7

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

"ESTUDO DA RAZÃO DE POLARIZAÇÃO DE RADIAÇÃO γ DE 662 keV
ELASTICAMENTE ESPALHADA EM CHUMBO E PLATINA"

SBI-IFUSP

305M810T1164

Marina Lia Toscano

Tese submetida como requisito
parcial para a obtenção do
grau de Mestre em Ciências.

Orientador: Dr. José Roberto Moreira

São Paulo

Março 1980

Joel Roberto Leite
Joel Roberto Moreira
Solange de Barros

Aos meus pais

Ao William

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. José R. Moreira pela minha formação como pesquisadora e pela dedicação com que orientou esta tese.

Ao Prof. José R. Leite pelas valiosas discussões e pela colaboração na parte teórica.

A Profa. Solange M. C. de Barros e aos colegas Odair Gonçalves e M.B. Gaspar pela participação através de discussões, informações, confecção de programas, etc..

Ao Paulo Pascholati cujo contínuo apoio e ajuda tem sido inestimáveis.

Ao Philippe Gouffon e Max Cohenca pela assessoria na parte computacional.

A todo o pessoal da oficina mecânica, da marcenaria e aos motoristas do Acelerador Linear, sem os quais não teria sido possível a montagem do equipamento.

Ao Prof. Hamilton do Instituto de Biologia da USP que facilitou o uso da fonte de Césio.

A Izabel pela datilografia.

A Eliana e ao Cassiano pelos desenhos.

A Vera e à Lourdes pelas diversas ajudas prestadas.

Ao colega J. Ricardo Marinelli e a todos os amigos que me auxiliaram.

A FAPESP pelo apoio financeiro.

Um agradecimento especial aos meus pais sem os quais talvez não fosse possível a realização deste trabalho.

ÍNDICE

	página
Resumo.....	i
Abstract.....	ii
INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO I: FUNDAMENTOS TEÓRICOS	
1 - Introdução: tratamento do problema de espalhamento...	4
2 - Espalhamento Rayleigh.....	8
2.1 - Método Brown, Peierls e Woodward.....	10
2.2 - Amplitudes Rayleigh-Thomson calculadas por W.R. Johnson.....	15
2.3 - O método Hartree-Fock - potenciais de troca....	19
2.4 - Outras técnicas para o cálculo das amplitudes..	26
3 - Espalhamento Thomson e Delbrück.....	29
4 - Ressonância nuclear.....	32
5 - Polarização linear e circular - Dependência da seção de choque com a polarização.....	33
CAPÍTULO II: RESULTADOS TEÓRICOS	
1 - Espalhamento elástico seguido de espalhamento Compton	38
2 - Cálculo da razão teórica de polarização para chumbo e platina na energia de 662 keV.....	43
2.1 - Valor de K.....	43
2.2 - Ajuste das curvas para as amplitudes Johnson...	43

2.3 - Valores de R teóricos.....	44
2.4 - Valores do desvio de R (σ_R).....	47

CAPÍTULO III: PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

1 - Arranjo experimental.....	48
1.1 - A fonte.....	50
1.2 - O polarímetro.....	50
1.3 - Alvos usados.....	54
1.4 - Descrição dos circuitos eletrônicos.....	55
2 - Testes conduzidos para verificação e ajuste de equipamento.....	62
3 - Sistemática de medidas.....	72
4 - Cálculo da razão de polarização experimental.....	77
5 - Considerações sobre as dimensões finitas dos componentes do sistema de medição - cálculo da eficiência do polarímetro.....	79
5.1 - Espalhamento Compton-Compton. Cálculo da razão de polarização considerando espalhadores e detectores pontuais.....	84
5.2 - Medidas do duplo espalhamento Compton com a fonte de Cobalto (^{60}Co).....	87
5.3 - Simulação computacional do duplo Compton.....	90

CAPÍTULO IV: RESULTADOS E CONCLUSÕES

Resultados e conclusões.....	98
------------------------------	----

APÊNDICES

A1 - Teoria de perturbação - Formalismo de Feynman.....	105
A2 - Espalhamento Delbrück e produção de pares.....	109
A3 - Efeito Compton - Fórmula de Klein-Nishina.....	113
A4 - O método Monte-Carlo.....	117

R E S U M O

Os efeitos de polarização devido ao espalhamento elástico de uma radiação não polarizada de 662 keV são estudados com um polarímetro de raios γ usando o espalhamento Compton como processo de análise.

Foram realizadas medidas com alvos de chumbo e platina em ângulos de espalhamento variando de 50° a 120° .

Nesta energia, os únicos processos que contribuem ao espalhamento elástico são o espalhamento Thomson Nuclear e o espalhamento Rayleigh. Desde que a intensidade e polarização da componente Thomson são bem conhecidas, as medidas permitem testar cálculos teóricos de espalhamento Rayleigh.

Os resultados experimentais concordam com o mêtodo exato introduzido por Brown et al. (Br55a) e com os refinados cálculos numéricos realizados por Johnson (Jo76).

ABSTRACT

Polarization effects due to 0.662 MeV unpolarized γ -rays elastically scattered, has been studied with a γ -ray polarimeter using Compton scattering as the analyzing process.

Lead and platinum were used as scatterers and measurements were performed for scattering angles varying from 50° to 120° .

At this energy the only processes contributing to elastic scattering are nuclear Thomson scattering and Rayleigh scattering.

Since the intensity and polarization of the Thomson component are readily calculable, the measurements provide a check of theories of Rayleigh scattering.

The experimental results agree with the method introduced by Brown et al. and with the refined numerical calculations of Johnson (Jo76).

INTRODUÇÃO

Em todas as experiências realizadas para evidenciar o efeito Delbrück, o conhecimento da contribuição do espalhamento Rayleigh é de importância fundamental.

De fato, é possível, em princípio, deduzir a seção de choque do efeito Delbrück subtraindo as contribuições das seções de choque de espalhamento elástico dos efeitos Thomson e Rayleigh. Enquanto que a contribuição Thomson é facilmente calculada, existe incerteza ainda com relação ao efeito Rayleigh.

A teoria deste último efeito devida a Franz (Fr35) era a única aceitável até 1954, mas sendo muito simplista não explica convenientemente o fenômeno. Em 1954 cálculos exatos foram realizados por Brenner, Brown e Woodward (Br55a, Br55b) para diversas energias, mas somente para o espalhamento da camada K dos elétrons do Hg.

Diversas experiências foram realizadas antes do advento dos detectores Ge-Li, mas era muito difícil avaliar as imprecisões devido à baixa eficiência dos detectores utilizados.

Em 1968 foi efetuada a primeira experiência com boa resolução, por Dixon e Storey (Di68) na energia de 1.33 MeV,

com alvos de chumbo. Mas as discrepâncias entre as curvas experimentais e teóricas prevaleceram.

Tentou-se eliminar as discrepâncias trocando o sinal da amplitude Rayleigh paralela ao plano de espalhamento ($a_{\parallel}$) ou efetuando a soma incoerente das amplitudes Rayleigh com os outros efeitos de espalhamento elástico.

Nenhuma destas explicações pode ser explicada teoricamente. Mais tarde elas foram rejeitadas experimentalmente por Schumacher et al. (Sc73): quando aplicados a 660 keV, ambos os procedimentos destroem a concordância entre teoria e experiência que existe a baixas energias.

Outros grupos surgiram interessados no estudo destas discrepâncias a 1.33 MeV (Ha70, Ha71).

Na região de energias entre 145 e 412 keV, ainda Schumacher et al. (Sc69, Sc73) verificaram que a concordância entre a teoria e experiência só era obtida quando se omitiam as amplitudes de spin-flip* das camadas M e N, também a razão teórica não sendo evidente.

Em vista destas inconsistências e aproveitando os cálculos teóricos recentemente realizados por Johnson (Jo76), mais amplos que os de Brenner et al. (Br 55b), achamos útil verificar experimentalmente os efeitos de polarização produzidos pelo espalhamento Rayleigh, já que isto nos forneceria informações sobre as amplitudes Rayleigh que parecem ser carentes no momento.

O presente trabalho estuda a razão de polarização

* Vide cap. I, Item 5.

de radiação γ de 662 keV após sofrer espalhamento elástico em placas de chumbo e platina.

No capítulo I apresentamos os fundamentos teóricos dos métodos de cálculo utilizados.

No capítulo II efetuamos os cálculos teóricos das curvas de razão de polarização em função do ângulo de espalhamento.

No capítulo III são descritos o polarímetro, as técnicas de medidas, a determinação da razão experimental e da eficiência do polarímetro.

No capítulo IV apresentamos os resultados experimentais comparando-os com os teóricos, efetuando uma discussão tão detalhada quanto possível dos mesmos.

CAPÍTULO I

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

1 - Introdução: tratamento do problema de espalhamento

A experiência demonstra o espalhamento de raios gama por átomos pesados como a soma coerente de quatro processos:

- a) o espalhamento Thomson Nuclear
- b) o espalhamento Delbrück
- c) o espalhamento Rayleigh
- d) a ressonância nuclear.

O espalhamento Delbrück e a ressonância nuclear contribuem com parcelas menores que 5% para gamas com energias inferiores a um MeV. Poderiam ser observadas ressonâncias provenientes da excitação de níveis individuais, mas estas são altamente improváveis já que exigem valores bem definidos para as energias do feixe incidente; por outro lado as ressonâncias gigantes só ocorrem acima de 8 MeV (Se65, Go48, Ax62).

A seção de choque para o espalhamento elástico po

de ser escrita como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| a_{EE} \right|^2 \quad (1.1)$$

(em unidades do raio clássico do elétron)

onde a amplitude de espalhamento elástico a_{EE} corresponde à soma das amplitudes dos 4 processos acima citados:

$$a_{EE} = a_{Th} + a_D + a_R + a_{RN}$$

mas para baixas energias pode ser aproximada por:

$$a_{EE} \approx a_{Th} + a_R$$

então a seção de choque será expressa em termos destas duas amplitudes, das quais apenas a_{Th} é exatamente conhecida:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| a_{Th} + a_R \right|^2 \quad * \quad (1.2)$$

O espalhamento Thomson nuclear refere-se à interação do fóton com o núcleo. A amplitude de espalhamento associada a este processo é bem descrita pela relação de Klein-Nishina (Fe62, Sa67) referida à carga e massa nucleares:

$$a_{Th} = - \frac{(Ze)^2}{4\pi M} \vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon}' = - \frac{r_0 Z^2 m}{M} \vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon}' \quad (1.3)$$

* Em unidades do raio clássico do elétron.

onde: r_0 é o raio de Bohr, Z o número atômico, m a massa de repouso do elétron, M a massa do núcleo, $\vec{\epsilon}$ e $\vec{\epsilon}'$ os versores que definem as polarizações dos fótons incidente e espalhado respectivamente.

Como será explicado no item 3 deste capítulo, os espalhamentos Thomson e Delbrück estão relacionados, sendo que este último só se torna importante para energias superiores a 1022 keV.

O espalhamento Rayleigh é o espalhamento de fótons pela coroa eletrônica. O fóton incidente interage elasticamente com um elétron atômico, excitando-se de tal modo que ao voltar ao seu estado original emite um fóton de mesma energia que o incidente.

Os primeiros trabalhos (Fr35) calculam as amplitudes Rayleigh aproximando os elétrons nos estados intermediários por elétrons livres (aproximação de Born). Aproximações estas, que levaram ao assim chamado fator de forma (F) que se relaciona com a respectiva seção de choque como:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{4\pi m} \right)^2 \times 4F^2 \quad (1.4)$$

onde o fator de forma F pode ser escrito em função do momento transferido q na colisão como:

$$F(q) = \int d^3r \psi^*(\vec{r}) \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) \psi(\vec{r}) \quad (1.5)$$

onde $\psi(\vec{r})$ é a função de onda do elétron orbital.

Verificou-se que este resultado não relativístico, quando utilizado com funções de onda relativística fornece valores que diferem em apenas 15% dos obtidos por cálculos exatos.

Em 1954, Brown, Peierls e Woodward (Br55a, Br55b) desenvolvem um formalismo exato para o espalhamento elástico de fótons por elétrons atômicos. Este fato incentivou diversos grupos a realizarem experiências nesta área.

Mas as medidas de alta precisão sucedem o advento dos detetores Ge-Li em 1968 (Di 68). São de especial relevância as realizadas pelo grupo de Schumacher (Sc69, Sc73) para espalhamento elástico de raios gama entre 0,1 e 1,0 MeV.

Anos mais tarde Johnson (Jo76) aprimora o método de Brown et al. (Br55a) e faz cálculos para as energias e elementos medidos por Schumacher. Ele assume que as discrepâncias que surgem entre teoria e experiência devem-se ao fato de ter negligenciado a contribuição das camadas M, N ou de ordem mais alta, já que os cálculos numéricos se tornariam absurdamente extensos.

Embora muitas experiências de espalhamento elástico tenham sido realizadas para fótons de baixa energia, apenas duas (So58, Br59) foram realizadas estudando os efeitos de polarização, com o agravante de precederem as medidas de Schumacher e os cálculos de Johnson. No presente trabalho estudamos os efeitos de polarização para o espalhamento elástico de fótons de 662 keV procurando reproduzir resultados teóricos obti-

dos por Johnson.

2 - Espalhamento Rayleigh

Neste processo, o fóton interage com um elétron atômico excitando-o de forma que, ao desexcitar-se emite um fóton de mesma energia que o incidente, voltando ao seu estado inicial.

Os diagramas da fig. FI.1 representam este espalhamento:

fig. FI.1

onde ψ_{nlm} é a função de onda do elétron orbital no seu estado não perturbado; (k, ϵ) e (k', ϵ') se referem ao momento e polarização dos fótons incidente e espalhado, respectivamente; I representa o estado intermediário.

A hamiltoniana que descreve bem o comportamento de um elétron ligado sob a ação de um potencial médio é:

$$H_0 = -\alpha \cdot p - \beta m + V(r) \quad (1.6)$$

onde $V(r)$ é o potencial central efetivo ao qual o elétron está sujeito; α e β são as matrizes de Dirac.

Na presença de um campo de radiação surge um termo perturbativo $e\alpha \cdot A$ onde A é o potencial vetor deste campo donde

$$H_1 = e\alpha \cdot A \quad (1.7)$$

O elemento de matriz de transição m pode ser obtido utilizando teoria de perturbação de 2a. ordem:

$$m = \sum_n \int d\vec{r}_2 \int d\vec{r}_1 \frac{\Psi_f^*(\vec{r}_2) H_1(\vec{r}_2) \Psi_n(\vec{r}_2) \Psi_n^*(\vec{r}_1) H_1(\vec{r}_1) \Psi_i(\vec{r}_1)}{E_i - E_n \pm \omega} \quad (1.8)$$

onde denotamos a energia do elétron no estado intermediário por E_n ; os estados inicial e final do elétron pelos sufixos i e f , e a energia dos raios γ por ω , $\sum_n$ indica a soma sobre os estados intermediários de energias positivas e negativas** discretas, ou bem uma integração sobre o contínuo. O sinal + refere-se ao caso em que o fóton incidente é primeiramente absorvido e o sinal - ao caso em que o emergente é emitido antes (fig. Fl.1, A e B, respectivamente).

* $\hbar = c = 1$.

** No caso é utilizado o formalismo para um elétron que, como se sabe fornece os mesmos resultados que o de elétron-positron.

O primeiro problema com que deparamos ao tentar calcular m , é a soma sobre os estados intermediários. Franz (Fr35) obtém os primeiros resultados em 1935 com sua técnica de fator de forma, e mais tarde em 1952, Bethe (Be33) obtém valores melhores (desvios da $\theta(15\%)$ dos cálculos exatos) utilizando funções de onda de Dirac.

Finalmente em 1954 Brown et al. (Br55a, Br55b, Br56) realizam um cálculo exato onde a energia do elétron nos estados intermediários é levada em conta, em contradição com a aproximação de fator de forma.

2.1 - Método Brown, Peierls e Woodward (Br55a, Br55b)

Este método que resolve um problema relativístico de 2ª. ordem é tal que, a equação de Dirac que descreve a função de onda inclui não somente um pequeno termo perturbativo, como também um grande potencial estático que deve ser levado em conta exatamente. Esta é a situação do espalhamento de raios γ de $0,32 \text{ mc}^2$ por elétrons K do mercúrio e o único caso que Brown et al. calculam explicitamente (Br55b).

O potencial central médio a que o elétron está sujeito é considerado como o Coulombiano nuclear Ze^2/r , desta forma os efeitos de blindagem não são levados em conta e os bons resultados se restringem aos elétrons K. Devemos ressaltar ainda que o potencial é considerado exatamente, pois se fosse expandido em potências de $Z\alpha$ estas seriam muito grandes para átomos pesados ($\sim 0,6$).

Por isto o termo perturbativo corresponderá ape-

nas aos efeitos de acoplamento com o campo de radiação $e\alpha_0 A$, isto é, a potências de $\alpha(1/137)$.

O elemento de matriz m a ser calculado pode ser de vários tipos, que correspondem:

(i) às duas possibilidades de ordenação dos fótons incidente e espalhado (fig. Fl.1, A e B, respectivamente). As amplitudes de transição para estes dois processos devem ser adicionadas.

(ii) às duas orientações de spin dos elétrons atômicos. Idem para as amplitudes.

(iii) às duas polarizações possíveis dos fótons incidente e espalhado. Isto leva a quatro casos que são calculados separadamente.

Então o elemento de matriz pode ser escrito:

$$m(\vec{E}_j, \vec{E}_{j'}) = \frac{e^2}{2\omega} \sum_n \int d\vec{r}_2 \int d\vec{r}_1 \left[\Psi_f(\vec{r}_2)^* \vec{E}_{j'} \cdot \alpha \times \right. \\ \left. \exp(-i\vec{k}' \cdot \vec{r}_2) \Psi_n(\vec{r}_2) \Psi_n^*(\vec{r}_1) \vec{E}_j \cdot \alpha \times \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}_1) \times \right. \\ \left. \Psi_i(\vec{r}_1) \right] / (E_i - E_n \pm \omega) \quad (1.9)$$

onde $\vec{k}$ e $\vec{k}'$ são os momentos dos fótons incidente e espalhado $\vec{E}_j$ e $\vec{E}_{j'}$ são os versores de polarização circular dos fótons incidente e espalhado respectivamente, definidos como:

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, i, 0) \quad \vec{E}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -i, 0)$$

j e j' assumem os valores 1 ou 2.

Num sistema de coordenadas como o da fig. FI.2:

fig. FI.2

Neste método a soma sobre os estados intermediários é substituída por somas parciais. Cada soma parcial representa uma dada dependência angular. A menos de um número finito estas somas parciais são irrelevantes; elas são obtidas resolvendo equações diferenciais inhomogêneas e integrando sobre a coordenada radial.

Definindo:

$$F(\vec{r}_2) = - \sum_n \int d\vec{\Omega}_1 \frac{\Psi_n^*(\vec{r}_2) \Psi_n(\vec{r}_1) \vec{E}_1 \cdot \vec{\Omega}_1 \exp(i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}_1) \Psi_i(\vec{r}_1)}{E_i - E_n \pm \omega} \quad (1.10)$$

o elemento de matriz é escrito como:

$$M(\vec{E}_1 \vec{E}_2) = \frac{e^2}{2\omega} \int d\vec{\Omega}_2 \Psi_f^*(\vec{r}_2) \vec{E}_2 \cdot \vec{\Omega}_2 \exp(i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}_2) F(\vec{r}_2) \quad (1.11)$$

No caso de espalhamento elástico $\psi_f \equiv \psi_i \equiv \psi$.

É possível mostrar que a função $F(\vec{r})$ satisfaz:

$$[-\alpha_0 p - \beta m + V(\vec{r}) - E_i + \omega] F(\vec{r}) = \vec{E}_0 \cdot \vec{k} \exp(i k_0 \vec{r}) \Psi_i(\vec{r})$$

onde foi utilizada a relação:

$$\sum_n \Psi_n(\vec{r}_2) \Psi_n^*(\vec{r}_1) = \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

em notação compacta:

$$[H_0 + \omega - E_i] F(\vec{r}) = Q(\vec{r}) \quad (1.12)$$

onde

$$H_0 = -\alpha_0 p(\vec{r}) - \beta m + V(\vec{r})$$

$$Q(\vec{r}) = \vec{E}_0 \cdot \vec{k} \exp(i k_0 \vec{r}) \Psi_i(\vec{r})$$

A seguir os autores expandem $Q(\vec{r})$ em autofunções dos operadores de Dirac $\mathbb{J}^2$, $\mathbb{J}_z$ e $K = \beta(2\mathbb{L} \cdot \mathbb{S} + 1)$, cujos autovalores são j , m e k , ou por conveniência, j , m e p ($p = k/|k|$). Assim:

$$Q(\vec{r}) = \sum_{lmp} Q_{lp}^m(\vec{r})$$

devido à ortogonalidade e completeza das autofunções, a cada termo Q_{lp}^m corresponde um termo F_{lp}^m com o mesmo conjunto de su-

fixos. Donde:

$$\left[H_0(\vec{r}) + w - E_i \right] F_{lp}^m(\vec{r}) = Q_{lp}^m(\vec{r}) \quad (1.13)$$

e

$$F(\vec{r}) = \sum_{m,lp} F_{lp}^m(\vec{r})$$

É possível então mostrar* que F_{lp}^m e Q_{lp}^m são matrizes do tipo:

$$F_{lp}^m(\vec{r}) = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \left(\frac{l-m+3/2}{2l+3} \right)^{\frac{1}{2}} Y_{l+1}^{m-1/2} i^{l+1} R_{lp}^m(r) \\ \left(\frac{l+m+3/2}{2l+3} \right)^{\frac{1}{2}} Y_{l+1}^{m+1/2} i^{l+1} R_{lp}^m(r) \\ \left(\frac{l+m+1/2}{2l+1} \right)^{\frac{1}{2}} Y_l^{m-1/2} i^{l+1} S_{lp}^m(r) \\ \left(\frac{l-m+1/2}{2l+1} \right)^{\frac{1}{2}} Y_l^{m+1/2} i^{l+1} S_{lp}^m(r) \\ \left(\frac{l-m+3/2}{2l+3} \right)^{\frac{1}{2}} Y^{m-1/2} i^{l+1} P_{lp}^m(r) \\ \left(\frac{l+m+3/2}{2l+3} \right)^{\frac{1}{2}} Y^{m+1/2} i^{l+1} P_{lp}^m(r) \\ \left(\frac{l+m+1/2}{2l+1} \right)^{\frac{1}{2}} Y^{m-1/2} i^l \tau_{lp}^m(r) \\ \left(\frac{l-m+1/2}{2l+1} \right)^{\frac{1}{2}} Y^{m+1/2} i^l \tau_{lp}^m(r) \end{vmatrix}$$

$$Q_{lp}^m(\vec{r}) = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \left(\frac{l-m+3/2}{2l+3} \right)^{\frac{1}{2}} Y_{l+1}^{m-1/2} i^{l+1} P_{lp}^m(r) \\ \left(\frac{l+m+3/2}{2l+3} \right)^{\frac{1}{2}} Y_{l+1}^{m+1/2} i^{l+1} P_{lp}^m(r) \\ \left(\frac{l+m+1/2}{2l+1} \right)^{\frac{1}{2}} Y_l^{m-1/2} i^l \tau_{lp}^m(r) \\ \left(\frac{l-m+1/2}{2l+1} \right)^{\frac{1}{2}} Y_l^{m+1/2} i^l \tau_{lp}^m(r) \end{vmatrix}$$

sendo que Q_{lp}^m é idêntico, exceto pela troca das funções R e S por P e τ respectivamente. O importante deste procedimento é a separabilidade de F e Q em parte radial e angular (representada pelos harmônicos esféricos).

Os autores então definem uma matriz diagonal W_{lp}^m

* Vide demonstração realizada por Bethe (Be33).

convenientemente construída, de harmônicos esféricos. De fato, ao efetuar a multiplicação de $W_{\ell p}^m$ pelos membros da equação que relaciona F e Q (1.13):

$$\left[H_0(r) + w - E_i \right] F_{\ell p}^m W_{\ell p}^m = Q_{\ell p}^m W_{\ell p}^m$$

e aplicando as relações de completeza dos harmônicos esféricos obtém-se quatro equações envolvendo apenas a variável radial:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dr} + \frac{k}{r} \right) S_{\ell p}^m(r) - (E_i - V + m \pm w) R_{\ell p}^m(r) &= P_{\ell p}^m(r) \\ - \left(\frac{d}{dr} - \frac{k}{r} \right) R_{\ell p}^m(r) - (E_i - V - m \pm w) S_{\ell p}^m(r) &= \gamma_{\ell p}^m(r) \end{aligned} \quad (1.14)$$

Finalmente estas expressões (1.14) são solúveis, pois a menos das inhomogeneidades, elas são similares às equações radiais de Dirac para um potencial central.

E assim após a solução do sistema pode-se reconstituir os elementos de matriz $m(\hat{e}_j, \hat{e}_{j'})$.

2.2 - Amplitudes Rayleigh-Thomson calculadas por Johnson (Jo76)

Levando em conta os dados de Schumacher (Sc69, Sc73a, Sc73b) em 1976 Johnson (Jo76) calcula teoricamente amplitudes e seções de choque para diversos elementos e energias entre 145 e 889 keV (em particular para 662 keV).

Johnson obtém as amplitudes Rayleigh segundo o $\underline{m\hat{e}}$

tudo introduzido por Brown, Peierls e Woodward (Br55a, Br55b) mas com algumas modificações:

(i) Utiliza funções de onda Dirac-Hartree-Fock-Slater (DHFS) em vez de usar funções de onda Coulombianas (que são utilizadas por Brown et al.).

(ii) As amplitudes L e M são adicionadas à da camada K sempre que suas contribuições forem relevantes (lembre que os cálculos já existentes eram apenas para elétrons K do mercúrio).

Johnson aproxima a seção de choque (devido à baixa energia incidente) por:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |a_{Th} + a_R|^2 \quad (1.2)$$

onde

$$a_{Th} = -r_0 Z^2 \frac{m}{M} \vec{\epsilon}_0 \cdot \vec{\epsilon}' \quad (1.3)$$

e decompõe a amplitude Rayleigh em termos dos vetores de polarização paralelo e perpendicular ao plano de espalhamento:

$$a_R = a_{R//} \vec{\epsilon}_{//} \cdot \vec{\epsilon}'_{//} + a_{R\perp} \vec{\epsilon}_{\perp} \cdot \vec{\epsilon}'_{\perp} \quad (1.15)$$

donde:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} [|a_{EE//}|^2 + |a_{EE\perp}|^2] \quad (1.16)$$

$a_{EE//}$ e a_{EEL} são as componentes do espalhamento elástico (Rayleigh + Thomson).

As amplitudes obtidas por Johnson relevantes ao nosso trabalho estão tabelados em T1.1 .

Para o chumbo e elementos próximos, Johnson inclui apenas as camadas K e L (devido a limitações computacionais).

Os resultados mostram, que para fótons de alta energia na escala atômica, o espalhamento Rayleigh é pronunciado na direção frontal.

Para ângulos médios e traseiros a contribuição do minante provém da camada K .

A importância relativa de L e camadas mais externas decresce com o aumento de energia e com o decréscimo de carga nuclear.

Este é um ponto crítico, pois embora o nosso interesse resida em espalhamentos a 662 keV, os alvos utilizados são materiais pesados (Pb, ~~Pt~~) e conseqüentemente a contribuição das camadas M , N... pode não ser desprezível.

Johnson obtém as funções de onda DHFS* utilizando um método numérico (Li68) baseado no método autoconsistente de Hartree-Fock, mas resolvendo a equação de Dirac para cada elétron, apenas o potencial de troca é não relativístico e baseado na aproximação de Slater de um gás de elétrons livres.

Ao comparar os dados de Schumacher (Sc69, Sc73a , Sc73b) com os valores de Johnson (J976) para as seções de cho-

* Dirac-Hartree-Fock-Slater.

Z	θ	$\text{Re}a_{R//}$	$\text{Im}a_{R//}$	$\text{Re}a_{R\perp}$	$\text{Im}a_{R\perp}$
82 (Pb)	0	-9,4060	0,1359	-9,4060	0,1359
	30	-0,8248	0,0450	-1,0216	0,0928
	60	-0,1207	-0,0138	-0,4292	0,0505
	90	0,0816	-0,0161	-0,2148	0,0303
	120	0,1190	-0,0117	-0,1462	0,0184
	150	0,1195	-0,0096	-0,1248	0,0115
73 (Ta)	0	-9,5443	0,0812	-9,5443	0,0812
	30	-0,7395	0,0246	-0,9090	0,0542
	60	-0,0961	-0,0085	-0,3339	0,0288
	90	0,0575	-0,0086	-0,1504	0,0169
	120	0,0799	-0,0059	-0,0976	0,0100
	150	0,0790	-0,0049	-0,0811	0,0060
60 (Nd)	0	-9,6586	0,0341	-9,6586	0,0341
	30	-0,6156	0,0093	-0,7458	0,0222
	60	-0,0614	-0,0036	-0,2024	0,0115
	90	0,0298	-0,0031	-0,0778	0,0066
	120	0,0393	-0,0020	-0,0469	0,0037
	150	0,0380	-0,0016	-0,0375	0,0021
50 (Sn)	0	-1,8945	0,0138	-1,8945	0,0138
	30	-0,4591	0,0037	-0,5493	0,0090
	60	-0,0320	-0,0013	-0,1046	0,0047
	90	0,0146	-0,0012	-0,0355	0,0028
	120	0,0177	-0,0008	-0,0206	0,0016
	150	0,0163	-0,0007	-0,0166	0,0009
42 (Mo)	0	-1,9222	0,0063	-1,9222	0,0063
	30	-0,3255	0,0016	-0,3876	0,0040
	60	-0,0182	-0,0005	-0,0590	0,0021
	90	0,0078	-0,0005	-0,0184	0,0012
	120	0,0091	-0,0004	-0,0104	0,0007
	150	0,0083	-0,0003	-0,0083	0,0004
30 (Zn)	0	-1,9572	0,0017	-1,9572	0,0017
	30	-0,1393	0,0005	-0,1649	0,0012
	60	-0,0052	-0,0002	-0,0171	0,0007
	90	0,0021	-0,0002	-0,0045	0,0004
	120	0,0022	-0,0002	-0,0023	0,0002
	150	0,0019	-0,0001	-0,0018	0,0002

TABELA TI.1

Amplitudes de espalhamento Rayleigh para a energia de 662 keV, em função do ângulo de espalhamento θ e da carga nuclear Z , calculada por Johnson e Kwok Tsang Cheng (Jo76).

que do chumbo observaram-se discrepâncias que oscilam entre 12% para $E = 145 \text{ keV}$ e 5% para $E = 889 \text{ keV}$. Para uma mesma energia ($E = 662 \text{ keV}$) as seções de choque teóricas e experimentais diferem entre 5% para Pb (elementos pesados) a 20% para zinco (elementos leves). O autor atribui estas diferenças à negligência das camadas mais externas. Mas a discrepância crescente para elementos leves, nos leva a crer que a aproximação de Slater para o potencial de troca seja inconveniente.

2.3 - O método Hartree-Fock - Potenciais de troca

A resolução da equação de onda representativa de um sistema de N elétrons apresenta grandes dificuldades na mecânica quântica.

Devem ser empregados métodos de solução aproximada tais como métodos perturbativos, variacionais, etc.. Um dos mais importantes entre os métodos variacionais é o proposto por Hartree (Ha28) para a resolução aproximada de um átomo de N elétrons.

Neste método a coroa atômica é um conjunto de elétrons, cada um representado por uma função de onda a uma partícula, movendo-se num campo de força central. Este potencial médio efetivo à que cada elétron está sujeito é uma aproximação do potencial resultante causado pelo núcleo e os restantes elétrons atômicos. Assim o modelo de Hartree permite aproximar um sistema físico complexo por um sistema de partículas sujeitas a operadores de um só corpo. Transforma um problema de muitos corpos em muitos problemas de um corpo.

Para resolver o sistema linear de equações integro-diferenciais, que surgem deste tratamento Hartree aplicou o método de aproximações sucessivas. Estas aproximações consistem em escolher apropriadamente um potencial inicial, obter funções de onda dos elétrons e a partir destas avaliar a distribuição de carga, e daí o potencial final. Quando o potencial final e inicial coincidem (dentro de certas aproximações) o processo é considerado terminado. Eis porque este potencial é chamado de auto-consistente.

Um campo auto-consistente que leva em conta as correlações no movimento dos elétrons foi obtido por Fock (Fo30) usando como função de onda inicial a representada pelo determinante de Slater, que possui a simetria correta para representar um sistema de N fermions.

A função de onda é então:

$$|\Psi\rangle \equiv \Psi(1,2,\dots,N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} u_1(x_1) & u_1(x_2) & \dots & u_1(x_N) \\ u_2(x_1) & u_2(x_2) & \dots & u_2(x_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_N(x_1) & u_N(x_2) & \dots & u_N(x_N) \end{vmatrix} \quad (1.17)$$

onde $u_i(x_j)$ é a função de onda de partícula única, e a coordenada x_j se refere a spin e posição da partícula.

Utilizando o princípio variacional:

$$\delta \varepsilon = \delta \frac{\langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} = 0 \quad (1.18)$$

onde o operador $\hat{H}$ é:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \hat{H}_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \frac{e^2}{r_{ij}} \quad (1.19)$$

e

$$\hat{H}_i = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + V(r_i)$$

H é a energia de N elétrons em interação Coulombiana, colocados no campo do núcleo, onde fixamos a origem das coordenadas.

Adotando a representação de Hartree-Fock para $|\psi\rangle$ dada pela equação (1.17), e usando a expressão variacional para a energia ε dada pela equação (1.18) obtemos a equação de Hartree-Fock para o estado u_i :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 + V(x_1) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \int |u_j(x_2)|^2 \frac{e^2}{r_{12}} dx_2 - \right. \quad (1.20)$$

$$\left. \sum_{j=1}^N \int \frac{u_j^*(x_2) u_j(x_1) u_i(x_2)}{u_i(x_1)} \frac{e^2}{r_{12}} dx_2 \right] u_i(x_1) = \varepsilon_i u_i(x_1)$$

As integrações também incluem os spins.

$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_1^2$ é a energia cinética do elétron i em (1).

$V(x_1)$ é o potencial a que este elétron está sujeito devido à atração do núcleo.

$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \int |u_j(x_2)|^2 \frac{e^2}{r_{12}} dx_2$ representa a energia Coulombia-

na de interação entre o elétron i e toda a carga eletrônica do átomo.

$$- \sum_{j=1}^N \int \frac{\psi_j^*(x_1) \psi_j(x_1) \psi_i(x_2)}{\psi_i(x_1)} \frac{e^2}{r_{12}} dx_2 \quad \text{é o termo de}$$

troca ou "exchange".

Se a Hamiltoniana H não depende do spin, a função de onda $\psi_i(x)$ é separável em uma parte espacial e uma parte só dependente do spin:

$$\psi_i(x) = \phi_i(\vec{r}) \chi_i(\sigma)$$

Assim o termo de troca de Hartree-Fock é escrito como:

$$X_{HF} = - \sum_{j=1}^N \delta(\sigma_i \sigma_j) \int \frac{\phi_j^*(\vec{r}_2) \phi_j(\vec{r}_1) \phi_i(\vec{r}_1)}{\phi_i(\vec{r}_1)} \frac{e^2}{r_{12}} d\vec{r}_2 \quad (1.21)$$

sendo que $\delta(\sigma_i \sigma_j)$ aparece devido à ortogonalidade das funções de onda de spin.

Devido à grande dificuldade de se trabalhar com o "exchange" de Hartree-Fock começaram a surgir várias aproximações para esse termo.

A primeira simplificação adotada foi supor o comportamento dos elétrons atômicos pelo de um gás de elétrons livres (gás de Fermi). Assim a função $\psi_i(x_j)$ é uma onda plana e a integral que aparece em X_{HF} é imediatamente resolvida; donde:

$$\chi_{EL} = -\frac{4}{\eta} K_F F(\eta) \quad (1.21)$$

para $\eta = \frac{K_i}{K_F}$, onde K_i é o momento do elétron i e K_F é o momento de Fermi.

A função $F(\eta)$ é definida como:

$$F(\eta) = \frac{1}{2} + \frac{(1-\eta^2)}{4\eta} \cdot \ln \left| \frac{1+\eta}{1-\eta} \right| \quad (1.22)$$

Aproveitando esta interpretação, em 1951 Slater propôs uma aproximação baseada em dois pontos essenciais:

(i) Para sistemas não homogêneos (átomos, sólidos, etc.)

Slater supõe a densidade eletrônica em um dado ponto igual à densidade de um gás de Fermi homogêneo, isto é, $\rho(\vec{r}) = n$, onde $\rho(\vec{r})$ é a densidade local do sistema e n é a densidade do gás de elétrons livres que varia pontualmente.

(ii) Todos os elétrons estão submetidos a um mesmo potencial de troca, isto é, a um valor de "exchange" médio. Em síntese:

$$\chi_s = \frac{\int_0^{K_F} \chi_{EL} d\vec{k}_i}{\int_0^{K_F} d\vec{k}_i} = \frac{\int_0^{K_F} -\frac{4}{\pi} K_F F(\eta) d\vec{k}_i}{\int_0^{K_F} d\vec{k}_i} = -\frac{3}{\pi} K_F \quad (1.23)$$

ou

$$\chi_s = -\frac{3}{\pi} (3\pi^2 \rho(r))^{1/3} \quad (1.24)$$

Esta versão simplificada do termo de troca de Hartree-Fock fornece valores de energias de ligação que concordam com os experimentais, no caso de átomos pesados, mas para átomos de número atômico baixo este potencial é uma aproximação muito "forte".

Em 1965 Kohn e Sham (Ko65) propõem a aproximação do gás de Fermi, mas supondo $K_i = K_F$, então:

$$\chi_{KSG} = -\frac{4}{\pi} K_F F(1) = -\frac{2}{\pi} K_F = \frac{2}{3} \chi_s \quad (1.25)$$

Na verdade esta idéia já tinha sido sugerida por Gaspar (Ga54).

Mas agora esta aproximação parece ser "fraca", isto é, os valores de energias de ligação eletrônicas são inferiores aos experimentais.

Em 1967 Liberman (Li68) sugere retomar a aproximação de gás de elétrons livres, não fazendo a média na esfera de Fermi e aproxima o vetor de onda K_i semiclassicamente por:

$$K_i = \left[E_i - V(r) \right]^{\frac{1}{2}}$$

donde o termo de troca de Liberman será:

$$X_L = -\frac{4}{\pi} K_F F \left(\frac{(E_i - V(r))^{\frac{1}{2}}}{K_F} \right) \quad (1.26)$$

(onde a função F é dada pela equação (1.22))

onde para cada orbital teremos um valor de "exchange". Embora esta aproximação seja melhor que a de Slater, ela perde muito em simplicidade, o que não é justificável para átomos pesados.

Uma versão do potencial de troca que tem se tornado bastante popular em nossos dias é o chamado método $X_\alpha = \alpha X_S$, onde α é um parâmetro empírico escolhido entre 1 e 2/3 (Sl68). Ainda que exista uma justificativa razoável para este parâmetro, muita crítica tem sido feita ao caráter semi-empírico da aproximação.

Algumas aproximações melhor fundamentadas foram propostas nos últimos anos, usadas em vários cálculos de átomos, moléculas e sólidos (He69, Le77).

Embora o potencial usado por Johnson seja o de Slater-Kohn-Sham, são importantes os comentários feitos neste capítulo sobre o potencial de troca. Isto porque a qualidade dos autovalores e das autofunções dependem, em certos casos, do tipo de aproximação feita neste potencial. Em muitos exemplos esta dependência pode ser fundamental. Obviamente não esperamos

para o caso em discussão neste trabalho, que um termo de troca diferente do utilizado venha a alterar fundamentalmente os resultados. As regiões de interesse do átomo, em nosso caso, são regiões de alta densidade onde a aproximação de Slater é razoável.

Entretanto, visualizamos neste trabalho uma boa possibilidade para estudar os efeitos de diferentes potenciais de troca, visto que testamos a qualidade das funções de onda.

2.4 - Outras técnicas para o cálculo de amplitudes Rayleigh

Embora os cálculos realizados por Johnson sejam mais corretos que os de seus predecessores, o seu método é exaustivo e requer técnicas acuradas de computação.

Prevendo estes problemas, Brown (Br57) propôs em 1957 um fator de forma corrigido e definido de maneira a levar em conta correções relativistas. Ele é escrito como:

$$F(q) = \int \psi^*(\vec{r}) \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) \psi(\vec{r}) f(r) d^3r \quad (1.27)$$

onde

$$f(r) = \begin{cases} 1 & \text{para o caso SF (spin flip)} \\ \frac{mc^2}{E+V} & \text{para o caso NSF (no spin flip)} \end{cases} \quad *$$

* SF = espalhamento com troca de helicidade do fóton incidente.
NSF = espalhamento sem troca de helicidade do fóton incidente.

$\vec{q}$ = momento transferido devido à colisão do fóton com o elétron

mc^2 = massa de repouso do elétron

$\psi = \psi_f = \psi_i$ (espalhamento elástico)

ϵ = energia total do elétron

V = potencial Coulombiano $\frac{Z\alpha}{r}$.

As amplitudes SF e NSF* em função de $F(q)$ são:

$$a_{\substack{SF \\ NSF}}(E, Z, \Theta) = \mp F_{\substack{SF \\ NSF}}(E, Z, \Theta) \frac{(-1 \pm \cos \Theta)}{2}$$

onde os termos $(-1+\cos\theta)/2$ e $(-1-\cos\theta)/2$ correspondem ao produto escalar $\vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon}'$ para os casos SF e NSF respectivamente.

Recentemente Schumacher, Smend e colaboradores (Sc73a, Sc73b, Sm73, Sm74) introduziram uma nova sistemática. Esta consiste na determinação das amplitudes de espalhamento a partir dos fatores de forma de Brown, multiplicadas por um fator de correção $\lambda(E, Z, \theta)$ que compensa a aproximação feita à teoria de perturbação de 2a. ordem, assim:

$$a_{\substack{SF \\ NSF}}(E, Z, \Theta) = \mp F_{\substack{SF \\ NSF}}(E, Z, \Theta) \frac{(-1 \pm \cos \Theta)}{2} \lambda_{\substack{SF \\ NSF}}(E, Z, \Theta) \quad (1.28)$$

onde $F(E, Z, \theta)$ é o fator de forma de Brown (1.27):

θ é o ângulo de espalhamento

Z é o número atômico do alvo

E é a energia da radiação incidente.

* Vide capítulo I, item 5.

fig. FI.3

Valores do fator de correção em função do número atômico e da energia. Note que ele se afasta do valor 1 para átomos pesados.

Os cálculos destes fatores de correção foram efetuados por Odair Gonçalves (Od77) para números atômicos próximos de 80. As funções obtidas $\lambda_{SF}^{NSF}(EZ0)$ (vide fig. Fl.3) oscilam entre 0,8 e 1,0 para energias de 662 keV a 279 keV, respectivamente.

As amplitudes assim obtidas fornecem valores de seções de choque que concordam satisfatoriamente com os experimentais.

Esta técnica do uso de fatores de forma corrigidos faz parte da sistemática de nosso grupo e se revela como uma alternativa prática a cálculos mais elaborados.

3 - Espalhamento Thomson e Delbrück (Pa74)

Estes dois processos de espalhamento, cujos estados inicial e final consistem apenas de fótons isoenergéticos, e onde a interação se dá com o campo Coulombiano nuclear, estão intimamente ligados.

Para simplificar vamos supor que o núcleo é um elétron pesado de carga Ze e massa $M \gg m$ (isto obviamente não é correto, pois o núcleo não é uma partícula pontual, nem um fermion, mas para o caso $\omega \ll M$ isto é irrelevante). Como exemplo podemos tomar o núcleo Pb com $M=200$ MeV. Se considerarmos o espalhamento neste núcleo os gráficos representativos da interação até a ordem e^6 estão mostrados na fig. Fl.4 abaixo:

Fig. FI.4

As amplitudes serão de ordem:

A) $Z^2 e^4$

B) $Z^2 e^6$

C) $Z^2 e^8$

Assim (para $\omega \ll M$, como é o caso) os diagramas A e B da fig. FI.4 correspondem ao espalhamento Thomson nuclear enquanto que o terceiro se refere à ordem mais baixa de espalhamento Delbrück. Da fig. FI.4(c) é imediato ver que este espalhamento só se torna importante para energias maiores que 1022 keV*; este diagrama ainda pode ser desdobrado em três, devido a

* Energia mínima para a produção de um par elétron-positron.

diferentes possíveis interações (fig. FI.5):

fig. FI.5

onde $\vec{k}$ e $\vec{k}'$ são os momentos dos fótons incidente e espalhado; p é o momento do elétron do par criado; q é o momento intercambiado pela interação do campo nuclear com o fóton.

Utilizando o teorema ótico é possível relacionar a amplitude imaginária do espalhamento Delbrück com a seção de choque para produção de pares (σ_{pp}) (Pa74):

$$\text{Im } A(\Theta=0)_D = \frac{\omega}{4\pi} \sigma_{pp} \quad (1.29)$$

que é complementada pela relação de dispersão:

$$\text{Re } A(\omega, 0) = \frac{2\omega^2}{\pi} \mathcal{P} \int \frac{\text{Im } A(\omega', 0)}{\omega'(\omega'^2 - \omega^2)} d\omega' \quad (1.30)$$

O espalhamento Thomson corresponde aos diagramas A e B da fig. FI.3.1, sua amplitude, deduzida através do formalismo de Schrödinger (Sa67), é:

$$a_{Th} = - \frac{(Ze)^2}{4\pi M} \vec{\hat{E}} \cdot \vec{\hat{E}}' = - r_0 Z^2 \frac{m}{M} \vec{\hat{E}} \cdot \vec{\hat{E}}' \quad (1.3)$$

onde $\vec{\hat{E}}$ e $\vec{\hat{E}}'$ são os vetores de polarização dos fótons incidente e espalhado, respectivamente. Donde as amplitudes Thomson paralela e perpendicular ao plano de espalhamento são:

$$a_{Th//} = - r_0 Z^2 \frac{m}{M} \quad (1.31)$$

$$a_{Th\perp} = - r_0 Z^2 \frac{m}{M} \cos \Theta$$

4 - Ressonância nuclear

A parte absorptiva da seção de choque de um fóton é devida à produção de pares (σ_{pp^*}), efeito fotoelétrico (σ_{PE}) e, finalmente a reações fotonucleares (σ_{PN}):

$$\sigma_{abs} = \sigma_{pp} + \sigma_{PE} + \sigma_{PN} \quad (1.32)$$

A amplitude de ressonância nuclear é relacionada com a seção de choque de reações fotonucleares como:

$$Im A(\theta=0)_{NR} = \frac{\omega}{4\pi} \sigma_{PN} \quad (1.33)$$

* A seção de choque de produção de pares é calculada integrando sobre todos os estados eletrônicos, no contínuo e no discreto exceto os ocupados, devido ao princípio de Pauli.

Estas reações fotonucleares são de muitos tipos: (γn) , (γp) , (γf) ... Se observarmos um gráfico σ_{PN} em função da energia do fóton incidente (ω) veremos que esta função é dominada por uma ressonância cujo máximo se encontra a 20 MeV (Se65). Um modelo simples, proposto por Golhaber e Teller (Go48), diz que o campo do fóton excita o núcleo de forma tal, que o conjunto de prótons se move numa direção enquanto que (por conservação de momento total) o conjunto de neutrons se movimenta na outra. A absorção e posterior emissão são explicadas pelo modelo de dipolo elétrico.

Para energias inferiores a 10 MeV é possível a excitação de níveis nucleares individuais, podendo isto ocorrer até para algumas centenas de keV. Mas estes processos são altamente improváveis, já que a largura dos níveis excitados é muito pequena (da ordem de eV) o que exige valores muito particulares de energia incidente; além disto a seção de choque de ressonância nuclear à baixas energias é desprezível em face das seções de choque para espalhamento Rayleigh ou Thomson.

5 - Polarização linear e circular - Dependência da seção de choque com a polarização

Como já foi visto a seção de choque pode ser escrita em função da amplitude de espalhamento como:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (Z\alpha)^4 r_0^2 |a|^2 \quad (1.34)$$

Mas esta amplitude é função dos vetores $\vec{e}$ e $\vec{e}'$

que representam as polarizações dos fótons incidente e espalhado, respectivamente, assim Papatzacus (Pa74) mostra que a dependência mais geral da amplitude com a direção de polarização é:

$$A = F(\vec{e} \cdot \vec{e}') + G(\vec{e} \cdot \vec{k}')(\vec{e}' \cdot \vec{k}) \quad (1.35)$$

Os vetores $\vec{e}$ e $\vec{e}'$ são reais no caso de polarização linear podendo ser complexos no caso de polarização circular.

A polarização pode ser descrita com ajuda dos vetores unitários $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}'_1$ e $\vec{e}'_2$ conforme a figura FI.6 abaixo:

fig. FI.6

$\vec{k}$ e $\vec{k}'$ são os momentos dos fótons incidente e espalhado respectivamente, $\vec{k}$ está ao longo do eixo Z e $\vec{k}'$ no plano (XZ).

POLARIZAÇÃO LINEAR:

A figura FI.6 mostra os auto-estados de polarização linear. Há quatro casos a considerar:

- i) $\vec{e} = \vec{e}_1$; $\vec{e}' = \vec{e}_1'$ $a = F \cos \theta - G \sin^2 \theta = a$ (amplitude paralela ao plano de espalhamento).
- ii) $\vec{e} = \vec{e}_2$; $\vec{e}' = \vec{e}_2'$ $a = F = a$ (amplitude perpendicular ao plano de espalhamento).
- iii) $\vec{e} = \vec{e}_1$; $\vec{e}' = \vec{e}_2'$ $a = 0$.
- iv) $\vec{e} = \vec{e}_2$; $\vec{e}' = \vec{e}_1'$ $a = 0$.

No caso da seção de choque para fótons não polarizados:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\text{NPol.}}} = (Z\alpha)^4 r_0^2 \frac{1}{2} \sum_{\vec{e}, \vec{e}'} |a|^2 \quad (1.36)$$

onde: $\sum_{\vec{e}, \vec{e}'} |a|^2 = |a_{\parallel}|^2 + |a_{\perp}|^2$

A seção de choque para fótons espalhados polarizados paralelamente ao plano de espalhamento:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\parallel}} = (Z\alpha)^4 r_0^2 |a_{\parallel}|^2 \quad (1.37)$$

Analogamente, para o caso de fótons espalhados polarizados perpendicularmente ao plano de espalhamento:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\perp}} = (Z\alpha)^4 r_0^2 |a_{\perp}|^2 \quad (1.38)$$

POLARIZAÇÃO CIRCULAR;

Embora no presente trabalho a decomposição da seção de choque seja feita sempre com a soma de parcelas polarizadas linearmente, é necessário explicar a polarização circular, pois está diretamente ligada à helicidade do fóton e às amplitudes "SPIN-FLIP" e "NÃO SPIN-FLIP".

A helicidade de um fóton pode ser positiva ou negativa e é descrita pelos vetores $\vec{e}_+$ e $\vec{e}_-$ respectivamente,

$$\vec{e}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_1 \pm \vec{e}_2) \quad (1.39)$$

aqui também há quatro possibilidades a considerar:

$$\left. \begin{array}{l} \text{i) } \vec{e} = \vec{e}_+ ; \vec{e}' = \vec{e}_+ \dots\dots a = a_{++} \\ \text{ii) } \vec{e} = \vec{e}_- ; \vec{e}' = \vec{e}_- \dots\dots a = a_{--} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{sem troca de helicidade} \\ \text{ou "NÃO SPIN-FLIP"} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{iii) } \vec{e} = \vec{e}_+ ; \vec{e}' = \vec{e}_- \dots\dots a = a_{+-} \\ \text{iv) } \vec{e} = \vec{e}_- ; \vec{e}' = \vec{e}_+ \dots\dots a = a_{-+} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{com troca de helicidade} \\ \text{ou "SPIN-FLIP"} \end{array}$$

Substituindo $\vec{e}_+$ e $\vec{e}_-$ (1.39) na expressão das amplitudes (1.35):

$$a_{++} = a_{--} = \frac{1}{2} [F(1 + \cos \Theta) - G(\sin^2 \Theta)] = \frac{1}{2} (a_{//} + a_{\perp})$$

$$a_{+-} = a_{-+} = \frac{1}{2} [-F(1 - \cos \Theta) - G(\sin^2 \Theta)] = \frac{1}{2} (a_{//} - a_{\perp})$$

onde:

$$a_{\text{SF}} = \frac{1}{2} (a_{//} + a_{\perp}) \quad (1.40)$$

NSF

De (1.37) e (1.38) é fácil ver que:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\parallel}} = Z^4 \alpha^4 r_0^2 |a_{\text{NSF}} + a_{\text{SF}}|^2 \quad (1.41)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\perp}} = Z^4 \alpha^4 r_0^2 |a_{\text{NSF}} - a_{\text{SF}}|^2$$

CAPÍTULO II

RESULTADOS TEÓRICOS

1 - Espalhamento elástico seguido de espalhamento Compton

Consideremos uma radiação isotrópica de 662 keV, espalhada elasticamente ao incidir num alvo P (vide fig. FII.1); a seguir, já parcialmente polarizada, ela sofrerá espalhamento Compton no espalhador G, e ocorrerá nova alteração nas suas componentes de polarização. Deseja-se calcular a razão teórica R entre o número de γ espalhados paralelamente (N_1) e o número de γ espalhados perpendicularmente (N_2) ao plano de espalhamento, após incidir em G.

fig. FII.1

legenda:

(PGF1): plano de espalhamento (p.e.)

A_0 (// ao p.e.)	}	componentes de mesma intensidade
B_0 ($\perp$ ao p.e.)		
A (// ao p.e.)	}	componentes de intensidades a e b, respectivamente
B ($\perp$ ao p.e.)		
$A1$ (// ao p.e.)	}	componentes de intensidades diferentes
$B1$ ($\perp$ ao p.e.)		
$A2$ (// ao p.e.)	}	componentes de intensidades diferentes.
$B2$ ($\perp$ ao p.e.)		

A seção de choque para espalhamento elástico, a baixas energias, em unidades do raio clássico do elétron r_0 , pode ser aproximada por:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |a_{Th} + a_R|^2 \quad (1.2)$$

onde

$$a_{Th} = -Z^2 \frac{m}{M} \vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon}' \quad (1.3)$$

Z o número atômico do alvo

m e M são as massas do elétron e do núcleo

$\vec{\epsilon}$ e $\vec{\epsilon}'$ são os vetores de polarização dos fótons incidente e espalhado.

A amplitude Rayleigh expressa, convenientemente,

em termos das componentes dos vetores de polarização paralela e perpendicular ao p.e.* é:

$$a_R = a_{R//} \hat{E}_{//} \hat{E}'_{//} + a_{R\perp} \hat{E}_{\perp} \hat{E}'_{\perp} \quad (1.15)$$

Pode-se definir então seções de choque para a radiação espalhada paralelamente e perpendicularmente ao p.e.*:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} |a_{EE//}|^2$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} |a_{EE\perp}|^2$$

onde $a_{EE//}$ e $a_{EE\perp}$ correspondem à soma das respectivas componentes Thomson e Rayleigh.

De acordo com as considerações feitas e a figura FII.1, definiremos como R_0 a razão entre o número de γ do tipo A e o número de γ do tipo B que atingem G. Assim:

$$R_0 = \frac{a}{b} = \frac{\frac{d\sigma}{d\Omega}_{//}}{\frac{d\sigma}{d\Omega}_{\perp}} = \frac{a_{EE//}}{a_{EE\perp}} \quad (11.1)$$

Os valores de $a_{EE//}$ e $a_{EE\perp}$, fornecidos por W.R.Johnson (Jo76) e de interesse deste trabalho se encontram na tabela TII.1, ou na referência citada.

* p.e. significa: plano de espalhamento.

A probabilidade desta radiação ser espalhada por efeito Compton na direção $\overline{GF1}$ ou $\overline{GF2}$ depende da seletividade deste processo com relação a sua polarização.

A seção de choque Compton é bem descrita pelo elemento de matriz de Klein-Nishina* (vide apêndice A3):

$$|M(\vec{E}, \vec{E}')|^2 = \frac{(\omega - \omega')^2}{\omega \omega'} + 4(\vec{E} \cdot \vec{E}')^2$$

onde ω e ω' são as frequências da radiação incidente e espalhada.

Definindo:

$$K = \frac{(\omega - \omega')^2}{\omega \omega'} = \frac{(E - E')^2}{EE'} \quad (11.2)$$

temos ainda:

$$|M(\vec{E}, \vec{E}')|^2 = K + 4(\vec{E} \cdot \vec{E}')^2 \quad (11.3)$$

Assim (de acordo com a figura FII.1):

o número de γ que atingem F2 do tipo A : AA2 + AB2

o número de γ que atingem F2 do tipo B : BA2 + BB2 .

E os respectivos elementos de matriz (11.3):

* Note que o cálculo deste elemento de matriz é exato!

$$|M(A, A_2)|^2 = K + 4$$

$$|M(A, B_2)|^2 = K$$

$$|M(B, A_2)|^2 = K$$

$$|M(B, B_2)|^2 = K$$

Portanto, o número de fótons que atingem F2 será:

$$N_2 \propto \sum_{i=1}^2 |M(\vec{E}_i, \vec{E}'_2)|^2 = \frac{a(2K+4) + b(2K)}{a+b} =$$

$$\frac{R_0(2K+4) + 2K}{R_0 + 1}$$

Analogamente, o número que chega a F1 será:

$$N_1 \propto \sum_{i=1}^2 |M(\vec{E}_i, \vec{E}'_1)|^2 = \frac{a(2K) + b(2K+4)}{a+b} =$$

$$\frac{R_0(2K) + (2K+4)}{R_0 + 1}$$

A razão teórica R entre o número de contagens em F1 e F2 será:

$$R = \frac{N_1}{N_2} = \frac{R_0K + (K+2)}{R_0(K+2) + K} \quad (11.4)$$

2 - Cálculo da razão teórica R para $Pb(Z=82)$ e $Pt(Z=78)$ e energia de 662 keV

2.1 - Valor do K :

É importante notar que o valor de K (11.2) é constante nesta experiência, já que a radiação sofre um desvio de 90° .

Usando a relação de Compton (apêndice A3):

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1}{m_0 c^2} (1 - \cos \Theta)$$

para $\Theta=90^\circ$, e $E=0,662$ MeV, a energia do fóton espalhado será: $E'=0,289$ MeV.

Obtem-se de (11.2):

$$K = 0,727$$

2.2 - Ajuste das curvas para as amplitudes Johnson

Johnson (Jo76) fornece valores das componentes da amplitude Rayleigh ($a_{//R}$ e $a_{\perp R}$) para a energia de 662 keV, entre outras, e diversos elementos (Pb, Ta, Nd...). O ângulo de espalhamento varia entre 0° e 150° , de 30° em 30° . Para poder utilizar devidamente estes valores discretos, ajustamos com eles curvas de $a_R \times \theta$.

Johnson não calculou as amplitudes para a platina (^{78}Pt) mas o faz para um elemento de número atômico muito próximo

ximo, o tantálio (^{73}Ta) e para diversos outros. Para obter os resultados da platina, ajustamos curvas de $a \times Z$ (amplitude em função do número atômico) antes de ajustar as curvas de $a \times \theta$. Os valores das amplitudes estão tabelados em TII.1 e TII.2.

O programa utilizado foi o "AJUSTE", processado no computador PDP 11 - 30/45, do Instituto de Física da USP. As curvas são polinômios cujos χ^2 oscilam entre 1,0 e 0,2, por grau de liberdade, sendo que os menores χ^2 correspondem à parte real da amplitude.

2.3 - Valores de R teórico

De acordo com (II.4):

$$R = \frac{R_0 K + (K+2)}{R_0(K+2) + K} = \frac{0,727 R_0 + 2,727}{2,727 R_0 + 0,727} \quad (II.5)$$

De (II.1):

$$R_0 = \frac{|a_{\parallel EE}|^2}{|a_{\perp EE}|^2} = \frac{|a_{\parallel R} + a_{\parallel Th}|^2}{|a_{\perp R} + a_{\perp Th}|^2} = \quad (II.6)$$

$$\frac{|\text{Re } a_{\parallel R} + a_{\parallel Th}|^2 + |\text{Im } a_{\parallel R}|^2}{|\text{Re } a_{\perp R} + a_{\perp Th}|^2 + |\text{Im } a_{\perp R}|^2}$$

Assim, de (II.5) e (II.6) obtivemos os valores de R tabelados em TII.1 e TII.2.

θ	$\text{Re } a_{\parallel R}$	$\text{Im } a_{\parallel R}$	$a_{Th\parallel}$	$ a_{\parallel} ^2$	$\text{Re } a_{\perp R}$	$\text{Im } a_{\perp R}$	$a_{Th\perp}$	$ a_{\perp} ^2$	$R_0 = \frac{ a_{\parallel} ^2}{ a_{\perp} ^2}$	R
0	-0,947	0,011	-0,01739	90,0	-0,47	0,011	-0,01739	90,0	$1,000 \pm 0,003$	$1,000 \pm 0,002$
30	-0,79	0,036	-0,01506	0,645	-0,97	0,076	-0,01739	0,984	$0,66 \pm 0,02$	$1,27 \pm 0,02$
35	-0,60	0,018	-0,01425	0,375	-0,82	0,082	-0,01739	0,715	$0,52 \pm 0,02$	$1,44 \pm 0,03$
40	-0,45	0,007	-0,01332	0,213	-0,70	0,080	-0,01739	0,523	$0,41 \pm 0,02$	$1,65 \pm 0,04$
45	-0,33	-0,000	-0,01230	0,117	-0,60	0,076	-0,01739	0,386	$0,30 \pm 0,02$	$1,90 \pm 0,06$
50	-0,24	-0,005	-0,01118	0,061	-0,51	0,070	-0,01739	0,287	$0,21 \pm 0,02$	$2,20 \pm 0,08$
55	-0,16	-0,009	-0,0100	0,030	-0,44	0,064	-0,01739	0,216	$0,14 \pm 0,02$	$2,6 \pm 0,1$
60	-0,10	-0,011	-0,0087	0,013	-0,38	0,058	-0,01739	0,165	$0,08 \pm 0,01$	$2,96 \pm 0,08$
65	-0,06	-0,012	-0,0073	0,005	-0,34	0,053	-0,01739	0,127	$0,04 \pm 0,01$	$3,3 \pm 0,1$
70	-0,02	-0,013	-0,0059	0,001	-0,30	0,048	-0,01739	0,100	$0,010 \pm 0,006$	$3,63 \pm 0,07$
75	0,01	-0,013	-0,0045	0,000	-0,26	0,043	-0,01739	0,079	$0,003 \pm 0,003$	$3,72 \pm 0,04$
80	0,03	-0,014	-0,0030	0,001	-0,23	0,039	-0,01739	0,064	$0,013 \pm 0,008$	$3,6 \pm 0,1$
85	0,05	-0,014	-0,0015	0,002	-0,21	0,035	-0,01739	0,052	$0,04 \pm 0,02$	$3,3 \pm 0,2$
90	0,06	-0,013	0	0,004	-0,19	0,031	-0,01739	0,044	$0,09 \pm 0,03$	$2,9 \pm 0,2$
95	0,07	-0,013	0,0015	0,006	-0,17	0,028	-0,01739	0,037	$0,15 \pm 0,04$	$2,5 \pm 0,2$
100	0,08	-0,013	0,0030	0,007	-0,16	0,025	-0,01739	0,032	$0,22 \pm 0,06$	$2,2 \pm 0,2$
105	0,09	-0,012	0,0045	0,009	-0,15	0,022	-0,01739	0,028	$0,30 \pm 0,07$	$1,9 \pm 0,2$
110	0,09	-0,011	0,0059	0,010	-0,14	0,020	-0,01739	0,025	$0,40 \pm 0,09$	$1,7 \pm 0,2$
115	0,10	-0,011	0,0073	0,011	-0,13	0,017	-0,01739	0,022	$0,5 \pm 0,1$	$1,5 \pm 0,1$
120	0,10	-0,010	0,0087	0,012	-0,12	0,015	-0,01739	0,010	$0,6 \pm 0,1$	$1,4 \pm 0,1$
125	0,10	-0,010	0,01000	0,013	-0,12	0,013	-0,01739	0,019	$0,7 \pm 0,2$	$1,2 \pm 0,2$
130	0,10	-0,009	0,01118	0,014	-0,11	0,011	-0,01739	0,018	$0,8 \pm 0,2$	$1,2 \pm 0,2$
135	0,11	-0,008	0,01230	0,014	-0,11	0,010	-0,01739	0,017	$0,8 \pm 0,2$	$1,1 \pm 0,2$
140	0,11	-0,008	0,01338	0,015	-0,11	0,008	-0,01739	0,016	$0,9 \pm 0,2$	$1,0 \pm 0,1$
145	0,11	-0,006	0,01425	0,015	-0,11	0,006	-0,01739	0,015	$1,0 \pm 0,2$	$1,0 \pm 0,1$
150	0,11	-0,006	0,01506	0,016	-0,10	0,005	-0,01739	0,015	$1,1 \pm 0,2$	$1,0 \pm 0,1$

TABELA TII.2

Cálculo do R teórico para Pt (Z = 78) - Energia do feixe incidente: E = 0,662 MeV.

2.4 - Valores do desvio de R (σ_R)

Para o cálculo destes desvios usou-se o método de Gauss, segundo o qual, dada uma função $f(x,y,z,...)$ o erro relativo é dado por:

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{1}{f} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \right)^2 + \dots \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (11.7)$$

CAPÍTULO III

PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

1 - Arranjo experimental

O arranjo experimental está esquematizado nas figuras FIII.1.a e FIII.1.b.

O espalhamento elástico Compton foi realizado com uma fonte de césio (^{137}Cs).

O ângulo formado entre a linha que une o centro da fonte ao centro do alvo espalhador (direção da radiação incidente) e o plano de alvo espalhador (ângulo ϕ) é escolhido de forma a minimizar a dispersão de ângulos de espalhamento (ângulo θ) sobre a placa. Para tanto deve satisfazer a equação (Ha70):

$$\frac{\sin \phi}{\sin (\theta - \phi)} = \frac{r}{R} \quad (\text{III.1})$$

onde R é a distância do centro do alvo ao centro do segundo espalhador (GeLi), e r é a distância do centro do alvo ao cen

Fig. FIII.1a

Fig. FIII.1b

Esquemas do Arranjo Experimental.

A e B correspondem às componentes da radiação $\parallel$ e $\perp$ ao plano de espalhamento.

tro da fonte.

1.1 - A fonte

É de césio (^{137}Cs) monocromática ($\sim 662 \text{ keV}$), sua intensidade é 37 Ci e sua meia vida, 30 anos. Ela está colocada num pequeno cilindro (raio $\sim 1 \text{ cm}$) que por sua vez encaixa num cilindro de raio maior ($\sim 10 \text{ cm}$) de chumbo maciço (vide fig. FIII.2). Este conjunto se encontra dentro de uma sala de paredes de concreto de $\sim 1 \text{ m}$ de espessura. A tampa do envoltório, fundida ao pequeno cilindro, é ligada a um cabo de aço cuja outra extremidade é acionada por um mecanismo de engrenagens e uma corrente. Para "abrir" ou "fechar" a fonte basta movimentar uma manivela que se encontra fora da sala.

O equipamento eletrônico foi colocado num recinto contíguo onde a radiação de fundo era $\sim 0,5 \text{ mR}$ (o limite para pessoas normais é de 3 a 5 mR).

Para que a radiação de fundo não fosse muito intensa devido à sensibilidade dos detetores, construiu-se um castelo de tijolos de chumbo (10cm de espessura) de forma a deixar livre apenas um orifício de $\sim 2 \text{ cm}$ de diâmetro na frente da fonte "aberta" para colimar o feixe.

1.2 - O polarímetro

Consiste de um detetor de germânio-lítio (GeLi) coaxial cilíndrico, ORTEC 8003, volume ativo de 27 cm^3 ; resolução de 2,5 keV para energias incidentes de $\sim 662 \text{ keV}$ (vide fig.

A fonte de ^{137}Cs e sua blindagem

Fig. FIII.2

Fig. FIII.3

FIII.3); duas fotomultiplicadoras de iodeto de sódio, NaI(Tl), de 3"x3" cuja resolução típica para as mesmas energias é de 7%.

Os eixos de simetria das fotos são paralelos ao do germânio-lítio (fig. FIII.1) e equidistam deste último de 13 cm. Encontram-se posicionadas uma a 90° em relação à outra tomando o eixo do GeLi como eixo de rotação.

De forma a evitar o "pile up" nos detetores tomamos cuidado especial com a blindagem. Foi construída uma caixa de madeira para abrigar o polarímetro, e revistida totalmente com chumbo de 10 cm de espessura (fig. FIII.4), exceto uma abertura afunilada posicionada na frente do cristal de GeLi (raio maior=2,5 cm e raio menor=1,6 cm). Esta abertura é, por sua vez, coberta com dois absorvedores finos (de Pb e Cu, ambos de 5 mm de espessura) para impedir a detecção de γ de baixa energia e de raios X oriundos de espalhamentos na blindagem.

Considerando que a taxa máxima de contagem para as fotomultiplicadoras não deve superar 10^4 desintegração/s, se desejamos trabalhar com boa resolução em energia, e que a intensidade da fonte é de 37 Ci ($\sim 137 \times 10^{10}$ d/s) vamos verificar o mínimo de blindagem necessária:

- O coeficiente de absorção do chumbo é $\mu/\rho = 0,103 \text{ cm}^2/\text{g}$
e sua densidade : $\rho = 11,3 \text{ g/cm}^3$

$$\frac{I}{I_0} = \exp(-\mu/\rho \times \rho x) \rightarrow \frac{1 \times 10^4}{1,37 \times 10^{12}} = \exp(-\mu/\rho \times \rho x)$$

$$(\mu/\rho) \times \rho x = 18,74 \rightarrow x = 16 \text{ cm.}$$

Fig. F III.4

Caixa de madeira utilizada para suportar a blindagem do polarímetro.

Então a espessura mínima do chumbo para incidência direta nas foto multiplicadoras deveria ser ~ 16 cm, mas como vimos o γ deve atravessar quando a fonte está "fechada" mais de 30 cm de Pb e quando ela está aberta há 10 cm de Pb mais a redução do ângulo sólido que é da ordem de 10^4 . No caso GeLi devemos considerar apenas a redução devida ao ângulo sólido. Como vemos na fig. FIII.1, o polarímetro foi colocado a 35 cm de uma placa espalhadora (alvo) de 16×16 cm^2 , que por sua vez dista 1,40 m da fonte. A abertura do colimador dista 20 cm da fonte, portanto existe uma redução de 1/80 da intensidade no trajeto fonte-alvo, pois

$$\frac{\pi \cdot (1)^2/20}{4\pi} = \frac{1}{80}$$

No trajeto placa-detetor a redução é de 1/200, pois

$$\frac{\pi \cdot (1,6)^2}{\frac{140}{4\pi}} \approx \frac{1}{200}$$

Donde a intensidade inicial (137×10^{10} d/s) será reduzida de $1/16 \times 10^3$, isto é, o GeLi será atingido por 10^8 d/s se todos os gamas fossem espalhados isotropicamente. Como a secção de choque para espalhamento elástico ou Compton, é bastante dependente do ângulo de espalhamento, e como apenas uma fração dos gamas que atingem o espalhador serão desviados, podemos considerar que o GeLi será exposto a um fluxo de raios gama nunca superior a 10^6 gamas/s. Além disso a eficiência do detetor é de ~ 4%, assim podemos concluir que a operação do GeLi não será prejudicada pelo excesso de radiação desde que evitemos ângulos muito pequenos (menores que 50°). O GeLi também fornece resultados bastante lineares em energia, desde que sua taxa de contagens seja inferior a 10^4 desintegrações /s.

1.3 - Alvos usados

Os alvos usados estão relacionados na tabela abaixo:

	Dimensão	Espessura
Chumbo (^{82}Pb)	16 x 16 cm ²	2,85 g/cm ²
Platina (^{78}Pt)	16 x 16 cm ²	2,33 g/cm ²
Alumínio (^{13}Al)	16 x 16 cm ²	1,08 g/cm ²

1.4 - Descrição dos circuitos eletrônicos

As figuras FIII.5.a e FIII.5.b esquematizam os circuitos eletrônicos utilizados para obtenção de espectros de correlação temporal e de amplitude, respectivamente.

O objetivo do circuito de amplitudes é registrar as coincidências que existem entre FOTO1 - GeLi ou FOTO2 - GeLi que com ajuda de pulsos de rotina são enviadas a diferentes quadrantes do multicanal. Mas para isto a energia de γ incidente é em parte absorvida pelo GeLi e em parte pela FOTO gerando 2 pulsos (um no GeLi e outro na FOTO) que devem ser somados adequadamente de forma a reconstituir a energia do raio incidente. Se estes pulsos se encontram muito deslocados no tempo, o pulso soma terá uma amplitude menor do que a soma dos 2 pulsos caso eles coincidissem.

Os espectros de correlação temporal foram, portanto, uma ferramenta necessária na experiência. A idéia inicial seria exigir que um evento só fosse registrado no multicanal caso houvesse coincidência temporal. Para isto deveria haver uma monitoração contínua dos "delay" dos discriminadores, mas isto requereria a montagem de um único circuito que permitisse obter simultaneamente espectros de amplitude e de correlação tem

fig. FIII.5a

Esquema do arranjo eletrônico utilizado para obter espectros de correlação temporal.

fig. III 5b

Esquema do arranjo eletrônico utilizado para obter espectros de amplitude.

Fig. F III 6

Esquema do arranjo eletrônico que permite obter espectros de amplitude e correlação temporal simultaneamente. (Não foi utilizado por motivos de disponibilidade de equipamento).

poral. Este circuito não foi montado por falta de equipamento (vide fig. FIII.6) e teria permitido registrar apenas eventos cujo atraso fosse menor que 30 ns. Mas como veremos adiante, os espectros de correlação temporal mostram que o atraso médio era menor que 110 ns para a FOT01 e 140 ns para a FOT02, o que não prejudica sensivelmente o pulso soma. Além disto, o sistema se manteve extremamente estável durante toda a experiência, mais uma razão para confiar nestes resultados.

Passemos à descrição dos componentes relevantes dos dois circuitos em questão:

a) Fontes de alta tensão (HT1, HT2 e HT3) diretamente ligadas aos detetores.

.HT1 - "High Voltage DC Power Supply - Model 408B - John Fluke MFG".

Voltagem de saída: variável de 0 a ± 6000 VDC.

Corrente de saída máxima de 20 mA.

Estabilidade: $\pm 0,005\%/hr$ ou $\pm 0,002\%/dia$ (após aquecida).

.HT2 - "High Voltage Power Supply - Model 456 - ORTEC".

Voltagem de saída: de 50 a 3000 V.

Corrente de saída de 10 mA.

Estabilidade: esta fonte é superior às outras, as variações na saída são menores que 0,0025% para variações combinadas de linha e carga.

.HT3 - Fonte estabilizada de alta tensão - FEAT 5a.

Tensão de saída: o controle grosso varia a tensão de saída desde 595 V a 2045 V (de 85 em 85 V). O controle fino varia a tensão de saída de 0 a 100 V.

Corrente de saída: de 0 a 5 mA.

Regulação de voltagem: melhor que uma parte em 1000 quando a rede varia de 105 VCA até 125 VCA, à carga de 0 a 5 mA.

b) Preamplificadores de estado sólido (Pre1 , Pre2 , Pre3) capazes de transformar pulsos de carga das fotos e do GeLi em sinais de uma grandeza maior de uma ordem.

Além disto apresentam alta impedância de entrada, para não drenar muita corrente dos detetores e baixa impedância de saída, conveniente para a transmissão de sinais a longas distâncias.

.Pre1 e Pre3 - "Preamplifier 109A - ORTEC".

Ganho: maior que 20x.

Os pulsos de saída tem as seguintes características:

largura total: ~ 110 a $120 \mu s$

tempo de subida: (10 - 90%) ~ 100 a $200 ns$

largura do pulso correspondente à variação de amplitude entre 90 e 100% .

. Pre2 - "Preamplifier - Model 120 - 4B - ORTEC".

Ganho: maior que 20x.

Tempo de subida do pulso de saída: (10 - 90%) ~ 20 a $35 ns$.

Tempo de descida: $\sim 50 \mu s$.

c) Amplificadores (Amp) modular tipo NIM, colocados a 10 m dos detetores fornecendo pulsos de até 10 V de amplitude de saída, unipolares e bipolares, estes últimos de forma a minimizar o "walk" em tempo.

Os tres amplificadores são do tipo "spectroscopy

amplifier - Model 451 - ORTEC" , o seu ganho total é o produto do ganho grosso (5x a 2000x) pelo ganho fino (0,5x a 1,5x). A meia largura total do pulso de saída é de alguns μ s . Estes amplificadores suportam até 50 KHZ .

d) Discriminadores tipo TSCA ("Timing single channel analyser - 420A - ORTEC") que possibilitam a seleção de uma "janela" no espectro de energia.

Estes discriminadores fornecem um pulso de saída que ocorre num preciso momento com relação ao pulso de entrada, tem a capacidade de produzir um atraso no sinal de saída de 100 a 2200 ns.

É possível fixar o nível inferior de energia (de 100 mV a 10 V) e a largura da "janela" isto é, o nível superior em relação ao inferior (de 0 a 10 V).

e) Dois conversores tipo TPHC/SCA ("Time to pulse height converter and SCA - Model 467 - ORTEC").

O TPHC/SCA mede o intervalo de tempo entre pulsos lógicos fornecidos a seu "START" e ao seu "STOP" (no caso, provenientes do GeLi e de uma das fotomultiplicadoras) gerando um pulso de saída analógico proporcional ao tempo medido no TPHC/SCA.

Estes conversores tempo-amplitude tem várias taxas de conversão permitindo 15 opções que variam entre 15 ns e 80 μ s.

O inibidor SCA obriga a que o pulso de saída do TPHC só seja avaliado quando ele estiver dentro da "janela" do SCA.

f) Duas coincidências rápidas tipo "FAST COINCIDENCE - 414A - ORTEC" que permitem determinar coincidências rápidas entre dois sinais de entrada (provenientes do GeLi e de uma das fotos). O tempo de resolução (2τ) varia entre 10 e 110 ns.

Em caso de coincidência, pulsos de saída se fazem presentes e são endereçados aos terminais de controle de um multicanal "Nuclear Data" (de 512 canais) de forma a selecionar diferentes quadrantes do mesmo (conjuntos de 128 canais) nos quais é arquivada a informação proveniente do misturador.

No circuito de coincidências para correlação temporal os sinais dos discriminadores são lançados no conversor tempo-amplitude (TPHC/SCA) cujos pulsos de saída são enviados ao misturador-amplificador e daí ao multicanal.

No circuito de coincidências reais FOTO-GeLi os pulsos de saída dos amplificadores são enviados aos somadores e daí ao misturador de forma a reconstituir o sinal e energia originais.

g) Tanto o misturador, como os somadores são do tipo "AN102/N DC Mixer Module - EG & G-" capazes de somar linearmente dois ou três sinais de saída do anodo de fotomultiplicadoras. O tempo de subida e descida do seu sinal de saída são tipicamente de ~ 100 ns e de ~ 1 ou 2μ s, respectivamente.

2 - Testes conduzidos para verificação e ajuste de equipamento

Para que os pulsos obtidos por coincidências Foto-GeLi possam ser somados de forma a reproduzir o pulso origi-

nal foi necessário ajustar os detetores em ganho (para reproduzir a energia original do raio γ) e tempo (para que a soma seja feita para um mesmo raio γ).

O ajuste em ganho foi feito com diversas fontes de baixa intensidade de európio, ouro, irídio, sódio, césio e cobalto. Aqui apresentaremos apenas os resultados obtidos com sódio (^{22}Na), césio (^{137}Cs) e cobalto (^{60}Co). Vide tabela TIII.1 e figura FIII.7. Com os espectros obtidos para cada detetor independentemente levantamos curvas de: número do canal x energia. Após cuidadosa calibração, estas curvas apresentaram aproximadamente a mesma inclinação na região de interesse.

Fonte	E (keV)	Número do canal	
		GeLi	NaI(Tl)
^{22}Na	511	289	296
	1276	714	705
^{137}Cs	662	374	378
^{60}Co	1173	661	658
	1332	745	734

Tabela TIII.1

Dados obtidos para a curva de calibração. As fontes foram colocadas na frente de cada detetor, a distância fonte-detetor variou entre 10 e 100 cm.

Fig. F III 7

Curvas para calibração de ganho dos detetores.

Note que a inclinação das curvas na região de interesse é aproximadamente a mesma.

Lembrando que o fóton de interesse sofre espalhamento Compton no cristal de GeLi, desviando-se de $\sim 90^\circ$ para atingir a foto, e calculando pela relação de Compton (Apêndice A3), obtemos as regiões de energia relevantes. Elas são: de 324 keV a 410 keV para o GeLi, e de 252 keV a 338 keV para as fotomultiplicadoras (considerando uma variação de $\pm 15^\circ$ em torno de 90° devido ao ângulo sólido). Vide figura FIII.8.

Fig. III 8

Regiões de energia em torno das quais foram ajustados os discriminadores do GeLi e das duas NaI(Tl).

Devido à intensidade da fonte de ^{137}Cs (37Ci) e para não sobrecarregar o equipamento eletrônico com contagens acidentais, ou background, ajustamos os discriminadores em torno destas regiões.

A seguir, foi necessário colocar os pulsos no mesmo instante. Os pulsos de saída de cada detetor tem uma forma típica como a da figura FIII.9.a. Para analisar rapidamente a influência do deslocamento temporal de dois pulsos que devem ser somados, vamos supor que eles sejam duas gaussianas como na fi-

fig. F III 9

(a) Pulso típico de saída dos detetores

t_s = tempo de subida do pulso (10-90%) ~ 100 ns

P = patamar do pulso ~ 100 ns

t_d = tempo de descida do pulso ($e^{-t/\tau}$) da ordem de μ_s .

(b) Simplificação do pulso - Gaussiana

$\sigma = P/2 = 50$ ns.

(c) Dois pulsos deslocados no tempo

d = deslocamento temporal.

(d) Pulso soma caso os dois pulsos coincidam no tempo ($d = 0$).

(e) Pulso soma para $d \neq 0$. Note que a amplitude diminui.

gura FIII.9 . (Note que o pulso soma se deforma quando os dois pulsos não coincidem no tempo).

Denominando $\underline{d}$ o deslocamento no tempo do pulso 2 e $\underline{A}$ a amplitude de ambos, podemos equacioná-los como:

$$P_1 = A e^{-\frac{1}{2} x^2 / \sigma^2}$$

$$P_2 = A e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-d}{\sigma}\right)^2}$$

então a função que representa a soma dos pulsos (P_s) será:

$$P_s = P_1 + P_2 = A \left[e^{-\frac{1}{2} x^2 / \sigma^2} + e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-d}{\sigma}\right)^2} \right] \quad (\text{III.2})$$

O máximo da função $P_s(x, d, \sigma)$ se verifica quando $x = d/2$, desde que $d < 2\sigma^*$, assim:

$$P_{s_{\max}} = 2A e^{-d^2 / 8\sigma^2} \quad (\text{III.3})$$

Este valor $P_{s_{\max}}$ é muito importante, pois é ele que vai reproduzir a energia total do raio γ no multicanal. É óbvio, de (III.3), ver que a amplitude é máxima quando o deslocamento temporal $\underline{d}$ é nulo e ela diminui com o aumento de $\underline{d}$.

* Os pulsos analógicos que são somados e vão ao multicanal são da ordem de μs , eis porque é válido considerar $d < 2\sigma$.

Para a calibração temporal utilizamos uma fonte de sódio de 100 μCi , pois o sódio tem dois gamas de 510 keV em coincidência (produzidos por aniquilação de um pósitron). Após otimizar os ajustes dos "delay" dos discriminadores e demais, obtivemos um espectro como que se vê na fig. FIII.10. Supondo a distribuição dos eventos gaussiana obtemos um desvio médio $\sigma = 18 \text{ ns}$.

d(ns)	$P_{s_{\max}} = 2 e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{8\sigma^2} \right)}$ ($\sigma = 50 \text{ ns}$)	diminuição da amplitude (%)
0	2A	0
18	0,968A	1,6
36	1,875A	6,3
54	1,729A	13,6

TABELA TIII.2

Como vemos na tabela TIII.2, a diminuição percentual da amplitude será no máximo de 13,6%, isto é, 97% dos eventos da curva de correlação temporal (fig. FIII.10) possuem deslocamentos temporais menores que 54 ns (3σ). Considerando que 68% dos eventos (lembre que o σ da curva de correlação temporal é 18 ns) fornecem um "pulso soma" cuja amplitude difere apenas em 1,6% da amplitude que corresponde à energia real do raio γ , e que na prática o tempo de descida dos pulsos analógicos chega a ser até de dois μs , podemos concluir que o deslocamento temporal que possa ocorrer só ocasionará diferenças na soma de dois pulsos menores que 1%.

Estes ajustes de ganho e tempo dos detetores foram repetidos antes de iniciar cada medida. O equipamento se demonstrou muito estável não havendo (na maioria dos casos) necessidade de novos reajustes.

fig. F III 10

Espectro com fonte de ^{22}Na de 100 μCi .

fig. F III 11

Na fig. FIII.11 podemos ver um dos espectros obtidos utilizando o TPHC (vide item 1.4 deste capítulo) para uma fonte de ^{137}Cs . Estes espectros fornecem distribuição temporal dos eventos.

Para verificar se procedemos corretamente, em seguida colocamos uma fonte de ^{137}Cs (10 μCi) a 10 cm do GeLi e procuramos obter um espectro soma Foto + GeLi igual ao espectro obtido quando esta fonte estava na frente da FOT0. Devemos lembrar que a resolução do GeLi é de $\sim 2,5 \text{ keV}$ enquanto que a da FOT0 é da ordem de 7%, isto é, $\sim 46 \text{ keV}$, por isto deve-se esperar um espectro similar (vide fig. FIII.12) ao da FOT0.

3 - Sistemática de medidas

Efetuamos medidas de fótons de 662 keV sofrendo espalhamento elástico em placas de chumbo (^{82}Pb), platina (^{78}Pt) e alumínio (^{13}Al) na região angular de 50° a 120° (de dez em dez graus).

Embora esta experiência seja favorável em muitos sentidos já que a grandeza de interesse é uma razão, e não um valor absoluto, surgem outros problemas, pois a estatística de contagens no pico elástico diminui abruptamente do GeLi (~ 1000 a 200 contagens/minuto) às fotomultiplicadoras (~ 15 a 5 conta-gens/minuto).

Os pontos de destaque do procedimento foram:

i) Devido a possíveis fundos radioativos, para efetuar a correção, medimos espectros do fundo da sala com a fonte de césio (^{137}Cs) dentro da blindagem fechada, para cada ângulo de espalhamento.

ii) Medimos também para cada ângulo, espectros com a fonte mas sem os alvos espalhadores para verificar a possibilidade de incidência direta de radiação sobre o polarímetro.

iii) Existe ainda a possibilidade de "pile up" no sistema de detecção, isto é, qualquer par de fótons sofrendo Compton na placa, e chegando simultaneamente (dentro do intervalo de tempo de resolução do sistema: algumas dezenas de ns) seria contado como "evento real" prejudicando as medidas. Para evitar este problema é que foi utilizada a placa de alumínio, já que devido ao seu número atômico baixo ($Z = 13$) só apresenta o espectro com a parte Compton do espalhamento (lembre que a seção de choque pa

ra espalhamento elástico cresce com potências grandes de Z (Hu75)). Assim bastou subtrair dos espectros de coincidências os seus respectivos de Al , antes normalizando-os em tempo e número de centros espalhadores.

iv) Para medir a assimetria intrínseca do polarímetro, colocou-se na frente do $GeLi$ uma fonte pouco intensa ($10,71 \mu Ci$) de césio. A razão de contagens entre a FOT01 e FOT02 foi utilizada como fator de correção.

As medidas foram feitas para cada ângulo e cada elemento, diversas vezes, observando os itens destacados acima. Obteve-se o espectro do $GeLi$ e os dois espectros de coincidências FOT01 + $GeLi$ e FOT02 + $GeLi$. O espectro do $GeLi$ é utilizado para avaliar o número de centros espalhadores (vide figuras FIII.13).

Devido à baixa estatística de contagens, antes de cada medida, estimamos o número de contagens acidentais; para isto utilizamos o valor para o qual dois eventos são considerados em coincidência (obtido dos espectros de correlação temporal (σ)).

O número de contagens acidentais N_{ac} é dado pela relação

$$N_{ac} = 2\sigma \times N_G \times N_F$$

onde

σ = meia largura da gaussiana de correlação temporal

N_G = número de contagens por segundo no $GeLi$

N_F = número de contagens por segundo na foto.

fig. F III 13 a

Espectro de amplitude. Espalhador de Pb.

âng. de esp.: 90 graus

Foto 1 + GeLi

△ pontos experimentais

• ajuste

Foto 2 + GeLi

fig. F III 13b

Espectro de amplitude. Espalhador de Pb.

âng. de esp.: 110 graus.

△ pontos experimentais

• ajuste

fig. F III 13c

Vejamos um exemplo típico (Platina a 90°):

$$N_G = 6760 \text{ cont/s}$$

$$N_{F1} = 300 \text{ cont/s}$$

$$N_{F2} = 816 \text{ cont/s}$$

$$2\sigma_1 = 140 \text{ ns (vide fig. FIII.11)}$$

$$2\sigma_2 = 110 \text{ ns}$$

$$\text{nº de coincidências FOT01 + GeLi} = 14,5 \text{ cont/s}$$

$$\text{nº de coincidências FOT02 + GeLi} = 14,7 \text{ cont/s}$$

Donde:

$$N_{ac_1} = 140 \times 10^{-9} \times 6760 \times 300 \rightarrow N_{ac_1} = 0,28 \text{ cont/s}$$

$$N_{ac_2} = 110 \times 10^{-9} \times 6760 \times 816 \rightarrow N_{ac_2} = 0,61 \text{ cont/s}$$

Mas o número de contagens acidentais na FOT01 representa apenas 2% do número de coincidências FOT01 + GeLi , e o número de contagens acidentais na FOT02 representa 4% das coincidências FOT02 + GeLi . Desta forma foi fácil monitorar continuamente quão reais eram nossas medidas.

4 - Cálculo da razão de polarização experimental

As medidas de espalhamento elástico foram feitas com os alvos de chumbo, platina e alumínio (este último para obter o espectro de fundo). A duração média de cada uma delas foi 24 hs.

Após a normalização em tempo e número de centros espalhadores subtraímos ponto a ponto dos espectros de Pb e Pt o respectivo de Al .

Estes espectros, já subtraídos foram analisados em um computador PDP 11 - 30/45 através do programa "AJUSTE".

Esse programa nos permite após ajustar um polinômio ao fundo, extrapolar esse polinômio para a região do pico (elástico ou de coincidências) e ajustar uma gaussiana ao restante do pico.

Para os ajustes das funções utilizamos o método de menor desvio quadrático médio. O programa nos permite calcular os seguintes parâmetros da gaussiana meia altura, largura à meia altura, canal onde a altura é máxima e os erros estimados para cada parâmetro.

A área da gaussiana é calculada por:

$$A = \sqrt{2\pi} \sigma \bar{A} \quad (III.4)$$

onde: σ = meia largura

$\bar{A}$ = meia altura

e o seu desvio pela fórmula de propagação de Gauss.

Chamando A_1 e A_2 as áreas das curvas de coincidências FOT01 + GeLi e FOT02 + GeLi, respectivamente, a razão experimental é obtida por:

$$R_e = \frac{A_1}{A_2} \times R_{cal} \times \epsilon \quad (III.5)$$

onde: R_{cal} é a razão entre as áreas dos espectros de coincidências quando se coloca a pequena fonte de césio de calibração na frente do GeLi (vide item 2 deste capítulo); ϵ é a eficiência do polarímetro, calculada teórica e experimentalmente no pró

ximo item.

Os pontos experimentais e a curva teórica (obtida de TII.1 e TII.2) são apresentados no próximo capítulo (fig. FIV.1 e tabela TIV.1). Cada ponto é obtido do valor médio de R_e das diversas medidas feitas para cada caso.

5 - Considerações sobre as dimensões finitas dos componentes do sistema de medição - cálculo da eficiência do polarímetro

Diversos fatores devem ser considerados ao comparar os resultados teóricos com os experimentais. Alguns deles são eliminados devido à sistemática utilizada nas medidas (cap. 3, itens 2 e 3). Mas não devemos esquecer que os cálculos teóricos consideram os espalhadores, detetores e fontes pontuais. Na realidade os ângulos, sólidos e planos, que aparecem no sistema de medição (fig. FIII.1) são distribuições cujo valor médio nem sempre coincide com o valor teórico.

A dispersão dos valores do ângulo de espalhamento (θ) pode ser minimizada (Ha70), escolhendo-se o ângulo de inclinação do alvo (ϕ) em relação à direção do feixe incidente, de acordo com a relação:

$$\frac{\sin \phi}{\sin (\theta - \phi)} = \frac{r}{R} \quad (\text{III.1})$$

onde θ é o ângulo de espalhamento; r e R são as distâncias fonte-alvo e alvo-detetor, respectivamente.

Mesmo com a dispersão de valores para o ângulo de espalhamento minimizada, o valor médio deve ser calculado.

A determinação direta dos ângulos médios pode ser evitada com o uso de uma fonte de radiação auxiliar; existem vários exemplos na literatura (St61 , An65 , Mu65 , Ha70). Outra alternativa é o cálculo numérico dos ângulos sólidos, apenas mencionada por Schumacher (Sc73 , Sm73) e desenvolvida por Marcos B. Gaspar (Ga79). Neste desenvolvimento são considerados: o tamanho finito da fonte, a sua colimação, a distribuição não uniforme de radiação sobre o alvo e as dimensões reais do detetor (note que só estamos considerando inicialmente o primeiro espalhamento pois as dimensões finitas do polarímetro são consideradas adiante).

O cálculo dos fatores geométricos realizado por M.B. Gaspar é feito pelo Método Monte Carlo (vide apêndice A4).

Seus resultados demonstram que a dispersão média do ângulo de espalhamento é de $\pm 1,5^\circ$ em torno do valor médio (vide fig. A4 , apêndice A4). Os valores médios do ângulo de espalhamento considerando as dimensões reais do arranjo experimental encontram-se tabelados em TA4 (apêndice A4). É interessante notar que eles diferem em menos que 0,5% dos valores médios calculados para geometria pontual, isto porque as distâncias fonte-placa (=117 cm) e placa-GeLi (40 cm) são grandes em relação às dimensões da placa e do cristal, o que implica em ângulos sólidos pequenos.

Embora em nosso arranjo experimental as distâncias sejam ligeiramente diferentes (fonte-placa = 90 cm e placa-GeLi = 40 cm) achamos desnecessário reproduzir os cálculos computacionais para as dimensões corretas, já que isto não alteraria significativamente os resultados e exigiria muitas horas de

computador.

Daqui se conclui que as medidas realizadas no nosso polarímetro possuem boa resolução no que se refere ao ângulo de espalhamento (θ).

O mesmo problema deve ser considerado quanto às dimensões dos cristais componentes do polarímetro, pois o desvio do raio gama que é espalhado no cristal de GeLi e atinge as FOTOS não é exatamente 90° .

Vários grupos tem-se preocupado neste sentido (Ha 59, Meso, Ta 68). Metzger e Deutsch (Me 50) mediram a razão de assimetria de diversas castatas gama-gama com um polarímetro que utiliza o espalhamento Compton como processo de análise (fig. FIII.14b).

A razão de assimetria pode atingir valores grandes para o caso pontual conforme vemos na fig. FIII.14a (curvas a e b), principalmente a baixas energias. Entretanto, é impossível obter alta taxa de contagens trabalhando com ângulos sólidos muito pequenos. Assim é que eles usaram nos seus experimentos uma dispersão em θ igual a $\Delta\theta = 55^\circ$ e em ϕ igual a $\Delta\phi = 60^\circ$ obtendo uma razão de assimetria menor (curva c).

Para avaliar a importância de ângulos de dispersão grandes, eles definiram um fator de mérito para o polarímetro dado por $(P' - 1)/\Delta P'$ onde P' é a razão entre as intensidades das componentes polarizadas uma perpendicularmente em relação à outra, isto é,

$$P' = \frac{J_{//}}{J_{\perp}}$$

e $\Delta P'$ é o desvio de P' . A fig. FIII.14c mostra, por exemplo, que para dispersões em θ de 60° ou 80° obtemos a mesma curva de mérito em função da dispersão em $\emptyset$.

Apesar de nosso arranjo não ser o mesmo usado por Metzger, já que a incerteza em θ no nosso experimento prejudicaria sensivelmente a interpretação dos resultados pois a secção de choque para espalhamento elástico varia rapidamente, principalmente para ângulos inferiores a 90° .

A fig. FIII.14d mostra que grandes dispersões em $\emptyset$ aumentam os valores de mérito do polarímetro. Assim é que em nosso polarímetro usamos $\Delta\emptyset = 30, 38^\circ$ (lembre que o diâmetro das fotos é 3 polegadas e a distância GeLi-FOT.O é 13 cm).

Vemos ainda que poderíamos ter usado distâncias ainda menores pois o máximo da figura de mérito ocorre para $\Delta\emptyset = 60^\circ$ ou 80° .

Mas não bastam estimativas, faz-se necessário um cálculo de eficiência (ϵ) do polarímetro a fim de contornar estes problemas e possibilitar o uso dos resultados experimentais.

Para obter o valor da eficiência, partimos da relação:

$$R_{df} = \epsilon R_p \quad (\text{III.6})$$

onde: R_{df} é o valor da razão de polarização calculado considerando as dimensões finitas do espalhador e detetores que constituem nosso polarímetro e corresponde ao valor que seria obtido experimentalmente; R_p é o valor da razão de polarização obti-

fig. F III 14

a - Razão de assimetria em função da energia em MeV (Me50).

(a) $\theta = 80^\circ$, geometria pontual

(b) $\theta = \theta_{\max}$, geometria pontual

(c) $\theta = 80^\circ$, $\Delta \theta = 55^\circ$, $\Delta \phi = 60^\circ$.

b - Diagrama esquemático do arranjo experimental utilizado por Metzber (Me50). Os cristais B e C representam o polarímetro.

c - Figura do desempenho de um polarímetro em função do $\Delta \phi$. Energia do $\bar{f}_0$ ton incidente de 1 MeV , $P'=1,2$.

d - Figura do desempenho de um polarímetro em função do $\Delta \theta$. Energia incidente de 1 MeV , $P'=1,2$.

do considerando os cristais pontuais e será calculado, no sub-
 ítem 5.1, para um duplo espalhamento Compton.

Escolhemos o duplo espalhamento Compton para o
 cálculo da eficiência, pois este é um processo cujo grau de ani-
 sotropia em relação à polarização é conhecido exatamente.

Devido à disponibilidade de uma fonte de cobalto
 (^{60}Co) de 35 mCi e considerando que ele emite uma radiação cu-
 jas energias predominantes são: 1,17 MeV e 1,32 MeV, é fácil ve-
 rificar (relação de Compton, apêndice A3) que o ângulo de espa-
 lhamento deve ser $\sim 51^\circ$ para que a energia média do feixe espa-
 lhado seja aproximadamente 660 keV. Assim:

Energia do feixe incidente (MeV)	Ângulo de espa- mento	Energia do feixe espalhado (MeV)
1,17	51°	0,63
1,32	51°	0,67

5.1 - Espalhamento Compton-Compton. Cálculo da razão de polarização considerando espalhadores e detectores pontuais (R_p)

Fig. F III 15

A figura FIII.15 esquematiza este duplo espalhamento.

Definiremos R_c a razão entre o número de γ do tipo A ($\parallel$ ao plano de espalhamento) e o número de γ do tipo B ($\perp$ ao plano de espalhamento) após o primeiro espalhamento na placa.

Como já foi visto, a seção de choque é proporcional ao elemento de matriz de Klein-Nishina da expressão (II.3).

Podemos então escrever R_c como:

$$R_c = \frac{|M(A_o, A)|^2 + |M(B_o, A)|^2}{|M(A_o, B)|^2 + |M(B_o, B)|^2} \quad (III.7)$$

onde:

$$|M(A_o, A)|^2 = K + 4 \cos 51^\circ$$

$$|M(B_o, B)|^2 = K + 4$$

$$|M(A_o, B)|^2 = K$$

$$|M(B_o, A)|^2 = K$$

(K foi definido na expressão (II.2) como $\frac{(E - E')^2}{EE'}$)

donde:

$$R_c = \frac{2K + 4 \cos 51^\circ}{2K + 4} \quad (III.8)$$

Calculando R_c explicitamente:

$$E_1 = 1,17 \text{ keV} \rightarrow K_1 = \frac{(1,17 - 0,63)^2}{1,17 \times 0,63} = 0,40$$

$$E_2 = 1,32 \text{ MeV} \rightarrow K_2 = \frac{(1,32 - 0,67)^2}{1,32 \times 0,67} = 0,48$$

de (II.10):

$$R_{c1} = \frac{2 \times 0,40 + 4 \times 0,63}{2 \times 0,40 + 4} = 0,69$$

$$R_{c2} = \frac{2 \times 0,48 + 4 \times 0,63}{2 \times 0,48 + 4} = 0,70$$

Após o segundo Compton definiremos a razão de polarização pontual R_p entre o número de fótons espalhados na direção $\overline{GF1}$ e os espalhados na direção $\overline{GF2}$ (vide figura FIII.15). A dedução de R_p será análoga à de R e obtemos uma expressão que corresponde à (II.4):

$$R_p = \frac{R_c K + (K + 2)}{R_c (K + 2) + R} \quad (III.9)$$

onde K , definido em (II.2), assume novos valores:

$$E_1 = 0,63 \text{ MeV} \rightarrow E_1'^* = 0,28 \text{ MeV}$$

$$K_1 = \frac{(0,63 - 0,28)^2}{0,63 \times 0,28} = 0,69$$

$$E_2 = 0,67 \text{ MeV} \rightarrow E_2'^* = 0,29 \text{ MeV}$$

$$K_2 = \frac{(0,67 - 0,29)^2}{0,67 \times 0,29} = 0,74$$

* Note que E' é calculado pela relação de Compton e o ângulo de espalhamento é necessariamente 90° devido à disposição dos detetores em relação ao espalhador (vide fig. FIII.15).

finalmente obtemos dois valores para a razão R_p (III.9):

$$R_{p1} = 1,24 \quad \text{e} \quad R_{p2} = 1,23 \quad (\text{III.10})$$

5.2 - Medidas do duplo espalhamento Compton com a fonte de cobalto (^{60}Co)

As medidas do duplo espalhamento Compton foram efetuadas utilizando uma fonte de cobalto (^{60}Co) de 35 mCi. Devido às energias predominantes do feixe por ela irradiado (1,17 MeV e 1,32 MeV) e por motivos de montagem de equipamento e blindagem, o ângulo do primeiro espalhamento Compton foi fixado em 51° , já que desta forma a energia média incidente sobre o polarímetro seria próxima de 660 keV, e o valor da eficiência (ϵ) obtido, apropriado à correção das medidas feitas com a fonte de césio (^{137}Cs).

Como sô estâvamos interessados no espalhamento inelástico utilizamos como alvo a placá de alumínio, cujas especificações estão no sub-item 1.3 deste capítulo. O ângulo de incinação da placa obtido da relação (III.1) foi $\phi = 36^\circ$. Destes espectros subtraiu-se o fundo cujas medidas foram feitas com a fonte de cobalto retirando-se a placa.

Procedemos aqui da mesma forma que com as medidas do espalhamento elástico, isto é, foram levantados espectros temporais e reajustado o ganho das fotos, obtivemos os espectros de calibração com a fonte de ^{137}Cs (10 μCi) e calculamos o número de contagens acidentais. Dois espectros típicos podem ser

vistos na figura FIII.16. Após subtrair o fundo, o ajuste foi feito conforme o item anterior, mas neste caso a função ajustada foi uma soma de gaussianas com fundo polinomial, cujos parâmetros são novamente: meia altura, meia largura e canais de altura máxima.

Então a eficiência é dada pela discrepância entre o valor pontual R_p e o valor experimental R_{cc} .

Os resultados são apresentados na tabela TIII.3.

Espectro	Tempo (min)	Detetor	A (área)	σA	$R = F1/F2$	$R_{cc} = R/R_{calibr.}$	σR_{cc}
^{60}Co -fundo	1950	F1	16×10^3	1×10^3	0,94	1,13	0,10
^{60}Co -fundo	1950	F2	17×10^3	1×10^3			
Calibração Cs	360	F1	3866×10^3	3×10^2	0,83		
Calibração Cs	360	F2	4685×10^3	3×10^2			
^{60}Co -fundo	1151	F1	72×10^2	5×10^2	0,72	1,16	0,20
^{60}Co -fundo	1151	F2	10×10^3	2×10^3			
^{60}Co -fundo	1136	F1	8×10^3	1×10^3	0,73	1,18	0,20
^{60}Co -fundo	1136	F2	11×10^3	1×10^3			
Calibração Cs	305	F1	2078×10^3	3×10^2	0,62		
Calibração Cs	305	F2	3346×10^3	3×10^2			
Valor médio de R_{cc} : $\bar{R}_{cc} = 1,16 \pm 0,10$							

TABELA TIII.3

fig. F III 16

Espectros obtidos com a fonte de ^{60}Co .

De TIII.3 concluímos que o valor médio de R_{cc} é:

$$\bar{R}_{cc} = 1,16 \pm 0,10$$

Da relação (III.10) o valor teórico médio da razão de polarização considerando espalhadores e detetores pontuais é:

$$\bar{R}_p = 1,24 \pm 0,01$$

Donde, o valor da eficiência será:

$$\epsilon = \frac{\bar{R}_{cc}}{\bar{R}_p} = \frac{1,16 \pm 0,10}{1,24 \pm 0,01} = 0,94 \pm 0,08$$

$$\epsilon = 0,94 \pm 0,08$$

5.3 - Simulação computacional do duplo Compton

Com relação ao cálculo experimental da eficiência, como o que foi descrito no sub-item anterior, há várias objeções a serem feitas, assim como:

- o tempo consumido ser muito grande;
- raramente se obtém resultados cujo erro é menor que 10%;
- nem sempre é fácil obter um feixe incidente com a energia desejada.

fig. FIII 17

Esquema do polarímetro simulado pelo programa de computador - Principais distâncias.

Note que em nosso arranjo os cristais A e B correspondem ao GeLi e à FOTO, respectivamente.

Consequentemente P. Taras e J. Matas (Ta68) idealizaram um programa que calcula teoricamente o valor da razão de assimetria (Rdf) de um polarímetro típico, cujos parâmetros podem ser ajustados de forma a reproduzir a situação real (vide figura FIII.17).

Baseados neste trabalho realizamos um cálculo teórico da eficiência do nosso polarímetro que, como veremos adiante, concorda com o obtido experimentalmente.

A essência do programa consiste em substituir a seção de choque para espalhamento Compton (também chamada de fórmula de Klein-Nishina):

$$d\sigma = \frac{1}{2} r_o^2 \left(\frac{E}{E_o} \right)^2 \left[\frac{E_o}{E} + \frac{E}{E_o} - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi \right] d\Omega$$

onde:

r_o é o raio clássico do elétron

$d\Omega$ é o elemento de ângulo sólido no qual o fóton é espalhado

θ é o ângulo de espalhamento do fóton incidente

ϕ é o ângulo entre o vetor campo elétrico da radiação incidente e o plano de espalhamento

E_o e E são as energias do fóton incidente e espalhado

por uma função F que leve em conta os efeitos de ângulo sólido e de absorção, tal que:

$$F = \left(\frac{E}{E_0} \right)^2 \left[\frac{E_0}{E} + \frac{E}{E_0} - 2 \sin^2 \Theta \cos^2 \phi \right] \times$$

$$h^{-2} \times r^{-2} \times \exp(-\mu_0 DA) \times \exp(-\mu(DDA + DB)) \times (1 - \exp(-\mu DDB)) \quad (III.11)$$

Esta função deve ainda ser integrada sobre o volume dos dois cristais em questão. As distâncias r , h , DDA , DB e DDB estão definidas na fig. FIII.17.

Os diversos fatores que aparecem em (III.11) são explicados a seguir:

1. Haverá absorção do raio γ incidente no cristal A (espalhador). Esta é considerada pelo fator $\exp(-\mu_0 DA)$ onde μ_0 é o coeficiente de atenuação linear dos γ incidentes.

2. Após o espalhamento alguns raios γ serão absorvidos no cristal A. O número de γ que escapa de A é proporcional a $\exp(-\mu DDA)$, onde μ é o coeficiente de atenuação linear dos γ espalhados.

3. Dependendo da localização do elemento de volume haverá uma variação da intensidade do γ incidente, por isto é introduzido o fator $1/h^2$.

4. O número de raios γ que atingem um certo elemento de volume em B varia de acordo com a distância ao centro espalhador. Isto introduz o fator $1/r^2$.

5. Alguns raios γ serão absorvidos em B. Então o número de γ atingindo um elemento de volume em B será proporcio

nal a $\exp(-\mu DDB)$.

6. Alguns raios γ passarão pelo cristal sem ser detetados, o número de detetados será proporcional a $\{1 - \exp(-\mu DDB)\}$.

Os valores dos coeficientes de atenuação são calculados pelas fórmulas:

$$\mu_{\text{FOTO}} = 0,210 - (0,097/E) + (0,0241/E^2) \text{ cm}^2/\text{g} \quad (\text{a}) \quad (\text{III.12})$$

$$\mu_{\text{GeLi}} = 0,0898 - (0,0212/E) + (0,00722/E^2) \text{ cm}^2/\text{g} \quad (\text{b})$$

(a expressão (III.12.a) é obtida do artigo de P. Taras (Ta68), a expressão (III.12.b) é uma curva experimental ajustada de dados obtidos da ref. Ch67).

Então, em analogia com a razão de polarização para detetores e espalhadores pontuais definida como:

$$R_P = \frac{R_c K + (K + 2)}{R_c (K + 2) + K} \quad (\text{III.9})$$

podemos escrever a razão de polarização para dimensões finitas como:

$$R_{df} = \frac{R_c \int_{V_A V_B} F(\vartheta \approx 0 \text{ e } \approx 90) dV_A dV_B + \int_{V_A V_B} F(\vartheta \approx 90 \text{ e } \approx 90) dV_A dV_B}{R_c \int_{V_A V_B} F(\vartheta \approx 90 \text{ e } \approx 90) dV_A dV_B + \int_{V_A V_B} F(\vartheta \approx 0 \text{ e } \approx 90) dV_A dV_B} \quad (\text{III.13})$$

Note que a integração é sobre o volume dos cristais A, no caso GeLi, e B, no caso qualquer uma das fotos já que elas são i-

dênticas. Só se faz diferença com relação a ser FOT01 ou FOT02 no ângulo ϕ .

Já que a solução das integrais seria tediosa, o que se faz é uma somatória sobre os volumes dos cristais A e B. Cada cristal foi subdividido em paralelepípedos iguais. Os cálculos foram realizados variando o número de divisões de A e B.

Os dados de entrada do programa correspondem às dimensões do nosso arranjo experimental, e são:

$$SD = 37 \text{ cm}$$

$$D = 13 \text{ cm}$$

$$LG/2 = 1,5 \text{ cm (largura média do GeLi)}$$

$$LF/2 = 3,25 \text{ cm (largura média da FOT0)}$$

$$E_o = 0,662 \text{ MeV}$$

$$\bar{R}_c = 0,7$$

$$P = 0$$

Os resultados são apresentados na tabela TIII.4.

Vemos que a razão diminui à medida que aumentamos o número de divisões, mas converge para o valor 1,15. O critério de convergência adotado foi desprezar variações menores que 0,2%.

Não fizemos cálculos com maior número de divisões já que envolveria muitas horas de computador e seria uma mera verificação.

Calculando a eficiência temos:

NLG	NHG	NCG	NLF	NHF	NCF	Rdf	%
1	1	1	1	1	1	1,239	
1	1	1	2	2	2	1,189	4,2
1	1	1	5	5	5	1,161	2,4
1	1	1	7	7	7	1,156	0,43
1	1	1	10	10	10	1,154	0,17
1	1	1	14	14	14	1,152	0,17
1	1	1	20	20	20	1,150	0,17
1	1	1	30	30	30	1,149	0,09
2	2	2	2	2	2	1,204	
2	2	2	5	5	5	1,185	1,6
2	2	2	7	7	7	1,181	0,34
2	2	2	15	15	15	1,176	0,42
2	2	2	40	40	40	1,151	
2	2	2	45	45	45	1,151	0,00
<p>Converge para o valor = $1,150 \pm 0,040$</p> <p>Pontual = $1,24 \pm 0,01$</p>							

TABELA TIII.4

NLG = corresponde ao número de pedaços em que foi dividida a largura do GeLi.

NHG = ao número de pedaços em que foi dividida a altura do GeLi

NCG = ao número de pedaços em que foi dividido o comprimento do GeLi

NLF, NHF e NCF tem o mesmo significado para a fotomultiplicadora

% = $R_n - R_{n+1} + 1/R_{n+1}$

$$\epsilon = \frac{R_{df}}{R_p} = \frac{1,150 \pm 0,040}{1,24 \pm 0,01} = 0,93 \pm 0,03$$

Este resultado concorda com o obtido utilizado com as medidas feitas com a fonte de cobalto ($\epsilon = 0,94 \pm 0,08$). Mas note que o seu desvio é menor, como já tinha sido previsto por Taras (Ta68).

CAPÍTULO IV

RESULTADOS E CONCLUSÕES

Os valores experimentais da razão de polarização (R_e) de uma radiação γ de 662 keV, elasticamente espalhada em alvos de chumbo e platina, encontram-se graficados na figura FIV.1. Na mesma figura apresentamos a curva teórica obtida a partir das amplitudes calculadas por Johnson (Jo76).

ângulo de espalhamento $\theta (^{\circ})$	R_e (Pb)	σR_e (Pb)	R_e (Pt)	σR_e (Pt)
51	2,25	0,20	2,27	0,20
60	2,78	0,20	2,70	0,30
70	3,93	0,50	3,77	0,40
80	3,69	0,40	3,20	0,40
90	2,93	0,30	2,82	0,40
100	2,11	0,20	2,18	0,20
110	1,76	0,20	1,68	0,20
119,5	1,51	0,20	1,42	0,10

TABELA TIV.1

Valor da razão de polarização experimental R_e , em função do ângulo de espalhamento $\theta (^{\circ})$.

Gráfico $R_e \times \theta$ para o ^{82}Pb

fig. F IV 1a

fig. F IV 1b

Como vemos nas figs. FIV.1.a e FIV.1.b, os resultados experimentais concordam com os previstos pela teoria de Brown. Para esta energia a discrepância entre as curvas $R_x\theta$ calculadas por teoria de perturbação de 2a. ordem (Jo76) e pela aproximação de fator de forma (Franz) é nítida, já que enquanto o máximo da primeira se dá para $\sim 75^\circ$, o da segunda se verifica a 90° .

Mas este tipo de experiência não esclarece a superioridade do cálculo de Johnson com relação às aproximações de fator de forma utilizadas por Brown e Mayers (Br57), já que a diferença entre as curvas não supera a incerteza nos resultados.

Outra maneira de testar a teoria seria realizar o espalhamento elástico de fótons parcialmente polarizados. Existem apenas algumas medidas realizadas por Brini et al. (Br59) envolvendo os ângulos de 65° , 90° e 110° para a energia de $1,28 \text{ mc}^2$, que estão de acordo com a teoria de Brown e Mayers. Mas este tipo de experiência seria ainda menos eficiente pois o número de contagens ficaria muito reduzido, já que um feixe isotrópico deveria sofrer triplo espalhamento, o que ocasiona um aumento grande do número de contagens acidentais.

Uma proposta interessante, mas cuja execução exigiria inúmeros cuidados, faz uso do duplo espalhamento elástico. Como mostra o arranjo experimental esquematizado na fig. FIV.3, o primeiro espalhador (espalhador 1) é colocado de forma tal que os raios γ sofram um desvio para o qual a polarização é máxima ($\theta \approx 75^\circ$) alguns destes raios γ incidirão no espalhador 2, localizado a $+5^\circ$ deste máximo, enquanto que outros naquele localizado a -5° (espalhador 3). Sendo que neste segundo espalhamen

to elástico o raio deve ser desviado de θ .

Deslocando um dos detetores de GeLi de um ponto para o outro, procura-se obter o mesmo número de contagens.

Mexendo-se nos três espalhadores simultaneamente (para manter as diferenças de $+5^\circ$ e -5° no segundo espalhamento) procura-se o ponto máximo de contagens. Porém, convém acrescentar que a seção de choque é muito pequena e que o ruído de fundo será apreciável, pois ao usar um detetor só não podemos ter técnicas de coincidências.

Seria conveniente também medir a polarização para fótons de 1179 keV e 1320 keV (^{60}Co) pois para estas energias a seção de choque de espalhamento Delbrück já é relevante.

Observando o comportamento dos fatores de forma "SPIN-FLIP" e "NÃO SPIN-FLIP" para cada camada (vide fig. FIV.2) achamos que seria plausível e proveitoso medir a razão de polarização R para ângulos pequenos.

A fig. FIV.2 mostra um cálculo de fator de forma "SPIN-FLIP" (expressão (1.27)) calculado por Odair Gonçalves (Od77) para o espalhamento elástico de fótons de 660 keV em prata. Como podemos observar a camada L predomina entre os ângulos $\theta \approx 10^\circ$ a $\theta \approx 24^\circ$. Ora, medidas entre estes ângulos representariam um teste direto da função de onda da camada L. Analogamente, para testar a função de onda da camada M deveríamos efetuar medidas de 1° a 5° .

Um aspecto teórico importante a ser examinado é a sensibilidade das funções de onda das camadas L e M com relação às diferentes aproximações para os potenciais de troca.

Para átomos de números atômicos altos a aproximação de Kohn-Sham, usada por Johnson (Jo76), tem mostrado ser razoável. Entretanto, nenhum estudo da variação dos fatores de forma com o uso de diferentes aproximações para o potencial de troca foi feito. Seria portanto de relevância obter os fatores de forma "SPIN-FLIP" e "NÃO SPIN-FLIP" para elementos de números atômicos intermediários, por exemplo a prata, a partir de funções de onda calculadas supondo valores para o potencial $X\alpha$, com α entre 1 e 2/3. Desta maneira poder-se-ia enfatizar a superioridade de um cálculo exato em relação aos resultados aproximados.

fig.FIV.3

fig. F IV 2

Fator de Forma ("SPIN-FLIP") em função de $X(\text{\AA}^{-1})$ onde $X = (2E \sin \theta / 2) / 12,3985$. Calculado pela expressão (1.27).

A P Ê N D I C E S

Apêndice A1 : Teoria de Perturbação - Formalismo de Feynman

A seguir faremos uma breve descrição de como se obtém o elemento de matriz m , cujo cálculo é o objetivo do trabalho de Brown e col. (Br55a, Br55b, item 1.2.1).

O comportamento da função de onda de um elétron livre é governada pela eq. de Dirac:

$$(i\gamma^{(1)} \frac{\partial}{\partial t} - m) \psi^{(1)} = 0 \quad * \quad (A1.1)$$

ou, mais explicitamente:

$$(i\gamma_4 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma_0 \nabla - m) \psi^{(1)} = 0 \quad (A1.2)$$

* Os símbolos (1) e (2) equivalem a (x_1, y_1, z_1, t_1) e (x_2, y_2, z_2, t_2) , respectivamente.

onde

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

σ_i são as matrizes de Pauli e $\hbar = c = 1$
e ψ é a matriz coluna:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

introduzindo a função de Green (ou melhor, matriz de Green) $K^0(2,1)$ como solução da equação:

$$(i\not{D}(2) - m) K^0(2,1) = i \delta^4(2,1) \quad (\text{A1.3})$$

onde $\delta^4(2,1)$ é a função quadridimensional:

$$\delta^4(2,1) = \delta(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \delta(\vec{y}_2 - \vec{y}_1) \delta(\vec{z}_2 - \vec{z}_1) \delta(t_2 - t_1)$$

é fácil ver que $K^0(2,1)$ pode ser escrito como:

$$K^0(2,1) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \exp(-i\vec{p} \cdot (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)) / \not{p} - m \, d^4p \quad (\text{A1.4})$$

$$\not{P} = \gamma_\mu P_\mu = i \gamma_\mu \partial_\mu = -i \gamma_1 \frac{\partial}{\partial x} - i \gamma_2 \frac{\partial}{\partial y} - i \gamma_3 \frac{\partial}{\partial z} + i \gamma_4 \frac{\partial}{\partial t}$$

Finalmente a função de onda $\psi(2)$ pode ser escrita em termos da função de Green:

$$\psi(2) = \int_{t' < t_2} K^0(2,1) \gamma_4 \psi(1) d^3x_1 \quad (A1.5)$$

Um procedimento análogo é seguido para elétrons ligados na presença de um campo eletromagnético. Neste caso a eq. de Dirac apresenta mais termos:

$$(i \not{\partial}(1) - m - eV(1) - e \not{A}(1)) \psi(1) = 0 \quad (A1.6)$$

A parcela $eV(1)$ refere-se ao potencial médio sentido pelo elétron na posição (1) e $\not{A}(1)$ representa a interação deste elétron com o campo eletromagnético do fóton incidente.

A função de Green será solução de:

$$(i \not{\partial}(2) - m - eV(2) - e \not{A}(2)) K(2,1) = i \delta^4(2,1) \quad (A1.7)$$

É demonstrado que $K(2,1)$ pode ser escrito como uma série de termos:

$$K(2,1) = K^0(2,1) + K^1(2,1) + K^2(2,1) \dots + K^n(2,1)$$

onde $K^0(2,1)$ satisfaz:

$$(i\not\partial(2) - m - eV(2)) K^0(2,1) = i\delta^4(2,1)$$

e

$$K^n(2,1) = -ie \int K^0(2,3) A(3) K^{n-1}(3,1) d^4\vec{x}_3$$

Assim, a partir de $K^0(2,1)$ podemos escrever a função de onda que satisfaz a equação (A1.6).

Mas o que nos interessa são as amplitudes de espalhamento elástico de fótons por elétrons ligados. Para tal devemos avaliar o elemento de matriz de 2a. ordem:

$$m = \int \bar{\psi}_f(2) K^2(2,1) \psi_i(1) d^4\vec{x}_2 d^4\vec{x}_1^* \quad (A1.8)$$

que expandindo $K(2,1)$ como uma série e tomando os termos relevantes temos:

$$m = \int \bar{\psi}_f(2) K^0(2,3) A(3) K^0(3,4) A(4) K^0(4,1) \psi_i(1) d^4\vec{x}_1 d^4\vec{x}_2 d^4\vec{x}_3 d^4\vec{x}_4 = \int \bar{\psi}_f(3) \gamma_\mu A_\mu(3) K^0(3,4) \gamma_\nu A_\nu(4) \gamma_i(4) d^4\vec{x}_3 d^4\vec{x}_4$$

* Pela convenção usual $\bar{\psi} = \psi^* \gamma_4$

sendo $\psi_f \equiv \psi_i \equiv \psi$

e definindo:

$$F(\vec{x}_3) = \int d\vec{x}_4 K^0(3,4) \gamma_\nu A_\nu(4) \psi(4)$$

chegamos à equação resolvida por Brown, Peierls e Woodward (Br55a, Br55b)

$$m = -i \int d^4 \vec{x}_3 \bar{\psi}(3) \gamma_\mu A_\mu(3) F(\vec{x}_3) \quad (A1.9)$$

Apêndice A2 : Espalhamento Delbrück e produção de pares (Pa74)

A fórmula de Kessler relacionando a parte imaginária da amplitude Delbrück à seção de choque para produção de pares é uma consequência da unitariedade da matriz S . Definindo a matriz de transição T por:

$$S = 1 + iT \quad \text{onde} \quad SS^\dagger = 1$$

$$\text{então} \quad TT^\dagger = -i(T - T^\dagger) \quad (A2.1)$$

A probabilidade de transição de um estado $|i\rangle$ para um estado $|f\rangle$ está relacionada com o elemento de matriz:

$$\langle f | T | i \rangle = \delta(\omega - \omega') \langle \vec{k}' \vec{e}' | M | \vec{k} \vec{e} \rangle \quad (A2.2)$$

onde ω , $\vec{k}$ e $\vec{e}$ são energia, momento e polarização do fóton incidente, e ω' , $\vec{k}'$ e $\vec{e}'$ do fóton espalhado.

De (A2.1) e (A2.2) temos:

$$-i(\langle \vec{k}' \vec{e}' | M | \vec{k} \vec{e} \rangle - \langle \vec{k} \vec{e} | M | \vec{k}' \vec{e}' \rangle^*) =$$

$$\sum_n \delta(\omega - \epsilon_n) \langle \vec{k}' \vec{e}' | M | n \rangle \langle \vec{k} \vec{e} | M | n \rangle^*$$

onde $|n\rangle$ representa os estados intermediários e é um conjunto completo. Mas como $\langle \vec{k}' \vec{e}' | M | \vec{k} \vec{e} \rangle = \langle \vec{k} \vec{e} | M | \vec{k}' \vec{e}' \rangle^*$ temos:

$$\text{Im} \langle \vec{k}' \vec{e}' | M | \vec{k} \vec{e} \rangle = \frac{1}{2} \delta(\omega - \epsilon_n) \times$$

(A2.3)

$$\sum_n \langle \vec{k}' \vec{e}' | M | n \rangle \langle \vec{k} \vec{e} | M | n \rangle^*$$

Os estados $|n\rangle$ tem carga nula, portanto podem ser estados elétron-pósitron, ou estados de fóton virtual, mas este último processo implica em amplitudes muito pequenas (fig. A.2).

ordem $(z^2 e^6)$

Fig. A2.a

Estados intermediários elétron-pósitron

Fig. A2.b

Estados intermediários com fóton virtual

Assim, tratando os estados intermediários como um par elétron-pósitron (e^+e^-) virtual temos:

$$|n\rangle = |P_+ S_+\rangle |P_- S_-\rangle \quad \text{onde} \quad P_{\pm} = (P_{\pm}, iE_{\pm})$$

e os símbolos $P_{\pm} S_{\pm}$ referem-se ao momento e spin do pósitron ou elétron, respectivamente.

Então (A2.3) pode ser escrito como:

$$\text{Im} \langle \vec{k}' e' | M | k e \rangle = \int \frac{d^3 p_+}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p_-}{(2\pi)^3} \sum_{S_+ S_-}$$

(A2.4)

$$\delta(\omega - E_+ - E_-) \langle \vec{k}' e' | M | p_+ s_+ p_- s_- \rangle \times \\ \langle \vec{k} e | M | p_+ s_+ p_- s_- \rangle^*$$

Assim para energias de γ incidente menores que o limite para produção de pares $\omega = 2m$, a parte imaginária da

amplitude se anula* .

Os elementos de matriz que aparecem em (A2.4) podem se relacionar com os seus respectivos processos:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{\omega}{(2\pi)^2} \langle k'e' | M | k e \rangle \right|^2 = |a_D|^2 \quad (A2.5)$$

e

$$\sigma_{PP} = \sum_{s_+ s_-} \int \frac{d^3 p_+}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p_-}{(2\pi)^3} \frac{\delta(\omega - E_+ - E_-)}{2\pi} \times \left| \langle p_+ p_- s_+ s_- | M | k e \rangle \right|^2$$

Para espalhamento na direção frontal temos:

$|\vec{k}' e' \rangle = |\vec{k} e \rangle$. Desprezando as correções de ordem radioativa, de (A2.3), (A2.4) e (A2.5) vem:

$$\text{Im } a_D(\omega, \theta=0) = \frac{\omega}{4\pi} \sigma_{PP}(\omega) \quad (A2.6)$$

Então em ordem mais baixa a parte imaginária da amplitude Delbrück descreve aquela parte do espalhamento que ocorre com produção de pares enquanto que a parte real corresponde a loops de elétrons virtuais.

* Note que o efeito Thomson só possui amplitude real, já que a parte imaginária não possui espaço de fase para existir, matematicamente se manifesta em $\delta(\omega - E_+ - E_-)$.

Apêndice A3 : Efeito Compton - Fórmula de Klein-Nishina (Fe62)

Fig.A3.1

Esquema do esp. Compton

Trataremos aqui o espalhamento de fótons por elétrons utilizando teoria quântica relativística. Em primeira aproximação consideraremos os elétrons livres obtendo assim a fórmula de Klein-Nishina para a amplitude de espalhamento Compton.

Para o fóton incidente tomemos como potencial:

$$A_{1\mu} = e_{1\mu} \exp(-iq_1 \cdot x) \quad \text{e para o emitido}$$

$$A_{2\mu} = e_{2\mu} \exp(-iq_2 \cdot x) .$$

A luz está polarizada perpendicularmente à direção de propagação, então:

$$e_1 \cdot q_1 = 0 \qquad e_2 \cdot q_2 = 0 \qquad \text{e} \qquad q_1^2 = q_2^2 = 0$$

Como estados inicial e final do elétron as funções de onda escolhidas serão:

$$\psi_1 = u_1 \exp(-iP_1 \cdot x) \quad \text{e} \quad \psi_2 = u_2 \exp(-iP_2 \cdot x)$$

onde $(P_{12} - m)u_{12} = 0$

e u_1 e u_2 spinores de Dirac.

Por conservação de energia e momento:

$$\not{P}_1 + \not{A}_1 = \not{P}_2 + \not{A}_2 \quad (\text{A3.1})$$

Escolhendo o sistema de coordenadas em que o elétron 1 está em repouso:

$$\begin{aligned} \not{P}_1 &= m\gamma_t \\ \not{P}_2 &= E_2\gamma_z - P_2 \cos\phi\gamma_x - P_2 \sin\phi\gamma_y \\ \not{A}_1 &= \omega_1 (\gamma_t - \gamma_x) \\ \not{A}_2 &= \omega_2 (\gamma_t - \gamma_x \cos\theta - \gamma_y \sin\theta) \end{aligned} \quad (\text{A3.2})$$

NOTE: $\hbar = c = 1$

O fóton incidente pode ser decomposto em dois tipos de polarização linear designados por (A) e (B), tal que:

$$(A): e_1 = \gamma_z \quad \text{e} \quad (B): e_1 = \gamma_y \quad (\text{fig. A3.2})$$

Tipo (A): vetor campo elétrico na direção z.

Tipo (B): vetor campo elétrico na direção y.

Analogamente para o fóton emitido:

$$(A'): e_2 = \gamma_z$$

$$(B'): e_2 = \gamma_y \cos \theta - \gamma_x \sin \theta$$

Para o cálculo da amplitude de espalhamento Compton deve-se avaliar o elemento de matriz M da hamiltoniana relativística de interação: $H_{int} = -e \not{A}$

O espalhamento pode ocorrer em primeira ordem de duas maneiras:

(R): o fóton incidente é absorvido pelo elétron que, posteriormente emite o fóton emergente.

(S): o elétron emite um fóton e consequentemente absorve o fóton incidente (vide fig, A3.3).

(R)

(S)

Fig. A3.3

Diagrama de Feynman no esp. Compton

Segundo Feynman (Fe62) o elemento de matriz para o diagrama (R) pode ser escrito como:

$$M_R = -i4\pi e^2 (\bar{u}_2 \not{e}_2 \left[\frac{1}{\not{p}_1 + \not{q}_1 - m} \right] \not{e}_1 u_1) = -i4\pi e^2 (\bar{u}_2 R u_1)$$

e para (S):

$$M_S = -i4\pi e^2 (\bar{u}_2 S u_1)$$

O elemento de matriz completo é dado pela soma de M_R e M_S . Aplicando as relações (A3.2) temos:

$$R = \not{\epsilon}_2 \frac{\not{p}_1 + \not{A}_1 + m}{(\not{p}_1 + \not{A}_1)^2 - m^2} \not{\epsilon}_1 = \frac{\not{\epsilon}_2 \not{A}_1 \not{\epsilon}_1}{2m\omega_1} \quad (A3.3)$$

e

$$S = \not{\epsilon}_1 \frac{\not{p}_1 - \not{A}_2 + m}{(\not{p}_1 - \not{A}_2)^2 - m^2} \not{\epsilon}_2 = \frac{\not{\epsilon}_1 \not{A}_2 \not{\epsilon}_2}{2m\omega_2} \quad (A3.4)$$

Então usando a propriedade: $\not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 = 2e_2 \cdot e_1 - \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2$

temos: $2m(R+S) = -2(e_2 \cdot e_1)(\gamma_t - \gamma_x) - e_1 e_2 [\gamma_x(1 - \cos\theta) - \gamma_y \sin\theta]$.

Depois de considerável trabalho algébrico e utilizando a relação de Compton (que se obtém de (A3.1)).

$$m\omega_1 - m\omega_2 = \omega_1 \omega_2 (1 - \cos\theta) \quad (A3.5)$$

podemos escrever o quadrado do elemento de matriz como:

$$|M(e_1 e_2)|^2 = \left[\frac{(\omega_1 - \omega_2)}{\omega_1 \omega_2} \right]^2 + 4(e_1 \cdot e_2)^2 \quad (A3.6)$$

que nos leva à seção de choque de Klein-Nishina para fótons polarizados.

Agora, basta escolher as diferentes combinações das polarizações dos fótons e obteremos quatro possíveis elementos de matriz, vide tabela A3:

Polarização	$ M(e_1 e_2) ^2$
AA'	$[(\omega_1 - \omega_2)^2 / \omega_1 \omega_2] + 4$
AB'	$[(\omega_1 - \omega_2)^2 / \omega_1 \omega_2]$
BA'	$[(\omega_1 - \omega_2)^2 / \omega_1 \omega_2]$
BB'	$[(\omega_1 - \omega_2)^2 / \omega_1 \omega_2] + 4 \cos^2 \theta$

TABELA A3

Apêndice A4 : O método Monte-Carlo (Ga79)

O Monte Carlo é usado como método de integração de superfície que, diferentemente dos métodos numéricos usuais onde a região de integração é varrida pela adição sucessiva e ordenada de elementos de área, sorteia estes elementos de área com uma distribuição pré-estabelecida a partir de uma sequência aleatória de números reais entre 0 e 1, esta com distribuição uniforme. A comparação entre o número de "pontos" dentro da região de integração e o correspondente número numa área conhecida determina o valor procurado. Aplicado ao cálculo dos ângulos sólidos do sistema de medição, o método resulta numa simulação do sistema, ou melhor, de suas características relevantes para a experiência (vide Ga79).

Uma medida da dispersão dos ângulos de espalhamento é obtida pelos histogramas $H(\theta_r)$ formado pelo número de detecções no intervalo entre θ_r e $\theta_r + \Delta\theta_r$ (onde θ_r é o ângulo

gulo de espalhamento para cada raio detetado). Alguns destes histogramas são apresentados na fig. A4, eles foram obtidos considerando um arranjo fonte-alvo-detetor igual ao nosso, apenas existe uma ligeira diferença nas distâncias r e R , ($= 117$ cm e 40 cm enquanto que para nós valem 90 cm e 37 cm), mas isto não deve influenciar os resultados significativamente.

O valor médio do ângulo de espalhamento foi obtido ponderando-se a distribuição de raios espalhados com a probabilidade de espalhamento, ou seja, a própria seção de choque, isto é:

$$\langle \theta \rangle = \frac{\int H(\theta) \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) d\theta}{\int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\theta}$$

Os valores médios dos ângulos de espalhamento e seus correspondentes calculados com geometria pontual, encontram-se tabelados em TA.4. Verifica-se da fig. A4 que a dispersão média em todos os casos não excede os 3° (três graus), isto é o valor do ângulo de espalhamento real para cada evento estará no intervalo $(\theta \pm 1,5^\circ)$.

(θ) (geometria pontual)	$\langle \theta \rangle$ (calculados por M.B. Gaspar)
51°	$51,1^\circ$
60°	$60,0^\circ$
70°	$69,9^\circ$
80°	$79,9^\circ$
90°	$89,8^\circ$
100°	$99,8^\circ$
110°	$109,6^\circ$
$119,5^\circ$	$119,5^\circ$

TABELA TA.4

Valores do ângulo de espalhamento considerando placa-fonte e detetor pontuais, e seus correspondentes valores médios calculados pelo programa Monte Carlo (Ga79). Note que o desvio não chega a $0,5\%$.

Fig. A4

Fig. A4

BIBLIOGRAFIA

- An65 - S. Anand e B.S. Sood, Nucl. Phys. 73 (1965) 368.
- Ax62 - P. Axel, Phys. Rev. 126 (1962) 671.
- Be33 - H.A. Bethe, 1933, "Handbuch der Physik", Berlin, Springer.
- Br55a - G.E. Brown, R.E. Peierls, F.R.S. e J.B. Woodward, Proc. Roy. Soc., A227 (1955) 51.
- Br55b - S. Brenner, G.E. Brown, J.B. Woodward, Proc. Roy. Soc. A227 (1955) 59.
- Br56 - G.E. Brown, D.F. Mayers, Proc. Roy. Soc. A234 (1956) 387.
- Br57 - G.E. Brown, D.F. Mayers, Proc. Roy. Soc. A242 (1957) 89.
- Br59 - D. Brini, E. Fuschini et al., Nuovo Cimento 11 (1959) 533.
- Ch67 - G.T. Chapman, Nucl. Instr. Methods 52 (1967) 101.
- Co66 - R.D. Cowan et al., Phys. Rev. 144 (1966) 5.
- Co67 - R.D. Cowan, Phys. Rev. 163 (1967) 54.
- Di47 - P.A.M. Dirac, 1947, Oxford University Press, "The Principles of Quantum Mechanics".
- Di68 - W.R. Dixon, R.S. Storey, Can. J. Phys. 46 (1968) 1153.
- Fe62 - R.P. Feynman, "Quantum Electrodynamics", Benjamin, 1962.
- Fo30 - V. Fock, Z. Phys. 61 (1930) 126.
- Fr35 - W. Franz, Z. Phys. 98 (1935) 314.
- Ga54 - R. Gaspar, Acta Phys. Acad. Sci. Hung. 3 (1954) 263.
- Ga79 - Marcos B. Gaspar, Tese de Mestrado não publicada, Instituto de Física, UFRJ.
- Go48 - M. Goldhaber, E. Teller, Phys. Rev. 74 (1948) 1046.
- Ha28 - D.R. Hartree, Proc. Camb. Phil. Soc. 24 (1928) 89.
- Ha59 - L.W. Fagg, S.S. Hanna, Rev. of Mod. Phys. 31 nº 3 (1959) 711.

- Ha70 - G. Hardie, W.J. Merrow, D.R. Schwandt, Phys. Rev. C1 (1970) 714.
- Ha71 - G. Hardie, J.S. De Vries, C.K. Chiang, Phys. Rev. C3 (1971) 1287.
- He69 - F. Herman, J.P. Van Dyke, I.B. Ortenburger, Phys. Rev. Letters 22 (1969) 807.
- Hu75 - Hubbell et al., J. Phys. Chem. Ref. Data, 4 nº 3 (1975).
- Jo76 - W.R. Johnson, K.T. Cheng, Phys. Rev. A13 (1976) 693.
- Ko65 - W. Kohn, L. J. Sham, Phys. Rev. 140, 4A (1965) 1133.
- Le52 - J.S. Levinger, Phys. Rev. 87 (1952) 656.
- Le77 - J.R. Leite, J.C. Rodrigues, A.C. Ferraz, A.C. Pavão, Phys. Rev. B 16 (1977) 978.
- Li66 - I. Lindgren, Arkiv Fysik 31 (1966) 59.
- Li68 - D.A. Liberman, Phys. Rev. 171 (1968) 1.
- Li71 - D.A. Liberman, Cromer, Waber, Nucl. Phys. Comm. 2 (1971) 107.
- Lo58 - I. Lovas, Nucl. Phys. 8 (1958) 155.
- Me50 - F. Metzger, M. Deutsch, Phys. Rev. 78 (1950) 551.
- Mu65 - V.A.N. Murty et al., Proc. Phys. Soc. 85 (1965) 1075.
- Od77 - Odair D. Gonçalves, Tese de Mestrado não publicada, Instituto de Física, UFRJ.
- Pa74 - P. Papatzacos, "Det Fysiske Seminar, Trondheim" Nº 5 (1974).
- Sa67 - J.J. Sakuray, "Advanced Quantum Mechanics", Addison Wesley (1967).
- Sc69 - M Schumacher, Phys. Rev. 182 (1969) 7.
- Sc73a - M. Schumacher, F. Smendt, I. Borchert, Nucl. Phys. A206 (1973) 531.
- Sc73b - F. Smendt, M. Schumacher, I. Borchert, Nucl. Phys. A213 (1973) 309.
- Se65 - E. Segré, "Nuclei and Particles", Benjamin (1965).

- S151 - J.C. Slater, Phys. Rev. 81, 3 (1951) 385.
- S168 - J.C. Slater, Phys. Rev. 165 (1968) 658.
- Sm73 - F. Smendt, M. Schumacher, I. Borchert, Nucl. Phys. A223 (1973) 309.
- Sm74 - F. Smendt, M. Schumacher, Nucl. Phys. A223 (1974) 423.
- So58 - B.S. Sood, Proc. Roy. Soc. A247 (1958) 375.
- St61 - K.G. Standing, J.V. Jovanovich, Can. Jour. Phys. 40 (1962) 622.
- Ta68 - P. Taras, J. Matas, Nucl. Instr. and Methods 61 (1968) 317.
- Wh27 - Whittaker, E.T. Watson, "Modern Analysis", Cambridge University Press (1927).

- S151 - J.C. Slater, Phys. Rev. 81, 3 (1951) 385.
- S168 - J.C. Slater, Phys. Rev. 165 (1968) 658.
- Sm73 - F. Smendt, M. Schumacher, I. Borchert, Nucl. Phys. A223 (1973) 309.
- Sm74 - F. Smendt, M. Schumacher, Nucl. Phys. A223 (1974) 423.
- So58 - B.S. Sood, Proc. Roy. Soc. A247 (1958) 375.
- St61 - K.G. Standing, J.V. Jovanovich, Can. Jour. Phys. 40 (1962) 622.
- Ta68 - P. Taras, J. Matas, Nucl. Instr. and Methods 61 (1968) 317.
- Wh27 - Whittaker, E.T. Watson, "Modern Analysis", Cambridge University Press (1927).