UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA

A

CAMPOS RESSONANTES HELICOIDAIS EM TOKAMAKS

Valdir Okano

Dissertação apresentada ao
Instituto de Física da Univer-
sidade de São Paulo para
obtenção do Título de Mestre em
Ciências.

SÃO PAULO

1990

Zborec Luiz Colder
Hy Kucinski

Roberto Amaral

Uy1e
M
e. 2

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Okano, Valdir

Campos ressonantes helicoidais em tokamaks. São
Paulo, 1990.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Pau-
lo. Instituto de Física. Departamento de Física Expe-
rimental.

Área de Concentração: Física Nuclear

Orientador: Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas

Unitermos: 1. Física de plasma; 2. Superfícies mag-
néticas; 3. Campos magnéticos helicoidais ressonan-
tes; 4. Campos magnéticos não-integráveis.

USP/IF/SBI - 33/90

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA

CAMPOS RESSONANTES HELICOIDAIS EM TOKAMAKS

Valdir Okano

Dissertação apresentada ao
Instituto de Física da Univer-
sidade de São Paulo para
obtenção do Título de Mestre em
Ciências.

Orientador: Iberê Luiz Caldas

SÃO PAULO

setembro - 1990

Aos meus pais Takesi e Sathico.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos aqueles que, direta ou indiretamente, ajudaram neste trabalho em especial:

Ao Professor Iberê Luiz Caldas e à Professora Mutsuko Yamamoto Kucinski pela orientação neste trabalho.

Aos meus tios Masaru e Wilma pelo apoio nos momentos mais difíceis.

Aos amigos Pascoal e Kintop pela ajuda no uso do VAX 780 do IFUSP.

Aos amigos Wagner e Hamilton pela ajuda nos micros.

À Tomé, Sandra e Cláudia pela amizade.

Aos amigos da graduação e pós-graduação pelas listas e trabalhos feitos em grupo.

À FAPESP.

ÍNDICE

Resumo.....	1
Abstract.....	2
1. Introdução.....	3
2. Modelo de Shafranov.....	9
2.1 Campo magnético.....	10
2.2 Fator de segurança médio $\bar{q}$	16
3. Equilíbrio toroidal com densidade de corrente arbitrária.....	21
3.1 Coordenadas polares toroidais.....	22
3.2 Equilíbrio nas coordenadas polares toroidais.....	24
3.3 Fator de segurança médio $\bar{q}$	31
4. Campo magnético da hélice externa.....	33
4.1 Campo das hélices.....	33
5. Integração numérica das linhas de força.....	37
5.1 Coordenadas para a integração numérica.....	38
5.2 Método de integração.....	40
6. Conclusões.....	50
Apêndices	
A. Relações entre coordenadas toroidais e polares locais...	52
B. Equação de equilíbrio auto-consistente em coordenadas generalizadas.....	55
B.1 Coordenadas toroidais.....	56
B.2 Coordenadas polares toroidais.....	59
C. Parâmetros do TBR-1.....	62
Referências.....	63

RESUMO

Obtivemos mapas de Poincaré das linhas de força do campo magnético resultante da superposição linear do campo magnético de um plasma toroidal em equilíbrio com o campo magnético de correntes helicoidais externas. Devido a falta de simetria do campo magnético não podemos definir uma expressão analítica que descreva os mapas; estes foram, então, obtidos pela integração numérica da equação das linhas de força - $d\vec{l} \times \vec{B} = 0$. Nos mapas de Poincaré aparecem as ilhas magnéticas principais e as ilhas magnéticas secundárias. As ilhas magnéticas secundárias surgem devido a geometria toroidal. Sobre uma mesma superfície ressonante, as ilhas não tem tamanhos iguais.

ABSTRACT

Poincaré maps of magnetic field lines of a toroidal helical system were made. The magnetic field is a linear superposition of the magnetic fields produced by a toroidal plasma in equilibrium and by external helical currents. We do not have an analytical expression for the Poincaré maps since the magnetic field do not have symmetry. In order to obtain the maps, the equation $d\vec{\ell} \times \vec{B} = 0$ is numerically integrated. In the Poincaré maps, the principal and the secondary magnetic islands were observed. The islands do not have equal widths in the same resonant surface.

1- INTRODUÇÃO

Um dos dispositivos mais promissores para se conseguir a fusão termonuclear controlada é o tokamak. Uma das principais dificuldades em operar este sistema é controlar as instabilidades Magnetohidrodinâmicas (MHD). Estas instabilidades são responsáveis pela dissipação da energia confinada e a perda completa de confinamento (Vannucci et al. 1989).

As instabilidades disruptoras usualmente são classificadas como interna (oscilações dentes-de-serra) e externa (instabilidades menor e maior). Um parâmetro importante que determina as condições de estabilidade do plasma é o fator de segurança q . Este parâmetro caracteriza o passo das linhas de força do campo magnético $\vec{B}$ sobre uma superfície magnética; no tokamak devemos ter $q > 1$ para que exista estabilidade (Wesson 1978). Apesar dos esforços feitos até hoje, não se tem uma exata compreensão dos mecanismos que levam às disrupturas do plasma (Vannucci et al. 1989; Finn 1975).

As oscilações dentes-de-serra foram primeiramente observadas por Von Goeler et al. (Von Goeler et al. 1974). Estas oscilações são detectadas pela emissão de raio-X do centro do plasma; a intensidade do raio-X depende da temperatura da região de emissão. A principal característica desta oscilação é o crescimento lento na intensidade de emissão do raio-X e posteriormente uma queda abrupta na mesma. Um modelo físico simples para explicar as oscilações dentes-de-serra foi proposto por Kadomtsev (Kadomtsev

1975). Neste modelo, considera-se que o fator de segurança no centro $q(0)$ torna-se menor que 1 devido ao aumento da densidade de corrente; a presença de uma superfície com $q=1$ permite, então, a ocorrência da instabilidade $m=1/n=1$ e o aparecimento de uma ilha magnética. Com o contínuo crescimento da instabilidade, a ilha magnética acaba por substituir o centro do plasma. O modelo de Kadomtsev foi confirmado por simulações numéricas (Wadell et al. 1976; Sykes e Wesson 1976) e também por observações experimentais (Jahns et al. 1978). Evidências experimentais recentes mostram que alguns aspectos das oscilações dentes-de-serra não podem ser explicados pelo modelo de Kadomtsev. Alguns desses novos aspectos são: detecção de disrupturas internas sem qualquer oscilação precursora e a observação do modo $m=1/n=1$ somente depois da queda dos dentes-de-serra (Campbell et al. 1986), o aparecimento de dentes-de-serra gigante (Campbell et al. 1987) e a evidência de que $q(0)$ se mantém menor que 1 durante o fenômeno (West et al. 1987). Embora teorias alternativas tenham sido propostas (Dubois et al. 1983; Wesson 1986), os mecanismos que levam às disrupturas internas não são completamente conhecidos.

As disrupturas externas, denominadas de maior e menor, dependem da intensidade com que a coluna de plasma é perturbada (Mirnov 1979). As principais características são: pico negativo na tensão de enlace, rápida perda na energia do plasma, abrupta expansão do raio maior com a diminuição do raio menor. Das instabilidades externas a mais perigosa é a instabilidade maior, esta resulta na perda total do confinamento do plasma. O conhecimento dos pro-

cessos que levam a instabilidade maior e os mecanismos que podem controlar a instabilidade são fundamentais para se conseguir a fusão termonuclear.

Várias hipóteses foram propostas para explicar a ocorrência das disrupturas externas; quase todas envolvem o crescimento do modo $m=2/n=1$ como principal responsável pela disruptura. Os mecanismos mais aceitos para explicar a disruptura maior são: interação das ilhas de $q=2$ com o limitador, acoplamento dos modos $m=2/n=1$ e $m=1/n=1$ (Karger et al. 1976; Vannucci et al. 1989), destabilização dos modos com m ímpar tais como $m=3/n=2$, $m=5/n=3$, etc. devido ao crescimento da ilha em $q=2$ (Waddel et al. 1978). As disrupturas menores seriam explicadas pela existência de ilhas secundárias entre as ilhas principais. A superposição destas ilhas menores criariam uma região caótica dentro do plasma; se esta região torna-se suficientemente extensa, o plasma pode ser destruído (Finn 1975, Rechester e Stix 1976, Vannucci et al. 1989).

Evidências experimentais mostram que algumas dessas hipóteses são razoáveis para explicar as disrupturas externas. Foram identificadas em algumas experiências a interação da ilha de $q=2$ com o limitador (Roberts et al. 1986) e acoplamento dos modos $m=2/n=1$ e $m=1/n=1$ (Equipe TFR 1977; Vannucci et al. 1989; Vannucci e Gil 1990), também foram observados modos $m=2/n=1$, $3/2$ e $5/3$ imediatamente antes da disruptura maior (McGuire e Robinson 1980).

Muitas das instabilidades acima mencionadas foram observadas em tokamaks de grande e pequeno porte. No tokamak TBR-1 do IFUSP vários desses fenômenos estão sendo estudados (Vannucci et

al. 1989).

Nos estudos da influência de enrolamentos helicoidais externos sobre o equilíbrio verificou-se experimentalmente (Karger et al. 1975) que as disrupturas acima mencionadas podem ser postergadas ou excitadas dependendo da corrente que passa pela hélice. Embora alguns modelos numéricos tenham sido apresentados (Harafuji et al. 1987), até o presente momento não se conhece exatamente como a hélice externa atua sobre as oscilações de disruptura. No IFUSP alguns aspectos da influência da hélice sobre o equilíbrio estão sendo investigados teórica e experimentalmente (Vannucci et al. 1988). Alguns trabalhos teóricos feitos no IFUSP que abordam correntes helicoidais ressonantes são: formulação Hamiltoniana para a equação das linhas de força do campo magnético total (equilíbrio mais hélice) (Andrade 1989), obtenção de invariantes médios que descrevem superfícies magnéticas perturbadas por correntes helicoidais ressonantes (Camargo 1989), estudo de superfícies magnéticas médias em torno de regiões de ressonância quando se superpõe campos helicoidais externos ao equilíbrio (Monteiro 1990), obtenção de mapas de Poincaré e difusão das linhas de força do campo total utilizando o modelo cilíndrico corrigido toroidalmente (Fernandes et al. 1988; Heller e Caldas 1988; Heller e Caldas 1990).

Nosso objetivo para este trabalho de mestrado é estudar a influência de campos helicoidais externos sobre o confinamento do plasma diretamente na geometria toroidal. Consideraremos, como primeira aproximação, a superposição linear dos campos de equilíbrio e das hélices, uma vez que as correntes nas hélices são muito menores

que a do plasma.

Inicialmente utilizamos a solução de Shafranov (Shafranov 1960) para calcular o campo magnético do plasma; posterior análise desta solução mostrou que o fator de segurança q e a densidade de corrente de plasma associada à solução são quase uniformes dentro do plasma. Este fato não é condizente com o que é esperado no TBR - 1: um fator de segurança q variando de 1 no centro à 4 na borda do plasma (Vannucci et al. 1989). Usando o método desenvolvido por Kucinski et al. (Kucinski et al. 1990), para calcular o equilíbrio toroidal aproximado, obtivemos o campo magnético do plasma para uma densidade de corrente com um máximo no centro. Este novo perfil de densidade de corrente resulta numa variação do fator de segurança q esperada.

O campo magnético da hélice é calculado a partir da solução da equação de Laplace com a condição de contorno de que sobre a superfície toroidal da câmara existem fios enrolados com correntes adjacentes em sentidos opostos.

Para visualizarmos o efeito da hélice externa sobre o equilíbrio, faz-se o mapeamento das linhas de força do campo total numa secção reta do tokamak. Neste mapeamento devem surgir ilhas magnéticas ao redor de superfícies magnéticas racionais bem como ilhas magnéticas secundárias devido ao efeito toroidal.

No capítulo 2 apresentamos o modelo de Shafranov adaptado ao TBR-1 e o correspondente fator de segurança. No capítulo 3 apresentamos o equilíbrio toroidal aproximado calculado para uma densidade de corrente com um máximo no centro. No capítulo 4 calculamos

o campo magnético da hélice a partir da solução da equação de Laplace e no capítulo 5 mostramos os mapeamentos obtidos usando os parâmetros do TBR-1.

Nos mapeamentos feitos apareceram as ilhas magnéticas principais e as secundárias; as ilhas sobre uma mesma superfície ressonante não possuem o mesmo tamanho como o que ocorre no modelo cilíndrico com uma correção toroidal.

2- MODELO DE SHAFRANOV

O campo magnético de equilíbrio pode ser calculado a partir da função de fluxo Ψ que satisfaz a equação de Grad-Shafranov (Shafranov 1958; Morozov e Solov'ev 1966).

Usando métodos analíticos, Shafranov obteve uma solução para o plasma em equilíbrio toroidal (Shafranov 1960). A solução Ψ foi escrita como uma soma infinita de termos, cada soma parcial representa a função de fluxo Ψ com uma certa precisão. Nesta solução aparecem grandezas que não podem ser estimadas ou medidas no TBR-1. É necessário, então, reescrever a solução Ψ em termos de parâmetros que possam ser obtidos no TBR-1.

Utilizando as grandezas que caracterizam o equilíbrio, constatou-se que o modelo de Shafranov é inadequado para descrever alguns aspectos do TBR-1. O fator de segurança médio $\bar{q}$ correspondente é praticamente uniforme dentro do plasma. Esperamos uma variação de $\bar{q} \approx 1$ no centro a $\bar{q} > 3$ na superfície. Esta estimativa em $\bar{q}$ resulta de observações experimentais dos modos MHD no TBR-1 (Vannucci et al. 1989).

Apresentamos, neste capítulo, a solução analítica de Shafranov escrita em termos de parâmetros do TBR-1 (secção 2.1) bem como resultados numéricos para o fator de segurança médio $\bar{q}$ correspondente (secção 2.2).

2.1- CAMPO MAGNÉTICO

Em um plasma com simetria axial existe uma função de fluxo Ψ que descreve o equilíbrio. Esta função deve satisfazer a equação de Grad-Shafranov (Shafranov 1958; Morozov e Solov'ev 1966)

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = - \mu_0 r j_\varphi \quad (2.1)$$

onde

$$j_\varphi = r \frac{dP}{d\Psi} + \frac{\mu_0}{8\pi^2} \frac{1}{r} \frac{dI^2}{d\Psi}$$

Nesta equação Ψ e I são os fluxos poloidais do campo magnético e da densidade de corrente, respectivamente, P a pressão cinética e (r, φ, z) são as coordenadas cilíndricas. Conhecidas as funções $P(\Psi)$ e $I(\Psi)$, pode-se, em princípio, resolver a equação (2.1).

Devido a geometria toroidal do tokamak, um sistema apropriado de coordenadas é o das coordenadas toroidais convencionais ξ, ω e φ definidas como (Apêndice A):

$$r = \frac{R'_0 \sinh \xi}{\cosh \xi - \cos \omega} \quad (2.2a)$$

$$z = \frac{R'_0 \sin \omega}{\cosh \xi - \cos \omega} \quad (2.2b)$$

Se a superfície do toróide é descrita por $\xi = \xi_0$ teremos:

raio maior

$$R_0 = R'_0 \coth \xi_0 \quad (2.3a)$$

raio menor

$$a = \frac{R'_0}{\sinh \xi_0} \quad (2.3b)$$

Valores $\xi > \xi_0$ correspondem à parte interna da superfície toroidal e $\xi < \xi_0$ à parte externa.

Nas coordenadas toroidais as componentes do campo de equilíbrio B_0 , expressas em termos de Ψ , são (Apêndice B):

$$B_{\xi_0} = \frac{(\cosh \xi - \cos \omega)^2}{R_0'^2 \sinh \xi} \frac{\partial \Psi}{\partial \omega} \quad (2.4a)$$

$$B_{\omega_0} = - \frac{(\cosh \xi - \cos \omega)^2}{R_0'^2 \sinh \xi} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \quad (2.4b)$$

$$B_{\varphi_0} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{(\cosh \xi - \cos \omega)}{R_0' \sinh \xi} I(\Psi) \quad (2.4c)$$

Adotando os perfis de corrente e pressão

$$\frac{dP}{d\Psi} = A = \text{constante} \quad (2.5a)$$

$$\frac{\mu_0}{8\pi^2} \frac{dI^2}{d\Psi} = B = \text{constante} \quad (2.5b)$$

e impondo as condições de contorno sobre $\vec{B}$ e $\Psi(\xi, \omega) = 0$ na superfície do plasma, Shafranov obteve a solução Ψ na forma (Shafranov 1960):

$$\Psi(\xi, \omega) = \left[2 (\cosh \xi - \cos \omega) \right]^{-\frac{1}{2}} \left\{ F_0(\xi) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} F_n(\xi) \cos n\omega \right\} \quad (2.6)$$

No caso de pequena curvatura $a/R_0 \ll 1$, isto é $e^{\xi_0} \gg 1$, Ψ foi expandida nas partes externa e interna ao plasma como

$$\begin{aligned} \Psi^e \approx & -\frac{\mu_0 R'_0}{2\pi} (J_\varphi + J_S) (\xi_0 - \xi) - \frac{\mu_0 R'_0}{2\pi} e^{-\xi} \left[(\xi_0 - \xi) (J_\varphi + J_S) \right. \\ & \left. + (J_P + \frac{3}{4} J_\varphi + \frac{3}{2} J_S) (1 - e^{-2(\xi_0 - \xi)}) \right] \cos \omega \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \Psi^i \approx & \frac{\mu_0 R'_0 J_\varphi}{4\pi} (1 - e^{-2(\xi_0 - \xi)}) + \frac{\mu_0 R'_0}{2\pi} (J_P + \frac{5}{4} J_\varphi) e^{-\xi} \\ & \times (1 - e^{-2(\xi_0 - \xi)}) \cos \omega \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde

$$J_\varphi = \int_{\xi > \xi_0} j_\varphi dS = \int_{\xi > \xi_0} (A r + B/r) dS$$

$$J_P = \int_{\xi > \xi_0} A r dS$$

J_S = corrente superficial no plasma.

Os parâmetros típicos que podem ser obtidos no TBR-1 são: corrente de plasma I_p e fator de assimetria do campo poloidal Λ ,

logo temos que relacionar J_p , J_φ e J_s com I_p e Λ .

A partir da equação de equilíbrio de forças

$$-\nabla P + \vec{j} \times \vec{B} = 0 \quad (2.9)$$

Shafranov (Shafranov 1963) mostrou que num plasma toroidal com grande razão de aspecto ($R_0/a \gg 1$) o campo poloidal de equilíbrio externo à coluna deve, na primeira ordem de ρ/R_0 , satisfazer a condição

$$B_\theta(a) = \frac{\mu_0 I_p}{2\pi a} \left[1 - \frac{a}{R_0} \Lambda \cos\theta \right] \quad (2.10)$$

sobre a superfície do plasma, onde

$$\Lambda = \beta_p + \frac{l_1}{2} - 1$$

sendo β_p e l_1 definidos como:

razão entre pressão cinética e pressão magnética do campo poloidal

$$\beta_p = \frac{P}{\left[B_\theta^2(a) / 2\mu_0 \right]}$$

e

indutância normalizada por unidade de comprimento

$$l_1 = \frac{\int B_\theta^2 \rho \, d\rho \, d\theta}{\pi a^2 B_\theta^2(a)}$$

Nesta relação ρ e θ são as coordenadas polares locais

definidas em relação às coordenadas cilíndricas (r, z) como (Apêndice A):

$$r = R_0 - \rho \cos \theta \quad (2.11a)$$

$$z = \rho \sin \theta \quad (2.11b)$$

Da condição de contorno acima (eq.2.10) juntamente com $B_\rho(\rho=a, \omega) = 0$ (componente normal do campo magnético de equilíbrio na superfície nula) e $\Psi(\rho=a, \omega) = 0$, Mukhovatov (Mukhovatov 1971) obteve a função de fluxo Ψ externa ao plasma como sendo:

$$\begin{aligned} \Psi^e(\rho, \omega) \approx & -\frac{\mu_0 I_P R'_0}{2\pi} \ln\left(\frac{\rho}{a}\right) - \frac{\mu_0 I_P}{4\pi} \rho \left\{ \ln\left(\frac{\rho}{a}\right) + \left(\Lambda + \frac{1}{2} \right) \right. \\ & \left. \times \left[1 - \left(\frac{a}{\rho} \right)^2 \right] \right\} \cos(\pi - \theta) \end{aligned} \quad (2.12)$$

No caso de pequenas curvaturas ($R_0/a \gg 1$) temos as seguintes relações entre as coordenadas polares locais (ρ, θ) e as coordenadas toroidais (ξ, ω) (Apêndice A):

$$e^{-\xi} \approx \frac{\rho}{2R_0} \quad (2.13a)$$

$$\omega \approx \pi - \theta \quad (2.13b)$$

$$R_0 \approx R'_0 \quad (2.13c)$$

Substituindo estas relações em (2.7) e posteriormente comparando com (2.12), nós concluímos que:

$$J_{\varphi} + J_S = I_P \quad (2.14a)$$

$$J_P + \frac{3}{4} J_{\varphi} + \frac{3}{2} J_S = I_P \left(\Lambda + \frac{1}{2} \right) \quad (2.14b)$$

Supondo que não haja corrente na superfície do plasma ($J_S = 0$), podemos reescrever a função de fluxo interna ao plasma como:

$$\begin{aligned} \Psi^1 \approx & \frac{\mu_0 R'_0 I_P}{4\pi} (1 - e^{2(\xi_0 - \xi)}) + \frac{\mu_0 R'_0 I_P}{2\pi} (\Lambda + 1) e^{-\xi} \\ & \times (1 - e^{2(\xi_0 - \xi)}) \cos \omega \end{aligned} \quad (2.15)$$

Da relação (2.5b) obtemos para I^2 :

$$I^2 - I_e^2 = \frac{4\pi}{\mu_0 R'_0} e^{\xi_0} \sinh \xi_0 I_P \left(\frac{5}{4} - \Lambda \right) \Psi^1(\xi, \omega) \quad (2.16)$$

onde I_e é a corrente que produz o campo toroidal externo. Como $I_e \gg I_P$ temos $I \approx I_e$.

O campo magnético de equilíbrio interno ao plasma pode ser obtido das equações (2.4a-c), (2.15) e (2.16):

$$\begin{aligned} B_{\omega 0}^1 \approx & - \frac{\mu_0 I_P}{2\pi a} e^{(\xi_0 - \xi)} + \frac{\mu_0 I_P \Lambda}{4\pi R_0} (1 - 3e^{2(\xi_0 - \xi)}) \cos \omega \\ & + \frac{\mu_0 I_P}{4\pi R_0} (1 + e^{2(\xi_0 - \xi)}) \cos \omega \end{aligned} \quad (2.17a)$$

$$B_{\xi 0}^i \approx - \frac{\mu_0 I_P}{4\pi R_0} (\Lambda + 1) (1 - e^{2(\xi_0 - \xi)}) \sin \omega \quad (2.17b)$$

$$B_{\varphi 0}^i \approx \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\cosh \xi - \cos \omega}{R_0' \sinh \xi} I_e \quad (2.17c)$$

2.2- FATOR DE SEGURANÇA MÉDIO $\bar{q}$

O fator de segurança q é razão entre a variação no ângulo poloidal $\delta\theta$ e a variação no ângulo toroidal $\delta\varphi$ quando seguimos uma linha de força do campo magnético (fig. 2.1). Esta grandeza expressa a helicidade das linhas de força numa superfície magnética. Em um plasma toroidal, a inclinação das linhas de força sobre uma superfície magnética varia com o ângulo poloidal. As linhas do campo magnético estão mais juntas na região próxima ao eixo z de rotação da câmara (fig. 2.1). O fator de segurança $q = q(\Psi)$ em uma superfície magnética seria a média de q no ângulo poloidal. As superfícies onde $\bar{q} = m/n$ (m, n - números inteiros) são denominadas superfícies racionais; sobre tais superfícies as linhas de força se fecham sobre si mesmas depois de m voltas toroidais e n voltas poloidais.

Ao superpor o campo das hélices externas ao de equilíbrio, espera-se que surjam ilhas magnéticas ao redor de superfícies magnéticas cujas linhas de força possuam a mesma helicidade que a da hélice.

O fator de segurança q pode ser obtido a partir da

equação da linha de força $d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = 0$. Nas coordenadas toroidais ξ , ω e φ temos:

$$q = - \frac{d\varphi}{d\omega} = - \frac{h_{\omega} B_{\varphi 0}}{h_{\varphi} B_{\omega 0}} \quad (2.18)$$

onde h_{ω} e h_{φ} são os fatores de métrica.

fig. 2.1- Distribuição das linhas de força sobre uma superfície magnética toroidal.

Para tirar a média no ângulo poloidal temos que calcular

$$\bar{q} = - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h_{\omega} B_{\varphi 0}}{h_{\varphi} B_{\omega 0}} d\omega \quad (2.19)$$

Esta integral não é fácil de ser obtida analiticamente pois a mesma deve ser feita sobre a superfície $\Psi(\xi, \omega) = \text{constante}$.

Para calcularmos (2.19) precisamos relacionar ξ e ω respeitando o vínculo $\Psi(\xi, \omega) = \text{constante}$. Da relação (2.15) vemos que a superfície magnética é escrita na forma:

$$\Psi(\xi, \omega) \approx f(\xi) + g(\xi)\cos\omega = \text{constante} \quad (2.20)$$

Supondo que para $\omega = \frac{\pi}{2}$ temos $\xi = \bar{\xi}$, podemos reescrever (2.20) como:

$$f(\xi) + g(\xi)\cos\omega = f(\bar{\xi}) \quad (2.21)$$

Para outros valores de ω sobre a superfície magnética podemos expandir ξ em torno de $\bar{\xi}$

$$\xi \approx \bar{\xi} + \Delta\xi \quad (2.22)$$

Substituindo (2.22) em (2.21) e mantendo termos de primeira ordem, encontramos para $\Delta\xi$:

$$\Delta\xi \approx - \frac{g(\bar{\xi})}{f'(\bar{\xi})} \cos(\omega) \quad (2.23)$$

onde $f'(\xi) \equiv \frac{df}{d\xi}$

Vemos portanto que as superfícies magnéticas são descri-

tas aproximadamente por $\xi = \bar{\xi} + \Delta\xi$.

Com a relação (2.22) podemos expandir $q(\xi, \omega)$ como:

$$q(\xi, \omega) \approx q(\bar{\xi}, \omega=\pi/2) + \left. \frac{dq}{d\xi} \right|_{\bar{\xi}, \omega=\pi/2} \Delta\xi + \dots \quad (2.24)$$

tirando a média em ω , lembrando que $\Delta\xi \propto \cos\omega$, obtemos (2.19):

$$\bar{q} \approx q(\bar{\xi}, \omega=\pi/2) \quad (2.25)$$

Usando as expressões para o campo de equilíbrio (eq. 2.17a-c), a equação (2.25) fica escrita como:

$$\bar{q} \approx \frac{I_e}{I_p} \frac{a}{R_0} \frac{\cosh \bar{\xi}}{\sinh \bar{\xi}^2} e^{(\bar{\xi} - \xi_0)} \quad (2.26)$$

Substituindo os valores dos parâmetros do TBR-1 (Apêndice C) obtemos o perfil do fator de segurança médio $\bar{q}$ (fig. 2.2). Pelo gráfico notamos que $\bar{q}$ é praticamente uniforme dentro do plasma. Das observações experimentais dos modos MHD no TBR-1, espera-se que este parâmetro varie de $\bar{q} \approx 1$ no centro a $\bar{q} > 3$ na superfície (Vannucci et al. 1989). Isto nos leva a concluir que o modelo de Shafranov não descreve a realidade observada no TBR-1. Torna-se necessário encontrar outro modelo de equilíbrio.

fig. 2.2 - Perfil do fator de segurança médio

3- EQUILÍBRIO TOROIDAL COM DENSIDADE DE CORRENTE ARBITRÁRIA

No capítulo anterior concluímos que o modelo de Shafranov não pode descrever os vários modos MHD observados no TBR-1. O fator de segurança médio $\bar{q}$ correspondente é praticamente constante no plasma.

Fazendo um levantamento na literatura, encontramos que soluções analíticas para a equação de Grad-Shafranov são em geral obtidas considerando $P(\Psi)$ e $I^2(\Psi)$ polinômios de grau menor ou igual a 2 (Haas 1972; Maschke 1973; Mazzucato 1975; Lai e Verleun 1976; De Menna 1977; Clemente 1982). Se se considera $P(\Psi)$ e $I^2(\Psi)$ polinômios de grau maior que 2, obtém-se uma equação não linear em Ψ . Em nenhum dos artigos se tem uma análise do fator de segurança q associado à solução, de modo que não podemos verificar de imediato se o modelo pode ou não descrever o TBR-1.

No levantamento feito, dois artigos nos chamaram a atenção: (Yoshikawa 1974) e (Egorov et al. 1987). Yoshikawa desenvolveu um método que resolve de modo aproximado a equação auto consistente de Grad-Shafranov na geometria toroidal. A solução toroidal aproximada é obtida a partir de uma solução cilíndrica conhecida. Egorov et al. apresenta um método experimental para medir a direção do campo magnético no tokamak T-10 que pode ser usado para calcular o perfil do fator de segurança q . Do perfil de q pode-se inferir a densidade de corrente j_φ .

Usando um novo sistema de coordenadas para descrever o equilíbrio toroidal, Kucinski et al. (Kucinski et al. 1990) resol-

veram de forma aproximada a equação de Grad-Shafranov com secção reta circular e densidade de correntes arbitrárias. Este novo sistema de coordenadas se reduz as coordenadas polares locais (ρ, θ) no limite de grande razão de aspecto, $R_0/a \gg 1$. A solução é escrita em termos da solução de um sistema cilíndrico; a aproximação de ordem zero já contém o efeito toroidal.

Na secção 3.1 apresentamos o novo sistema de coordenadas encontrado por Kucinski. Na secção 3.2 mostramos o método de obter a solução para o equilíbrio toroidal. Na secção 3.3 mostramos resultados numéricos para o fator de segurança médio $\bar{q}$ adotando parâmetros do TBR-1.

3.1- COORDENADAS POLARES TOROIDAIS

O novo sistema de coordenadas encontrado por Kucinski é definido como:

$$\rho_t = \frac{R'_0}{\cosh \xi - \cos \omega} \quad (3.1a)$$

$$\theta_t = \pi - \omega \quad (3.1b)$$

onde ξ , ω são as coordenadas toroidais convencionais.

Este sistema de coordenadas pode ser melhor entendido se o reescrevemos em termos do sistema polar local (ρ, θ, φ) com as origens coincidentes. Das equações (2.2a-b) temos:

$$r = \rho_t \sinh \xi \quad (3.2a)$$

$$z = \rho_t \sin \theta_t \quad (3.2b)$$

As coordenadas (ρ, θ, φ) são definidas por:

$$r = R'_0 - \rho \cos \theta \quad (3.3a)$$

$$z = \rho \sin \theta \quad (3.3b)$$

Comparando (3.2a-b) com (3.3a-b) temos:

$$\rho_t = \rho \left[1 - \frac{\rho}{R'_0} \cos \theta + \frac{\rho^2}{4R'^2_0} \right]^{1/2} \quad (3.4a)$$

$$\sin \theta_t = \sin \theta \left[1 - \frac{\rho}{R'_0} \cos \theta + \frac{\rho^2}{4R'^2_0} \right]^{-1/2} \quad (3.4b)$$

No limite de $\rho/R'_0 \ll 1$ vemos que ρ_t e θ_t tornam-se ρ e θ respectivamente.

Na figura 3.1 mostramos as superfícies coordenadas deste sistema.

fig. 3.1- Nas linhas pontilhadas θ_t é constante, nas linhas tracejadas ρ é constante e nas linhas sólidas ρ_t é constante.

3.2- EQUILÍBRIO NAS COORDENADAS POLARES TOROIDAIS

A equação de Grad-Shafranov escrita em termos das coordenadas polares toroidais é (Apêndice B):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\rho_t} \frac{\partial}{\partial \rho_t} \left[\rho_t \frac{\partial \Psi}{\partial \rho_t} \right] + \frac{1}{\rho_t^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_t^2} = \mu_0 J_{30}(\Psi) \\
& + \mu_0 R_0'^2 \frac{dP}{d\Psi} \left[2 \frac{\rho_t}{R_0'} \cos \theta_t + \frac{\rho_t^2}{R_0'^2} \sin^2 \theta_t \right] \\
& + \frac{\rho_t \cos \theta_t}{R_0'} \left[2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho_t^2} + \frac{1}{\rho_t} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho_t} \right] + \frac{\rho_t \sin \theta_t}{R_0'} \left[\frac{1}{\rho_t^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_t} \right. \\
& \left. - \frac{2}{\rho_t} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_t \partial \rho_t} \right] \quad (3.5a)
\end{aligned}$$

onde

$$\mu_0 J_{30}(\Psi) = - \mu_0 R_0'^2 \frac{dP}{d\Psi} - \frac{d}{d\Psi} \frac{\mu_0^2 I^2}{2} \quad (3.5b)$$

As componentes contravariantes do campo radial e poloidal são dadas respectivamente por:

$$B^1 = \vec{B} \cdot \nabla \rho_t = \frac{-1}{R_0' \rho_t} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_t} \quad (3.6a)$$

$$B^2 = \vec{B} \cdot \nabla \theta_t = \frac{1}{R_0' \rho_t} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho_t} \quad (3.6b)$$

e campo toroidal por:

$$B_3 = r B_\varphi = - \mu_0 I \quad (3.6c)$$

Para resolver a equação (3.5) Kucinski et al. expandiram a função Ψ como:

$$\Psi(\rho_t, \theta_t) \simeq \Psi_0(\rho_t, \theta_t) + \delta\Psi(\rho_t, \theta_t) \quad (3.7)$$

onde Ψ_0 é calculado na aproximação de ordem zero de a/R'_0 , ou seja, Ψ_0 satisfaz:

$$\frac{1}{\rho_t} \frac{\partial}{\partial \rho_t} \left[\rho_t \frac{\partial \Psi_0}{\partial \rho_t} \right] + \frac{1}{\rho_t^2} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \theta_t^2} = \mu_0 J_{30}(\Psi_0) \quad (3.8)$$

Note que esta equação é idêntica em forma à equação de Grad-Shafranov para um plasma cilíndrico.

Fazendo as seguintes aproximações:

$$J_{30}(\Psi) \simeq J_{30}(\Psi_0) + \left[\frac{d}{d\Psi_0} J_{30}(\Psi_0) \right] \delta\Psi \quad (3.9)$$

e

$$\frac{dP(\Psi)}{d\Psi} \simeq \frac{dP(\Psi_0)}{d\Psi_0} + \left[\frac{d^2 P(\Psi_0)}{d\Psi_0^2} \right] \delta\Psi \quad (3.10)$$

e definindo

$$-R_0'^2 \frac{dP(\Psi_0)}{d\Psi_0} \equiv \beta_p J_{30}(\Psi_0) \quad (3.11)$$

Kucinski et al. obtiveram que:

$$\delta\Psi = \Psi'_0(\rho_t) \cos\theta_t \int_{\rho_t}^a \frac{\rho}{R'_0} \Lambda(\rho) d\rho \quad (3.12)$$

$$\Lambda(\rho_t) = \frac{1}{\rho_t^2 \Psi_0'^2} \int_0^{\rho_t} \rho \Psi_0'^2 d\rho + \beta_p - 1 \quad (3.13)$$

$$\Psi'_0 \equiv \frac{d\Psi_0(\rho_t)}{d\rho_t}$$

Esta expressão é válida para o caso de Ψ_0 não depender de θ_t . Da equação (3.8) temos:

$$\frac{1}{\rho_t} \frac{\partial}{\partial \rho_t} \left[\rho_t \frac{\partial \Psi_0}{\partial \rho_t} \right] = \mu_0 J_{30}(\Psi_0) = \mu_0 R'_0 J_\varphi \quad (3.14)$$

A superfície do plasma é descrita por $\rho_t = a$.

Vemos então que escolhido um perfil $J_\varphi(\rho_t)$ podemos calcular a função de fluxo Ψ a partir das equações (3.7), (3.12) e (3.14).

É interessante ressaltar que neste novo sistema de coordenadas a solução Ψ possui as seguintes características:

- * O termo de ordem zero já possui correção toroidal devido à coordenada ρ_t .
- * O fator $\Lambda(a)$ é o coeficiente de assimetria do campo poloidal

definido em termos de β_p e indutância interna (Mukhovatov 1971).

Escolhendo a densidade de corrente sugerida por Egorov et al. (Egorov et al 1987)

$$J_\varphi(\rho_t) = (\gamma+1) \frac{I_p}{\pi a^2} \left[1 - \frac{\rho_t^2}{a^2} \right]^\gamma \quad ; \gamma \text{ inteiro} \quad (3.15)$$

obtivemos:

$$\Psi_0(\rho_t) = \frac{\mu_0 I_p R'_0}{4 \pi} \left[(1-y) + \frac{(1-y^2)}{2} + \dots + \frac{(1-y^{\gamma+1})}{\gamma+1} \right] \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \Lambda(\rho_t) = & \frac{1}{2} \frac{1}{(1-y^{\gamma+1})^2} \left\{ (1-y) + \dots + \frac{(1-y^{\gamma+1})}{\gamma+1} \right. \\ & \left. - \left[\frac{(1-y^{\gamma+2})}{\gamma+2} + \dots + \frac{(1-y^{2\gamma+2})}{2\gamma+2} \right] \right\} + \beta_p - 1 \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$y \equiv 1 - \frac{\rho_t^2}{a^2}$$

As superfícies magnéticas $\Psi(\rho_t, \theta_t) = \text{constante}$ são, em ordem zero, dadas por $\rho_t = \text{constante}$. Com a introdução da correção de primeira ordem, as superfícies magnéticas ficam deslocadas para a direita, em relação ao termo de ordem zero, de aproximadamente 1,5%. Na figura 3.2 temos $\Psi(\rho_t, \theta_t) = \text{constante}$ na aproximação de ordem zero e com a correção de primeira ordem numa secção reta do

fig. 3.2- $\Psi(\rho_t, \theta_t)$ constante para os parâmetros do TBR-1. A linha pontilhada é aproximação de ordem zero e a linha contínua com a correção de primeira ordem.

Usando uma expansão análoga a da secção 2.2 para a coordenada toroidal ξ , escrevemos ρ_t como sendo aproximadamente:

$$\rho_t \approx \bar{\rho}_t + \Delta\rho_t \quad (3.18a)$$

onde $\bar{\rho}_t$ é calculado ao longo de $\theta_t = \frac{\pi}{2}$ e $\Delta\rho_t$ é dado por:

$$\Delta\rho_t = - \int_{\rho_t}^a \frac{\rho}{R'_0} \Lambda(\rho) d\rho \cos\theta_t \quad (3.18b)$$

Uma superfície magnética será descrita aproximadamente por $\rho_t = \bar{\rho}_t + \Delta\rho_t = \text{constante}$.

Da relação (3.6) obtemos para o campo poloidal em termos de $\bar{\rho}_t$:

$$B_{\theta_t} = \frac{1}{R'_0} \Psi'_0(\bar{\rho}_t) \left[1 - \frac{\bar{\rho}_t}{R'_0} \Lambda(\bar{\rho}_t) \cos\theta_t \right] \quad (3.19)$$

Note a semelhança desta expressão com a expressão (2.10).

Usando as expressões (3.16) e (3.17) com $\gamma = 3$ e os parâmetros do TBR-1 obtemos a figura 3.3. Nesta figura temos o campo poloidal de ordem zero e de primeira ordem.

fig. 3.3- Perfil do campo poloidal no plano equatorial. A linha contínua é a aproximação de ordem zero. A linha tracejada é a aproximação de primeira ordem.

3.3- FATOR DE SEGURANÇA MÉDIO $\bar{q}$

Como foi explicado na secção 2.2 do capítulo anterior, o fator de segurança médio $\bar{q}$ mede a helicidade das linhas de força de uma superfície magnética. Em termos das coordenadas $(\rho_t, \theta_t, \varphi)$ o fator de segurança q é dado por :

$$q(\rho_t, \theta_t) = \frac{d\varphi}{d\theta_t} = \frac{\vec{B} \cdot \nabla \varphi}{\vec{B} \cdot \nabla \theta_t} = - \frac{\mu_0 I}{\Psi'_0} \frac{\rho_t}{R'_0} \frac{1}{f} \quad (3.20)$$

onde

$$f = 1 - 2 \frac{\rho_t}{R'_0} \cos \theta_t - \frac{\rho_t^2}{R'^2_0} \sin^2 \theta_t$$

Usando a mesma aproximação da secção 2.2 demonstra-se que o fator de segurança médio $\bar{q}$ é aproximadamente:

$$\bar{q} \approx q(\bar{\rho}_t, \pi/2)$$

$$\bar{q} \approx - \frac{2\pi I}{I_P} \frac{\bar{\rho}_t^2}{R'^2_0} \frac{1}{\left[1 - \left(1 - \frac{\bar{\rho}_t^2}{a^2} \right)^{\gamma+1} \right]} \quad (3.21)$$

O fluxo poloidal da densidade de corrente I é, em primeira aproximação, dado por $I \approx -I_e/(2\pi)$ pois a corrente que produz o

campo toroidal I_e é muito maior que a corrente de plasma I_p .

Na figura 3.4 temos o perfil de $\bar{q}$ para o TBR-1 com $\gamma=3$.

Convém lembrar que onde $\bar{q} = m/n$ teremos superfícies racionais.

fig. 3.4- Perfil do fator de segurança médio $\bar{q}$ ao longo de $\theta_t = \pi/2$

Do perfil para $\bar{q}$ (fig 3.3) concluímos que o equilíbrio calculado neste capítulo descreve melhor o TBR-1.

4- CAMPO MAGNÉTICO DA HÉLICE EXTERNA

Estamos interessados em estudar a influência de campos helicoidais externos sobre o equilíbrio do plasma na geometria toroidal. Neste estudo consideraremos que é válida a superposição linear do campo magnético de equilíbrio e do campo magnético de hélices externa, isto é, não se considera a resposta do plasma. No capítulo 3, encontramos um equilíbrio que descreve alguns aspectos do TBR-1, resta-nos encontrar o campo magnético da hélice externa ao plasma para que possamos fazer a superposição mencionada.

Apresentamos, neste capítulo, o campo magnético da hélice obtido a partir do potencial escalar magnético Φ . O potencial escalar magnético satisfaz a equação de Laplace com a condição de contorno de que na superfície da câmara existem pares de fios com correntes em sentidos opostos.

4.1- CAMPO DAS HÉLICES

Numa região onde não há corrente elétrica devemos ter:

$$\nabla \times \vec{B} = 0 \quad (4.1)$$

definindo

$$\vec{B} = \nabla \Phi \quad (4.2a)$$

concluimos que Φ satisfaz

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (4.2b)$$

Para obtermos o campo da hélice a partir da (4.2), impõe-se que sobre a superfície toroidal existam fios enrolados com correntes adjacentes em sentidos contrários.

Adotando as coordenadas toroidais convencionais ξ , ω e φ e a condição de contorno acima, Kucinski e Caldas (Kucinski e Caldas 1987) obtiveram a solução para Φ como uma série infinita. O primeiro termo de Φ , para o caso de enrolamento linear dado por $u = m_0 \omega + n_0 \varphi$ e pares de fios, foi calculado como:

$$\Phi_0 = \left[\frac{\cosh \xi - \cos \omega}{\cosh \xi_0} \right]^{1/2} \frac{\mu_0 I}{\pi N} \left[\frac{e^{\xi_0'}}{e^{\xi}} \right]^{m_0 N + 1/2} \sin Nu \quad (4.3)$$

onde $\xi_0' =$ superfície toroidal de raio menor b e raio maior R_0

$$u = m_0 \omega + n_0 \varphi$$

No caso de pequenas curvaturas a relação entre as coordenadas toroidais com as polares locais são (Apêndice A):

$$\frac{e^{\xi_0'}}{e^{\xi}} \approx \frac{\rho}{b} \quad (4.4a)$$

$$\omega \approx \pi - \theta \quad (4.4b)$$

Substituindo (4.4a-b) em (4.3) e mantendo os termos de ordem zero, temos:

$$\Phi_0 = \frac{\mu_0 I}{\pi N} \left[\frac{\rho}{b} \right]^{m_0 N} \sin N u \quad (4.5)$$

Para que possamos superpor o campo da hélice ao campo de equilíbrio, é conveniente escrever ambos os campos no mesmo sistema de coordenadas e com a mesma origem. Como coordenadas comum adotaremos $(\rho_t, \theta_t, \varphi)$ definidas no capítulo 3.

Em princípio teríamos que resolver a equação de Laplace (4.2b) em termos de $(\rho_t, \theta_t$ e $\varphi)$ para se obter o campo da hélice. Argumentamos que obtida uma solução Φ em termos de ρ e θ , basta substituírmos $\rho \rightarrow \rho_t$ e $\theta \rightarrow \theta_t$ para obtermos a solução de ordem zero da equação de Laplace em termos de $(\rho_t, \theta_t, \varphi)$ pois na aproximação de ordem zero temos:

$$\rho_t \approx \rho \quad (4.6a)$$

$$\theta_t \approx \theta \quad (4.6b)$$

Outras correções só devem aparecer nos termos de ordem mais elevadas que não são considerados aqui. Portanto podemos escrever:

$$\Phi_0(\rho_t, u_t) \approx - \frac{\mu_0 I}{\pi N} \left[\frac{\rho_t}{b} \right]^{m_0 N} \sin N u_t \quad (4.7)$$

$$u_t = m_0 \theta_t - n_0 \varphi$$

Usando a relação (4.2a) obtemos para as componentes covariantes do campo magnético das hélices.

$$b_1 = \frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho_t} = - \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{m_0}{b} \left(\frac{\rho_t}{b} \right)^{m_0 N - 1} \sin N u_t \quad (4.8a)$$

$$b_2 = \frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta_t} = - \frac{\mu_0 I m_0}{\pi} \left(\frac{\rho_t}{b} \right)^{m_0 N} \cos N u_t \quad (4.8b)$$

$$b_3 = \frac{\partial \Phi_0}{\partial \varphi} = \frac{\mu_0 I n_0}{\pi} \left(\frac{\rho_t}{b} \right)^{m_0 N} \cos N u_t \quad (4.8c)$$

O próximo passo é superpor este campo ao campo de equilíbrio e fazer o mapeamento das linhas de força numa secção reta do tokamak.

5- INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DAS LINHAS DE FORÇA

Como dissemos anteriormente, o estudo da influência de campos helicoidais externos sobre o equilíbrio é feito considerando a superposição linear dos campos (equilíbrio + hélice). A análise da superposição dos campos é feita através do mapeamento das linhas de força em uma secção reta do tokamak.

As linhas do campo $\vec{B}$ devem satisfazer a equação:

$$d\vec{\ell} \times \vec{B} = 0 \quad (5.1)$$

Se o campo magnético possui simetria translacional, axial ou helicoidal, existe uma função de fluxo Ψ que define superfícies magnéticas. Ao introduzirmos o campo magnético da hélice externa quebramos a simetria axial; não sabemos se podemos definir uma função que descreva o comportamento das linhas de força numa região caótica. Temos, então, que integrar numericamente a equação (5.1) para obtermos o mapa de Poincaré.

Para o caso cilíndrico, a superposição dos campos acima mencionada resulta em ilhas magnéticas ao redor de superfícies magnéticas cujas linhas de força possuam a mesma helicidade que o enrolamento externo (Fernandes et al. 1988). No caso cilíndrico com uma certa correção toroidal aparecem ilhas secundárias ao redor das ilhas principais; os tamanhos das ilhas numa mesma superfície ressonante são iguais (Heller e Caldas 1988).

Neste capítulo, apresentamos os mapeamentos por nós obti-

dos para o caso toroidal. Apareceram as ilhas principais e secundárias. Um resultado interessante é que as ilhas sobre uma mesma superfície ressonante são de tamanhos diferentes.

5.1- COORDENADAS PARA A INTEGRAÇÃO NUMÉRICA.

Para integrarmos numericamente (5.1) escolhemos como coordenadas ξ , θ_t e φ . Nestas coordenadas a equação (5.1) fica escrita como:

$$\frac{d\xi}{B_\xi} = \frac{d\theta_t}{B_{\theta_t}} = \sinh\xi \frac{d\varphi}{B_\varphi} \quad (5.2)$$

ou seja:

$$\frac{d\xi}{d\varphi} = \sinh\xi \frac{B_\xi}{B_\varphi} \quad (5.3a)$$

$$\frac{d\theta_t}{d\varphi} = \sinh\xi \frac{B_{\theta_t}}{B_\varphi} \quad (5.3b)$$

As componentes ξ , θ_t e φ do campo magnético total $\vec{B}$ são dadas pela soma das componentes dos campos de equilíbrio ($\vec{B}_0$) e da hélice ($\vec{b}_1$), ou seja:

$$B_i = B_{i0} + b_i \quad (5.4)$$

onde $i = \xi, \theta_t$ e φ

Das relações (3.6-17) obtemos para o campo de equilíbrio:

$$B_{\theta_t 0} = \frac{1}{R'_0} \left[\Psi'_0(\rho_t) \left(1 - \frac{\rho_t}{R'_0} \Lambda(\rho_t) \cos \theta_t \right) + \Psi''_0(\rho_t) \cos \theta_t \right. \\ \left. \times \int_{\rho_t}^a \frac{\rho}{R'_0} \Lambda(\rho) d\rho \right] \quad (5.5a)$$

$$B_{\xi 0} = \left[B_{\theta_t 0} - \frac{1}{\rho_t^2} \Psi'_0(\rho_t) \int_{\rho_t}^a \frac{\rho}{R'_0} \Lambda(\rho) d\rho \right] \frac{\sin \theta_t}{\sinh \xi} \quad (5.5b)$$

$$B_{\varphi 0} = \frac{-\mu_0 I}{\rho_t \sinh \xi} \quad (5.5c)$$

onde

$$I \approx \frac{-I_e}{2\pi} \left[1 + (1-\beta)(\gamma+1) \frac{I_p^2}{I_e^2} \frac{R_0'^2}{a^2} \left(\frac{y^{\gamma+1}}{\gamma+1} + \dots + \frac{y^{2\gamma+1}}{2\gamma+1} \right) \right]$$

Das relações (4.8a-c) obtermos para o campo das hélices:

$$b_{\theta_t} = - \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{m_0}{b} \left(\frac{\rho_t}{b} \right)^{m_0 N-1} \cos N u_t \quad (5.6a)$$

$$b_{\xi} = \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{m_0}{R'_0} \sinh \xi \left(\frac{\rho_t}{b} \right)^{m_0 N} \sin N u_t \quad (5.6b)$$

$$b_{\varphi} = \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{n_0}{b} \frac{1}{\sinh \xi} \left(\frac{\rho_t}{b} \right)^{m_0 N-1} \cos N u_t \quad (5.6c)$$

5.2- MÉTODO DE INTEGRAÇÃO

Existem vários métodos numéricos para se integrar sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Estes podem ser classificados como (Stoer e Burlirsch 1980):

- a) método de um passo
- b) método de múltiplos passos
- c) método de extrapolação

Para integrarmos o sistema (5.3), estudamos somente os dois primeiros métodos.

No método de um passo calcula-se o ponto posterior usando somente o ponto anterior. Isto é, se consideramos $y' = f(x,y)$ como sendo a equação a ser integrada, temos por este método que:

$$x_{i+1} = x_i + h \quad (5.7a)$$

$$y_{i+1} = y_i + h F(x_i, y_i; h; f) \quad (5.7b)$$

onde h = passo de integração

F = função que depende do ponto anterior (x_i, y_i)

conhecido o ponto inicial x_0 e y_0 obtém-se os pontos consecutivos $(x_1, y_1) \dots (x_n, y_n)$. Exemplos deste método são: método de Euler e método de Runge-Kutta.

No método de múltiplos passos calcula-se o ponto posterior considerando os pontos anteriormente calculados. Esquemáticamente temos:

$$x_{i+1} = x_i + h \quad (5.8a)$$

$$y_{i-n}, y_{i-n+1}, \dots, y_i \Rightarrow y_{i+1} \quad (5.8b)$$

Este método também permite fazer uma predição para y_{i+1} e posteriormente corrigi-lo, isto é, permite um esquema de iteração do tipo:

$$y_{i+1}^{(j+1)} = G(y_{i+1}^{(j)}) \quad (5.9)$$

Exemplos de método de predição é o de Adams-Bashforth e de método

de correção é o de Adams-Moulton.

Inicialmente utilizamos o método de Euler para integrar (5.3) por ser simples de se implementar. Este método utiliza a aproximação linear em torno do ponto (x_1, y_1) . O esquema de integração é:

$$x_{i+1} = x_i + h \quad (5.10a)$$

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) \quad (5.10b)$$

onde $y' = f(x, y)$

Uma dificuldade que surgiu na escolha deste método foi o tamanho do passo de integração h ; não sabíamos a priori qual o tamanho ideal de h para garantir poucos erros numéricos. Testando vários passos de integração notamos que o mapeamento depende fortemente deste parâmetro. Resolvemos, então, optar por métodos mais elaborados de integração.

No computador VAX do IFUSP existe uma biblioteca de rotinas numéricas que permite integrar sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. A rotina por nós escolhida é denominada de DIVPAG e faz parte do IMSL. Esta rotina utiliza o método de Adams-Moulton ou o método de Gear para integração. Os parâmetros necessários para usar a rotina são:

- a) subrotina com o sistema de equações a ser integrada
- b) pontos inicial e final da variável independente
- c) tolerância no erro

d) método de integração (Adams-Moulton ou Gear)

No nosso caso, o sistema a ser integrado são as equações (5.3a-b) e a variável independente é φ . Os pontos inicial e final da integração devem ficar sobre o plano do mapeamento.

A seguir mostramos os mapeamentos obtidos usando os parâmetros do TBR-1 e com a tolerância de 10^{-9} no erro. Nas figuras (5.1), (5.2) e (5.3) temos o enrolamento com $m_0 = 2$ e $n_0 = 1$ e com correntes nas hélices de 45, 90 e 180 A respectivamente. Nas figuras (5.4), (5.5) e (5.6) temos o enrolamento com $m_0 = 3$ e $n_0 = 1$ com correntes nas hélices de 45, 90 e 180 A respectivamente. Nos mapeamentos aparecem as ilhas magnéticas principais e secundárias. As ilhas secundárias surgem pelo fato de usarmos geometria toroidal. Deve-se notar que as ilhas sobre uma superfície ressonante são de tamanhos diferentes, são mais largas na região mais próxima ao eixo de rotação do toróide. Este fato é bem diferente do modelo cilíndrico com correção toroidal, neste modelo as ilhas sobre a mesma superfície ressonante possuem tamanhos iguais (Heller e Caldas 1988). Nos mapeamentos vemos também que a região caótica entre as ilhas aumenta com a corrente nas hélices. Isto pode ser explicado se consideramos que a largura das ilhas aumenta com a corrente e que pode haver a superposição das mesmas.

fig. 5.1- Mapeamento com $m_0=2$ $n_0=1$ e corrente na hélice de 45 A
(plano $\varphi = \pi$).

fig. 5.2- Mapeamento com $m_0=2$ $n_0=1$ e corrente na hélice de 90 A
(plano $\varphi = \pi$).

fig. 5.3- Mapeamento com $m_0=2$ $n_0=1$ e corrente na hélice de 180 A
(plano $\varphi = \pi$).

fig. S.4- Mapeamento com $m_0=3$ $n_0=1$ e corrente na hélice de 45 A
(plano $\varphi = \pi$).

fig. S.5- Mapeamento com $m_0=3$ $n_0=1$ e corrente na hélice de 90 A
(plano $\varphi = \pi$).

fig. 5.6- Mapeamento com $m_0=3$ $n_0=1$ e corrente na hélice de 180 A
(plano $\varphi = \pi$).

6- CONCLUSÕES

Nosso objetivo foi o de obter mapas de Poincaré das linhas de campo resultante da superposição linear de campos magnéticos devidos a correntes helicoidais externas e a um plasma toroidal em equilíbrio. O campo magnético do plasma foi obtido de uma solução aproximada da equação de Grad-Shafranov com uma densidade de corrente que tem um máximo no centro da coluna de plasma. O campo magnético da hélice foi obtido da solução da equação de Laplace.

Nos mapeamentos consideramos um estado de equilíbrio característico do TBR-1 e variamos o passo e a corrente da hélice externa. A intensidade da perturbação que atua sobre o plasma toroidal é dada por essa corrente.

Devido à falta de simetria, não há nenhuma expressão analítica para os mapas de Poincaré. Estes foram, então, obtidos pela integração numérica da equação das linhas de força.

Nos mapeamentos temos os seguintes resultados:

- 1- Aparecem as ilhas magnéticas principais (m/n) e as ilhas magnéticas secundárias ($m \pm 1/n$). Se a perturbação do plasma for suficientemente pequena, observa-se que existem ilhas magnéticas de ordem mais elevadas que a secundária, quantitativamente suas dimensões não devem estar corretas já que termos da ordem de $(a/R'_0)^2$ foram desprezados. As ilhas magnéticas de ordem superior a primária surgem devido à geometria toroidal.

- 2- As ilhas magnéticas sobre uma mesma superfície ressonante possuem tamanhos diferentes; as ilhas são menores na parte mais próximas ao eixo de rotação. Mapas análogos feitos para uma plasma cilíndrico com uma correção no campo toroidal resultam em ilhas com mesmo tamanho sobre uma mesma superfície ressonante.
- 3- A largura da região caótica aumenta com as correntes nas hélices, este aumento pode ser causado devido à superposição das ilhas magnéticas; a largura da ilha está relacionado com o parâmetro de perturbação. Nota-se que o caso $m_0=3/n_0=1$ é mais sensível à perturbação; as regiões com $\bar{q} = 3$ e $\bar{q} = 4$ situam muito próximas entre si, logo com uma pequena perturbação temos a superposição da ilhas principal 3/1 com a ilha secundária 4/1.

Se o comportamento das linhas de força do campo magnético torna-se muito caótico podemos ter disrupções do plasma pois as partículas carregadas se movem mais facilmente ao longo das mesma.

Uma continuação para este trabalho seria analisar como o cisalhamento e a pressão influenciam nos mapeamentos. Seria interessante, também, analisar a difusão das linhas de força por entre as ilhas magnéticas.

No nosso trabalho consideramos que as correntes que perturbavam o plasma eram externas, um mapeamento pode ser feito considerando que as correntes estão sobre uma superfície racional. Alguns modos MHD do plasma podem ser simulados por este modelo; a intensidade destas correntes podem ser obtidas experimentalmente.

APÊNDICE A- RELAÇÕES ENTRE COORDENADAS TOROIDAIS E POLARES LOCAIS

As coordenadas toroidais ξ , ω são definidas por (figura A1):

$$r = \frac{R'_0 \sinh \xi}{\cosh \xi - \cos \omega} \quad z = \frac{R'_0 \sin \omega}{\cosh \xi - \cos \omega} \quad (A1)$$

onde r e z são as coordenadas cilíndricas. Junto com o ângulo φ , indicado na figura A1, ξ e ω formam o sistema de coordenadas toroidais

Se $\xi = \xi_0$ define a superfície toroidal, então:

$$\text{raio menor} \quad b = \frac{R_0}{\cosh \xi_0} \quad (A2.a)$$

$$\text{raio maior} \quad R'_0 = R_0 \left[1 - \frac{b^2}{R_0^2} \right]^{1/2} \quad (A2.b)$$

Se denominamos ρ e θ como sendo as coordenadas polares locais temos:

$$r = R_0 - \rho \cos \theta \quad z = \rho \sin \theta \quad (A3)$$

Comparando (A3) e (A1) obtemos a relação entre as coordenadas toroidais e polares locais.

$$\cotan\omega = \left[1 - \frac{b^2}{R_0^2} \right]^{-1/2} \left[\cotan(\pi-\theta) + \frac{\rho^2 + b^2}{2R_0\rho\sin\theta} \right] \quad (A4)$$

$$\cotanh\xi = \frac{1 - \frac{\rho}{R_0} \cos\theta + \frac{\rho^2 - b^2}{2R_0^2}}{\left[1 - \frac{b^2}{R_0^2} \right]^{1/2} \left[1 - \frac{\rho}{R_0} \cos\theta \right]} \quad (A5)$$

A equação (A5) pode ser escrita numa forma mais conveniente:

$$e^{-2\xi} = e^{-2\xi_0} \frac{1 - \frac{\rho}{R_0} \cos\theta - \frac{b}{2R_0} e^{\xi_0} \left[1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right]}{1 - \frac{\rho}{R_0} \cos\theta - \frac{b}{2R_0} e^{-\xi_0} \left[1 - \frac{\rho^2}{b^2} \right]} \quad (A6)$$

Se $\frac{b}{R_0} \ll 1$ (grande razão de aspecto) e $\frac{\rho}{b} \gg \frac{b}{R_0}$ (não próximo ao eixo), podemos escrever

$$e^{-\xi} \approx e^{-\xi_0} \frac{\rho}{b} \quad (A.7a)$$

$$\omega \approx \pi - (\theta + \varepsilon \sin\theta) \quad (A.7b)$$

$$\varepsilon = \frac{\rho^2 + b^2}{2R_0\rho}$$

e os vetores unitários são:

$$\vec{e}_{\xi} \approx -\vec{e}_{\rho}$$

$$\vec{e}_{\omega} \approx -\vec{e}_{\theta}$$

fig. A1 - Sistema de coordenadas toroidais.

APÊNDICE B- EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO AUTO-CONSISTENTE EM COORDENADAS
GENERALIZADAS

Utilizando as equações MHD ideal

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (B1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (B2)$$

$$\nabla P = j \times \vec{B} \quad (B3)$$

Kucinski e Caldas (Kucinski e Caldas 1990) obtiveram a equação de Grad-Shafranov nas coordenadas generalizadas u_1 , u_2 e u_3 . Na equação supõe-se que u_3 é a coordenada de simetria e u_2 a coordenada transversal. A solução das equações (B1-3) foi escrita como:

$$\begin{aligned} (\Delta^* \Psi) \nabla \Psi = & - \mu_0 g_{33} \nabla P - \mu_0^2 I \nabla I + \mu_0 I \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{g_{23}}{g_{33}} \right) \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{g_{13}}{g_{33}} \right) \right] \nabla \Psi \end{aligned} \quad (B4)$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta^* \Psi \equiv & \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1} \frac{\sqrt{g}}{g_{33}} \left(g^{11} \frac{\partial \Psi}{\partial u_1} + g^{12} \frac{\partial \Psi}{\partial u_2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial u_2} \frac{\sqrt{g}}{g_{33}} \left(g^{12} \frac{\partial \Psi}{\partial u_1} + g^{22} \frac{\partial \Psi}{\partial u_2} \right) \right\} \end{aligned}$$

g_{ij} = tensor métrico covariante

$g = \det(g_{ij})$

Nesta equação Ψ , I e P são respectivamente fluxo transversal de $\vec{B}$, fluxo transversal de $\vec{j}$ e pressão cinética. As quantidades I e P só dependem de Ψ , ou seja, $P = P(\Psi)$ e $I = I(\Psi)$.

As componentes do campo magnético são dadas por:

$$B^1 = - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \Psi}{\partial u_2} \quad (B5)$$

$$B^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \Psi}{\partial u_1} \quad (B6)$$

$$B_3 = - \mu_0 I \quad (B7)$$

A equação (B4) é particularmente útil quando se trabalha com coordenadas não ortogonais.

B.1- COORDENADAS TOROIDAIS

As coordenadas toroidais são definidas por

$$r = \frac{R'_0 \sinh \xi}{\cosh \xi - \cos \omega}$$

$$z = \frac{R'_0 \sin \omega}{\cosh \xi - \cos \omega}$$

onde r , z são coordenadas cilíndricas.

Se adotamos:

$$u_1 = \xi, \quad u_2 = \omega, \quad u_3 = \varphi$$

encontramos como base contravariante

$$e^1 = \nabla \xi = \frac{\vec{e}_\xi}{h_\xi}$$

$$e^2 = \nabla \omega = \frac{\vec{e}_\omega}{h_\omega}$$

$$e^3 = \nabla \varphi = \frac{\vec{e}_\varphi}{h_\varphi}$$

$$\text{onde } h_\xi = h_\omega = \frac{R'_0}{\cosh \xi - \cos \omega}, \quad h_\varphi = h_\xi \sinh \xi$$

$\vec{e}_\xi, \vec{e}_\omega, \vec{e}_\varphi$ são versores unitários na direção ξ, ω e φ

A métrica é dada por:

$$\sqrt{g} = (e^1 \cdot e^2 \cdot e^3)^{-1} = h_\xi h_\omega h_\varphi$$

$$g^{11} = g^{22} = \frac{1}{h_\xi^2}$$

$$g_{33} = h_\varphi^2$$

Portanto a equação B4 torna-se:

$$\frac{\sinh \xi}{h_{\xi}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{h_{\varphi}} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{h_{\varphi}} \frac{\partial \Psi}{\partial \omega} \right] = -\mu_0 h_{\varphi}^2 P' - \mu_0^2 II'$$

Introduzindo a função F

$$\Psi = [2(\cosh \xi - \cos \omega)]^{-1/2} F$$

obtemos a equação:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \omega^2} - \coth \xi \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{1}{4} F =$$

$$- \frac{2R_0'^2}{[2(\cosh \xi - \cos \omega)]^{3/2}} \left\{ \frac{4R_0'^2 \sinh^2 \xi}{[2(\cosh \xi - \cos \omega)]^2} \mu_0 P' + \mu_0^2 II' \right\}$$

As componentes de $\vec{B}$ são (eq. B5-7)

$$h_{\xi} h_{\varphi} B_{\omega} = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}$$

$$h_{\omega} h_{\varphi} B_{\xi} = - \frac{\partial \Psi}{\partial \omega}$$

$$h_{\varphi} B_{\varphi} = -\mu_0 I$$

B.2- COORDENADAS POLARES TOROIDAIS

As coordenadas polares toroidais são definidas por:

$$u_1 \equiv \rho_t = \frac{R'_0}{\cosh \xi - \cos \omega}$$

$$u_2 \equiv \theta_t = \pi - \omega$$

$$u_3 \equiv \varphi$$

onde ξ , ω e φ são as coordenadas toroidais convencionais.

A base contravariante é dada por:

$$e^1 = \nabla \rho_t = -\rho_t \frac{\sinh \xi}{R'_0} \vec{e}_\xi - \rho_t \frac{\sin \theta_t}{R'_0} \vec{e}_\omega$$

$$e^2 = \nabla \theta_t = -\frac{\vec{e}_\omega}{\rho_t}$$

$$e^3 = \nabla \varphi = \frac{\vec{e}_\varphi}{\rho_t \sinh \xi}$$

A métrica é dada por:

$$\sqrt{g} = R'_0 \rho_t$$

$$g^{11} = 1 - 2 \frac{\rho_t}{R'_0} \cos\theta_t$$

$$g^{22} = \frac{1}{\rho_t^2}$$

$$g^{12} = g^{21} = \frac{\sin\theta_t}{R'_0}$$

$$g^{33} = \frac{1}{\rho_t^2 \sinh^2 \xi}$$

Substituindo g^{ij} na equação B4 obteremos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho_t} \frac{\partial}{\partial \rho_t} \left(\rho_t \frac{\partial \Psi}{\partial \rho_t} \right) + \frac{1}{\rho_t^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_t^2} = \mu_0 J_{30}(\Psi) + \mu_0 R_0'^2 \frac{dP}{d\Psi} \\ & \times \left(2 \frac{\rho_t}{R'_0} \cos\theta_t + \frac{\rho_t^2}{R_0'^2} \sin^2\theta_t \right) + \frac{\rho_t \cos\theta_t}{R'_0} \left(2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho_t^2} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\rho_t} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho_t} \right) + \frac{\rho_t \sin\theta_t}{R'_0} \left(\frac{1}{\rho_t^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_t} - \frac{2}{\rho_t} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_t \partial \rho_t} \right) \end{aligned}$$

onde $J_{30}(\Psi) = - \mu_0 R_0'^2 \frac{dP}{d\Psi} - \frac{d}{d\Psi} \frac{\mu_0^2 I^2}{2}$

As componentes de $\vec{B}$ são (eq. B5-7)

$$B^1 = - \frac{1}{R'_0 \rho_t} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_t}$$

$$B^2 = \frac{1}{R'_0 \rho_t} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho_t}$$

$$B_3 = -\mu_0 I(\Psi)$$

APÊNDICE C- PARÂMETROS DO TRB-1

$I_p = 9,2 \text{ kA}$ corrente de plasma

$R_0 = 0,30 \text{ m}$ raio maior

$a = 0,08 \text{ m}$ raio do limitador

$b = 0,11 \text{ m}$ raio da câmara

$\Lambda(a) = 0,28$ parâmetro de assimetria

$I_e = 6 \times 10^5 \text{ A}$ corrente do campo toroidal externo

$B_\varphi \approx 5 \text{ kG}$ campo toroidal

REFERÊNCIAS

- Andrade, M.C.R. 1989 Dissertação de mestrado apresentada no IFUSP, não publicada.
- Camargo, S.J. 1989 Dissertação de mestrado apresentada no IFUSP, não publicada. Ver também Camargo, S.J., Caldas, I.L. 1990, Proc. 17th European Conference on Plasma Physics (Amsterdam, 1990), EPS, 675.
- Campbell, D.J. et al. 1986 Nucl. Fusion 26, 1085.
- Campbell, D.J. et al. 1987 in the 11th Int. Conf. Plasma Phys. Contr. Fus. Res., Kyoto, IAEA-CN-47/A-VII-5, 433.
- Clemente, R.A. 1982 Phys. Fluids 25, 518.
- De Menna, L. 1977 Nuclear Fusion 17, 455.
- Dubois, M.A., Pecquet, A.L., Reverden, C. 1983 Nucl. Fus. 23, 147.
- Egorov, S.M., Kuteev, B.V., Miroshnikov, I.V., Sergeev, V.Yu. 1987 JETP Lett. 46, 180.
- Equipe TFR 1977 Nucl. Fus. 17, 1283
- Fernandes, A.S., Heller, M.V.A.P., Caldas, I.L. 1988 Plasma Phys. Contr. Fus. 30, 1023.
- Finn, J.M. 1975 Nucl. Fus. 15, 845.
- Haas, F.A. 1972 Phys. Fluids 15, 141.

- Harafuji, K., Hayashi, T., Sato, T. 1987 Plasma Phys. Cont. Fus. 29, 1483.
- Heller, M.V.A.P., Caldas, I.L. 1988 Proc. III Latin-American Workshop in Plasma Physics (Santiago, 1988), FF-PUC, 1.
- Heller, M.V.A.P., Caldas, I.L. 1990, Proc IV Latin-American Workshop on Plasma Physics (Buenos Aires, 1990), CNEA-SCT-IAEA, 23.
- Jahns, G.L., Saler, M., Waddell, B.V., Callen, J.D., Hicks, H.R. 1978 Nucl. Fusion 18, 609.
- Kadomtsev, B.B. 1975 Sov. J. Plasma Phys. 1, 389.
- Karger, F. et al. 1975 Proc. 5th Int. Conf. Tokyo (1974) 1, IAEA, Viena 207.
- Karger, F. et al. 1976 in 6th Int. Conf. Plasma Phys. Contr. Fus. Res., Berchtesgaden, IAEA-CN-35/A-7.
- Kucinski, M.Y., Caldas, I.L., 1987 Zeitschrift für Naturforschung 42a, 1124.
- Kucinski, M.Y., Caldas, I.L., Monteiro, L.H.A., Okano, V. 1990 "Toroidal Plasma Equilibrium with Arbitrary Current Distribution" Publicações IFUSP/P-818 - Instituto de Física - Universidade de São Paulo, aceito para publicação em J. Plasma Phys. Ver também Kucinski, M.Y., Caldas, I.L., Monteiro, L.H.A., Okano, V., Proc. of the Latin-American Workshop on Plasma Physics (Buenos Aires, 1990), I, 19 (1990).

- Kucinski, M.Y., Caldas, I.L. 1990 - "MHD Equilibrium Equation in Symmetric Systems" - Publicações IFUSP/P-817 - Instituto de Física -Universidade de São Paulo a ser publicado.
- Lai, C.S., Verluen, M. 1976 Phys. Fluids 19, 1066.
- Maschke, E.K. 1973 Plasma Physics 15, 535.
- Mazzucato, E. 1975 Phys. Fluids 18, 536.
- McGuire, K., Robison, D.C. 1980 Phys. Rev. Lett. 44, 1666.
- Mirnov, S.V. 1979 in IAEA Symposium on Current Disruptions in Toroidal Devices, Garching, B-1.
- Monteiro, L.H.A. 1990 Dissertação de mestrado em desenvolvimento no IFUSP.
- Morozov, A.I., Solov'ev, L.S. 1966 Rev. of Plasma Physics 2 (ed M.A. Leontovich) Consultants Bureau, N.Y.
- Mukhovatov, V.S., Shafranov, V.D. 1971 Nuclear Fusion 11, 605.
- Rechester, A.B., Stix, T.H. 1976 Phys. Rev. Lett. 36, 587.
- Roberts, D.E. et al. 1986 Nucl. Fus. 26, 785.
- Shafranov, V.D. 1958 Soviet Physics JETP 6, 545.
- Shafranov, V.D. 1960 Soviet Physics JETP 37, 775.
- Shafranov, V.D. 1963 Soviet J. of Atomic Energy 13, 1149.
- Stoer, J., Bulirsch, R. 1980 "Introduction to Numerical Analysis", Springer-Verlag New York Inc., N.Y.
- Sykes, A., Wesson, J.A. 1976 Phys. Rev. Lett. 37, 140.

- Vannucci, A., Bender, O.W., Caldas, I.L., Tan, I.H., Nascimento, I.C., Sanada, E.K. 1988 Il Nuovo Cimento 10d, 1193.
- Vannucci, A., Gill, R.D. 1989 JET Internal Report JET-IR(89) 15.
- Vannucci, A., Nascimento, I.C., Caldas, I.L. 1989 Plasma Phys. and Controlled Fusion 31, 147.
- Von Goeler, S., Stodiek, W., Sauthoff, N. 1974 Phys. Rev. Lett 33, 1201.
- Waddell, B.V., Monticello, D.A., Rosenbluth, M.N., White, R.B. 1976 Nucl. Fusion 16, 528
- Waddell, B.V. et al. 1978 Phys. Rev. Lett. 41, 1386.
- West, W.P. et al. 1987 Phys. Rev. Lett. 58, 2758.
- Wesson, J.A. 1978 Nuclear Fusion 18, 87.
- Wesson, J.A. 1986 Plasma Phys. Contr. Fusion 28, 243.
- Yoshikawa, S. 1974 Phys. Fluids 17, 178.