UNIVERSIDADE DE SAO PAULO

INSTITUTO DE FISICA

PROBLEMAS NAO-LINEARES COM PERTURBAÇÃO IMPULSIVA
E APLICAÇÕES EM FÍSICA DE PLASMAS

RICARDO LUIZ VIANA

SBI-FUSP

305M810T1757

apresentada ao Instituto

de Física da Universidade de
São Paulo, como parte dos
requisitos necessários à
obtenção do título de Doutor em
Ciências

Orientador: Prof. Dr. Ibere Luiz Caldas

Sao Paulo

1991

530.44
V614P
D
e.1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Viana, Ricardo Luiz

Problemas não-lineares com perturbação
impulsiva e aplicações em física de plas-
mas. São Paulo, 1991.

Tese (Doutorado) - Universidade de São
Paulo. Instituto de Física. Departamento
de Física Experimental.

Área de Concentração: Física Nuclear
Orientador: Prof^º Dr. Iberê Luiz Caldas

Unitermos: 1.Dinâmica não-linear; 2.Com-
portamento caótico; 3.Física de plasmas;
4.Fusão controlada.

USP/IF/SBI - 01/91

À minha criança, que ainda
está para chegar.

Every science has a tradition and a history. The two must not be confused. Tradition evolves; history extends. Tradition is easy to find; it is handed down. Just consult a score of recent textbooks; discard any that seem a little different from the rest; those that are alike except for variations in offences to the language in which they are written will give you the tradition in its present phase. The history of a period is fixed; steps are added as time goes on, but each preceding step remains itself, unchanged. The early steps of a history are soon forgotten. Historians may trace and uncover them; historians jump backward in time; but writings on the history of science rarely influence the current tradition, which looks mainly forward and applies to its history a powerful obliuator giving nearly infinite weight to the immediately preceding tradition, singular weight to a few old episodes (usually twisted far from the facts), and weight naught to all rest of the past. The difference between history and tradition is not peculiar to science; it is a regular aspect of common forgetting and death. In physical science, nevertheless, it takes a different turn, for there the chorus of tradition manufactures a history in which it replaces the way things did happen with the way they ought have happened. The tribes of physical science defend their rituals and their tabus by attributing them to the founders: NEWTON, EULER, etc., they say, must surely have felt about their sciences just the way physicists feel about them today. Of course that this is true, because we all know that NEWTON and EULER were great physicists, and great physicists cannot have thought wrongly about the very sciences they themselves did the most to create. To reach these conclusions, it is not necessary to read anything NEWTON or EULER wrote; indeed, that would only confuse the tribesmen. (...)

Clifford Truesdell (1984)

RESUMO

Este trabalho visa o estudo de sistemas não lineares sujeitos a perturbações periódicas que, por suas características, podem ser descritos por uma sequência de funções delta. Na ausência desta ação externa, tais sistemas exibem um comportamento previamente conhecido. Inicialmente é mostrada uma técnica de estudo que reduz os sistemas impulsivamente excitados a mapeamentos em variáveis convenientes. Esta técnica é ilustrada com exemplos simples, que têm em comum a existência de atratores do tipo ciclo limite. Posteriormente abordamos um problema relativo à dinâmica das linhas de campo magnético no interior de um Tokamak na presença de um Limitador Magnético Ergódico, do ponto de vista de uma perturbação impulsiva. Após uma análise preliminar utilizando funções de fluxo invariantes, a técnica introduzida anteriormente é aplicada na análise da formação de regiões predominantemente estocásticas de campo magnético. Estimamos valores críticos de parâmetros físicos necessários a este fim, comparando alguns resultados obtidos com um modelo previamente conhecido da literatura sobre o assunto. Verificamos que a formação e consequente destruição de ilhas magnéticas pelo mecanismo de intersecção pode explicar em parte os resultados observados.

ABSTRACT

This work aims to study nonlinear systems subjected to periodic perturbations which can be described by sequences of delta functions, thanks to their characteristics. In the absence of this external action, such systems exhibit a previously known behaviour. Firstly we show a technique to reduce the impulsively excited systems to mappings in convenient variables. This technique is illustrated with simple examples, which share the property of having limit cycles as attractors. In the second part we analyse a problem related to the behaviour of magnetic field lines in a Tokamak with Ergodic Magnetic Limiters, from the viewpoint of an impulsive perturbation. After a preliminary analysis using invariant flux functions, the technique already introduced is applied to the study of mainly stochastic regions of magnetic field. We estimate critical values for physical parameters necessary to this goal, comparing some results with a previously known model of the specific literature. We verify that the formation and consequent destruction of magnetic islands (by overlapping mechanisms) might explain in part the observed results.

RESUME

Cet travail vise l'étude de systèmes non-linéaires soumises à perturbations périodiques qui peuvent être décrites par des séquences de fonctions delta, grâce à leurs caractéristiques. Dans l'absence de cette action extérieure, telles systèmes exposent un comportement précédemment connu. Premièrement, nous montrons une technique pour réduire des systèmes impulsivement excités à applications en variables raisonnables. Cette technique est illustrée avec des exemples simples, qui partagent l'existence de attracteurs du genre cycle limite. Dans la seconde partie nous analysons un problème relatif au comportement des lignes du champ magnétique dans un Tokamak avec des Limiteurs Magnétiques Ergodiques, envisagés comme un système à perturbations impulsives. Après une analyse préliminaire qui emploie fonctions de flux invariantes, la technique déjà introduite est appliqué vers l'étude de régions prédominamment stochastiques du champ magnétique. Nous estimons des valeurs critiques pour les paramètres physiques nécessaires à cet objectif, et nous rapprochons nos résultats avec un modèle précédemment connu dans la littérature spécifique. Nous vérifions que la formation et conséquent destruction d'ilots magnétiques (à travers d'un mécanisme de recouvrement) peuvent expliquer partiellement des résultats observées.

ÍNDICE

PREFÁCIO	1
INTRODUÇÃO	3

CAPÍTULO I - CARACTERIZAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-LINEARES

I.1. Fluxos e Mapeamentos no Espaço de Fase	10
I.2. Sistemas Dissipativos e Atratores	15
I.3. Estabilidade de Pontos Estacionários	20
I.4. Sistemas Conservativos	24

CAPÍTULO II - SISTEMAS COM CICLOS LIMITES SUJEITOS À PERTURBAÇÃO IMPULSIVA

II.1. Osciladores Não-lineares Impulsivamente Perturbados	33
II.2. Determinação Analítica de Mapeamentos Estroboscópicos	39
II.3. Análise de Alguns Exemplos	48
II.3.1. Sistema com Um Ciclo Limite	49
II.3.2. Sistema com Dois Ciclos Limites	56
II.3.3. Revisitando o Primeiro Exemplo	60
II.4. Perturbação Unidimensional e o Limite de Rápida Relaxação	62

CAPÍTULO III - TOPOLOGIA MAGNÉTICA EM TOKAMAKS GERADA POR UM LIMITADOR ERGÓDICO

III.1. Superfícies Magnéticas num Tokamak de Grande Razão de Aspecto	67
III.2. Campos Magnéticos com Simetria Helicoidal	75

III.3. Configuração Magnética Gerada por um Limitador Ergódico	82
III.4. Formação de Ilhas Magnéticas numa Aproximação Impulsiva	93
III.5. Determinação da Condição Crítica de Estocasticidade	102
 CAPÍTULO IV - MAPEAMENTO DAS LINHAS DE CAMPO MAGNÉTICO	
IV.1. Introdução	109
IV.2. Determinação do Mapeamento das Linhas de Campo na Presença de Limitadores Ergódicos	116
IV.3. O Modelo de Martin e Taylor	140
IV.4. Regimes Dinâmicos no Modelo de Martin-Taylor .	152
IV.5. Mapeamentos no Caso de Vários Limitadores	169
 CONCLUSÕES	179
 APÊNDICE A - Campo Magnético Gerado por Condutores Helicoidais	
	185
APÊNDICE B - Perfil Radial do Fator de Segurança	193
APÊNDICE C - Justificativa da Aproximação Impulsiva	199
APÊNDICE D - Estabilidade no Modelo de Martin e Taylor pelo Método do Resíduo de Greene	202
APÊNDICE E - Correção Toroidal ao Campo B_0	206
 REFERÊNCIAS	209

PREFÁCIO

Este trabalho ocupa-se, basicamente, da Dinâmica Não-Linear, enfocando algumas aplicações relevantes na Física de Plasmas. Como este não é um campo de pesquisa ainda amplamente integrado na comunidade dos físicos de nosso país, e ainda por que seja bastante interdisciplinar, alguém que dele se ocupe precisará, necessariamente, da cooperação de várias pessoas e instituições.

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer ao orientador deste trabalho, Prof. Iberê Luiz Caldas, pelo apoio, incentivo e amizade em todas as fases deste trabalho; e ao Prof. Ivan Cunha Nascimento, Chefe do Laboratório de Plasmas do IFUSP, pela hospitalidade e apoio material durante todo o período de meu Doutorado. Também à Sylvia, pelo sempre eficiente e simpático apoio de Secretaria.

Grande parte da minha formação em Dinâmica Não-Linear e Física de Plasmas, devo a Escolas de Inverno e *workshops*, graças a auxílios do Centro Internacional de Física da Matéria Condensada, das Universidades do Chile e Católica de Valparaíso, além da Comissão Nacional de Energia Atômica da Argentina. Ao CNPq, agradeço pelo apoio na forma de bolsa de estudos.

O desenvolvimento de qualquer trabalho em Dinâmica Não-Linear depende estrategicamente de um razoável domínio de computação, assunto no qual passei de ignorante a (penso eu) um usuário disciplinado. Não tanto por esforço próprio, mas sobretudo pelo providencial auxílio de muitos amigos, como Cristóvão

Rinkoski, Márcio Bettega, Jorge Kintopp, Aluísio Fagundes, José Brunelli, Wanderley Pires e Luiz Beraldi.

Tive, também, discussões proveitosas sobre vários aspectos deste trabalho com Alcione Fernandes, Maria Vittoria Heller, Juan Elizondo, Alvaro Vannucci, Clodoaldo Ragazzo, Eduardo Colli, Ricardo Carvalho, Therezinha Stucchi, Maria Célia Andrade, Mário de Oliveira, Celso Ribeiro e outros (que devem desculpar minha falta de memória). Devo a Per Hemmer a valiosa indicação dos trabalhos de Ding E.-Jiang, e a Germano Afonso a paciente revisão do sumário em francês desta tese.

Registraria, neste tributo às boas lembranças da Pós-Graduação, a oportunidade de ter assistido aos excelentes cursos de Pós-Graduação conduzidos por Henrique Fleming, Sílvio Salinas e Marco Brusati.

Meu último agradecimento fica aos colegas do Departamento de Física da Universidade Federal do Paraná, especialmente a Liu Kai e Gilberto Kremer, pela cooperação no sentido de que este trabalho pudesse ser levado a bom termo. *Last, but not least*, a minha esposa, Dulce, pelo carinho e paciência com que enfrentou as minhas constantes viagens a São Paulo.

Curitiba, Fevereiro de 1991

INTRODUÇÃO

Dentre as inúmeras disciplinas científicas que vêm se beneficiando do vigoroso crescimento atual da pesquisa em Dinâmica de Sistemas Não-lineares (incluindo comportamento caótico), a Física de Plasmas surge como uma das que mais ganharam em termos de progresso científico e tecnológico. Na verdade, isto não é de todo surpreendente: a não-linearidade aparece naturalmente já nas suas equações básicas (da teoria MHD, da teoria cinética).

Obrigados muitas vezes a fazer linearizações trabalhosas, os físicos de plasma viram-se brindados com todo um arsenal de técnicas poderosas para enfrentar as diversas situações onde a não-linearidade aparece (como nos problemas de Turbulência, Instabilidades de dobra e de ruptura, Reconexão magnética, Difusão de partículas, Aquecimento não-indutivo, etc.). Acredita-se mesmo que muitos dos fatores pouco conhecidos que ainda impedem a obtenção de plasmas de fusão termonuclear só possam ser explicados (e, talvez, controlados) à luz da Dinâmica Não-linear. Não por acaso, algumas das mais brilhantes colaborações à teoria foram dadas por pesquisadores em Física de Plasmas.

Tem particular importância na Dinâmica Não-Linear o estudo de sistemas sujeitos à perturbações impulsivas - i.e., aquelas que podem ser modeladas por funções delta de Dirac. É um fato amplamente demonstrado, teorica e experimentalmente, que muitos sistemas não-lineares cujo comportamento é regular, podem ser levados a um regime irregular ou "caótico", pela ação de perturbações periódicas. Tais perturbações, que comumente são

expressas como séries de Fourier (contendo, portanto, uma soma de harmônicos, ou modos) são de tratamento analítico relativamente complexo, no que se refere a sistemas não-lineares. O uso de funções delta reduz sensivelmente o trabalho algébrico, e permite soluções analíticas a sistemas que, de outra forma, só seriam susceptíveis de tratamento numérico.

Este trabalho procura contribuir ao estudo de sistemas não-lineares cujo comportamento na ausência de perturbação pode ser denominado, a grosso modo, de "integrável"; e a dinâmica que resulta da aplicação de perturbações impulsivas. Além da análise de um problema puramente matemático, estudamos em profundidade um modelo de dispositivo utilizado no controle do confinamento de plasmas em Tokamaks, cuja ação pode ser modelada satisfatoriamente por perturbações impulsivas. Longe de esgotar o assunto, porém, indicamos extensões do trabalho que devem ter continuidade no trabalho acadêmico do autor.

O tratamento de dois assuntos distintos (mas ligados entre si pela hipótese de perturbação impulsiva) levou-nos a estruturar este trabalho em três módulos, cuja integração procuramos sublinhar ao longo da exposição. O primeiro módulo, que corresponde ao capítulo I, reúne conceitos fundamentais da Dinâmica Não-Linear de sistemas conservativos e dissipativos que: a) são importantes de *per se* e não podem ser omitidos, ao risco de introduzir um jargão técnico pouco usual em outras áreas da Física; e b) serão utilizados nas aplicações dos capítulos posteriores. Naturalmente, neste capítulo não há contribuição original alguma do autor, cujo trabalho foi simplesmente o de compilar, de maneira tão eficiente quanto possível, conceitos da

literatura sobre o tema. Assim, procuramos introduzir apenas os tópicos que, direta ou indiretamente, são de nosso interesse; não se constituindo este capítulo, pois, numa revisão compreensiva do assunto.

Os sistemas dinâmicos a serem enfocados no trabalho são fluxos e mapeamentos no espaço de fases (a literatura introdutória sobre o assunto é extensa. Concentramo-nos em Schuster, 1984 e Guckenheimer e Holmes, 1983; citados aqui em ordem crescente de sofisticação matemática). Além da relação entre ambos (e de como um pode ser convertido noutro), serão enfatizadas as diferenças conceituais que aparecem quando tais sistemas são dissipativos e conservativos. Isto porque, das duas aplicações cujo estudo objetiva esta tese, a primeira é relativa a um sistema dissipativo e a segunda a outro conservativo. No que se refere ao primeiro, procuramos introduzir o conceito de Ciclo Limite como um atrator, e estudar a sua estabilidade local. Algumas propriedades gerais sobre mapeamentos são mostradas, a fim de que se possa caracterizar o comportamento dinâmico do problema a ser tratado no capítulo posterior.

Na sequência, fazemos um apanhado de conceitos relativos a sistemas conservativos, mais especificamente àqueles que podem ser descritos por uma Hamiltoniana clássica. Sobre este ponto há uma abundante literatura (uma referência consagrada é Lichtenberg e Lieberman, 1983). Em destaque, apresentamos a teoria de estabilidade de mapeamentos simpléticos pelo método do resíduo de Greene (Ichikawa et al., 1989). Como o sistema abordado no último capítulo é redutível ao chamado "mapeamento padrão" de Chirikov e Taylor, comentamos algo sobre ele também. O problema da

estocasticidade global via sobreposição de "ilhas periódicas" é abordado de forma não rigorosa (como em Morosov e Solovev, 1966).

O capítulo II trata de um problema dissipativo sugerido por Caldas e Tasso (1989), no qual procura-se usar uma perturbação impulsiva e periódica sobre um sistema que, em sua ausência, apresenta ciclos limites. A pergunta central do problema é sobre o comportamento destes atratores na presença da excitação. O método usado foi o de converter o fluxo a tempo contínuo num mapeamento (a tempo discretizado) dito "estroboscópico"; do qual conhecemos a expressão analítica, o que representa uma exceção à maioria dos casos, onde é necessário integrar numericamente as equações dinâmicas a fim de se obter o mapeamento de Poincaré associado. Fazemos, nesta tese, um estudo das propriedades deste mapeamento através de alguns exemplos ilustrativos. Nos primeiros casos, a perturbação atua sobre ambas as direções do plano de fase. Um caso onde somente uma direção está sujeita à excitação é discutido no final, onde estudamos o chamado limite de "rápida relaxação", que reduz o sistema a um mapeamento unidimensional. Este é o tipo mais comum de problemas deste gênero que encontra-se na literatura (uma ótima referência é a tese de doutoramento de Ding E-Jiang, 1987a).

No capítulo III passamos a tratar de um problema não-linear envolvendo perturbações impulsivas, que ocorre na Física de Plasmas. Um dos grandes obstáculos atuais à obtenção da Fusão Termonuclear controlada, através de máquinas de confinamento toroidal do tipo Tokamak, é a impossibilidade de produzir uma corrente de plasma estável por um tempo suficientemente longo. Inúmeros fatores conspiram, porém, contra este objetivo - um deles é a contaminação de plasma por impurezas internas do Tokamak, que

deterioram a qualidade do confinamento obtido. É freqüente o aparecimento destas impurezas a partir de sua liberação das paredes do envoltório de aço da máquina.

Esta liberação costuma ocorrer quando há uma sobrecarga de energia sobre uma região do vessel de aço (em particular, quando a própria coluna de plasma toca esta região). Dispositivos destinados a reduzir a interação do plasma com tais superfícies de contenção são denominados "limitadores". Em torno de 1977, Karger, Feneberg e colaboradores (do Instituto Max Planck de Munique) propuseram a "ergodização" do campo magnético periférico em Tokamaks, como princípio de funcionamento de um limitador que distribuisse uniformemente ao longo do Tokamak o fluxo radial de energia. Este limitador foi batizado de "Magnético Ergódico", e sua história pode ser acompanhada pelos artigos de Karger e Lackner (1977); Feneberg (1977); Engelhardt e Feneberg (1978); Feneberg e Wolf (1981).

Inicialmente foi proposta a utilização de hélices condutoras enroladas em torno do Tokamak, mas o projeto evoluiu para o uso de anéis de corrente, restritos a uma porção do vaso toroidal. A praticidade deste último arranjo fez com que o limitador magnético ergódico fosse rapidamente implantado em algumas máquinas, sendo reportados resultados altamente positivos, principalmente no Tokamak TEXT, da Universidade do Texas (cf. Ohyabu et al., 1985; Ohyabu et al., 1987; Takamura et al., 1987, entre outras referências).

Em 1984, Martin e Taylor (1984) propuseram um modelo teórico para o funcionamento deste limitador - cuja idéia central é a de que as linhas de campo magnético sofrem perturbações

bastante concentradas na região do limitador ("chutes"). As equações das linhas de campo foram integradas para a obtenção de um mapeamento bidimensional conservativo. A formação da região periférica de campo magnético "ergódico" ou "caótico" é explicada pelo mecanismo de Chirikov de superposição de ilhas periódicas no mapeamento (Chirikov, 1979).

Nós utilizamos o fato da ação do limitador magnético ergódico ser concentrada para revisitar o modelo de Martin-Taylor, sob o ponto de vista de um problema com perturbação impulsiva. Em um apêndice posterior (C), procuramos justificar matematicamente esta aproximação. Foram utilizados métodos já aplicados anteriormente em problemas de disrupturas internas por Caldas e colaboradores - a construção de uma função de fluxo invariante que descreva superfícies magnéticas (sobre as quais caminham as linhas de campo) tanto dentro como fora da região do limitador (nesta linha, ver Fernandes e Caldas, 1985; Fernandes, Heller e Caldas, 1988; Vannucci et al, 1989; Vannucci et al., 1990; Camargo e Caldas, 1990 e a dissertação de mestrado de Maria Célia Andrade, 1989). No capítulo III estimamos a partir desta análise a corrente crítica para a ergodização periférica do campo magnético.

O capítulo IV enfoca o modelo de Martin-Taylor do modo como foi, originalmente, introduzido por seus autores (Martin e Taylor, 1984), i.e., pelo mapeamento resultante. O caráter conservativo deste mapeamento é uma consequência da conservação do fluxo magnético ao longo do Tokamak. Nós procuramos explorar numericamente alguns aspectos da riquíssima dinâmica gerada por este mapeamento. Para se ter uma idéia desta complexidade, basta citar o fato de que o mapeamento analisado reduz-se, no limite de

perturbações fracas, ao famoso mapeamento "padrão" de Chirikov-Taylor, sobre o qual há abundante literatura e pesquisa intensiva até o momento (uma compilação sendo encontrada no livro de Lichtemberg e Lieberman, 1983. Em Ishikawa et al., 1985 e na dissertação de mestrado de Norma Reggiani (1989) são exploradas algumas das várias conexões deste mapeamento com a física de plasmas). O uso de um mapeamento para analisar o comportamento das linhas de campo magnético é extremamente vantajoso, se comparado com a integração numérica das equações diferenciais que as descrevem. Em particular, o reduzido tempo de processamento torna possível a análise com a utilização de microcomputadores.

As características dos diversos regimes dinâmicos deste mapeamento foram evidenciadas pela obtenção de perfis para os desvios simples (nas direções radial e poloidal) e quadráticos médios. Estes últimos são necessárias para o cálculo da taxa média de difusão (das linhas de campo, não necessariamente das partículas do plasma). Um fenômeno peculiar foi observado - a existência de uma transição intermitente entre os comportamentos regular e irregular (já observada no mapeamento padrão. Ver Ishikawa et al., 1984), muito semelhante à rota de intermitência para sistemas dissipativos (Pomeau e Manneville, 1980). Não conhecemos, ainda, explicação teórica para este fenômeno, que nos parece ser um problema em aberto. Em um apêndice (D), analisamos aspectos da estabilidade neste mapeamento, não esclarecidos no trabalho original de Martin e Taylor (1984).

CAPÍTULO I

CARACTERIZAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-LINEARES

I.1. FLUXOS E MAPEAMENTOS NO ESPAÇO DE FASE

Este capítulo, como já alertamos na Introdução, visa objetivamente a introduzir o jargão técnico e alguns conceitos fundamentais da Dinâmica Não-linear que serão utilizados nos próximos capítulos. Logo, não deve ser entendido como uma revisão do assunto, além do que reduzimos ao mínimo todo o rigor matemático na apresentação (nossa compilação utiliza conceitos do livro de Schuster, 1984, além dos artigos de revisão de Grebogi et al., 1987; Atlee-Jackson, 1985; Rañada, 1983, dentre outros. Para uma apresentação mais completa e rigorosa, podemos citar Guckenheimer e Holmes, 1983; Osório de Almeida, 1987; Lichtenberg e Lieberman, 1983, além de inúmeros excelentes artigos de revisão). Grande parte deste material foi usado num curso de extensão dado pelo autor em 1990 na Universidade Federal do Paraná (Viana, 1990).

O aparecimento eventual de caos em sistemas reais está ligado ao comportamento dos modelos matemáticos que os descrevem. Vamos denominar, genericamente, "espaço de fase" o espaço de variáveis necessárias à descrição de um sistema. Comumente tais

modelos apresentam-se em duas classes ¹:

a. FLUXOS (são sistemas dinâmicos a tempo contínuo dados pelas soluções de Sistemas de Equações Diferenciais ordinárias não-lineares). Pode-se reduzir uma equação diferencial não-autônoma de ordem n , a um sistema de $n+1$ equações autônomas de primeira ordem, da forma:

$$\frac{d\mathcal{X}}{dt} = F(\mathcal{X}) \quad (I-1)$$

onde $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$. $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função não-linear suficientemente suave das variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$ (usualmente chamada de "campo vetorial"). Podemos considerar tais variáveis como o conjunto de coordenadas de um ponto num espaço de fase n -dimensional.

O fluxo definido pelas soluções de (I-1) é dado pela função $\phi : \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $\phi(\mathcal{X}, t)$ é a solução de (I-1) no instante t com a condição inicial $\phi(\mathcal{X}, t=0) = \mathcal{X}$ para todo $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^n$ (Glendinning e Stark, 1988). A trajetória (ou órbita) através do ponto $\mathcal{X}$ (no espaço de fase) é o conjunto de pontos $\{\phi(\mathcal{X}, t) \mid -\infty < t < \infty\}$ (cf. fig. I.1). Um conjunto destes pontos será denominado "volume" neste espaço, de maneira não rigorosa.

Quando a situação é tal que os volumes permaneçam os mesmos para quaisquer instantes de tempo, o sistema será dito "conservativo" (cf. fig. I.2). Um caso particularmente importante

¹ Equações diferenciais parciais e equações diferenciais com retardo (delay) têm métodos próprios de análise e não serão tratados aqui.

destes sistemas ocorre quando (I-1) puder ser identificada como um sistema de equações canônicas, como na mecânica clássica. Aí costuma-se batizar o sistema de "Hamiltonianos".

No entanto, várias causas (como a presença de atrito mecânico, viscosidade, histerese magnética, etc.) poderão fazer com que volumes no espaço de fase sejam reduzidos no decorrer do tempo. Tais sistemas são ditos "dissipativos" (cf. fig. I.3). Assintoticamente (em $t \rightarrow \infty$) qualquer volume inicial deve reduzir-se a um conjunto de volume nulo, denominado "atrator"². O conjunto de condições iniciais no espaço de fase que convergem a um dado atrator é sua "bacia de atração" (Grebogi et al., 1987) (cf. fig. I.4).

fig. I.1. Trajetória de fase de um sistema dinâmico

fig. I.2. Num sistema conservativo os volumes são preservados no decorrer do tempo.

² Há definições bem mais rigorosas do que seja um atrator, por exemplo em Guckenheimer e Holmes (1983).

fig. I.3. Num sistema dissipativo os volumes diminuem no decorrer do tempo

fig. I.4. Bacias de Atração no plano de fase (A, B, e C são atratores; i_1 , i_2 , i_3 são pontos iniciais de trajetórias de fase que convergem a eles)

b. MAPEAMENTOS não-lineares (ou equações a diferenças de primeira ordem). São sistemas dinâmicos onde o tempo é representado por uma variável discreta n , na forma:

$$\mathcal{X}_{n+1} = F(\mathcal{X}_n) \quad (I-2)$$

onde $\mathcal{X}_n$ é um vetor m -dimensional de variáveis $(x_1)_n, (x_2)_n, \dots, (x_m)_n$ e $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função suficientemente suave destas componentes. Dada uma condição inicial $\{(x_1)_0, \dots, (x_m)_0\}$ a dinâmica do mapeamento resulta por iterações sucessivas de (I-2). Um ponto inicial $\mathcal{X}_0 \in \mathbb{R}^m$ gera uma órbita "progressiva" $\{\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n = F(\mathcal{X}_{n-1}) \equiv F^n(\mathcal{X}_0)\}$, $n \geq 1$; bem como, se F for

inversível, uma órbita "regressiva" $x_0, x_{-1}, \dots, x_{-n} = F^{-1}(x_{-(n-1)})$. Normalmente a iteração de um mapeamento é computacionalmente mais rápida que a solução numérica de um sistema de eqs. diferenciais, razão pela qual aqueles são muito úteis.

Uma técnica frequentemente usada é a da superfície de secção de Poincaré no espaço de fase, para o fluxo gerado por um sistema de eqs. diferenciais. Tomamos os pontos de intersecção das trajetórias de fase com a superfície de secção. Como as coordenadas de A (cf. fig. I.5) determinam as coordenadas de B (e assim por diante) podemos criar um mapeamento:

$$B = f(A), C = f(B) = f(f(A)) = f^2(A), \text{ etc}$$

que pode ser iterado para achar qualquer ponto de intersecção a partir de um ponto inicial. Este é o chamado "mapeamento de Poincaré" das trajetórias de fase do sistema.

Em alguns casos, é conveniente tratar o tempo como uma variável extra no espaço de fases (de um sistema de eqs. diferenciais não-autônomas). Nesta situação, é muito útil uma variante desta técnica, conhecida como "mapeamento estroboscópico"³. Neste processo, nós tomamos valores discretos das outras variáveis em intervalos de tempo regulares (isto é particularmente útil em sistemas periodicamente perturbados, como os analisados no Capítulo II). Podemos visualizar este mapeamento (cf. fig. I.6)

³ É provável que o termo tenha sido cunhado no artigo de Tomita et al., 1977

através de uma sequência de secções de Poincaré, cada qual para um valor de $t = \text{constante}$. O mapeamento definitivo será a projeção dos pontos de intersecção sobre um plano qualquer (como $t = 0$).

fig. I.5. Superfície de secção de Poincaré no espaço de fase. Os pontos de intersecção de uma trajetória com ela formam um mapeamento: $C = f(B) = f(f(A))$, etc.

fig. I.6. Um mapeamento estroboscópico pode ser imaginado como uma sequência periódica de secções de Poincaré ao longo do eixo que representa a variável temporal (T é uma constante).

I.2. SISTEMAS DISSIPATIVOS E ATRATORES

Para sistemas de equações diferenciais (fluxos) da forma (I-1), é possível mostrar (Schuster, 1984) que por meio do teorema de Gauss é possível representar a variação temporal de um volume $V(t)$ no espaço de fase, pela relação:

$$V(t) = V(0) e^{N t} \quad (I-3)$$

onde $V(0) = V(t = 0)$ e

$$N = \text{div } F(X) \quad (I-4)$$

Caso $N = 0$, $V(t) = V(0)$, e o fluxo é conservativo. Se $N < 0$, $V(t) < V(0)$ e o fluxo será dissipativo. Para $t \rightarrow \infty$, isto fornece um volume nulo para um atrator, que poderá ser (dentro outras formas) puntual, uma curva algébrica, um objeto fractal ⁴.

Para mapeamentos m -dimensionais, da forma (I-2), a transformação de volumes V_n no espaço de fase para intervalos discretos de tempo é descrita pela equação (Schuster, 1984):

$$V_{n+1} = |J| V_n \quad (I-5)$$

onde J é o Jacobiano do mapeamento (I-2), a saber:

$$J = \det \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right) \quad (I-6)$$

Se $|J| = 1$ ou $|J| < 1$ o mapeamento será conservativo ou

⁴ Caso em que o atrator é dito "estranho". Podemos conceituar sem rigor matemático uma curva algébrica como aquela que pode ser descrita por equações paramétricas nas variáveis de fase.

dissipativo, respectivamente.

A análise dos atratores num sistema dinâmico (seja ele um fluxo ou um mapeamento) prende-se à determinação dos seus pontos estacionários (pontos fixos e/ou órbitas periódicas). Para um fluxo como (I-1), podemos definir um vetor de pontos fixos $\mathbb{X}$, que satisfazem $\frac{d\mathbb{X}}{dt} = 0$, ou seja:

$$F(\mathbb{X}) = 0 \quad (I-7)$$

Uma órbita periódica de período τ é uma trajetória de fase γ para o fluxo (I-1) tal que (Glendinning e Stark, 1988):

$$\phi(\mathbb{X}, \tau) = \mathbb{X} \quad (I-8)$$

para todo $\mathbb{X} \in \gamma$.

Neste trabalho, focalizaremos basicamente fluxos bidimensionais no plano de fase. Atratores na forma de curvas algébricas fechadas serão ditos "ciclos limites". No caso particular onde a forma deles é circular, é possível associá-los ao fluxo (escrito em coordenadas polares planas):

$$\dot{r} = f(r)$$

$$\dot{\theta} = \text{const.}$$

tal que os raios dos ciclos limites sejam dados pelos pontos fixos da primeira equação acima, isto é:

$$r = r^*$$

$$\theta = (\text{const.}) t$$

Em mapeamentos estas definições são, presumivelmente, mais simples. Num mapeamento da forma (I-2), definimos um vetor de pontos fixos $\bar{x}$ como:

$$\bar{x} = F(\bar{x}) \quad (\text{I-9})$$

ao passo que $\bar{x}$ será uma órbita periódica de período p se forem satisfeitas as seguintes condições (Glendinning e Stark, 1988):

$$F^p(\bar{x}) = \bar{x} \quad (\text{I-10})$$

$$F^i(\bar{x}) \neq \bar{x} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, p-1$$

A órbita será, então, o conjunto de vetores $\{\bar{x}, F(\bar{x}), F^2(\bar{x}), \dots, F^{p-1}(\bar{x})\}$. É comum o uso do termo q -ciclo para uma órbita de período q .

As aplicações de mapeamentos, feitas no capítulo II, lidarão em última análise com mapeamentos unidimensionais, da forma:

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (\text{I-11})$$

para os quais as definições (I-9,10) são reescritas de maneira mais simples como:

$$x = f(x) \quad \text{PONTO FIXO} \quad (\text{I-12})$$

$$f^p(x) = x \quad x \in P\text{-CICLO} \quad (I-13)$$

$$f^i(x) \neq x \quad (i = 1, 2, \dots, p-1)$$

A interpretação mais simples destes e doutros conceitos faz-se através de um diagrama muito simples e conhecido (diagrama de escada ou de Lamerey), onde se grafica a função $f(x)$ em (I-11) juntamente com a primeira bissetriz (cf. fig. I.7) - a intersecção das curvas fornece os pontos fixos ou pontos de um p-ciclo.

fig. I.7 Diagrama de Escada de um mapeamento unidimensional. Os pontos de intersecção com a primeira bissetriz fornecem os pontos estacionários.

fig. I.8. Trajetórias de fase de um sistema hamiltoniano integrável com um grau de liberdade.

1.3. ESTABILIDADE DE PONTOS ESTACIONÁRIOS

A análise da estabilidade de pontos estacionários (pontos fixos e/ou órbitas periódicas) em sistemas dinâmicos indica se condições iniciais escolhidas: a) arbitrariamente ou b) na vizinhança do atrator, convergem ou não a ele. No caso a), não há métodos universais, sendo a determinação da função de Lyapounov a técnica mais usada (como em Tasso, 1986) - mas não nos deteremos nesta situação. No caso b), também chamado de análise local, ou linear, tomam-se pontos suficientemente próximos para realizar expansões em séries de Taylor. Esta técnica é ilustrada nos casos que se seguem.

Em fluxos n-dimensionais da forma (I-1), consideramos $\mathcal{X}$ um ponto fixo dado por (I-7). Seja:

$$\mathcal{X} = \mathcal{X} + \delta\mathcal{X} \quad (\text{I-14})$$

em ponto na vizinhança de $\mathcal{X}$. Então:

$$\mathcal{X} + \delta\mathcal{X} = F(\mathcal{X} + \delta\mathcal{X})$$

Desenvolvendo o lado direito em série de Taylor até segunda ordem em $\delta\mathcal{X}$, e utilizando (I-1), chega-se à equação matricial (Hénon, 1982):

$$\delta\mathcal{X} = J \delta\mathcal{X} \quad (\text{I-15})$$

onde:

$$[J_{ij}] = \left. \frac{\partial F_i(X)}{\partial x_j} \right|_{X = \bar{X}} \quad (I-16)$$

é a matriz Jacobiana do fluxo. Em particular, na eq. (I-4) temos que $\kappa = \text{tr } J$.

A estabilidade de (I-1) é determinada pelos autovalores λ_i de J , que são as raízes da equação secular¹:

$$\det (J - \lambda_i I) = 0 \quad (I-17)$$

No caso particular $n = 2$, a matriz Jacobiana tem autovalores λ_1 e λ_2 , tais que (I-15) fornece:

$$\delta x_1 = \delta x_{10} \exp (\lambda_1 t) \quad (I-18a)$$

$$\delta x_2 = \delta x_{20} \exp (\lambda_2 t) \quad (I-18b)$$

Conforme a natureza (real ou imaginária) e o sinal de $\lambda_{1,2}$, o ponto fixo $\bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$ pode ser classificado de inúmeras maneiras, conforme a tabela I-1. Os autovetores relativos a (I-17) determinam as chamadas "variedade estável" e "instável", relativas aos pontos fixos².

No caso de mapeamentos, vamos enfocar apenas o caso unidimensional (I-11), por simplicidade. Sendo $\bar{x}$ um ponto fixo

¹ I é a matriz identidade de ordem n

² A análise da estabilidade linear de órbitas periódicas é bastante análoga à que foi mostrada nesta secção.

PUNTO FIXO	AUTOVALORES	PLANO DE FASE	PONTO DE FIXO	AUTOVALORES	PLANO DE FASE
CENTRO (OU PONTO ELÍPTICO)			PONTO DE SELA (OU PTO. HIPERBÓLICO)
FÓCO ESTÁVEL			NÓ ESTÁVEL DEGENERADO
FÓCO INSTÁVEL			NÓ INSTÁVEL DEGENERADO
NÓ ESTÁVEL
NÓ INSTÁVEL

Tabela, I-1 (na página anterior): Classificação de Pontos Estacionários no Caso Bidimensional (adaptado de DeRusso, Ray e Close, 1965)

dado por (I-12), seja:

$$\mathbf{x}_n = \bar{\mathbf{x}} + \delta_n \quad (\text{I-19})$$

um ponto suficientemente próximo a $\bar{\mathbf{x}}$. Então:

$$\delta_{n+1} = |f(\bar{\mathbf{x}} + \delta_n) - \bar{\mathbf{x}}|$$

Desenvolvendo a função f em série de Taylor até 2ª ordem em δ_n , e aplicando (I-11), escrevemos:

$$\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} = \left| \frac{df(\bar{\mathbf{x}})}{d\bar{\mathbf{x}}} \right| \quad (\text{I-20})$$

Se $\bar{\mathbf{x}}$ é estável, a sequência de iterações converge a ele, i.e., $\delta_{n+1} < \delta_n$, donde:

$$\left| \frac{df(\bar{\mathbf{x}})}{d\bar{\mathbf{x}}} \right| < 1 \quad \bar{\mathbf{x}} \text{ ESTÁVEL} \quad (\text{I-21})$$

Se $|f'(\bar{\mathbf{x}})| > 1$ o ponto fixo é instável. Caso $|f'(\bar{\mathbf{x}})|$ seja igual a um ou zero, $\bar{\mathbf{x}}$ será dito "neutro" ou "superestável", respectivamente.

Considerando, agora, um m-ciclo de pontos $\{\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2, \dots, \bar{\mathbf{x}}_{m-1}\}$ definido por (I-13), pode-se mostrar (Svireshev e Logofet, 1983) que a estabilidade de todos os pontos do ciclo é a mesma, no sentido mostrado no parágrafo acima (i.e., se $\bar{\mathbf{x}}_0$ é estável, também o serão $\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2, \dots$). Definindo (Lauwerier, 1986) o

"multiplicador" do m-ciclo como:

$$\lambda_m = \prod_{i=0}^{m-1} \left. \frac{df}{dx} \right|_{\bar{x}_i} \quad (I-22)$$

então este pode ser estável ($|\lambda_m| < 1$); instável ($|\lambda_m| > 1$); superestável ($\lambda_m = 0$) ou neutro ($|\lambda_m| = 1$).

Fig. I.9 Secção de Poincaré dos toros invariantes bidimensionais de um sistema Hamiltoniano

I.4. SISTEMAS CONSERVATIVOS

Dentre os diversos sistemas conservativos, concentraremos nossa atenção sobre dois deles, que são mencionados ou analisados em capítulos posteriores : os fluxos Hamiltonianos e os mapeamentos simpléticos.

Sistemas Hamiltonianos, derivados ou não da análise de sistemas mecânicos, são os que podem ser descritos a partir de uma função de Hamilton. O conjunto de equações canônicas

correspondentes define um fluxo, conforme a secção I.1. Nós convencionaremos chamar de "grau de liberdade" ao par coordenada (q) - momentum (p) conjugado. Seja, então, um sistema com N graus de liberdade, caracterizado no espaço de fase pelas variáveis $q_1, p_1; q_2, p_2; \dots q_N, p_N$, e pela Hamiltoniana (independente do tempo, por simplicidade):

$$H = H(q_1, p_1; q_2, p_2; \dots q_N, p_N) \quad (I-24)$$

O conjunto de equações canônicas (fluxo) é:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H(q_1, \dots, p_N)}{\partial p_i} \quad (I-25a)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H(q_1, \dots, p_N)}{\partial q_i} \quad (I-25b)$$

(i = 1, 2, ... N) definindo um sistema de 2N equações diferenciais autônomas de primeira ordem.

Quando um sistema Hamiltoniano é dito "integrável", suas equações canônicas podem ser resolvidas por quadraturas, i.e., suas soluções são representadas por funções elementares ou transcendentais. Dado este fato, pode-se conhecer com relativa exatidão toda a dinâmica do sistema, e conseqüentemente não há possibilidade de comportamento caótico. Num sistema mecânico com N = 1 grau de liberdade, existe sempre uma quantidade conservada (dita "integral do movimento") elementar, que é sua energia:

$$E(q,p) = \text{constante} \quad (I-26)$$

A existência das integrais de movimento facilita a resolução de um problema, mercê das leis de conservação existentes na física. Um sistema integrável com N graus de liberdade deve ter, portanto, N integrais do movimento. Caso isso não ocorra (é o caso mais comum) o sistema é dito "não-integrável".

Fig. I.10 Estocasticidade local na vizinhança das separatrizes de ressonâncias contíguas (esquemáticamente)

Devido à propriedade de preservação de volumes no espaço de fase, sistemas conservativos não possuem atratores. Quando um sistema de N graus de liberdade é integrável, suas trajetórias de fase (a partir de uma condição inicial) jazem sobre superfícies com a topologia de N -toros. No caso mais simples ($N=1$), as trajetórias podem ser curvas fechadas (de "libração"), em torno de um ponto fixo elíptico (cf. tab. I-1) ou abertas (de "rotação"), segregadas por uma curva separatriz (cf. fig. I.8).

Um problema central nesta teoria é o do comportamento destes toros invariantes quando um sistema inicialmente integrável

é perturbado. O uso da teoria canônica de perturbação fornece séries onde aparecem termos ressonantes divergentes (problema dos pequenos denominadores) (Rañada, 1983), o que inviabiliza de certa forma o tratamento analítico. Entretanto, um outro enfoque a este caso é encontrado no célebre teorema KAM (Osório de Almeida, 1987): se a perturbação for relativamente fraca, a introdução de perturbações não integráveis no sistema não implica necessariamente na destruição de todos os toros invariantes.

A destruição dos toros invariantes num sistema costuma levar ao aparecimento de trajetórias caóticas, ou estocásticas. Um mecanismo muito utilizado para a descrição do aparecimento de uma região estocástica num sistema perturbado de forma não-integrável é o critério de intersecção de Chirikov (Chirikov, 1979). Supondo $N=2$ graus de liberdade, as trajetórias de fase caminham sobre 2-toros no espaço, e é conveniente traçar uma secção de Poincaré (cf. fig. I-9) para analisá-las. A determinação dos toros invariantes para Sistemas Não-integráveis é um dos problemas centrais na Dinâmica Não-Linear (Aguiar e Baranger, 1988).

O aparecimento de ressonâncias, segundo o teorema de Poincaré-Birkhoff (Osório de Almeida, 1987) está associada à formação de estruturas visualizadas como "ilhas" na secção de Poincaré do toro. A estrutura de tais ilhas é semelhante às trajetórias de fase de um pêndulo simples (cf. fig. I.8), composta de curvas de rotação e libração, tais que a separatriz correspondente delimita a extensão da ilha.

Pode-se mostrar que, na vizinhança da separatriz de uma

ressonância existe uma região muito estreita de trajetórias estocásticas (geradas via explosão homoclínica. O mecanismo é descrito em Osório de Almeida, 1987), na situação dita de "estocasticidade local". Com o aumento da intensidade da perturbação, a largura de duas ressonâncias contíguas vai aumentando, tal que as regiões localmente estocásticas na proximidade de cada separatriz vão ocupando o espaço de possíveis toros invariantes entre as ilhas (cf. fig. I.10). O processo continua até que as próprias ilhas se toquem, disseminando assim as regiões localmente estocásticas numa região maior do espaço de fase ("estocasticidade global").

Fig. I.11 Anatomia de um ponto hiperbólico
(veja também a tabela I.1)

O critério de Chirikov exprime de maneira muito crua, porém eficaz, este processo. Sabe-se, por exemplo, que sempre há a formação de ilhas secundárias, terciárias, etc. de menor tamanho mergulhadas na região localmente estocástica ao redor de cada ilha

principal. A medida que as ilhas se aproximam é certo que estas ilhas satélites (que possuem, por sua vez, a mesma estrutura de uma ilha principal) interseptom-se antes que as principais, precipitando assim a estocasticidade global. Há, porém, critérios mais sofisticados para o tratamento desta situação, como o processo de renormalização de Escande (Escande e Doveil, 1981), que não será tratado neste trabalho.

Após esta discussão eminentemente qualitativa da estocasticidade em sistemas hamiltonianos, vamos comentar de maneira mais técnica outro sistema conservativo importante nesta tese, que são os mapeamentos simpléticos ³. Vamos nos limitar ao caso de mapeamentos bidimensionais $\mathbb{T}$, da forma:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbb{T} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (\text{I-27})$$

Linearizando este mapeamento em torno de um ponto estacionário, como feito na secção anterior, consideramos a sua matriz Jacobiana (também chamada de "mapa tangente"):

³Que recebem este nome, devido ao fato de que as respectivas matrizes Jacobianas (cf. I-6) satisfazem à propriedade (Hénon, 1982): $\mathbb{J}^T \tilde{\mathbb{J}} = \tilde{\mathbb{J}}$, onde $\tilde{\mathbb{J}}$ é a matriz $\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \dots & \dots \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbb{I}$ é a matriz identidade.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} \end{bmatrix} \quad (I-28)$$

cujo determinante é igual a um, sendo o mapeamento conservativo (cf. I-6). Como no caso dos fluxos a tempo contínuo, os autovalores de (I-28) determinam a estabilidade local dos pontos fixos do mapeamento, pela solução da equação secular:

$$\det(J - \lambda I) = 0$$

No caso definido por (I-28), podemos resolver a equação acima, encontrando:

$$\lambda = \frac{\text{Tr } J}{2} \pm \frac{\sqrt{(\text{Tr } J)^2 - 4}}{2} \quad (I-29)$$

Definindo o "resíduo de Greene" (Greene, 1979) como:

$$R = \frac{1}{4} (2 - \text{Tr } J) \quad (I-30)$$

podemos reescrever (I-29) como:

$$\lambda = 1 - 2R \pm \sqrt{R(R-1)} \quad (I-31)$$

Se $0 < R < 1$ os autovalores acima são complexos conjugados. O ponto fixo correspondente será um ponto elíptico (cf. tab. I-1), já que o módulo e o argumento de λ são dados por:

$$\|\lambda\| = 1$$

$$\vartheta = \arccos(1 - 2R)$$

$$\text{donde } \lambda = \|\lambda\| e^{\pm i\vartheta}$$

$$= \exp(\pm 2\pi i \rho) \quad (\text{I-32})$$

onde definimos um ângulo médio de rotação (Ichikawa et al., 1989):

$$\rho = \frac{1}{2\pi} \arccos(1 - 2R) \quad (\text{I-33})$$

tais que as trajetórias de fase na vizinhança do ponto estacionário sejam rotações em torno dele, parametrizadas pelo ângulo ρ .

Se $R > 1$ ou $R < 0$, os autovalores λ serão ambos reais, positivos e/ou negativos. Neste caso (cf. tab. I-1) o ponto estacionário será dito hiperbólico, e as trajetórias de fase tenderão a repelir-se, com assíntotas determinadas pelos autovetores no ponto estacionário (cf. fig. I-11).

Pelo já citado teorema de Poincaré-Birkhoff, agora aplicado a mapeamentos, quando o ângulo médio de rotação ρ , dado por (I-33) for um número racional da forma p/q (onde p e q são primos entre si) pelo menos duas órbitas de período p (correspondendo a ilhas determinadas por uma separatriz) existem em torno de um ponto fixo elíptico: uma com resíduo não-positivo e outra com resíduo não-negativo (Ichikawa et al., 1989). Este

resultado será usado no apêndice D desta tese.

Finalmente, vamos concluir este capítulo com algumas considerações bastante gerais sobre um mapeamento simplético que serve como protótipo para a maioria das pesquisas teóricas sobre sistemas conservativos : o mapeamento padrão de Taylor-Chirikov (uma exposição completa pode ser encontrada no livro de Lichtenberg e Lieberman, 1983):

$$x_{n+1} = x_n + y_n \quad (I-34a)$$

$$y_{n+1} = y_n + k \operatorname{sen}(x_{n+1}) \quad (I-34b)$$

Dentre as diversas características descobertas para este mapeamento, e que se estendem, até certo grau, para todos os demais, destaca-se a determinação precisa do valor de k necessário para a formação de estocasticidade global (Greene, 1979):

$$k_c = 0.971635$$

que é um aperfeiçoamento do resultado obtido por Chirikov (1979) $k = 1.0$, utilizando o seu critério de intersecção de ilhas já comentado no princípio desta secção. A proximidade dos dois resultados ilustra a validade da técnica de Chirikov, comparada com resultados mais precisos obtidos com outros métodos.

CAPÍTULO II

SISTEMAS COM CICLOS LIMITES SUJEITOS A PERTURBAÇÕES IMPULSIVAS

II.1 OSCILADORES NÃO-LINEARES IMPULSIVAMENTE PERTURBADOS

O estudo de oscilações não-lineares tem fornecido, há mais de cinco décadas, abundante material para a pesquisa e verificação de conjecturas em Dinâmica Não-Linear. Além disso, tais oscilações servem de modelo a sistemas reais em áreas tão diversas como a Eletrônica e a Neurofisiologia.

Quando estes osciladores apresentam alguma forma de dissipação (no sentido exposto no capítulo anterior), eles exibem atratores no espaço de fase. Tipicamente são encontrados Ciclos Limites no regime periódico destes sistemas, que podem evoluir segundo um certo mecanismo para uma dinâmica irregular característica do comportamento caótico.

Muitos exemplos de osciladores não-lineares com ciclos limites podem ser encontrados. Entre eles:

a) A equação de Van der Pol ,descrevendo oscilações auto-excitadas num tubo de vácuo (Ding, 1988);

b) O "Brusselator" ,que modela uma reação química com vários estágios (Tomita et al., 1977);

c) O sistema de Bonhöffer-Van der Pol ,estudado como uma

simplificação do modelo de Hodgkin-Huxley para o comportamento neuronal (Winfree, 1980).

Uma extensão deste estudo é a análise do comportamento de osciladores com ciclos limites quando forçados periodicamente. Normalmente, quando esta perturbação é harmônica, as equações diferenciais resultantes são complexas demais para permitirem um tratamento analítico adequado. Nestes casos é melhor recorrer à simulação numérica.

No entanto, há ocasiões em que o forçamento consiste de pulsos muito curtos ("excitação impulsiva"), e podemos frequentemente aproximar este comportamento usando uma sequência periódica de funções delta de Dirac.

A pergunta fundamental passa a ser, então : qual o comportamento dos ciclos limites de um sistema sobre o qual age uma excitação impulsiva? Há no momento algumas maneiras de responder a esta questão. Neste trabalho, nós escolhemos uma formulação a tempo discretizado, através do uso de um mapeamento de Poincaré estroboscópico, como definido no capítulo precedente. Para uma idéia dos trabalhos mais antigos sobre este tema, é útil o artigo de revisão em (Hsu, 1977).

Para isso, é necessário que o sistema na ausência de perturbação seja tal que os ciclos limites possam ser conhecidos, i.e., que o sistema seja integrável por quadraturas. Caso contrário, é utilizado também o chamado método das "isócronas" (Campbell et al., 1989), que permite a análise do sistema por meio de um mapeamento unidimensional aproximado.

O caráter impulsivo da perturbação permite-nos obter um

mapeamento estroboscópico numa forma analítica fechada, devido às propriedades peculiares de integração das funções delta. Isto é vantajoso, pois a dinâmica essencial do sistema é transparente na análise dos pontos fixos e/ou ciclos periódicos do mapeamento, fornecendo-nos uma idéia da evolução dos ciclos limites originais.

Um exemplo interessante onde este método pode ser aplicado com sucesso, ainda que não apresente ciclo limite quando não perturbado, é o problema de um Rotor rígido amortecido e periodicamente pulsado no sentido de seu movimento (ver fig. II.1). A sua equação de movimento, na forma de um fluxo tridimensional, é (Schuster, 1984) ($x = \theta$, $z = t$, $m = R = 1$):

$$\dot{x} = y \quad (\text{II-1a})$$

$$\dot{y} = -\gamma y + K f(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(z - nT) \quad (\text{II-1b})$$

$$\dot{z} = 1 \quad (\text{II-1c})$$

onde γ é um coeficiente de amortecimento, K e T representam a intensidade e o período dos pulsos tipo delta.

Quando $K = 0$, as trajetórias de fase do rotor têm um atrator do tipo foco estável (ver fig. II.1) em $x = y = 0$ (cf. tab. I.1). Caso contrário, pode-se obter o seguinte mapeamento estroboscópico:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1 - e^{-\gamma T}}{\gamma} [y_n + K f(x_n)] \quad (\text{II-2a})$$

$$y_{n+1} = e^{-\gamma T} [y_n + K f(x_n)] \quad (\text{II-2b})$$

Fig. II.1 Rotor rígido, amortecido e forçado tangencialmente à trajetória

As equações acima definem o chamado "mapeamento padrão dissipativo". O caso particular $f(x) = \cos x$ foi extensivamente estudado por Zaslowski (Zasl., 1978), como o mais simples exemplo que exibe um atrator estranho. É curioso também observar que, escolhendo $f(x) = -\sin x$ e tomando dissipação nula ($\gamma \rightarrow 0$) as eqs. (II-2) reduzem-se (com $T = 1$) ao "mapeamento padrão conservativo" de Chirikov e Taylor (Zaslowski e Chirikov, 1972), que voltaremos a ver no capítulo IV:

$$y_{n+1} = y_n - K \sin x_n \quad (\text{II-3a})$$

$$x_{n+1} = x_n + y_{n+1} \quad (\text{II-3b})$$

Um sistema com ciclos limites na ausência de

perturbação; e no qual esta técnica também é utilizada, foi proposto por Ding (Ding, 1987b):

$$\dot{x} = s x (1 - x^2 - y^2) - y + 2 \alpha \sum_n \delta(z - 2 \pi n \beta)$$

$$\dot{y} = x + s y (1 - x^2 - y^2)$$

$$\dot{z} = 1$$

com $\beta > 0$. s é um parâmetro variável de dissipação. Quando $\alpha = 0$ o ciclo limite no plano xy é um círculo de raio unitário. Caso contrário podemos utilizar o mapeamento (em coordenadas polares):

$$r_{n+1} = \left[2 \alpha + r_n^* \cos(\theta_n + 2 \pi \beta) \right]^2 + \left[r_n^* \sin(\theta_n + 2 \pi \beta) \right]^2 \right)^{1/2} \quad (\text{II-5a})$$

$$\theta_{n+1} = \arctg \left\{ \frac{r_n^* \sin(\theta_n + 2 \pi \beta)}{2 \alpha + r_n^* \cos(\theta_n + 2 \pi \beta)} \right\} \quad (\text{II-5b})$$

onde:
$$r_n^* = \frac{r_n}{\left[r_n^2 + (1 - r_n^2) e^{-4 \pi \beta} \right]} \quad (\text{II-6})$$

Um recurso bastante utilizado na análise destes e outros mapeamentos é o "limite de rápida relaxação": tanto o coeficiente de dissipação como a intensidade da perturbação são muito grandes, sendo a sua razão, porém, constante:

$$\begin{matrix} \gamma \rightarrow \infty \\ K \rightarrow \infty \end{matrix} \Rightarrow \frac{\gamma}{K} \rightarrow 1 \quad (\text{II-7})$$

Aplicando este limite, por exemplo, ao caso do Rotor pulsado (eqs. II-2), podemos obter a partir da escolha $f(x) = (r-1)x - rx^2$ o famoso mapeamento logístico:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (\text{II-8})$$

que apresenta uma rota para o caos do tipo Feigenbaum (bifurcações sucessivas com duplicação do período dos ciclos) (Schuster, 1984).

Neste capítulo nós estudaremos uma classe de sistemas mais geral do que o anterior (Caldas e Tasso, 1989):

$$\frac{dY}{dt} = M[Y]Y + \sum_m c_m \delta(t - mT) N[Y]Y \quad (\text{II-9})$$

onde $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ e M, N são matrizes quadradas 2×2 não-lineares.

A matriz $M[Y]$ é escolhida de tal forma que o sistema (II-9) na ausência de perturbações (i.e., quando $c_m = 0$) é integrável analiticamente e apresenta atratores do tipo ciclo-limite.

Na próxima seção, detalharemos os passos necessários à obtenção do mapeamento estroboscópico relativo a (II-9). A seguir, mostraremos resultados referentes a uma modificação deste sistema, viz., com a perturbação restrita a uma só direção do plano.

II.2. DETERMINAÇÃO ANALÍTICA DE MAPEAMENTOS ESTROBOSCÓPICOS

Nesta secção vamos explicitar os passos envolvidos na derivação dos mapeamentos estroboscópicos para o sistema definido por (II-9). Sendo $[M] = M_{ij}(y_1, y_2)$ e $[N] = N_{ij}(y_1, y_2)$, este pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 = & M_{11}(y_1, y_2) y_1 + M_{12}(y_1, y_2) y_2 + \\ & + \sum_m c_m [N_{11}(y_1, y_2) y_1 + N_{12}(y_1, y_2) y_2] \delta(t - mT) \end{aligned} \quad (\text{II-10})$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 = & M_{21}(y_1, y_2) y_1 + M_{22}(y_1, y_2) y_2 + \\ & + \sum_m c_m [N_{21}(y_1, y_2) y_1 + N_{22}(y_1, y_2) y_2] \delta(t - mT) \end{aligned} \quad (\text{II-11})$$

Nós definiremos as seguintes variáveis discretizadas para o mapeamento (ver fig. II.2):

$$(y_{1,2})_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_{1,2}(t = nT + \varepsilon) \quad (\text{II-12})$$

$$(y_{1,2})_{n+1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_{1,2}[t = (n+1)T + \varepsilon] \quad (\text{II-13})$$

$$(y_{1,2})_n^* = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_{1,2}[t = (n+1)T - \varepsilon] \quad (\text{II-14})$$

Supomos que na ausência de perturbação (i.e., entre os pulsos delta) o sistema (II-9) é integrável (no sentido de quadraturas) em algum sistema de coordenadas, exibindo ciclos

limites estáveis e/ou instáveis. Integramos (II-10) e (II-11) no

Fig. II.2. Variáveis discretizadas do mapeamento estroboscópico (esquematicamente)

intervalo $nT + \varepsilon < t < (n+1)T - \varepsilon$, onde $c_m = 0$.

Tomando, inicialmente, a eq. (II-10):

$$\int_{nT+\varepsilon}^{(n+1)T-\varepsilon} \frac{dy_1}{dt} dt = \int_{nT+\varepsilon}^{(n+1)T-\varepsilon} (M_{11}y_1 + M_{12}y_2) dt \quad (\text{II-15})$$

Como o primeiro membro desta expressão é igual a:

$$y_1[t = (n+1)T - \varepsilon] - y_1[t = nT + \varepsilon]$$

temos, tomando o limite $\varepsilon \rightarrow 0$ em (II-15):

$$\langle y_1^* \rangle_n = \langle y_1 \rangle_n + I_1(y_1, y_2) \quad (\text{II-16})$$

onde usamos (II-12), (II-14) e definimos:

$$I_1(y_1, y_2) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{nT+\varepsilon}^{(n+1)T-\varepsilon} (M_{11}y_1 + M_{12}y_2) dt \quad (II-17)$$

Analogamente, fazendo:

$$I_2(y_1, y_2) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{nT+\varepsilon}^{(n+1)T-\varepsilon} (M_{21}y_1 + M_{22}y_2) dt \quad (II-18)$$

pode-se escrever um resultado semelhante, na integração de (II-11):

$$(y_2^*)_n = (y_2)_n + I_2(y_1, y_2) \quad (II-19)$$

Além de serem solúveis por quadraturas, as integrais I_1 e I_2 devem ser também de $o(1)$ (i.e., independentes de ε) para que, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, tenhamos um resultado não-nulo.

Agora temos de levar em conta o "salto" da solução devido às funções deltas. Faremos a integração do sistema na vizinhança do pulso que ocorre em $t = (n+1)T$ (cf. fig. II.2); ou seja, em

$$(n+1)T - \varepsilon < t < (n+1)T + \varepsilon$$

Integrando (II-10) neste intervalo ($\varepsilon \neq 0$):

$$\int_{(n+1)T-\varepsilon}^{(n+1)T+\varepsilon} \frac{dy_1}{dt} = \int_{(n+1)T-\varepsilon}^{(n+1)T+\varepsilon} (M_{11}y_1 + M_{12}y_2) dt + \int_{(n+1)T-\varepsilon}^{(n+1)T+\varepsilon} dt (N_{11}y_1 + N_{12}y_2) \sum_m c_m \delta(t - mT) \quad (\text{II-20})$$

Ao resolver o primeiro termo do segundo membro da equação acima, utilizamos a continuidade do integrando $M_{11}y_1 + M_{12}y_2$. Definindo:

$$A_1 = M_{11}[y_1(t = (n+1)T-\varepsilon), y_2(t = (n+1)T-\varepsilon)]y_1(t = (n+1)T-\varepsilon) + M_{12}[y_1(t = (n+1)T-\varepsilon), y_2(t = (n+1)T-\varepsilon)]y_2(t = (n+1)T-\varepsilon) \quad (\text{II-21})$$

$$B_1 = \sum_m c_m \int_{(n+1)T-\varepsilon}^{(n+1)T+\varepsilon} dt (N_{11}y_1 + N_{12}y_2) \delta(t - mT) \quad (\text{II-22})$$

temos que (II-20) fornece:

$$y_1[t = (n+1)T + \varepsilon] - y_1[t = (n+1)T - \varepsilon] = 2\varepsilon A_1 + B_1 \quad (\text{II-23})$$

No cálculo de B_1 , essencialmente recaímos em uma integral do tipo:

$$\Phi \equiv \int_{\tau - \varepsilon}^{\tau + \varepsilon} dt f(t) \delta(t - \tau) \quad (\text{II-24})$$

sendo que, pela propriedade de filtragem da função delta:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\tau - \varepsilon}^{\tau + \varepsilon} dt f(t) \delta(t - \tau) = f(\tau) \quad (\text{II-25})$$

Como, na dedução de (II-22), nós ainda não extraímos o limite $\varepsilon \rightarrow 0$, para "filtrar" o integrando de (II-21), temos de usar um aproximante, já que não conhecemos $f(\tau)$ *a priori*. A rigor, podemos ter uma infinidade de aproximantes: a cada um deles corresponderá uma prescrição diferente para a construção dos mapeamentos estroboscópicos.

Fig. II.3 Aproximantes usados para as integrações com funções delta, neste capítulo

Estas observações podem ser entendidas de maneira mais formal em termos do teorema de Kurzweil (Filippov, 1970). Este, para uma classe ampla de equações diferenciais com distribuições

(como a II-10), permite a existência de um número arbitrariamente grande de soluções, considerando diferentes maneiras de levar em conta o salto da solução devido à função delta.

Destes aproximantes, somente dois serão considerados neste trabalho (ver fig. II.3), a saber:

(i) Valor extrapolado

$$\Phi_1 \cong f(\tau - \varepsilon) \int_{\tau - \varepsilon}^{\tau + \varepsilon} dt \delta(t - \tau)$$

isto é,

$$\Phi_1 \cong f(\tau - \varepsilon) \quad \text{(II-26)}$$

(ii) Valor interpolado

$$\Phi_2 \cong \frac{1}{2} [f(\tau + \varepsilon) + f(\tau - \varepsilon)] \quad \text{(II-27)}$$

O uso destes aproximantes permite-nos, então, resolver B_1 (cada um deles dá origem a mapeamentos diferentes). Usando (II-25), temos ("primeira definição do mapeamento"):

$$\begin{aligned} B_1 &\cong \{ N_{11}[y_1(t = (n+1)T - \varepsilon), y_2(t = (n+1)T - \varepsilon)] \otimes \\ &y_1(t = (n+1)T - \varepsilon) + N_{12}[y_1(t = (n+1)T - \varepsilon), y_2(t = (n+1)T - \varepsilon)] \otimes \\ &y_2(t = (n+1)T - \varepsilon) \} \sum_m \int_{(n+1)T - \varepsilon}^{(n+1)T + \varepsilon} c_m \delta(t - mT) dt \quad \text{(II-28)} \end{aligned}$$

O somatório na expressão acima fornece:

$$\sum_m c_m \delta_{m,n+1} = c_{n+1}$$

donde, levando ao limite $\varepsilon \rightarrow 0$ a equação (II-23):

$$\begin{aligned} (y_1)_{n+1} &= (y_1^*)_n + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2 \varepsilon A_1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_1 \\ &= (y_1^*)_n + c_{n+1} \{ N_{11}[(y_1^*)_n, (y_2^*)_n] (y_1^*)_n + \\ &\quad N_{12}[(y_1^*)_n, (y_2^*)_n] (y_2^*)_n \} \end{aligned} \quad (II-29)$$

onde usamos (II-13) e (II-14).

De maneira completamente análoga, teríamos para a outra equação do sistema (II-11) o resultado:

$$\begin{aligned} (y_2)_{n+1} &= (y_2^*)_n + c_{n+1} \{ N_{21}[(y_1^*)_n, (y_2^*)_n] (y_1^*)_n + \\ &\quad + N_{22}[(y_1^*)_n, (y_2^*)_n] (y_2^*)_n \} \end{aligned} \quad (II-30)$$

Introduzindo os vetores:

$$Y_n = \begin{bmatrix} (y_1)_n \\ (y_2)_n \end{bmatrix} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Y(t = nT + \varepsilon) \quad (II-31)$$

$$Y_n^* = \begin{bmatrix} (y_1^*)_n \\ (y_2^*)_n \end{bmatrix} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Y(t = (n+1)T - \varepsilon) \quad (II-32)$$

$$\tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} I_1(y_1, y_2) \\ I_2(y_1, y_2) \end{bmatrix} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{nT+\varepsilon}^{(n+1)T-\varepsilon} M[\tilde{Y}] \tilde{Y} dt \quad (\text{II-33})$$

podemos reescrever (II-17) e (II-18) como:

$$\tilde{Y}_n^* = \tilde{Y}_n + \tilde{\Phi} \quad (\text{II-34})$$

e as equações (II-29) e (II-30) como:

$$\tilde{Y}_{n+1} = \tilde{Y}_n^* + c_{n+1} N[\tilde{Y}_n^*] \tilde{Y}_n^* \quad (\text{II-35})$$

Combinando as duas equações acima obtemos:

$$\tilde{Y}_{n+1} = \tilde{Y}_n + \tilde{\Phi} + c_{n+1} N[\tilde{Y}_n + \tilde{\Phi}] (\tilde{Y}_n + \tilde{\Phi}) \quad (\text{II-36})$$

Outra maneira de escrever este mapeamento é ($m = n + 1$):

$$\tilde{Y}_m = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ \tilde{Y}(t=mT+\varepsilon) + c_m N[\tilde{Y}(t=mT-\varepsilon)] \tilde{Y}(t=mT-\varepsilon) \} \quad (\text{II-37})$$

onde vale a relação:

$$\left| \tilde{Y}(t=mT-\varepsilon) - \tilde{Y}(t=(m-1)T+\varepsilon) - \int_{(m-1)T+\varepsilon}^{mT-\varepsilon} M[\tilde{Y}] \tilde{Y} dt \right| \leq A \varepsilon^m \quad (\text{II-38})$$

onde A é um majorante para a expressão.

Usando, agora, um aproximante interpolado, do tipo (II-27), e repetindo os mesmos cálculos feitos anteriormente, chega-se ao mapeamento:

$$\tilde{Y}_{n+1} = \tilde{Y}_n^* + \frac{1}{2} c_{n+1} N[\tilde{Y}_n^*] \tilde{Y}_n^* + \frac{1}{2} c_{n+1} N[\tilde{Y}_{n+1}] \tilde{Y}_{n+1} \quad (\text{II-39})$$

ou seja ($m = n+1$):

Fig. II.4. Diagrama de escada para o mapeamento (II-54) com $a = \beta = c = 1$; $\alpha = T = 0.5$. O ponto fixo (estável) está, aproximadamente, em 3.0 .

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_m = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \tilde{Y}(t = mT - \varepsilon) + \frac{c_m}{2} \tilde{N}[\tilde{Y}(t = mT - \varepsilon)] \tilde{Y}(t = mT - \varepsilon) + \right. \\ \left. + \frac{c_m}{2} \tilde{N}[\tilde{Y}(t = mT + \varepsilon)] \tilde{Y}(t = mT + \varepsilon) \right\} \end{aligned} \quad (\text{II-40})$$

onde vale (II-36).

II.3. ANÁLISE DE ALGUNS EXEMPLOS

Nesta secção vamos mostrar a aplicabilidade do método exposto, segundo os aproximantes interpolado e extrapolado. As matrizes não-lineares $\tilde{M}$ e $\tilde{N}$ terão a seguinte forma geral (para f e g funções arbitrárias):

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} \frac{f(\sqrt{y_1^2 + y_2^2})}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} & 1 \\ -1 & \frac{f(\sqrt{y_1^2 + y_2^2})}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \end{bmatrix} \quad (\text{II-41})$$

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} \frac{g(\sqrt{y_1^2 + y_2^2})}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} & 0 \\ 0 & \frac{g(\sqrt{y_1^2 + y_2^2})}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \end{bmatrix} \quad (\text{II-42})$$

Será conveniente trabalharmos em coordenadas polares, definidas por $y_1 = r \cos \theta$, $y_2 = r \sin \theta$. Nelas, o sistema original (II-9) pode ser re-escrito como:

$$\dot{r} = f(r) + g(r) \sum_m c_m \delta(t - mT) \quad (\text{II-43})$$

$$\dot{\theta} = -1 \quad (\text{II-44})$$

II.3.1 SISTEMA COM UM CICLO LIMITE

Como primeiro exemplo, vamos considerar:

$$f(r) = a^2 - r^2 \quad (\text{II-47})$$

$$g(r) = \alpha r + \beta \quad (\text{II-46})$$

onde $a > 0$ e $c_m = c$ para todo m . O sistema descrito por esta escolha, na ausência de perturbação ($c = 0$), possui um só ciclo limite circular, cujo raio é $\bar{r} = a$ (ver eq. I-7). Este atrator é estável para $a > 0$ (ver eq. I-18).

Inicialmente resolvemos o problema nos intervalos entre dois pulsos sucessivos, i.e., para

$$(m-1)T + \varepsilon < t < mT - \varepsilon$$

Podemos definir variáveis discretizadas, como em (II-12,13,14):

$$r_m = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r(t = mT + \varepsilon) \quad (\text{II-47})$$

$$r_m^* = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r(t = mT - \varepsilon) \quad (\text{II-48})$$

e analogamente para θ_m , θ_m^* . Em termos delas, a solução dentro deste intervalo é (Caldas, Tasso, 1989):

$$r_{m-1}^* = a \frac{\frac{a + r_{m-1}}{a - r_{m-1}} e^{2aT} - 1}{\frac{a + r_{m-1}}{a - r_{m-1}} e^{2aT} + 1} \quad (\text{II-49})$$

$$\theta_{m-1}^* = \theta_m + T \quad (\text{II-50})$$

Para levar em conta a excitação ($c \neq 0$), construímos o mapeamento como na secção anterior. Vejamos, inicialmente, o emprego de um aproximante interpolado (pela eq. II-38). Escrevendo a equação matricial em componentes, e usando (II-47,48) temos:

$$\begin{aligned} r_m \cos \theta_m &= r_{m-1} \cos \theta_{m-1}^* + \frac{c}{2} (\alpha r_{m-1}^* + \beta) \cos \theta_{m-1}^* + \\ &+ \frac{c}{2} (\alpha r_m + \beta) \cos \theta_m \end{aligned} \quad (\text{II-51a})$$

$$\begin{aligned} r_m \sin \theta_m &= r_{m-1}^* \sin \theta_{m-1}^* + \frac{c}{2} (\alpha r_{m-1}^* + \beta) \sin \theta_{m-1}^* + \\ &+ \frac{c}{2} (\alpha r_m + \beta) \sin \theta_m \end{aligned} \quad (\text{II-51b})$$

Utilizando as soluções não-perturbadas (II-49,50) nas duas equações acima obtemos:

$$\cos \theta_m \left[r_m - \frac{c}{2} (\alpha r_m + \beta) \right] = \quad (\text{II-52a})$$

$$= \cos (\theta_{m-1} + T) \left[a \frac{r_{m-1} + a \rho}{r_{m-1} \rho + a} + \frac{c}{2} \left(\alpha a \frac{r_{m-1} + a \rho}{r_{m-1} \rho + a} + \beta \right) \right]$$

$$\sin \theta_m \left[r_m - \frac{c}{2} (\alpha r_m + \beta) \right] = \quad (\text{II-52b})$$

$$= \sin (\theta_{m-1} + T) \left[a \frac{r_{m-1} + a \rho}{r_{m-1} \rho + a} + \frac{c}{2} \left(\alpha a \frac{r_{m-1} + a \rho}{r_{m-1} \rho + a} + \beta \right) \right]$$

$$\text{onde } \rho \equiv \tanh (a T) \quad (\text{II-53})$$

Quadrando e somando membro a membro estas equações chega-se ao mapeamento ($m = n + 1$):

$$r_{n+1} = \xi^{-1} \frac{r_n + a \rho}{r_n \rho + a} + \eta \quad (\text{II-54})$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n - T \quad (\text{mod } 2\pi) \quad (\text{II-55})$$

onde

$$\xi \equiv \frac{1}{a} \left[\frac{2 - c \alpha}{2 + c \alpha} \right] \quad (\text{II-56})$$

$$\eta \equiv \frac{2 c \alpha}{2 - c \alpha} \quad (\text{II-57})$$

Fig. II.5. "Retrato de Fase", no plano $y_1 \times y_2$, do mapeamento (II-54), com $a = \beta = 1.0$; $\alpha = 0.5$; $c = 1.0 \times 10^{-2}$; $T = 1.0 \times 10^{-3}$; e condições iniciais $r_0 = 0.1$; $\theta_0 = 0.0$.

A análise do mapeamento (II-54,55) pode esclarecer o comportamento do atrator na presença de perturbação. O mapeamento para a coordenada angular (II-54) é um caso trivial dos mapeamentos sobre o círculo. Quando o período T é um número racional, após um número determinado de voltas a iteração θ_n coincide com a condição inicial θ_0 . Se T for irracional, contudo, as iterações cobrem densamente o círculo.

Mais relevante para nós é o mapeamento para a coordenada radial (II-53). Na fig. II.4 representamos um diagrama de escada típico para ele. Há um único ponto fixo $\bar{r}$, e o comportamento das

iterações indica sua estabilidade. Não detectamos mudanças (via bifurcações com multiplicação do período) neste ponto fixo, variando parâmetros do sistema. A existência deste ponto fixo indica que, mesmo sob a ação dos pulsos delta, o sistema ainda possui um ciclo limite.

Naturalmente, a forma geométrica deste atrator não pode ser inferida diretamente do mapeamento, porém é bem provável que ela seja parecida com a da fig. II.5. As iterações do mapeamento formam um círculo, cujo raio é dado por $\bar{r}$, mas este novo raio representa apenas uma medida das dimensões características do atrator na presença da perturbação.

Analiticamente, este raio é dado por (cf. I-12):

$$\bar{r} = \frac{\eta}{2} + \frac{1}{2\xi\rho} \left\{ 1 - \xi a + \Lambda^{1/2} \right\} \quad (\text{II-58})$$

onde

$$\Lambda = (a\xi - \rho\eta\xi - 1)^2 + 4a\xi\rho(\xi\eta + \rho) \quad (\text{II-59})$$

Além disso, sua estabilidade implica em que seja satisfeita a desigualdade (cf. I-22):

$$\left| \frac{1 - \rho\xi(\bar{r} - \eta)}{\xi(\bar{r}\rho + a)} \right| < 1 \quad (\text{II-60})$$

É instrutivo observar o comportamento deste ponto fixo $\bar{r}$ em relação às variações na intensidade e período dos pulsos (Viana, Caldas e Tasso, 1989a). Para $a = \beta = 1$, $\alpha = T = 0,5$, quando $c = 0$ temos $\bar{r} = a = 1$ (que é o caso não-perturbado). Para $c > 0$, $\bar{r}$

cresce monotonicamente, e diverge para $c \rightarrow 4$, que corresponde à singularidade em (II-54) (vide fig. II.6).

Fixando, desta vez, $a = \beta = c = 1$, $\alpha = 0,5$, analisamos a variação do período T . No limite $T \rightarrow 0$ o ponto fixo diverge para $+\infty$ [já que $\tanh aT \xrightarrow{T \rightarrow 0} 0$]. No outro limite ($T \rightarrow \infty$) o raio $\bar{r}$ "relaxa" para um valor constante.

Finalmente, é oportuno um comentário sobre a dinâmica deste sistema. Nós encontramos unicamente atratores de período 1, correspondendo a um ciclo limite. No entanto, o caso particular $a = 0$ implica que o atrator não-perturbado do tipo foco estável ($\bar{r} = 0$) evolue para um ciclo limite, de raio $\bar{r} = \eta / 2$, o que configura uma Bifurcação de Hopf (Schuster, 1984). Além disso, o mapeamento (II-53) não é unimodal¹ (cf. fig. II.4), o que exclue a possibilidade do aparecimento de uma cascata de bifurcações com duplicação do período (Rota de Feigenbaum para o caos) (Schuster, 1984).

Poderíamos indagar se o uso de alguma outra prescrição para o mapeamento levaria a resultados diferentes. Utilizando um aproximante extrapolado (eq. II-37), e desenvolvendo o cálculo da mesma maneira com que procedemos até aqui, encontramos um mapeamento análogo a (II-54,55), a menos das seguintes mudanças de parâmetros (Viana, Caldas e Tasso, 1989b):

$$\xi \rightarrow \zeta \equiv \frac{1}{a(1+c\alpha)} \quad \text{(II-61)}$$

¹ Mapas unimodais têm um máximo no intervalo de definição.

$$\eta \rightarrow \mu \equiv c \beta \quad (\text{II-62})$$

Portanto, qualitativamente, não houve alteração no comportamento do ponto fixo. As diferenças quantitativas acima expressam apenas a precisão maior ou menor obtida pelo aproximante em uso.

Fig. II.6 Ponto fixo (normalizado) do mapeamento (II-54), como função da intensidade da perturbação, para os valores $a = \beta = 1$; $\alpha = T = 0,5$

Fig. II.7 Ponto fixo (normalizado) de (II-54), como função do período (normalizado) da perturbação, para os valores $a = \beta = c = 1$; $\alpha = 0,5$

II.3.2. SISTEMA COM DOIS CICLOS LIMITES

Este caso corresponde à escolha:

$$f(r) = (a - r)(b - r) \quad (\text{II-63})$$

$$g(r) = \alpha r + \beta \quad (\text{II-64})$$

onde $a > b > 0$, e $c_m = c$ para todo m . Na ausência de forçamento o fluxo (II-42,43) possui dois ciclos limites, cujos raios são (cf. I-7):

$$\bar{r}_1 = a \quad \bar{r}_2 = b \quad (\text{II-65})$$

Para $a > b > 0$, segue-se (cf. I-18) que $\bar{r}_1$ é instável e $\bar{r}_2$ é estável.

O mapeamento para este sistema é construído da mesma forma que o anterior. Nas regiões entre dois pulsos (i.e., quando $(m-1)T - \varepsilon < t < mT - \varepsilon$) o sistema pode ser integrado e fornece, usando (II-46,47):

$$r_{m-1}^* = \frac{a - b \frac{r_{m-1} - a}{r_{m-1} - b} e^{(b-a)T}}{\frac{r_{m-1} - a}{r_{m-1} - b} e^{(b-a)T} - 1} \quad (\text{II-66})$$

$$\theta_{m-1}^* = \theta_{m-1} - T \quad (\text{mod } 2\pi) \quad (\text{II-67})$$

Para a obtenção do mapeamento que descreve a ação das

perturbações, utilizamos novamente (II-50a,50b), juntamente com os resultados acima, obtendo (após a separação das partes radial e angular das equações):

$$r_{n+1} = \xi^{-1} \frac{r_n \left[\frac{b - a\lambda}{a(1 - \lambda)} \right] - b}{r_n - b \left[\frac{a - b\lambda}{b(1 - \lambda)} \right]} + \eta \quad (\text{II-68})$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n - T \quad (\text{mod } 2\pi) \quad (\text{II-69})$$

onde $n \equiv m - 1$ e

$$\lambda \equiv \exp [t(b - a)] \quad (\text{II-70})$$

sendo que ξ e η são dados por (II-55) e (II-56), respectivamente.

O mapeamento anterior lembra bastante o da secção II.3.1, salvo que neste último caso há dois pontos fixos (um estável e outro instável) para o mapeamento radial, correspondendo aos ciclos limites do fluxo original, como pode ser visto no diagrama de escada (cf. fig. II-8).

Podemos encontrar os pontos fixos de (II-69) a partir da definição (I-12), como sendo:

$$\bar{r} = \frac{-a\lambda [\xi(b + \eta) + 1] + \xi a(a + \eta) + b \pm \Omega^{1/2}}{2a\xi(1 + \lambda)} \quad (\text{II-71})$$

onde

$$\Omega \equiv \{ a \lambda [\xi (b + \eta) + 1] - \xi a (a + \eta) - b \}^2 -$$

$$- 4 a^2 \xi (1 - \lambda) [\xi a \eta + b - b \lambda (\xi \eta + 1)] \quad (\text{II-72})$$

Dentro dos intervalos que estudamos para os parâmetros relevantes do sistema (como c e T), não foi possível encontrar bifurcações destes pontos fixos por duplicação do período. Aliás, como no exemplo anterior, este mapeamento não é unimodal, o que também exclui a possibilidade de uma cascata de bifurcações deste tipo, como rota para o caos.

Em particular, analisamos a variação de $\bar{r}$ para as seguintes faixas de parâmetros: $T \geq 0,02$ e $-0,26 < c < 0$. A fig. II.9 registra o comportamento de $\bar{r}$ como função da intensidade c da perturbação para $T = a = \beta = 1$, $\alpha = b = 0,5$ fixos. Para $c = 0$ temos as soluções do problema não-perturbado. Caso contrário, os pontos fixos afastam-se monotonicamente. A figura II.10 é construída com os mesmos valores dos parâmetros, à exceção de c que fixamos. Variando o período, vemos para $T \rightarrow 0$ a divergência do atrator instável, ao passo que o estável colapsa na origem. O caso $T \rightarrow \infty$ fornece, curiosamente, os valores do problema não-perturbado.

A mesma análise, feita com um aproximante extrapolado, não altera nossos resultados em termos qualitativos, assim como no exemplo anterior.

Fig. II.8 Diagrama de escada para o mapeamento (II-68), com $a = \beta = T = 1$; $b = \alpha = 0,5$; $c = -0,15$. Os pontos fixos estável (A) e instável (B) localizam-se em $r \cong 0,65$ e $0,82$

Fig. II.9 Ponto fixo (normalizado) do mapeamento (II-68), como função da intensidade da perturbação, para os valores $a = \beta = T = 1$; $\alpha = b = 0,5$. As linhas sólida e tracejada relacionam-se aos pontos estável e instável, resp.

Fig.II.10 Ponto fixo (normalizado) do mapeamento (II-68) ,como função do período da perturbação, para os valores $a = \beta = 1; \alpha = b = 0,5; c = -0,01$. As linhas sólida e tracejada relacionam-se aos pontos estável e instável, resp.

II.3.3. REVISITANDO O PRIMEIRO EXEMPLO

A rigor, existe uma vantagem de cálculo no uso do aproximante extrapolado, que ilustraremos voltando ao exemplo da secção II.3.1.. Vamos supor que apenas $f(r) = a^2 - r^2$ é determinado. O uso do aproximante (II-36) com $g(r)$ arbitrário fornece o mapeamento (para a parte radial):

$$r_{n+1} = a \frac{r_n + a \rho}{r_n \rho + a} + c g \left[a \frac{r_n + a \rho}{r_n \rho + a} \right] \quad (\text{II-74})$$

Observemos que, caso fosse utilizado o aproximante interpolado (II-39), a expressão correspondente seria:

$$r_{n+1} - \frac{c}{2} g(r_{n+1}) = a \frac{r_n + a \rho}{r_n \rho + a} + \frac{c}{2} g \left[a \frac{r_n + a \rho}{r_n \rho + a} \right] \quad (\text{II-75})$$

Com o aproximante extrapolado, que leva a (II-74) podemos utilizar qualquer forma para $g(r)$. Em particular, podemos escolher:

$$g(r) = \alpha r^2 \quad (\text{II-76})$$

Substituindo (II-76) em (II-74), e usando a variável reduzida $x = r / a$, obtemos um novo mapeamento:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \rho}{x_n \rho + 1} \left[1 + c \alpha a \frac{x_n + \rho}{x_n \rho + 1} \right] \quad (\text{II-77})$$

Apesar das aparências, o mapeamento acima não pertence à família "nobre" dos logísticos (como II-8), pois ele não é unimodal (cf. fig. II.11). Essencialmente, sua dinâmica é a do primeiro exemplo, com diferenças nos valores dos pontos fixos. Por exemplo (Viana, Caldas e Tasso, 1989b), se $a = \alpha = 1$ e $\rho = 1/2$ (que corresponde a $T = \ln \sqrt{3} \cong 0,55$), o atrator correspondente ao caso perturbado será a raiz real e positiva da equação cúbica (as outras serão complexas conjugadas):

$$\frac{3}{x} + 2(1 - 2c) \frac{2}{x} - (4c + 1) \frac{1}{x} - (2 + c) = 0 \quad (\text{II-78})$$

onde $\bar{x} = \bar{r} / a$

Fig. II.11 Diagrama de escada para o mapeamento (II-77) e a localização de seu ponto fixo

II.4. PERTURBAÇÃO UNIDIMENSIONAL E O LIMITE DE RÁPIDA RELAXAÇÃO

O sistema (II-9) com as matrizes $\tilde{M}$ e $\tilde{N}$ dadas por (II-41) e (II-42), é tal que a excitação impulsiva atua sobre as duas direções no plano de fase (y_1, y_2) . Nesta secção vamos explorar o caso onde os pulsos delta são aplicados apenas em uma direção, digamos, sobre y_1 .

Seguindo a sugestão de Ding (Ding, 1987b), introduziremos também um parâmetro variável de dissipação s . Isto equivale a considerarmos, desta vez, a seguinte escolha de matrizes:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{f_s(\sqrt{y_1^2 + y_2^2})}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} & 1 \\ -1 & \frac{f_s(\sqrt{y_1^2 + y_2^2})}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \end{bmatrix} \quad (\text{II-79})$$

$$N = \begin{bmatrix} \frac{g(\sqrt{y_1^2 + y_2^2})}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} & \frac{h(\sqrt{y_1^2 + y_2^2})}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-80})$$

Para exemplificar, vamos retomar o exemplo visto na secção II.3.2, i.e., o sistema com dois ciclos limites, modificado para (em coordenadas polares):

$$f_s(r) = s(a - r)(b - r) \quad (\text{II-81})$$

com $a > b > 0$; o que implica que (II-81) continua tendo os atratores não-perturbados do caso anterior.

Entre dois pulsos, a solução deste problema é

essencialmente dada por (II-66,67), que escreveremos como:

$$r_{m-1}^* = \frac{r_{m-1} \left[\frac{a - b \iota}{\iota - 1} \right] + a b}{r_{m-1} - \left[\frac{a \iota - b}{\iota - 1} \right]} \quad (\text{II-82a})$$

$$\theta_{m-1}^* = \theta_{m-1} - T \quad (\text{II-82b})$$

$$\text{onde } \iota \equiv \exp [(b - a) s T] \quad (\text{II-83})$$

Para considerar o efeito da perturbação, tomaremos por simplicidade um aproximante extrapolado, do tipo (II-37). Escolhendo, também, $g(r)$ por (II-64) e

$$h(r) = \gamma r + \delta \quad (\text{II-84})$$

nós obtemos:

$$r_m \cos \theta_m = r_{m-1}^* \cos \theta_{m-1}^* + \quad (\text{II-85a})$$

$$+ c [(\alpha r_{m-1}^* + \beta) \cos \theta_{m-1}^* + (\gamma r_{m-1}^* + \delta) \sin \theta_{m-1}^*]$$

$$r_m \sin \theta_m = r_{m-1}^* \sin \theta_{m-1}^* \quad (\text{II-85b})$$

Substituindo (II-83), quadrando e somando membro a membro as equações acima, obteremos o mapeamento (para $\gamma = \alpha$, $\delta = \beta$ e $m = n + 1$):

$$r_{n+1} = \left\{ r_n^{*2} + c r_n^* (\alpha r_n^* + \beta) \left[1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \sin [2(\theta_n - T)] + \cos [2(\theta_n - T)] \right] \right\}^{1/2} \quad (\text{II-86})$$

onde usamos a identidade trigonométrica:

$$\cos x (\sin x + \cos x) \equiv \frac{1}{2} (1 + \sin 2x + \cos 2x)$$

e tomamos apenas o sinal positivo na raiz. Naturalmente, r_n^* é dado por (II-82a).

Dividindo membro a membro as equações (II-85a) e (II-85b) chega-se, com as mesmas escolhas de parâmetros, ao mapeamento angular:

$$\theta_{n+1} = \arctg \left\{ \frac{r_n^* \operatorname{tg} (\theta_n - T)}{r_n^* + c (\alpha r_n^* + \beta) [1 + \operatorname{tg} (\theta_n - T)]} \right\} \quad (\text{II-87})$$

onde podemos escolher, como domínio de variação de θ o intervalo $-\pi < \theta < \pi$.

O mapeamento bidimensional formado por (II-86,87) não desacopla as variáveis r e θ , como nos casos anteriores, mercê do caráter unidimensional da excitação. Além disso, nosso novo mapeamento é mais geral do que o proposto por Ding (1987b) (cf. II-5). Por esta razão, inspirados pela riquíssima dinâmica exibida pelos mapeamentos de Ding, nós esperamos um comportamento mais

complicado para este exemplo, em relação aos anteriores. Este estudo constitui-se numa das extensões futuras de nosso trabalho.

Assim como em (II-5), aqui também podemos nos valer do Limite de Rápida Relaxação (*fast relaxation*), como em (II-7); só que agora faremos apenas a dissipação tender ao infinito. Sendo $k = c \alpha$, e $\beta = 0$, chega-se ao mapeamento:

$$\theta_{n+1} = \arctg \left\{ \frac{\operatorname{tg} (\theta_n - T)}{1 + k [1 + \operatorname{tg} (\theta_n - T)]} \right\} \quad (\text{II-88})$$

$$r_{n+1} = \left\{ 1 + k \left[1 + \operatorname{sen} [2 (\theta_n - T)] + \cos [2 (\theta_n - T)] \right] \right\}^{1/2} \quad (\text{II-89})$$

onde o mapeamento angular (II-88) é, desta vez, o mais interessante, pois trata-se de um mapa do círculo (*circle map*) típico a dois parâmetros, k e T .

Cabe ressaltar, aqui, a importância desta classe de mapeamentos. Eles são protótipos no estudo da rota de Quase-periodicidade (ou de Ruelle-Takens-Newhouse) para o caos (Schuster, 1984; Hao Bai Lin, 1984), e podem servir ainda como modelos de diversos fenômenos (para uma aplicação em fisiologia cardíaca, ver Glass, 1988).

CAPÍTULO III

TOPOLOGIA MAGNÉTICA EM TOKAMAKS GERADA POR UM LIMITADOR ERGÓDICO

III.1. SUPERFÍCIES MAGNÉTICAS NUM TOKAMAK DE GRANDE RAZÃO DE ASPECTO

Neste capítulo, vamos estudar a configuração das linhas de campo magnético no interior de um Tokamak, para uma coluna de plasma com secção circular de raio a . O vaso toroidal que contém o plasma é caracterizado por seus raios maior R_0 e menor b - de forma que sua razão de aspecto seja $\varepsilon = R_0 / b$ (cf. fig. III.1).

Em primeira aproximação, desprezaremos os efeitos toroidais de curvatura adotando uma geometria cilíndrica, de periodicidade $2\pi R_0$, o que corresponde a uma razão de aspecto grande ($R_0 \gg b$ ou $\varepsilon \gg 1$) (cf. fig. III.2).

Uma coluna de plasma em equilíbrio magnetohidrodinâmico estático num Tokamak é confinada principalmente pelas componentes do campo magnético (Furth, 1975):

a) Toroidal: $B_\phi = B_0 \hat{\phi}$, gerado por bobinas externas ao vaso. Na aproximação cilíndrica temos $z = R_0 \phi$, e este campo é uniforme e paralelo ao eixo geométrico da câmara: $B_z = B_0 \hat{z}$;

b) Poloidal: $B_\theta = B_\theta(r) \hat{\theta}$, gerado pela própria corrente de plasma I_p , de forma que o campo magnético total seja:

$$\mathbf{B}^{(0)} = B_0 \hat{z} + B_\theta(r) \hat{\theta} \quad (\text{III-1})$$

Fig. III.1 Geometria Essencial de um Tokamak

Fig. III.2 Aproximação Cilíndrica para um Tokamak de grande razão de aspecto

As linhas de campo magnético nesta configuração são hélices cilíndricas, ao longo das quais caminham os centros de guia das partículas confinadas do plasma, em primeira aproximação. A equação destas linhas, cujo elemento de comprimento é dl , é:

$$\mathbf{B}^{(0)} \times d\mathbf{l} = 0 \quad (\text{III-4})$$

ou, em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{r d\theta}{B_\theta(r)} = \frac{dz}{B_o} \quad (\text{III-3})$$

Estas linhas repousam sobre superfícies ditas magnéticas que, devido ao caráter periódico do modelo, são fechadas. Graças à geometria utilizada, elas são cilindros coaxiais, e podem ser caracterizadas por uma função de fluxo magnético $\Psi_o = \Psi_o(r)$, que é constante para cada superfície. Isto implica em que :

$$\mathbf{B}^{(0)} \cdot \nabla \Psi_o(r) = 0 \quad (\text{III-4})$$

Das equações da MHD ideal, encontramos a seguinte condição de equilíbrio da coluna de plasma (Wesson, 1987):

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B}^{(0)} = \nabla p \quad (\text{III-5})$$

onde p é a pressão escalar, e $\mathbf{j}$ a densidade de corrente de plasma.

A equação acima implica em que:

$$\mathbf{B}^{(0)} \cdot \nabla p = 0 \quad (\text{III-6})$$

Comparando (III-4) com (III-6) vemos que as superfícies magnéticas são também isobáricas. Elas funcionam como "diques" que impedem a dissolução da própria coluna de plasma. A existência e a estabilidade das superfícies magnéticas são, pois, condições necessárias ao confinamento MHD de plasmas em Tokamaks (Clemente, 1989).

Uma grandeza característica destas superfícies é o chamado

"fator de segurança", definido para as linhas de campo como:

$$q(r) = \frac{d\phi}{d\theta} \quad (\text{III-7})$$

Como $dz = R_0 d\phi$, e usando (III-3) obtém-se:

$$q(r) = \frac{r B_0}{R_0 B_\theta(r)} \quad (\text{III-8})$$

de modo que

$$q(r) = \frac{2 \pi}{\iota(r)} \quad (\text{III-9})$$

onde ι é a chamada "transformada rotacional" da linha de campo - o ângulo poloidal varrido pela linha de campo ao cabo de uma volta toroidal (Caldas e Vannucci, 1985) (cf. fig. III.3).

Fig. III.3 Transformada Rotacional de uma linha de campo magnético

Caso o fator de segurança seja um número racional (i.e., a razão de dois inteiros, primos entre si) da forma

$$q = \frac{m}{n} \quad (\text{III-10})$$

então uma linha de campo sobre tal superfície magnética fecha-se sobre si própria após n voltas na direção poloidal e m voltas na direção toroidal. Diz-se, então, que a superfície é racional. Caso contrário, a superfície magnética é dita irracional, e as linhas de campo nunca se fecham, preenchendo densamente a superfície.

O perfil radial de variação deste fator de segurança é obtido a partir do campo poloidal gerado por uma dada distribuição de corrente. Na maioria dos trabalhos teóricos sobre Tokamaks, e também nesta tese, é utilizada uma densidade de corrente de plasma do tipo parabólico ("peaked model"). Os perfis correspondentes (Brusati, 1989), são apresentados no apêndice B deste trabalho.

Podemos determinar a função de fluxo Ψ_0 para superfícies magnéticas racionais, numa situação de equilíbrio MHD, desde que o sistema exiba alguma simetria. Conhece-se superfícies magnéticas, por exemplo, para sistemas com simetria translacional (em z), azimutal (em θ) e helicoidal (em r e $u = m\theta - kz$), que é o nosso caso (Caldas e Vannucci, 1985). A forma de $\Psi_0(r)$ para um Tokamak na ausência de limitadores ergódicos será obtida na próxima seção. O invariante $\Psi_0(r)$ representa fisicamente o fluxo magnético através da superfície de um helicóide de raio r e altura unitária, descrito por $u = \text{constante}$ (e cujo passo é $2\pi m/k$).

O problema de determinação de superfícies magnéticas pode ser também imaginado de um ponto de vista Hamiltoniano - as equações das linhas de campo poderiam, após uma escolha conveniente de variáveis, ser tomadas como equações canônicas de uma Hamiltoniana (que, por ser um invariante sobre as superfícies magnéticas, corresponderia à nossa função de fluxo, a menos de uma

constante aditiva e/ou multiplicativa) (Filonenko et al., 1969).

Esta idéia, já sugerida por Kerst (1962), tem sido bastante explorada nos últimos anos, graças aos poderosos métodos de análise de sistemas dinâmicos conservativos. Whiteman (1977) sugere uma forma geral para este problema, válida para um conjunto qualquer de coordenadas generalizadas contravariantes (x^1, x^2, x^3) .

Se $B = (B^1, B^2, B^3)$, e o tensor métrico é ϵ_{ij} , tal que

$$x_i = \epsilon_{ij} x^j$$

então escolhemos as variáveis canonicamente conjugadas como:

$$\begin{aligned} q &= x^1 \\ p &= \int \sqrt{\epsilon} B^3 dx^2 \end{aligned} \quad \text{(III-11)}$$

onde $\epsilon \equiv \det [\epsilon_{ij}]$.

Definindo uma variável "temporal" $t = x^3$, as equações das linhas de campo teriam a seguinte forma canônica:

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned} \quad \text{(III-12)}$$

onde a Hamiltoniana é dada por

$$H = \int \sqrt{\epsilon} B^1 dx^2 + \alpha \quad \text{(III-13)}$$

sendo α uma função independente de x^2 .

É possível mostrar (Rosenbluth et al., 1966; Filonenko et al., 1967; Turner, 1985, Andrade, 1989) que a função de fluxo $\Psi_0(r)$ tem um caráter Hamiltoniano, no sentido que mostramos. Neste caso, as variáveis canonicamente conjugadas são:

$$u = m \theta - k z \quad (\text{III-14})$$

$$\rho = \frac{1}{2} r^2 \quad (\text{III-15})$$

Definindo a variável temporal t pela relação

$$\frac{dz}{dt} = B_0 \quad (\text{III-16})$$

as equações das linhas de campo serão escritas como

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial \Psi_0}{\partial u} \\ \frac{du}{dt} &= - \frac{\partial \Psi_0}{\partial \rho} \end{aligned} \quad (\text{III-17})$$

Como as superfícies magnéticas caracterizam-se por $\Psi_0 = \text{const.}$, segue-se que elas representam os chamados "toros KAM", na linguagem dos sistemas Hamiltonianos (Whiteman, 1977; Greene, 1984; Hatori et al., 1989). Já observamos que a existência destas superfícies é uma consequência de alguma simetria no sistema. Segue-se que qualquer quebra nesta simetria poderá ocasionar a deformação e mesmo a destruição destas superfícies (e a conseqüente deterioração da qualidade do confinamento do plasma). No entanto, as condições impostas pelo teorema KAM (Guckenheimer e

Holmes, 1983) garantem que, sendo esta quebra de simetria de intensidade relativamente fraca, sobreviverá ainda uma quantidade razoável de superfícies magnéticas .

Neste capítulo este fato emergirá naturalmente, pelo uso de uma perturbação que quebra levemente a simetria helicoidal do problema. Aparecerão, também, ressonâncias, típicas dos tratamentos perturbativos (Rañada, 1983), dando origem às chamadas "ilhas magnéticas", que são fisicamente relevantes. Nosso tratamento será, contudo, não manifestamente Hamiltoniano, na tradição de alguns outros trabalhos sobre o assunto (como Morozov e Solovév, 1966; Fernandes, Heller e Caldas, 1988).

III.2. CAMPOS MAGNÉTICOS COM SIMETRIA HELICOIDAL

Em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , dizemos que um campo magnético B possui simetria helicoidal quando $B = B(r, u)$, onde $u = m\theta - kz$ (m e k caracterizam a helicidade de B , sendo m um inteiro positivo). Sendo $B = \text{rot } A$ onde $A = A(r, u)$ temos (Fernandes e Caldas, 1985):

$$B_r = \frac{m}{r} \frac{\partial A_z}{\partial u} + k \frac{\partial A_\theta}{\partial u} \quad (\text{III-18a})$$

$$B_\theta = -k \frac{\partial A_r}{\partial u} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \quad (\text{III-18b})$$

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r A_\theta \right] - \frac{m}{r} \frac{\partial A_r}{\partial u} \quad (\text{III-18c})$$

As superfícies magnéticas correspondentes a um campo com simetria helicoidal podem, como visto na secção anterior, ser caracterizadas por uma função de fluxo Ψ que satisfaça (III-4):

$$B \cdot \nabla \Psi = 0 \quad (\text{III-19})$$

Usando as equações (III-18), chega-se a:

$$\Psi(r, u) = m A_z(r, u) + k r A_\theta(r, u) \quad (\text{III-20})$$

No caso de uma coluna cilíndrica de plasma, na qual o campo magnético total seja dado por (III-1), as linhas de campo serão hélices cilíndricas, caracterizadas por:

$$r = \text{const.}$$

$$u = m \theta - k z = \text{const.}, \text{ ou seja, } du = m d\theta - k dz = 0$$

Como $dz = R_0 d\phi$, segue-se que para uma superfície racional (aquela onde $q = m/n$), é conveniente a escolha de k como:

$$k = \frac{n}{R_0} \quad (\text{III-21})$$

onde n é um inteiro positivo. Ainda nesta situação, vê-se que nem B , nem tampouco A , dependem explicitamente de u , de maneira que as eqs. (III-18) ficam:

$$B_r = 0 \quad (\text{III-22a})$$

$$B_\theta = - \frac{d A_z}{d r} \quad (\text{III-22b})$$

$$B_o = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r A_\theta(r) \right] \quad (\text{III-22c})$$

Derivando (III-20), e usando as equações acima, temos:

$$\frac{d \Psi_o(r)}{d r} = - m B_\theta + k r B_o \quad (\text{III-23})$$

Usando (III-21), e integrando em r , obtemos uma expressão para a função de fluxo magnético que descreve as superfícies magnéticas na situação de equilíbrio:

$$\Psi_0(r) = \frac{n B_0 r^2}{2 R_0} - m \int_0^r B_\theta(r') dr' \quad (\text{III-24})$$

Podemos determinar a posição radial $r_{m/n}$ das superfícies magnéticas racionais (com $q = m/n$) impondo a condição:

$$q(r_{m/n}) = \frac{r_{m/n} B_0}{R_0 B_\theta(r_{m/n})} = \frac{m}{n} \quad (\text{III-25})$$

obtida a partir de (III-8). O campo poloidal $B_\theta(r)$ é determinado pelo equilíbrio MHD levado em conta no modelo. No apêndice B, apresentamos este modelo, tal que a forma funcional de B_θ (assim como do próprio fator de segurança) seja diferente dentro e fora da coluna de plasma. Distinguimos, assim, dois casos:

a) Se $r_{m/n} < a$ (i.e., se $q(a) > m/n$): Substituindo (B-3) em (III-25), $r_{m/n}$ deve satisfazer à equação transcendente:

$$\left[1 - \left(\frac{r_{m/n}}{a} \right)^2 \right]^{\gamma+1} + \frac{n}{m} q(a) \left(\frac{r_{m/n}}{a} \right)^2 - 1 = 0 \quad (\text{III-26})$$

b) Se $r_{m/n} > a$: Inserindo (B-4a) em (III-25), é possível achar a posição radial analiticamente, como sendo:

$$r_{m/n} = a \sqrt{\frac{m}{n q(a)}} \quad (\text{III-27})$$

Nesta tese, procuraremos ilustrar os resultados da teoria exposta a partir de dados nominais e de operação do Tokamak de pequeno porte TBR-1, do IFUSP, construído em 1980. Alguns de seus parâmetros são (unidades MKSA) :

Raio maior (R_o)	0.30 m
Raio menor (b)	0.11 m
Razão de Aspecto (ϵ)	2.7
Raio da coluna de plasma (a) ¹	0.08 m
Campo Toroidal (B_o)	0.50 T
Corrente de plasma (I_p)	10.0 kA

Devido ao modelo usado - ver (B-7) - e à hipótese de que $q(0) = 1$, o valor do fator de segurança em $r = a$ está ligado ao expoente γ do perfil de corrente, de maneira que fixamos apenas um dos dois na escolha do equilíbrio MHD particular usado. Na tabela III-1, nós apresentamos raios de superfícies racionais com valores de m e n adequados ao estudo que faremos posteriormente (neste caso, usaram-se os parâmetros acima, mais $\gamma = 4.0$). As posições dentro da coluna de plasma foram obtidas numericamente a partir de (III-26), pelo método de Newton-Raphson.

¹ Fixado pela presença de um limitador material, na forma de um anel físico.

TABELA III-1 : RAIOS DE ALGUMAS SUPERFÍCIES MAGNÉTICAS RACIONAIS
PARA O TBR-1 ($\gamma = 4.0$; $q(a) = 5.0$; $a = 8$ cm)

m	n	q	$r_{m/n}$ (cm)
7	1	7.0	9.4
7	2	3.5	6.7
7	3	2.3	5.3
7	4	1.7	4.3
7	5	1.4	3.3
7	6	1.1	2.1
7	7	1.0	0.0
8	1	8.0	10.1
8	2	4.0	7.2
8	3	2.6	5.8
8	4	2.0	4.8
8	5	1.6	3.9
8	6	1.3	3.0
8	7	1.1	2.1
8	8	1.0	0.0

A partir de (III-23), podemos escrever funções de fluxo para superfícies magnéticas dentro ou fora da coluna de plasma, dependendo do campo poloidal, dado por (B-3) ou (B-4a). Em

ambos os casos, no entanto, o resultado final é o mesmo:

$$\frac{d\Psi_0}{dr} = \frac{B_0}{R_0} r \left[n - \frac{m}{q(r)} \right] \quad (\text{III-28})$$

onde $q(r)$ é dado por (B-5) ou (B-6), conforme o caso. Quando $r = r_{m/n}$, $q = m/n$, donde:

$$\Psi_0'(r_{m/n}) = 0 \quad (\text{III-29})$$

A segunda derivada de Ψ_0 é importante, pois aparecerá no cálculo da semi-largura das ilhas magnéticas. Ai diferenciamos os dois casos:

a) $0 < r < a$:

$$\Psi_0''(r) = \frac{B_0}{R_0} \left[n + \frac{m}{q(r)} \right] - \frac{2 B_0 m (\gamma + 1)}{R_0 q(a)} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]^\gamma \quad (\text{III-29a})$$

b) $a < r < b$:

$$\Psi_0''(r) = \frac{B_0}{R_0} \left[n + \frac{m}{q(r)} \right] \quad (\text{III-29b})$$

onde, novamente, $q(r)$ é extraído de (B-5) ou (B-6). O valor de Ψ_0'' em $r = r_{m/n}$ é não-nulo.

Finalmente, seria interessante averiguar o comportamento da própria função de fluxo $\Psi_0(r)$, calculada em $r = r_{m/n}$. Devido ao seu significado físico, devemos esperar um valor constante desta quantidade, ao longo da superfície magnética. Para $0 < r < a$, não há expressão analítica fechada, uma vez que $r_{m/n}$ é obtida por

integração numérica. Entretanto, fora da coluna de plasma, podemos aplicar (B-4a) e (III-27) em (III-24). Resulta que uma divergência logarítmica em $r = 0$ aparece, sendo o termo não-divergente igual a:

$$\Psi_0(r_{m/n}) = \frac{m B_0 a^2}{R_0 q(a)} \left[\frac{1}{2} - \ln \left[a \sqrt{\frac{m}{n q(a)}} \right] \right] \quad (\text{III-30})$$

No entanto, esta divergência não é relevante à nossa análise por dois motivos: a) nos cálculos posteriores aparecerão basicamente derivadas de $\Psi_0(r)$ em $r_{m/n}$; b) a divergência desaparece quando regularizamos a integral em (III-24), por exemplo, deslocando o limite inferior para um valor não-nulo.

III.3. CONFIGURAÇÃO MAGNÉTICA GERADA POR UM LIMITADOR ERGÓDICO

Como já exposto na introdução deste trabalho, a função do Limitador Ergódico é a de criar, na periferia da câmara toroidal, uma região de campo magnético predominantemente estocástico (lembramos, também na introdução, do uso indistinto em boa parte da literatura dos termos "caótico", "ergódico" e "estocástico"). Comentamos, no primeiro capítulo, que um dos mecanismos mais aceitos na atualidade para a geração de estocasticidade global reside na intersecção de ressonâncias com a estrutura de equilíbrio, de modos gerados pela perturbação.

Esta idéia tem sido usada, com sucesso, na descrição de fenômenos de disruptura no interior da coluna de plasma, através do uso de hélices enroladas em volta do vaso toroidal (Fernandes, Heller e Caldas, 1988; Vannucci, Nascimento e Caldas, 1989) ou devido a correntes helicoidais sobre superfícies magnéticas (Fernandes, Heller e Caldas, 1986). Se a helicidade deste enrolamento coincide com a de alguma superfície magnética racional, aparecem ilhas magnéticas correspondentes ao campo helicoidal ressonante aplicado.

Este princípio foi pioneiramente proposto para a geração de campo estocástico na periferia da câmara (Feneberg, 1977; Karger e Lackner, 1977; Engelhardt e Feneberg, 1978; Feneberg e Wolf, 1981), e posteriormente evoluiu para um projeto mais simplificado, que utiliza apenas um ou mais anéis de corrente (ao invés de hélices em volta do torus) relativamente estreitos,

numa porção da câmara toroidal (Belitz et al., 1982) (cf fig. III.4).

Fig. III.4 Anel de Corrente como Limitador Magnético Ergódico

No modelo estudado inicialmente neste capítulo (Martin e Taylor, 1984), há somente um anel de corrente, composto de condutores enrolados de tal forma que, na direção toroidal, as contribuições sejam reforçadas. Nós desprezamos os efeitos de borda causados pelas porções do enrolamento na direção poloidal. Um arranjo proposto na literatura (Yu e DeGrassie, 1986) está na figura III.5.

Suporemos que o anel seja constituído, então, por m pares de condutores na direção toroidal, de comprimento l , pelos quais passa uma corrente I (na verdade, devido ao arranjo da fig. III.5, a corrente de alimentação da bobina é de apenas $I/2$).

O campo magnético perturbativo $B^{(1)}$, gerado por esta configuração de correntes retilíneas (e na ausência de plasma), pode ser obtido como um caso particular do problema de m pares de

condutores helicoidais, conduzindo correntes opostas em fios adjacentes (Morosov e Solovév, 1966; Filonenko et al., 1967; Fernandes e Caldas, 1985), a saber, tomando hélices com um passo infinito. No apêndice A, reproduzimos aspectos do cálculo para condutores helicoidais.

Fig. III.5 Arranjo de condutores no projeto do Limitador Ergódico para o Tokamak TEXT (extraído de Yu e De Grassie, 1986)

Inicialmente supomos que os fios tenham comprimento infinito (ou seja, ignoramos os efeitos de borda causados pela extensão finita l do anel). Neste sentido, a configuração poderia ser melhor descrita como um "divertor magnético" (Wesson, 1987). Na dedução (cf. apêndice A), é mantida a ação do campo toroidal uniforme B_0 z , superposta à do campo gerado pelo limitador/divertor na região interna da câmara. Como $\text{div } B^{(1)} = 0$

e $\text{rot } \mathbf{B}^{(1)} = 0$, devido à ausência de fontes, o campo magnético pode ser obtido a partir de um potencial escalar Φ , através de $\mathbf{B}^{(1)} = \nabla \Phi$.

Fig. III.6 Pares de Condutores Helicoidais sobre o vaso do Tokamak. O sinal indica a polaridade das correntes elétricas. Extraído de (Andrade, 1990)

Da equação (A-16) temos, para um conjunto de m pares de fios enlados sobre um cilindro de raio b (cf. fig. III.6), conduzindo correntes iguais a I (de sentidos opostos em condutores adjacentes), a expressão (todas as equações neste capítulo utilizam o sistema SI para unidades eletromagnéticas):

$$\Phi(r,u) = \frac{2 \mu_0 I k b}{\pi} \sum_{mN=1}^{\infty} K_{mN}'(Nkb) I_{mN}(Nkr) \text{sen}(Nu) \quad (\text{III-31})$$

onde $u = m\theta - kz$. $I_{mN}(x)$ e $K_{mN}(x)$ são funções de Bessel modificadas de primeira e segunda espécie, respectivamente. No somatório, $N = 2p + 1$, onde p é um inteiro positivo.

O passo das hélices condutoras é dado por:

$$L = \frac{2 \pi m}{k} \quad (\text{III-32})$$

tal que o ângulo de passo (viz., o ângulo entre uma tangente à hélice e o eixo z) seja:

$$\gamma = \arctg \left(\frac{k b}{m} \right) \quad (\text{III-33})$$

Para obter uma expressão válida para fios retilíneos, tomamos o limite $L \rightarrow \infty$, ou $\gamma \rightarrow 0$ nas expressões válidas para fios helicoidais. Das expressões acima, isto implica em fazer $k \rightarrow 0$. Podemos usar as seguintes aproximações (Abramowitz e Stegun, 1965) para as funções de Bessel com pequenos argumentos ($x \rightarrow 0$):

$$I_{\mu}(x) \approx \frac{1}{\Gamma(\mu + 1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{\mu} \quad (\text{III-34})$$

$$K_{\mu}(x) \approx \frac{\Gamma(\mu)}{2} \left(\frac{2}{x} \right)^{\mu} \quad (\text{III-35})$$

assim como $u \rightarrow m\theta$.

Fazendo estas aproximações em (III-31), temos:

$$\Phi(r, \theta) \cong - \frac{\mu_0 m I}{\pi} \sum_{Nm=1}^{\infty} \left(\frac{r}{b} \right)^{Nm} \frac{\sin(Nm\theta)}{Nm} \quad (\text{III-36})$$

Sendo $N = 2p + 1$, à medida que Nm aumenta, o termo com $1/Nm$ decresce mais rapidamente do que $(r/b)^{Nm}$ cresce, já que $r \simeq b$. Isso implica que não perdemos muito se tomarmos apenas o primeiro termo desta

somatória, i.e., aquele onde $p = 0$, ou $N = 1$. Ele é:

$$\Phi(r, \theta) = - \frac{\mu_0 I}{\pi} \left(\frac{r}{b} \right)^m \sin(m\theta) \quad (\text{III-37})$$

de tal modo que as componentes do campo gerado pelos fios são:

$$B_r = - \frac{\mu_0 m I}{\pi b} \left(\frac{r}{b} \right)^{m-1} \sin(m\theta) \quad (\text{III-38a})$$

$$B_\theta = - \frac{\mu_0 m I}{\pi b} \left(\frac{r}{b} \right)^{m-1} \cos(m\theta) \quad (\text{III-38b})$$

superpostas ao campo toroidal de equilíbrio, $B_z = B_0$.

A partir destas componentes de $B^{(1)}$ para o conjunto de hélices, podemos encontrar as componentes do potencial vetor correspondente ². Elas são necessárias, conforme (III-20), à obtenção da função de fluxo Ψ_{10} relativa à perturbação do limitador:

$$\Psi_{10} = m A_z + k r A_\theta \quad (\text{III-39})$$

No caso de m condutores helicoidais, temos, de (A-18a,b):

$$A_r(r, u) = - \frac{2 \mu_0 I b k}{r \pi} \sum_{Nm} K_{Nm}'(Nkb) I_{Nm}(Nkr) \cos(Nu) \quad (\text{III-40a})$$

² No gauge de Lorentz, viz. $\text{div } A = 0$.

$$A_{\theta}(r,u) = - \frac{2 \mu_0 I b k}{\pi} \sum_{Nm} K_{Nm}'(Nkb) I_{Nm}'(Nkr) \cos(Nu) \quad (\text{III-40b})$$

$$A_z(r,u) = 0 \quad (\text{III-40c})$$

tais que, em (III-39), fornecem:

$$\Psi_{10}(r,u) = - \frac{2 \mu_0 k^2 b I r}{\pi} \sum_{Nm=1}^{\infty} K_{Nm}'(Nkb) I_{Nm}'(Nkr) \cos(Nu) \quad (\text{III-41})$$

Aplicando o limite $k \rightarrow 0$ (condutores retilíneos), a expressão acima torna-se igual a:

$$\Psi_{10}(r,\theta) = \frac{\mu_0 I m^2}{\pi} \sum_{Nm=1}^{\infty} \left(\frac{r}{b} \right)^{Nm} \frac{\cos(Nm\theta)}{Nm} \quad (\text{III-42})$$

onde $N = (2p + 1)$. Tomando, como no caso do potencial escalar, apenas o modo de ordem mais baixa ($p = 0$), obtemos:

$$\Psi_{10}(r,\theta) = \frac{\mu_0 m I}{\pi} \left(\frac{r}{b} \right)^m \cos(m\theta) \quad (\text{III-43})$$

As equações das linhas de campo, devidas à ação desta configuração, superposta ao campo toroidal de equilíbrio, são dadas por (III-2,38) como:

$$\frac{dr}{dz} = - \frac{\mu_0 m I}{\pi b B_0} \left(\frac{r}{b} \right)^{m-1} \sin(m\theta) \quad (\text{III-44a})$$

$$\frac{d\theta}{dz} = - \frac{\mu_0 m I}{\pi b^2 B_0} \left(\frac{r}{b} \right)^{m-2} \cos(m\theta) \quad (\text{III-44b})$$

A função de fluxo (III-43) também possui um caráter Hamiltoniano, no sentido da seção III.1. As equações acima, para as linhas de campo, podem ser tomadas como equações canônicas em variáveis canônicas convenientes.

No entanto, precisamos levar em conta a extensão finita do limitador, para que seja produzida a desejada estocasticidade na periferia do vaso do Tokamak. Esta necessidade pode ser vista de dois ângulos: primeiramente, nós já frisamos a necessidade de alguma simetria particular no sistema, para que haja superfícies magnéticas. Um anel de largura finita quebra esta simetria, e em consequência altera e destrói as superfícies magnéticas. Além do método exposto neste capítulo, há outros propostos na literatura, como a técnica de superfícies médias (Cary, 1984; Morosov e Solovév, 1966; Camargo e Caldas, 1990).

Em termos Hamiltonianos, a extensão finita do anel incorpora uma dependência explícita em z (que funciona, a grosso modo, como uma variável temporal) na perturbação, o que quebra a integrabilidade do sistema. Isto porque o sistema perturbado passa a ter um grau e meio de liberdade³, para apenas uma constante de movimento, que é a própria função de fluxo total Ψ .

A maneira de tratar a extensão finita do limitador

³ Adotamos a convenção de tratar como grau de liberdade o par de coordenada e momento canonicamente conjugados.

diferencia nosso trabalho do tratamento original dado por Martin e Taylor (1984). Estes integraram de forma aproximada as equações das linhas de campo, num sistema de coordenadas mais simplificado que o nosso, obtendo assim um mapeamento bidimensional. No capítulo IV, voltaremos a este modelo, fazendo uma análise numérica de seu comportamento.

Neste capítulo nós abordaremos o problema do limitador ergódico do ponto de vista de funções de fluxo, na linha de trabalhos anteriores de Caldas e colaboradores, desde 1985 (ver referências). Tratamos a ação do limitador como uma perturbação sobre a função de fluxo do sistema em equilíbrio MHD:

$$\Psi(r, \theta, z) = \Psi_0(r) + \Psi_1(r, \theta, z) \quad (\text{III-45})$$

Se a dimensão l do limitador for consideravelmente menor que o comprimento do cilindro (i.e., $2 \pi R_0$), nós modelaremos a perturbação como uma sequência de pulsos do tipo função delta, como feito no capítulo II. Como o cilindro tem periodicidade $2 \pi R_0$, a perturbação impulsiva é aplicada em $z = 0$, $z = \pm 2 \pi R_0$, $z = \pm 4 \pi R_0$, etc.; já que as linhas de campo podem percorrer o cilindro um número arbitrariamente grande de vezes. Simulamos este comportamento escrevendo:

$$\Psi_1(r, \theta, z) = \Psi_{10}(r, \theta) \dagger \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(z - 2 \pi R_0 j) \quad (\text{III-46})$$

onde $\Psi_{10}(r, \theta)$ é dado por (III-43) (cf. fig. C.1).

No apêndice C deste trabalho, verificamos a

plausibilidade de se considerar uma sequência de perturbações impulsivas, partindo de uma sucessão de pulsos quadrados finitos (o que corresponde mais fielmente à ação do limitador). Expandindo esta sequência em série de Fourier, mostramos que a suposição de $\delta \ll R_0$ suporta a conjectura expressa em (III-46).

Usando a propriedade das funções delta:

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

e a fórmula de soma de Poisson:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(n-m) = 1 + 2 \sum_{q=1}^{+\infty} \cos(2\pi qn) \quad (\text{III-47})$$

podemos reescrever (III-46) como:

$$\Psi_1(r, \theta, z) = \frac{\Psi_{10} \delta}{2 \pi R_0} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n z}{R_0}\right) \right] \quad (\text{III-48})$$

que concorda com (C-5). Inserindo (III-43) em (III-48) temos:

$$\Psi_1(r, \theta, z) = \frac{\mu_0 m I \delta}{2 \pi^2 R_0} \left(\frac{r}{b}\right)^m \cos(m\theta) \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n z}{R_0}\right) \right\} \quad (\text{III-49})$$

Para finalizar esta secção, é oportuno comentar aqui o trabalho do grupo do Tokamak TEXT, da Univ. do Texas (Yu e DeGrassie, 1986) onde foi projetado e construído um limitador ergódico, com resultados que comprovam muitas suposições acerca de

sua eficácia (Ohyabu e DeGrassie, 1987; McCool et al., 1989), comentadas na introdução deste trabalho. O modelo teórico desenvolvido foi enriquecido com duas características importantes: a) correções devidas à toroidicidade da câmara; b) utilização de mais de um anel de corrente, com defasagem poloidal mútua (cf. fig. III.5). No próximo capítulo, ao fazer o mapeamento das linhas de campo, procuramos na medida do possível, contemplar estas possibilidades.

III.4. FORMAÇÃO DE ILHAS MAGNÉTICAS NUMA APROXIMAÇÃO IMPULSIVA

Nesta secção, vamos examinar as consequências, a nível perturbativo, da superposição do campo gerado pelo limitador ergódico (dado por III-38) ao campo magnético de equilíbrio do Tokamak (dado por III-1 e B-3,4a). Em termos de funções de fluxo, isto é expresso por (III-45).

O termo perturbativo em (III-45), dado por (III-49) aparece em termos de uma série de Fourier, cuja forma geral seria a dupla série:

$$\Psi_1 = \sum_{m,n} \psi_{mn} e^{i(m\theta + n\phi)} + \text{c.c.} \quad (\text{III-50})$$

onde $\phi = z / R_0$. ψ_{mn} são as componentes de Fourier, cujos índices m e n representam os números dos modos poloidal e toroidal, respectivamente (cf. III-9a) (White, 1983).

Comparando (III-50) com (III-49), observa-se que em nosso modelo o modo poloidal caracterizado por m é fixo (pois é o número de pares de fios no limitador), ao passo que há uma infinidade de modos toroidais $n = 0, 1, 2, \dots$. Cada conjunto (m, n) é um modo desta expansão de Fourier; ou, na linguagem da Dinâmica Não-linear, uma possível ressonância m/n .

Para caracterizar a presença de ressonâncias em nosso modelo, vamos desenvolver (III-49), com o uso da identidade trigonométrica:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos (\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta)$$

tal que:

$$\Psi_1(r, \theta, z) = \frac{\mu_0 m I \frac{1}{2}}{2 \pi^2 R_0} \left(\frac{r}{b} \right)^m \left\{ \cos(m\theta) + \right. \quad \text{(III-51)}$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos \left(m\theta + \frac{n z}{R_0} \right) + \cos \left(m\theta - \frac{n z}{R_0} \right) \right] \right\}$$

Quando há uma ressonância m/n no sistema, a superfície magnética não-perturbada e o modo de Fourier (m, n) da superfície perturbadora têm a mesma helicidade; de maneira que, na combinação ressonante (cf. III-7, 9a):

$$q = \frac{d\phi}{d\theta} = \frac{m}{n}$$

Nas coordenadas do sistema cilíndrico:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{n}{m} \left(\frac{b}{R_0} \right)$$

e da definição da variável helicoidal:

$$du = \frac{m}{b} dx - \frac{n}{R_0} dz = 0$$

de modo que, numa ressonância m/n , a variável $u = m\theta - nz / R_0$ é constante, ou pelo menos praticamente constante nas proximidades

de uma ressonância. O modo m/n associado à perturbação (III-52) é, então:

$$\langle \Psi \rangle_{1\ m/n}(r,u) = \frac{\mu_0 m I_1}{2 \pi^2 R_0} \left(\frac{r}{b} \right)^m \cos u \quad (\text{III-53})$$

O termo $\cos \left[m\theta + \frac{n z}{R_0} \right]$ oscila muito rapidamente e, em média, anula-se¹; enquanto o termo solteiro $\cos(m\theta)$ não configura uma ressonância.

Para uma ressonância m/n , portanto, temos:

$$\Psi_{m/n}(r,u) = \Psi_0(r) + \langle \Psi \rangle_{1\ m/n}(r,u) \quad (\text{III-54})$$

Observa-se que, desta vez, a ressonância passa a ser caracterizada por apenas duas variáveis conjugadas - r e u - portanto um só grau de liberdade. Como há uma integral do movimento (viz. $\Psi_{m/n} = \text{cte.}$ sobre a ressonância) o sistema descrito por (III-54) é integrável.

Expandindo na vizinhança de uma ressonância, i.e. em torno de $r_{m/n}$:

¹ Uma situação análoga ocorre nos tratamentos perturbativos de sistemas hamiltonianos. As ressonâncias ocorrem quando se faz uma mudança para um referencial girante, e os outros termos ("ângulos rápidos") anulam-se quando se faz a média (*averaging*) (Lichtenberg e Lieberman, 1983).

$$\Psi_{m/n}(r,u) \cong \Psi_0(r_{m/n}) + \Psi_0'(r_{m/n})(r - r_{m/n}) + \quad (\text{III-55})$$

$$+ \frac{1}{2} \Psi_0''(r_{m/n})(r - r_{m/n})^2 + (\Psi_1)_{m/n}(r_{m/n},u)$$

até $o(r - r_{m/n})^2$ para Ψ_0'' e $o(r - r_{m/n})$ para Ψ_1 .

Da definição de função de fluxo para uma superfície magnética racional (III-19) temos que:

$$\Psi_0(r_{m/n}) \equiv k_1 = \text{const.} \quad (\text{III-56})$$

Por outro lado, sobre uma ressonância m/n a função de fluxo (III-54) também é uma constante:

$$\Psi_{m/n}(r_{m/n},u) \equiv k_2 = \text{const.}' \quad (\text{III-57})$$

Sendo

$$K \equiv k_2 - k_1 \quad (\text{III-58})$$

e usando (III-29) temos:

2 Utilizando valores correntes para o TBR-1, é possível estimar uma razão de 10^{-2} entre o termo seguinte e o de segunda ordem na expansão de Ψ , e de 10^{-4} entre o termos seguinte e o de primeira ordem na expansão de Ψ_1 . Por outro lado, o termo $\Psi_1(r_{m/n})$ é da mesma ordem de grandeza do termo em $\Psi_0''(r_{m/n})$; donde justificam-se os truncamentos feitos em (III-54).

$$r - r_{m/n} = \pm \left\{ \frac{2}{\Psi_0''(r_{m/n})} \left[K - (\Psi_1)_{m/n}(r_{m/n}, u) \right] \right\}^{1/2} \quad (\text{III-59})$$

onde $\Psi_0''(r_{m/n})$ é dado por (III-29).

No plano (r, u) a ressonância (III-54) define um conjunto de curvas, semelhantes às trajetórias de fase de um pêndulo simples (cf. fig. III.7). Há curvas de rotação (abertas) e de libração (fechadas), segregadas por uma curva separatriz (Lichtenberg e Lieberman, 1983). Esta curva define as chamadas "ilhas magnéticas" neste plano. Como $\Psi_{m/n}$ tem um caracter Hamiltoniano, os pontos estacionários das trajetórias de fase no plano (r, u) são $\bar{r}$ e $\bar{u}$, dados por (I-7):

$$\left. \frac{\partial \Psi_{m/n}}{\partial r} \right|_{\bar{r}, \bar{u}} = 0 \quad (\text{III-60a})$$

$$\left. \frac{\partial \Psi_{m/n}}{\partial u} \right|_{\bar{r}, \bar{u}} = 0 \quad (\text{III-60b})$$

De (III-60b,53) obtemos que $\bar{u} = 0, \pi$ ³. De (III-60a,53) segue que:

$$\Psi_0'(\bar{r}) + \left. \frac{\partial (\Psi_1)_{m/n}(r, u)}{\partial r} \right|_{\bar{r}, u=0, \pi} = 0$$

³ Não há modos m, n negativos e $0 \leq u \leq 2\pi$

Fig. III.7 Anatomia de uma Ilha Magnética

Se $\bar{r} = r_{m/n}$ então, de (III-29) e dos truncamentos realizados para escrever a expansão (III-55), vem que a relação acima é verificada com razoável aproximação. Resumindo:

$$\bar{r} = r_{m/n} \quad \bar{u} = 0, \pi \quad (\text{III-61})$$

O ponto estacionário com $u = 0$ (ou 2π) é localmente instável (ver tab. I-1), e representa a intersecção de dois ramos da separatriz ⁴. Na literatura de plasmas (Morozov e Solovév, 1966) costuma-se denominá-lo "ponto x", e nos textos de Dinâmica Não-linear de "pontos de sela" ou "hiperbólicos". O ponto com $u = \pi$ é localmente estável (ver tab. I-1), dito "ponto o", "centro" ou "ponto elíptico" - ao redor dele brotam as curvas de libração da ressonância.

Podemos também considerar a formação de ilhas magnéticas

⁴ Oriundos das variedades estável e instável no ponto estacionário.

no espaço de fase (r, θ, z) , se imaginarmos uma secção de Poincaré poloidal em $z = 0$ (ver secção I-1), como na figura III.8 . Neste caso $u = m\theta$. Como $0 \leq u \leq 2\pi$, θ tem período $2\pi/m$. Mas $0 \leq \theta \leq 2\pi$, logo há $m + 1$ pontos hiperbólicos na secção de Poincaré. Isto significa que forma-se m ilhas magnéticas para a ressonância m/n no plano (r, θ) , localizadas em $r = r_{m/n}$ (cf. fig. III.9)

Podemos determinar analiticamente a largura de uma ilha magnética a partir de (III-59). Usando (III-53) e $z = 0$, temos que:

$$(\Psi)_{1 \ m/n}(r_{m/n}, u) = K_{m/n} \cos(m\theta) \quad (\text{III-62})$$

onde fizemos:

$$K_{m/n} \equiv \frac{\mu_0 m I t}{2 \pi^2 R_0} \left[\frac{r_{m/n}}{b} \right]^m \quad (\text{III-63})$$

Fig. III.8 Uma secção de Poincaré poloidal

Substituindo em (III-59) é:

$$r - r_{m/n} = \pm \left\{ \frac{2 [K - K_{m/n} \cos m\theta]}{\Psi_o''(r_{m/n})} \right\}^{1/2} \quad (\text{III-64})$$

Podemos, no plano (r, θ) , distinguir três situações distintas (Fernandes e Caldas, 1985):

1) $K > K_{m/n}$: Neste caso $r - r_{m/n}$ é positivo ou negativo, qualquer que seja u. (III-64) define, portanto, as curvas de rotação (cf. fig. III.7);

2) $K < K_{m/n}$: $r - r_{m/n}$ é real, e é satisfeita a desigualdade:

$$\cos(m\theta) < \frac{K}{K_{m/n}} < 1$$

Este caso define as curvas de libração (cf. fig. III.7);

Fig. III.9 Uma ressonância m/n gera m ilhas magnéticas, localizadas em $r = r_{m/n}$ (reproduzido de Fernandes e Caldas, 1985)

3) $K = K_{m/n}$: Caracteriza a separatriz da ilha magnética.

De (III-64) vem:

$$r - r_{m/n} = \pm \left\{ \frac{2 K (1 - \cos m\theta)}{\Psi_0''(r_{m/n})} \right\}^{1/2} \quad \text{(III-65)}$$

A semi-largura da ilha magnética corresponde ao ponto elíptico, situado em $u = \pi$, i.e. $\theta = \frac{\pi}{m}, \frac{3\pi}{m}, \dots, \frac{(2m-1)\pi}{m}$; e é dada por:

$$\Delta r_{m/n} = \sqrt{\frac{2 \mu_0 m I f}{\pi^2 R_0 \Psi_0''(r_{m/n})} \left(\frac{r_{m/n}}{b} \right)^m} \quad \text{(III-66)}$$

onde usamos (III-63), enquanto Ψ_0'' é dada por (III-29).

III.5. DETERMINAÇÃO DA CONDIÇÃO CRÍTICA DE ESTOCASTICIDADE

A expressão (III-66) permite-nos determinar a semi-largura das ilhas magnéticas geradas pelo limitador ergódico; em particular para o Tokamak TBR-1, cujos parâmetros já foram introduzidos na secção III.2. Consideraremos os seguintes dados adicionais de uma possível implementação no TBR-1 (Viana e Caldas, 1990a) :

Largura do limitador (ℓ) 0.08 m

Corrente no limitador (I) 1000 A

Na tabela III-2 listamos algumas semi-larguras de ilhas magnéticas para ressonâncias com números m , n iguais aos utilizados na tabela III-1, donde foram extraídos os raios das respectivas superfícies ressonantes ($r_{m/n}$).

TABELA III-2: SEMI-LARGURAS DE ALGUMAS ILHAS MAGNÉTICAS PARA O TBR-1 ($\gamma = 4.0$, $q(a) = 5.0$; $\ell = 8$ cm; $I = 1$ kA)

m	n	q	$\Delta r_{m/n}$ (cm)
7	1	7.0	0.80
7	2	3.5	0.12
7	3	2.3	0.06
8	1	8.0	1.03
8	2	4.0	0.13
8	3	2.7	0.06

Na fig. III.10 mostramos a dependência do tamanho das ilhas com a corrente no limitador, sendo todos os outros parâmetros mantidos constantes. Na fig. III.11 esta análise é feita em relação ao valor do fator de segurança na borda do plasma $q(a)$, com a corrente e demais parâmetros fixos. Dois fatos são ilustrados aqui: a largura aumenta com a corrente que é aplicada no limitador, e é inversamente proporcional a $(\Psi_0'')^{1/2}$ (cf. III-66).

O objetivo do limitador ergódico é criar uma região de campo magnético predominantemente estocástico na periferia da câmara (que entendemos como sendo a porção externa da coluna de plasma mais a camada de vácuo até a parede, cf. fig. III.12). O mecanismo de ergodização do campo será a intersecção de ilhas magnéticas provenientes de ressonâncias entre o campo do limitador e o campo de equilíbrio do Tokamak (cf. secção I.4).

Estas ilhas, por sua vez, formam-se em torno de superfícies magnéticas racionais não-perturbadas, como vimos na secção anterior (cf. III-61). Logo, temos de escolher os modos m, n da perturbação tais que o fator de segurança $q = m/n$ relacione-se a uma superfície magnética situada dentro desta região periférica. Observando-se o perfil típico de $q(r)$ para um dado equilíbrio (cf. apêndice B, fig. B-1), estamos interessados em modos ressonantes cujos números m, n satisfaçam:

$$3.0 \leq \frac{m}{n} \leq 7.0 \quad \text{(III-66)}$$

Naturalmente, há uma infinidade de inteiros (m,n) que satisfazem a condição acima. Contudo, o número do modo poloidal m já é determinado, como vimos, pelo número de pares de fios do limitador (que é fixado por construção). O número do modo toroidal

Fig. III.10 Semi-largura da ressonância 8/2 ($q = 4.0$) como função da corrente no limitador para o TBR-1 ($\gamma = 4.0$, $q(a) = 5.0$, $l = 8$ cm e demais dados anteriores)

Fig. III.11 Semi-largura da ressonância 8/2 como função do valor do fator de segurança na borda do plasma ($l = 8$ cm, $I = 1$ kA e demais dados do TBR-1)

n deve variar de 1 a m , já que supomos obedecida a condição de Kruskal-Shafranov (cf. apêndice B) para o fator de segurança.

Uma escolha possível é fixar $m = 8$, de forma que há oito ressonâncias possíveis no interior da câmara (cf. tabela III-1 para a localização das mesmas). Em torno das superfícies racionais calculadas, desenvolvem-se colares de 8 ilhas magnéticas. A argumentação exposta aqui leva-nos a considerar, então, a intersecção das ilhas magnéticas correspondentes às ressonâncias 8/1 e 8/2 como fonte presumida de estocasticidade na periferia da câmara. Este mecanismo não é o melhor critério para a determinação da "fronteira estocástica" para o campo magnético, mas ainda é uma boa estimativa (cf. secção I-4 para uma breve discussão a

respeito). O critério de estocasticidade de Chirikov (Zaslavsky e Chirikov, 1972; Chirikov, 1979) é escrito, em nosso contexto, como a condição de intersecção das ilhas 8/1 e 8/2, a saber:

$$\Delta r_{8/1}(I) + \Delta r_{8/2}(I) \geq |r_{8/1} - r_{8/2}| \quad (\text{III-67})$$

ou seja, a soma das duas semi-larguras deve exceder a distância entre as superfícies racionais, em torno das quais nascem as ilhas magnéticas (cf. fig. III.13).

Se introduzíssemos a correção toroidal neste problema, veríamos o aparecimento de $m \pm 1$ ilhas secundárias (ou satélites) em torno de uma ressonância primária m/n (Finn, 1975; Filonenko et al., 1967). No critério de Chirikov, da maneira pela qual nós o empregamos, não se leva em conta a intersecção destas ilhas secundárias, que seguramente ocorreria antes das ilhas primárias,

Fig. III.12 Região periférica do Tokamak

Fig. III.13 Critério de *overlapping* de Chirikov (esquemáticamente)

facilitando assim a ergodização do campo . Logo, ao estimarmos a corrente crítica I_c para a intersecção das ilhas, dada por:

$$\Delta r_{8/1}(I_c) + \Delta r_{8/2}(I_c) = |r_{8/1} - r_{8/2}| \quad (\text{III-68})$$

obtemos, na verdade, um limite superior (i. e., a ergodização deverá ocorrer para correntes pouco inferiores à nossa previsão).

No caso das ressonâncias escolhidas nesta secção, e demais parâmetros para o TBR-1, estimamos esta corrente como $I_c = 3.5 \times 10^3$ A. Adotando o projeto de construção do limitador

¹ mostrado na figura III-6, a corrente de alimentação do limitador será a metade deste valor, a saber: $I = 1.7 \times 10^3$ A.

As outras estimativas encontradas na literatura (Martin e Taylor, 1984; Yu e DeGrassie, 1986) apontam para uma corrente crítica da ordem de 2 % da corrente de plasma no Tokamak. Nesse caso, para o TBR-1, cuja corrente máxima é de 10 kA, esperaríamos um valor da ordem de 200 A, que é uma ordem de grandeza menor que o nosso resultado. Isto, porém, não invalida nossa estimativa, já que esta é um limite superior para a corrente crítica.

Além disso, em nossos cálculos consideramos apenas um anel, ao passo que nas implementações existentes (como a do TEXT, ver Yu e DeGrassie, 1986) há oito deles, o que certamente deve fazer decrescer a estimativa correspondente. De qualquer forma, dadas as simplificações implícitas no modelo, consideramos nossos resultados bastante satisfatórios. A própria simulação numérica do comportamento das linhas de campo, que será levada a cabo no próximo capítulo, sugere que nossa estimativa teórica não parece ser absurda, pelo menos dentro das premissas adotadas em nosso modelo. Uma análise crítica do procedimento usado, e sugestões para o aperfeiçoamento dos resultados serão abordadas nas Conclusões desta tese.

¹ Uma experiência deste gênero está sendo planejada por A. Vannucci para o TBR-1. Faz parte do projeto conceitual do novo Tokamak do IFUSP, o TBR-2, a instalação de vários limitadores ergódicos, segundo o projeto do TEXT (Nascimento et al., 1990).

CAPITULO IV

MAPEAMENTO DAS LINHAS DE CAMPO MAGNÉTICO

IV.1. INTRODUCAO

No capítulo anterior, abordamos o problema da formação e destruição de ilhas magnéticas (devidas a um limitador ergódico) sob o ponto de vista de uma função de fluxo, invariante sobre as superfícies magnéticas. Neste último segmento do trabalho, voltamos a esta situação, analisando o próprio comportamento das linhas de campo magnético. Isto pode ser feito de maneira mais conveniente através de uma secção de Poincaré (cf. secção I.4) para o fluxo gerado pelas equações das linhas de campo.

Na figura IV.1 mostramos a idéia básica deste mapeamento na ausência de limitadores. Consideramos as intersecções das linhas com um plano de secção situado em $\phi = \text{constante}$ (ou, em geometria cilíndrica, no plano $z = \text{const.}$). Linhas de campo que fluem sobre superfícies racionais, produzem na secção de Poincaré um número finito de pontos ao longo de um círculo (pois a linha fecha-se sobre si mesma após n voltas poloidais e m toroidais, cf. secção III.1).

Caso a superfície seja irracional, as intersecções das linhas com o plano de Poincaré devem preencher densamente uma circunferência. No caso já abordado de estocasticidade, os pontos

Fig. IV.1 Mapeamento de linhas de campo magnético por uma secção de Poincaré

de intersecção acabam espalhando-se por uma região da superfície (cf. figs. IV.2).

Na ausência de limitadores, é possível determinar analiticamente a forma deste mapeamento, graças à integrabilidade do sistema. Já tivemos oportunidade (secção III.1) de comentar a existência de superfícies magnéticas conexas nas geometrias cilíndrica e toroidal, ainda que esta última não tenha sido abordada até agora.

Consideremos o caso cilíndrico (i.e., na aproximação de grande razão de aspecto). As equações das linhas de campo foram dadas em (III-3) como:

$$\frac{dr}{dz} = \frac{B_r}{B_o} \quad (\text{IV-1a})$$

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{B_{\theta}(r)}{r B_0} \quad (\text{IV-1b})$$

Fig. IV.2 Diferentes comportamentos das linhas de campo através da secção de Poincaré

Das hipóteses levadas em conta no capítulo III e no apêndice B, sabemos que o campo de equilíbrio no Tokamak é tal que (cf. B-3,4a) (o caso particular $\gamma = 1$ é comentado em Takamura et al., 1988):

$$B_r = 0 \quad (\text{IV-2a})$$

$$B_{\theta}(r) = \begin{cases} \frac{a B_{\theta}(a)}{r} \left[1 - \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{\gamma+1} \right] & (0 < r < a) \\ \frac{a B_{\theta}(a)}{r} & (a < r < b) \end{cases} \quad (\text{IV-2b})$$

$$B_o = \text{constante} \quad (\text{IV-2c})$$

Tomando o plano de secção em $z = 0$ (cf. fig. IV.3) nós denotaremos por (r_n, θ_n) e (r_n^*, θ_n^*) as coordenadas polares dos pontos de intersecção das soluções de (IV-1). Lembrando que, devido à periodicidade do cilindro, o plano $z = 0$ é equivalente aos planos $z = \pm 2 \pi R_o, \pm 4 \pi R_o, \text{etc.}$, a eq. (IV-1a) fornece, imediatamente:

$$r_n^* = r_n \quad (\text{IV-3})$$

ao passo que a eq. (IV-1b) fica:

$$\int_{\theta_n}^{\theta_n^*} d\theta = \int_0^{2\pi R_o} \frac{B_\theta(r)}{r B_o} dz$$

Como r é constante ao longo da integração (cf. IV-3), escrevemos:

$$\theta_n^* = \theta_n + \frac{2 \pi R_o B_\theta(r_n)}{r_n B_o} \quad (\text{IV-4})$$

Fisicamente, as eqs. (IV-3,4) ilustram o fato de que as superfícies magnéticas são cilindros concêntricos, sobre os quais fluem as linhas de campo sob a ação de sua transformada rotacional ι (já que $\theta_n^* = \theta_n + \iota$, cf. III-9). No caso toroidal ¹, é necessário tecer alguns comentários iniciais. Tanto o campo

¹ Isto é, quando a razão de aspecto não é necessariamente grande.

poloidal B_θ como o toroidal B_ϕ diferem quando se passa à análise numa geometria toroidal. Uma maneira sistemática de levar a cabo

Fig. IV.3 Coordenadas de pontos do mapeamento na geometria cilíndrica

tal estudo é o uso de um sistema de coordenadas apropriado (isto já foi feito com sucesso na análise de problemas envolvendo hélices condutoras, em Kucinski e Caldas, 1987).

A outra é a adição de correções aos campos B_θ e B_ϕ (principalmente este último), em relação a seus valores numa geometria cilíndrica. No apêndice E discutimos brevemente tais correções, sendo que aqui ela será feita apenas sobre o campo toroidal, a saber:

$$B_\phi(r, \theta) = \frac{B_0}{1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta} \quad (\text{IV-5})$$

onde B_0 é o campo uniforme utilizado no modelo cilíndrico. Continuam válidas, pois, apenas as equações (IV-2a,b).

Desta vez o plano de secção está em $\phi = 0$, que equivale

a $\phi = \pm 2\pi, \pm 4\pi$, etc. (cf. fig. IV.4), de modo que a convenção anterior para as coordenadas na secção de Poincaré ainda é a mesma.

Fig. IV.4 Coordenadas de pontos do mapeamento na geometria toroidal

Mesmo com a correção toroidal empregada, nós continuamos supondo que a secção de Poincaré de uma superfície magnética (que neste caso deverá ser um toro) seja circular. Esta suposição pode ser empregada se a pressão sobre a coluna de plasma for pequena (Freidberg, 1982)², tal que o eixo da coluna de plasma ainda coincida, mesmo aproximadamente, com o eixo geométrico da câmara. Em um tratamento mais sofisticado pode-se observar uma deformação da secção circular das superfícies magnéticas (Camargo e Caldas, 1990). Nestas condições, a eq. (IV-1a) deve fornecer:

² Em termos mais técnicos, a razão entre as pressões hidrodinâmica e magnética, a saber: $\beta = p / (B^2 / 2\mu_0)$, é um número pequeno.

$$r_n^* = r_n \quad (IV-6)$$

indicando que as superfícies magnéticas são toros aninhados; assim como, de $dz = R_0 d\phi$, obtém-se o análogo toroidal de (IV-1b):

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{r B_0}{R_0 B_\theta(r) [1 + \epsilon(r) \cos \theta]} \quad (IV-7)$$

onde $\epsilon(r) = r / R_0$ é uma medida local do "grau de toroidicidade" vigente ³. Integrando (IV-7) :

$$\int_{\theta_n}^{\theta_n^*} \frac{d\theta}{1 + \epsilon(r) \cos \theta} = \int_0^{2\pi} \frac{R_0 B_\theta(r)}{B_0} d\phi$$

Usando novamente o fato de que r (assim como ϵ) é constante ao longo da integração, e a fórmula (Abramovitz e Stegun, 1965):

$$\int \frac{d\theta}{1 + \epsilon \cos \theta} = \frac{2}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \arctan \left[\frac{1 - \epsilon}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]$$

encontramos:

³ Em particular, se $r = b$, ϵ é o inverso da razão de aspecto.

$$\theta_n^* = 2 \arctan \left\{ \lambda(r_n) \arctan \left[\frac{\pi R_0 B_\theta(r_n) (1 - \epsilon(r_n))}{B_0 r_n \lambda(r_n)} + \arctan \left[\frac{1}{\lambda(r_n)} \arctan \left(\frac{\theta_n}{2} \right) \right] \right] \right\} + 2\pi \quad (IV-8)$$

onde fizemos:

$$\lambda(r_n) \equiv \frac{1 - \epsilon(r_n)}{\sqrt{1 - \epsilon^2(r_n)}} \quad (IV-9)$$

sendo que, no limite $\epsilon \rightarrow 0$ a expressão (IV-8) reduz-se a (IV-4), que expressa geometria cilíndrica (i.e., sem efeito toroidal).

IV.2. MAPEAMENTO DAS LINHAS DE CAMPO MAGNETICO DEVIDO A AÇÃO DE LIMITADORES ERGÓDICOS

Neste ponto do trabalho nós procuramos fazer uma síntese das hipóteses e métodos apresentados previamente nos capítulos II e III. Do capítulo III, emprestamos a suposição de que a ação do limitador ergódico pode ser modelada por uma sequência impulsiva de perturbações (do tipo função delta). A plausibilidade deste argumento é comentada no apêndice C. Do capítulo II, utilizamos a metodologia lá empregada para determinar mapeamentos aproximados

Fig. IV.5 Escolha das variáveis discretizadas para o mapeamento na presença de limitadores

de um sistema perturbado impulsivamente, desde que suas soluções sejam conhecidas entre os pulsos. Logicamente o sistema abordado no cap. II difere em aspectos importantes do problema do limitador ergódico, já que este último é conservativo; e o outro, dissipativo (dentre outras diferenças).

No entanto, tomamos de lá a idéia de que, para integrar as equações das linhas de campo na vizinhança de um pulso delta, podemos usar um aproximante para calcular analiticamente o salto da solução nesta região (cf. secção II-2). Além disso, entre dois pulsos as linhas de campo percorrem as superfícies magnéticas de maneira tal que suas posições são previsíveis de maneira analítica, como mostramos na secção anterior. Sob este ponto de vista, poderíamos chamar de integrável o comportamento do modelo entre dois pulsos, sendo possível a aplicação da técnica de mapeamento estroboscópico.

Outra vantagem da suposição impulsiva é a de que, sendo

a ação do limitador restrita a um trecho muito pequeno do vaso do Tokamak e a corrente sobre ele ser relativamente baixa, o campo magnético gerado pelo anel não necessita de uma correção toroidal, ao contrário do campo de equilíbrio. Desta forma, usamos as equações deduzidas no capítulo III sem modificações adicionais, mesmo quando lidamos com a correção toroidal para o campo fora da região do anel.

Por simplicidade, e por estar relacionado diretamente ao modelo analítico estudado anteriormente, consideraremos a ação de um anel limitador. Devido ao período $2\pi R_0$ (no modelo cilíndrico) ou 2π (no modelo toroidal), a ação do limitador é representável por uma sequência de pulsos delta, na forma ⁴:

$$B_r^{(1)}(r, \theta, z) = \tilde{B}_r(r, \theta) \dagger \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(z - 2\pi R_0 j) \quad (\text{IV-10a})$$

$$B_\theta^{(1)}(r, \theta, z) = \tilde{B}_\theta(r, \theta) \dagger \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(z - 2\pi R_0 j) \quad (\text{IV-10b})$$

onde o índice superior indica que trata-se do campo produzido pelo anel. $\dagger$ representa a sua largura, ao passo que $\tilde{B}_r$ e $\tilde{B}_\theta$ são dados por (III-38a,b), a saber:

$$\tilde{B}_r(r, \theta) = - \frac{\mu_0 m I}{\pi b} \left(\frac{r}{b} \right)^{m-1} \text{sen}(m\theta) \quad (\text{IV-11a})$$

⁴ Como no capítulo III, consideramos que a ação do campo toroidal B_ϕ superpõe-se à do limitador.

$$\tilde{B}_{\theta}(r,\theta) = - \frac{\mu_o}{\pi} \frac{m I}{b} \left(\frac{r}{b} \right)^{m-1} \cos(m\theta) \quad (\text{IV-11b})$$

Como o campo do anel continua sendo tratado na aproximação cilíndrica, as equações das linhas de campo podem ser obtidas a partir de (III-3), tal que:

$$\frac{dr}{dz} = F(r,\theta) \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(z - 2\pi R_o j) \quad (\text{IV-12a})$$

$$\frac{d\theta}{dz} = G(r,\theta) \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(z - 2\pi R_o j) \quad (\text{IV-12b})$$

onde:

$$F(r,\theta) = \frac{\tilde{B}_r(r,\theta)}{B_o} \quad (\text{IV-13a})$$

$$G(r,\theta) = \frac{\tilde{B}_{\theta}(r,\theta)}{B_o} \quad (\text{IV-13b})$$

Na figura IV.5 esquematizamos a escolha das variáveis discretizadas para o problema (que pode ser comparada com a escolha semelhante ilustrada na fig. II.2). Em se adotando a correção toroidal, o eixo z deve ser reinterpretado como a quantidade $R_o \phi$, onde ϕ é o ângulo toroidal (cf. fig. IV.1). Temos, então:

$$r_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r(z = 2\pi R_0 n + \varepsilon) \quad (\text{IV-14a})$$

$$r_n^* = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r[z = 2\pi R_0 (n+1) - \varepsilon] \quad (\text{IV-14b})$$

$$r_{n+1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r[z = 2\pi R_0 (n+1) + \varepsilon] \quad (\text{IV-14c})$$

assim como expressões similares para θ_n , θ_n^* e θ_{n+1} .

O mapeamento correspondente à região não-perturbada (entre dois pulsos) já foi deduzido na secção anterior nos casos cilíndrico (cf. IV-3,4) e toroidal (cf. IV-6a,8). Resta saber a magnitude do salto das linhas de campo devido ao limitador, o que será feito como no capítulo II.

Integrando (IV-12a) na vizinhança do $(n + 1)$ -ésimo pulso temos que:

$$\int_{2\pi R_0 (n+1) - \varepsilon}^{2\pi R_0 (n+1) + \varepsilon} \frac{dr}{dz} dz = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{2\pi R_0 (n+1) - \varepsilon}^{2\pi R_0 (n+1) + \varepsilon} F(r, \theta) \delta(z - 2\pi R_0 j) dz \quad (\text{IV-15})$$

Para integrar o segundo membro de (IV-15) podemos utilizar qualquer um dos aproximantes descritos na secção II.2. Por simplicidade, escolhemos um aproximante extrapolado (cf. II-26), obtendo:

$$r[z = 2\pi R_0 (n+1) + \varepsilon] - r[z = 2\pi R_0 (n+1) - \varepsilon] \cong$$

$$\cong \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathbb{F} [r(z = 2\pi R_0(n+1) - \varepsilon); \theta(z = 2\pi R_0(n+1) - \varepsilon)] \delta_{j,n+1}$$

Usando as definições (IV-14b,c) segue que, no limite $\varepsilon \rightarrow 0$, temos:

$$r_{n+1} = r_n^* + \mathbb{F}(r_n^*, \theta_n^*) \quad (\text{IV-16})$$

onde r_n^* e θ_n^* são dados por (IV-3,4 ou IV-6a,8) em função de r_n e θ_n .

Procedendo de maneira análoga para (IV-12b) obtemos:

$$\theta_{n+1} = \theta_n^* + \mathbb{G}(r_n^*, \theta_n^*) \quad (\text{IV-17})$$

A tabela IV.1 resume o mapeamento das linhas de campo a ser usado nesta secção:

TABELA IV.1 : MAPEAMENTO AS LINHAS DE CAMPO MAGNÉTICO

		$r_n^* = r_n$
Campo do	Modelo Cilíndrico	$\theta_n^* = \theta_n + \frac{B_\theta(r_n) 2 \pi R_0}{r_n B_0}$
Tokamak	Correção Toroidal	$\theta_n^* = 2 \arctg \left[\lambda \operatorname{tg} \left(\Omega(r_n) + \arctg \Xi(r_n, \theta_n) \right) \right] + 2\pi$
Campo do Limitador		$r_{n+1} = r_n^* - \frac{\mu_0 m I \ell}{B_0 \pi b} \left(\frac{r_n^*}{b} \right)^{m-1} \operatorname{sen}(m\theta_n^*)$
		$\theta_{n+1} = \theta_n^* - \frac{\mu_0 m I \ell}{B_0 \pi} \left(\frac{r_n^*}{b} \right)^{m-2} \cos(m\theta_n^*)$

$$\Omega(r_n) \equiv \frac{\pi R_0 B_\theta(r_n) (1 - \epsilon(r_n))}{B_0 r_n \lambda(r_n)}$$

$$\Xi(r_n, \theta_n) \equiv \frac{1}{\lambda(r_n)} \operatorname{tg} \left(\frac{\theta_n}{2} \right)$$

$$\lambda(r_n) \equiv \frac{1 - \epsilon(r_n)}{[1 - \epsilon^2(r_n)]^{1/2}}$$

$$\epsilon(r_n) \equiv \frac{r}{R_0}$$

Na simulação numérica destes mapeamentos, utilizaremos um sistema de coordenadas retangulares, onde definimos as seguintes variáveis:

$$x = b \theta \quad (\text{IV-18a})$$

Tokamak, e a distância radial em relação a essa parede,

Fig. IV.6 Mapeamento sem correção toroidal com $I = 0$. Dados correntes do TBR-1, num equilíbrio com $q(a) = 5.0$ ($\gamma = 4.0$). Limitador com $l = 0.08 \text{ m}$ e $m = 8$

Fig. IV.7 Mapeamento sem correção toroidal com $I = 90 \text{ A}$. Os demais parâmetros são os mesmos da fig. IV.6

Fig. IV.8 Idem para $I = 200 \text{ A}$

Fig. IV.9 Idem para $I = 500 \text{ A}$

Fig. IV.10 Idem para $I = 1500 \text{ A}$

Fig. IV.11 Ampliação da região, extraída da fig.

IV.10, intermediária entre as ilhas 8/2 e 8/3

Fig. IV.12 Dados idênticos aos da fig. IV.6,
com $I = 3500 \text{ A}$

Fig. IV.13 Mapeamento com correção toroidal, com $I = 0$. Os demais parâmetros são os mesmos da fig. IV.6

Fig. IV.14 Idem para $I = 90 \text{ A}$

Fig. IV.15 Idem para $I = 200 \text{ A}$

Fig. IV.16 Idem para $I = 500 \text{ A}$

Fig. IV.17 Idem para $I = 1500 \text{ A}$

$$y = b - r \quad (\text{IV-18a})$$

que representam a distância poloidal medida ao longo da parede do Tokamak, e a distância radial em relação a essa parede, respectivamente.

Na fig. IV.6 fazemos a simulação do mapeamento, sem correção toroidal, na ausência de perturbação ($I = 0$). Como esperado, os pontos do mapeamento distribuem-se sobre círculos concêntricos (que devido às coordenadas adotadas aparecem como linhas retas) que representam as superfícies magnéticas do sistema não-perturbado. Os dados são tomados dos já citados no cap. III para o TBR-1 ($R_0 = 0,30$ m; $a = 0,08$ m; $b = 0,11$ m; $B_0 = 0,32$ T; $\gamma = 4,00$; $B_\theta(a) = 0,02$ T; $l = 0,08$ m) com um arranjo de $m = 8$ pares de fios.

A figura seguinte (IV.7) revela uma característica importante do mapeamento, que confirma por sua vez um resultado obtido analiticamente no capítulo anterior. Na presença de $m=8$ pares de fios, formam-se cadeias de $m=8$ ilhas magnéticas para uma corrente não-nula no limitador. No caso de (IV.7) foi usada uma corrente bastante reduzida (em comparação à corrente de plasma, é

claro), de maneira a tornar nitida a sua formação bem próximo à parede do Tokamak. De fato, nossa previsão analítica (cf. tab. III-1) fornece o valor $r = 0,101$ m (ou $y = 0,009$ m) para a localização da superfície ressonante $m=8/n=1$; o que leva-nos a crer que o colar visto na fig. IV.7 corresponde à ressonância $8/1$, dentro dos limites de validade da teoria do capítulo anterior. As demais ressonâncias previstas na teoria (com $m = 8$ e $n \geq 2$) seriam extremamente difíceis de visualizar, por terem larguras muito menores ¹.

Em (IV.8) observamos, para uma corrente $I = 200$ A, um fato curioso - a cadeia de ilhas que identificamos como $8/1$ começa a se desintegrar, dando origem em seu lugar a uma região estocástica que irá persistir daqui para a frente. No entanto, é pouco provável que isto seja devido diretamente ao critério de *overlapping* de Chirikov (cf. secções I.4 e III.5) já que a ressonância mais próxima (viz. a $8/2$) ainda tem largura muito baixa (para este valor de I), tanto que nem aparece nesta figura. Uma possível (não confirmada) fonte de estocasticidade nesta situação atípica seria a existência de superfícies magnéticas "perfuradas", ou cantori, dos quais falaremos com mais detalhes mais adiante neste capítulo. Neste modelo, as linhas de campo poderiam eventualmente "escapar" das superfícies pelas quais trafegam através destas "perfurações" e assumir uma trajetória errática. De qualquer forma, isto vem a ser uma questão mais

¹ Lembrando que a semi-largura de uma ilha cresce com $\sqrt{I}$, (cf. eq. III-66)

teórica do que prática, já que não é esta região estocástica restrita às vizinhanças da parede que nos interessa do ponto de vista do limitador, e sim aquela que abrange também a periferia da coluna de plasma ($r \leq a$ ou $y \geq 0.03$ nas figuras).

Para uma corrente maior ($I = 500$ A, cf. fig. IV.9) observamos o aparecimento de um novo colar de ilhas, já na região que deve ser ergodizada pelo limitador. Comparando com nossa previsão teórica (cf. tab. III-1), e dentro dos parâmetros utilizados na simulação, reconhecemos estas ilhas como sendo relativas à ressonância $8/2$.

Numa corrente bem mais alta ($I = 1500$ A, abaixo porém, do limiar teórico para a estocasticidade), além da cadeia de ilhas $8/2$ podemos entrever já a próxima ressonância ($8/3$, cf. fig. IV.10); como revelado pela ampliação (cf. fig. IV.11) da região próxima a $8/2$. É aí que desejamos estabelecer os limiares de estocasticidade. Com efeito, para uma corrente próxima ao valor crítico da secção III.5 ($I = 3500$ A, cf. fig. IV.12) observa-se além do crescimento de $8/3$, a quase completa destruição da cadeia $8/2$ e uma ergodização satisfatória da região periférica da coluna de plasma, de acordo com as considerações do capítulo III.

Com exceção da destruição "precoce" da cadeia $8/1$, parece ser possível creditar ao mecanismo de Chirikov o aparecimento da estocasticidade neste mapeamento, sendo a intersecção de $8/2$ e $8/3$ o processo básico da ação do limitador. Naturalmente, nas nossas simulações não se observa a aproximação completa das ilhas magnéticas exigida pelo critério de Chirikov (cf. eq. III-67); mas isto nem é realmente necessário do ponto de

vista teórico, já que este critério sobre-estima o aparecimento da estocasticidade global (que seguramente ocorre antes, pela interpenetração das regiões estocásticas locais associadas às separatrizes).

A sequência de figuras que vem a seguir reproduz os dados da sequência anterior, a não ser pela introdução da correção toroidal no mapeamento, de acordo com a prescrição (IV-5). Entretanto, as diferenças são muitas, e não totalmente compreendidas no âmbito do trabalho feito até aqui. Na secção III.5 já citamos o fato de que a correção toroidal induz a formação de $m \pm 1$ ilhas satélites em torno das ilhas principais correspondentes às ressonâncias m/n . Há resultados na literatura (ver Fernandes, Heller e Caldas, 1988) que indicam uma semi-largura proporcional à $I^{1/4}$ para estas ilhas satélites geradas pelo efeito toroidal, desde que estas sejam pequenas. O grande problema é que o limitador cria um labirinto de ilhas mesmo na aproximação cilíndrica, e que só vem a se complicar com a adição das ilhas satélites. Isto naturalmente predispõe as ilhas a contactos mais frequentes de suas regiões localmente estocásticas, o que deve diminuir sensivelmente a necessidade de correntes altas no limitador. O lado negativo disto, entretanto, é a existência de regiões estocásticas em vários locais, de modo que torna-se difícil separar convenientemente a análise, como procuramos fazer até agora.

Na fig. IV.13 mostramos a configuração de superfícies para corrente externa nula, sem novidades adicionais. No entanto, a fig. IV.14 (obtida para $I=90$ A) é surpreendente - pode-se

identificar nela uma cadeia 8/1 exatamente como no caso anterior, porém há igualmente cadeias de 7, 6, 5 e 9 ilhas em sequência ! Podemos supor que a cadeia de 7 ilhas seja satélite à ressonância $m=8/n=1$, que a cadeia de 6 seja satélite à de 7, e assim por diante, porém o fato insólito é que as larguras destas supostas ilhas satélites é comparável às das principais. Vimos no parágrafo anterior que, se as ilhas satélites forem pequenas, sua largura aumenta com $I^{1/4}$, logo teriam de ser menores que as respectivas ilhas principais. No entanto, se as ilhas satélites não forem necessariamente pequenas, esta lei de escala falha, e fatos como o observado na fig. IV.14 não se constituiriam numa violação da teoria existente.

As figs. IV.15,16 e 17, obtidas para $I = 200$ A, 500 A e 1500 A respectivamente, mostram todas a consequência inevitável da miríade de ilhas da fig. IV.14 - uma grande região estocástica proveniente das inúmeras interpenetrações que devem ter ocorrido. Como, no entanto, esta região está dentro da área de operação fixada anteriormente para o limitador, isto é muito bom. Mostra, inclusive, que com uma corrente da ordem de 1,5 kA (aproximadamente a metade do valor estimado sem correção toroidal) já se consegue ergodizar um pouco da coluna de plasma, tornando experimentalmente mais fácil operar um limitador nestas condições.

IV.3. O MODELO DE MARTIN E TAYLOR

Martin e Taylor (daqui para frente nós os denominaremos de M. e T., por simplicidade), em 1984, propuseram um modelo teórico para a ação de um limitador ergódico fazendo essencialmente as duas suposições que estão no capítulo III e parte deste:

- a) geometria cilíndrica;
- b) existência de apenas um anel.

O sistema de coordenadas usado por M. e T. foi o descrito nas eqs. (IV-18a,b), com a diferença essencial de que no trabalho original todos os cálculos foram feitos neste sistema de coordenadas, ao passo que nós o utilizamos apenas na representação gráfica dos mapeamentos anteriormente obtidos.

O uso direto destas coordenadas retangulares tem uma consequência importante: somente a região periférica (próxima à parede) do Tokamak será descrita de maneira satisfatória (a fig. IV.18 descreve os processos que levam a este sistema de coordenadas, a partir da geometria toroidal). Entretanto, isto não é de todo ruim, já que a ação do limitador é mais efetiva justamente nesta região.

De qualquer forma, o uso de coordenadas "reais" r e θ que fizemos ao longo deste trabalho representa uma vantagem

efetiva em relação ao sistema retangular (x e y ¹). Esta, porém, não é a única diferença entre nosso trabalho e o modelo de M. e T., que passaremos a descrever: em seu artigo, M. e T. integraram as equações das linhas de campo de maneira diversa do nosso método, ainda que em ambos os casos o objetivo final tenha sido o de obter um mapeamento.

Em primeiro lugar, na região externa ao limitador (entre os anéis), o mapeamento foi obtido a partir de uma expansão do fator de segurança em torno da parede do Tokamak. Além disso, não foi considerada qualquer correção devida à toroidicidade da câmara ².

Utilizando as equações das linhas de campo no sistema retangular, viz.

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_o} \quad \text{(IV-19)}$$

onde $B_o = \text{const.}$ é o campo toroidal; segue que da ausência de campo radial ($B_y = 0$) de equilíbrio, as superfícies magnéticas serão planos (de fato, cilindros neste novo sistema de

¹ Relacionado àquele pelas fórmulas:

$$x = b \theta ; y = b - r$$

² No que segue, procuraremos adaptar a notação original de M. e T. à empregada nas secções anteriores, para que se possa comparar posteriormente os resultados.

coordenadas), i.e. ³:

$$y_n^* = y_n \quad (\text{IV-20})$$

Além disso, adaptando a definição de transformada rotacional à coordenada x obtém-se:

$$x_n^* = x_n + b \, \iota(r) \quad (\text{IV-21})$$

Usando (III-9):

$$x_n^* = x_n + \frac{2 \pi b}{q(r)} \quad (\text{IV-22})$$

O fator de segurança é expandido em torno de seu valor na parede do Tokamak:

$$q(r) = q(b) - \left. \frac{dq}{dr} \right|_{r=b} y + o(y^2)$$

tal que:

$$x_n^* = x_n + \alpha + \beta y_n \quad (\text{IV-23})$$

onde:

$$\alpha \equiv \frac{2 \pi b}{q(b)} \quad (\text{IV-24})$$

³ Onde o mapeamento é definido em termos de secções de Poincaré em $z = 0, \pm 2\pi R_0$, etc...

$$\beta \equiv \alpha \frac{q'(b)}{q(b)}^4 \quad (\text{IV-25})$$

Adotando um equilíbrio MHD como o descrito no apêndice B, podemos utilizar a lei de escala (cf. eq. B-9):

$$q(r) = q(b) \left(\frac{r}{b} \right)^2 \quad (\text{IV-26})$$

quando $a < r < b$, i.e., na periferia da câmara. Portanto, temos:

$$\beta = \frac{4 \pi}{q(b)} \quad (\text{IV-27})$$

Na região do limitador, o campo magnético foi obtido a partir de uma grade de fios retilíneos infinitos no plano xz (cf. fig. IV.19). No capítulo III e no apêndice A, nós delineamos o cálculo a partir de uma grade de fios, só que dispostos ao longo das paredes de uma superfície cilíndrica. É possível, também, obter o campo magnético gerado pela primeira configuração através da solução do problema de valor de contorno posto pela equação de Laplace (Viana e Caldas, 1990c); todavia este resultado também pode ser determinado com base em nosso resultado mais geral em coordenadas cilíndricas (cf. eqs. III-38a,b). No sistema de coordenadas retangulares nossas expressões têm a forma ($e_y = -e_r$):

⁴No artigo de M. e T., esta quantidade é designada pela letra s , por representar o cisalhamento (*shear*) magnético das linhas de campo.

$$B_x = - \frac{\mu_o m I}{\pi b} \left(\frac{b-y}{b} \right)^{m-1} \cos \left(\frac{m x}{b} \right) \quad (\text{IV-28a})$$

$$B_y = \frac{\mu_o m I}{\pi b} \left(\frac{b-y}{b} \right)^{m-1} \text{sen} \left(\frac{m x}{b} \right) \quad (\text{IV-28b})$$

Como:

$$\left(\frac{r}{b} \right)^{m-1} = \exp \left[(m-1) \ln \left(1 - \frac{y}{b} \right) \right]$$

se y é pequeno ⁵, podemos expandir o logaritmo segundo a série conhecida:

$$\ln \left(1 - \frac{y}{b} \right) \cong - \frac{y}{b} + o \left(\frac{y}{b} \right)^2$$

onde $\frac{y}{b} \ll 1$. Outra aproximação que se faz necessária é a de que $m \gg 1$, de modo que $m-1 \cong m$ (a necessidade desta condição já tinha sido apontada anteriormente por Elizondo, 1990); tal que substituindo as expressões acima em (IV-28a,b) tem-se:

$$B_x = - \frac{\mu_o m I}{\pi b} \exp \left(- \frac{m y}{b} \right) \cos \left(\frac{m x}{b} \right) \quad (\text{IV-29a})$$

$$B_y = \frac{\mu_o m I}{\pi b} \exp \left(- \frac{m y}{b} \right) \text{sen} \left(\frac{m x}{b} \right) \quad (\text{IV-29b})$$

que, juntamente com $B_z = B_o = \text{const.}$, é o resultado de M. e T.

⁵ Correspondendo à região periférica do limitador

(Martin e Taylor, 1984)⁶.

As equações das linhas de campo na região do limitador (desprezando-se efeitos de borda) são dadas por (IV-19,29a,b), fornecendo:

$$\frac{dx}{dz} = - \frac{\mu_0 m I}{\pi b B_0} \exp\left[-m \frac{y}{b}\right] \cos\left[\frac{m x}{b}\right] \quad (\text{IV-30a})$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\mu_0 m I}{\pi b B_0} \exp\left[-m \frac{y}{b}\right] \sin\left[\frac{m x}{b}\right] \quad (\text{IV-30b})$$

M. e T. integraram as equações acima de forma apenas aproximada, supondo que a ação do limitador se restringe a uma distância l finita, porém pequena em relação às dimensões do Tokamak (ao contrário de nossa derivação, que foi feita sob a hipótese de uma perturbação impulsiva).

O mapeamento por eles obtido, a partir da integração das equações das linhas de campo, é:

$$x_{n+1} = x_n^* - \frac{m \mu_0 m I l}{\pi b B_0} e^{-y_n^*/b} \cos\left[\frac{m y_n^*}{b}\right] \quad (\text{IV-31a})$$

$$y_{n+1} = y_n^* + \frac{b}{m} \ln\left\{ \frac{\cos(m x_{n+1}/b)}{\cos(m x_n^*/b)} \right\} \quad (\text{IV-31b})$$

sendo que o mapeamento total deve também incluir as equações (IV-20,23). Conservamos, aqui, a notação empregada nas secções anteriores deste capítulo.

⁶No artigo original de M. e T., foram utilizadas unidades Gaussianas do sistema Eletromagnético (e.m.u.)

A propósito, pode ser ilustrativa uma síntese das diferenças entre o nosso modelo e o de M. e T., como apresentado na tabela abaixo:

TABELA IV-2 : COMPARAÇÃO ENTRE O NOSSO MODELO E O DE MARTIN-TAYLOR

MARTIN - TAYLOR	ESTE TRABALHO
Limitador tem largura finita	Ação do limitador é modelada por funções delta
Trajetórias das linhas de campo fora do limitador são obtidas aproximadamente na periferia da câmara.	Campo de equilíbrio do Tokamak é modelado realisticamente. As linhas de campo podem ser obtidas em qualquer região da câmara.
Campo do limitador é determinado numa geometria retangular (aproximada)	Campo do limitador é calculado em coordenadas cilíndricas.
Resultados consistentes para m pequeno e $a < r < b$	Resultados consistentes para quaisquer m e r ($0 < r < b$)
Correção Toroidal não incluída no modelo	Correção Toroidal incluída no modelo

Embora seja igualmente útil na descrição do limitador ergódico, o modelo de M. e T. incorpora certas simplificações (como mostrado na tabela acima) que dispensamos em nosso tratamento. Desta forma, não é ilustrativa a comparação dos nossos resultados com os de M. e T., já que hipóteses e parâmetros destes últimos são radicalmente diferentes dos nossos (por exemplo, em Martin e Taylor, 1984, é dado um exemplo numérico onde $m = 20$!).

Por outro lado, o modelo de M. e T. tem para nós um

grande interesse de *per si*. O mapeamento da secção anterior é bem mais complexo do que o de M. e T., já que certos parâmetros, como

Fig. IV.18 Deformações na geometria toroidal necessárias à obtenção da geometria retangular Reproduzido de Bateman (1978)

Fig. IV.19 Grade de fios retilíneos na geometria retangular

o valor do campo poloidal B_θ , necessitam de um modelo prévio para serem determinados. Qualquer análise mais profunda, utilizando os conceitos apresentados no capítulo I torna-se extremamente

complicada e pouco ilustrativa, devido à complexidade do mapa. O modelo de M. e T., porém, é mais simples e pode ser manipulado analiticamente com uma certa facilidade. Como ele pode ser obtido a partir do nosso, feitas certas simplificações, acreditamos que muitos resultados verificados para o mapa de M. e T. possam também estender-se para o nosso mapeamento. Isto posto, passamos a apresentar algumas propriedades importantes do mapeamento de M. e T.. Em primeiro lugar, é conveniente o uso das variáveis reduzidas:

$$X = \frac{m x}{b} \quad (\text{IV-32a})$$

$$Y = \frac{m}{b} \left[y + \frac{\alpha}{\beta} \right] \quad (\text{IV-32b})$$

em termos dos quais o mapeamento de M. e T., dado por (IV-20,23,31a,b) é reescrito como ⁷:

$$X_{n+1} = X_n + \beta Y_n - P \exp(-Y_n) \cos(X_n) + \beta \ln \left\{ \frac{\cos(X_n - P e^{-Y_n} \cos X_n)}{\cos X_n} \right\}$$

$$Y_{n+1} = Y_n + \ln \left\{ \frac{\cos(X_n - P e^{-Y_n} \cos X_n)}{\cos X_n} \right\} \quad (\text{IV-33a,b})$$

onde:

$$P = \frac{m^2 \mu_0 I t}{b^2 \pi B_0} \quad (\text{IV-34})$$

Este mapeamento tem a propriedade notável de ser invariante sob as transformações (Martin e Taylor, 1984):

⁷ Neste caso, $0 \leq X \leq 2\pi$

$$Y \rightarrow Y' = Y + \frac{2 n \pi}{\beta} \quad (\text{IV-35a})$$

$$P \rightarrow P' = P \exp \left(\frac{2 n \pi}{\beta} \right) \quad (\text{IV-35b})$$

onde $n = 1, 2, 3, \dots$. Estas invariâncias permitem a determinação dos pontos estacionários (cf. I-9) do mapeamento para valores pequenos de P , a saber:

$$\bar{X}_{m/n} \cong \begin{cases} \pi + P e^{-2n\pi/\beta} & (\text{IV-36a}) \\ 0 + P e^{-2n\pi/\beta} & (\text{IV-36b}) \end{cases}$$

$$\bar{Y}_{m/n} \cong \frac{2 n \pi}{\beta} + \frac{P}{\beta} e^{-2n\pi/\beta} \quad (\text{IV-37})$$

A análise da estabilidade local destes pontos (que não é feita no artigo de M. e T.) é desenvolvida no apêndice D deste trabalho, com o uso da técnica do resíduo de Greene, exposta na secção I.4. Mostramos que $(\bar{X}_n \cong \pi, \bar{Y}_n)$ e $(\bar{X}_n \cong 0, \bar{Y}_n)$ são pontos elíptico e hiperbólico, respectivamente. Deste último emanam, conforme as secções I.4 e III.4, os ramos da separatriz que define uma ilha magnética no plano de Poincaré.

Um aspecto extremamente importante do modelo de M. e T., e que tem a haver com os resultados do capítulo III, está associado às relações de invariância (IV-35a,b). Elas indicam que há um número arbitrariamente grande de pontos fixos, portanto de ilhas magnéticas. Isto concorda com a evidência, obtida via

perturbação impulsiva, de que há um número também arbitrariamente grande de ressonâncias m/n , ligadas à variação do número do modo toroidal n . Logo, a identificação do n que aparece em (IV-35) com o número do modo toroidal n não é apenas economia de notação.

Para pequenos valores de P , o mapeamento de M . e T . tem um limite assintótico importante, que é o conhecido mapa *standard* de Chirikov-Taylor (cf. secção I.4). Expandindo (IV-33a,b) em série de potências de P , em torno de $Y = \bar{Y}$, e retendo apenas os termos que se anulam quando a perturbação é removida, isto é, aqueles onde:

$$\lim_{P \rightarrow 0} o(P^n) = 0$$

para $n \geq 1$, obtém-se:

$$X_{n+1} = X_n + \beta (Y_n + P e^{-\bar{Y}} \text{sen } X_n)$$

$$\beta Y_{n+1} = \beta (Y_n + P e^{-\bar{Y}} \text{sen } X_n)$$

Fazendo:

$$\lambda = \beta P e^{-\bar{Y}} \tag{IV-38a}$$

$$\theta_n = X_n \tag{IV-38b}$$

$$\phi_n = -\beta Y_n \tag{IV-38c}$$

e extraíndo o inverso do mapeamento, obtemos:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \phi_n \quad (\text{IV-39a})$$

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \lambda \operatorname{sen} \theta_{n+1} \quad (\text{IV-39b})$$

que é o mapeamento padrão de Taylor-Chirikov (cf. I-34a,b onde $\theta \rightarrow x, \phi \rightarrow y$).

IV.4. REGIMES DINÂMICOS NO MODELO DE MARTIN E TAYLOR

Nesta secção iremos analisar, com mais detalhes, alguns aspectos da riquíssima dinâmica gerada pelo mapeamento de Martin-Taylor (que devem certamente estar presentes também nos mapeamentos da secção IV.2), que podemos reescrever como:

$$X_{n+1} = \mathcal{F}(X_n, Y_n) + \beta \mathcal{G}(X_n, Y_n) \quad (\text{IV-40a})$$

$$Y_{n+1} = \mathcal{G}(X_n, Y_n) \quad (\text{IV-40b})$$

onde:

$$\mathcal{F}(X, Y) = X - P e^{-Y} \cos X \quad (\text{IV-41})$$

$$\mathcal{G}(X, Y) = Y + \ln \left[\frac{\cos \mathcal{F}(X, Y)}{\cos X} \right] \quad (\text{IV-42})$$

e P , β são dados por (IV-34,27), respectivamente.

Fixando valores para P e β podemos analisar as órbitas individualmente, seguindo os valores (X_n, Y_n) e computando os desvios "radial":

$$\Delta Y_n = Y_n - Y_0 \quad (\text{IV-43})$$

e "poloidal":

$$\Delta X_n = X_n - X_0 \quad (\text{IV-44})$$

O que deve-se esperar destes perfis? Se uma órbita é

Fig. IV.19 bis - Retrato de fase do mapeamento de M. e T., para $p = 0.25$, $\beta = 6.28$

pinçada de uma região onde existem superfícies magnéticas perfeitas (cf. fig. IV.19 bis), os desvios devem ter um comportamento constante ou oscilatório (cf. fig. IV.20. Escolhemos como exemplo o desvio radial por ser fisicamente mais importante, já que está vinculado à taxa de difusão radial de linhas de campo; porém o desvio poloidal não apresentará essencialmente uma grande alteração em relação ao radial). Caso contrário (numa região propriamente estocástica ou nas vizinhanças das separatrizes, cf. secção I.4) a oscilação dos desvios deve ser irregular, como realmente mostrado na figura IV.21. A literatura em dinâmica não-linear lista algumas técnicas bem conhecidas de caracterização de comportamento periódico/caótico para sistemas dinâmicos (o texto de Schuster, 1984 é uma ótima compilação).

Neste trabalho, adotamos a técnica do espectro de potência para a caracterização de regimes dinâmicos que supomos presentes no mapeamento de M. e T., como revelado pelos retratos de fase. Considerando, por exemplo, a série temporal $x(t)$ (t é uma variável contínua). A sua transformada de Fourier será:

$$\tilde{x}(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T dt e^{ikt} x(t) \quad (IV-45)$$

Para distinguir o chamado movimento multiplamente periódico (que pode também parecer complicado) do regime caótico, é interessante determinar o espectro de potência do sinal:

$$P(k) = \tilde{x}^*(k) \tilde{x}(k) = |\tilde{x}(k)|^2 \quad (\text{IV-46})$$

No caso de movimento multiplamente periódico, o espectro de potência consiste numa série de linhas discretas; ao passo que na presença de estocasticidade as bandas do espectro se alargam formando um *continuum*, frequentemente deslocado para baixas frequências (o chamado "ruído $1/f$ ").

Os perfis gerados por um mapeamento, no entanto, formam uma série "temporal" discreta $x(n)$, onde $n \in \mathbb{Z}$. Para determinar o espectro de potência deste sinal, utilizamos um algoritmo eficiente de transformada rápida de Fourier (FFT - Radix 2, cf. Moler, Little e Bangert, 1987), que é calculada pela fórmula:

$$\tilde{x}(k+1) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n+1) W_N^{kn} \quad (\text{IV-47})$$

onde N é o comprimento do vetor $x(n)$, e:

$$W_N = \exp \left[-i \frac{2\pi}{N} \right] \quad (\text{IV-48})$$

Os pontos da série num mapeamento são amostrados com um período unitário, donde a frequência de amostragem é $f_s = 1$.

Os espectros mostrados nas figuras IV.22 e IV.23, correspondentes aos sinais das figuras IV.20 e IV.21, mostram claramente que no primeiro caso há uma frequência predominante, ao passo que no segundo o espectro é alargado, sugerindo fortemente a existência de comportamento caótico na região de onde foi pinçada

a órbita.

Outra medida útil é o desvio quadrático médio na direção radial. Tomando um valor de Y constante, escolhemos um número N de condições iniciais igualmente espaçadas entre 0 e 2π na direção poloidal (X). Para cada condição inicial i ($1 \leq i \leq N$) computamos os desvios radiais $Y_n(i) - Y_0(i)$, e tomamos a média segundo:

Desvio radial = $p=0.25, s=6.28, x_0=3.00, y_0=1.05$

$\Delta Y_n(w)$

Fig. IV.20 Desvio Radial de uma órbita do Mapa de M. e T., com $P = 0.25$ e $\beta = 6.28$, a partir da condição inicial $X_0 = 3.00$, $Y_0 = 1.05$

W

Fig. IV.21 Desvio Radial de uma órbita do mapa de M. e T. ($P=0.25; \beta=6.28$), a partir da condição inicial $X_0 = 3.00; Y_0 = 0.20$

Fig. IV.22 Espectro de Potência relativo à
Fig. IV.20

Fig. IV.23 Espectro de Potência relativo à
Fig. IV.21

$$\langle \Delta Y_n^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [Y_n(i) - Y_0(i)]^2 \quad (IV-49)$$

Nas figuras IV.24 e IV.25 mostramos dois casos típicos, retirados de regiões onde presumivelmente há e não há estocasticidade. Os seus espectros de potência (cf. figs. IV.26 e IV.27) confirmam esta suposição. Um caso que nos chamou a atenção foi o da figura IV.25, obtida a partir de uma órbita estocástica, onde observa-se uma brusca transição entre dois platôs de oscilação.

Este tipo de transição já foi observado no mapeamento padrão (cf. secção I.4, as referências são Ichikawa et al., 1984; Ichikawa et al., 1989), e associado com os chamados "modos aceleradores" do mapeamento ¹. No entanto, sabe-se (Lichtenberg e Lieberman, 1983) que tais modos aceleradores só ocorrem, no caso de mapeamentos bidimensionais, se o período é 2π em ambas as direções (x e y), como efetivamente ocorre no mapeamento padrão. Um rápido exame do nosso mapeamento (IV-40) mostra que apenas a direção x goza dessa propriedade. Logo, esta não parece ser a explicação para a figura IV.25, o que nos coloca um problema em aberto (Viana e Caldas, 1990b).

Mais curioso ainda é o espectro de potência (cf. fig. IV.27) associado com este sinal. Nele observa-se, além do

¹ Como são chamados os pontos estacionários com uma periodicidade arbitrariamente grande devido à periodicidade das variáveis do mapeamento.

alargamento e irregularidade das bandas, uma tendência nítida à explosão para baixas frequências. Este fenômeno, há pouco identificado como o "ruído $1/f$ ", é comumente observado em sistemas dinâmicos dissipativos (ver Schuster, 1984, para uma discussão acerca da sua relação com a rota de intermitência para o caos); mas recentemente foi possível constatá-lo também em sistemas conservativos (Geisel, Zacherl e Radons, 1987) - onde foi proposta como explicação uma estrutura modernamente conhecida como *cantor* (citados brevemente numa seção anterior).

Os *cantori* (Ozório de Almeida, 1987) são superfícies (toros) KAM invariantes e descontínuos, tendo perfurações que nele se formam segundo uma estrutura do tipo conjunto de Cantor² (daí o nome: Cantor + torus). A ocorrência destas estruturas é genérica (Geisel, Zacherl e Radons, 1987) sendo portanto bastante possível que o mesmo venha a ocorrer em nosso caso. O estudo da influência dos *cantori* sobre a dinâmica em mapeamentos de linhas de campo magnético é uma das extensões planejadas para a continuidade deste trabalho.

Uma outra constatação nos desvios computados para o modelo de M. e T. foi a existência de uma transição intermitente entre oscilações regulares através de explosões irregulares, aparentemente sem uma periodicidade fixa (cf. figs. IV.30 e IV.31

² O conjunto de Cantor é um conjunto (unidimensional) de pontos formado a partir de um segmento contínuo por uma sucessão de operações que consistem na retirada de trechos dos subsegmentos formados, gerando as "perfurações". Tem dimensão fractal, entre 0 e 1.

para um exemplo de intermitência no caso de desvio simples na

$$\langle \Delta Y_n^2 \rangle [m^2]$$

Fig. 24 Desvio Quadrático Médio Radial

$(P=0.25; \beta=6.28), Y_0 = 3.00, N = 200$

$$\langle \Delta Y_n^2 \rangle [m^2]$$

Desvio Quadrático Médio - $x_0=3.12, y_0=0.30, N=30$

Fig. IV.25 Desvio Quadrático Médio Radial
 $(P=0.25; \beta=6.28); Y_0 = 0.30; N = 30$

Fig. IV.26 Espectro de Potência relativo à
Fig. IV.24.

Fig. IV.27 Espectro de Potência relativo à
Fig. IV.25

direção poloidal, e seu respectivo espectro de potência). Para sistemas dissipativos, a intermitência é um fenômeno bem conhecido e profundamente estudado - em particular, representa uma das rotas possíveis para o caos (Pomeau e Manneville, 1980. Uma coleção de reprints importantes está em Hao Bai Lin, 1987). No entanto, é bastante raro em sistemas conservativos, por razões ainda desconhecidas. Conhecemos apenas uma citação prévia na literatura (Ichikawa et al., 1984), reportando a existência de transições intermitentes no mapeamento padrão. Aliás, não deve causar nenhuma estranheza o fato de que episódios observados no mapa padrão sejam reproduzidos no modelo de M. e T., já que este pode ser reduzido àquele, no caso limite de pequenos valores de P .

Ichikawa et al. (1984) não propõem exatamente uma explicação para este fato surpreendente, mas acreditamos que possa dever-se a duas causas (talvez concomitantes):

a) a existência de *cantori*, já apontada como suspeita do ruído $1/f$ da figura IV.29;

b) a variação de comportamento de órbitas retiradas da região estocástica (local) próxima às separatrizes de ressonâncias no plano de fase (cf. secção I.4) .

Para comentarmos acerca do item b), é necessário voltar temporariamente à descrição Hamiltoniana do fluxo das linhas de campo, como na secção III.1. Em termos dela, podemos caracterizar cada superfície magnética (um toro KAM, de fato) por um valor constante da variável de ação J do sistema dinâmico (Rafada, 1983).

ΔX_n

Desvio Poloidal - $p=0.25, s=6.28, x_0=0.00, y_0=0.19$

Fig. IV.28 Intermittência no Desvio Poloidal
($P=0.25; \beta=6.28$), a partir da condição inicial
 $X_0 = 0.00; Y_0 = 0.19$

É possível associar a variável de ação J com a regularidade das órbitas (já que estas originam-se do mapeamento de Poincaré das linhas de campo, que por sua vez trafegam sobre as superfícies magnéticas). Há resultados rigorosos na literatura especializada (como o Teorema de Nekhoroshev, ver Guckenheimer e Holmes, 1983) mostrando que a variação de J é mais rápida na região próxima às ressonâncias. Logo, nós conjecturamos que, nas proximidades de uma ilha, a órbita é violentamente perturbada na vizinhança imediata da sua separatriz, tal que a trajetória (no plano de secção) seja expelida para outra região onde a variação é comparativamente mais lenta. Quando a dinâmica traz a órbita novamente para a primeira região ocorre outro pulso irregular e assim por diante; gerando uma sucessão de oscilações razoavelmente irregulares interrompidas de forma intermitente.

Como esta é uma questão sobre a qual não parece ter sido dada ainda a palavra definitiva, procuraremos voltar a ela futuramente, procurando utilizar as ferramentas teóricas já citadas de maneira menos heurística do que fizemos até aqui.

IV.5. MAPEAMENTO NO CASO DE VÁRIOS LIMITADORES

Nas secções anteriores fizemos o mapeamento das linhas de campo na presença de apenas um anel limitador. Isto nos induz a questionar que mudanças poderiam aparecer caso fosse utilizado mais de um anel. Uma configuração deste tipo já foi proposta na literatura (Yu e DeGrassie, 1986), como um aperfeiçoamento do modelo de M. e T.; e efetivamente implantada no Tokamak TEXT (McCool, 1989) com resultados promissores. A idéia básica desta sugestão é a seguinte: vimos, no cap. III, que na presença de apenas um anel limitador, produzimos ressonâncias com um único número do modo poloidal m , e com uma infinidade de números dos modos toroidais, $n = 1, 2, 3, \dots$. Não obstante, é possível produzir estocasticidade pela intersecção de pelo menos duas ilhas com n baixo (como $8/2$ e $8/3$, por exemplo); já que as ilhas correspondentes a n mais alto têm larguras muitíssimo menores que aquelas, e não há risco de que estas venham a interceptar-se antes das que realmente desejamos.

Quando se utiliza a correção toroidal, no entanto, é que começam os problemas; como já vimos na secção IV.2. Os modos satélites que acompanham cada ilha primária introduzem uma complexidade que é facilmente constatada nos retratos de fase correspondentes (cf. figs. IV.14 e segs.). Seria, pois, desejável que pudéssemos "filtrar" um determinado modo m/n , e depois fazê-lo interagir com o respectivo modo satélite $m \pm 1/n$ gerado pela correção toroidal. De que forma proceder, então?

Voltando um pouco à discussão do capítulo III, é

possível mostrar (Fernandes e Caldas, 1985) que uma configuração de m pares de hélices condutoras enroladas de tal forma que dêem n voltas toroidais antes que se fechem sobre si mesmas, gera um modo helicoidal m/n puro. Aliás, foi com este espírito que o limitador ergódico foi originalmente concebido por Feneberg, Karger e Lackner (vide Introdução e referências lá citadas). Logo, se fosse possível simular, por meio de um conjunto de anéis convenientemente defasados, o passo de uma hélice, seria possível produzir um modo razoavelmente puro, ou dominante sobre os demais.

Neste espírito, podemos estimar qual a defasagem necessária para que um conjunto de N_c anéis simule o passo de m hélices enroladas tal que seja gerado o modo m/n (cf. fig. IV.31). O princípio básico é o de que um tal enrolamento helicoidal deve seguir o passo das linhas de campo situadas sobre uma superfície racional de fator de segurança $q = m/n$ (que é sobre a qual formam-se as ilhas correspondentes ao modo m/n). Da definição de transformada rotacional (cf. eq. III-9), após um percurso de $\Delta\phi = 2\pi$ na direção toroidal, a correspondente defasagem poloidal é $\Delta\theta = 2\pi n/m$. Se há N_c anéis, para o percurso $\Delta\phi = 2\pi/N_c$ entre dois anéis sucessivos, a defasagem necessária será :

$$\Delta\theta' = \frac{2\pi}{N_c} \left(\frac{n}{m} \right) \quad (\text{IV-50})$$

tal que, em relação a um dado ponto de referência¹ os ângulos poloidais sejam marcados para cada anel limitador como:

¹Que pode ser o ponto de alimentação externa das bobinas

$$\theta_{j+1} = \theta_j + \Delta\theta' \quad (\text{IV-51})$$

onde $j = 1, 2, 3, \dots, N_c$.

Podemos, pois, repetir o mapeamento das linhas de campo, utilizando as mesmas fórmulas da tabela IV-1, desde que:

a) Entre dois anéis sucessivos, a integração seja feita em um intervalo de $2\pi R_0/N_c$ (sem efeito toroidal) ou $2\pi/N_c$ (com efeito toroidal);

b) Para o j -ésimo anel, fazemos a substituição (IV-50,51) no ângulo poloidal;

c) Tomamos o plano de Poincaré em $z = 0$.

O resultado deste procedimento é ilustrado nas figuras que se seguem. A fig. IV.30 reproduz o mapeamento para o caso de $N_c = 7$, onde escolhemos a ressonância $m=8/n=2$. Os demais dados seguem a escolha feita nos mapeamentos anteriores. De (IV-50), a defasagem poloidal entre dois anéis sucessivos deve ser de $\pi/14$. Para esta figura foi usada uma corrente de 90 A, suficiente para mostrar a formação de uma cadeia de 8 ilhas em $y \cong 0.032$ m (ou $r \cong 7.8$ cm). Comparando com a previsão teórica feita no capítulo III (cf. Tab. III-1), a localização da ressonância $8/2$ deveria ser sobre a superfície racional com $r = 7.2$ cm. Dentro, porém, das limitações do método, e da imprecisão em determinar a posição da ilha através do mapeamento, este resultado é bastante satisfatório, contendo um erro percentual de cerca de 7 %. Além desta cadeia de ilhas, poderíamos especular com base na figura, sobre a existência de outras cadeias. Isto não é proibido, já que

nossa configuração de anéis não chega a ser uma hélice, logo outras cadeias poderiam até ocorrer, mas com larguras comparativamente bem menores.

Fig IV.30 Mapeamento com 7 anéis, $I = 90\text{ A}$, sem correção toroidal. Os demais dados são os mesmos dos outros mapeamentos deste capítulo.

A fig. IV.31 contém o mesmo mapeamento, só que com a aplicação da correção toroidal. Como esperado, a formação de ilhas satélites torna a figura bem mais complexa que a anterior. A cadeia $8/2$ naturalmente ainda existe, mas a diferença entre as escalas verticais das duas figuras faz com que aqui ela não apareça claramente.

Nas figs. IV.32 e IV.33 (esta última com efeito toroidal) apresentamos o caso de $I = 200$ A. A cadeia $8/2$ tem largura bem maior, com a formação de uma nítida região estocástica abaixo dela. O mecanismo para a sua formação não será, provavelmente, o de Chirikov, visto que no caso não-toroidal não se esperam outras ilhas satélites. Esta situação relembra aquela vista na fig. IV.8 ; e os comentários feitos lá podem ser repetidos neste caso. Finalmente, as figs. IV.34 e IV.35 trazem, para $I = 500$ A, o aparecimento de uma região periférica de campo estocástico plenamente desenvolvida, que habilita esta configuração ao papel de limitador ergódico. Note-se que a magnitude das correntes necessárias para este objetivo caiu bastante neste caso de mais anéis. Antecipando os comentários mais aprofundados a serem feitos nas Conclusões, podemos relacionar a existência de mais de um anel limitador a um reforço significativo na capacidade de produzir mudanças na estrutura do campo magnético, estando mais próximo ao papel desempenhado por arranjos helicoidais (nos quais estas correntes são tipicamente utilizadas).

Nossas observações confirmam, também, a utilidade deste tipo de arranjo em experiências reais, já que obtém-se uma maior

Fig. IV.31 Idem a IV.30, com correção toroidal

Fig. IV.32 Mapeamento com 7 anéis e $I = 200$ A.
Mesmos dados das figuras anteriores

Fig. IV.33 Idem à fig. 32, com correção toroidal

economia de correntes, ainda com uma configuração extremamente prática, por ocupar um espaço exíguo ao longo do vaso toroidal do Tokamak. Lembramos que a instalação de hélices envolve dificuldades técnicas consideráveis, devido à existência de inúmeros dispositivos de diagnóstico distribuídos ao longo do

Fig. IV.34 Idem para $I = 500 \text{ A}$, sem correção toroidal

Fig. IV.35 Idem à fig. 34, com correção toroidal

CONCLUSÕES

Já citamos na introdução que este trabalho foi estruturado em três módulos (capítulos I, II e III/IV) cuja dependência mútua de certa forma é a própria razão de ser do trabalho : a análise de sistemas submetidos a perturbações impulsivas. Podemos, pois, avaliar em que extensão este objetivo foi atingido, e que futuras direções esta tese aponta para investigação ulterior.

Neste sentido, o capítulo II mostrou a viabilidade de se obter informações quantitativas acerca de sistemas sujeitos a um tipo de excitação tão violento como a proporcionada por pulsos delta, desde que discretizemos a variável temporal de forma a trabalharmos com mapeamentos. O formalismo foi aplicado a alguns sistemas simples, que possuem ciclos limites como atratores na ausência de perturbação. Os resultados do mapeamento indicam que, pelo menos quando a excitação é aplicada em ambas as direções do plano de fase, continuamos a ter um comportamento periódico caracterizado pela presença do que chamamos "ciclos limites modificados". Ainda que sua forma geométrica não seja circular, todavia, é possível ter uma idéia precisa das suas dimensões, em função dos parâmetros característicos da perturbação (intensidade e período).

No outro caso abordado (perturbação restrita a uma direção no plano) os resultados indicam uma complicação substancial na dinâmica, mesmo no limite de rápida relaxação (que

fornece, no fim das contas, um mapa não linear do círculo). Este caso faz contacto com trabalhos recentes sobre o assunto, do ponto de vista da análise sistemática dos regimes dinâmicos existentes, utilizando técnicas como a Dinâmica Simbólica e o Espaço de Parâmetros. É possível, pois, delinear vários assuntos que realmente merecem estudo mais aprofundado; entre os quais a identificação dos regimes unimodal e quase-periódico (como feito por Ding, 1987).

O capítulo III introduziu, em outro assunto, a mesma hipótese de excitação impulsiva na análise de um problema cuja solução é conhecida analiticamente na ausência de perturbações. O conceito de superfície magnética é explorado no sentido de fornecer uma estrutura (ilha magnética) que está pressupostamente por trás da geração de campo magnético estocástico; e que é na verdade o objetivo do Limitador Ergódico Magnético, tratado neste terceiro módulo.

Utilizando a expansão de Fourier da perturbação tipo-função-delta, pudemos identificar os modos, ou ressonâncias, responsáveis pela formação das ilhas magnéticas, cuja localização e largura foram estimadas perturbativamente (a partir de dados correntes do Tokamak TBR-1, para o qual projeta-se a operação futura de um sistema desse gênero). A geração de campo estocástico na periferia do vaso toroidal foi, então, modelada como resultante da interação entre as ressonâncias $8/2$ e $8/3$. Quantitativamente, porém, o critério de Chirikov (que interpreta esta interação como o toque das separatrizes das ilhas) tende a fornecer resultados que superestimam a intensidade da perturbação externa necessária.

Isto leva a resultados superestimados, como a corrente crítica da ordem de kiloampère que obtivemos na secção III.5. Uma análise utilizando técnicas mais apuradas levaria a uma corrente sensivelmente menor.

Não será pequena, no entanto, pois o fato de termos um limitador apenas faz com que a corrente sobre ele tenha de ser maior do que para uma hélice, por exemplo (onde com cerca de 2% da corrente de plasma já se obtém resultados muito bons). É relativamente intuitiva esta observação, mas ela pode também ser compreendida comparando-se o valor de $(\Psi_{10})_{m/n}$ (que representa a contribuição de um modo helicoidal do limitador) com a correspondente contribuição de uma hélice de mesmos m, n (cf. eq. III-53) :

$$(\Psi_{10})_{\text{modo } m/n \text{ do limitador}} = \frac{l}{2 \pi R_0} (\Psi_{10})_{\text{hélice com enro-lamento } m/n}$$

Como $l \ll 2\pi R_0$ ¹, e $\Psi_{10} \propto I$ segue-se que a corrente no limitador tem necessariamente que ser maior de que numa hélice, para que seja produzido o mesmo efeito (em termo, por exemplo, da largura de uma ilha magnética).

A inclusão da correção toroidal no modelo, gera ilhas secundárias que interagem com as principais antes que estas interceptem-se entre si. Este refinamento no modelo levaria a uma diminuição na corrente crítica.

¹Para o TBR-1 estimamos $l/2\pi R_0 \cong 0.04$.

Ainda que o arranjo proposto até aqui possa ser implementado numa experiência, a adição de mais anéis (poloidalmente defasados de modo a simular o efeito de uma hélice descontínua) parece ser a melhor solução do ponto de vista prático. Esta solução, implantada no projeto do Tokamak TEXT (Wu e DeGrassie, 1986) permitiu que um dos modos gerados pelo conjunto de anéis fosse ressaltado em comparação com os demais. Os melhores resultados experimentais vêm deste tipo de implementação (McCool et al., 1989). Tratamos deste arranjo no último capítulo da tese, verificando a sua eficácia em comparação com o uso de um anel limitador.

O capítulo IV pretende ser um compromisso entre o problema do capítulo III e a técnica "estroboscópica" do capítulo II; a despeito das diferenças existentes entre os sistemas estudados nestes módulos (um é dissipativo, e o outro, conservativo). Neste ponto de vista, é recompensador verificar que os resultados numéricos reproduzem, senão todas, pelo menos algumas situações previstas teoricamente em nosso modelo teórico, tais como:

#₁ produção de um número grande de cadeias de m ilhas magnéticas cada, por meio de um anel limitador com m pares de fios condutores;

#₂ as ilhas magnéticas brotam de pontos aproximadamente situados nas superfícies magnéticas racionais e ressonantes do problema não-perturbado;

#₃ a região estocástica forma-se facilmente na região imediatamente próxima à parede do Tokamak ("região de vácuo"); mas

requer correntes externas muito altas para que seja produzida na periferia da coluna de plasma (em particular, parece-nos que mesmo o limiar teórico da secção III.5 não está muito longe do que foi numericamente observado);

#₄ a correção toroidal realmente introduz modos satélites às ilhas principais; observando-se a produção de $m-1$ ilhas em torno de uma ressonância m/n (na região com $q < m/n$);

#₅ a correção toroidal diminui a corrente exigida para estocasticidade periférica, em comparação com o caso puramente cilíndrico;

#₆ a inclusão de mais anéis limitadores com defasagem poloidal mútua, conforme descrita há pouco, permite criar um modo m/n dominante em relação aos demais, e também diminui a corrente necessária para a geração de estocasticidade,

Como todo modelo, no entanto, o nosso também tem seus defeitos - já que a perturbação impulsiva é uma suposição conveniente na perspectiva do físico teórico, mas um tanto artificial na descrição de um anel de oito centímetros de largura, colocado numa câmara de pouco mais de dois metros de comprimento. A inclusão da extensão finita, por sua vez, levaria o modelo a um grau de complexidade que inviabilizaria o tratamento analítico que levamos a cabo no capítulo III.

Também os mapeamentos das linhas de campo magnético (incluindo o de Martin e Taylor) deixam em aberto algumas questões que julgo não triviais, como a presumida influência dos *cantori* no aparecimento do ruído $1/f$ nos espectros de potência da secção IV.4; e na difusão anômala de linhas de campo gerando

estocasticidade "precocce" (i.e., antes da intersecção α la Chirikov) no exemplo da secção IV.2. Além disso, falta ainda uma explicação tecnicamente precisa da intermitência observada nos desvios simples das órbitas do mapeamento de Martin e Taylor; assim como, devido às peculiaridades deste modelo, não é muito bem clara a existência de modos aceleradores.

A propósito, não nos pareceu ilustrativo comparar predições entre os dois mapeamentos, já que o modelo de Martin e Taylor pressupõe condições inaplicáveis ao TBR-1. Adotando os parâmetros do TBR-1 no modelo de M. e T., os resultados são diferentes dos obtidos nos mapeamentos do capítulo IV. Neste particular, deve ser observado que os valores adotados nas simulações que fizemos do mapa de M. e T., $P = 0.25$ e $\beta = 6.28$ (que corresponderiam a valores "típicos" para o Tokamak JET ²) não condizem com os valores correntes para o TBR-1. Sem embargo desta discrepância, parece natural que os resultados estatísticos verificados para o modelo de M. e T. também se estendam para o nosso mapeamento; que se por um lado é mais completo que aquele, desfavorece praticamente qualquer tratamento analítico, dificultando bastante seu estudo sistemático. Por este motivo, o que foi feito nesta direção abrangeu somente o mapa de M. e T..

² Joint European Torus, que é um Tokamak do Laboratório da Comunidade Européia, situado em Culham, Inglaterra.

APÊNDICE A

CAMPO MAGNÉTICO GERADO POR CONDUTORES HELICOIDAIS

Nós obtivemos, no capítulo III, o campo magnético gerado pelo limitador ergódico como um caso particular do caso de condutores helicoidais enleados sobre a câmara do Tokamak, na aproximação cilíndrica. Esta última situação já é conhecida da literatura (além de aparecer como um problema no texto clássico de Durand, 1959; também pode ser encontrada em Morosov e Solovév, 1966. Kucinski e Caldas, 1987, resolveram o problema mais geral de condutores sobre uma câmara toroidal, usando outro sistema de coordenadas). Nós reproduziremos, aqui, somente os passos essenciais do cálculo, especialmente aqueles que interessam à obtenção da função de fluxo que descreve as superfícies magnéticas produzidas por esta configuração.

Inicialmente vamos considerar apenas um condutor filamentar enleado sobre um cilindro de raio b na forma de uma hélice onde

$$u = m\theta - kz = \text{constante}$$

Na ausência de correntes internas, $\text{rot } \mathbf{B} = 0$, e o campo pode ser obtido pelo gradiente de um potencial escalar magnético que satisfaz a equação de Laplace:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (A-1)$$

A simetria do problema sugere o uso das coordenadas r e u , em termos das quais a equação acima é reescrita como:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right] + \left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} = 0 \quad (A-2)$$

Fazendo a separação de variáveis:

$$\Phi(r, u) = R(r) U(u)$$

temos que (λ é uma constante de separação):

$$U(u) = \alpha \exp(-\sqrt{\lambda} u) + \beta \exp(+\sqrt{\lambda} u) \quad (A-3)$$

Como u é uma variável periódica (pois tanto θ como z o são), para garantir a unicidade de soluções temos que $\lambda = -N^2$, onde N é um inteiro positivo. Neste caso:

$$U(u) = A \sin(Nu) + B \cos(Nu) \quad (A-4)$$

onde podemos, sem perda de generalidade, tomar $A = 1$ e $B = 0$.

A equação para a função radial torna-se:

$$\frac{d}{dr} \left[r \frac{dR}{dr} \right] - \left(\frac{m^2}{r} + k^2 r \right) N^2 R = 0 \quad (A-5)$$

Fazendo $x \equiv Nkr$ e $R(r) \rightarrow y(x)$ a equação acima tem a seguinte forma:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + m^2 N^2) y = 0 \quad (A-6)$$

cujas soluções podem ser reconhecidas (Abramowitz e Stegun, 1965) como as funções de Bessel modificadas de ordem mN , de primeira e segunda espécies; tal que a solução geral seja:

$$R(r) = A_{Nm} I_{Nm}(Nkr) + B_{Nm} K_{Nm}(Nkr) \quad (A-7)$$

Podemos adicionar o efeito de um campo toroidal uniforme na direção z : $B_z = B_0 e_z$, tal que o potencial escalar seja:

$$\Phi(r, u) = B_0 z + \sum_{Nm=1}^{\infty} \left[A_{Nm} I_{Nm}(Nkr) + B_{Nm} K_{Nm}(Nkr) \right] \sin(Nu) \quad (A-8)$$

Na região interna do cilindro, a solução deverá ser regular em $r=0$, o que exclue os termos em K_{Nm} (i.e., $B_{Nm} = 0$ para todo Nm). Na região externa, o potencial (assim como o campo) deve anular-se assintoticamente, o que descarta as soluções em I_{Nm} , ou seja, $A_{Nm} = 0$ para todo Nm .

Casamos estas soluções interna e externa através de condições de contorno na interface $r = b$, onde supomos uma densidade superficial singular de corrente da forma $i = i_z + i_\theta$, onde:

$$|i_z| = \frac{I}{b} \delta(u)$$

e

$$|i_{\theta}| = |i_z| \operatorname{tg} \gamma$$

onde I é a corrente que flue no condutor e γ é o ângulo de passo da hélice (ver III-33).

Desenvolvemos a função delta em série de Fourier, de maneira a reter os modos, ou harmônicos em Nm da distribuição de correntes, a saber:

$$(i_z)_{Nm} = \frac{I}{\pi b} \cos(Nu) \quad (A-9a)$$

$$(i_{\theta})_{Nm} = \frac{k I}{m \pi} \cos(Nu) \quad (A-9b)$$

tal que podemos considerar a aplicação das condições de contorno para os harmônicos, ao invés de usarmos diretamente as soluções gerais para campos e correntes.

Impondo, por exemplo, a continuidade da componente normal à interface do campo magnético¹:

$$(B^e - B^i) \cdot e_r \Big|_{r=b} = 0$$

¹ Os sufixos 'i' e 'e' indicam componentes nas regiões interna e externa ao Tokamak, respectivamente.

temos que ²:

$$B_{Nm} = A_{Nm} \frac{I'_{Nm}(Nkb)}{K'_{Nm}(Nkb)} \quad (A-10)$$

Além disso, podemos considerar a descontinuidade da componente tangencial da intensidade magnética ($H = B / \mu_0$) na interface $r = b$, quando nesta há uma densidade de corrente i , dada por (A-9):

$$e_r \times (B^e - B^i) \Big|_{r=b} = \mu_0 i \quad (A-11)$$

que fornece:

$$\begin{aligned} Nm A_{Nm} \left[I_{Nm}(Nkb) K'_{Nm}(Nkb) - I'_{Nm}(Nkb) K_{Nm}(Nkb) \right] &= \\ &= - \frac{\mu_0 I}{\pi} K'_{Nm}(Nkb) \end{aligned}$$

Utilizando a seguinte propriedade das funções de Bessel (Abramovitz e Stegun, 1965):

$$I'_\mu(x) K_\mu(x) - I_\mu(x) K'_\mu(x) = \frac{1}{x}$$

obtemos, com o auxílio de (A-10):

$$A_{Nm} = \frac{k}{m} \frac{\mu_0 I K'_{Nm}(Nkb) b}{\pi} \quad (A-12a)$$

² O primo (') aqui simboliza a derivada com respeito ao argumento $x = Nkr$.

$$B_{Nm} = \frac{k}{m} \frac{\mu_0 I I_{Nm}'(Nkb) b}{\pi} \quad (A-12b)$$

A rigor, em (A-9) deve ainda ser considerado o efeito de um termo uniforme na densidade de corrente i_θ , dado por:

$$i_{\theta 0} = \frac{k I}{2\pi m}$$

que fica como espectador durante o cálculo, e cujo único efeito é a produção de um termo uniforme no potencial escalar magnético. Com esta contribuição, e usando (A-12), ele pode ser escrito (no interior do cilindro) como (Morozov e Solovév, 1966):

$$\Phi(r,u,z) = \frac{\mu_0 I k}{2 m \pi} \left[z + 2b \sum_{Nm=1}^{\infty} K_{Nm}'(Nkb) I_{Nm}(Nkr) \sin Nu \right] \quad (A-13)$$

Vamos levar em conta, agora, a existência de m pares de condutores helicoidais enlados sobre o cilindro, de maneira que condutores adjacentes transportam correntes em sentidos opostos. Como há $2m$ fios, a separação entre dois deles é π/m . Um condutor genérico j será descrito pelas equações (Fernandes e Caldas, 1985):

$$r = b = \text{const.} \quad (A-14a)$$

$$u = (m \theta - j \pi) - k z = \text{const.} \quad (A-14b)$$

onde $j = 1, 2, \dots, 2m$.

A contribuição individual do j -ésimo condutor é dada por

(A-13), sendo u dado por (A-14b). A contribuição total dos m pares será obtida pela soma destes termos, com um fator $(-1)^j$ especificando a alternância de sentido das correntes. Esta somatória pode ser feita, com o auxílio da fórmula (Jolley, 1965), onde p é um inteiro positivo:

$$\sum_{j=0}^{2m-1} (-1)^j \sin[N(m\theta - j\pi - kz)] = \begin{cases} 2m \sin[N(m\theta - kz)] & , \text{se } N=2p+1 \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{A-15})$$

O resultado final é:

$$\Phi(r,u) = \frac{2 \mu_0 I k b}{\pi} \sum_{Nm=1}^{\infty} K_{Nm}'(Nkb) I_{Nm}(Nkr) \sin Nu \quad (\text{A-16})$$

onde $N = 2p + 1$, i.e., é um número ímpar.

Finalmente, vamos obter as componentes do potencial vetor A, produzido pelas hélices, tal que $B = \text{rot } A$. Sendo $B = \text{grad } \Phi$, e escolhendo um gauge onde $A_z = 0$ temos, em coordenadas cilíndricas:

$$-\frac{\partial A_{\theta}}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad (\text{A-17a})$$

$$\frac{\partial A_r}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \quad (\text{A-17b})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r A_{\theta} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (\text{A-17c})$$

Tomando a equação (A-16) , (A-17a) fornece por integração:

$$A_{\theta}(r,u) = - \frac{2 \mu_o I b k}{\pi} \sum_{Nm=1}^{\infty} K_{Nm}'(Nkb) I_{Nm}'(Nkr) \cos(Nu) + f(r) \quad (\text{A-18a})$$

onde $f(r)$ é uma função ainda arbitrária de r . Integrando (A-17b) temos:

$$A_r(r,u) = - \frac{1}{r} \frac{2 \mu_o I b k}{\pi} \sum_{Nm=1}^{\infty} N m K_{Nm}'(Nkb) I_{Nm}(Nkr) \cos(Nu) + g(r) \quad (\text{A-18b})$$

onde também $g(r)$ é arbitrária. Podemos, no entanto, substituir (A-18a,b) em (A-17c), e esta se verifica se escolhermos:

$$f(r) = 0 \quad g(r) = 0$$

APÊNDICE B

PERFIL RADIAL DO FATOR DE SEGURANÇA

Os resultados deste apêndice são conhecidos da literatura sobre Tokamaks (além de Wesson, 1987, também Fernandes e Caldas, 1985; Caldas e Vannucci, 1985; Brusati, 1988, entre outros); e estão aqui para complementar a exposição do capítulo III, mostrando o tipo de equilíbrio MHD que levamos em conta. Além disso, mostramos alguns perfis teóricos relativos ao Tokamak TBR-1.

Supomos, no modelo cilíndrico da seção III.1., um perfil (do tipo "parabólico") para a densidade de corrente de plasma, do tipo (cf. fig. B-1a):

$$j_z(r) = j_0 \left[1 - \frac{r^2}{a^2} \right]^\gamma \quad (\text{B-1})$$

onde γ é um expoente usualmente fixado entre 1 e 3. a é o raio da coluna de plasma (determinado pelo raio do limitador físico de corrente no interior da câmara).

Na ausência de campos elétricos, a lei de Ampère fornece, para o campo poloidal na região $0 < r < a$, a expressão:

$$B_\theta(r) = \frac{\mu_0}{r} \int_0^r r' j_z(r') dr' \quad (\text{B-2})$$

Substituindo (B-1) em (B-2) temos:

$$B_{\theta}(r) = \frac{a^2 \mu_o j_o}{2 r (\gamma+1)} \left[1 - \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{\gamma+1} \right] \quad (B-3)$$

Se I_p for a corrente elétrica total da coluna (cilíndrica) de plasma, então a sua densidade superficial será $j_z = dI_p/dS$, onde $dS = 2\pi r dr$. Integrando esta expressão, e usando (B-1) obtém-se:

$$I_p = \frac{\pi a^2 j_o}{\gamma + 1} \quad (B-4)$$

de forma que o campo poloidal na região $a < r < b$, é dado simplesmente por:

$$B_{\theta}(r) = \mu_o I_p / 2\pi r \quad (B-4a)$$

(cf. fig. B-1b).

O fator de segurança, conforme definido em (III-8) , é escrito como:

$$q(r) = \frac{2 \pi B_o}{\mu_o I_p R_o} r^2 \left[1 - \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{\gamma+1} \right]^{-1} \quad (B-5)$$

na região $0 < r < a$, e

$$q(r) = \frac{2 \pi B_o}{\mu_o R_o I_p} r^2 \quad (B-6)$$

na região $a < r < b$. Tomando o limite $r \rightarrow 0$ é fácil mostrar que:

$$q(a) = (\gamma + 1) q(0) \quad (B-7)$$

Para evitar a temida instabilidade de dobra ("kink") na coluna de plasma (Sakanaka, 1981), deve ser satisfeita a condição de Kruskal - Shafranov (Wesson, 1987): $q(r) \geq 1$, para $0 < r < a$. Nós comumente utilizaremos $q(0) = 1$ em nossas aplicações. Fazendo $r = a$ em (B-6), podemos reescrevê-la de outra forma:

$$q(r) = q(a) \frac{r^2}{a^2} \quad (B-8)$$

Em particular, na posição correspondente à parede do Tokamak, temos:

$$q(b) = q(a) \left(\frac{b}{a} \right)^2 \quad (B-9)$$

Na fig. B-1c é mostrado um perfil típico do fator de segurança, usando dados do Tokamak TBR-1.

Fig. B.1a Perfil Radial da Densidade de Corrente de Plasma no TBR-1 ($a = 8$ cm), com $q(a) = 5.0$ ($\gamma = 4.0$) e $j_0 = 2.63 \times 10^6$ A/m².

Fig. B.1b Perfil Radial do Campo Poloidal no TBR-1
Mesmos dados da figura anterior, $B_\theta(a) = 0.02 \text{ T}$

Fig. B.1c Perfil Radial do Fator de Segurança no TBR-1. Mesmos dados das figs. anteriores

APÊNDICE C

JUSTIFICATIVA DA APROXIMAÇÃO IMPULSIVA

Para tornar mais claro o uso de uma perturbação impulsiva no problema do limitador ergódico, quando sua largura l é pequena em relação às dimensões do Tokamak, vamos considerar um modelo mais realístico. A ação do limitador consistirá numa sequência periódica de pulsos quadrados, de largura l e altura Ψ_{10} (correspondendo à intensidade da ação do limitador), dada por (III-43) (cf. fig. C-1). Neste caso, a expressão para a função de fluxo perturbadora será:

$$\Psi_1(r, \theta, z) = \begin{cases} \Psi_{10}(r, \theta) & , \quad -\frac{l}{2} \leq z < \frac{l}{2} , \text{etc.} \\ 0 & , \quad \frac{l}{2} < z \leq 2\pi R_0 - \frac{l}{2} , \text{etc.} \end{cases} \quad (C-1)$$

Vamos desenvolver em série de Fourier esta perturbação (de período $2\pi R_0$). Como a função é ímpar, só temos a série de cossenos (na região não-nula):

$$\Psi_1(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \left[\frac{n \pi z}{\pi R_0} \right] \quad (C-2)$$

onde os coeficientes a_1 são dados por:

$$a_0 = \frac{1}{\pi R_0} \int_{-\pi R_0}^{\pi R_0} \Psi_1(z) dz = \frac{\Psi_{10} l}{\pi R_0} \quad (C-3)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi R_0} \int_{-\pi R_0}^{\pi R_0} \Psi_1(z) \cos \left[\frac{n z}{R_0} \right] dz = \frac{2 \Psi_{10}}{n \pi} \operatorname{sen} \left[\frac{n l}{R_0} \right] \quad (C-4)$$

Caso $l \ll R_0$ (e n seja pequeno, o que sempre será o nosso caso, com valores entre 1 e 3), podemos aproximar

$$\operatorname{sen} \left[\frac{n l}{2 R_0} \right] \approx \frac{n l}{2 R_0}$$

tal que (C-2) seja reescrita como:

$$\Psi_1(z) = \frac{\Psi_{10} l}{2 \pi R_0} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \left[\frac{n z}{R_0} \right] \right] \quad (C-5)$$

A expressão acima é exatamente igual a (III-48), que foi derivada a partir da suposição de perturbações impulsivas, expressa em (III-46).

Fig. C-1 Sequência de pulsos quadrados que simula a ação do limitador no modelo do capítulo III.

APÊNDICE D

ESTABILIDADE DO MODELO DE MARTIN E TAYLOR PELO MÉTODO DO RESÍDUO DE GREENE

O resíduo de Greene foi introduzido no capítulo I (cf. secção I.4) como um parâmetro útil na descrição da estabilidade de pontos estacionários de mapeamentos simpléticos. No capítulo IV, mostramos que, impostas certas condições o mapeamento das linhas de campo sob a ação de um limitador ergódico reduz-se ao modelo de Martin e Taylor, cuja forma analítica é dada por (IV-33a,b):

$$X_{n+1} = X_n - P \exp(-Y_n) \cos(X_n) + \beta Y_{n+1} \quad (D-1a)$$

$$Y_{n+1} = Y_n + \ln \left[\frac{\cos(X_n - P e^{-Y_n} \cos X_n)}{\cos X_n} \right] \quad (D-1b)$$

tal que sua matriz Jacobiana, definida em I-28, tenha determinante igual a um, de modo que o mapeamento acima é simplético.

O traço da matriz Jacobiana é:

$$\text{Tr } J = \frac{\partial X_{n+1}}{\partial X_n} + \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial Y_n} =$$

$$= 2 + P \exp(-Y_n) \sin(X_n) + \beta \text{tg}(X_n) -$$

$$- \operatorname{tg} \left[X_n - P \exp(-Y_n) \cos(X_n) \right] \left\{ P \exp(-Y_n) \cos(X_n) + \right. \\ \left. + \beta [1 - P \exp(-Y_n) \operatorname{sen}(X_n)] \right\} \quad (D-2)$$

O resíduo de Greene (cf. I-30) é:

$$R = \frac{1}{4} \left[2 - \operatorname{Tr} J \right] \quad (D-3)$$

Substituindo (D-1) em (D-3) vem:

$$R = \frac{1}{4} \left\{ \left[\beta + P \exp(-Y_n) \left[\cos(X_n) + \beta \operatorname{sen}(X_n) \right] \right] \operatorname{tg} \left[X_n - \right. \right. \\ \left. \left. - P \exp(Y_n) \cos(X_n) \right] - \beta \operatorname{tg}(X_n) - P \exp(-Y_n) \operatorname{sen}(X_n) \right\} \quad (D-4)$$

Vamos analisar o resíduo de Greene no caso de pequenos valores de P (o que corresponde, fisicamente, à aplicação de pequenas correntes elétricas no limitador), expandindo em série de potências o termo:

$$\operatorname{tg} \left[X_n - P \exp(-Y_n) \cos(X_n) \right] = \operatorname{tg}(X_n) - P \exp(-Y_n) \sec(X_n) + o(P^2)$$

que, substituída em (D-4) e efetuadas as simplificações necessárias fornece:

$$R = - \frac{\beta P \exp(-Y_n) \cos(X_n)}{4} \quad (D-5)$$

que é igual ao resíduo de Greene para o mapeamento padrão (dado

por I-34a,b). Isto não é de forma alguma surpreendente, já que este último é o caso limite do modelo de Martin-Taylor para pequenos valores do parâmetro P .

Vimos, no capítulo IV, que um par de pontos fixos do mapeamento de Martin-Taylor é dado por (cf. IV-36a,37):

$$\bar{X} = \pi + P \exp\left[-\frac{2 \pi m}{\beta}\right] \quad (D-6a)$$

$$\bar{Y} = \frac{2 \pi m}{\beta} + \frac{P}{\beta} \exp\left[-\frac{2 \pi m}{\beta}\right] \quad (D-6b)$$

O resíduo (D-5) para este par de pontos estacionários é:

$$R(\bar{X}, \bar{Y}) = - \frac{\beta P}{4} \exp\left[-\frac{2 \pi m}{\beta}\right] \exp\left[\frac{P}{\beta} \exp\left[-\frac{2 \pi m}{\beta}\right]\right] \otimes \\ \otimes \cos\left[P \exp\left[-\frac{2 \pi m}{\beta}\right]\right] \quad (D-7)$$

Expandindo em potências de P temos, até termos de ordem $O(P^2)$:

$$R(\bar{X}, \bar{Y}) \cong \frac{\beta P}{4} \exp\left[-\frac{2 \pi m}{\beta}\right] \quad (D-8)$$

Na secção I.4 vimos que, se $0 < R < 1$, os autovalores da matriz Jacobiana no ponto estacionário são complexos conjugados, e este é localmente estável (é, de fato, um ponto elíptico, cf. tab. I.1). A partir de (D-8), a condição de estabilidade para os pontos $\bar{X}$, $\bar{Y}$ é:

$$\frac{4}{\beta P} > \exp \left[- \frac{2 \pi m}{\beta} \right] \quad (D-9)$$

já que tanto β como P são sempre números positivos. Para valores típicos de m (da ordem de 10) e β (da ordem de π , cf. IV-27), o lado direito da expressão acima é geralmente muito pequeno em relação ao lado esquerdo (que é cerca de dez vezes maior), de modo que (D-9) resulta sempre satisfeita nestas condições.

De forma análoga, pode-se mostrar que o outro par de pontos estacionários (cf. IV-36b,37):

$$\bar{X} = 0 + P \exp \left[- \frac{2 \pi m}{\beta} \right] \quad (D-10a)$$

$$\bar{Y} = \frac{2 \pi m}{\beta} + \frac{P}{\beta} \exp \left[- \frac{2 \pi m}{\beta} \right] \quad (D-10b)$$

é localmente instável (ponto hiperbólico). Como $\cos \bar{X} \cong -1$, o resíduo de Greene (D-5) muda de sinal, invertendo a desigualdade (D-9).

APÊNDICE E

CORREÇÃO TOROIDAL AO CAMPO B_0

Neste apêndice procuramos justificar o uso da equação (IV-5), a partir de argumentos simples, na aproximação de grande razão de aspecto ($b \ll R_0$). O campo "toroidal" produzido por um solenóide cilíndrico (correspondendo ao Tokamak com $\frac{b}{R_0} \ll 1$) com n espiras por unidade de comprimento, percorridas por uma corrente I , é uniforme e tem módulo igual a $B_0 = \mu_0 n I$. Deformando, agora, este solenóide para a forma de um toróide de raio maior R_0 , o campo toroidal no interior do solenóide a uma distância R do eixo de simetria (cf. fig. E.1) será dado pela Lei de Ampère como:

$$B_\phi = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I N}{R} \quad (E-1)$$

onde N é o número total de espiras no enrolamento. Como $n = N/2\pi R_0$ para o solenóide deformado, temos que $B_\phi = B_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^{-1}$. Da figura E.2 temos a relação geométrica:

$$R = R_0 + r \cos \theta \quad (E-2)$$

tal que:

¹ Na verdade, o arranjo das bobinas do campo toroidal em um Tokamak não é compacto o suficiente para que se possa simulá-lo por um solenóide. No entanto, a correção toroidal calculada para um solenóide pode ser estendida também para o nosso caso.

Fig. E-1 Campo Toroidal no interior de um solenóide toroidal

$$B_{\phi} = \frac{B_0}{1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta} \quad (E-3)$$

que é a (IV-5). Este importante resultado pode também ser derivado a partir de argumentos mais sofisticados (Morosov e Solovév, 1966).

Pode-se igualmente mostrar que o campo poloidal $B_{\theta}(r)$ gerado pela corrente de plasma sofre uma correção semelhante à do campo toroidal:

$$B_{\theta}(r, \theta) = B_{\theta}^0(r) \left[1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta \right]^{-1}$$

O efeito principal dessa correção é a deformação das superfícies magnéticas (Fernandes, Heller e Caldas, 1988). No entanto, já argumentamos anteriormente (cf. secção IV-1) que tal fato não será

levado em conta em nossa aproximação, para plasmas de beta pequeno, onde o eixo geométrico coincide com o eixo magnético.

Fig. E.2 Geometria na secção do Tokamak

Neste caso, consideramos apenas a alteração no passo das linhas de campo (devido à correção toroidal do campo toroidal), que por sua vez introduz uma dependência em $\cos \theta$, e consequentemente novas ressonâncias devido à quebra da simetria helicoidal (Fernandes e Caldas, 1985).

REFERÊNCIAS

- Abramovitz, M.; Stegun, I. A. (1965), *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, N. Y.
- Aguiar, M. A. M.; Baranger, M. (1988), *Invariant Tori for Two-Dimensional Non-integrable Hamiltonians*, Ann. Phys. (N. Y.) **186**, 355
- Andrade, M. C. R. (1989), *Formulação Hamiltoniana para Superfícies Magnéticas*, Dissertação de Mestrado (não publicada), Instituto de Física da USP, São Paulo
- Atlee-Jackson E. (1985), *Perspectives of Nonlinear Dynamics*, Nagoya Institute of Plasma Physics Report 723, March
- Bateman, G. (1978), *MHD Instabilities* (The MIT Press, Mass.)
- Belitz, H.; Dippel, K. A.; Fuchs, G.; Wolf, G. H. (1982), in *Proc. of Euratom Tokamak Workshop*, Schliersee, Germany
- Brusati, M. (1989), *Equilíbrio e Instabilidades em Tokamaks*, Notas de aula (não publicadas), Inst. de Física da USP
- Campbell, A.; Gonzalez, A.; Gonzalez, D. L.; Piro, O.; Larrondo, H. A. (1989), *Isochrones and the Dynamics of Kicked Oscillators*, Physica A155, 565
- Caldas, I. L.; Tasso, H. (1989), *Limit Cycles of Periodically Forced Oscillations*, Phys. Lett. A135, 264
- Caldas, I. L.; Vannucci, A. (1985), *Equilíbrio e Instabilidades do Plasma em Tokamaks*, Publicações IFUSP P-523
- Camargo, S. J.; Caldas, I. L. (1990), *Average Magnetic Surfaces in Tokamaks*, Publicações IFUSP P-825, a ser publicado em

- Plas. Phys. Contr. Fusion.
- Cary, J. R. (1984), *Construction of Three-dimensional Vacuum Magnetic Fields with Dense Nested Flux Surfaces*, Phys. Fluids 27 (1), 119
- Clemente, R. (1989), *Topicos de Magnetohidrodinamica*, Notas de aula (não publicadas), Inst. de Física da USP
- Chirikov, B. V. (1979), *A Universal Instability of Many Oscillator Systems*, Phys. Reports 52, 265
- De Russo, Ray & Close (1965), *State Variables for Engineers*, Wiley, N. Y.
- Ding, E. J. (1987a), *Periodic and Chaotic Behaviour of Driven Oscillators and their Return Maps*, PhD. Thesis, Trondheim, não publicada
- Ding, E. J. (1987b), *Analytic Treatment of a Driven Oscillator with a Limit Cycle*, Phys. Rev. A35, 2669
- Ding, E. J. (1988), *Structure of the Parameter Space for the Van der Pol Oscillator*, Phys. Scripta 38, 10
- Durand, M. (1959), *Magnetostatique*, Dunod, Paris
- Elizondo, J. I. (1990), comunicação pessoal
- Engelhardt, W.; Feneberg, W. (1978), *Influence of an Ergodic Magnetic Limiter on the Impurity Content in a Tokamak*, J. Nucl. Mat. 76 & 77, 518
- Escande, D. F.; Doveil, F. (1981), *Renormalization Method for Computing the Threshold of the Large-scale Stochastic Instability in Two Degrees of Freedom Hamiltonian Systems*, J. Stat. Phys. 26, 257
- Feneberg, W. (1977), *The Use of External Helical Windings for the*

- Production of a Screening Layer in ASDEX and a Tokamak with Material Limiter*, in "Proceedings of 8th European Conference of Controlled Fusion and Plasma Physics, Vol. 1, pg. 3
- Feneberg, W.; Wolf, G. H. (1981), *A Helical Magnetic Limiter for Boundary Layer Control in Large Tokamaks*, Nucl. Fusion 27, 669
- Fernandes, A. S.; Caldas, I. L. (1985), *Campos Ressonantes Criados por Correntes Elétricas Helicoidais em Tokamaks*, Publicações IFUSP P-539
- Fernandes, A. S.; Heller, M. V. A. P.; Caldas, I. L. (1988), *The Destruction of Magnetic Surfaces by Resonant Helical Fields*, Plas. Phys. Contr. Fus. 30, 1203
- Filippov, A. F. (1970), *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*, Reidel Publ. Co., Dordrecht, pp.41
- Filonenko, N. N.; Sagdeev, R. Z.; Zaslavsky, G. M. (1967), *Destruction of Magnetic Surfaces by Magnetic Field Irregularities: Part II*, Nucl. Fus. 7, 253
- Finn, J. M. (1975), *The Destruction on Magnetic Surfaces in Tokamaks by Current Perturbations*, Nucl. Fus. 15, 845
- Freidberg, J. P. (1982), *Ideal MHD Theory of Magnetic Fusion Systems*, Rev. Mod. Phys. 54, 801
- Furth, H. P. (1975), *Tokamak Research*, Nucl. Fus. 15, 487
- Geisel, T.; Zacherl, A.; Radons, G. (1987), *Generic 1/f Noise in Chaotic Hamiltonian Dynamics*, Phys. Rev. Lett. 59, 2503
- Glass, L. (1988), *From Clocks to Chaos : The Rhythms of Life*, Notas de Aula (não publicadas), Instituto de Física da

USP, São Paulo

- Glendinning, P.; Stark, J. (1983), *Computing and Experiments (and Introduction to Computational Dynamics)*, Notas de Aula (não publicadas), Summer School on Dynamical Systems, ICTP, Trieste, Italy
- Grebogi, C.; Ott, E.; Yorke, J. A. (1987), *Chaos, Strange Attractors and Fractal Basin Boundaries in Nonlinear Dynamics*, Science **238**, 787
- Greene, J. M. (1984), *Renormalization and the Breakup of Magnetic Surfaces* in "Statistical Physics and Chaos in Fusion Plasmas, Eds. C. P. W. Horton e L. E. Reichl, Wiley, N. Y., pp. 3
- Greene, J. M. (1979), *A Method for Determining a Stochastic Transition*, J. Math. Phys. **20**, 1183
- Guckenheimer, J.; Holmes, P. (1983), *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer Verlag, N. Y. (Appl. Math. Sci. **42**)
- Hao Bai-Lin (1984), *Chaos*, World Scientific, Singapore. Há uma segunda edição (1989) disponível pela mesma editora.
- Hatori, T.; Irie, H.; Abe, Y.; Urata, K. (1989), *Chaotic Magnetic Field Line in Toroidal Plasmas*, Prog. Theor. Phys. Supplement **98**, 83
- Hénon, M. (1982), *Numerical Exploration of Hamiltonian Systems in "Chaotic Behaviour of Deterministic Systems"* (Eds. G. Iooss, R. H. G. Helleman, R. Stora), Les Houches School 1981, North Holland, Amsterdam, pp. 71
- Hsu, C. S. (1977), *On Nonlinear Parametric Excitation*

- Problems in "Advances in Applied Mechanics", Ed. C.-S. Yih, Academic Press, N. Y., pp. 245
- Ichikawa, Y. H.; Kamimura, T.; Hatori, T.; Kim, S. Y. (1989), *Stochasticity and Symmetry of the Standard Map*, Prog. Theor. Phys. Suppl. 98, 1
- Ichikawa, Y. H.; Kamimura, T.; Hatori, T. (1984), *Statistical Properties of Nonlinear Conservative Maps in "Statistical Physics and Chaos in Fusion Plasmas"*, Eds. G. P. W. Horton, L. E. Reichl, Wiley, N. Y., pp. 21
- Jolley, L. W. D. (1965), *Summation of Series*, Dover, N. Y.
- Karger, F.; Lackner, K. (1977), *Resonant Helical Divertor*, Phys. Lett. A61, 385
- Kerst, D. W. (1962), *The Influence of Errors on Plasma-confining Magnetic Fields*, J. Nucl. Energy C4, 253
- Kucinski, M. Y.; Caldas, I. L. (1987), *Toroidal Helical Fields*, Z. Naturforsch. 42, 1124
- Lauwerier, H. A. (1986), *One Dimensional Iterative Maps*, in "Chaos", Ed. A. Holden, Princeton Univ. Press
- Lichtenberg, A. J.; Lieberman, M. A. (1983), *Regular and Stochastic Motion*, Springer Verlag, N. Y. (Appl. Math. Sci. 38)
- Martin, T. J.; Taylor, J. B. (1984), *Ergodic Behaviour in a Magnetic Limiter*, Plas. Phys. Contr. Fus. 26, 321
- McCool, S. C. et al. (1989), *Electron Thermal Confinement Studies with Applied Resonant Fields on TEXT*, Nucl. Fus. 29, 547
- Moler, C.; Little, J.; Bangert, S. (1987), *PC-MATLAB - User's Guide*, The MathWorks, Inc., Sherborn, Mass.

Referências

- Morozov, A. I.; Solovév, L. S. (1966), *The Structure of Magnetic Fields* in "Reviews of Plasma Physics", Ed. M. A. Leontovich, Consultants Bureau, N. Y., pp. 1
- Nascimento, I. C. et al. (TBR-2 TEAM) (1990), *The TBR-2 Project*, Relatório Interno do Laboratório de Plasmas do IFUSP (não publicado)
- Ohyabu, N. et al. (1985), *Ergodic Magnetic Layer Experiment*, Nucl. Fus. 25, 1684
- Ohyabu, N.; DeGrassie, J. S. (1987), *Possible Applications of a Resonant Helical Magnetic Field in the Tokamak Boundary*, Nucl. Fus. 27, 2171
- Osório de Almeida, A. M. (1987), *Sistemas Hamiltonianos: Caos e Quantização*, Editora da UNICAMP, Campinas. Há uma edição recente também pela Cambridge Univ. Press.
- Pomeau, Y.; Manneville, P. (1980), *Intermittent Transition to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems*, Comm. Math. Phys. 74, 189
- Rañada, A. F. (1983), *Comportamento Caótico en Mecânica No Lineal*, Anales de Física A 79, 67
- Reggiani, N. (1989), *Standard Map: Properties, Transition to Stochasticity and its Application to a Confined Plasma*, M.Sc. thesis, ISAS, Trieste, Italy (não publicada)
- Rosenbluth, M. N.; Sagdeev, R. Z., Taylor, J. B. (1966), *Destruction of Magnetic Surfaces by Magnetic Field Irregularities*, Nucl. Fus. 6, 297
- Sakanaka, P. H. (1981), *Macroscopic Plasma Properties and Stability Theory*, in "Modern Plasma Physics", IAEA, p. 3

Referências

- Schuster, H. G. (1984), *Deterministic Chaos*, Physik Verlag, Mannheim; 2nd. edition (1987) VCH Verlag
- Svireshev, Y. M.; Logofet, D. O. (1983), *Stability of Biological Communities*, Ed. MIR, Moscou
- Takamura, S.; Ohnishi, N.; Yamada, H.; Okuda, T. (1987), *Electric and Magnetic Structure of an Edge Plasma in a Tokamak with a Helical Magnetic Limiter*, Phys. Fluids **30**, 144
- Takamura, S.; Tamakoshi, T.; Miyake, M.; Yamada, H.; Okuda, T. (1988), *Field Line Structure at the Plasma Edge on Ergodic Magnetic Limiter*, Contrib. Plas. Phys., **28**, 393
- Tasso, H. (1986), *Lyapunov Stability and Attractors of Some Systems of Nonlinear Oscillators*, Z. Naturforsch. **41a**, 987
- Tomita, K.; Kai, T.; Hikani, F. (1977), *Entrainment of a Limit Cycle by a Periodic External Oscillation*, Prog. Theor. Phys. **57**, 1159
- Turner, L. (1985), *Hamiltonian Representation for Helically Symmetric Magnetic Fields*, J. Math. Phys. **26**, 991
- Vannucci, A.; Nascimento, I. C.; Caldas, I. L. (1989), *Disruptive Instabilities in the Discharges of the TBR-1 Small Tokamak*, Plas. Phys. Contr. Fus. **31**, 147
- Vannucci, A.; Bender, O. W.; Caldas, I. L.; Tan, I. W.; Nascimento, I. C.; Sanada, E. K. (1990), *Influence of Resonant Helical Windings on the Mirnov Oscillations in a Small Tokamak*, Il Nuovo Cimento **10D**, 1193
- Viana, R. L.; Caldas, I. L.; Tasso, H. (1989a), *Periodic Behaviour in a Class of Periodically Forced Dissipative Integrable Systems*, Publicações IFUSP P-786

Referências

- Viana, R. L.; Caldas, I. L.; Tasso, H. (1989b), *Limit Cycle Behaviour in Some Nonlinear Parametric Impulsive Excitation Problems*, a ser publicado nos "proceedings" do "Gauss Symposium of Mathematics and Theoretical Physics", Ed. R. G. Lintz
- Viana, R. L. (1990), *Introdução à Dinâmica Não-linear e Caos*, Notas de Aula (não publicadas), Departamento de Física da Universidade Federal do Paraná
- Viana, R. L.; Caldas, I. L. (1990a), *Destruction on Magnetic Surfaces in the Edge of a Large Aspect Ratio Tokamak with Ergodic Limiter*, apresentado no IV Latinamerican Workshop on Plasma Physics, Buenos Aires, Argentina
- Viana, R. L.; Caldas, I. L. (1990b), *Field Line Diffusion in a Nonlinear Model for Magnetic Ergodization in Fusion Plasmas*, apresentado no II Latinamerican Workshop on Nonlinear Phenomena, Santiago, Chile
- Viana, R. L.; Caldas, I. L. (1990c), *Comments on the Magnetic Field Generated by an Infinite Current Grid*, submetido para publicação no Eur. J. Phys.
- Wesson, J. (1987), *Tokamaks*, Clarendon Press, Oxford
- White, R. B. (1983), *Resistive Instabilities and Field Line Reconnection*, in "Handbook of Plasma Physics", Vol. 1, Eds. A. A. Galeev, R. N. Sudan, North-Holland, Amsterdam, pp. 663
- Whiteman, K. J. (1977), *Invariants and Stability in Classical Mechanics*, Rep. Progr. Phys. **40**, 1033
- Winfrey, A. T. (1980), *The Geometry of Biological Time*,

Referências

Springer Verlag, N. Y.

Yu, X. Y.; DeGrassie, J. S. (1986), *Mapping Techniques for the GA Ergodic Magnetic Limiter on TEXT*, Texas Fusion Research Center Report # 292

Zaslowsky, G. M.; Chirikov, B. V. (1972), *A Stochastic Instability in a System of Nonlinear Oscillators*, Sov. Phys. Uspekhi 14, 549

Zaslowsky, G. M. (1978), *The Simplest Case of a Strange Attractor*, Phys. Lett. 69A, 145