UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

EMIÇÃO DE NUCLEONS VIA MECANISMO DE
FESHBACH-ZABEK NA COLISÃO PERIFÉRICA DE
ÍONS PESADOS RELATIVÍSTICOS

LÍGIA LIANI BARZ

SBI-IFUSP

305M810T1733

Dissertação de Mestrado
submetida ao Instituto de física
da Universidade de São Paulo

ORIENTADOR: Prof.Dr. A. F. R. de TOLEDO PIZA

SÃO PAULO

1990

[Handwritten signature]
A. F. R. de Toledo Piza
Al M. Barz

539.722

B296e

M

e.1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Barz, Ligia Liani

Emissão de nucleons via mecanismo de Feshbach-Zabek na colisão periférica de íons pesados relativísticos. São Paulo, 1990.

Dissertação (mestrado) - Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Departamento de Física Matemática.

Área de Concentração: Física Nuclear

Orientador: Prof^o Dr. Antonio Fernando Ribeiro de Toledo Piza

Unitermos: 1. Íons pesados relativísticos; 2. Colisões periféricas núcleo-núcleo em altas energias; 3. Correlações nucleon-nucleon.

USP/IF/SBI - 50/90

Aos meus pais Alberto e Edy
pelo amor e dedicação

Agradecimentos

Em especial ao Piza, pela sugestão do trabalho, dedicação e paciência durante estes três anos de orientação.

Ao Fernando e Mírian pelas enriquecedoras discussões e à Carolina pelas explicações valiosas onde sempre se mostrou solícita em me ajudar.

À Graciela, Vanderley, Orildo e Luis Guilherme pela ajuda nos cálculos numéricos e ao Jorge deLyra pelo inestimável auxílio no $\text{\LaTeX}$ do manuscrito.

Às amigas Hatsumi, Mônica e Nelmara e ao amigo Sérgio pelo incentivo nos momentos difíceis.

Aos colegas de sala Lin, Manuel, Sidney e Sílvia pela agradável convivência.

Às secretárias da pós-graduação pelo apoio nas questões burocráticas e à CAPES pelo apoio financeiro.

Aos meus irmãos Sérgio, Olmiro e Jânio, às minhas irmãs Loreni e Ladeli e ao meu cunhado Renato pela compreensão e incentivo. Aos meus sobrinhos Krisagon e Karla pelos momentos inesquecíveis de carinho e descontração.

Resumo

O mecanismo de “troca de fônon” de Feshbach e Zabek¹ é revisto e uma discussão detalhada é fornecida sobre o papel das leis de conservação e relação “tipo fônon” entre energia e momento transferidos. São investigados os efeitos de correlações de curto alcance na emissão de nucleons em colisões periféricas de íons pesados relativísticos. A seção de choque é calculada na aproximação de Born, usando uma adaptação conveniente do modelo de Karol² para o estado inicial e ondas planas, explicitamente ortogonalizadas ao estado inicial, para estados finais. Comparações com os resultados obtidos por Bertulani *et al.*³ usando ondas planas puras para o estado final mostram que a ortogonalização desempenha um papel relevante no valor obtido para a seção de choque. Discute-se também a sensibilidade do resultado aos parâmetros usados na discussão do estado inicial.

Abstract

The “phonon exchange” mechanism of Feshbach and Zäbek¹ is reviewed and the role of the conservation laws and of the “phonon-like” relation between energy and transferred momentum is discussed. The effects of short range correlations for the emission of pair in peripheral relativistic heavy ions collisions are investigated. The cross section is calculated in Born approximation using a suitable modification of Karol’s model² for the initial state and plane waves, explicitly ortogonalized to the initial state, for the final states. Comparisons with the results obtained by Bertulani *et al.*³ using pure plane waves for the final state show that the ortogonalization has a non-negligibe effect on the magnitude of the resulting cross-sections. Sensitivity to the parameters involved in the description of the inicial state is also discussed.

Índice

Introdução	2
1 Tratamento Teórico dos Efeitos de Correlações de Curto Alcance	4
1.1 Aspectos qualitativos	4
1.2 Definições	7
1.3 Ortogonalização explícita do estado final ao estado inicial	10
1.4 Seção de choque diferencial	11
2 Aplicações Numéricas e Discussão	15
2.1 Aplicações numéricas	15
2.2 Discussão dos resultados e conclusões	16
2.3 Gráficos	20
A Dedução da expressão para a seção de choque diferencial quádrupla	31
B A aproximação de Karol para a densidade nuclear superficial	36
Referências	37

Introdução

O uso de íons pesados na investigação de sistemas nucleares e atômicos é de crescente importância. A física dos íons pesados começou com o estudo de reações nucleares induzidas por Carbono, Nitrogênio e Oxigênio, há algumas décadas. No entanto, foi nos últimos vinte anos que surgiu um grande interesse em projéteis mais pesados. Tópicos atuais de pesquisa incluem reações nucleares envolvendo a transferência de grandes quantidades de momento angular, massa e energia, o subsequente fenômeno de relaxação, fusão e fissão de sistemas pesados e a estrutura do núcleo a energia de excitação e momento angular elevados. Finalmente, colisões entre núcleos complexos a energias relativísticas oferecem, entre outras, a possibilidade de produzir e estudar a matéria nuclear sob condições extremas de densidade e temperatura, no caso de colisões centrais. Em tais colisões, de núcleos idênticos por exemplo, há grandes transferências de energia e momento conduzindo a um sistema muito denso que, subsequentemente, explode. Em processos periféricos, onde apenas a região superficial interage, informações de outra natureza podem ser obtidas. Este trabalho, em particular, utiliza tais processos como possíveis indicadores de propriedades da função de correlação nuclear.

Embora os maiores esforços têm sido concentrados na investigação dos produtos de reações nucleares entre íons pesados relativísticos envolvendo colisões centrais, colisões distantes e periféricas têm provocado interesse devido a sua potencialidade como sondas de aspectos da estrutura nuclear dificilmente acessíveis através de outras técnicas.

Em particular, Feshbach e Zabek¹, desenvolveram uma teoria mostrando a relevância das correlações de curto alcance entre dois nucleons, em uma colisão

periférica de íons pesados relativísticos, usando uma aproximação de impulso⁴.

Bertulani *et al.*³ calcularam as seções de choque para a emissão de um par de nucleons através desse mecanismo num modelo particularmente simples. O cálculo é perturbativo e usa Gaussianas correlacionadas para estados iniciais e ondas planas para estados finais. O trabalho que será exposto utiliza a teoria desenvolvida por Feshbach e Zabek¹ e o modelo de Bertulani *et al.*³ introduzindo a ortogonalização explícita do estado final ao estado inicial não considerada por estes últimos autores.

O capítulo 1 contém uma revisão do mecanismo de “troca de fônon” de Feshbach e Zabek¹, ou seja, uma discussão do papel das leis de conservação, da relação “tipo fônon” entre energia e momento transferidos e da importância de correlações entre pares de nucleons. Introduziremos o cálculo perturbativo das seções de choque para a produção de pares de nucleons em colisões periféricas, a energias da ordem de centenas de MeV/A ou maiores.

No segundo capítulo aplicaremos a teoria desenvolvida no primeiro para dois sistemas específicos, $^{40}Ca + ^{40}Ca$ a $14.5 GeV/u$ e $^{238}U + ^{108}Ag$ a $1 GeV/u$. Desse modo, estaremos em condições de comparar estes resultados com os obtidos, para os mesmos sistemas, por Bertulani *et al.*³, revelando os efeitos devido a ortogonalização imposta entre os estados inicial e final.

Capítulo 1

Tratamento Teórico dos Efeitos de Correlações de Curto Alcance

1.1 Aspectos qualitativos

Uma descrição qualitativa da emissão de nucleons em colisões periféricas de íons pesados relativísticos pode ser dada. Assume-se que em tais colisões o núcleo projétil se aproxima do núcleo alvo numa trajetória retilínea. Quando o projétil ultrapassa o alvo, os nucleons do alvo sentem um pulso de força. É assumido, também, que as superfícies nucleares não têm tempo para se deformar em resposta ao pulso curto de campo nuclear. Então, podemos determinar a energia de excitação através do cálculo do momento transferido (impulso).

Um pulso de interação com duração ΔT , tem a energia

$$E \sim \frac{\hbar}{\Delta T} \quad (1.1)$$

onde ΔT é dado pela escala ΔZ (da ordem do diâmetro do projétil), $\Delta Z/\gamma$ no referencial do alvo, dividida pela velocidade do projétil v , que é muito próxima a c , a velocidade da luz. γ é o fator relativístico padrão introduzido aqui para considerar a contração de Lorentz de ΔZ . Então, a energia e o momento do pulso de interação nuclear é

$$E \sim \frac{\hbar \gamma v}{\Delta Z} \quad (1.2)$$

$$p_z \sim \frac{\hbar\gamma}{\Delta Z} \quad (1.3)$$

Para situações típicas ΔZ corresponde a uns poucos Fermis e o pulso de interação nuclear pode carregar várias centenas de MeV. As equações acima mostram que o campo satisfaz a equação de dispersão

$$E = pv. \quad (1.4)$$

Podemos, então, pensar que esta energia e este momento transferidos são carregados por um “fônon” (quantum de massa zero). Feshbach e Zabeck¹ mostraram que os fônons dificilmente seriam absorvidos por um único nucleon, visto que, um nucleon com a mesma energia, E , do fônon teria um momento apreciavelmente maior,

$$p = \sqrt{\frac{E^2}{c^2} + 2mE} \gg \frac{E}{v} \quad (1.5)$$

Isto pode ser melhor entendido observando a fig.(1.1), que mostra a energia calculada em função do momento para as equações (1.2) (curva pontilhada), (1.4) (curvas cheias) para $v = 0.5c$, $v = 0.75c$ e $v = c$ e (1.5) (curva tracejada). Calculamos a energia da equação (1.2) para $\Delta Z = 1fm$. Os pontos onde a curva pontilhada cruza as curvas cheias representam a energia e o momento do fônon com as velocidades consideradas acima.

Entretanto, o fônon poderia ser absorvido por um par de nucleons correlacionados. Esta absorção do fônon pelos dois nucleons pode proceder porque, então, é possível casar a energia transferida com o baixo momento transferido pelo fônon. Os momentos dos nucleons poderão se cancelar parcialmente de modo que o momento total é compatível com a equação (1.3).

A seção de choque para a emissão de um par de nucleons depende da probabilidade de absorção do fônon pelo par. Isto inclui a correlação dos dois nucleons de forma essencial e depende de r_c , o alcance da função de correlação entre os dois nucleons.

Figura 1.1:

A energia em função do momento (em unidades adimensionais) segundo a relação de incerteza (eq.(1.2)), do fônon absorvido (curva pontilhada), segundo a equação de dispersão (eq.(1.4)) para $v = 0.5c$, $v = 0.75c$ e $v = c$ (curvas cheias) e, segundo a equação relativística da energia (eq.(1.5)), do nucleon (curva tracejada).

1.2 Definições

Vamos estudar quantitativamente os efeitos das correlações de curto alcance em colisões periféricas de íons pesados relativísticos no contexto do modelo proposto por Bertulani *et al.*³.

Figura 1.2:

A colisão de um núcleo projétil, com a contração de Lorentz, com um par de nucleons em um núcleo alvo.

Na figura (1.2) ilustramos a colisão alvo–projétil. O núcleo projétil se aproxima do núcleo alvo com velocidade constante próxima a velocidade da luz, $v \approx c$, ao longo da direção z . A interação do projétil com o alvo é representada por um potencial nucleon–núcleo que apresenta a contração de Lorentz e uma dependência espacial Gaussiana, para simplificar o cálculo da amplitude de probabilidade. Então

$$V(\vec{r}_i, t) = \gamma V_g \exp \left\{ -\frac{(X - x_i)^2}{\alpha_P^2} \right\} \exp \left\{ -\frac{(Y - y_i)^2}{\alpha_P^2} \right\} \exp \left\{ -\frac{\gamma^2 (vt - z_i)^2}{\alpha_P^2} \right\} \quad (1.6)$$

onde (X, Y, Z) e (x_i, y_i, z_i) dão as posições do projétil e dos dois nucleons do alvo, respectivamente, com $b = \sqrt{X^2 + Y^2}$, $Z = vt$ e $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, o fator relativístico padrão introduzido aqui para dar conta da contração de Lorentz da densidade. Os parâmetros V_g e α_P são escolhidos de modo a reproduzir a magnitude e a

difusividade de um potencial Woods-Saxon na superfície nuclear e, segundo Karol², estes parâmetros estão relacionados aos parâmetros radial e difusividade, R_P e a , respectivamente por

$$V_g = \frac{V_o}{2} \exp \left\{ \frac{R_P}{a} \right\} \quad (1.7)$$

$$\alpha_P = \sqrt{\frac{4R_P(4.4a) + (4.4a)^2}{4 \ln 5}} \quad (1.8)$$

onde $4 \ln 5 = 6.43775 \dots$

Numa aproximação de perturbação de primeira ordem (aproximação de Born), o efeito de tal potencial é alterar o estado de um único nucleon. No entanto, um segundo nucleon correlacionado ao primeiro, também terá o seu estado alterado já em primeira ordem. A amplitude de probabilidade, a ser calculada, refere-se à probabilidade de mudança, do estado inicial Ψ_i , no alvo, para o estado final Ψ_f , de dois nucleons emergentes (livres).

$$a_{fi}(b) = \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \int d^3r_1 d^3r_2 \Psi_f^*(\vec{r}_1, \vec{r}_2) [V(\vec{r}_1, t) + V(\vec{r}_2, t)] \Psi_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \quad (1.9)$$

onde $\hbar\omega = E_f - E_i$ e b é o parâmetro de impacto. Como de costume, em colisões relativísticas periféricas é feita a aproximação de trajetória retilínea para o projétil. Consistentemente com a aproximação perturbativa de primeira ordem, a velocidade relativa é constante.

Como estamos interessados na emissão de um par de nucleons, a função de onda final tem a forma

$$\Psi_f(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1} e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2} \quad (1.10)$$

a menos de um fator adicional dependente das coordenadas dos outros nucleons, tratados como espectadores passivos. Em (1.10), $\vec{k}_i (i = 1, 2)$ são os vetores de onda dos nucleons emitidos.

A forma da função de onda inicial é escolhida de modo a obedecer alguns critérios:

a. vamos supor que as funções de onda de cada nucleon sejam proporcionais à densidade nuclear;

b. como em colisões próximas surgem efeitos de absorção, apenas a região da superfície dos núcleos envolvidos é relevante. A densidade a ser considerada, portanto, deve reproduzir realisticamente a região superficial da densidade do alvo. Dessa forma, podemos utilizar a aproximação introduzida por Karol² e aproximar a densidade nuclear na superfície por uma Gaussiana (e portanto, devido ao critério a, também as funções de onda) com normalização conveniente;

c. dadas essas “funções de onda Gaussianas” de partícula independente, correlações de curto alcance são introduzidas através de uma função tipo Jastrow, $1 - f(r_{12})$ com $f(0) = 1$ e $f(\infty) = 0$, sendo f tomada também como uma gaussiana.

Assim, a função de onda inicial tem a forma

$$\Psi_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = N_i \exp \left\{ -\frac{r_1^2}{2\alpha_T^2} \right\} \exp \left\{ -\frac{r_2^2}{2\alpha_T^2} \right\} \left[1 - \exp \left\{ -\frac{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}{r_c^2} \right\} \right] \quad (1.11)$$

onde r_c é o alcance de correlação e α_T é a largura da Gaussiana, relacionada ao raio e difusividade do alvo numa maneira similar a (1.8), ou seja

$$\alpha_T = \sqrt{\frac{4R_T(4.4a) + (4.4a)^2}{4 \ln 5}} \quad (1.12)$$

Segundo Karol², a constante de normalização N_i é

$$N_i = \frac{3}{4\pi R_T^3 \left[1 + \frac{\pi^2(4.4a)^2}{19.36R_T^2} \right]} \frac{1}{2} \exp \left(\frac{R_T^2}{\alpha_T^2} \right) \quad (1.13)$$

Esta normalização, em particular, superestima drasticamente o valor da densidade no interior do núcleo. Isto no entanto, não tem maiores consequências devido ao caráter periférico da colisão e da natureza de curto alcance das forças nucleares. No cálculo da seção de choque, tal restrição é introduzida restringindo a integração sobre parâmetros de impacto a valores maiores que uma distância da ordem do início do processo de absorção forte, eliminando os efeitos do interior nuclear (veja eq.(1.19)).

1.3 Ortogonalização explícita do estado final ao estado inicial

A função de onda final Ψ_f (eq.(1.10)) não está ortogonalizada a função de onda inicial Ψ_i (eq.(1.11)), ou seja, $\langle \Psi_f | \Psi_i \rangle \neq 0$. Isso é um defeito de princípio que pode ser eliminado ortogonalizando explicitamente o estado final ao estado inicial correlacionado, isto é, usando em vez de $|\Psi_f\rangle$,

$$|\psi_f\rangle = |\Psi_f\rangle - \frac{|\Psi_i\rangle \langle \Psi_i | \Psi_f \rangle}{\langle \Psi_i | \Psi_i \rangle} \quad (1.14)$$

Assim, de fato, temos uma função de onda final $\psi_f(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$, explicitamente ortogonalizada a função de onda inicial, $\Psi_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$, e que se reduz assintoticamente ao produto de duas ondas planas.

$$\begin{aligned} \psi_f(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1} e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2} - C_{fi} \exp\left\{-\frac{r_1^2}{2\alpha_T^2}\right\} \exp\left\{-\frac{r_2^2}{2\alpha_T^2}\right\} \\ &\times \left[1 - \exp\left\{-\frac{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}{r_c^2}\right\}\right] \end{aligned} \quad (1.15)$$

onde definimos C_{fi} como

$$C_{fi} = N_i \frac{\langle \Psi_i | \Psi_f \rangle}{\langle \Psi_i | \Psi_i \rangle}$$

Um cálculo direto dessa quantidade dá

$$\begin{aligned} C_{fi} &= \frac{8}{8\alpha_T^6 - 16\nu^3\eta^3 + \mu^3\beta^3} \left[8\alpha_T^6 \exp\left\{-\frac{\alpha_T^2}{2}(k_1^2 + k_2^2)\right\} \right. \\ &\quad \left. - \mu^3\beta^3 \exp\left\{-\frac{\mu^2 k_2^2}{4}\right\} \exp\left\{-\frac{\beta^2}{4}|\vec{k}_1 + \vec{k}_2|^2\right\} \right] \end{aligned} \quad (1.16)$$

com

$$\nu = \left(\frac{1}{\alpha_T^2} + \frac{1}{r_c^2} \right)^{-1/2}$$

$$\begin{aligned}
\eta &= \left(\frac{1}{\alpha_T^2} + \frac{1}{r_c^2} - \frac{\nu^2}{r_c^4} \right)^{-1/2} \\
\mu &= \left(\frac{1}{2\alpha_T^2} + \frac{1}{r_c^2} \right)^{-1/2} \\
\beta &= \left(\frac{1}{2\alpha_T^2} + \frac{1}{r_c^2} - \frac{\mu^2}{r_c^4} \right)^{-1/2}
\end{aligned} \tag{1.17}$$

A amplitude de probabilidade, a_{fi} , é, então, calculada, trocando na equação (1.9) $\Psi_f(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ por $\psi_f(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$. Veja detalhes do cálculo no apêndice A.

É importante notar que a ortogonalização (1.14) introduz correlações também no estado final (1.15) a ser usado na amplitude de transição (eq.(1.9)). Essas correlações incluem correlações de alcance maior que r_c , em particular, através da contribuição expressa em termos do produto de duas gaussianas, ligada ao primeiro termo do último colchete na eq.(1.15). Por outro lado, a presença da função de Jastrow assinala também a presença de correlações de curto alcance no estado final (1.15).

1.4 Seção de choque diferencial

A aproximação de Born é utilizada para calcular a seção de choque para uma transição $i \longrightarrow f$. A probabilidade total de que os nucleons sejam emitidos, com vetores de onda $(\vec{k}_1, \vec{k}_2)$ fixados, a qualquer parâmetro de impacto é dada por

$$2\pi \int_{R_P+R_T}^{\infty} |a_{fi}|^2 b db \tag{1.18}$$

A integral acima é cortada em $b = R_P + R_T$ para eliminar os efeitos de absorção forte que surgem em colisões próximas.

A seção de choque para a emissão de um par de nucleons correlacionados pode ser obtida multiplicando a equação (1.18) pela densidade de estados de ondas planas finais, $d^3k_1 d^3k_2 / (2\pi)^6$, e pelo número de pares de nucleons no alvo, $A_T(A_T - 1)/2 \simeq A_T^2/2$. Em termos das energias cinéticas ϵ_1, ϵ_2 e das direções $(\theta_1, \phi_1), (\theta_2, \phi_2)$, dos dois nucleons, esta seção de choque é

$$\frac{d^4\sigma}{d\epsilon_1 d\epsilon_2 d\Omega_1 d\Omega_2} = \frac{m^3 A_T^2}{(2\pi)^5 \hbar^2} \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2} \int_{R_P+R_T}^{\infty} |a_{fi}|^2 b db \quad (1.19)$$

onde m é a massa do nucleon e A_T é o número de massa do alvo.

A expressão $a_{fi}(b)$ em termos das energias cinéticas e das direções dos dois nucleons é

$$a_{fi}(b) = \frac{V_g N_i \alpha_P \sqrt{\pi} \pi^3}{i \hbar v} \exp \left\{ -\frac{\alpha_P^2 \omega^2}{4 \gamma^2 v^2} \right\} (T_{cl} - T_{cc} - T_{or}) \quad (1.20)$$

onde

$$\begin{aligned} T_{cl} = & 4\alpha_T^4 \epsilon^2 \exp \left\{ -\frac{b^2}{\alpha_P^2} \left(1 - \frac{\epsilon^2}{\alpha_P^2} \right) \right\} \\ & \times \left[\exp \left\{ -\frac{m\alpha_T^2 \epsilon_2}{\hbar^2} \right\} \exp \left\{ -\frac{m\epsilon^2 \epsilon_1}{2\hbar^2} \sin^2 \theta_1 \right\} \right. \\ & \times \exp \left\{ -\frac{m\alpha_T^2}{\hbar^2} \left[\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_1 - \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2 + B}{\sqrt{2mv^2}} \right]^2 \right\} \\ & \times \exp \left\{ -\frac{i\epsilon^2 b \sqrt{2m\epsilon_1}}{\hbar \alpha_P} \sin \theta_1 \sin \phi_1 \right\} \\ & + \exp \left\{ -\frac{m\alpha_T^2 \epsilon_1}{\hbar^2} \right\} \exp \left\{ -\frac{m\epsilon^2 \epsilon_2}{2\hbar^2} \sin^2 \theta_2 \right\} \\ & \times \exp \left\{ -\frac{m\alpha_T^2}{\hbar^2} \left[\sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_2 - \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2 + B}{\sqrt{2mv^2}} \right]^2 \right\} \\ & \left. \times \exp \left\{ -\frac{i\epsilon^2 b \sqrt{2m\epsilon_2}}{\hbar \alpha_P} \sin \theta_2 \sin \phi_2 \right\} \right] \quad (1.21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{cc} = & \mu^3 \rho^2 \beta \exp \left\{ -\frac{b^2}{\alpha_P^2} \left(1 - \frac{\rho^2}{\alpha_P^2} \right) \right\} \\ & \times \left[\exp \left\{ -\frac{m\mu^2 \epsilon_2}{2\hbar^2} \right\} \right. \\ & \times \exp \left\{ -\frac{m\rho^2}{2\hbar^2} \left[\epsilon_1 \sin^2 \theta_1 + \delta^2 \epsilon_2 \sin^2 \theta_2 + 2\delta \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \right] \right\} \\ & \left. \times \exp \left\{ -\frac{m\beta^2}{2\hbar^2} \left[\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_1 + \delta \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_2 - \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2 + B}{\sqrt{2mv^2}} \right]^2 \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \exp \left\{ -\frac{i\rho^2 b \sqrt{2m}}{\hbar \alpha_P^2} [\sqrt{\epsilon_1} \sin \theta_1 \sin \phi_1 + \delta \sqrt{\epsilon_2} \sin \theta_2 \sin \phi_2] \right\} \\
& + \exp \left\{ -\frac{m\mu^2 \epsilon_1}{2\hbar^2} \right\} \\
& \times \exp \left\{ -\frac{m\rho^2}{2\hbar^2} [\epsilon_2 \sin^2 \theta_2 + \delta^2 \epsilon_1 \sin^2 \theta_1 + 2\delta \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)] \right\} \\
& \times \exp \left\{ -\frac{m\beta^2}{2\hbar^2} \left[\sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_2 + \delta \sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_1 - \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2 + B}{\sqrt{2mv^2}} \right]^2 \right\} \\
& \times \exp \left\{ -\frac{i\rho^2 b \sqrt{2m}}{\hbar \alpha_P^2} [\sqrt{\epsilon_2} \sin \theta_2 \sin \phi_2 + \delta \sqrt{\epsilon_1} \sin \theta_1 \sin \phi_1] \right\} \quad (1.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{or} = & C_{fi} \left[2\alpha_T^4 \tau^2 \exp \left\{ -\frac{b^2}{\alpha_P^2} \left(1 - \frac{\tau^2}{\alpha_P^2} \right) \right\} \exp \left\{ -\frac{\alpha_T^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2 + B)^2}{4\hbar^2 v^2} \right\} \right. \\
& - 4\nu^3 \lambda^2 \eta \exp \left\{ -\frac{b^2}{\alpha_P^2} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\alpha_P^2} \right) \right\} \exp \left\{ -\frac{\eta^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2 + B)^2}{4\hbar^2 v^2} \right\} \\
& \left. + \frac{1}{4} \mu^3 \xi^2 \beta \exp \left\{ -\frac{b^2}{\alpha_P^2} \left(1 - \frac{\xi^2}{2\alpha_P^2} \right) \right\} \exp \left\{ -\frac{\beta^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2 + B)^2}{8\hbar^2 v^2} \right\} \right] \quad (1.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{fi} = & \frac{8}{8\alpha_T^6 - 16\nu^3 \eta^3 + \mu^3 \beta^3} \\
& \times \left[8\alpha_T^6 \exp \left\{ -\frac{m\alpha_T^2}{\hbar^2} (\epsilon_1 + \epsilon_2) \right\} + \mu^3 \beta^3 \exp \left\{ -\frac{m\mu^2 \epsilon_2}{2\hbar^2} \right\} \right. \\
& \left. \times \exp \left\{ -\frac{m\beta^2}{2\hbar^2} [\epsilon_1 + \delta^2 \epsilon_2 + 2\delta \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2} (\sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) + \cos \theta_1 \cos \theta_2)] \right\} \right] \quad (1.24)
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \left(\frac{1}{2\alpha_T^2} + \frac{1}{\alpha_P^2} \right)^{-1/2} \\
\rho &= \left(\frac{1}{2\alpha_T^2} + \frac{1}{r_c^2} + \frac{1}{\alpha_P^2} - \frac{\mu^2}{r_c^4} \right)^{-1/2} \\
\tau &= \left(\frac{1}{\alpha_T^2} + \frac{1}{\alpha_P^2} \right)^{-1/2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda &= \left(\frac{1}{\alpha_T^2} + \frac{1}{r_c^2} + \frac{1}{\alpha_P^2} - \frac{\nu^2}{r_c^4} \right)^{-1/2} \\
\xi &= \left(\frac{1}{2\alpha_T^2} + \frac{1}{r_c^2} + \frac{1}{2\alpha_P^2} - \frac{\mu^2}{r_c^4} \right)^{-1/2} \\
\delta &= \frac{\mu^2}{r_c^2}
\end{aligned} \tag{1.25}$$

B é a energia de ligação do par de nucleons correlacionados.

No próximo capítulo faremos algumas aplicações numéricas dessas expressões.

Capítulo 2

Aplicações Numéricas e Discussão

2.1 Aplicações numéricas

Alguns exemplos de aplicação da expressão da seção de choque diferencial quádrupla serão mostrados aqui. Consideramos a aplicação da equação (1.19) aos sistemas $^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$ a $14.5\text{ GeV}/u$ e $^{238}\text{U} + ^{108}\text{Ag}$ a $1\text{ GeV}/u$. Neste último caso, vamos supor que os nucleons são emitidos do núcleo de Urânio. O sistema de referência adotado é o do Urânio.

Calculamos numericamente a integral da equação (1.19) para os dois sistemas citados acima. Para os parâmetros r_o , r_c , a , B e V_o utilizamos os valores 1.2 fm , 0.7 fm , 0.65 fm , 16 MeV e 50 MeV , respectivamente.

Na figura (2.1), mostramos a seção de choque diferencial calculada em função das energias cinéticas ϵ_1 e ϵ_2 , para os dois nucleons emitidos em sentidos opostos ($\theta_1 = 0^\circ$ e $\theta_2 = 180^\circ$) ao longo da direção do feixe, nos dois sistemas acima. A figura (2.2) refere-se aos valores da seção de choque diferencial calculados em função de ϵ_2 e θ_2 fixando θ_1 em 90° e ϵ_1 em 50 MeV . Neste caso, o primeiro nucleon é emitido perpendicularmente a direção do feixe.

As curvas de nível, que aparecem nessas figuras, estão em escala logarítmica (isto é, curvas de nível sucessivas correspondem a valores da seção de choque que diferem por um fator 10).

Fixamos estes valores de modo que possamos comparar nossos resultados com os obtidos por Bertulani *et al.*³, já que eles os utilizaram por resultarem em valores

apreciáveis da seção de choque diferencial em ambos os sistemas. Por simplicidade consideramos que o par de nucleons é emitido em um plano contendo a direção do feixe, $\phi_1 - \phi_2 = 180^\circ$.

As figuras (2.3) e (2.4) referem-se aos valores da seção de choque diferencial calculados em função de ϵ_1 e ϵ_2 para $\theta_1 = 0^\circ$ e $\theta_2 = 180^\circ$ e, em função de ϵ_2 e θ_2 para $\epsilon_1 = 50 \text{ MeV}$ e $\theta_1 = 90^\circ$, respectivamente, obtidos por Bertulani *et al.*³, utilizando os parâmetros

$$\begin{aligned}\alpha_P &= 2\sqrt{aR_P} \\ \alpha_T &= 2\sqrt{aR_T} \\ N_i &= \frac{3}{4\pi R_T^3},\end{aligned}\tag{2.1}$$

em vez de (1.8), (1.12) e (1.13) (não fizemos aqui as aproximações introduzidas por esses autores, $r_c^2 \ll \alpha_P^2, \alpha_T^2$ e $v \simeq c$). As curvas de nível estão também em escala logarítmica. A expressão da seção de choque da ref.[3] foi obtida desprezando, em $\Psi_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$, o primeiro termo dentro do colchete (cujo termo não contém a correlação de curto alcance entre os nucleons).

2.2 Discussão dos resultados e conclusões

Nesta seção vamos discutir os resultados, obtidos na seção anterior, da aplicação da eq.(1.19) aos dois sistemas considerados. Vamos comparar os gráficos obtidos (fig.(2.1) e (2.2)) com os da ref.[3] (fig.(2.3) e (2.4)). Discutiremos, também, os efeitos dos parâmetros, usados na discussão do estado inicial, sobre o valor da seção de choque diferencial.

Um estudo da topografia das figuras (2.1) e (2.2) revela que tais gráficos apresentam três regiões mais elevadas separadas por “depressões”.

Observamos que a primeira região, a mais elevada das três, tem máximos em ϵ_1 e ϵ_2 muito baixos (fig.(2.1)) e, é constante com a variação de θ_2 para uma mesma energia, ϵ_2 (fig.(2.2)). Interpretamos esta região como proveniente das correlações de

longo alcance no estado final. Observamos, inclusive (na fig.(2.2)), que nesta região o par de nucleons tem momento transverso apreciável e momento longitudinal muito pequeno, contrariando as expectativas de encontrar o par de nucleons com momento longitudinal apreciável em virtude do fônon absorvido carregar momento ao longo da direção do feixe, como discutido na seção (1.1).

Encontramos uma segunda região, mais baixa do que a primeira, onde os valores de $\epsilon_1 > \epsilon_2$ (fig.(2.1)) e $\theta_2 \leq 90^\circ$, $\epsilon_2 \geq 20 MeV$ (fig.(2.2)), em ambos os sistemas. Notamos que essa região é semelhante à encontrada nas figuras (2.3) e (2.4) e, como as curvas de nível destes gráficos foram obtidas da expressão da seção de choque diferencial segundo a ref.[3], onde apenas as correlações de curto alcance foram consideradas, identificamos, então, a segunda região com correlações de curto alcance no estado inicial.

Finalmente, encontramos uma terceira região onde os valores de $\epsilon_2 > \epsilon_1$ (fig.(2.1)) e, $\theta_2 > 90^\circ$, $\epsilon_2 \geq 20 MeV$ (fig.(2.2)), também em ambos os sistemas. Esta é a região proveniente das correlações de curto alcance no estado final, introduzida através da ortogonalização entre os estados inicial e final, como discutido na seção (1.3). Apesar desta região ser, qualitativamente, muito rica em detalhes, não nos deteremos mais nela, pois tal região desempenha um papel quantitativamente secundário em virtude dos baixos valores da seção de choque diferencial, os quais são representados pelas curvas de nível. Veja, como ilustração, as figuras (2.5) e (2.6) onde calculamos a seção de choque diferencial em função de ϵ_1 e ϵ_2 para os dois sistemas em questão, com $\theta_1 = 90^\circ$ e (a) $\theta_2 = 60^\circ$, (b) $\theta_2 = 95^\circ$ no sistema $Ca + Ca$ e $\theta_2 = 105^\circ$ no sistema $U + Ag$ e (c) $\theta_2 = 170^\circ$. Observe que tais gráficos contém cortês da fig.(2.2) nos ângulos descritos acima. A riqueza de detalhes mencionada é particularmente visível nas figuras (2.5b) e (2.6b).

Observando a região proveniente das correlações de curto alcance no estado inicial, notamos que o nucleon emitido no mesmo sentido do movimento do feixe, carrega uma energia maior. Isto é uma consequência direta do fato que os fônons absorvidos carregam momento ao longo da direção do feixe. Para nucleons emitidos em sentidos opostos ($\theta_1 = 0^\circ$ e $\theta_2 = 180^\circ$) ao longo da direção do feixe (fig.(2.1)),

suas energias mais prováveis são $\epsilon_1 \simeq 145 MeV$ e $\epsilon_2 \simeq 51 MeV$, no sistema $Ca + Ca$ e $\epsilon_1 \simeq 67 MeV$ e $\epsilon_2 \simeq 27 MeV$, no sistema $U + Ag$.

Para um nucleon emitido perpendicularmente a direção do feixe ($\theta_1 = 90^\circ$) com energia $\epsilon_1 = 50 MeV$, constatamos que a energia e a direção mais prováveis do segundo nucleon são $\epsilon_2 \simeq 74 MeV$ e $\theta_2 \simeq 64^\circ$, no sistema $Ca + Ca$ e $\epsilon_2 \simeq 57 MeV$ e $\theta_2 \simeq 64^\circ$, no sistema $U + Ag$. Nestes ângulos e energias confirmamos, o que se esperava segundo a discussão da seção (1.1), que o momento transverso do par de nucleons é relativamente pequeno e o momento longitudinal é aproximadamente igual ao momento do fônon absorvido (ω/v).

Estas propriedades da seção de choque diferencial quádrupla ilustradas nas figuras (2.1) e (2.2) são os sinais da emissão de pares de nucleons via as correlações nucleon-nucleon de curto alcance.

Para verificarmos a sensibilidade do resultado aos parâmetros N_i , α_P e α_T , vamos compará-los com os utilizados na ref.[3] (eq.(2.1)). Para diferenciá-los vamos usar os símbolos K e B, respectivamente. Cálculos numéricos mostram que

$$N_i^{(K)} > N_i^{(B)} \quad (2.2)$$

$$\alpha_P^{(B)} > \alpha_P^{(K)} \text{ e } \alpha_T^{(B)} > \alpha_T^{(K)} \implies G^{(B)} > G^{(K)} \quad (2.3)$$

onde $G^{(B)}$ e $G^{(K)}$ referem-se aos valores da seção de choque diferencial calculados com a mesma constante de normalização ($N_i^{(B)} = N_i^{(K)} = 1$).

Então,

$$\left(\frac{N_i^{(K)}}{N_i^{(B)}} \right)^2 = R_N \text{ e } \left(\frac{G^{(B)}}{G^{(K)}} \right) = R_G \quad (2.4)$$

sendo R_N e R_G constantes adimensionais maiores do que 1.

No sistema $Ca + Ca$ temos $R_G \gg R_N$. Desse modo, os valores da seção de choque diferencial para $N_i^{(K)}$, $\alpha_P^{(K)}$ e $\alpha_T^{(K)}$ são menores do que para $N_i^{(B)}$, $\alpha_P^{(B)}$ e $\alpha_T^{(B)}$. Já, no sistema $U + Ag$ temos $R_N \gg R_G$, a situação se inverte porque $N_i^{(K)}$ cresce exponencialmente com R_T , ou seja, possui valores muito grandes em sistemas mais pesados.

Isso pode ser visto na fig.(2.7), cuja figura foi obtida ao fazermos um corte nas fig.(2.2a) e (2.4a) a $\epsilon_2 = 61 MeV$ e nas fig.(2.2b) e (2.4b) a $\epsilon_2 = 45 MeV$, visto que estamos interessados nos efeitos das correlações de curto alcance e onde obtemos valores apreciáveis da seção de choque diferencial na região proveniente das correlações de curto alcance no estado final. Ilustramos a seção de choque diferencial em função de θ_2 , segundo os cálculos da ref.[3] para $N_i^{(B)}$, $\alpha_P^{(B)}$, $\alpha_T^{(B)}$ (curvas cheias) e para $N_i^{(K)}$, $\alpha_P^{(K)}$, $\alpha_T^{(K)}$ (curvas pontilhadas) e, segundo a equação (1.19) (curvas tracejadas). Esta última curva inclui a ortogonalização entre os estados inicial e final.

Ao compararmos as duas primeiras curvas notamos que as constantes $N_i^{(K)}$, $\alpha_P^{(K)}$, $\alpha_T^{(K)}$ produziram uma diminuição do valor da seção de choque diferencial no sistema $Ca + Ca$ e um aumento no sistema $U + Ag$. A terceira curva mostra uma diminuição no valor da seção de choque diferencial encontrado na segunda curva, isto é, a ortogonalização entre os estados inicial e final produz uma diminuição do valor da seção de choque encontrado por Bertulani *et al.*³, para os mesmos parâmetros.

Na figura (2.8) constatamos que as constantes utilizadas por Karol², $N_i^{(K)}$, $\alpha_P^{(K)}$, $\alpha_T^{(K)}$ (curvas tracejadas), reproduzem corretamente o valor da densidade na superfície nuclear. Esta é uma condição que deve ser satisfeita em virtude dos critérios a e b , do capítulo 1, utilizados na escolha da forma de Ψ_i eq.(1.11). Isto, no entanto, não ocorre no caso das constantes $N_i^{(B)}$, $\alpha_P^{(B)}$, $\alpha_T^{(B)}$ (curvas pontilhadas).

As curvas cheias correspondem a distribuição de densidade de Woods-Saxon (veja eq.(B.1) no apêndice B).

Nas figuras (2.9) e (2.10) ilustramos a seção de choque diferencial quádrupla como uma função de ϵ_1 e ϵ_2 para diversos valores de r_c . Verificamos que há uma sensível alteração na topografia especialmente para variações grandes de r_c (isto é, r_c variando até valores da ordem do raio nuclear). A sensibilidade a r_c parece aumentar, no entanto, com a energia do feixe, como pode ser visto comparando a fig.(2.9) ($E_{lab} = 14.5 \text{ GeV}/u$) com a fig.(2.10) ($E_{lab} = 1 \text{ GeV}/u$). Isso pode sugerir a possibilidade de extrair um alcance médio de correlações na região superficial do núcleo através do estudo experimental da distribuição no plano $\epsilon_1 \times \epsilon_2$ dos nucleons emitidos numa dada geometria⁵. É imprescindível, porém, examinar modelos nucleares mais realísticos antes que processos desta natureza possam ser considerados instrumentos quantitativos para o estudo da função de correlação nucleon-nucleon na região superficial de núcleos. Tais modelos devem, em particular, conter uma parametrização mais completa e mais flexível da função de correlação nuclear. Dado o caráter ingênuo do modelo nuclear adotado aqui, a suposição de que as seções de choque dele obtidas sejam diretamente aplicáveis quantitativamente a seções de choque experimentais parece, no mínimo, precipitada.

2.3 Gráficos

Nesta seção colocaremos todos os gráficos aos quais nos referimos nas duas primeiras seções deste capítulo.

Figura 2.1:
Seção de choque diferencial quádrupla ($d^4\sigma/d\epsilon_1 d\epsilon_2 d\Omega_1 d\Omega_2$) da eq.(1.19) para $\theta_1 = 0^\circ$ e $\theta_2 = 180^\circ$, como uma função de ϵ_1 e ϵ_2 . A seção de choque é dada em $(\text{fm}/\text{MeV})^2$.

Figura 2.2:
A seção de choque da Fig.(2.1) como uma função de ϵ_2 e θ_2 para θ_1 e ϵ_1 fixados em 90° e 50 MeV , respectivamente.

Figura 2.3:

Seção de choque diferencial quádrupla ($d^4\sigma/d\epsilon_1 d\epsilon_2 d\Omega_1 d\Omega_2$) da ref.[3] para $\theta_1 = 0^\circ$ e $\theta_2 = 180^\circ$, como uma função de ϵ_1 e ϵ_2 . A seção de choque é dada em $(\text{fm}/\text{MeV})^2$.

Figura 2.4:
A seção de choque da Fig.(2.3) como uma função de ϵ_2 e θ_2 para $\theta_1 = 90^\circ$ e $\epsilon_1 = 50 \text{ MeV}$.

Figura 2.5:
A seção de choque da Fig.(2.1) em função de ϵ_1 e ϵ_2 no sistema $\text{Ca} + \text{Ca}$, para $\theta_1 = 90^\circ$ e (a) $\theta_2 = 60^\circ$, (b) $\theta_2 = 95^\circ$ e (c) $\theta_2 = 170^\circ$.

Figura 2.6:
A seção de choque da Fig.(2.1) como uma função de ϵ_1 e ϵ_2 , no sistema $U + Ag$, para $\theta_1 = 90^\circ$ e (a) $\theta_2 = 60^\circ$, (b) $\theta_2 = 105^\circ$ e (c) $\theta_2 = 170^\circ$.

Figura 2.7:

(a) Cortes nas Fig.(2.2a) e (2.4a) em $\epsilon_2 = 61 \text{ MeV}$. Seção de choque diferencial quádrupla calculada em função de θ_2 , segundo a ref.[3] para $N_i^{(B)}, \alpha_P^{(B)}, \alpha_T^{(B)}$ (curvas cheias) e para $N_i^{(K)}, \alpha_P^{(K)}, \alpha_T^{(K)}$ (curvas pontilhadas) e, segundo a eq.(1.19) (curvas tracejadas). (b) O mesmo de (a) com cortes nas Fig.(2.2b) e (2.4b) em $\epsilon_2 = 45 \text{ MeV}$.

Figura 2.8:
A densidade nuclear para ^{40}Ca e ^{238}U . A densidade de Woods-Saxon (curvas cheias) e a densidade Gaussiana para $N_i^{(K)}, \alpha_P^{(K)}, \alpha_T^{(K)}$ (curvas tracejadas) e para $N_i^{(B)}, \alpha_P^{(B)}, \alpha_T^{(B)}$ (curvas pontilhadas).

Figura 2.9:
O mesmo da Fig.(2.1) para (a) $r_c = 0.5 \text{ fm}$, (b) $r_c = 1.0 \text{ fm}$, (c) $r_c = 1.5 \text{ fm}$, (d) $r_c = 2.0 \text{ fm}$ e (e) $r_c = 3.0 \text{ fm}$, no sistema $Ca + Ca$.

Figura 2.10:
O mesmo da Fig.(2.9), no sistema $U + Ag$.

Apêndice A

Dedução da expressão para a seção de choque diferencial quádrupla

Vamos detalhar os cálculos que conduziram a expressão da seção de choque diferencial quádrupla (eq.(1.19)).

Substituindo Ψ_i (eq.(1.11)), ψ_f (eq.(1.15)) e V (eq.(1.6)) na equação (1.9), obtemos

$$\begin{aligned} a_{fi}(b) = & \frac{V_g N_i \gamma}{i\hbar} \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \int d^3 r_1 d^3 r_2 \left[\exp \left\{ -i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 + \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2) \right\} \right. \\ & - C_{fi} \exp \left\{ -\frac{r_1^2 + r_2^2}{2\alpha_T^2} \right\} \left[1 - \exp \left\{ -\frac{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}{r_c^2} \right\} \right] \Big] \\ & \times \exp \left\{ -\frac{(X - x_j)^2}{\alpha_P^2} \right\} \exp \left\{ -\frac{(Y - y_j)^2}{\alpha_P^2} \right\} \exp \left\{ -\frac{\gamma^2 (vt - z_j)^2}{\alpha_P^2} \right\} \\ & \times \exp \left\{ -\frac{r_1^2 + r_2^2}{2\alpha_T^2} \right\} \left[1 - \exp \left\{ -\frac{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}{r_c^2} \right\} \right] \end{aligned} \quad (A.1)$$

A integração sobre o tempo pode ser facilmente efetuada e conseguimos o resultado

$$\frac{\alpha_P \sqrt{\pi}}{\gamma v} \exp \left\{ -\frac{\alpha_P^2 \omega^2}{4\gamma^2 v^2} \right\} \exp \left\{ \frac{i\omega z_j}{v} \right\} \quad (A.2)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
a_{fi} = & \frac{V_g N_i \alpha_P \sqrt{\pi}}{i \hbar v^2} \exp \left\{ -\frac{\alpha_P^2 \omega^2}{4 \gamma^2 v^2} \right\} \sum_{j=1}^2 \left[\int d^3 r_1 d^3 r_2 \exp \left\{ -i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 + \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2) \right\} \right. \\
& \times \exp \left\{ -\frac{x_j^2 + (b - y_j)^2}{\alpha_P^2} \right\} \exp \left\{ \frac{i \omega z_j}{v} \right\} \exp \left\{ -\frac{r_1^2 + r_2^2}{2 \alpha_T^2} \right\} \\
& - \int d^3 r_1 d^3 r_2 \exp \left\{ -i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 + \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2) \right\} \exp \left\{ -\frac{x_j^2 + (b - y_j)^2}{\alpha_P^2} \right\} \exp \left\{ \frac{i \omega z_j}{v} \right\} \\
& \times \exp \left\{ -\frac{r_1^2 + r_2^2}{2 \alpha_T^2} \right\} \exp \left\{ -\frac{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}{r_c^2} \right\} \\
& - C_{fi} \int d^3 r_1 d^3 r_2 \exp \left\{ -\frac{x_j^2 + (b - y_j)^2}{\alpha_P^2} \right\} \exp \left\{ \frac{i \omega z_j}{v} \right\} \exp \left\{ -\frac{r_1^2 + r_2^2}{\alpha_T^2} \right\} \\
& + 2C_{fi} \int d^3 r_1 d^3 r_2 \exp \left\{ -\frac{x_j^2 + (b - y_j)^2}{\alpha_P^2} \right\} \exp \left\{ \frac{i \omega z_j}{v} \right\} \\
& \times \exp \left\{ -\frac{r_1^2 + r_2^2}{\alpha_T^2} \right\} \exp \left\{ -\frac{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}{r_c^2} \right\} \\
& - C_{fi} \int d^3 r_1 d^3 r_2 \exp \left\{ -\frac{x_j^2 + (b - y_j)^2}{\alpha_P^2} \right\} \exp \left\{ \frac{i \omega z_j}{v} \right\} \\
& \times \exp \left\{ -\frac{r_1^2 + r_2^2}{\alpha_T^2} \right\} \exp \left\{ -\frac{2|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}{r_c^2} \right\} \left. \right] \quad (A.3)
\end{aligned}$$

Vamos calcular, analiticamente, a primeira integral da equação acima, ou seja,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_j = & \int d^3 r_1 d^3 r_2 \exp \left\{ -i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 + \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2) \right\} \exp \left\{ -\frac{x_j^2 + (b - y_j)^2}{\alpha_P^2} \right\} \\
& \times \exp \left\{ \frac{i \omega z_j}{v} \right\} \exp \left\{ -\frac{r_1^2 + r_2^2}{2 \alpha_T^2} \right\} \quad (A.4)
\end{aligned}$$

Podemos escrever $\mathfrak{S}_j$ como um produto dos fatores cartesianos $\mathfrak{S}_{jx}$, $\mathfrak{S}_{jy}$ e $\mathfrak{S}_{jz}$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_{jx} = & \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \exp \left\{ -i(k_{1x}x_1 + k_{2x}x_2) \right\} \\
& \times \exp \left\{ -\frac{x_j^2}{\alpha_P^2} \right\} \exp \left\{ -\frac{x_1^2 + x_2^2}{2 \alpha_T^2} \right\} \\
\mathfrak{S}_{jy} = & \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \int_{-\infty}^{\infty} dy_2 \exp \left\{ -i(k_{1y}y_1 + k_{2y}y_2) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \exp \left\{ -\frac{(b-y_j)^2}{\alpha_P^2} \right\} \exp \left\{ -\frac{y_1^2 + y_2^2}{2\alpha_T^2} \right\} \\
\mathfrak{S}_{jz} = & \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \int_{-\infty}^{\infty} dz_2 \exp \{ -i(k_{1z}z_1 + k_{2z}z_2) \} \\
& \times \exp \left\{ \frac{i\omega z_j}{v} \right\} \exp \left\{ -\frac{z_1^2 + z_2^2}{2\alpha_T^2} \right\}
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Calculamos as integrais acima para $j=1$ e obtemos

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_{1x} &= \sqrt{2\pi}\varepsilon\alpha_T \exp \left\{ -\frac{\alpha_T^2 k_{2x}^2}{2} \right\} \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2 k_{1x}^2}{4} \right\} \\
\mathfrak{S}_{1y} &= \sqrt{2\pi}\varepsilon\alpha_T \exp \left\{ -\frac{b^2}{\alpha_P^2} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{\alpha_P^2} \right) \right\} \exp \left\{ -\frac{i\varepsilon^2 b k_{1y}}{\alpha_P^2} \right\} \\
& \times \exp \left\{ -\frac{\alpha_T^2 k_{2y}^2}{2} \right\} \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2 k_{1y}^2}{4} \right\} \\
\mathfrak{S}_{1z} &= 2\pi\alpha_T^2 \exp \left\{ -\frac{\alpha_T^2 k_{2z}^2}{2} \right\} \exp \left\{ -\frac{\alpha_T^2}{2} \left(k_{1z} - \frac{\omega}{v} \right)^2 \right\}
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_1 &= 4\pi^3\alpha_T^4\varepsilon^2 \exp \left\{ -\frac{\alpha_T^2 k_2^2}{2} \right\} \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2 k_{1T}^2}{4} \right\} \exp \left\{ -\frac{\alpha_T^2}{2} \left(k_{1z} - \frac{\omega}{v} \right)^2 \right\} \\
& \times \exp \left\{ -\frac{b^2}{\alpha_P^2} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{\alpha_P^2} \right) \right\} \exp \left\{ -\frac{i\varepsilon^2 b k_{1y}}{\alpha_P^2} \right\}
\end{aligned} \tag{A.7}$$

onde $k_{iT} (i = 1, 2)$ é a componente transversal de $\vec{k}_i$.

Obtemos uma expressão similar para $j=2$, trocando os índices 1 e 2.

O cálculo das demais integrais e dos coeficientes $\langle \Psi_i | \Psi_i \rangle$ e $\langle \Psi_i | \Psi_f \rangle$ segue o mesmo procedimento, assim

$$a_{fi}(b) = \frac{V_g N_i \alpha_P \sqrt{\pi} \pi^3}{i\hbar v} \exp \left\{ -\frac{\alpha_P^2 \omega^2}{4\gamma^2 v^2} \right\} (T_{cl} - T_{cc} - T_{or}) \tag{A.8}$$

onde

$$T_{cl} = \Upsilon_1 4\alpha_T^4 \varepsilon^2 \exp \left\{ -\frac{b^2}{\alpha_P^2} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{\alpha_P^2} \right) \right\} \left[\exp \left\{ -\frac{\alpha_T^2 k_2^2}{2} \right\} \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2 k_{1T}^2}{4} \right\} \right]$$

$$\begin{aligned}
& \times \exp \left\{ -\frac{\alpha_T^2}{2} \left(k_{1z} - \frac{\omega}{v} \right)^2 \right\} \exp \left\{ -\frac{i\varepsilon^2 b k_{1y}}{\alpha_P^2} \right\} \\
& + \exp \left\{ -\frac{\alpha_T^2 k_1^2}{2} \right\} \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2 k_{2T}^2}{4} \right\} \\
& \times \exp \left\{ -\frac{\alpha_T^2}{2} \left(k_{2z} - \frac{\omega}{v} \right)^2 \right\} \exp \left\{ -\frac{i\varepsilon^2 b k_{2y}}{\alpha_P^2} \right\} \Big] \quad (A.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{cc} = & \Upsilon_2 \mu^3 \rho^2 \beta \exp \left\{ -\frac{b^2}{\alpha_P^2} \left(1 - \frac{\rho^2}{\alpha_P^2} \right) \right\} \left[\exp \left\{ -\frac{\mu^2 k_2^2}{4} \right\} \exp \left\{ -\frac{\rho^2}{4} |\vec{k}_{1T} + \delta \vec{k}_{2T}|^2 \right\} \right. \\
& \times \exp \left\{ -\frac{\beta^2}{4} \left(k_{1z} + \delta k_{2z} - \frac{\omega}{v} \right)^2 \right\} \exp \left\{ -\frac{i\rho^2 b}{\alpha_P^2} (k_{1y} + \delta k_{2y}) \right\} \\
& + \exp \left\{ -\frac{\mu^2 k_1^2}{4} \right\} \exp \left\{ -\frac{\rho^2}{4} |\vec{k}_{2T} + \delta \vec{k}_{1T}|^2 \right\} \exp \left\{ -\frac{\beta^2}{4} \left(k_{2z} + \delta k_{1z} - \frac{\omega}{v} \right)^2 \right\} \\
& \left. \times \exp \left\{ -\frac{i\rho^2 b}{\alpha_P^2} (k_{2y} + \delta k_{1y}) \right\} \right] \quad (A.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{or} = & \Upsilon_3 C_{fi} \left[\Upsilon_1 2\alpha_T^4 \tau^2 \exp \left\{ -\frac{\alpha_T^2 \omega^2}{4v^2} \right\} \exp \left\{ -\frac{b^2}{\alpha_P^2} \left(1 - \frac{\tau^2}{\alpha_P^2} \right) \right\} \right. \\
& - \Upsilon_1 \Upsilon_4 \nu^3 \lambda^2 \eta \exp \left\{ -\frac{\eta^2 \omega^2}{4v^2} \right\} \exp \left\{ -\frac{b^2}{\alpha_P^2} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\alpha_P^2} \right) \right\} \\
& \left. + \Upsilon_2 \frac{1}{4} \mu^3 \xi^2 \beta \exp \left\{ -\frac{\beta^2 \omega^2}{8v^2} \right\} \exp \left\{ -\frac{b^2}{\alpha_P^2} \left(1 - \frac{\xi^2}{2\alpha_P^2} \right) \right\} \right] \quad (A.11)
\end{aligned}$$

Introduzimos nas expressões acima Υ_1 , Υ_2 e Υ_3 . Tais símbolos identificam os termos provenientes da função de onda inicial que não contém a função de correlação de curto alcance e os que contém e, na função de onda final, os termos provenientes da ortogonalização, respectivamente.

$$\langle \Psi_i | \Psi_i \rangle = \frac{N_i^2 \pi^3}{8} (8\alpha_T^6 - 16\nu^3 \eta^3 + \mu^3 \beta^3) \quad (A.12)$$

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_i | \Psi_f \rangle = & N_i \pi^3 \left[8\alpha_T^6 \exp \left\{ -\frac{\alpha_T^2}{2} (k_1^2 + k_2^2) \right\} \right. \\
& \left. - \mu^3 \beta^3 \exp \left\{ -\frac{\mu^2 k_2^2}{4} \right\} \exp \left\{ -\frac{\beta^2}{4} |\vec{k}_1 + \vec{k}_2|^2 \right\} \right] \quad (A.13)
\end{aligned}$$

E, definimos

$$C_{fi} = N_i \frac{\langle \Psi_i | \Psi_f \rangle}{\langle \Psi_i | \Psi_i \rangle} \quad (\text{A.14})$$

Para obter a seção de choque diferencial segundo a ref.[3], basta fazer $\Upsilon_1 = \Upsilon_3 = 0$ e considerar os parâmetros N_i , α_P e α_T como descritos pela eq.(2.1). A partir daqui, fazer as aproximações $r_c^2 \ll \alpha_P^2, \alpha_T^2$ e $v \simeq c$ e expandir μ , ρ , δ e β até termos de segunda ordem.

Apêndice B

A aproximação de Karol para a densidade nuclear superficial

A densidade de Woods-Saxon é dada por

$$\rho(R) = \frac{\rho_0}{1 + \exp \left\{ \frac{R-R_T}{a} \right\}} \quad (\text{B.1})$$

com

$$\rho_0 = \frac{3A_T}{4\pi R_T^3 \left[1 + \frac{\pi^2 (4.4a)^2}{19.36 R_T^2} \right]} \quad (\text{B.2})$$

A densidade gaussiana segundo Karol² é

$$\rho(R) = \rho(0) \exp \left\{ -\frac{R^2}{\alpha_T^2} \right\} \quad (\text{B.3})$$

onde α_T é dado pela eq.(1.12) e $\rho(0)$ é

$$\rho(0) = \frac{1}{2} \rho_0 \exp \left\{ \frac{R_T^2}{\alpha_T^2} \right\} \quad (\text{B.4})$$

Embora essa aproximação superestime fortemente a densidade nuclear na região central do núcleo, os valores prescritos de α_T e $\rho(0)$ dão uma representação bastante razoável da densidade nuclear na região superficial (confira na fig.(2.8)).

Referências

- [1] H. Feshbach e M. Zabeck, Ann. Phys. 107(1977)110; H. Feshbach, Prog. Part. Nucl. Phys. 4(1980)451.
- [2] P. J. Karol, Phys. Rev. C11(1975)1203.
- [3] C. A. Bertulani, L. F. Canto, R. Donângelo e J. O. Rasmussen, Mod. Phys. Lett. 14(1989)1315.
- [4] B. F. Bayman, P. J. Ellis, S. Fricke e I. C. Tang, Phys. Rev. Lett. 53(1984)1322.
- [5] F. S. Navarra e M. C. Nemes, aceito para publicação em Phys. Rev. C
- [6] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik. Table of Integrals, Series and Products (Academic Press Inc., 1965).