

*Mahir Hussein*  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE FÍSICA

*Eduardo T. J. P.*

A SEÇÃO DE CHOQUE TOTAL DE REAÇÃO DE ÍONS PESADOS  
E A TRANSPARÊNCIA NUCLEAR

SBI-IFUSP



305M810T0664

RICARDO AFFONSO DO REGO

Tese apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo, para a obtenção do título de DOUTOR EM CIÉNCIAS

Orientador:

Prof. Dr. MAHIR SALEH HUSSEIN



SÃO PAULO  
1984

539.722

P 343.8

D

e. l

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pela Biblioteca do  
Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Rego, Ricardo Affonso

A seção de choque total de reação de íons pesados e a transparência nuclear. São Paulo, 1984.

Tese (Doutoramento) - Universidade de São Paulo.  
Instituto de Física. Departamento de Física Nuclear.

Área de Concentração: Física Nuclear

Orientador: Prof. Dr. Mahir Saleh Hussein

Unitermos: 1. Íons pesados; 2. Seção de choque de reação; 3. Teoria de espalhamento múltiplo; 4. Aproximação de impulso; 5. Transparência nuclear

USP/IF - B70/84

A meus pais

## Agradecimentos

Quero expressar meus agradecimentos ao Prof. Mahir Hussein, pela orientação, pelo apoio e principalmente, por ter me encorajado nos momentos mais difíceis, onde sempre esteve presente com a palavra amiga, capaz de fazer ressurgir a chama da esperança.

Ao Carlos Bertulani, pelo envio das expressões que permitiram tratar o princípio de Pauli.

Ao Brett, Marcelo e Vera pelas valiosas discussões sobre parte da física estudada.

Ao grupo de física nuclear desejo expressar minha gratidão pelas condições dadas para que eu pudesse finalizar com tranquilidade o presente trabalho.

Ao Milton, pela amizade com o qual desfrutei durante muito tempo, compartilhando a mesma sala.

A Maria Eleda por ter me dado o apoio e a segurança de que necessitei e que influiram decisivamente para que um clima de paz se instaurasse, resultando nas condições propícias para a elaboração da tese.

Aos meus irmãos, à minha mãe e à Mariuce por terem convivido com minhas vitórias e derrotas e pelo apoio e confiança depositados em mim.

A equipe de desenho do IEAv e a Engenheira Maria Te rezinha pela presteza no atendimento demonstrado nas ocasiões de que necessitei de seus serviços.

A Eros pela datilografia e ao Sílvio Aparecido pela boa vontade demonstrada nos serviços de fotocópias.

A todos os colegas do IEAv que de algum modo contribuiram para o término deste trabalho.

... Descobriu-se outro feitiço, a tecnologia, e a mocidade estuda com o fito de aparelhar-se para a vida. Faz muito bem. É incomparavelmente mais agradável viver num mundo reformado pela técnica do que sofrer o desconforto da vida das cavernas. Contudo, a educação não objetiva formar escravos de luxo, sim homens livres; não apenas na escolha do gênero de servidão; livres principalmente em sua alma, em sua inteligência e coração, cujas faculdades e anseios não podem ser peados no desenvolvimento e devem, ao contrário, ser favorecidos, para que a vida se viva agradavelmente em sua plenitude.

... A tecnologia pode proporcionar dinheiro, fama e talvez até poder; dará, sem dúvida, emoções e mesmo muitas alegrias. Não dá, porém, felicidade, que pode ser desfrutada, ao contrário, plenamente, por um bom carajá ignorante, que contempla as águas do Araguaia, o mato verde em redor e o céu azul por cima, sem temores vãos da miséria, da obscuridade, do ostracismo.

Adquira-se a técnica, adquira-se a ciência, naturalmente, porque é bela, grande, valiosa, mas de tal sorte que nos sirvam a nós e aos nossos semelhantes, e não nós e eles a elas. Quem, porém, nos ensina a melhor maneira de viver não é a ciência, nem a técnica, senão a sabedoria...

Jaime Bruna

## R E S U M O

Foi calculado microscopicamente a seção de choque total de reação para os sistemas  $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ ,  $^{12}\text{C} + ^{40}\text{Ca}$ ,  $^{12}\text{C} + ^{90}\text{Zr}$ ,  $^{12}\text{C} + ^{208}\text{Pb}$ ,  $^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$ ,  $^{40}\text{Ca} + ^{208}\text{Pb}$ ,  $^{90}\text{Zr} + ^{90}\text{Zr}$ ,  $^{90}\text{Zr} + ^{208}\text{Pb}$  e  $^{208}\text{Pb} + ^{208}\text{Pb}$ , numa ampla faixa de energia. Foi usada a expressão WKB para a defasagem imaginária, na representação do parâmetro do impacto. A parte imaginária do potencial óptico foi construída, usando o primeiro termo da teoria de espalhamento múltiplo, incorporando na sua expressão o princípio de Pauli. A inclusão da interação nuclear e coulombiana mostrou ser importante. Os resultados teóricos não se apresentam em bom acordo com os poucos dados experimentais existentes, a baixas energias. Este resultado foi atribuído a fraca absorção contida no potencial imaginário, que contém o processo de knock-out quase-livre como mecanismo dominante de reação.

## A B S T R A C T

The total reaction cross section of the systems  $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ ,  $^{12}\text{C} + ^{40}\text{Ca}$ ,  $^{12}\text{C} + ^{90}\text{Zr}$ ,  $^{12}\text{C} + ^{208}\text{Pb}$ ,  $^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$ ,  $^{40}\text{Ca} + ^{208}\text{Pb}$ ,  $^{90}\text{Zr} + ^{90}\text{Zr}$ ,  $^{90}\text{Zr} + ^{208}\text{Pb}$  and  $^{208}\text{Pb} + ^{208}\text{Pb}$  for a wide range of energies has been calculated microscopically. A WKB expression for the imaginary part of the optical potential has been constructed by using the first term of multiple scattering theory with the effect of Pauli blocking incorporated into it. The inclusion of the nuclear and Coulomb interactions is shown to be important. The theoretical results do not show very good agreement with the experimental data at lower energies. This is attributed to the weak absorption contained in the imaginary potential of the " $t_{\rho_A \rho_B}$ " interaction, which contained only quasi-free knock-out as the dominant reaction mechanism.

## Í N D I C E

### INTRODUÇÃO

I.	<u>CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE A SEÇÃO DE CHOQUE TOTAL DE REAÇÃO</u>	1
II.	<u>A INTERAÇÃO MÉDIA ENTRE ÍONS PESADOS</u>	12
II.1	- Aspectos Fenomenológicos	12
II.2	- Fundamento Microscópico (Feshbach)	19
II.3	- Construção do Potencial Óptico Através da Teoria de Espalhamento Múltiplo	28
III.	<u>SEÇÃO DE CHOQUE TOTAL DE REAÇÃO E A PARTE IMAGINÁRIA DO POTENCIAL ÓPTICO</u>	40
IV.	<u>CONTEÚDO REATIVO DO POTENCIAL IMAGINÁRIO</u>	52
V.	<u>EFEITO DO PRINCÍPIO DE PAULI NA SEÇÃO DE CHOQUE TOTAL NÚCLEON-NÚCLEON (NN)</u>	59
V.1	- Cálculo de $\bar{\sigma}_{NN}$ para o Espalhamento NN no Sistema Núcleon-Núcleo	59
V.2	- Cálculo de $\bar{\sigma}_{NN}$ para o Espalhamento NN no Sistema Núcleo-Núcleo	68
V.3	- Resultados Numéricos de $\bar{\sigma}_{NN}(K, K_{F_1}, K_{F_2})$	75
VI.	<u>CÁLCULO DA SEÇÃO DE CHOQUE TOTAL DE REAÇÃO, <math>\sigma_R(E)</math></u>	80
VI.1	- Potencial Imaginário Microscópico	83
VI.2	- Comparação entre duas Expressões para o Coeficiente de Transmissão	96
VI.3	- O Limite Geométrico de $\sigma_R(E)$ e a Transparência Nuclear	101

VI.4 - Cálculo Microscópico de $\sigma_R(E)$	109
VII. CONCLUSÕES	125
<u>APÊNDICE A</u> - Determinação da Região Angular permitida pelo Princípio de Pauli	127
<u>APÊNDICE B</u> - Cálculo Numérico de $\bar{\sigma}_{NN}$ : Seção de Choque Nucleon-Núcleon corrigida pelo Princípio de Pauli	139
<u>APÊNDICE C</u> - Determinação do Momento de Fermi através do Modelo de Gás de Fermi	142
<u>APÊNDICE D</u> - Efeito da Simetria de Troca em $\sigma_R(E)$	146
<u>APÊNDICE E</u> - Estudo Comparativo entre $\delta_I^{(WKB)}$ e $\delta_I^{(Eikonal)}$	152
<u>APÊNDICE F</u> - O Modelo Convolutivo para o Potencial Nuclear Real ("Double Folding")	157
<u>REFERÊNCIAS</u>	160/166

## INTRODUÇÃO

Os últimos anos tem se caracterizado pelo grande interesse, tanto teórico como experimental, despertado pelas reações envolvendo íons pesados, já que estas exibem uma variedade de fenômenos mais ricos que aqueles envolvendo reações induzidas por núcleos leves. De fato, a motivação inicial para a construção de aceleradores de íons pesados residiu na possibilidade de se produzir núcleos com massas superiores aos encontrados na natureza, os núcleos super-pesados. Além disso, poder-se-ia estudar a matéria nuclear em condições onde a densidade nucleônica fosse superior as densidades normalmente encontrada nos núcleos.

A baixas energias, da ordem da barreira coulombiana, a seção de choque total de reação,  $\sigma_R$  é exaurida pelo processo de formação do núcleo composto obtido pela fusão dos núcleos envolvidos na colisão. Embora sua descrição microscópica seja complicada, ela apresenta uma forma simples, devida à inclusividade da mesma.

A energias mais altas, canais diretos ou semi-diretos desempenham papel mais importantes e poderiam ficar dominantes sobre o canal de fusão. A energias maiores que o dobro da barreira coulombiana sabe-se que processos muito inelásticos, onde há uma grande transferência da energia do movimento relativo para o movimento interno dos núcleos, são dominantes. É claro que a energias mais elevadas a dinâmica da colisão núcleo-núcleo é governada pela interação núcleon-núcleon resultando, certamente, num predomínio do canal de knock-out, sobre os demais canais, já que os canais coletivos e de rearranjo são menos importantes.

A totalidade de todos os canais de reação, que é medido pela seção de choque total de reação tem caráter simples e geométrico se continuarem a absorver fortemente fluxo do canal de entrada.

É provável que a energias altas o núcleo incidente comece a interagir localizadamente de tal forma que os graus de

liberdade nucleônico comecem a exaurir os canais inelásticos. Neste caso, o aspecto geométrico perde o seu significado, e torna-se interessante o estudo da seção de choque de reação governada pela colisão náucleon-náucleon.

Cálculos teóricos<sup>1)/6)</sup> e medidas experimentais<sup>7)/10)</sup> (diretas e indiretas) de  $\sigma_R(E)$  para íons pesados têm sido feitos. Alguns trabalhos<sup>2), 5)e 11)</sup> mostraram uma estreita relação entre a seção de choque total de reação do sistema envolvendo dois náucleos e a seção de choque total náucleon-náucleon,  $\sigma_{NN}^T(E)$ . Os valores de  $\sigma_R(E)$  decrescem com a energia semelhantemente ao comportamento de  $\sigma_{NN}^T(E)$  e não mostram nenhuma tendência de saturação até mesmo a  $\frac{E_{c.m.}}{A} \approx 150 \frac{\text{Mev}}{\text{náucleon}}$  (energia de centro-de-massa dividido pelos náucleons do náucleo incidente)

De Vries e Peng<sup>2)</sup> conseguiram reproduzir qualitativamente a dependência de  $\sigma_R(E)$  com a energia para os dados experimentais existentes usando o limite óptico da teoria de Glauber. Este limite considera as trajetórias seguidas pelos náucleons incidentes como linhas retas. Concluiu-se que o comportamento de  $\sigma_R(E)$  com a energia se deve ao fenômeno de transparência nuclear ocasionado pelo crescimento do caminho livre médio. O que é surpreendente neste estudo teórico é o fato de usar a aproximação impulso<sup>12)</sup> (que é equivalente a extensão da teoria de Glauber para projéteis composto<sup>13), 14)</sup> cuja validade de uso se restringe a altas energias (energia por náucleon maior que 100 Mev<sup>12)</sup>).

Chauvin et al.<sup>15)</sup> fizeram um estudo de  $\sigma_R(E)$  semelhante ao trabalho de De Vries e Peng<sup>2)</sup> e ao invés de usar os dados experimentais da seção de choque total náucleon-náucleon determinaram-na através da defasagem referente a onda  ${}^1S_0$ . Os resultados obtidos para o sistema  ${}^{12}\text{C} + {}^{12}\text{C}$  mostraram-se em razãoável acordo com os dados experimentais. O mesmo sucesso, não foi conseguido para o sistema  ${}^{13}\text{C} + {}^{208}\text{Pb}$ . O valor obtido é cerca de 20% maior que o resultado obtido através da análise do espalhamento elástico. Este resultado menos satisfatório foi atribuído a barreira coulombiana que é de aproximadamente 60 Mev. O efeito do potencial coulombiano é o de desviar as trajetórias seguidas inicialmente pelo projétil, lançando-os para regiões de menor

absorção. Isto deve decrescer  $\sigma_R(E)$ . De fato, um estudo preliminar feito por Rego e Hussein<sup>16)</sup> revelou que a interação coulombiana quando incluída no cálculo produz um decréscimo em  $\sigma_R(E)$ .

Um estudo para verificar qual seria o efeito do potencial nuclear real em  $\sigma_R(E)$  foi feito<sup>3)</sup> utilizando um potencial imaginário com a geometria do quadrado de uma Woods-Saxon, constante em todo o intervalo de energia. Foi usado a expressão WKB aproximada, proposto por Brink<sup>17)</sup> para a parte imaginária da defasagem óptica. O resultado obtido mostrou que o potencial nuclear atrativo aumenta  $\sigma_R(E)$  a baixas energias ( $\frac{E_{c.m.}}{A} \approx 5$  Mev/núcleon) e apresenta pouco efeito a energias mais altas ( $\frac{E_{c.m.}}{A} \approx 50$  Mev/núcleon). Entretanto, não se conseguiu explicar toda mudança na energia observada em  $\sigma_R(E)$ . Concluiu-se que o potencial imaginário W usado apresenta fraca absorção o que resulta num coeficiente de transmissão menor que a unidade para parâmetros de impacto pequenos. Portanto, deveria se usar um potencial W mais realístico.

Um estudo da influência da interação nuclear e coulombiana em  $\sigma_R(E)$  torna o resultado obtido por De Vries e Peng inesperado. Algumas outras correções deveriam ser feitas. Nos cálculos deles não se considera nenhum movimento interno dos nucleons no núcleo, o conhecido movimento Fermiônico além da não inclusão do princípio de Pauli. Estes efeitos foram incorporados<sup>18)</sup> na parte imaginária do potencial óptico e o seu efeito foi o de reduzir a absorção o que produziria um decréscimo em  $\sigma_R(E)$ . Entretanto, o modelo utilizado para a inclusão do princípio de Pauli não o considera corretamente, o que torna o estudo apenas como um indicador do seu efeito em W. Além disso, De Vries e Peng<sup>2)</sup> utilizam a expressão eikonal para a defasagem cuja validade para baixas energias não foi ainda demonstrada.

Pelo exposto vê-se que o modelo utilizado por De Vries e Peng<sup>2)</sup> não inclue importantes correções necessárias para tornar as suas conclusões confiáveis as energias intermediárias. E mesmo assim, a estas energias, os resultados obtidos estão em razoável acordo com os dados experimentais indireto de

$\sigma_R(E)$  (calculado do potencial óptico obtido do ajuste com os dados experimentais do espalhamento elástico). Suas conclusões representam um resultado inesperado. De fato, a conclusão tirada por eles é que atuando o potencial nuclear num sentido e o princípio de Pauli no outro, essas correções necessárias no cálculo se cancelariam entre si. Isto parece ser surpreendente. Assim, os efeitos coletivos perderiam sua ação e os projéteis de íons pesados se comportariam como aglomerados de núcleons livres a energias intermediárias.

A afirmação de que os efeitos coletivos são suprimidos em energias intermediárias é bastante forte. Seria interessante o estudo dos mecanismos inelásticos dominantes nesta faixa da energia. Um estudo das componentes reativas contido em W, parte imaginária do potencial óptico, da aproximação de primeira ordem do potencial óptico (aproximação impulso) para o sistema núcleon-núcleo revelou que o canal de knock-out é o único canal não-elástico considerado nesta aproximação.<sup>19), 20)</sup>.

Em reações de núcleon incidindo em núcleo, a energias acima de 100 Mev, já se sabia experimentalmente que o canal de knock-out é o mecanismo inelástico dominante<sup>21)</sup>. Este fato explicava, assim, a validade de uso da aproximação impulso para a componente imaginária do potencial óptico.

Certos autores como C.Guet<sup>22)</sup> considera que o mecanismo de Knock-out quase-livre deve dominar as reações envolvendo íons pesados (dois núcleos), a energias intermediárias. A questão de fundamental importância é saber qual seria os canais inelásticos contido no potencial imaginário usado no trabalho do De Vries e Peng. Se o knock-out for o canal dominante como explicar o bom acordo dos cálculos deles com os dados experimentais sabendo que a seção de choque de fusão é relativamente alta a baixas energias?

Recentemente<sup>4)</sup> fez-se um estudo do efeito em  $\sigma_R(E)$  da inclusão de um estado coletivo num dos dois núcleos. Determinou-se o termo de volume através da matéria nuclear acrescentando um termo de superfície à parte imaginária do potencial óptico. O termo de superfície aumenta a absorção de W resultando

num crescimento de  $\sigma_R(E)$  até  $\frac{E_{c.m.}}{A} = 100 \frac{\text{Mev}}{\text{nucleon}}$ . Entretanto, a inclusão do estado coletivo resultou numa seção de choque total de reação bem superior ao valor experimental indireto<sup>7)</sup>, do sistema  $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$  a  $\frac{E_{c.m.}}{A} \approx 43 \frac{\text{Mev}}{\text{nucleon}}$ . Todavia, a abordagem microscópica do potencial óptico é contestada por outros autores<sup>23) 24)</sup>.

No presente trabalho, estudamos o comportamento da seção de choque total de reação  $\sigma_R(E)$ , numa larga faixa da energia, para o sistema de ions pesados. Utilizamos o formalismo semi-clássico envolvendo parâmetros de impactos b's em lugar da usual análise através das ondas parciais l's. Isto conduziu a uma melhor compreensão intuitiva do fenômeno, pois neste contexto associa-se a cada parâmetro de impacto b uma trajetória seguida pelo projétil.

Primeiramente, no Capítulo I, fizemos um breve histórico sobre os diversos modelos usados na análise de  $\sigma_R$ . Iniciamos o Capítulo comentando sobre os estudos realizados com o sistema núcleon-núcleo e em seguida, abordamos sobre os cálculos realizados com sistemas envolvendo ions-pesados (sistema nucleo-núcleo). Comentamos sobre a possibilidade de  $\sigma_R$  atingir o limite geométrico, se a energias mais altas o potencial imaginário continuasse a apresentar forte absorção como se tem demonstrado nas análises feitas a energias mais baixas. Mostramos, também, que as primeiras experiências com medidas diretas de  $\sigma_R$ , em reações envolvendo ions pesados indicam claramente que o limite geométrico não é atingido e que há ocorrência de transparência nuclear, a energias intermediárias. Em seguida, comentamos sobre trabalhos teóricos interpretando o fenômeno da transparência nuclear como um indicativo da dinâmica da colisão núcleo-núcleo ser governada pela interação núcleon-núcleon e assim, justificando o cálculo microscópico de  $\sigma_R$ , para testar esta hipótese.

O Capítulo II trata sobre o modelo óptico. Comentamos sobre o potencial fenomenológico usado nas análises experimentais e mostramos como obter o potencial imaginário W através de uma teoria microscópica. Partindo da equação de Lippmann

Schwinger obtivemos  $W$  através da teoria de espalhamento múltiplo de Watson empregando a forma rearranjada desenvolvida por Kerman, Mc Manus e Thaler (KMT)<sup>12</sup>.

No Capítulo III mostramos que a seção de choque total de reação está diretamente ligada com  $W$  e com o coeficiente de transmissão e que este depende da parte imaginária da defasagem óptica. Usamos a expressão WKB exata para esta defasagem por ser adequada a sua utilização nas colisões de íons-pesados e para evitar as complicações advindas da resolução da equação de Schrödinger.

No Capítulo IV mostramos que o potencial  $W$  obtido ao se truncar a série de espalhamento múltiplo no primeiro termo, contém o mecanismo inelástico de knock-out quase-livre e a criação de pions.

O Capítulo V foi desenvolvido com a finalidade de incorporar o princípio de Pauli na seção de choque total núcleon-núcleon que aparece no potencial  $W$  microscópico obtido na 3ª seção do Capítulo II, já que a colisão núcleon-núcleon ocorre na presença de outros núcleons.

Para finalizar apresentamos, no Capítulo VI, os resultados numéricos da seção de choque total de reação para diversos sistemas de íons-pesados procurando entender como os vários efeitos físicos como, por exemplo, princípio de Pauli, potencial nuclear e coulombiano afetam  $\sigma_R$  e as grandezas físicas que entram na sua determinação.

Nos apêndices apresentamos detalhes de certas passagens omitidas nos Capítulos referidos acima.

## I - CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE A SEÇÃO DE CHOQUE TOTAL DE REAÇÃO

Historicamente, a seção de choque de reação foi sugerida como sendo uma quantidade indicada para medir o raio da matéria do núcleo<sup>25</sup>). A expressão usada para descrever  $\sigma_R(E)$  entre um nucleon projétil e um núcleo alvo é dada por

$$\sigma_R(E) = \pi (R + \chi)^2 \left[ 1 - \frac{Z_A Z_B e^2}{(R + \chi) E_{c.m.}} \right]. \quad (I.1)$$

Nesta equação R é o raio nuclear efetivo,  $\chi$  é o comprimento de onda reduzido do nucleon incidente,  $Z_A$  e  $Z_B$  referem-se a carga do projétil e do alvo, respectivamente e  $E_{c.m.}$  é a energia incidente no sistema de centro de massa. Os argumentos que justificam o uso da equação I.1, são baseados em analogia com a física óptica, pois temos comprimentos de onda curtos e meios muito absorativos. De fato, para um próton incidindo num núcleo com 1 Gev, o comprimento de onda associado a essa energia é de aproximadamente 0,7 fm, enquanto que o caminho livre médio do próton na matéria nuclear é de aproximadamente 1,3 fm<sup>26</sup>). Convém lembrar que o raio de matéria nuclear de um núcleo como o <sup>40</sup>Ca é de aproximadamente 6 fm<sup>27</sup>). Portanto, os primeiros modelos de  $\sigma_R(E)$  apresentavam argumentos qualitativamente corretos. Além disso, a energias altas  $\sigma_R(E)$  deveria atingir o limite geométrico, isto é,  $\sigma_R(E) \xrightarrow{E \rightarrow \infty} \pi R^2$ . Uma vez conhecido a densidade de prótons no núcleo através do espalhamento com elétrons, a seção de choque total de reação poderia ser usada para estudar a contribuição de nêutrons na densidade de matéria.

Os dados experimentais de  $\sigma_R(E)$  para os sistemas p + <sup>12</sup>C, p + <sup>16</sup>O e p + <sup>40</sup>Ca a  $E < 20$  Mev sugerem que o limite geométrico é atingido<sup>28</sup>, mas, devido ao decréscimo de  $\sigma_R(E)$  a energias mais altas o limite geométrico não é mantido, isto é, deve ocorrer certa transparência na interação nucleon-núcleo a estas energias. Portanto, deve-se modificar a expressão dada pela equação (I.1)

$$\sigma_R(E) = \pi (R + \chi)^2 \left[ 1 - \frac{Z_A Z_B e^2}{(R + \chi) E_{c.m.}} \right] (1 - T) \quad (I.2)$$

onde  $T$  é a transparência<sup>2)</sup> e está relacionada com o caminho livre médio da matéria nuclear<sup>28)</sup>. Através da equação (I.2) obtém-se que:  $T = 36\%$  para  $p + ^{12}C$ ,  $T = 32\%$  para  $p + ^{16}O$  e  $T = 32\%$  para  $p + ^{40}Ca$  e um raio que está em bom acordo com o valor obtido através de espalhamento de elétrons<sup>2)</sup>.

O fenômeno de transparência nuclear (decréscimo de  $\sigma_R(E)$  com a energia) apresentado pelos dados do sistema p+núcleo é observado também no comportamento da seção de choque total núcleon-núcleon,  $\sigma_{NN}^T$  (próton-próton e nêutron-próton) com a energia. Talvez a interação núcleon-núcleon determine o comportamento de  $\sigma_R(E)$  do sistema núcleon-núcleo. Este fato, sugere um cálculo microscópico de  $\sigma_R(E)$  onde  $\sigma_{NN}^T$  entre como parâmetro de entrada.

Num dos primeiros cálculos microscópicos<sup>26)</sup> de  $\sigma_R$  foi usado a expressão eikonal<sup>29)</sup> para a função de onda de espalhamento por um potencial

$$\sigma_R(E) = \int d^2b \left\{ 1 - \exp \left[ - \int_{-\infty}^{\infty} dz' (Z \sigma_{pp}^T \rho_p(z', |b|) + N \sigma_{np}^T \rho_n(z', |b|)) \right] \right\} \quad (I.3)$$

onde  $\sigma_{pp}^T$  e  $\sigma_{np}^T$  são as seções de choque próton-próton e nêutron-próton, respectivamente,  $\rho_p$  e  $\rho_n$  as respectivas densidades de próton e nêutron do núcleo alvo. Um bom acordo entre o resultado teórico e os dados experimentais é obtido em energias superiores a 200 Mev. Este acordo, a estas energias, se deve a validade de uso da expressão de Glauber (ou eikonal) contido na equação (I.3). As energias mais baixas o acordo não deve ser bom, já que a expressão (I.3) não inclui o efeito do princípio de Pauli.

Um outro cálculo mais sofisticado foi feito<sup>30)</sup>, utilizando a primeira e segunda ordem da série de espalhamento múlti-

plo para a parte imaginária do potencial óptico do formalismo desenvolvido por Kerman, Mc Manus e Thaler (KMT)<sup>12</sup>). Os resultados teóricos obtidos estão em bom acordo com os dados experimentais, a energias superiores a 350 Mev. Isto indica que correções devido ao princípio de Pauli, potencial nuclear real e outras correções devem ser importantes para um melhor acordo entre os dados experimentais e o resultado teórico a energia mais baixa. Recentemente<sup>11</sup>), foram feitas as correções necessárias para tornar o cálculo microscópico de  $\sigma_R(E)$  realístico, a energias mais baixas. Foi incluído o princípio de Pauli na seção de choque núcleon-núcleon e corrigido a trajetória pelo projétil, introduzindo no cálculo o potencial nuclear real e o potencial coulombiano. Os resultados teóricos apresentaram em bom acordo com os dados experimentais.

Os dados experimentais de  $\sigma_R(E)$  para o sistema nucleo-núcleo são escassos. A baixas energias, as reações envolvendo um projétil composto e um núcleo apresenta forte absorção<sup>31</sup>). Devido a esta interação forte entre os dois íons, a seção de choque total de reação é governado pela equação<sup>31</sup>)

$$\sigma_R(E) = \pi R^2 \left(1 - \frac{V_{BC}}{E_{c.m.}}\right) , \quad (I.4)$$

onde  $V_{BC}$  representa a barreira coulombiana do sistema. O raio R mede a distância razante entre os dois íons e é aproximadamente 10-20% maior que a soma dos raios dos núcleos<sup>32</sup>)

Concluiu-se que a seção de choque de reação experimental era bem reproduzida com

$$R(fm) \approx 0,5 + 1,36 (A^{1/3} + B^{1/3}) , \quad (I.5)$$

onde A e B representam as massas do núcleo incidente e do núcleo alvo, respectivamente.

O sucesso alcançado com a parametrização utilizada, encorajou a acreditar que  $\sigma_R(E)$  cresceria até atingir o limite geométrico ( $\pi R^2$ ) e este limite seria mantido a energias intermediárias e altas.

É bem conhecido que os dados do espalhamento pode ser bem descrito pelo modelo de difração<sup>33)</sup>. Nesta descrição, os mínimos da distribuição angular é obtido dos zeros de  $J^2(kR\theta)$ . Os dados do sistema  $\alpha + {}^{40}\text{Ca}$  analisados com este modelo, a  $\frac{1}{A} \frac{E_{c.m.}}{\text{Mev nucleon}}$ <sup>34)</sup>, isto é, energia do centro de massa dividido pelo número de nucleons do projétil e  $306,7 \frac{\text{Mev}}{\text{nucleon}}$ <sup>35)</sup>, foram bem reproduzidos. Entretanto, o raio  $R$  para ajustar os dados varia de 6,40 fermis ( $\frac{E_{c.m.}}{A} = 32,2 \frac{\text{Mev}}{\text{nucleon}}$ ) para 4,90 fermis ( $\frac{E_{c.m.}}{A} = 306,7 \frac{\text{Mev}}{\text{nucleon}}$ ).

Esta análise sugere que o raio de absorção  $R$  varia com a energia incidente. Na hipótese do limite geométrico, considera-se o núcleo caracterizado por um raio de interação  $R$ , cuja área,  $\pi R^2$ , representa o limite atingido pelo núcleo que apresenta forte absorção. Despreza-se, portanto, a estrutura nuclearica do núcleo. O fato do princípio de Pauli tornar-se mais infetivo com o crescimento da energia indica que o núcleo deve se comportar, principalmente, como um composto de nucleons independentes que como um todo construído coerentemente. Portanto, a questão que surge é se a altas energias  $\sigma_R(E)$  é governado pelo espalhamento nucleon-núcleon livre. Jaros et al.<sup>36)</sup> fizeram medidas de  $\sigma_R(E)$  para  $p$ ,  $d$ ,  $t$ ,  $\alpha$  e  ${}^{12}\text{C}$  incidindo em alvo de  ${}^{12}\text{C}$ , a várias energias. Os dados experimentais de  $\sigma_R$  apresentaram valores bem abaixo do limite geométrico. Isto significa que está ocorrendo transparência entre os dois núcleos, com o crescimento da energia e que portanto, ao invés dos núcleos tornarem objetos negros eles vão se transformando em objetos transparentes. Se os núcleos tornam-se transparentes significa que  $\sigma_R(E)$  deve decrescer com o aumento da energia e além disso, se a dinâmica da interação núcleo-núcleo pode ser governado pela interação nucleon-núcleon e a correção do princípio de Pauli, principalmente, justifica-se um cálculo microscópico de  $\sigma_R(E)$ .

Um modelo simples, baseado na teoria de Glauber e na

qual  $\sigma_R(E)$  é determinado pela soma incoerente de colisões nú  
cleon-núcleon, foi usado por Karol<sup>1)</sup> e por De Vries et al.<sup>2), 5) e 10)</sup>.  
Há um surpreendente bom acordo com os dados experimentais. Entre  
tanto, várias correções não foram incluídas no cálculo, como  
Princípio de Pauli, o movimento Fermiônico, a interação coulom  
biana e nuclear, além do uso da aproximação de Glauber que deve  
ser válida no limite de altas energias. Os efeitos mencionados  
devem ser incluídos para se poder obter um valor mais realísti  
co de  $\sigma_R(E)$  calculado microscópicamente.

## II - A INTERAÇÃO MÉDIA ENTRE ÍONS PESADOS

### III.1 - Aspectos Fenomenológicos

A interação entre dois núcleos (mesmo se um deles for um simples núcleon) é um problema de muitos corpos, complicado. Com o objetivo de descrever o espalhamento elástico, o modelo óptico substitui este problema por um problema, mais simples, da interação entre dois corpos sem estrutura, interagindo por um potencial  $U$ . Exceto quanto a possível dependência dos spins dos núcleos, este modelo para o potencial é usualmente assumido depender apenas da distância  $r$  entre os centros de massa dos dois núcleos,  $U = U(r)$ .

A função de onda que descreve o espalhamento elástico,  $\psi_{ik}$ , obedece a equação de Schrödinger que define o potencial óptico

$$[E - T - (V + iW)] \psi_{ik} = 0, \quad (\text{III.1})$$

onde  $T$  é o operador de energia cinética do núcleo incidente,  $V$  e  $W$  são os potenciais real e imaginário, respectivamente, do modelo.

O potencial óptico é definido como sendo aquele que resulta numa função de onda  $\psi_{ik}$ , cuja matriz de espalhamento média descreve o canal elástico.

A definição do potencial óptico em termos desta matriz de espalhamento não o determina univocamente, mas apenas o comportamento assintótico da solução  $\psi_{ik}$ . Desse modo, são possíveis várias escolhas para o potencial óptico, fornecendo a mesma amplitude. A forma usualmente empregada no estudo fenomenológico do espalhamento núcleo-núcleo é dado por:

$$U(r) = - V_N f(r, R, a) + V_C(r) - iW f(r', R', a') \quad (\text{III.2})$$

onde  $f$  é o fator da forma. É de uso comum a forma de Woods-Saxon, isto é,

$$f(r, R, a) = \frac{1}{1 + e^{(\frac{r-R}{a})}} . \quad (\text{II.3})$$

O modelo usualmente utilizado para a descrição da interação coulombiana, considera que cada núcleo pode ser descrito por uma esfera uniformemente carregada resultando,

$$V_C(r) = \begin{cases} \frac{Z_A Z_B e^2}{2R_C} \left[ 3 - \left( \frac{r}{R_C} \right)^2 \right], & r \leq R_C \\ \frac{Z_A Z_B e^2}{r}, & r \geq R_C, \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

onde  $Z_A e$  e  $Z_B e$  são, respectivamente, as cargas do projétil e do alvo, e  $R_C = r_C (A^{1/3} + B^{1/3})$ .

Para a descrição de processos em que haja polarização é preciso acrescentar à expressão de  $U(r)$ , dada pela equação II.2, o termo referente a interação de spin-órbita.

A geometria do potencial é definida pelos raios  $R$ 's e difusividades  $a$ 's, enquanto os parâmetros  $V_N$ ,  $W$  fornecem as profundidades em cada termo do potencial. Estes parâmetros são ajustados de modo a reproduzir a seção de choque medida, sendo um critério usual considerar os parâmetros geométricos independentes da energia do projétil e atribuir toda a dependência com a energia aos parâmetros de profundidade  $V_N$  e  $W$ . Além disso, os parâmetros devem depender do projétil e do alvo em questão. É admitido para os raios a forma:

$$R_x = r_x (A^{1/3} + B^{1/3}) \quad (\text{II.5})$$

Os parâmetros constantes introduzidos devem ser determinados pelos dados experimentais.

O estudo a ser feito envolve energias onde não existem dados experimentais. Assim, devemos usar modelos para o potencial real nuclear e imaginário sem parâmetros livres. O potencial  $W$  será determinado microscopicamente através da teoria de espalhamento múltiplo (terceira seção deste Capítulo). Portanto, resta apenas usar um modelo para o potencial real, sem ajustes de parâmetros fenomenológicos.

O modelo convolutivo<sup>37)</sup> ("double folding") é adequado para este propósito, já que os ingredientes essenciais para a determinação de  $V_N$  são:

- 1) as densidades de próton e nêutron dos núcleos em estudo
- 2) a interação núcleon-núcleon efetiva num meio composto por outros núcleons. Este potencial apresenta a seguinte expressão:

$$V_N(r) = \iint d\tau r_1 d\tau r_2 \rho_A(\tau r_1) v(|\tau r + \tau r_1 - \tau r_2|) \rho_B(\tau r_2), \quad (\text{II.6})$$

onde  $\rho_A$  e  $\rho_B$  são as densidades totais (próton+nêutron) dos núcleos A e B, respectivamente e  $v(|\tau r + \tau r_1 - \tau r_2|)$  a referida interação efetiva. Nas figuras II.1, II.2 e II.3 ilustramos o comportamento do potencial total real ( $V_{\text{total}}(r) = V_N(r) + V_C(r)$ ) com  $r$ , utilizando os modelos contido nas expressões das equações (II.4) e (II.6) com  $r_c = 1,3 \text{ fm}$  e

$$v(R) = 6315 \frac{e^{-4R}}{4R} - 1961 \frac{e^{-2,5R}}{2,5R} - 81 \delta((R)^{37}).$$

As densidades  $\rho_A$  e  $\rho_B$  foram determinadas assumindo que a densidade de nêutron e próton eram iguais, isto é,  $\rho_n = \rho_p$  e portanto,  $\rho_i = 2 \rho_p$ , com  $i = A$  ou  $B$ , já que os dados foram obtidos do espalhamento com elétrons<sup>61)</sup>.

Nota-se, na parte mais interna do potencial, que a profundidade do potencial nuclear convolutivo é bem maior que as profundidades dos potenciais usados para análise dos dados

experimentais. Por exemplo, para a análise dos dados do espalhamento elástico do sistema  $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ , a  $E_{\text{c.m.}} = 508$  Mevs utilizou-se uma forma de Wood-Saxon com profundidade de 80 Mev<sup>38)</sup>. Contudo, o espalhamento elástico é insensível a região mais interna do potencial<sup>39)</sup>

Das figuras II.1, II.2 e II.3 podemos evidenciar uma das características de reações envolvendo íons pesados: a forte barreira coulombiana ( $V_{BC}$ ). Na tabela II.1 apresentamos os valores da barreira coulombiana para diversos sistemas.

Tabela II.1 - Valores de Barreira Coulombiana e dos Correspondentes raios para vários Sistemas

Sistema	Barreira Coulombiana $V_{BC}$ (Mev)	Raio Coulombiano $R_C$ (fermis)
$^{12}_6\text{C} + ^{12}_6\text{C}$	6	8,0
$^{12}_6\text{C} + ^{40}_{20}\text{Ca}$	18	8,7
$^{12}_6\text{C} + ^{90}_{40}\text{Zr}$	33	9,5
$^{12}_6\text{C} + ^{208}_{82}\text{Pb}$	65	10,2
$^{40}_{20}\text{Ca} + ^{40}_{20}\text{Ca}$	55	9,9
$^{40}_{20}\text{Ca} + ^{208}_{82}\text{Pb}$	181	12,0
$^{90}_{40}\text{Zr} + ^{90}_{40}\text{Zr}$	186	11,8
$^{90}_{40}\text{Zr} + ^{208}_{82}\text{Pb}$	338	13,2
$^{208}_{82}\text{Pb} + ^{208}_{82}\text{Pb}$	620	14,7

Vê-se que sistemas muito pesados exigem uma energia muito alta para superar a barreira coulombiana. No sistema  $^{208}_{82}\text{Pb} + ^{208}_{82}\text{Pb}$ , por exemplo, o núcleo projétil deve ser acelerado a uma energia superior a 1,24 Gev, no sistema de laboratório.

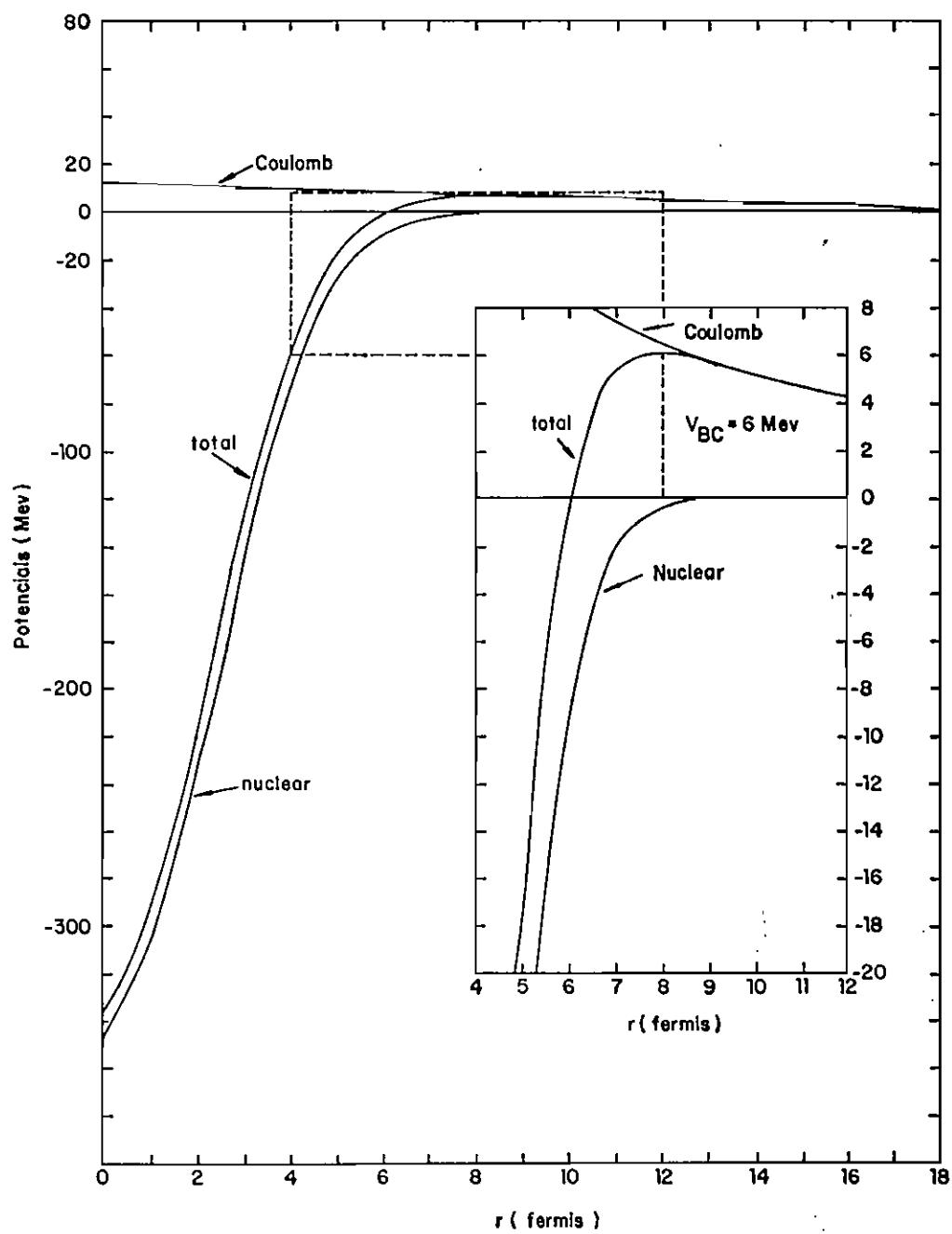


Figura II.1 - Potencial Coulombiano ( $V_C$ ), nuclear ( $V_N$ ) e total ( $V_{\text{total}} = V_N + V_C$ ) em função de  $r$ . Sistema  $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ .

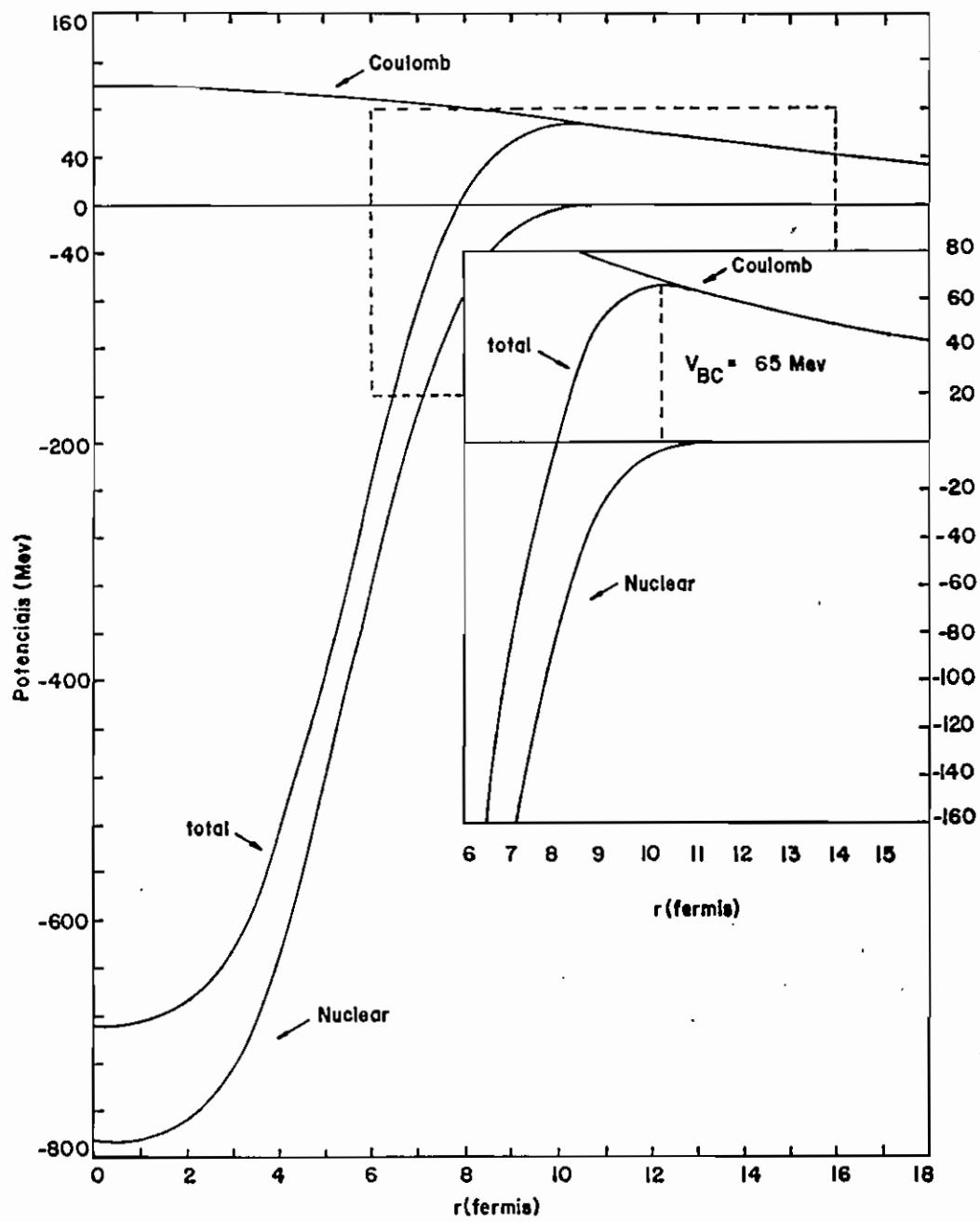


Figura II.2 - Potencial Coulombiano ( $V_C$ ), nuclear ( $V_N$ ) e total ( $V_{\text{total}} = V_N + V_C$ ) em função de  $r$ . Sistema  $^{12}\text{C} + ^{208}\text{Pb}$ .

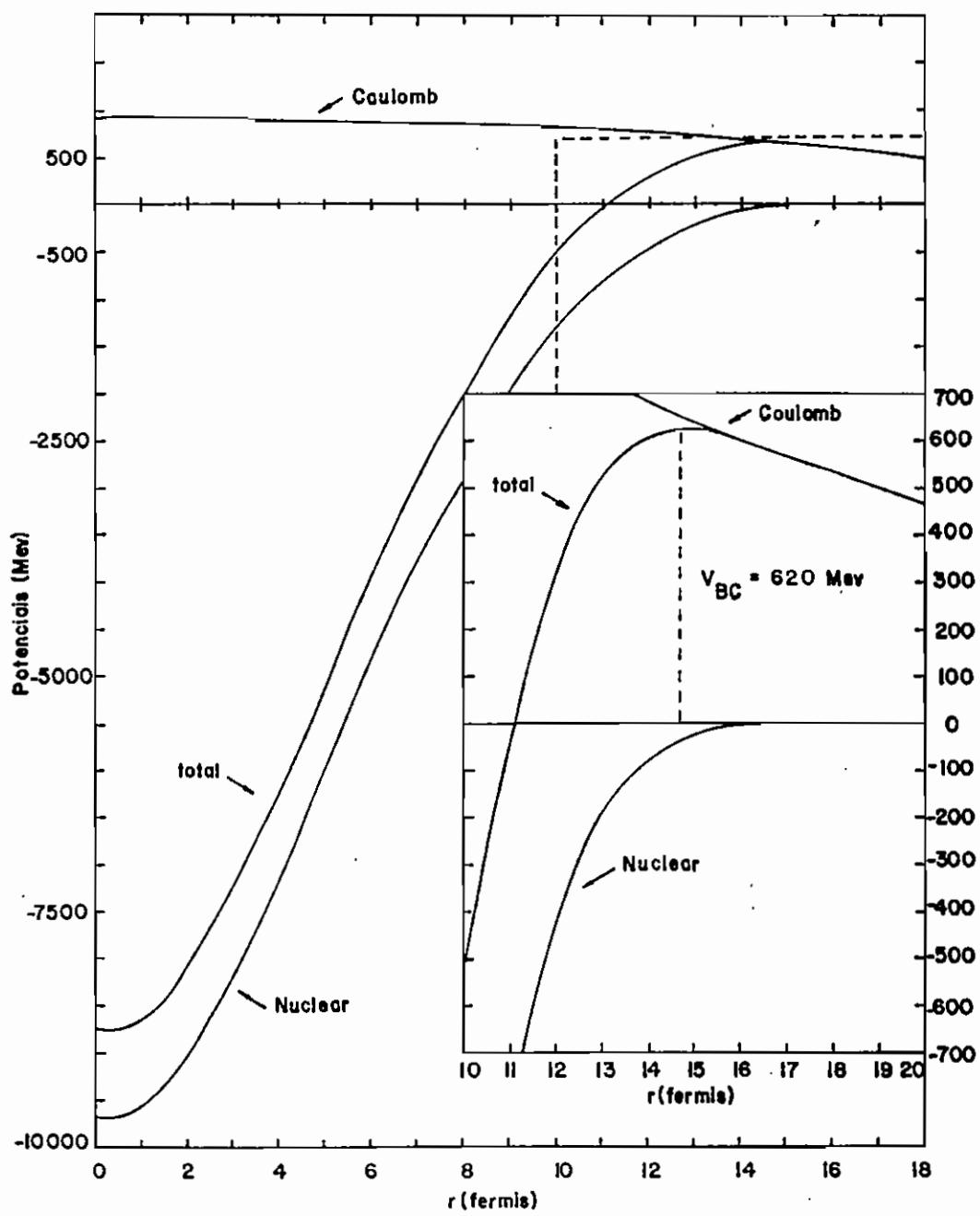


Figura II.3 - Potencial Coulombiano ( $V_C$ ), nuclear ( $V_N$ ) e total ( $V_{total} = V_N + V_C$ ) em função de  $r$ . Sistema  $^{208}\text{Pb} + ^{208}\text{Pb}$ .

## II.2 - Fundamento Microscópico (Feshbach)

### . Potencial Efetivo

Na seção anterior, apresentamos o potencial óptico fenomenológico para a descrição do espalhamento elástico. Entende-se, por fenomenológico, o potencial cuja forma geométrica está definida a priori, onde os parâmetros livres do modelo são determinados a partir dos dados experimentais.

A abordagem microscópica parte da interação núcleon-núcleon para definir a interação núcleo-núcleo.

A descrição quântica do espalhamento elástico é obtida da resolução da equação de Schrödinger

$$H \Psi = E \Psi , \quad (II.7)$$

onde a Hamiltoniana total do sistema é dada por

$$H = H_A + H_B + V, \quad (II.8)$$

sendo  $H_A$  e  $H_B$  a Hamiltoniana que descrevem, respectivamente, os graus de liberdade interno dos núcleos A e B e

$$V = \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^B v(|r_i|, |r_j|), \quad (II.9)$$

onde  $v(|r_i|, |r_j|)$  é a interação entre o núcleon i de A com o núcleon j de B. As somatórias expressas na equação (II.9) significa que estamos considerando a interação entre todos os núcleons do núcleo A com todos os núcleons do núcleo B. A função de onda  $\Psi$ , que descreve o sistema de A + B núcleons, possue informação sobre todos os processos possíveis a energias E. Já que, estamos interessados na descrição do espalhamento elástico é conveniente separar a parte de  $\Psi$  referente a este canal, isto é,

$$\Psi = \Psi_P + \Psi_Q , \quad (\text{II.10})$$

onde  $\Psi_P$  e  $\Psi_Q$  correspondem a parte de  $\Psi$  referente ao canal elástico, e não elástico respectivamente. O desacoplamento de todos os canais não-elásticos do elástico pode ser feito, formalmente, através dos operadores de projeção  $P$  e  $Q$ , do formalismo de Feshbach<sup>40), 41)</sup>. Neste formalismo, os operadores  $P$  e  $Q$ , atuando na função de onda  $\Psi$ , servem para projetar no estado fundamental do sistema (canal elástico) e nos outros canais ortogonais a estes canais (canais não-elásticos), respectivamente. Assim, temos que

$$P\Psi = \Psi_P , \quad (\text{II.11})$$

$$Q\Psi = \Psi_Q . \quad (\text{II.12})$$

Os operadores  $P$  e  $Q$  são definidos da seguinte forma

$$P = |0\rangle\langle 0| \quad (\text{II.13})$$

$$Q = \sum_{n>0} |n\rangle\langle n| \quad (\text{II.14})$$

onde  $|0\rangle \equiv |0_A\rangle |0_B\rangle$  e  $|n\rangle$  representam as funções de onda, do estado fundamental e do n<sup>ézimo</sup> estado excitado do sistema, respectivamente. Eles apresentam a seguinte relação.

$$P + Q = \mathbb{1} \quad (\text{II.15})$$

Com as definições de  $\Psi_P$  e  $\Psi_Q$  dado pela equação (II.11) e (II.12), juntamente com a equação (II.15), podemos reescrever a equação de Schrödinger (II.7) no seguinte sistema acoplado de equações

$$[E - H_{PP}] \Psi_P = H_{PQ} \Psi_Q , \quad (\text{II.16})$$

$$[E - H_{QQ}] \Psi_Q = H_{QP} \Psi_P , \quad (\text{II.17})$$

onde utilizamos as seguintes notações abreviadas

$$\begin{aligned} H_{PP} &= PHP, & H_{PQ} &= \sim PHQ, \\ &&& & (II.18) \\ H_{QQ} &= QHQ, & H_{QP} &= QHP. \end{aligned}$$

A solução formal de  $\Psi_Q$ , obtida da equação (II.17), é dada por:

$$Q = \frac{1}{E^{(+)} - H_{QQ}} H_{QP} \Psi_P , \quad (II.19)$$

onde  $E^{(+)} = E + i\varepsilon$  assegura que somente as ondas esféricas emergentes estão presentes na região assintótica. A função de onda  $\Psi_P$  obedece a seguinte equação:

$$\bar{H} \Psi_P = E \Psi_P . \quad (II.20)$$

A Hamiltoniana  $\bar{H}$  não é mais a Hamiltoniana total do sistema (equação II.8)) e sim a Hamiltoniana efetiva

$$\bar{H} = H_{PP} + H_{PQ} \frac{1}{E^{(+)} - H_{QQ}} H_{QP} . \quad (II.21)$$

Para escrevermos o operador  $Q[E^{(+)} - H_{QQ}]^{-1}Q$  na sua forma espectral, devemos determinar as funções  $x_i^{(+)}$ 's, que são obtidas ao se resolver a seguinte equação:

$$(H_{QQ} - E_i) x_i^{(+)} = 0. \quad (II.22)$$

O significado físico das soluções da equação (II.22) fica transparente lembrando que os estados do núcleo composto apresentam uma vida média longa quando comparados aos tempos tí

picos de colisões elásticas diretas. Quando a energia E está a baixo do limiar do primeiro canal inelástico, todos os estados não-elásticos serão estados estacionários descritos por funções de onda que satisfazem a equação II.22. Quando a energia E está acima do limiar do primeiro estado inelástico haverá ondas esféricas emergentes nos canais inelásticos e estes serão descritos pelas soluções da equação II.22, tendo na região assintótica a penas ondas emergentes referentes aos processos do mecanismo direto.

Uma vez determinado as funções  $\chi^{(+)}$ 's podemos escrever o operador  $Q[E^{(+)} - H_{QQ}]^{-1}Q$  na sua forma espectral. Assim, a Hamiltoniana efetiva  $\bar{H}$ , dada pela equação II.21, se escreve

$$\begin{aligned}\bar{H} = H_{PP} + \sum_i H_{PQ} \chi_i \frac{1}{E - E_i} \chi_i^* H_{QP} + \int_{\epsilon_1}^{\infty} dE_i H_{PQ} \chi_i^{(+)} \\ \frac{1}{E^{(+)} - E_i} \chi_i^{(+)} H_{QP} .\end{aligned}\quad (\text{II.23})$$

A função de onda  $\psi_P$  deve apresentar o seguinte comportamento assintótico

$$\psi_P \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \left[ A(|0\rangle \psi_{ik}^{(+)}(|r|)) \right], \quad (\text{II.24})$$

onde  $\psi_{ik}^{(+)}(|r|)$  descreve o movimento relativo entre os centros de massa dos dois núcleos e  $i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  descreve o movimento do centro de massa do sistema e  $A$  é o operador de antissimetriação. A determinação de  $\psi_{ik}^{(+)}$  especifica completamente a função  $\psi_{ik}^{(+)}$ . A função de onda do movimento relativo,  $\psi_{ik}^{(+)}$ , obedece a seguinte equação:

$$\begin{aligned}-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_{ik}^2 \psi_{ik}^{(+)}(|r|) + \int U_{\text{efetivo}}(|r|, |r'|) \psi_{ik}^{(+)}(|r'|) d|r'| \\ = E \psi_{ik}^{(+)}(|r|),\end{aligned}\quad (\text{II.25})$$

onde o potencial efetivo  $U_{\text{efetivo}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  é um operador não-local (já que depende não só de  $\mathbf{r}$ , mas também de  $\mathbf{r}'$ ) dependente da energia  $E$  e  $\mu$  é a massa reduzida do sistema.

O potencial efetivo é composto por vários termos

$$U_{\text{efetivo}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = V_N(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - EK(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + W(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (\text{II.26})$$

O termo  $V_N(\mathbf{r})$  é o conhecido como potencial convolutivo (double folding)

$$V_N(\mathbf{r}) = \iint \rho_A(\mathbf{r}_1) v(\mathbf{r}_{12}) \rho_B(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2, \quad (\text{II.27})$$

onde  $\rho_A$  e  $\rho_B$  correspondem as densidades nucleônica nos núcleos A e B, respectivamente.

O termo  $H$  e  $K$  do potencial efetivo estão ligados com a antissimetria das funções de onda que descrevem o movimento interno dos núcleons dos núcleons A e B. Se desprezarmos a antissimetria das funções de onda estes dois termos se tornam nulos.<sup>42)</sup>

O último termo do potencial efetivo,  $W$ , apresenta a seguinte forma

$$W(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{i=1}^N w_i(\mathbf{r}) \frac{1}{E - E_i} w_i^*(\mathbf{r}') + \int_{\epsilon}^{\infty} \rho_C(E', \mathbf{k}) w_{E', \mathbf{k}}(\mathbf{r})$$

$$\frac{1}{E - E'} \frac{w^*}{E' \mathbf{k}}(E') dE' - i \pi \rho_C(E', \mathbf{k}) w_{E', \mathbf{k}}(\mathbf{r}) w_{E', \mathbf{k}}^*(\mathbf{r}'), \quad (\text{II.28})$$

cujos fatores de forma  $w_i$ 's são definidos por

$$w_i(\mathbf{r}) = \langle 0 | v | x_i \rangle . \quad (\text{II.29})$$

As funções  $\rho_C(E;k)$  denotam a densidade de estados da parte contínua do espectro de  $H_{QQ}$ .

Note que o potencial  $W(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  é complexo. Fisicamente, o termo complexo surge devido aos processos em que o núcleo incidente deixa o canal de entrada e emerge em um dos canais de saída contidos no espaço definido pelo operador  $Q$ . Ele representa, portanto, uma absorção de parte do fluxo incidente. Existe duas fontes que originam o termo complexo de  $W$ . A primeira fonte advém do mecanismo de núcleo composto. O termo complexo relativo a este mecanismo está contido na energia  $E_i$  que é complexa, isto é,  $E_i = \epsilon_i - \frac{i\Gamma_i}{2}$ , onde  $\Gamma_i$  é a largura total de formação do núcleo composto.

O último termo da equação (II.28) resulta de canais inelásticos provenientes de reações que ocorrem em tempos menores, quando comparados com o núcleo composto. Essas reações são conhecidas comumente como reações diretas.

O potencial efetivo, assim definido, apresenta uma rápida variação com a energia (observe o primeiro termo da equação (II.28)). Esta rápida variação com a energia é o resultado da condição que define a interação efetiva, isto é, reproduzir a seção de choque elástica em todos os detalhes.

Este operador efetivo (potencial) não é igual ao operador potencial do modelo óptico, já que este último está definido como aquele que quando inserido na equação de Schrödinger do movimento relativo entre os dois núcleos resulte numa amplitude elástica óptica que é igual a amplitude elástica média do sistema.

## O Potencial Óptico

O caráter de muitos corpos da colisão entre dois núcleos aparece claramente nas ressonâncias estreitas de formação do núcleo composto apresentadas nas seções de choque. Isto significa que a amplitude de espalhamento elástico são funções que apresentam uma variação rápida com a energia. Já que, o operador interação efetiva para o canal elástico foi construído de tal forma que a equação de Schrödinger reproduza em todos os detalhes a amplitude elástica do problema, a interação efetiva deve depender da energia e das funções de onda dos estados do núcleo composto que é também uma função que apresenta uma variação rápida com a energia.

O potencial óptico, por definição, deve reproduzir a amplitude de espalhamento elástico média, na energia, de tal forma que a seção de choque elástica e a polarização calculada com este potencial concorde com a seção de choque elástica média, na energia e a polarização medida experimentalmente:

$$T_{\text{óptica}} = \langle T_{\text{elástica}} \rangle_E \quad (\text{II.30})$$

O potencial óptico será obtido da equação (II.30) seguindo as idéias gerais contida no artigo do Feshbach.<sup>40)</sup><sup>41)</sup> Primeiramente, a amplitude elástica de espalhamento é desdobrada em duas partes: uma que reproduz a variação rápida com a energia devido as ressonâncias do núcleo composto, e a outra que apresenta dependência suave com a energia conforme está explicitamente escrito na equação (II.31), a amplitude média será identificada com a amplitude óptica. Desta forma sai uma relação explícita entre  $T_{\text{óptica}}$  e  $V_{\text{óptico}}$ .

As ressonâncias de estrutura fina contidas em  $T_{\text{elástica}}$  pode ser vista explicitamente ao se desdobrar o operador de interação efetiva. O termo referente a estas ressonâncias é parte integrante de  $W(r, r')$  e apresenta uma soma de  $N$  termos resultantes de  $N$  ressonâncias de núcleo composto contido na

região de energia de largura  $I$ , centrada na energia  $E$ .

Esta interação efetiva pode ser escrita na seguinte forma

$$U_{\text{efetivo}} = U^{(N)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \sum_{j=1}^N \frac{w_j(\mathbf{r}) w_j^*(\mathbf{r}')}{E_j^{(+)} - E_j} \quad (\text{II.31})$$

O termo  $U^{(N)}$ , representa a parte suave com a energia e portanto, não ressonante, enquanto o segundo é responsável pelo comportamento ressonante da seção de choque.

A idéia consiste em escrever a amplitude de espalhamento elástico total,  $T_{\text{elástica}}$ , na forma do espalhamento por dois potenciais, como já sugere a forma escrita para  $U_{\text{efetivo}}$  na equação (II.31), e fazer uma média na energia usando uma de terminada função peso (por exemplo, uma Lorentziana).

Este procedimento transforma o potencial efetivo dado pela equação (II.31) no potencial óptico. Este apresenta a seguinte propriedade:

$$U_{\text{óptico}} \xrightarrow{I \rightarrow 0} U_{\text{efetivo}} \quad (\text{II.32})$$

A propriedade expressa pela equação (II.32) significa que a informação do espalhamento elástico composto (mecanismo do núcleo composto) contido na amplitude de espalhamento a pós ter sido feito a média é representado corretamente pelo potencial óptico teórico e que todas as informações contidas na amplitude elástica são recuperadas da amplitude óptica quando a largura  $I$ , que deve aparecer em  $U_{\text{óptico}}$ , for a zero.

O potencial óptico assim definido apresenta uma parte real  $U$  dada por:

$$U \equiv \text{Re } U_{\text{óptico}} = V_N(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - E K(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

$$+ \sum_{i=1}^N w_i(\mathbf{r}) \frac{E - E_i}{(E - E_i)^2 + \frac{1}{4} (\Gamma_i + I)^2} w_i^*(\mathbf{r}') +$$

$$+ \sum_{j=1}^N w_j(\mathbf{r}) \frac{1}{E - E_j} w_j^*(\mathbf{r}') + \int \rho_C(\varepsilon) w_\varepsilon(\mathbf{r}) \frac{1}{E - \varepsilon}$$

$$w_\varepsilon^*(\mathbf{r}') d\varepsilon, \quad (\text{II.33})$$

e uma parte imaginária  $W$  dado por

$$W \equiv \text{Im } U_{\text{óptico}} = - \left[ \sum_{i=1}^N w_i(\mathbf{r}) \frac{\frac{1}{2} I}{(E - E_i)^2 + \frac{1}{4} I^2} w_i^*(\mathbf{r}') + \rho_C(\mathbf{r}) w_\varepsilon(\mathbf{r}) w_\varepsilon^*(\mathbf{r}') \right]. \quad (\text{II.34})$$

A parte imaginária do potencial óptico é composto por uma soma de potenciais não locais, separáveis, onde cada termo corresponde a perda de fluxo do canal de entrada.

O primeiro termo da equação (II.34) é devido aos estados do núcleo composto no intervalo de energia  $I$  e o outro termo é proveniente de canais inelásticos de mecanismo direto.

Um cálculo microscópico do potencial imaginário  $W$  que inclua efeitos de mecanismos do núcleo composto e canais do mecanismo direto é extremamente difícil. A energias mais altas, entretanto, existe um procedimento teórico adequado para deduzir  $W$ , baseado na teoria de espalhamento múltiplo. Neste caso, as colisões nucleon-núcleon são dominantes e é possível encontrar uma relação explícita entre  $W$  e  $\sigma_{NN}^T$  (seção de choque nucleon-núcleon). Assim, pode-se encontrar a dependência de  $W$  com  $E$  e também, consequentemente, o fator de transparência  $T$ .

### III.3 - Construção do Potencial Óptico Através da Teoria de Espalhamento Múltiplo

#### . Sistema Núcleon-Núcleo

A maioria dos cálculos de potencial óptico microscópico para espalhamento de hadrons por um núcleo não-relativístico, são baseados na teoria de espalhamento múltiplo de Watson<sup>4,3}</sup>. Esta teoria de espalhamento objetiva escrever o operador de espalhamento total  $T$ , do sistema de muitos corpos, em termos de operadores de espalhamento de dois corpos. A série dos termos desta teoria envolve espalhamento do núcleon incidente por um único núcleon, dois núcleons, ..., etc. do núcleo alvo. Cada espalhamento individual é descrito por uma amplitude de espalhamento  $\zeta$  que difere da amplitude de espalhamento livre  $t$ , já que o espalhamento ocorre num meio embebido por outros núcleons.

Iremos usar a forma rearranjada desta série de espalhamento múltiplo desenvolvida por Kerman, Mc-Manus e Thaler<sup>1,2</sup>. (KMT), onde tomaremos apenas o primeiro termo da série (o termo de espalhamento único). Além disso, se a energia do núcleon projetil for elevada (acima de 100 Mev, por exemplo) costuma-se considerar os dois núcleons dentro de um núcleo como se estivessem no espaço livre, já que acredita-se que a presença de outros núcleons tenha pouco efeito. Assim, costuma-se substituir a amplitude  $\zeta$  pela amplitude de espalhamento livre. Esta aproximação é conhecida como aproximação impulso. Veremos como obtê-la através da equação de Lippmann-Schwinger.

A Hamiltoniana do sistema núcleon-núcleo pode ser desdobrada em duas partes

$$H = H_O + V, \quad (\text{II.35})$$

onde  $H_O = H_A + K_O$ , sendo  $H_A$  a Hamiltoniana do núcleo alvo e  $K_O$  o operador de energia cinética do núcleon incidente e

$$V = \sum_{i=1}^A V_i, \quad (\text{II.36})$$

sendo a soma de interações de dois corpos entre o núcleon incidente e cada um dos núcleons do alvo.

A equação de Lippmann-Schwinger para o sistema é a seguinte

$$T = V + V G_O T, \quad (\text{II.37})$$

onde

$$G_O = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{E + i\epsilon - H_O} \quad (\text{II.38})$$

é o propagador livre do sistema.

O problema de muitos corpos, expresso pela equação (II.37), pode ser reduzido formalmente a um problema de dois corpos ao inserir, nesta equação os operadores de projeção P e Q. De fato, podemos desdobrar a função de Green nos componentes  $G_O = PG_O P + QG_O Q$ , já que  $G_O$  não acopla P com Q. Assim, obtemos o seguinte par de equações acoplados

$$T = U_{op} + U_{op} P G_O PT, \quad (\text{II.39})$$

$$U_{op} = V + V Q G_O Q U_{op}, \quad (\text{II.40})$$

onde  $U_{op}$  representa o operador do potencial óptico.

Toda complexidade do problema de muitos corpos ainda aparece na equação (II.40). Separando  $U_{op}$  em componentes na qual o projétil interage com um particular núcleon do alvo, temos que

$$U_{op} = \sum_{i=1}^A U_i , \quad (II.41)$$

$$U_i = v_i + v_i Q G_o Q U_{op} . \quad (II.42)$$

A expansão em série perturbativa da equação (II.42) envolve uma série infinita em  $v_i$  e pode ser isolada ao se definir o operador de espalhamento único de Watson

$$\zeta_i = v_i + v_i Q G_o Q \zeta_i , \quad (II.43)$$

ou

$$\zeta_i = v_i + \zeta_i Q G_o Q v_i . \quad (II.44)$$

Este operador descreve o espalhamento do nêutron projétil por um dos nêucleons ligado do alvo. A função de Green  $G_o$ , das equações (II.43) e (II.44) envolve a Hamiltoniana total do alvo. Assim,  $\zeta_i$  é um operador de muitos corpos. Multiplicando o lado esquerdo da equação (II.42) por  $(1 + \zeta_i Q G_o Q)$  eliminamos a interação  $v_i$  em favor de  $\zeta_i$  usando a equação (II.44). Feito isso obtemos

$$U_i = \zeta_i + \zeta_i Q G_o Q \sum_{j \neq i}^A U_j . \quad (II.45)$$

Iterando a equação (II.45) e somando sobre todos os  $i$ 's obtemos a série de múltiplo espalhamento de Watson

$$U_{op} = \sum_{i=1}^A \zeta_i + \sum_{i \neq j}^A \zeta_i Q G_o Q \zeta_j + \sum_{i \neq j \neq k}^A \dots . \quad (II.46)$$

O primeiro, segundo,..., termo desta série corresponde ao termo de espalhamento único, duplo,... Vamos tomar apenas o primeiro termo desta série. Assim, temos que

$$T = \sum_{i=1}^A \zeta_i + \zeta_i P G_o P T = \sum_{i=1}^A T_i , \quad (II.47)$$

onde

$$T_i = \zeta_i + \zeta_i P G_o P \sum_{j=1}^A T_j . \quad (II.48)$$

Comparando a equação (II.47) com a equação (II.39) obtemos que

$$U_{op} = \sum_{i=1}^A \zeta_i . \quad (II.49)$$

Em muitas circunstâncias a presença do operador  $Q$ , nas equações (II.43) e (II.44) resulta numa dificuldade para a determinação do operador  $\zeta_i$ . Assim, a técnica empregada por KMT contorna este problema, ao definir o operador  $\hat{\zeta}_i$  através da seguinte equação

$$\hat{\zeta}_i = v_i + v_i G_o \hat{\zeta}_i . \quad (II.50)$$

A relação entre  $\hat{\zeta}_i$  e  $\zeta_i$  é a seguinte:

$$\hat{\zeta}_i = \zeta_i + \zeta_i P G_o P \hat{\zeta}_i . \quad (II.51)$$

Eliminando  $\zeta_i$  da equação (II.48), obtemos que

$$T_i = \hat{\zeta}_i + \hat{\zeta}_i P G_o P \sum_{j \neq i}^A T_j . \quad (II.52)$$

Comparando a equação (II.52) com (II.48) nota-se que a substituição de  $\hat{\zeta}_i$  por  $\zeta_i$  resolveu seletivamente parte da equação do espalhamento elástico, dado pela equação (II.48).

O potencial óptico é determinado ao se calcular o elemento de matriz, estado fundamental/estado fundamental, do operador  $U_{op}$

$$U_{óptico} = \langle 0; lk' | U_{op} | 0; lk \rangle = \langle 0; lk' | \sum_{i=1}^A \xi_i | 0; lk \rangle = \\ = A \langle 0; lk' | \xi | 0; lk \rangle , \quad (II.53)$$

usando funções de onda anti-simetrizada para o estado fundamental do alvo. Omitimos o índice  $i$  na equação (II.53), pois qualquer escolha pode ser feita para o núcleon do alvo. Já que, esta propriedade se mantém para o elemento de matriz do alvo para o operador  $\xi_i$ , podemos reescrever as equações (II.48) e (II.52) como segue

$$T = A \xi + A \xi P G_O P T, \quad (II.54)$$

$$T = A \xi + (A-1) \xi P G_O P T \quad (II.55)$$

Definindo o operador elástico auxiliar  $\hat{T}$  por

$$T = \frac{A}{A-1} \hat{T}, \quad (II.56)$$

a equação (II.55) reduz a forma usual da equação de Lippmann-Schwinger

$$\hat{T} = (A-1) \xi + (A-1) \xi P G_O P \hat{T}, \quad (II.57)$$

com

$$U_{op} = (A-1) \xi. \quad (II.58)$$

Note que até agora nenhuma aproximação foi feita, exceto quando truncamos a série do espalhamento múltiplo (equação (II.46) no primeiro termo. A equação (II.54) é conhecida como método de Watson, enquanto que a equação (II.56) e (II.57) como método KMT para cálculo do espalhamento elástico devido ao potencial óptico de espalhamento único.

No cálculo de KMT a função de Green  $G_o$  é substituída pela função de Green livre de dois corpos definida por

$$g_o = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{E - k_o^2 - k_i^2 + i\epsilon}, \quad (II.59)$$

onde  $k_o$  e  $k_i$  são, respectivamente, o operador de energia cinética do núcleon incidente e núcleon  $i$  do alvo. Note que  $g_o$  é um operador de dois corpos, enquanto que  $G_o$  é um operador de muitos corpos.  $G_o$  representa o operador de dois corpos num meio constituído pela matéria nuclear. O método KMT substitui  $\xi_i$  definido pela equação (II.50) pelo operador de espalhamento de dois corpos livre  $t_i$ , que obedece a seguinte equação:

$$t_i = v_i + v_i g_o t_i. \quad (II.60)$$

É possível obter a relação entre  $\xi_i$  e  $t_i$  ao isolar a interação  $v_i$  destes dois operadores. Eles obedecem a seguinte relação

$$\xi_i = t_i + t_i (G_o - g_o) \xi_i. \quad (II.61)$$

Nota-se, examinando a equação (II.61), que quando  $G_o \approx g_o$  temos que  $\xi_i \approx t_i$ . Esta aproximação é conhecida como a proximação impulso, isto é,

$$\xi_i \approx t_i. \quad (II.62)$$

A aproximação impulso deve ser válida para energias altas, pois nestas energias será válido a seguinte aproximação:

$$G_O = \frac{1}{E - H_A - K_O + i\epsilon} = \frac{1}{E - K_1 - V_{1C} - H_C - k_O + i\epsilon} \approx \frac{1}{E - k_1 - k_O + i\epsilon} = g_O \cdot \text{(II.63)}$$

Na equação (II.63),  $V_{1C}$  representa a interação entre um núcleon do alvo  $i$  e os núcleons restantes (do alvo) e  $H_C$  é a Hamiltoniana que descreve o movimento interno destes núcleons. Considerando esta aproximação na equação (II.58) temos que

$$U_{op} \approx (A-1) t. \quad \text{(II.64)}$$

O potencial óptico, dentro das aproximações feitas, apresenta a seguinte forma

$$U_{óptico} \equiv \langle 0; \mathbf{k}' | U_{op} | 0; \mathbf{k} \rangle = (A-1) \langle 0; \mathbf{k}' | t | 0; \mathbf{k} \rangle \quad \text{(II.65)}$$

Seria interessante escrever o elemento de matriz da equação (II.65) em termos da amplitude de espalhamento entre dois corpos. O elemento de matriz do operador  $t$  de espalhamento entre dois corpos livres pode ser escrito:

$$\langle \mathbf{k}'; \mathbf{k}_1 | t | \mathbf{k}; \mathbf{k}_1 \rangle = \langle \mathbf{k}' - \mathbf{k}_1 + \mathbf{q} | t | \mathbf{k} - \mathbf{k}_1 \rangle \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_1'). \quad \text{(II.66)}$$

A aproximação essencial no cálculo do elemento de matriz  $t$  entre estados nucleares (equação (II.65)) consiste em desprezar a dependência em  $\mathbf{k}_1$  da equação (II.66). Isto significa desprezar a energia cinética do núcleon alvo, no núcleo, antes da colisão. Feito isso podemos escrever

$$\langle 0; \mathbf{k}' | t | 0; \mathbf{k} \rangle = \langle \mathbf{k}' | t | \mathbf{k} \rangle \rho_A(q_f), \quad \text{(II.67)}$$

onde

$$\rho_A(q_1) = \int \rho_A(\mathbf{r}) e^{-iq_1 \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad (\text{II.68})$$

é o fator de forma nuclear e  $q_1 = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ .

Usando as equações (II.65), (II.67) e (II.68) obtemos

$$U_{\text{óptico}}(q_1) = - \left(1 - \frac{1}{A}\right) t(q_1) \rho_A(q_1), \quad (\text{II.69})$$

onde  $t(q_1) \equiv \langle \mathbf{k}' | t | \mathbf{k} \rangle$ .

Usando a transformada de Fourier na equação (II.69) obtemos a expressão para o potencial óptico no espaço das coordenadas

$$U_{\text{óptico}}(\mathbf{r}) = - \left(1 - \frac{1}{A}\right) \int dq_1 e^{iq_1 \cdot \mathbf{r}} t(q_1) \rho_A(q_1). \quad (\text{II.70})$$

Para núcleos pesados (com um número grande de nucleons) o fator de forma  $\rho_A(q_1)$  é uma função que varia rapidamente com o momento transferido. Usando este fato, podemos fazer a seguinte aproximação.

$$U_{\text{óptico}}(\mathbf{r}) \approx - \left(1 - \frac{1}{A}\right) t(q_1=0) \rho_A(\mathbf{r}) \quad (\text{II.71})$$

A equação (II.71) mostra a relação entre o potencial óptico e a densidade nucleônica do alvo  $\rho_A(\mathbf{r})$ .

Podemos obter a parte imaginária do potencial óptico da equação (II.71):

$$W(\mathbf{r}) = - \left(1 - \frac{1}{A}\right) \rho_A(\mathbf{r}) \text{Im } t(0), \quad (\text{II.72})$$

e que usando, o teorema óptico  $\sigma_{NN}^T(E) = - \frac{2m}{\hbar^2 k} \text{Im } t(0)$  (ou em termos da amplitude de espalhamento  $f$ , isto é,  $\sigma_{NN}^T(E) = \frac{4\pi}{k} \text{Im } f(\theta=0)$ )

onde,  $\sigma_{NN}^T(E)$  é a seção de choque total núcleon-núcleon tomado a média no spin e isospin, obtemos

$$W(r) = - \frac{\hbar^2 k_N^2}{2m} \left(1 - \frac{1}{A}\right) \sigma_{NN}^T(E) \rho_A(r), \quad (\text{II.73})$$

onde  $k_N$  é o momento de um núcleon. A relação entre a energia  $\epsilon$  de um núcleon e a energia de centro de massa  $E_{c.m.}$  do sistema núcleon + núcleo alvo é a seguinte:

$$\epsilon = \frac{\hbar^2 k_N^2}{2m} = \frac{E_{c.m.} - v_C + v_N}{\mu}, \quad (\text{II.74})$$

onde  $v_C$  e  $v_N$  representam o potencial coulombiano e nuclear, respectivamente, e  $\mu$  é a massa reduzida do sistema. A expressão para  $W(r)$  escrita na energia de centro de massa do sistema é a seguinte

$$W(r) = - \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m} \frac{(E_{c.m.} - v_C + |v_N|)^2}{\mu}} \sigma_{NN}^T(E) \rho_A(r), \quad (\text{II.75})$$

onde desprezamos o termo  $1/A$

### . Sistema Núcleo-Núcleo

A extensão da aproximação KMT para o sistema núcleo-núcleo é feita de forma direta<sup>44)</sup><sup>46</sup>). O potencial óptico no espaço dos momentos se escreve

$$U_{óptico}(q_f) = - \left(1 - \frac{1}{AB}\right) t(q_f) \rho_A(-q_f) \rho_B(q_f), \quad (\text{II.76})$$

onde  $A[\rho_A(-q_f)]$  e  $B[\rho_B(q_f)]$  são os números de massa do núcleo incidente (fator de forma nuclear do núcleo A) e do núcleo alvo

(fator de forma nuclear do núcleo B), respectivamente. O fator de forma para o núcleo B está definido analogamente ao núcleo A (equação (II.68)). Estamos usando a seguinte normalização

$$\int d|\mathbf{r}| \rho_A(|\mathbf{r}|) = A, \quad (\text{II.77})$$

$$\int d|\mathbf{r}| \rho_B(|\mathbf{r}|) = B. \quad (\text{II.78})$$

O potencial óptico no espaço das coordenadas pode ser obtido através da transformada de Fourier de  $U_{\text{óptico}}^{(q_1)}$ :

$$U_{\text{óptico}}(|\mathbf{r}|) = \int dq_1 e^{iq_1 \cdot |\mathbf{r}|} U_{\text{óptico}}(q_1), \quad (\text{II.79})$$

onde  $|\mathbf{r}|$  é a distância relativa entre os centros de massa do núcleo A e B. Assim, temos que:

$$U_{\text{óptico}}(|\mathbf{r}|) = -t(q \approx 0) \int d|\mathbf{r}'| \rho_A(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) \rho_B(|\mathbf{r}'|), \quad (\text{II.80})$$

onde desprezamos o termo  $1/AB$ .

A parte imaginária do potencial óptico é a seguinte

$$W(|\mathbf{r}|) = -\sqrt{\frac{\hbar^2}{2m}} \frac{(E_{\text{c.m.}} - V_C + |V_N|)}{\mu} \sigma_{NN}^T(E) \int d|\mathbf{r}'| \rho_A(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) \rho_B(|\mathbf{r}'|). \quad (\text{II.81})$$

A equação (II.81) representa a parte imaginária do potencial óptico para o sistema núcleo-núcleo na aproximação, impulso. Esta equação se reduz ao caso núcleon-núcleo, que é dada pela equação (II.75), ao tomarmos  $\rho_B(|\mathbf{r}'|) = \delta(|\mathbf{r}'|)$ .

A seção de choque média,  $\sigma_{NN}^T(E)$ , na colisão entre o núcleo A com  $Z_A$  prótons e  $N_A$  nêutrons, e o núcleo B, com  $Z_B$  prótons e  $N_B$  nêutrons apresenta a seguinte expressão

$$\sigma_{NN}^T(E) = \frac{Z_A Z_B}{AB} \sigma_{pp}^T(E) + \frac{N_A N_B}{AB} \sigma_{nn}^T(E) + \frac{(Z_A N_B + Z_B N_A)}{AB} \sigma_{np}^T(E),$$

(II.82)

onde  $\sigma_{pp}^T(E)$ ,  $\sigma_{nn}^T(E)$  e  $\sigma_{np}^T(E)$  representam as seções de choque total próton-próton, nêutron-nêutron e nêutron-próton, respectivamente. Os fatores que multiplicam estas seções de choques em (II.82) representam o peso estatístico para cada tipo de colisão no sistema núcleo-núcleo. Admitindo a independência da carga nas forças nucleares, isto é,

$$\sigma_{pp}^T(E) = \sigma_{nn}^T(E),$$

(II.83)

concluímos que

$$\sigma_{NN}^T(E) = \frac{(Z_A Z_B + N_A N_B)}{AB} \sigma_{pp}^T(E) + \frac{(Z_A N_B + Z_B N_A)}{AB} \sigma_{np}^T(E).$$

(II.84)

Na expressão (II.84) estamos admitindo que as seções de choques  $\sigma_{pp}^T(E)$  e  $\sigma_{nn}^T(E)$  ocorrem entre núcleons livres. No entanto, já que estes colidem na presença de outros núcleons devemos evitar que um estado quântico seja ocupado por mais de um núcleo. Isto é, devemos determinar o efeito do princípio de Pauli nas seções de choque  $\sigma_{pp}^T(E)$  e  $\sigma_{np}^T(E)$ . Isto será feito no Capítulo V.

O potencial imaginário pode ser obtido de outras abordagens microscópicas. Algumas delas, determinam a energia total como função da distância entre os dois núcleos e a interpretam como um potencial que descreve o canal elástico<sup>47)-49)</sup>. Tais cálculos não determinam a componente elástica da função de onda total, mas estão relacionados com o movimento do pacote de onda que inclui estados excitados do sistema<sup>23)</sup>.

Outras abordagens, apresentam como principal deficiência a inclusão do princípio de Pauli. Alguns autores<sup>50)-51)</sup> aplicam corretamente este princípio, apenas num dos núcleos, per-

mitindo que estados de um deles sejam ocupados por mais de um núcleon, o que é uma clara violação do princípio de Pauli. Outros ainda<sup>18</sup> ), deixam de incluir um fator ( $V_{F_2}^{-1} = \frac{4}{3} \pi K_{F_2}^3$ ) em  $W$  que, se incluído, reduz a sua magnitude.

A seção de choque total de reação é uma grandeza física importante para se medir os canais não elásticos existentes a uma dada reação. Vimos, no Capítulo II.2, que a existência da parte imaginária do potencial óptico,  $W$ , está diretamente ligada com a perda de fluxo do canal de entrada. Isto significa que  $W$  dá conta de todos os canais inelásticos ocorrido no processo de colisão. Espera-se, portanto, uma ligação direta entre  $\sigma_R(E)$  e a parte imaginária do potencial óptico. Isto será visto no próximo Capítulo.

### III - Seção de Choque Total de Reação e a Parte Imaginária do Potencial Óptico

Vimos que a razão de se acreditar na existência de uma relação direta entre a seção de choque total de reação  $\sigma_R(E)$  e a parte imaginária do potencial óptico,  $W$  se deve ao fato das duas quantidades físicas estarem relacionadas com os processos não-elásticos. Isto pode ser obtido através do teorema óptico, já que temos a relação entre a amplitude de espalhamento elástico, que está relacionada com o potencial óptico, e a seção de choque total, que inclue a seção de choque total de reação. Vemos, também, a relação entre  $\sigma_R(E)$  e a parte imaginária da fasagem óptica, pois esta inclue explicitamente  $W$ .

A amplitude do espalhamento elástico pode ser determinada ao se conhecer a função de onda de espalhamento  $|\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle$ :

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{-\mu}{2m^2} \langle \phi_{\mathbf{k}} | v | \psi_{\mathbf{k}'}^{(+)} \rangle , \quad (\text{III.1})$$

onde  $v$  é a interação total entre os nêutrons do núcleo A com os nêutrons do núcleo B e  $|\phi_{\mathbf{k}}\rangle$  é a função de onda de espalhamento livre (sem a ação do potencial  $V$ ).

O operador de espalhamento  $T$  satisfaz as seguintes relações:

$$T |\phi_{\mathbf{k}}\rangle = v |\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle \quad (\text{III.2})$$

e

$$T |\phi_{\mathbf{k}}\rangle = U_{\text{op}} |\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle , \quad (\text{III.3})$$

onde  $U_{\text{op}}$  é o operador do potencial óptico e  $|\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle = P |\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle$ . Usando a equação (III.2) em (III.1) obtemos

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{-\mu}{2\pi n^2} \langle \phi_{\mathbf{k}}, |T| \phi_{\mathbf{k}'} \rangle . \quad (\text{III.4})$$

O teorema óptico afirma que existe uma relação entre a seção de choque total e a parte imaginária da amplitude elástica  $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ , a  $\theta = 0$ , isto é,

$$\sigma_{\text{total}} = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} f(\theta = 0) = - \frac{2\mu}{n^2 k} \langle \phi_{\mathbf{k}}, | \operatorname{Im} T | \phi_{\mathbf{k}} \rangle . \quad (\text{III.5})$$

Portanto, temos que

$$\sigma_{\text{total}} = - \frac{2\mu}{n^2 k} \frac{1}{2i} \langle \phi_{\mathbf{k}}, | (T - T^+) | \phi_{\mathbf{k}} \rangle . \quad (\text{III.6})$$

Usando as equações (II.39) e (II.40) obtemos que

$$T - T^+ = T^+ [ (U_{\text{op}}^+)^{-1} - (U_{\text{op}})^{-1} ] T + T^+ P [ \delta(E - H_0) ] P T \quad (\text{III.7})$$

É possível mostrar que

$$\langle \phi_{\mathbf{k}}, | T^+ P \delta(E - H_0) P T | \phi_{\mathbf{k}} \rangle = \frac{\pi^2 k}{2\pi\mu} \sigma_{\text{elástico}}, \quad (\text{III.8})$$

(vide referência 43, página 785). Usando os resultados de (III.7) e (III.8) em (III.6) concluímos que

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{total}} &= - \frac{2\mu}{n^2 k} \frac{1}{2i} \langle \phi_{\mathbf{k}}, | T^+ [ (U_{\text{op}}^+)^{-1} - (U_{\text{op}})^{-1} ] T | \phi_{\mathbf{k}} \rangle + \\ &+ \frac{2\mu\pi}{n^2 k} \sigma_{\text{elástica}}. \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

Já que, a seção de choque total é igual a seção de choque total elástica mais a seção de choque total de reação, isto é,

$$\sigma_{\text{total}} = \sigma_R + \sigma_{\text{elástica}}^{\text{total}} , \quad (\text{III.10})$$

concluimos que

$$\sigma_R = - \frac{2\mu}{\pi^2 k} \frac{1}{2i} \langle \psi_{ik} | T^+ [ (U_{op}^+)^{-1} - (U_{op})^{-1} ] T | \psi_{ik} \rangle . \quad (\text{III.11})$$

Usando a equação (III.3) em (III.11) obtemos

$$\sigma_R = - \frac{2\mu}{\pi^2 k} \frac{1}{2i} \langle \psi_{ik}^{(+)} | U_{op}^+ [ (U_{op}^+)^{-1} - (U_{op})^{-1} ] U_{op} | \psi_{ik}^{(+)} \rangle \quad (\text{III.12})$$

e

$$\sigma_R = - \frac{2\pi}{\pi^2 k} \frac{1}{2i} \langle \psi_{ik}^{(+)} | (U_{op} - U_{op}^+) | \psi_{ik}^{(+)} \rangle . \quad (\text{III.13})$$

Da equação (III.13) podemos concluir que  $\sigma_R$  é nula se o potencial óptico  $U_{op}$  for hermetiano, isto é,  $U_{op}^+ = U_{op}$ . Como estamos utilizando o modelo óptico para descrever o processo de colisão, o potencial óptico possui uma parte real e uma parte imaginária

$$U_{\text{óptico}}(r) = U(r) - i W(r) , \quad (\text{III.14})$$

onde  $U(r)$  e  $W(r)$  são funções reais. Assim, existe uma relação explícita entre a seção de choque total de reação e a parte imaginária do potencial óptico

$$\sigma_R(E) = \frac{k}{E} \langle \psi_{ik}^{(+)} | W(r) | \psi_{ik}^{(+)} \rangle . \quad (\text{III.15})$$

Convém observar que a expressão para  $\sigma_R(E)$ , dada pela equação (III.15), inclui processos do canal elástico, o esplamento elástico do mecanismo de núcleo composto. Contudo, é bem conhecido que à medida que a energia do núcleo incidente cresce a componente elástica vinda do mecanismo de núcleo composto tende a zero.

É interessante analisar a equação (III.15), através do método das ondas parciais. Deste modo fica claro a relação  $\sigma_R(E)$  e as defasagens ópticas.

Expandindo a função de onda referente ao canal elástico,  $\psi_{|k}^{(+)}$  em termos de ondas parciais  $l$ 's e integrando na parte angular, obtemos a forma mais conhecida para  $\sigma_R(E)$

$$\sigma_R(E) = \frac{\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) T_{\ell}, \quad (\text{III.16})$$

onde o fator de transmissão  $T_{\ell}$  é determinado através do potencial óptico

$$T_{\ell} = \frac{8\mu k}{\hbar^2} \int_0^{\infty} dr |u_{\ell}(r)|^2 w(r) \quad (\text{III.17})$$

A função de onda  $u_{\ell}(r)$  é a parte radial de  $\psi_{|k}^{(+)}(r)$ .

O fator de transmissão  $T_{\ell}$  pode ser obtido também, da amplitude média  $\langle S_{\ell} \rangle$

$$T_{\ell} = 1 - |\langle S_{\ell} \rangle|^2, \quad (\text{III.18})$$

onde  $S_{\ell}$  é a matriz  $S$  correspondente a onda parcial  $\ell$  do potencial óptico.

O método das ondas parciais  $l$ 's é frequentemente utilizado em reações envolvendo íons leves a energias não muito elevadas. Nesta situação um número não muito elevado de ondas

$l$ 's contribuem para  $\sigma_R(E)$ . A energias maiores e em reações envolvendo íons pesados este método torna-se impraticável pelo número elevado de ondas parciais contribuintes. De fato, para cada onda parcial  $l$  devemos, neste método, resolver a equação de Schrödinger para determinar  $U_l(r)$ , integrar a equação (III.17) e finalmente somar todas as ondas parciais contribuintes, através da equação (III.16).

O fato de envolver muitas ondas parciais  $l$ 's, nas reações a serem estudadas pode ser aproveitado para reescrever  $\sigma_R(E)$  numa outra forma. De fato, a somatória em  $l$  da equação (III.16) pode ser transformada numa integral, podendo associar a cada onda parcial  $l$  um parâmetro de impacto  $b$ .

$$k b \approx (l + \frac{1}{2}) , \quad (\text{III.19})$$

$$\sigma_R(E) = 2\pi \int_0^{\infty} db b T(b) , \quad (\text{III.20})$$

O coeficiente de transmissão  $T(b)$  mede a probabilidade de um projétil popular, um determinado canal não-elástico, a um dado parâmetro de impacto  $b$ . Assim,  $T(b_1) = 1,0$  significa que o projétil ao interagir com o núcleo alvo, seguindo a trajetória determinada pelo parâmetro de impacto  $b_1$ , produzirá um evento não-elástico, portanto, contribuirá para a seção de choque total de reação. O caso oposto,  $T(b_2) = 0,0$ , implica que o projétil não irá interagir com o alvo e portanto, ambos permanecerão no canal elástico não contribuindo para  $\sigma_R(E)$ . A figura III.1 ilustra estas situações

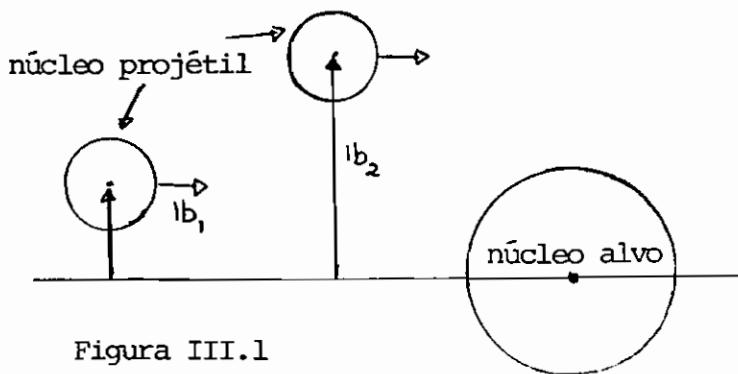


Figura III.1

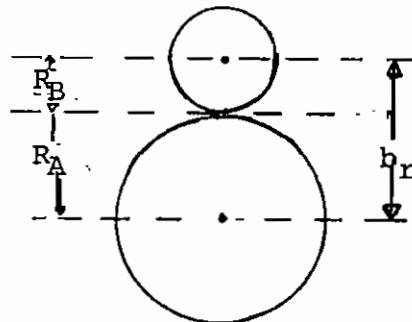
Admitindo que o coeficiente de transmissão apresente valor 1 a parâmetros de impactos  $b < b_r$  e 0, para  $b > b_r$ , obtemos da equação (III.20) o limite geométrico de  $\sigma_R$ , isto é,

$$\sigma_R(E) = \pi b_r^2 , \quad (\text{III.21})$$

onde

$$b_r = r_o (A^{1/3} + B^{1/3}) \quad (\text{III.22})$$

é o raio de interação do sistema envolvendo um núcleo projétil e um núcleo alvo de número de massa, respectivamente, A e B. Vide figura (III.2)



$$R_A = r_o A^{1/3}$$

$$R_B = r_o B^{1/3}$$

Figura III.2

O problema agora consiste em encontrar um método que determine o fator de transmissão na representação do parâmetro de impacto. Devido a relação (III.18), o fator de transmissão está diretamente ligado a defasagem na mesma representação, a saber

$$T(b) = 1 - |e^{2i\delta(b)}|^2, \quad (\text{III.23})$$

ou

$$T(b) = 1 - e^{-4\delta_I(b)}, \quad (\text{III.24})$$

onde  $\delta_I(b)$  é a parte imaginária da defasagem  $\delta(b)$ .

Precisamos encontrar um método para a determinação da defasagem  $\delta_I(b)$

O método W.K.B., para a determinação da defasagem, é particularmente adequado para reações envolvendo íons-pesados, pois preenche os requisitos de validade de sua utilização. A defasagem  $\delta_\ell$  na aproximação W.K.B. apresenta a seguinte forma<sup>52)</sup>

$$\delta_\ell \approx \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{r_1}^r dr' \sqrt{k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r'^2} - \frac{2\mu}{\hbar^2} U(r)} -$$

$$\int_{r_0}^r dr' \sqrt{k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r'^2}} . \quad (\text{III.25})$$

Como estamos interessados na parte imaginária da defasagem, o segundo termo da equação (III.25) não deve contribuir, pois é uma quantidade real. A expressão W.K.B., de interesse, para a defasagem é, então, dada por

$$\delta_\ell \approx \int_{r_1}^\infty dr' \sqrt{k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r'^2} - \frac{2\mu}{\hbar^2} U(r)} . \quad (\text{III.26})$$

O extremo inferior da integral é determinado pela equação

$$k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r_1^2} - \frac{2\mu}{\hbar^2} U(r_1) = 0 \quad (\text{III.27})$$

ou

$$k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r_1^2} - \frac{2\mu}{\hbar^2} [V_N(r_1) + V_C(r_1)] = 0 . \quad (\text{III.28})$$

Na equação (III.28),  $V_N(r)$  representa a interação média entre os núcleons dos dois íons e  $V_C(r)$  a interação coulombiana. O raio  $r_1$  corresponde ao ponto de retorno clássico. A expressão WKB para a parte imaginária da defasagem é dada por

$$\delta_I(\ell) = \int_{r_1}^{\infty} dr' \sqrt{[k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r'^2} - \frac{2\mu}{\hbar^2} U(r')]^2 + [\frac{2\mu}{\hbar^2} W(r')]^2} \sin \frac{\theta(r')}{2} \quad (\text{III.29})$$

onde o ângulo  $\theta(r')$  está determinado por

$$\tan \theta(r') = - \frac{2\mu}{\hbar^2} W(r') / [k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r'^2} - \frac{2\mu}{\hbar^2} U(r')] \quad (\text{III.30})$$

A expressão exata, para a defasagem, na aproximação W.K.B. foi obtida escrevendo a função complexa (argumento da função integranda da equação (III.26) na fórmula de Moivre e identificando a correspondente parte imaginária.

Para energias não muito baixas é comum utilizar a expressão linear em  $W(r')$ . Esta expressão apresenta a seguinte forma

$$\delta_I(\ell) \approx - \frac{1}{2} \frac{2\mu}{\hbar^2} \int_{r_1}^{\infty} dr' \frac{W(r')}{\sqrt{k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r'^2} - \frac{2\mu}{\hbar^2} U(r')}} \quad (\text{III.31})$$

Se estamos considerando reações a altas energias é válido supor que o efeito do potencial real  $U(r')$  na defasagem  $\delta_I$  é desprezível, pois nesses casos temos que  $k^2 \gg \frac{2\mu}{\hbar^2} U(r)$  portanto,

$$\delta_I(\ell) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} - \frac{1}{2} \frac{2\mu}{\hbar^2} \int_{r_1}^{\infty} dr' \frac{W(r')}{\sqrt{k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r'^2}}} \quad (\text{III.32})$$

Usando a relação (III.19) obtemos que

$$\delta_I(b) = -\frac{1}{2} \frac{2\mu}{\hbar^2} \int_{r_i}^{\infty} dr' \frac{W(r')}{\sqrt{k^2 - \frac{b^2 k^2}{r'^2}}} , \quad (\text{III.33})$$

que em coordenadas cilíndricas se escreve

$$\delta_I(b) = -\frac{1}{4} \frac{2\mu}{\hbar^2 k} \int_{-\infty}^{\infty} dz' W(\sqrt{b^2 + z'^2}) . \quad (\text{III.34})$$

A expressão dada pela equação (III.34) contrasta com a equação (III.31). Enquanto na primeira o núcleo incidente segue trajetórias livres (sem ação de potencial nuclear real e coulombiano), a segunda considera trajetórias determinadas pelo potencial coulombiano e nuclear.

Nota-se que a função  $\delta_I(b)$  deve-se comportar de uma forma semelhante a  $W_N(r')$ . De fato, se aproximarmos  $W_N(r') = -W_0 \theta(R-r')$  por um poço quadrado, onde  $\theta(R-r')$  é a função degrau definida por

$$\theta(R-r') = \begin{cases} 1, & r' \leq R \\ 0, & r' > R \end{cases} \quad (\text{III.35})$$

encontramos para  $\delta_I(b)$  a seguinte expressão

$$\delta_I(b) = \frac{k}{2E} W_0 \sqrt{R^2 - b^2} . \quad (\text{III.36})$$

Na figura (III.3) apresentamos o comportamento de  $\delta_I(b)$  com  $b$ .

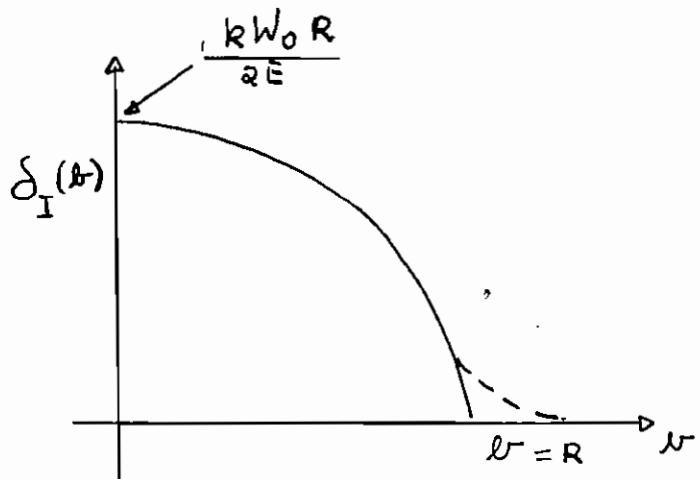


Figura III.3

A expressão do coeficiente de transmissão em função de  $b$  para esta defasagem, é a seguinte

$$T(b) = 1 - e^{-\left[\frac{2kW_0}{E} \sqrt{R^2 - b^2}\right]} . \quad (\text{III.37})$$

Na figura (III.3), o comportamento de  $\delta_I(b) \times b$  para um potencial imaginário com a forma de uma Wood-Saxon está indicado por linhas tracejadas. Concluimos, que o comportamento de  $\delta_I(b)$  para um poço quadrado é semelhante a de um Wood-Saxon. Portanto, podemos usar a expressão (III.37) para uma discussão qualitativa devido ao potencial Woods-Saxon.

A forma de  $\sigma_R(E)$ , equação (III.20), é a seguinte

$$\sigma_R(E) = \pi R^2 \left[ 1 - 2 \frac{1 - (1 + 2R/\lambda)e^{-2R/\lambda}}{\left(\frac{2R}{\lambda}\right)^2} \right] , \quad (\text{III.38})$$

onde  $\lambda = \frac{E}{kW_0}$  é o caminho livre médio.

Esta fórmula originalmente obtida por Beth<sup>25)</sup> foi corrigida<sup>53)</sup>, incorporando a barreira coulombiana e a dependência explícita com a energia

$$\sigma_R(E) = \pi R_E^2 \left[ 1 - 2 \frac{1 - (1 + 2R_E/\lambda)e^{-\frac{2R_E}{\lambda}}}{(2R_E/\lambda)^2} \right] \left[ 1 - \frac{V_{BC}}{E_{c.m.}} \right], \quad (III.39)$$

onde  $R_E = R + 1/k$ ,  $k$  é o momento relativo do sistema e  $V_{BC}$  é a barreira coulombiana na superfície do núcleo. Para  $E \gg V_{BC}$ , a expressão da equação (III.39) poderia ser usada para calcular o fator de transparência  $T$ , introduzido na equação (I.2):

$$T = 2 \frac{1 - (1 + 2R_E/\lambda)e^{-\frac{2R_E}{\lambda}}}{(2R_E/\lambda)^2}. \quad (III.40)$$

As equações (III.39) e (III.40) representam as expressões para  $\sigma_R$  e  $T$ , respectivamente, para colisões frontais,  $b = 0$ .

É claro que a dependência  $T$  com  $E$  será determinada a partir da dependência de  $w_o$  com  $E$ . Para a dependência  $w_o \propto E^{1/2}$ , consegue-se que  $T$  é constante, isto é, não depende de  $E$ . Se  $w_o$  seguir a dependência de  $(k_N \sigma_{NN}^T(E))$ , que foi discutido no Capítulo II, 3ª Seção., encontramos naturalmente que a dependência de  $T$  com  $E$  é determinada exclusivamente por  $\sigma_{NN}^T(E)$ , (Seção de choque núcleon-núcleo).

É interessante encontrar dois limites,  $\lambda \ll 2R$  e  $\lambda \gg 2R$ , para  $\sigma_R(E)$ . Isto é simples, partindo da equação (III.38) que resulta:

$$\sigma_R(E) \approx \pi R^2 \left[ 1 - 2 \left( \frac{\lambda}{2R} \right)^2 \right], \quad \lambda \ll 2R \quad (III.41)$$

$$= S \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda}{R} \right)^2 \right]$$

e

$$\sigma_R(E) \approx \frac{2}{3} \pi R^2 \left( \frac{2R}{\lambda} \right) \quad \lambda \gg 2R, \quad (\text{III.42})$$

$$= V \left( \frac{1}{\lambda} \right),$$

onde  $S$  e  $V$  são superfície e volume efetivos, respectivamente. Para  $\lambda$  independente de  $R$ , os resultados acima implicam em  $\sigma_R \propto A^{2/3}$ , no primeiro limite, aplicável a reações hadron-núcleo, enquanto que o segundo limite, resulta em  $\sigma_R \propto A$ , onde todos os nucleons participam na colisão (o que ocorre normalmente nos sistemas  $\gamma$ -núcleo, e-núcleo, etc.).

Vamos calcular  $\sigma_R$  a partir das equações (III.20), (III.24), (III.29) e (III.30), onde usaremos a expressão de  $W$ , dada pela equação (II.81), isto é

$$W(\mathbf{r}) = - \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m}} \frac{(E_{c.m.} - v_c + |v_N|)}{|v_N|} \sigma_{NN}^T(E) \int d\mathbf{r}' \rho_A(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho_B(\mathbf{r}').$$

É claro que para a construção de  $W$  temos que construir  $\sigma_{NN}^T$ , corrigido pelo princípio de Pauli, já que este efeito é importante a baixas energias. Faremos isto, no Capítulo V.

Seria de grande importância entender os mecanismos inelásticos contido em  $W$ , já que isto nos permitiria compreender os resultados teóricos obtidos do uso da equação (II.81).

É conhecido que o potencial do tipo " $t_p$ ", sistema nucleon-núcleo, dado pela equação (II.74), representa, em média, o canal de knock-out quase-livre. Seria interessante saber se o conteúdo reativo de  $W$ , para o sistema núcleo-núcleo equação (II.81), incorpora o mesmo mecanismo inelástico.

#### IV - Conteúdo Reativo do Potencial Imaginário

Neste Capítulo vamos explicar o conteúdo reativo contido na parte imaginária do potencial óptico obtido através da aproximação KMT<sup>20)</sup>. Conforme foi visto na 3ª seção do Capítulo II, II.3, esta aproximação consiste em reter a ordem mais baixa da série de espalhamento múltiplo de Watson, o termo de espalhamento único e substituir o operador de muitos corpos  $\hat{\zeta}$ , deste termo, pelo operador de dois corpos  $t$ , que satisfaz a equação

$$t = v + v \frac{1}{E - k_{O_1} - k_1 + i\epsilon} t , \quad (IV.1)$$

onde  $E$  é a energia cinética inicial do projétil. A energia cinética do par é dada por  $k_{O_1} + k_1 = K_{O_1} + k_{O_1}$ , onde  $K_{O_1}$  é a energia cinética do sistema projétil-núcleon, no sistema de centro de massa e  $k_{O_1}$  é a energia cinética relativa deste sistema. É usual substituir  $E - K_{O_1}$  pelo valor inicial, quando ignoramos o movimento fermiônico do núcleon alvo, isto é,  $E - K_{O_1}$  é substituído por  $\eta E$ , onde  $\eta = (1+x)^{-1}$  e  $x = \frac{m_O}{m}$  e onde,  $m_O$  e  $m$  são as massas dos nucleons envolvidos. Assim escrevemos

$$t(\eta E) = v + v \frac{1}{\eta E + i\epsilon - k_{O_1}} t(\eta E) \quad (IV.2)$$

Esta equação é um problema de dois corpos na coordenada relativa do sistema projétil-núcleon. O potencial óptico referente a aproximação KMT para o sistema núcleon-núcleo, é obtido determinando o seguinte elemento de matriz

$$U_{óptico} = \langle \mathbf{k}' | U_{op} | 0, \mathbf{k} \rangle = \left(1 - \frac{1}{A}\right) \int d\mathbf{p}_1 \rho_A (\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}' + \mathbf{k},$$

$$|\mathbf{p}_1) \langle \mathbf{k}' - \mathbf{x}_n (\mathbf{k} + \mathbf{p}_1) | t(\eta E) | n (\mathbf{k} - \mathbf{x} |\mathbf{p}_1 \rangle . \quad (IV.3)$$

Se a dependência de  $t$  em  $|p_1|$  foi suprimida, ao colocar  $|p_1|=0$  no argumento de  $t$ , temos então

$$\langle \mathbf{k}', 0 | U_{\text{op}} | 0; \mathbf{k} \rangle = \left(1 - \frac{1}{A}\right) \langle \mathbf{k}' - x_n \mathbf{k} | t(nE) | n \mathbf{k} \rangle \rho_A(\mathbf{k}' - \mathbf{k}). \quad (\text{IV.4})$$

Esta aproximação significa que não estamos considerando o movimento interno do nucleon-alvo. Todavia, iremos considerar o momento interno do nucleon do alvo ao tomar  $|p_1| \neq 0$ , para tornar transparente, quando determinarmos o conteúdo reativo contido neste potencial óptico.

A equação (IV.4) é a expressão do potencial óptico para o sistema nucleon-núcleo. A expressão para o sistema núcleo-núcleo é a seguinte

$$\langle \mathbf{k}'; 0 | U_{\text{op}} | 0; \mathbf{k} \rangle = \left(1 - \frac{1}{AB}\right) \langle \mathbf{k}' - x_n \mathbf{k} | t(nE) | n \mathbf{k} \rangle \rho_A(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \rho_B(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (\text{IV.5})$$

Estamos interessados em saber quais são os canais não elásticos contido no potencial óptico obtido pela aproximação KMT. Estes canais, não-elásticos, estão implícitos na parte imaginária deste potencial ou seja, na parte não-hermitiana de  $U_{\text{óptico}}$ . A um dado modelo microscópico para o potencial óptico, a amplitude de reação para esses canais não-elásticos estão implicitamente contidos nas singularidades do operador de espalhamento elástico e podemos descobri-los através da análise da relação de unitariedade. As relações de unitariedade são obtidas através da investigação da descontinuidade dos operadores de espalhamento através do corte da mão-direita (right-hand cut), no plano da energia. Para operadores que apresentam relações igual a equação

$$A(E) = B(E) + B(E) C(E) A(E) \quad (\text{V.6})$$

a relação de descontinuidade é dada por

$$\Delta A = A^+ \Delta C A + (A^+ C^+ + 1) \Delta B (1 + CA), \quad (IV.7)$$

onde

$$\Delta A(E) = A^+(E+i\epsilon) - A(E+i\epsilon). \quad (IV.8)$$

A equação (IV.7) será referida como teorema da unitariedade. A descontinuidade através do corte é definida por

$$2\pi i \text{ desc } A(E) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Delta A(E). \quad (IV.9)$$

Aplicando o teorema da unitariedade no operador  $T$  que satisfaz a equação (II.39), isto é,  $T = U_{op}^+ U_{op} \Gamma_e T$ , onde  $\Gamma_e = PG_0 P$ , temos que

$$\Delta T = T^+ \Delta \Gamma_e T + (T^+ \Gamma_e^+ + 1) \Delta U (1 + \Gamma_e T). \quad (IV.10)$$

No primeiro termo, a presença do operador de projeção  $P$  nos permite tomar o limite  $\epsilon \rightarrow 0$  em  $\Delta \Gamma_e$  resultando

$$\text{desc } T = T^+ \Lambda_e T + \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (T^+ \Gamma_e^+ + 1) \Delta U (1 + \Gamma_e T), \quad (IV.11)$$

onde

$$\Lambda_e = \text{desc } \Gamma_e = \int dk |k, 0\rangle \delta(E - \frac{h^2 k^2}{2\mu_0}) <0, k|, \quad (IV.12)$$

onde  $k$  é o momento relativo do núcleo incidente e o núcleo do alvo e  $\mu_0$  é a massa reduzida associada a este movimento relativo. Quando tomamos o elemento de matriz, na camada da energia, para o operador  $\text{desc } T$ , dado pela equação (IV.11), o primeiro ter-

mo da equação pode ser identificado como seção de choque elástica. Convém lembrar que  $\sigma_{\text{total}} = \sigma_{\text{elástica}} + \sigma_{\text{absorção}}$ . Se estamos trabalhando com uma teoria microscópica completa e exata para o sistema nós esperamos obter a relação de unitariedade na forma

$$\text{desc } T = T^+ \Lambda_e T + \sum_n T_n^+ \Lambda_n T_n , \quad (\text{IV.13})$$

na qual o índice n representa todos os canais não-elásticos,  $T_n$  e  $\Lambda_n$  são as amplitudes de transição e o operador de projeção na camada de energia, respectivamente, associado a estes canais. Portanto, para o potencial óptico exato U, o termo de absorção é representado na forma

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (T^+ \Gamma_e^+ + 1) \Delta U (1 + \Gamma_e T_e) = \sum_n T_n^+ \Lambda_n T_n . \quad (\text{IV.14})$$

A relação (IV.14) para um dado potencial óptico aproximado envolverá apenas alguns canais de reação descrito pela amplitude de reação aproximada. Usando a equação (IV.9) e a aproximação usada por KMT para o potencial óptico U obtemos a expressão para  $\Delta U$  que aparece na equação (IV.14). O elemento de matriz para desc U irá nos informar quais são os estados intermediários que estão implícitos na equação (IV.4) e (IV.5). Este elemento é dado por

$$\langle \mathbf{k}', 0 | \text{desc } U | 0, \mathbf{k} \rangle = (A-1) \langle \mathbf{k}', 0 | t^+ \Lambda_{\text{KMT}} t | \mathbf{k}, 0 \rangle , \quad (\text{IV.15})$$

onde

$$\Lambda_{\text{KMT}} = \int d\mathbf{k}_0 d\mathbf{p}_1 | \mathbf{k}_0, \mathbf{p}_1 \rangle \delta(\eta E - \frac{\eta}{2m_0} (\mathbf{k}_0 - \mathbf{x} \mathbf{p}_1)^2) \langle \mathbf{k}_0, \mathbf{p}_1 | . \quad (\text{IV.16})$$

A função delta em  $\Lambda_{\text{KMT}}$  restringe os estados intermediários e estados de ondas planas do projétil e do núcleon alvo envolvido no 'knock-out' que possue energia cinética relativa igual a  $e$

nergia cinética relativa inicial, assumindo que o núcleon alvo esteja em repouso.

A equação (IV.11) apresenta a seguinte forma

$$\text{desc } \hat{T} = \hat{T}^+ \Lambda_e \hat{T} + \hat{T}_o^+ (\Lambda_{KMT} - \Lambda_e) \hat{T}_o \quad (\text{IV.17})$$

com

$$\hat{T}_o = \sqrt{A} t (1 + \Gamma_e \hat{T}) = \frac{\hat{T}}{\sqrt{A}} \quad (\text{IV.18})$$

A equação (IV.17) é a relação de unitariedade para a amplitude de espalhamento elástica da aproximação impulso (KMT) para o potencial óptico. Podemos agora, usar as equações (IV.17) e (IV.18) para explicar o conteúdo reativo presente na aproximação KMT. O operador de dois corpos t quando aplicado no estado inicial  $|0, lk\rangle$  afetará apenas um núcleon do alvo. Uma vez que a dependência do núcleon alvo é simples, em t, podemos obter o estado final do núcleo alvo. Vamos escrever a função de onda do estado fundamental do alvo  $|0\rangle$ , em termos de funções de onda da Hamiltoniana que descreve o movimento interno dos núcleons residuais do alvo, isto é,  $|\phi_{k_i}^\lambda\rangle$ . A expansão é a seguinte

$$|0\rangle = \sum_\lambda |\phi_i^\lambda\rangle |\phi_{k_i}^\lambda\rangle \quad (\text{IV.19})$$

onde  $|\phi_{k_i}^\lambda\rangle$  descreve o movimento dos núcleons que não participam da reação e onde  $|\phi_i^\lambda\rangle = \langle \phi_{k_i}^\lambda | 0 \rangle$ . Assim temos que

$$(|p_1, p_2, \dots, p_A| 0\rangle = \sum_\lambda \phi^\lambda (|p_1) \phi_{k_i}^\lambda (|p_2, \dots, p_A). \quad (\text{IV.20})$$

Deveríamos antissimetizar este estado, não o faremos para ficar transparente o(s) mecanismo(s) não-elástico(s) presente(s) na parte imaginária do potencial óptico. Escrevendo as coordenadas dos núcleons do alvo espectadores,  $2, \dots, A$  compactamente por

ξ podemos escrever o elemento de matriz de  $\hat{T}_O$  na seguinte forma

$$\langle \mathbf{k}'_O | \mathbf{p}'_1 | \xi | \hat{T}_O | 0, \mathbf{k} \rangle = \sqrt{A} \sum_{\lambda} \langle \mathbf{k}'_O | \mathbf{p}'_1 | t(1+P G_O P \hat{T}) | \phi^{\lambda}(\mathbf{k}) \rangle \phi_k(\xi) \quad (IV.21)$$

O operador  $1+PG_O P \hat{T}$  transforma a onda plana do projétil num estado de onda distorcida  $x_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{k})$ . De fato, usando a equação de Lippmann-Schwinger  $T = U_{op} + U_{op} G_O P T$  que descreve o espalhamento elástico, temos que

$$|0, x_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle = (1+P G_O P T) |0, \mathbf{k}\rangle, \quad (IV.22)$$

onde temos do lado esquerdo da equação a estrutura de um alvo no estado fundamental multiplica por uma onda distorcida. Assim a equação (V.21) se escreve

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}'_O | \mathbf{p}'_1 | \xi | \hat{T}_O | 0, \mathbf{k} \rangle &= \sqrt{A} \sum_{\lambda} \phi_k^{\lambda}(\xi) \int d\mathbf{k}_O d\mathbf{p}_1 \langle n(\mathbf{k}'_O - x_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{p}'_1)) | t(nE) | \\ &\quad | n(\mathbf{k}'_O - x_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{p}'_1)) \rangle \delta(\mathbf{k}'_O + \mathbf{p}'_1 - \mathbf{k}_O - \mathbf{p}_1) x^{(+)}(\mathbf{k}_O) \phi^{\lambda}(\mathbf{p}_1) \end{aligned} \quad (IV.23)$$

A interpretação física deste elemento de matriz é direta. A reação se processa como segue: o núcleon projétil  $\mathbf{k}_O$  interage com o alvo, e este, através do campo do potencial óptico  $U_{op}$ , distorce a onda incidente. Com a interação, o projétil extrai do núcleo alvo um núcleon  $\mathbf{p}_1$ . A probabilidade de transição do estado inicial (núcleon projétil  $\mathbf{k}_O$  e n úcleon alvo livre  $\mathbf{p}_1$ ) para o estado final (extração do n úcleon do alvo, isto é, reação de 'knock-out') é determinada pelo elemento de matriz  $\langle n(\mathbf{k}'_O - x_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{p}'_1)) | t(nE) | n(\mathbf{k}_O - \mathbf{p}_1) \rangle$ . Portanto,  $\langle \mathbf{k}'_O | \mathbf{p}'_1 | \xi | \hat{T}_O | 0, \mathbf{k} \rangle$  representa a amplitude da reação de 'knock-out' de um n úcleon ignorando a energia de ligação do n úcleon do alvo que irá interagir.

ragir com o n\'ucleon proj\'etil. A energia cin\'etica relativa  $\hbar k_{\alpha_i}$  est\'a restrita ao correspondente espalhamento livre entre dois n\'ucleons, onde o n\'ucleon do alvo estava inicialmente em repouso ( $p_i = 0$ ) e no estado n\'ao-ligado do n\'ucleo alvo. Estes estados s\'ao conhecidos como knock-out quase-livre.

O canal de knock-out quase-livre \'e o mecanismo predominante a energia de laborat\'orio do n\'ucleon incidente inferior a 300 Mev. Na figura(IV.1) apresentamos o comportamento da seção de choque de reação próton-próton obtido da diferença entre a seção de choque total e elástica,  $\sigma_R^{(pp)} = \sigma_T^{(pp)} - \sigma_e^{(pp)}$ <sup>54)</sup>. Vê-se que somente a partir de aproximadamente  $E_L = 300$  Mev  $\sigma_R^{(pp)}$  come\'a a apresentar valores conspicuamente n\'ao nulos, j\'a que o limiar da produ\'cao de pions \'e de aproximadamente 290 Mevs.

Na regi\'ao de  $E_L < 300$  Mev \'e conhecido que o \'unico processo inel\'astico no canal p-p, o Bremsstrahlung, apresenta uma seção de choque notoriamente desprezivel.

Na an\'alise dos mecanismos reativos contido na aproxima\'ao KMT, foi desprezado o movimento interno dos n\'ucleons do alvo (o conhecido movimento Fermi\'onico) e tamb\'em, do n\'ucleo proj\'etil. Admitindo que a energia de Fermi seja de aproximadamente 37 Mev<sup>55)</sup>, temos que este limiar de cria\'ao de pions poderia atingir a partir de aproximadamente 226 Mev. A energias mais altas, outros processos como, por exemplo, a produ\'cao de 2 pions, etc., come\'am a ficar importantes.

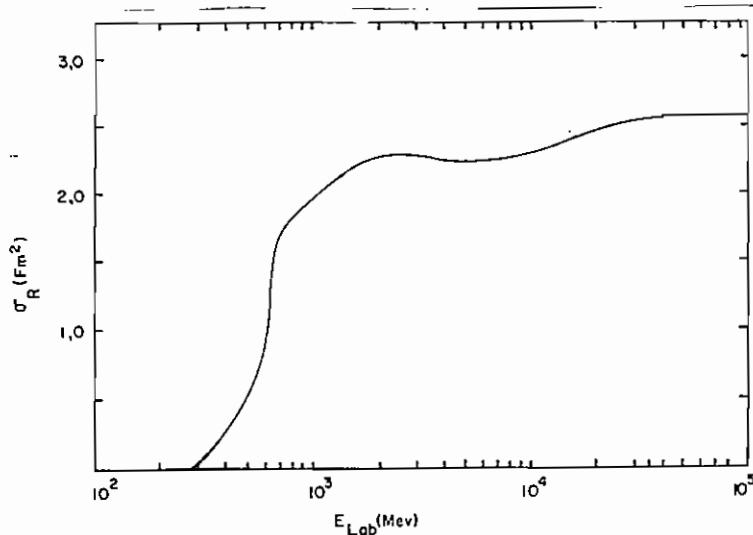


Figura IV.1 - Seção de Choque de Reação Próton-Próton em Função da Energia Incidente

V - Efeito do Princípio de Pauli na Seção de Choque Total  
Núcleon-Núcleon (NN)

V.1 - Cálculo de  $\bar{\sigma}_{NN}(E)$  para o Espalhamento NN no Sistema Núcleon-Núcleo

Vamos considerar o efeito do princípio de Pauli na seção de choque entre dois núcleons: um núcleon livre (projétil) colidindo com outro pertencente ao núcleo do alvo. Para a descrição dos núcleons do alvo adotaremos o modelo de gás de Fermi. Neste modelo, os núcleons do alvo estão livres dentro de uma esfera de raio  $R_F$ . Cada ponto desta esfera representa um núcleon com momento  $\lvert k_2 \rvert$ , onde estes apresentam valores que variam de um valor mínimo  $\lvert k_2 \rvert = 0$  a um valor máximo  $\lvert k_2 \rvert = R_F$  (momento de Fermi). Portanto, todos os estados da esfera de Fermi estão ocupados por núcleons. O princípio de Pauli será incluído ao exigir que após a colisão entre o núcleon-projétil e o núcleon-alvo estes sejam espalhados fora da esfera de Fermi. Assim, dois núcleons não ocupam o mesmo estado quântico.

A seção de choque média entre dois núcleons, sendo um deles ligado com momento  $\lvert k_2 \rvert$  é dada por

$$\sigma = \frac{1}{V_{F_2}} \int_{V_{F_2}} d\lvert k_2 \rvert \sigma_{NN}^T(q_1, q_1'), \quad (V.1)$$

sendo  $V_{F_2} = \frac{4}{3} \pi R_F^3$  o volume da esfera de Fermi e onde  $\sigma_{NN}^T(q_1, q_1')$  é a seção de choque núcleon-núcleon livre, dependente do momento relativo  $q_1 = \lvert k_1 - k_2 \rvert$  e  $q_1' = \lvert k_1' - k_2' \rvert$  antes e após a colisão, respectivamente, e onde  $\lvert k_1 \rvert$  é o momento do núcleon incidente.

A seção de choque livre núcleon-núcleon total comumente parametrizada<sup>18)</sup> apresenta a seguinte forma:

$$\sigma_{pp}^T = 4,29 - 7,12/k_1 + 6,02/k_1^2 \text{ fm}^2, \quad (V.2)$$

para  $k_1^2 > 0,24 \text{ fm}^{-2}$ ,

$$\sigma_{np}^T = 8,22 - 19,57/k_1 + 19,33/k_1^2 \text{ fm}^2. \quad (V.3)$$

Estas expressões são válidas para energias abaixo do limiar de criação de pions  $E_L \approx 280 \text{ Mev}$ , e

$$\sigma_{np}^T = 3\pi a_t^2 / (a_t^2 k_1^2 + (1 - \gamma_2 a_t r_t k_1^2)^2) + \quad (V.4)$$

$$+ \pi a_s^2 / (a_s^2 k_1^2 + (1 - \gamma_2 a_s r_s k_1^2)^2), \quad k_1^2 < 0,24 \text{ fm}^{-2}$$

onde  $a_t = 5,38 \text{ fm}$ ,  $a_s = -23,7 \text{ fm}$  são os comprimentos de espalhamento e  $r_t = 1,70 \text{ fm}$  e  $r_s = 2,4 \text{ fm}$  o alcance efetivo, e onde t e s referem-se ao espalhamento triplo e singuleto, respectivamente,

$$\sigma_{pp}^T = 4\pi a^2 / [1 + (a^2 - ar)k_1^2 + 2500 k_1^4], \quad k_1^2 < 0,24 \text{ fm}^{-2} \quad (V.5)$$

onde  $a = -16,1 \text{ fm}$  é o comprimento de espalhamento e  $r = 3,2 \text{ fm}$  é o alcance efetivo. A figura (V.1) ilustra o comportamento de  $\sigma_{pp}^T(k_1)$  e  $\sigma_{np}^T(k_1)$  em função da energia incidente  $E_L = \frac{\hbar^2 k_1^2}{2m}$

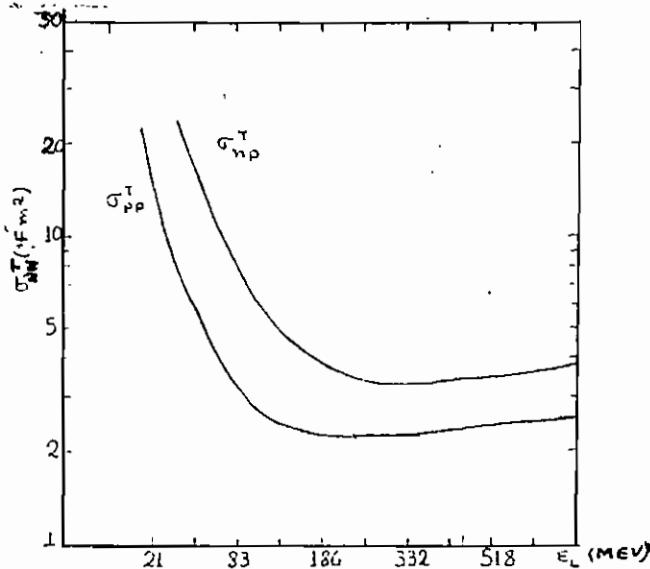


Figura (V.1) - Comportamento de  $\sigma_{NN}^T$  segundo equações (V.2), (V.3), (V.4) e (V.5)

Nota-se que a seção de choque parametrizada,  $\sigma_{NN}^T$  pressupõe que o núcleon do alvo esteja em repouso, isto é,  $|k_2| = 0$ . No entanto, na equação (V.1), consideramos, em geral, um momento  $|k_2| \neq 0$ . A relação entre  $\sigma_{NN}^T$  e  $\sigma_{NN}^T(q_1, q_1')$  é a seguinte:

$$\sigma_{NN}^T = \frac{|k_1 - |k_2|}{k_1} \sigma_{NN}^T(q_1, q_1'). \quad (V.6)$$

Substituindo  $\sigma_{NN}^T(q_1, q_1')$  por  $\sigma_{NN}^T$ , dada pela equação (V.6), na equação (V.1) temos que

$$\sigma = \frac{1}{V_{F_2}} \int_{V_{F_2}} d|k_2| \frac{|k_1 - |k_2|}{k_1} \sigma_{NN}^T(q_1, q_1'). \quad (V.7)$$

No modelo utilizado temos uma esfera preenchida por núclos que ocupam todos os estados disponíveis e o núcleon incidente. Antes da colisão eles possuem momento  $|k_1$  (núcleon-projétil) e  $|k_2$  (núcleon do alvo). Após a colisão haverá uma troca de momento e o resultado é que  $|k_1$  assume valor  $|k'_1$  e  $|k_2$  valor  $|k'_2$ . Na esfera de Fermi não existe estados disponíveis. A aplicação do princípio de Pauli, que afirma que dois núclos não podem ocupar o mesmo estado, ao mesmo tempo, exige que

$$|k'_1| > K_{F_2} \quad \text{e} \quad |k'_2| > K_{F_2} \quad (V.8)$$

Isto assegura que os núclos espalhados ocuparão somente estados não preenchidos por outros núclos. A condição (V.8) é equivalente a exigir que  $|k'_1|^2 + |k'_2|^2 > 2K_{F_2}^2$ . Assim, a seção de choque média núcleon-núcleon satisfazendo o princípio de Pauli adquire a seguinte forma

$$\bar{\sigma}_{NN} = \frac{1}{V_{F_2}} \int d|\mathbf{k}_2| \frac{||\mathbf{k}_1 - |\mathbf{k}_2||}{k_1} \int_{k_1'^2 + k_2'^2 > 2K_{F_2}^2} d\Omega \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right) \quad (V.9)$$

Resta impor a conservação da energia

$$\frac{\hbar^2 k_1^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_2^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k_1'^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_2'^2}{2m} \quad (V.10)$$

ou

$$k_1^2 + k_2^2 = k_1'^2 + k_2'^2 \quad (V.11)$$

e a conservação do momento linear

$$|\mathbf{k}_1| + |\mathbf{k}_2| = |\mathbf{k}'_1| + |\mathbf{k}'_2| \quad (V.12)$$

Acrescido as leis de conservação na equação (V.9) temos que

$$\bar{\sigma}_{NN} = \frac{1}{V_{F_2}} \int d|\mathbf{k}_2| \frac{||\mathbf{k}_1 - |\mathbf{k}_2||}{k_1} \int_{k_1'^2 + k_2'^2 > 2K_{F_2}^2} d\Omega \delta(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_1') \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (V.13)$$

A seção de choque diferencial  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  para o sistema próton-próton é essencialmente isotrópica a todas energias, exceto a ângulos dianteiros. Para o sistema nêutron-próton a anisotropia ocorre para energias incidentes maiores que 40 Mevs.<sup>56)</sup> Para tornar o cálculo viável iremos assumir que a distribuição angular é isotrópica, isto é,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\sigma_{NN}^T(\mathbf{q})}{4\pi} \quad (V.14)$$

onde  $\sigma_{NN}$  significa seção de choque núcleon-núcleon livre. Entende-se por seção de choque livre aquela medida entre núcleons livres da presença de outros. Integrando a equação (V.13) na variável  $q'$  e angular  $\phi$  obtemos

$$\bar{\sigma}_{NN} = \frac{1}{V_{F_2}} \int d|\mathbf{k}_2| \frac{|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|}{k_1} \frac{\sigma_{NN}^T(q)}{4\pi} 2\pi \int_{\substack{k_1^2 + k_2^2 = k'^2 \\ k_1'^2 + k_2'^2 > 2K_{F_2}^2}} \sin \theta_1(q=q') d\theta_1 . \quad (V.15)$$

O ângulo de integração  $\theta_1$  é aquele compreendido entre os vetores  $(|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|)$  e  $q'$

$$k_1'^2 = \frac{1}{4} |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|^2 + \frac{1}{4} q'^2 + \frac{1}{2} |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2| q' \cos \theta_1 . \quad (V.16)$$

A equação (V.16) é obtida através da conservação do momento linear, equação (V.12). Da equação (V.16) concluimos que

$$\sin \theta(q=q') d\theta_1 = \frac{-2d(k_1'^2)}{|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2| q} , \quad (V.17)$$

e que sendo usado para integrar a expressão dada pela equação (V.15) obtemos que

$$\bar{\sigma}_{NN} = \frac{1}{k_1 V_{F_2}} \int d|\mathbf{k}_2| \frac{(k_2^2 + k_2'^2 - 2K_{F_2}^2)^2}{|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|} \sigma_{NN}^T(q) \quad (V.18)$$

onde o limite inferior deve ser aquele que satisfaz a condição  $k_1^2 + k_2^2 > 2 K_{F_2}^2$ .

A resolução analítica da equação (V.18) não parece ser trivial. É usual supor que  $\sigma_{NN}^T(q)$  é igual a uma constante,  $\sigma_0$ . Neste caso, temos que<sup>57), 58)</sup>

$$\bar{\sigma}_{NN} = \begin{cases} \sigma_0 \left[ 1 - \frac{7}{5} \left( \frac{K_{F_2}^2}{k_1^2} \right)^{5/2} \right], & \text{para } k_1^2 \geq 2 K_{F_2}^2 \\ \sigma_0 \left[ 1 - \frac{7}{5} \left( \frac{K_{F_2}^2}{K_{F_1}^2} \right) + \frac{2}{5} \frac{K_{F_2}^2}{k_1^2} \left( 2 - \frac{k_1^2}{K_{F_2}^2} \right)^{5/2} \right] & \text{para } k_1^2 \leq 2 K_{F_2}^2 \end{cases} \quad (\text{V.19})$$

$$\bar{\sigma}_{NN} = \begin{cases} \sigma_0 \left[ 1 - \frac{7}{5} \left( \frac{K_{F_2}^2}{K_{F_1}^2} \right) + \frac{2}{5} \frac{K_{F_2}^2}{k_1^2} \left( 2 - \frac{k_1^2}{K_{F_2}^2} \right)^{5/2} \right] & \text{para } k_1^2 \leq 2 K_{F_2}^2 \end{cases} \quad (\text{V.20})$$

A figura (V.2) ilustra o comportamento de  $\sigma_{NN}^T$  com  $E_L$  seguido pelos dados experimentais<sup>2)</sup>

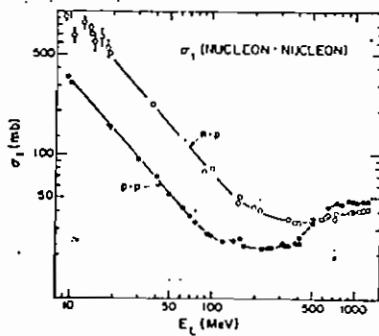


Figura (V.2)

Vê-se que a hipótese  $\sigma_{NN}^T(q) = \sigma_0$  é demasiada forte, já que os dados apresentam uma forte dependência com a energia.

A equação (V.15) pode ser escrita numa outra forma<sup>11)</sup>

$$\bar{\sigma}_{NN} = \frac{1}{k_1 V_{F_2}} \int d\Omega_{k_2} |k_1 - k_2| \frac{\sigma_{NN}^T(q)}{4\pi} \int d\Omega \text{ Pauli}, \quad (\text{V.21})$$

onde as leis de conservação e a condição exigida pelo princípio de Pauli serão incluídas na região angular de espalhamento contida na integral  $\int d\Omega_{\text{Pauli}}$ . Esta forma alternativa de se obter a seção de choque entre dois nêutrons corrigidos o princípio de Pauli na colisão nêutron-núcleo, se presta, principalmente, para a generalização do caso em que a colisão ocorre estando os nêutrons contidos em dois núcleos (colisão núcleo-núcleo).

Estamos tratando da colisão entre um nêutron incidente, com momento  $|k_1|$  medindo em relação a esfera de Fermi de raio  $K_{F_2}$ , e um nêutron do núcleo alvo com momento  $|k_2|$ . No modelo de gás de Fermi usado aqui, o núcleo alvo é representado por uma esfera de raio  $K_{F_2}$ . Na figura (V.3) representamos o estado inicial ( $|k_1|, |k_2|$ ) antes de ocorrer a colisão e o estado final ( $|k'_1|, |k'_2|$ ) depois da colisão.

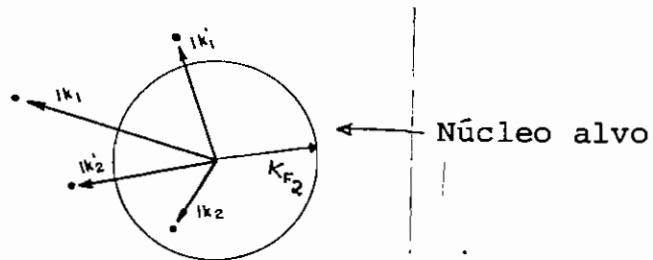


Figura V.3

O momento  $|k_1|$  e  $|k_2|$  define o momento total  $2|p|$ ,  $2|p| = |k_1| + |k_2|$  e o momento relativo  $2q|$ ,  $2q| = |k_1| - |k_2|$ . O momento  $|p|$  define o centro da esfera de espalhamento com raio  $q|$ . Esta esfera está representada na figura (V.4) pelas linhas tracejadas

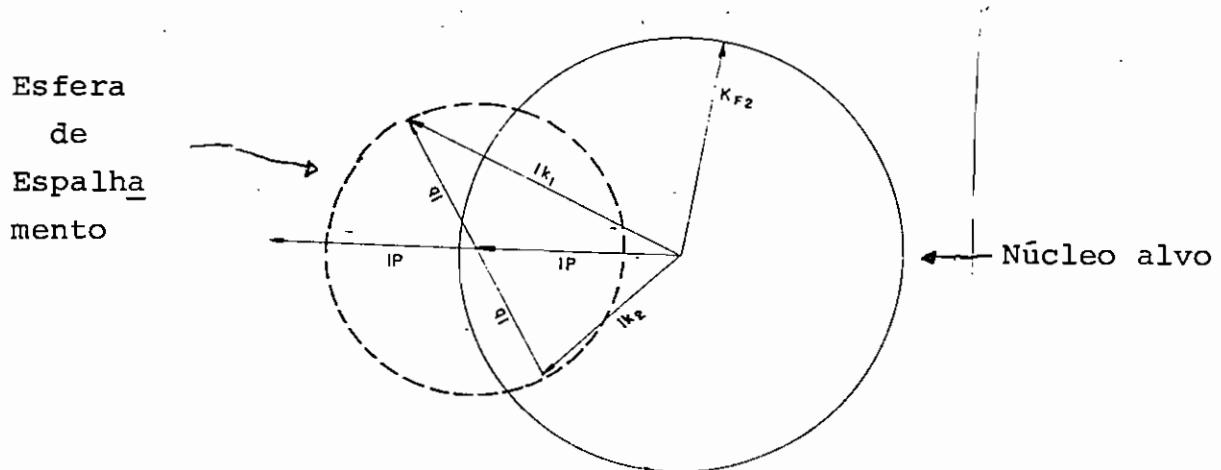


Figura V.4

Ao impor a conservação do momento linear estamos exigindo que o centro da esfera de espalhamento se mantém fixo, durante a colisão. De fato,  $|p| = |p'|$  ou  $2|p| = 2|p'|$ . Da conservação da energia e do momento linear conclui-se que  $|k_1| \cdot |k_2| = |k'_1| \cdot |k'_2|$  e  $q = q'$ . Isto significa que o raio da esfera de espalhamento é outra quantidade conservada. Da definição de  $|p|$  e  $|q|$  conclui-se que

$$|k'_1| = |p + q| \quad (V.22)$$

$$|k'_2| = |p - q| \quad (V.23)$$

A condição dada por (V.8) e exigida pelo princípio de Pauli implica que

$$|p + q| > K_{F_2} \quad (V.24)$$

$$|p - q| > K_{F_2} \quad (V.25)$$

A condição (V.24) significa, geometricamente, que a região angular permitida pelo princípio de Pauli, na esfera de espalhamento, não deve incluir os pontos de intersecção entre a esfera do núcleo alvo e a esfera de espalhamento. Vide figura (V.5)

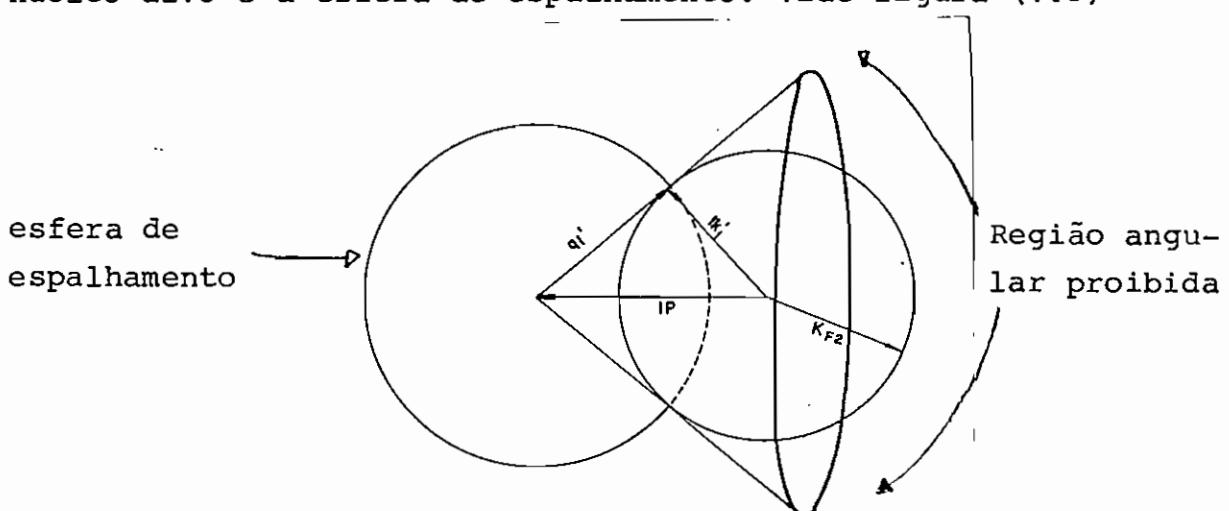


Figura V.5

A condição (V.25) exclui a região angular que está tracejada na figura (V.6)

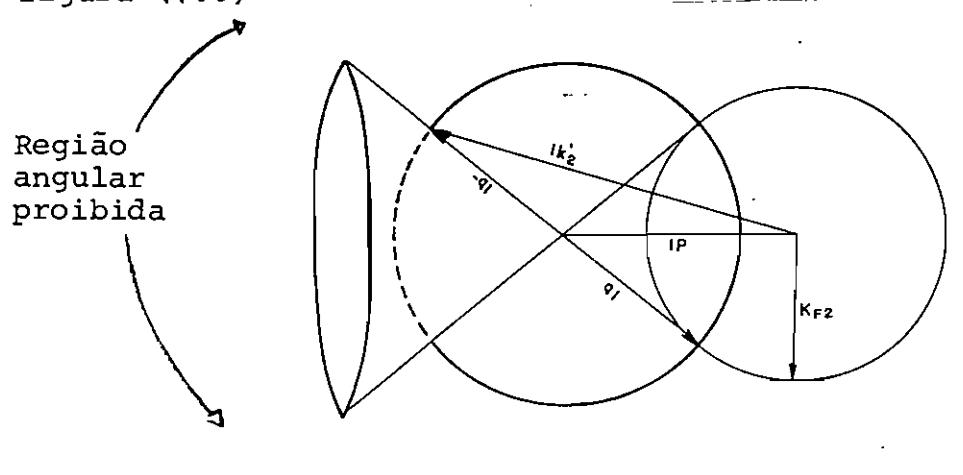


Figura V.6

Portanto, as condições (V.24) e (V.25) equivalem geometricamente a excluir da região angular de dispersão, a região angular de dispersão tracejada, cones mostrados na figura (V.7)

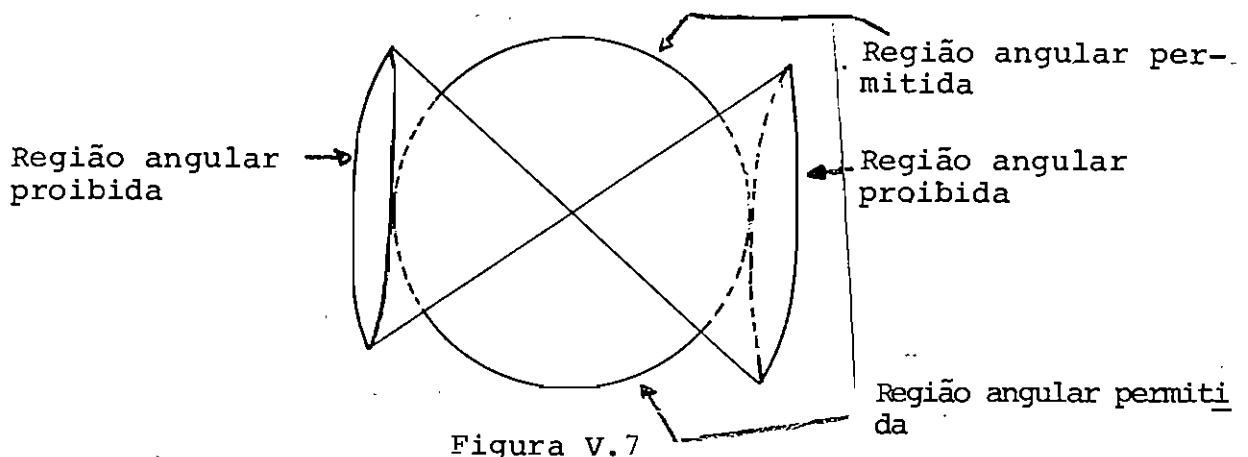


Figura V.7

Assim, a região proibida pelo princípio de Pauli exclui os pontos contidos nos cones da figura (V.7), no cálculo de  $\int d\Omega_{\text{Pauli}}$ , na equação (V.21).

V.2 - Cálculo de  $\bar{\sigma}_{NN}(E)$  para o Espalhamento NN no Sistema Núcleo-Núcleo

Tratamos no caso anterior, da redução da seção de choque náucleon-náucleon devido ao princípio de Pauli. O processo ocorria entre um náucleon e um alvo composto por vários náucleons. A correspondente equação (V.21), para o processo náucleo-náucleo, apresenta a seguinte forma<sup>59)</sup>

$$\bar{\sigma}_{NN}(K, K_{F_1}, K_{F_2}) = \frac{1}{V_{F_1} V_{F_2}} \iint d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \frac{2q}{K} \frac{\sigma_{NN}^T(q)}{4\pi} \int d\Omega_{\text{Pauli}}, \quad (\text{V.26})$$

onde  $V_{F_1} = \frac{4}{3} \pi K_{F_1}^3$  e  $V_{F_2} = \frac{4}{3} \pi K_{F_2}^3$  são, os volumes no espaço dos momentos, da esfera do náucleo projétil e do náucleo alvo, respectivamente e  $2q = |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 + \mathbf{K}|$ . O momento relativo por náucleon  $K$  está definido por

$$|\mathbf{K}| = \frac{K_{\text{LAB}}}{A} = \frac{K_{\text{c.m.}}}{\mu}, \quad (\text{V.27})$$

onde  $A$  e  $\mu$  são, respectivamente, a massa do náucleo projétil e a massa reduzida do sistema. O momento  $K$  apresenta, assim, a seguinte relação

$$K = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2} (E_{\text{c.m.}} - V_C + |V_N|)}, \quad (\text{V.28})$$

onde  $E_{\text{c.m.}}$ ,  $V_C$  e  $V_N$  são respectivamente a energia de centro de massa, o potencial coulombiano e o potencial nuclear real. A figura (V.8) ilustra as esferas de Fermi correspondente aos náucleos envolvidos e a esfera de espalhamento.

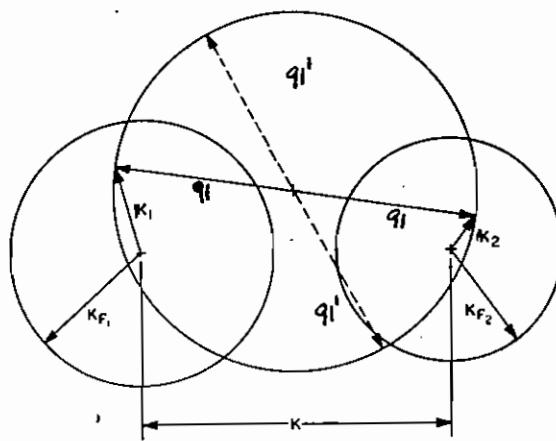


Figura V.8

A região angular proibida pelo princípio de Pauli está representada, na figura (V.9), pela região rachurada da esfera de espalhamento.

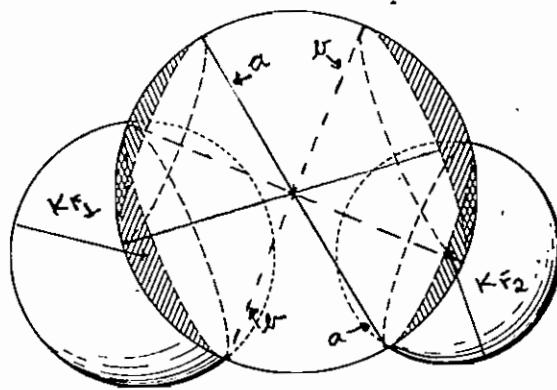


Figura V.9

A região angular permitida pelo princípio de Pauli é aquela resultante, na esfera de espalhamento, da exclusão dos cones  $a$  e  $b$ . Da figura (V.9), que ilustra o caso particular em que há regiões comuns entre os dois cones (ampulhetas), concluimos que devemos ter cuidado na determinação geométrica da região de espalhamento permitida pelo princípio de Pauli, a fim de evitar erros. A integral da equação (V.26), referente a região angular em estudo apresenta a seguinte forma

$$\int d\Omega_{\text{Pauli}} = \Omega_{\text{Pauli}}(\theta_a, \theta_b, \theta) , \quad (\text{V.29})$$

onde

$$\Omega_{\text{Pauli}}(\theta_a, \theta_b, \theta) = 4\pi - 2\Omega_a - 2\Omega_b + \bar{\Omega}. \quad (\text{V.30})$$

No apêndice A mostraremos como obter estas expressões. Da equação (V.30),  $4\pi$ ,  $\Omega_a$  e  $\Omega_b$  representam a região angular total, a região angular dos cones  $a$  e  $b$ , respectivamente. Quanto a região  $\bar{\Omega}$  ela representa os casos, como o ilustrado na figura (V.9), onde há intersecção entre  $\Omega_a$  e  $\Omega_b$ , na esfera de espalhamento. As regiões  $\Omega_a$  e  $\Omega_b$  apresentam a seguinte expressão

$$\Omega_a = 2\pi(1 - \cos \theta_a), \quad (\text{V.31})$$

onde

$$\cos \theta_a = \frac{p^2 + q^2 - K_F^2}{2pq} \quad (\text{V.32})$$

e

$$\Omega_b = 2\pi(1 - \cos \theta_b), \quad (\text{V.33})$$

onde

$$\cos \theta_b = \frac{b^2 + q^2 - K_F^2}{2bq}. \quad (\text{V.34})$$

Os vetores  $p$ ,  $q$  e  $b$  são definidos como segue

$$2|p| = |k_2 + lK + lk_1|, \quad (\text{V.35})$$

$$2|q| = |k_2 - lK - lk_1|, \quad (\text{V.36})$$

$$|b| = |lK - |p|| \quad (\text{V.37})$$

Eles podem ser visualizados na figura (V.10)

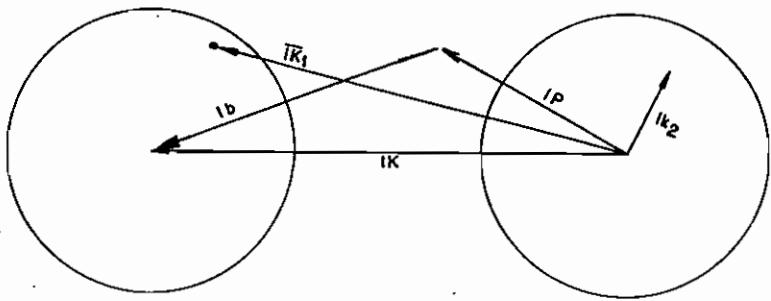


Figura V.10

A região angular de intersecção  $\bar{\Omega}$  pode assumir duas expressões:<sup>73)</sup>

$$1) \bar{\Omega} = 2\Omega_i(\theta, \theta_a, \theta_b) + 2\Omega'_i(\pi-\theta, \theta_a, \theta_b), \quad \theta + \theta_a + \theta_b > \pi \quad (V.38)$$

$$2) \bar{\Omega} = 2\Omega_i(\theta, \theta_a, \theta_b), \quad \theta + \theta_a + \theta_b \leq \pi, \quad (V.39)$$

onde

$$\cos \theta = \frac{K^2 - p^2 - b^2}{2pb}. \quad (V.40)$$

A região angular  $\Omega_i$  assume os valores

$$a) \Omega_i \equiv 0, \quad \theta \geq \theta_a + \theta_b \quad (V.41)$$

$$b) \Omega_i \equiv 2 \left\{ \cos^{-1} \left[ \frac{\cos \theta_b - \cos \theta \cos \theta_a}{\sin \theta_a \sqrt{\cos^2 \theta_a + \cos^2 \theta_b - 2 \cos \theta \cos \theta_a \cos \theta_b}} \right] + \right.$$

$$+ \cos^{-1} \left[ \frac{\cos \theta_a - \cos \theta \cos \theta_b}{\sin \theta_b \sqrt{\cos^2 \theta_a + \cos^2 \theta_b - 2 \cos \theta \cos \theta_a \cos \theta_b}} \right] -$$

$$- \cos \theta_a \cos^{-1} \left[ \frac{\cos \theta_b - \cos \theta \cos \theta_a}{\sin \theta \sin \theta_a} \right] - \cos \theta_b \cos^{-1} \left[ \frac{\cos \theta_a - \cos \theta \cos \theta_b}{\sin \theta \sin \theta_b} \right],$$

$$|\theta_b - \theta_a| \leq \theta \leq \theta_a + \theta_b \quad (V.42)$$

$$c) \quad \Omega_i = \Omega_b, \quad \theta_a \geq \theta_b \quad e \quad \theta \leq |\theta_b - \theta_a| \quad (V.43)$$

$$d) \quad \Omega_i = \Omega_a, \quad \theta_a \leq \theta_b \quad e \quad \theta \leq |\theta_b - \theta_a| \quad (V.44)$$

A expressão (V.41) corresponde aos casos onde não existe nenhuma intersecção entre  $\Omega_a$  e  $\Omega_b$ , enquanto que as expressões (V.42), (V.43) e (V.44), aqueles casos onde há intersecção. A expressão (V.43) e (V.44) significa que  $\Omega_a$  está contida em  $\Omega_b$  e  $\Omega_b$  está contida em  $\Omega_a$ , respectivamente (vide figura V.11).

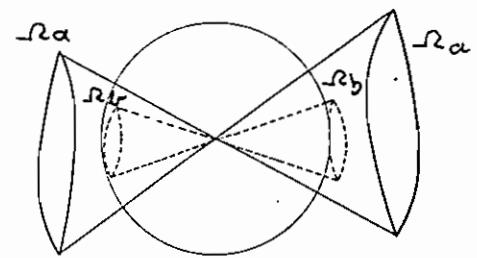
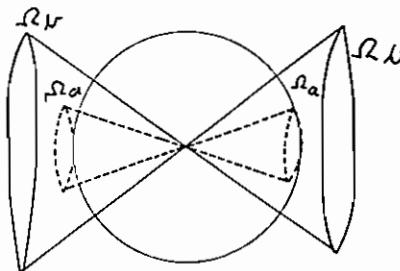


Figura V.11

Convém observar que, nas expressões (V.32) e (V.34) que definem os ângulos  $\theta_a$  e  $\theta_b$ , é possível ocorrer casos em que para certos valores de  $p$ ,  $q$  e  $K_{F_1}$  a função cosseno apresenta módulo maior que 1. Estes casos devem ser excluídos, já que  $|\cos \alpha| < 1$ . São eles

$$\cos \theta_a < -1, \quad p + q < K_{F_2} \quad (V.45)$$

$$\cos \theta_a > 1, \quad |p - q| > K_{F_2} \quad (V.46)$$

$$\cos \theta_b < -1, \quad b + q < K_{F_1} \quad (V.47)$$

$$\cos \theta_b > 1, \quad |b - q| > K_{F_1} \quad (V.48)$$

onde (V.45) e (V.47) significa que a esfera de espalhamento se encontra dentro da esfera de Fermi. Portanto, não é possível ocorrer espalhamento para esses núcleons, já que eles vio-

larão o princípio de Pauli. Nestes casos temos que  $\Omega_{\text{Pauli}}(\theta_a, \theta_b, \theta) = 0$ . Quanto as expressões (V.46) e (V.48) temos duas condições, a saber

$$|p-q| > K_{F_2} \quad \left\{ \begin{array}{l} p>q \rightarrow \Omega_a = 0 \\ p<q \rightarrow \Omega_{\text{Pauli}}(\theta_a, \theta_b, \theta) = 0, \end{array} \right. \quad (\text{V.49})$$

$$|p-q| > K_{F_2} \quad \left\{ \begin{array}{l} p>q \rightarrow \Omega_b = 0 \\ p<q \rightarrow \Omega_{\text{Pauli}}(\theta_a, \theta_b, \theta) = 0, \end{array} \right. \quad (\text{V.50})$$

e

$$|b-q| > K_{F_1} \quad \left\{ \begin{array}{l} b>q \rightarrow \Omega_b = 0 \\ b<q \rightarrow \Omega_{\text{Pauli}}(\theta_a, \theta_b, \theta) = 0, \end{array} \right. \quad (\text{V.51})$$

$$|b-q| > K_{F_1} \quad \left\{ \begin{array}{l} b>q \rightarrow \Omega_b = 0 \\ b<q \rightarrow \Omega_{\text{Pauli}}(\theta_a, \theta_b, \theta) = 0, \end{array} \right. \quad (\text{V.52})$$

Nos casos (V.49) e (V.51) a esfera de espalhamento não intercepta a esfera de gás de Fermi. Já os casos (V.50) e (V.52) significam que a esfera de espalhamento situa dentro da esfera de Fermi.

A função  $\cos \theta$  definida pela equação (V.40) não assume valores cujo módulo é maior que 1. Isto se deve ao fato da relação  $|b| = |K - p|$ , dada pela equação (V.37) definir esta função.

Na equação (V.26) nota-se que a seção de choque núcleon-núcleon, corrigido o princípio de Pauli, depende do momento de Fermi  $K_{F_1}$  e  $K_{F_2}$ . Estes momentos são determinados a través da densidade de matéria nuclear. Como mostramos, no apêndice C, dentro do modelo de gás de Fermi  $K_{F_1}$  e  $K_{F_2}$  são dados por

$$K_F^2(r) = \left( \frac{3}{2} \pi^2 \rho(r) \right)^{2/3} + \frac{5}{2} \xi \left( \frac{\nabla \rho}{\rho} \right)^2, \quad (\text{V.53})$$

onde o segundo termo está associado a correção de superfície.<sup>72)</sup>

A expressão para a seção de choque núcleon-núcleon efetiva, dada pela equação (V.26), é igual a forma apresentada por Di Giacomo et al.<sup>59)</sup> e extremamente semelhante a expressão de Saloner et al.<sup>18)</sup>. Este último incorreu num erro trigo-

vial, já que esqueceu de dividir por um dos dois volumes,  $V_{F_1}$  ou  $V_{F_2}$ , da esfera de Fermi.

A resolução analítica da equação (V.26) parece ser inviável. Uma solução aproximada, poderia implicar numa redução da confiabilidade do modelo. Assim, optamos pela determinação de  $\bar{\sigma}_{NN}(k, K_{F_1}, K_{F_2})$  através de um cálculo numérico.

### V.3 - Resultados Numéricos de $\bar{\sigma}_{NN}(K, K_{F_1}, K_{F_2})$

Nas figuras (V.12), (V.13), (V.14) e (V.15) apresentamos o comportamento de  $\bar{\sigma}_{pp}$  e  $\bar{\sigma}_{NP}$  efetivo, isto é, considerando o efeito do princípio de Pauli, juntamente com as seções de choques livre, em função de  $K$ , para diversos valores de  $K_{F_1}$  e  $K_{F_2}$ . O cálculo numérico das seções de choque efetivas foi feito da seguinte forma: primeiramente, foi especificado o valor de  $K$ ,  $K_{F_1}$  e  $K_{F_2}$ . Com estas quantidades especificadas, integrou-se numericamente em  $k_1$  e  $k_2$ , através da equação (V.26). (Para maiores detalhes do cálculo numérico vide Apêndice B). Para cada vetor  $|k_1$  e  $|k_2$  determinou-se o valor da região angular permitida pelo princípio de Pauli,  $\Omega_{Pauli}(\theta, \theta_a, \theta_b)$ . O resultado obtido concorda com o método utilizado por Di Giacomo et al.<sup>59</sup>). Neste método, a região angular  $\Omega_{Pauli}(\theta, \theta_a, \theta_b)$  foi obtida implicitamente no programa de cálculo numérico contrastando com a expressão usada por nós. Além disso, Di Giacomo usou o método Monte Carlo para a determinação numérica das seções de choque efetivas.

As figuras apresentadas, ilustram as seções de choque núcleon-núcleon efetivas para as colisões núcleon-núcleo e núcleo-núcleo. Nota-se que a redução devido ao princípio de Pauli é maior na colisão núcleo-núcleo que na colisão núcleon-núcleo, a energias mais altas. A energias mais baixas a situação se inverte até que em  $K < K_{F_2}$ , a seção de choque efetiva, no sistema núcleon-núcleo, é nula. Isto ocorre, já que a estas energias o núcleon projétil já se encontra dentro da esfera de Fermi do núcleo alvo e portanto, dois núcleons estão ocupando o mesmo estado quântico. A essas energias, no entanto, as seções de choque núcleon-núcleon efetiva no sistema núcleo-núcleo não é nula. Isto é decorrente dos núcleons da superfície que possuem ainda, energias suficientes devido ao movimento Fermiônico, para espalhar os núcleons na região angular permitida pelo princípio de Pauli.

Nas figuras apresentadas, nota-se que a medida que

$K_{F_1}$  vai diminuindo o comportamento da seção de choque núcleon-núcleon corrigido pelo princípio de Pauli no sistema n úcleo-n úcleo se aproxima ao comportamento da mesma seção de choque para o sistema n úcleon-n úcleo. De fato, isto já era esperado pois o proj étil extenso (n úcleo proj étil) vai se tornando pontual (n úcleon) no limite  $K_{F_1} \rightarrow 0$ . Isto corresponde a eliminação da integral em  $k_1$ , e substituir K por  $k_1$  na equação (V.26). Este limite é justamente a passagem da equação (V.26) para a equação (V.21).

Em muitas análises teóricas, assumem que a seção de choque n úcleon-n úcleon livre é uma constante com a energia e calculam o efeito de Pauli como um fator de escala, tal com expressa as equações (V.19) e (V.20). Na região de interesse para colisão entre dois n úcleons, entretanto, a seção de choque livre é fotemente dependente da energia. (Vide comportamento de  $\sigma_{pp}^T$  e  $\sigma_{np}^T$  com K ).

No cálculo realizado, utilizamos a hipótese que as sume ser isotrópica a distribuição angular da seção de choque n úcleon-n úcleon, vide equação (V.14). Esta hipótese é observada a energias mais baixas para o sistema n éutron-pr óton e praticamente a todas energias para o sistema pr óton-pr óton<sup>60</sup>). Nota-se entretanto, que a energias altas, onde o efeito de anisotropia poderia afetar os resultados obtidos, o princípio de Pauli perde seu efeito. Assim, a hipótese feita representa uma boa aproximação dentro do modelo estudado.

Utilizaremos os resultados deste Capítulo para a análise de  $\sigma_R(E)$ .

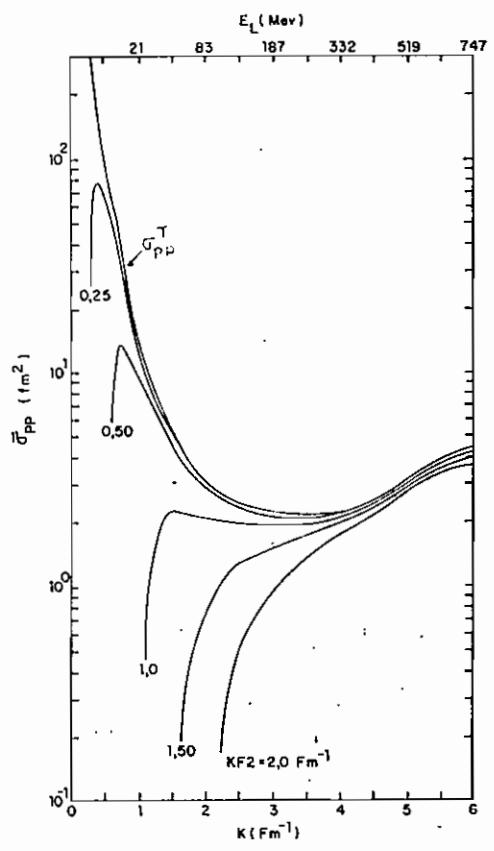


Figura V.12 - Cálculo da Seção de choque total próton-próton corrigido o princípio de Pauli, sistema núcleon-núcleo para vários valores de  $K_{F_2}$ . (Equação V.21).

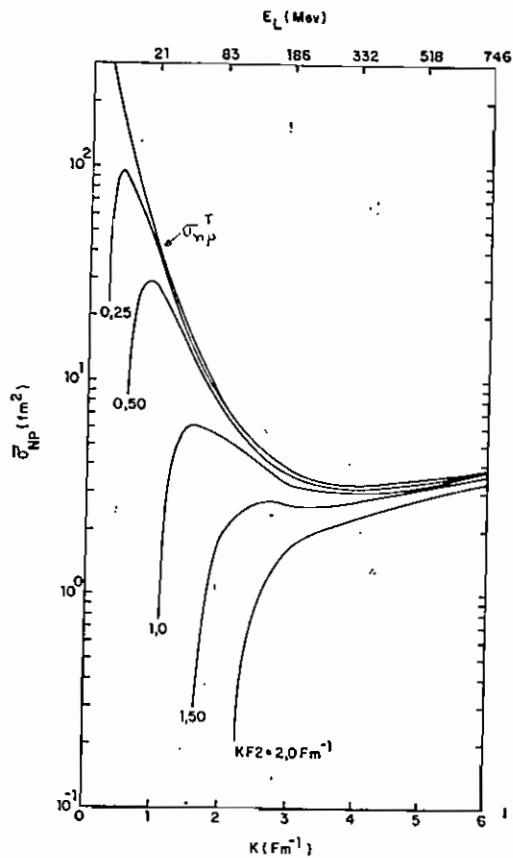


Figura V.13 - Cálculo da seção de choque total nêutron-próton corrigido o princípio de Pauli, sistema núcleon-núcleo para vários valores de  $K_{F_2}$ . (Equação V.21).

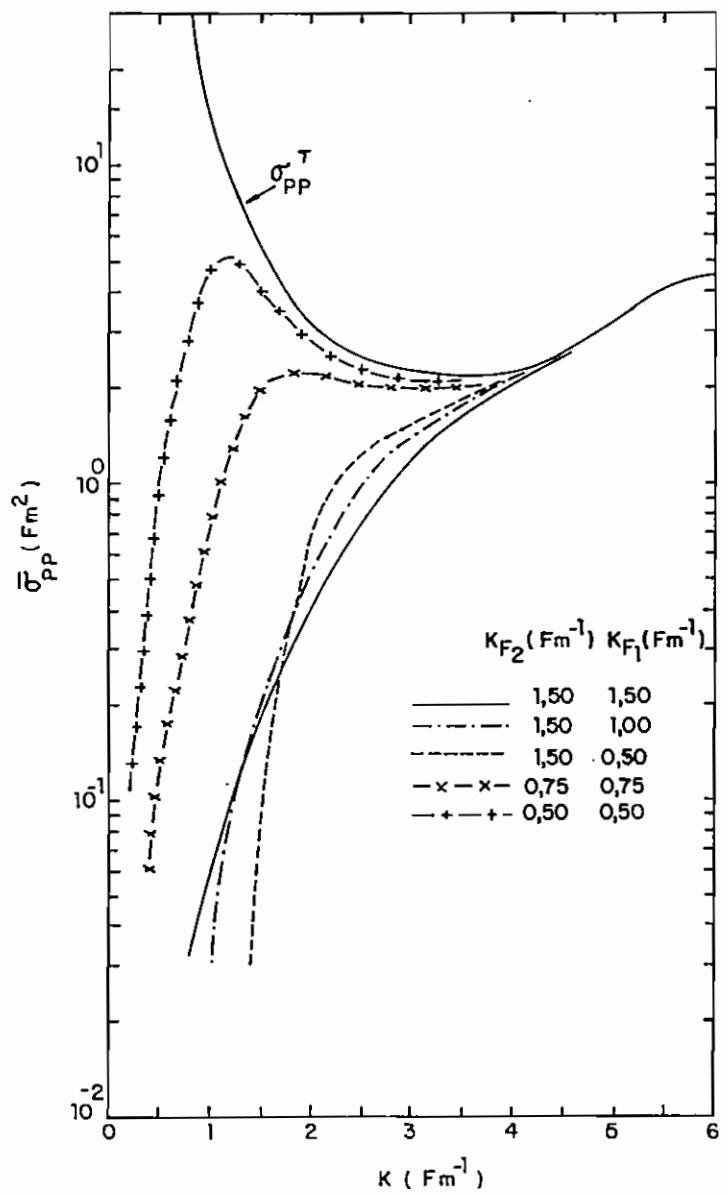


Figura (V.14) - Cálculo da seção de choque total próton-próton corrigido o princípio de Pauli, sistema núcleo ( $K_{F_1}$ ) - núcleo ( $K_{F_2}$ ). Equação (V.26).

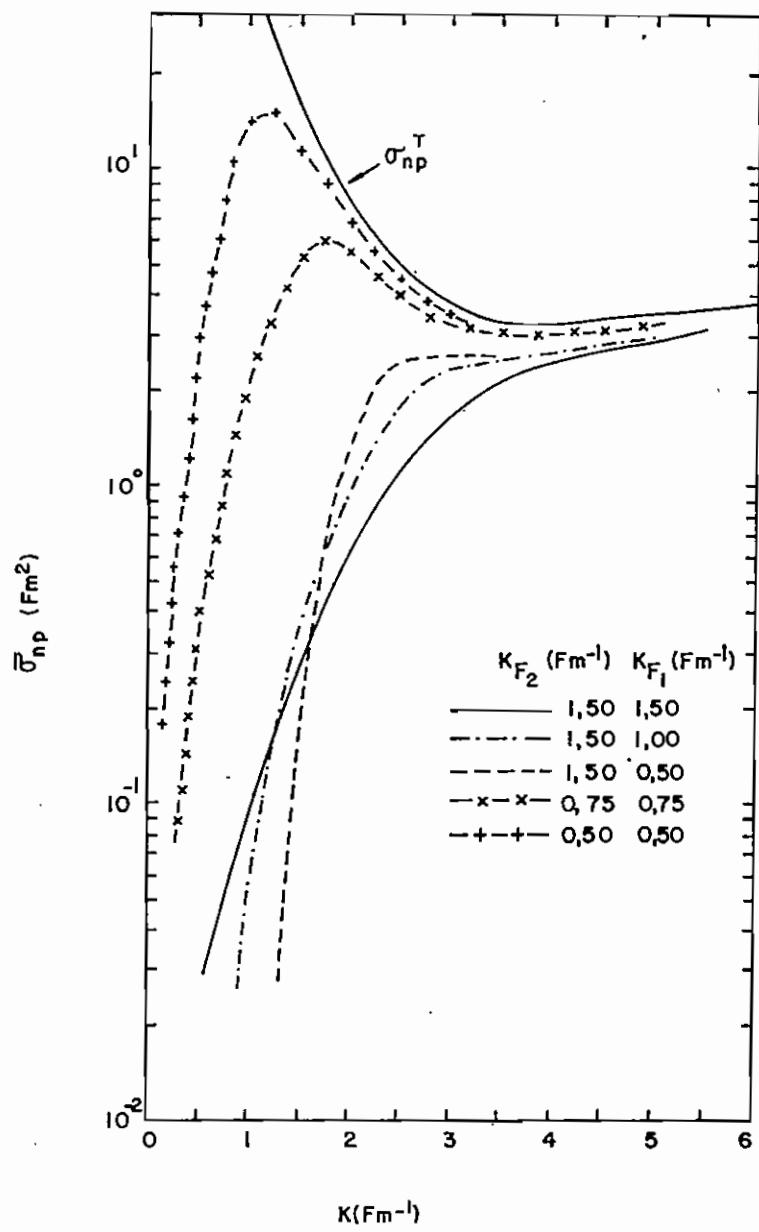


Figura (V.15) - Cálculo da seção de choque total nêutron-próton corrigido o princípio de Pauli, sistema núcleo ( $K_{F_1}$ ) - núcleo ( $K_{F_2}$ ). Equação (V.26).

## VI - Cálculo da Seção de Choque Total de Reação, $\sigma_R(E)$

Neste Capítulo apresentamos os resultados  $\sigma_R(E)$  para alguns sistemas de íons pesados. Escolhemos como projéteis e alvos os núcleos:  $^{12}\text{C}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{90}\text{Zr}$ , e  $^{208}\text{Pb}$ , cujas densidades são mostradas na figura VI.1.

Para facilitar a discussão dos resultados obtidos para  $\sigma_R(E)$  apresentamos primeiro os cálculos intermediários das grandezas físicas que entram no cálculo, procurando entender como os vários efeitos físicos como por exemplo, princípio de Pauli, efeito refrativo, etc. afetam seus valores.

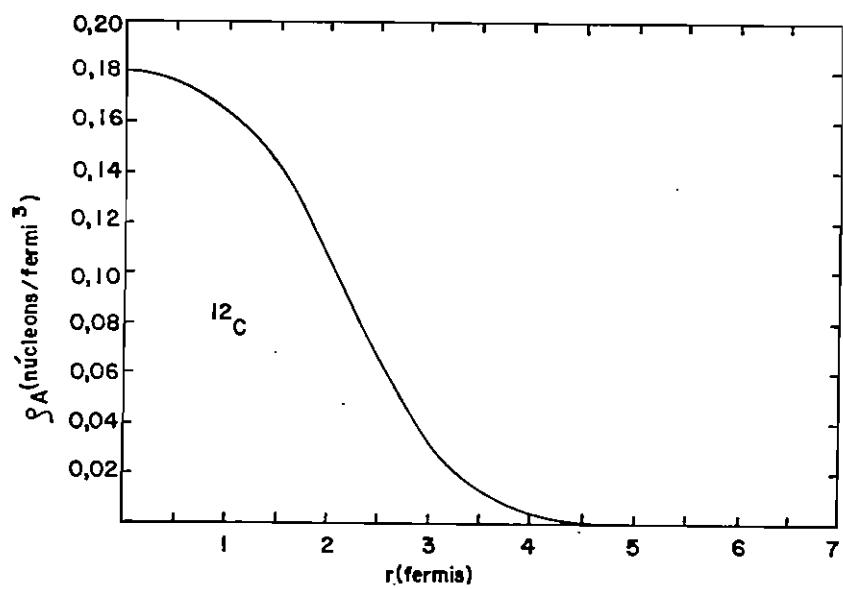


Figura (VI.l.a) - Distribuição radial dos núcleons no  $^{12}\text{C}$ .

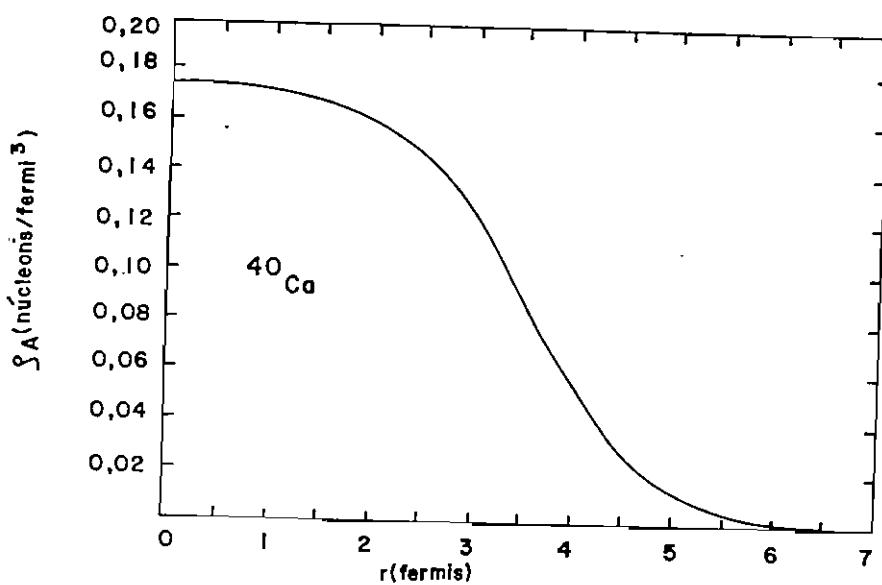


Figura (VI.l.b) - Distribuição radial dos núcleons no  $^{40}\text{Ca}$ .

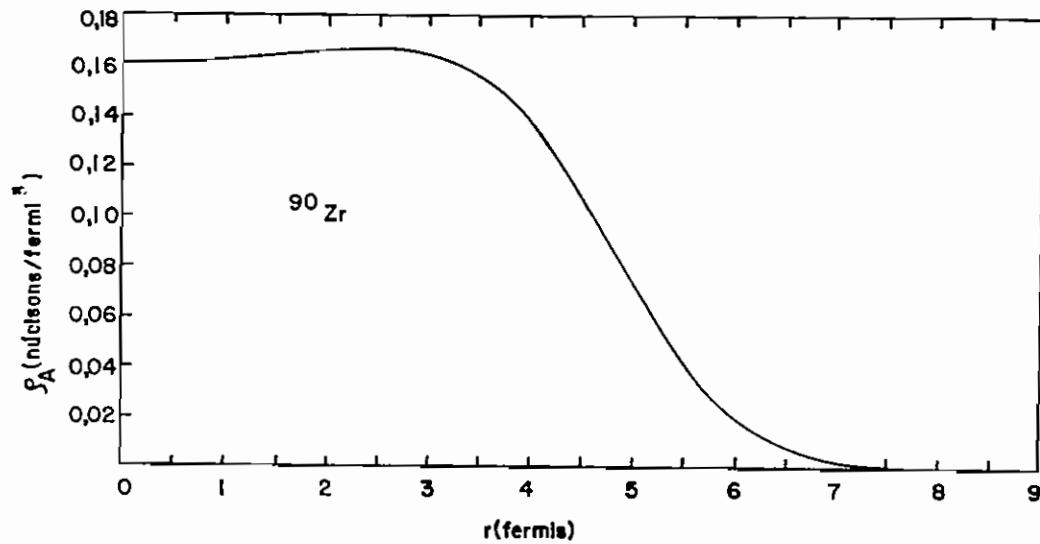


Figura (VI.1.c) - Distribuição radial dos núcleons no  $^{90}\text{Zr}$ .

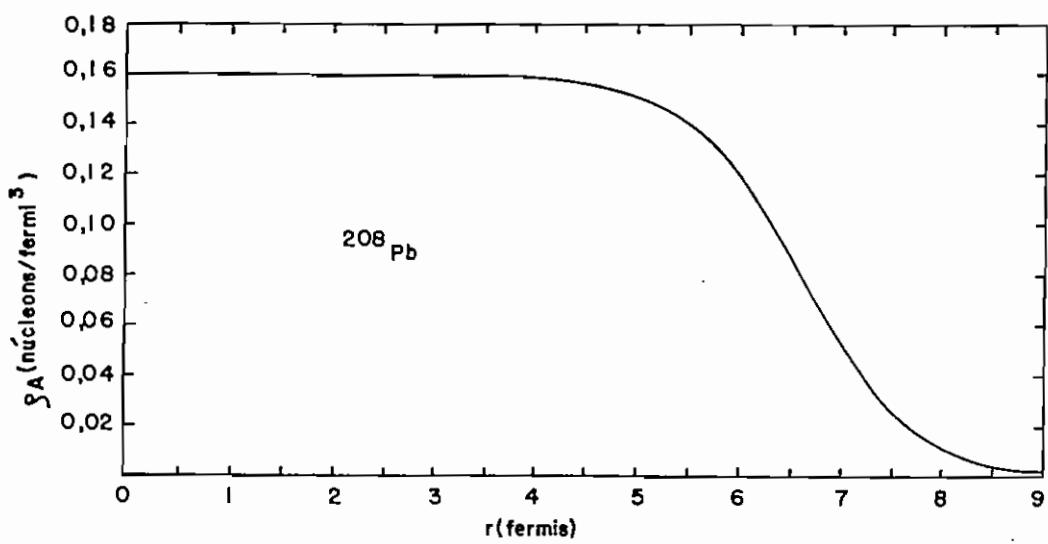


Figura (VI.1.d) - Distribuição radial dos núcleons no  $^{208}\text{Pb}$ .

## VI.1 - Potencial Imaginário Microscópico

Na equação (II.81), apresentamos a expressão do potencial microscópico  $W$  obtido através da teoria de espalhamento múltiplo truncando a série no primeiro termo. A expressão de  $W$  envolve a seção de choque total núcleon-núcleon que deve ser corrigida pelo princípio de Pauli, já que a colisão entre os nucleons ocorre na presença de outros nucleons. Isto foi feito no Capítulo V. Assim, a expressão de  $W$  (equação (II.81)) corrigida pelo princípio de Pauli (equação (V.26)) apresenta a seguinte forma:

$$\bar{W}(E, \mathbf{r}) = - \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m} \frac{(E_{c.m.} - V_C + |V_N|)}{\mu}} \int d\mathbf{r}' \rho_A(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \bar{\sigma}_{NN}(K, K_{F_1}, K_{F_2}) \rho_B(\mathbf{r}') \quad (VI.1)$$

onde  $K_{F_1}$  e  $K_{F_2}$  são os momentos de Fermi dos núcleos A e B, dependentes de  $(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$  e  $(\mathbf{r}')$ , respectivamente.

Para cada ponto  $\mathbf{r}$ , de  $\rho_i(\mathbf{r})$ ,  $i = A$  ou  $B$ , obtemos um momento de Fermi  $K_F(\mathbf{r})$ , através da equação (V.53). Uma vez especificado os valores de  $K_{F_1}$  e  $K_{F_2}$  podemos determinar  $\bar{\sigma}_{NN}(K, K_{F_1}, K_{F_2})$ , através da equação (V.26). O cálculo de  $\bar{\sigma}_{NN}(K, K_{F_1}, K_{F_2})$  exige um tempo computacional muito grande, para cada valor de  $K_{F_1}$  e  $K_{F_2}$ . Ao invés de determinar  $K_{F_1}$  e  $K_{F_2}$  a cada ponto  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}'$  dado, iremos usar o valor médio de  $K_F$  referente a três regiões distintas de  $\rho_i$ : a região interna, intermediária e de superfície. Na tabela (VI.1) apresentamos os valores de  $K_F$  médio ( $K_F^{(p)} =$  momento de Fermi para próton e  $K_F^{(n)} =$  momento de Fermi para nêutron), para os núcleos estudados.

Tabela VI.1: Valores médios do momento de Fermi para prótons ( $\bar{k}_F^{(p)}$ ) e nêutrons ( $\bar{k}_F^{(n)}$ ) referente a três regiões dos núcleos estudados.

	Região radial (fm)	$\bar{k}_F^{(p)} = \bar{k}_F^{(n)}$ (fm $^{-1}$ )		Região radial (fm)	$\bar{k}_F^{(p)} = \bar{k}_F^{(n)}$ (fm $^{-1}$ )
$^{12}\text{C}$	$0 \leq r \leq 1,2$	1,08	$^{90}\text{Zr}$	$0 \leq r \leq 4,2$	1,05
	$1,2 \leq r \leq 3,0$	0,89		$4,2 \leq r \leq 5,6$	0,84
	$3,0 \leq r \leq 4,5$	0,60		$5,6 \leq r \leq 7,0$	0,58
$^{40}\text{Ca}$	$0 \leq r \leq 2,0$	1,08	$^{208}\text{Pb}$	$0 \leq r \leq 5,0$	1,06
	$2,0 \leq r \leq 4,5$	0,90		$5,0 \leq r \leq 7,5$	0,89
	$4,5 \leq r \leq 6,0$	0,54		$7,5 \leq r \leq 10,0$	0,50

Analizando a expressão que determina o potencial microscópico  $W$  dado pela equação (VI.1), nota-se que a dependência radial do potencial é determinada pelas densidades de matéria nuclear dos núcleos envolvidos. A dependência da energia é proveniente de duas fontes: 1) - da própria energia do núcleo incidente e 2) - da seção de choque média nucleon-núcleon corrigido pelo princípio de Pauli (equação (V.26)).

Nas figuras (VI.2)/(VI.4) apresentamos o comportamento radial do potencial  $\bar{W}$  para várias energias, com  $V_C = 0,0$  e  $V_N = 0,0$ . Elas ilustram as seguintes características

- 1) - A magnitude do potencial cresce com a energia.
- 2) - O potencial resultante de sistemas envolvendo um núcleo leve e outro pesado apresenta um máximo na região de superfície do núcleo mais leve.
- 3) - A uma mesma energia, a profundidade de  $W$  é tanto maior quanto mais leves forem os núcleos envolvidos.

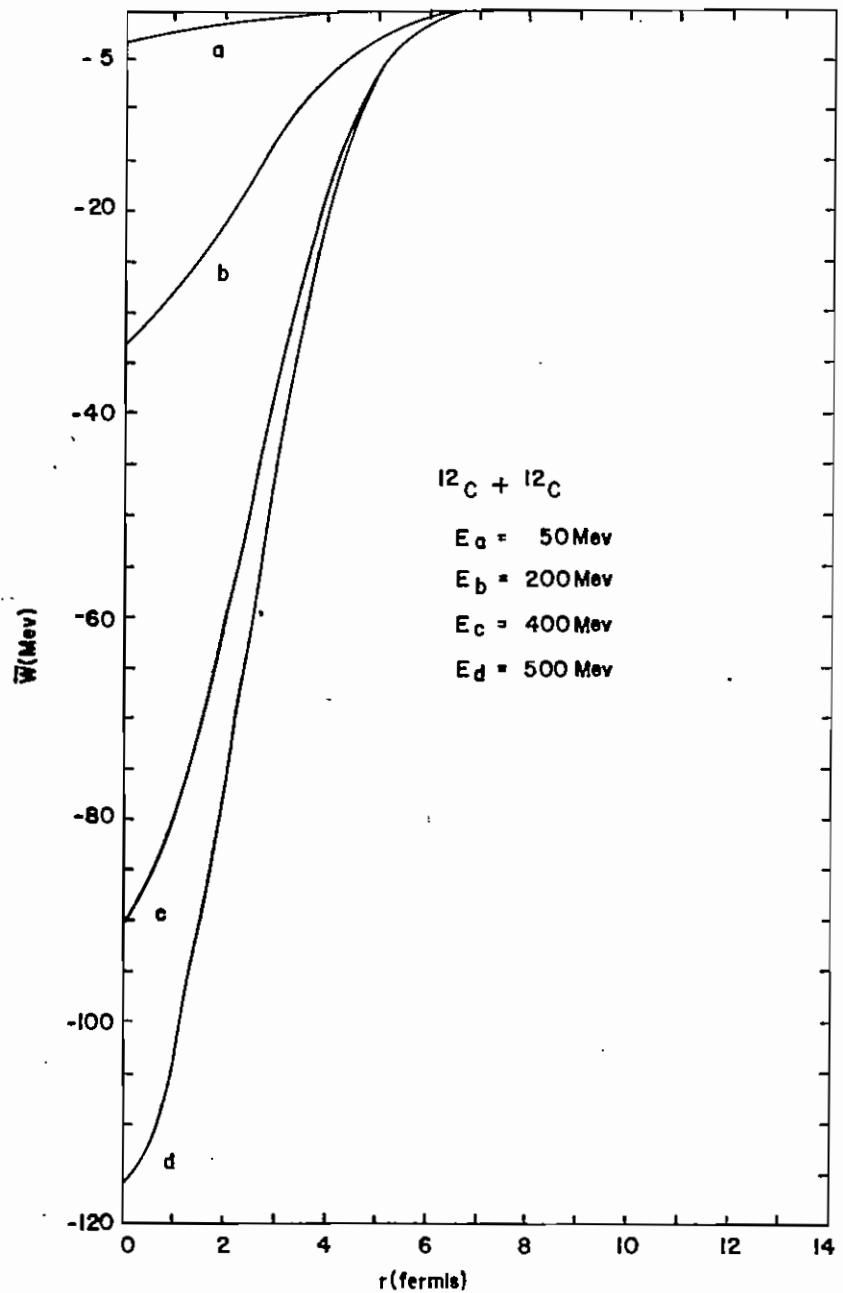


Figura (VI.2) - Potencial imaginário  $\bar{W}$  corrigido pelo princípio de Pauli (equação (VI.1)), com  $V_C = 0$  e  $V_N = 0$ , para várias energias.

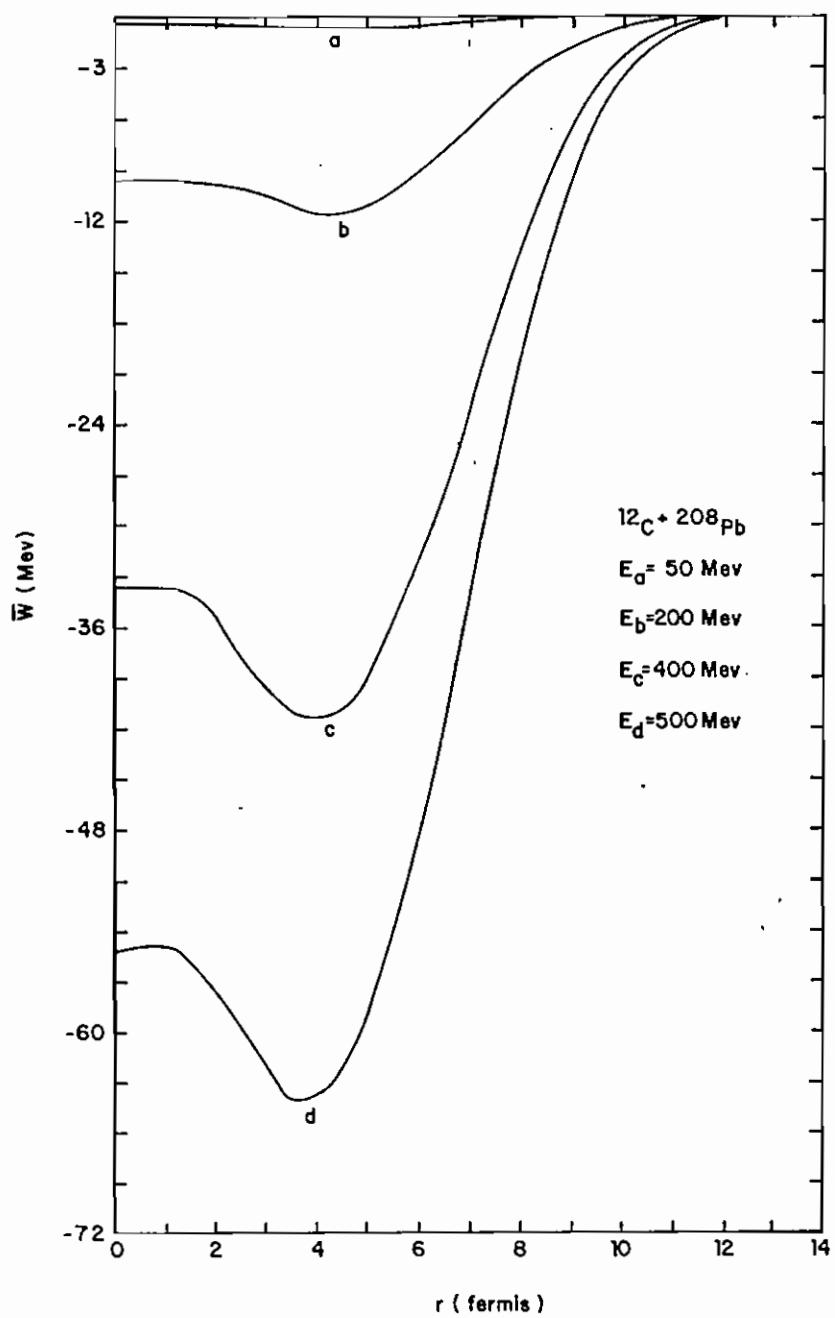


Figura (VI.3) – Potencial imaginário  $\bar{W}$  corrigido pelo princípio de Pauli (equação (VI.1)), com  $V_C = 0$  e  $V_N = 0$ , para várias energias.

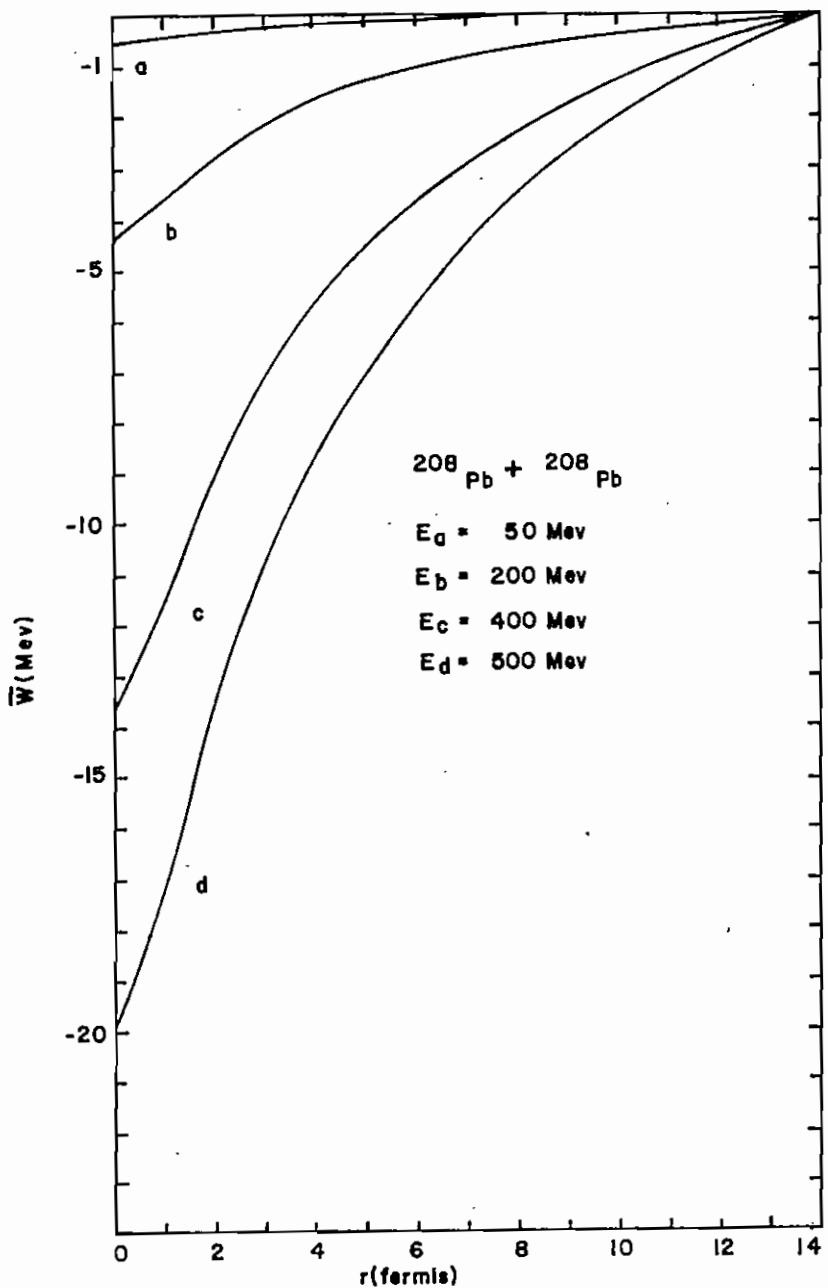


Figura (VI.4) - Potencial imaginário  $\bar{W}$  corrigido pelo princípio de Pauli (equação (VI.1)), com  $V_C = 0$  e  $V_N = 0$  para várias energias.

A primeira característica significa que o número de canais não-elásticos contidos em  $\bar{W}(E,r)$  crescem com a energia.

A segunda característica pode ser explicada pela competição entre o princípio de Pauli e o número de nucleons envolvidos. Na região de máximo do potencial o envolvimento de um número de nucleons menor é compensado por uma seção de choque nucleon-núcleon maior que na parte mais interna do potencial. A seção de choque é maior, pois o efeito do princípio de Pauli (redução na seção de choque) é diretamente proporcional ao número de nucleons envolvidos. Na figura (VI.5) confrontamos a densidade do  $^{208}\text{Pb}$  e  $^{12}\text{C}$  com o potencial imaginário resultante deste sistema. Nota-se que, de fato, a região de máximo do potencial corresponde a região de superfície do  $^{12}\text{C}$  (núcleo mais leve).

O fato da profundidade do potencial para sistemas envolvendo núcleos leves apresentar uma magnitude maior que para sistemas mais pesados, a uma mesma energia, significa que a competição entre o princípio de Pauli, que é inversamente proporcional as quantidades de nucleons, e o número de nucleons envolvidos é dominado pelo primeiro.

O comportamento de  $\bar{W}(E,r)$  com a energia é o resultado da competição entre o princípio de Pauli e a energia do núcleo incidente. Na região mais baixa da energia, os dois efeitos agem no mesmo sentido: crescem com a energia. Portanto, nesta região  $\bar{W}(E,r)$  crescerá com a energia. A energias suficientemente altas o princípio de Pauli deixa de atuar na seção de choque nucleon-núcleon e esta comporta-se como seção de choque livre, isto é, decresce com o aumento da energia. Nesta região da energia, os dois efeitos agem em sentido opostos e o comportamento de  $\bar{W}(E,r)$  com E será determinado pelo domínio de um efeito sobre o outro. É importante salientar que devido a distribuição não uniforme dos nucleons no núcleo o princípio de Pauli atua com intensidade diferente na região radial do núcleo. Ele será maior forte (reduzirá a profundidade do potencial) na região mais interna do núcleo pois nesta região o número de nucleons é maior que na superfície. Espera-se, portanto, que o princípio de Pauli deixará de atuar a energias diferentes para as diversas regiões rá

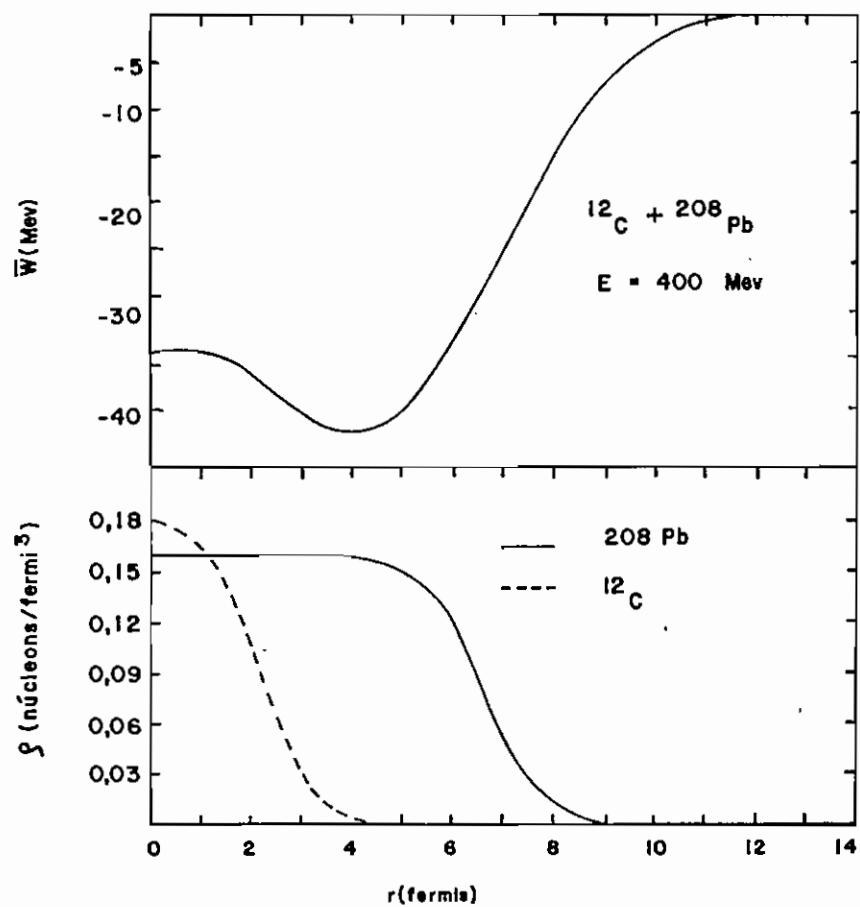


Figura (VI.5) – Potencial imaginário  $\bar{W}$  (equação (VI.1)) confrontando com as densidades dos núcleons dos núcleos envolvidos.

dial do núcleo.

A energias por núcleon acima de aproximadamente 140 Mev (no sistema de C.M.) haverá criação de pions e a seção de choque núcleon-núcleon voltará a crescer e o mesmo ocorrerá com  $\bar{W}$ .

Nas figuras (VI.6) e (VI.7) comparamos o comportamento do potencial imaginário  $\bar{W}(E,r)$  considerando o princípio de Pauli (equação (VI.1)) e sem incluí-lo (equação II.81)  $W(E,r)$  para dois sistemas: um leve,  $^{12}C + ^{12}C$  e um pesado,  $^{208}Pb + ^{208}Pb$ , com  $V_C = 0,0$  e  $V_N = 0,0$ .

Nota-se que  $W(E,r)$  apresenta um comportamento com a energia inverso a  $\bar{W}(E,r)$ . O primeiro  $W(E,r)$  (o segundo  $\bar{W}(E,r)$ ) decresce (cresce com a energia).

O decrescimento de  $W(E,r)$ , com o aumento da energia é determinado pela seção de choque núcleon-núcleon livre. Para cada sistema existe uma energia a partir da qual  $\bar{W}(E,r)$  começa a apresentar o mesmo comportamento de  $W(E,r)$ . Nesta região da energia o princípio de Pauli perde seu efeito e  $\sigma_{NN}^T(E)$  (equação (V.26) comporta-se como  $\sigma_{NN}^T(E)$  (equação (II.84))), seção de choque livre.

Apresentamos nas figuras (VI.7.a)/(VI.7.c) o comportamento do potencial imaginário  $\bar{W}(E,r)$  com  $V_C \neq 0$  (equação (II.4)) e  $V_N \neq 0$  (equação (II.6)) para vários sistemas.

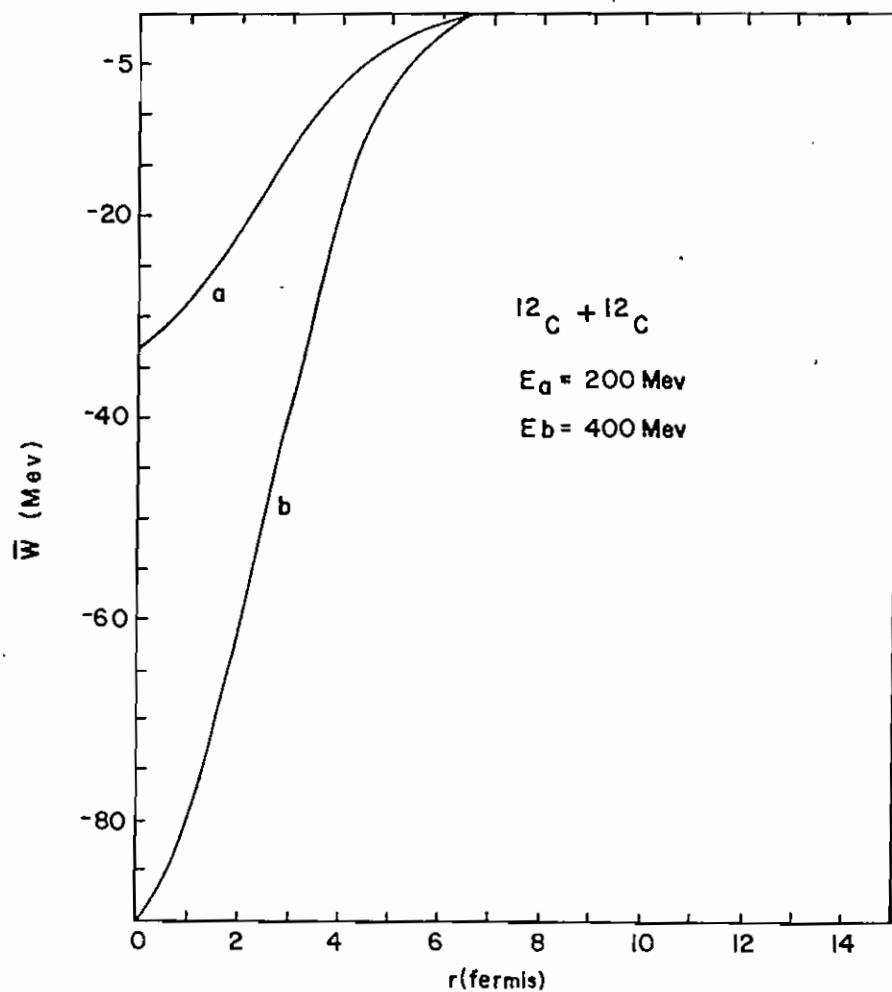
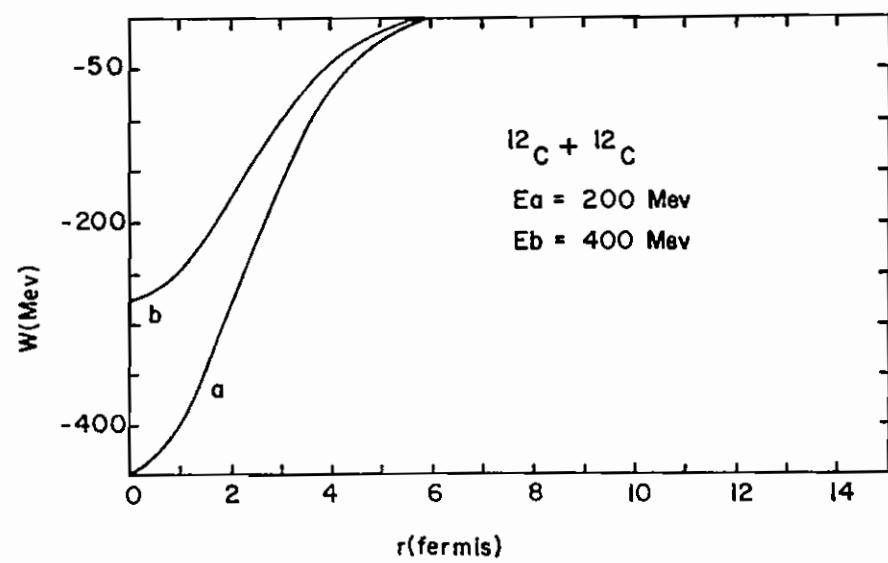


Figura (VI.6) – Confronto entre  $W$  (sem princípio de Pauli) e  $\bar{W}$  (com princípio de Pauli).

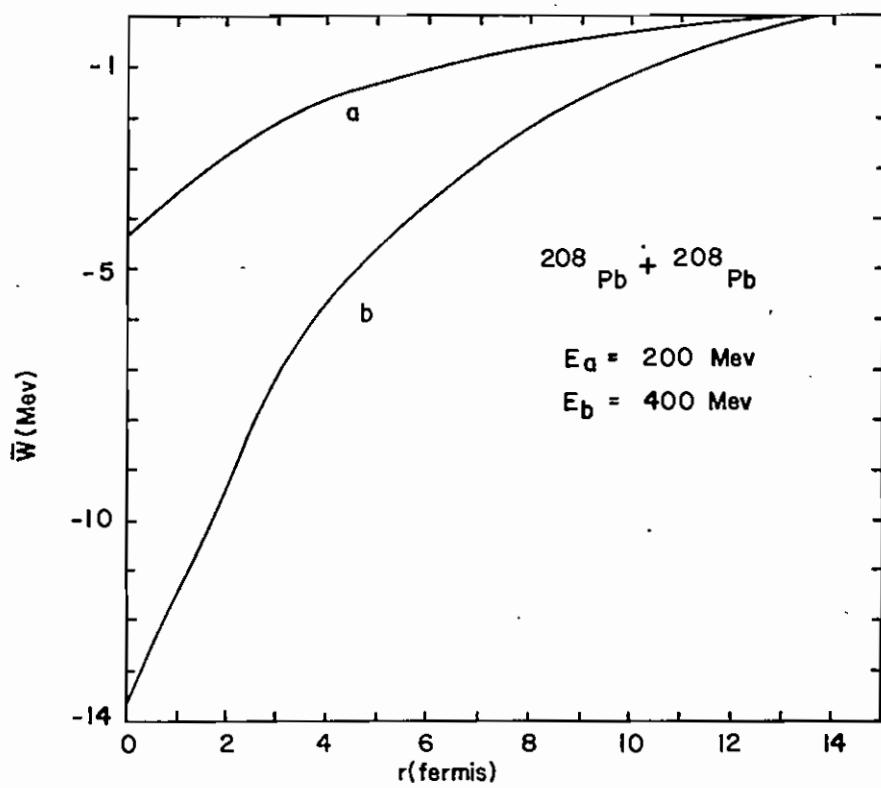
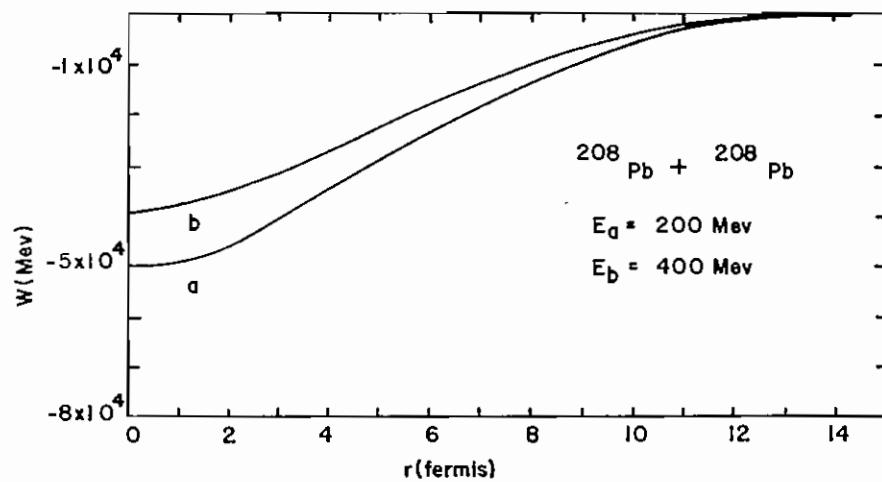


Figura (VI.7) – Confronto entre  $W$  (sem princípio de Pauli) e  $\bar{W}$  (com princípio de Pauli)

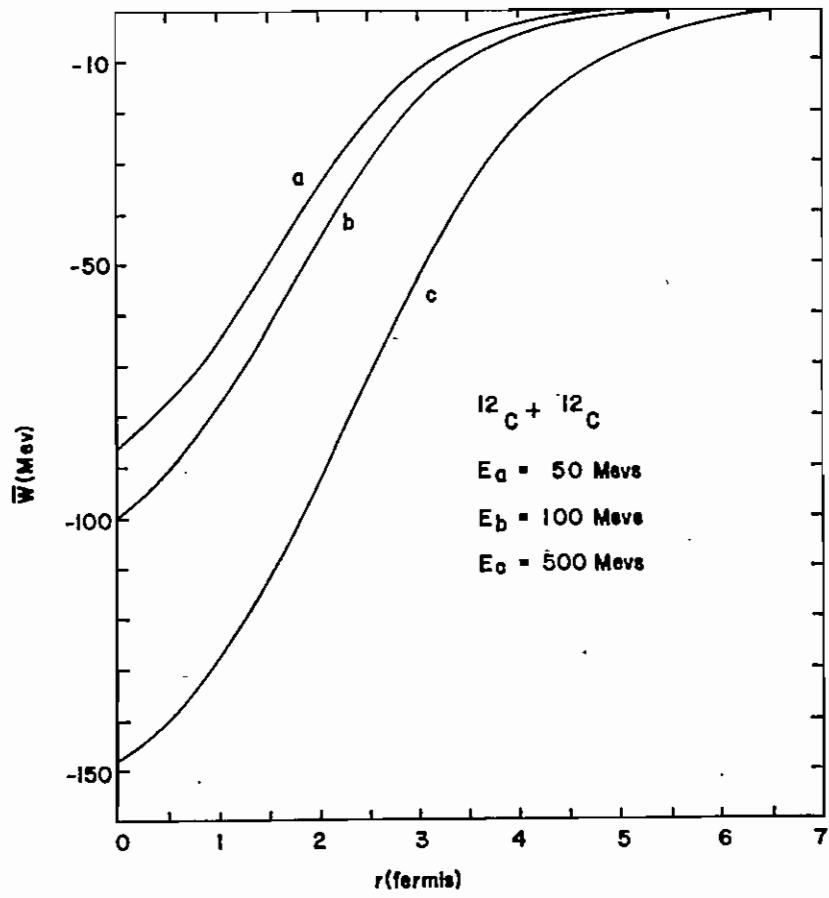


Figura (VI.7.a.) - Potencial imaginário  $\bar{W}$  corrigido pelo princípio de Pauli (equação (VI.1)), com  $V_C \neq 0$  (equação (II.4)) e  $V_N \neq 0$  (equação (II.6)).

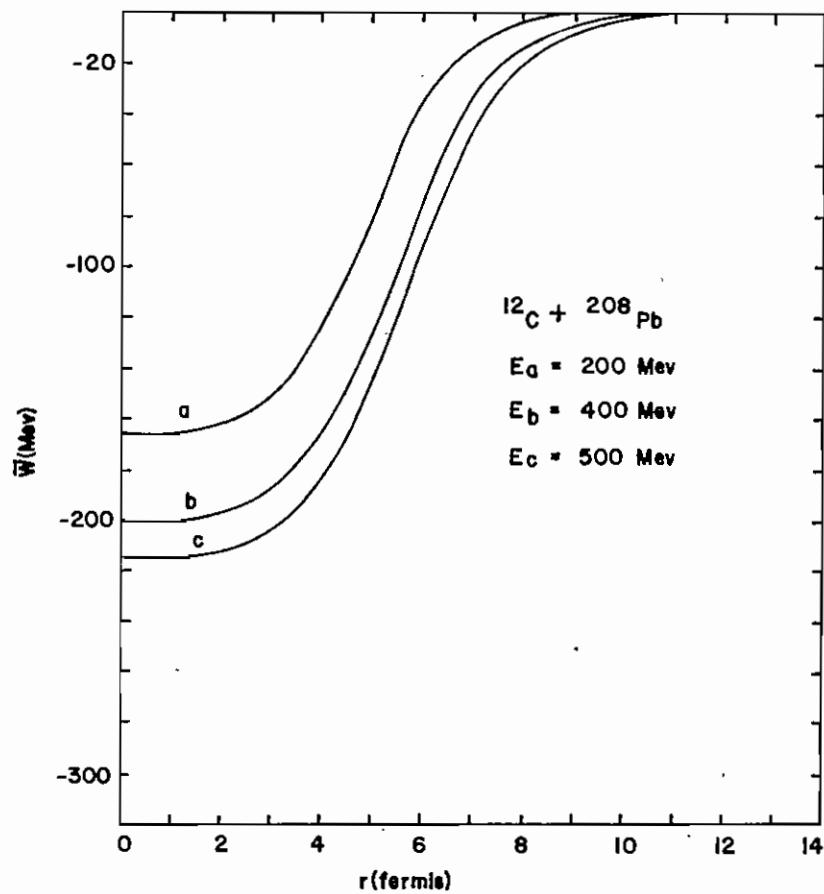


Figura (VI.7.b.) - Potencial imaginário  $\bar{W}$  corrigido pelo princípio de Pauli (equação (VI.1)), com  $V_C \neq 0$  (equação (II.4)) e  $V_N \neq 0$  (equação (II.6)).

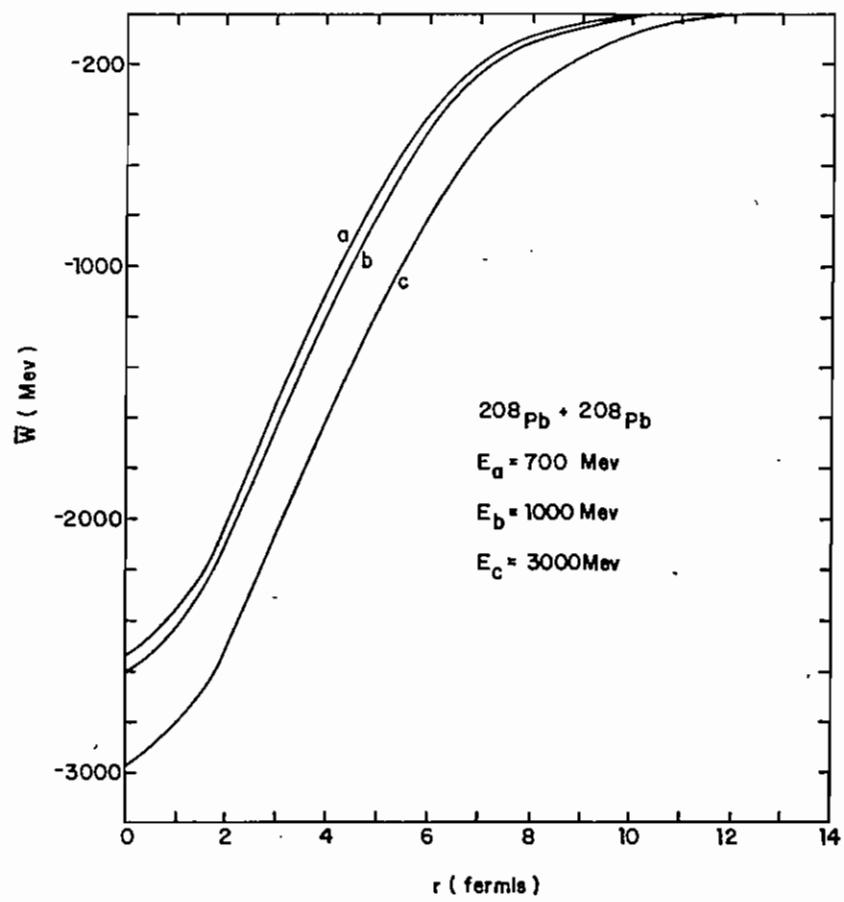


Figura (VI.7.c.) - Potencial imaginário  $\bar{W}$  corrigido pelo princípio de Pauli (equação (VI.1)), com  $V_C \neq 0$  (equação (II.4)) e  $V_N \neq 0$  (equação (II.6)).

## VI.2 - Comparação entre duas expressões para o Coeficiente de Transmissão

Iremos comparar os resultados teóricos do coeficiente de transmissão  $T(b)$  entre a expressão usada por De Vries e Peng<sup>2</sup>) (DP), que utiliza a forma eikonal (equação (III.34) para a defasagem imaginária e o potencial imaginário, sem correção do princípio de Pauli, (equação (II.81))  $W$ , e a expressão usada por nós: a expressão WKB para a defasagem (equação (III.29), com  $U_{\text{real}} = 0$ , isto é,  $V_N = 0$  e  $V_C = 0$ ) e o potencial  $W$  corrigido pelo princípio de Pauli,  $\bar{W}$ .

Nas figuras (VI.8) e (VI.9) confrontamos o resultado destes dois cálculos para um sistema leve ( $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ ) e um pesado ( $^{208}\text{Pb} + ^{208}\text{Pb}$ ). Nota-se uma diferença qualitativa de comportamento entre eles. Na expressão usada por DP, a medida que a energia cresce o coeficiente de transmissão decresce, enquanto que a nossa expressão, apresenta comportamento inverso. O crescimento do coeficiente de transmissão é decorrente do aumento da absorção (crescimento de  $W$ ) com a energia. Portanto, o nosso cálculo implica que um núcleo vai se tornando mais negro para o outro com o crescimento da energia. Esta é a linguagem utilizada na óptica geométrica e significa que um raio de luz (projétil) ao incidir numa esfera (núcleon alvo) será absorvido (produção de eventos não-elásticos e portanto, contribuindo para  $\sigma_R(E)$ ) proporcionalmente ao crescimento da área negra da esfera (crescimento do potencial imaginário). No cálculo DP nota-se a ocorrência da transparência nuclear na superfície dos núcleos envolvidos, com o crescimento da energia. A transparência nuclear é resultado da diminuição da absorção com o aumento da energia.

O comportamento do coeficiente de transmissão  $T(b)$ , com a energia é semelhante para os dois sistemas. Nota-se também, a contribuição de uma faixa de parâmetros de impacto proporcional ao sistema envolvido. Assim, quanto maior forem os núcleos do sistema em estudo maior será

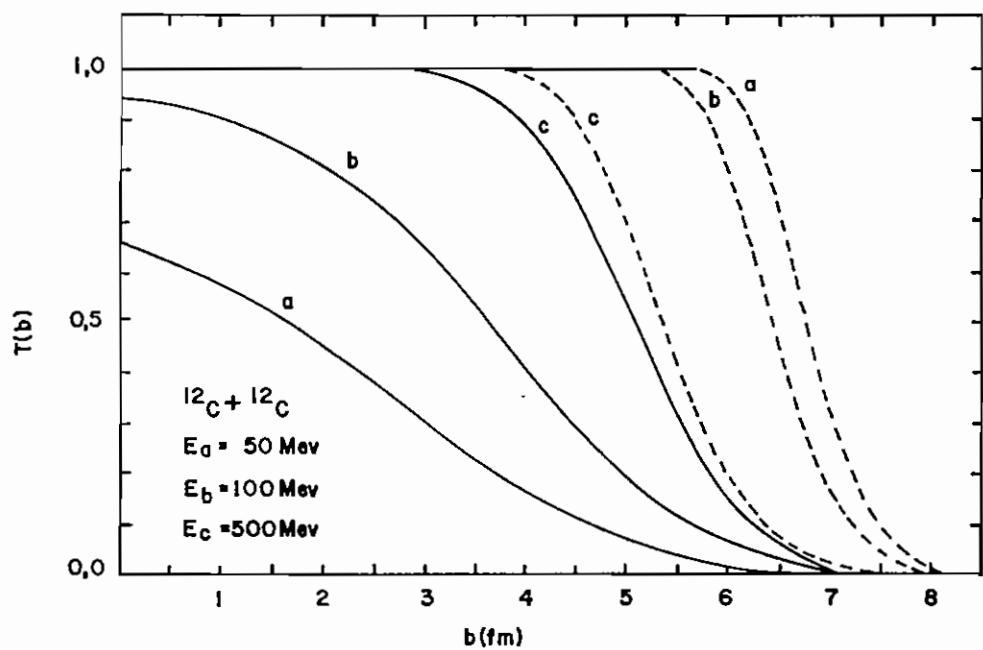


Figura - (VI.8)

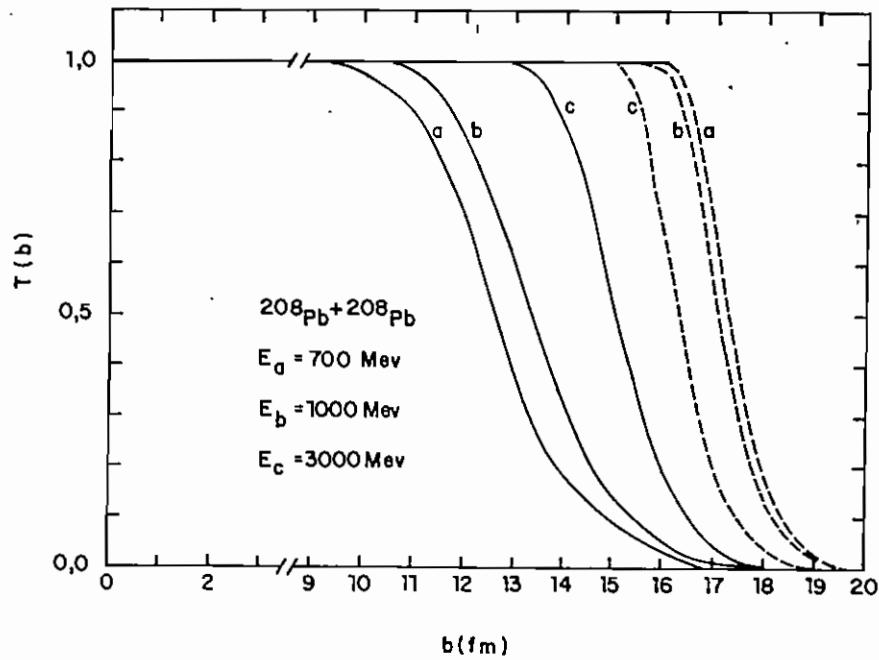


Figura - (VI.9)

Linha pontilhada (---)  $T(b)$  usando expressão eikonal para  $\delta_I(b)$  e  $W$  (sem princípio de Pauli)

Linha cheia (—)  $T(b)$  usando expressão WKB para  $\delta_I(b)$  (com  $V_C = 0$  e  $V_N = 0$ ) e  $\bar{W}$  (com princípio de Pauli).

o número de parâmetros de impacto que resultam num coeficiente de transmissão não nulo. Este fato é decorrente da dependência radial do potencial imaginário  $W$ . Conforme foi salientado, a dependência radial do potencial imaginário é determinada pela densidade de matéria nuclear dos núcleos envolvidos. Núcleos mais pesados apresentam, em geral, uma densidade mais extensa que núcleos mais leves.

Apresentaremos agora, os resultados do coeficiente de transmissão usando integralmente a expressão WKB da defasa gem imaginária, isto é,  $U_{real} \neq 0$  e  $\bar{W}(E,r)$ . Primeiramente iremos apresentar o efeito do potencial nuclear  $V_N$ , modelo convolutivo (equação (II.6)) no coeficiente de transmissão. Nas figuras (VI.10) (VI.11), nota-se um aumento de absorção para as colisões periféricas (parâmetros de impactos  $b$ 's contribuintes, maiores).

O efeito da interação nuclear é o de desviar a trajetória seguida inicialmente pelo núcleo projétil e lançá-lo para regiões mais interna, onde a absorção é mais forte. Isto produz um crescimento no coeficiente de transmissão. Nota-se, entretanto, que a medida que a energia cresce a absorção na superfície vai diminuindo. Isto se deve ao efeito dinâmico na reação. Quanto maior a energia incidente, menor será o tempo de interação entre os núcleos. Assim, dependendo da trajetória, pode não haver tempo suficiente para esta ser desviada para regiões de maior absorção. Isto conduz a transparência de superfície, isto é, o coeficiente de transmissão vai diminuindo na região mais externa do núcleo com o crescimento da energia.

O efeito do potencial coulombiano é o de reduzir a absorção devido ao seu caráter repulsivo. Seu efeito é o de desviar a trajetória mais afastada seguida inicialmente pelo projétil lançando-o para a região mais afastada. Portanto, o efeito coulombiano no coeficiente de transmissão é inverso ao da interação nuclear, pois enquanto este último desvia o projétil para a região de maior absorção (região mais interna do núcleo), o primeiro desvia para a região de superfície, onde a absorção é menor. Vide nas figuras (VI.10) e (VI.11) os resul-

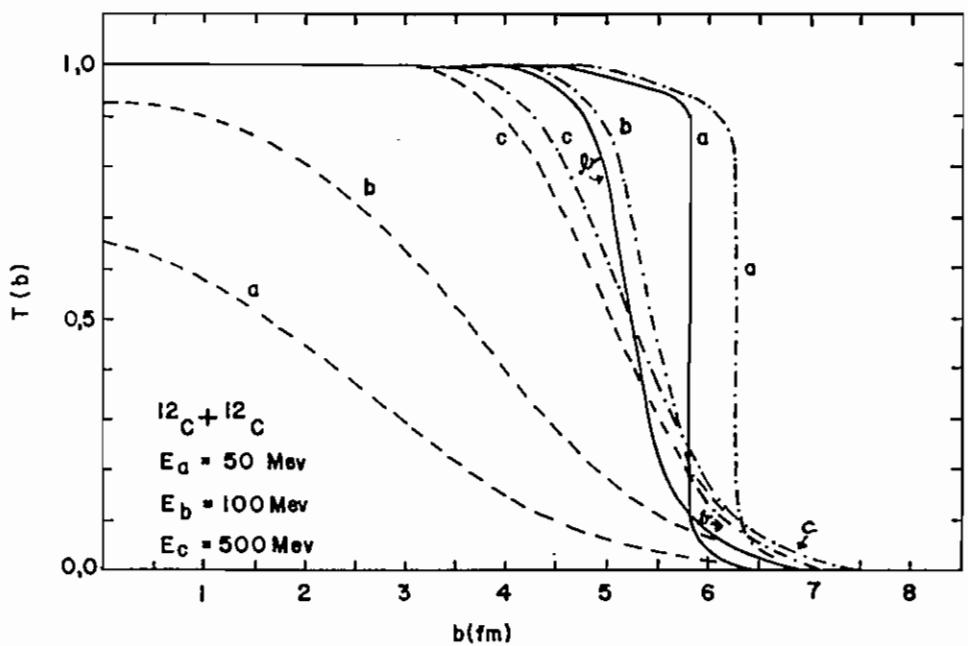


Figura - (VI.10) - Comportamento do coeficiente de transmissão com o parâmetro de impacto  $b$ .

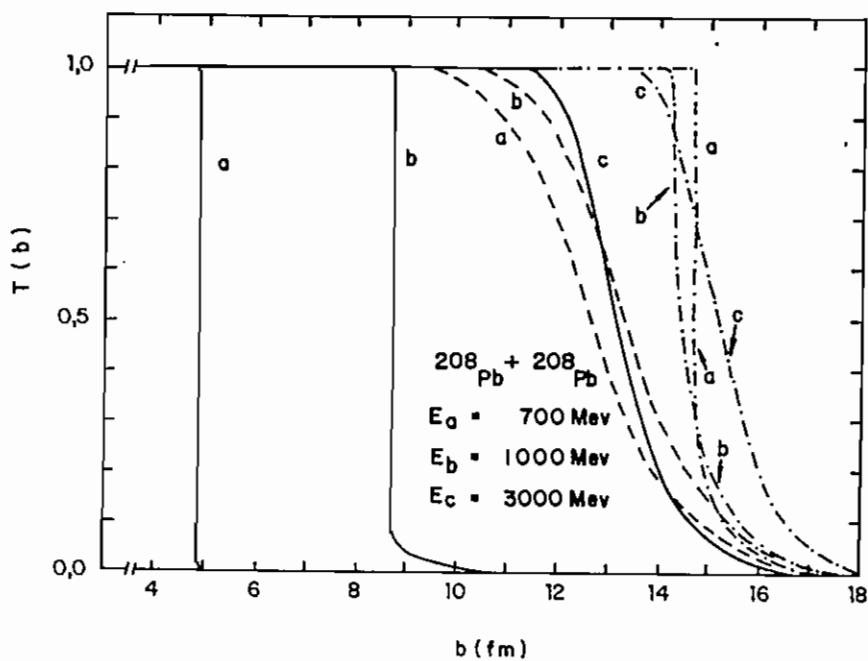


Figura - (VI.11) - Comportamento do coeficiente de transmissão com o parâmetro de impacto  $b$ .

- (---)  $T(b)$  com  $\bar{W}$
- (- - -)  $T(b)$  com  $\bar{W} + V_N$
- (—)  $T(b)$  com  $\bar{W} + V_N + V_C$

tados referente a inclusão do potencial coulombiano. É importante salientar que a interação coulombiana domina a interação nuclear na região de superfície e sendo assim, não havendo energia suficientemente alta para superar a barreira coulombiana haverá absorção fraca. Convém lembrar que a barreira coulombiana crescendo proporcionalmente com a carga dos núcleos temos que, a uma mesma energia, dois sistemas podem apresentar comportamento diferentes dos coeficientes de transmissão com o parâmetro de impacto  $b$ . Assim, a  $E_{c.m.} = 50$  Mev por exemplo, o sistema  $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$  que possue uma barreira coulombiana de 6 Mevs apresenta  $T(b)=1,0$  para todos  $b$ 's menores que 4,5 fm, vide figura (VI.10), enquanto que para o sistema  $^{208}\text{Pb} + ^{208}\text{Pb}$  cuja barreira coulombiana é de aproximadamente 620 Mevs apresenta  $T = 0$  para todos os  $b$ 's.

Já que não foi permitido a ocorrência de tunelamento (efeito túnel) no tratamento teórico desenvolvido, somente a  $E_{c.m.} > V_{BC}$  é que teremos um coeficiente de transmissão não-nulo e que portanto, contribuirá para  $\sigma_R(E)$ .

Vê-se, das figuras (VI.10) e (VI.11), que a inclusão dos efeitos não incorporados no tratamento teórico dado por DP muda o comportamento de  $T(b) \times b$ , com a energia. Assim, espera-se um comportamento diferente, com a energia, de  $\sigma_R(E)$  entre o nosso cálculo e De Vries et al.<sup>2</sup>).



(VI.3) - O Limite Geométrico de  $\sigma_R(E)$  e a Transparência Nuclear

Uma das características encontradas numa reação envolvendo íons pesados, a baixas energias, é a forte absorção. Se esta característica for mantida a toda faixa da energia, a seção de choque de reação  $\sigma_R(E)$  irá atingir o limite geométrico, isto é,

$$\sigma_R(E) = \pi R^2 = \pi r_0^2 (A^{\frac{1}{3}} + B^{\frac{1}{3}})^2. \quad (\text{VI.1})$$

Conforme foi visto (equação (III.21)), este raio  $R$  é determinado pelo parâmetro de impacto razante  $b_r$ , isto é,  $\sigma_R(E) = \pi b_r^2$ . Isso significa uma completa absorção para parâmetros de impacto compreendido entre 0 e  $b_r$ . A energias mais baixas costuma-se utilizar a seguinte expressão para  $\sigma_R(E)$

$$\sigma_R(E) = \pi R^2 \left(1 - \frac{V_{BC}}{E_{c.m.}}\right) \quad (\text{VI.2})$$

onde  $V_{BC}$  é a barreira coulombiana do sistema e  $E_{c.m.}$  a energia de centro de massa.

Iremos usar os resultados de  $\sigma_R(E)$  microscópico (noso cálculo) e, a partir da expressão (VI.2), determinar o raio reduzido  $r_0$ .

Os resultados do cálculo microscópico foi obtido usando as equações (III.20), (III.29), (VI.1), (II.4) e (II.6) e que portanto, inclue efeitos devido ao princípio de Pauli, interação nuclear e coulombiana. Estudamos os seguintes sistemas  $^{12}\text{C} + ^{208}\text{Pb}$ ,  $^{40}\text{Ca} + ^{208}\text{Pb}$ ,  $^{90}\text{Zr} + ^{208}\text{Pb}$  e  $^{208}\text{Pb} + ^{208}\text{Pb}$  para as seguintes energias por núcleon,  $\epsilon_L = \frac{E_{c.m.}}{\mu} : 10 \frac{\text{Mev}}{\text{núcleon}}, 200 \frac{\text{Mev}}{\text{núcleon}}$ ,  $400 \frac{\text{Mev}}{\text{núcleon}}$  e  $600 \frac{\text{Mev}}{\text{núcleon}}$ . Obteve-se os seguintes valores médios para  $r_0$ :

$$\bar{r}_0 = 1,22 \text{ fm} - ^{12}\text{C} + ^{208}\text{Pb}$$

$$\bar{r}_0 = 1,26 \text{ fm} - ^{40}\text{Ca} + ^{208}\text{Pb}$$

$$\bar{r}_o = 1,26 \text{ fm} - {}^{90}\text{Zr} + {}^{208}\text{Pb}$$

$$\bar{r}_o = 1,26 \text{ fm} - {}^{208}\text{Pb} + {}^{208}\text{Pb}$$

e  $\bar{r}_o = 1,25 \text{ fm}$ , sendo a média aritmética dos sistemas estudados. Na figura (VI.12) apresentamos esses resultados.

Portanto, a expressão para  $\sigma_R(E)$  contido na equação (VI.2) conseguiu reproduzir bem aos dados de  $\sigma_R(E)$  teórico, calculado pelo presente trabalho, com um raio  $r_o$  aproximadamente constante.

Precisamos estabelecer um critério para definir qual é o raio  $R$ , que deve ser usado na equação (VI.2) para podermos decidir se o limite geométrico é ou não atingido e qual seria o valor da transparência nuclear. Por exemplo, existe uma discrepância entre a conclusão de De Vries et al.<sup>62)</sup> e Bohlen et al.<sup>62)</sup>. O primeiro afirma que existe uma transparência de 12%, a  $E_{c.m.} = 150 \text{ Mev}$  na  $\sigma_R(E)$  do sistema  ${}^{12}\text{C} + {}^{12}\text{C}$ , enquanto que o segundo não observa transparência nuclear, isto é,  $T = 0$ . Esta discrepância foi resultante do uso de raios efetivos  $R$ 's diferentes na equação (VI.2).

A expressão para o limite geométrico de  $\sigma_R(E)$  foi obtido através do parâmetro de impacto razante,  $b_r$  (vide equação (VI.2)). Assim, deve existir um raio de absorção que mede essencialmente a distância pela qual a ocorrência de eventos não elásticos é importante. Importante, aqui, significa o raio associado a  $b_r$  que induz em 50% na ocorrência de um evento não elástico. Esta distância é conhecida como raio de absorção forte,  $R_{AF}$ . Satcher<sup>63)</sup> define  $R_{AF}$  como segue

$$R_{AF} \approx R_{m_A} + R_{m_B} + 3 \text{ fm} \quad , \quad (\text{VI.3})$$

onde  $R_{m_A}$  e  $R_{m_B}$  significam os raios de matéria nuclear do núcleo A e B, respectivamente, ou

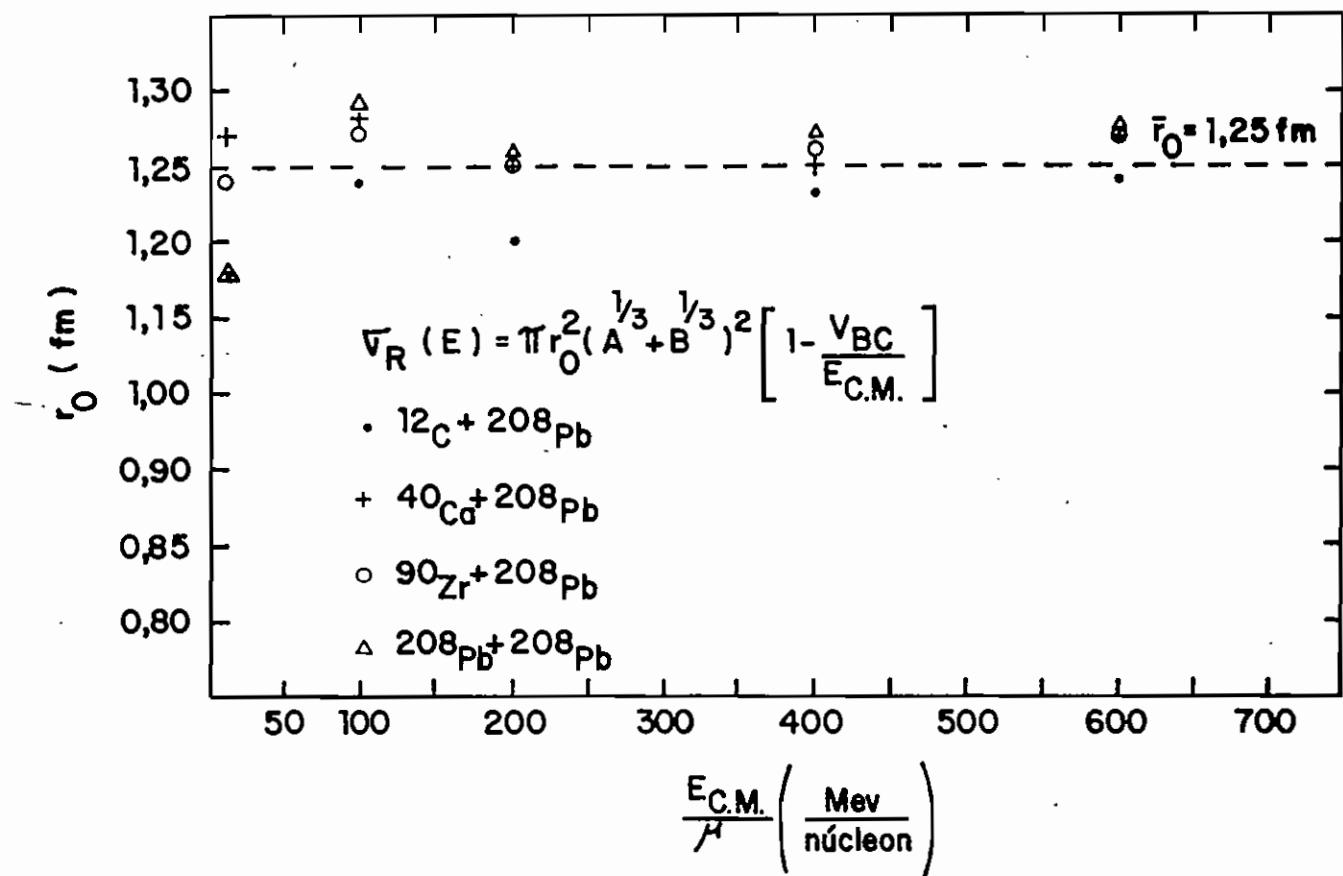


Figura - (VI.12) - Determinação do raio reduzido  $r_0$  usando a expressão acima, com  $\sigma_R(E)$  determinado no presente trabalho (cálculo microscópico).

$$R_{AF} \approx r_o (A^{\frac{1}{3}} + B^{\frac{1}{3}}), \quad r_o = 1,5 \text{ fm} \quad (\text{VI.4})$$

As figuras (VI.13) / (VI.16) ilustram o comportamento de  $\sigma_R(E)$  segundo a equação (VI.2), usando o raio de absorção forte, dada pela equação (VI.4) para vários sistemas e o resultado microscópico de  $\sigma_R(E)$  obtido do nosso cálculo.

Comparando a curva teórica com os dados experimentais<sup>9)</sup> de  $\sigma_R(E)$ , para o sistema  $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ , observa-se que o raio de absorção forte usado,  $r_o = 1,50 \text{ fm}$ , apresenta um valor inferior ao que indica o dado, a  $\frac{E_{\text{c.m.}}}{A} = 4,67 \text{ Mev/núcleon}$ . Admitindo que este dado obedece a equação (VI.2) temos que

$$r_o = 1,57 \text{ fm}$$

Assim, concluímos que os dados experimentais diretos, a energias intermediárias, apresentam transparência nuclear. De fato, usando a seguinte parametrização para  $\sigma_R(E)$ ,

$$\sigma_R(E) = \pi R^2 \left[ 1 - \frac{V_{BC}}{E_{\text{c.m.}}} \right] [1 - T] \quad (\text{VI.5})$$

com  $r_o = 1,57 \text{ fm}$  obtemos

$$T = 16,5\% \quad \text{a} \quad \frac{E_{\text{c.m.}}}{A} = 15 \text{ Mev/núcleon}$$

e

$$T = 40,0\% \quad \text{a} \quad \frac{E_{\text{c.m.}}}{A} = 41,5 \text{ Mev/núcleon}$$

ambos os dados experimentais<sup>9)</sup> referem-se ao sistema  $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ .

Observa-se, portanto, a existência de forte transparência nuclear a energias intermediárias.

Comparando o dado experimental do sistema  $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$  a  $\frac{E_{\text{c.m.}}}{A} = 41,5 \text{ Mev/núcleon}$  com a curva teórica, microscópia, calcu-

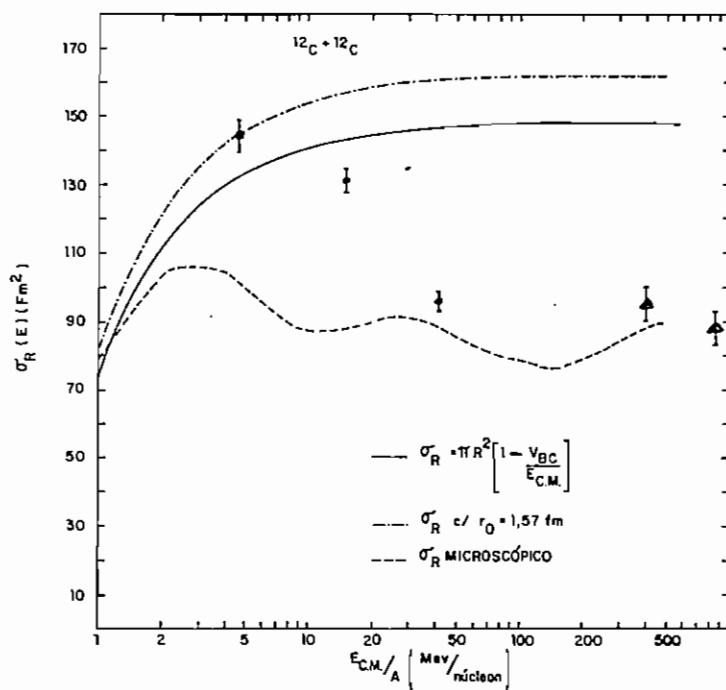


Figura (VI.13) - Comportamento de  $\sigma_R(E)$  com a energia utilizando os resultados do nosso cálculo (microscópico) e a expressão da equação (VI.2) com  $r_0 = 1,50 \text{ fm}$  (—) e  $r_0 = 1,57 \text{ fm}$  (---) confrontados com os dados experimentais (ref. 36) ▲ (ref. 9).

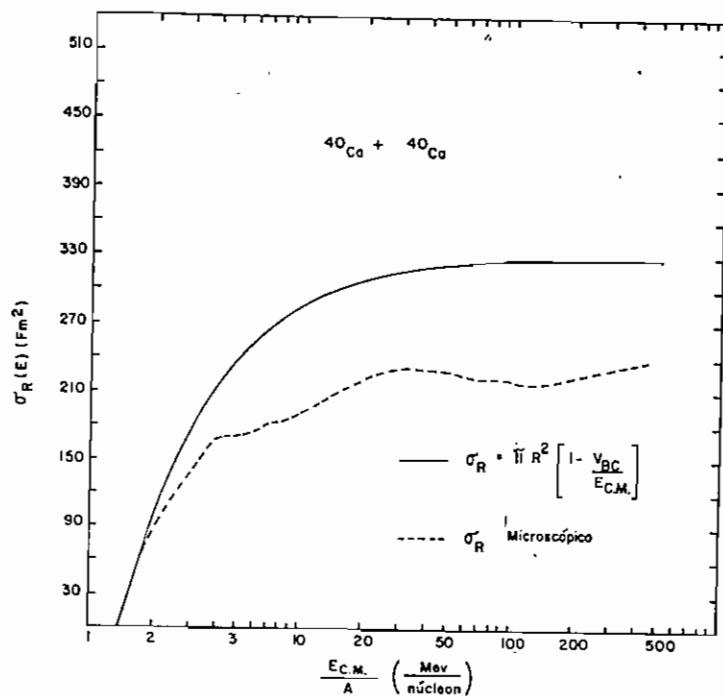


Figura (VI.14) - Comportamento de  $\sigma_R(E)$  com a energia utilizando os resultados do nosso cálculo (microscópico), e a expressão do texto (equação (VI.2)) com  $r_0 = 1,50 \text{ fm}$  (—).

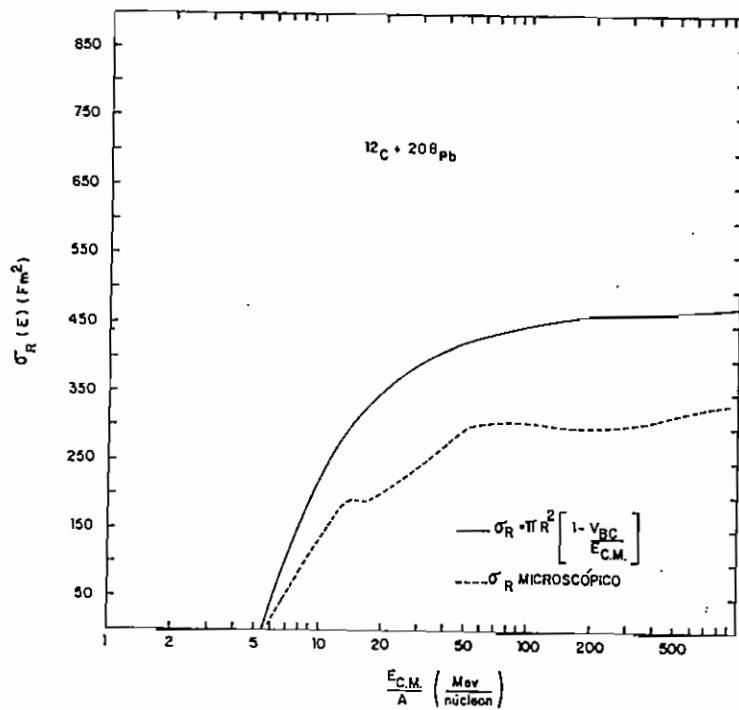


Figura (VI.15) - Comportamento de  $\sigma_R(E)$  com a energia utilizando os resultados do nosso cálculo (microscópico), e a expressão do texto (equação (VI.2)) com  $r_o = 1,50 \text{ fm}$  (—).

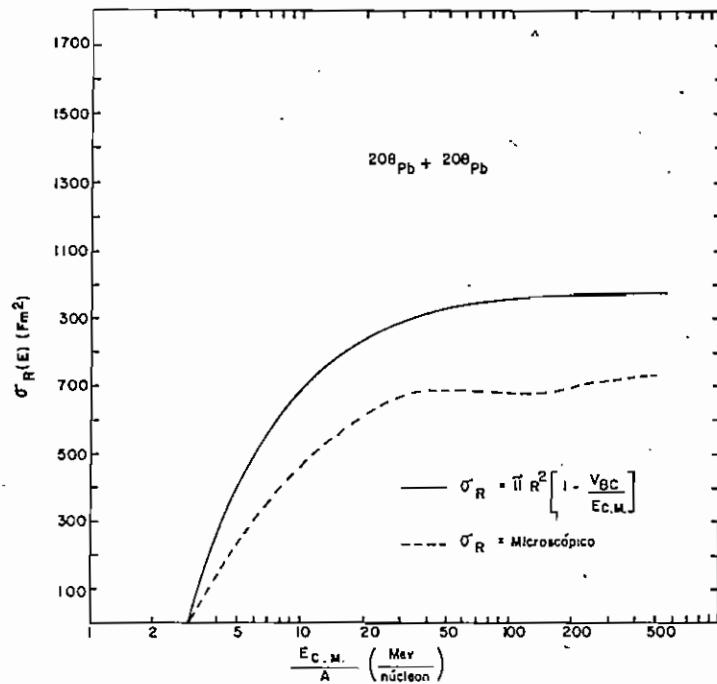


Figura (VI.16) - Comportamento de  $\sigma_R(E)$  com a energia utilizando os resultados do nosso cálculo (microscópico), e a expressão do texto (equação (VI.2)) com  $r_o = 1,50 \text{ fm}$  (—).

lada por nós consegue-se que a esta energia, a previsão teórica não está muito distante do resultado experimental. Assim, podemos estimar a transparência nuclear a energias superiores a  $\frac{E_{c.m.}}{A} = 50$  Mev/núcleon. Abaixo apresentamos a transparência nuclear, para várias energias e diversos sistemas.

---

Sistema:  $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$  \*

---

$\frac{E_{c.m.}}{A}$	$\left( \frac{\text{Mev}}{\text{núcleon}} \right)$	T
50	46,7%	
100	50,9%	
200	49,0%	
300	47,8%	
500	44,0%	

\*  $r_o = 1,57$  fm.

---

Sistema:  $^{12}\text{C} + ^{208}\text{Pb}$ \*

---

$\frac{E_{c.m.}}{A}$	$\left( \frac{\text{Mev}}{\text{núcleon}} \right)$	T
50	34,4%	
100	32,2%	
200	35,4%	
500	32,9%	
900	25,2%	

\*  $r_o = 1,50$  fm

---

Sistema:  $^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$ \*

---

$\frac{E_{c.m.}}{A}$	$\left( \frac{\text{Mev}}{\text{núcleon}} \right)$	T
50	28,9%	
100	32,4%	
200	31,1%	
300	30,0%	
500	27,2%	

$r_o = 1,50$  fm

---

Sistema:  $^{208}\text{Pb} + ^{208}\text{Pb}$

---

$\frac{E_{c.m.}}{A}$	$\left( \frac{\text{Mev}}{\text{núcleon}} \right)$	T
50	26,2%	
100	29,1%	
200	28,2%	
300	27,1%	
500	25,5%	

\*  $r_o = 1,50$  fm

Evidenciamos, portanto, a ocorrência de transparéncia nuclear na seção de choque total de reação de sistemas de ions pesados, a energias intermediárias.

#### VI.4 - Cálculo Microscópico de $\sigma_R(E)$

Nas figuras (VI.17)/(VI.25) apresentamos o comportamento da seção de choque total de reação,  $\sigma_R(E)$  como função de energia de centro de massa dividida pelo número de nucleons do núcleo incidente,  $\frac{E_{c.m.}}{A}$  para diversos sistemas. Nas figuras, as curvas referente a  $\sigma_R(E)$  foram obtidas usando as seguintes equações:

- 1) - Equação (III.20), seção de choque total de reação;
- 2) - Equação (III.24), coeficiente de transmissão;
- 3) - Equação (III.29) e (III.30), defasagem imaginária (WKB)
- 4) - Equação (VI.1), potencial imaginário
- 5) - Equação (II.4), potencial coulombiano e
- 6) - Equação (II.6), potencial nuclear.

Iremos, primeiramente, comentar sobre os resultados do estudo feito por De Vries e Peng<sup>2</sup>), (DP) e confrontar com os nossos. No cálculo DP foi usada a equação (II.81) para a descrição do potencial imaginário W. Portanto, não incluiram o efeito do princípio de Pauli. Além disso, usaram a expressão eikonal para a defasagem imaginária, equação (III.34). Já que, a sua expressão é válida no limite de energias altas, em princípio, não deve ser válida para energias mais baixas. De fato, a expressão eikonal para a defasagem supõe que a propagação do projétil, entre duas colisões sucessivas proceda segundo a óptica geométrica. Significa, portanto, que não estamos considerando efeitos devido a óptica ondulatória<sup>64</sup>)<sup>65</sup>, que deve apresentar algum efeito na defasagem a energias mais baixa. Nós, ao contrário, usamos a expressão exata WKB para a defasagem imaginária que é apropriada na análise de reações envolvendo núcleos pesados, mesmo a energias não muito alta. No apêndice (E) fizemos um estudo comparativo entre os resultados de  $\delta_I^{(WKB)}$  e  $\delta_I^{(eikonal)}$ , para diversas situações e concluímos que a expressão eikonal superestima o valor da defasagem obtido pela aproximação WKB.

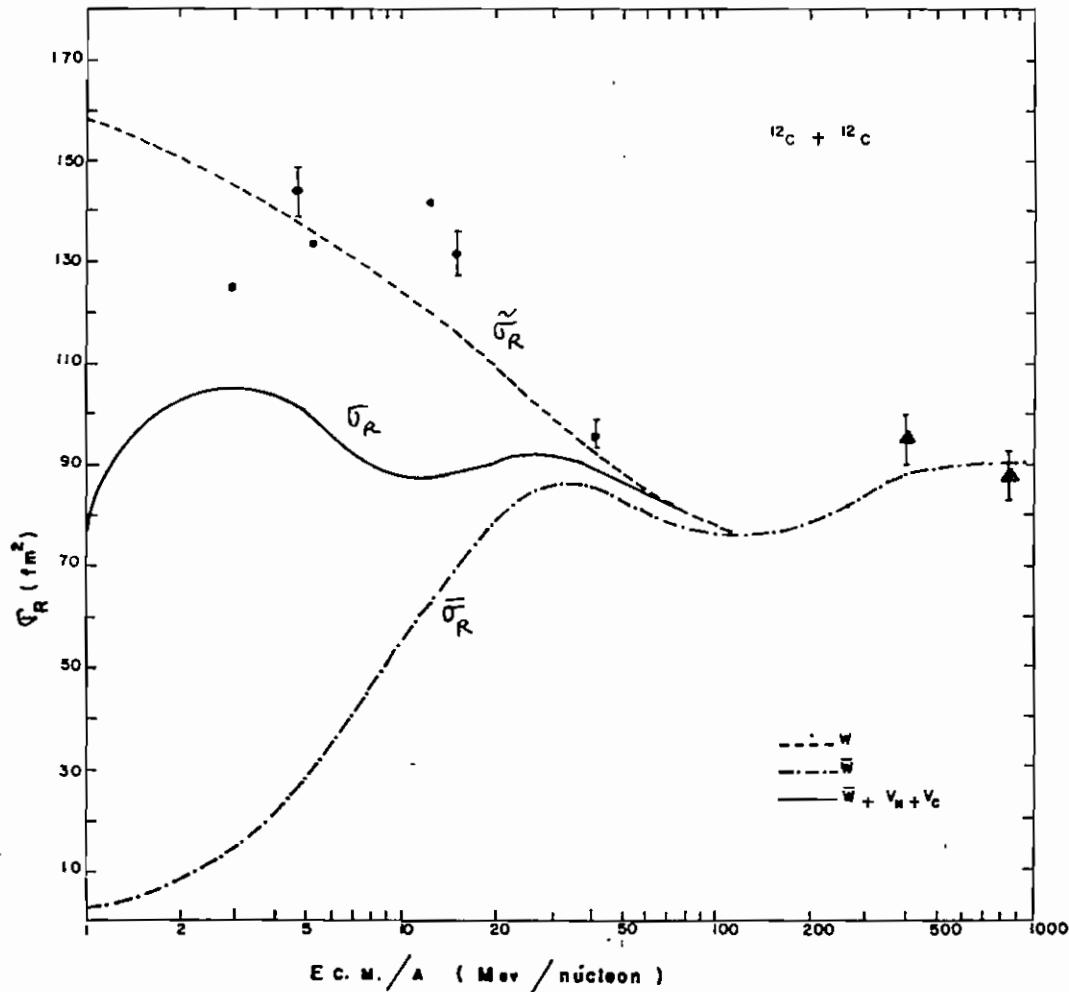


Figura (VI.17) - Comportamento de  $\sigma_R(E)$  (microscópico) com a energia ( $A$  número de massa do projétil) com:  
 $W$  sem princípio de Pauli (---)  $\bar{\sigma}_R$ , e  $\bar{W}$  corrigido pelo princípio de Pauli (-.-.)  $\bar{\sigma}_R$  e  $\bar{W}$  mais a inclusão da interação coulombiana e nuclear  $\sigma_R$ . Apresentamos também, os dados experimentais.  $\square$  (ref. 9),  $\Delta$  (ref. 36) e  $\bullet$  (ref. 37).

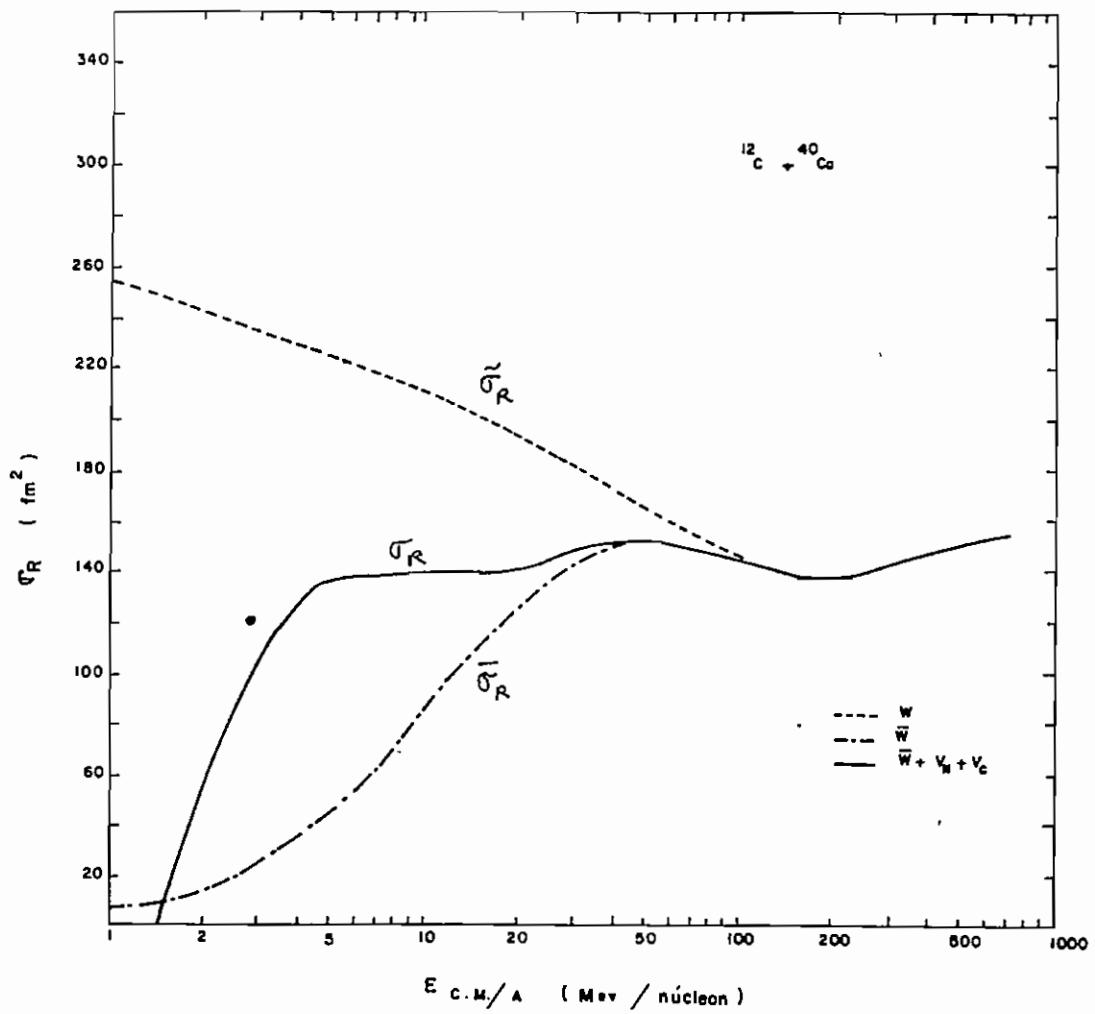


Figura (VI.18) - Comportamento de  $\sigma_R(E)$  (microscópico) com a energia (onde,  $A$  é o número de massa do projétil) com:  $W$  sem princípio de Pauli (---)  $\tilde{\sigma}_R$ , e  $\bar{W}$  corrigido pelo princípio de Pauli (-.-.)  $\tilde{\sigma}_R$  e  $\bar{W}$  mais a inclusão da interação coulombiana e nuclear  $\sigma_R$ . Apresentamos também, os dados experimentais, • (ref.37), (indireto).

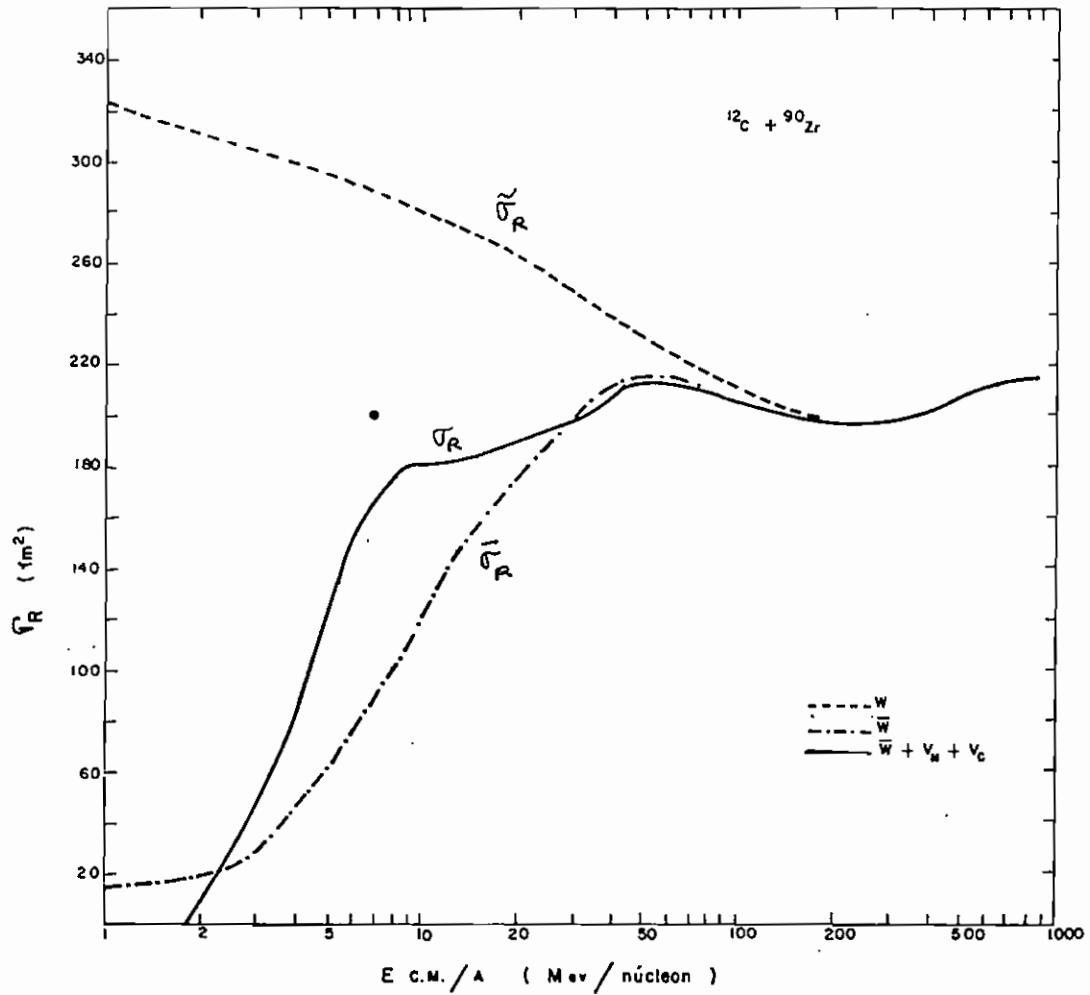


Figura (VI.19) - Comportamento de  $\sigma_R(E)$  (microscópico) com a energia (onde,  $A$  é o número de massa do projétil) com:  $W$  sem princípio de Pauli (---)  $\tilde{\sigma}_R$ , e  $\bar{W}$  corrigido pelo princípio de Pauli (-.-.)  $\bar{\sigma}_R$  e  $\bar{W}$  mais a inclusão da interação coulombiana e nuclear  $\sigma_R$ . Apresentamos também, os dados experimentais, • ref.37), (indireto).

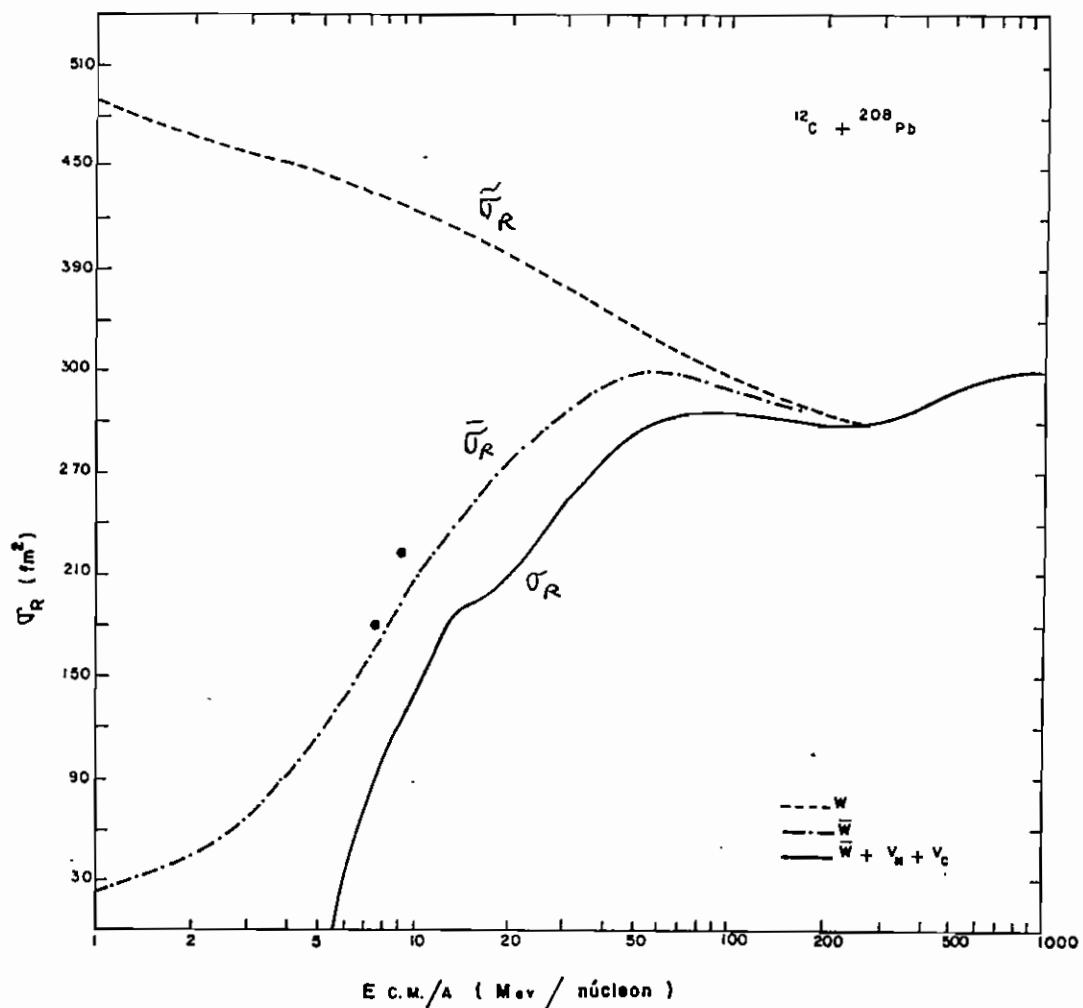


Figura (VI.20) - Comportamento de  $\sigma_R(E)$  (microscópico) com a energia (onde, A é o número de massa do projétil) com: W sem princípio de Pauli (---)  $\tilde{\sigma}_R$ , e  $\bar{W}$  corrigido pelo princípio de Pauli (-.-.)  $\bar{\sigma}_R$  e  $\bar{W}$  mais a inclusão da interação coulombiana e nuclear  $\sigma_R$ . Apresentamos também, os dados experimentais, • (ref.37) (indireto).

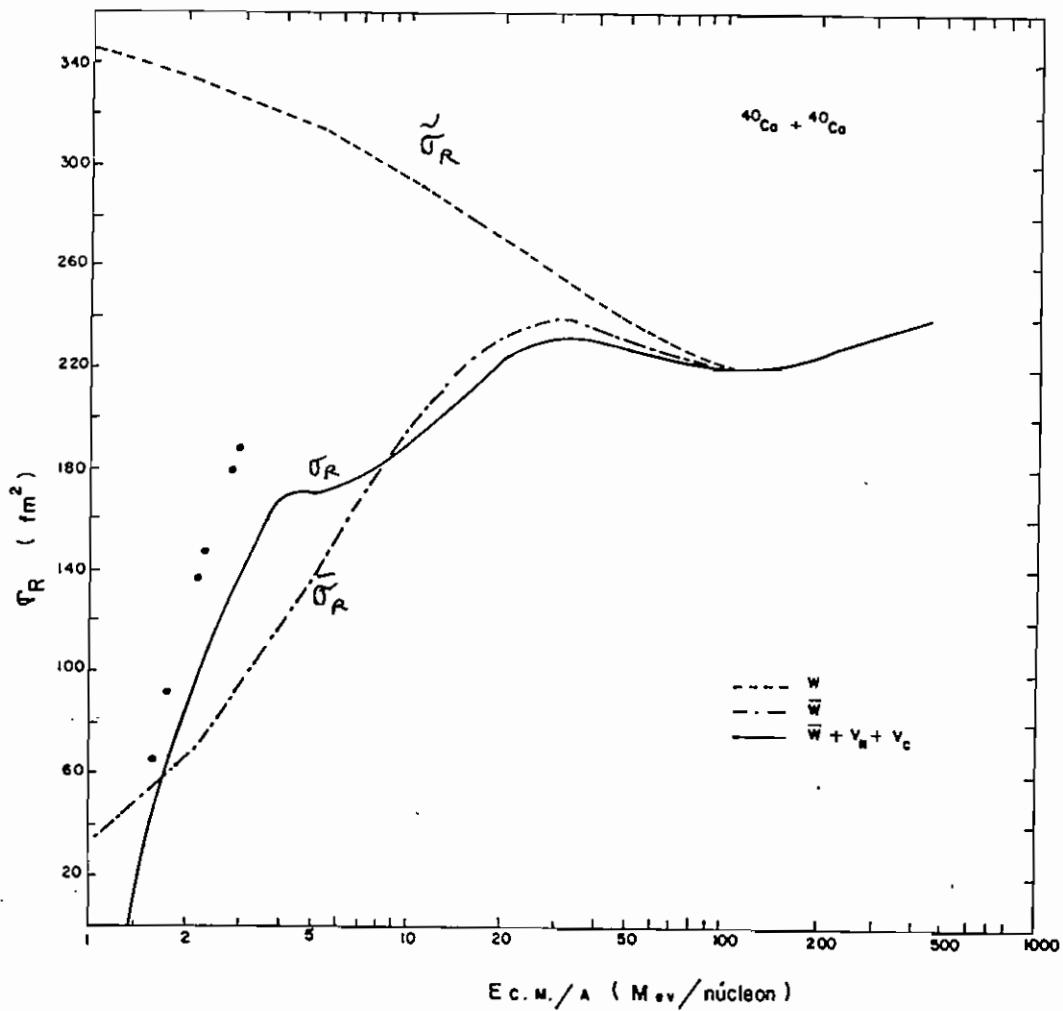


Figura (VI.21) - Comportamento de  $\sigma_R(E)$  (microscópico) com a energia (onde, A é o número de massa do projétil) com: W sem princípio de Pauli (---)  $\tilde{\sigma}_R$ , e  $\bar{W}$  corrigido pelo princípio de Pauli (-.-.-)  $\bar{\sigma}_R$  e  $\bar{W}$  mais a inclusão da interação coulombiana e nuclear  $\sigma_R$ . Apresentamos também, os dados experimentais, • (ref.37) (indireto).

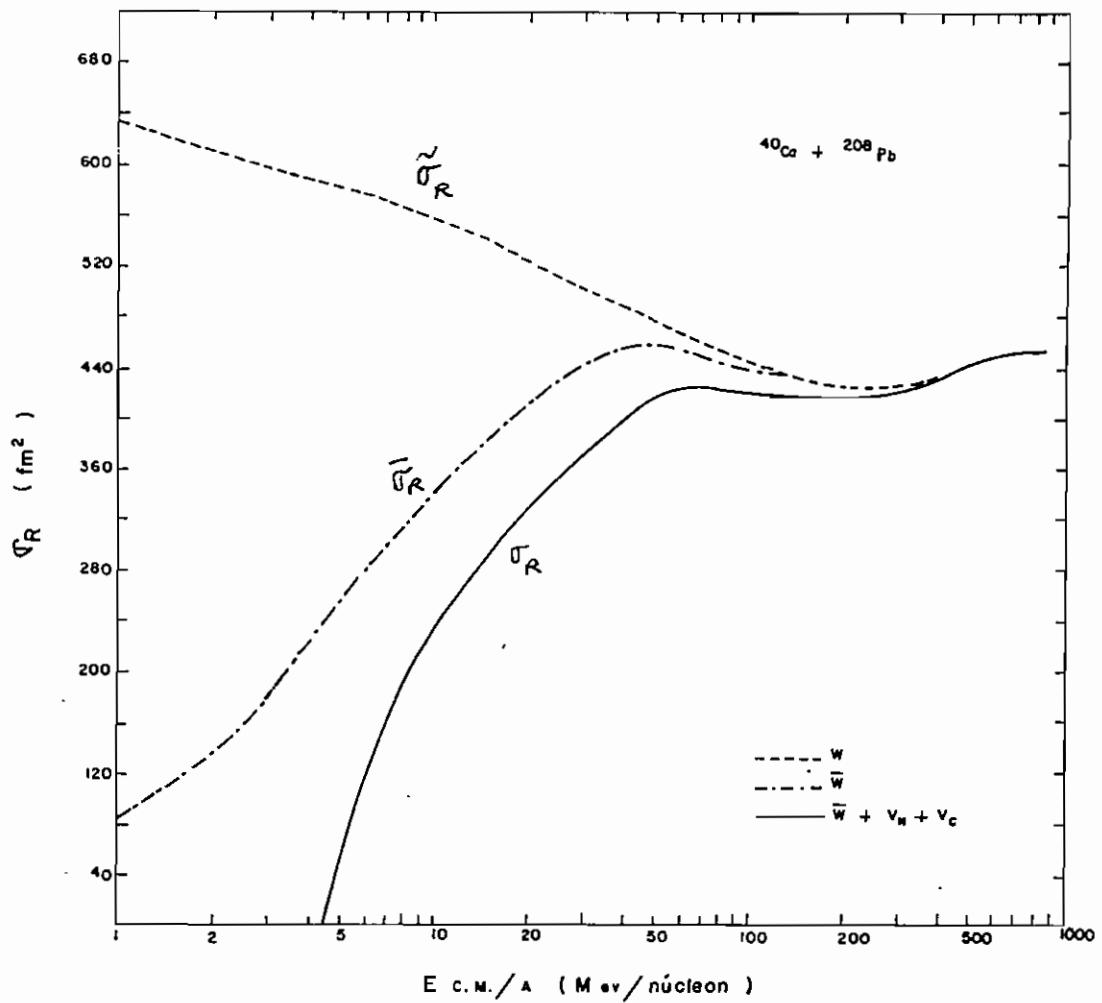


Figura (VI.22) – Comportamento de  $\sigma_R(E)$  (microscópico) com a energia (onde, A é o número de massa do projétil ) com: W sem princípio de Pauli (---)  $\tilde{\sigma}_R$ , e  $\bar{W}$  corrigido pelo princípio de Pauli(---.)  $\bar{\sigma}_R$  e  $\bar{W}$  mais a inclusão da interação coulombiana e nuclear  $\sigma_R$ .

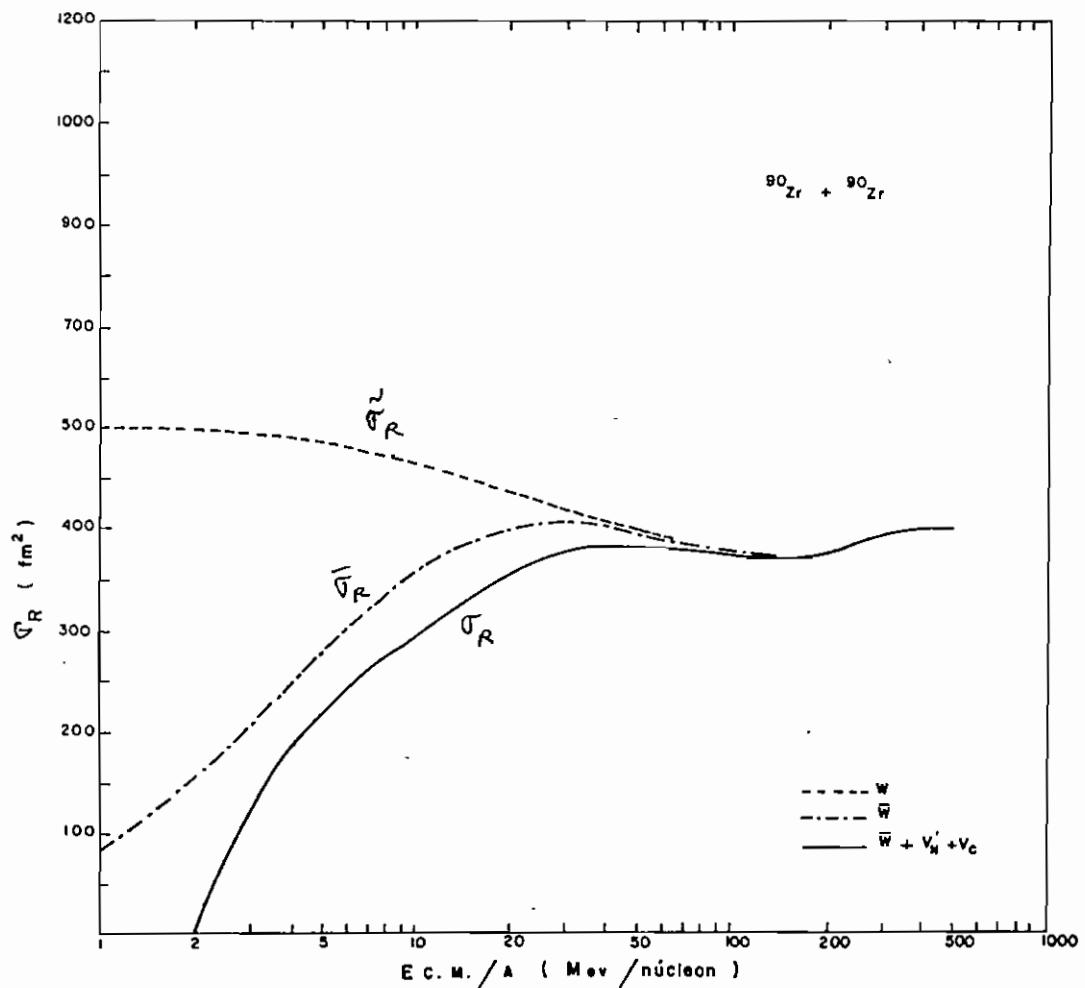


Figura (VI.23) – Comportamento de  $\sigma_R(E)$  (microscópico) com a energia (onde,  $A$  é o número de massa do projétil) com:  $W$  sem princípio de Pauli (---)  $\bar{\sigma}_R$ , e  $\bar{W}$  corrigido pelo princípio de Pauli (-.-.-)  $\bar{\bar{\sigma}}_R$  e  $\bar{W}$  mais a inclusão da interação coulombiana e nuclear  $\sigma_R$ .

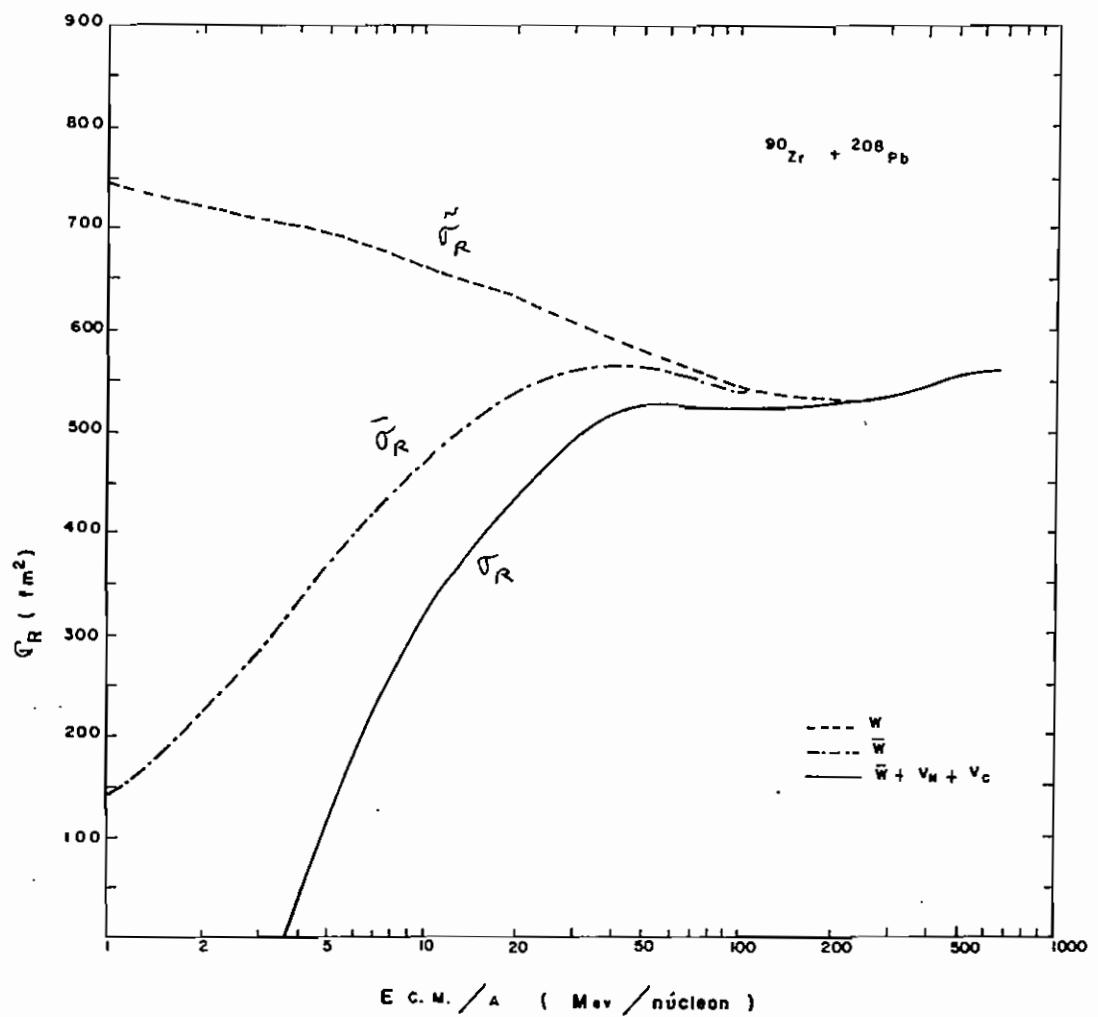


Figura (VI.24) - Comportamento de  $\sigma_R(E)$  (microscópico) com a energia (onde, A é o número de massa do projétil) com: W sem princípio de Pauli (---)  $\tilde{\sigma}_R$ , e  $\bar{W}$  corrigido pelo princípio de Pauli (-.-.)  $\bar{\sigma}_R$  e  $\bar{W}$  mais a inclusão da interação coulombiana e nuclear  $\sigma_R$ .

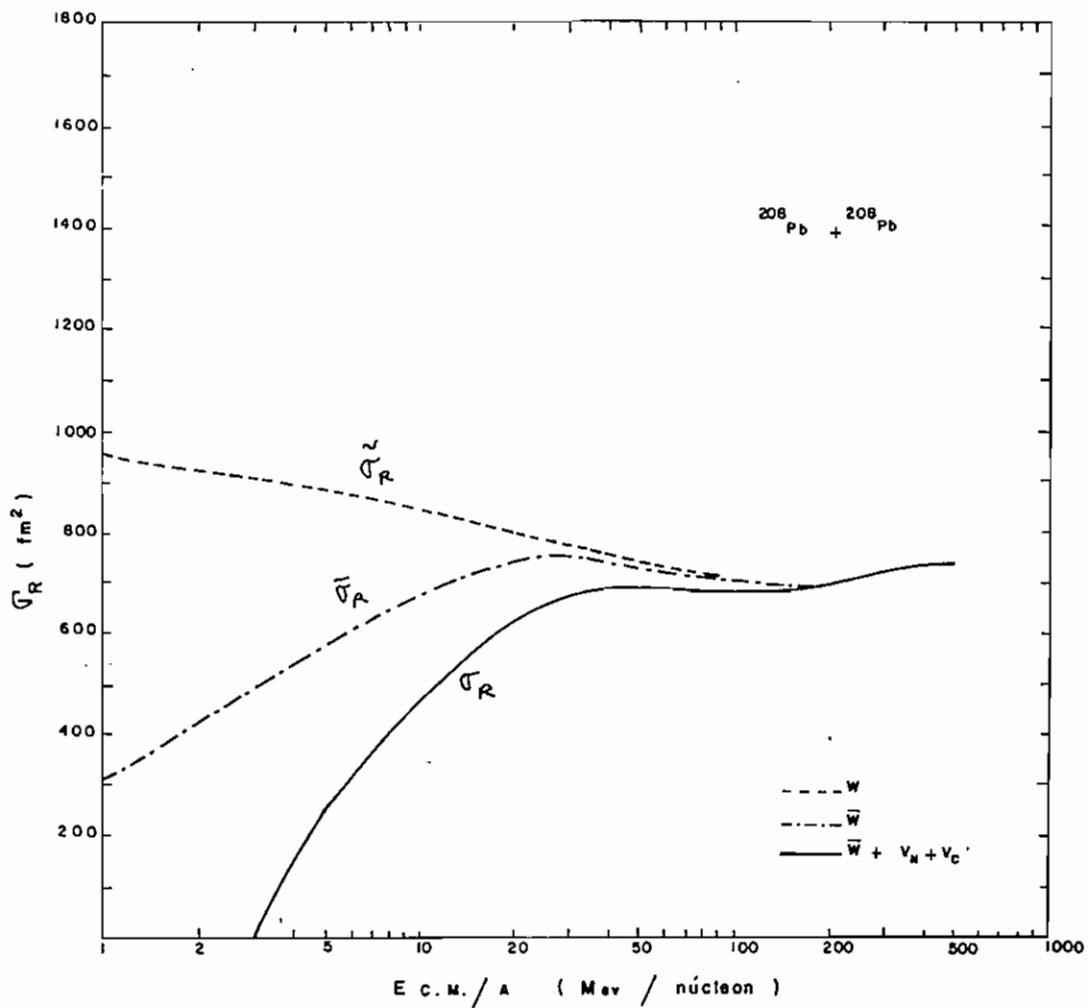


Figura (VI.25) - Comportamento de  $\sigma_{R(E)}$  (microscópico) com a energia (onde, A é o número de massa do projétil) com: W sem princípio de Pauli (---)  $\bar{\sigma}_R$ , e  $\bar{W}$  corrigido pelo princípio de Pauli (-.-.)  $\bar{\sigma}_R$  e  $\bar{W}$  mais a inclusão da interação coulombiana e nuclear  $\sigma_R$ .

As curvas correspondentes a  $\bar{\sigma}_R$  e  $\bar{\sigma}_{\bar{R}}$ , nas figuras, representam o nosso cálculo da seção de choque total de reação, sem e com a inclusão do princípio de Pauli em  $W$ , respectivamente ignorando os efeitos refrativos advindos da inclusão da interação coulombiana e nuclear. Observa-se que, a baixas energias, o comportamento com a energia dos dois cálculos são diferentes. A seção de choque  $\bar{\sigma}_R$  ( $\bar{\sigma}_{\bar{R}}$ ) decresce (cresce) com o crescimento da energia. A razão deste fato está ligado ao comportamento do potencial imaginário com a energia. O potencial  $W$ , que não inclue o princípio de Pauli, é governando pela seção de choque total nucleon-núcleon livre, que conforme vimos no Capítulo V, decresce com a energia. O comportamento de  $\bar{W}$ , que inclue princípio de Pauli, é oposto a  $W$ , a energias não muito elevadas, já que, quanto maior a energia maior será a absorção, conforme foi visto na 1ª seção do Capítulo (VI), (VI.1).

O comportamento de  $\sigma_R(E)$ , a baixas energias, determinado por DP<sup>2)</sup> apresenta um máximo local a aproximadamente  $\frac{E_{c.m.}}{A} = \frac{5 \text{ Mev}}{\text{nucleon}}$ , para  $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ ;  $\frac{E_{c.m.}}{A} = \frac{40 \text{ Mev}}{\text{núcleon}}$ , para  $^{40}\text{Ca} + ^{208}\text{Pb}$  e  $\frac{E_{c.m.}}{A} = 30 \text{ Mev/nucleon}$ , para  $^{208}\text{Pb} + ^{208}\text{Pb}$ . Este resultado parece ser estranho analisando a expressão usada por DP:

$$\sigma_R(E) = 2\pi \int db b T(b) \quad (\text{VI.6})$$

$$T(b) = 1 - e^{-\sigma_{NN}^T(E) \chi(b)}$$

Nota-se que a dependência com a energia do coeficiente de transmissão é determinada por  $\sigma_{NN}^T(E)$ , já que  $\chi(b)$  é um fator que depende exclusivamente da geometria dos núcleos envolvidos e portanto, fixo para cada sistema. Conforme vimos (figura (V.2)), página 64  $\sigma_{NN}^T$  decresce com o aumento da energia, na região da energia referida acima, e isto implica, necessariamente, num comportamento similar a  $\sigma_{NN}^T(E)$  de  $T(b)$ , com  $E$ . Portanto, concluímos que  $\sigma_R(E)$  calculado por DP não deveria apresentar máximo local nas energias referidas.

Nas figuras (VI.17)/(VI.25) apresentamos também, o cálculo de  $\sigma_R(E)$ , onde incluímos o princípio de Pauli em  $W$  e

consideramos os efeitos refrativos advindos da inclusão dos potenciais nuclear e coulombiano.

A figura (VI.17), referente ao sistema  $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$  a presenta uma nítida estrutura grossa em  $\sigma_R(E)$ , na região  $1 < \frac{E_{\text{c.m}}}{A} (\frac{\text{MeV}}{\text{nucleon}}) < 150$ . Comparando o comportamento de  $\sigma_R(E)$  dos sistemas  $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ ,  $^{12}\text{C} + ^{40}\text{Ca}$ ,  $^{12}\text{C} + ^{90}\text{Zr}$  e  $^{12}\text{C} + ^{208}\text{Pb}$ , vê-se que a referida estrutura vai sendo amortecida, à medida que o núcleo alvo vai crescendo além disso, vê-se também, que estes sistemas apresentam comportamento similares para  $\sigma_R(E)$ , isto é, um comportamento liso, com  $V_C = 0$  e  $V_N = 0$ . Portanto, conclue-se que a referida estrutura apresentada pelo sistema leve  $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$  está ligada com a sensibilidade de  $\sigma_R(E)$  com o potencial real (nuclear e coulombiano).

O efeito do potencial nuclear é o de puxar o ponto de retorno clássico de cada uma das trajetórias para a região mais interna dos núcleos resultando num crescimento de  $\sigma_R(E)$ . A ação repulsiva do potencial coulombiano atua em sentido oposto do potencial nuclear e portanto, diminui o valor de  $\sigma_R(E)$ .

A região da interação apresenta dois comportamentos distintos: a região mais interna, onde a interação nuclear domina a coulombiana e a região de superfície, onde a segunda interação predomina sobre a primeira e portanto, temos uma barreira coulombiana.

O aumento da energia tem duas consequências em  $\sigma_R(E)$ : o aumento da absorção de  $\bar{W}(E, r)$  e a diminuição da ação dos efeitos refrativos (potencial nuclear + coulombiano). O crescimento de  $\bar{W}(E, r)$  implica num mesmo efeito em  $\sigma_R(E)$ , enquanto que a perda efetiva da ação dos efeitos refrativos ocasiona um aumento (diminuição) em  $\sigma_R(E)$  se o predomínio for da interação coulombiana (nuclear). Isto implica numa mudança gradativa do comportamento de  $\sigma_R(E)$  à medida que o sistema vai envolvendo núcleos mais pesados, quando incluímos os potenciais reais. De fato, em sistemas leves a absorção não é suficiente forte para resultar em  $T(b)=1$  na região interna da interação (parâmetros de impacto b's pequenos), portanto, os efeitos refrativos quando incluídos produzem um aumento de absorção e consequentemente, de  $\sigma_R(E)$ . Para núcleos

pesados o efeito é inverso em  $\sigma_R(E)$  pois a região de domínio nuclear já apresenta absorção suficientemente forte para produzir um coeficiente de transmissão  $T(b) = 1$  a pequenos  $b$ 's e na região de fraca absorção a região de superfície da interação há uma forte barreira coulombiana.

Nossos resultados de  $\sigma_R(E)$  se mostraram em bom acordo com os cálculos de Faessler et al<sup>4)</sup> numa grande faixa da energia para o sistema  $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ , sem a inclusão da interação coulombiana e nuclear. Vide figura (VI.26). Os resultados obtidos por Faessler et al. foi abordado no contexto de matéria nuclear e onde a parte imaginária do potencial óptico foi obtida através da resolução da equação de Beth-Goldstone. Isto indica que o nosso potencial imaginário calculado a partir da teoria de espalhamento múltiplo está em acordo com a abordagem de matéria nuclear. Comparando nossos resultados com os poucos dados experimentais existentes de  $\sigma_R(E)$ , nota-se que a baixas energias nossa seção de choque situa-se abaixo das medidas diretas, nota-se também que o acordo entre a previsão teórica(nossa) e os dados vai melhorando à medida que a energia cresce. De fato, para o sistema  $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ , a  $\frac{E_{\text{c.m.}}}{A} \approx 41,5 \frac{\text{Mev}}{\text{núcleon}}$ , a previsão teórica não está muito distante da medida experimental<sup>9)</sup>. Acreditamos que o potencial imaginário usado não possue absorção suficiente para explicar aos dados experimentais, principalmente a baixas energias.

Na figura (VI.27) confrontamos o potencial imaginário  $\tilde{W}$  usado na análise dos dados experimentais e o potencial microscópico  $\bar{W}$  obtido por nós. Vê-se que, de fato, o resultado microscópico apresenta uma absorção fraca na região de superfície de interação. A  $E_{\text{c.m.}} = 508 \text{ Mev}$  ( $\frac{E_{\text{c.m.}}}{A} \approx 42,3 \frac{\text{Mev}}{\text{núcleon}}$ ), o confronto entre os dois potenciais indica que a diferença na região de superfície não é muito grande o que explica o bom acordo entre o nosso cálculo e a medida experimental de  $\sigma_R(E)$ .

A fraca absorção contida no potencial imaginário obtido da aproximação KMT, da série de espalhamento múltiplo, a baixas energias é entendida se lembrarmos que este potencial inclui apenas mecanismo inelástico de knock-out quase-livre, vide

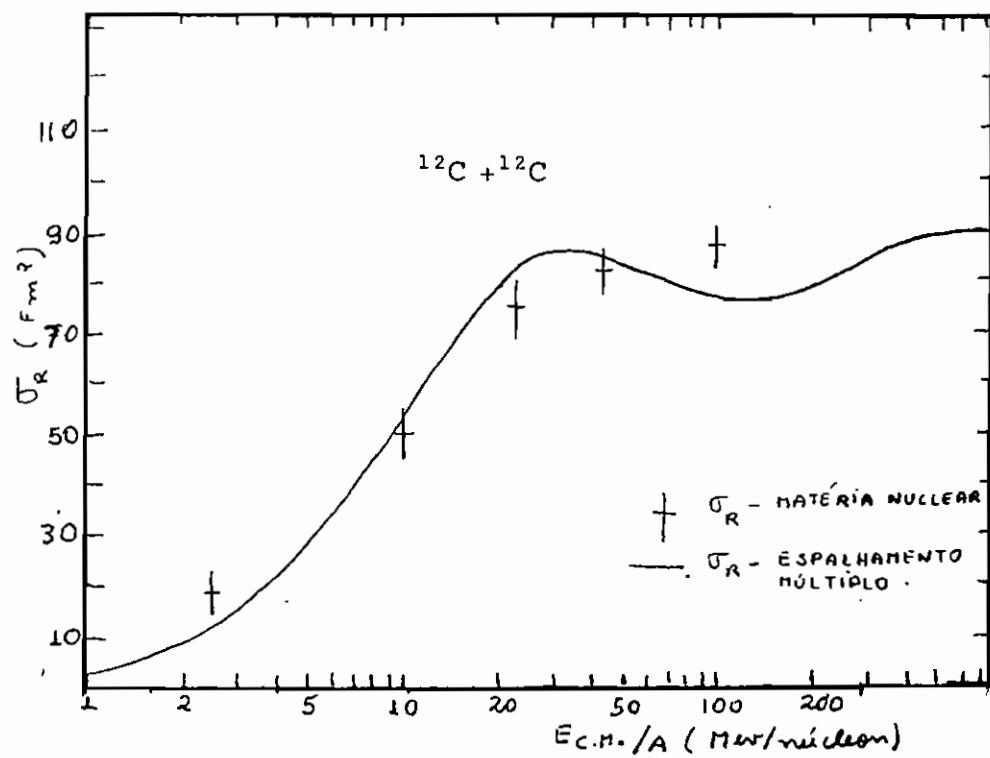
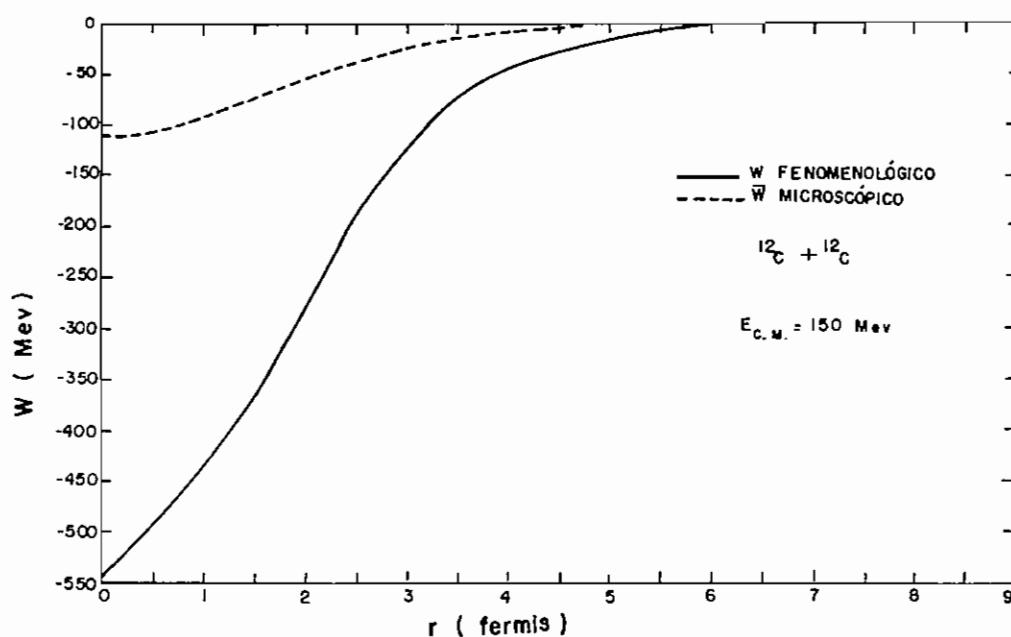
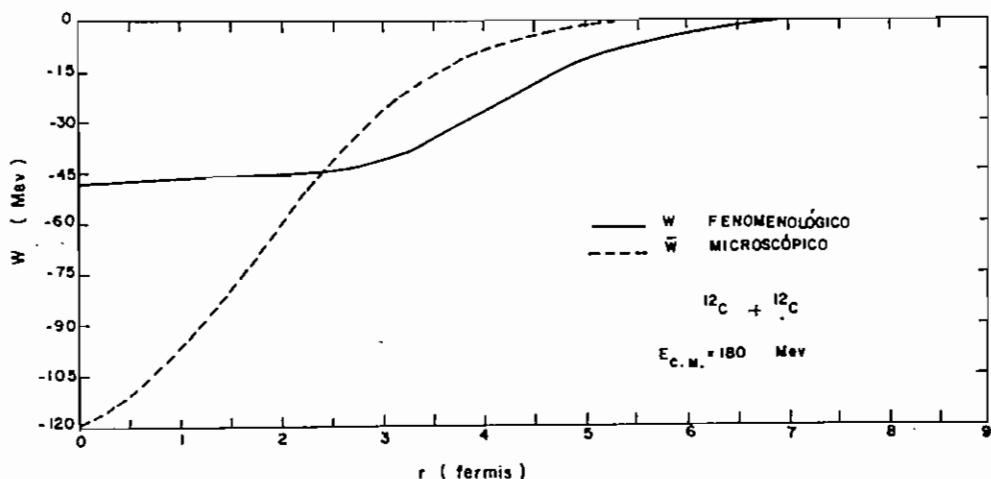


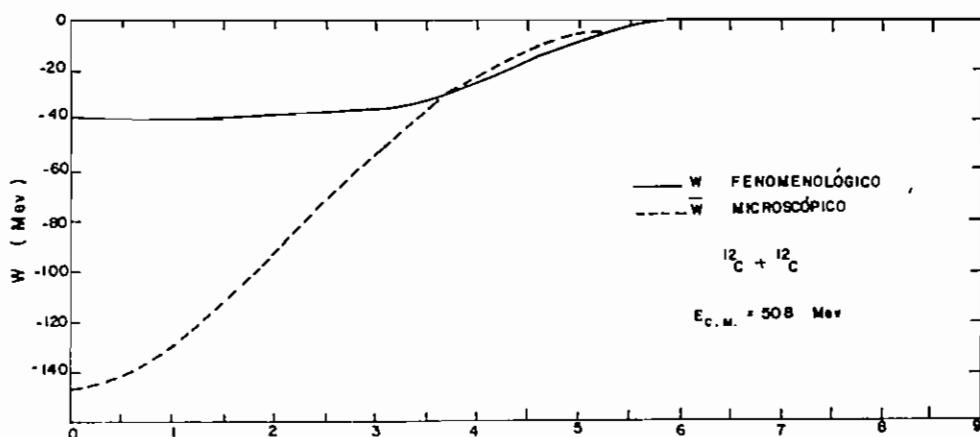
Figura (VI.26) - Confronto entre duas abordagens para determinação de  $\sigma_R(E)$ : matéria nuclear <sup>4)</sup> (+) e nosso cálculo (espalhamento múltiplo) com  $V_C = 0$  e  $V_N = 0$  (—).



Potencial fenomenológico usado na ref. 62 para análise dos dados experimentais.



Potencial fenomenológico usado na ref. 75 para análise dos dados experimentais.



Potencial fenomenológico usado na ref. 38 p/análise dos dados experimentais.

Figura (VI.27) – Confronto entre o potencial microscópico  $\bar{W}$  determinado por nós e o potencial fenomenológico usado para ajuste dos dados experimentais.

Capítulo IV. Já que, a estas energias outros mecanismos inelásticos coletivos, são importantes, entende-se porquê nosso resultado situa, abaixo dos dados experimentais. Faessler et al.<sup>4)</sup> incluiram no cálculo microscópico de  $\sigma_R(E)$ , a excitação coletiva de um dos núcleos e consequentemente melhoraram o acordo com os dados experimentais. Todavia, a energias intermediárias seus resultados situam acima das medidas diretas de  $\sigma_R$ .

A energias mais altas, certamente os mecanismos coletivos e de rearranjo tornam-se menos importantes e a interação entre os dois núcleos é governado pela colisão núcleon-núcleon. Assim, os mecanismos de knock-out quase-livre, juntamente com a criação de pions contidos no nosso cálculo ganham predominância sobre os outros mecanismos inelásticos. o que explica o bom acordo entre o cálculo teórico (nossa) e os dados experimentais do sistema  $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ , a  $\frac{\text{E}_{\text{c.m.}}}{A} = 400 \text{ e } 850 \frac{\text{Mev}}{\text{nucleon}}$ .

Convém observar que para sistemas idênticos como  $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$  a impossibilidade da distinção entre o projétil e o alvo afeta a expressão de  $\sigma_R(E)$ , já que somente as ondas parciais l's pares é que contribuem para  $\sigma_R(E)$ . A baixas energias, seu efeito é de até 12% sobre o valor obtido. A energias maiores e para sistemas idênticos mais pesados este efeito vai se tornando desprezível.

Nas figuras (VI.17)/(VI.25) nota-se que a partir de aproximadamente  $\frac{\text{E}_{\text{c.m.}}}{A} = 100 \frac{\text{Mev}}{\text{nucleon}}$  os efeitos do princípio de Pauli, interação coulombiana e núcleon, em  $\sigma_R(R)$ , tornam-se pequenos. Assim, a colisão entre dois íons pesados em altas energias é bem descrita considerando-os como aglomerados de núcleons livres.

## VII - CONCLUSÕES

Foi feito um cálculo microscópico da seção de choque total de reação,  $\sigma_R(E)$  para íons pesados usando o modelo óptico numa grande faixa da energia. Ao contrário da forma usual de análise dos dados experimentais, o cálculo não envolve nenhum parâmetro livre a ser ajustado. Nossos resultados não estão em acordo com as conclusões obtidas por De Vries e Peng<sup>2)</sup>.

De Vries e Peng<sup>2)</sup>, DP usando o limite óptico da teoria de Glauber (aproximação eikonal), obtiveram sucesso na descrição dos dados de  $\sigma_R$  do sistema  $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ . Este resultado implica no cancelamento do princípio de Pauli pela contribuição refrativa dos potenciais reais. A inclusão desses efeitos mostrou ser importante a energias  $\frac{E_{\text{c.m.}}}{A} < 100 \frac{\text{Mev}}{\text{núcleon}}$  sem obter, contudo, o mesmo resultado de DP. Ao contrário da aproximação eikonal usada por eles, para a defasagem imaginária nós usamos a expressão WKB exata, que é conhecida ser adequada nas colisões envolvendo íons-pesados.

Nossos resultados de  $\sigma_R$ , para o sistema  $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ , ignorando os efeitos refrativos estão em razoável acordo com o cálculo microscópico de Faessler et al.<sup>4)</sup>. Este determinou o potencial óptico, dentro do contexto da matéria nuclear resolvendo a equação de Beth-Goldstone.

O potencial imaginário usado por nós foi obtido da teoria de espalhamento múltiplo retendo apenas o primeiro termo da série da teoria. Incluímos o princípio de Pauli no potencial imaginário, " $t\rho_A \rho_B$ ".

O potencial " $t\rho_A \rho_B$ " representa bem a interação nuclear somente a energias intermediárias,  $\frac{E_{\text{c.m.}}}{A} > \frac{50}{\text{nucleon}}$ . Concluímos que o potencial imaginário microscópico encerra processos inelásticos do mecanismo de knock-out e criação de pions, onde houver energia suficiente para isso.

A baixas energias existe outros processos (coletivos) que não estão contidos em " $t\rho_A \rho_B$ ". Portanto, para tornar o

potencial imaginário realístico, a baixas energias, precisamos incluir outros mecanismos inelásticos, além do knock-out e criação de pions.

A energias intermediárias, onde os processos coletivos são menos importantes existe algumas correções necessárias que devem ser incluídas. São:

- 1) Inclusão de efeitos de alcance finito;
- 2) Efeitos fora da camada da energia (off-shell);
- 3) Efeitos relativísticos.

Ao se usar a equação (II.80),  $U_{\text{óptico}}(\mathbf{r}) = -t(0) \int d\mathbf{r}' \rho_A(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho_B(\mathbf{r}')$ , estamos implicitamente considerando uma interação núcleon-núcleon de alcance nulo. De fato, isto pode ser verificado ao se usar a aproximação de Born para a matriz  $t$  de dois corpos e determinar a correspondente transformada de Fourier. Assim, notamos que  $t(0)$  inclui apenas a região da interação de alcance nulo, sendo necessário, portanto, extender o alcance desta interação (1ª correção).

A passagem da equação (II.76) para a equação (II.80), que substitue  $t(q)$  por  $t(0)$  implica que a matriz  $t$  está sendo determinada na camada da energia, isto é, com  $|k'| = |k|$ . Assim, precisamos estudar a correção no potencial imaginário devido aos efeitos "off-shell" (fora da camada da energia).

Fizemos um estudo da seção de choque total de reação dentro do contexto da mecânica quântica não-relativística (equação de Schrödinger). Para energias por núcleon comparadas com a energia de repouso de um núcleon  $E_L \approx 938$  Mev justifica o uso da equação de Dirac<sup>66)</sup> para a descrição do espalhamento núcleon-núcleo. Em trabalho recente, Horowitz<sup>67)</sup> determinou o potencial imaginário relativístico para o sistema núcleon-núcleo. Não se testou, contudo, se este potencial descreve bem algum observável. Um cálculo de  $\sigma_R$  no contexto relativístico foi feito<sup>68), 69)</sup>, para o sistema núcleon-núcleo obtendo resultados bem razoáveis. Seria interessante extender este cálculo para o sistema núcleo-núcleo.

APÊNDICE A - DETERMINAÇÃO DA REGIÃO ANGULAR PERMITIDA PELO PRINCIPIO DE PAULI\*

Vamos considerar duas partículas, uma em cada esfera de Fermi e com momentos  $\vec{k}_1$  e  $\vec{k}_2$ . Definiremos

$$|\mathbf{p}| = \frac{|\vec{k}_1 + \vec{k}_2|}{2},$$

$$|\mathbf{q}| = \frac{|\vec{k}_2 - \vec{k}_1|}{2} \quad (A.1)$$

e

$$|\mathbf{b}| = |\mathbf{k}| - |\mathbf{p}|$$

Após a colisão  $|\mathbf{p}|$  e  $|\mathbf{b}|$  permanecem constantes, enquanto que  $|\mathbf{q}|$  muda apenas de direção.

A figura A.1 exibe esquematicamente a geometria da colisão. O ângulo de espalhamento permitido para a colisão do par corresponde à região não sombreada da superfície esférica com centro em  $|\mathbf{p}|$  e de raio igual a  $|\mathbf{q}|$ . Este ângulo é igual a  $\Omega_{\text{Pauli}}$ .

Os possíveis ângulos de origem dos pares de partículas com mesmo momento  $|\mathbf{p}|$  e mesmo módulo  $|\mathbf{q}|$  do momento relativo constituem a região duplamente sombreada na figura A.1. Chamaremos este ângulo de  $\bar{\Omega}$ . Este ângulo sólido provém da intersecção de dois ângulos sólidos em forma de ampulheta cujas metades cônicas aparecem sombreadas na figura A.2. Chamando estes ângulos sólidos cônicos de  $\Omega_a$  e  $\Omega_b$ , temos que

$$\Omega_{\text{Pauli}} = 4\pi - (2\Omega_a + 2\Omega_b - \bar{\Omega}), \quad (A.2)$$

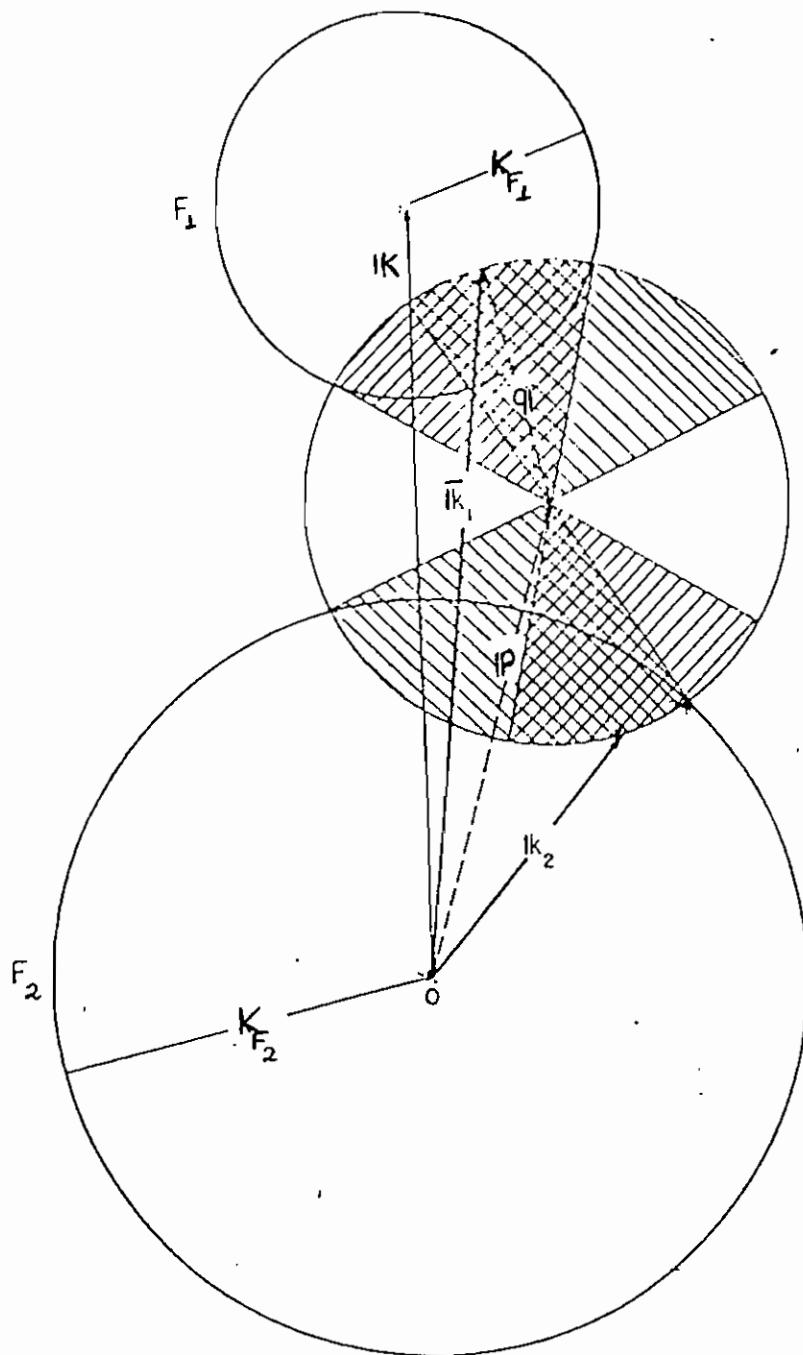


Figura A.1 - Diagrama exibindo a cinemática da colisão entre um par de nucleons. As duas esferas de Fermi são indicadas por  $F_1$  e  $F_2$ . Os momentos iniciais do par,  $\lvert \mathbf{k}_1 \rvert$  e  $\lvert \mathbf{k}_2 \rvert$ , junto com  $\lvert \mathbf{K} \rvert$ ,  $\lvert \mathbf{p} \rvert$  e  $\mathbf{q}'$ , são representados por setas como indicado. A terceira esfera é o lugar geométrico das pontas do vetor  $\mathbf{q}'$ . A região não sombreada corresponde ao ângulo sólido de espalhamento. A região duplamente sombreada indica o ângulo sólido permitido para os pares iniciais com o mesmo momento  $2\lvert \mathbf{p} \rvert$  e o mesmo módulo  $\mathbf{q}$  para o momento relativo.

onde

$$\Omega_a = 2\pi (1 - \cos \theta_a) \quad (A.3)$$

$$\Omega_b = 2\pi (1 - \cos \theta_b).$$

Os ângulos  $\theta_a$  e  $\theta_b$  podem ser facilmente relacionados aos momentos definidos na equação A.1. Isto pode ser verificado na figura A.2, de onde tiramos que

$$\cos \theta_a = \frac{p^2 + q^2 - K_{F_2}^2}{2pq} \quad (A.4)$$

e

$$\cos \theta_b = \frac{b^2 + q^2 - K_{F_1}^2}{2bq}$$

O ângulo  $\bar{\Omega}$  depende de  $\theta_a$ ,  $\theta_b$  e do ângulo  $\theta$  entre  $b$  e  $p$ . Para o cálculo de  $\bar{\Omega}$  é melhor começarmos estudando a intersecção de dois ângulos sólidos cônicos com a mesma origem. Esta situação está demonstrada na figura A.3 onde os eixos  $x_a$  e  $x_b$  são eixos paralelos a  $p$  e  $q$ . Chamaremos os ângulos sólidos de intersecção neste caso de  $\Omega_i$ . É fácil deduzir a partir da figura A.3. que:

i) Se  $\theta \leq \theta_a - \theta_b \geq 0$ , então

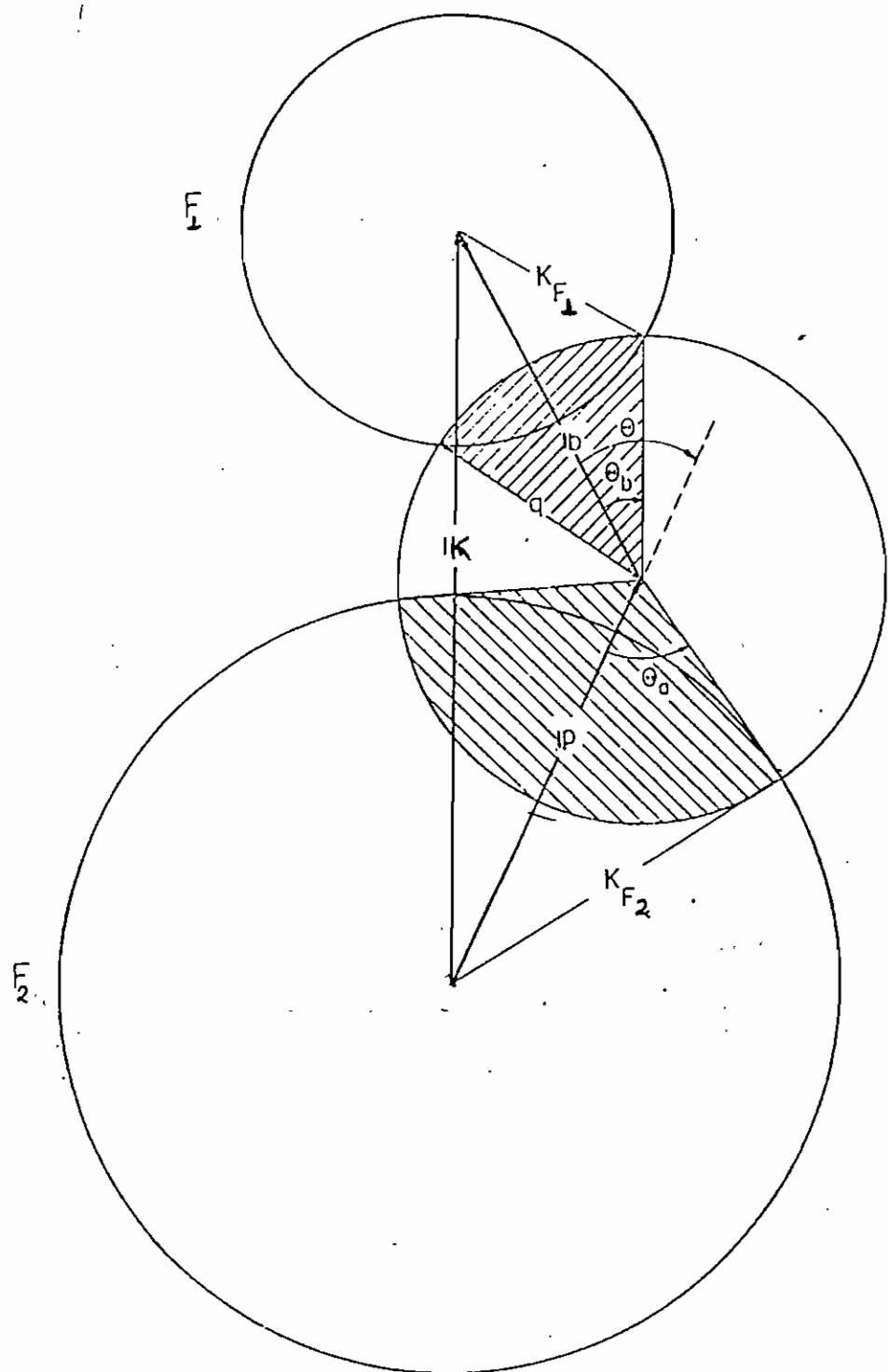
$$\Omega_i = \Omega_b \quad (A.5)$$

ii) Se  $\theta \leq \theta_b - \theta_a \geq 0$ ,

$$\Omega_i = \Omega_a \quad (A.6)$$

iii) Se  $\theta \geq \theta_a + \theta_b$  então

$$\Omega_i = 0 \quad (A.7)$$



**Figura A.2** - O mesmo esquema da figura A.1. Para uma melhor visualização mostramos apenas as metades cônicas dos ângulos sólidos em forma de ampulhetas que aparecem sobrepostos na figura A.1. Os ângulos  $\theta$ ,  $\theta_a$  e  $\theta_b$  podem ser facilmente deduzidos a partir da geometria da figura.

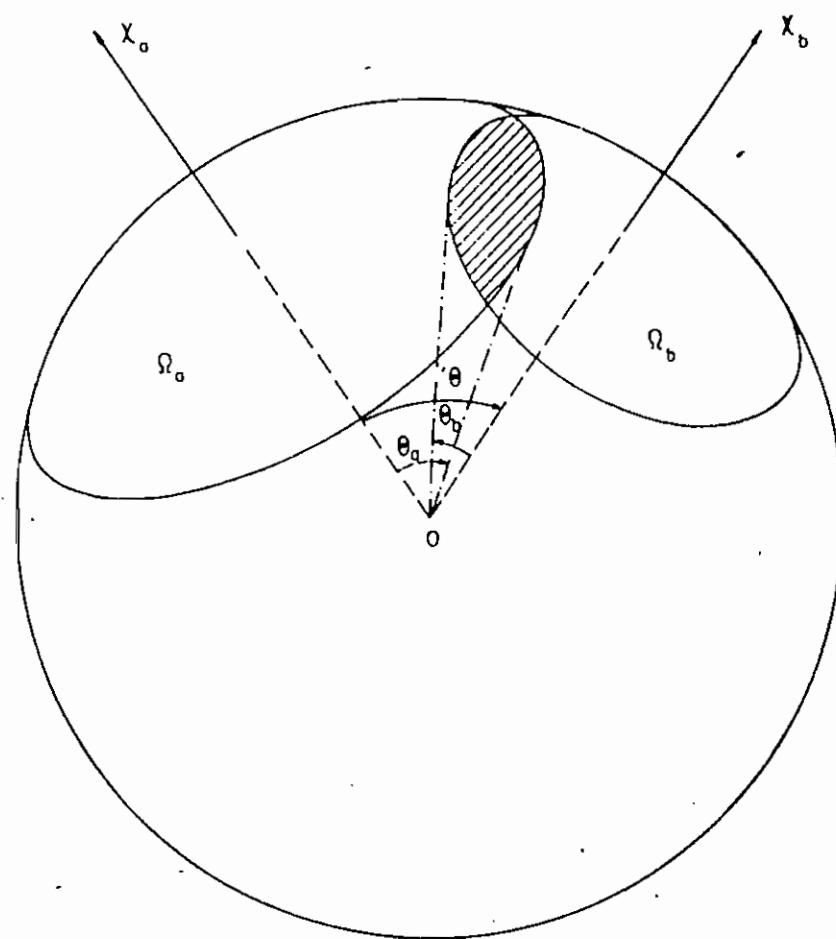


Figura A.3 - Superfície esférica de raio unitário sobre a qual estão inscritos dois círculos provenientes da intersecção de dois ângulos sólidos cônicos,  $\Omega_a$  e  $\Omega_b$ , com a superfície. O ângulo sólido  $\Omega_a$  ( $\Omega_b$ ) possui ângulo de simetria  $\theta_a$  ( $\theta_b$ ) em relação ao eixo  $x_a$  ( $x_b$ ). Os eixos  $x_a$  e  $x_b$  fazem um ângulo  $\theta$  entre si. A região sombreada corresponde à intersecção entre  $\Omega_a$  e  $\Omega_b$ .

O caso em que  $|\theta_a - \theta_b| \leq \theta \leq \theta_a + \theta_b$  é melhor analisado em termos do problema idêntico de se encontrar a área de intersecção entre duas áreas circulares inscritas sobre uma superfície esférica de raio unitário. Na figura A.4 R e T são os centros geométricos destas áreas circulares, S e P são os pontos de intersecção das margens circulares destas áreas, e Q é o ponto onde a linha maior\* que une R e T, cruza a linha maior que une S e P. Os pontos R, P e S definem um triângulo esférico de área  $2A_1$ . Os pontos S, P e T definem um triângulo esférico de área  $2A_2$ . Estes triângulos possuem ângulos internos  $\alpha$  e  $\beta$ , em torno de R e T, respectivamente.

A parte da área circular  $\Omega_a$  que fica, no interior das linhas RS e RP, é dada por  $\frac{\alpha}{2\pi} \Omega_a$ . A parte da área circular  $\Omega_b$ , que fica no interior das linhas TS e TP, é dado por  $\frac{\beta}{2\pi} \Omega_b$ . Assim, podemos deduzir facilmente da figura A.4, que a área de intersecção entre  $\Omega_a$  e  $\Omega_b$  é dada por

$$\Omega_i = \frac{\alpha}{2\pi} \Omega_a + \frac{\beta}{2\pi} \Omega_b - 2A_1 - 2A_2 . \quad (A.8)$$

Para deduzir o ângulo  $\alpha$  utilizamos dois novos eixos  $x_p$  e  $x_s$  oriundos do centro da superfície esférica e passando pelos pontos P e S, respectivamente. Adotando um sistema de coordenadas polares em que  $x_a$  é o eixo Z, o ângulo  $\alpha$  será a diferença entre os ângulos azimutais de  $x_p$  e  $x_s$ . Neste sistema de coordenadas,  $(\theta_a, \phi_p)$  e  $(\theta, \phi_b)$  são os ângulos polares e azimutais correspondentes aos eixos  $x_p$  e  $x_b$ . Como o ângulo entre  $x_b$  e  $x_p$  é  $\theta_b$ , obtemos

$$\cos \theta_b = \cos \theta_a \cos \theta + \sin \theta_a \sin \theta \cos(\phi_b - \phi_p),$$

onde tiramos que

\* Uma linha maior é uma linha geodésica sobre a superfície esférica, ou seja uma linha que, se continuada, faz um círculo cujo centro é o próprio centro da superfície esférica (também conhecido como círculo maior).

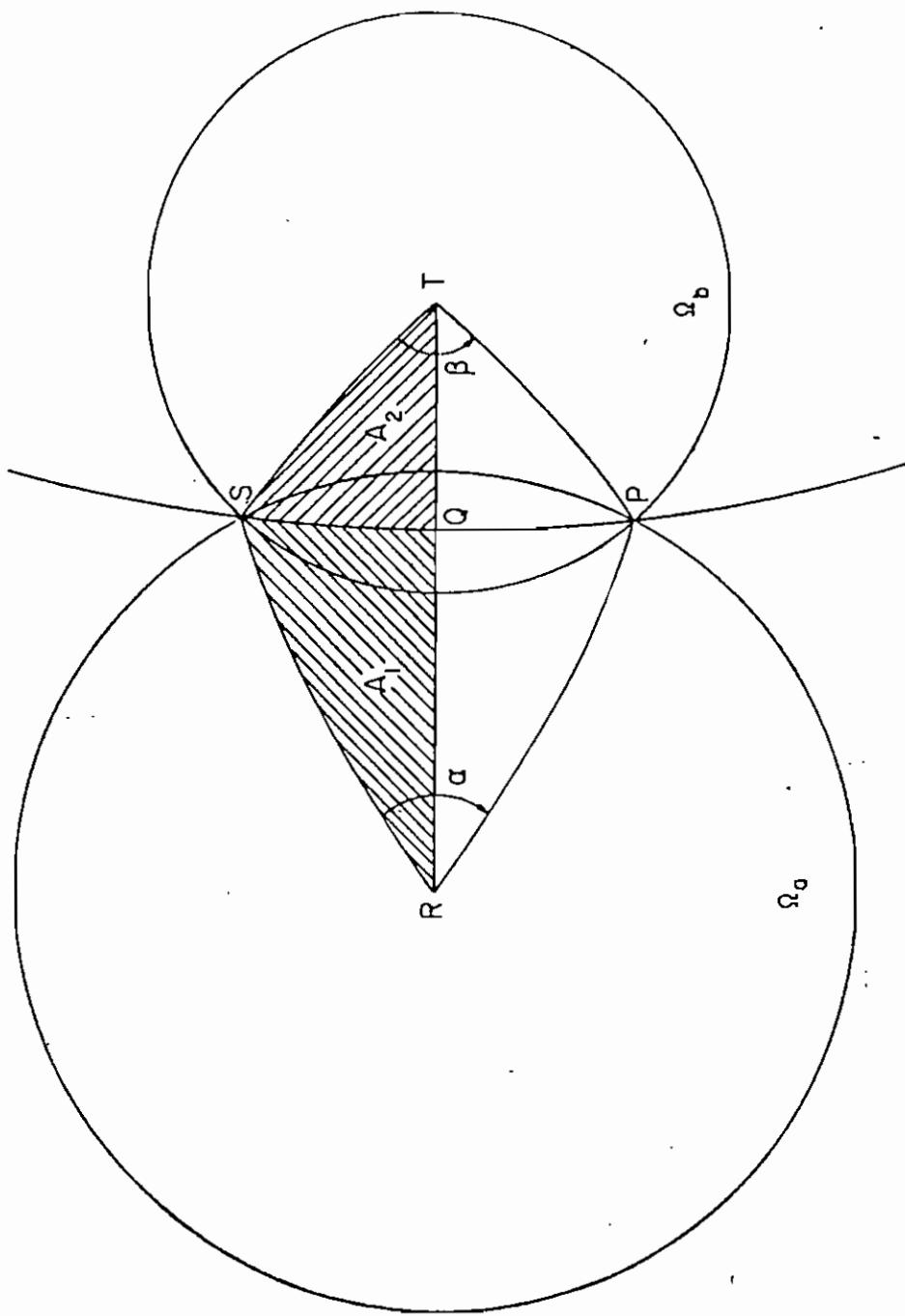


Figura A.4 - Projeção em um plano das manchas circulares  $\Omega_a$  e  $\Omega_b$ , inscritas na superfície esférica. R e T são os centros geométricos destas manchas. S e P são os pontos de interseção das suas margens. Todas as linhas que unem estes pontos são círculos maiores sobre a superfície.  $A_1$  e  $A_2$  são as áreas de dois triângulos esféricos delimitados por algumas destas linhas.

$$\frac{\alpha}{2} = \phi_b - \phi_p = \arccos \left[ \frac{\cos \theta_b - \cos \theta_a \cos \theta_a}{\sin \theta_a \sin \theta_a} \right] \quad (A.9)$$

Seguindo o mesmo raciocínio, achamos que  $\beta/2$  é dado por uma equação similar: Devemos apenas trocar os lugares de  $\theta_a$  e  $\theta_b$  no resultado acima.

As áreas  $A_1$  e  $A_2$  podem ser obtidas por meio de um teorema para triângulos esféricos, que afirma que

$$(\text{Soma dos ângulos internos}) - \pi = \frac{\text{área}}{R^2}, \quad (A.10)$$

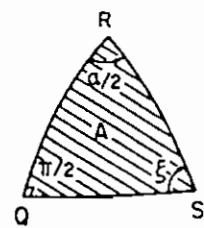
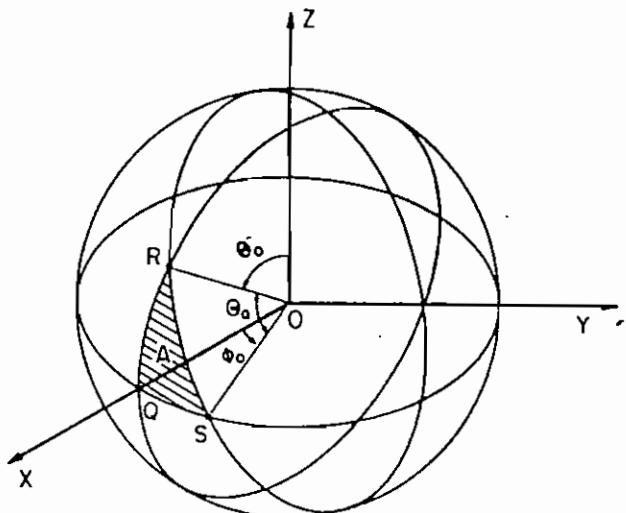
onde  $R$  é o raio da superfície esférica sobre a qual o triângulo é inscrito, e que no caso é igual a unidade. Para a área  $A_1$  temos então,

$$\frac{\alpha}{2} + \xi - \frac{\pi}{2} = A_1, \quad (A.11)$$

onde  $\xi$  é o ângulo entre as linhas  $QS$  e  $RS$ . Na figura A.5 vemos como esta área decorre da intersecção entre três círculos maiores inscritos sobre a superfície esférica. Agora, o eixo  $Z$  é escolhido de modo que o lado  $QS$  do triângulo esférico fique sobre um círculo maior no plano  $XY$  e o lado  $RQ$  fique sobre um círculo maior no plano  $XZ$ . Podemos então encontrar o ângulo  $\xi$  a partir do produto escalar entre o vetor unitário perpendicular ao círculo maior que contém o lado  $RS$  e o vetor unitário na direção do eixo  $Z$ . Em termos dos ângulos auxiliares  $\theta_o$  e  $\phi_o$ , obtemos que

$$\xi = \arccos \left[ \frac{\sin \theta_o \sin \theta_o}{\sqrt{\cos^2 \theta_o + \sin^2 \theta_o \sin^2 \phi_o}} \right]. \quad (A.12)$$

Tomando o produto escalar deste mesmo vetor unitário com o vetor unitário na direção  $Y$ , encontramos que



**Figura A.5** - Três círculos maiores inscritos sobre uma superfície esférica dando origem a um triângulo esférico de área  $A$ . Em relação a um eixo de coordenadas convenientemente escolhido,  $R$  fica no plano  $XZ$  e possui coordenada polar  $\theta_0$ ,  $S$  fica no plano  $XY$  e possui coordenada azimutal  $\phi_0$ . O ângulo entre as retas que unem estes pontos a origem é dado por  $\theta_a$ . Esta figura nos permite deduzir os ângulos internos  $\alpha/2$  e  $\xi$  do triângulo esférico em função de  $\theta_0$ ,  $\phi_0$  e  $\theta_a$ .

$$\frac{\alpha}{2} = \arccos \left[ \frac{\cos \theta_o \cos \phi_o}{\sqrt{\cos^2 \theta_o + \sin^2 \theta_o \sin^2 \phi_o}} \right]. \quad (\text{A.13})$$

O ângulo  $\theta_a$  também está relacionado com  $\theta_o$  e  $\phi_o$  por

$$\cos \theta_a = \sin \theta_o \cos \phi_o. \quad (\text{A.14})$$

Eliminando  $\theta_o$  e  $\phi_o$  destas relações, e utilizando a equação A.9, obtemos que

$$\frac{\pi}{2} - \xi = \arccos \left[ \frac{\cos \theta_b - \cos \theta \cos \theta_a}{\sin \theta_a \sqrt{\cos^2 \theta_a + \cos^2 \theta_b - 2 \cos \theta \cos \theta_a \cos \theta_b}} \right]. \quad (\text{A.15})$$

Substituindo as equações A.9 e A.15 na equação A.8, obtemos então que

$$A_1 = \arccos \left[ \frac{\cos \theta_b - \cos \theta \cos \theta_a}{\sin \theta \sin \theta_a} \right]$$

$$- \arccos \left[ \frac{\cos \theta_b - \cos \theta \cos \theta_a}{\sin \theta_a \sqrt{\cos^2 \theta_a + \cos^2 \theta_b - 2 \cos \theta \cos \theta_a \cos \theta_b}} \right].$$

Seguindo o mesmo procedimento, encontramos uma equação similar para  $A_2$ : Devemos apenas trocar os lugares de  $\theta_a$  e  $\theta_b$  na equação acima.

Assim, voltamos à equação (A.8) e vemos que o ângulo sólido de intersecção  $\Omega_i$  fica

$$\begin{aligned}
\Omega_i(\theta, \theta_a, \theta_b) = & 2 \left\{ \arccos \left[ \frac{\cos \theta_b - \cos \theta \cos \theta_a}{\sin \theta_a \sqrt{\cos^2 \theta_a + \cos^2 \theta_b - 2 \cos \theta \cos \theta_a \cos \theta_b}} \right] \right. \\
& + \arccos \left[ \frac{\cos \theta_a - \cos \theta \cos \theta_b}{\sin \theta_b \sqrt{\cos^2 \theta_a + \cos^2 \theta_b - 2 \cos \theta \cos \theta_a \cos \theta_b}} \right] \\
& - \cos \theta_a \arccos \left[ \frac{\cos \theta_b - \cos \theta \cos \theta_a}{\sin \theta \sin \theta_a} \right] \\
& \left. - \cos \theta_b \arccos \left[ \frac{\cos \theta_a - \cos \theta \cos \theta_b}{\sin \theta \sin \theta_b} \right] \right\}, \tag{A.17}
\end{aligned}$$

para  $|\theta_b - \theta_a| \leq \theta \leq \theta_a + \theta_b$ .

Tendo os resultados de  $\Omega_i$  por meio das equações A.5, A.6, A.7 e A.17, o cálculo de  $\bar{\Omega}$  é imediato. À primeira vista, conforme podemos inferir da figura A.6, parece que  $\bar{\Omega}$  é simplesmente igual ao dobro do valor de  $\Omega$ . Devemos no entanto tomar cuidado com o fato de que, se  $\theta_S = \theta + \theta_a + \theta_b > \pi$ , uma outra intersecção aparece pelo lado oposto destes ângulos sólidos em forma de ampulheta, conforme mostra a figura A.7. Adicionando esta nova contribuição ao ângulo de intersecção  $\bar{\Omega}$ , obtemos que o valor correto final é

$$\bar{\Omega}(\theta, \theta_a, \theta_b) = 2 \left[ \Omega_i(\theta, \theta_a, \theta_b) + \Omega_i(\pi - \theta, \theta_a, \theta_b) \right]. \tag{A.18}$$

---

\* Apêndice cedido gentilmente por Carlos A. Bertulani.

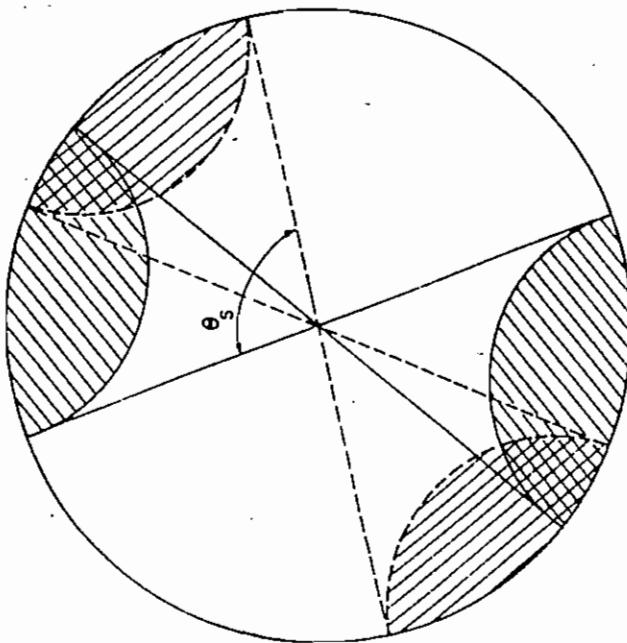


Figura A.6 - Intersecção de dois ângulos sólidos em forma de ampulheira.  $\theta_S$  é o ângulo entre as linhas externas destes ângulos sólidos.

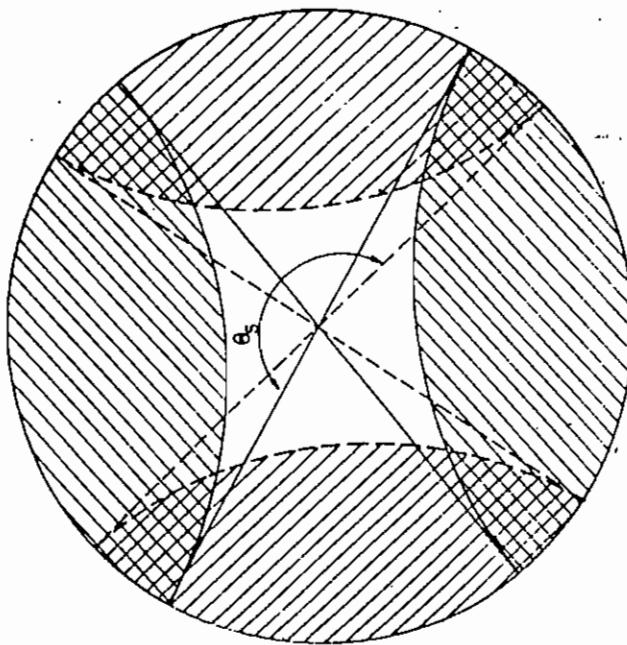


Figura A.7 - O mesmo que na figura A.6 só que, neste caso,  $\theta_S > \pi$  e aparece uma outra intersecção pelos lados opostos destes ângulos sólidos.

APÊNDICE B - CÁLCULO NUMÉRICO  $\bar{\sigma}_{NN}$ : SEÇÃO DE CHOQUE NÚCLEON-NÚCLEON CORRIGIDA PELO PRINCÍPIO DE PAULI

A equação (V.26), juntamente com (V.29),

$$\bar{\sigma}_{NN}(K, K_{F_1}, K_{F_2}) = \frac{1}{V_{F_1} V_{F_2}} \iint d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \frac{2q}{K} \cdot \frac{\sigma_{NN}^T(q)}{4\pi} \Omega_{\text{Pauli}}(\theta_a, \theta_b, \theta), \quad (\text{B.1})$$

uma vez determinado  $K$ ,  $K_{F_1}$  e  $K_{F_2}$ , envolve 6 variáveis para a determinação de  $\bar{\sigma}_{NN}(K, K_{F_1}, K_{F_2})$ : 3 variáveis referente ao vetor  $\mathbf{k}_1$  e 3 variáveis referente ao vetor  $\mathbf{k}_2$ . O sistema de coordenadas cilíndricas parece ser adequado para a resolução da equação (B.1), já que a função integranda apresenta uma certa simetria neste sistema de coordenadas.

Assim, os vetores  $\mathbf{k}_1$  e  $\mathbf{k}_2$  neste sistema é dada por:

$$\mathbf{k}_1 = k_{1z} \hat{\mathbf{e}}_z + k_{1\rho} \hat{\mathbf{e}}_{\rho_1}, \quad (\text{B.2})$$

$$\mathbf{k}_2 = k_{2z} \hat{\mathbf{e}}_z + k_{2\rho} \hat{\mathbf{e}}_{\rho_2}, \quad (\text{B.3})$$

onde  $\hat{\mathbf{e}}_{\rho_1}$  e  $\hat{\mathbf{e}}_{\rho_2}$  são versores que formam um ângulo  $\phi_1$  e  $\phi_2$  com o eixo  $x$  do sistema cartesiano.

Iremos orientar o vetor  $\mathbf{k}$  na direção do versor  $\hat{\mathbf{e}}_z$ , isto é,  $\mathbf{k} = K \hat{\mathbf{e}}_z$ . As variáveis de interesse neste sistema de coordenadas se escrevem

$$P^2 = \frac{1}{4} [k_1^2 + 2k_{1z} K + 2k_{1z} k_{2z} + 2k_{1\rho} k_{2\rho} \cos\phi + k_2^2 + 2k_{2z} K + K^2], \quad (\text{B.4})$$

$$q^2 = \frac{1}{4} [k_1^2 + 2k_{1z} K - 2 k_{1z} k_{2z} - 2k_{1\rho} k_{2\rho} \cos\phi + k_2^2 - 2k_{2z} K + K^2], \quad (B.5)$$

$$b^2 = \frac{1}{4} [k_1^2 - 2k_{1z} K + 2k_{1z} k_{2z} + 2k_{1\rho} k_{2\rho} \cos\phi + k_2^2 - 2k_{2z} K + K^2] \quad (B.6)$$

onde  $\phi = \phi_2 - \phi_1$ . Nota-se, examinando as expressões (B.4), (B.5) e (B.6) que as variáveis envolvidas na equação (B.1), envolvem a penas a variável  $\phi$ , isto é, a diferença entre o ângulo  $\phi_2$  e  $\phi_1$ . Esta simetria é que permite reduzir o número de variáveis da equação (B.1) de 6 variáveis para 5. Assim podemos reescrevê-la

$$\bar{\sigma}_{NN}(K, K_{F_1}, K_{F_2}) = \frac{1}{V_{F_1} V_{F_2} K} \int_0^{K_{F_1}} dk_{1\rho} \int_0^{\tilde{k}_{1z}} dk_{1z} \int_0^{\tilde{k}_{2z}} dk_{2\rho} \int_0^{K_{F_2}} dk_{2\rho} \quad (B.7)$$

$$\int_{\tilde{k}_{2z}}^{\tilde{k}_{2z}} dk_2 \int_{-\pi}^{\pi} d\phi 2q \sigma_{NN}^T \Omega_{Pauli}(\theta, \theta_a, \theta_b),$$

onde  $\tilde{k}_{1z} = -\sqrt{K_{F_1}^2 - k_{1\rho}^2}$ ,  $\tilde{k}_{1z} = \sqrt{K_{F_1}^2 - k_{1\rho}^2}$ ,  $\tilde{k}_{2z} = -\sqrt{K_{F_2}^2 - k_{2\rho}^2}$  e

$$\tilde{k}_{2z} = \sqrt{K_{F_2}^2 - k_{2\rho}^2}.$$

Já que, iremos usar o método da quadratura de Gauss-Legendre<sup>70)</sup>, precisamos utilizar uma transformação de variável para que o intervalo de integração seja de -1 à +1.

Assim, é conveniente usar as seguintes transformações de variáveis:

$$k_{1\rho} = \frac{K_{F_1}}{2} (x + 1) \quad (B.8)$$

$$k_{1z} = \frac{(\tilde{k}_{1z}(x) - \bar{k}_{1z}(x))}{2} y + \frac{(\tilde{k}_{1z}(x) + \bar{k}_{1z}(x))}{2}, \quad (B.9)$$

$$k_{1p} = \frac{\frac{K_F}{2}}{2} (z + 1) \quad (B.10)$$

e

$$k_{2z} = \frac{(\tilde{k}_{2z}(z) - \bar{k}_{2z}(z))}{2} t + \frac{(\tilde{k}_{2z}(z) + \bar{k}_{2z}(z))}{2} \quad (B.11)$$

Uma vez transformados os extremos de integração da equação (B.1) o método da quadratura de Gauss-Legendre nos permite escrevê-la na seguinte forma

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{NN}(K, K_{F_1}, K_{F_2}) &= \frac{1}{V_{F_1} V_{F_2} K} \left[ \left( \frac{K_F}{2} \right)^2 \left( \frac{K_F}{2} \right)^2 \prod_{i=1}^{N_i} \sum_{j=1}^{N_j} \sum_{k=1}^{N_k} \sum_{l=1}^{N_l} \sum_{m=1}^{N_m} (x_i + \right. \right. \\ &\cdot \left. \left. \left[ \frac{(\tilde{k}_{1z}(x_i) - \bar{k}_{1z}(x_i))}{2} \right] \left[ (z_k + 1) \right] \left[ \frac{(\tilde{k}_{2z}(z_k) - \bar{k}_{2z}(z_k))}{2} \right] \right] \right] \\ &\cdot A_i A_j A_k A_l A_m 2q \sigma_{NN}^T \Omega_{Pauli}(\theta, \theta_a, \theta_b) \quad (B.12) \end{aligned}$$

onde, por exemplo, os  $x_i$ 's e  $A_i$ 's correspondem as raízes do polinômio de Legendre e as funções pesos, respectivamente e que estão tabeladas<sup>70</sup>.

Precisamos determinar o número de pontos de Gauss, os N's das somatórias da equação (B.12), necessário para haver uma estabilização numérica na determinação de  $\bar{\sigma}_{NN}$ . Para um dado momento  $K$ ,  $K_{F_1}$  e  $K_{F_2}$  usamos  $N_i = N_j = N_k = N_l = N_m = 24$ , 20 e 16 pontos e em todos eles o valor numérico se apresentou estável. Assim, usamos os seguintes valores:  $N_i = N_j = N_k = N_l = N_m = 16$  pontos, já que estes valores envolve um tempo de computação menor que os outros pontos.

**APÊNDICE C - DETERMINAÇÃO DO MOMENTO DE FERMI ATRAVÉS DO MODELO  
DE GÁS DE FERMI**

Neste modelo, os A's núclos do núcleo se encontram livres contidos numa esfera<sup>71)</sup>. Já que, eles são férmons devem obedecer a estatística de Fermi-Dirac. Nesta estatística o número médio de núclos por orbital i depende do potencial químico  $\mu$ , da temperatura  $T$  ( $\beta E = \frac{1}{kT}$ ), que se encontram os núclos do gás e da energia do núcleon no orbital i, conforme está expresso na seguinte expressão:

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + 1} . \quad (C.1)$$

Cada núcleon ocupa um orbital i e portanto, a soma de  $\langle n_i \rangle$  sobre todos os orbitais ocupados pelos núclos do núcleo deverá resultar no número total de núclos, isto é,

$$A = \sum_{i=1}^N \langle n_i \rangle . \quad (C.2)$$

Neste modelo como os núclos são considerados como livres, a energia associada ao orbital i é a energia cinética que é dada por

$$\epsilon_i = \frac{\hbar^2 k_i^2}{2m} . \quad (C.3)$$

Cada núcleon (nêutron e próton) possue spin 1/2. O princípio de Pauli permite que a cada orbital i ( $k_i$ ) possamos ter ao mesmo tempo, no máximo 2 nêutrons e 2 prótons com orientação de spin diferente. Um com spin para cima e outro para baixo. De formas que cada estado quântico é ocupado por um único núcleon. Assim

temos que

$$A = \sum_{i=1}^N 4 \langle n_i \rangle . \quad (C.4)$$

No limite em que o volume dos núcrons se torna infinito é possível substituir a somatória da equação (C.4) por uma integral, isto é,

$$A = \frac{4V}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d|k| \langle n_k \rangle . \quad (C.5)$$

Usando a relação entre a energia  $\epsilon$ , dada pela equação (C.3), e o momento  $k$  obtemos

$$A = \frac{4V}{(2\pi)^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{1/2} \int_0^\infty d\epsilon \frac{\sqrt{\epsilon}}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} . \quad (C.6)$$

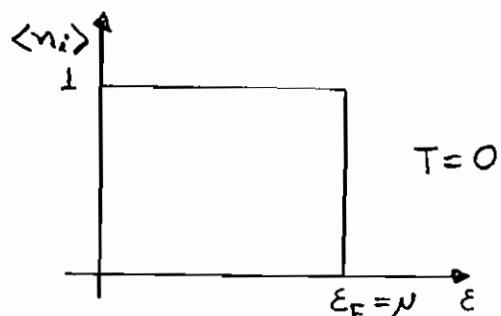
Um fato interessante ocorre com o número médio de núcrons por orbital  $i$ , isto é,  $\langle n_i \rangle$ , quando a temperatura se aproxima de zero ( $\beta \rightarrow \infty$ ). Neste limite temos que

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + 1} \xrightarrow{T \rightarrow 0} \begin{cases} 0, & \epsilon > \mu \\ 1, & \epsilon < \mu \end{cases} \quad (C.7)$$

Isto significa que o número médio de núcrons com energia menor que  $\mu$  é 1. Neste limite temos todos os núcrons ocupando todos os estados abaixo da energia  $\epsilon < \mu$ , a temperatura  $T = 0$ . Esta energia é conhecida como energia de Fermi

$$\epsilon_F = \mu(T = 0) = \frac{\pi^2 k_F^2}{2m} \quad (C.8)$$

A distribuição média de ocupação de estados por energia a  $T = 0$  está esquematicamente, representado na figura abaixo



A equação (C.6), neste limite se escreve

$$\frac{A}{V} = \frac{4}{(2\pi)^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon \sqrt{\epsilon}. \quad (C.9)$$

Portanto, temos que

$$\rho_A(r) = \frac{A}{V} = \frac{4}{(2\pi)^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{2}{3} \left( \epsilon_F \right)^{3/2}, \quad (C.10)$$

$$k_F^2(r) = \left[ \frac{3}{2} \pi^2 \rho_A(r) \right]^{2/3} \quad (C.11)$$

A equação (C.11) relaciona a densidade de matéria nuclear  $\rho_A(r)$  e o correspondente momento de Fermi  $k_F$ . Esta expressão é conhecida como aproximação local da densidade (LDA). A densidade  $\rho_A(r)$  apresenta duas regiões bem distintas: a região de volume e a região de superfície. A região de volume corresponde a parte de  $\rho_A(r)$  constante em  $r$  e situa na parte mais interna do núcleo. Esta região é bem descrita pela equação C.11. Quanto a região de superfície, situada na região espacial mais externa do núcleo e que se caracteriza por uma variação de  $\rho_A(r)$  com  $r$ , é necessário acrescentar um termo que descreve melhor a relação entre  $k_F$  e  $r$ . Este termo é conhecido como correção de superfície<sup>72</sup>). Acrescido este termo a equação (C.11) temos que

$$k_F^2(r) = \left[ \frac{3}{2} \pi^2 \rho_A(r) \right]^{2/3} + \frac{5}{2} \xi \left( \frac{\nabla \rho_A}{\rho_A} \right)^2 , \quad (C.12)$$

com  $\xi = \gamma_9$ .

APÊNDICE D - EFEITO DA SIMETRIA DE TROCA EM  $\sigma_R(E)$

Os resultados de  $\sigma_R(E)$  para os sistemas,  $^{12}C + ^{12}C$ ,  $^{40}Ca + ^{40}Ca$ ,  $^{90}Zr + ^{90}Zr$  e  $^{208}Pb + ^{208}Pb$ , isto é, reações envolvendo núcleos idênticos não considera os efeitos decorrentes da impossibilidade de distinção entre o núcleo projétil do núcleo alvo. A amplitude do espalhamento elástico  $f(\theta)$  deve ser substituído por  $\bar{f}(\theta)$ , isto é,

$$\bar{f}(\theta) = f(\theta) + (-)^S f(\pi-\theta), \quad (D.1)$$

onde  $S$  representa o spin total do núcleo e  $f(\theta)$  descreve a amplitude de espalhamento de núcleos distinguíveis. Para núcleos par-par, os núcleos estudados, a simetria de troca é par, já que  $S = 0$ . Isto implica que somente as ondas parciais l's pares irão contribuir para o espalhamento, já que a parte  $\theta$  da amplitude  $f(\theta)$  apresenta a propriedade

$$P_l(\theta) = (-)^l P_l(\pi-\theta).$$

Ao se escrever a amplitude de espalhamento elástico  $\bar{f}(\theta)$ , em termos de ondas parciais l's, usando a propriedade  $P_l(\theta) = (-)^l P_l(\pi-\theta)$  na equação (D.1), juntamente com o teorema óptico para partículas carregadas concluímos que:<sup>76)</sup>

$$\bar{\sigma}_R(E) = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [1 + (-)^l] T_l. \quad (D.2)$$

A expressão de  $\bar{\sigma}_R(E)$  em termos do parâmetro de impacto  $b$  é a seguinte:

$$\bar{\sigma}_R(E) = 2\pi \int_0^{\infty} db b [1 + \cos(kb - \pi/2)] T(b), \quad (D.3)$$

onde a fase  $(-\pi/2)$  foi substituída por  $\cos(\pi/2)$ . Usando o modelo de corte abrupto para o coeficiente de transmissão  $T(b)$ , isto é,

$$T(b) = \begin{cases} 1, & b \leq b_c \\ 0 & b > b_c \end{cases} \quad (D.4)$$

obtemos a seguinte expressão  $\sigma_R^{(c)}(E)$ :

$$\sigma_R^{(c)}(E) = 2\pi \left\{ \frac{b_c}{k} \sin(kb_c - \pi/2) + \frac{1}{k^2} [\cos(kb_c - \pi/2) - \cos(\pi/2)] \right\},$$

onde  $\sigma_R^{(c)}(E)$  representa a correção a ser feita em  $\sigma_R(E)$ . A relação entre  $\bar{\sigma}_R(E)$  e  $\sigma_R(E)$  é a seguinte:

$$\bar{\sigma}_R(E) = \sigma_R(E) + \sigma_R^{(c)}(E). \quad (D.6)$$

Nas tabelas D1/04 apresentamos os resultados  $\sigma_R^{(c)}(E)$  para diversos sistemas, a várias energias

Tabela D.1: Valor de  $\sigma_R^{(c)}$  (E)

Sistema	$b_C$ (fm)	$E_{c.m.}$ (Mev)	$\sigma_R^{(c)} (E)$ ( $\text{fm}^2$ )
$^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$	5,5	12,0	- 8,56
$^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$	5,5	24,0	+12,28
$^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$	5,5	36,0	-11,29
$^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$	5,5	48,0	+ 7,97
$^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$	5,5	60,0	- 3,40
$^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$	5,5	72,0	- 4,49
$^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$	5,5	84,0	+ 6,72
$^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$	5,5	96,0	- 1,07
$^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$	5,5	108,0	- 6,09
$^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$	5,5	120,0	+ 2,11
$^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$	5,5	180,0	+ 4,60
$^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$	5,5	240,0	+ 3,79

Tabela D.2: Valor de  $\sigma_R^{(c)}(E)$

Sistema	$b_C$ (fm)	$E_{C.m.}$ (Mev)	$\sigma_R^{(c)}(E)$ (fm $^2$ )
$^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$	5,0	40,0	- 4,28
$^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$	5,0	80,0	- 2,24
$^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$	6,5	120,0	+ 0,14
$^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$	7,0	160,0	- 3,46
$^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$	7,0	200,0	+ 2,71
$^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$	7,0	240,0	- 2,75
$^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$	7,0	280,0	+ 2,23
$^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$	7,5	320,0	- 2,53
$^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$	7,5	360,0	+ 1,15
$^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$	7,5	400,0	+ 2,37
$^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$	8,0	600,0	+ 0,89
$^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$	8,0	800,0	+ 1,45

Tabela D.3: Valor de  $\sigma_R^{(c)}$  (E)

Sistema	$b_c$ (fm)	$E_{c.m.}$ (Mev)	$\sigma_R^{(c)}(R)$ (fm $^2$ )
$^{90}\text{Zr} + ^{90}\text{Zr}$	5,0	90,0	- 0,03
$^{90}\text{Zr} + ^{90}\text{Zr}$	5,0	180,0	- 0,85
$^{90}\text{Zr} + ^{90}\text{Zr}$	6,5	270,0	- 1,29
$^{90}\text{Zr} + ^{90}\text{Zr}$	7,0	360,0	- 0,61
$^{90}\text{Zr} + ^{90}\text{Zr}$	8,0	450,0	- 0,52
$^{90}\text{Zr} + ^{90}\text{Zr}$	8,5	540,0	+ 0,46
$^{90}\text{Zr} + ^{90}\text{Zr}$	8,5	630,0	- 1,45
$^{90}\text{Zr} + ^{90}\text{Zr}$	9,0	720,0	+ 1,31
$^{90}\text{Zr} + ^{90}\text{Zr}$	9,0	810,0	- 1,35
$^{90}\text{Zr} + ^{90}\text{Zr}$	10,0	900,0	- 0,19
$^{90}\text{Zr} + ^{90}\text{Zr}$	11,0	1350,0	+ 1,20
$^{90}\text{Zr} + ^{90}\text{Zr}$	12,0	1800,0	- 1,12

Tabela D.4: Valor  $\sigma_R^{(c)}(E)$

Sistema	$b_C$ (fm)	$E_{c.m.}$ (mev)	$\sigma_R^{(c)}(E)$ (fm $^2$ )
$^{208}\text{Pb} + ^{208}\text{Pb}$	4,0	208,0	+ 0,44
$^{208}\text{Pb} + ^{208}\text{Pb}$	4,0	416,0	- 0,37
$^{208}\text{Pb} + ^{208}\text{Pb}$	4,0	624,0	+ 0,27
$^{208}\text{Pb} + ^{208}\text{Pb}$	6,0	832,0	+ 0,44
$^{208}\text{Pb} + ^{208}\text{Pb}$	8,5	1040,0	+ 0,74
$^{208}\text{Pb} + ^{208}\text{Pb}$	9,0	1248,0	- 0,69
$^{208}\text{Pb} + ^{208}\text{Pb}$	9,5	1456,0	- 0,46
$^{208}\text{Pb} + ^{208}\text{Pb}$	10,0	1664,0	- 0,69
$^{208}\text{Pb} + ^{208}\text{Pb}$	11,0	1872,0	- 0,48
$^{208}\text{Pb} + ^{208}\text{Pb}$	12,0	2080,0	+ 0,72
$^{208}\text{Pb} + ^{208}\text{Pb}$	15,0	3120,0	+ 0,54
$^{208}\text{Pb} + ^{208}\text{Pb}$	15,0	4160,0	+ 0,42

Nota-se que para sistemas leves, como  $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ , o efeito de  $\sigma_R^{(c)}(E)$  em  $\sigma_R(E)$  é tanto maior quanto menor for a energia incidente. A  $E_{c.m.} = 24,0$  Mev, por exemplo,  $\sigma_R^{(c)}(E)$  <sup>é</sup> presente aproximadamente cerca de 12% do valor de  $\sigma_R(E)$ . A tendência de  $\sigma_R^{(c)}(E)$  é de decrescer com o crescimento da energia. Esse decrescimento não é uniforme, já que cada termo de  $\sigma_R^{(c)}(E)$  depende da fase  $(-)^k$  (vide 2º termo da equação (D.2)), mas oscila em torno de  $1/k$ , onde  $k$  representa o número de onda livre do sistema. A medida que os núcleos do sistema crescem o efeito de  $\sigma_R^{(c)}(E)$  em  $\sigma_R(E)$  diminui devido ao crescimento da energia incidente necessária para superar a barreira coulombiana.

APÊNDICE E - ESTUDO COMPARATIVO ENTRE  $\delta_I^{(WKB)}$  e  $\delta_I^{(EIKONAL)}$

Nas tabelas abaixo comparamos os valores obtidos da defasagem eikonal ( $\delta_I^{(E)}$ ), dada pela equação (III.34)

$$\delta_I(b) = -\frac{1}{4} \frac{2\mu}{\hbar^2 k} \int_{-\infty}^{\infty} dz' W(\sqrt{b^2 + z'^2}), \quad (\text{III.34})$$

com  $k = \sqrt{\frac{2\mu E_{c.m.}}{\hbar^2}}$  e a expressão WKB exata ( $\delta_I^{(WKB)}$ ) dada pelas equações (III.29) e (III.30)

$$\delta_I(b) = \frac{2\mu}{\hbar^2} \int_{r_1}^{\infty} dr' \sqrt{\left[ E_{c.m.} - \frac{E_{c.m.} b^2}{(r')^2} - U(r') \right]^2 + W^2(r')} .$$

$$. \operatorname{sen} \left[ \frac{\theta(r')}{2} \right], \quad (\text{III.29})$$

$$\tan \theta(r') = \frac{-W(r')}{\left[ E_{c.m.} - \frac{E_{c.m.} b^2}{r'^2} - U(r') \right]}, \quad (\text{III.30})$$

para diversas situações, com  $U(r') = 0$ . Usamos para representar a parte imaginária do potencial óptico a forma de Woods-Saxon

$$W(r) = \frac{-W_O}{1 + e^{(\frac{r-R_O}{a})}}, \quad (\text{E.1})$$

onde utilizamos  $R_O = 8,0$  fm e  $a = 0,6$  fm. As defasagens foram calculadas para o sistema  ${}^{12}\text{C} + {}^{12}\text{C}$ .

Tabela E.1: Comparação entre  
 $\delta_I^{(WKB)}$  e  $\delta_I^{(E)}$

$E_{c.m.} = 10 \text{ Mev}$        $w_o = 5 \text{ Mev}$

$b \text{ (fm)}$	$\delta_I^{(WKB)} \text{ (rad)}$	$\delta_I^{(E)} \text{ (rad)}$
0,0	3,30	3,39
1,0	3,11	3,32
2,0	2,88	3,23
3,0	2,59	3,08
4,0	2,25	2,86
5,0	1,85	2,55
6,0	1,39	2,11
7,0	0,88	1,47
8,0	0,42	0,70
9,0	0,14	0,20
10,0	0,03	0,04

Tabela E.2: Comparação entre  
 $\delta_I^{(WKB)}$  e  $\delta_I^{(E)}$

$E_{c.m.} = 10 \text{ Mev}$        $w_o = 50 \text{ Mev}$

$b \text{ (fm)}$	$\delta_I^{(WKB)} \text{ (rad)}$	$\delta_I^{(E)} \text{ (rad)}$
0,0	20,24	33,87
1,0	18,03	33,26
2,0	15,78	32,31
3,0	13,49	30,81
4,0	11,15	28,61
5,0	8,78	25,52
6,0	6,39	21,09
7,0	4,07	14,68
8,0	2,07	6,99
9,0	0,80	2,01
10,0	0,23	0,42

Tabela E.3 - Comparação entre  
 $\delta_{I(WKB)}$  e  $\delta_I(E)$

$E_{c.m.} = 100 \text{ Mev}$ ,  $w_0 = 5 \text{ Mev}$

$b(\text{fm})$	$\delta_{I(WKB)}$ rad	$\delta_I(E)$ rad
0,0	1,07	1,07
1,0	1,05	1,05
2,0	1,01	1,02
3,0	0,95	0,97
4,0	0,86	0,90
5,0	0,75	0,81
6,0	0,60	0,67
7,0	0,40	0,46
8,0	0,19	0,22
9,0	0,06	0,06
10,0	0,01	0,01

Tabela E.4 - Comparação entre  
 $\delta_{I(WKB)}$  e  $\delta_I(E)$

$E = 100 \text{ Mev}$        $w_0 = 50 \text{ Mev}$

$b(\text{fm})$	$\delta_{I(WKB)}$ rad	$\delta_I(E)$ rad
0,0	10,44	10,71
1,0	9,84	10,51
2,0	9,10	10,22
3,0	8,19	9,74
4,0	7,12	9,05
5,0	5,85	8,07
6,0	4,38	6,67
7,0	2,79	4,64
8,0	1,34	2,21
9,0	0,45	0,64
10,0	0,11	0,13

Nas figuras (E.1)/(E.4) graficamos os resultados destas tabelas.

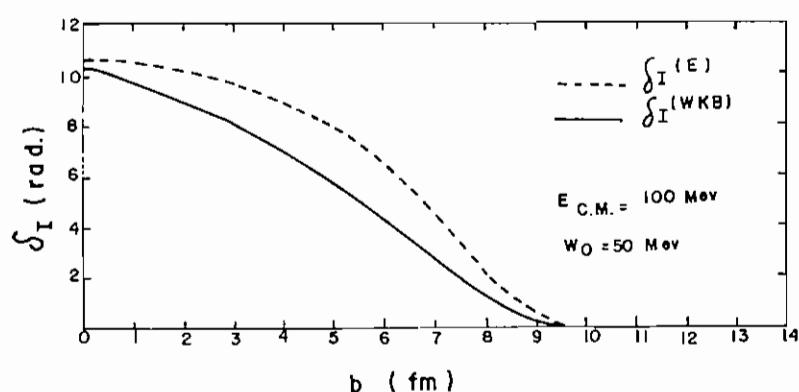
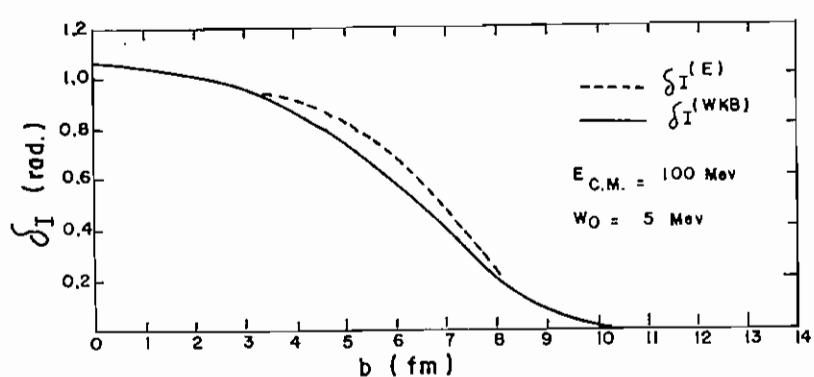
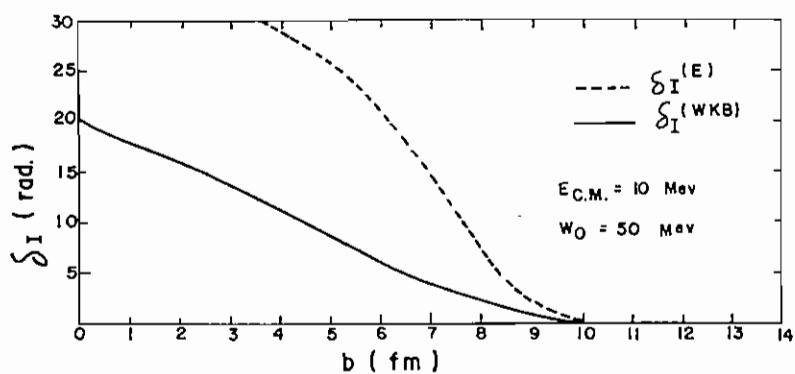
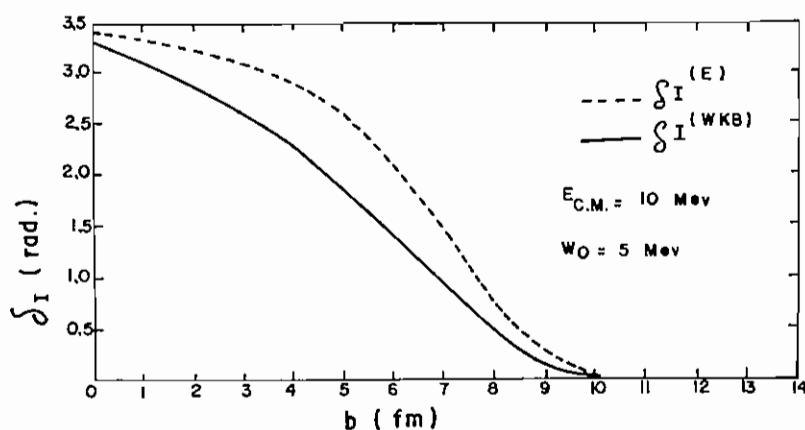
Nota-se que a expressão eikonal para a parte imaginária da defasagem  $\delta_I^{(E)}$  superestima o valor da correspondente defasagem WKB exata,  $\delta_I^{(WKB)}$ . O valor de  $\delta_I^{(E)}$  é tanto maior, quanto menor for a energia envolvida e maior a absorção. A diferença entre  $\delta_I^{(E)}$  e  $\delta_I^{(WKB)}$  é maior para parâmetros de impacto intermediários. Esta diferença atinge valores de até 237% (vide tabela (E.2),  $E_{c.m.} = 10$  Mev,  $W_0 = 50$  Mev,  $b = 8,0 \text{ fm}^-$ ).

Concluímos que a expressão eikonal superestima o valor da defasagem imaginária a baixas energias, principalmente para absorção forte.

No cálculo efetuado utilizamos a expressão WKB para a defasagem imaginária. As condições de sua validade são as seguintes<sup>31), 52)</sup>

- 1) Energias altas,
- 2) Potenciais que variam suavemente com  $r$ , e
- 3) Para partículas massivas

Estas condições, são independentes entre si. Para reações a baixas energias, envolvendo íons pesados e potenciais lisos a validade WKB está plenamente justificada.



Comparação entre a defasagem imaginária eikonal e a defasagem WKB, para várias situações.

APÊNDICE F - O MODELO CONVOLUTIVO PARA O POTENCIAL NUCLEAR REAL  
("DOUBLE FOLDING")

Nós estamos acostumados a usar modelos simples na física nuclear. O modelo mais largamente usado é o potencial do modelo óptico para o espalhamento elástico e a sua generalização para formas não-esféricas o potencial do modelo óptico de formado para o espalhamento inelástico. Estes modelos são simples e fenomenológicos. Seus parâmetros são ajustados de forma a reproduzir os dados experimentais.

O uso de potenciais da forma Woods-Saxon para o espalhamento núcleon-núcleo deve-se a justificação básica de que a densidade de matéria nuclear é aproximadamente constante no interior nuclear com uma superfície difusa. O modelo convolutivo<sup>37)</sup> (folding) para o potencial apresenta uma forma semelhante a forma Woods-Saxon. Neste modelo o potencial é o resultado da convolução entre a densidade de matéria nuclear do alvo com uma interação núcleon-núcleon de curto alcance. O procedimento convolutivo nos permite incorporar muitos aspectos da estrutura nuclear, tal como o "tamanho" nuclear bem como as idéias teóricas quanto a interação efetiva entre dois núcleons dentro da matéria nuclear.

O modelo convolutivo para o espalhamento de núcleons a energias mais baixas está relacionado com o modelo Brueckner-Hartree-Fock para estados ligados. A energias mais elevadas, pode ser justificado em termos da aproximação impulso<sup>12)</sup> ou aproximação de Glauber<sup>29)</sup>. A extensão de teorias tipo Brueckner proporciona uma justificativa para o seu uso a energias intermediárias. Para espalhamento entre partículas compostas (núcleo-núcleo) a situação não é tão clara, principalmente na região de inter penetração entre os dois núcleos. Todavia, devido a forte absorção os detalhes da interação quando os dois núcleos se superpõe são irrelevantes. Tudo o que interessa é a interação para processos periféricos e neste caso o modelo convolutivo deve ser razoável.

A idéia de um potencial convolutivo possue uma longa estória. O potencial eletrostático  $U_C(\mathbf{r})$ , devido a uma distribuição de carga  $\rho_C(\mathbf{r})$ , é dado pela convolução simples

$$U_C(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho_C(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' , \quad (\text{F.1})$$

enquanto que a interação eletrostática entre duas distribuições de cargas é dado pela convolução dupla

$$U_C(\mathbf{r}) = \iint \frac{\rho_{C_1}(\mathbf{r}_1) \rho_{C_2}(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}|} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 . \quad (\text{F.2})$$

No caso nuclear, a interação coulombiana  $\frac{1}{r_{12}}$  é substituída pela interação núcleon-núcleon (efetiva)  $v_{ij}$ .

O potencial convolutivo nuclear apresenta a seguinte forma

$$U_F(\mathbf{R}) = \iint \psi_O^*(\xi_1) \phi_O^*(\xi_2) \sum_{i,j} v_{ij} \phi_O(\xi_2) \psi_O(\xi_1) d\xi_1 d\xi_2 \quad (\text{F.3})$$

onde o núcleon  $i$  está localizado no núcleo 1 e o núcleon  $j$  no núcleo 2 e  $\xi_1$  e  $\xi_2$  são as coordenadas internas dos dois núcleos, respectivamente. Se  $v_{ij}$  for uma interação local,  $v_{ij} = v(\mathbf{r}_{ij})$ , então o potencial (F.3) pode ser reduzido a forma dada por (F.2):

$$U_F(\mathbf{R}) = \iint \rho_1(\mathbf{r}_1) v(\mathbf{r}_{12}) \rho_2(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 , \quad (\text{F.4})$$

onde  $\rho_i(\mathbf{r}_i)$  é a densidade de um corpo para o núcleo  $i$ , que usualmente se assume ser esfericamente simétrico. Este é o conhecido potencial de dupla convolução (double-folding).

Seria desejável usar uma interação efetiva  $v$  que

fosse baseada num potencial núcleon-núcleon realístico, já que um dos objetivos deste modelo é obter uma descrição unificada do espalhamento núcleon-núcleon, núcleon-núcleo e núcleo-núcleo. A consequência imediata disto é que a interação efetiva é uma espécie de matriz G.

Uma das interações efetivas largamente usadas na equação (F.4) é conhecida por M3Y:<sup>37)</sup>

$$v(r) = 6315 \frac{e^{-4r}}{4r} - 1961 \frac{e^{-2,5r}}{2,5r} - 81 \delta(r) . \quad (F.4)$$

O potencial convolutivo apresenta uma profundidade maior que os potenciais fenomenológicos usualmente utilizados, por exemplo, a forma de Woods-Saxon. Todavia, devido a forte absorção encontrada nas reações de íons pesados a região do potencial sensível ao espalhamento é a região de superfície e nesta o modelo convolutivo parece descrever bem. De fato, foi feita uma análise do espalhamento elástico na faixa da energia de 5 a 20 Mev por núcleon, para uma variada combinação de núcleos, obtendo um fator de normalização médio N,  $N \approx 1,11 \pm 0,13$ .<sup>37)</sup> Convém lembrar que N = 1 corresponde ao valor ideal.

A vantagem do modelo convolutivo sobre os outros potenciais fenomenológicos é que ele permite predizer a forma do potencial para sistemas onde não há dados do espalhamento elástico.

## REFERÉNCIAS

- 1) - P.J.Karol  
Phys. Rev. C, Vol. 11, nº 4 (1975) 1203
- 2) - R.M.De Vries e J.C.Peng  
Phys. Rev. C, Vol.22, nº 3 (1980) 1055
- 3) - D.M. Brink e G.R. Satchler  
J.Phys. G , Nucl. Phys. 7 (1981) 43
- 4) - A.Faessler, L. Rikus e S.B. Khadkibar  
Nucl. Phys. A 401, (1983) 157
- 5) - J.C. Peng, R.M. De Vries e N.J. Di Giacomo  
Phys. Lett., Vol. 98B, nº 4 (1981) 244
- 6) - H.B.Bidasaria, L.W. Townsend e J.W.Wilson  
J.Phys. G , Nucl. Phys. 9 (1983) L17
- 7) - M.Buenerd, J.Pinston, J.Cole, C.Guet, D.Lebrun,J.M.Loiseaux, P.Martin, E.Monnand, J.Mougey, H.Nifenecker, R.Ost,P.Perrin, Ch. Ristori, P.de Saintignon , F.Schussler, L.Carlén, H. Å. Gustafsson, B.Jakobsson, T.Johansson, G.Jönsson, J.Kruhlinde, I.Otterlund, H.Ryde, B.Schroder, G.Tibell, J.B.Bondorf, O.B. Nielsen  
Phys. Lett., Vol. 102B, nº 4 (1981) 242
- 8) - A.J.Cole, W. D.M.Rae, M.E.Brandan, A.Dacal, B.G.Harvey, R. Legrain, M.J.Murphy e R.G.Stokstad  
Phys. Rev. Lett., Vol. 47, nº 24(1981) 1705
- 9) - C.Perrin, S.Kox, N.Longequeue, J.B.Viano, M.Buernerd, R. Cherkaoui, A.J.Cole, A.Gamp, J.Menet, R.Ost, R. Bertholet, C.Guet e J.Pinston  
Phys. Rev. Lett., Vol. 49, nº 26 (1982) 1905
- 10) - R.M.De Vries, N.J.Di Giacomo, J.S.Kapustinsky, J.C. Peng , W.E. Sondheim, J.W.Sunier, J.G.Cramer, R.E.Loveman,C.R. Gruhn e H.H.Wieman.  
Phys. Rev. C, Vol. 26, nº 1 (1982) 301

- 11) - N.J. Di Giacomo, R.M. De Vries e J.C. Peng  
       Phys. Rev. Lett., Vol. 45, nº 7 (1980) 527
- 12) - A.K. Kerman, H. Mc Manus e R.M. Thaler  
       Ann. of Phys., 8 (1959) 551
- 13) - J. Hufner, K. Schafer e B. Schurmann  
       Phys. Rev. C, Vol. 12, nº 6 (1975) 1888
- 14) - W. Czyż e L.C. Maximon  
       Ann. Phys., 52 (1969) 59
- 15) - J. Chauvin, D. Lebrun, A. Lounis e M. Buenerd  
       Phys. Rev. C., Vol. 28, nº 5 (1983) 1970
- 16) - R.A. Rego e M.S. Hussein  
       Rev. Bras. Física, Vol. Espec.: Física de Energias Intermediárias Maio/1982 - pág. 153
- 17) - D.M. Brink  
       Theory of Heavy Ion Reactions, Les Houches, Session XXX ed.  
           R. Balian (Amsterdam: North-Holland)
- 18) - D.A. Saloner, C. Toepffer e B. Fink  
       Nucl. Phys. A283 (1977) 131
- 19) - P.C. Tandy, E.F. Redish e O. Bollé  
       Phys. Rev. Lett., Vol. 35, nº 14 (1975) 921
- 20) - P.C. Tandy, E.F. Redish e D. Bollé  
       Phys. Rev. C, Vol. 16, nº 5 (1977) 1924
- 21) - F.R. Kroll e N.S. Wall  
       Phys. Rev. C1 (1970) 138
- 22) - C. Guet  
       Seminário apresentado na International Conference on Nucleus-Nucleus Collision - East - Lansing, MI, USA - CEA-CONF-6597  
           sob o título: "A Few Aspects of Intermediate Energy Heavy Ion Reactions"
- 23) - G.R. Satchler  
       Nucl. Phys. A409 (1983) 3C
- 24) - H. Friedrich  
       Phys. Rep. 74, nº 2 (1981) 209

- 25) - H.A.Bethe  
Phys. Rev. 57 (1940) 1125
- 26) - D.J.Ernst  
Phys. Rev. C, Vol. 19, nº 3 (1979) 896
- 27) - P.E.Hodgson  
Nuclear Reaction and Nuclear Structure  
Clarendon Press - Oxford - 1971
- 28) - K.Kikuchi e M.Kawai  
Nuclear Matter and Nuclear Reactions  
North Holland Publishing Company  
Amsterdam 1968, pag. 227
- 29) - R.J.Glauber  
Lectures in Theoretical Physics  
Edited by W.E.Brittin and L.G.Dunhan  
New York, 1959, pag. 315;  
High Energy Physics and Nuclear Structure  
Edited by G.Alexander  
North-Holland, Amsterdam, 1967, pag. 311 e  
High Energy Physics and Nuclear Structure  
Edited by S.Devons  
Plenum, New York, 1970, pag. 207
- 30) - L.Ray  
Phys. Rev. C, Vol. 20, nº 5 (1979) 1857
- 31) - W.Nörenberg e H.A.Weidenmüller  
Lecture Notes in Physics nº 51  
Introduction to the Theory of Heavy-Ion Collisions Springer  
Verlag, 1976. Pág. 47
- 32) - J.Wilczynski  
Nucl. Phys. A216 (1973) 386
- 33) - J.Blair  
Lectures in Theoretical Physics  
Edited by W.E.Brittin et al., Vol. VIII C, pag 343  
University of Colorado Press, Boulder, Colorado, 1966

- 34) - D.Goldberg, S.Smith e G.Burdzik  
          Phys. Rev. C10 (1974) 1362
- 35) - G.Alkhazov et al.  
          Nucl. Phys. A280 (1977) 365
- 36) - J.Jaros, A.Wagner, L.Anderson, O.Chamberlain,  
       A.Z.Fuzesy, J.Gallup, W.Gorn, L.Schroeder,  
       S.Shannon, G.Shpairo e H.Steiner  
          Phys. Rev. C 18 (1978) 2273
- 37) - G.R.Satchler e W.G.Love  
          Phys. Rep., Vol. 55, nº 3 (1979) 183
- 38) - M.Buenerd, P.Martin, R.Bertholet, C.Guet, M.Maurel,  
       J.Mougey, H.Nifenecker, J.Pinston, P.Perrin, F.Schussler,  
       J.Tulien, J.P.Bondorf, L.Carlen, H.Å. Gustafsson,  
       B.Jakobsson, T.Johansson, P.Kristiansson, O.B.Nielsen,  
       A.Oskarsson, J.Otterlund, H.Ryde, B.Schröder e G.Tibell  
          Phys. Rev. C, Vol. 26, nº 3 (1982) 1299
- 39) - G.R.Satchler  
       Reactions Between Complex Nuclei  
       International Conference on Nashville, Tennessee, USA  
       June 10-14, 1974
- 40) - H.Feshbach  
       Ann. Phys. 5 (1958) 357
- 41) - H.Feshbach  
       Ann. Phys. 19 (1962) 287
- 42) - A.Mondragon e E.Hernandez  
       The Effective Schoedinger Equation of the Optical Model  
       for Elastic Collisions Between Composite Nuclei  
       Memorias del Tercer Simposio de Física Nuclear em  
       Oaxtepec, 1980
- 43) - M.Goldberger e K.M. Watson  
       Collision Theory  
       Wiley, New York 1975
- 44) - L.J.Campbell  
       Nucl. Phys. 64 (1965) 273

- 45) - H.M.Hussein e O.Zohni  
Nucl. Phys. A267 (1976) 303
- 46) - H.Feshbach  
Les Houches, Session XXX, 1977  
Ions Lourds et Mésons en Physique Nucléaire/Nuclear Physics  
with Heavy Ions and Mesons  
R.Balian (North-Holland)
- 47) - K.H.Müller  
Z.Physik A 295 (1980) 80
- 48) - R.Sartor, A.Faessler e S.B.Khadkikar e S.Krewald  
Nucl. Phys. A 359 (1981) 467
- 49) - S.B. Khadkikar, L. Rikus, A.Faessler e R.Sartor  
Nucl. Phys. A 369 (1981) 495
- 50) - B.Sinha  
Phys. Rep., Vol. 20C, nº 1 (1975) 1
- 51) - B.Bhera, K.C.Panda e R.K.Satpathy  
Phys. Rev. C, Vol. 21, nº 5 (1980) 1883
- 52) - L.S.Rodberg e R.M.Thaler  
Introduction to the Quantum Theory of Scattering Academic  
Press, New York, 1967
- 53) - M.M.Shapiro  
Phys. Rev. 90 (1953) 171
- 54) - Particle Properties Data Bulk  
Lawrence Berkeley Laboratory, 1982, pág 136
- 55) - A.Bohr e B.R.Mottelson  
Nuclear Structure, Vol.I  
W.A.Benjamin, 1969
- 56) - P.Marmier e E.Sheldon  
Physics of Nuclei and Particles, Vol.2  
Academic Press, New York 1970  
pag. 1053 e 1057
- 57) - K.Kihuchi e M.Kawai  
Nuclear Matter and Nuclear Reactions  
North-Holland Publishing Company  
Amsterdam 1968, pág. 37

- 58) - E.Clementel e C.Villi  
Nuovo Cimento, Vol. II. n° 01 (1955) 176
- 59) - N.J.Di Giacomo, J.C.Peng e R.M.De Vries  
Phys. Lett., Vol. 101B, n° 6 (1981) 383
- 60) - W.N.Hess  
Rev. of Mod. Phys., Vol. 30, n° 2 (1958) 368
- 61) - C.W.DeJager, H. De Vries e C.De Vries  
Atomic Data and Nuclear Data Tables 14(1974)479
- 62) - H.G.Bohlen, M.R.Clover, G.Ingold, H.Lettau , W.von Oertzer  
Z. Phys. A 308 (1982) 121
- 63) - G.R.Satchler  
Introduction to Nuclear Reactions  
Macmillan Press, 1980, pág. 201
- 64) - K.Gottfried  
Ann. of Phys. 66 (1971) 868
- 65) - W.E.Frahn e B.Schurmann  
"Ann. of Phys. 84 (1974) 147
- 66) - A.Messiah  
Quantum Mechanics, Vol. II  
North-Holland, 1976
- 67) - C.J.Horowitz  
Nucl. Phys. A412 (1984) 228
- 68) - B.V.Carlson, M.P.Isidro Filho, M.S.Hussein  
Pré-print/P-464 - IFUSP, Maio 1984
- 69) - B.V.Carlson, M.P.Isidro Filho, M.S.Hussein  
Pré-print/P-465 - IFUSP - Maio 1984
- 70) - V.I. Krylov  
Approximate Calculation of Integral  
Pág. 337
- 71) - A.L.Fetter e J.D.Walecka  
Quantum Theory of Many - Particle Systems  
Págs. 38, 45 e 46
- 72) - D.A.Saloner e C.Toepffer  
Nucl. Phys. A283 (1977) 108

- 73) - Carlos A.Bertulani  
Apêndice A do presente trabalho.
- 74) - J.R. Birkelund, J.R.Huizenga, H.Freiesleben, K.L.Wolf,  
J.P.Unik e V.E. Viola Jr.  
Phys. Rev. C13 (1976) 133
- 75) - M.Buenerd, A.Lounis, J.Chauvin, D.Lebrun, P.Martin,  
G.Duhamel, J.C.Gongrand e P.de Saintignon  
Nucl. Phys. A424 (1984) 313
- 76) - M.D.Cooper e M.Johnson  
Nucl. Phys. A260 (1976) 352  
A.Z.Schwarzschild, E.H.Auerbach, R.C.Fuller e S.Kohana  
Proc. Symp. on Macroscopic  
Features of Heavy-Ion Collisions.  
Argonne National Laboratory  
Report, ANL - PHY - 76-2
- 77) - R.Bass  
Nuclear Reactions with  
Heavy Ions  
Springer - Verlag - 1980  
Pág. 14.