070	0,00846	3422,03952	0,00836
⁶⁶ Ga	3432	3432,31010	0,00734	3432,30937	0,00724
⁶⁶ Ga	3766	3766,85510	0,00936	3766,85521	0,00926
⁶⁶ Ga	4085	4085,86830	0,01033	4085,86913	0,01024
⁶⁶ Ga	4461	4461,20480	0,00920	4461,20372	0,00908
⁶⁶ Ga	4806	4806,01340	0,01002	4806,01361	0,00990
⁷⁵ Se	66	66,05197	0,00079	66,05197	0,00079
⁷⁵ Se	96	96,73395	0,00086	96,73395	0,00086

		Dados de entrada [15]		Resultados após experimento	
Nuclídeo	Transição	Energia (keV)	Incerteza (keV)	Energia (keV)	Incerteza (keV)
⁷⁵ Se	121	121,11544	0,00110	121,11545	0,00110
⁷⁵ Se	136	136,00008	0,00057	136,00008	0,00057
⁷⁵ Se	198	198,60581	0,00117	198,60582	0,00117
⁷⁵ Se	264	264,65759	0,00087	264,65760	0,00087
⁷⁵ Se	279	279,54220	0,00105	279,54220	0,00105
⁷⁵ Se	303	303,92363	0,00102	303,92364	0,00102
⁷⁵ Se	400	400,65716	0,00076	400,65717	0,00076
⁸² Br	221	221,47934	0,00193	221,47940	0,00193
⁸² Br	554	554,34780	0,00159	554,34799	0,00156
⁸² Br	619	619,10262	0,00142	619,10301	0,00140
⁸² Br	698	698,37184	0,00144	698,37242	0,00138
⁸² Br	776	776,51400	0,00196	776,51433	0,00194
⁸² Br	827	827,82439	0,00199	827,82470	0,00196
⁸² Br	1044	1043,99400	0,00230	1043,99484	0,00222
⁸² Br	1317	1317,46880	0,00197	1317,46981	0,00185
⁸² Br	1474	1474,87880	0,00256	1474,87970	0,00246
⁸² Br	1650	1650,33250	0,00314	1650,33366	0,00301
⁸⁴ Rb	881	881,60663	0,00143	881,60660	0,00141
⁸⁴ Rb	1016	1016,16050	0,00347	1016,16113	0,00343
⁸⁴ Rb	1897	1897,75570	0,00373	1897,75636	0,00366
⁸⁵ Sr	514	514,00480	0,00220	514,00480	0,00220
⁸⁸ Y	898	898,03654	0,00247	898,03645	0,00247
⁸⁸ Y	1836	1836,04920	0,00495	1836,04990	0,00489
⁹⁴ Nb	702	702,64455	0,00113	702,64517	0,00095
⁹⁴ Nb	871	871,11611	0,00140	871,11606	0,00138
⁹⁵ Tc	204	204,11734	0,00148	204,11745	0,00148
⁹⁵ Tc	253	253,07164	0,00194	253,07172	0,00194
⁹⁵ Tc	582	582,07875	0,00165	582,07890	0,00164
⁹⁵ Tc	765	765,80400	0,00537	765,80433	0,00536
⁹⁵ Tc	786	786,19476	0,00196	786,19502	0,00195
⁹⁵ Tc	820	820,62510	0,00256	820,62535	0,00254
⁹⁵ Tc	835	835,14874	0,00191	835,14897	0,00189
⁹⁵ Tc	1039	1039,26420	0,00212	1039,26450	0,00210
⁹⁵ Zr	724	724,19564	0,00247	724,19605	0,00245
⁹⁹ Mo	40	40,58324	0,00017	40,58324	0,00017
⁹⁹ Mo	140	140,51053	0,00104	140,51053	0,00104
¹⁰⁶ Ru	511	511,85340	0,00230	511,85340	0,00230
¹⁰⁸ Ag	433	433,93828	0,00306	433,93871	0,00304
¹⁰⁸ Ag	614	614,28128	0,00126	614,28177	0,00114
¹⁰⁸ Ag	722	722,90777	0,01005	722,90820	0,01004
¹⁰⁹ Cd	88	88,03359	0,00103	88,03359	0,00103
¹¹⁰ Ag	446	446,81398	0,00194	446,81436	0,00192
¹¹⁰ Ag	620	620,35651	0,00129	620,35707	0,00123
¹¹⁰ Ag	657	657,75993	0,00099	657,76043	0,00086
¹¹⁰ Ag	677	677,62103	0,00107	677,62153	0,00099
¹¹⁰ Ag	687	687,01060	0,00132	687,01104	0,00126
¹¹⁰ Ag	706	706,67795	0,00112	706,67844	0,00107
¹¹⁰ Ag	744	744,27508	0,00137	744,27547	0,00132

		Dados de entrada [15]		Resultados após experimento	
Nuclídeo	Transição	Energia (keV)	Incerteza (keV)	Energia (keV)	Incerteza (keV)
¹¹⁰ Ag	763	763,94243	0,00135	763,94285	0,00131
¹¹⁰ Ag	818	818,02460	0,00141	818,02467	0,00139
¹¹⁰ Ag	884	884,67857	0,00134	884,67852	0,00132
¹¹⁰ Ag	937	937,48442	0,00216	937,48503	0,00210
¹¹⁰ Ag	1384	1384,29430	0,00169	1384,29533	0,00151
¹¹⁰ Ag	1475	1475,77930	0,00193	1475,77989	0,00180
¹¹⁰ Ag	1505	1505,02980	0,00185	1505,03027	0,00176
¹¹⁰ Ag	1562	1562,29380	0,00187	1562,29424	0,00177
¹¹³ Sn	391	391,69816	0,00310	391,69817	0,00310
¹²⁴ Sb	602	602,72692	0,00191	602,72707	0,00190
¹²⁴ Sb	645	645,85040	0,00126	645,85109	0,00103
¹²⁴ Sb	713	713,77735	0,00242	713,77790	0,00235
¹²⁴ Sb	722	722,78321	0,00143	722,78380	0,00129
¹²⁴ Sb	790	790,71011	0,00325	790,71057	0,00321
¹²⁴ Sb	968	968,19100	0,00237	968,19140	0,00234
¹²⁴ Sb	1045	1045,12360	0,00241	1045,12390	0,00240
¹²⁴ Sb	1325	1325,50640	0,00246	1325,50713	0,00235
¹²⁴ Sb	1368	1368,16320	0,00490	1368,16433	0,00484
¹²⁴ Sb	1436	1436,55610	0,00344	1436,55727	0,00323
¹²⁴ Sb	1690	1690,96820	0,00272	1690,96918	0,00253
¹²⁴ Sb	1720	1720,41020	0,06306	1720,41118	0,06305
¹²⁴ Sb	2090	2090,93790	0,00529	2090,93963	0,00511
¹²⁵ Sb	176	176,31318	0,00083	176,31317	0,00083
¹²⁵ Sb	204	204,13764	0,00958	204,13784	0,00957
¹²⁵ Sb	208	208,07664	0,00327	208,07684	0,00325
¹²⁵ Sb	427	427,87527	0,00319	427,87568	0,00317
¹²⁵ Sb	443	443,55628	0,00857	443,55671	0,00856
¹²⁵ Sb	463	463,36627	0,00321	463,36671	0,00319
¹²⁵ Sb	600	600,59997	0,00134	600,60035	0,00127
¹²⁵ Sb	606	606,71719	0,00206	606,71764	0,00200
¹²⁵ Sb	635	635,95114	0,00119	635,95176	0,00098
¹²⁵ Sb	671	671,44209	0,00169	671,44273	0,00154
¹²⁵ Sn	1806	1806,68720	0,01027	1806,68790	0,01024
¹²⁵ Sn	1889	1889,88120	0,01027	1889,88190	0,01024
¹²⁵ Sn	2002	2002,15710	0,00432	2002,15827	0,00419
¹²⁵ Sn	2201	2201,00810	0,01142	2201,00919	0,01135
¹²⁵ Sn	2275	2275,75510	0,00951	2275,75619	0,00942
¹³² Cs	667	667,71585	0,00119	667,71653	0,00096
¹³² Cs	1317	1317,92270	0,00431	1317,92459	0,00420
¹³² Cs	1985	1985,63140	0,00464	1985,63401	0,00438
¹³³ Ba	53	53,16215	0,00063	53,16235	0,00052
¹³³ Ba	79	79,61439	0,00124	79,61422	0,00108
¹³³ Ba	80	80,99671	0,00091	80,99623	0,00080
¹³³ Ba	160	160,61105	0,00150	160,61040	0,00130
¹³³ Ba	223	223,23688	0,00128	223,23714	0,00115
¹³³ Ba	276	276,39894	0,00123	276,39939	0,00107
¹³³ Ba	302	302,85113	0,00054	302,85122	0,00049
¹³³ Ba	356	356,01316	0,00064	356,01344	0,00037

		Dados de entrada [15]		Resultados após experimento	
Nuclídeo	Transição	Energia (keV)	Incerteza (keV)	Energia (keV)	Incerteza (keV)
¹³³ Ba	383	383,84764	0,00099	383,84725	0,00084
¹³⁷ Cs	661	661,65699	0,00098	661,65773	0,00055
¹³⁹ Ce	165	165,85555	0,00083	165,85554	0,00083
¹⁴¹ Ce	145	145,44366	0,00120	145,44366	0,00120
¹⁴⁴ Ce	696	696,50970	0,00116	696,51035	0,00093
¹⁴⁴ Ce	1489	1489,14900	0,00254	1489,14952	0,00248
¹⁴⁴ Ce	2185	2185,65110	0,00305	2185,65219	0,00278
¹⁵² Eu	121	121,78167	0,00029	121,78166	0,00029
¹⁵² Eu	244	244,69759	0,00076	244,69760	0,00076
¹⁵² Eu	251	251,63359	0,01003	251,63360	0,01003
¹⁵² Eu	295	295,93942	0,00179	295,93942	0,00179
¹⁵² Eu	344	344,27781	0,00079	344,27794	0,00074
¹⁵² Eu	367	367,78917	0,00165	367,78916	0,00165
¹⁵² Eu	411	411,11639	0,00100	411,11635	0,00100
¹⁵² Eu	488	488,67880	0,00199	488,67881	0,00199
¹⁵² Eu	503	503,47255	0,00407	503,47285	0,00403
¹⁵² Eu	566	566,43992	0,00506	566,44019	0,00506
¹⁵² Eu	586	586,26472	0,00209	586,26474	0,00209
¹⁵² Eu	656	656,48899	0,00412	656,48973	0,00404
¹⁵² Eu	671	671,15499	0,01703	671,15573	0,01701
¹⁵² Eu	678	678,62076	0,00363	678,62113	0,00358
¹⁵² Eu	688	688,67367	0,00351	688,67417	0,00346
¹⁵² Eu	778	778,90450	0,00193	778,90445	0,00193
¹⁵² Eu	810	810,45475	0,00352	810,45525	0,00347
¹⁵² Eu	841	841,57251	0,00553	841,57310	0,00551
¹⁵² Eu	867	867,38332	0,00470	867,38262	0,00468
¹⁵² Eu	919	919,33343	0,00438	919,33430	0,00433
¹⁵² Eu	996	996,25842	0,00370	996,25903	0,00366
¹⁵² Eu	1085	1085,83450	0,01022	1085,83168	0,01012
¹⁵² Eu	1089	1089,73520	0,00372	1089,73552	0,00366
¹⁵² Eu	1112	1112,07940	0,00474	1112,07873	0,00472
¹⁵² Eu	1212	1212,94600	0,01119	1212,94407	0,01114
¹⁵² Eu	1299	1299,14400	0,00737	1299,14615	0,00730
¹⁵² Eu	1408	1408,00910	0,00396	1408,00995	0,00390
¹⁵² Eu	1457	1457,64150	0,01121	1457,63959	0,01116
¹⁵³ Gd	69	69,67299	0,00013	69,67298	0,00013
¹⁵³ Gd	75	75,42213	0,00023	75,42213	0,00023
¹⁵³ Gd	83	83,36717	0,00021	83,36717	0,00021
¹⁵³ Gd	89	89,48595	0,00022	89,48595	0,00022
¹⁵³ Gd	97	97,43099	0,00021	97,43099	0,00021
¹⁵³ Gd	103	103,18013	0,00018	103,18013	0,00018
¹⁵³ Gd	172	172,85306	0,00020	172,85306	0,00020
¹⁵⁴ Eu	123	123,07033	0,00091	123,07033	0,00091
¹⁵⁴ Eu	247	247,92857	0,00076	247,92856	0,00076
¹⁵⁴ Eu	444	444,49356	0,00180	444,49414	0,00172
¹⁵⁴ Eu	591	591,76034	0,00248	591,76070	0,00244
¹⁵⁴ Eu	625	625,25831	0,00223	625,25849	0,00220
¹⁵⁴ Eu	692	692,42137	0,00168	692,42194	0,00160

		Dados de entrada [15]		Resultados após experimento	
Nuclídeo	Transição	Energia (keV)	Incerteza (keV)	Energia (keV)	Incerteza (keV)
¹⁵⁴ Eu	723	723,30352	0,00187	723,30403	0,00183
¹⁵⁴ Eu	756	756,80146	0,00236	756,80179	0,00234
¹⁵⁴ Eu	845	845,41660	0,00714	845,41667	0,00714
¹⁵⁴ Eu	873	873,18581	0,00220	873,18598	0,00216
¹⁵⁴ Eu	892	892,77547	0,00569	892,77510	0,00568
¹⁵⁴ Eu	904	904,06792	0,00241	904,06804	0,00240
¹⁵⁴ Eu	1128	1128,54990	0,00695	1128,54909	0,00694
¹⁵⁴ Eu	1140	1140,70250	0,00569	1140,70213	0,00568
¹⁵⁴ Eu	1246	1246,12160	0,00460	1246,12159	0,00457
¹⁵⁴ Eu	1274	1274,43050	0,00372	1274,43189	0,00363
¹⁵⁴ Eu	1494	1494,04810	0,00460	1494,04802	0,00457
¹⁵⁴ Eu	1596	1596,48500	0,00259	1596,48564	0,00248
¹⁶⁰ Tb	86	86,78768	0,00033	86,78768	0,00033
¹⁶⁰ Tb	93	93,92159	0,00413	93,92231	0,00411
¹⁶⁰ Tb	197	197,03413	0,00098	197,03413	0,00098
¹⁶⁰ Tb	215	215,64524	0,00100	215,64527	0,00100
¹⁶⁰ Tb	298	298,57852	0,00144	298,57762	0,00137
¹⁶⁰ Tb	879	879,37464	0,00132	879,37430	0,00128
¹⁶⁰ Tb	962	962,30756	0,00198	962,30629	0,00185
¹⁶⁰ Tb	966	966,16182	0,00137	966,16147	0,00133
¹⁶⁰ Tb	1177	1177,95140	0,00172	1177,95017	0,00158
¹⁶⁰ Tb	1271	1271,87230	0,00412	1271,87174	0,00411
¹⁶¹ Tb	25	25,65131	0,00003	25,65131	0,00003
¹⁶¹ Tb	48	48,91526	0,00005	48,91526	0,00005
¹⁶¹ Tb	57	57,19166	0,00030	57,19166	0,00030
¹⁶¹ Tb	74	74,56657	0,00008	74,56657	0,00008
¹⁶⁹ Yb	63	63,12044	0,00004	63,12044	0,00004
¹⁶⁹ Yb	93	93,61445	0,00007	93,61445	0,00007
¹⁶⁹ Yb	109	109,77923	0,00005	109,77923	0,00005
¹⁶⁹ Yb	118	118,18940	0,00014	118,18940	0,00014
¹⁶⁹ Yb	130	130,52293	0,00005	130,52293	0,00005
¹⁶⁹ Yb	177	177,21303	0,00007	177,21303	0,00007
¹⁶⁹ Yb	197	197,95672	0,00008	197,95672	0,00008
¹⁶⁹ Yb	261	261,07708	0,00010	261,07708	0,00010
¹⁶⁹ Yb	307	307,73581	0,00012	307,73581	0,00012
¹⁷⁰ Tm	84	84,25463	0,00007	84,25463	0,00007
¹⁷² Hf	23	23,93291	0,00020	23,93291	0,00020
¹⁷² Hf	78	78,74236	0,00045	78,74236	0,00045
¹⁷² Hf	81	81,75129	0,00043	81,75129	0,00043
¹⁷² Hf	90	90,64353	0,00061	90,64353	0,00061
¹⁸² Ta	31	31,73767	0,00046	31,73766	0,00046
¹⁸² Ta	42	42,71485	0,00031	42,71484	0,00031
¹⁸² Ta	65	65,72216	0,00014	65,72216	0,00014
¹⁸² Ta	67	67,74973	0,00007	67,74973	0,00007
¹⁸² Ta	84	84,68023	0,00023	84,68021	0,00023
¹⁸² Ta	100	100,10593	0,00007	100,10593	0,00007
¹⁸² Ta	113	113,67169	0,00020	113,67169	0,00020
¹⁸² Ta	116	116,41788	0,00051	116,41786	0,00051

		Dados de entrada [15]		Resultados após experimento	
Nuclídeo	Transição	Energia (keV)	Incerteza (keV)	Energia (keV)	Incerteza (keV)
¹⁸² Ta	152	152,42992	0,00023	152,42990	0,00023
¹⁸² Ta	156	156,38651	0,00027	156,38650	0,00027
¹⁸² Ta	179	179,39381	0,00023	179,39381	0,00023
¹⁸² Ta	198	198,35186	0,00026	198,35185	0,00026
¹⁸² Ta	222	222,10861	0,00029	222,10861	0,00029
¹⁸² Ta	229	229,32061	0,00057	229,32061	0,00057
¹⁸² Ta	264	264,07394	0,00028	264,07393	0,00028
¹⁸² Ta	1121	1121,28820	0,00179	1121,28716	0,00169
¹⁸² Ta	1157	1157,30000	0,00185	1157,29900	0,00175
¹⁸² Ta	1189	1189,03740	0,00180	1189,03644	0,00169
¹⁸² Ta	1221	1221,39340	0,00180	1221,39244	0,00170
¹⁸² Ta	1231	1231,00250	0,00183	1231,00154	0,00173
¹⁸² Ta	1257	1257,40520	0,00186	1257,40425	0,00176
¹⁸² Ta	1273	1273,71710	0,00182	1273,71607	0,00171
¹⁸² Ta	1289	1289,14270	0,00181	1289,14168	0,00170
¹⁸² Ta	1373	1373,82230	0,00183	1373,82125	0,00173
¹⁸² Ta	1387	1387,38790	0,00183	1387,38691	0,00173
¹⁸⁵ Os	125	125,35837	0,00084	125,35841	0,00084
¹⁸⁵ Os	162	162,84873	0,00195	162,84834	0,00193
¹⁸⁵ Os	234	234,15478	0,00199	234,15428	0,00196
¹⁸⁵ Os	592	592,07470	0,00153	592,07507	0,00150
¹⁸⁵ Os	646	646,12678	0,00130	646,12731	0,00120
¹⁸⁵ Os	717	717,43264	0,00145	717,43305	0,00142
¹⁸⁵ Os	874	874,82492	0,00246	874,82491	0,00244
¹⁸⁵ Os	880	880,28070	0,00170	880,28072	0,00168
¹⁹² Ir	136	136,34264	0,00023	136,34275	0,00021
¹⁹² Ir	205	205,79430	0,00008	205,79430	0,00008
¹⁹² Ir	295	295,95650	0,00014	295,95654	0,00014
¹⁹² Ir	308	308,45509	0,00015	308,45513	0,00015
¹⁹² Ir	316	316,50610	0,00015	316,50602	0,00015
¹⁹² Ir	416	416,46963	0,00053	416,46977	0,00050
¹⁹² Ir	468	468,06880	0,00026	468,06877	0,00025
¹⁹² Ir	484	484,57520	0,00041	484,57514	0,00039
¹⁹² Ir	588	588,58181	0,00051	588,58188	0,00048
¹⁹² Ir	604	604,41108	0,00026	604,41116	0,00025
¹⁹² Ir	612	612,46208	0,00026	612,46203	0,00026
¹⁹² Ir	884	884,53735	0,00057	884,53745	0,00055
¹⁹⁸ Au	411	411,80199	0,00016	411,80198	0,00016
¹⁹⁸ Au	675	675,88368	0,00068	675,88368	0,00068
¹⁹⁸ Au	1087	1087,68420	0,00075	1087,68416	0,00075
¹⁹⁹ Au	49	49,82634	0,00010	49,82634	0,00010
¹⁹⁹ Au	158	158,37848	0,00010	158,37848	0,00010
¹⁹⁹ Au	208	208,20478	0,00012	208,20478	0,00012
²⁰³ Hg	279	279,19488	0,00087	279,19489	0,00087
²⁰³ Pb	401	401,32086	0,00240	401,32097	0,00240
²⁰³ Pb	680	680,51515	0,00245	680,51527	0,00244
²⁰⁷ Bi	569	569,70064	0,00132	569,70089	0,00128
²⁰⁷ Bi	1063	1063,65350	0,00216	1063,65390	0,00213

		Dados de entrada [15]		Resultados após experimento	
Nuclídeo	Transição	Energia (keV)	Incerteza (keV)	Energia (keV)	Incerteza (keV)
²⁰⁷ Bi	1770	1770,21820	0,00599	1770,21896	0,00593
²¹⁰ Pb	46	46,53942	0,00091	46,53946	0,00091
²²⁸ Th	583	583,18754	0,00204	583,18762	0,00203
²²⁸ Th	2614	2614,51280	0,00979	2614,51293	0,00974
²⁴¹ Am	26	26,34462	0,00020	26,34462	0,00020
²⁴¹ Am	59	59,54079	0,00011	59,54079	0,00011

Referências

- [1] Nichols, A., Herman, M., INDC(NDS) - 378(1998)
- [2] Helene, O., Vanin, V. R., Tsai, S. P., Nucl Instr. and Meth. A 433 (1999)592
- [3] Helmer, R.G. , Van Assche, P.H.M., van der Leun, C., Atom. Data and Nucl. Data Tables 24(1979)39.
- [4] Guimarães-Filho, Z. O., Método do ajuste único para calibração e interpolação, 1999, comunicação privada, a ser publicada como pre-print IFUSP
- [5] Helmer, R.G. , van der Leun, C., “Recommended standards for γ -ray energy calibration”, comunicação privada. (a ser publicado em Nuclear Instruments and Methods)
- [6] Cohen, E. R., Taylor, B. N., Rev. Mod. Phys. 59-4(1987)1121
- [7] Tsai, S.P., Mucciolo, E. R., Helene, O., Nucl. Instr. and Meth. A 345 (1994) 538
- [8] Helene, O., Morales, M., Nucl. Instr. and Meth. A 378 (1996)624
- [9] Sassamoto, N. et al, Nucl. Instr. and Meth., 125 (1975)507
- [10] Abramowitz, M., Segun, I.^a, “Handbook of mathematical functions”, Dover, New York, 1968.
- [11] Knoll, G. F., “Radiation Detection and Measurement”, Wiley, New York, 1979.

- [12] Firestone, R.B., “Table of Isotopes”, John Wiley and Sons, New York, 1996
- [13] Gouffon, P., “IDF - Manual do usuário”, LAL, 1983.
- [14] International Bureau of Weights and Measures, “Guide to the expression of the uncertainty in measurement”, 1993, Suíça.
- [15] Guimarães-Filho, Z. O., comunicação privada
- [16] Butkov, E., “Física Matemática”, Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1988.
- [17] Vanin, V. R. , Gouffon, P., “Tópicos avançados em tratamento estatístico de dados em física experimental”, LAL-IFUSP, 1996 (edição preliminar)
- [18] The mathworks, “Matlab user’s guide”, 1992
- [19] Helene, O., Vanin, V.R., Nucl. Instrum and Meth. A335(1993)227.
- [20] Malafronte, A., Passaro, A., Radovich, M.A., Bonini, A.L., Rev. Fis. Apl. e Instr., 2,(1996), Junho, v.11
- [21] Mohr, P.J., Taylor, B.N., Rev. Mod. Phys. 72-2(2000)351
- [22] Helene, O., Guimarães-Filho, Z. O., Vanin, V. R. , Pauliquevis-Júnior, T. M., Goldman, I. D., Pascholati, P. R., “Covariances between gamma-ray energies”, aceito para publicação em Nuclear Instruments and Methods.