

M. J. Hussein
João Roberto
Paulo Alvaro Douglas
1978
Porto Pato

SBI-IFUSP

305M810T0424

PROPRIEDADES ESTATÍSTICAS DO ÓRBITRON



MAURÍCIO PORTO PATO

Tese apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de DOUTOR EM CIÊNCIAS.



S ã O P A U L O

1 9 7 8



Para
meu pai, minha mãe
Lucila, Ana e Izabel

AGRADECIMENTOS

- Ao Professor Mahir Saleh Hussein pela orientação e interesse;
- Ao Professor Luiz Carlos Gomes que sugeriu a realização deste trabalho e acompanhou a sua elaboração;
- A Alfredo Pío Galeão pelas discussões que me ajudaram muito;
- Ao Roberto pelo trabalho de datilografia.

R E S U M O

São discutidas as hipóteses teóricas que levam à de terminação da função distribuição que descreve os elétrons dentro de um Orbitron. Comparando-se as medidas do espectro de energia dos íons feitas por Cybulska e Douglas com o espectro teórico é concluído que os elétrons são adequadamente descritos supondo um estado de equilíbrio estatístico. É feita uma estimativa do tem po de relaxação que mostra que o tempo médio de permanência dos elétrons dentro do aparelho é suficiente para que se estabeleça equilíbrio térmico. É mostrado como é possível calcular de um mo delo auto-consistente a modificação do potencial e da densidade quando é levado em conta a carga eletrônica espacial. O espectro de frequências medido por Troise é interpretado dentro do modelo estatístico considerando-se as frequências de vibrações coletivas do gás de elétrons dentro do Orbitron.

A B S T R A C T

The theoretical assumptions that lead to the determination of the distribution function describing the electrons in orbitrons are discussed. Comparing the ion energy spectrum measured by Cybulska with the theoretical spectrum it is concluded that the electrons are appropriately described if a state of statistical equilibrium is assumed. The relaxation time is estimated it is shown that the average time spent by the electrons inside the orbitron is sufficient for thermal equilibrium to attain. A self-consistent calculation of the potential and the density is done taking the electronic charge into account. The radio-frequencies spectrum measurement of Troise is interpreted on the basis of the statistical model, by considering the frequencies of the collective vibrations of the electron gas inside the orbitron.

Í N D I C E

	Pág.
I. INTRODUÇÃO.....	1
II. ÓRBITAS ESTÁVEIS.....	6
II.1) A EQUAÇÃO DE LIOUVILLE.....	6
II.2) SOLUÇÕES POSSÍVEIS DA EQUAÇÃO LINEAR.....	9
II.3) DISTRIBUIÇÃO DE MOMENTO.....	11
II.4) DENSIDADE DE PROBABILIDADE.....	15
II.5) COMPARAÇÃO COM OS DADOS EXPERIMENTAIS.....	19
III. HIPÓTESE DE EQUILÍBRIO ESTATÍSTICO.....	22
III.1) FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO.....	22
III.2) DENSIDADE DE PROBABILIDADE.....	26
III.3) COMPARAÇÃO COM OS DADOS EXPERIMENTAIS.....	29
IV. CONSIDERAÇÃO SOBRE O MODELO ESTATÍSTICO.....	31
IV.1) GENERALIDADES.....	31
IV.2) CÁLCULO DA PERDA DE ENERGIA.....	33
IV.3) TEMPO DE RELAXAÇÃO.....	37
V. POTENCIAL E DENSIDADE AUTO-CONSISTENTE.....	41
V.1) EQUAÇÃO DE POISSON.....	41
V.2) MODELO ESTATÍSTICO.....	44
V.3) ÓRBITAS ESTÁVEIS.....	46
VI. VIBRAÇÕES COLETIVAS.....	49
VI.1) INTRODUÇÃO.....	49
VI.2) EQUAÇÃO DE ONDAS.....	51

	Pág.
VI.3) SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ONDAS.....	56
VI.4) DETERMINAÇÃO DOS AUTO-VALORES.....	59
VI.5) COMPARAÇÃO E DISCUSSÃO.....	63
VII. CONCLUSÃO.....	68

I. INTRODUÇÃO

O Órbitron foi proposto em 1963 por Herb, Pauly e Fisher (1) como um dispositivo capaz de conter o eletrón em seu interior através de um campo eletrostático. O aparelho consiste essencialmente de um condensador cilíndrico em que o cilindro externo, o catodo, é ligado à terra e o cilindro interno, o anodo, é mantido em um potencial alto tipicamente da ordem de 10^3 V. Os eletrons são injetados na região entre os cilindros por um filamento mantido em um potencial positivo baixo. A presença do filamento modifica o campo de tal modo que os eletrons emitidos podem adquirir momento angular suficiente para escapar da atração do anodo. Eles passam então a orbitar em torno da haste central do aparelho e o importante é que podemos ter desse modo livres caminhos médios muito grandes, da ordem, por exemplo, de 10^3 cm (1).

O Órbitron foi proposto tanto como um calibrador (2) como uma bomba de vácuo (3). O aperfeiçoamento conseguido na construção dos calibradores convencionais limitou o interesse do Orbitron como um calibrador. No entanto, o seu uso como uma bomba de vácuo está estabelecido devido ao seu baixo consumo e a facilidade de sua construção quando comparado com os aparelhos mais convencionais baseados no campo magnético. O desempenho do Órbitron como uma bomba depende do modo como os eletrons se distribuem no seu interior e este fato levou à tentativas de se determinar a distribuição espacial de carga eletrônica tanto de um ponto de vista teórico como experimental.

A medida direta da densidade dos eletrons dentro do Órbitron é muito difícil e os únicos resultados que conhecemos foram as medidas indiretas feitas por Cybulska (4) e Douglas (5). A grandeza medida por esses autores foi o espectro de energia dos ions positivos que chegam ao catodo em uma situação de pressão baixa e também

de carga eletrônica total pequena. Deste espectro é possível deduzir a densidade dos eletrons como veremos agora.

Seja $f(\vec{r}, \vec{p})$ a função distribuição para uma partícula no espaço das fases e seja n_0 a densidade do gás neutro dentro do Orbitron. O número de íons, $\frac{dI}{d\Omega}$ produzidos por unidade de volume e unidade de tempo pode ser escrito, desprezando a velocidade dos átomos do gás, como

$$\frac{dI}{d\Omega} = e N n_0 \int d^3p v \sigma f(\vec{r}, \vec{p}) \quad (1)$$

sendo N o número total de eletrons, \vec{v} a velocidade do eletron e σ a seção de choque de ionização para o gás neutro dentro do Orbitron. A densidade de carga eletrônica em um ponto \vec{r} é dada por

$$\rho(\vec{r}) = -e N \int d^3p f(\vec{r}, \vec{p}) \quad (2)$$

e se definirmos

$$\langle v \sigma \rangle = \frac{\int d^3p v \sigma f(\vec{r}, \vec{p})}{\int d^3p f(\vec{r}, \vec{p})} \quad (3)$$

a equação (1) fica

$$\frac{dI}{d\Omega} = -n_0 \rho(\vec{r}) \langle v \sigma \rangle \quad (4)$$

O Orbitron pode ser pensado como dividido em três zonas como mostrado na figura 1. As medidas de corrente de íons da referência(1) foram feitas na região central, onde podemos considerar o campo eletrostático como um campo radial com simetria cilíndrica. Se além disso considerarmos que os íons são produzidos com energia cinética desprezível então eles terão uma energia total $E=eV(r)$ sen $V(r)$ o potencial na posição de raio r . Daí se segue que os íons com ener

gia entre E e E+dE provém de uma concha cilíndrica de raio r e volume $d\Omega = 2\pi r z_0 dr$ sendo z_0 a altura da zona central do Órbitron. Podemos então escrever

$$\frac{dI}{dE} = \frac{dI}{d\Omega} \times \frac{2\pi r z_0}{e} \cdot \frac{dr}{dV} \quad (5)$$

e usando a equação (4) teremos para a densidade na posição r a expressão

$$\rho(r) = e \left(2\pi r z_0 n_0 \langle v\sigma \rangle \right)^{-1} \frac{dI}{dE} \cdot \frac{dV}{dr} \quad (6)$$

onde o potencial V(r) pode ser considerado logaritmico no limite de carga eletrônica total pequena. Quanto à grandeza $\langle v\sigma \rangle$ como podemos ver da sua definição, equação (3), ela depende da função distribuição $f(\vec{r}, \vec{p})$. Este fato torna o cálculo da densidade $\rho(r)$ dependente do modelo empregado para descrever os eletrons dentro do Órbitron.

As primeiras descrições teóricas da distribuição dos eletrons dentro do Órbitron foram feitas supondo que é possível desprezar as interações entre os eletrons e como consequência eles seguem órbitas estáveis determinadas pelas condições iniciais no instante em que são emitidos pelo filamento. Desse modo Hooverman⁽⁶⁾ descreveu os eletrons como se movendo em órbitas planas que ele calculou, perpendiculares ao eixo do Órbitron e que se deslocavam lentamente na direção axial. Dentro desta hipótese e supondo uma pequena distribuição de momentos angulares Feaks⁽⁷⁾ et al concluiu que a distribuição radial da carga eletrônica teria dois máximos correspondentes aproximadamente aos apogeus e perigeus das órbitas planas. Dentro do mesmo modelo Deichelboher⁽⁸⁾ considerou outras distribuições possíveis para o momento axial e o momento angular do eletron no instante da emissão. Em particu-

lar ele mostrou, que a introdução de uma distribuição larga do momento axial tem o efeito de reduzir a carga eletrônica próxima ao catodo e eventualmente eliminar o segundo pico da densidade, encontrado anteriormente. As tentativas de justificar os dados obtidos por Cybulska e Douglas utilizando os modelos descritos acima não foram satisfatórias.

Se deixamos de desprezar a interação entre os elétrons não podemos mais considerá-los seguindo órbitas estáveis determinadas pelas condições iniciais. Podemos então tentar descrevê-los supondo que eles se distribuam segundo um modelo estatístico. Em 1971, dois trabalhos (9) (10) foram feitos que mostraram ser possível obter um ajuste razoável aos dados experimentais tratando os elétrons como um gás ao qual se faziam algumas restrições aos momentos dos elétrons. Essas restrições eram necessárias para se eliminar da distribuição elétrons que pudessem tocar no Orbitron.

Em 1976 resolvemos retomar a pesquisa teórica sobre o Orbitron e discutir o mais amplamente possível qual dos dois modelos é o mais satisfatório para interpretar os dados experimentais obtidos por Cybulska (4). Isto foi feito primeiro construindo dentro do modelo de órbitas estáveis uma função distribuição que fosse a mais geral possível. Em seguida, dentro do modelo estatístico tratando os elétrons como um gás ideal mas introduzindo restrições aos momentos que nos parecem mais corretas do que as restrições impostas anteriormente. Esperamos desse modo poder concluir de um modo definitivo em favor do modelo estatístico como mais adequado para a interpretação dos dados.

Finalmente, no último capítulo, tentaremos mostrar como é possível explicar dentro do modelo estatístico os dados experimentais obtidos por Troise (11) em 1971. Este autor utilizando a haste central do Orbitron como uma antena, mediu um espectro de radiofrequências em um Orbitron em funcionamento.

Pretendemos mostrar que as frequências obtidas por ele podem ser relacionadas às frequências das vibrações coletivas do gás de elétrons dentro do Órbitron (12).

II. ÓRBITAS ESTÁVEIS

II.1) A EQUAÇÃO DE LIOUVILLE

Os eletrons dentro do Orbitron formam um sistema de partículas cujo movimento pode ser descrito pela função distribuição $f_N(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t)$, em que N é o número total de eletrons e \vec{p}_i, \vec{r}_i são o momento e o vetor posição do i -ésimo eletron. A função f_N satisfaz a equação de Liouville

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial f_N}{\partial \vec{p}_i} - \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i} \cdot \frac{\partial f_N}{\partial \vec{r}_i} \right) \quad (\text{II.1})$$

onde H é a Hamiltoniana do sistema

$$H = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\vec{p}_i^2}{2m_e} - eV(\vec{r}_i) \right) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{(i,j)=1 \\ i \neq j}}^N \frac{e^2}{r_{ij}} \quad (\text{II.2})$$

sendo $V(r)$ o potencial do campo criado pelo anodo e $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$.

A função distribuição f_N dá a probabilidade no instante t do eletron 1 estar na posição \vec{r}_1 com momento \vec{p}_1 ; o eletron 2 na posição \vec{r}_2 com momento \vec{p}_2 , o eletron 3 com \vec{r}_3 e \vec{p}_3 , assim por diante até o N -ésimo eletron com posição \vec{r}_N e momento \vec{p}_N .

Consideremos agora a função distribuição para uma partícula $f_1(\vec{r}_1, \vec{p}_1, t)$ que nos dá a probabilidade do eletron 1 está com momento \vec{p}_1 na posição \vec{r}_1 , com os outros eletrons em posições quaisquer e momentos quaisquer. Teremos então por definição

$$f_1(\vec{r}_1, \vec{p}_1, t) = \int d^3r_2 \dots d^3r_N d^3p_2 \dots d^3p_N f_N \quad (\text{II.3})$$

Se derivamos a função f_1 em relação ao tempo e usarmos a equação de Liouville obtemos

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \int d^3r_2 \dots d^3r_N d^3p_2 \dots d^3p_N \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial f_N}{\partial \vec{p}_i} - \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i} \cdot \frac{\partial f_N}{\partial \vec{r}_i} \right) \quad (\text{II.4})$$

A somatória no segundo membro da equação se reduz ao termo $i=1$. Isto pode ser visto usando a identidade

$$\frac{\partial H}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial f_N}{\partial \vec{p}_i} - \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i} \cdot \frac{\partial f_N}{\partial \vec{r}_i} = \frac{\partial}{\partial \vec{p}_i} \cdot \left(f_N \frac{\partial H}{\partial \vec{r}_i} \right) - \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} \cdot \left(f_N \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i} \right) \quad (\text{II.5})$$

que transforma as integrais em d^3r e d^3p em integrais de superfície e que se anulam porque a função f_N se anula nos seus limites.

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \int d^3r_2 \dots d^3r_N d^3p_2 \dots d^3p_N \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{r}_1} \cdot \frac{\partial f_N}{\partial \vec{p}_1} - \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_1} \cdot \frac{\partial f_N}{\partial \vec{r}_1} \right) \quad (\text{II.6})$$

Se substituimos a Hamiltoniana, equação (II.2) e efetuamos as integrais ficamos com

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = -e \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{p}_1} - \frac{\vec{p}}{m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{r}_1} + \int d^3r_2 \dots d^3r_N d^3p_2 \dots d^3p_N \frac{\partial}{\partial \vec{r}_1} \cdot \left(\frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{e^2}{r_{ij}} \right) \cdot \frac{\partial f_N}{\partial \vec{p}_1} \quad (\text{II.7})$$

A somatória dupla no integrando do último termo se reduz a uma soma simples porque o índice i ou j tem de ser igual a 1. Ficaremos com a soma de $(N-1)$ termos iguais e teremos então a equação

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{r}_1} + e \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{p}} - (N-1) e^2 \int d^3r' d^3p' \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot \frac{\partial f_2(\vec{r}, \vec{p}; \vec{r}', \vec{p}'; t)}{\partial \vec{p}} \quad (\text{II.8})$$

onde f_2 é a função distribuição para duas partículas definida por

$$f_2(\vec{r}_1, \vec{p}_1; \vec{r}_2, \vec{p}_2; t) = \int d^3r_3 \dots d^3r_N d^3p_3 \dots d^3p_N f_N \quad (\text{II.9})$$

Vamos fazer agora a aproximação de que a função f_2 pode ser escrita como um produto de funções f_1 , isto é,

$$f_2(\vec{r}_1, \vec{p}_1; \vec{r}_2, \vec{p}_2; t) = f_1(\vec{r}_1, \vec{p}_1, t) f_1(\vec{r}_2, \vec{p}_2, t) \quad (\text{II.10})$$

Esta aproximação é necessária pois o problema não tem solução exata. Se escrevessemos uma equação para a função f_2 essa equação envolveria a função f_3 , e assim por diante até a equação de Liouville para f_N . Essa cadeia de equações tem de ser quebrada em algum ponto por uma aproximação. A escolha que fizemos corresponde a desprezarmos as correlações e é chamada de aproximação de trajetórias independentes.

A equação (II.8) pode agora ser escrita como

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial \vec{p}} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \vec{r}} - \frac{\partial h}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \vec{p}} = 0 \quad (\text{II.11})$$

em que $h(\vec{r}, \vec{p}, t)$ é a hamiltoniana para uma partícula nessa aproximação

$$h(\vec{r}, \vec{p}, t) = \frac{p^2}{2m} - eV(\vec{r}) + e^2(n-1) \int d^3r' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \int d^3p' f_1(\vec{r}', \vec{p}', t) \quad (\text{II.12})$$

O último termo de $h(\vec{r}, \vec{p}, t)$ é a energia potencial do elétron no campo criado pelos outros elétrons. A presença da função f_1 na hamiltoniana $h(\vec{r}, \vec{p}, t)$ faz com que a função (II.11) seja não linear o que dificulta a sua resolução. No entanto, podemos em primeira aproximação desprezar o termo que contém f_1 , o que se justifica devido ao fato dos dados experimentais que pretendemos analisar terem sido obtidos em uma situação em que a carga espacial era pequena⁽⁴⁾. Além disso, uma solução da equação linear é o início de um processo iterativo de solução da equação não-linear como veremos depois. Por outro lado estamos interessados em estados estacioná-

rios, isto é, o sistema em um regime em que as grandezas física não dependem explicitamente do tempo. Nessas condições a equação (II.11) se reduz a

$$\frac{\partial h_c}{\partial \vec{p}} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{r}} - \frac{\partial h_c}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{p}} = 0 \quad (\text{II.13})$$

onde a hamiltoniana h_0 é obtida desprezando o último termo na equação (II.12) ou seja

$$h_c = \frac{p^2}{2m} - eV(r) \quad (\text{II.14})$$

II.2) SOLUÇÕES POSSÍVEIS DA EQUAÇÃO LINEAR

A equação (II.13), deduzida acima, nada mais é do que o parêntesis de Poisson de h_0 e f_1 e o fato dele se anular significa que a função f_1 é uma constante de movimento do eletrôn e, portanto, f_1 pode ser escrita como uma função das outras constantes de movimento que no caso são a hamiltoniana h_0 , o momento angular em torno do eixo e a componente axial do momento.

Uma escolha possível para f_1 é uma função do tipo $e^{-\alpha h_0}$ que corresponde a uma situação de equilíbrio estatístico. No entanto, estamos interessados agora em discutir as possíveis distribuições dentro de uma hipótese de órbitas estáveis. Nessa situação a distribuição e portanto a função f_1 é determinada pelas condições em que os eletrons são injetados dentro do Orbitron. A situação mais simples é aquela em que cada constante de movimento / tem o mesmo valor fixo para todos os elétrons. Nessa situação os elétrons seriam descritos por uma função distribuição que chamaremos de g dada por:

$$g(\epsilon_0, L_0, p_0, r, p_r, L, p_z) = K \delta(\epsilon_0 - h_0) \delta(L_0 - L) \delta(p_0 - p_z) \quad (\text{II.15})$$

com a constante K fixada pela condição de normalização

$$\int g d^3r d^3p = 1$$

Usando coordenadas cilíndricas na equação acima, temos

$$\int_a^b r dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dp_r \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dL}{r} \int_{-\infty}^{\infty} dp_z K \delta(\epsilon_0 - h_0) \delta(L_0 - L) \delta(p_0 - p_z) = 1 \quad (\text{II.16})$$

onde a e b são os raios do anodo e do catodo. Usando na equação acima a identidade

$$\delta(\epsilon_0 - h) = \frac{\delta(p_0 - p_r)}{\left| \frac{\partial(\epsilon_0 - h_0)}{\partial p_r} \right|} = \frac{\delta(p_0 - p_r)}{\frac{p_r}{m}}$$

e efetuando as integrais ficamos com

$$2\pi K z_0 \int_a^b dr \frac{m}{p_{rc}} = 2\pi K z_0 \int_a^b \frac{dr}{v_r} = 2\pi K z_0 \int_{t_p}^{t_a} dt = 2\pi K z_0 T = 1 \quad (\text{II.17})$$

onde z_0 é a altura do Órbitron e T é o tempo que o eletrón leva para ir do perigeu ao apogeu da sua órbita. Portanto, a constante K de normalização é igual a

$$K = \frac{1}{2\pi z_0 T} \quad (\text{II.18})$$

Podemos agora calcular a densidade de probabilidade quando os eletróns são descritos pela função g integrando g em todo o espaço dos momentos. Teremos então em uma posição r a densidade de probabilidade n_0 dada por

$$n_0(r, E_0, L_0, p_0) = \frac{1}{2\pi z_0 r T v_r} = \frac{1}{2\pi z_0 r T} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E_0 - \frac{L_0^2}{2mr^2} - \frac{p_0^2}{2m} + eV \right)}} \quad (\text{II.19})$$

onde usamos a equação (II.14) com $h_0 = E_0$ e escrevemos o momento em coordenadas cilíndricas. A função n_0 é inversamente proporcional à componente radial da velocidade e diverge portanto no perigeu e no apogeu da órbita onde v_r se anula. Os primeiros cálculos teóricos da densidade de eletrons no Orbitron foram feitos com funções, do tipo acima (4) (7). Na figura 2 mostramos a comparação de funções n_0 com os dados experimentais feitas por Cybulska (figura 19 da referência (4)) onde vemos que as curvas teóricas não se ajustam à curva experimental.

Para obter uma solução mais geral da equação (II.13) vamos construir uma superposição de funções g obtendo então a função distribuição

$$f(r, p_r, L, p_z) = \int dE_0 dL_0 dp_0 w(E_0, L_0, p_0) g \quad (\text{II.20})$$

que é também solução da equação (II.13) devido à linearidade desta equação, onde a função $w(E_0, L_0, p_0)$ especifica a probabilidade do eletron ter constantes de movimento E_0, L_0 e p_0 e deve satisfazer portanto, a condição de normalização

$$\int dE_0 dL_0 dp_0 w(E_0, p_0, L_0) = 1 \quad (\text{II.21})$$

II.3) DISTRIBUIÇÃO DE MOMENTO

Os eletrons são injetados dentro do Orbitron com velocidades pequenas, porém, próximo ao filamento o campo não é radial e

desse modo eles são acelerados, adquirindo momento angular e momento axial suficiente para escaparem da atração do anodo e se deslocarem para o interior do Orbitron. Vamos simular essa situação supondo que os elétrons são injetados com uma certa distribuição de momentos em um campo radial uniforme. Por outro lado, como estamos desprezando as colisões entre os elétrons, a energia total deles se mantém constantes com o valor igual ao valor no instante da emissão, isto é, $-eV_f$ sendo V_f o potencial do filamento.

Vamos escolher para a função $w(E_o, L_o, p_o)$ que como vimos na seção anterior dá a probabilidade do elétron ter constantes de movimento E_o, L_o e p_o , a expressão

$$w(E_o, L_o, p_o) = \text{const.} \delta(E_o + eV_f) e^{-\alpha_1 \frac{p_o^2}{p_m^2}} e^{-\alpha_2 \left(\frac{L_o - \bar{L}}{L_m}\right)^2} \quad (\text{II.22})$$

onde a função $\delta(E_o + eV_f)$ impõe que todos os elétrons tenham a mesma energia, $-eV_f$, e as funções gaussianas selecionam valores de p_o e L_o em torno de $p_o = 0$ e $L_o = \bar{L}$, respectivamente dentro de um certo intervalo. Os parâmetros α_1 e α_2 permitem que variemos as larguras das funções gaussianas, enquanto p_m e L_m são os valores máximos, que determinaremos a seguir, que a componente axial do momento e o momento angular dos elétrons podem ter. A constante é fixada pela condição de normalização, equação (II.21). A equação (II.22) dispõe de três parâmetros independentes α_1, α_2 e \bar{L} cuja variação fornece um amplo espectro de distribuições possíveis para os elétrons dentro do Orbitron.

O maior valor p_m que a componente axial do momento do elétron pode ter, corresponde ao momento dos elétrons emitidos numa direção perpendicular à direção radial e com um momento angular mínimo, que chamaremos de L_1 , suficiente para que o elétron não venha a se chocar com a haste central durante o seu movimento. Como a energia total dos elétrons tem o valor fixo $-eV_f$ temos para p_m a expressão

$$p_m = \sqrt{2m \left(-eV_f - \frac{L_1^2(p_m)}{2m r_f^2} + eV(r_f) \right)} \quad (\text{II.23})$$

onde r_f é o raio da posição do filamento e o momento angular mínimo $L_1(p_m)$ depende por sua vez do valor do componente axial do momento. Para um valor qualquer p_o , L_1 será o momento angular de um eletrón em uma órbita que passa tangente à haste e será dado por

$$L_1(p_o) = a \sqrt{2m \left(-eV_f - \frac{p_o^2}{2m} + eV_a \right)} \quad (\text{II.24})$$

onde V_a é o potencial do anodo. Fazendo $p_o = p_m$ na equação (II.24) acima e levando L_1 na equação (II.23) obtemos para p_m o valor

$$p_m = \sqrt{2m} \left[-eV_f + eV_a - \frac{eV_a - eV(r_f)}{1 - \frac{a^2}{r_f^2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II.25})$$

Notemos agora que o momento angular máximo que os eletróns injetados com momento axial p_o podem ter, corresponde ao momento angular dos eletróns emitidos perpendicularmente à direção radial e é dado por

$$L_m(p_o) = r_f \sqrt{2m \left(-eV_f - \frac{p_o^2}{2m} + eV(r_f) \right)} \quad (\text{II.26})$$

Na expressão acima obtemos o momento angular máximo L_m para os eletróns dentro do Órbitron fazendo $p_o = 0$, ou seja,

$$L_m = r_f \sqrt{2m \left(-eV_f + eV(r_f) \right)} \quad (\text{II.27})$$

É útil considerarmos também o momento angular máximo que os eletróns em uma posição de raio r qualquer dentro do Órbitron e com momento axial p_o podem ter. Esse momento que chamaremos de L_r

corresponde como nos casos anteriores aos eletrons com velocidade radial nula e é dado por

$$L_r = r \sqrt{2m \left(-eV_f - \frac{p_o^2}{2m} + eV(r) \right)} \quad (\text{II.28})$$

Observemos que anular a velocidade radial do eletron em uma posição de raio r é equivalente a considerar os eletrons que estão no apogeu ou no perigeu das suas órbitas. Na equação (II.28) o que vamos ter é que para $r < r_f$ teremos o momento angular dos eletrons no perigeu enquanto para $r > r_f$ teremos o momento angular dos eletrons no apogeu da órbita. Notemos também, que L_1 é igual a L_r para $r=a$ e $L_m(p_o)$ é igual a L_r para $r=r_f$ como era de se esperar.

Mostremos agora, na figura 3, gráficos de L_r em função do raio r para alguns valores da grandeza p_o/p_m . Os cálculos foram feitos para o Orbitron da referência (2). Vemos da figura que existe um cilindro, de raio menor que o raio do Orbitron, dentro do qual todos os eletrons estão contidos. O raio deste cilindro é o apogeu da órbita de um eletron com $p_o=0$ e momento angular mínimo ($p_o=0$ na equação (II.24)). O que decorre do fato demonstrado por Hooverman que os eletrons que mais se afastam do anodo são também os que mais aproximam. Ainda na figura observemos que à medida que p_o cresce o apogeu das órbitas diminui e como consequência, para posições com raios $r > r_f$ teremos um momento axial máximo menor que p_m que chamaremos de $p_m(r)$. Um eletron com momento $p_o = p_m(r)$ estará em uma órbita com apogeu de raio $r > r_f$ e perigeu em $r=a$, e portanto $p_m(r)$ fica determinado fazendo $L_1=L_r$ o que leva à

$$p_m(r) = \sqrt{2m} \left[-eV_f + eV_a - \frac{eV_a - eV(r)}{1 - a^2/r^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II.29})$$

A equação (II.29) completa a determinação dos limites de

variação das componentes do momento dos eletrons dentro do Órbitron e estamos agora em condições de passar na seção seguinte ao cálculo da densidade de eletrons.

II.4) DENSIDADE DE PROBABILIDADE

Substituindo as funções p e g, equações (II.22) e (II.15), na equação (II.20) obtemos para a função distribuição $f(r, p_r, L, p_z)$ a expressão

$$f(r, p_r, L, p_z) = \int dE_0 dL_0 dp_0 \text{const.} \delta(E_0 + eV_f) e^{-\alpha_1 \frac{p_0^2}{p_m^2}} e^{-\alpha_2 \left(\frac{L_0 - \bar{L}}{L_m}\right)^2} K \delta(E_0 - \epsilon) \delta(L_0 - L) \delta(p_0 - p_z) \quad (\text{II.30})$$

que depois de efetuadas as integrações se reduz a

$$f(r, p_r, L, p_z) = \text{const.} e^{-\alpha_1 \frac{p_z^2}{p_m^2}} e^{-\alpha_2 \left(\frac{L - \bar{L}}{L_m}\right)^2} K \delta(-eV_f - \epsilon_0) \quad (\text{II.31})$$

Se integramos agora a função distribuição acima, equação (II.31), no espaço dos momentos, obtemos a densidade de probabilidade, que dá a probabilidade por unidade de volume do eletron está em uma posição de raio r dentro do Órbitron. Em coordenadas cilíndricas temos

$$n(r) = \int dp_r \frac{dL}{r} dp_z \text{const.} e^{-\alpha_1 \frac{p_z^2}{p_m^2}} e^{-\alpha_2 \left(\frac{L - \bar{L}}{L_m}\right)^2} K \delta(-eV_f - \epsilon_0) \quad (\text{II.32})$$

Efetuando a integral em dp_r e comparando com a equação (II.19) que define a densidade n_0 vemos que a densidade $n(r)$ pode ser escrita como

$$n(r) = \text{const.} \int_0^{p_z} dp_z \int_{L_1}^{L_2} dL e^{-\alpha_1 \frac{p_z^2}{p_m^2}} e^{-\alpha_2 \left(\frac{L - \bar{L}}{L_m}\right)^2} n_0(r, -eV_f, L, p_r) \quad (\text{II.33})$$

A equação (II.33) mostra que $n(r)$ é uma superposição, com pesos dados pela função $w(E, L, p_z)$, de densidades n_0 . Os limites de integração p_1, L_1 e L_2 são fixados - ver seção anterior - do seguinte modo: $p_1 = p_m$, equação (II.25), para posições de raio $r < r_f$ e $p_1 = p_m(r)$, equação (II.29), para $r > r_f$ e $L_2 = L_r$, equação (II.28), se $L_r < L_m$ e $L_2 = L_m$, equação (II.27), se $L_r > L_m$.

A densidade $n(r)$ tem de ser calculada numericamente e é conveniente introduzirmos agora algumas grandezas adimensionais. Assim introduziremos uma coordenada $x = r/b$ que em particular, toma os valores $x_0 = a/b$, $x_f = r_f/b$ e para $r = b$, $x = 1$. Definiremos também uma função $\eta(x) = 2\pi z_0 b^2 x n(bx)$, proporcional ao número de eletrons entre os cilindros de raios x e $x+dx$ e que satisfaz, por definição, a condição de normalização

$$\int_{x_0}^1 \eta(x) dx = 1 \quad (\text{II.34})$$

Substituindo a equação (II.19) na equação (II.33) e levando a expressão obtida para $n(r)$ na definição da função $\eta(x)$ temos a menos de uma constante multiplicativa

$$\eta(x) = \text{const.} \int_0^{p_f} dp_z e^{-\alpha_1 \frac{p_z^2}{p_m^2}} \int_{L_1}^{L_2} dL e^{-\alpha_2 \left(\frac{L-L}{L_m}\right)^2} \frac{1}{T \sqrt{\frac{2}{m} \left(-eV_f - \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{p_z^2}{2m} + eV\right)}} \quad (\text{II.35})$$

Comparando com equação (II.28) vemos que $\eta(x)$ pode ser escrita como

$$\eta(x) = \text{const.} \cdot x \int_0^{p_f} dp_z e^{-\alpha_1 \frac{p_z^2}{p_m^2}} \int_{L_1}^{L_2} dL \frac{e^{-\alpha_2 \left(\frac{L-L}{L_m}\right)^2}}{T \sqrt{L_r^2 - L^2}} \quad (\text{II.36})$$

Na equação (II.36) T é o tempo que o eletron leva para ir do perigeu ao apogeu de sua órbita. Hooverman⁽⁶⁾ estudando o

movimento de partículas carregadas em um campo com simetria cilíndrica, como o campo dentro do Orbitron, mostrou que esse tempo, T , depende do momento angular e da parte da energia da partícula no plano da órbita que no caso seria $-eV_f - \frac{p_z^2}{2m}$. A dependência de T com o momento angular, nos cálculos que ele fez, se revelou suficientemente pequena para que possamos desprezã-la aqui no cálculo da densidade (ver Deichelbohrer ref. 8) e quanto à dependência de T com p_z é dada à menos de uma constante por

$$T = \text{const.} \cdot e^{-\frac{p_z^2}{2meV_a} \ln(b/a)} \quad (\text{II.37})$$

Substituindo T na equação (II.36) temos

$$\eta(x) = \text{const.} \cdot x \int_0^{p_z} dp_z e^{\left(\frac{p_z^2}{2meV_a} \ln \frac{b}{a} - \alpha_1\right) \frac{p_z^2}{2m}} \int_{L_1}^{L_2} dL \frac{e^{-\alpha_2 \left(\frac{L-\bar{L}}{L_m}\right)^2}}{\sqrt{L_r^2 - L^2}} \quad (\text{II.38})$$

A equação (II.38) apresenta o inconveniente do integrando divergir para $L=L_r$, no entanto, realizando uma integração por partes na integral em dL obtemos para $\eta(x)$ a expressão

$$\eta(x) = \text{const.} \cdot x \int_0^{p_z} dp_z e^{\left(\frac{p_z^2}{2meV_a} \ln \frac{b}{a} - \alpha_1\right) \frac{p_z^2}{2m}} \cdot x \left\{ \arccos\left(\frac{L_1}{L_r}\right) e^{-\alpha_2 \left(\frac{L_1-\bar{L}}{L_m}\right)^2} - \arccos\left(\frac{L_2}{L_r}\right) e^{-\alpha_2 \left(\frac{L_2-\bar{L}}{L_m}\right)^2} - 2\alpha_2 \int_{L_1}^{L_2} dL e^{-\alpha_2 \left(\frac{L-\bar{L}}{L_m}\right)^2} \arccos\left(\frac{L}{L_r}\right) \left(\frac{L-\bar{L}}{L_m}\right) dL \right\} \quad (\text{II.39})$$

que não contém divergências e é adequada para o cálculo numérico de $\eta(x)$.

A equação (II.39) mostra que a função $\eta(x)$ depende dos parâmetros α_1 , α_2 e \bar{L} . Vejamos então os gráficos de $\eta(x)$ (figura 4) quando tomamos para \bar{L} o valor $\bar{L} = L_m/2$ e para α_1 os valores $\alpha_1=0$ e $\alpha_1=10$ com $\alpha_2=1/8$ e $\alpha_1=32$. Fazendo $\alpha_1=10$ e $\alpha_2=64$, temos funções

gaussianas estreitas e portanto estamos selecionando elétrons com momentos iguais aproximadamente aos valores médios $L_m/2$ para L e zero para p_z . O gráfico de $\eta(x)$ correspondente a esses valores de α_1 e α_2 , curva (10,32), apresenta um pico acentuado próximo ao catodo e um pequeno pico próximo à haste central. Esses picos correspondem ao apogeu e ao perineu das órbitas, respectivamente, e o fato do segundo pico ser maior decorre dos elétrons terem velocidades menores próximo ao apogeu das suas órbitas. Devemos esperar também picos mais acentuados à medida que estreitarmos mais as funções gaussianas. Na curva $(10, \frac{1}{8})$ alargamos a distribuição de momentos angulares e como consequência desaparece o pico próximo ao anodo, aparecendo no entanto, um pico na posição do filamento. Isto era de se esperar pois, a posição do filamento é uma posição comum onde todos os elétrons passam. Finalmente, nas outras duas curvas da figura 4, $(0, \frac{1}{8})$ e $(0,32)$, tomamos uma distribuição uniforme, $\alpha_1 = 0$, para a componente axial dos momentos e vemos então que os elétrons, a menos do pico na posição do filamento, tendem a se distribuir uniformemente dentro do Orbitron.

Nas figuras seguintes, fig. 5 e 6, usando os mesmos valores dos parâmetros da figura 4, calculamos a função $\eta(x) / x$ que é proporcional ao número de elétrons por unidade de volume. Na referência (8) Deichelbohrer calculou esta densidade de elétrons, supondo certas distribuições para as componentes axial e angular do momento dos elétrons. Ver, por exemplo, a figura 2 da referência (14). O ponto que queremos ressaltar é que os gráficos da figura 5 reproduzem os resultados que ele obteve, quais sejam, com uma distribuição estreita para L e p_z , temos uma densidade com dois picos, curva (10,32) (essencialmente uma densidade n_0 eliminadas as divergências), em seguida alargando a distribuição do momento angular obtemos uma densidade uniforme e finalmen-

te alargando a distribuição de momento axial eliminamos o pico da densidade próximo ao catodo

II.5) COMPARAÇÃO COM OS DADOS EXPERIMENTAIS

A grandeza física medida experimentalmente por Cybulska foi o espectro de energia da corrente de ions positivos coletada pelo catodo. Esse espectro, que dá o número de ions com energia entre E e $E+dE$, está ligado à densidade n de eletrons através da equação (I.6). Substituindo o potencial logarítmico nesta equação obtemos, a menos de uma constante multiplicativa, a relação

$$\frac{dI}{dE} = \text{const. } r^2 \langle v\sigma \rangle n \quad (\text{II.40})$$

Usando na equação acima os valores da densidade calculados na seção anterior, podemos determinar um espectro teórico para a energia dos ions e comparar desse modo com o espectro medido. Precisamos no entanto, antes calcular a grandeza $\langle v\sigma \rangle$ dentro do modelo de órbitas estáveis ou seja a partir da função distribuição que estamos usando. Observemos no entanto, que dentro deste modelo a energia cinética dos eletrons é determinada pela posição em que eles se encontram e como tanto v quanto σ são funções apenas da energia cinética podemos escrever imediatamente

$$\langle v\sigma \rangle = \sqrt{2m(-eV_j + eV(r))} \sigma(-eV_j + eV(r)) \quad (\text{II.41})$$

onde tomaremos para a seção de choque de ionização σ os valores da referência (13). Finalmente, a constante multiplicativa na equação (II.40) será fixada normalizando a curva teórica de tal modo a termos uma corrente total de íons igual a 9000Amp que é o valor obtido quando os pontos experimentais, figura 14 da referência (4), são ligados por uma linha poligonal.

Na figura 7, mostramos gráficos do espectro de íons construídos usando a equação (II.40) com a densidade calculada para os valores dos parâmetros α_1 , α_2 e \bar{L} indicados na figura e também os pontos experimentais com os erros respectivos. Vemos que não existe ajuste entre as curvas teóricas e os dados. De fato, enquanto os valores experimentais crescem na região de potencial alto, isto é, próximo ao anodo, as curvas teóricas apresentam picos na região de potencial baixo ou seja, próximo ao catodo do aparelho. A variação dos parâmetros α_1 , α_2 e \bar{L} , não traz modificação significativa na situação apresentada pela figura 7.

Vejamos então que podemos concluir da figura 7. O ponto importante é que construímos (dentro da hipótese dos eletrons seguirem órbitas estáveis com a energia mecânica tendo um valor constante fixado pelas condições iniciais) uma teoria de generalidade muito grande. De fato, além desta hipótese, as outras restrições (limites na variação das componentes do momento do eletron) decorrem da aplicação das leis da mecânica às condições de funcionamento do Orbitron. Por outro lado, a variação dos parâmetros α_1 , α_2 e \bar{L} permite, dentro do modelo considerado, um amplo espectro de densidades possíveis para os eletrons dentro do Orbitron. Se impõe portanto a conclusão de que a hipótese dos eletrons seguirem orbitas estáveis é inadequada para justificar os dados experimentais obtidos por Cybulka.

Observemos agora que os dados experimentais da referência (4) tendo sido obtidos em um Orbitron típico são suficientemente representativos para podermos concluir que os elétrons dentro de um Orbitron não seguem órbitas estáveis determinadas pelas condições iniciais. O que deve ocorrer portanto é que as interações entre os elétrons modificam a energia com que eles são injetados pelo filamento. No capítulo seguinte veremos então o que acontece quando consideramos que a energia dos elétrons se distribuam como em um estado de equilíbrio térmico.

III. HIPÓTESE DE EQUILÍBRIO ESTATÍSTICO

III.1) FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

Vamos supor agora que os elétrons dentro do Orbitron possam ser considerados em um estado de equilíbrio estatístico descrito pela função distribuição de Maxwell-Boltzmann, ou seja,

$$f(\vec{r}, \vec{p}) = A e^{-\frac{h}{kT}} \quad (\text{III.1})$$

em que A é uma constante de normalização, T é a temperatura do gás formado pelos elétrons e k é a constante de Boltzmann. A hamiltoniana h é a hamiltoniana para um elétron no campo criado pelo anodo

$$h = \frac{p^2}{2m} - eV(r) \quad (\text{III.2})$$

onde V(r) é o potencial logarítmico. Desprezaremos neste capítulo a modificação do campo devida à carga eletrônica dentro do Orbitron, considerando esse efeito de um modo auto-consistente no Capítulo V.

A densidade de probabilidade n(r) do elétron estar em uma posição r com um momento qualquer será dada por

$$n(r) = \int_D f(\vec{r}, \vec{p}) d^3p \quad (\text{III.3})$$

sendo D o domínio do espaço dos momentos onde a integral é feita. Essa restrição no domínio de integração é necessária para eliminar da distribuição os elétrons que tenham momentos / tais que em seu movimento colidem com a parede externa ou a haste central do aparelho. O ponto é que os elétrons tem livre cami

nho médio muito grande e se um eletron em uma colisão passa para uma trajetória que toca no anodo ou no catodo será absorvido antes que ocorra uma outra colisão. Em particular observemos que pela mesma razão um eletron em uma órbita desse tipo não é contado no processo de medida.

Para que os eletrons não colidam com o catodo basta impor que suas energias sejam negativas, ou seja, devemos ter a desigualdade

$$\frac{p_r^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{p_z^2}{2m} - eV(r) < 0 \quad (\text{III.4})$$

E para que não colidam com o anodo, os eletrons devem ter momento angular superior a um valor mínimo dado por

$$L_{\min} = a \sqrt{2m \left(\frac{1}{2} - \frac{p_z^2}{2m} + eV_a \right)} \quad (\text{III.5})$$

que é o momento angular de um eletron com momento axial p_z e que passa tangente à haste central. Substituindo a expressão da hamiltoniana na equação (III.5), a condição $L > L_{\min}$ pode ser escrita como

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right) \frac{L^2}{2m} - \frac{p_r^2}{2m} - e(V_a - V(r)) > 0 \quad (\text{III.6})$$

É conveniente introduzirmos agora algumas variáveis adimensionais. Assim vamos definir a coordenada $x = \frac{r}{b}$ e uma função $F(x)$ proporcional ao potencial dada por $F(x) = \frac{V(bx)}{V_a}$. Em particular $x_0 = \frac{a}{b}$, $F(x_0) = 1$ e $F(1) = 0$. Se dividirmos as desigualdades (III.4) e (III.6) por kT e introduzirmos novas variáveis $u = \frac{p_r}{2m\sqrt{kT}}$, $v = \frac{L}{2mr\sqrt{kT}}$ e $t = \frac{p_z}{2m\sqrt{kT}}$ elas podem en-

tão ser reescritas como

$$u^2 + v^2 + t^2 < \alpha \bar{F}(x) \quad (\text{III.7})$$

e

$$\left(\frac{x^2}{x_c^2} - 1 \right) v^2 - u^2 > \alpha (1 - \bar{F}(x)) \quad (\text{III.8})$$

onde o parâmetro α é definido por $\alpha = \frac{eV_a}{kT}$

Se considerarmos agora um sistema de eixos ortogonais onde marcamos as variáveis v , u e t a inequação (III.7) representará neste sistema os pontos dentro de uma esfera de raio $\sqrt{\alpha \bar{F}}$ e a inequação (III.8) os pontos dentro das superfícies hiperbólicas definidas por

$$\left(\frac{x^2}{x_c^2} - 1 \right) v^2 - u^2 = \alpha (1 - \bar{F}) \quad (\text{III.9})$$

As intersecções desses conjuntos de pontos definem o domínio D no qual a função distribuição é integrada. Observemos que a hamiltoniana h é quadrática nos momentos e portanto, as contribuições para a densidade dos diversos quadrantes do sistema v , u , t são iguais, bastando por isso efetuar a integral no primeiro quadrante.

Na figura 8 mostramos o corte do domínio D com o plano u v . Nessa figura, v_1 é o valor de v na equação (III.9) para o qual $u=0$, ou seja

$$v_1 = \sqrt{\frac{\alpha(1-\bar{F})}{\frac{x^2}{x_c^2} - 1}} \quad (\text{III.10})$$

e v_2 é determinado pela intersecção da hipérbole com o círculo de raio $\sqrt{\alpha \bar{F}}$, calculando, obtemos

$$v_2 = \frac{x_c}{x} \sqrt{\alpha} \quad (\text{III.11})$$

Finalmente, v_3 é o raio da esfera e portanto

$$v_3 = \sqrt{\alpha F} \quad (\text{III.12})$$

Observemos agora que o domínio D não será vazio, ou seja, a densidade será diferente de zero, se v_3 for maior que v_1 para valores de x no intervalo $x_0 < x < 1$. É fácil mostrar a partir das equações (III.10) e (III.12) que isto ocorrerá se a função $F(x)$ satisfizer a desigualdade

$$F(x) > \left(\frac{x_c}{x}\right)^2 \quad (\text{III.13})$$

A função $F(x)$ desprezando a carga espacial eletrônica é dada por

$$F(x) = \frac{\ln x}{\ln x_c} \quad (\text{III.14})$$

Na figura 9 mostramos num mesmo gráfico as funções $\left(\frac{x_c}{x}\right)^2$ e $F(x)$ e vemos que a desigualdade (III.13) é satisfeita para valores de x entre x_0 e um valor x_1 muito próximo de $x=1$. Os elétrons da distribuição estarão portanto contidos em um cilindro de raio aproximadamente igual ao raio do Orbitron.

Se fizermos agora x tender a x_c na equação (III.9) vemos que a hipérbole degenera nos seguimentos de reta $u=0$ para $v < -v_1(x_0)$ e $u=0$ para $v > v_1(x_0)$, com $v_1(x_0)$ sendo calculado tomando o limite $x \rightarrow 0$ na equação (III.10), o que dá

$$v_1(x_c) = -\frac{\alpha}{\ln x_c} \quad (\text{III.15})$$

Portanto, a densidade de elétrons se anula na haste central do Orbitron como era de se esperar.

III.2) DENSIDADE DE PROBABILIDADE

Passemos agora ao cálculo da densidade de probabilidade. Inicialmente, vamos substituir na equação (III.2) a expressão da função distribuição, equação (III.1), e escrever o elemento d^3p em coordenadas cilíndricas, $d^3p = dp_r \frac{dL}{r} dp_z$, obtendo então

$$n(r) = A e^{\frac{eV(r)}{kT}} \int_D dp_r \frac{dL}{r} dp_z e^{-\frac{p^2}{2mkT}} \quad (\text{III.16})$$

Utilizemos na equação (III.16) as variáveis sem dimensão x, u, v e t que definimos anteriormente e passemos para uma densidade linear de probabilidade $\eta(x)$ ligada à densidade $n(r)$ pela relação

$$\eta(x) = 2\pi z_0 b r n(r) \quad (\text{III.17})$$

A função $\eta(x)$ satisfaz por força da normalização da densidade $n(r)$ a condição de normalização

$$\int_{x_0}^1 \eta(x) dx = 1 \quad (\text{III.18})$$

Substituindo $n(r)$ dado pela equação (III.16) na equação (III.17) obtemos para $\eta(x)$, em termos das novas variáveis, e a menos de uma constante de normalização, a expressão

$$\eta(x) = \text{const. } x e^{\alpha F(x)} \left\{ \int_{v_1}^{v_2} dv e^{-v^2} \int_0^{u_2(t=0)} du e^{-u^2} \int_0^{t_m} dt e^{-t^2} + \int_{v_2}^{v_3} dv e^{-v^2} \int_0^{u_2(t=0)} du e^{-u^2} \int_0^{t_m} dt e^{-t^2} \right\} \quad (\text{III.19})$$

Na equação (III.19), a integral é efetuada no primeiro quadrante do sistema v, u, t , fixando inicialmente u e v com a integral em dt sendo feita desde $t=0$ até o valor $t=t_m$ que corresponde a um ponto na esfera de raio $\sqrt{\alpha F}$, e portanto, é dado por

$$t_m = \sqrt{\alpha F - u^2 - v^2} \quad (\text{III.20})$$

Em seguida v é mantido fixo e a integral em du é efetuada desde zero até um valor máximo que no intervalo $v_1 < v < v_2$ é igual à

$$u_2(t=0) = \sqrt{\left(\frac{x^2}{x_0^2} - 1\right)v^2 - \alpha(1-F)} \quad (\text{III.21})$$

calculado fazendo $t=0$ na equação (III.8) da hipérbole, e no intervalo $v_2 < v < v_3$ é igual à

$$u_2(t=0) = \sqrt{-v^2 + \alpha F} \quad (\text{III.22})$$

calculado fazendo $t=0$ na equação da esfera. Finalmente, as integrais em dv de v_1 até v_2 e de v_2 até v_3 são somadas.

Das equações acima que definem a função $\eta(x)$, vemos que a densidade de eletrons fica determinada, a menos de uma constante multiplicativa, pelos parâmetros x_0 e α . O parâmetro x_0 é fixado pela geometria do Órbitron e o que observamos é que a forma da densidade será a mesma para Órbitrons que diferem

por um fator de escala. Quanto ao parâmetro α ele contém a temperatura do gás de elétrons que não está determinada. Temos portanto, agora uma teoria que dispõe de um único parâmetro independente - com um significado físico claro - que podemos variar para obter ajuste aos dados experimentais.

Antes de tentarmos uma comparação com os dados experimentais, mostremos gráficos da função $\eta(x)$, para alguns valores dos parâmetros α e x_0 . Isto está feito nas figuras 10 e 11. Na figura 10 com o valor $x_0 = 0,06/4,5$ correspondente ao Orbitron da referência (4) calculamos $\eta(x)$ para os valores de α indicados e na figura 11 com $\alpha = 10$ fizemos $x_0 = 0,1$ e $0,0133333$. A característica geral dessas curvas como pode ser visto destas figuras é a presença de um pico muito próximo de $x = x_0$ com $\eta(x)$ tendendo em seguida para zero quando x tende a 1. Podemos dizer portanto que dentro do modelo estatístico os elétrons se concentram muito próximos do anodo.

Dentro da hipótese de órbitas estáveis que vimos no capítulo anterior, os elétrons se distribuem mais uniformemente / dentro do Orbitron ou apresentavam um pico próximo do catodo como pode ser visto na figura 4. Nos outros cálculos da densidade, supondo equilíbrio estatístico (9) e (10) já tínhamos picos próximos ao anodo, no entanto, a função $\eta(x)$ não tendia tão rapidamente para zero como estamos obtendo agora. Isto pode ser visto na figura 12 onde comparamos o comportamento próximo de $x=1$, da função $\eta(x)$ calculada na referência (10). Nessa referência, em lugar de impor que as energias dos elétrons sejam negativas, a função $\eta(x)$ foi calculada impondo sobre os momentos uma outra desigualdade que impedia os elétrons de tocar no catodo sem no entanto restringir a componente p_z do momento. A restrição que usamos agora, elimina portanto, elétrons próximos ao catodo acentuando / o pico junto a haste, e fazendo desse modo $\eta(x)$ tender a zero

mais rapidamente quando x tende a 1. Veremos depois que esse fato aproxima a forma das curvas teóricas da forma sugerida pelos dados experimentais.

Voltando à figura 10 observemos que $\eta(x)$ tem um pico maior para maiores valores do parâmetro α . Isto era de se esperar, pois maiores valores de α significam menores valores da temperatura e (ou) campo elétrico maior, como consequência, elétrons com energias cinéticas relativamente menores que são então puxados para mais perto do anodo.

Quanto à modificação da função $\eta(x)$ com o parâmetro x_0 vemos da figura 11 que as curvas se achatam quando x_0 cresce.

III.3) COMPARAÇÃO COM OS DADOS EXPERIMENTAIS

Se combinarmos as equações (I.1) e (I.5) do primeiro capítulo, obtemos, para o espectro da corrente dos íons produzidos por colisão dos elétrons com os átomos do gás dentro do Orbitron, a menos de uma constante multiplicativa, a expressão

$$\frac{dI}{dE} = \text{const.} \cdot r^2 \int_D d^3p \cdot v \sigma f(\vec{r}, \vec{p}) \quad (\text{III.23})$$

onde usamos o potencial logarítmico. Substituindo a função distribuição, equação (III.1), e usando a definição do domínio D , a equação (III.23). em termos das variáveis adimensionais definidas anteriormente fica

$$\frac{dI}{dE} = \text{const.} \cdot x^2 \left\{ \int_{v_1}^{v_2} dv e^{-v^2} \int_0^{u_2(t=0)} du e^{-u^2} \int_0^{t_m} dt e^{-\frac{t^2}{\sqrt{2mkT}}} + \int_{v_2}^{v_3} dv e^{-v^2} \int_0^{u_2(t=0)} du e^{-u^2} \int_0^{t_m} dt e^{-\frac{t^2}{\sqrt{2mkT}}} \right\}$$

(III.24)

sendo p o momento total do elétron e

$$\frac{4\sigma}{\sqrt{2\pi m kT}} = \sqrt{u^2 + v^2 + t^2} \sigma [kT(u^2 + v^2 + t^2)] \quad (\text{III.25})$$

onde usamos para a seção de choque de ionização, σ , os valores experimentais da referência (13), com os pontos fora da tabela sendo calculados por interpolação. A constante multiplicativa na equação (III.24) é fixada impondo que a corrente total formada pelos íons seja igual a 9000 Amp.

Mostremos então os resultados obtidos. Na figura 13 temos três gráficos do espectro de íons calculados usando a equação (III.24) com $x_0 = 0,06/4,5$ e $\alpha = 8, 10$ e 13 e marcamos também os os valores experimentais medidos por Cybulska ⁽⁴⁾ com os erros respectivos. Vemos que a curva para $\alpha = 10$, ou seja para uma temperatura $kT = 80$ eV, se ajusta razoavelmente bem aos dados experimentais.

Observemos que o cálculo do espectro de íons que fizemos supondo equilíbrio estatístico em um trabalho anterior (10), já apresentava um ajuste satisfatório aos dados experimentais, ver por exemplo, a figura 7 da referência (14). A diferença entre os cálculos, no entanto, é que naquele trabalho a curva do espectro tinha no trecho inicial - energias baixas - uma concavidade voltada para baixo enquanto agora temos nesta região do espectro uma concavidade voltada para cima que é comportamento sugerido pelos pontos experimentais. Finalizando ressaltamos que é na região de baixa energia do espectro que se concentram os elétrons secundários que dificultam a interpretação dos dados experimentais.

IV. CONSIDERAÇÃO SOBRE O MODELO ESTATÍSTICO

IV.1) GENERALIDADES

Tentemos agora justificar algumas das suposições que estamos fazendo quando usamos para os elétrons dentro do Orbitron o modelo estatístico do capítulo anterior. O primeiro ponto a ressaltar é que não se trata de um estado de equilíbrio estatístico usual. O que queremos dizer com isso é que se o filamento for desligado os elétrons não se manterão orbitando. De fato, colidindo entre si os elétrons passam para órbitas que tocam na haste ou na parede externa e são absorvidos. Os elétrons têm, portanto, um tempo de permanência dentro do Orbitron e o que temos de mostrar é que o tempo médio de permanência dos elétrons é suficiente para que se estabeleça uma situação estatística de equilíbrio. Deixemos no entanto para a seção seguinte, a apresentação de um cálculo do percurso necessário para um elétron que é injetado pelo filamento, atingir o equilíbrio térmico com os outros elétrons e vejamos agora algumas considerações gerais a respeito da função distribuição usada.

Primeiramente observemos que quando escolhemos uma distribuição de Maxwell-Boltzmann estamos admitindo que os efeitos quânticos e relativísticos são desprezíveis. Mostremos que isto é verdade para um orbitron típico. As energias cinéticas dos elétrons em uma situação típica é da ordem de kT (no capítulo anterior $kT \sim 80$ eV) e temos então para a velocidade média dos elétrons $\frac{v}{c} \sim \sqrt{\frac{kT}{m_e c^2}}$ onde c_0 é a velocidade da luz no vácuo e $m_e c_0^2 = 0,511$ MeV é a massa de repouso do elétron. Desses valores obtemos $v/c \sim 10^{-2}$ e portanto a velocidade média é muito menor que a velocidade da luz. Quanto aos efeitos quânticos eles serão desprezíveis se o comprimento de onda de Broglie for muito menor

que a distância média entre os elétrons, ou seja, se

$$\lambda \ll \bar{\ell} \tag{IV.1}$$

com $\lambda = \frac{h}{p}$ (h constante de Planck) e $\bar{\ell} \sim n^{-\frac{1}{3}}$ sendo $p = mv$ e n a densidade média de elétrons. Numa situação típica a densidade de elétrons dentro do Orbitron é da ordem de 10^{12} elétrons/cm³ e portanto $\bar{\ell} \sim 10^{-4}$ cm. Quanto a λ temos $\lambda = \frac{h c_0}{m_e c^2} \cdot \frac{c_0}{v}$ que depois de substituído os valores numéricos dá $\lambda \sim 10^{-8}$ cm e a relação (IV.1) é desse modo satisfeita.

Outra suposição que estamos fazendo é de que seja válida a aproximação de trajetórias independentes, equação (II.10), ou seja, que o movimento de cada elétron seja independente do movimento de outros elétrons, o que implica na duração de uma colisão entre elétrons ser muito menor que o intervalo de tempo entre duas colisões. Aqui temos no entanto um problema que surge do fato da interação coulombiana entre os elétrons ser uma interação de longo alcance, onde não podemos definir uma distância a partir da qual a interação cessa. Podemos contornar essa dificuldade argumentando que o fato mesmo de ser uma interação de longo alcance faz com que a maior parte do tempo cada elétron experimente o campo médio criado pelos outros elétrons e só por intervalos de tempo muito curtos a interação elétron - elétron seja importante.

Os elétrons dentro de um Orbitron se moveriam desse modo em um campo externo que seria o campo da haste central mais o campo médio criado pela carga eletrônica, o que significa considerá-los formando um gás perfeito como fizemos no Capítulo anterior.

Além disso sobre a hamiltoniana do capítulo anterior, convém ressaltar que estamos desprezando o campo médio que atua em um elétron devido aos outros elétrons, Isto se justifica por

que as medidas experimentais foram feitas em uma situação de carga espacial muito pequena. No entanto é possível, como veremos no capítulo seguinte, fazer um cálculo auto-consistente que leve em conta o campo médio criado pelos elétrons.

IV.2) CÁLCULO DA PERDA DE ENERGIA

Imaginemos o que ocorre quando um elétron é injetado pelo filamento no interior do Orbitron. No instante mesmo da emissão sua velocidade é praticamente nula mas rapidamente ele é acelerado pelo campo elétrico e junto à haste central ele terá uma energia cinética da ordem de 10^3 eV. Esta é uma energia muito alta se comparada com a energia cinética média para a temperatura / em torno de 80 eV que vimos no capítulo anterior. No entanto, quando o elétron passa pela nuvem formada pelos outros elétrons sofre a ação do campo médio criado por eles e é desse modo freiado com sua energia se distribuindo por todo o sistema. Calculemos então o percurso necessário para a energia cinética do elétron chegar a um valor da ordem de 10^2 eV. Como só estamos interessados em ordem de grandeza faremos a aproximação que o elétron da nuvem não se movimenta durante a colisão e que o elétron considerado não se desvia. Nessas condições o momento transferido p' será na direção normal ao movimento do elétron e será dado por

$$p' = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}_N(t) dt \quad (\text{IV.2})$$

sendo \bar{F}_N a componente normal da força de interação entre os elétrons. Introduzindo um eixo coordenado x como mostra a fig.14

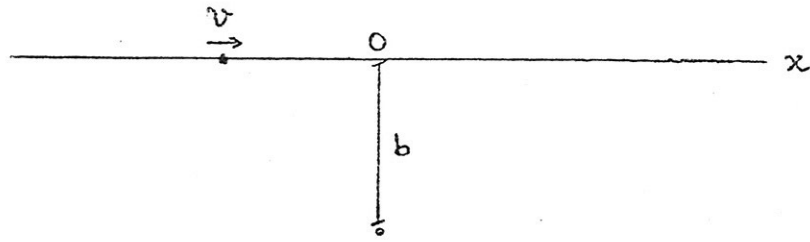


FIG. 14

onde v é a velocidade do eletrôn injetado e b é o parâmetro de impacto da colisão a integral na equação (IV.2) pode ser escrita como

$$\vec{p}' = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^2}{b^2 + x^2} \cos \alpha \frac{dx}{v} \quad (\text{IV.3})$$

Integrando, obtemos

$$\vec{p}' = \frac{2e^2}{bv} \quad (\text{IV.4})$$

Se a velocidade do eletrôn da nuvem no instante da colisão é \vec{V} , o eletrôn considerado transmite no choque uma energia E' dada por

$$E' = \frac{1}{2m_e} \left(m_e \vec{V} + \vec{p}' \right)^2 - \frac{m_e v^2}{2} \quad (\text{IV.5})$$

Operando obtemos

$$E' = \frac{p'^2}{2m_e} + \vec{V} \cdot \vec{p}' \quad (\text{IV.6})$$

Levemos em conta agora o fato que devido ao longo alcance da interação coulombiana as colisões mais importantes são as de parâmetro de impacto grande, ou seja, as colisões com pequena transferência de energia. Daí temos que

$$p' \ll m_e V$$

e portanto podemos desprezar o primeiro termo na segundo membro da equação (IV.6) ficando então

$$E' = \vec{v} \cdot \vec{p}' \quad (\text{IV.7})$$

Substituindo o valor de p' dado pela equação (IV.4) temos

$$E' = \frac{2e^2 V}{b v} \cos(\vec{v}, \vec{p}') \quad (\text{IV.8})$$

Façamos agora uma média em todas as velocidades \vec{V} possíveis do eletrôn da nuvem a fim de obter a relação entre a energia transferida E' e o parâmetro de impacto b . Observemos no entanto, que a média do $\cos(\vec{v}, \vec{p}')$ introduz um fator numérico que podemos tomar igual a um, pois estamos interessados apenas em ordem de grandeza. Podemos então escrever

$$E' = \frac{2e^2 \bar{V}}{b v} \quad (\text{IV.9})$$

onde \bar{V} é a velocidade média dos eletrons dentro do Orbitron na posição considerada.

Calculemos agora o número de colisões $\phi(E') dE' dx$ que o eletrôn sofre em um percurso dx de sua trajetória com transferência de energia entre E' e $E'+dE'$. Esse número é igual ao número de colisões $F(b) db dx$ com parâmetro de impac-

to entre b e $b+db$ no percurso dx , ou seja,

$$\phi(E') dE' dx = F(b) db dx \quad (\text{IV.10})$$

O segundo membro da equação é dado por

$$F(b) db dx = n 2\pi b db dx \quad (\text{IV.11})$$

em que n é a densidade de eletrons. Por outro lado da equação (IV.9) temos

$$db = \frac{2e^2 \bar{v}}{E'^2 v} dE' \quad (\text{IV.12})$$

que pode ser escrita também como

$$b db = \frac{4e^4 \bar{v}^2}{E'^3 v^2} dE' \quad (\text{IV.13})$$

Levando as equações (IV.11) e (IV.13) na equação (IV.10) ficamos com

$$\phi(E') dE' dx = n \frac{8\pi e^4 \bar{v}^2}{E'^3 v^2} dE' dx \quad (\text{IV.14})$$

Determinada a função $\phi(E')$ a perda total de energia do eletron por unidade de comprimento da trajetória será dada pela integral

$$\frac{d\bar{E}}{dx} = \int_{E_0}^{\infty} E' \phi(E') dE' \quad (\text{IV.15})$$

onde introduzimos um corte E_0 no limite inferior para evitar a

divergência devida ao alcance infinito da interação coulombiana. Este corte pode ser definido por um parâmetro máximo b_0 que tomaremos igual a lcm.

Substituindo $\phi(E')$ na equação (IV.15) temos

$$\frac{dE}{dx} = \int_{E_0}^{\infty} E' n \frac{8\pi e^4 \bar{v}^2}{E'^3 v^2} dE'$$

que integrada dá

$$\frac{dE}{dx} = \frac{8\pi e^4 n}{E_0} \left(\frac{\bar{v}}{v} \right)^2 \quad (\text{IV.16})$$

onde $E_0 = \frac{2e^2}{b_0} \cdot \frac{\bar{v}}{v}$ e portanto

$$\frac{dE}{dx} = 4\pi e^2 n \left(\frac{\bar{v}}{v} \right) b_0 \quad (\text{IV.17})$$

que é a expressão para perda de energia do eletrón por unidade de comprimento do percurso.

IV.3) TEMPO DE RELAXAÇÃO

Pretendemos agora utilizar os resultados deduzidos na teoria do movimento Browniano - como pode ser visto no livro de Balescu, ref.(15) - para obtermos uma estimativa a partir da equação (IV.17) do tempo necessário para o eletrón injetado dentro do Órbitron chegar ao equilíbrio termico com os outros eletrons.

Na teoria do movimento Browniano consideramos uma partícula que é injetada dentro de um fluido com uma velocidade v_0 muito superior a velocidade média das partículas do fluido. O movimento da partícula é descrito pela equação de Langevin

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\lambda\vec{v} + \vec{A}(t) \quad (\text{IV.18})$$

onde $\vec{A}(t)$ é a força microscópica que atua sobre a partícula devido às colisões caóticas que a partícula sofre com as partículas do fluido. A força $\vec{A}(t)$ não pode ser inteiramente especificada mas podemos supor que o seu comportamento médio satisfaça a certos requisitos gerais. Assim supomos que

$$\langle \vec{A}(t) \rangle_{\vec{v}_0} = 0 \quad (\text{IV.19})$$

e que para cada componente, por exemplo $A_x(t)$, temos

$$\langle A_x(t_1) A_x(t_2) \rangle_{\vec{v}_0} = \phi_x(t_1 - t_2) \quad (\text{IV.20})$$

onde a função $\phi_x(t)$ é quase uma função- δ , ou seja, só é diferente de zero para $|t|$ muito próximo de zero. As médias nas equações (IV.19) e (IV.20) são feitas em um ensemble de partículas com velocidade \vec{v}_0 no instante $t=0$. Com essas suposições é possível mostrar em um cálculo elementar que para tempos t tais que $t \gg \frac{1}{\lambda}$ a partícula injetada no fluido terá esquecido a condição inicial \vec{v}_0 e terá o comportamento médio das partículas do fluido.

Observemos que tomando a media da equação (IV.18) e usando a equação (IV.19) temos

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{v} \rangle_{\vec{v}_0} = -\lambda \langle \vec{v} \rangle_{\vec{v}_0} \quad (\text{IV.21})$$

e portanto atua sobre a partícula uma força média de atrito proporcional à velocidade.

A equação (IV.17) deduzida na seção anterior implica em que atua sobre o eletrôn uma força média de atrito. De fato temos $\frac{dE}{dx} = \frac{1}{v} \cdot \frac{dE}{dt}$ e substituindo $E = \frac{1}{2} m_e v^2$ na equação (IV.17) obtemos

$$\frac{dv}{dt} = \frac{4\pi^2 e^2 n b_c}{m_e} \cdot \frac{\bar{v}}{v} \quad (\text{IV.22})$$

Comparando as equações (IV.21) e (IV.22) nós vemos que se tomarmos para λ o valor

$$\lambda = \frac{4\pi^2 e^2 n b_c \bar{v}}{m_e v_c^2} \quad (\text{IV.23})$$

atuará sobre a partícula no fluido uma força de atrito inferior a força de atrito que atua sobre o eletrôn dentro do Órbitron e portanto o tempo de relaxação obtido com este valor de λ será superior ao tempo de relaxação do eletrôn. Utilizaremos portanto, o valor

$$t_r = \frac{1}{\lambda} = \frac{m_e v_c^2}{4\pi^2 e^2 n b_c \bar{v}} \quad (\text{IV.24})$$

como uma estimativa do tempo necessário para o eletrôn injetado dentro do Órbitron chegar ao equilíbrio térmico com os outros eletrons.

O tempo de permanência t_p de um eletrôn dentro do Órbitron é dado por

$$t_p = \frac{\bar{l}_0}{\bar{v}} \quad (\text{IV.25})$$

onde \bar{l}_0 é o percurso médio do eletrôn que pode ser determinado experimentalmente. Dividindo t_r por t_p temos

$$\frac{t_r}{t_p} = \frac{m_e v_0^2}{4\pi e^2 n b_0 \bar{e}_0} \quad (\text{IV.26})$$

que \bar{e} o parâmetro que deve ser muito menor que um para ser válida a hipótese dos eletrons estar em equilíbrio estatístico.

Substituindo os valores numéricos $\frac{m_e v_0^2}{2} \sim 10^3 \text{ eV}$,
 $\frac{e^2}{b_0} \sim 10^{-7} \text{ eV}$, $n \sim 10^{12} \text{ el/cm}^3$ e $\bar{e}_0 \sim 10^3 \text{ cm}$ temos

$$\frac{t_r}{t_p} \sim 10^{-6} \quad (\text{IV.27})$$

que \bar{e} , portanto, muito menor que um. Isto significa que o tempo médio que um elétron leva para chegar ao equilíbrio é muito menor que o tempo médio que ele permanece dentro do Orbitron o que explica a boa concordância com os dados experimentais que obtivemos no capítulo anterior considerando todos os eletrons em equilíbrio estatístico.

V. POTENCIAL E DENSIDADE AUTO-CONSISTENTES

V.1) EQUAÇÃO DE POISSON

Neste capítulo não faremos mais a aproximação de desprezar a carga espacial formada pelos elétrons dentro do Orbitron. Consequentemente, o potencial elétrico não será mais o potencial logarítmico

$$V(r) = V_a \frac{\ln(r/b)}{\ln(a/b)} \quad (V.1)$$

que usamos nos capítulos anteriores.

Para calcularmos como o potencial se modifica consideremos a equação de Poisson

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (V.2)$$

satisfeita pelo campo elétrico \vec{E} , sendo ρ a densidade de carga eletrônica em um ponto no interior do Orbitron. Integremos a equação acima no volume Ω de um cilindro de altura h e raio r , com $a < r < b$. Temos então

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} d\Omega = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega} \rho d\Omega \quad (V.3)$$

No segundo membro da equação (V.3) a integral é igual à carga dentro do volume considerado e vamos escrevê-la como $q_0 + q(r)$ sendo q_0 a carga no anodo e $q(r)$ a carga eletrônica até o raio r . No primeiro membro a integral no volume pode ser transformada em uma integral na superfície do volume Ω e se nos restringirmos à zona central do Orbitron, ver figura 1, onde o campo é radial, teremos

$$E \ 2\pi r h = \frac{q_0 + q(r)}{\epsilon_0} \quad (V.4)$$

Substituindo a relação $E = -\frac{dV}{dr}$ entre o campo e o potencial na equação anterior obteremos a equação

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{q_0 + q(r)}{2\pi h \epsilon_0 r} \quad (V.5)$$

que integrada em dr desde a até um raio arbitrário r , fica

$$V(r) - V_a = -\frac{1}{2\pi h \epsilon_0} \int_a^r \frac{q_0 + q(r')}{r'} dr' \quad (V.6)$$

sendo V_a o potencial do anodo. Como a parte externa do Orbitron é ligada à terra o potencial $V(r)$ satisfaz a condição de contorno $V(b)=0$ e esta condição fixa a carga q_0 depositada na haste central. De fato, fazendo $r=b$ na equação acima obteremos para q_0 a expressão

$$q_0 = \frac{2\pi h \epsilon_0}{\ln(b/a)} V_a - \frac{1}{\ln(b/a)} \int_a^b \frac{q(r)}{r} dr \quad (V.7)$$

Um caso particular desta relação é quando $q(r)=0$ para todo r . Nesse caso, a haste central conterá por unidade de comprimento uma carga Q_0/h dada por

$$\frac{Q_0}{h} = \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln(b/a)} V_a \quad (V.8)$$

Substituindo a expressão de q_0 na equação (V.6) obtemos

$$V(r) = V_a \frac{\ln(r/b)}{\ln(a/b)} + \frac{1}{2\pi h \epsilon_0} \left[\frac{\ln(r/b)}{\ln(a/b)} \int_a^b \frac{q(r')}{r'} dr' - \int_a^r \frac{q(r')}{r'} dr' \right] \quad (V.9)$$

Para calcular a carga $q(r)$ integramos a densidade de carga $\rho(r)$ no volume \mathcal{N}_e , devido à simetria da distribuição de

carga na zona central do Orbitron, obteremos

$$q(r) = 2\pi h \int_a^r r' \rho(r') dr' \quad (V.10)$$

Levando $q(r)$ na equação (V.9) ficamos com

$$V(r) = V_a \frac{\ln(r/b)}{\ln(a/b)} + \frac{1}{\epsilon_0} \left[\frac{\ln(a/r)}{\ln(a/b)} \int_a^b \frac{dr'}{r'} \int_a^{r'} \rho(r'') r'' dr'' - \int_a^r \frac{dr'}{r'} \int_a^{r'} \rho(r'') r'' dr'' \right] \quad (V.11)$$

Dividindo agora a expressão acima por V_a vamos introduzir o potencial normalizado $F(x) = \frac{V(r)}{V_a}$ com $x = r/b$ tal que $F(x_0) = 1$ e $F(1) = 0$ com $x_0 = a/b$. Além disso, vamos definir um parâmetro β positivo dado por

$$\beta = - \frac{q(b)}{\epsilon_0} = - \frac{\ln(b/a)}{\epsilon_0 V_a} \int_a^b \rho(r) r dr \quad (V.12)$$

que por definição é uma medida da carga espacial total no interior do Orbitron. Com essas modificações a equação (V.11) fica

$$F(x) = \frac{\ln x}{\ln x_0} + \frac{\beta}{\ln x_0} \left[\frac{\ln(x_0/x)}{\ln x_0} \frac{\int_a^b \frac{dr'}{r'} \int_a^{r'} \rho(r'') r'' dr''}{\int_a^b \rho(r) r dr} - \frac{\int_a^r \frac{dr'}{r'} \int_a^{r'} \rho(r'') r'' dr''}{\int_a^b \rho(r) r dr} \right] \quad (V.13)$$

Finalizando essa série de transformações que estamos fazendo usemos na equação (V.13) a densidade linear $\eta(x)$, definida nos capítulos anteriores, proporcional a $r\rho(r)$. Desse modo chegamos a seguinte expressão final para a função $F(x)$

$$F(x) = \frac{\ln x}{\ln x_0} + \frac{\beta}{\ln x_0} \left[\frac{\ln(x_0/x)}{\ln x_0} \int_{x_0}^1 \frac{dx'}{x'} \int_{x_0}^{x'} \eta(x'') dx'' - \int_{x_0}^x \frac{dx'}{x'} \int_{x_0}^{x'} \eta(x'') dx'' \right] \quad (V.14)$$

O primeiro termo do lado direito da equação é o valor da função $F(x)$ quando desprezamos a carga eletrônica, ou seja, quando $\beta=0$. O segundo termo é a modificação em $F(x)$ devida ao campo criado pelos elétrons dentro do Orbitron.

Observemos agora que só podemos calcular $F(x)$ usando a equação (V.14) se soubermos $\eta(x)$ e esta função por sua vez depende de $F(x)$. Temos, portanto, de obter $F(x)$ e $\eta(x)$ através de um cálculo auto-consistente. Veremos nas seções seguintes como esse cálculo pode ser feito primeiro supondo equilíbrio estatístico e em seguida supondo um modelo de órbitas estáveis.

V.2) MODELO ESTATÍSTICO

Nesta seção veremos a modificação no potencial e na densidade devida à carga espacial quando consideramos os elétrons em equilíbrio estatístico. A densidade linear deles é dada pela equação (III.19).

$$\eta(x) = \text{const.} \times e \left\{ \int_{v_1}^{v_2} dv \tilde{e}^{-v^2} \int_0^{u_2(t=0)} du \tilde{e}^{-u^2} \int_0^{t_m} dt \tilde{e}^{-t^2} + \int_{v_2}^{v_3} dv \tilde{e}^{-v^2} \int_0^{u_2(t=0)} du \tilde{e}^{-u^2} \int_0^{t_m} dt \tilde{e}^{-t^2} \right\} \quad (\text{V.15})$$

com os limites de integração definidos pelas equações (III.20, III.21 e III.22). A função $\eta(x)$ como pode ser visto na equação acima depende do potencial $F(x)$ e as duas equações (V.14) e (V.15) têm de ser resolvidas simultaneamente. Isto foi feito do seguinte modo:

1) O processo é iniciado calculando $\eta(x)$ tomando para a função $F(x)$ na equação (V.15) o valor $F(x) = \ln x / \ln x_0$.

2) Levando o valor de $\eta(x)$ calculado anteriormente na equação (V.14) calculamos a função $F(x)$.

3) Com o valor obtido para $F(x)$ voltamos à equação (V.15) com o processo sendo então reiniciado. Isto é feito su

cessivamente até que a diferença entre os valores consecutivos da função $\eta(x)$ satisfaçam a desigualdade

$$\sum_{j=1}^N \left[\eta_{i+1}(x_j) - \eta_i(x_j) \right]^2 < 10^{-3} \quad (V.16)$$

onde N é o número de pontos em que o intervalo $[x_0, 1]$ foi dividido e o índice i se refere à iteração i -ésima.

Passemos então aos resultados obtidos. Na figura 15 vemos o efeito da carga espacial sobre o potencial $F(x)$ e na figura 16 o efeito sobre a densidade $\eta(x)$. Os cálculos foram feitos fazendo $\alpha = 10$ e $x_0 = 0,01333$ e tomando para β os valores indicados nas figuras. As curvas da figura 15 mostram que o potencial se reduz à medida que o parâmetro β cresce. Em termos de campo elétrico o que ocorre é um aumento da intensidade do campo junto à haste (curvas de $F(x)$ mais vertical nessa região) e uma diminuição próximo à parede (curvas mais horizontais). O aumento junto à haste pode ser entendido a partir da equação (V.7) que mostra que a carga no anodo cresce com a carga espacial. Por outro lado a diminuição junto à parede é uma consequência da blindagem, pelos elétrons dentro do Orbitron, da carga na haste central. Quanto à densidade, a figura 16 mostra que os elétrons tendem a se concentrar cada vez mais próximos da haste central à medida que a carga espacial aumenta. Praticamente poderíamos definir para o Orbitron um raio efetivo dentro do qual os elétrons estão contidos na sua maioria e que diminui quando o parâmetro β cresce. Este efeito é causado pelo crescimento da intensidade do campo que passa a atrair mais fortemente os elétrons para o anodo.

Mencionemos agora que a convergência do cálculo auto-consistente feito com as equações (V.14) e (V.15) se torna mais difícil à medida que tomamos maiores valores para o parâmetros β . Quanto a isto o importante é sabermos se existe um limite para β a partir do qual a distribuição de elétrons não fi

ca mais estável. O que pode ocorrer é que a blindagem da carga positiva da haste central pelos elétrons pode levar o potencial a assumir valores negativos junto à parede do Orbitron. Isto tornaria inviável a função distribuição que estamos usando como pode ser visto nas equações (III.20) e (III.21) que perdem sentido para valores negativos de $F(x)$. Fisicamente o que teríamos era um campo elétrico que em vez de confinar os elétrons dentro do Orbitron passaria a puxá-los no sentido do catodo.

Vamos então definir um novo parâmetro que chamaremos β' dado por

$$\beta' = - \frac{q(b)}{q_0} \quad (V.17)$$

e que por definição é a relação entre a carga espacial total e a carga positiva depositada no anodo. A carga q_0 deve ser maior em módulo que a carga $q(b)$ para garantirmos uma distribuição estável de elétrons dentro do Orbitron. O parâmetro β' deve desse modo ser menor que um. Na figura 17 vemos um gráfico que mostra como β' depende de β . Este gráfico sugere que β' tende assintoticamente para o valor $\beta' = 1$ a medida que β toma maiores valores e não teríamos portanto nenhum limite teórico para a carga espacial dentro do Orbitron.

V.3) ÓRBITAS ESTÁVEIS

Para estudar o comportamento da densidade de elétrons - calculada segundo a hipótese de órbitas estáveis - quando levamos em conta a presença da carga eletrônica dentro do Orbitron, tomaremos para os parâmetros α_1 , α_2 e \bar{L} os valores $\alpha_1 = 0$

$\alpha_2 = 2$ e $\bar{L} = 0$. A função $\eta(x)$, equação (II.39) proporcional à densidade de elétrons, para $\bar{L} = 0$ fica sendo

$$\eta(x) = \text{const.} \times \int_0^{p_z} dp_z e^{\left(\frac{p_m^2}{2meV_a} \ln b/a - \alpha_1\right) \frac{p_z^2}{p_m^2}} \times \quad (V.18)$$

$$\times \left\{ \arccos\left(\frac{L_i}{L_r}\right) e^{-\alpha_2 \frac{L_i^2}{L_m^2}} - \arccos\left(\frac{L_2}{L_r}\right) e^{-\alpha_2 \frac{L_2^2}{L_m^2}} - 2\alpha_2 \int_{L_i}^{L_2} dl e^{-\alpha_2 \frac{l^2}{L_m^2}} \arccos\left(\frac{l}{L_r}\right) \frac{l}{L_m^2} dl \right.$$

com p_m, p_z, L_i, L_2 e L_r sendo dados de acordo com o que vimos no 2º capítulo, onde agora o potencial $V(r)$ que aparece nas equações de definição dessas grandezas é calculado usando a equação (V.14) da seção anterior com $V(r) = V_a F$. Combinando então as equações (V.14) e (V.18) podemos determinar em um cálculo iterativo análogo ao da seção anterior, os valores auto-consistentes das funções $\eta(x)$ e $F(x)$.

Na figura 18 mostramos gráficos da função $F(x)$ calculada para os valores 0, 0,5 e 1 do parâmetro β . Como era esperado o aumento da carga eletrônica (maiores valores de β) reduz os valores de $F(x)$. Se compararmos a redução de $F(x)$ nas figuras 15 e 18, para um mesmo valor de β , por exemplo $\beta = 1$, veremos que na figura 15 $F(x)$ tem menores valores do que na figura 18, para x próximo de x_0 . Isto é uma consequência da carga estar concentrada em volta do anodo no modelo estatístico enquanto com órbitas estáveis os elétrons se distribuem mais uniformemente dentro do Orbitron.

Na figura 19 apresentamos os gráficos da função $\eta(x)$ para os valores 0 e 1 do parâmetro β . Vemos que o raio efetivo do Orbitron (o raio do cilindro dentro do qual os elétrons estão contidos) diminui com o aumento da carga eletrônica. Vejamos porque isto acontece. O raio efetivo é igual ao apogeu da órbita com momento angular mínimo L_1 obtido fazendo $p_0 = 0$ na equação (II.24). Ele é portanto determinado fazendo na expressão da energia $p_r = 0$, $p_z = 0$ e $L = L_1$ o que nos leva à equação

$$\frac{k_1}{2mr^2} + e V_f = e V(r) \quad (V.19)$$

Esta equação não tem uma solução fechada, mais podemos marcar em um mesmo gráfico em função de r os dois lados da equação e encontrar o valor do raio efetivo pela intersecção das curvas correspondentes às duas funções de r . Se observarmos agora a figura 18 é facil entender que a função $\frac{k_1}{2mr^2} + e V_f$ interseptará as curvas do potencial de tal modo que para maiores valores de β teremos raios efetivos menores justificando portanto a situação apresentada pela figura 19.

Finalmente, observemos que o cálculo iterativo com as equações (V.14) e (V.18) apresenta as mesmas dificuldades de convergência da secção anterior quando tomamos valores crescentes do parâmetro β .

VI) VIBRAÇÕES COLETIVAS

VI.1) INTRODUÇÃO

Em 1970, Salvador Troise, utilizando a haste central do Órbitron como uma antena verificou que existia um espectro de radio-frequências associado ao funcionamento do aparelho. Num trabalho⁽¹¹⁾, que era sua tese de mestrado, além de apresentar as medidas que foram feitas ele discutia diferentes modelos que pudessem justificar a presença desse espectro. Esses modelos baseavam-se na hipótese dos eletrons seguirem órbitas estáveis determinadas pelas condições do filamento. Foi encontrada uma concordância razoável entre algumas das frequências mais baixas medidas e as frequências correspondentes às órbitas fechadas do eletron. No entanto, nem todas as frequências foram possíveis de ser explicadas desse modo, e além disso o modelo não previa frequências acima de 83 MHz enquanto uma parte do espectro está acima desse valor.

Em 1971, Rodger Rogério, também em sua tese de mestrado⁽¹²⁾, considerou a possibilidade das frequências medidas serem as frequências naturais de vibração do gás de eletrons dentro do Órbitron. Ele mostrou ser possível explicar, desse modo, ao menos qualitativamente, o espectro obtido. No seu trabalho ele supos que os eletrons estavam em equilíbrio estátístico distribuídos de acordo com a função distribuição definida na referência (10). Neste capítulo vamos calcular as frequências dos modos normais de vibração dos eletrons supondo que eles se distribuem segundo a função distribuição que estabelecemos no capítulo III, ou seja, vamos supor que a densidade de probabilidade $f(\vec{r}, \vec{p})$ de um eletron estar na posição \vec{r} com



momento \vec{p} seja dada por

$$f(\vec{r}, \vec{p}) = A e^{-\frac{h}{kT}} \tag{VI.1}$$

se \vec{r} e \vec{p} estão no domínio D definido pelas inequações (III.4) e (III.6) e fora desse domínio $f(\vec{r}, \vec{p}) = 0$. Na equação (VI.1) tomaremos a hamiltoniana na aproximação de carga espacial nula, ou seja,

$$h = \frac{p^2}{2m} - eV(r) \tag{VI.2}$$

sendo $V(r)$ o potencial logarítmico criado pela haste central.

Designemos por p_0 , n_0 e T_0 os valores de equilíbrio respectivamente da pressão, densidade e temperatura do gás de eletrons em um ponto qualquer no interior do Orbitron. Estas grandezas, como estamos desprezando as correlações (equação (II.10)) ou seja dentro de uma aproximação de trajetórias independentes satisfazem a relação ⁽¹⁰⁾

$$p_0 = n_0 k T_0 \tag{VI.3}$$

que é a equação de estado de um gás ideal.

Consideremos agora pequenas oscilações do gás de eletrons em torno do estado de equilíbrio. Teremos em um ponto qualquer a densidade n e a pressão p dadas por

$$n = n_0 + n' \tag{VI.4}$$

$$p = p_0 + p' \tag{VI.5}$$

em que n' e p' são os desvios dos valores de equilíbrio e vamos supor sempre que $n' \ll n_0$ e $p' \ll p_0$.



As oscilações dos eletrons não são arbitrárias mas obedecem a duas equações básicas. A primeira, é a equação da continuidade que decorre da conservação do número de eletrons e a segunda é a equação de Euler que é a equação de movimento de um elemento de volume do gás. Explicitamente, temos respectivamente:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div} (n \vec{v}) = 0 \quad (\text{VI.6})$$

$$n m_e \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{g} - \text{grad } p \quad (\text{VI.7})$$

onde m_e é a massa do eletron, $\vec{v}(\vec{r}, t)$ é a velocidade do elemento de volume do gás na posição \vec{r} no instante t e \vec{g} é a força por unidade de volume que atua no elemento considerado e que na situação de equilíbrio é igual à força devida à diferença de pressão. As equações (VI.6) e (VI.7) combinadas levam à equação de ondas que descreve as oscilações do gás de eletrons dentro do Órbitron como veremos a seguir.

VI.2) EQUAÇÃO DE ONDAS

Faremos agora uma série de transformações nas equações (VI.6) e (VI.7) afim de obter a equação de ondas que procuramos. Nessas transformações, além de alguma álgebra e do uso de algumas relações termodinâmicas desprezaremos todos os termos de segunda ordem em n' , p' e \vec{v} que trataremos sempre como quantidades pequenas.

Consideremos primeiro a equação (VI.6). Usando a relação operacional

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} \quad (\text{VI.8})$$

podemos reescrevê-la como

$$\frac{dn}{dt} + n \text{div}(\vec{v}) = 0 \quad (\text{VI.9})$$

Supondo que as oscilações do gás de eletrons sejam processos adiabáticos a densidade e a pressão estarão então relacionadas e podemos escrever

$$\frac{dn}{dt} = \left(\frac{\partial n}{\partial p} \right)_S \frac{dp}{dt} \quad (\text{VI.10})$$

onde o índice S indica que a derivada deve ser calculada mantendo a entropia constante. Para calcular $\left(\frac{\partial n}{\partial p} \right)_S$ utilizaremos a identidade termodinâmica

$$\left(\frac{\partial n}{\partial p} \right)_S = \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_n}{\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p} \cdot \left(\frac{\partial n}{\partial p} \right)_T \quad (\text{VI.11})$$

Da definição de calor específico a pressão constante e a volume constante temos que

$$\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_n}{\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p} = \frac{C_v}{C_p} = \frac{1}{\gamma} \quad (\text{VI.12})$$

onde para um gás ideal $\gamma = \frac{5}{3}$. Por outro lado da equação de estado

$$\left(\frac{\partial n}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{kT} \quad (\text{VI.13})$$

Substituindo (VI.12) e (VI.13) na equação (VI.11) obtemos

$$\left(\frac{\partial n}{\partial p} \right)_S = \frac{1}{\gamma k T_0} = \frac{1}{m_e c^2} \quad (\text{VI.14})$$

em que tomamos $T = T_0$ a menos de termos de primeira ordem e definimos a constante C com dimensão de velocidade. Levando agora a equação (VI.14) na equação (VI.10) e substituindo $\frac{dn}{dt}$ na equação (VI.9) obtemos

$$\frac{1}{m_e c^2} \left(\frac{\partial p'}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } p_0 \right) + n_0 \text{div}(\vec{v}) = 0 \quad (\text{VI.15})$$

onde usamos também a relação (VI.8) e fizemos $p = p_0 + p'$ desprezando os termos de segunda ordem.

Consideremos agora a equação (VI.7). Substituindo nela as expressões (VI.4) e (VI.5) e retemo apenas termos de primeira ordem obtemos

$$m_0 m_e \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{g} - \text{grad } p_0 - \text{grad } p' \quad (\text{VI.16})$$

A força \vec{g} na equação acima pode ser expandida em torno do valor de equilíbrio \vec{g}_0 até termos de primeira ordem

$$\vec{g} = \vec{g}_0 + \left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial p} \right)_{0,S} p' \quad (\text{VI.17})$$

onde indicamos com S que a derivada é calculada mantendo a entropia constante e o índice 0 significa que estamos tomando o valor de $\frac{\partial \vec{g}}{\partial p}$ no estado de equilíbrio. Observemos agora que como estamos supondo oscilações adiabáticas, as relações entre as grandezas válidas no equilíbrio se mantêm e portanto podemos escrever

$$\left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial p} \right)_{0,S} = \left(\frac{\partial \vec{g}_0}{\partial p_0} \right)_S \quad (\text{VI.18})$$

Levando a relação acima na equação (VI.17) e substituindo a expressão da força \vec{g} que obtemos, na equação (VI.16) ficamos com

$$n_0 m_e \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \vec{g}_0}{\partial p_0} \right)_S p' - \text{grad } p' \quad (\text{VI.19})$$

onde cancelamos a força \vec{g}_0 com $\text{grad } p_0$ porque no equilíbrio temos a igualdade

$$\vec{g}_0 = \text{grad } p_0$$

Passemos agora para o cálculo da derivada $\left(\frac{\partial \vec{g}_0}{\partial p_0} \right)_S$ que aparece na equação (VI.19). Para isso vamos inicialmente substituir \vec{g}_0 por $\text{grad } p_0$ segundo a igualdade acima ou seja

$$\left(\frac{\partial \vec{g}_0}{\partial p_0} \right)_S = \left(\frac{\partial}{\partial p_0} \text{grad } p_0 \right)_S \quad (\text{VI.20})$$

considerando a pressão como uma função da temperatura temos

$$\left(\frac{\partial \vec{g}_0}{\partial p_0} \right)_S = \left(\frac{\partial}{\partial T_0} \text{grad } p_0 \right) \left(\frac{\partial T_0}{\partial p_0} \right)_S \quad (\text{VI.21})$$

onde podemos calcular a derivada $\left(\frac{\partial T_0}{\partial p_0} \right)_S$ do seguinte modo

$$\left(\frac{\partial T_0}{\partial p_0} \right)_S = \frac{\left(\frac{\partial T_0}{\partial n_0} \right)_S}{\left(\frac{\partial p_0}{\partial n_0} \right)_S} = \frac{\frac{1}{n_0 k} \left(\frac{\partial p_0}{\partial n_0} \right)_S + \frac{p_0}{k} \frac{\partial}{\partial n_0} \left(\frac{1}{n_0} \right)}{\left(\frac{\partial p_0}{\partial n_0} \right)_S} \quad (\text{VI.22})$$

em que no numerador usamos a equação de estado $p_0 = n_0 k T$ e

no denominador usando a relação (VI.14) temos que $\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_s = \gamma \frac{p}{n}$
 A equação (VI.22) fica então

$$\left(\frac{\partial T_0}{\partial p_0}\right)_s = \frac{\frac{1}{n_0 k} \gamma \frac{p_0}{n_0} - \frac{p_0}{k n_0^2}}{\gamma \frac{p}{n}} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot \frac{T_0}{p_0} \quad (\text{VI.23})$$

Invertendo na equação (VI.21) a ordem das operações $\frac{\partial}{\partial t}$ e grad e substituindo $\left(\frac{\partial T_0}{\partial p_0}\right)_s$ pela expressão que calculamos acima obtemos

$$\left(\frac{\partial \vec{g}_0}{\partial p_0}\right)_s = \frac{\text{grad } p_0}{p_0} \quad (\text{VI.24})$$

Levando este resultado na equação (VI.19) ficamos com

$$n_0 m_e \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \left(\frac{\text{grad } p_0}{p_0}\right) p' - \text{grad } p' \quad (\text{VI.25})$$

Finalizando essa série de transformações vamos dividir a equação acima por n_0 e definir uma nova variável $\mu = \frac{p'}{p_0}$ obtendo então para a equação de movimento de um elemento de volume do gás a expressão

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{c^2}{\gamma} \text{grad } \mu \quad (\text{VI.26})$$

onde usamos a equação de estado e o valor da constante c definida anteriormente.

Voltando a expressão final que tínhamos obtido da equação da continuidade, equação (VI.15), vamos dividi-la também por n_0 e introduzir um vetor $\vec{q} = \frac{\text{grad } p_0}{\gamma p_0}$ e a variável μ podendo reescrevê-la então como

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \mu}{\partial t} + \vec{q} \cdot \vec{v} + \text{div}(\vec{v}) = 0 \quad (\text{VI.27})$$

O par de equações (VI.26) e (VI.27) levam imediatamente à equação linear de ondas que estamos procurando. De fato, derivando a equação (VI.27) em relação ao tempo e substituindo a expressão de $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ dada pela equação (VI.26), obtemos

$$\nabla^2 \mu + \vec{q} \cdot \text{grad} \mu - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{VI.28})$$

que é a equação que usaremos para estudar as oscilações do gás de eletrons dentro do Orbitron.

VI.3) SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ONDAS

Para resolver a equação de ondas que estabelecemos na seção anterior, equação (VI.28), tentaremos uma solução que seja um produto de funções separadas de cada variável. Começaremos supondo que a função $\mu(\vec{r}, t)$ possa ser escrita como

$$\mu(\vec{r}, t) = u(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad (\text{VI.29})$$

onde $u(\vec{r})$ é função apenas das coordenadas espaciais e, como estamos interessados em estudar as oscilações do gás, tomamos uma dependência no tempo através de uma função harmônica de frequência ω . Substituindo a expressão acima para $\mu(\vec{r}, t)$ na equação (VI.28) obtemos a equação diferencial

$$\nabla^2 u + \vec{q} \cdot \text{grad} u + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 u = 0 \quad (\text{VI.30})$$

satisfeita pela função $u(\vec{r})$.

Em vista da simetria apresentada pelo Orbitron é conveniente introduzirmos coordenadas cilíndrica r, θ, z . Em termos dessas variáveis a equação (VI.30) fica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + g_r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\omega^2}{c^2} u = 0 \quad (\text{VI.31})$$

onde o produto escalar $\vec{g} \cdot \text{grad} u$ se reduz a um sô termo, uma vez que a pressão de equilíbrio p_0 é uma função apenas do raio e da definição do vetor \vec{g} temos

$$g_r = \frac{1}{\rho p_0} \cdot \frac{dp_0}{dr}$$

Considerando agora a função $u(\vec{r})$ como um produto

$$u(\vec{r}) = u_r(r) u_\theta(\theta) u_z(z)$$

de funções separadas de r , θ e z , a equação (VI.31) fica depois de dividida por u

$$\frac{1}{u_r} \left(\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} + \frac{g_r}{r} \frac{du_r}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 u_\theta} \frac{d^2 u_\theta}{d\theta^2} + \frac{1}{u_z} \frac{d^2 u_z}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad (\text{VI.32})$$

Para que a igualdade se mantenha quando variamos arbitrariamente cada coordenada independente na equação acima é preciso que os termos que sô dependem de uma variável sejam constantes.

Assim para a variável z devemos ter

$$\frac{1}{u_z} \frac{d^2 u_z}{dz^2} = -C_1^2 \quad (\text{VI.33})$$

onde C_1 é uma constante real para termos soluções periódicas.

Como a função u_z deve satisfazer à condição de contorno

$$u_z(0) = u_z(z_0) = 0 \quad (\text{VI.34})$$

sendo Z_0 o comprimento do Órbitron tomaremos soluções senoi-
dais e teremos então a menos de uma constante multiplicativa,

$$u_z = \text{sen } C_1 Z \quad (\text{VI.35})$$

com C_1 sendo dado por

$$C_1 = \frac{n_z \pi}{Z_0} \quad \text{com } n_z = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{VI.36})$$

Voltando à equação (VI.32) temos para u_θ a equação

$$\frac{1}{u_\theta} \frac{d^2 u_\theta}{d\theta^2} = -C_2^2 \quad (\text{VI.37})$$

com C_2 real. A função u_θ deve ser periódica em θ com perío-
do 2π , ou seja devemos ter

$$u_\theta(\theta) = u_\theta(\theta + 2\pi) \quad (\text{VI.38})$$

e isto leva a soluções do tipo

$$u_\theta = B_1 \text{sen } C_2 \theta + B_2 \text{cos } C_2 \theta \quad (\text{VI.39})$$

com $C_2 = n_\theta$, sendo n_θ um número inteiro qualquer

Levando (VI.33) e (VI.37) na equação (VI.32) obtemos
para u_r a equação

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \left(\frac{g}{r} + \frac{1}{r} \right) \frac{du_r}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n_\theta^2}{r} - \frac{n_z^2 \pi^2}{Z_0} \right) u_r = 0 \quad (\text{VI.40})$$

Encontrar as soluções desta equação que satisfazem à condição

de contorno

$$u_r(a) = u_r(b) = 0 \quad (\text{VI.41})$$

é encontrar os valores de ω que correspondem as frequências dos modos normais de oscilação do gás de eletrons dentro do Órbitron.

VI.4) DETERMINAÇÃO DOS AUTO-VALORES

A equação (VI.40) tem de ser resolvida numericamente e descreveremos agora, nesta seção, o método empregado para resolvê-la. Antes no entanto vamos reescrevê-la em termos de variáveis adimensionais mais convenientes.

Primeiro passaremos da função u_r para uma nova função y , proporcional a u_r , que normalizaremos depois de um modo adequado para o cálculo. Devido à homogeneidade da equação (VI.40) a função y satisfaz à mesma equação diferencial satisfeita por u_r , ou seja temos também para y a equação

$$\frac{d^2 y}{dr^2} + \left(q_r + \frac{1}{r} \right) \frac{dy}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n_z^2 \pi^2}{z_c^2} - \frac{n_e^2}{r^2} \right) y = 0 \quad (\text{VI.42})$$

Multipliquemos a equação acima por b^2 , sendo b o raio externo do Órbitron, e lembrando a variável $x = \frac{r}{b}$ usada nos capítulos anteriores ficamos com a equação

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(b q_r + \frac{1}{x} \right) \frac{dy}{dx} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n_z^2 \pi^2 b^2}{z_c^2} - \frac{n_e^2}{x^2} \right) y = 0 \quad (\text{VI.43})$$

onde a função $y(x)$ satisfaz às condições de contorno

$$y(x_0) = y(1) = 0 \quad (\text{VI.44})$$

Na equação (VI.43) o coeficiente de $\frac{dy}{dx}$ no segundo termo da equação é uma função de x que chamaremos de $p(x)$. Esta função, $p(x)$, depois de substituirmos q_r pelo seu valor $q_r = \frac{1}{\gamma n_0} \frac{dn_0}{dr}$ fica sendo

$$p(x) = \frac{1}{\gamma n_0} \frac{dn_0}{dx} + \frac{1}{x} \quad (\text{VI.45})$$

Finalmente no último termo da equação (VI.43) vamos definir o parâmetro λ pela relação

$$\lambda = \frac{b^2 \omega^2}{c^2} - \frac{\bar{n}^2 n_e^2 b^2}{z_0^2} \quad (\text{VI.46})$$

ficando então com a equação diferencial

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + \left(\lambda - \frac{n_e^2}{x^2} \right) y = 0 \quad (\text{VI.47})$$

Queremos encontrar os valores do parâmetro λ para os quais as soluções da equação (VI.47) satisfaz às condições (VI.44) de contorno. Esses valores são os auto-valores da equação e uma vez determinados podemos levá-los na equação (VI.46) e obtermos então as frequências dos modos normais de vibração dos eletrons dentro do Órbitron.

Para construir numericamente as soluções da equação (VI.47) vamos dividir o domínio $x_0 \leq x \leq 1$ em intervalos iguais de largura d dada por (k um inteiro)

$$d = \frac{1-x_c}{2k} \quad (\text{VI.48})$$

Teremos portanto $2k+1$ pontos que designaremos por x_j com j variando desde $j=1$ até $j=M$ com $M=2k+1$. A cada x_j corresponde um valor y_j da função y e um valor p_j da função p . Em particular $x_1=a$ e $x_M=b$. Nos cálculos tomamos $k=100$.

Substituiremos agora as derivadas primeira e segunda de y em relação a x na equação (VI.47) pela expressões aproximadas

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_j = \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2d} \quad (\text{VI.49})$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_j = \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{d^2} \quad (\text{VI.50})$$

Fazendo isso obtemos

$$\frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{d^2} + p_j \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2d} + \left(\lambda - \frac{n_0^2}{x_j^2}\right) y_j = 0 \quad (\text{VI.51})$$

Resolvendo a equação acima para y_{j+1} ficamos com a equação

$$y_{j+1} = \left(\frac{1}{2 + d p_j}\right) \left\{ -(2 - d p_j) y_{j-1} + 2 \left[2 + \left(\frac{dn_0}{x_j}\right)^2 - d^2 \lambda \right] y_j \right\} \quad (\text{VI.52})$$

que permite calcular o valor da função y em um ponto se soubermos os valores da função nos dois pontos anteriores.

Na equação (VI.52) os valores p_j da função p definida pela equação (VI.45) foram calculados numericamente em termos da densidade linear η usando a expressão aproximada

$$p_j = \frac{1}{2\gamma\alpha} \ln \left(\frac{\eta_{j+1}}{\eta_{j-1}} \cdot \frac{x_{j-1}}{x_{j+1}} \right) + \frac{1}{x_j} \quad (\text{VI.53})$$

Observemos no entanto que a expressão acima não pode ser usada para calcular e e o que fizemos para estes pontos foi usar as relações mais diretas

$$p_2 = \frac{1}{2\gamma\alpha} \cdot \frac{\eta_3}{\eta_2} \cdot \frac{x_2}{x_3} + \frac{1}{x_2} \quad (\text{VI.54})$$

$$p_{m-1} = -\frac{1}{2\gamma\alpha} \cdot \frac{\eta_{m-2}}{\eta_{m-1}} \cdot \frac{x_{m-1}}{x_{m-2}} + \frac{1}{x_{m-1}} \quad (\text{VI.55})$$

A função $p(x)$ construída usando as expressões aproximadas acima está mostrada na figura 20, para os valores $\alpha = 15$ e $x_0 = 0,0333$. A principal característica de $p(x)$ é que ela tem valores muito grandes nos extremos $x = x_0$ e $x = 1$.

Estamos agora em condições de construir a função $y(x)$ ou seja, calcular os valores y_j , partindo de um dos extremos do intervalo e indo, ponto a ponto, até o outro extremo. Falta no entanto escolhermos um valor para y_2 se começarmos por exemplo do primeiro extremo. Esse valor pode ser fixado arbitrariamente, o que corresponde a uma normalização arbitrária da função y e o valor tomado nos cálculos foi $y_2 = 0,1$.

Na figura 20 mostramos um gráfico do valor y_m da função $y(x)$ para $x = b$ em função de λ , tomando para x_0 o valor $x_0 = 0,0333\dots$ correspondente ao Orbitron em que Troise mediu o espectro e fazendo $\alpha = 15$. Vemos que oscila à medida que cresce a partir do valor $\lambda = 0$. Os valores de λ que anulam a função $y_m(\lambda)$ são justamente os auto-valores que queremos determinar. Vamos designá-los com um índice η_r com $\eta_r = 0, 1, 2, \dots$ sendo $\eta_r = 0$ o valor do índice correspondente ao menor auto-valor. O auto-valor dependerá portanto de dois índices η_r e η_θ .

Na figura a função $y_m(\lambda)$ foi calculada para $n_\theta = 0$ e $n_\theta = 1$.

Uma vez determinados os auto-valores λ_{n_r, n_θ} as frequências dos modos normais de vibração da distribuição dos elétrons são calculadas pela equação (VI.46), onde fazendo $\omega = 2\pi f$ e operando obtemos

$$f_{n_r, n_\theta, n_z} = \frac{c}{2\pi b} \sqrt{\lambda_{n_r, n_\theta} + \frac{\pi^2 b^2 n_z^2}{z_0^2}} \quad (\text{VI.56})$$

A velocidade c de propagação das oscilações é dada pela equação (VI.14) que pode ser escrita como

$$c = c_0 \sqrt{\frac{\mu k T}{m_e c_0^2}} \quad (\text{VI.57})$$

sendo c_0 a velocidade de propagação da luz no vácuo e $m_e c_0^2$ a massa de repouso do elétron. Levando c na equação (VI.56) podemos calcular as frequências.

Nas tabelas 1 e 2 mostramos as frequências dos modos iniciais de vibração para $\alpha = 8$ e $\alpha = 15$ calculadas usando os valores correspondentes ao Orbitron empregado por Troise ou seja $a = 0,075$ cm, $b = 2,25$ cm e $z_0 = 10,8$ cm. Observemos que as frequências não dependem muito de α . Passemos agora para uma comparação com o espectro medido por Troise.

VI.5) COMPARAÇÃO E DISCUSSÃO

As frequências medidas por Troise foram as seguintes (em MHz)

$f_1 = 43,6 \pm 0,2$	$f_4 = 58,5 \pm 2,6$	$f_7 = 172,0 \pm 3,7$
$f_2 = 22,7 \pm 2,2$	$f_5 = 85,0 \pm 2,8$	$f_8 = 213,4 \pm 4,1$
$f_3 = 43,0 \pm 2,4$	$f_6 = 127,0 \pm 3,3$	$f_9 = 260,0 \pm 4,6$

Comparando o espectro acima com as frequências das tabelas 1 e 2 da seção anterior vemos que as cinco primeiras frequências medidas se encontram abaixo das frequências calculadas. Como as frequências não dependem muito de α não devemos esperar que variando este parâmetro consigamos frequências abaixo de 100 mHz. Deixemos então as frequências mais baixas do espectro para serem discutidas depois e tentemos encontrar correspondências para as frequências mais altas

Observando as frequências calculadas para $\alpha = 15$, tabela 2, é possível estabelecer a seguinte identificação

$$f_6 = f_{0,0,1}$$

$$f_7 = f_{0,2,1}$$

$$f_8 = f_{0,3,1}$$

$$f_9 = f_{0,4,1}$$

A frequência $f_{0,2,1}$ não tem correspondência experimental. As diferenças entre os valores calculados e os valores medidos - pequenos na realidade - podem ser entendidas como uma consequência do Orbitron em que Troise mediu o espectro ser de dimensões reduzidas não sendo então inteiramente justificável desprezarmos as inhomogeneidades do campo elétrico devidas à presença do filamento. No entanto este fato não pode explicar a ausência de frequências abaixo de 100 mHz.

Uma possível explicação para as frequências baixas medidas por Troise foi apresentada por Rogerio em sua tese de mestrado⁽¹²⁾. A idéia é levar em conta os termos não-lineares que foram desprezados na dedução da equação de ondas. Um resultado bem conhecido da Mecânica⁽¹⁶⁾ nos diz que esses termos não lineares considerados como perturbações pequenas da equação

de onda geram combinações lineares das frequências previamente estabelecidas. Assim se f_i e f_j são frequências obtidas quando linearizamos a equação de ondas devemos esperar o aparecimento de frequências do tipo $f_i - f_j$ e $f_i + f_j$ quando levamos em conta termos não lineares pequenos.

A primeira frequência $f_1 = 13,6 \pm 0,2$ poderia então ser entendida como resultado do batimento das frequências $f_{c,0,3}$ e $f_{c,0,1}$ que dá

$$f_{c,0,3} - f_{c,0,1} = 12,7$$

O batimento das frequências $f_{c,0,1}$ e $f_{c,1,1}$ dá origem à frequência:

$$f_{c,1,1} - f_{c,0,1} = 17$$

que pode ser identificada com f_2 .

A diferença entre duas frequências altas consecutivas medidas dão muito próximo da frequência f_3 enquanto as diferenças $f_5 - f_7$ e $f_8 - f_6$ são próximas de f_5 . Quanto à frequência f_4 poderíamos identificá-la como resultando do batimento entre $f_{1,0,1}$ e $f_{1,2,1}$ que dá

$$f_{1,2,1} - f_{1,0,1} = 58$$

muito próximo do valor medido $f_4 = 58,5 \pm 2,6$.

Troise no seu trabalho (11) estudou também o comportamento das frequências do espectro quando eram variados os parâmetros do Orbitron. Assim ele pode observar que as frequências mais altas se mantinham aproximadamente constantes enquanto as frequências baixas variavam intensamente quando era variado o comprimento do aparelho. Este comportamento está de acordo com a nossa interpretação das frequências baixas como resultando do batimento entre as frequências naturais.

Primeiro observemos que as frequências naturais f_{n_r, n_θ, n_z} dadas pela equação (VI.56) não dependem muito do

comprimento z_0 porque o termo que contém z_0 dentro do radical é muito menor que λ_{n_r, n_θ} para pequenos valores de n_z .

Consideremos agora uma frequência Δf que resulte do batimento entre uma frequência $f' = f_{n_r', n_\theta', n_z'}$ e uma frequência $f = f_{n_r, n_\theta, n_z}$, ou seja,

$$\Delta f = \frac{c}{2\pi b} \left[\sqrt{\lambda^i + \left(\frac{\pi b n_z'}{z_0}\right)^2} - \sqrt{\lambda + \left(\frac{\pi b n_z}{z_0}\right)^2} \right] \quad (\text{VI.58})$$

Derivando a expressão acima em relação a z_0 obtemos após alguma álgebra

$$\frac{\partial(\Delta f)}{\partial z_0} = -\frac{c^2}{4z_0^3} \left(\frac{n_z'}{f'} - \frac{n_z}{f} \right) \quad (\text{VI.59})$$

que mostra que a frequência Δf de fato depende fortemente do comprimento z_0 do aparelho.

Ainda sobre a equação (VI.59) podemos considerar dois casos. Primeiro podemos ter o batimento entre frequências com mesmo λ , isto é, $\lambda^i = \lambda$ e $n_z' \neq n_z$. É fácil ver da equação acima que nessa situação $\frac{\partial(\Delta f)}{\partial z_0}$ teria um valor negativo e portanto Δf decresceria quando z_0 aumentasse.

A outra possibilidade seria considerar o batimento entre frequências com mesmo n_z , $n_z' = n_z$, e $\lambda^i \neq \lambda$. Neste caso com $f' > f$ $\frac{\partial(\Delta f)}{\partial z_0}$ seria positivo e Δf seria então uma função crescente do comprimento z_0 . É esse o comportamento da única frequência para a qual Troise apresenta as medidas feitas.

Concluindo vemos que a suposição de que algumas das frequências medidas resultam do batimento entre as frequências naturais de vibração do gás de elétrons dentro do Orbitron explica a diferença de comportamento das frequências do espectro

quando é variado o comprimento do aparelho.

Finalmente nas figuras 22 e 23 apresentamos gráficos da função $y(x)$ construída com a equação (VI.52) para $\alpha = 15$ e $x_0 = 0,03333$ com os valores de n_r , n_e , n_z e λ indicados nas figuras. Esses gráficos mostram que as oscilações ocorrem na região onde a densidade é mais baixa, ou seja, próximo do anodo. Este fato reforça a necessidade de levar em conta os termos não - lineares na equação de onda.

VII. CONCLUSÃO

A distribuição dos eletrons dentro do Orbitron tem sido calculada a partir de dois pontos de vista opostos: (i) supondo que a interação entre os eletrons não é importante e que portanto a distribuição é determinada pelas condições em que eles são injetados pelo filamento; (ii) supondo que as colisões entre os eletrons são suficientes para levá-los a um estado de equilíbrio estatístico. É claro que devemos considerar essas duas possibilidades como casos extremos dos quais a situação real dos eletrons se aproxima.

No Capítulo II construímos uma função distribuição dentro da suposição (i) que chamamos de hipótese de órbitas estáveis e tentamos obter ajuste aos dados experimentais da referência (4) e no Capítulo III fizemos o mesmo supondo os eletrons em equilíbrio estatístico. Dessas comparações fica evidente, ver figuras 7 e 13, que a hipótese mais adequada para a descrição dos eletrons é a de equilíbrio estatístico. Baseado na estimativa feita no Capítulo IV da perda de energia do eletron por unidade de comprimento do percurso, de onde deduzimos que o tempo de relaxação é muito menor que o tempo de permanência do eletron dentro do Orbitron, achamos que a hipótese de equilíbrio estatístico é válida para qualquer Orbitron com as características típicas que supomos durante o cálculo. Observemos que mesmo que não aceitemos que essa estimativa que fizemos seja suficiente para concluirmos que os eletrons dentro de um Orbitron típico estão em equilíbrio estatístico, ela torna extremamente improvável a hipótese dos eletrons seguirem órbitas estáveis determinadas pelas condições iniciais.

Para determinar a distribuição dos elétrons dentro do Orbitron é necessário impor algumas restrições no domínio de variação das componentes dos momentos. Essas restrições eliminam da distribuição os elétrons que durante os seus movimentos tocariam no aparelho. No Capítulo III introduzimos restrições diferentes daquelas usadas em um trabalho anterior ⁽¹⁰⁾ e da comparação feita com os dados experimentais pudemos concluir que estas que usamos aqui são as mais adequadas, ou seja, o momento angular deve ser superior a um valor mínimo que impede o elétron de tocar na haste central e os elétrons devem ter uma energia mecânica negativa.

No Capítulo V determinamos tanto para o modelo estatístico como para o modelo de órbitas estáveis, em um cálculo auto-consistente, a modificação da densidade dos elétrons e do potencial eletrostático quando levamos em conta o efeito da carga espacial formada pelos elétrons dentro do Orbitron. O ponto importante que queremos ressaltar desse cálculo é que para o valor do parâmetro α , que mede a carga eletrônica total, $\alpha = 0,08$ correspondente ao Orbitron onde foram feitas as medidas experimentais da referência (4), as modificações na densidade e no potencial são muito pequenas e portanto não alteram os resultados obtidos nos Capítulos II e III desprezando a carga espacial.

Finalmente, no Capítulo VI calculamos as frequências dos modos normais de vibração do gás de elétrons dentro do Orbitron e comparamos com o espectro de frequências medido na referência (11) utilizando a haste central do aparelho como uma antena. As frequências teóricas foram calculadas supondo oscilações de pequenas amplitudes para que pudessemos linearizar a equação de ondas.

A comparação mostra que as frequências mais altas medidas podem ser identificadas com pequena margem de erro a algumas das frequências previstas teoricamente. Quanto às frequências baixas é possível encontrar correspondência teórica / para elas considerando a existência de batimento entre as frequências naturais. A presença de batimento corresponde a tratar os termos de segunda ordem como perturbações da equação linear de ondas. O ponto importante é que essa interpretação / permite entender a diferença de comportamento observada experimentalmente entre as frequências baixas e as altas quando é variado o comprimento do Órbitron.

Concluindo achamos que considerando os elétrons em equilíbrio estatístico conseguimos construir uma teoria para o Órbitron consistente com os dados experimentais disponíveis . Nessa teoria as condições de injeção dos elétrons pelo filamento não é importante sendo a distribuição deles dentro do aparelho determinada por único parâmetro que é a temperatura.

		n_z					
n_e	n_r	λ	1	2	3	4	5
0	0	9,3	133,6	142,2	155,4	172,2	191,7
	1	41,1	276,1				
1	0	15,3	169,9				
	1	53,0	313,0				
2	0	27,0	224,4				
	1	75,6	373,6				
3	0	41,9	278,8				
	1	101,6	432,8				
4	0	59,7	332,2				
	1	139,7	491				

Tabela 1 - Os valores das frequências e do auto-valor λ calculados para $x_0 = 0,03333$ e $\alpha = 8$

			n_z				
n_e	n_r	λ	1	2	3	4	5
0	0	16,0	126,8	131,7	139,4	149,6	161,7
	1	52,1	226,8				
1	0	20,6	143,5				
	1	62,0	247,2				
2	0	31,4	176,5				
	1	82,4	284,8				
3	0	45,8	212,8				
	1	107,3	324,8				
4	0	63,2	249,6				
	1	135,8	365,2				

Tabela 2 - Os valores das frequências e do auto-valor λ calculados para $x_0 = 0,03333$ e $\alpha = 15$

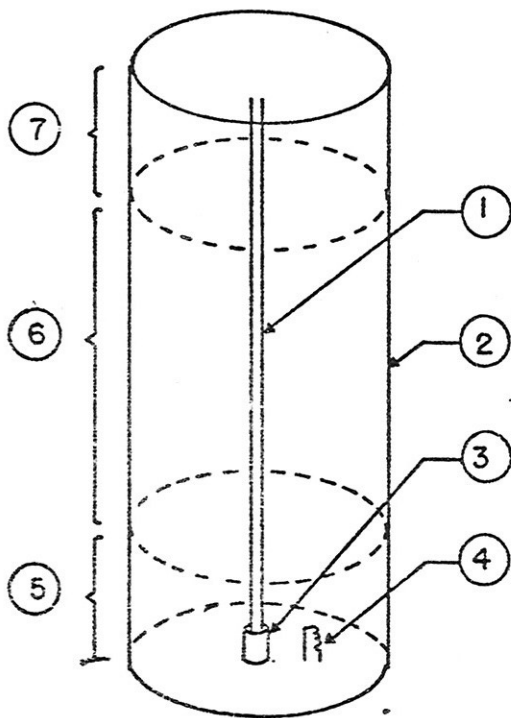


Fig.1- Esboço de um Orbitron; 1-a haste externa ou anodo; o cilindro externo ou catodo; 3-o tubo refletor; 4-o filamento; 5-a zona do filamento; 6-a zona central e 7-a zona afastada.

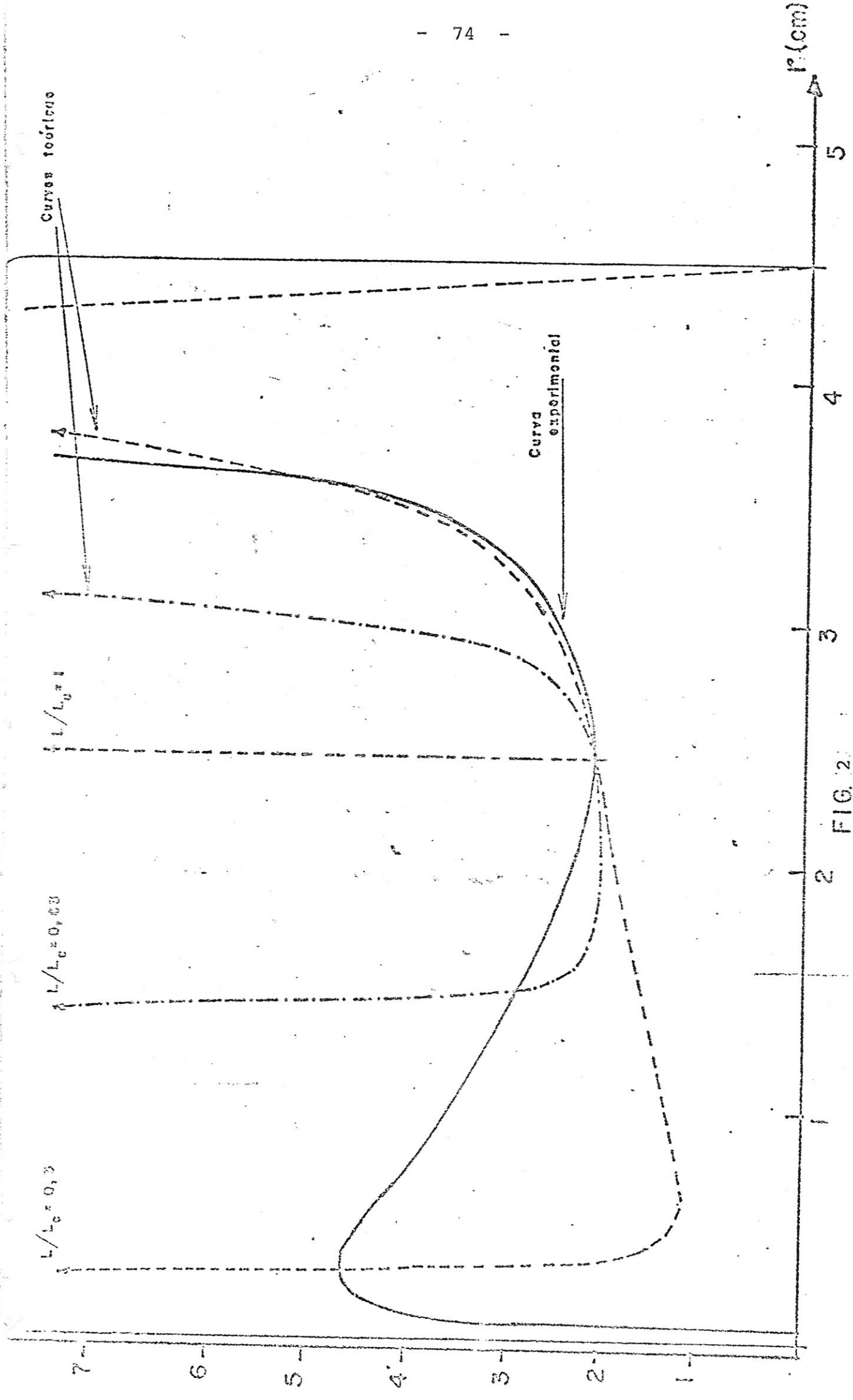


FIG. 2

CURVAS EXPERIMENTAL E TEÓRICAS DA DISTRIBUIÇÃO DE CARGA

fig. 3 — O momento do angular α_r em função do parâmetro

$\frac{p_z}{p_0}$ para $x_F=0,6$ e $x_0=0,06/4,5$.

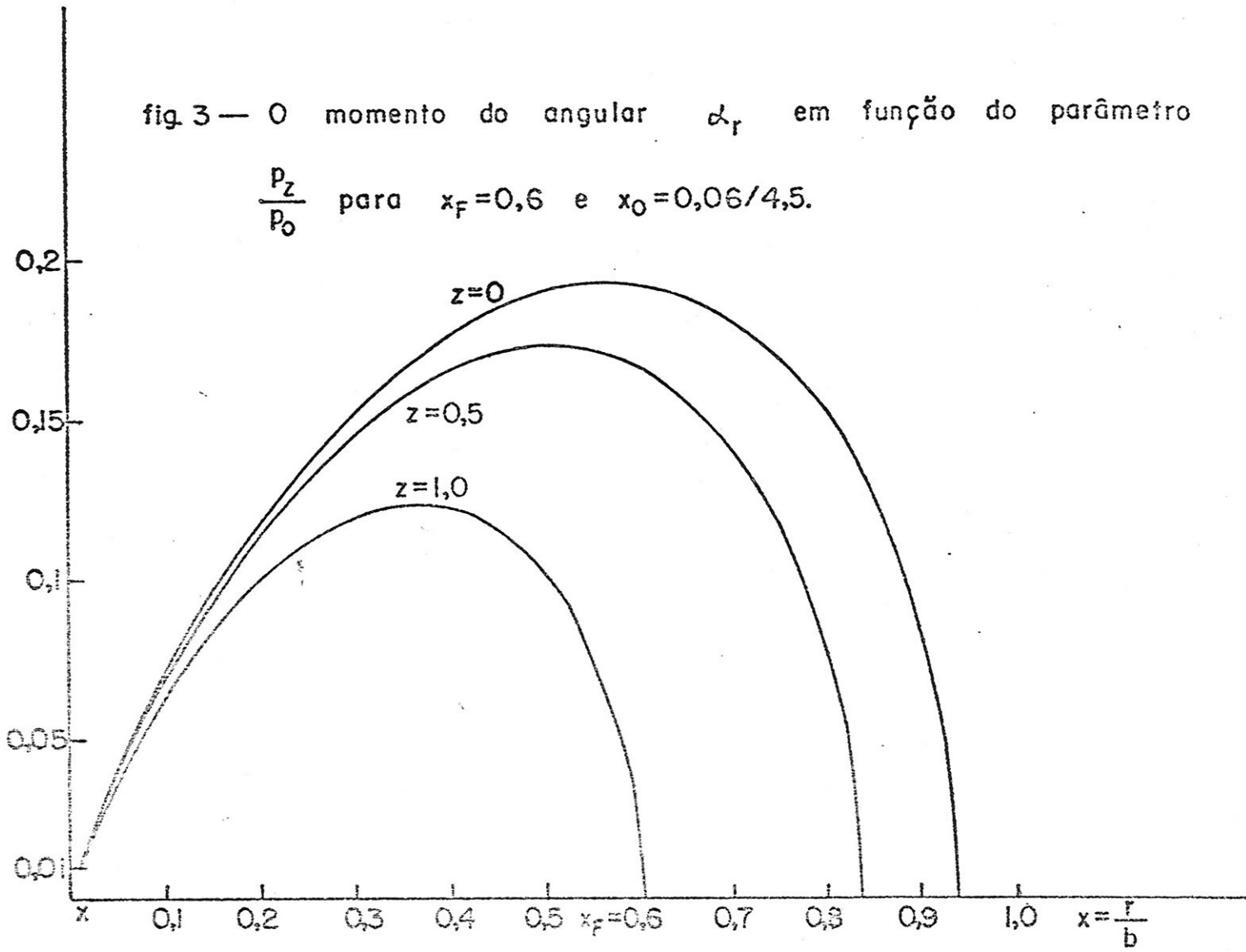


fig.4- A funcao $\eta(x)$ calculada dentro do modelo de orbitas estaveis com $x_0=0,06/4,5$, $x_F=0,3467$ e $\bar{\alpha}=\frac{\alpha_m}{2}$ para alguns valores dos parâmetros (α_1, α_2) .

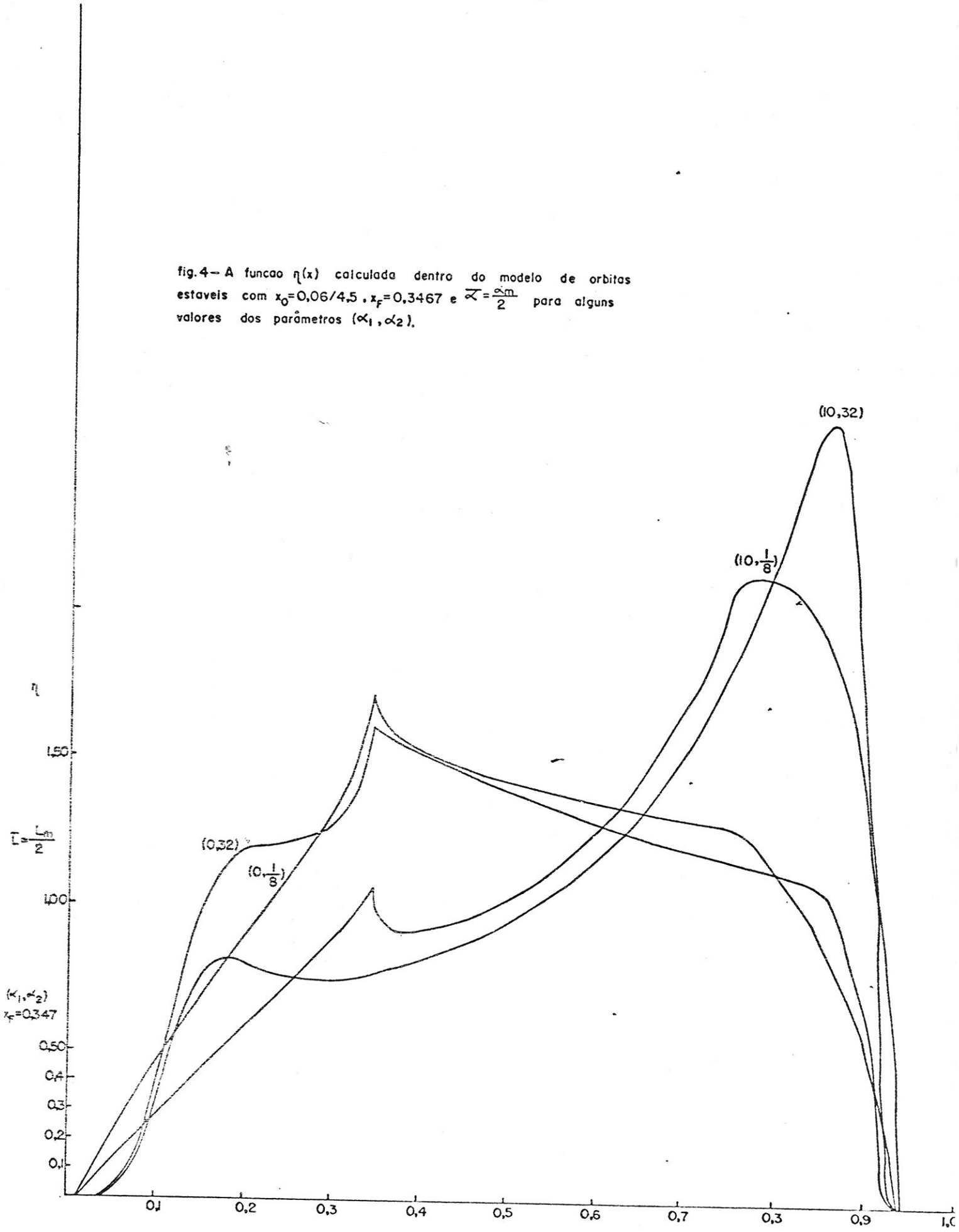


fig. 3 -- A função $n(x)/x$ proporcional a densidade de elétrons para alguns valores do parâmetro α_2 em $\alpha_1=100$, $\alpha=0,6$ e $\lambda=\frac{0,11}{x-2}$

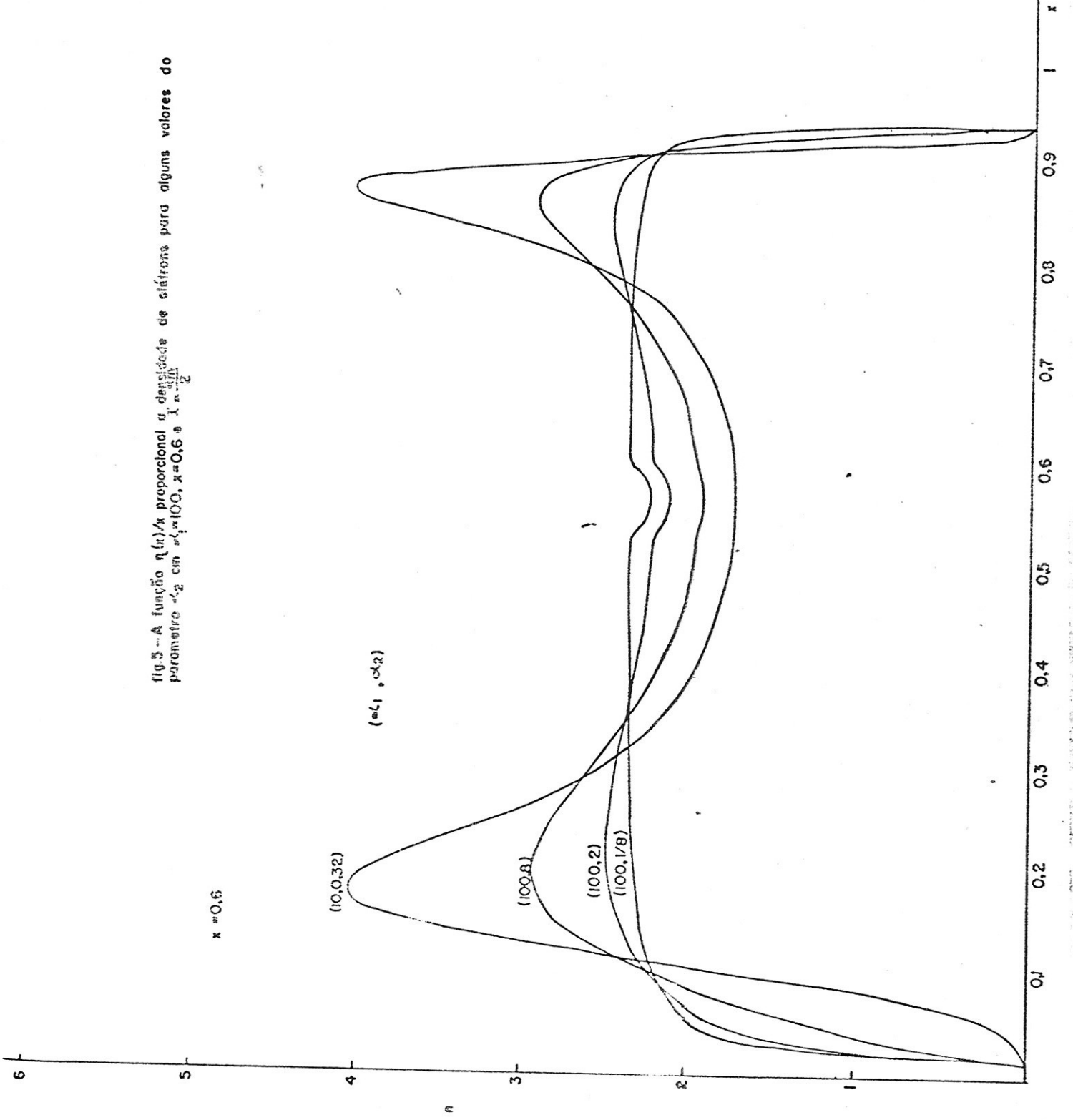
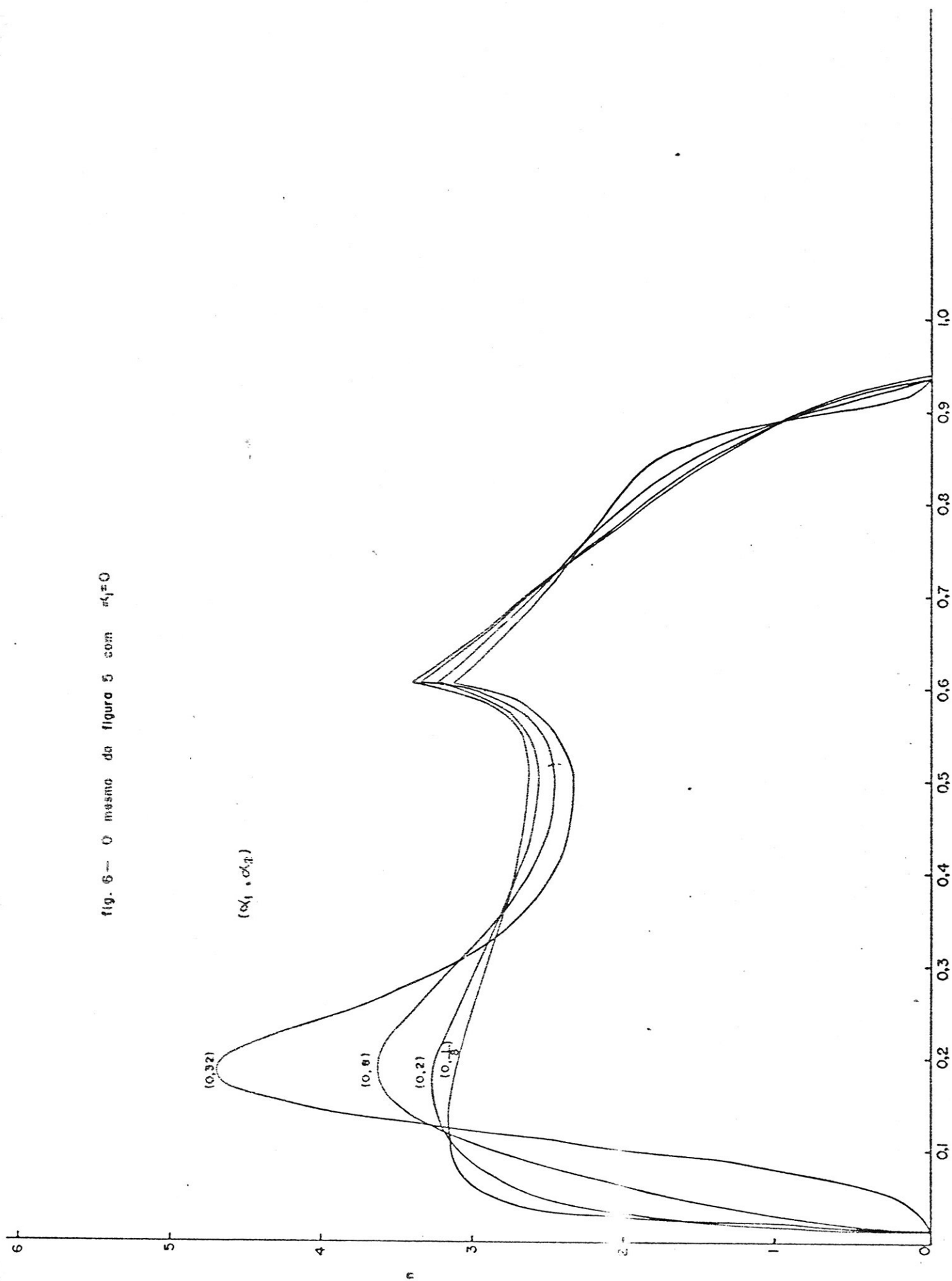


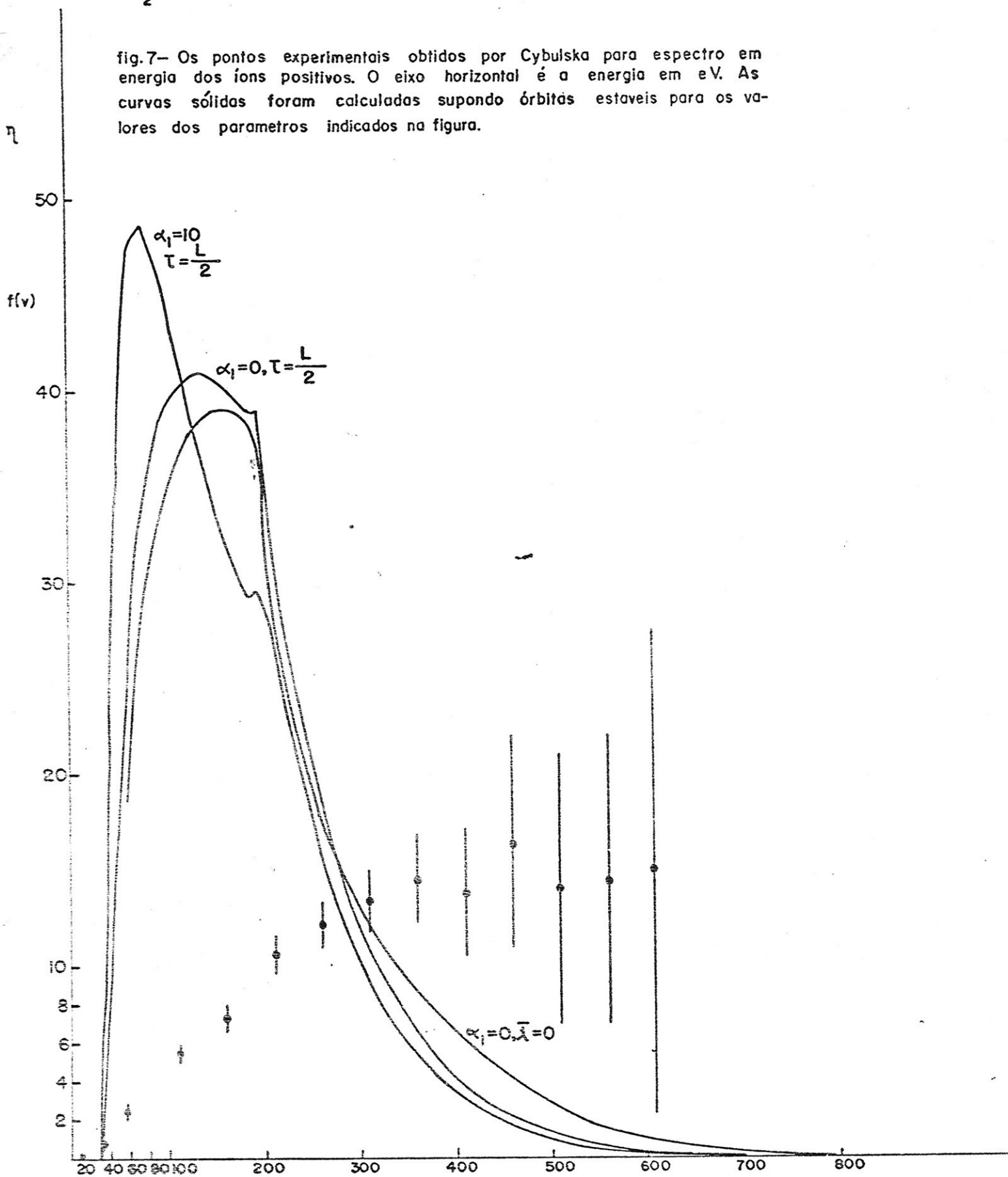
fig. 6 -- O mesmo da figura 5 com $\alpha_1 = 0$



$\alpha_2 = 2$

Cap. 2 figura 7

fig. 7- Os pontos experimentais obtidos por Cybulska para espectro em energia dos íons positivos. O eixo horizontal é a energia em eV. As curvas sólidas foram calculadas supondo órbitas estaveis para os valores dos parametros indicados na figura.



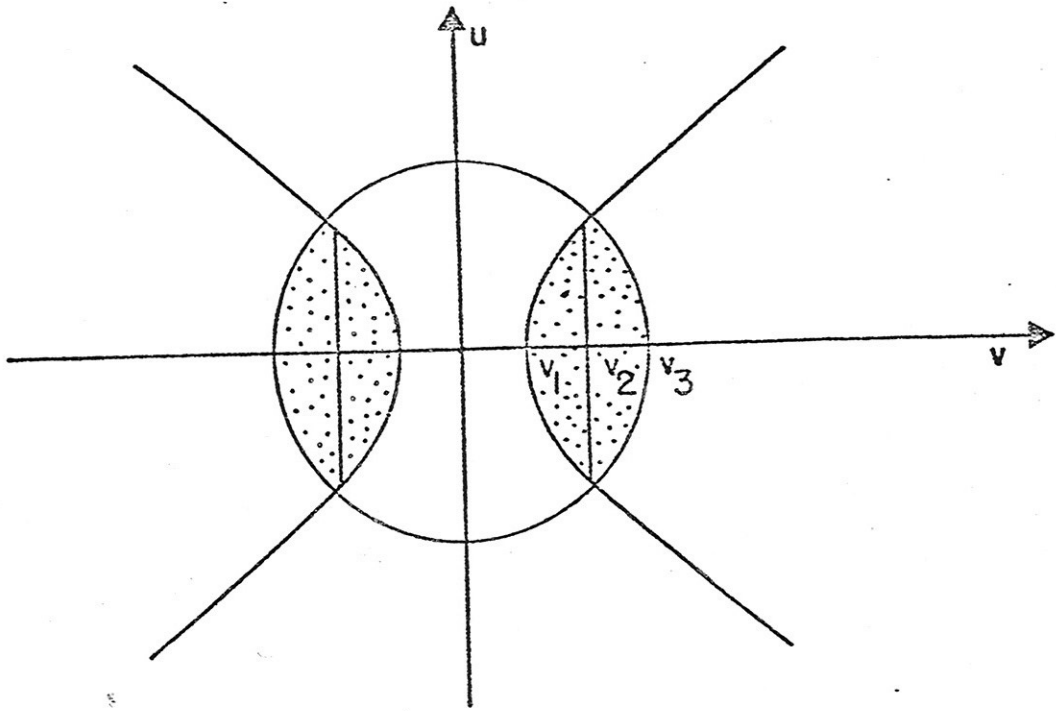


fig 8 — O domínio D no espaço indicado pelas regiões indicadas no plano v, u .

Comparação das funções $\left(\frac{x_0}{x}\right)^2$ e $\frac{\ln x}{\ln x_0}$ para $x_0 = 0,06/4,5$

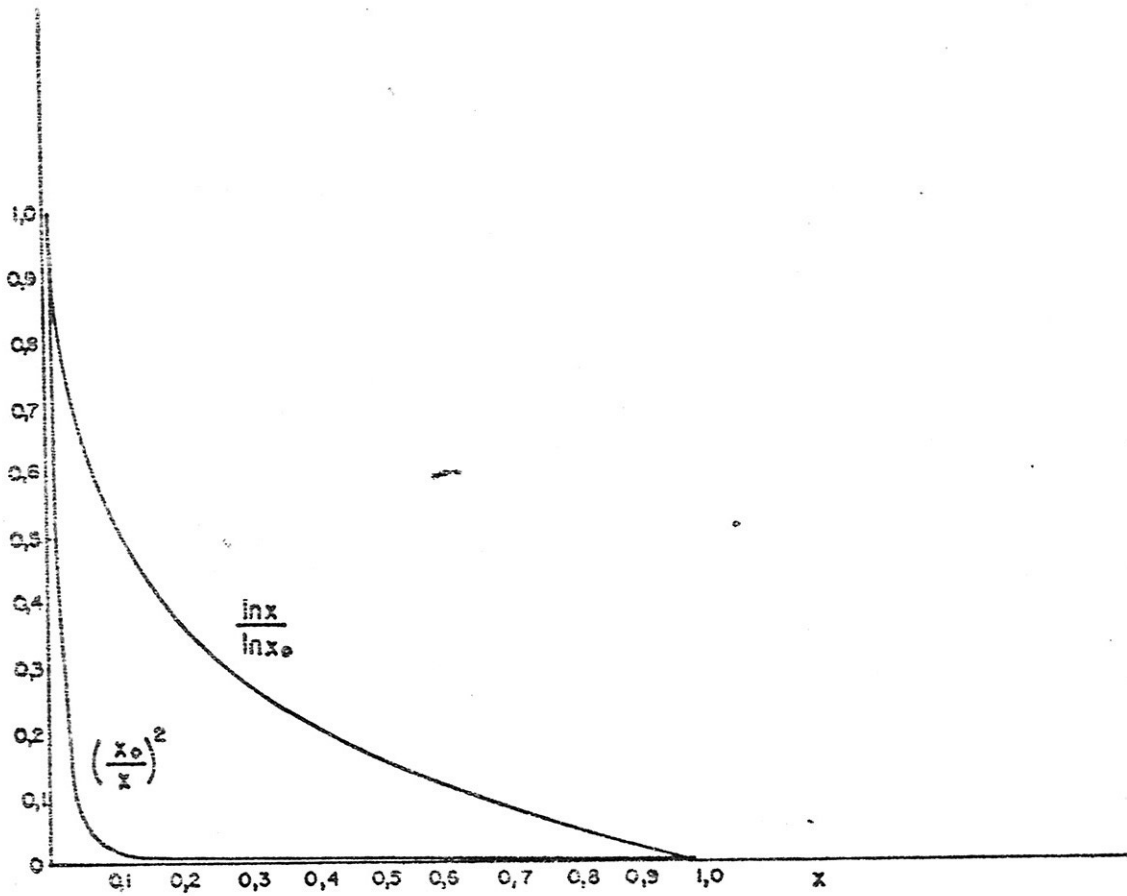


Fig. 9

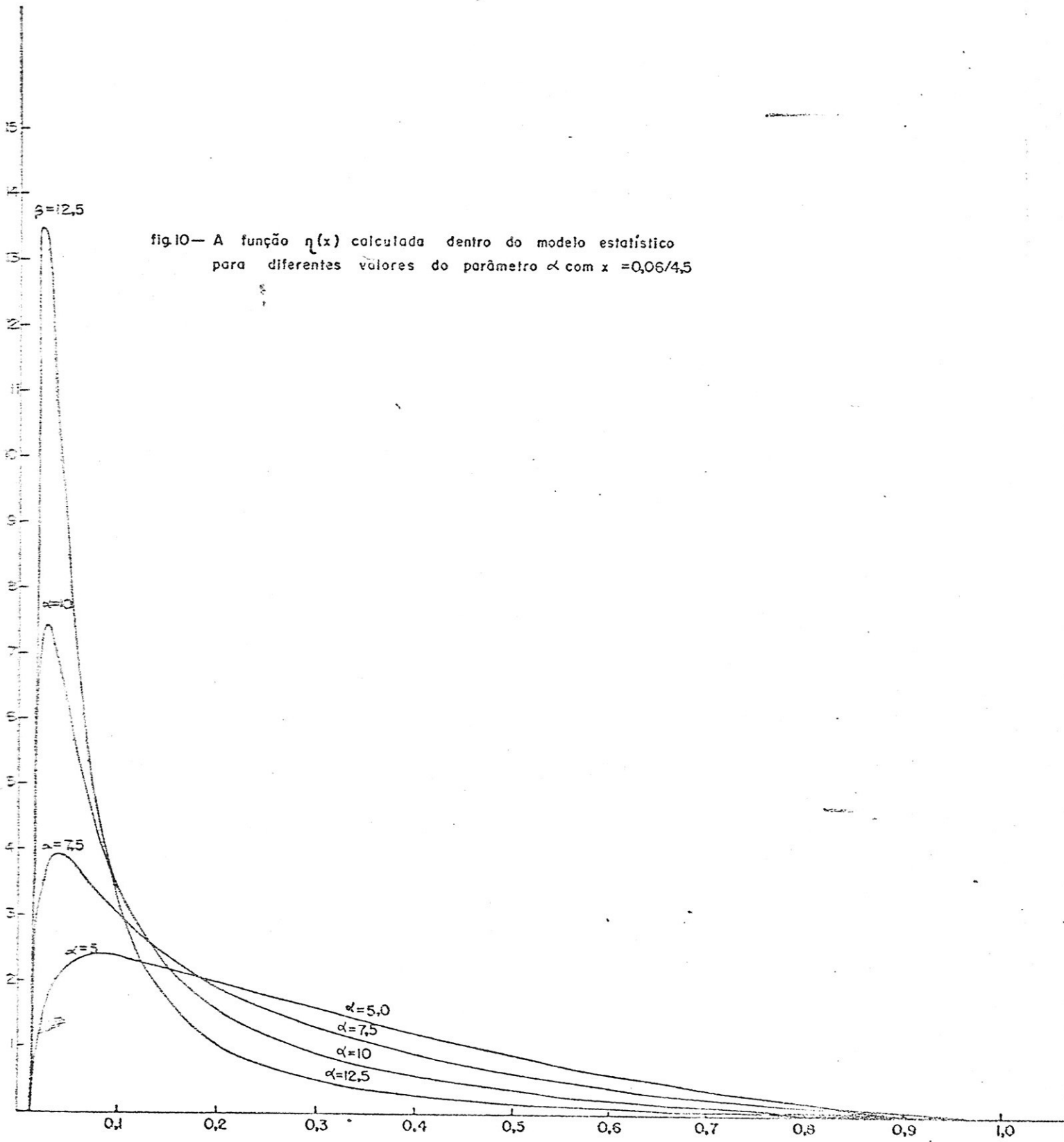


fig.10— A função $\eta(x)$ calculada dentro do modelo estatístico para diferentes valores do parâmetro α com $x = 0,06/4,5$

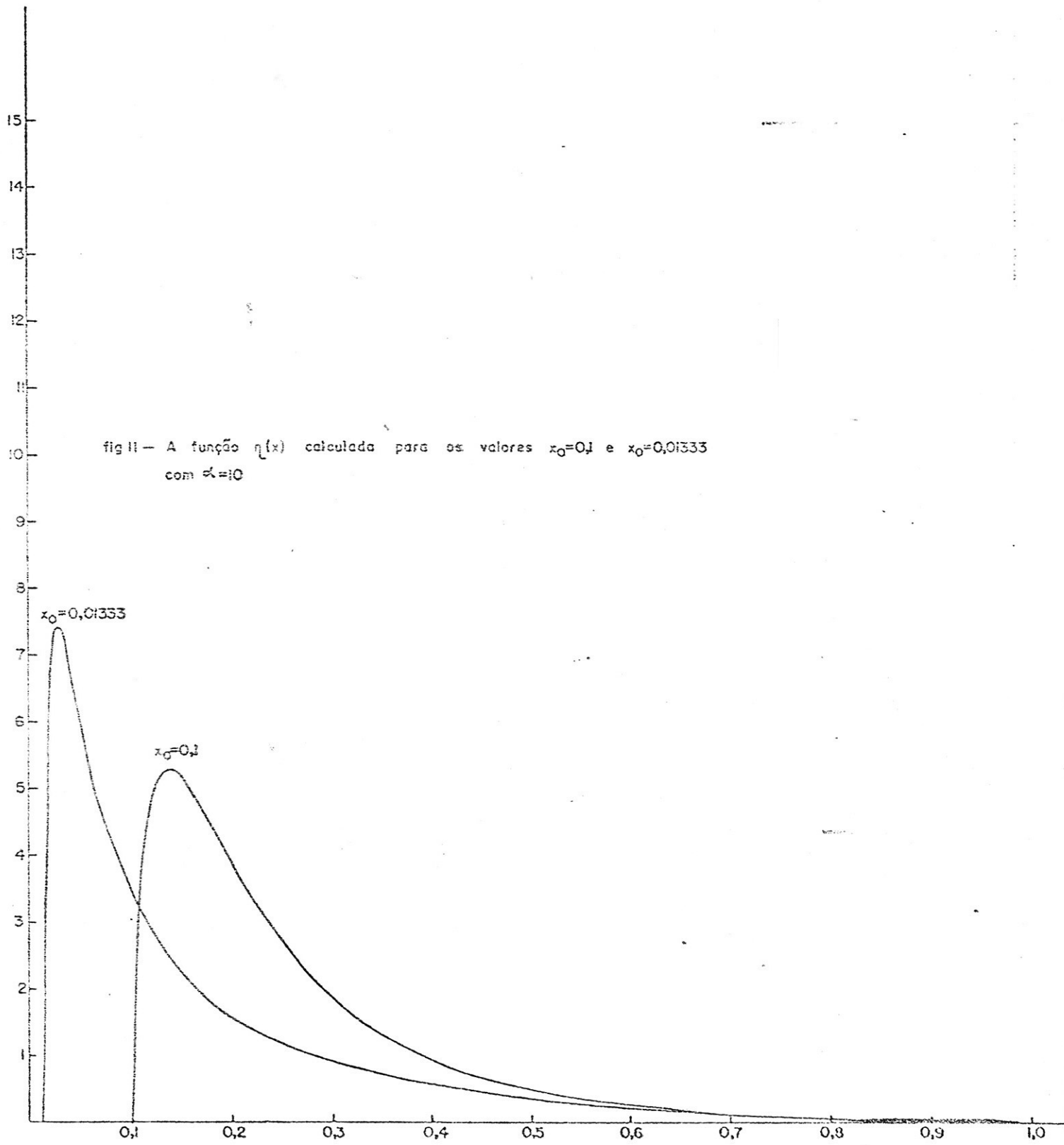


fig II - A função $\eta(x)$ calculada para os valores $x_0=0,1$ e $x_0=0,01333$ com $\alpha=10$

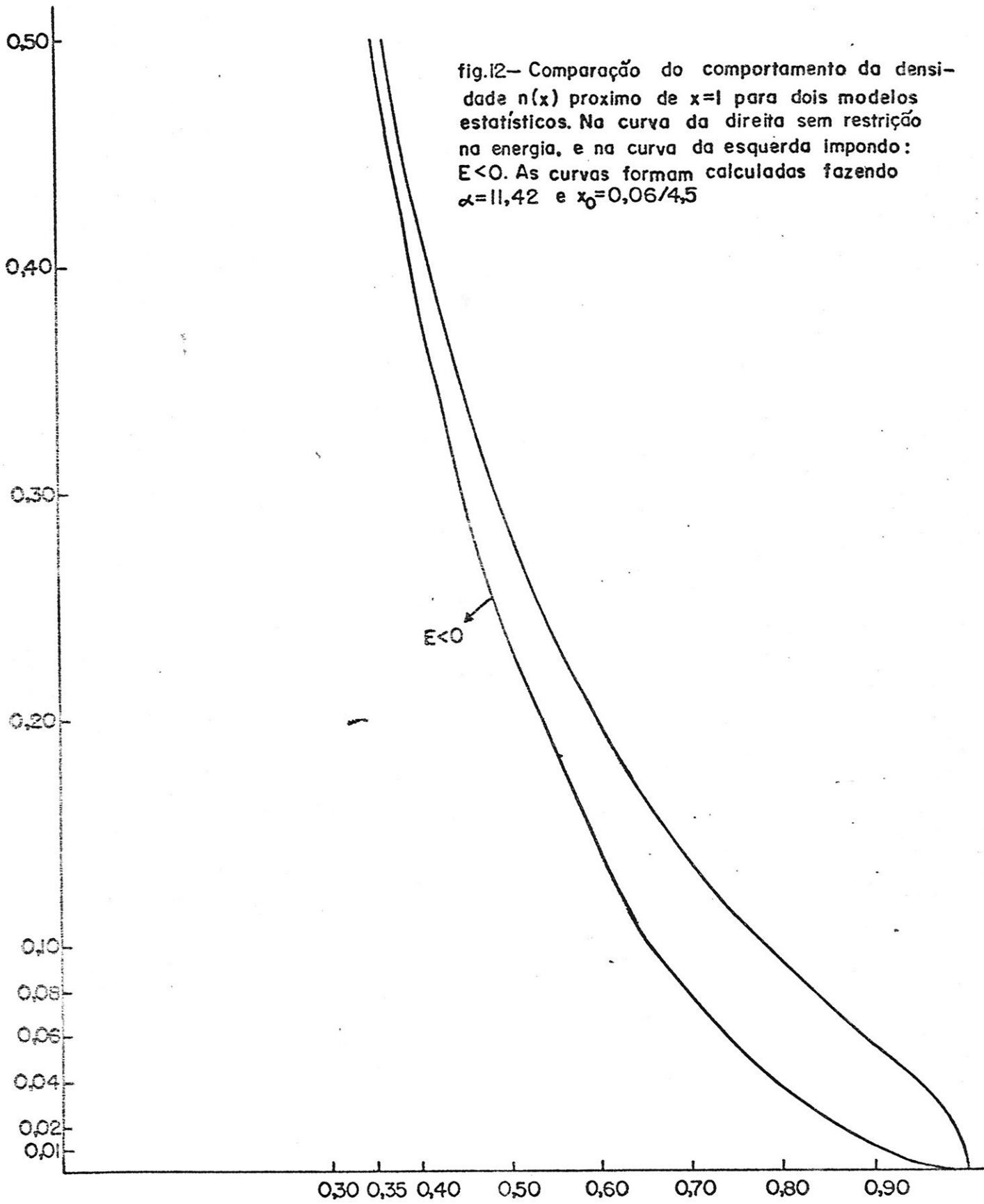


fig.12- Comparação do comportamento da densidade $n(x)$ próximo de $x=1$ para dois modelos estatísticos. Na curva da direita sem restrição na energia, e na curva da esquerda impondo: $E < 0$. As curvas foram calculadas fazendo $\alpha=11,42$ e $x_0=0,06/4,5$

fig.13— Os pontos experimentais obtidos por Cybulska para o espectro de energia dos íons positivos. O eixo horizontal é energia em elétron-volt. As linhas sólidas correspondem ao espectro teórico calculado dentro do modelo estatístico para os valores do parâmetro α , indicados

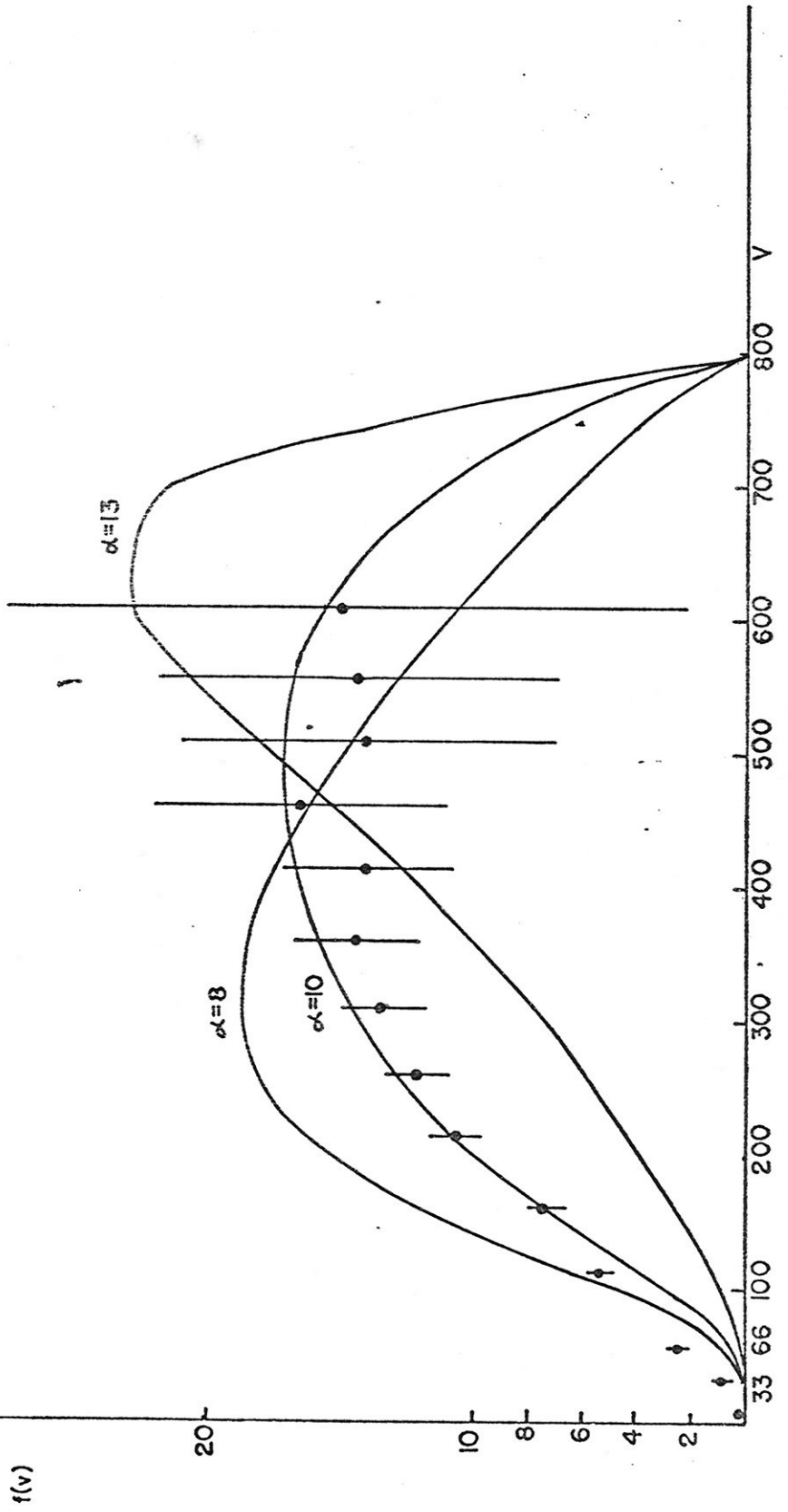
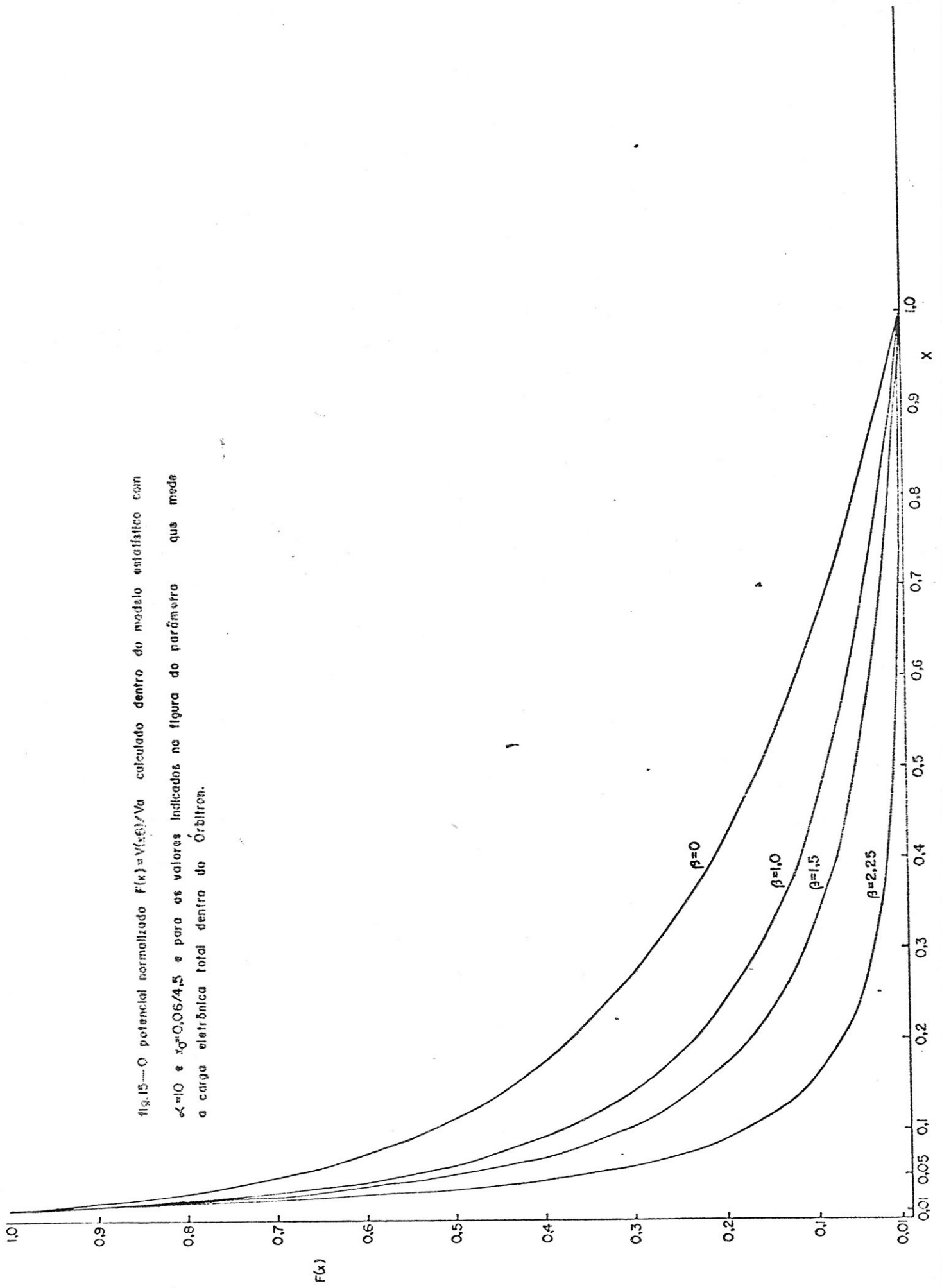


Fig. 15—O potencial normalizado $F(x) = V(x)/V_0$ calculado dentro do modelo estatístico com $\alpha = 10$ e $x_0 = 0,05/4,5$ e para os valores indicados no figura do parâmetro que muda a carga eletrônica total dentro da órbita.



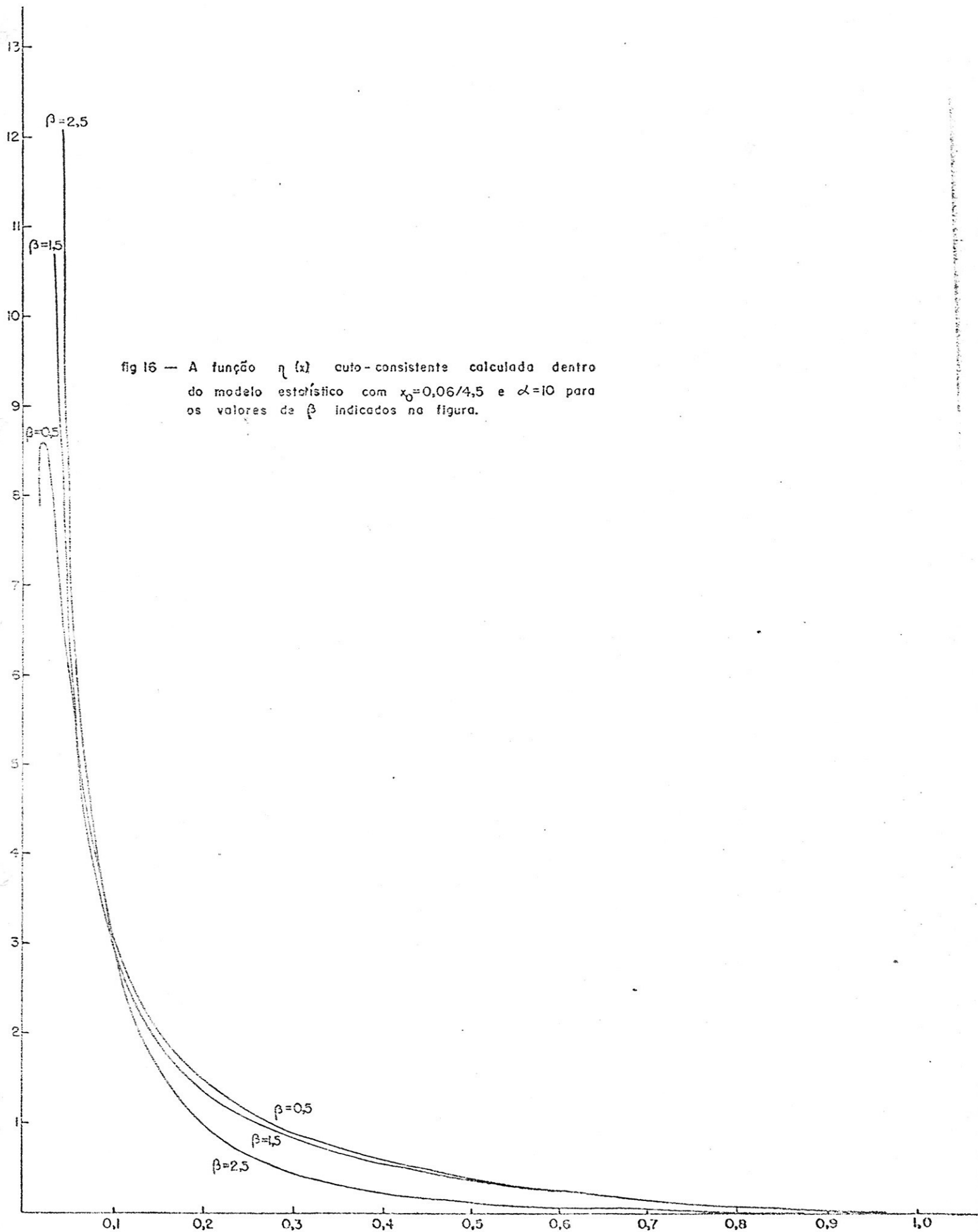


fig 16 — A função $\eta(x)$ auto-consistente calculada dentro do modelo estatístico com $x_0=0,06/4,5$ e $\alpha=10$ para os valores de β indicados na figura.

fig. 17 — O parâmetro β' em função do parâmetro β para $\alpha=10$ e $x_0=0,06/4,5$

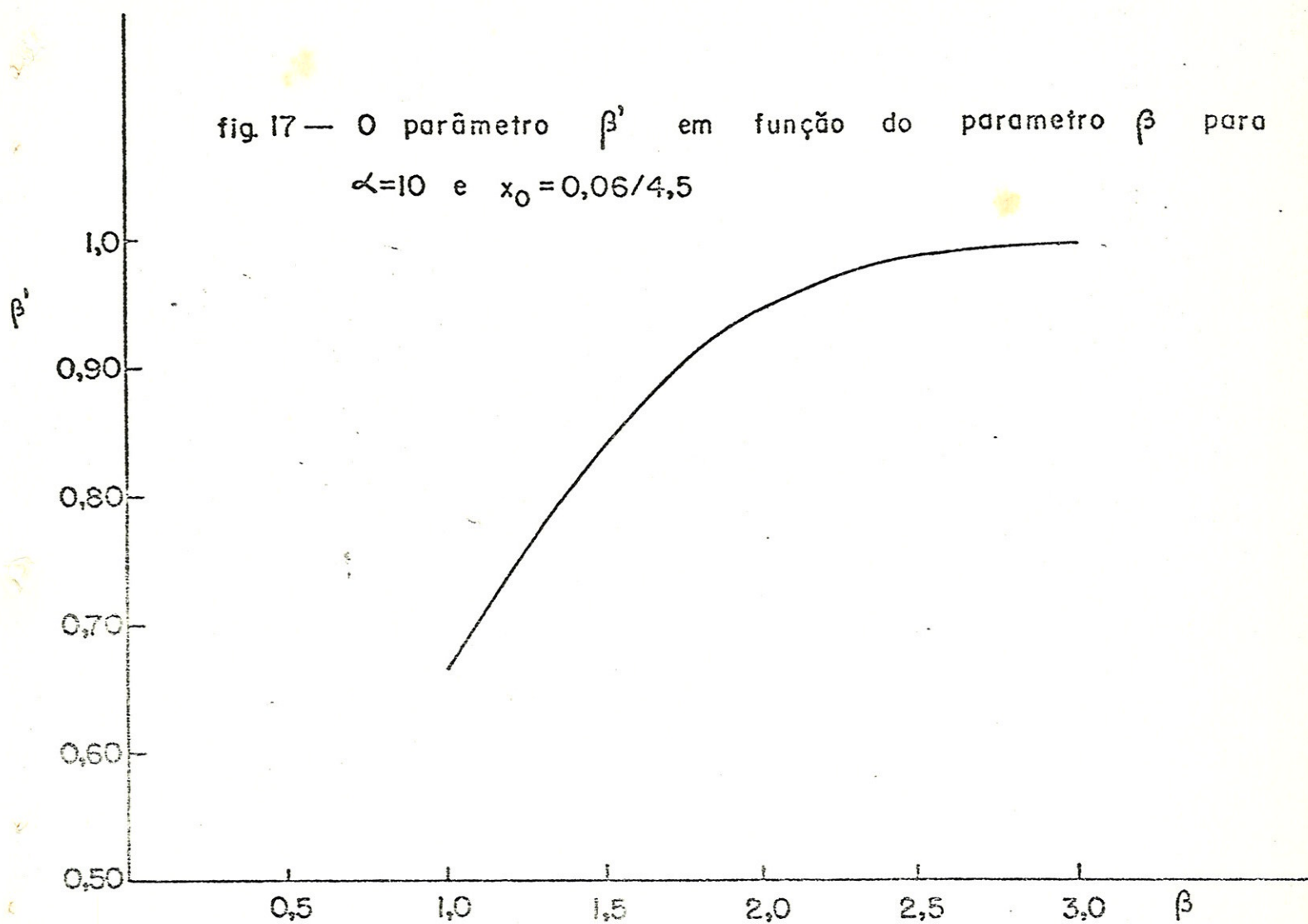
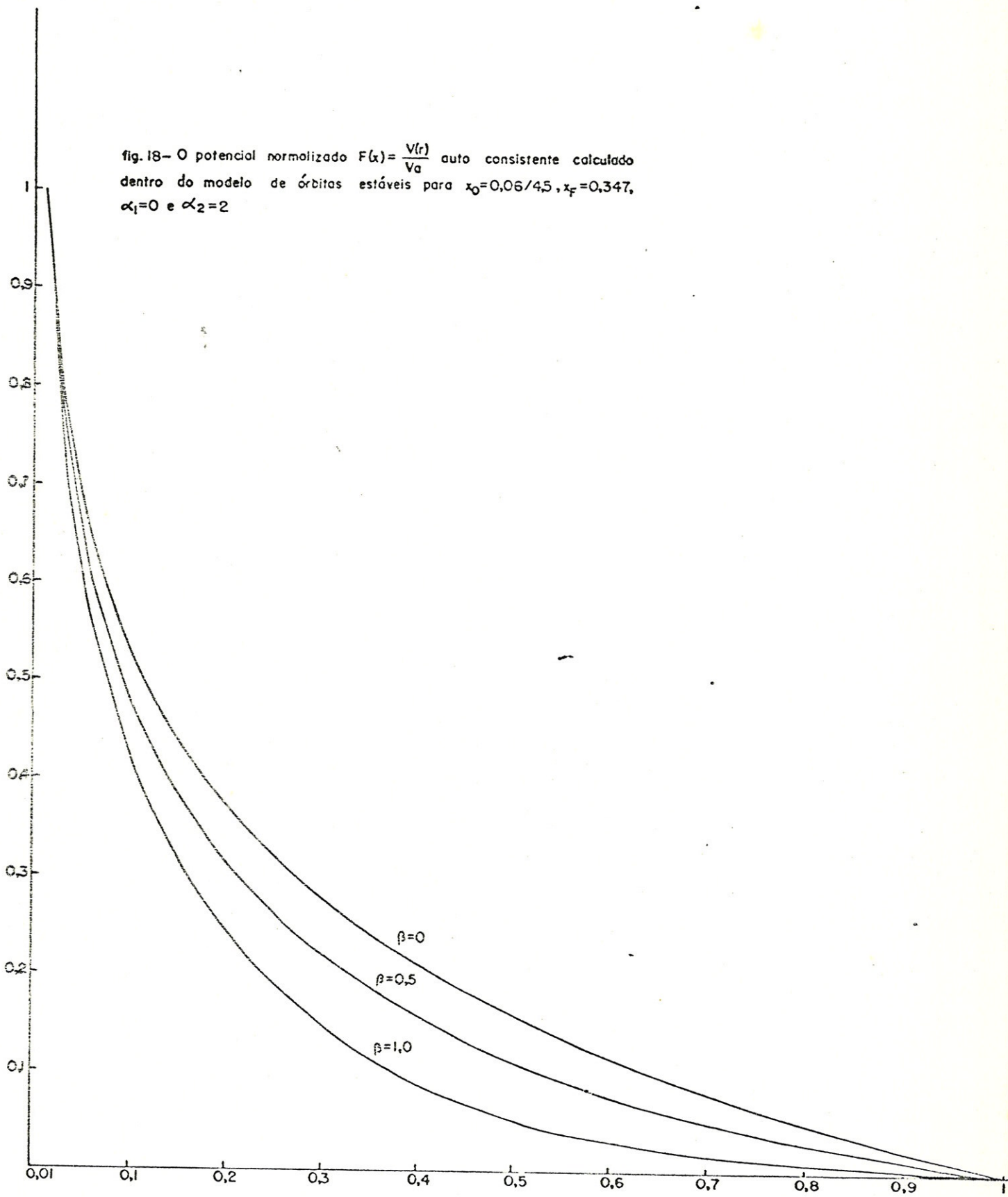
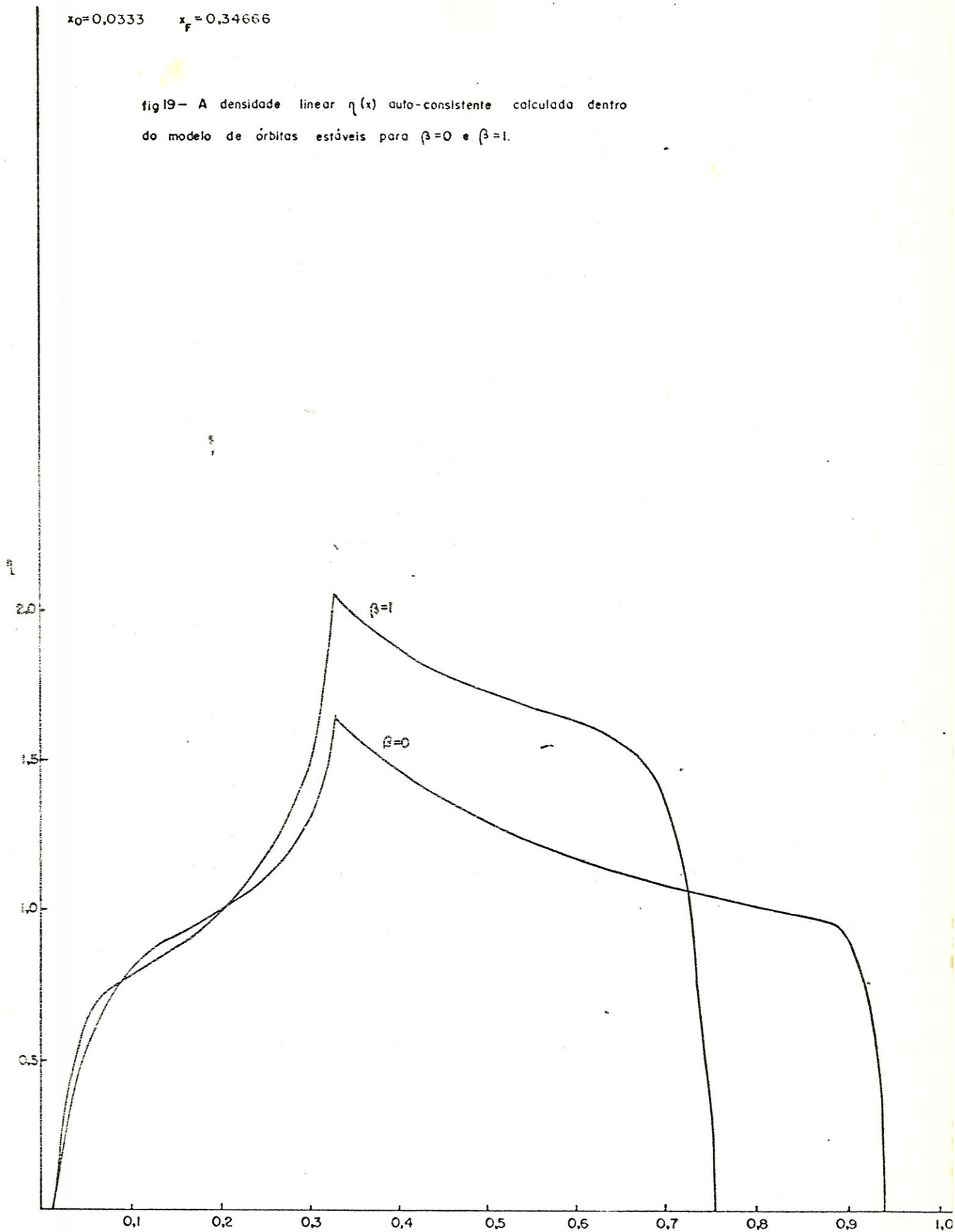


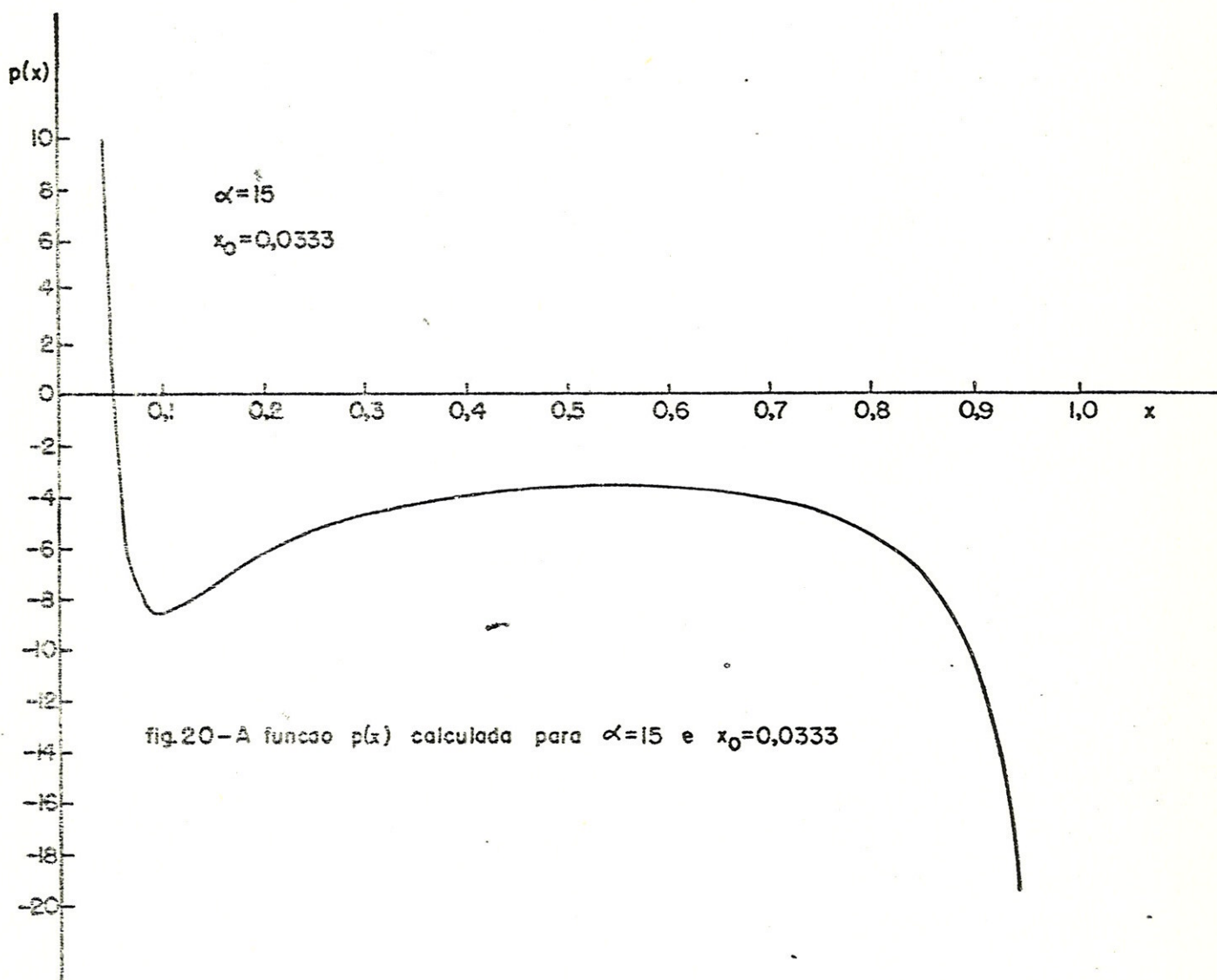
fig. 18- O potencial normalizado $F(x) = \frac{V(r)}{V_a}$ auto consistente calculado dentro do modelo de órbitas estáveis para $x_0=0,06/4,5$, $x_F=0,347$, $\alpha_1=0$ e $\alpha_2=2$



$x_0=0,0333$ $x_f=0,34666$

fig 19- A densidade linear $\eta(x)$ auto-consistente calculada dentro do modelo de órbitas estáveis para $\beta=0$ e $\beta=1$.





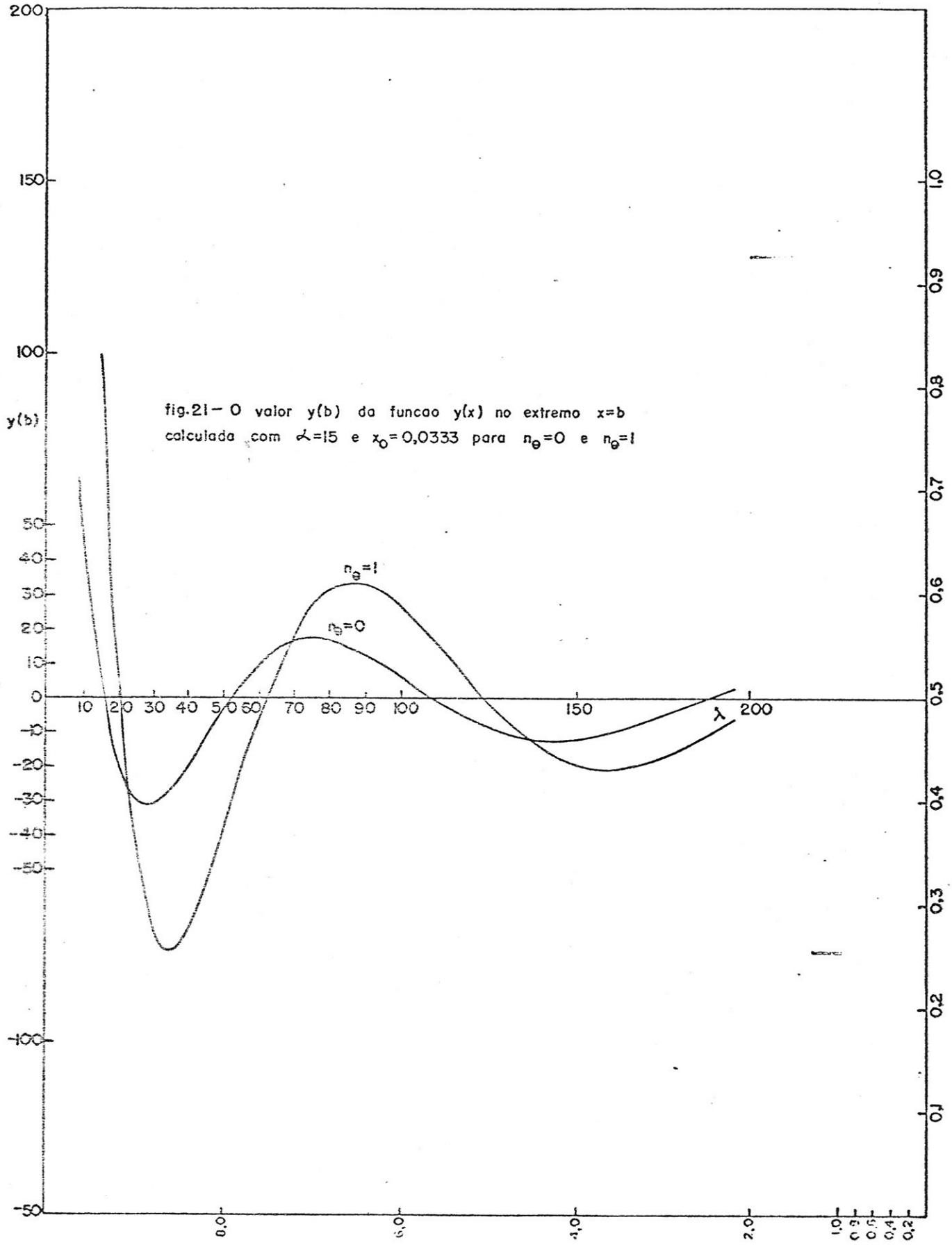


fig.21- O valor $y(b)$ da funcao $y(x)$ no extremo $x=b$ calculada com $\alpha=15$ e $x_0=0,0333$ para $n_\theta=0$ e $n_\theta=1$

fig.22 - Grafias de $u(x)$ para os modos $n_r=0$ e $n_r=1$ com $n_\theta=0$

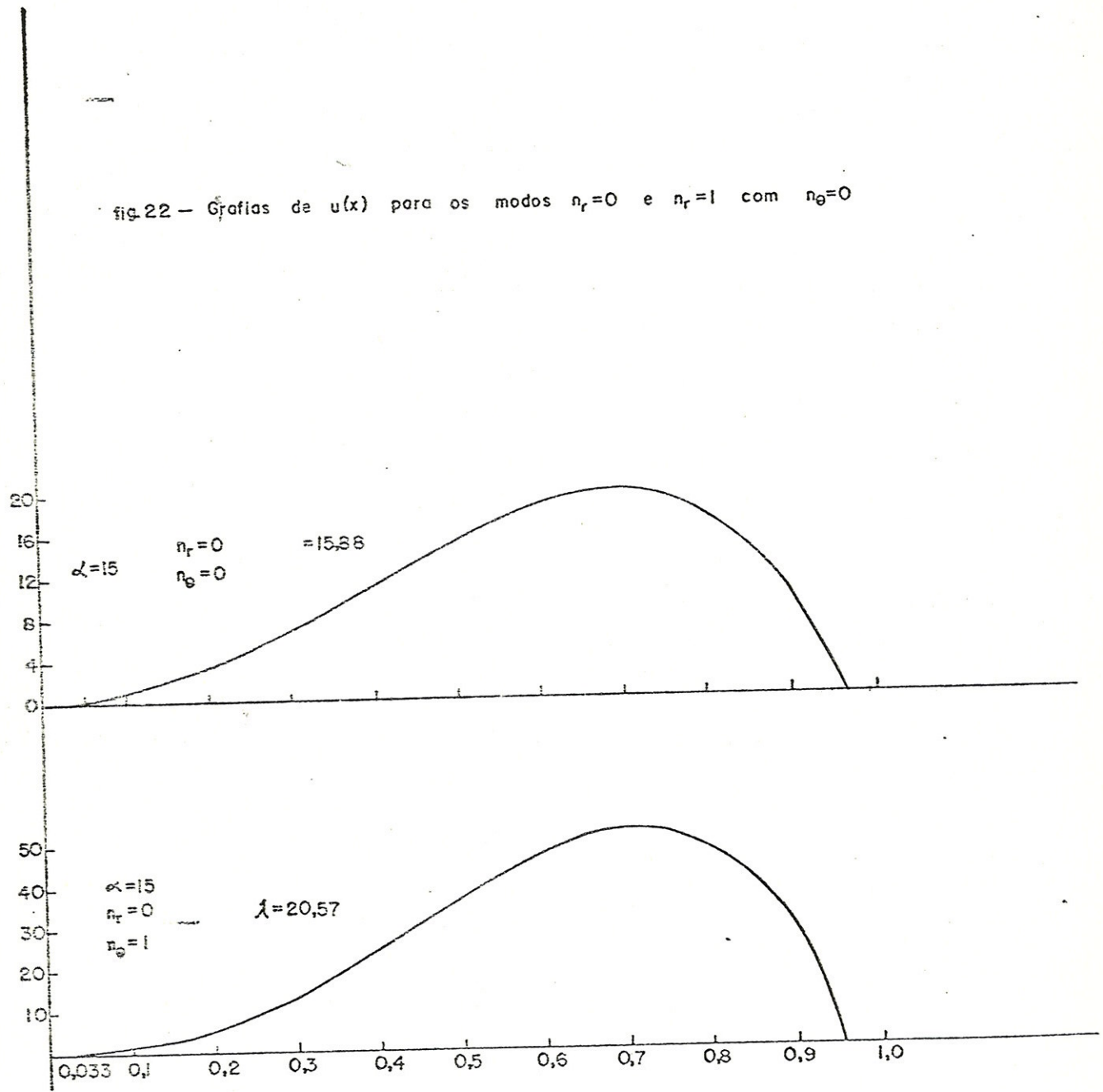
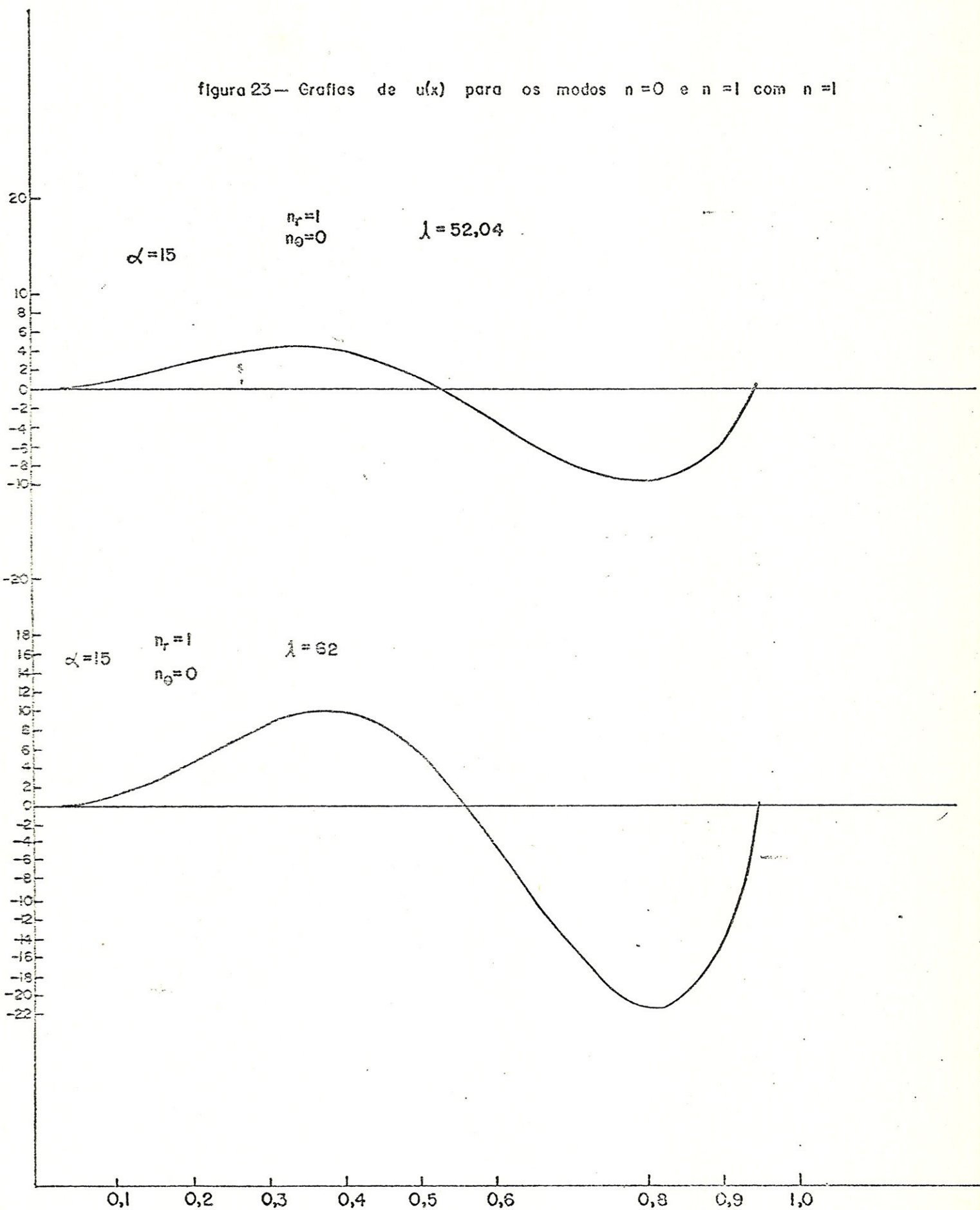


figura 23— Grafias de $u(x)$ para os modos $n=0$ e $n=1$ com $n=1$



R E F E R Ê N C I A S

- (1) R.G.Herb, T.Pauly and K.J.Fisher, Bull. Am. Phys.Soc. 8, 336 (1963).
- (2) W.B.Monad, T.Pauly and R.G.Herb, Rev. Sci. Instr. 35, 661 (1964).
- (3) R.A.Douglas, J.Zabritshi and R.G.Herb, Rev. Sci. Instr. 36, 1 (1965).
- (4) E.W.Cybulska - Tese de Mestrado.
- (5) E.W.Cybulska and R.A.Douglas, preprint, The Radial Charge Distribution in an Orbitron, Dep. de Física Nuclear, U.S.P., São Paulo, SP.
- (6) R.H.Houverman, J.Appl. Phys. 34, 3505 (1963).
- (7) F.Peaks, E.C. Muly and F.J.Brock, Extension of gauge calibration study in extreme high vacuum, a Nasa publication NAS-W-1137.
- (8) P.R.Deichelbohrer, J.Vac. Sci. Technol., 10, 875 (1973).
- (9) N.T.Oliveira, Tese, Departamento de Física, Univ. de Brasília, (1971).
- (10) M.Porto Pato, Tese, Departamento de Física, Univ. de Brasília, (1971).
- (11) S.J.Troise, Tese, Departamento de Física, U.S.P., São Paulo, SP, (1970).
- (12) R.F.Rogério, Tese, Departamento de Física, Univ. de Brasília, (1971).

- (13) Ionization by Electron Impact - Journal of Chemical Phys.
43, (1965).
- (14) M.Porto Pato and L.C.Gomes, Rev. Bras. de Física, Vol. 6 ,
nº 2 (1976).
- (15) R.Balescu - Equilibrium and Non-equilibrium Statistical
Mechanics.
- (16) L.Landau et E.Lifchitz - Physique Statistique.