06/04/95
SBI-IFUSP

305M810T2261

Universidade de São Paulo
Instituto de Física
Departamento de Física Matemática

Tratamento Cinético de um Sistema de Muitos Corpos Descritos pelo Modelo Fermiônico Quiral de Gross-Neveu

Paulo Laerte Natti

Tese de Doutorado
submetida ao Instituto de Física
da Universidade de São Paulo

Banca Examinadora : Prof. Dr. Antônio F. R. de Toledo Piza (USP)
Prof. Dr. Diógenes Galetti (IFT-UNESP)
Prof^a Dra. Maria Carolina Nemes (UFMG)
Prof. Dr. Salomon S. Mizrahi (UFSCar)
Prof. Dr. Tobias Frederico (ITA)

Orientador : Prof. Dr. Antônio Fernando Ribeiro de Toledo Piza

São Paulo
1995

Prof. Iberê Luiz Caldas
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

530.144
N 283A
D
e. 1

FICHA CATALOGRÁFICA

**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Natti, Paulo Laerte

**Tratamento cinético de um sistema de muitos corpos
descritos pelo modelo fermiônico quiral de Gross-Neveu.
São Paulo, 1995.**

**Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo.
Instituto de Física. Departamento de Física Matemática
Área de Concentração: Física Nuclear
Orientador: Prof. Dr. Antonio Fernando Ribeiro
de Toledo Piza**

**Unitermos: 1. Teoria de muitos corpos; 2. Tratamento
cinético; 3. Modelo de Gross-Neveu; 4. Campo médio.
USP/IF/SBI - 05/95**

Aos meus pais

Agradecimentos

Ao Piza, pela orientação e incentivo.

À Érica, pela paciência e pelo constante apoio.

Ao Lin e ao Paolo, pela ajuda e pela amizade.

A todos os colegas da USP.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Resumo

Uma técnica de projeção é usada para tratar o problema de condição inicial na Teoria Quântica de Campos. Neste formalismo, equações de movimento do tipo cinético são deduzidas para o conjunto de variáveis dinâmicas de um corpo. Estas equações são submetidas a uma expansão não perturbativa. Tratamos esta expansão em ordem mais baixa, correspondente à Aproximação de Campo Médio, para um sistema uniforme de muitos férmions fora do equilíbrio descritos pelo Modelo Fermiônico Quiral de Gross-Neveu. Nesta aproximação recuperamos os resultados existentes na literatura tais como geração dinâmica de massa, liberdade assintótica e o fenômeno de transmutação dimensional. Estudando ainda nesta aproximação o regime de pequenas oscilações em torno do equilíbrio, obtemos soluções analíticas para a evolução dinâmica de nossas variáveis. Verificamos também as condições para existências de estados ligados neste regime.

Abstract

A time-dependent projection technique is used to treat the initial value problem in Quantum Field Theory. On the basis of the general dynamics of the fields, we derive equations of kinetic type for the set of one-body dynamics variables. A non-perturbative expansion can be written for these equations. We treat this expansion in lowest order, which corresponds to the Mean-Field Approximation, for a non-equilibrium uniform many-fermions system described by Chiral Gross-Neveu Model. Several literature results are obtained such as dynamical mass generation, dimensional transmutation and asymptotic freedom. In this approximation we study the small oscillations regime obtaining analytical solution for one-body dynamical variables. We have also examined the condition for the existence of bound-state in this case.

Índice

1	Introdução	3
2	Equações Cinéticas na Teoria Quântica de Campos	10
2.1	Caracterização das Variáveis de Interesse	10
2.2	Dinâmica das Variáveis de Interesse	16
2.3	Técnica de Projeção Dependente do Tempo	20
2.4	Aproximação de Campo Médio	25
3	Modelo Fermiônico Quiral de Gross-Neveu (GNQM)	26
3.1	Características do Modelo	27
3.2	Hamiltoniana do Modelo Fermiônico Quiral de Gross-Neveu	28
3.3	Vácuo do Modelo Fermiônico Quiral de Gross-Neveu na Aproximação de Campo Médio	32
4	Dinâmica Efetiva de $\mathcal{R}$ para um Sistema Uniforme de Muitos Férmions Descritos pelo GNQM na Aproximação de Campo Médio	39
4.1	Transformação de Bogoliubov x Transformação de Nambu	40
4.2	Dinâmica Efetiva de $\mathcal{R}$ no Ansatz de Nambu	44
4.3	Dinâmica Efetiva de $\mathcal{R}$ - Caso Livre	50
4.4	Dinâmica Efetiva de $\mathcal{R}$ - Caso Acoplado	57
4.5	Renormalização do Modelo Fermiônico Quiral de Gross-Neveu	64
4.6	Interpretação da Dinâmica Efetiva de $\mathcal{R}$ - Caso Acoplado	69

5 Solução Tipo RPA para a Dinâmica Efetiva de $\mathcal{R}$ na Aproximação de Campo Médio	78
5.1 Linearização das Equações Cinéticas	79
5.2 Solução das Equações de Campo Médio Linearizadas	85
5.3 Estados Ligados de Quasi-Férmions	89
6 Conclusões e Perspectivas	95
A Sistemas Uniformes e as Representações da Matrizes γ^μ de Dirac	97
B Estado Fundamental do Sistema na Aproximação de Campo Médio	104
C Solução Assintótica para a Dinâmica de Quasi-Equilíbrio de $\mathcal{R}$	108
D Tabela de Integrais	112

Capítulo 1

Introdução

Até o início dos anos setenta a teoria tradicional da estrutura nuclear era baseada na equação de Schrödinger que descrevia um sistema não relativístico de muitos prótons e neutrons com interação de dois corpos [1]. A dinâmica era sistematicamente determinada por um potencial núcleon-núcleon estático que descrevia quantitativamente bem as propriedades do dêuteron e do espalhamento de dois corpos. Inicialmente a Teoria de Hartree-Fock forneceu as bases para a descrição de fenômenos em sistema de muitos corpos não relativísticos. Na Aproximação de Hartree-Fock os núcleons movem-se em um potencial auto-consistente de uma partícula, potencial que surge de suas interações com o restante das demais partículas; neste sentido a Aproximação de Hartree-Fock é uma Aproximação de Campo Médio (MFA). Na Aproximação de Hartree-Fock o estado do sistema é obtido através do produto antissimetrizado das funções de ondas dos núcleons, as quais são determinadas variacionalmente. Através deste procedimento obtém-se um conjunto integro-diferencial não linear e acoplado de equações de ondas de uma partícula, nas quais cada núcleon move-se no potencial auto-consistente de Hartree-Fock.

Um grande progresso foi conseguido durante os anos sessenta quando conseguiu-se resolver as equações de Hartree-Fock empregando potenciais efetivos de dois corpos, deduzidos de potenciais realísticos, que podiam ser ajustados para reproduzir as propriedades da matéria nuclear. Tipicamente estas interações envolviam uma dependência explícita da densidade nuclear e por isso estes cálculos são conhecidos como Aproximação de Hartree-Fock Dependente da Densidade (DDHF) [1]. Este cálculos foram bem sucedidos em explicar

o espectro de partícula independente, massas e tamanhos nucleares. Posteriormente a esse sucesso, foi ainda possível estabelecer contacto quantitativo entre os potenciais efetivos dependentes da densidade e potenciais fenomenológicos realísticos do tipo Reid [2].

Apesar do sucesso do formalismo não relativístico de muitos corpos em explicar a estrutura nuclear a partir de um potencial estático de dois corpos, esta abordagem mostrou-se inadequada para o entendimento do núcleo. Estudos realizados no início dos anos setenta indicaram que forças de três corpos não poderiam em princípio ser negligenciadas, pois graus de liberdade mesônicos não são desprezíveis no estado fundamental do núcleo. Analogamente ao fóton da Eletrodinâmica Quântica (QED), a troca de mésons, que são os quantas da força nuclear, é responsável pela interação forte entre os núcleons, sugerindo que estes trocam mésons no interior do núcleo. Por outro lado, os próprios núcleons possuem excitações intrínsecas (ressonâncias) e portanto um tratamento teórico consistente e completo do núcleo envolve uma descrição explícita dos graus de liberdade bariônicos (núcleons e suas excitações) e mesônicos (π , σ , ω , ρ , ...) do sistema nuclear. Ainda neste período, além da descrição do núcleo, surgiram outras aplicações à física nuclear que dependiam do comportamento da matéria nuclear em condições extremas tais como o estudo de estrelas de neutrons, de supernovas ou de colisões de íons pesados a altas energias.

Portanto, tornava-se necessária uma descrição teórica para a física nuclear que incorporasse os princípios da covariância de Lorentz e da relatividade especial. A única estrutura consistente conhecida que descreva um sistema relativístico quanto-mecânico de muitos corpos é a Teoria Quântica de Campos (QFT) baseada em uma densidade de Lagrangiana local e invariante de Lorentz. Tal descrição foi chamada Hadrodinâmica Quântica (QHD) [3]. Nesta nova abordagem da matéria nuclear o vácuo desempenha um papel fundamental deixando de ser estático e tornando-se um objeto dinâmico possibilitando a produção de pares de núcleon-antinúcleon.

Evidentemente a Eletrodinâmica Quântica serviu de protótipo de tal teoria nuclear. Na QED [4] as quantidades calculadas são sistematicamente expandidas perturbativamente em termos do pequeno parâmetro $\alpha = e^2/4\pi = 1/137$ e devido ao seu espetacular sucesso quantitativo, o método perturbativo permanece ainda hoje como uma importante ferramenta na investigação da Teoria Quântica de Campos. Contudo, como a Hadrodinâmica

Quântica descreve a interação forte, com constantes de acoplamento maiores que a unidade, é claro que o método perturbativo é incapaz de mostrar a rica estrutura da Hadrodinâmica Quântica como Teoria Quântica de Campos.

Simultaneamente ao desenvolvimento da Hadrodinâmica Quântica verificou-se que hádrons eram compostos de quarks (q). Os quarks possuem um grau de liberdade interno chamado cor e combinam-se em multipletos para formar os mésons ($q\bar{q}$) e bárions (qqq). Uma Teoria de Gauge Local foi desenvolvida para descrever a interação forte que liga quarks em hádrons, teoria esta que contém oito mésons vetoriais não massivos (gluons) que carregam cor e mediam a interação. Esta teoria é conhecida como Cromodinâmica Quântica (QCD) [5]. Na Cromodinâmica Quântica as interações tornam-se fracas a pequenas distâncias, fenómeno conhecido como liberdade assintótica e portanto um tratamento perturbativo neste limite (fase plasma quark-gluon) fornece resultados simples e elegantes. Por outro lado, se quisermos estudar distâncias da ordem do tamanho do núcleon a Cromodinâmica Quântica torna-se complicada e um tratamento perturbativo deixa de ser adequado, pois para estas distâncias a troca de mésons é dominante para a força nuclear e desempenha um papel essencial no entendimento da estrutura nuclear. Assim, para tais distâncias modelos do tipo QHD mostram-se mais apropriados.

Ao contrário da fase plasma quark-gluon, onde podemos empregar o método perturbativo, a fase hadrônica da matéria nuclear é caracterizada por problemas tipicamente não perturbativos. Dentre os problemas não perturbativos da QFT estudados a partir da década de setenta citamos

i) Estudo do espectro de estados ligados. O espalhamento núcleon-núcleon já envolve processos fortes onde ocorrem trocas de mésons e portanto um estado ligado de núcleons certamente não deve ser tratado perturbativamente. Existem vários esquemas de aproximações não perturbativas disponíveis para o cálculo de estados ligados na Teoria Quântica de Campos, dentre os quais mencionamos a equação de Bethe-Salpeter [4], a aproximação semi-clássica ou de fase estacionária [6], os métodos variacionais [7] e a aproximação adiabática de Born-Oppenheimer [8].

ii) Confinamento de quarks [5]. Este fenómeno justifica o fato dos quarks não serem detectados como estados livres na natureza. A QCD faz a hipótese de que a cor é confinada no

interior dos hádrons e portanto os hádrons são sem cor. Outros modelos fenomenológicos, conhecidos como *bag models*, sugerem que os quarks e gluons estão confinados numa bolha e que a pressão quantum-mecânica impede que esta colapse.

iii) Quebra de simetria x Geração de massa [9]. A idéia básica por detrás dos modelos que descrevem interações é o fato de que a Lagrangiana do sistema exibe uma simetria a qual não é compartilhada pelo vácuo. Há duas formas de se gerar massa através da quebra de simetria. No Modelo de Glashow-Weinberg-Salam que descreve a interação eletrofraca, as massas dos bósons vetoriais de Gauge $[(W^\pm)_\mu, (Z^0)_\mu]$ e dos férmions são geradas através das interações destes com um bóson escalar fundamental (bóson de Higgs), fenômeno este conhecido como quebra espontânea de simetria. Existe outra possibilidade de se gerar massa sem a necessidade de bósons escalares fundamentais, que ocorre através da chamada quebra dinâmica de simetria, onde os bósons escalares são substituídos por um condensado férmion-antiférmion com valor não nulo no vácuo. Para ilustrar este último fenômeno citamos a quebra da simetria quiral na interação forte. Esta simetria origina-se na peculiaridade das massas dos quarks u e d (aproximadamente 10 MeV) serem muito menores quando comparadas com a massa de seus estados ligados. A grosso modo, num bárion (próton ou neutron) os quarks u e d comportam-se como se tivessem uma massa efetiva de 300 MeV. Este processo de geração dinâmica de massa fermiônica não é explicado perturbativamente.

Finalmente, durante a última década notamos que a descrição de fenômenos relativísticos fora do equilíbrio, logo no contexto da QFT, dada uma condição inicial, tem ganho uma importância considerável em duas áreas da física:

i) Com o advento do Cenário Inflacionário do Universo, devido as falhas do Modelo Cosmológico Padrão, tornou-se necessário descrever a evolução temporal de um campo escalar responsável pela inflação, o qual devido a uma quebra de simetria da Teoria de Grande Unificação (GUT) adquire massa, enquanto evolui de um vácuo metaestável para o vácuo estável. Para que as inomogeneidades geradas durante a evolução sejam compatíveis com os dados observacionais, os campos escalares devem interagir fracamente e a transição deve ocorrer lentamente (transição *slow-rollover*) [10] dada uma condição inicial. Para se estabelecer a validade dos diversos cenários inflacionários é necessário analisar, dado um

estado inicial, a evolução temporal deste campo escalar que encontra-se fora do equilíbrio térmico com o resto do universo [11], e

ii) na descrição das propriedades da matéria hadrônica, as quais só são acessíveis experimentalmente através de colisões nucleares que envolvem situações drasticamente fora do equilíbrio. Enquadram-se nestes estudos a descrição de colisões de íons pesados que oferecem a possibilidade de estudar a matéria nuclear em condições extremas [12]. Note que em colisões de íons pesados com energias superiores a 0.1 GeV/A os efeitos relativísticos deixam de ser desprezíveis, tornando-se importante estudar tais reações no contexto da QFT. Na região de energias intermediárias ($0.1 \text{ GeV/A} < E < 10 \text{ GeV/A}$) estuda-se a física de colisões nucleares obtendo-se informações sobre as propriedades básicas da Equação de Estado Nuclear (EOS) tais como a compressibilidade nuclear, a produção de K^+ (ou de pares $s\bar{s}$) e a distribuição de momento transversal. Uma melhor compreensão da Equação de Estado Nuclear é importante para aplicações à Astrofísica tais como o estudo do interior de estrelas de nêutrons e supernovas. Já na região de energias ultrarelativísticas ($E > 10 \text{ GeV/A}$) estuda-se a fase plasma quark-gluon [13] na qual quarks e glúons não são confinados em regiões da ordem do volume da colisão. O estudo destas colisões é importante para uma melhor compreensão da evolução do universo primordial após a fase inflacionária.

Logo, a partir dos anos oitenta, com o objetivo de melhor compreender a matéria nuclear em escalas de distâncias extremamente pequenas, com o surgimento do Cenário do Universo Inflacionário e com a entrada em funcionamento de novos aceleradores de íons pesados capazes de atingirem energias superiores a 1 GeV/A , tornou-se necessário desenvolver o formalismo da Teoria Quântica de Campos Fora do Equilíbrio. Evidentemente, a expansão perturbativa das funções de Green foi realizada e regras de Feynman para a QFT fora do equilíbrio foram obtidas [14], contudo argumentamos novamente que em geral o método perturbativo não é adequado para descrever estes fenômenos ditos de transporte, os quais estão associados a processos essencialmente cinéticos que ocorrem em situações descritas como fora do equilíbrio e que dependem de uma condição inicial.

Assim, com o objetivo de descrever sistemas quânticos relativísticos fora do equilíbrio dada uma condição inicial, os quais estão associados a fenômenos tais como quebras de simetrias, geração de massa, transição de fase..., foram desenvolvidas técnicas não perturbativas

para estudar tais situações no contexto da QFT. Em geral estes cálculos são implementados através de um tratamento cinético auto-consistente baseado em uma aproximação de campo médio, ou seja, baseado numa aproximação do tipo Hartree-Fock [3] ou equivalentemente baseado no método variacional que utiliza como *ansatz* um funcional gaussiano para a matriz densidade [7, 11].

O objetivo deste trabalho é implementar no caso de campos fermiônicos uma técnica para tratar o problema de condição inicial na aproximação de campo médio. Esta técnica foi desenvolvida anteriormente no contexto da mecânica quântica não relativística [15] e aplicada recentemente à teoria bosônica autointeragente $\lambda\phi^4$ em (1+1) dimensões [16]. Tomaremos o Modelo Fermiônico Quiral de Gross-Neveu (GNQM) em (1+1) dimensões [17] para descrever a dinâmica do sistema de muitos férmions.

No capítulo 2 apresentaremos o tratamento cinético desenvolvido por Toledo Piza e Nemes [15], encontrando as equações cinéticas que descrevem a dinâmica efetiva de um sistema de muitos férmions. Em seguida discutiremos aproximações necessárias para que estas equações tornem-se trabalháveis.

No capítulo 3 justificaremos a escolha do Modelo Fermiônico Quiral de Gross-Neveu para descrever a dinâmica do sistema fermiônico de muitos corpos. Através de um cálculo variacional encontraremos o estado fundamental (vácuo) deste sistema na Aproximação de Campo Médio. Este resultado nos guiará nos capítulos seguintes.

No capítulo 4 implementaremos o tratamento cinético e obteremos na Aproximação de Campo Médio as equações cinéticas que descrevem a dinâmica efetiva de um sistema espacialmente uniforme de muitos férmions descritos pelo Modelo Fermiônico Quiral de Gross-Neveu. Estudando as equações estáticas renormalizaremos a teoria. Isto nos permitirá interpretar a física de nosso sistema fermiônico.

No capítulo 5 estudaremos equações RPA, ou seja, equações que descrevem oscilações de pequenas amplitudes em torno dos pontos de equilíbrio do sistema, pontos estes encontrados na Aproximação de Campo Médio no capítulo anterior. Finalmente, a partir destas equações discutimos a física de estados ligados e interpretamos os resultados.

No capítulo 6 faremos um resumo das principais conclusões que o presente estudo permite e traçaremos algumas perspectivas de desenvolvimento futuro.

Finalmente, alguns pormenores mais técnicos são apresentados em apêndices.

Capítulo 2

Equações Cinéticas na Teoria Quântica de Campos

Neste capítulo apresentamos um tratamento não perturbativo para o problema de condição inicial no contexto da Teoria Quântica de Campos de um sistema relativístico de muitos férmions fora do equilíbrio. Esta técnica desenvolvida por Toledo Piza e Nemes nos fornecerá equações do tipo cinético que descrevem a evolução temporal do sistema fermiônico. A partir destas equações exatas discutimos as aproximações conservativas não perturbativas deste tratamento [15, 16] que tornam trabalháveis as equações cinéticas obtidas.

2.1 Caracterização das Variáveis de Interesse

A idéia básica do tratamento que utilizaremos consiste no estudo da dinâmica efetiva (evolução temporal) do conjunto de variáveis de um corpo (densidades de um corpo e de emparelhamento) de um sistema espacialmente uniforme (homogêneo e isotrópico) de muitos férmions. A motivação de estudarmos a evolução temporal de densidades de um corpo é que a maioria das observáveis físicas (exceto feita à Hamiltoniana) são operadores de um corpo e consequentemente o estudo de tais densidades é desejável. Por outro lado, embora o tratamento permita a descrição de sistemas não uniformes e finitos, por razões técnicas que serão justificadas posteriormente, vamos nos restringir ao estudo de sistema uniformes.

Com o objetivo de implementar nosso estudo, comecemos por caracterizar as variáveis fermiônicas de um corpo. Primeiramente consideremos os operadores de campo de Dirac na Representação de Heisenberg expandidos na base das soluções da equação de Dirac massiva em (1+1) dimensões,

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{m}{k_0}\right)^{1/2} \left[b_{\mathbf{k},1}(x_0) u_1(\mathbf{k}) \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{\sqrt{L}} + b_{\mathbf{k},2}^\dagger(x_0) u_2(\mathbf{k}) \frac{e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{\sqrt{L}} \right] \\ \bar{\psi}(x) &= \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{m}{k_0}\right)^{1/2} \left[b_{\mathbf{k},1}^\dagger(x_0) \bar{u}_1(\mathbf{k}) \frac{e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{\sqrt{L}} + b_{\mathbf{k},2}(x_0) \bar{u}_2(\mathbf{k}) \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{\sqrt{L}} \right],\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde i) $\mathbf{x}$ é a coordenada espacial enquanto $(k_0)^2 = (\mathbf{k})^2 + m^2$ e $kx = k_0 x_0 - \mathbf{k}\mathbf{x}$

ii) $b_{\mathbf{k},1}^\dagger$ e $b_{\mathbf{k},1}$ são os operadores fermiônicos de criação e aniquilação associados à solução de energia positiva da equação de Dirac, analogamente $b_{\mathbf{k},2}^\dagger$ e $b_{\mathbf{k},2}$ são operadores fermiônicos de criação e aniquilação associados à solução de energia negativa da equação de Dirac. Estes operadores fermiônicos obedecem as regras de anticomutação a tempos iguais

$$\{b_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger(x_0), b_{\mathbf{k}',\lambda'}(x'_0)\}_{x_0=x'_0} = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \delta_{\lambda,\lambda'} \quad \text{para } \lambda, \lambda' = 1, 2\tag{2.2}$$

$$\{b_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger(x_0), b_{\mathbf{k}',\lambda'}^\dagger(x'_0)\}_{x_0=x'_0} = \{b_{\mathbf{k},\lambda}(x_0), b_{\mathbf{k}',\lambda'}(x'_0)\}_{x_0=x'_0} = 0$$

iii) $u_1(\mathbf{k})$ e $u_2(\mathbf{k})$ são as soluções de energia positiva e negativa respectivamente da equação de Dirac massiva em (1+1) dimensões (veja apêndice A)

iv) as ondas planas foram quantizadas com condições periódicas de contorno numa caixa de tamanho L e com o campo obedecendo a normalização

$$\int \psi^\dagger(x) \psi(x) d\mathbf{x} = 1\tag{2.3}$$

v) as componentes do campo e de seu respectivo operador de campo conjugado obedecem as regras de anticomutação a tempos iguais

$$\{\psi_\alpha(x), \Pi_\beta(y)\}_{x_0=y_0} = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta_{\alpha,\beta} \quad (2.4)$$

para $\Pi(y) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi)} = i\psi^\dagger(y)$.

Neste ponto convém observar a diferença do estudo de sistemas de muitos corpos (campos) espacialmente uniformes e espacialmente não uniformes. Entende-se por sistemas uniformes, sistemas que apresentam invariância translacional (sistemas homogêneos) e invariância rotacional (sistemas isotrópicos). No caso de sistemas espacialmente unidimensionais chamamos de uniformes, sistemas que apresentam invariância por translação e reflexão.

Uma maneira de introduzir não uniformidades em nosso sistema seria quebrar a invariância translacional do mesmo, transformando-o num sistema não homogêneo. Isto pode ser realizado expandindo os operadores de campo de Dirac numa outra base de soluções $f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$, as quais exibam estruturas espaciais ou limites, ao invés de expandi-los na base das soluções de Dirac que contêm ondas planas. Veja a expansão realizada em (2.1).

Outra maneira de introduzir não uniformidade em nosso sistema de muitos corpos é através dos spinores de Dirac $u_1(\mathbf{k})$ e $u_2(\mathbf{k})$. Dependendo da representação que escolhermos para as matrizes γ^μ , poderemos estar quebrando a invariância por reflexão do nosso sistema. Em outras palavras, as equações cinéticas que descrevem a evolução temporal de nosso sistema de muitos corpos espacialmente unidimensional não serão invariantes sob a transformação $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$, significando que temos físicas diferentes dependendo da direção observada, o que obviamente não traduz um sistema uniforme.

No apêndice A apresentamos um estudo que permite diferenciar as várias representações das matrizes γ^μ de Dirac invariantes por reflexão, mas gostaríamos de alertar desde já que as representações de Weil e Majorana não são compatíveis com a descrição de um sistema que evolui espacialmente de forma uniforme. Veja também ref. [18].

Tomados estes cuidados para que os campos $\psi(x)$ e $\bar{\psi}(x)$ descrevam sistema uniformes de muitos corpos, caracterizemos as variáveis de um corpo que desejamos estudar. Consideremos o operador matriz densidade extendida de um corpo $\mathcal{R}$ [1] escrito na base dos operadores de criação e aniquilação definidos acima, a qual chamamos de base de partículas de Dirac,

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} R_{\mathbf{k}',\mathbf{k}} & \Pi_{\mathbf{k}',\mathbf{k}} \\ -\Pi_{\mathbf{k}',\mathbf{k}}^* & I_2 - R_{\mathbf{k}',\mathbf{k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle b_{\mathbf{k}',\lambda'}^\dagger(x_0) b_{\mathbf{k},\lambda}(x_0) \rangle & \langle b_{\mathbf{k}',\lambda'}(x_0) b_{\mathbf{k},\lambda}(x_0) \rangle \\ \langle b_{\mathbf{k}',\lambda'}^\dagger(x_0) b_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger(x_0) \rangle & \langle b_{\mathbf{k}',\lambda'}(x_0) b_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger(x_0) \rangle \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

onde: i) $R_{\mathbf{k}',\lambda';\mathbf{k},\lambda} = Tr[(b_{\mathbf{k}',\lambda'}^\dagger b_{\mathbf{k},\lambda})\mathcal{F}]$ para $\lambda, \lambda' = 1, 2$

ii) $\Pi_{\mathbf{k}',\lambda';\mathbf{k},\lambda} = Tr[(b_{\mathbf{k}',\lambda'} b_{\mathbf{k},\lambda})\mathcal{F}]$ para $\lambda, \lambda' = 1, 2$

iii) I_2 é a matriz (2x2) identidade

iv) $\mathcal{F}$ é o operador matriz densidade completa de muitos corpos que descreve o estado do sistema. Enquanto $\mathcal{R}$ contém somente as densidades de um corpo, a matriz densidade completa contém as densidades de um corpo, dois corpos,..., N corpos.

Observamos que $\mathcal{R}$ contém todas as possíveis variáveis fermiônicas de um corpo, de modo que estudar a dinâmica efetiva destas variáveis é equivalente a estudar a dinâmica de $\mathcal{R}$. Logo, estudemos melhor o operador matriz densidade extendida de um corpo na base de partículas, o qual é composto das matrizes (2x2) densidade R e Π . Notamos que a matriz densidade R , conhecida como matriz densidade normal de um corpo, é hermitiana. Por outro lado, a matriz densidade Π , conhecida como matriz densidade anormal ou de emparelhamento, é antissimétrica. Portanto, podemos concluir que $\mathcal{R}$ é hermitiana e consequentemente pode ser diagonalizada, via uma transformação unitária, tendo autovalores reais. Os respectivos autoestados são conhecidos como orbitais naturais, enquanto os autovalores dão as correspondentes probabilidades de ocupação.

Quando $\mathcal{R}$ é escrito na base de partículas, ou seja, em termos dos operadores de campo $b_{\mathbf{k},1}^\dagger$, $b_{\mathbf{k},1}$, $b_{\mathbf{k},2}^\dagger$ e $b_{\mathbf{k},2}$, ele é não diagonal, pois em geral existem densidades do tipo emparelhamento na matéria fermiônica. Por outro lado $\mathcal{R}$ pode ser diagonalizado através de uma transformação unitária e quando escrito nesta outra base, conhecida como base de quasi-partículas, as densidades de emparelhamento são nulas. A transformação que diagonaliza $\mathcal{R}$ é a transformação de Bogoliubov [1].

A transformação de Bogoliubov capacita-nos a estudar por exemplo, o estado fundamental de um gás de partículas interagindo em pares através de um gás não interagente de quasi-partículas. Isto pode ser facilmente entendido quando consideramos a transformação de Bogoliubov abaixo,

$$\begin{bmatrix} \beta_{\mathbf{k},1}(x_0) \\ \beta_{\mathbf{k},2}(x_0) \\ \beta_{-\mathbf{k},1}^\dagger(x_0) \\ \beta_{-\mathbf{k},2}^\dagger(x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{\mathbf{k}}^* & Y_{\mathbf{k}}^* \\ Y_{\mathbf{k}} & X_{\mathbf{k}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{\mathbf{k},1}(x_0) \\ b_{\mathbf{k},2}(x_0) \\ b_{-\mathbf{k},1}^\dagger(x_0) \\ b_{-\mathbf{k},2}^\dagger(x_0) \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

onde observamos que um operador de campo na base de quasi-partículas de Bogoliubov é escrito como uma combinação linear de todos os outros operadores de campo da base de partículas e assim, uma densidade normal de um corpo na base de quasi-partículas, por exemplo $\beta_{\mathbf{k},2}^\dagger \beta_{\mathbf{k},2}$, contém densidades de emparelhamento quando escrita na base de partículas.

Portanto, vemos que é possível tratar uma parte das correlações de pares, o emparelhamento por exemplo, na aproximação de campo médio através da técnica conhecida na teoria de muitos corpos como Hartree-Fock-Bogoliubov.

O fato da transformação que diagonaliza $\mathcal{R}$ (transformação de Bogoliubov) ser unitária, implica que a transformação dos operadores de campo é canônica, ou seja, os operadores $\beta_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger(x_0)$ e $\beta_{\mathbf{k},\lambda}(x_0)$, para $\lambda = 1, 2$, obedecem as mesmas regras de anticomutação de $b_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger(x_0)$ e $b_{\mathbf{k},\lambda}(x_0)$ a tempos iguais,

$$\begin{aligned}
\{\beta_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger(x_0), \beta_{\mathbf{k}',\lambda'}(x'_0)\}_{x_0=x'_0} &= \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\delta_{\lambda,\lambda'} \text{ para } \lambda, \lambda' = 1, 2 \\
\{\beta_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger(x_0), \beta_{\mathbf{k}',\lambda'}^\dagger(x'_0)\}_{x_0=x'_0} &= \{\beta_{\mathbf{k},\lambda}(x_0), \beta_{\mathbf{k}',\lambda'}(x_0)\}_{x_0=x'_0} = 0 .
\end{aligned}
\tag{2.7}$$

Convém finalmente observar que através da transformação de Bogoliubov, poderíamos ter introduzido inomogeneidades em nosso sistema caso partíssemos com os operadores de campo expandidos na base das soluções da equação de Dirac e deixássemos que as matrizes $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ da transformação de Bogoliubov dependessem de todos os momentos $\mathbf{k}'$. Isto significa que, enquanto no caso homogêneo a transformação de Bogoliubov depende apenas do momento $\mathbf{k}$ (veja 2.6), no caso não homogêneo dependeria de $\mathbf{k}$ e $\mathbf{k}'$, de modo que um operador de campo na base de quasi-partículas seria agora uma somatória em $\mathbf{k}'$ (inclusive para $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$) da combinação linear de todos os outros operadores da base de partículas. Assim sendo, no caso de uma transformação de Bogoliubov geral os campos $\psi(x)$ e $\bar{\psi}(x)$, escritos na base de quasi-partículas de Bogoliubov, representariam sistemas não translacionalmente invariantes.

Ainda no caso não homogêneo, observamos que densidades do tipo

$$R_{\mathbf{k}',\lambda';\mathbf{k},\lambda} = Tr[(\beta_{\mathbf{k}',\lambda'}^\dagger, \beta_{\mathbf{k},\lambda})\mathcal{F}] \neq 0$$

são não nulas para $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$ e $\lambda \neq \lambda'$, pois a transformação de Bogoliubov geral introduz correlações entre os vários momentos. Já no caso de uma transformação homogênea de Bogoliubov temos

$$R_{\mathbf{k}',\lambda';\mathbf{k},\lambda} = Tr[(\beta_{\mathbf{k}',\lambda'}^\dagger, \beta_{\mathbf{k},\lambda})\mathcal{F}] = \nu_{\mathbf{k},\lambda}\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\delta_{\lambda,\lambda'} .$$

Destas observações fica claro que o estudo de sistemas não homogêneos é extremamente mais complicado, principalmente do ponto de vista computacional, quando comparado ao estudo de sistemas homogêneos. Nossa abordagem restringir-se-á ao estudo de sistema fermiônicos homogêneos.

No caso de sistemas homogêneos as matrizes $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ da transformação de Bogoliubov dependem apenas de um único momento $\mathbf{k}$ e consequentemente o operador matriz densidade estendida de um corpo escreve-se na base de partículas e na base de quasi-partículas respectivamente como

$$\mathcal{R}_{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} R_{\mathbf{k}} & \Pi_{\mathbf{k}} \\ -\Pi_{\mathbf{k}}^* & I_2 - R_{\mathbf{k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle b_{\mathbf{k},\lambda'}^\dagger(x_0) b_{\mathbf{k},\lambda}(x_0) \rangle & \langle b_{-\mathbf{k},\lambda'}(x_0) b_{\mathbf{k},\lambda}(x_0) \rangle \\ \langle b_{-\mathbf{k},\lambda'}^\dagger(x_0) b_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger(x_0) \rangle & \langle b_{\mathbf{k},\lambda'}(x_0) b_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger(x_0) \rangle \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$Q_{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \nu_{\mathbf{k}} & 0 \\ 0 & I_2 - \nu_{\mathbf{k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \beta_{\mathbf{k},\lambda'}^\dagger(x_0) \beta_{\mathbf{k},\lambda}(x_0) \rangle & \langle \beta_{-\mathbf{k},\lambda'}(x_0) \beta_{\mathbf{k},\lambda}(x_0) \rangle \\ \langle \beta_{-\mathbf{k},\lambda'}^\dagger(x_0) \beta_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger(x_0) \rangle & \langle \beta_{\mathbf{k},\lambda'}(x_0) \beta_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger(x_0) \rangle \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

onde $\nu_{\mathbf{k}}$ é a matriz densidade normal de um corpo na base de quasi-partículas, a qual é diagonal com autovalores $\nu_{\mathbf{k},1}$ e $\nu_{\mathbf{k},2}$ que são as probabilidades de ocupação do respectivo estado (orbital natural).

2.2 Dinâmica das Variáveis de Interesse

Com o objetivo de tratar correlações de emparelhamento ao se estudar densidades de um corpo empregaremos a técnica de Hartree-Fock-Bogoliubov também conhecida como *Time Dependent Hartree-Fock-Bogoliubov* (TDHFB) [19]. Ela consiste em primeiramente diagonalizar $\mathcal{R}$ com o propósito de tratar as correlações de emparelhamento em termos dos orbitais naturais. Em seguida toma-se as derivadas temporais das variáveis de interesse e utilizando-se a equação de movimento de Heisenberg obtém-se a dinâmica efetiva de $\mathcal{R}$.

Começamos por diagonalizar $\mathcal{R}$ resolvendo o seguinte problema secular

$$\mathcal{X}_{\mathbf{k}}^\dagger \mathcal{R}_{\mathbf{k}} \mathcal{X}_{\mathbf{k}} = Q_{\mathbf{k}}, \quad (2.10)$$

onde $\mathcal{X}_{\mathbf{k}}$ é a transformação de Bogoliubov (2.6) que diagonaliza o operador matriz densidade estendida $\mathcal{R}_{\mathbf{k}}$ (2.8) escrito na base de partículas, enquanto $Q_{\mathbf{k}}$ é o operador matriz densi-

dade extendida (2.9) escrito na base de quasi-partículas de Bogoliubov. A transformação $\mathcal{X}_k$ obedece as seguintes equações de unitariedade

$$\mathcal{X}_k^\dagger \mathcal{X}_k = I_4 \quad \text{e} \quad \mathcal{X}_k \mathcal{X}_k^\dagger = I_4 , \quad (2.11)$$

onde

$$\mathcal{X}_k = \begin{bmatrix} X_k^* & Y_k^* \\ Y_k & X_k \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{X}_k^\dagger = \begin{bmatrix} X_k^T & Y_k^\dagger \\ Y_k^T & X_k^\dagger \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

ou ainda em termos das matrizes X_k e Y_k , temos as seguintes equações matriciais (2x2)

$$Y_k Y_k^\dagger + X_k X_k^\dagger = I_2 \quad Y_k X_k^T + X_k Y_k^T = 0_2 \quad (2.13)$$

$$Y_k^\dagger Y_k + X_k^T X_k^* = I_2 \quad Y_k^T X_k^* + X_k^\dagger Y_k = 0_2 .$$

Derivando temporalmente a equação matricial (2.10) e utilizando as relações de unitariedade (2.11) de $\mathcal{X}$ obtemos

$$\mathcal{X}_k^\dagger \dot{\mathcal{R}}_k \mathcal{X}_k = \dot{Q}_k - \dot{\mathcal{X}}_k^\dagger \mathcal{X}_k Q_k - Q_k \mathcal{X}_k^\dagger \dot{\mathcal{X}}_k . \quad (2.14)$$

Substituindo (2.9) e (2.12) em (2.14) e utilizando-se das relações de unitariedade (2.13) obtemos a seguinte equação matricial

$$i\mathcal{X}_k^\dagger \dot{\mathcal{R}}_k \mathcal{X}_k = \begin{bmatrix} i\dot{\nu}_k + [\nu_k, h_k^*]_- & -g_k^* + \{\nu_k, g_k^*\}_+ \\ -g_k + \{\nu_k, g_k\}_+ & -i\dot{\nu}_k + [\nu_k, h_k]_- \end{bmatrix} , \quad (2.15)$$

onde $\{ , \}_+$ denota um anticomutador e $[,]_-$ denota um comutador e

$$\begin{aligned}
h_{\mathbf{k}} &= -i(\dot{Y}_{\mathbf{k}}^T Y_{\mathbf{k}}^* + \dot{X}_{\mathbf{k}}^\dagger X_{\mathbf{k}}) \\
g_{\mathbf{k}} &= -i(\dot{Y}_{\mathbf{k}}^T X_{\mathbf{k}}^* + \dot{X}_{\mathbf{k}}^\dagger Y_{\mathbf{k}}) .
\end{aligned}
\tag{2.16}$$

Como trabalhamos na representação de Heisenberg, a matriz densidade completa de muitos corpos $\mathcal{F}$ é independente do tempo, enquanto a matriz densidade estendida de um corpo $\mathcal{R}$ depende do tempo, através dos operadores $b_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger(x_0)$ e $b_{\mathbf{k},\lambda}(x_0)$. Derivando com relação ao tempo a matriz densidade normal e a matriz densidade de emparelhamento

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}R_{\mathbf{k}} &= Tr \left(\left\{ \frac{d}{dt} [b_{\mathbf{k},\lambda'}^\dagger(x_0)b_{\mathbf{k},\lambda}(x_0)] \right\} \mathcal{F} \right) \\
\frac{d}{dt}\Pi_{\mathbf{k}} &= Tr \left(\left\{ \frac{d}{dt} [b_{-\mathbf{k},\lambda'}(x_0)b_{\mathbf{k},\lambda}(x_0)] \right\} \mathcal{F} \right)
\end{aligned}
\tag{2.17}$$

e utilizando-se da equação de Heisenberg, além da invariância cíclica do traço, obtemos as seguintes expressões

$$\begin{aligned}
i\dot{R}_{\mathbf{k}} &= Tr \left([b_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger, b_{\mathbf{k},\lambda}, H] \mathcal{F} \right) \\
i\dot{\Pi}_{\mathbf{k}} &= Tr \left([b_{-\mathbf{k},\lambda'}, b_{\mathbf{k},\lambda}, H] \mathcal{F} \right) .
\end{aligned}
\tag{2.18}$$

A partir da equação matricial (2.15), sabendo que $\mathcal{X}$ é a matriz que transforma $\mathcal{R}$ (ou sua derivada) da base de partículas para a base de quasi-partículas, e utilizando-se de (2.18), obtemos as equações (2x2) que descrevem a dinâmica efetiva de $\mathcal{R}$ na base das quasi-partículas de Bogoliubov para um sistema uniforme

$$\begin{aligned}
i\dot{\nu}_{\mathbf{k}} + [\nu_{\mathbf{k}}, h_{\mathbf{k}}^*]_- &= Tr \left([\beta_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger, \beta_{\mathbf{k},\lambda}, H] \mathcal{F} \right) \\
-g_{\mathbf{k}}^* + \{\nu_{\mathbf{k}}, g_{\mathbf{k}}^*\}_+ &= Tr \left([\beta_{-\mathbf{k},\lambda'}, \beta_{\mathbf{k},\lambda}, H] \mathcal{F} \right) .
\end{aligned}
\tag{2.19}$$

Devemos notar que $X_{\mathbf{k}}$ e $Y_{\mathbf{k}}$ são matrizes (2x2) com índices λ e λ' , logo $h_{\mathbf{k}}$ e $g_{\mathbf{k}}$ dadas em (2.16) são também matrizes (2x2) com elementos $h_{\lambda',\lambda}$ e $g_{\lambda',\lambda}$. Por outro lado, $\nu_{\mathbf{k}}$ é a matriz (2x2) de ocupação de quasi-partículas (anti quasi-partículas) de Bogoliubov definida em (2.9),

$$\nu_{\mathbf{k}} = \langle \beta_{\mathbf{k},\lambda'}^\dagger(x_0) \beta_{\mathbf{k},\lambda}(x_0) \rangle = \begin{bmatrix} \nu_{\mathbf{k},1}(x_0) & 0 \\ 0 & \nu_{\mathbf{k},2}(x_0) \end{bmatrix} , \tag{2.20}$$

onde devido à invariância por reflexão do nosso sistema (sistema de muitos corpos espacialmente uniforme) as ocupações devem ter a seguinte propriedade

$$\nu_{\mathbf{k},\lambda}(x_0) = \nu_{-\mathbf{k},\lambda}(x_0) . \tag{2.21}$$

Enfim devemos observar que as variáveis de interesse expressas na base de partículas (densidades de um corpo), quando escritas na base de quasi-partículas, contêm os elementos da transformação de Bogoliubov, os quais são as incógnitas da equação matricial diferencial (2.19) juntamente com as ocupações $\nu_{\mathbf{k},\lambda}$ (densidades de um corpo na base de quasi-partículas). Assim, dado um modelo (Hamiltoniana H que descreva a interação das partículas ou quasi-partículas) e dadas as condições iniciais (ocupação inicial $\nu_{\mathbf{k},\lambda}$ das quasi-partículas), as equações dinâmicas (2.19), via um princípio variacional embutido na equação de Heisenberg, descreverão a evolução temporal das ocupações de partículas (variáveis de interesse), descrevendo a evolução temporal das ocupações de quasi-partículas de Bogoliubov $\nu_{\mathbf{k},\lambda}$ e dos elementos da matriz de transformação de Bogoliubov.

Na seção seguinte estudaremos a técnica de projeção desenvolvida por Toledo Piza e Nemes [15], que nos permitirá tratar a dinâmica efetiva da matriz densidade estendida de um corpo.

2.3 Técnica de Projeção Dependente do Tempo

As equações matriciais (2.19) que descrevem a dinâmica efetiva da matriz densidade estendida de um corpo $\mathcal{R}$ de um sistema uniforme de muitos corpos formam um sistema acoplado de equações diferenciais que dão a evolução temporal das ocupações de quasi-partículas de Bogoliubov $\nu_{\mathbf{k},\lambda}$ e dos elementos da transformação de Bogoliubov. Contudo, não podemos resolver exatamente estas equações, pois dada a matriz densidade completa de muitos corpos $\mathcal{F}$, devemos observar que estas equações contêm a Hamiltoniana do sistema e no caso desta conter interações de dois corpos, as equações que encontraremos para a dinâmica de $\mathcal{R}$ envolverão densidades de dois corpos, além das densidades de um corpo que estudamos. Consequentemente, as equações (2.19) não serão fechadas em nossas variáveis.

Uma maneira de controlar estas dificuldades é através da técnica de operadores de projeção. Esta técnica é utilizada em vários contextos para reduzir a descrição do sistema às variáveis relevantes. O uso de técnicas que utilizam operadores de projeção com o objetivo de tratar equações cinéticas não é recente. Esta técnica extremamente geral foi muito usada a partir dos anos sessenta em problemas onde os sistemas de interesse estavam em contato com reservatórios, ou ainda em problemas onde somente os elementos diagonais do operador matriz densidade eram importantes. Nestes problemas, os graus de liberdade do reservatório ou da parte não diagonal do operador densidade eram considerados irrelevantes e formalmente eliminados através de um operador de projeção.

Entretanto, para sistemas dinâmicos de muitos corpos acoplados é conveniente ter uma descrição onde cada parte do sistema (subsistema) é considerada relevante. Willis e Picard [20] derivaram equações cinéticas para um sistema dinamicamente acoplado, onde os graus de liberdade a serem eliminados, não eram um subsistema ou uma parte do próprio sistema (reservatório), mas sim as correlações entre os subsistemas produzidas pela interação. Eles tratavam a parte não diagonal do operador densidade e não consideravam as correlações

dos subsistemas, conhecidas como termos de colisão, através de um operador projeção.

Logo, para sistemas dinâmicos acoplados, onde cada subsistema interage fortemente não podendo ser considerado irrelevante, a abordagem de Willis e Picard, equivalente à uma aproximação do tipo *Time Dependent Hartree-Fock* (TDHF), era claramente mais adequada.

O trabalho desenvolvido por Toledo Piza e Nemes [15] é a extensão do trabalho de Willis e Picard [20] (aproximação do tipo TDHF) e do trabalho de Kerman e Troudet [19] (aproximação do tipo TDHFB), pois ele considera as correlações dinâmicas dos subsistemas (Termos de Colisão). Esta técnica de projeção dependente do tempo consiste em decompor a matriz densidade completa de muitos corpos $\mathcal{F}$ em duas partes,

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0(t) + \mathcal{F}'(t) , \quad (2.22)$$

onde $\mathcal{F}_0(t)$ é uma densidade hermitiana de muitos corpos descrevendo completamente os aspectos de um corpo da densidade completa $\mathcal{F}$ sem conter qualquer informação relativa às correlações dinâmicas, ou seja, $\mathcal{F}_0(t)$ contém todas as informações sobre as variáveis estudadas, enquanto que $\mathcal{F}'(t)$ descreve as correlações dinâmicas (efeitos de colisão) da matriz densidade completa de muitos corpos $\mathcal{F}$. Observe que correlações do tipo Pauli e de emparelhamento, via transformação de Bogoliubov, estão embutidas em $\mathcal{F}_0(t)$.

A forma mais geral de uma densidade de muitos corpos $\mathcal{F}_0(t)$ com as propriedades exigidas, pode ser encontrada no trabalho de Des Cloiseaux [21]. O objetivo de nosso estudo consiste em tratar a dinâmica efetiva de $\mathcal{R}$ para um sistema uniforme de muitos férmions e neste caso a matriz densidade hermitiana de muitos férmions $\mathcal{F}_0(t)$ mais geral que descreve completamente os aspectos de um corpo da densidade completa $\mathcal{F}$ é dada por

$$\mathcal{F}_0(t) = \prod_{\mathbf{k},\lambda} \left[\nu_{\mathbf{k},\lambda} \beta_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger \beta_{\mathbf{k},\lambda} + (1 - \nu_{\mathbf{k},\lambda}) \beta_{\mathbf{k},\lambda} \beta_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger \right] , \quad (2.23)$$

onde $\nu_{\mathbf{k},\lambda}$ são as probabilidades de ocupação dos respectivos orbitais naturais, em outras palavras, são as densidades de um corpo na base de quasi-partículas de Bogoliubov dadas em (2.20).

A nível didático, calculemos explicitamente o traço abaixo

$$\begin{aligned}
Tr \left[\beta_{k,1}^\dagger \beta_{k,1} \mathcal{F}_0 \right] &= Tr \left\{ \beta_{k,1}^\dagger \beta_{k,1} \prod_{k',\lambda'} \left[\nu_{k',\lambda'} \beta_{k',\lambda'}^\dagger \beta_{k',\lambda'} + (1 - \nu_{k',\lambda'}) \beta_{k',\lambda'} \beta_{k',\lambda'}^\dagger \right] \right\} \\
&= Tr \left\{ \beta_{k,1}^\dagger \beta_{k,1} \left[\nu_{k,1} \beta_{k,1}^\dagger \beta_{k,1} + (1 - \nu_{k,1}) \beta_{k,1} \beta_{k,1}^\dagger \right] \times \right. \\
&\quad \left. \times \prod_{k',\lambda' \neq k,\lambda} \left[\nu_{k',\lambda'} \beta_{k',\lambda'}^\dagger \beta_{k',\lambda'} + (1 - \nu_{k',\lambda'}) \beta_{k',\lambda'} \beta_{k',\lambda'}^\dagger \right] \right\} .
\end{aligned}$$

Observamos que

$$Tr \left\{ \prod_{k',\lambda' \neq k,\lambda} \left[\nu_{k',\lambda'} \beta_{k',\lambda'}^\dagger \beta_{k',\lambda'} + (1 - \nu_{k',\lambda'}) \beta_{k',\lambda'} \beta_{k',\lambda'}^\dagger \right] \right\} = 1 ,$$

pois o cálculo destes traços consiste em somar todos os elementos diagonais de uma base no espaço de Fock, ou seja, na base dos autoestados do operador número $\hat{n}_{k',\lambda'}$ com autovalores $\nu_{k',\lambda'}$ e portanto este traço é um produto de infinitos 1. Continuando temos

$$Tr \left[\beta_{k,1}^\dagger \beta_{k,1} \mathcal{F}_0 \right] = Tr \left\{ \beta_{k,1}^\dagger \beta_{k,1} \left[\nu_{k,1} \beta_{k,1}^\dagger \beta_{k,1} + (1 - \nu_{k,1}) \beta_{k,1} \beta_{k,1}^\dagger \right] \right\} = \nu_{k,1} ,$$

onde foi usado o fato de que $Tr(\beta_{k,1}^\dagger \beta_{k,1} \beta_{k,1} \beta_{k,1}^\dagger) = 0$, decorrente das regras de anticomutação (2.7). A partir deste exemplo, torna-se óbvio que

$$\begin{aligned}
Tr(\beta_a \mathcal{F}_0) &= Tr(\beta_a^\dagger \mathcal{F}_0) = 0 \\
Tr(\beta_a \beta_b \mathcal{F}_0) &= Tr(\beta_a^\dagger \beta_b^\dagger \mathcal{F}_0) = 0 \\
Tr(\beta_a^\dagger \beta_b \mathcal{F}_0) &= \nu_a \delta_{a,b} \\
Tr(\beta_a \beta_b^\dagger \mathcal{F}_0) &= (1 - \nu_a) \delta_{a,b} .
\end{aligned}$$

No caso do cálculo de densidades de dois corpos torna-se mais evidente ainda as propriedades de $\mathcal{F}_0(t)$. Em geral temos que

$$Tr \left[\beta_a^\dagger \beta_b^\dagger \beta_c \beta_d \mathcal{F} \right] = \nu_a \nu_b (\delta_{ad} \delta_{bc} - \delta_{ac} \delta_{bd}) + C_{ab;cd} ,$$

onde $C_{ab;cd}$ está ligado à estrutura das correlações dinâmicas de dois corpos presentes. Por outro lado, um cálculo simples nos fornece que

$$Tr \left[\beta_a^\dagger \beta_b^\dagger \beta_c \beta_d \mathcal{F}_0 \right] = \nu_a \nu_b (\delta_{ad} \delta_{bc} - \delta_{ac} \delta_{bd}) .$$

Como exigido, a densidade de muitos corpos $\mathcal{F}_0(t)$ descreve completamente os aspectos de um corpo da matriz densidade completa $\mathcal{F}$, sendo que uma densidade de N corpos calculada a partir de $\mathcal{F}_0(t)$ exprime-se como o produto de densidades de um corpo [15].

Enfim, temos que $\mathcal{F}_0(t)$ tem traço unidade e da condição de normalização temos

$$Tr \mathcal{F} = 1 = Tr \mathcal{F}_0(t) \Rightarrow Tr \mathcal{F}'(t) = 0 . \quad (2.24)$$

A segunda etapa da técnica de projeção dependente do tempo [15] consiste em expressar $\mathcal{F}'(t)$ em termos de $\mathcal{F}_0(t)$, de modo que a matriz densidade completa $\mathcal{F}$ possa ser escrita como um funcional de $\mathcal{F}_0(t)$. O ponto crucial é a possibilidade de construir um projetor dependente do tempo a partir de $\mathcal{F}_0(t)$, tal que

$$\mathcal{F}_0(t) = \mathcal{P}(t) \mathcal{F} \quad (2.25)$$

$$\text{com} \quad \mathcal{P}(t) \mathcal{P}(t) = \mathcal{P}(t) .$$

Notamos que $\mathcal{P}$ não é um operador no espaço de vetores de estado, mas é um operador no espaço de matrizes densidade, também conhecido como espaço de Liouville ou ainda superespaço. Tais operadores são consequentemente chamados de superoperadores. A propriedade exigida para a construção de $\mathcal{P}(t)$, além de (2.25), é

$$i\dot{\mathcal{F}}_0(t) = [\mathcal{P}(t), \mathcal{L}] \mathcal{F} = [\mathcal{F}_0(t), H] + \mathcal{P}(t) [H, \mathcal{F}] , \quad (2.26)$$

onde $\mathcal{L}$ é um superoperador que age no espaço de Liouville, chamado Liouvillian e que tem a forma

$$\mathcal{L} \cdot = [H, \cdot] , \quad (2.27)$$

sendo H a Hamiltoniana. A equação (2.26) é a representação de Heisenberg da equação $\dot{\mathcal{F}}_0(t) = \dot{\mathcal{P}}(t)\mathcal{F}$.

Em [15] mostra-se que as condições (2.25) e (2.26) tornam a construção de $\mathcal{P}(t)$ única. Por outro lado, devemos ter o cuidado de observar que a sua construção na representação de Schrödinger é diferente da sua construção na representação de Heisenberg, já que a equação (2.26) é diferente nas duas representações. Dado $\mathcal{P}(t)$, podemos obter uma equação para $\mathcal{F}'(t)$ em termos de $\mathcal{F}_0(t)$ a partir de (2.22), (2.25) e (2.26)

$$i(\partial_t + \mathcal{P}(t)\mathcal{L})\mathcal{F}'(t) = (\mathcal{I} - \mathcal{P}(t))\mathcal{L}\mathcal{F}_0(t) . \quad (2.28)$$

Esta equação tem como solução formal

$$\mathcal{F}'(t) = \mathcal{G}(t, 0)\mathcal{F}'(0) - i \int_0^t dt' \mathcal{G}(t, t') (\mathcal{I} - \mathcal{P}(t')) \mathcal{L}\mathcal{F}_0(t') , \quad (2.29)$$

onde $\mathcal{F}'(0)$ é o termo que contém as correlações iniciais (condições iniciais) e $\mathcal{G}(t, t')$ é a função de Green ordenada temporalmente

$$\mathcal{G}(t, t') = T \left(\exp \left[i \int_{t'}^t d\tau \mathcal{P}(\tau) \mathcal{L} \right] \right) . \quad (2.30)$$

Desta forma $\mathcal{F}'(t)$, e consequentemente $\mathcal{F}$, podem ser expressas formalmente em termos de $\mathcal{F}_0(t)$ (para $t' < t$) e das correlações iniciais $\mathcal{F}'(0)$. Assim, as equações cinéticas (2.19) que descrevem a dinâmica efetiva das densidades de um corpo de nosso sistema uniforme de muitos corpos são formalmente fechadas em nossas variáveis.

Na realidade a complicada dependência temporal de (2.29) impede cálculos exatos. Uma expansão sistemática é discutida nas referências [15].

2.4 Aproximação de Campo Médio

Como vimos na seção precedente, podemos separar a matriz densidade de muitos corpos em dois termos. A aproximação de campo médio consiste em tomar $\mathcal{F}'(t) = 0$, como no trabalho de A. K. Kerman e T. Troudet [19], ou seja, nesta aproximação consideramos que não há correlações dinâmicas (a menos das correlações do tipo Pauli e de emparelhamento introduzidas via transformação de Bogoliubov) no sistema de muitos férmions. Portanto, Aproximação de Campo Médio (MF) e Aproximação de Hartree-Fock Dependente do Tempo (TDHF) são equivalentes. É claro que uma Aproximação Gaussiana Dependente do Tempo também será equivalente a uma Aproximação de Campo Médio (veja ref [22]).

Notamos que nestas aproximações $\mathcal{F}$, na representação de Heisenberg, passa a depender do tempo

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}_0(t) . \quad (2.31)$$

Substituindo (2.31) em (2.19) temos as equações cinéticas que descrevem a dinâmica efetiva de $\mathcal{R}$ (das densidades de um corpo e de emparelhamento) na aproximação de campo médio para um sistema uniforme de muitos férmions

$$\begin{aligned} i\dot{\nu}_{\mathbf{k}} + [\nu_{\mathbf{k}}, h_{\mathbf{k}}^*]_- &= Tr \left([\beta_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger, \beta_{\mathbf{k},\lambda}, H] \mathcal{F}_0 \right) \\ -g_{\mathbf{k}}^* + \{\nu_{\mathbf{k}}, g_{\mathbf{k}}^*\}_+ &= Tr \left([\beta_{-\mathbf{k},\lambda'}, \beta_{\mathbf{k},\lambda}, H] \mathcal{F}_0 \right) , \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde $h_{\mathbf{k}}$, $g_{\mathbf{k}}$, $\nu_{\mathbf{k}}$ e $\mathcal{F}_0(t)$ são dados respectivamente em (2.16), (2.20) e (2.23).

No próximo capítulo vamos justificar a escolha do Modelo Fermiônico Quiral de Gross-Neveu para descrever a dinâmica do sistema fermiônico de muitos corpos. Obteremos também o estado fundamental (vácuo) deste sistema na Aproximação de Campo Médio através de um cálculo variacional. Este resultado variacional nos será útil nos capítulos seguintes.

Capítulo 3

Modelo Fermiônico Quiral de Gross-Neveu (GNQM)

Generalizações relativísticas do problema de muitos corpos têm recebido considerável atenção nos últimos anos (veja capítulo 1). No contexto das interações fortes estas generalizações são importantes em duas de suas áreas,

i) na descrição de Modelos Relativísticos Nucleares e de Reações Nucleares Relativísticas baseados nos constituintes hadrônicos,

ii) e na descrição de Modelos Relativísticos de Hádrons baseados nos graus de liberdade de quarks.

Em vista deste interesse crescente, tornou-se importante identificar e estudar problemas de muitos corpos relativísticos através de modelos exatamente solúveis. Se por um lado isto fornece uma introdução pedagógica, por outro lado este estudo poderá ser útil na elucidação de problemas conceituais. Nesta perspectiva há um modelo que presta-se quase que idealmente ao estudo de técnicas relativísticas de muitos corpos, o Modelo Fermiônico Quiral de Gross-Neveu (GNQM)[17].

Começamos o capítulo descrevendo as principais características do GNQM para em seguida calcularmos a sua Hamiltoniana. Finalmente calculamos variacionalmente o vácuo do Modelo Fermiônico Quiral de Gross-Neveu na Aproximação de Campo Médio, resultado este que nos guiará nos capítulos seguintes.

3.1 Características do Modelo

O Modelo Fermiônico Quiral de Gross-Neveu (GNQM) é uma teoria em (1+1) dimensões descrevendo a interação de N tipos de campos fermiônicos ψ^i para $i = 1, \dots, N$. A sua densidade de Lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L}_{\text{GNQM}} = \sum_{i=1}^N \bar{\psi}^i (i\partial_\mu \gamma^\mu) \psi^i + \frac{g^2}{2} \left\{ \left[\sum_{i=1}^N \bar{\psi}^i \psi^i \right]^2 + \xi \left[\sum_{i=1}^N \bar{\psi}^i i\gamma^5 \psi^i \right]^2 \right\} , \quad (3.1)$$

onde notamos que os N diferentes campos interagem simetricamente, já que a constante de acoplamento é idêntica para quaisquer dois campos fermiônicos interagentes.

Observamos que o GNQM é o Modelo de Nambu-Jona-Lasinio [18] em (1+1) dimensões e em contraste com seu antecessor quadridimensional, ele é um modelo renormalizável permitindo um desenvolvimento em $1/N$, sendo ainda um dos poucos modelos que apresentam a característica de ser assintoticamente livre [17].

Outras características que o GNQM apresenta, relacionadas com o termo dominante da expansão $1/N$, são quebra dinâmica de simetria com geração dinâmica de massa e transmutação dimensional da constante de acoplamento que se torna massiva durante o processo de renormalização [17]. Este modelo apresenta também um rico espectro de partículas, o qual já foi calculado por inúmeros métodos não perturbativos [6], tendo inclusive a sua matriz S sido calculada exatamente [23].

O Modelo Fermiônico Quiral de Gross-Neveu apresenta algumas simetrias. Ele é invariante sob transformações do grupo $O(2N)$ [6], onde N é o número de tipos de férmions acoplados simetricamente. Observe que é justamente devido ao fato do acoplamento ser simétrico que é possível, via uma transformação ortogonal do grupo $O(2N)$, mudar a base dos N campos sem mudar o modelo.

O GNQM é invariante também sob transformações do grupo abeliano quiral $U(1)_{\text{quiral}}$, simetria que impede a geração de massa para os campos fermiônicos. Gross e Neveu [17] mostraram que a quebra desta simetria é responsável pela geração de massa destes campos. Trabalhos posteriores alertam para o fato de que sendo o GNQM uma teoria em (1+1) dimensões, de acordo com o Teorema de Coleman, o fenômeno de quebra de simetria não é

possível [24]. Dashen e Frishmann mostraram também que o GNQM tem a peculiaridade de ser invariante conforme para especiais valores da constante de acoplamento [25].

Finalmente é importante observar que apesar do GNQM ser uma teoria em $(1+1)$ dimensões, ou seja, unidimensional espacialmente, isto não implica que ele não tenha aplicações físicas. Citaremos duas aplicações do GNQM à física da matéria condensada:

i) Aplicação ao problema do Kondo [26]. O problema do Kondo consiste em estudar o comportamento a baixas temperaturas de impurezas magnéticas em baixa concentração num metal não magnético. Nestas condições é possível concentrar-se em uma única impureza magnética localizada e estudar como suas propriedades são modificadas devido ao acoplamento dos spins dos elétrons da banda de condução. Devido a simetria esférica da interação e devido ao fato da impureza estar localizada, um modelo unidimensional representa a física tridimensional. Em [26] os autores mostram que o modelo do problema do Kondo é equivalente ao GNQM e assim estudam o problema através deste outro enfoque.

ii) Estudo da molécula de Poliacetileno [27]. Campbell e Bishop [28] mostram que o modelo SSH (Su, Schrieffer e Heeger) no contínuo utilizado para descrever o poliacetileno é equivalente ao GNQM. Utilizando o GNQM no caso estático e na aproximação semi-clássica [6], eles mostraram a existência de solução tipo kink-antikink no poliacetileno além das soluções tipo kink ou tipo antikink já conhecidas. Eles argumentam que esta nova solução implica na existência de uma nova excitação no poliacetileno, além dos estados Cispoliacetileno e Transpoliacetileno.

3.2 Hamiltoniana do Modelo Fermiônico Quiral de Gross-Neveu

As equações cinéticas (2.19) que descrevem a dinâmica efetiva de $\mathcal{R}$ necessitam de uma Hamiltoniana para descrever as interações do sistema de muitos férmions. Por razões explicadas no início deste capítulo, tomaremos o Modelo Fermiônico Quiral de Gross-Neveu para descrever as interações entre os N tipos de campos fermiônicos de nosso sistema de muitos férmions. É importante não confundir os N tipos de campos fermiônicos que

interagem simetricamente através da densidade de Lagrangiana (3.1) com o número de férmions de nosso sistema de muitos corpos. Observamos que para cada tipo de campo fermiônico ψ^i temos uma densidade de ocupação $\nu_{k,\lambda}^i$, que nos informa quantos férmions do tipo i estão sendo descritos por ψ^i .

A partir da densidade de Lagrangiana (3.1), temos que a densidade de Hamiltoniana do GNQM é dada por

$$\mathcal{H}_{\text{GNQM}} = \sum_{i=1}^N \left\{ \bar{\psi}^i [\lambda - i\gamma_1 \partial_1] \psi^i \right\} - \frac{g^2}{2} \left\{ \left[\sum_{i=1}^N \bar{\psi}^i \psi^i \right]^2 - \xi \left[\sum_{i=1}^N \bar{\psi}^i \gamma_5 \psi^i \right]^2 \right\} , \quad (3.2)$$

onde : i) o momento canonicamente conjugado ao campo é

$$\Pi^i(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{GNQM}}}{\partial (\partial_0 \psi^i)} = i\psi_i^\dagger(\mathbf{x}) \quad (3.3)$$

ii) λ é uma fonte externa constante acoplada a $[\bar{\psi}^i(x)\psi^i(x)]$ que quebra a simetria quiral do modelo

iii) ξ é uma constante colocada junto ao termo quiral da Lagrangeana assumindo os valores 0 e 1, indicando se o modelo apresenta ($\xi=1$) ou não apresenta ($\xi=0$) invariância sob transformação do grupo $U(1)_{\text{quiral}}$. Esta constante nos auxiliará a verificar a contribuição da simetria quiral na análise da dinâmica.

A partir da densidade de Hamiltoniana podemos obter a Hamiltoniana do sistema, bastando integrar (3.2) em todo espaço unidimensional

$$H_{\text{GNQM}} = \int d\mathbf{x} \mathcal{H}_{\text{GNQM}} . \quad (3.4)$$

Para realizar esta integração consideremos primeiramente o campo de Dirac em (1+1) dimensões na representação de Heisenberg (veja 2.1)

$$\begin{aligned}
\psi^i(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{k}^i} \left(\frac{m}{k_0^i} \right)^{1/2} \left[a_{\mathbf{k}^i}^i(x_0) u_1^i(\mathbf{k}^i) \frac{e^{i\mathbf{k}^i \mathbf{x}^i}}{\sqrt{L}} + c_{\mathbf{k}^i}^{i\dagger}(x_0) u_2^i(\mathbf{k}^i) \frac{e^{-i\mathbf{k}^i \mathbf{x}^i}}{\sqrt{L}} \right] \\
\bar{\psi}^i(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{k}^i} \left(\frac{m}{k_0^i} \right)^{1/2} \left[a_{\mathbf{k}^i}^{i\dagger}(x_0) \bar{u}_1^i(\mathbf{k}^i) \frac{e^{-i\mathbf{k}^i \mathbf{x}^i}}{\sqrt{L}} + c_{\mathbf{k}^i}^i(x_0) \bar{u}_2^i(\mathbf{k}^i) \frac{e^{i\mathbf{k}^i \mathbf{x}^i}}{\sqrt{L}} \right]
\end{aligned} \tag{3.5}$$

onde adotamos a seguinte notação, $b_{\mathbf{k},\lambda=1}(x_0) = a_{\mathbf{k}}(x_0)$ e $b_{\mathbf{k},\lambda=2}(x_0) = c_{\mathbf{k}}(x_0)$, enquanto o índice $i (i = 1, \dots, N)$ indica que estamos representando o i -ésimo tipo de campo fermiônico.

Como já alertado no capítulo 2, as soluções de energia positiva $u_1(\mathbf{k})$ e de energia negativa $u_2(\mathbf{k})$ da equação massiva de Dirac em (1+1) dimensões podem quebrar a invariância por reflexão de nosso sistema. No apêndice A fazemos um estudo que permite diferenciar as várias representações das matrizes γ^μ de Dirac invariantes por reflexão. Vamos considerar a representação de Pauli-Dirac em (1+1) dimensões para as matrizes γ^μ , ou seja,

$$\gamma_0 = \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \gamma_1 = i\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_5 = \gamma_0\gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \sigma_1 = \gamma_5^\dagger. \tag{3.6}$$

Nesta representação as soluções da equação de Dirac massiva em (1+1) dimensões são

$$u_1(\mathbf{k}) = \left[\frac{(k_0 + m)}{2m} \right]^{1/2} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{k} \\ (k_0 + m) \end{bmatrix}, \quad u_2(\mathbf{k}) = \left[\frac{(k_0 - m)}{2m} \right]^{1/2} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{k} \\ (k_0 - m) \end{bmatrix}, \tag{3.7}$$

as quais conservam a invariância por reflexão de nosso sistema. As soluções (spinors) de Dirac (3.7) obedecem a normalização

$$\bar{u}_1(\mathbf{k})u_1(\mathbf{k}) = -\bar{u}_2(\mathbf{k})u_2(\mathbf{k}) = 1 \tag{3.8}$$

$$\bar{u}_1(\mathbf{k})u_2(\mathbf{k}) = \bar{u}_2(\mathbf{k})u_1(\mathbf{k}) = 0$$

e têm as propriedades abaixo,

$$\begin{aligned}
u_1^\dagger(\mathbf{k})u_1(\mathbf{k}) &= u_2^\dagger(\mathbf{k})u_2(\mathbf{k}) = k_0/m \\
u_1^\dagger(\pm\mathbf{k})u_2(\mp\mathbf{k}) &= u_2^\dagger(\pm\mathbf{k})u_1(\mp\mathbf{k}) = 0 .
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Observamos que para verificar a normalização do campo de Dirac (2.3), ou ainda, as regras de anticomutação das componentes do campo e de seu respectivo momento conjugado (2.4) a tempos iguais, devemos utilizar as propriedades (3.9) dos spinores de Dirac.

Substituindo (3.5), (3.6) e (3.7) em (3.2) e utilizando-se das propriedades dos spinores de Dirac (3.8) e (3.9) podemos fazer a integração espacial (3.4) e obter a Hamiltoniana do Modelo Fermiônico Quiral de Gross-Neveu

$$\begin{aligned}
H_{\text{GNQM}} = & \sum_{i=1}^N \sum_{\mathbf{k}'} \frac{1}{[(\mathbf{k}_i')^2 + m^2]^{1/2}} \left\{ [\lambda m + (\mathbf{k}_i')^2] \left(a_{\mathbf{k}_i'}^\dagger a_{\mathbf{k}_i'} - c_{\mathbf{k}_i'} c_{\mathbf{k}_i'}^\dagger \right) + (\lambda - m) |\mathbf{k}_i'| \left(c_{\mathbf{k}_i'} a_{-\mathbf{k}_i'} + a_{\mathbf{k}_i'}^\dagger c_{-\mathbf{k}_i'}^\dagger \right) \right\} + \\
& + \left(\frac{g^2 m^2}{2L} \right) \sum_{i,j=1}^N \sum_{(\mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k}''', \mathbf{k}''')} \left\{ \frac{1}{[(\mathbf{k}_i')^2 + m^2]^{1/4} [(\mathbf{k}_i'')^2 + m^2]^{1/4} [(\mathbf{k}_j''')^2 + m^2]^{1/4} [(\mathbf{k}_j''')^2 + m^2]^{1/4}} \right\} \times \\
& \left\{ a_{\mathbf{k}_i'}^\dagger a_{\mathbf{k}_i''} a_{\mathbf{k}_j'''}^\dagger a_{\mathbf{k}_j''''} [\xi \bar{u}_1(\mathbf{k}_i') \gamma_5 u_1(\mathbf{k}_i'') \bar{u}_1(\mathbf{k}_j''') \gamma_5 u_1(\mathbf{k}_j''') - \bar{u}_1(\mathbf{k}_i') u_1(\mathbf{k}_i'') \bar{u}_1(\mathbf{k}_j''') u_1(\mathbf{k}_j''')] \delta_{\mathbf{k}_i' + \mathbf{k}_j''', \mathbf{k}_i'' + \mathbf{k}_j''''} \right. \\
& + a_{\mathbf{k}_i'}^\dagger a_{\mathbf{k}_i''} c_{\mathbf{k}_j'''}^\dagger c_{\mathbf{k}_j''''} [\xi \bar{u}_1(\mathbf{k}_i') \gamma_5 u_1(\mathbf{k}_i'') \bar{u}_2(\mathbf{k}_j''') \gamma_5 u_2(\mathbf{k}_j''') - \bar{u}_1(\mathbf{k}_i') u_1(\mathbf{k}_i'') \bar{u}_2(\mathbf{k}_j''') u_2(\mathbf{k}_j''')] \delta_{\mathbf{k}_i' + \mathbf{k}_j''', \mathbf{k}_i'' + \mathbf{k}_j''''} \\
& + a_{\mathbf{k}_i'}^\dagger a_{\mathbf{k}_i''} a_{\mathbf{k}_j'''}^\dagger c_{\mathbf{k}_j''''} [\xi \bar{u}_1(\mathbf{k}_i') \gamma_5 u_1(\mathbf{k}_i'') \bar{u}_1(\mathbf{k}_j''') \gamma_5 u_2(\mathbf{k}_j''') - \bar{u}_1(\mathbf{k}_i') u_1(\mathbf{k}_i'') \bar{u}_1(\mathbf{k}_j''') u_2(\mathbf{k}_j''')] \delta_{\mathbf{k}_i' + \mathbf{k}_j''', \mathbf{k}_i'' + \mathbf{k}_j''''} \\
& + a_{\mathbf{k}_i'}^\dagger a_{\mathbf{k}_i''} c_{\mathbf{k}_j'''}^\dagger a_{\mathbf{k}_j''''} [\xi \bar{u}_1(\mathbf{k}_i') \gamma_5 u_1(\mathbf{k}_i'') \bar{u}_2(\mathbf{k}_j''') \gamma_5 u_1(\mathbf{k}_j''') - \bar{u}_1(\mathbf{k}_i') u_1(\mathbf{k}_i'') \bar{u}_2(\mathbf{k}_j''') u_1(\mathbf{k}_j''')] \delta_{\mathbf{k}_i' + \mathbf{k}_j''', \mathbf{k}_i'' + \mathbf{k}_j''''} \\
& + c_{\mathbf{k}_i'}^\dagger c_{\mathbf{k}_i''} a_{\mathbf{k}_j'''}^\dagger a_{\mathbf{k}_j''''} [\xi \bar{u}_2(\mathbf{k}_i') \gamma_5 u_2(\mathbf{k}_i'') \bar{u}_1(\mathbf{k}_j''') \gamma_5 u_1(\mathbf{k}_j''') - \bar{u}_2(\mathbf{k}_i') u_2(\mathbf{k}_i'') \bar{u}_1(\mathbf{k}_j''') u_1(\mathbf{k}_j''')] \delta_{\mathbf{k}_i' + \mathbf{k}_j''', \mathbf{k}_i'' + \mathbf{k}_j''''} \\
& + c_{\mathbf{k}_i'}^\dagger c_{\mathbf{k}_i''} c_{\mathbf{k}_j'''}^\dagger c_{\mathbf{k}_j''''} [\xi \bar{u}_2(\mathbf{k}_i') \gamma_5 u_2(\mathbf{k}_i'') \bar{u}_2(\mathbf{k}_j''') \gamma_5 u_2(\mathbf{k}_j''') - \bar{u}_2(\mathbf{k}_i') u_2(\mathbf{k}_i'') \bar{u}_2(\mathbf{k}_j''') u_2(\mathbf{k}_j''')] \delta_{\mathbf{k}_i' + \mathbf{k}_j''', \mathbf{k}_i'' + \mathbf{k}_j''''} \\
& + c_{\mathbf{k}_i'}^\dagger c_{\mathbf{k}_i''} a_{\mathbf{k}_j'''}^\dagger c_{\mathbf{k}_j''''} [\xi \bar{u}_2(\mathbf{k}_i') \gamma_5 u_2(\mathbf{k}_i'') \bar{u}_1(\mathbf{k}_j''') \gamma_5 u_2(\mathbf{k}_j''') - \bar{u}_2(\mathbf{k}_i') u_2(\mathbf{k}_i'') \bar{u}_1(\mathbf{k}_j''') u_2(\mathbf{k}_j''')] \delta_{\mathbf{k}_i' + \mathbf{k}_j''', \mathbf{k}_i'' + \mathbf{k}_j''''} \\
& + c_{\mathbf{k}_i'}^\dagger c_{\mathbf{k}_i''} c_{\mathbf{k}_j'''}^\dagger a_{\mathbf{k}_j''''} [\xi \bar{u}_2(\mathbf{k}_i') \gamma_5 u_2(\mathbf{k}_i'') \bar{u}_2(\mathbf{k}_j''') \gamma_5 u_1(\mathbf{k}_j''') - \bar{u}_2(\mathbf{k}_i') u_2(\mathbf{k}_i'') \bar{u}_2(\mathbf{k}_j''') u_1(\mathbf{k}_j''')] \delta_{\mathbf{k}_i' + \mathbf{k}_j''', \mathbf{k}_i'' + \mathbf{k}_j''''} \\
& + a_{\mathbf{k}_i'}^\dagger c_{\mathbf{k}_i''}^\dagger a_{\mathbf{k}_j'''}^\dagger a_{\mathbf{k}_j''''} [\xi \bar{u}_1(\mathbf{k}_i') \gamma_5 u_2(\mathbf{k}_i'') \bar{u}_1(\mathbf{k}_j''') \gamma_5 u_1(\mathbf{k}_j''') - \bar{u}_1(\mathbf{k}_i') u_2(\mathbf{k}_i'') \bar{u}_1(\mathbf{k}_j''') u_1(\mathbf{k}_j''')] \delta_{\mathbf{k}_i' + \mathbf{k}_i'', \mathbf{k}_j'' + \mathbf{k}_j''''}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a_{\mathbf{k}_i'}^\dagger c_{\mathbf{k}_i''}^\dagger c_{\mathbf{k}_j'''}^\dagger c_{\mathbf{k}_j''''}^\dagger [\xi \bar{u}_1(\mathbf{k}_i') \gamma_5 u_2(\mathbf{k}_i'') \bar{u}_2(\mathbf{k}_j''') \gamma_5 u_2(\mathbf{k}_j''') - \bar{u}_1(\mathbf{k}_i') u_2(\mathbf{k}_i'') \bar{u}_2(\mathbf{k}_j''') u_2(\mathbf{k}_j''')] \delta_{\mathbf{k}_i' + \mathbf{k}_i'' + \mathbf{k}_j''', \mathbf{k}_j'''} \\
& + a_{\mathbf{k}_i'}^\dagger c_{\mathbf{k}_i''}^\dagger a_{\mathbf{k}_j'''}^\dagger c_{\mathbf{k}_j''''}^\dagger [\xi \bar{u}_1(\mathbf{k}_i') \gamma_5 u_2(\mathbf{k}_i'') \bar{u}_1(\mathbf{k}_j''') \gamma_5 u_2(\mathbf{k}_j''') - \bar{u}_1(\mathbf{k}_i') u_2(\mathbf{k}_i'') \bar{u}_1(\mathbf{k}_j''') u_2(\mathbf{k}_j''')] \delta_{\mathbf{k}_i' + \mathbf{k}_i'' + \mathbf{k}_j''', \mathbf{k}_j''', 0} \\
& + a_{\mathbf{k}_i'}^\dagger c_{\mathbf{k}_i''}^\dagger c_{\mathbf{k}_j'''}^\dagger a_{\mathbf{k}_j''''}^\dagger [\xi \bar{u}_1(\mathbf{k}_i') \gamma_5 u_2(\mathbf{k}_i'') \bar{u}_2(\mathbf{k}_j''') \gamma_5 u_1(\mathbf{k}_j''') - \bar{u}_1(\mathbf{k}_i') u_2(\mathbf{k}_i'') \bar{u}_2(\mathbf{k}_j''') u_1(\mathbf{k}_j''')] \delta_{\mathbf{k}_i' + \mathbf{k}_i'' + \mathbf{k}_j''', \mathbf{k}_j'''} \\
& + c_{\mathbf{k}_i'}^\dagger a_{\mathbf{k}_i''}^\dagger a_{\mathbf{k}_j'''}^\dagger a_{\mathbf{k}_j''''}^\dagger [\xi \bar{u}_2(\mathbf{k}_i') \gamma_5 u_1(\mathbf{k}_i'') \bar{u}_1(\mathbf{k}_j''') \gamma_5 u_1(\mathbf{k}_j''') - \bar{u}_2(\mathbf{k}_i') u_1(\mathbf{k}_i'') \bar{u}_1(\mathbf{k}_j''') u_1(\mathbf{k}_j''')] \delta_{\mathbf{k}_i' + \mathbf{k}_i'' + \mathbf{k}_j''', \mathbf{k}_j'''} \\
& + c_{\mathbf{k}_i'}^\dagger a_{\mathbf{k}_i''}^\dagger c_{\mathbf{k}_j'''}^\dagger c_{\mathbf{k}_j''''}^\dagger [\xi \bar{u}_2(\mathbf{k}_i') \gamma_5 u_1(\mathbf{k}_i'') \bar{u}_2(\mathbf{k}_j''') \gamma_5 u_2(\mathbf{k}_j''') - \bar{u}_2(\mathbf{k}_i') u_1(\mathbf{k}_i'') \bar{u}_2(\mathbf{k}_j''') u_2(\mathbf{k}_j''')] \delta_{\mathbf{k}_i' + \mathbf{k}_i'' + \mathbf{k}_j''', \mathbf{k}_j'''} \\
& + c_{\mathbf{k}_i'}^\dagger a_{\mathbf{k}_i''}^\dagger a_{\mathbf{k}_j'''}^\dagger c_{\mathbf{k}_j''''}^\dagger [\xi \bar{u}_2(\mathbf{k}_i') \gamma_5 u_1(\mathbf{k}_i'') \bar{u}_1(\mathbf{k}_j''') \gamma_5 u_2(\mathbf{k}_j''') - \bar{u}_2(\mathbf{k}_i') u_1(\mathbf{k}_i'') \bar{u}_1(\mathbf{k}_j''') u_2(\mathbf{k}_j''')] \delta_{\mathbf{k}_i' + \mathbf{k}_i'' + \mathbf{k}_j''', \mathbf{k}_j'''} \\
& + c_{\mathbf{k}_i'}^\dagger a_{\mathbf{k}_i''}^\dagger c_{\mathbf{k}_j'''}^\dagger a_{\mathbf{k}_j''''}^\dagger [\xi \bar{u}_2(\mathbf{k}_i') \gamma_5 u_1(\mathbf{k}_i'') \bar{u}_2(\mathbf{k}_j''') \gamma_5 u_1(\mathbf{k}_j''') - \bar{u}_2(\mathbf{k}_i') u_1(\mathbf{k}_i'') \bar{u}_2(\mathbf{k}_j''') u_1(\mathbf{k}_j''')] \delta_{\mathbf{k}_i' + \mathbf{k}_i'' + \mathbf{k}_j''', \mathbf{k}_j''', 0} \Big\}.
\end{aligned}
\tag{3.10}$$

3.3 Vácuo do Modelo Fermiônico Quiral de Gross-Neveu na Aproximação de Campo Médio

Podemos calcular a dinâmica efetiva da matriz densidade estendida de um corpo $\mathcal{R}$ na aproximação de campo médio para sistemas uniformes de muitos férmions descritos pelo Modelo Fermiônico Quiral de Gross-Neveu a partir da Hamiltoniana (3.10) e da matriz densidade de muitos férmions $\mathcal{F}_0(t)$ dada em (2.23).

Devemos entretanto observar que a Hamiltoniana (3.10) está escrita na base de partículas, enquanto que a Hamiltoniana das equações cinéticas (2.32) deve ser escrita na base onde $\mathcal{R}$ é diagonal, ou seja, na base de quasi-partículas de Bogoliubov. Portanto, devemos utilizar a transformação de Bogoliubov (2.6) para reescrever (3.10) na base de quasi-partículas e resolver o problema.

Por outro lado, vemos que mesmo na aproximação de campo médio este cálculo é muito extenso. Logo, num primeiro momento faremos um cálculo variacional para encontrar o vácuo do GNQM na aproximação de campo médio. Este primeiro resultado servirá para obtermos um melhor entendimento do GNQM e também como um guia para os cálculos seguintes.

Para calcularmos variacionalmente este vácuo, consideramos que a Hamiltoniana (3.10)

seja dada numa base arbitrária de partículas e que seus respectivos operadores de criação e aniquilação são operadores desta base arbitrária. Consequentemente, m , que representa a massa dos férmions gerados ou aniquilados pelos operadores de campo numa dada base de partículas de Dirac, torna-se um parâmetro da teoria dependendo da base em que trabalhemos.

Calculemos o vácuo (estado fundamental) do GNQM na aproximação de campo médio minimizando a energia com relação ao parâmetro de massa m , ou seja,

$$\frac{\delta}{\delta m} \left[\text{Tr} \left(H_{\text{GNQM}} \mathcal{F}_0^{\text{vácuo}}(t) \right) \right] = 0 . \quad (3.11)$$

Note que ao calcularmos o vácuo (estado fundamental), estamos procurando uma solução estática do problema, assim sendo este cálculo variacional é equivalente a obter uma solução estática das equações cinéticas (2.32) com ocupações nulas ($\nu_{\mathbf{k},\lambda} = 0$). Para compreender melhor este limite, considere um campo fermiônico $\psi(x)$ que é solução da equação de Dirac livre

$$i\partial\psi(\mathbf{x}) - m\psi(\mathbf{x}) = 0 .$$

Escrevendo este campo numa outra base de partículas temos que o novo campo $\psi'(x)$ evidentemente continua sendo solução da equação de Dirac livre

$$i\partial\psi'(\mathbf{x}) - m'\psi'(\mathbf{x}) = 0 .$$

A transformação que relaciona as duas bases de partículas é uma transformação de Bogoliubov, transformação ortogonal (real) de Bogoliubov, já que estudamos o caso estático. Minimizar a energia com relação ao parâmetro de massa m equivale a procurar a boa base de partículas que descreve o vácuo do sistema. Logo, para estudarmos a solução estática do GNQM através das equações cinéticas (2.32), basta considerarmos uma transformação de Bogoliubov ortogonal.

Voltando a (3.11), vemos que ao minimizarmos a energia do vácuo do GNQM na aproximação de campo médio com relação ao parâmetro de massa, obteremos uma equação de

gap para m , conseqüentemente a energia do vácuo do GNQM na aproximação de campo médio será dada por

$$E_{\text{GNQM}}^{\text{vácuo}} = \text{Tr} \left[H_{\text{GNQM}} \mathcal{F}_0^{\text{vácuo}}(t) \right] \text{ |equação do gap} \quad (3.12)$$

A matriz densidade completa de muitos corpos na aproximação de campo médio $\mathcal{F}_0(t)$ é dada em (2.23). Como queremos o vácuo do GNQM, basta tomar as suas ocupações nulas e neste caso $\mathcal{F}_0^{\text{vácuo}}(t)$ será dada por

$$\mathcal{F}_0^{\text{vácuo}}(t) = \prod_{\mathbf{k}} \left[a_{\mathbf{k}}(t) a_{\mathbf{k}}^{\dagger}(t) c_{\mathbf{k}}(t) c_{\mathbf{k}}^{\dagger}(t) \right] \quad (3.13)$$

Substituindo (3.10) e (3.13) em (3.12) e calculando alguns traços (veja exemplos no capítulo 2), obtemos que a energia do estado fundamental do GNQM é dada por

$$\begin{aligned} E_{\text{GNQM}}^{\text{vácuo}} &= - \sum_{i=1}^N \sum_{\mathbf{k}_i'} \left\{ \frac{\lambda m + (\mathbf{k}_i')^2}{[m^2 + (\mathbf{k}_i')^2]^{1/2}} \right\} \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^N \sum_{\mathbf{k}_i' \mathbf{k}_j''} \left(\frac{g^2}{4L} \right) \left\{ \frac{(\xi + 1)(k_{0i}' k_{0j}'' - \mathbf{k}_i' \mathbf{k}_j'' + m^2) \delta_{ij} + 2m^2(1 - \delta_{ij})}{[m^2 + (\mathbf{k}_i')^2]^{1/2} [m^2 + (\mathbf{k}_j'')^2]^{1/2}} \right\} \quad (3.14) \end{aligned}$$

onde os índices $i, j = 1, \dots, N$ indicam a existência de N diferentes campos fermiônicos em nosso sistema. Substituindo (3.14) em (3.11) minimizamos a energia acima com relação ao parâmetro de massa m , obtendo a seguinte expressão

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^N \sum_{\mathbf{k}_i'} \left\{ \frac{(\mathbf{k}_i')^2 (m - \lambda)}{[m^2 + (\mathbf{k}_i')^2]^{3/2}} \right\} = \\ &\frac{g^2 m}{2L} \sum_{i,j=1}^N \sum_{\mathbf{k}_i' \mathbf{k}_j''} \left\{ \frac{\frac{(\xi+1)}{2} \delta_{ij} [m^2 + \mathbf{k}_i' \mathbf{k}_j''] [\mathbf{k}_i' + \mathbf{k}_j'']^2 + (1 - \delta_{ij}) [2(\mathbf{k}_i')^2 (\mathbf{k}_j'')^2 + m^2 \{(\mathbf{k}_i')^2 + (\mathbf{k}_j'')^2\}]}{[m^2 + (\mathbf{k}_i')^2]^{3/2} [m^2 + (\mathbf{k}_j'')^2]^{3/2}} \right\} \quad (3.15) \end{aligned}$$

Para reescrever a equação acima no contínuo devemos fazer a seguinte transformação no caso de uma dimensão espacial

$$\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \left(\frac{L}{2\pi}\right) \int d\mathbf{k} . \quad (3.16)$$

Por outro lado, devido ao fato de o GNQM descrever simetricamente a interação dos N tipos de campos fermiônicos [veja (3.1)], as integrais sobre os N campos (i e j) têm a mesma contribuição. Neste caso a expressão (3.15) adquire a seguinte forma

$$(m - \lambda) = \left(\frac{g^2 m}{4\pi}\right) (2N + \xi - 1)(m^2 A + B) \quad (3.17)$$

onde A e B são as integrais divergentes abaixo

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\Lambda}^{+\Lambda} \frac{dk}{(k^2 + m^2)^{3/2}} = \frac{2\Lambda}{m^2(m^2 + \Lambda^2)^{1/2}} \\ B &= \int_{-\Lambda}^{+\Lambda} \frac{k^2 dk}{(k^2 + m^2)^{3/2}} = \frac{-2\Lambda}{(m^2 + \Lambda^2)^{1/2}} + \ln \left[\frac{\Lambda + (\Lambda^2 + m^2)^{1/2}}{-\Lambda + (\Lambda^2 + m^2)^{1/2}} \right] \end{aligned} \quad (3.18)$$

e onde Λ é um *cut-off* introduzido para regularizar a teoria (veja Apêndice D). Tomando o limite de $\Lambda \rightarrow \infty$ em (3.17) obtemos finalmente a equação do *gap* para o parâmetro de massa m , ou seja,

$$(m - \lambda) = \left(\frac{g^2 m}{4\pi}\right) (2N + \xi - 1) \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) + \text{termos que se anulam para } \Lambda \rightarrow \infty . \quad (3.19)$$

Neste ponto convém notar que o papel do parâmetro de massa m num cálculo variacional não perturbativo é diferente do papel de m num cálculo perturbativo. Quando falamos em cálculo perturbativo, m é a massa dos spinores associada às soluções da equação de Dirac livre. Gross e Neveu em seu artigo [17] calculam uma teoria sem massa ($\lambda = 0$), onde os spinores (campos) são soluções da equação de Dirac livre com $m = 0$. Fazendo uma expansão em $1/N$ e calculando o termo de ordem dominante, eles concluem que deve haver um fenômeno de quebra dinâmica de simetria. A partir de uma redefinição do vácuo

$[\langle \bar{\psi}^i \psi^i \rangle \neq 0]$ eles obtêm uma teoria massiva onde agora os spinors (campos) ψ são soluções da equação de Dirac livre com massa $m \neq 0$.

Por outro lado, no cálculo variacional não perturbativo m é um parâmetro da teoria, de modo que é a teoria que determinará se ele será ou não nulo, ou seja, o princípio variacional escolherá a “boa” base de partículas que minimizará a energia do estado fundamental do problema a partir de uma equação de *gap*. Note a partir de (3.19) que no caso de uma teoria livre ($g = 0$) sem termo de massa ($\lambda = 0$), a equação de *gap* é dada por $m = 0$ como esperávamos. Portanto, no cálculo variacional não perturbativo podemos partir com campos fermiônicos massivos ou não, ou ainda, $\lambda \neq 0$ ou $\lambda = 0$, pois é a dinâmica do sistema que determinará a “boa” base de partículas. C. M. Shakin e L. S. Celenza [29] discutem longamente a equivalência destes cálculos não perturbativos.

Note que a partir desta discussão podemos fazer $\lambda = 0$ em nossa densidade de Hamiltoniana (3.10) e deixar que o princípio variacional escolha a base de massa para os férmions do sistema. Logo, tomando $\lambda = 0$ (teoria com simetria quiral) a equação de *gap* (3.19) torna-se

$$g^2 = \frac{4\pi}{(2N + \xi - 1)} \left[\ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \right]^{-1} . \quad (3.20)$$

Calculemos agora a energia do estado fundamental do GNQM na aproximação de campo médio. Tomando o limite do contínuo (3.16) de (3.14) obtemos

$$E_{\text{GNQM}}^{\text{vácuo}} = -\frac{N}{2\pi} \left\{ C + \left(\frac{g^2}{8\pi} \right) [(\xi + 1)(4\Lambda^2 + m^2 D^2) + 2m^2(N - 1)D^2] \right\} , \quad (3.21)$$

onde C e D são as integrais abaixo (veja Apêndice D)

$$\begin{aligned} C &= \int_{-\Lambda}^{+\Lambda} \frac{dk}{(k^2 + m^2)^{1/2}} = \ln \left[\frac{\Lambda + (\Lambda^2 + m^2)^{1/2}}{-\Lambda + (\Lambda^2 + m^2)^{1/2}} \right] \\ D &= \int_{-\Lambda}^{+\Lambda} \frac{k^2 dk}{(k^2 + m^2)^{1/2}} = \Lambda(\Lambda^2 + m^2)^{1/2} - \frac{m^2}{2} C . \end{aligned} \quad (3.22)$$

Quando $\Lambda \rightarrow \infty$ obtemos a seguinte expressão para a energia do vácuo do GNQM na aproximação de campo médio

$$E_{\text{GNQM}}^{\text{vácuo}} = -m^2 \left(\frac{N}{4\pi} \right) \left\{ 1 - \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \left[1 - \left(\frac{g^2}{4\pi} \right) (2N + \xi - 1) \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \right] \right\} - \Lambda^2 \left(\frac{N}{8\pi} \right) \left[1 + \left(\frac{g^2}{2\pi} \right) (\xi + 1) \right] . \quad (3.23)$$

Observamos que a expressão acima apresenta dois tipos de divergências. A divergência quadrática não tem consequências físicas, já que ela representa uma densidade de energia do vácuo, o que pode ser verificado calculando-se novamente a energia do vácuo do GNQM, mas agora com campos fermiônicos expandidos nas soluções da equação de Dirac não massiva. Este cálculo nos fornece

$$\langle m = 0 | E_{\text{GNQM}}^{\text{vácuo}} | m = 0 \rangle = \text{Tr} [H_{\text{GNQM}}^{\lambda=0, m=0} \mathcal{F}_0^{\text{vácuo}}] = -N \left(\frac{\Lambda^2}{8\pi} \right) \left[1 + \left(\frac{g^2}{2\pi} \right) (\xi + 1) \right] . \quad (3.24)$$

Já que somente diferenças de energia e não energias absolutas são mensuráveis (observáveis), seguiremos a prática usual de redefinir o zero da escala de energia subtraindo de $E_{\text{GNQM}}^{\text{vácuo}}$ a quantidade $E_{\text{GNQM}}^{\text{vácuo}}|_{m=0}$ dada em (3.24). Por outro lado, a divergência logarítmica em (3.23) é devido ao fato de que o GNQM é parametrizado em termos de uma constante de acoplamento nua (bare). Somente através de uma reparametrização (renormalização) da teoria é que nossos resultados tornam-se finitos. Esta discussão será melhor compreendida no capítulo 4.

Substituindo a equação de *gap* (3.20) em (3.23) obtemos a energia do estado fundamental do Modelo Fermiônico Quiral de Gross-Neveu na Aproximação de Campo Médio

$$E_{\text{GNQM}}^{\text{vácuo}} = -N \left(\frac{m^2}{4\pi} \right) . \quad (3.25)$$

Observe que o resultado obtido é finito, ou seja, a equação do *gap* (3.20) além de nos fornecer a base de partículas que minimiza a teoria, ela também renormaliza a constante de

acoplamento. Observe também que a equação de *gap* ou de renormalização da constante de acoplamento apresenta o fenômeno de liberdade assintótica, pois no limite de altas energias ($\Lambda \rightarrow \infty$) a teoria torna-se livre ($g \rightarrow 0$) como esperado. Enfim, os resultados (3.20) e (3.25) obtidos neste cálculo estático estão de acordo com os resultados obtidos por outros métodos não perturbativos [30].

Este cálculo variacional do estado fundamental de nosso sistema uniforme de muitos férmions descritos pelo GNQM na aproximação de campo médio além de ter sido didático, inicializando-nos na álgebra de traços, forneceu-nos um melhor entendimento do Modelo Fermiônico Quiral de Gross-Neveu, mostrando-nos suas propriedades e os tipos de divergências que iremos encontrar no capítulo seguinte.

Estudado o caso estático, no próximo capítulo investigaremos a dinâmica efetiva do operador matriz densidade estendida de um corpo na aproximação de campo médio para um sistema uniforme de muitos férmions descritos pelo GNQM.

Capítulo 4

Dinâmica Efetiva de $\mathcal{R}$ para um Sistema Uniforme de Muitos Férmions Descritos pelo GNQM na Aproximação de Campo Médio

A partir da Hamiltoniana do Modelo Fermiônico Quiral de Gross-Neveu (GNQM) podemos encontrar as equações cinéticas que descrevem a dinâmica efetiva do operador matriz densidade estendida de um corpo. Utilizaremos uma aproximação do tipo campo médio e nossa descrição se restringirá ao caso de sistemas espacialmente uniformes.

Começamos o capítulo escolhendo uma transformação de Bogoliubov (*ansatz*) adequada a nosso propósito. Em seguida calculamos a dinâmica efetiva de $\mathcal{R}$ na aproximação de campo médio para um sistema uniforme de muitos férmions descritos primeiramente por uma teoria fermiônica livre (GNQM com $g = 0$), para posteriormente estudar o caso onde os férmions são descritos pelo GNQM. Em ambos os casos verificamos a conservação de energia. Finalmente a partir das equações estáticas renormalizamos a teoria e estudamos a física de nosso sistema.

4.1 Transformação de Bogoliubov x Transformação de Nambu

A partir da Hamiltoniana do GNQM (3.10) podemos calcular as equações cinéticas (2.32) que descrevem a dinâmica efetiva de $\mathcal{R}$ no caso de um sistema uniforme de muitos férmions na aproximação de campo médio (2.23), bastando escrever (3.10) na base de quasi-partículas com a ajuda da transformação de Bogoliubov (2.6). Contudo, uma análise simples permite verificar que a Hamiltoniana do Modelo Fermiônico Quiral de Gross-Neveu na base de quasi-partículas terá um número elevado de termos, ou seja, $4 \cdot 4^2 + 16 \cdot 4^4 = 4160$ termos. Por outro lado, nas equações matriciais (2.32) temos diferentes traços que envolvem a Hamiltoniana do GNQM na base de quasi-partículas. Estes traços envolvem operadores de três corpos (veja 2.32) e ao calcularmos teremos seis possíveis contrações (veja exemplo de cálculo de traço no capítulo 2). Logo, cada traço das equações matriciais (2.32) terá aproximadamente 25000 termos o que inviabiliza este cálculo.

Estes números nos motivam a repensar um novo *ansatz* (transformação) que quebre a simetria quiral do GNQM. Analisando a transformação de Bogoliubov, também conhecida como transformação de Bogoliubov-Valatin, definida em (2.6), verificamos que esta transformação quebra, além da simetria quiral $U(1)_{\text{quiral}}$ do modelo, a simetria $U(1)_{\text{carga}}$ do GNQM, pois a transformação de Bogoliubov mistura os operadores de criação e aniquilação. Para exemplificar este fato, consideremos a transformação de Bogoliubov definida em (2.6),

$$\begin{bmatrix} b_{\mathbf{k},1} \\ b_{\mathbf{k},2} \\ b_{-\mathbf{k},1}^\dagger \\ b_{-\mathbf{k},2}^\dagger \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{\mathbf{k}} \\ c_{\mathbf{k}} \\ a_{-\mathbf{k}}^\dagger \\ c_{-\mathbf{k}}^\dagger \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{21} & Y_{11}^* & Y_{21}^* \\ X_{12} & X_{22} & Y_{12}^* & Y_{22}^* \\ Y_{11} & Y_{21} & X_{11}^* & X_{21}^* \\ Y_{12} & Y_{22} & X_{12}^* & X_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{\mathbf{k},1} \\ \beta_{\mathbf{k},2} \\ \beta_{-\mathbf{k},1}^\dagger \\ \beta_{-\mathbf{k},2}^\dagger \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

onde utilizamos as relações de unitariedade (2.11) e (2.12) de $\mathcal{X}_{\mathbf{k}}$ para inverter a transformação de Bogoliubov (2.6). Veja a equivalência entre os operadores de campo ($b_\lambda \leftrightarrow a, c$) definidos em (2.1) e (3.5). Finalmente observe que na transformação acima, escrevemos as

formas explícitas das matrizes X_k e Y_k , ou seja,

$$X_k = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Y_k = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

onde evidentemente X_{ij} e Y_{ij} dependem do modo k . Com o objetivo de simplificar a notação, não colocaremos explicitamente esta dependência agora.

A partir de (4.1) podemos averiguar como uma dada densidade na base de partículas escreve-se na base de quasi-partículas de Bogoliubov. Consideremos a densidade $a_k^\dagger a_k$ da base de partículas que tem carga nula,

$$\begin{aligned} a_k^\dagger a_k &= \left[X_{11} X_{11}^* \beta_{k,1}^\dagger \beta_{k,1} + Y_{11} Y_{11}^* \beta_{-k,1}^\dagger \beta_{-k,1} + Y_{21} Y_{21}^* \beta_{-k,2}^\dagger \beta_{-k,2} + X_{21} X_{21}^* \beta_{k,2}^\dagger \beta_{k,2} + \right. \\ &\quad \text{estes termos têm carga nula e correspondem a densidades normais} \\ &+ X_{11} Y_{21} \beta_{-k,2} \beta_{k,1} + X_{21} Y_{11} \beta_{-k,1} \beta_{k,2} + X_{11}^* Y_{21}^* \beta_{k,1}^\dagger \beta_{-k,2}^\dagger + X_{21}^* Y_{11}^* \beta_{k,2}^\dagger \beta_{-k,1}^\dagger + \\ &\quad \text{estes termos têm carga nula e correspondem a densidades de} \\ &\quad \text{emparelhamento de Nambu} \\ &+ X_{11} Y_{11} \beta_{-k,1} \beta_{k,1} + X_{11}^* Y_{11}^* \beta_{k,1}^\dagger \beta_{-k,1}^\dagger + X_{21} Y_{21} \beta_{-k,2} \beta_{k,2} + X_{21}^* Y_{21}^* \beta_{k,2}^\dagger \beta_{-k,2}^\dagger + \\ &\quad \text{estes termos têm carga não nula e correspondem a densidades de} \\ &\quad \text{emparelhamento ordinário de Bogoliubov-Valatin} \\ &+ \left. X_{21} X_{11}^* \beta_{k,1}^\dagger \beta_{k,2} + X_{11} X_{21}^* \beta_{k,2}^\dagger \beta_{k,1} + Y_{11} Y_{21}^* \beta_{-k,1}^\dagger \beta_{-k,2}^\dagger + Y_{21} Y_{11}^* \beta_{-k,2}^\dagger \beta_{-k,1}^\dagger \right] \\ &\quad \text{estes termos têm carga não nula e correspondem a densidades de} \\ &\quad \text{emparelhamento de partícula-antipartícula de Bogoliubov-Valatin} \end{aligned}$$

Desta análise verificamos que ao invés de utilizarmos uma transformação de Bogoliubov, a qual quebra $U(1)_{\text{quiral}}$ e $U(1)_{\text{carga}}$ é mais conveniente utilizar uma transformação do tipo Nambu, na qual a simetria de carga continua conservada e somente a simetria quirial é

quebrada como desejado. O esquema de emparelhamento abaixo nos auxilia a compreender melhor o que são estas transformações

Figura 1. Esquema de emparelhamento comparando as transformações de Bogoliubov-Valantin e de Nambu. Verifica-se que enquanto a transformação de Bogoliubov-Valantin quebra as simetrias $U(1)_{\text{carga}}$ e $U(1)_{\text{quiral}}$, a transformação de Nambu quebra apenas a simetria $U(1)_{\text{quiral}}$.

Para obtermos uma transformação de Bogoliubov que conserve a simetria $U(1)_{\text{carga}}$, ou seja, uma transformação de Nambu, basta tomarmos os coeficientes X_{12} , X_{21} , Y_{11} e Y_{22} da transformação (4.1) nulos. Logo, a transformação de Nambu escreve-se como

$$\begin{bmatrix} b_{\mathbf{k},1} \\ b_{\mathbf{k},2} \\ b_{-\mathbf{k},1}^\dagger \\ b_{-\mathbf{k},2}^\dagger \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{\mathbf{k}} \\ c_{\mathbf{k}} \\ a_{-\mathbf{k}}^\dagger \\ c_{-\mathbf{k}}^\dagger \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & 0 & 0 & Y_{21}^* \\ 0 & X_{22} & Y_{12}^* & 0 \\ 0 & Y_{21} & X_{11}^* & 0 \\ Y_{12} & 0 & 0 & X_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{\mathbf{k},1} \\ \beta_{\mathbf{k},2} \\ \beta_{-\mathbf{k},1}^\dagger \\ \beta_{-\mathbf{k},2}^\dagger \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

onde as matrizes $X_{\mathbf{k}}$ e $Y_{\mathbf{k}}$ são dadas por

$$X_{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Y_{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 0 & Y_{12} \\ Y_{21} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Observe que os termos de emparelhamento de Nambu irão quebrar a simetria quiral do GNQM assim como no trabalho de Nambu e Jona-Lasinio [18]. A transformação de Nambu provocará um deslocamento na matriz de massa dos campos fermiônicos gerando condensados com valor médio não nulo, $\langle a_{\mathbf{k}}^\dagger c_{-\mathbf{k}}^\dagger \rangle \neq 0$ por exemplo. Poderíamos reinterpretar a teoria supondo que além dos campos fermiônicos não massivos, existiriam bósons (condensados) de massa $\lambda \neq 0$ que formariam um vácuo, o qual atuaria como um campo externo agindo sobre o sistema de muitos férmions não massivos. É justamente esta quebra de simetria que irá gerar equações cinéticas (no caso estático equação de *gap*) para os parâmetros de Nambu da transformação (4.3).

Na próxima seção trabalharemos as equações cinéticas (2.32) e verificaremos que a escolha da transformação de Nambu (4.3) diminui drasticamente o número de traços a serem calculados devido à conservação de carga.

4.2 Dinâmica Efetiva de $\mathcal{R}$ no Ansatz de Nambu

Nesta seção vamos estudar as equações cinéticas (2.32), que descrevem a dinâmica efetiva da matriz densidade estendida de um corpo $\mathcal{R}$ (2.8) na aproximação de campo médio (2.31) para um sistema uniforme de muitos férmions descritos pelo GNQM (3.10), quando usamos uma transformação de Nambu (*ansatz* de Nambu) (4.3) para quebrar a simetria quiral do sistema. Reescrevemos abaixo as equações matriciais (2.32) de forma explícita

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} i\dot{\nu}_{\mathbf{k},1} & h_{12}^*(\nu_{\mathbf{k},1} - \nu_{\mathbf{k},2}) \\ h_{21}^*(\nu_{\mathbf{k},2} - \nu_{\mathbf{k},1}) & i\dot{\nu}_{\mathbf{k},2} \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \text{Tr} \left(\left[\beta_{\mathbf{k},1}^\dagger \beta_{\mathbf{k},1}, H_{\text{GNQM}} \right] \mathcal{F}_0 \right) & \text{Tr} \left(\left[\beta_{\mathbf{k},1}^\dagger \beta_{\mathbf{k},2}, H_{\text{GNQM}} \right] \mathcal{F}_0 \right) \\ \text{Tr} \left(\left[\beta_{\mathbf{k},2}^\dagger \beta_{\mathbf{k},1}, H_{\text{GNQM}} \right] \mathcal{F}_0 \right) & \text{Tr} \left(\left[\beta_{\mathbf{k},2}^\dagger \beta_{\mathbf{k},2}, H_{\text{GNQM}} \right] \mathcal{F}_0 \right) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} & (-1) \begin{bmatrix} g_{11}^*(1 - \nu_{\mathbf{k},1} - \nu_{\mathbf{k},1}) & g_{12}^*(1 - \nu_{\mathbf{k},1} - \nu_{\mathbf{k},2}) \\ g_{21}^*(1 - \nu_{\mathbf{k},2} - \nu_{\mathbf{k},1}) & g_{22}^*(1 - \nu_{\mathbf{k},2} - \nu_{\mathbf{k},2}) \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \text{Tr} \left(\left[\beta_{-\mathbf{k},1} \beta_{\mathbf{k},1}, H_{\text{GNQM}} \right] \mathcal{F}_0 \right) & \text{Tr} \left(\left[\beta_{-\mathbf{k},1} \beta_{\mathbf{k},2}, H_{\text{GNQM}} \right] \mathcal{F}_0 \right) \\ \text{Tr} \left(\left[\beta_{-\mathbf{k},2} \beta_{\mathbf{k},1}, H_{\text{GNQM}} \right] \mathcal{F}_0 \right) & \text{Tr} \left(\left[\beta_{-\mathbf{k},2} \beta_{\mathbf{k},2}, H_{\text{GNQM}} \right] \mathcal{F}_0 \right) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde i) $\mathcal{F}_0(t)$ é a matriz densidade de muitos corpos dada em (2.23), que descreve completamente os aspectos de um corpo da matriz densidade completa $\mathcal{F}$

ii) $\nu_{\mathbf{k},1}$ e $\nu_{\mathbf{k},2}$ são as ocupações das quasi-partículas de Nambu definidas em (2.9) e (2.20)

iii) h_{ij} e g_{ij} são as componentes das matrizes $h_{\mathbf{k}}$ e $g_{\mathbf{k}}$ definidas em (2.16). Utilizando as matrizes $X_{\mathbf{k}}$ e $Y_{\mathbf{k}}$ que definem a transformação homogênea de Nambu, as matrizes $h_{\mathbf{k}}$ e $g_{\mathbf{k}}$ escrevem-se como

$$\begin{aligned}
h_{\mathbf{k}} &= \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = -i \begin{bmatrix} X_{11}\dot{X}_{11}^* + Y_{21}^*\dot{Y}_{21} & 0 \\ 0 & X_{22}\dot{X}_{22}^* + Y_{12}^*\dot{Y}_{12} \end{bmatrix} \\
g_{\mathbf{k}} &= \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = -i \begin{bmatrix} 0 & Y_{12}\dot{X}_{11}^* + X_{22}^*\dot{Y}_{21} \\ Y_{21}\dot{X}_{22}^* + X_{11}^*\dot{Y}_{12} & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Primeiramente vamos estudar os traços de (4.5) e (4.6). Escrevendo a Hamiltoniana do Modelo Fermiônico Quiral de Gross-Neveu (3.10) na base de quasi-partículas de Nambu através de (4.3), podemos verificar sem muita dificuldade que muitos destes traços são nulos nesta base.

Para entender a razão disto, basta observar que tanto a Hamiltoniana do GNQM (3.10) como $\mathcal{F}_0(t)$ (2.23) são operadores de carga nula, no sentido de que são invariantes sob transformações unitárias do grupo $U(1)_{\text{carga}}$. Quando estes operadores são escritos na base de quasi-partículas de Nambu, eles continuam invariantes sob transformações unitárias do grupo $U(1)_{\text{carga}}$, pois a transformação de Nambu, ao contrário da transformação de Bogoliubov, não quebra esta simetria como vimos na seção precedente. Logo, quando tomamos um traço que envolva estes operadores na base de quasi-partículas com uma densidade que tenha carga, por exemplo $\beta_{\mathbf{k},1}^\dagger \beta_{\mathbf{k},2}$, o traço será nulo, pois não será possível contrai-lo. Portanto, devido ao fato de termos utilizado uma transformação de Bogoliubov que conserva a simetria de carga, temos nas equações cinéticas (4.5) e (4.6) quatro traços que se anulam,

$$\begin{aligned}
\text{i) } & Tr \{ [\beta_{\mathbf{k},1}^\dagger \beta_{\mathbf{k},2}, H_{\text{GNQM}}] \mathcal{F}_0 \} = 0 \rightarrow \text{devido à conservação de carga} \\
\text{ii) } & Tr \{ [\beta_{\mathbf{k},2}^\dagger \beta_{\mathbf{k},1}, H_{\text{GNQM}}] \mathcal{F}_0 \} = 0 \rightarrow \text{devido à conservação de carga} \\
\text{iii) } & Tr \{ [\beta_{-\mathbf{k},1} \beta_{\mathbf{k},1}, H_{\text{GNQM}}] \mathcal{F}_0 \} = 0 \rightarrow \text{devido à conservação de carga} \\
\text{iv) } & Tr \{ [\beta_{-\mathbf{k},2} \beta_{\mathbf{k},2}, H_{\text{GNQM}}] \mathcal{F}_0 \} = 0 \rightarrow \text{devido à conservação de carga} .
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Por outro lado, é fácil verificar que $\mathcal{F}_0(t)$ comuta com os operadores número $\beta_{\mathbf{k},1}^\dagger \beta_{\mathbf{k},1}$ e $\beta_{\mathbf{k},2}^\dagger \beta_{\mathbf{k},2}$, logo, devido a aproximação utilizada, dois outros traços são nulos

$$\text{i) } Tr \{ H_{\text{GNQM}}[\mathcal{F}_0, \beta_{\mathbf{k},1}^\dagger \beta_{\mathbf{k},1}] \} = 0 \rightarrow \text{devido à aproximação de campo médio} \quad (4.9)$$

$$\text{ii) } Tr \{ H_{\text{GNQM}}[\mathcal{F}_0, \beta_{\mathbf{k},2}^\dagger \beta_{\mathbf{k},2}] \} = 0 \rightarrow \text{devido à aproximação de campo médio ,}$$

onde utilizamos a propriedade cíclica do traço para reescrever os traços de (4.5).

Neste ponto obtivemos uma característica que pode ser encontrada em qualquer aproximação do tipo campo médio (TDHF, TDHFB, Gaussianas...). A partir da equação cinética (4.5) e de (4.9) temos que as ocupações dos orbitais naturais (quasi-partículas de Bogoliubov) são constantes

$$\dot{\nu}_{\mathbf{k},1} = 0 \quad \text{e} \quad \dot{\nu}_{\mathbf{k},2} = 0 \quad , \quad (4.10)$$

ou seja, dadas as condições iniciais, $\nu_{\mathbf{k},1}$ e $\nu_{\mathbf{k},2}$, estas não evoluem no tempo.

Vemos assim que resta-nos calcular apenas dois traços correspondentes aos elementos não diagonais de (4.6). Antes de emprendermos este derradeiro cálculo, convém estudar as matrizes $h_{\mathbf{k}}$ e $g_{\mathbf{k}}$, ou seja, o lado esquerdo das equações cinéticas (4.5) e (4.6). Podemos verificar que as matrizes $h_{\mathbf{k}}$ e $g_{\mathbf{k}}$ dadas em (4.7) são hermitiana e antissimétrica, respectivamente. Para tanto, devemos nos utilizar das derivadas temporais das relações de unitariedade (2.11) da matriz da transformação de Bogoliubov (observe que a transformação de Nambu é um caso particular da transformação de Bogoliubov), ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\chi^\dagger \chi) &= 0 \Rightarrow \dot{\chi}^\dagger \chi = -\chi^\dagger \dot{\chi} \\ \frac{d}{dt} (\chi \chi^\dagger) &= 0 \Rightarrow \dot{\chi} \chi^\dagger = -\chi \dot{\chi}^\dagger \end{aligned} \quad (4.11)$$

e das matrizes $X_{\mathbf{k}}$ e $Y_{\mathbf{k}}$ (4.4) da transformação de Nambu. Evidentemente $h_{\mathbf{k}}$ e $g_{\mathbf{k}}$ dadas

em (2.16) são também hermitiana e antissimétrica respectivamente numa transformação geral de Bogoliubov (4.1), onde os coeficientes X_{12} , X_{21} , Y_{11} e Y_{22} não são nulos

Devemos observar também que a transformação homogênea de Nambu (4.3) deve ser unitária para que a transformação dos operadores seja canônica. Logo, as variáveis complexas X_{11} , X_{22} , Y_{12} e Y_{21} da transformação de Nambu devem obedecer equações de unitariedade. Substituindo (4.4) em (2.13) temos as seguintes equações de unitariedade para as variáveis de Nambu

$$\begin{aligned} |X_{11}|^2 + |Y_{21}|^2 &= |X_{11}|^2 + |Y_{12}|^2 = 1 \\ |X_{22}|^2 + |Y_{21}|^2 &= |X_{22}|^2 + |Y_{12}|^2 = 1 \\ X_{11}Y_{21} + X_{22}Y_{12} &= X_{11}Y_{12}^* + X_{22}Y_{21}^* = 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

A partir das condições de unitariedade acima, verificamos que não necessitamos de quatro variáveis complexas (oito variáveis reais) para descrever a dinâmica efetiva de $\mathcal{R}$ no *ansatz* de Nambu. Podemos reparametrizar a transformação de Nambu (4.3) utilizando as equações de unitariedade (4.12), em termos de apenas quatro variáveis reais.

Há várias reparametrizações possíveis para as variáveis da transformação de Nambu, dentre as quais citamos

$$\begin{aligned} \text{i) } \quad X_{11} &= \cos \varphi_k e^{i\beta_k}, \quad X_{22} = -\cos \varphi_k e^{i(\alpha_k + \beta_k)} \\ Y_{12} &= \sin \varphi_k e^{i\gamma_k}, \quad Y_{21} = \sin \varphi_k e^{i(\alpha_k + \gamma_k)} \quad 1^a \text{ reparametrização} \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \quad X_{11} &= \cos \varphi_k e^{i\beta_k}, \quad X_{22} = \cos \varphi_k e^{i\alpha_k} \\ Y_{12} &= \sin \varphi_k e^{i(\beta_k + \gamma_k)}, \quad Y_{21} = -\sin \varphi_k e^{i(\alpha_k + \gamma_k)} \quad 2^a \text{ reparametrização} \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } \quad X_{11} &= \cos \varphi_k e^{i(\alpha_k + \beta_k)}, \quad X_{22} = \cos \varphi_k e^{i(\alpha_k - \beta_k)} \\ Y_{12} &= \sin \varphi_k e^{i(\alpha_k + \beta_k + \gamma_k)}, \quad Y_{21} = -\sin \varphi_k e^{i(\alpha_k - \beta_k + \gamma_k)} \quad 3^a \text{ reparametrização} \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde α_k , β_k , γ_k e φ_k são variáveis reais. Note que agora escrevemos explicitamente a dependência que as variáveis de Nambu (ou de emparelhamento) têm com relação aos modos k .

A partir destas reparametrizações calculamos os traços não nulos das equações cinéticas (4.5) e (4.6), verificando que independentemente da representação utilizada, obtemos dinâmica somente para duas variáveis, enquanto as outras duas comportam-se como fases globais que se simplificam, o que nos leva à conclusão de que as reparametrizações de Nambu (4.13-15) introduzem fases globais associadas à conservação de carga $U(1)_{\text{carga}}$, fases que nada acrescentam à dinâmica de $\mathcal{R}$.

Com o objetivo de esclarecer este fato, calculamos todos os observáveis de um corpo nas três reparametrizações acima e obtemos

$$\begin{aligned}
 \text{i) } \langle a_k^\dagger a_k \rangle &= |X_{11}|^2 \nu_{k,1} + |Y_{21}|^2 (1 - \nu_{k,2}) \\
 &= \cos^2 \varphi_k \nu_{k,1} + \sin^2 \varphi_k (1 - \nu_{k,2}) \quad \text{nas três reparametrizações} \\
 \\
 \text{ii) } \langle c_k^\dagger c_k \rangle &= |X_{22}|^2 \nu_{k,2} + |Y_{12}|^2 (1 - \nu_{k,1}) \\
 &= \cos^2 \varphi_k \nu_{k,2} + \sin^2 \varphi_k (1 - \nu_{k,1}) \quad \text{nas três reparametrizações} \\
 \\
 \text{iii) } \langle a_{-k} c_k \rangle &= -\langle c_{-k} a_k \rangle = X_{11} Y_{12}^* (1 - \nu_{k,1}) + X_{22} Y_{21}^* \nu_{k,2} \\
 &= \sin \varphi_k \cos \varphi_k e^{i(\beta_k - \gamma_k)} (1 - \nu_{k,1} - \nu_{k,2}) \quad \text{na 1ª reparametrização} \\
 &= \sin \varphi_k \cos \varphi_k e^{-i\gamma_k} (1 - \nu_{k,1} - \nu_{k,2}) \quad \text{nas 2ª e 3ª reparametrizações} \\
 \\
 \text{iv) } \langle a_{-k}^\dagger c_k^\dagger \rangle &= -\langle c_{-k}^\dagger a_k^\dagger \rangle = Y_{21} X_{22}^* (1 - \nu_{k,2}) + Y_{12} X_{11}^* \nu_{k,1} \\
 &= -\sin \varphi_k \cos \varphi_k e^{-i(\beta_k - \gamma_k)} (1 - \nu_{k,1} - \nu_{k,2}) \quad \text{na 1ª reparametrização} \\
 &= -\sin \varphi_k \cos \varphi_k e^{i\gamma_k} (1 - \nu_{k,1} - \nu_{k,2}) \quad \text{nas 2ª e 3ª reparametrizações}
 \end{aligned}$$

v) as demais densidades são nulas devido à conservação da simetria $U(1)_{\text{carga}}$.

Analisando estes resultados podemos concluir que na realidade necessitamos de somente

duas variáveis para descrever a dinâmica efetiva destas densidades. Utilizaremos a seguinte reparametrização

$$X_{11} = X_{22} = \cos \varphi_k \quad \text{e} \quad Y_{12} = -Y_{21} = \sin \varphi_k e^{i\gamma_k} , \quad (4.16)$$

que obedece as relações de unitariedade (4.12). Agora a transformação de Nambu escreve-se como

$$\begin{bmatrix} a_k \\ c_k \\ a_{-k}^\dagger \\ c_{-k}^\dagger \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{k,1} \\ b_{k,2} \\ b_{-k,1}^\dagger \\ b_{-k,2}^\dagger \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_k & 0 & 0 & -\sin \varphi_k e^{-i\gamma_k} \\ 0 & \cos \varphi_k & \sin \varphi_k e^{-i\gamma_k} & 0 \\ 0 & -\sin \varphi_k e^{i\gamma_k} & \cos \varphi_k & 0 \\ \sin \varphi_k e^{i\gamma_k} & 0 & 0 & \cos \varphi_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{k,1} \\ \beta_{k,2} \\ \beta_{-k,1}^\dagger \\ \beta_{-k,2}^\dagger \end{bmatrix} . \quad (4.17)$$

A partir de (4.16) podemos calcular os coeficientes das matrizes h_k e g_k dadas em (4.7). Calculando a matriz h_k obtemos

$$h_{11} = h_{22} = \dot{\gamma}_k \sin^2 \varphi_k \quad \text{e} \quad h_{12} = h_{21} = 0 , \quad (4.18)$$

verificando que h_k é hermitiana, enquanto que o cálculo abaixo dos coeficientes de g_k verificam que a mesma é antissimétrica

$$g_{11} = g_{22} = 0 \quad \text{e} \quad g_{12} = -g_{21} = [i\dot{\varphi}_k - \dot{\gamma}_k \sin \varphi_k \cos \varphi_k] e^{i\gamma_k} . \quad (4.19)$$

Substituindo (4.8), (4.9), (4.18) e (4.19) em (4.5) e (4.6) obtemos finalmente as equações cinéticas que descrevem a dinâmica efetiva de $\mathcal{R}$ na Aproximação de Campo Médio para um sistema uniforme de muitos férmions descritos pelo GNQM, o qual teve a sua simetria quiral quebrada através da transformação de Nambu. As equações são

$$\dot{\nu}_{\mathbf{k},1} = 0 \quad \text{e} \quad \dot{\nu}_{\mathbf{k},2} = 0 \quad (4.20)$$

$$[i\dot{\varphi}_{\mathbf{k}} + \dot{\gamma}_{\mathbf{k}} \sin \varphi_{\mathbf{k}} \cos \varphi_{\mathbf{k}}] e^{-i\gamma_{\mathbf{k}}} = \frac{\text{Tr} \left([\beta_{-\mathbf{k},1} \beta_{\mathbf{k},2}, H_{\text{GNQM}}] \mathcal{F}_0 \right)}{(1 - \nu_{\mathbf{k},1} - \nu_{\mathbf{k},2})} . \quad (4.21)$$

As equações acima são as quatro equações cinéticas que necessitávamos para determinar a dinâmica efetiva de $\mathcal{R}$ em nosso caso. As duas equações (4.20), que determinam a dinâmica das ocupações dos orbitais naturais (ocupações da base de quasi-partículas de Nambu), já eram esperadas, pois uma característica da aproximação de campo médio é que as ocupações dos orbitais naturais não evoluem temporalmente. A equação complexa (4.21) determina como as duas variáveis reais, $\varphi_{\mathbf{k}}$ e $\gamma_{\mathbf{k}}$, da transformação (4.17) evoluirão no tempo, quebrando a simetria quiral do sistema fermiônico.

Convém finalmente observar que uma maneira de saber o número de variáveis necessárias para descrever a dinâmica de um dado sistema é contar o número de equações cinéticas que temos a partir de (4.5) e (4.6). No caso de uma transformação de Nambu obtivemos uma equação complexa, implicando que duas variáveis são suficientes para descrever a dinâmica. Observe que caso fizéssemos uma transformação de Bogoliubov, os dois primeiros traços de (4.8) não seriam nulos e consequentemente teríamos uma equação complexa a mais, sugerindo que neste caso seriam necessárias quatro variáveis, ou seja, teríamos então dinâmica para as variáveis $\alpha_{\mathbf{k}}$ e $\beta_{\mathbf{k}}$ das reparametrizações (4.13)-(4.15).

Resta-nos portanto, calcular o traço da equação (4.21). Esta é a parte mais longa e entediante deste cálculo. Com o objetivo de obter um melhor entendimento da dinâmica de nosso sistema, iremos calcular primeiramente na próxima seção a dinâmica efetiva de um sistema uniforme de muitos férmions livres ($g = 0$) com quebra da simetria devido ao *ansatz* de Nambu.

4.3 Dinâmica Efetiva de $\mathcal{R}$ - Caso Livre

Com o objetivo de melhor compreender a dinâmica efetiva das densidades de um corpo do sistema uniforme de muitos férmions, descritos pelo GNQM na aproximação de campo

médio com quebra da simetria quiral via uma transformação de Nambu, calcularemos o traço da equação (4.21) tomando a constante de acoplamento do GNQM nula, ou seja, consideraremos que o sistema uniforme de N tipos de férmions serão descritos por um Modelo Fermiônico Livre. Neste caso a Hamiltoniana que descreve tal sistema é dada por

$$\begin{aligned}
H_{\text{Livre}} = & \sum_{i=1}^N \sum_{\mathbf{k}_i} \left\{ \frac{[(\mathbf{k}_i)^2 + \lambda m]}{k_{0i}} \left[a_{\mathbf{k}_i}^\dagger a_{\mathbf{k}_i} - c_{\mathbf{k}_i} c_{\mathbf{k}_i}^\dagger \right] \right\} + \\
& + \sum_{i=1}^N \sum_{\mathbf{k}_i} \left\{ \frac{(\lambda - m)}{k_{0i}} |\mathbf{k}_i| \left[c_{\mathbf{k}_i} a_{-\mathbf{k}_i} + a_{\mathbf{k}_i}^\dagger c_{-\mathbf{k}_i}^\dagger \right] \right\} . \quad (4.22)
\end{aligned}$$

A partir da Hamiltoniana fermiônica livre (4.22) escrita na base de quasi-partículas de Nambu através de (4.17) e da densidade de muitos corpos $\mathcal{F}_0(t)$ dada em (2.23), podemos calcular o traço da equação cinética (4.21). Este cálculo é semelhante ao cálculo variacional efetuado na seção (3.3), a menos de um comutador que deve ser calculado antes de efetuarmos o traço propriamente dito. Este cálculo nos fornece a seguinte equação dinâmica para as variáveis de Nambu

$$\begin{aligned}
i\dot{\varphi}_{\mathbf{k}} + \dot{\gamma}_{\mathbf{k}} \sin \varphi_{\mathbf{k}} \cos \varphi_{\mathbf{k}} = & N \left[\frac{(\mathbf{k})^2 + \lambda m}{k_0} \right] \sin 2\varphi_{\mathbf{k}} + \\
& + N \frac{(\lambda - m)}{k_0} |\mathbf{k}| \left[\sin^2 \varphi_{\mathbf{k}} e^{-i\gamma_{\mathbf{k}}} - \cos^2 \varphi_{\mathbf{k}} e^{i\gamma_{\mathbf{k}}} \right] . \quad (4.23)
\end{aligned}$$

No cálculo acima devemos observar que ao passarmos para o contínuo a soma sobre os modos $\mathbf{k}$, como em (3.16), as integrais sobre os N tipos de campos fermiônicos tem a mesma contribuição, fornecendo o fator N global em (4.23). Portanto, como era esperado para um sistema livre, o estudo da dinâmica de um sistema uniforme de muitos férmions com 1 tipo ou N tipos de férmions é o mesmo. Obviamente, como pode ser verificado em (3.14), (3.15), (3.19) e (3.25), quando há acoplamento entre os férmions, há física em N .

Portanto, estudemos a dinâmica efetiva de $\mathcal{R}$ de um sistema uniforme de muitos férmions com apenas um tipo de férmion ($N = 1$). Separando as partes real e imaginária

da equação complexa (4.23) temos que as equações cinéticas que descrevem tal sistema na aproximação de campo médio são

$$\dot{\varphi}_{\mathbf{k}} = \frac{(m - \lambda)}{k_0} |\mathbf{k}| \sin \gamma_{\mathbf{k}} \quad (4.24)$$

$$\dot{\gamma}_{\mathbf{k}} \sin 2\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{2[(\mathbf{k})^2 + \lambda m]}{k_0} \sin 2\varphi_{\mathbf{k}} + \frac{2(m - \lambda)}{k_0} |\mathbf{k}| \cos 2\varphi_{\mathbf{k}} \cos \gamma_{\mathbf{k}} . \quad (4.25)$$

Observe que nossa aproximação é conservativa e portanto, um teste para as equações cinéticas acima é verificar se elas conservam a energia do sistema. Calculando a energia na aproximação de campo médio para nosso sistema fermiônico a partir de (4.22) e (2.23),

$$\begin{aligned} \langle H_{\text{Livre}} \rangle &= Tr [H_{\text{Livre}} \mathcal{F}_0(t)] \\ &= - \sum_{\mathbf{k}} (1 - \nu_{\mathbf{k},1} - \nu_{\mathbf{k},2}) \left\{ \frac{[(\mathbf{k})^2 + \lambda m]}{k_0} \cos 2\varphi_{\mathbf{k}} + \frac{(\lambda - m)}{k_0} |\mathbf{k}| \sin 2\varphi_{\mathbf{k}} \cos \gamma_{\mathbf{k}} \right\} \end{aligned} \quad (4.26)$$

e derivando-a temporalmente, podemos verificar a conservação da energia do sistema, ou seja,

$$\frac{d}{dt} \langle H_{\text{Livre}} \rangle |_{\text{equações cinéticas}} = 0 , \quad (4.27)$$

quando substituimos as equações cinéticas (4.20), (4.24) e (4.25) em (4.27). O teste da conservação da energia é um meio para verificarmos se não cometemos nenhum erro ao deduzirmos as equações cinéticas.

Verificadas nossas equações, calculemos primeiramente o estado fundamental de nosso sistema fermiônico na aproximação de campo médio. Para tanto, basta estudar o caso estático das equações cinéticas (4.24) e (4.25). Fazendo $\dot{\varphi}_{\mathbf{k}} = 0$ e $\dot{\gamma}_{\mathbf{k}} = 0$ nestas equações obtemos

$$\begin{aligned}
m \sin \gamma_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} &= 0 \\
\tan 2\varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} &= -\frac{m}{|\mathbf{k}|} \cos \gamma_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} ,
\end{aligned}
\tag{4.28}$$

onde tomamos $\lambda = 0$ (veja discussão na página 36 ou referência [29]).

Estas equações estáticas nos dizem que no limite de $m \rightarrow 0$ (parâmetro de expansão dos campos), o ponto de equilíbrio da variável dinâmica de Nambu (ou ainda o estado fundamental do sistema) $\varphi_{\mathbf{k}}$ também vai a zero. Isto significa que em uma teoria não massiva ($m = \lambda = 0$) livre ($g = 0$), não adianta querer quebrar a simetria quiral do sistema, ou seja, dar massa aos férmions, pois o estado fundamental de equilíbrio é sem massa, já que $\varphi_{\mathbf{k}} = 0$ implica numa transformação identidade para $\mathcal{X}_{Nambu}$.

Este resultado está de acordo com o cálculo variacional realizado na seção (3.3). Tomando $g = 0$ em (3.19) temos $m = 0$ para a equação de *gap*, informando que a boa base de partículas (spinors) que minimiza a energia do estado fundamental é uma base não massiva.

Por outro lado, vemos que se não tivéssemos tomado $m = 0$, o ponto de equilíbrio não seria $\varphi_{\mathbf{k}} = \gamma_{\mathbf{k}} = 0$.

Vejamos o que acontece quando partimos com uma situação não mínima ($m \neq 0$). Estudemos os pontos de equilíbrio do modo $\mathbf{k} = \pm\sqrt{2}$, quando os campos $\psi(\mathbf{x})$ e $\bar{\psi}(\mathbf{x})$ são expandidos nas soluções de Dirac massivas com $m = \sqrt{2}$. Neste caso os pontos de equilíbrio do sistema são

$$\gamma_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} = n\pi \quad e \quad \varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} = \left(-\frac{\pi}{8} + n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad .
\tag{4.29}$$

Estudando os pontos de equilíbrio do modo $\mathbf{k} = \pm\sqrt{2}$ para outros valores de $m = m_{\mathbf{k}}$, vemos que estes deslocam-se para a esquerda quando aumentamos o parâmetro de massa $m_{\mathbf{k}}$ dos spinors de Dirac, partindo de $\varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} = 0$ quando $m_{\mathbf{k}} = 0$ até atingir $\varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} = -\pi/4$ quando $m_{\mathbf{k}} \rightarrow \infty$. Observe que $\gamma_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} = n\pi$ independe de $\mathbf{k}$ e de $m_{\mathbf{k}}$.

Para entender o que está ocorrendo com os pontos de equilíbrio (estado fundamental), quando damos ao sistema de férmions livres uma condição não mínima, ou seja, $m_k \neq 0$, devemos verificar o que significam $\varphi_k|_{eq}$ e $\gamma_k|_{eq}$ na base de quasi-partículas de Nambu. Começamos nosso cálculo com campos expandidos nas soluções de Dirac massivas, sabendo de antemão que no caso livre esta situação não é mínima no sentido variacional [veja resultados da seção (3.3)]. Através de uma transformação de Nambu encontramos que o estado fundamental do sistema na base de quasi-partículas é dado por $\varphi_k|_{eq}$ e $\gamma_k|_{eq}$. Escrevamos os campos $\psi(\mathbf{x})$ e $\bar{\psi}(\mathbf{x})$ dados em (2.1) na base de quasi-partículas de Nambu através de (4.17). Nesta base os campos $\psi(\mathbf{x})$ e $\bar{\psi}(\mathbf{x})$ podem ser escritos na seguinte forma,

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{m}{k_0}\right)^{1/2} \left[\beta_{\mathbf{k},1}(x_0) u'_1(\mathbf{k}) \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{\sqrt{L}} + \beta_{\mathbf{k},2}^\dagger(x_0) u'_2(\mathbf{k}) \frac{e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{\sqrt{L}} \right] \\ \bar{\psi}(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{m}{k_0}\right)^{1/2} \left[\beta_{\mathbf{k},1}^\dagger(x_0) \bar{u}'_1(\mathbf{k}) \frac{e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{\sqrt{L}} + \beta_{\mathbf{k},2}(x_0) \bar{u}'_2(\mathbf{k}) \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{\sqrt{L}} \right],\end{aligned}\tag{4.30}$$

onde os novos spinores de Dirac são dados por

$$\begin{aligned}u'_1(\mathbf{k}) &= \cos \varphi_{\mathbf{k}} u_1(\mathbf{k}) + \sin \varphi_{\mathbf{k}} e^{i\gamma_{\mathbf{k}}} u_2(-\mathbf{k}) \\ u'_2(\mathbf{k}) &= \cos \varphi_{\mathbf{k}} u_2(\mathbf{k}) - \sin \varphi_{\mathbf{k}} e^{-i\gamma_{\mathbf{k}}} u_1(-\mathbf{k}).\end{aligned}\tag{4.31}$$

Resta-nos verificar o que são $u'_1(\mathbf{k})$ e $u'_2(\mathbf{k})$ no equilíbrio. A partir das equações estáticas (4.28), calculamos analiticamente (veja Apêndice B) as soluções $\cos \varphi_{\mathbf{k}}|_{eq}$ e $\sin \varphi_{\mathbf{k}}|_{eq}$ obtendo

$$\begin{aligned}\cos \varphi_{\mathbf{k}}|_{eq} &= \left[\frac{(k_0 - m)^{1/2} + (k_0 + m)^{1/2}}{2\sqrt{k_0}} \right] \\ \sin \varphi_{\mathbf{k}}|_{eq} &= \left[\frac{(k_0 - m)^{1/2} - (k_0 + m)^{1/2}}{2\sqrt{k_0}} \right] (-1)^n.\end{aligned}\tag{4.32}$$

$\gamma_{eq} = n\pi$

Substituindo (3.7) e (4.32) em (4.31) obtemos finalmente que $u'_1(\mathbf{k})$ e $u'_2(\mathbf{k})$ são spinores de Dirac não massivos. Isto significa que em uma teoria livre, mesmo partindo de uma situação não mínima ($m_{\mathbf{k}} \neq 0$), as equações dinâmicas nos dizem que na boa base (base de quasi-partículas de Nambu) a situação mínima é a não massiva.

Estudemos agora a dinâmica (e não mais a solução estática) deste sistema uniforme de muitos férmions livres na aproximação de campo médio. Tomando o modo $|\mathbf{k}| = \sqrt{2}$ e a situação não mínima $m_{\mathbf{k}} = \sqrt{2}$ novamente, temos que o espaço de fase das variáveis de Nambu $\varphi_{\mathbf{k}}$ e $\gamma_{\mathbf{k}}$ têm o seguinte comportamento

Figura 2. Espaço de fase das variáveis de Nambu. Os pontos marcados com x representam os pontos de equilíbrio do sistema. As várias curvas correspondem a situações em que as condições iniciais foram tomadas fora do equilíbrio. Os gráficos correspondem às

seguintes condições iniciais:

$$\begin{aligned}
 \text{-----} \quad & \varphi_{\mathbf{k}}^{\text{in}} = (-0.2 + n\pi/2), \gamma_{\mathbf{k}}^{\text{in}} = 2n\pi \text{ ou } \varphi_{\mathbf{k}}^{\text{in}} = (+0.2 + n\pi/2), \gamma_{\mathbf{k}}^{\text{in}} = n\pi \\
 \text{---} \quad & \varphi_{\mathbf{k}}^{\text{in}} = (-0.1 + n\pi/2), \gamma_{\mathbf{k}}^{\text{in}} = 2n\pi \text{ ou } \varphi_{\mathbf{k}}^{\text{in}} = (+0.1 + n\pi/2), \gamma_{\mathbf{k}}^{\text{in}} = n\pi \\
 \text{-----} \quad & \varphi_{\mathbf{k}}^{\text{in}} = (-\pi/4 + n\pi/2), \gamma_{\mathbf{k}}^{\text{in}} = 0 \text{ ou } \varphi_{\mathbf{k}}^{\text{in}} = (0 + n\pi/2), \gamma_{\mathbf{k}}^{\text{in}} = 0 \\
 \text{---} \quad & \varphi_{\mathbf{k}}^{\text{in}} = (\pi/8 + n\pi/2), \gamma_{\mathbf{k}}^{\text{in}} = 0
 \end{aligned}$$

Vemos no diagrama do espaço de fase acima que há dois tipos de comportamento possíveis para o sistema:

i) Quando o sistema é pouco perturbado em torno do equilíbrio, este vibra em torno do equilíbrio, $\varphi_{\mathbf{k}}$ e $\gamma_{\mathbf{k}}$ oscilam em torno desta solução como dois osciladores. Estas regiões vibracionais do diagrama correspondem a vibrações de emparelhamento no espaço de gauge.

ii) Por outro lado, quando aumentamos a perturbação, ou seja, trabalhamos com $\varphi_{\mathbf{k}}$ e $\gamma_{\mathbf{k}}$ longe do equilíbrio, há um momento em que a solução $\gamma_{\mathbf{k}}$ deixa de oscilar em torno de $\gamma_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}}$ e pula (roda) em torno do equilíbrio, enquanto $\varphi_{\mathbf{k}}$ continua vibrando. Estas regiões rotacionais do diagrama correspondem a rotações de emparelhamento no espaço de gauge.

Para finalizar esta seção é interessante encontrar a Hamiltoniana efetiva clássica que gera a dinâmica das variáveis $\varphi_{\mathbf{k}}$ e $\gamma_{\mathbf{k}}$. Assim, a partir das equações de movimento de Hamilton e das equações cinética (4.24) e (4.25) temos

$$\begin{aligned}
 \dot{\varphi}_{\mathbf{k}} &= \frac{(m - \lambda)|\mathbf{k}|}{k_0} \sin \gamma_{\mathbf{k}} = -\frac{\partial}{\partial \gamma_{\mathbf{k}}} H_{\mathbf{k}}(\varphi_{\mathbf{k}}, \gamma_{\mathbf{k}}) \\
 \dot{\gamma}_{\mathbf{k}} &= \frac{2[(\mathbf{k})^2 + \lambda m]}{k_0} + \frac{2(m - \lambda)|\mathbf{k}|}{k_0} \cot 2\varphi_{\mathbf{k}} \cos \gamma_{\mathbf{k}} = \frac{\partial}{\partial \varphi_{\mathbf{k}}} H_{\mathbf{k}}(\varphi_{\mathbf{k}}, \gamma_{\mathbf{k}}) .
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Integrando estas equações verificamos de imediato que nossa tarefa não será tão simples assim, pois $\varphi_{\mathbf{k}}$ e $\gamma_{\mathbf{k}}$ não são variáveis canonicamente conjugadas. Portanto devemos encontrar uma transformação não canônica, de modo a deixar as novas variáveis numa forma canônica. A transformação que realiza esta tarefa é dada por

$$\sigma_{\mathbf{k}} = -\cos 2\varphi_{\mathbf{k}} \quad \text{e} \quad \gamma_{\mathbf{k}} = \gamma_{\mathbf{k}} . \tag{4.34}$$

Reescrevendo as equações dinâmicas (4.24) e (4.25) nas novas variáveis dadas em (4.34), obtemos

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{\mathbf{k}} &= \frac{2(m - \lambda)|\mathbf{k}|}{k_0}(1 - \sigma_{\mathbf{k}}^2) \sin \gamma_{\mathbf{k}} \\ \dot{\gamma}_{\mathbf{k}} &= \frac{2[(\mathbf{k})^2 + \lambda m]}{k_0} + \frac{2(\lambda - m)|\mathbf{k}|}{k_0} \frac{\sigma_{\mathbf{k}}}{[1 - \sigma_{\mathbf{k}}^2]^{1/2}} \cos \gamma_{\mathbf{k}} .\end{aligned}\tag{4.35}$$

Utilizando-se das equações de movimento de Hamilton, obtemos a Hamiltoniana efetiva clássica que gera a dinâmica das variáveis $\sigma_{\mathbf{k}}$ ($\varphi_{\mathbf{k}}$) e $\gamma_{\mathbf{k}}$, as quais descrevem a evolução temporal, devido à quebra da simetria quiral, de um sistema fermiônico livre e uniforme de muitos corpos na aproximação de campo médio. Esta Hamiltoniana efetiva é

$$H_{\mathbf{k}}(\sigma_{\mathbf{k}} \rightarrow \varphi_{\mathbf{k}}, \gamma_{\mathbf{k}}) = \frac{2[(\mathbf{k})^2 + \lambda m]}{k_0} \sigma_{\mathbf{k}} + 2(m - \lambda) \frac{|\mathbf{k}|}{k_0} (1 - \sigma_{\mathbf{k}}^2)^{1/2} \cos \gamma_{\mathbf{k}} .\tag{4.36}$$

Na próxima seção estudaremos a dinâmica de $\mathcal{R}$ no caso de um sistema uniforme de muitos férmions descritos pelo GNQM.

4.4 Dinâmica Efetiva de $\mathcal{R}$ - Caso Acoplado

Vamos estudar agora as equações cinéticas (4.20) e (4.21) que descrevem na aproximação de campo médio a dinâmica efetiva de $\mathcal{R}$, ou seja, das várias densidades de um corpo e de emparelhamento, para um sistema uniforme de muitos férmions descritos pelo Modelo Fermiônico Quiral de Gross-Neveu, sistema este que tem a simetria quiral quebrada devido a uma transformação de Nambu, a qual é um caso particular de uma transformação de Bogoliubov.

Observe que a diferença entre este cálculo e o da seção anterior está no traço da equação (4.21). Neste cálculo consideraremos o termo de interação dos campos fermiônicos ($g \neq 0$) do GNQM, o que o torna muito longo. Por simplicidade tomaremos $N = 1$, ou seja,

consideraremos um sistema uniforme de muitos férmions com apenas um tipo de férmion. O caso $N = 1$ facilita a soma dos muitos traços que temos, deixando o resultado numa forma mais nítida.

Como na seção anterior, para calcular o traço da equação (4.21), devemos escrever a Hamiltoniana do GNQM (3.10) na base de quasi-partículas de Nambu através de (4.17), calcular o comutador $[\beta_{-k,1}^\dagger \beta_{k,2}, H_{\text{GNQM}}]$ e tomar o traço utilizando $\mathcal{F}_0(t)$ na mesma base dada em (2.23). Muitos destes traços são nulos e na realidade temos (16x12) termos de interação do GNQM que contribuem com traço não nulo. Como exemplo vamos apresentar o cálculo de um destes termos. Consideremos o traço do primeiro termo de interação do GNQM [veja (3.10)], ou seja,

$$\mathcal{T} = \text{Tr} \left([\beta_{-k,1} \beta_{k,2}, H_{\text{GNQM}}^1] \mathcal{F}_0(t) \right) \quad (4.37)$$

onde

$$H_{\text{GNQM}}^1 = \left(\frac{g^2 m^2}{2L} \right) \sum_{k', k'', k''', k''''} \frac{\delta_{k'+k'', k''+k''''}}{\sqrt{k'_0 k''_0 k'''_0 k''''_0}} U_1(k', k'', k''', k''') a_{k'}^\dagger a_{k''} a_{k'''}^\dagger a_{k''''} \quad (4.38)$$

e

$$U_1(k', k'', k''', k''') = \xi \bar{u}_1(k') \gamma_5 u_1(k'') \bar{u}_1(k''') \gamma_5 u_1(k''') - \bar{u}_1(k') u_1(k'') \bar{u}_1(k''') u_1(k''') \quad (4.39)$$

Escrevendo este termo da Hamiltoniana do GNQM na base de quasi-partículas de Nambu surgem 16 novos termos, contudo devemos observar que estes termos devem ser contraídos com $\beta_{-k,1} \beta_{k,2}$ em (4.37), logo somente termos com três operadores de campo de criação e um de aniquilação terão contribuição não nula, ou seja,

$$\begin{aligned} a_{k'}^\dagger a_{k''} a_{k'''}^\dagger a_{k''''} &= -\sin \varphi_{k'} \sin \varphi_{k''} \cos \varphi_{k'''} \sin \varphi_{k''''} e^{i(\gamma_{k'} - \gamma_{k''} - \gamma_{k''''})} \beta_{-k',2}^\dagger \beta_{-k'',2}^\dagger \beta_{k''',1}^\dagger \beta_{-k''',2}^\dagger + \\ &- \cos \varphi_{k'} \sin \varphi_{k''} \sin \varphi_{k'''} \sin \varphi_{k''''} e^{-i(\gamma_{k''} - \gamma_{k'''} + \gamma_{k''''})} \beta_{k',1}^\dagger \beta_{-k'',2}^\dagger \beta_{-k''',2}^\dagger \beta_{-k''',2}^\dagger + \\ &- \cos \varphi_{k'} \cos \varphi_{k''} \cos \varphi_{k'''} \sin \varphi_{k''''} e^{-i\gamma_{k''''}} \beta_{k',1}^\dagger \beta_{k'',1}^\dagger \beta_{k''',1}^\dagger \beta_{-k''',2}^\dagger + \\ &- \cos \varphi_{k'} \sin \varphi_{k''} \cos \varphi_{k'''} \cos \varphi_{k''''} e^{-i\gamma_{k''}} \beta_{k',1}^\dagger \beta_{-k'',2}^\dagger \beta_{k''',1}^\dagger \beta_{k''',1}^\dagger + \\ &+ \text{termos que não contribuem} \quad (4.40) \end{aligned}$$

O cálculo do comutador (4.37), quando consideramos somente o primeiro termo de (4.40), nos fornece três novos termos. Consideremos o comutador

$$\begin{aligned}
C &= -\sin \varphi_{\mathbf{k}'} \sin \varphi_{\mathbf{k}''} \cos \varphi_{\mathbf{k}'''} \sin \varphi_{\mathbf{k}''''} e^{i(\gamma_{\mathbf{k}'} - \gamma_{\mathbf{k}''} - \gamma_{\mathbf{k}''''})} \left[\beta_{-\mathbf{k},1} \beta_{\mathbf{k},2}, \beta_{-\mathbf{k}',2} \beta_{-\mathbf{k}'',2}^\dagger \beta_{\mathbf{k}''',1}^\dagger \beta_{\mathbf{k}'''',2}^\dagger \right] \\
&= -\sin \varphi_{\mathbf{k}'} \sin \varphi_{\mathbf{k}''} \cos \varphi_{\mathbf{k}'''} \sin \varphi_{\mathbf{k}''''} e^{i(\gamma_{\mathbf{k}'} - \gamma_{\mathbf{k}''} - \gamma_{\mathbf{k}''''})} \beta_{-\mathbf{k}',2} \beta_{-\mathbf{k}'',2}^\dagger \beta_{-\mathbf{k}''',2}^\dagger \beta_{\mathbf{k},2} \delta_{\mathbf{k}''',-\mathbf{k}} + \\
&- \sin \varphi_{\mathbf{k}'} \sin \varphi_{\mathbf{k}''} \cos \varphi_{\mathbf{k}'''} \sin \varphi_{\mathbf{k}''''} e^{i(\gamma_{\mathbf{k}'} - \gamma_{\mathbf{k}''} - \gamma_{\mathbf{k}''''})} \beta_{-\mathbf{k},1} \beta_{-\mathbf{k}',2} \beta_{\mathbf{k}''',1}^\dagger \beta_{-\mathbf{k}'',2}^\dagger \delta_{\mathbf{k}'',-\mathbf{k}} + \\
&- \sin \varphi_{\mathbf{k}'} \sin \varphi_{\mathbf{k}''} \cos \varphi_{\mathbf{k}'''} \sin \varphi_{\mathbf{k}''''} e^{i(\gamma_{\mathbf{k}'} - \gamma_{\mathbf{k}''} - \gamma_{\mathbf{k}''''})} \beta_{-\mathbf{k},1} \beta_{-\mathbf{k}',2} \beta_{-\mathbf{k}'',2}^\dagger \beta_{\mathbf{k}''',1}^\dagger \delta_{\mathbf{k}''',-\mathbf{k}} . \quad (4.41)
\end{aligned}$$

Calculemos o traço (4.37) para o primeiro termo do comutador (4.41). Este traço é dado por

$$\begin{aligned}
T_1 &= \left(\frac{g^2 m^2}{2L} \right) \sum_{\mathbf{k}' \mathbf{k}'' \mathbf{k}''' \mathbf{k}''''} \frac{\delta_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}'', \mathbf{k}'''+\mathbf{k}''''}}{\sqrt{k'_0 k''_0 k'''_0 k''''_0}} U_1(\mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k}''', \mathbf{k}''') \times \\
&\times (-1) \sin \varphi_{\mathbf{k}'} \sin \varphi_{\mathbf{k}''} \cos \varphi_{\mathbf{k}'''} \sin \varphi_{\mathbf{k}''''} e^{i(\gamma_{\mathbf{k}'} - \gamma_{\mathbf{k}''} - \gamma_{\mathbf{k}''''})} \delta_{\mathbf{k}''',-\mathbf{k}} (Tr)_1 \quad (4.42)
\end{aligned}$$

onde $U_1(\mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k}''', \mathbf{k}''')$ é o produto de spinors dado em (4.39) e $(Tr)_1$ é o traço escolhido dado por

$$\begin{aligned}
(Tr)_1 &= Tr \left[\beta_{-\mathbf{k}',2} \beta_{-\mathbf{k}'',2}^\dagger \beta_{-\mathbf{k}''',2}^\dagger \beta_{\mathbf{k},2} \mathcal{F}_0(t) \right] \\
&= (1 - \nu_{\mathbf{k}',2}) \delta_{\mathbf{k}',\mathbf{k}''} \nu_{\mathbf{k}''',2} \delta_{\mathbf{k}''',-\mathbf{k}} - (1 - \nu_{\mathbf{k}',2}) \delta_{\mathbf{k}',\mathbf{k}''''} \nu_{\mathbf{k}'',2} \delta_{\mathbf{k}'',-\mathbf{k}} . \quad (4.43)
\end{aligned}$$

Observe que neste último cálculo utilizamos o fato de nosso sistema ser uniforme, pois para sistemas que exibem invariância por reflexão, as ocupações naturais de um dado momento $\mathbf{k}$, independem da direção de $\mathbf{k}$, ou seja,

$$\nu_{\mathbf{k},\lambda} = \nu_{-\mathbf{k},\lambda} \quad \text{para } \lambda = 1, 2 . \quad (4.44)$$

Analogamente, as variáveis $\varphi_{\mathbf{k}}$ e $\gamma_{\mathbf{k}}$ da transformação de Nambu também devem ser invariantes por reflexão implicando que

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \varphi_{-\mathbf{k}} \quad \text{e} \quad \gamma_{\mathbf{k}} = \gamma_{-\mathbf{k}} . \quad (4.45)$$

Substituindo (4.43) em (4.42) verifica-se que

$$\begin{aligned} T_1 &= \left(\frac{g^2 m^2}{4L} \right) \sin 2\varphi_{\mathbf{k}} e^{-i\gamma_{\mathbf{k}}} \frac{\nu_{\mathbf{k},2}}{k_0} \sum_{\mathbf{k}'} \frac{(1 - \nu_{\mathbf{k}',2})}{k'_0} \sin^2 \varphi_{\mathbf{k}'} \times \\ &\times [U_1(\mathbf{k}' = \mathbf{k}'''' , \mathbf{k}'' = \mathbf{k}''' = -\mathbf{k}) - U_1(\mathbf{k}' = \mathbf{k}'' , \mathbf{k}''' = \mathbf{k}'''' = -\mathbf{k})] \end{aligned} \quad (4.46)$$

onde $U_1(\mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k}''', \mathbf{k}'')$ é dado em (4.39). Utilizando-se de (3.6) e (3.7) segue que

$$U_1(\mathbf{k}' = \mathbf{k}'', \mathbf{k}''' = \mathbf{k}'''' = -\mathbf{k}) = -1 \quad (4.47)$$

$$U_1(\mathbf{k}' = \mathbf{k}'''' , \mathbf{k}'' = \mathbf{k}''' = -\mathbf{k}) = \frac{-1}{2m^2} [\mathbf{k}\mathbf{k}' + k_0 k'_0] (\xi + 1) + \frac{1}{2m^2} (\xi - 1) m^2 .$$

Substituindo (4.47) em (4.46) finalmente obtemos para um dos traços de (4.21) o seguinte resultado

$$\begin{aligned} T_1 &= \left(\frac{g^2 m^2}{4L} \right) \sin 2\varphi_{\mathbf{k}} e^{-i\gamma_{\mathbf{k}}} \frac{\nu_{\mathbf{k},2}}{k_0} \frac{L}{2\pi} \times \\ &\times \int d\mathbf{k}' \frac{(1 - \nu_{\mathbf{k}',2})}{k'_0} \sin^2 \varphi_{\mathbf{k}'} \frac{(\xi + 1)}{2m^2} [m^2 - k_0 k'_0 - \mathbf{k}\mathbf{k}'] \end{aligned} \quad (4.48)$$

onde passamos para o contínuo a soma para os modos $\mathbf{k}$ como em (3.16).

Calculando de modo semelhante os demais traços, obtemos após um longo cálculo as equações cinéticas desejadas abaixo

$$\dot{\nu}_{\mathbf{k},1} = 0 \quad \text{e} \quad \dot{\nu}_{\mathbf{k},2} = 0 \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} i\dot{\varphi}_{\mathbf{k}} + \dot{\gamma}_{\mathbf{k}} \frac{\sin 2\varphi_{\mathbf{k}}}{2} &= \left[\frac{(\mathbf{k})^2 + \lambda m}{k_0} \right] \sin 2\varphi_{\mathbf{k}} + (\lambda - m) \frac{|\mathbf{k}|}{k_0} \left[\sin^2 \varphi_{\mathbf{k}} e^{-i\gamma_{\mathbf{k}}} - \cos^2 \varphi_{\mathbf{k}} e^{i\gamma_{\mathbf{k}}} \right] + \\ &+ \left(\frac{g^2 m^2}{4\pi} \right) \frac{(\xi + 1)}{k_0} \left[\sin 2\varphi_{\mathbf{k}} + \frac{|\mathbf{k}|}{m} \left(\sin^2 \varphi_{\mathbf{k}} e^{-i\gamma_{\mathbf{k}}} - \cos^2 \varphi_{\mathbf{k}} e^{i\gamma_{\mathbf{k}}} \right) \right] (I_1 + I_2) \end{aligned} \quad (4.50)$$

onde I_1 e I_2 são as integrais divergentes dadas abaixo

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{d\mathbf{k}'}{k'_0} \cos 2\varphi_{\mathbf{k}'} (1 - \nu_{\mathbf{k}',1} - \nu_{\mathbf{k}',2}) \\ I_2 &= \int \frac{d\mathbf{k}'}{k'_0} \frac{|\mathbf{k}'|}{m} \sin 2\varphi_{\mathbf{k}'} \cos \gamma_{\mathbf{k}'} (1 - \nu_{\mathbf{k}',1} - \nu_{\mathbf{k}',2}) . \end{aligned} \quad (4.51)$$

Separando as partes real e imaginária da equação complexa acima, temos finalmente as desejadas equações cinéticas que descrevem a dinâmica efetiva de nosso sistema na aproximação de campo médio,

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{\mathbf{k}} &= \sin \gamma_{\mathbf{k}} \frac{|\mathbf{k}|}{k_0} \left[(m - \lambda) - \left(\frac{g^2 m}{4\pi} \right) (\xi + 1)(I_1 + I_2) \right] \\ \dot{\gamma}_{\mathbf{k}} \sin 2\varphi_{\mathbf{k}} &= \frac{2 \sin 2\varphi_{\mathbf{k}}}{k_0} \left[(\mathbf{k}^2 + \lambda m) + \left(\frac{g^2 m^2}{4\pi} \right) (\xi + 1)(I_1 + I_2) \right] + \\ &+ 2 \cos 2\varphi_{\mathbf{k}} \cos \gamma_{\mathbf{k}} \frac{|\mathbf{k}|}{k_0} \left[(m - \lambda) - \left(\frac{g^2 m}{4\pi} \right) (\xi + 1)(I_1 + I_2) \right] , \end{aligned} \quad (4.52)$$

onde I_1 e I_2 são as integrais divergentes dadas em (4.51).

Um teste para as equações cinéticas acima é verificar se elas conservam a energia do sistema, já que a aproximação é conservativa. Para tanto devemos calcular a energia na aproximação de campo médio para o nosso sistema fermiônico, o que pode ser feito escrevendo-se a Hamiltoniana (3.10) na base de quasi-partículas de Nambu através de (4.17) e utilizando-se $\mathcal{F}_0(t)$ dada em (2.23). Este cálculo também é longo e envolve traços semelhantes ao exemplificado nesta seção. Feito este cálculo, encontramos que a energia de nosso sistema na aproximação de campo médio é dada por

$$\begin{aligned}
\langle H_{\text{GNQM}}^{\text{M.F.}} \rangle &= \text{Tr} [H_{\text{GNQM}} \mathcal{F}_0(t)] \\
\frac{\langle H_{\text{GNQM}}^{\text{M.F.}} \rangle}{L} &= - \left(\frac{m}{2\pi} \right) [\lambda(I_1 + I_2) - m(I_2 - I_3)] + \\
&\quad - \left(\frac{g^2}{8\pi^2} \right) \frac{(\xi + 1)}{2} \int d\mathbf{k}' (1 + \nu_{\mathbf{k}',1} - \nu_{\mathbf{k}',2}) \int d\mathbf{k}'' (1 - \nu_{\mathbf{k}'',1} + \nu_{\mathbf{k}'',2}) + \\
&\quad - \left(\frac{g^2 m^2}{8\pi^2} \right) \frac{(\xi + 1)}{2} (I_1 + I_2)^2 , \tag{4.53}
\end{aligned}$$

onde novamente I_1 e I_2 são as integrais divergentes dadas em (4.51) e I_3 é outra integral divergente dada por

$$I_3 = \int \frac{d\mathbf{k}'}{k'_0} \left(\frac{\mathbf{k}'}{m} \right)^2 \cos 2\varphi_{\mathbf{k}} (1 - \nu_{\mathbf{k}',1} - \nu_{\mathbf{k}',2}) . \tag{4.54}$$

Derivando temporalmente (4.53) e utilizando-se as equações cinéticas (4.49) e (4.52), verificamos que estas conservam a energia do sistema, ou seja,

$$\left. \frac{d}{dt} \langle H_{\text{GNQM}}^{\text{M.F.}} \rangle \right|_{\text{equações cinéticas}} = 0 . \tag{4.55}$$

Este teste é fundamental para verificarmos se não cometemos nenhum erro durante a dedução das equações cinéticas (4.52).

Para finalizar esta seção calcularemos a Hamiltoniana efetiva clássica que gera a dinâmica das variáveis de Nambu ($\varphi_{\mathbf{k}}$ e $\gamma_{\mathbf{k}}$). Verifica-se a partir das equações de Hamilton (4.33) e das equações cinéticas (4.52), que $\varphi_{\mathbf{k}}$ e $\gamma_{\mathbf{k}}$ não são variáveis canonicamente conjugadas. Fazendo a transformação de variáveis definida em (4.34), podemos reescrever as equações cinéticas (4.52) como

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{\mathbf{k}} &= \frac{2(1 - \sigma_{\mathbf{k}}^2)^{1/2}|\mathbf{k}|}{k_0} \sin \gamma_{\mathbf{k}} \left[(m - \lambda) - \left(\frac{g^2 m}{4\pi} \right) (\xi + 1)(I_1 + I_2) \right] \\ \dot{\gamma}_{\mathbf{k}} &= \frac{2[\mathbf{k}^2 + \lambda m]}{k_0} + \frac{2(\lambda - m)|\mathbf{k}|}{k_0} \frac{\sigma_{\mathbf{k}}}{(1 - \sigma_{\mathbf{k}}^2)^{1/2}} \cos \gamma_{\mathbf{k}} + \\ &+ 2 \left(\frac{g^2 m^2}{4\pi} \right) \frac{(\xi + 1)}{k_0} (I_1 + I_2) \left[1 + \frac{|\mathbf{k}|}{m} \frac{\sigma_{\mathbf{k}}}{(1 - \sigma_{\mathbf{k}}^2)^{1/2}} \cos \gamma_{\mathbf{k}} \right] ,\end{aligned}\tag{4.56}$$

onde agora as integrais divergentes escrevem-se como

$$\begin{aligned}I_1 &= - \int \frac{d\mathbf{k}'}{k'_0} \sigma_{\mathbf{k}'} (1 - \nu_{\mathbf{k}',1} - \nu_{\mathbf{k}',2}) \\ I_2 &= \int \frac{d\mathbf{k}'}{k'_0} \frac{|\mathbf{k}'|}{m} (1 - \sigma_{\mathbf{k}'}^2)^{1/2} \cos \gamma_{\mathbf{k}'} (1 - \nu_{\mathbf{k}',1} - \nu_{\mathbf{k}',2}) .\end{aligned}\tag{4.57}$$

Agora, através das equações de Hamilton, podemos obter a Hamiltoniana efetiva clássica que gera a dinâmica das variáveis $\sigma_{\mathbf{k}}$ (ou $\varphi_{\mathbf{k}}$) e $\gamma_{\mathbf{k}}$ de Nambu. A Hamiltoniana efetiva é dada por

$$\begin{aligned}H_{\mathbf{k}}(\sigma_{\mathbf{k}} \rightarrow \varphi_{\mathbf{k}}, \gamma_{\mathbf{k}}) &= \frac{2[\mathbf{k}^2 + \lambda m]}{k_0} \sigma_{\mathbf{k}} + \frac{2(m - \lambda)|\mathbf{k}|}{k_0} (1 - \sigma_{\mathbf{k}}^2)^{1/2} \cos \gamma_{\mathbf{k}} + \\ &+ 2 \left(\frac{g^2 m^2}{4\pi} \right) \frac{(\xi + 1)}{k_0} (I_1 + I_2) \left[\sigma_{\mathbf{k}} - \frac{|\mathbf{k}|}{m} (1 - \sigma_{\mathbf{k}}^2)^{1/2} \cos \gamma_{\mathbf{k}} \right] .\end{aligned}\tag{4.58}$$

Na próxima seção vamos renormalizar a teoria, tornando os resultados obtidos finitos.

4.5 Renormalização do Modelo Fermiônico Quiral de Gross-Neveu

Devemos observar que todos os resultados obtidos na seção precedente contêm integrais divergentes. Estas divergências são esperadas em qualquer cálculo na Teoria Quântica de Campos (QFT) e técnicas que tornam as quantidades físicas finitas devem ser introduzidas.

As técnicas de renormalização consistem em absorver as divergências pelos “parâmetros nus” da teoria. Geralmente os termos divergentes são combinados com a massa e com a constante de acoplamento nus da teoria para definir valores finitos (renormalizados) da massa e da constante de acoplamento físicas.

Por outro lado, vemos que o nosso trabalho é tecnicamente mais complexo, pois as integrais divergentes, dadas em (4.51), não podem ser integradas, já que elas contêm integrações implícitas nas variáveis de Nambu, $\varphi_{\mathbf{k}}$ e $\gamma_{\mathbf{k}}$, e não sabemos a dependência destas variáveis com relação aos modos $\mathbf{k}$, consequentemente não sabemos nem os graus de divergência de I_1 e I_2 .

Torna-se evidente que além das técnicas usuais de renormalização [4, 17, 30], deveremos resolver um problema de auto-consistência simultaneamente. Recentemente Tommasini e Toledo Piza [31] desenvolveram um método que permite renormalizar tais situações. Utilizaremos este método para renormalizar as equações cinéticas (4.52).

Com o objetivo de renormalizar nossa teoria, consideremos o caso estático, $\dot{\varphi}_{\mathbf{k}} = 0$ e $\dot{\gamma}_{\mathbf{k}} = 0$, das equações cinéticas (4.52), que descrevem a dinâmica de $\mathcal{R}$ de nosso sistema fermiônico na aproximação de campo médio, ou seja,

$$\sin \gamma_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} \left[1 - \left(\frac{g^2}{4\pi} \right) (\xi + 1)(I_1 + I_2) \right] = 0 \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} \sin 2\varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} \left[(\mathbf{k})^2 + \left(\frac{g^2 m^2}{4\pi} \right) (\xi + 1)(I_1 + I_2) \right] = \\ - \cos 2\varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} \cos \gamma_{\mathbf{k}}|\mathbf{k}|_{\text{eq}} \left[m - \left(\frac{g^2 m}{4\pi} \right) (\xi + 1)(I_1 + I_2) \right] , \quad (4.60) \end{aligned}$$

onde reescrevemos as integrais divergentes I_1 e I_2 abaixo

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int \frac{dk'}{k'_0} \cos 2\varphi_{k'} (1 - \nu_{k,1} - \nu_{k',2}) \\
 I_2 &= \int \frac{dk'}{k'_0} \frac{|k'|}{m} \sin 2\varphi_{k'} \cos \gamma_{k'} (1 - \nu_{k',1} - \nu_{k',2})
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

tomando $\lambda = 0$, ou seja, consideramos que a Hamiltoniana do GNQM que descreve o sistema apresenta simetria quiral.

Observe que caso soubéssemos a dependência em k de $\cos 2\varphi_k$, $\sin 2\varphi_k$, $\cos \gamma_k$ e $\sin \gamma_k$, teríamos os graus de divergência de I_1 e I_2 e poderíamos renormalizar a teoria introduzindo contra-termos, ou ainda, renormalizando os parâmetros nus da teoria. No caso livre (seção 4.3) pudemos calcular analiticamente a dependência em k das funções acima [veja (4.32) ou Apêndice B], contudo, devido às integrações implícitas, o método exposto no Apêndice B, não funciona para as equações (4.59) e (4.60).

Procuremos as soluções estáticas das equações (4.59) e (4.60). A equação (4.59) fornece duas possíveis soluções, que correspondem a duas possíveis fases do sistema

$$\begin{aligned}
 1^{\text{a}} \text{ fase} : \quad & 1 - \left(\frac{g^2}{4\pi} \right) (\xi + 1)(I_1 + I_2) = 0 \\
 & \text{com } \sin \gamma_k|_{\text{eq}} \neq 0
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

$$\begin{aligned}
 2^{\text{a}} \text{ fase} : \quad & \sin \gamma_k|_{\text{eq}} = 0 \\
 & \text{com } 1 - \left(\frac{g^2}{4\pi} \right) (\xi + 1)(I_1 + I_2) \neq 0 ,
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

enquanto a equação (4.60) pode ser reescrita como

$$\tan 2\varphi_k|_{\text{eq}} = \frac{-|k|m [1 - (g^2/4\pi) (\xi + 1)(I_1 + I_2)]}{[(k)^2 + (g^2 m^2/4\pi) (\xi + 1)(I_1 + I_2)]} \cos \gamma_k|_{\text{eq}} . \tag{4.64}$$

Imediatamente podemos interpretar a primeira solução de (4.59), ou seja, interpretar a fase do sistema que corresponde a situação descrita pelas equações (4.62) e (4.64). Substituindo (4.62) em (4.64) temos que a situação de equilíbrio de nosso sistema descrito por estas equações é dada por

$$\tan 2\varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} = 0 \Rightarrow \varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} = n\pi \text{ para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.65)$$

$$\sin \gamma_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} \neq 0 \Rightarrow \forall \gamma_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} \text{ tal que } \gamma_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} \neq n\pi \text{ para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Verificamos que substituindo as soluções (4.65) na transformação de Nambu (4.17), esta torna-se uma matriz identidade, o que significa que a fase correspondente às soluções das equações (4.62) e (4.64) é uma fase onde a simetria quiral do sistema permanece intacta. Esta é a solução trivial do problema.

Estudemos a segunda fase de nosso sistema, descrita pelas equações (4.63) e (4.64), a qual corresponde à fase de simetria quiral quebrada. Substituindo (4.63) em (4.64) temos que esta fase será descrita pelas seguintes equações

$$\tan 2\varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} = \frac{-(-1)^n |\mathbf{k}| m [1 - (g^2/4\pi)(\xi + 1)(I_1 + I_2)]}{[(\mathbf{k})^2 + (g^2 m^2/4\pi)(\xi + 1)(I_1 + I_2)]}$$

$$\text{com } 1 - \left(\frac{g^2}{4\pi}\right)(\xi + 1)(I_1 + I_2) \neq 0 \quad (4.66)$$

$$\gamma_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} = n\pi \text{ para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Com o objetivo de determinar as soluções deste problema, ou seja, determinar a dependência em $\mathbf{k}$ das funções de $\varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}}$ e de $\gamma_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}}$, vamos resolver um problema de auto-consistência. Vamos supor que as integrais I_1 e I_2 divergem logaritmicamente da forma abaixo

$$\begin{aligned}
I_1 &= a + b \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \\
I_2 &= c + d \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right)
\end{aligned} \tag{4.67}$$

onde a , b , c e d são constantes que o problema de autoconsistência determinará.

Por outro lado, sabemos do cálculo variacional da seção (3.3) [veja equação do *gap* (3.20)], ou ainda de vários outros trabalhos [17, 30], que a renormalização da constante de acoplamento do GNQM é logarítmica. Tomando $N = 1$ em (3.20), temos a seguinte forma para a renormalização da constante de acoplamento,

$$g^2 = \frac{4\pi}{(\xi + 1)} \left[\ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \right]^{-1}. \tag{4.68}$$

Substituindo a renormalização da constante de acoplamento (4.68) e o *ansatz* para I_1 e I_2 dado em (4.67) na equação (4.66) que descreve a situação de equilíbrio das variáveis de Nambu, obtemos

$$\tan 2\varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} = \frac{-(-1)^n m |\mathbf{k}| [1 - (b + d)]}{[(\mathbf{k})^2 + m^2(b + d)]}. \tag{4.69}$$

Observe que a divergência foi controlada na equação acima já que b e d são constantes independentes do *cut-off*. Agora, a partir de (4.69), podemos determinar a dependência em $\mathbf{k}$ de $\cos 2\varphi_{\mathbf{k}}$ e $\sin 2\varphi_{\mathbf{k}}$. Verifica-se que

$$\begin{aligned}
\sin 2\varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} &= \frac{-(-1)^n m |\mathbf{k}| [1 - (b + d)]}{k_0 [k^2 + m^2(b + d)]^{1/2}} \\
\cos 2\varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} &= \frac{[k^2 + m^2(b + d)]}{k_0 [k^2 + m^2(b + d)]^{1/2}}
\end{aligned} \tag{4.70}$$

é solução de (4.69), onde os denominadores de (4.70) são determinados a partir da condição

$$\sin^2 2\varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} + \cos^2 2\varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} = 1 \quad . \quad (4.71)$$

Finalmente devemos verificar a autoconsistência de nossos resultados, substituindo (4.70) nas integrais divergentes I_1 e I_2 , integrando-as e verificando se o resultado é consistente com o *ansatz* (4.67). Calculando I_1 no vácuo a partir das soluções (4.70), ou seja, tomando as ocupações nulas ($\nu_{\mathbf{k},1} = \nu_{\mathbf{k},2} = 0$) em (4.61), obtemos

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\Lambda}^{+\Lambda} \frac{dk}{(k^2 + m^2)} \frac{[\mathbf{k}^2 + m^2(b+d)]}{[k^2 + m^2(b+d)^2]} = a + b \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \\ &= \frac{2(b+d-1)}{[(b+d)^2 - 1]^{1/2}} \arctan[(b+d)^2 - 1]^{1/2} + \ln \left[\frac{4}{(b+d)^2} \right] + \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \\ &\quad \text{quando } (b+d)^2 > 1 \\ &= \frac{(b+d-1)}{[1 - (b+d)^2]^{1/2}} \ln \left[\frac{1 + \{1 - (b+d)^2\}^{1/2}}{1 - \{1 - (b+d)^2\}^{1/2}} \right] + \ln \left[\frac{4}{(b+d)^2} \right] + \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \\ &\quad \text{quando } (b+d)^2 < 1 \end{aligned} \quad (4.72)$$

Calculemos também I_2 dada em (4.61) no vácuo a partir das soluções (4.70) e verifiquemos a autoconsistência do *ansatz* (4.67),

$$\begin{aligned} I_2 &= 2(b+d-1) \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{dk}{(k^2 + m^2)} \frac{k^2}{[k^2 + m^2(b+d)^2]^{1/2}} = c + d \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \\ &= (b+d-1) \left\{ \frac{-2}{[(b+d)^2 - 1]^{1/2}} \arctan[(b+d)^2 - 1]^{1/2} + \ln \left[\frac{4}{(b+d)^2} \right] + \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \right\} \\ &\quad \text{quando } (b+d)^2 > 1 \\ &= (b+d-1) \left\{ \frac{-1}{[1 - (b+d)^2]^{1/2}} \ln \left[\frac{1 + \{1 - (b+d)^2\}^{1/2}}{1 - \{1 - (b+d)^2\}^{1/2}} \right] + \ln \left[\frac{4}{(b+d)^2} \right] + \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \right\} \\ &\quad \text{quando } (b+d)^2 < 1 \end{aligned} \quad (4.73)$$

Nos cálculos de I_1 e I_2 acima utilizamos os resultados do Apêndice D. O teste de autoconsistência de I_1 (4.72) nos fornece que $b = 1$ e substituindo este resultado no teste de autoconsistência de I_2 (4.73), observamos que d permanece arbitrário.

Colocando estes resultados nas equações (4.63) e (4.69), temos que as equações estáticas renormalizadas que descrevem a 2ª fase do nosso sistema na Aproximação de Campo Médio são

$$\tan 2\varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} = \frac{(-1)^n m |\mathbf{k}| d}{[\mathbf{k}^2 + (1+d)m^2]} \quad \text{com } d \neq 0 \quad (4.74)$$

$$\gamma_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} = n\pi \quad \text{para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Analisando as equações (4.65) correspondente à fase de simetria quiral intacta do sistema e (4.74) correspondente à fase de simetria quiral quebrada do sistema, verificamos que o *ansatz* (4.67) para as integrais divergentes e a renormalização da constante de acoplamento (4.68) tornaram os nossos resultados finitos autoconsistentemente. Observe que caso tivéssemos escolhido outras formas para as divergências de I_1 e I_2 em (4.67), os testes de autoconsistência (4.72) e (4.73) dariam resultados incompatíveis com o *ansatz*. Neste sentido dizemos que renormalizamos autoconsistentemente a teoria [31].

Note também que neste procedimento de renormalização tínhamos inicialmente um parâmetro livre g , que renormalizado através de (4.68), deu origem ao parâmetro livre d . A partir de (4.74) verificamos que d nos diz se estamos em uma teoria com simetria quiral intacta ($d = 0$), solução correspondente à 1ª fase dada em (4.65), ou se a simetria quiral do sistema foi quebrada ($d \neq 0$), solução correspondente à 2ª fase dada em (4.74).

Na próxima seção iremos interpretar os resultados renormalizados obtidos nesta seção. Em particular iremos estudar o parâmetro d , fazendo uma conexão entre estes resultados não perturbativos obtidos na Aproximação de Campo Médio e os resultados da expansão $1/N$ obtidos por Gross e Neveu.

4.6 Interpretação da Dinâmica Efetiva de $\mathcal{R}$ - Caso Acoplado

Na seção precedente, estudando o caso estático das equações cinéticas (4.52), renormalizamos nossa teoria autoconsistentemente. Deste processo verificou-se que o sistema apresentava duas fases. A chamada 1ª fase, veja (4.65), correspondente à situação em que o

sistema mantém a sua simetria quiral intacta e a chamada 2ª fase, veja (4.74), correspondente à situação na qual a simetria quiral do sistema é quebrada através da transformação de Nambu.

Neste processo de renormalização autoconsistente da constante de acoplamento (4.68), o parâmetro livre nu g foi substituído pelo parâmetro livre renormalizado d , parâmetro renormalizado este que nos informa se o sistema mantém sua simetria quiral intacta (caso $d = 0$) ou não (caso $d \neq 0$).

Começaremos esta seção interpretando o parâmetro renormalizado d . Notando que temos agora uma teoria finita, faremos um cálculo semelhante ao já realizado na seção (4.3), ou seja, calcularemos qual a mudança de massa nos spinors da base de quasi-partículas de Nambu gerada pela dinâmica. Analogamente a (4.30), escrevendo os campos $\psi(\mathbf{x})$ e $\bar{\psi}(\mathbf{x})$, dados em (2.1), na base de quasi-partículas de Nambu através de (4.17), temos que os novos spinors de Dirac na base de quasi-partículas de Nambu são dados por (4.31). Para calcularmos o que são $u'_1(\mathbf{k})$ e $u'_2(\mathbf{k})$ devemos obter as forma analíticas de $\cos \varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}}$ e $\sin \varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}}$ a partir de (4.74). Este cálculo é realizado no Apêndice B. Obtém-se que

$$\cos \varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} = \frac{1}{2\sqrt{k_0 x}} \left[(k_0 x + m|\mathbf{k}|d)^{1/2} + (k_0 x - m|\mathbf{k}|d)^{1/2} \right] \quad (4.75)$$

$$\sin \varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} = (-1)^n \frac{1}{2\sqrt{k_0 x}} \left[(k_0 x + m|\mathbf{k}|d)^{1/2} - (k_0 x - m|\mathbf{k}|d)^{1/2} \right]$$

onde $x = [k^2 + (1 + d)^2 m^2]^{1/2}$.

Substituindo os spinors da base de partículas (3.7) e as soluções estáticas das variáveis de Nambu (4.75) em (4.31), obtemos depois de alguma álgebra

$$u'_1(\mathbf{k}) = \left[\frac{(k_0^{ef} + m_{ef})}{2m_{ef}} \right]^{1/2} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{k} \\ \frac{k_0^{ef} + m_{ef}}{2m_{ef}} \end{bmatrix} \quad u'_2(\mathbf{k}) = \left[\frac{(k_0^{ef} - m_{ef})}{2m_{ef}} \right]^{1/2} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{k} \\ \frac{k_0^{ef} - m_{ef}}{2m_{ef}} \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

onde $(k_0^{ef})^2 = (\mathbf{k})^2 + (m_{ef})^2$, sendo a relação entre as massas das duas bases dada por

$$m_{ef} = (1 + d)m . \quad (4.77)$$

Comparando os spinors (4.76) na base de quasi-partículas de Nambu com os spinors (3.7) na base de partículas, concluímos que esta redefinição da escala de massa significa que não tínhamos expandido os operadores de criação e aniquilação de partículas na boa base de partículas e que a transformação de Nambu redefine uma nova base de quasi-partículas, através de um princípio variacional embutido na equação de Heisenberg, o qual minimiza a teoria, quebrando a simetria quiral do sistema.

Por outro lado, há uma relação entre o parâmetro d e a constante de acoplamento nua g (veja Apêndice B). Vemos por exemplo que $d = -1$ nas equações estáticas (4.74) geram as equações estáticas (4.28) do caso livre ($g = 0$). Vemos também que a partir de (4.77) temos para

$$d = -1 \implies m_{ef} = 0 , \quad (4.78)$$

o que é esperado no caso de uma teoria livre [veja seções (3.3) e (4.3)].

Para entender melhor esta última característica do parâmetro d , devemos nos lembrar que partimos com uma teoria não massiva ($\lambda = 0$), a qual continha um parâmetro livre adimensional, isto é, a constante de acoplamento nua g e terminamos com uma teoria renormalizada, a qual contém o parâmetro livre renormalizado d associado a uma escala de massa [$m_{ef} = (1+d)m$]. Esta maneira de ver o problema indica que uma interpretação para a correlação existente entre o parâmetro renormalizado d e a constante de acoplamento nua g seria uma espécie de fenômeno de transmutação dimensional, fenômeno já verificado na expansão $1/N$ do trabalho original de Gross-Neveu [17], e que agora se manifestaria em nosso cálculo através do parâmetro d .

Analogamente ao trabalho de Gross-Neveu, a redefinição da escala de massa (4.77) é dada pelo produto da constante de acoplamento renormalizada pela escala de massa inicial da teoria. Portanto, o parâmetro livre d (ou m_{ef}) é equivalente à λ (ou M_F) definido em

[17], o qual é responsável pela quebra dinâmica da simetria quiral e consequente geração de massa no caso da expansão em $1/N$ [17]. Enfim observamos que, analogamente ao trabalho de Gross-Neveu, obtivemos uma teoria na qual, à parte todas as escalas de massas caracterizadas por d , não há parâmetros livres.

Agora com a teoria renormalizada, vamos reescrever as equações dinâmicas (4.52) que descrevem a evolução temporal na aproximação de campo médio de um sistema uniforme de muitos férmions descritos pelo Modelo Quiral de Gross-Neveu, o qual tem sua simetria quiral quebrada por meio de uma transformação de Nambu. Primeiramente vamos escrevê-las em termos do parâmetro d ,

$$\begin{aligned}
\dot{\nu}_{\mathbf{k},1} &= 0 \quad \text{e} \quad \dot{\nu}_{\mathbf{k},2} = 0 \\
\dot{\varphi}_{\mathbf{k}} &= (-1) \sin \gamma_{\mathbf{k}} \frac{|\mathbf{k}|}{k_0} [\lambda + md] \\
\dot{\gamma}_{\mathbf{k}} \sin 2\varphi_{\mathbf{k}} &= \frac{2 \sin 2\varphi_{\mathbf{k}}}{k_0} [(\mathbf{k})^2 + m^2 + m(\lambda + md)] + \\
&\quad - 2 \cos 2\varphi_{\mathbf{k}} \cos \gamma_{\mathbf{k}} \frac{|\mathbf{k}|}{k_0} [\lambda + md]
\end{aligned} \tag{4.79}$$

ou ainda em termos de m_{ef} elas podem ser reescritas como

$$\begin{aligned}
\dot{\nu}_{\mathbf{k},1} &= 0 \quad \text{e} \quad \dot{\nu}_{\mathbf{k},2} = 0 \\
\dot{\varphi}_{\mathbf{k}} &= (-1) \sin \gamma_{\mathbf{k}} \frac{|\mathbf{k}|}{k_0} [\lambda + m_{ef} - m] \\
\dot{\gamma}_{\mathbf{k}} \sin 2\varphi_{\mathbf{k}} &= \frac{2 \sin 2\varphi_{\mathbf{k}}}{k_0} [(\mathbf{k})^2 + m(\lambda + m_{ef})] + \\
&\quad - 2 \cos 2\varphi_{\mathbf{k}} \cos \gamma_{\mathbf{k}} \frac{|\mathbf{k}|}{k_0} [\lambda + m_{ef} - m] .
\end{aligned} \tag{4.80}$$

Com o objetivo de melhor visualizar o fenômeno de quebra de simetria, calculemos em seguida a energia do estado fundamental de nosso sistema fermiônico uniforme na Aproximação de Campo Médio. A partir de (4.53) temos

$$\begin{aligned} \frac{\langle H_{\text{GNQM}}^{\text{M.F.}} \rangle}{L} &= \left(\frac{m^2}{2\pi} \right) (I_2 - I_3) - \left(\frac{g^2}{8\pi^2} \right) \frac{(\xi + 1)}{2} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} dk' \int_{-\Lambda}^{\Lambda} dk'' \\ &- \left(\frac{g^2 m^2}{8\pi^2} \right) \frac{(\xi + 1)}{2} (I_1 + I_2)^2 \end{aligned} \quad (4.81)$$

onde tomamos $\nu_{\mathbf{k},1} = \nu_{\mathbf{k},2} = 0$, pois estudamos o estado fundamental do sistema e $\lambda = 0$, pois queremos que inicialmente o sistema apresente simetria quiral. No caso não trivial, ou seja, na fase de simetria quebrada (4.74), as integrais divergentes escrevem-se como

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{d\mathbf{k}}{k_0} \cos 2\varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} \\ I_2 &= \int \frac{d\mathbf{k}}{k_0} (-1)^n \frac{|\mathbf{k}|}{m} \sin 2\varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} \\ I_3 &= \int \frac{d\mathbf{k}}{k_0} \left(\frac{\mathbf{k}}{m} \right)^2 \cos 2\varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} . \end{aligned} \quad (4.82)$$

Substituindo as soluções (4.70) nas integrais (4.82) e utilizando-se da renormalização da constante de acoplamento (4.68), temos que a energia do estado fundamental de nosso sistema uniforme na aproximação de campo médio e na fase de simetria quiral quebrada ($d \neq 0$) é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\langle H_{\text{GNQM}}^{\text{M.F.}} \rangle^{\text{vácuo}}}{L} &= - \left(\frac{1}{2\pi} \right) \int d\mathbf{k} \frac{k^2}{[k^2 + m^2(b+d)^2]^{1/2}} - \left(\frac{1}{2\pi} \right) \left(\frac{g^2}{2\pi} \right) (\xi + 1) \Lambda^2 + \\ &- \left(\frac{1}{2\pi} \right) \frac{m^2}{2} 2(b+d)(a+c) - \left(\frac{1}{2\pi} \right) \frac{m^2}{2} (b+d)^2 \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) . \end{aligned} \quad (4.83)$$

A partir de a , b , c e d dados em (4.72) e (4.73) temos que

$$a + c = -(1 + d) \ln \left[\frac{(1 + d)^2}{4} \right] \quad (4.84)$$

$$b = 1$$

qualquer que seja d . Por outro lado, temos do Apêndice D que

$$\int_0^\Lambda dk \frac{(k)^2}{[k^2 + m^2(1 + d)^2]^{1/2}} = \frac{\Lambda^2}{2} - \frac{(1 + d)^2 m^2}{4} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) + \frac{(1 + d)^2 m^2}{4} \left\{ 1 + \ln \left[\frac{(1 + d)^2}{4} \right] \right\} . \quad (4.85)$$

Substituindo (4.84) e (4.85) em (4.83) obtemos o seguinte resultado

$$\frac{\langle H_{\text{GNQM}}^{\text{M.F.}} \rangle^{\text{vácuo}}}{L} = - \left(\frac{1}{2\pi} \right) \left[1 + \left(\frac{g^2}{2\pi} \right) (\xi + 1) \right] \Lambda^2 - \left(\frac{1}{2\pi} \right) \frac{(1 + d)^2 m^2}{2} \left\{ 1 - \ln \left[\frac{(1 + d)^2}{4} \right] \right\} . \quad (4.86)$$

Observe que exatamente como no caso variacional, obtivemos uma energia para o estado fundamental que diverge quadraticamente [veja (3.23)]. Como anteriormente, esta divergência é devida a uma má definição do zero de energia e não apresenta consequências físicas, já que ela representa uma densidade de energia do vácuo. Esta afirmação pode ser verificada calculando-se novamente a energia do vácuo do modelo (4.53), mas agora com os campos fermiônicos expandidos nas soluções de Dirac não massivas, o que nos fornece

$$\frac{\langle m = 0 | H_{\text{GNQM}}^{\text{M.F.}} | m = 0 \rangle}{L} \Big|_{\text{vácuo}} = - \left(\frac{\Lambda^2}{2\pi} \right) \left[1 + \left(\frac{g^2}{2\pi} \right) (\xi + 1) \right] . \quad (4.87)$$

Uma vez que somente diferenças de energias são mensuráveis, redefinimos o zero da escala de energia da maneira usual, ou seja, subtraindo (4.87) de (4.86). Portanto, a energia renormalizada do estado fundamental de nosso sistema uniforme fermiônico na aproximação de campo médio e na fase de simetria quebrada é dada em termos do parâmetro livre renormalizado d por

$$\frac{\langle H_{\text{GNQM}}^{\text{M.F.}} \rangle^{\text{vácuo}}}{L} = - \left(\frac{m^2}{4\pi} \right) (1+d)^2 \left[1 + 2 \ln 2 - \ln(1+d)^2 \right] \quad (4.88)$$

ou em termos da massa efetiva m_{ef}

$$\frac{\langle H_{\text{GNQM}}^{\text{M.F.}} \rangle^{\text{vácuo}}}{L} = - \left(\frac{m^2}{4\pi} \right) \left(\frac{m_{ef}}{m} \right)^2 \left[1 + 2 \ln 2 - \ln \left(\frac{m_{ef}}{m} \right)^2 \right] . \quad (4.89)$$

Graficamente o comportamento da energia do estado fundamental do sistema, em função do parâmetro renormalizado d ou m_{ef} , pode ser visto abaixo

Figura 3. Energia na aproximação de campo médio e na fase de simetria quiral quebrada do estado fundamental de um sistema fermiônico uniforme descrito pelo GNQM.

Devemos observar que a curva obtida para a energia do estado fundamental de nosso sistema é um típico gráfico de sistema com simetria quebrada. Na figura 3 vemos uma situação simétrica associada a um ponto de equilíbrio metaestável e uma situação mínima não simétrica associada ao equilíbrio do sistema.

Finalmente gostaríamos de fazer algumas considerações sobre o tipo de renormalização que utilizamos em (4.68) para a constante de acoplamento do GNQM. Nas referências [31, 32] utiliza-se, ao invés de uma “renormalização do tipo variacional” (4.68), uma “renormalização do tipo expansão”. Consideremos a renormalização do tipo expansão abaixo para a constante de acoplamento,

$$g_{\text{nua}}^2 = \frac{g_R^2}{\left[1 + \left(\frac{g_R^2}{4\pi}\right)(\xi + 1) \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)\right]}, \quad (4.90)$$

onde g_R é a constante de acoplamento renormalizada. Esta renormalização é dita de expansão, já que ela pode ser reescrita como

$$\frac{1}{g^2} = \frac{1}{g_R^2} + \frac{(\xi + 1)}{4\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) \quad (4.91)$$

que é justamente a renormalização da constante de acoplamento no caso da expansão $1/N$ (veja referências [17, 33]).

Por outro lado, verificamos que utilizando a renormalização (4.90), ao invés de (4.68), para a constante de acoplamento do GNQM, podemos refazer todos os cálculos efetuados nesta seção e obteremos os mesmos resultados. Isto pode ser entendido verificando-se que somente a parte singular de (4.90) contribui para a física do estado fundamental do sistema, ou seja, tomando o limite $\Lambda \rightarrow \infty$ em (4.90) obtemos

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left[\frac{g_R^2}{1 + \left(\frac{g_R^2}{4\pi}\right)(\xi + 1) \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)} \right] = \frac{4\pi}{(\xi + 1)} \ln^{-1}\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) = g_{\text{variacional}}. \quad (4.92)$$

No próximo capítulo vamos estudar uma aplicação das equações cinéticas renormali-

zadas (4.79). Mais exatamente, vamos estudar a forma linear destas equações fazendo um cálculo do tipo RPA em torno da situação de equilíbrio.

Capítulo 5

Solução Tipo RPA para a Dinâmica Efetiva de $\mathcal{R}$ na Aproximação de Campo Médio

Neste capítulo estudaremos uma aplicação das equações cinéticas renormalizadas obtidas no capítulo precedente. Exploraremos a forma linear destas equações que descrevem a dinâmica efetiva de $\mathcal{R}$ na Aproximação de Campo Médio para um sistema fermiônico uniforme descrito pelo GNQM na fase de simetria quiral quebrada.

A forma linear das equações cinéticas obtidas nos fornecerá a dinâmica efetiva de quasi-equilíbrio em torno da solução estacionária. Resolveremos estas equações do tipo RPA de forma geral e fechada através de uma analogia com a Teoria de Espalhamento, encontrando as amplitudes e frequências de oscilação do sistema.

Finalmente estudamos a possibilidade da existência de estados ligados de quasi-férmions no regime de quasi-equilíbrio.

5.1 Linearização das Equações Cinéticas

As equações cinéticas renormalizadas (4.79) formam um sistema não linear de equações diferenciais acopladas. Uma solução analítica geral para estas equações não é fácil de ser construída e aproximações são necessárias para que elas tornem-se trabalháveis.

Neste capítulo estudaremos uma interessante aplicação do formalismo até aqui desenvolvido. Calcularemos a dinâmica efetiva de $\mathcal{R}$ no regime de pequenas amplitudes em torno do equilíbrio. Neste limite somos capazes de resolver exatamente de forma fechada as equações obtidas. As equações cinéticas que emergem deste limite e que são conhecidas como equações de campo médio linearizadas (ou TDHFB Linearizadas) são equivalentes às equações RPA (veja referências em [34]). Neste sentido dizemos que procuramos soluções RPA para a dinâmica efetiva de $\mathcal{R}$ de um sistema fermiônico uniforme descrito pelo GNQM na Aproximação de Campo Médio e na fase de simetria quiral quebrada.

Começemos reescrevendo as equações cinéticas (4.52), que descrevem a dinâmica efetiva de nosso sistema na Aproximação de Campo Médio, considerando que inicialmente o sistema apresenta simetria quiral ($\lambda = 0$)

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_{\mathbf{k}} &= \sin \gamma_{\mathbf{k}} \frac{m|\mathbf{k}|}{k_0} \left[1 - \left(\frac{g^2}{4\pi} \right) (\xi + 1)(I_1 + I_2) \right] \\ \dot{\gamma}_{\mathbf{k}} \sin 2\varphi_{\mathbf{k}} &= \frac{2 \sin 2\varphi_{\mathbf{k}}}{k_0} \left[k^2 + \left(\frac{g^2 m^2}{4\pi} \right) (\xi + 1)(I_1 + I_2) \right] + \\ &+ 2 \cos 2\varphi_{\mathbf{k}} \cos \gamma_{\mathbf{k}} \frac{m|\mathbf{k}|}{k_0} \left[1 - \left(\frac{g^2}{4\pi} \right) (\xi + 1)(I_1 + I_2) \right] ,\end{aligned}\tag{5.1}$$

onde I_1 e I_2 são as integrais divergentes abaixo

$$\begin{aligned}I_1 &= \int \frac{d\mathbf{k}'}{k'_0} \cos 2\varphi_{\mathbf{k}'} (1 - \nu_{\mathbf{k}',1} - \nu_{\mathbf{k}',2}) \\ I_2 &= \int \frac{d\mathbf{k}'}{k'_0} \frac{|\mathbf{k}'|}{m} \sin 2\varphi_{\mathbf{k}'} \cos \gamma_{\mathbf{k}'} (1 - \nu_{\mathbf{k}',1} - \nu_{\mathbf{k}',2}) .\end{aligned}\tag{5.2}$$

Com o objetivo de estudar a física de pequenas oscilações em torno do equilíbrio (estado fundamental), vamos linearizar as equações cinéticas acima. Expandimos inicialmente as variáveis dinâmicas até 1ª ordem em torno das soluções estacionárias,

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{k}} &= \varphi_{\mathbf{k}}^{(0)} + \delta\varphi_{\mathbf{k}} \\ \gamma_{\mathbf{k}} &= \gamma_{\mathbf{k}}^{(0)} + \delta\gamma_{\mathbf{k}},\end{aligned}\tag{5.3}$$

onde $\varphi_{\mathbf{k}}^{(0)} = \varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}}$ e $\gamma_{\mathbf{k}}^{(0)} = \gamma_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}}$ são as soluções estacionárias de equilíbrio, correspondentes à fase de simetria quiral quebrada, dadas em (4.74), enquanto que $\delta\varphi_{\mathbf{k}}$ e $\delta\gamma_{\mathbf{k}}$ são pequenas oscilações em torno destas soluções. Evidentemente termos de 2ª ordem são desprezíveis no regime que estudamos.

É importante notar que a solução estacionária (4.74), devido ao fator n , nos fornece infinitos pontos de equilíbrio. Por outro lado, analogamente ao caso livre (veja figura 2), estes infinitos pontos de equilíbrio são todos equivalentes. Esta repetitividade deve-se ao fato de utilizarmos variáveis do tipo ângulo-ação para nossas variáveis dinâmicas [veja a transformação de Nambu (4.16)-(4.17)].

Escolhamos portanto o ponto de equilíbrio correspondente a $n = 0$, lembrando que nosso estudo independe desta escolha. Logo, a partir de (4.70)-(4.74), temos que a solução estacionária escolhida, correspondente à fase de simetria quiral quebrada, escreve-se como

$$\begin{aligned}\sin 2\varphi_{\mathbf{k}}^{(0)} &= \frac{m|\mathbf{k}|d}{k_0[\mathbf{k}^2 + (1+d)^2m^2]^{1/2}} \\ \cos 2\varphi_{\mathbf{k}}^{(0)} &= \frac{[\mathbf{k}^2 + (1+d)m^2]}{k_0[\mathbf{k}^2 + (1+d)^2m^2]^{1/2}} \\ \gamma_{\mathbf{k}}^{(0)} &= 0 \quad \text{com } d \neq 0.\end{aligned}\tag{5.4}$$

Tendo os pontos de equilíbrio, linearizemos as equações cinéticas (5.1) em torno destes. Para linearizar (5.1), devemos expandir algumas funções de $\varphi_{\mathbf{k}}$ e $\gamma_{\mathbf{k}}$ em torno do equilíbrio até 1ª ordem. Começemos expandindo, a partir de (5.3) e (5.4), as seguintes funções de $\gamma_{\mathbf{k}}$

$$\begin{aligned}\sin \gamma_{\mathbf{k}} &= \sin \gamma_{\mathbf{k}}^{(0)} + \cos \gamma_{\mathbf{k}}^{(0)} \delta \gamma_{\mathbf{k}} + \mathcal{O}(\delta \gamma_{\mathbf{k}})^2 = \delta \gamma_{\mathbf{k}} \\ \cos \gamma_{\mathbf{k}} &= \cos \gamma_{\mathbf{k}}^{(0)} - \sin \gamma_{\mathbf{k}}^{(0)} \delta \gamma_{\mathbf{k}} + \mathcal{O}(\delta \gamma_{\mathbf{k}})^2 = 1 \\ \dot{\gamma}_{\mathbf{k}} &= \dot{\gamma}_{\mathbf{k}}^{(0)} + \delta \dot{\gamma}_{\mathbf{k}} = \delta \dot{\gamma}_{\mathbf{k}} ,\end{aligned}\tag{5.5}$$

enquanto para $\varphi_{\mathbf{k}}$ necessitamos das seguintes expansões

$$\begin{aligned}\sin 2\varphi_{\mathbf{k}} &= \sin 2\varphi_{\mathbf{k}}^{(0)} + 2 \cos 2\varphi_{\mathbf{k}}^{(0)} \delta \varphi_{\mathbf{k}} + \mathcal{O}(\delta \varphi_{\mathbf{k}})^2 \\ \cos 2\varphi_{\mathbf{k}} &= \cos 2\varphi_{\mathbf{k}}^{(0)} - 2 \sin 2\varphi_{\mathbf{k}}^{(0)} \delta \varphi_{\mathbf{k}} + \mathcal{O}(\delta \varphi_{\mathbf{k}})^2 \\ \dot{\varphi}_{\mathbf{k}} &= \dot{\varphi}_{\mathbf{k}}^{(0)} + \delta \dot{\varphi}_{\mathbf{k}} = \delta \dot{\varphi}_{\mathbf{k}} .\end{aligned}\tag{5.6}$$

Observemos ainda que as integrais divergentes I_1 e I_2 , dadas em (5.2), também são funções de $\varphi_{\mathbf{k}}$ e $\gamma_{\mathbf{k}}$, devendo portanto serem expandidas analogamente. Fazendo esta expansão obtemos que

$$\begin{aligned}I_1 &= I_1^{(0)} + I_1^{(1)} + \mathcal{O}(\delta \varphi_{\mathbf{k}})^2 \\ &= \int \frac{d\mathbf{k}'}{k'_0} \cos 2\varphi_{\mathbf{k}'}^{(0)} - 2 \int \frac{d\mathbf{k}'}{k'_0} \sin 2\varphi_{\mathbf{k}'}^{(0)} \delta \varphi_{\mathbf{k}'}\end{aligned}\tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= I_2^{(0)} + I_2^{(1)} + \mathcal{O}[(\delta\varphi_k)^2, (\delta\gamma_k)^2, (\delta\varphi_k\delta\gamma_k)] \\
&= \int \frac{dk'}{k_0} \frac{|k'|}{m} \sin 2\varphi_k^{(0)} + 2 \int \frac{dk'}{k_0} \frac{|k'|}{m} \cos 2\varphi_k^{(0)} \delta\varphi_{k'} ,
\end{aligned}$$

onde tomamos as ocupações $\nu_{k',1}$ e $\nu_{k',2}$ nulas, já que estamos linearizando as equações cinéticas em torno das soluções estacionárias (estado fundamental - vácuo) do sistema.

Substituindo as formas linearizadas (5.5)-(5.7) das funções de φ_k e γ_k em (5.1), obtemos abaixo a forma linearizada das equações cinéticas, ou seja,

$$\begin{aligned}
\delta\dot{\varphi}_k &= \delta\gamma_k \frac{m|k|}{k_0} \left[1 - \left(\frac{g^2}{4\pi} \right) (\xi + 1)(I_1^{(0)} + I_2^{(0)}) \right] \\
\delta\dot{\gamma}_k \sin 2\varphi_k^{(0)} &= \frac{4 \cos 2\varphi_k^{(0)}}{k_0} \delta\varphi_k \left[k^2 + \left(\frac{g^2 m^2}{4\pi} \right) (\xi + 1)(I_1^{(0)} + I_2^{(0)}) \right] + \\
&\quad - 4 \sin 2\varphi_k^{(0)} \frac{m|k|}{k_0} \delta\varphi_k \left[1 - \left(\frac{g^2}{4\pi} \right) (\xi + 1)(I_1^{(0)} + I_2^{(0)}) \right] + \\
&\quad + \frac{2}{k_0} \left(\frac{g^2 m^2}{4\pi} \right) (\xi + 1)(I_1^{(1)} + I_2^{(1)}) \left[\sin 2\varphi_k^{(0)} - \frac{|k|}{m} \cos 2\varphi_k^{(0)} \right] .
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Por outro lado, temos a partir do procedimento de renormalização autoconsistente da seção (4.5) que

$$\left(\frac{g^2}{4\pi} \right) (\xi + 1)(I_1^{(0)} + I_2^{(0)}) = (1 + d) , \tag{5.9}$$

onde $I_1^{(0)}$ e $I_2^{(0)}$ são as integrais divergentes de equilíbrio dadas em (5.7) ou ainda em (4.72) e (4.73), enquanto a renormalização da constante de acoplamento g é dada em (4.68).

Observando ainda a seguinte identidade algébrica,

$$[k^2 + (1 + d)m^2]^2 + m^2 d^2 k^2 = k_0^2 [k^2 + (1 + d)^2 m^2] , \tag{5.10}$$

reescrevemos abaixo, a partir de (5.9) e (5.10), as equações cinéticas linearizadas (5.8) na seguinte forma

$$\begin{aligned}\delta\dot{\varphi}_{\mathbf{k}} &= -\frac{m|\mathbf{k}|d}{k_0}\delta\gamma_{\mathbf{k}} \\ \delta\dot{\gamma}_{\mathbf{k}}\frac{m|\mathbf{k}|d}{k_0} &= 4[\mathbf{k}^2 + (1+d)^2m^2]\delta\varphi_{\mathbf{k}} - 2m|\mathbf{k}|\left(\frac{g^2}{4\pi}\right)(\xi+1)[I_1^{(1)} + I_2^{(1)}] ,\end{aligned}\tag{5.11}$$

onde já substituímos as soluções estacionárias $\sin 2\varphi_{\mathbf{k}}^{(0)}$ e $\cos 2\varphi_{\mathbf{k}}^{(0)}$ por suas formas explícitas dadas em (5.4).

Finalmente, as integrais divergentes $I_1^{(1)}$ e $I_2^{(1)}$, dadas em (5.7), obedecem a seguinte identidade

$$I_1^{(1)} + I_2^{(1)} = \frac{2}{m} \int d\mathbf{k}' \frac{|\mathbf{k}'|}{[(\mathbf{k}')^2 + (1+d)^2m^2]^{1/2}} \delta\varphi_{\mathbf{k}'} .\tag{5.12}$$

Substituindo (5.12) em (5.11), obtemos abaixo, na fase de simetria quiral quebrada e na Aproximação de Campo Médio, a dinâmica efetiva de quasi-equilíbrio em torno do vácuo de nosso sistema fermiônico uniforme,

$$\delta\dot{\varphi}_{\mathbf{k}} = -\frac{m|\mathbf{k}|d}{k_0}\delta\gamma_{\mathbf{k}}\tag{5.13}$$

$$\begin{aligned}\delta\dot{\gamma}_{\mathbf{k}}\frac{m|\mathbf{k}|d}{k_0} &= 4[\mathbf{k}^2 + (1+d)^2m^2]\delta\varphi_{\mathbf{k}} \\ &- 4\left(\frac{g^2}{4\pi}\right)(\xi+1)|\mathbf{k}| \int d\mathbf{k}' \frac{|\mathbf{k}'|}{[(\mathbf{k}')^2 + (1+d)^2m^2]^{1/2}} \delta\varphi_{\mathbf{k}'} .\end{aligned}\tag{5.14}$$

Observe que as equações de campo médio linearizadas (5.13) e (5.14) são homogêneas com coeficientes que independem explicitamente do tempo, portanto suas soluções são do

tipo

$$\begin{aligned}\delta\varphi_{\mathbf{k}} &= \Psi_{\mathbf{k}} e^{i\omega t} \\ \delta\gamma_{\mathbf{k}} &= \Gamma_{\mathbf{k}} e^{i\omega t} .\end{aligned}\tag{5.15}$$

Outra maneira de compreender o sistema acoplado, agora linear, das equações cinéticas (5.13) e (5.14) é derivando temporalmente (5.13) e substituindo este resultado em (5.14). Através deste procedimento obtemos a seguinte equação diferencial para $\delta\varphi_{\mathbf{k}}$

$$\delta\ddot{\varphi}_{\mathbf{k}} + 4[\mathbf{k}^2 + (1+d)^2 m^2] \delta\varphi_{\mathbf{k}} - 4 \left(\frac{g^2}{4\pi} \right) (\xi+1) |\mathbf{k}| \int d\mathbf{k}' \frac{|\mathbf{k}'|}{[(\mathbf{k}')^2 + (1+d)^2 m^2]^{1/2}} \delta\varphi_{\mathbf{k}'} = 0. \tag{5.16}$$

Note que a equação diferencial (5.16) que descreve a evolução temporal de $\delta\varphi_{\mathbf{k}}$ é uma equação de oscilador, onde o último termo acopla a dinâmica do modo estudado $\mathbf{k}$ a todos os demais modos. Interpretando a solução (5.15) de (5.16), vemos que $\Psi_{\mathbf{k}}$ é a amplitude (pequena) de oscilação do modo $\mathbf{k}$ contendo a influência dos demais modos, enquanto ω é a frequência de oscilação deste modo.

Resta-nos agora, obter as amplitudes de pequenas oscilações $\Psi_{\mathbf{k}}$ e $\Gamma_{\mathbf{k}}$ dadas em (5.15). Substituindo as soluções (5.15) em (5.13) e (5.14), obtemos as equações para estas amplitudes, na Aproximação de Campo Médio e na fase de simetria quiral quebrada, para nosso sistema fermiônico uniforme descrito pelo Modelo Quiral de Gross-Neveu

$$i\omega\Psi_{\mathbf{k}} + \frac{m|\mathbf{k}|d}{k_0}\Gamma_{\mathbf{k}} = 0 \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned}i\omega\frac{m|\mathbf{k}|d}{k_0}\Gamma_{\mathbf{k}} - 4[\mathbf{k}^2 + (1+d)^2 m^2]\Psi_{\mathbf{k}} + \\ + 4 \left(\frac{g^2}{4\pi} \right) (\xi+1) |\mathbf{k}| \int d\mathbf{k}' \frac{|\mathbf{k}'|}{[(\mathbf{k}')^2 + (1+d)^2 m^2]^{1/2}} \Psi_{\mathbf{k}'} = 0 .\end{aligned}\tag{5.18}$$

Obviamente a solução das equações (5.17) e (5.18) envolvem a determinação dos modos (autovetores) de pequenas oscilações $\Psi_{\mathbf{k}}$ e $\Gamma_{\mathbf{k}}$ e de suas respectivas frequências (autovalores) ω .

Na seção seguinte iremos resolver analiticamente de forma geral e fechada, através de uma analogia com a Teoria de Espalhamento, as equações linearizadas obtidas. No Apêndice C apresentamos uma solução particular (assintótica) destas equações linearizadas. Em ambos os casos analisaremos a física que emerge destes estudos.

5.2 Solução das Equações de Campo Médio Linearizadas

Nesta seção resolveremos as equações cinéticas linearizadas (5.17) e (5.18), que descrevem, na aproximação de campo médio e na fase de simetria quiral quebrada, a dinâmica efetiva de quasi-equilíbrio em torno do vácuo de um sistema uniforme de muitos férmions descritos pelo Modelo Fermiônico Quiral de Gross-Neveu. Para isto iremos nos utilizar de resultados da Teoria de Espalhamento, observando que há semelhanças entre as equações linearizadas obtidas e a equação de Lippmann-Schwinger.

Começemos reescrevendo as equações cinéticas linearizadas (5.17) e (5.18) na forma abaixo

$$\Gamma_{\mathbf{k}} = -\frac{i\omega}{md} \frac{k_0}{|\mathbf{k}|} \Psi_{\mathbf{k}} \quad (5.19)$$

$$\left\{ \left[k^2 + (1+d)^2 m^2 \right] - \frac{\omega^2}{4} \right\} \Psi_{\mathbf{k}} = \left(\frac{g^2}{4\pi} \right) (\xi + 1) |\mathbf{k}| \int d\mathbf{k}' \frac{|\mathbf{k}'|}{[(\mathbf{k}')^2 + (1+d)^2 m^2]^{1/2}} \Psi_{\mathbf{k}'} \quad (5.20)$$

onde substituímos (5.17) em (5.18) para obter (5.20).

Vamos resolver a equação (5.20), observando que a determinação de $\Psi_{\mathbf{k}}$ implica na determinação, a partir de (5.19), de $\Gamma_{\mathbf{k}}$. Primeiramente deixemos a equação (5.20) numa forma mais compacta. Da relação (4.77) entre massas das bases de partícula m e de quasi-partícula m_{ef} temos que

$$m_{\text{ef}} = (1 + d)m \Rightarrow (k_0^{\text{ef}})^2 = [k^2 + (1 + d)^2 m^2] . \quad (5.21)$$

Substituindo (5.21) em (5.20), temos a seguinte equação para a amplitude de oscilação Ψ_k

$$\frac{1}{k_0^{\text{ef}}} \left[(k_0^{\text{ef}})^2 - \frac{\omega^2}{4} \right] \Psi_k = \left(\frac{g^2}{4\pi} \right) (\xi + 1) \frac{|k|}{(k_0^{\text{ef}})} \int dk' \frac{|k'|}{(k_0^{\text{ef}})'} \Psi_{k'} . \quad (5.22)$$

É importante observar neste ponto que o termo potencial da equação (5.22) é separável, no sentido que ele pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \langle k|V|k' \rangle &= v(k)v^*(k') \\ &= \left(\frac{g^2}{4\pi} \right) (\xi + 1) h(k)h(k') \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\text{onde } h(k) = \frac{|k|}{k_0^{\text{ef}}} .$$

Sabendo que a solução para um potencial separável é conhecida da Teoria de Espalhamento [35], onde a equação de Lippmann-Schwinger pode ser resolvida de forma fechada, vamos nos utilizar desta para resolver as amplitudes de oscilação Ψ_k e Γ_k dadas em (5.20) e (5.19), respectivamente.

Em analogia com a Teoria de Espalhamento, temos que a solução geral para a equação (5.22) tem duas componentes. A primeira componente sendo a solução trivial do problema quando $g = 0$, corresponde a um estado (onda) Ψ_k não misturado (não espalhada). Observe que $g = 0$ elimina o termo potencial de (5.22), termo que contém toda a influência dos demais modos k' para as amplitudes de oscilação Ψ_k e Γ_k do modo k .

A segunda componente da solução da amplitude de oscilação Ψ_k é a parte não trivial, a qual contém a influência do termo potencial. Esta componente corresponde ao termo de onda espalhada na Teoria de Espalhamento. Observe que esta componente deverá, no

limite assintótico $k \rightarrow \infty$, coincidir com a solução particular deste problema obtida no Apêndice C.

Portanto, a solução da equação (5.22) pode ser escrita como uma equação integral

$$\begin{aligned} \frac{|k|}{k_0^{\text{ef}}} \Psi(k, q; \omega) = & \alpha \delta(q - k) + \\ & + \frac{1}{[(k_0^{\text{ef}})^2 - \omega^2/4 + i\epsilon]} \left(\frac{g^2}{4\pi} \right) (\xi + 1) \frac{k^2}{k_0^{\text{ef}}} \int dk' \frac{|k'|}{(k_0^{\text{ef}})'} \Psi(k', q; \omega) \end{aligned} \quad (5.24)$$

na forma de uma equação de Lippmann-Schwinger. A partir da analogia com a Teoria de Espalhamento, interpretamos o modo q como sendo o momento relativo de dois quasi-férmions incidentes, enquanto α é um fator de fase inicial do sistema (problema a condição inicial).

Aqui convém ressaltar que escolhemos a condição de contorno de ondas emergentes $(+i\epsilon)$ para a solução da equação diferencial (5.22). Poderíamos ter escolhido outras condições de contorno como solução de (5.22), tais como condição de ondas imergentes $(-i\epsilon)$ ou ainda condições de contorno de Van Kampen [36].

Voltemos a solução (5.24). Com o objetivo de resolver esta equação integral vamos integrá-la em k . Fazendo isto e mudando a soma $k \leftrightarrow k'$ no termo potencial, obtemos o seguinte resultado,

$$\int dk \frac{|k|}{(k_0^{\text{ef}})} \Psi(k, q; \omega) = \frac{\alpha}{\left\{ 1 - (g^2/4\pi) (\xi + 1) \int \frac{dk'}{(k_0^{\text{ef}})'} \frac{(k')^2}{[(k_0^{\text{ef}})']^2 - \omega^2/4 + i\epsilon} \right\}} . \quad (5.25)$$

Substituindo (5.25) em (5.24), reescrevemos a solução geral para amplitude de oscilação de quasi-equilíbrio Ψ_k em torno do vácuo, na aproximação de campo médio e na fase de simetria quiral quebrada, de um sistema uniforme de muitos férmions descritos pelo Modelo Fermiônico Quiral de Gross-Neveu como

$$\frac{|k|}{k_0^{\text{ef}}} \Psi(k, q; \omega) = \alpha \delta(q - k) + \frac{\alpha k_0^{\text{ef}}}{[(k_0^{\text{ef}})^2 - \omega^2/4 + i\epsilon]} \left(\frac{|k|}{k_0^{\text{ef}}} \right) \frac{1}{\Delta^+(\omega)} \left(\frac{|k|}{k_0^{\text{ef}}} \right) , \quad (5.26)$$

onde $\Delta^+(\omega)$ é dado por

$$\Delta^+(\omega) = \left(\frac{4\pi}{g^2}\right) \frac{1}{(\xi + 1)} - \int \frac{d\mathbf{k}}{(k_0^{\text{ef}})} \frac{\mathbf{k}^2}{[(k_0^{\text{ef}})^2 - \omega^2/4 + i\epsilon]} . \quad (5.27)$$

Agora podemos obter facilmente a amplitude de oscilação $\Gamma_{\mathbf{k}}$, bastando substituir (5.26) em (5.19)

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}, \mathbf{q}; \omega) = & -\frac{i\omega\alpha k_0}{mdk_0^{\text{ef}}} \{ \delta(\mathbf{q} - \mathbf{k}) + \\ & + \frac{k_0^{\text{ef}}}{[(k_0^{\text{ef}})^2 - \omega^2/4 + i\epsilon]} \left(\frac{|\mathbf{k}|}{k_0^{\text{ef}}} \right) \frac{1}{\Delta^+(\omega)} \left(\frac{|\mathbf{k}|}{k_0^{\text{ef}}} \right) \} , \end{aligned} \quad (5.28)$$

onde $\Delta^+(\omega)$ é dado em (5.27).

Finalmente substituindo a solução geral (5.26), obtida para a amplitude de oscilação $\Psi_{\mathbf{k}}$, na equação (5.20), obtemos a frequência ω de pequenas oscilações em torno do equilíbrio para nosso sistema fermiônico uniforme na aproximação de campo médio, ou seja,

$$\omega = 2q_0^{\text{ef}} = 2[q^2 + (1 + d)^2 m^2]^{1/2} , \quad (5.29)$$

onde $\mathbf{q}$ é o momento relativo dos quasi-férmions incidentes, sendo portanto uma condição inicial do problema.

Primeiramente observemos que os quasi-férmions oscilam em torno da situação estacionária com frequência $\omega = 2q_0^{\text{ef}}$. O fator 2, conforme discutido no Apêndice C, pode ser interpretado a partir do trabalho de Goshen e Lipkin [37]. Este fator advém do fato de termos feito o tratamento de nosso sistema fermiônico em termos de variáveis coletivas. É interessante observar também que a solução geral (5.26) obtida para $\Psi_{\mathbf{k}}$ tem o limite assintótico predito no Apêndice C. Tomando o limite $k \rightarrow \infty$ em (5.26), verificamos que em ordem dominante, a amplitude de oscilação $\Psi_{\mathbf{k}}$ tem o seguinte comportamento

$$\Psi_{k \rightarrow \infty} = \frac{1}{|\mathbf{k}|} , \quad (5.30)$$

o qual está de acordo com (C.5).

Na próxima seção estudaremos $\Delta^+(\omega)$. A partir da analogia com a Teoria de Espalhamento, determinaremos a matriz de transição T . Em particular estudaremos seus polos, obtendo condições para que haja estado ligado de quasi-férmions em nosso sistema.

5.3 Estados Ligados de Quasi-Férmions

Nesta seção iremos estudar, a partir das soluções $\Psi_{\mathbf{k}}$ e $\Gamma_{\mathbf{k}}$ das equações de campo médio linearizadas obtidas na seção precedente, a possibilidade da existência de estados ligados de quasi-férmions no regime de pequenas oscilações em torno do equilíbrio.

Vimos em (5.22) e (5.23) que o termo potencial da equação para a amplitude de oscilação $\Psi_{\mathbf{k}}$ era separável. Por outro lado, sabemos que ao trabalharmos com potenciais do tipo separável, a matriz de transição $T(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; E)$ pode ser obtida a partir da equação de Lippmann-Schwinger [38]. Logo, vamos extrair a matriz de transição T das soluções das equações de campo médio linearizadas dadas em (5.26) e (5.28). Utilizando-se dos resultados da Teoria de Espalhamento, temos para a matriz de transição T a seguinte forma [38]

$$T(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; \omega) \propto h(\mathbf{k}') \frac{1}{\Delta^+(\omega)} h(\mathbf{k}) , \quad (5.31)$$

onde $h(\mathbf{k})$ é dado em (5.23) e $\Delta^+(\omega)$ em (5.27).

Na realidade estamos interessados na possibilidade de existência de estados ligados de quasi-férmions no regime de pequenas oscilações. Logo, nos restringiremos ao estudo dos polos da matriz de transição T .

Verificamos a partir de (5.31) que os polos da matriz T são os zeros de $\Delta^+(\omega)$. Observando que $\Delta^+(\omega)$ é função de ω , ou seja, da energia relativa dos dois quasi-férmions incidentes como visto em (5.29), a condição para que haja estados ligados dependerá da energia relativa ω . Portanto, dado ω , devemos verificar se existe $\Delta^+(\omega)$ nulo, o que implicaria num estado ligado, ou se $\Delta^+(\omega)$ é não nulo, o que significaria que os dois quasi-férmions são necessariamente espalhados no contínuo.

Reescrevamos abaixo $\Delta^+(\omega)$ dado em (5.27)

$$\Delta^+(\omega) = \frac{4\pi}{(\xi + 1)g^2} - \int \frac{d\mathbf{k}}{[k^2 + m_{\text{ef}}^2]^{1/2}} \frac{k^2}{[k^2 + m_{\text{ef}}^2 - \omega^2/4 + i\epsilon]} . \quad (5.32)$$

Evidentemente a integral em $\Delta^+(\omega)$ diverge logaritmicamente, o que é controlado pela renormalização da constante de acoplamento g dada em (4.68). Substituindo a renormalização da constante de acoplamento em $\Delta^+(\omega)$ dado acima, obtemos

$$\Delta^+(\omega) = \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) - I_\omega , \quad (5.33)$$

onde I_ω é a integral que diverge logaritmicamente dada abaixo

$$I_\omega = \int_{-\Lambda}^{+\Lambda} \frac{d\mathbf{k}}{[k^2 + m_{\text{ef}}^2]^{1/2}} \frac{k^2}{[k^2 + m_{\text{ef}}^2 - \omega^2/4 + i\epsilon]} . \quad (5.34)$$

Resta-nos estudar I_ω . Observamos de imediato que para $0 \leq \omega < 2m_{\text{ef}}$ não há polos no eixo real, enquanto para $\omega \geq 2m_{\text{ef}}$ a integral I_ω tem polos no eixo real.

Investiguemos primeiramente I_ω quando $0 \leq \omega < 2m_{\text{ef}}$. A partir do Apêndice D temos

$$I_\omega = 2 \ln \left(\frac{2}{|1 + d|} \right) - 2 \left[\frac{4m_{\text{ef}}^2}{\omega^2} - 1 \right]^{1/2} \arctan \left\{ \left[\frac{4m_{\text{ef}}^2}{\omega^2} - 1 \right]^{-1/2} \right\} + \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) . \quad (5.35)$$

Substituindo (5.35) em (5.33), verificamos que $\Delta^+(\omega)$ é finito e tem a seguinte forma

$$\Delta^+(\omega) = 2[f(\omega) - h(d)] \quad (5.36)$$

$$\text{onde } f(\omega) = \left[\frac{4m_{\text{ef}}^2}{\omega^2} - 1 \right]^{1/2} \arctan \left\{ \left[\frac{4m_{\text{ef}}^2}{\omega^2} - 1 \right]^{-1/2} \right\}$$

$$h(d) = \ln \left[\frac{2}{|1 + d|} \right] .$$

Procuramos os zeros de $\Delta^+(\omega)$. Resolvendo numericamente esta equação transcendental, obtemos que os zeros de $\Delta^+(\omega)$ são dados pela figura abaixo

Figura 4. A curva representa os zeros de $\Delta^+(\omega)$ quando $0 \leq \omega < 2m_{ef}$.

Observemos que na figura acima ω representa a massa do estado ligado de dois quasi-férmions. Obviamente para $d = -1$ (caso de um sistema fermiônico livre) não há estado ligado, ou ainda, $\Delta^+(\omega, d = -1)$ não se anula. Portanto, verificamos que dado um valor para o parâmetro livre d , nem sempre será possível obter $\Delta^+(\omega, d) = 0$.

Lembrando que o parâmetro livre renormalizado d surge do processo de renormalização da constante de acoplamento e que $d = -1$ corresponde a uma teoria renormalizada livre [veja (4.78)], definiremos por conveniência uma constante renormalizada λ_R em termos do

parâmetro livre renormalizado d como segue abaixo

$$\lambda_R = |1 + d| \quad . \quad (5.37)$$

Da definição acima, dizemos que haverá estados ligados de dois quasi-férmions no regime de pequenas oscilações em torno do equilíbrio, na aproximação de campo médio e na fase de simetria quiral quebrada, para um sistema uniforme de muitos férmions descritos pelo GNQM, caso a constante renormalizada λ_R , definida em (5.37), varie entre 0.74 e 2, enquanto a massa deste estado ligado variará entre 0 e $2m_{\text{ef}}$.

Por outro lado, no caso da expansão $1/N$ em ordem dominante D. Gross e A. Neveu obtêm para a massa do méson σ (estado ligado de dois férmions) a seguinte massa

$$M_\sigma = 2M_F [1 + \mathcal{O}(1/N)] \quad ,$$

onde M_F é equivalente a m_{ef} em nosso caso, ou seja, é a massa gerada devido à quebra de simetria quiral do sistema. Observamos que o resultado obtido por D. Gross e A. Neveu para a massa do estado ligado é a solução trivial do problema. Eles argumentam que em ordem superior haverá contribuições não triviais.

Voltando a figura 4, verificamos que $\omega = 2m_{\text{ef}}$, onde ω é a massa do nosso estado ligado, corresponde a $|1 + d| = 2$. Observemos que $h(d)$ anula-se quando $|1 + d| = 2$. Portanto, $h(d)$ é a contribuição não trivial ao resultado obtido por D. Gross e A. Neveu. Neste sentido podemos dizer que os resultados obtidos por esta técnica na aproximação de campo médio vão além daqueles obtidos pela expansão $1/N$ em ordem dominante.

Finalmente devemos citar o trabalho de Kerman e Lin [39]. Em [39], estudando a Teoria Bosônica $\lambda\phi^4$, os autores obtêm, a partir de um cálculo variacional dependente do tempo, condições para a existência de estados ligados sendo surpreendente a semelhança entre seus resultados e os nossos. Em particular eles obtêm a mesma estrutura para $\Delta^+(\omega)$ dada em (5.36), sendo a função $f(\omega)$ idêntica em ambos os trabalhos.

Estudemos agora o comportamento de $\Delta^+(\omega)$ no limite de altas frequências. Neste caso, quando $\omega \geq 2m_{\text{ef}}$, o integrando de I_ω , dado em (5.34), tem singularidades em $k = \pm\sqrt{\omega^2/4 - m_{\text{ef}}^2}$. Utilizando-se da Teoria dos Resíduos [40] obtemos que

$$I_\omega = VP \int_{-\Lambda}^{+\Lambda} \frac{dk}{[k^2 + m_{\text{ef}}^2]^{1/2}} \frac{k^2}{[k^2 - (\omega^2/4 - m_{\text{ef}}^2)]} + i\pi \left[1 - \frac{4m_{\text{ef}}^2}{\omega^2} \right] , \quad (5.38)$$

onde VP representa o valor principal de Cauchy da integral.

Para calcular o valor principal de Cauchy da integral dada acima, devemos nos utilizar dos resultados do Apêndice D. A partir de (D.8) e (D.10) temos que

$$\begin{aligned} I_\omega = & \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) + 2 \ln \left(\frac{2}{|1+d|} \right) + \\ & - \left(1 - \frac{4m_{\text{ef}}^2}{\omega^2} \right)^{1/2} \ln \left[\frac{1 + (1 - 4m_{\text{ef}}^2/\omega^2)^{1/2}}{1 - (1 - 4m_{\text{ef}}^2/\omega^2)^{1/2}} \right] + i\pi \left[1 - \frac{4m_{\text{ef}}^2}{\omega^2} \right]^{1/2} . \end{aligned} \quad (5.39)$$

Substituindo (5.39) em (5.33) obtemos para $\Delta^+(\omega)$ o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \Delta^+(\omega) = & \left(1 - \frac{4m_{\text{ef}}^2}{\omega^2} \right)^{1/2} \ln \left[\frac{1 + (1 - 4m_{\text{ef}}^2/\omega^2)^{1/2}}{1 - (1 - 4m_{\text{ef}}^2/\omega^2)^{1/2}} \right] + \\ & - 2 \ln \left(\frac{2}{|1+d|} \right) - i\pi \left[1 - \frac{4m_{\text{ef}}^2}{\omega^2} \right]^{1/2} . \end{aligned} \quad (5.40)$$

A partir de (5.40) verificamos que $\Delta^+(\omega)$ não se anula para $\omega \geq 2m_{\text{ef}}$, portanto caso a energia relativa dos dois quasi-férmions incidentes seja maior do que $2m_{\text{ef}}$, não será possível ligá-los. Estudemos agora o limite de altas frequências ($\omega \rightarrow \infty$). Neste caso $\Delta^+(\omega)$ tem o seguinte comportamento

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \Delta^+(\omega) \longrightarrow \ln \left(\frac{\omega^2}{m_{\text{ef}}^2} \right) . \quad (5.41)$$

Observemos que no limite de altas frequências $\Delta^+(\omega) \rightarrow \infty$, implicando a partir de (5.31), que neste limite a matriz de transição T deve se anular.

Da Teoria de Espalhamento [35] sabemos que a matriz T representa a influência do termo potencial no processo estudado. Devido ao comportamento da matriz de transição T quando $\omega \rightarrow \infty$, concluimos que o termo potencial, que descreve as interações de nosso sistema, anula-se no limite de altas frequências.

Isto nos sugere que no limite considerado, o sistema comporta-se como se fosse livre, situação esta esperada, já que a teoria que descreve o sistema apresenta a propriedade de ser assintoticamente livre [17] no limite de altas energias.

Finalmente, no capítulo seguinte apresentaremos as conclusões que o presente estudo permite, traçando algumas perspectivas de desenvolvimento futuro.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Mostramos com este trabalho uma forma de tratar o problema de condição inicial na Teoria Quântica de Campos além da aproximação de campo médio [veja seção 2.3]. Este tratamento [15] possibilita incluir correlações dinâmicas (termos de colisão) às equações usuais de campo médio [16], além de permitir cálculos do tipo térmico ($T \neq 0$) com matéria ($\nu \neq 0$) [31].

Embora o formalismo seja bastante geral, nós o adaptamos ao tratamento de um sistema uniforme relativístico de muitos férmions em (1+1) dimensões descritos pelo Modelo Fermiônico Quiral de Gross-Neveu. Sendo este modelo exatamente solúvel, além de ser didático, ele nos foi útil na interpretação de problemas conceituais.

No capítulo 4 obtivemos as equações cinéticas renormalizadas que descrevem a dinâmica efetiva das variáveis de um corpo deste sistema na aproximação de campo médio e na fase de simetria quiral quebrada. Nesta aproximação recuperamos resultados existentes na literatura tais como geração dinâmica de massa devido à quebra da simetria quiral do sistema, a propriedade de liberdade assintótica do GNQM além de um fenômeno análogo ao de transmutação dimensional (veja referência [17]).

No capítulo 5 estudamos uma aplicação destas equações cinéticas renormalizadas. Exploramos a forma linear destas equações, a qual nos forneceu a dinâmica efetiva de quase-equilíbrio em torno da solução estacionária. Resolvemos analiticamente estas equações linearizadas de forma geral através de uma analogia com a teoria de espalhamento, obtendo os modos (amplitudes) de pequenas oscilações e suas respectivas frequências. Estudando a

estrutura destas soluções, fomos capazes de reinterpretar a física destas variáveis dinâmicas como descrevendo um problema de espalhamento de quasi-férmions. A partir desta reinterpretação estudamos a existência de estados ligados neste regime, verificando que este tratamento fornece-nos resultados que vão além daqueles obtidos por D. Gross e A. Neveu na expansão $1/N$ em ordem dominante.

Como perspectiva de futuros trabalhos, convém ressaltar que apesar de todas as aplicações neste trabalho terem sido feitas para o estado fundamental do sistema (vácuo), ou seja, $\nu_{k,1} = \nu_{k,2} = 0$, todos os cálculos poderiam ter sido feitos com matéria. Um cálculo com matéria introduz uma dependência com relação à densidade. Isto pode ser melhor compreendido verificando-se que este tipo de cálculo consiste em tomar para $\mathcal{F}_0(t)$ ocupações não nulas para estados de energias positivas até k_F (momento de Fermi) e ocupações nulas acima de k_F . Dando continuidade a este trabalho, nosso primeiro passo será tratar as equações cinéticas (4.49) e (4.52) com matéria, estudando as mudanças na evolução temporal do sistema devido à presença da densidade k_F .

Adaptado e otimizado o formalismo desenvolvido por Toledo Piza e Nemes ao nosso sistema fermiônico, pretendemos também ir além da aproximação de campo médio. A grande vantagem da técnica de operador projeção apresentado no capítulo 2 é a possibilidade de incluir termos de colisão em nosso estudo. Observe que neste caso, o grau de liberdade das ocupações de quasi-partículas não será constante e a dinâmica efetiva destas variáveis mudará fortemente a dinâmica efetiva das variáveis φ_k e γ_k , ou ainda, das densidades de um corpo e de emparelhamento (veja referência [16]). Neste caso, um cálculo com matéria permitirá estudar também o comportamento de observáveis colisionais tais como coeficientes de transporte [41].

Finalmente, pretendemos também estudar a extensão de nosso tratamento ao caso de sistemas não uniformes. Neste caso a dependência espacial dos campos $\psi(x)$ e $\bar{\psi}(x)$ são expandidas nos orbitais naturais (2.5) através de uma transformação não homogênea de Bogoliubov.

Apêndice A

Sistemas Uniformes e as Representações das Matrizes γ^μ de Dirac

Este estudo das representações das matrizes γ^μ de Dirac baseia-se no trabalho de Nambu e Jona-Lasinio [18]. Mostraremos neste apêndice que dada uma representação para as matrizes γ^μ de Dirac, poderemos estar quebrando a invariância por reflexão (inversão) de nosso sistema unidimensional.

O objetivo de nosso trabalho é estudar sistemas uniformes, sistemas invariantes por translação e reflexão, e como vimos no início do capítulo 2, podemos introduzir não uniformidade em nosso sistema, ou através da transformação de Bogoliubov quebrando a invariância translacional do sistema, ou ainda, como veremos a seguir, através da expansão dos operadores de campo nas soluções da equação de Dirac.

Consideremos que no instante $t = 0$ o sistema tenha simetria quiral intacta ($\lambda = 0$) de modo que os operadores de campo de Dirac devem ser expandidos nas soluções de Dirac não massivas,

$$\psi^{(0)}(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{1}{2Lk_0^{(0)}}} \left[a_{\mathbf{k}}^{(0)} u_1^{(0)}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + c_{\mathbf{k}}^{(0)\dagger} u_2^{(0)}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right] \quad (\text{A.1})$$

$$\bar{\psi}^{(0)}(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{1}{2Lk_0^{(0)}}} \left[a_{\mathbf{k}}^{(0)\dagger} \bar{u}_1^{(0)}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + c_{\mathbf{k}}^{(0)} \bar{u}_2^{(0)}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right] , \quad (\text{A.2})$$

devendo portanto obedecer a seguinte equação

$$\not{\partial}\psi^{(0)}(x) = 0 \quad . \quad (\text{A.3})$$

Consideremos também que num instante t posterior o sistema tenha a sua simetria quiral quebrada de modo que os operadores de campo de Dirac devem ser expandidos nas soluções massivas de Dirac,

$$\psi^{(m)}(x) = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{m}{Lk_0^{(m)}} \right)^{1/2} \left[a_{\mathbf{k}}^{(m)} u_1^{(m)}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + c_{\mathbf{k}}^{(m)\dagger} u_2^{(m)}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right] \quad (\text{A.4})$$

$$\bar{\psi}^{(m)}(x) = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{m}{Lk_0^{(m)}} \right)^{1/2} \left[a_{\mathbf{k}}^{(m)\dagger} \bar{u}_1^{(m)}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + c_{\mathbf{k}}^{(m)} \bar{u}_2^{(m)}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right] \quad , \quad (\text{A.5})$$

obedecendo a equação de Dirac massiva abaixo

$$(i\not{\partial} - m)\psi^{(m)}(x) = 0 \quad . \quad (\text{A.6})$$

Generalizando o procedimento, temos no instante t_1 os campos quantizados $\psi^{(m_1)}(\mathbf{x})$ e $\bar{\psi}^{(m_1)}(\mathbf{x})$, no instante t_2 os campos quantizados $\psi^{(m_2)}(\mathbf{x})$ e $\bar{\psi}^{(m_2)}(\mathbf{x})$ e assim por diante. Finalmente por consistência temos que impor que em $t = 0$

$$\psi^{(0)}(x_0 = 0, \mathbf{x}) = \psi^{(m_1)}(x_0 = 0, \mathbf{x}) = \psi^{(m_2)}(x_0 = 0, \mathbf{x}) \quad , \quad (\text{A.7})$$

que em $t = t_1$

$$\psi^{(0)}(x_0 = t_1, \mathbf{x}) = \psi^{(m_1)}(x_0 = t_1, \mathbf{x}) = \psi^{(m_2)}(x_0 = t_1, \mathbf{x}) \quad , \quad (\text{A.8})$$

e que em $t = t_2$

$$\psi^{(0)}(x_0 = t_2, \mathbf{x}) = \psi^{(m_1)}(x_0 = t_2, \mathbf{x}) = \psi^{(m_2)}(x_0 = t_2, \mathbf{x}) \quad . \quad (\text{A.9})$$

Devemos observar que os conjuntos de operadores $(a_{\mathbf{k}}^{(0)}, c_{\mathbf{k}}^{(0)})$, $(a_{\mathbf{k}}^{(m_1)}, c_{\mathbf{k}}^{(m_1)})$ e $(a_{\mathbf{k}}^{(m_2)}, c_{\mathbf{k}}^{(m_2)})$ estão relacionados por uma transformação canônica devido às condições de consistência acima. Como visto na seção (3.3) existe uma transformação unitária que relaciona estas bases. Vamos calcular explicitamente como estas bases relacionam-se tomando a seguinte condição de consistência,

$$\psi^{(m_1)}(x) = \psi^{(m_2)}(x) \quad \text{em } t = t_1 . \quad (\text{A.10})$$

Substituindo (A.1) e (A.4) em (A.10) obtemos depois de alguma álgebra que as bases relacionam-se da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}}^{(m_2)} = & \left\{ \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^{1/2} \left(\frac{k_0^{(m_2)}}{k_0^{(m_1)}} \right)^{1/2} \bar{u}_1^{(m_2)}(\mathbf{k}) u_1^{(m_1)}(\mathbf{k}) \right\} a_{\mathbf{k}}^{(m_1)} + \\ & + \left\{ \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^{1/2} \left(\frac{k_0^{(m_2)}}{k_0^{(m_1)}} \right)^{1/2} \bar{u}_1^{(m_2)}(\mathbf{k}) u_2^{(m_1)}(-\mathbf{k}) \right\} c_{-\mathbf{k}}^{(m_1)\dagger} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{k}}^{(m_2)} = & - \left\{ \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^{1/2} \left(\frac{k_0^{(m_2)}}{k_0^{(m_1)}} \right)^{1/2} \bar{u}_2^{(m_1)}(\mathbf{k}) u_2^{(m_2)}(\mathbf{k}) \right\} c_{\mathbf{k}}^{(m_1)} + \\ & - \left\{ \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^{1/2} \left(\frac{k_0^{(m_2)}}{k_0^{(m_1)}} \right)^{1/2} \bar{u}_1^{(m_1)}(-\mathbf{k}) u_2^{(m_2)}(\mathbf{k}) \right\} a_{-\mathbf{k}}^{(m_1)\dagger} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

onde usamos as condições de normalização dos spinors dadas em (3.8).

Caso o sistema seja uniforme, os coeficientes que relacionam as duas bases devem ser invariantes por reflexão, em outras palavras, a evolução de nosso sistema espacialmente unidimensional deve ser invariante sob a transformação $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$, de modo que a física observada em nossas equações seja a mesma em ambas as direções. Observe também que os coeficientes em (A.11) e (A.12) que relacionam as bases são coeficientes tipo Nambu.

Desta análise temos que as condições de uniformidade para as soluções (spinors) de Dirac são dadas por

$$\bar{u}_1^{(m_2)}(k)u_1^{(m_1)}(k) = \bar{u}_1^{(m_2)}(-k)u_1^{(m_1)}(-k) \quad (A.13)$$

$$\bar{u}_1^{(m_2)}(k)u_2^{(m_1)}(-k) = \bar{u}_1^{(m_2)}(-k)u_2^{(m_1)}(k) \quad (A.14)$$

$$\bar{u}_2^{(m_1)}(k)u_2^{(m_2)}(k) = \bar{u}_2^{(m_1)}(-k)u_2^{(m_2)}(-k) \quad (A.15)$$

$$\bar{u}_1^{(m_1)}(-k)u_2^{(m_2)}(k) = \bar{u}_1^{(m_1)}(k)u_2^{(m_2)}(-k) . \quad (A.16)$$

Resta-nos verificar quais as possíveis representações para as matrizes γ^μ de Dirac que fornecem soluções de Dirac invariantes por reflexão.

a) Representação de Majorana

$$\gamma_0 = \sigma_2 ; \quad \gamma_1 = i\sigma_1 \quad e \quad \gamma_5 = \gamma_0\gamma_1 = \sigma_3 . \quad (A.17)$$

Nesta representação as soluções da equação de Dirac massiva em (1+1) dimensões são

$$u_1(k) = \left(\frac{1}{2m}\right)^{1/2} \begin{bmatrix} (k_0 + k)^{1/2} \\ i(k_0 - k)^{1/2} \end{bmatrix} \quad u_2(k) = \left(\frac{1}{2m}\right)^{1/2} \begin{bmatrix} i(k_0 + k)^{1/2} \\ (k_0 - k)^{1/2} \end{bmatrix} , \quad (A.18)$$

as quais obedecem as normalizações (3.8) e as propriedades (3.9). Contudo, as condições de uniformidade (A.14) e (A.16) não são verificadas. Concluiu-se que a representação de Majorana não pode descrever a evolução de um sistema que apresente invariância por reflexão.

b) Representação de Weil

$$\gamma_0 = \sigma_1 ; \quad \gamma_1 = i\sigma_2 \quad e \quad \gamma_5 = \gamma_0\gamma_1 = -\sigma_3 . \quad (A.19)$$

Nesta representação as soluções da equação de Dirac massiva em (1+1) dimensões são

$$u_1(\mathbf{k}) = \left(\frac{1}{2m}\right)^{1/2} \begin{bmatrix} (k_0 - \mathbf{k})^{1/2} \\ (k_0 + \mathbf{k})^{1/2} \end{bmatrix} \quad u_2(\mathbf{k}) = \left(\frac{1}{2m}\right)^{1/2} \begin{bmatrix} (k_0 - \mathbf{k})^{1/2} \\ -(k_0 + \mathbf{k})^{1/2} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.20})$$

as quais obedecem as normalizações (3.8) e as propriedades (3.9). Contudo as condições de uniformidade (A.14) e (A.16) não são verificadas. Portanto, a representação de Weil também não pode descrever a evolução de um sistema que apresente invariância por reflexão.

c) Terceira Representação

$$\gamma_0 = \sigma_2 \quad ; \quad \gamma_1 = i\sigma_3 \quad \text{e} \quad \gamma_5 = \gamma_0\gamma_1 = -\sigma_1. \quad (\text{A.21})$$

As soluções de Dirac em (1+1) dimensões correspondentes são

$$u_1(\mathbf{k}) = \left(\frac{1}{2m}\right)^{1/2} \begin{bmatrix} (m - i\mathbf{k})^{1/2} \\ i(m + i\mathbf{k})^{1/2} \end{bmatrix} \quad u_2(\mathbf{k}) = \left(\frac{1}{2m}\right)^{1/2} \begin{bmatrix} i(m + i\mathbf{k})^{1/2} \\ (m - i\mathbf{k})^{1/2} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.22})$$

que obedecem as condições (3.8) e (3.9), mas que novamente não verificam as condições de uniformidade (A.14) e (A.16). Logo, esta representação também não pode ser utilizada para descrever sistemas uniformes.

d) Quarta Representação

$$\gamma_0 = \sigma_1 \quad ; \quad \gamma_1 = i\sigma_3 \quad \text{e} \quad \gamma_5 = \gamma_0\gamma_1 = \sigma_2. \quad (\text{A.23})$$

As soluções de Dirac em (1+1) dimensões correspondentes são

$$u_1(\mathbf{k}) = \left(\frac{1}{2m}\right)^{1/2} \begin{bmatrix} (m - i\mathbf{k})^{1/2} \\ (m + i\mathbf{k})^{1/2} \end{bmatrix} \quad u_2(\mathbf{k}) = \left(\frac{1}{2m}\right)^{1/2} \begin{bmatrix} (m + i\mathbf{k})^{1/2} \\ -(m - i\mathbf{k})^{1/2} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.24})$$

que obedecem as condições (3.8) e (3.9), mas que novamente não verificam as condições de uniformidade (A.14) e (A.16). Como as anteriores, esta representação também não pode ser utilizada para representar sistemas que evoluem de modo uniforme.

e) Quinta Representação

$$\gamma_0 = \sigma_3 \quad ; \quad \gamma_1 = i\sigma_1 \quad \text{e} \quad \gamma_5 = \gamma_0\gamma_1 = -\sigma_2 \quad . \quad (\text{A.25})$$

Nesta representação as soluções da equação de Dirac massiva em (1+1) dimensões são

$$u_1(\mathbf{k}) = \left(\frac{1}{2m}\right)^{1/2} \begin{bmatrix} i(k_0 + m)^{1/2} \\ \frac{|\mathbf{k}|(k_0 - m)^{1/2}}{k} \end{bmatrix} \quad u_2(\mathbf{k}) = \left(\frac{1}{2m}\right)^{1/2} \begin{bmatrix} i(k_0 - m)^{1/2} \\ \frac{|\mathbf{k}|(k_0 + m)^{1/2}}{k} \end{bmatrix} , \quad (\text{A.26})$$

as quais obedecem as normalizações (3.8), as propriedades (3.9) e as condições de uniformidade (A.13) a (A.16). Dizemos que esta representação das matrizes γ^μ de Dirac fornece soluções uniformes.

f) Representação de Pauli-Dirac

$$\gamma_0 = \sigma_3 \quad ; \quad \gamma_1 = i\sigma_2 \quad \text{e} \quad \gamma_5 = \gamma_0\gamma_1 = \sigma_1 \quad . \quad (\text{A.27})$$

Esta foi a representação das matrizes γ_μ de Dirac que utilizamos neste trabalho. Verifica-se facilmente que as soluções da equação de Dirac massiva em (1+1) dimensões dadas em (3.7) obedecem as condições de normalização (3.8), as propriedades (3.9) e as condições de uniformidade (A.13) a (A.16):

Por outro lado, devemos observar que

$$u_1(\mathbf{k}) = \left(\frac{k_0 + m}{2m}\right)^{1/2} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\mathbf{k}}{(k_0 + m)} \end{bmatrix} \quad u_2(\mathbf{k}) = \left(\frac{k_0 + m}{2m}\right)^{1/2} \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{k}}{(k_0 + m)} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.28})$$

também são soluções da equação de Dirac massiva em $(1+1)$ dimensões nesta representação. Contudo estas soluções não obedecem as condições de uniformidade (A.14) e (A.16).

Portanto, apesar das duas últimas representações apresentarem soluções para a equação de Dirac massiva em $(1+1)$ dimensões que obedecem as condições de uniformidade (A.13) a (A.16), devemos ter o cuidado de verificar se a forma algébrica que tomamos para $u_1(\mathbf{k})$ e $u_2(\mathbf{k})$ não quebra a invariância por reflexão de nosso sistema.

Apêndice B

Estado Fundamental do Sistema na Aproximação de Campo Médio

Com o objetivo de estudar o estado fundamental do sistema fermiônico na Aproximação de Campo Médio, tivemos que estudar nas seções (4.3) e (4.6) o caso estático das respectivas equações cinéticas. De (4.74) temos que as equações estáticas renormalizadas que descrevem a fase de simetria quiral quebrada de nosso sistema são

$$\tan 2\varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} = \frac{(-1)^n m |\mathbf{k}| d}{[\mathbf{k}^2 + (1+d)m^2]} \quad (\text{B.1})$$

$$\gamma_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} = n\pi \quad \text{para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Observe de imediato que fazendo $d = -1$ em (B.1), que corresponde a fazer $g = 0$ como explicado na seção (4.5), obtemos as equações estáticas (4.28) correspondentes ao caso livre. Logo, estudemos as equações estáticas (B.1) correspondentes ao caso acoplado, lembrando que $d = -1$ corresponde ao caso livre.

Vamos calcular a partir de (B.1), as soluções estáticas $\cos \varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}}$ e $\sin \varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}}$ do sistema na Aproximação de Campo Médio dadas em (4.32) e (4.75), correspondentes ao caso livre e ao caso acoplado, respectivamente.

Começemos reescrevendo (B.1) na seguinte forma

$$\frac{\cos^2 \varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} - \sin^2 \varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}}}{\sin \varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} \cos \varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}}} = \frac{2[\mathbf{k}^2 + (1+d)m^2]}{(-1)^n m |\mathbf{k}| d} . \quad (\text{B.2})$$

Definindo

$$x_1 = \cos \varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} \quad \text{e} \quad x_2 = \sin \varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} , \quad (\text{B.3})$$

queremos encontrar x_1 e x_2 que satisfazem as seguintes equações

$$x_1 \cdot x_2 = (-1)^n m |\mathbf{k}| d \quad (\text{B.4})$$

$$x_1^2 - x_2^2 = 2[\mathbf{k}^2 + (1+d)m^2]$$

Considere a equação de 2º grau $x^2 - bx + c = 0$ que tem como soluções

$$x_1 = \frac{b + (b^2 - 4c)^{1/2}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{b - (b^2 - 4c)^{1/2}}{2} \quad (\text{B.5})$$

de modo que

$$x_1 \cdot x_2 = c \quad \text{e} \quad x_1^2 - x_2^2 = b(b^2 - 4c)^{1/2} . \quad (\text{B.6})$$

A partir de (B.4) e (B.6) temos que

$$c = (-1)^n m |\mathbf{k}| d \quad (\text{B.7})$$

$$b^2(b^2 - 4c) = 4[\mathbf{k}^2 + (1+d)m^2]^2 \quad (\text{B.8})$$

Substituindo (B.7) em (B.8) e resolvendo uma equação biquadrada obtemos que

$$b = \left\{ 2m|\mathbf{k}|d + 2k_0[\mathbf{k}^2 + (1+d)^2 m^2]^{1/2} \right\}^{1/2} . \quad (\text{B.9})$$

Portanto, (B.7) e (B.9) nos dão as soluções x_1 e x_2 dadas em (B.5), as quais nos fornecem $\cos \varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}}$ e $\sin \varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}}$ a partir de (B.3), ou seja,

$$\begin{aligned} \cos \varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} &= \frac{N}{\sqrt{2}} \left[(k_0 x + m|\mathbf{k}|d)^{1/2} + (k_0 x - m|\mathbf{k}|d)^{1/2} \right] \\ \sin \varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} &= \frac{N}{\sqrt{2}} \left[(k_0 x + m|\mathbf{k}|d)^{1/2} - (k_0 x - m|\mathbf{k}|d)^{1/2} \right] (-1)^n \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

onde $x = [\mathbf{k}^2 + (1+d)^2 m^2]^{1/2}$ e N é um coeficiente de normalização que deve ser ajustado de modo que

$$\cos^2 \varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} + \sin^2 \varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} = 1 . \quad (\text{B.11})$$

Da condição de normalização acima e de (B.10) obtemos que

$$N = \frac{1}{(2k_0 x)^{1/2}} . \quad (\text{B.12})$$

Observe que substituindo (B.12) em (B.10) obtemos as soluções estáticas desejadas (4.75), ou seja,

$$\begin{aligned} \cos \varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} &= \frac{1}{2\sqrt{k_0 x}} \left[(k_0 x + m|\mathbf{k}|d)^{1/2} + (k_0 x - m|\mathbf{k}|d)^{1/2} \right] \\ \sin \varphi_{\mathbf{k}}|_{\text{eq}} &= \frac{1}{2\sqrt{k_0 x}} \left[(k_0 x + m|\mathbf{k}|d)^{1/2} - (k_0 x - m|\mathbf{k}|d)^{1/2} \right] (-1)^n . \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Enfim tomando $d = -1$, que corresponde a estudar o caso do sistema livre ($g = 0$), temos as seguintes soluções estáticas abaixo

$$\begin{aligned}
\cos \varphi_{\mathbf{k}} \Big|_{\text{eq}}^{d=-1} &= \left[\frac{(k_0 - m)^{1/2} + (k_0 + m)^{1/2}}{2\sqrt{k_0}} \right] \\
\sin \varphi_{\mathbf{k}} \Big|_{\text{eq}}^{d=-1} &= \left[\frac{(k_0 - m)^{1/2} - (k_0 + m)^{1/2}}{2\sqrt{k_0}} \right] (-1)^n ,
\end{aligned}
\tag{B.14}$$

as quais estão de acordo com (4.32).

Apêndice C

Solução Assintótica para a Dinâmica de Quasi-Equilíbrio de $\mathcal{R}$

Este apêndice tem por objetivo apresentar uma abordagem não geral para as equações cinéticas (5.17) e (5.18). Através de uma análise simples obteremos uma solução assintótica para a dinâmica de quasi-equilíbrio de $\mathcal{R}$ na fase de simetria quiral quebrada e na Aproximação de Campo Médio de um sistema fermiônico uniforme descrito pelo Modelo Quiral de Gross-Neveu. Esta solução assintótica nos mostrará algumas características da física existente no regime de pequenas oscilações em torno da solução estacionária.

Começamos reescrevendo abaixo as equações cinéticas linearizadas (5.17) e (5.18) obtidas na seção (5.1)

$$i\omega\Psi_{\mathbf{k}} + \frac{m|\mathbf{k}|d}{k_0}\Gamma_{\mathbf{k}} = 0 \quad (\text{C.1})$$

$$i\omega\frac{m|\mathbf{k}|d}{k_0}\Gamma_{\mathbf{k}} - 4[\mathbf{k}^2 + (1+d)^2m^2]\Psi_{\mathbf{k}} + 4|\mathbf{k}|\left(\frac{g^2}{4\pi}\right)(\xi+1)\mathcal{I} = 0 \quad , \quad (\text{C.2})$$

onde $\mathcal{I}$ é a seguinte integral divergente

$$\mathcal{I} = \int d\mathbf{k}' \frac{|\mathbf{k}'|}{[(\mathbf{k}')^2 + (1+d)^2m^2]^{1/2}} \Psi_{\mathbf{k}'} \quad . \quad (\text{C.3})$$

Sabemos , a partir do procedimento de renormalização autoconsistente realizado na

seção (4.5), que a equação (C.2) é finita, o que nos conduz a seguinte condição

$$\left(\frac{g^2}{4\pi}\right)(\xi + 1)\mathcal{I} \longrightarrow \text{finito} . \quad (\text{C.4})$$

Da renormalização da constante de acoplamento dada em (4.68), temos que $\mathcal{I}$ deve divergir logaritmicamente para que o fator dado em (C.4) seja finito. Desta análise concluímos que a amplitude de oscilação $\Psi_{\mathbf{k}}$ deve ter o seguinte comportamento assintótico

$$\lim_{|\mathbf{k}| \rightarrow \infty} \Psi_{\mathbf{k}} = \frac{A}{|\mathbf{k}|} + \mathcal{O}(|\mathbf{k}|^{-2}) \quad (\text{C.5})$$

sendo A uma constante.

Consideremos portanto a solução assintótica abaixo para a amplitude de oscilação $\Psi_{\mathbf{k}}$

$$\Psi_{\mathbf{k}} = \frac{md}{|\mathbf{k}|} \quad (\text{C.6})$$

onde introduzimos o fator md por razões dimensionais.

Substituindo a solução (C.6) na equação cinética linearizada (C.1) obtemos a correspondente solução assintótica para a amplitude de oscilação $\Gamma_{\mathbf{k}}$

$$\Gamma_{\mathbf{k}} = -i\omega \frac{(\mathbf{k}^2 + m^2)^{1/2}}{\mathbf{k}^2} . \quad (\text{C.7})$$

Enfim substituindo (C.6) e (C.7) em (C.2), obtemos a equação para a frequência de oscilação ω

$$\omega^2 - 4[\mathbf{k}^2 + (1 + d)^2 m^2] + 4\mathbf{k}^2 \left(\frac{g^2}{4\pi}\right)(\xi + 1) \int \frac{d\mathbf{k}'}{[(\mathbf{k}')^2 + (1 + d)^2 m^2]^{1/2}} = 0 . \quad (\text{C.8})$$

Observando que a integral acima tem o seguinte comportamento assintótico quando $\Lambda \rightarrow \infty$ (veja Apêndice D)

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_{-\Lambda}^{+\Lambda} \frac{dk'}{[(k')^2 + (1+d)^2 m^2]^{1/2}} \rightarrow \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \quad (\text{C.9})$$

e utilizando-se da renormalização da constante de acoplamento dada em (4.68), temos a partir de (C.8) a frequência de oscilação ω do regime de quasi-equilíbrio estudado

$$\omega^2 = 4(1+d)^2 m^2 \implies \omega = 2(1+d)m \text{ ou } \omega = 2m_{\text{ef}} , \quad (\text{C.10})$$

onde utilizamos a relação (4.77) entre as massas das bases de partículas m e de quasi-partículas m_{ef} .

Finalmente substituindo (C.6), (C.7) e (C.10) em (5.15), obtemos a solução assintótica para as equações cinéticas linearizadas (5.13) e (5.14)

$$\delta\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{2md}{|\mathbf{k}|} \cos[2(1+d)mt] \quad (\text{C.11})$$

$$\delta\gamma_{\mathbf{k}} = 4m(1+d) \frac{(k^2 + m^2)^{1/2}}{k^2} \sin[2(1+d)mt] .$$

É interessante notar a partir de (C.10) e (C.11), que a dinâmica efetiva de quasi-equilíbrio das variáveis de um corpo $\mathcal{R}$ oscila em torno da situação estacionária com frequência $\omega = 2m_{\text{ef}}$.

Interpretemos este resultado, observando por um lado que a equação (5.16) que descreve a evolução temporal da variável $\delta\varphi_{\mathbf{k}}$ é uma equação de oscilador com frequência $2m_{\text{ef}}$.

Por outro lado, é sabido que o tratamento de um sistema de osciladores harmônicos independentes,

$$H = \sum_i \left[\left(\frac{p_i^2}{2m} \right) + \frac{1}{2} m \omega^2 x_i^2 \right] , \quad (\text{C.12})$$

através do grupo simplético dado por Goshen e Lipkin [37], nos conduz a uma Hamiltoniana do modelo coletivo,

$$H = H_{\text{COL}}(P, Q) + H_{\text{INT}} , \quad (\text{C.13})$$

onde H_{COL} é a parte da Hamiltoniana que descreve o movimento coletivo com uma frequência dobrada,

$$H_{\text{COLET}} = \frac{1}{2}(P^2 + 4\omega^2 Q^2) , \quad (\text{C.14})$$

enquanto H_{INT} descreve os modos intrínsecos do sistema devido às condições iniciais do problema.

Classicamente esta situação pode ser visualizada notando que para osciladores harmônicos a frequência de oscilação independe da amplitude do movimento. Considere um sistema independente de partículas inicialmente na origem de um campo harmônico que é perturbado. Cada partícula executará uma oscilação harmônica independente. Há contudo uma forte correlação entre as partículas, pois todas oscilam com a mesma fase e frequência. Um observador veria todas as partículas partindo da origem juntas e retornando juntas numa oscilação de dilatação coletiva de frequência 2ω .

Esta análise nos sugere que o fator 2 obtido em (C.10), para a frequência de oscilação ω em torno do equilíbrio, está relacionado com o fato de termos feito o tratamento de nosso sistema fermiônico homogêneo em termos do grupo simplético de Goshen e Lipkin, ou em outras palavras, que nossas variáveis dinâmicas $\delta\varphi_{\mathbf{k}}$ e $\delta\gamma_{\mathbf{k}}$ ($\Psi_{\mathbf{k}}$ e $\Gamma_{\mathbf{k}}$) são variáveis do tipo ângulo-ação coletivas.

Na seção (5.2) resolvemos de forma geral e fechada as equações cinéticas linearizadas (5.17) e (5.18), obtendo outras informações a respeito da dinâmica efetiva de quasi-equilíbrio de $\mathcal{R}$ para nosso sistema na Aproximação de Campo Médio.

Apêndice D

Tabela de Integrais

Escrevemos abaixo as integrais utilizadas neste trabalho. Estes resultados foram retirados da referência [42].

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{1/2}} = \ln[x + (x^2 + a^2)^{1/2}] \quad (\text{D.1})$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2 + a^2)^{1/2}} \quad (\text{D.2})$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^{1/2}} = \frac{x(x^2 + a^2)^{1/2}}{2} - \frac{a^2}{2} \ln[x + (x^2 + a^2)^{1/2}] \quad (\text{D.3})$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{x}{(x^2 + a^2)^{1/2}} + \ln[x + (x^2 + a^2)^{1/2}] \quad (\text{D.4})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + a)^{1/2}} \frac{1}{(x^2 + b)} = \\ = \frac{1}{2[b(b-a)]^{1/2}} \ln \left[\frac{x(b-a)^{1/2} + b^{1/2}(x^2 + a)^{1/2}}{x(b-a)^{1/2} - b^{1/2}(x^2 + a)^{1/2}} \right] \quad \text{se } b-a > 0 \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

$$= \frac{1}{[b(a-b)]^{1/2}} \arctan \left[\frac{x(a-b)^{1/2}}{b^{1/2}(x^2 + a)^{1/2}} \right] \quad \text{se } a-b > 0 \quad (\text{D.6})$$

$$= \frac{x}{b(x^2 + a)^{1/2}} \quad \text{se } a = b \quad (\text{D.7})$$

$$\begin{aligned}
& \int \frac{dx}{(x^2 + a)^{1/2}} \frac{1}{(x^2 - b)} = \\
& = \frac{-1}{2[b(a + b)]^{1/2}} \ln \left[\frac{x(a + b)^{1/2} + b^{1/2}(x^2 + a)^{1/2}}{x(a + b)^{1/2} - b^{1/2}(x^2 + a)^{1/2}} \right] \quad \text{se } a + b > 0 \quad (\text{D.8})
\end{aligned}$$

$$= \frac{-1}{[-b(a + b)^{1/2}]^{1/2}} \arctan \left[\frac{x(-a - b)^{1/2}}{b^{1/2}(x^2 + a)^{1/2}} \right] \quad \text{se } a + b < 0 \quad (\text{D.9})$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a)^{1/2}} \frac{x^2}{(x^2 + b)} = \int \frac{dx}{(x^2 + a)^{1/2}} - b \int \frac{dx}{(x^2 + a)^{1/2}} \frac{1}{(x^2 + b)} \quad (\text{D.10})$$

Referências

- [1] P. Ring e P. Schuck, *The Many-Body Problem*, Springer Verlag (1980).
- [2] J. W. Negele e D. Vautherin, Phys. Rev. **C5**, 1472 (1972)
J. W. Negele, Lecture Notes in Physics **40**, 270 (1975).
- [3] B. Serot e J. Walecka, The Relativistic Nuclear Many-Body Problem, Advances in Nuclear Physics - volume 16, Plenum Press (1986).
- [4] C. Itzykson e J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, Macgraw-Hill (1980).
- [5] W. Weise, Quarks and Nuclei, International Review of Nuclear Physics - volume 1, World Scientific (1984)
R. Shellard, Introdução à Cromodinâmica Quântica, Escola de Verão Jorge André Swieca - Sessão Partículas e Campos - volume II (1983).
- [6] R. Dashen, B. Hasslacher e A. Neveu, Phys. Rev. **D12**, 2443 (1975).
- [7] Proceeding on Variational Calculations in Quantum Field Theory, Wangeroose, West Germany, World Scientific (1987).
P. M. Stevenson, Phys. Rev. **D33**, 2305 (1986).
- [8] B. Rosenstein, Phys. Rev. **D30**, 1377 (1984).
- [9] A. Natale, Modelos e Mecanismos de Geração de Massa, Escola de Verão Jorge André Swieca - Sessão Partículas e Campos - volume III-A (1985).

- [10] A. D. Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology*, Harwood Academic Publishers (1990).
- [11] O. J. P. Éboli, R. Jackiw e So-Yong Pi, Phys. Rev. **D37**, 3557 (1988)
Érica Regina Takano, dissertação de mestrado IFUSP (1992).
- [12] W. Cassing, A. Lang, S. Teis e K. Weber, Nucl. Phys. **A545**, 123c (1992).
- [13] G. Baym, Ultrarelativistic Heavy-Ion Collisions, Proceeding of IV International Summer School, la Rábida, Spain, Springer Verlag (1992).
- [14] G. Semenoff e N. Weiss, Phys. Rev. **D31**, 6890 (1985).
- [15] M. C. Nemes e A. F. R. de Toledo Piza, Phys. Rev. **C27**, 862 (1983)
M. C. Nemes e A. F. R. de Toledo Piza, Physica **137A**, 367 (1986)
B. Carlson, M. C. Nemes e A. F. R. de Toledo Piza, Nucl. Phys. **A457**, 261 (1986)
A. F. R. de Toledo Piza, Publicação IFUSP/P-659 (1987).
- [16] C-Y. Lin e A. F. R. de Toledo Piza, Phys. Rev. **D46**, 742 (1992).
- [17] D. J. Gross e A. Neveu, Phys. Rev. **D12**, 2444 (1974).
- [18] Y. Nambu e G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961).
- [19] A. Kerman e T. Troudet, Ann. of Phys. **154**, 456 (1984).
- [20] C. Willis e R. Picard, Phys. Rev. **A9**, 1343 (1974).
- [21] J. des Cloiseaux, Problème à N Corps, École d'été de Physique Théorique les Houches, Gordon and Breach (1967).
- [22] A. Kovner e B. Rosenstein, Phys. Rev. **D39**, 2332 (1989).
- [23] A. Zamolodchikov e A. Zamolodchikov, Ann. of Phys. **120**, 253 (1979)
B. Berg, M. Karowski, P. Weisz e V. Kurak, Nucl. Phys. **B134**, 125 (1978).
- [24] E. Witten, Nucl. Phys. **B145**, 110 (1978).

- [25] R. Daschen e Y. Frishman, Phys. Lett. **B46**, 469 (1973).
E. Moreno e F. Schaposnik, Int. J. Mod. Phys. **A4**, 2827 (1989).
- [26] W. Andrei, K. Furuya e J. Lowenstein, Rev. Mod. Phys. **55**, 331 (1983).
- [27] C. Aragão, Uma Aplicação da Teoria Quântica de Campos na Física da Matéria Condensada - Primeira Escola de Pós-Graduação em Física do Nordeste - João Pessoa (1987).
- [28] D. Campbell e A. Bishop, Nucl. Phys. **B200**, 297 (1982).
- [29] L. Celenza e C. Shakin, Phys. Rev. **C24**, 2704 (1981).
- [30] B. Rosenstein e A. Kovner, Phys. Rev. **D40**, 523 (1989).
- [31] P.R.I. Tommasini, Tese de Doutorado IFUSP (em andamento)
P.R.I. Tommasini e A.F.R. de Toledo Piza (a publicar)
- [32] S. Türköz, Tese de Doutorado MIT (1989)
Orientador : Prof. A. Kerman.
- [33] E. Abdalla, M.C. Abdalla e K. Rothe, *Non-Perturbative Methods in 2-Dimensional Quantum Fields Theory*, World Scientific (1991).
- [34] D. Rowe, Nucl. Phys. **80**, 209 (1966)
M.C. Nemes e A.F.R. de Toledo Piza, Z. Phys. **A310**, 339 (1983)
M.C. Nemes e A.F.R. de Toledo Piza, Phys. Rev. **C31**, 613 (1985).
- [35] R. Newton, *Scattering Theory of Waves and Particles*, McGraw-Hill Book Company (1966)
- [36] M.C. Nemes e A.F.R. de Toledo Piza, Physica **146A**, 282 (1987).
- [37] S. Goshen e H. Lipkin, Ann. of Phys. **6**, 301 (1959).
- [38] Veja por exemplo seção (10.1) da referencia [35].

- [39] A. Kerman e C-Y. Lin, Publicação CTP-MIT/2198 (1994).
- [40] P. Dennery e A. Krzywicki, *Mathematics for Physicists*, Harper International Edition (1967).
- [41] A.F.R. de Toledo Piza, Proc. of the IX Workshop in Nuclear Physics, Buenos Aires, Argentina, World Scientific(1987).
- [42] G. Petit Bois - Tables of Indefinite Integrals, Dover Publications Inc (1964).