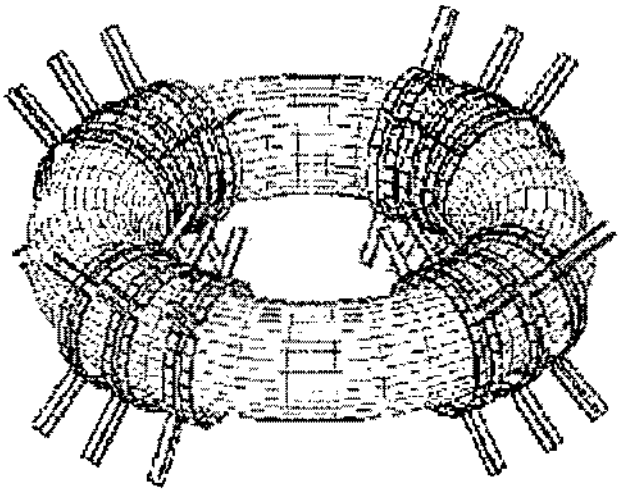
ANÁLISE NUMÉRICA DO AQUECIMENTO DE PLASMA, GERAÇÃO DE CORRENTE E FLUXO POR ONDAS DE ALFVÉN NO TOKAMAK TCABR

Gesil Sampaio Amarante Segundo



Banca Examinadora:

Prof. Dr. Artour Elfimov - Orientador (I.F.-U.S.P.)

Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas (I.F.-U.S.P.)

Prof. Dr. Josif Frenkel (I.F.-U.S.P.)

Prof. Dr.Paulo Hiroshi Sakanaka (I.F.-UniCamp)

Prof^{a}. Dr^{a}. Maria Virgínia Alves (I.N.P.E.)

Prof. Presidente da Comissão de Pós-Graduação

Tese de doutoramento defendida no

Instituto de Física da Universidade de São Paulo

São Paulo, 23 de março de 1999.

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Amarante Segundo, Gesil Sampaio

Análise Numérica do Aquecimento de Plasma, Geração de Corrente e Fluxo por Ondas de Alfvén no Tokamak TCABR. São Paulo, 2000.

Tese (Doutoramento) - Universidade de São Paulo. Instituto de Física - Departamento de Física Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Artour Elfimov
Área de Concentração: Física de Plasmas

Unitermos: 1. Plasmas; 2. Ondas de Alfvén;
3. Fusão Termonuclear Controlada;
4. Geração de Correntes e Fluxos em Plasmas;
5. Barreiras de Transporte.

USP/IF/SBI-006/2000

A Minha mãe, Dilma Maria da Conceição Ferreira

e a Minha filha, Beatriz Goulart Amarante

Agradecimentos

Quero expressar meus mais sinceros agradecimentos às pessoas que me acompanharam de uma forma ou de outra na jornada destes últimos anos:

Aos meus orientadores, os Professores Artour Elfimov e Ricardo Galvão, pela sempre presente preocupação com minha formação, presteza, amizade e, principalmente pela paciência comigo.

Aos Professores David Ross e Swadesh Mahajan (Universidade do Texas em Austin) pela grande ajuda com o código toroidal e discussões, e assim como todos no Fusion Research Center, a acolhida amistosa nos dois meses em que lá estive. Especialmente o amigo Romik Chatterjee.

Aos colegas do Laboratório de Física de Plasmas da USP, Ablício Reis, Aluísio Fagundes, Álvaro Vannucci, André Alves Ferreira, André Tuzsel, Anselmo Rodrigues, Ângela Pizzo, Edson Ozono, Edson (Banzai) Sanada, Elton da Silva, Erich Olschevski, Ernesto Lerche, Fábio Palladino, Francisco Tadeu Degasperi, José Hélder Severo, Iberê Caldas, Ibrahim El Chamaa Neto, Ing Tan, Ivan dos Santos, Ivan Nascimento, Ivan Jancov, Juan Elisondo, Kai Ulmann, Kênya de Oliveira, Leonid Ruchko, Maria Vittória Heller, Mauro Sérgio de Araújo, Murilo Baptista, Mutsuko Kucinski, Nélio Nunes, Renata Favalli, Roberto Bianchini, Ruy Pepe da Silva, Sílvio Luiz de Souza, Valdemar Belintani Jr., Victor Mammana, Vladimir Tsypin, Wanderley Pires de Sá, Yuri Kusnetsov pelo respeito, companheirismo, ajuda e amizade.

Às secretárias, Eleonora Lo Duca, Maria Mavíllia Vara, pela valorosa colaboração.

À FAPESP pelo indispensável auxílio financeiro.

Aos amigos do peito Adriana Marques, Agostinho Serrano Neto, Cristina Collares Niro, Elisângela Manfra, José Antonio Sevidanes da Matta, Nestor Cortez Saavedra, Roberto Niro e Zeide Cavalcanti

A uma amiga muito especial, Elisabete Gentil.

Aos meus irmãos, Márcia Goretti Amarante e Marcus Vinícius de Jesus Amarante por tudo o que irmãos podem ser de bom. Junto a eles, gostaria de incluir a Senhora Maria Elieci de Jesus Santos pela ajuda, torcida e orações.

A minha mãe, Dilma Maria da Conceição, sempre um modelo para mim.

A Luciane Aparecida Goulart, por ter me dado o maior presente de todos, a minha filha, e por dela cuidar tão bem.

À minha filha, Beatriz Goulart Amarante porque desde 08/12/97, dia em que nasceu, me fez mais completo, e feliz.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo a determinação dos melhores regimes e parâmetros para as experiências de aquecimento e geração de corrente e fluxo no tokamak TCABR. Grande parte do trabalho dispensado no sentido da escolha dos melhores modos e freqüências para operação das antenas do TCABR está presente nesta tese.

Em suscinto resumo, no segundo capítulo é apresentada a moderna teoria de ondas de Alfvén. No início, é apresentada uma introdução básica até a derivação do tensor dielétrico com termos cinéticos em primeira ordem. A relação de dispersão para plasmas homogêneos é demonstrada, a fim de servir de introdução à seção seguinte que mostra o efeito de conversão de modos. Cálculos com geometria cilíndrica do aquecimento e o efeito de impurezas minoritárias no plasma seguem com a demonstração da presença dos modos globais de Alfvén.

No terceiro capítulo é introduzido o código bidimensional. Este código foi trazido da Universidade do Texas e adaptado aos parâmetros do TCBR. As principais modificações provocadas pelos efeitos da configuração toroidal são mostradas e analisadas.

No quarto capitulo, a teoria e os resultados principais dos cálculos das forças ponderomotoras são apresentadas. Também é estudado o efeito da rotação poloidal provocada pelas ondas de Alfvén no transporte neoclássico.

O quinto e último capítulo apresenta uma síntese dos resultados obtidos ao longo desta dissertação.

Abstract

This work aims the determination of the best regimes and parameters for the heating, current drive and flow generation experiements in the tokamak TCABR. The majority of the work done to choose the best modes and frequencies for operation of the antennas of TCABR is present in this thesis.

In the second chapter the modern theory of Alfvén waves is presented. In the beginning, a basic introduction is presented until the derivation of the dielectric tensor with kinetic terms in first order. The dispersion relation for homogeneous plasmas is demonstrated, in order to introduce the following section which shows the mode conversion effect. Calculations with cylindrical geometry of the heating and the effect of minority ions in the plasma proceed with the demonstration of the presence of the Global Alfvén Waves (GAW).

In the third chapter the twodimensional code is introduced. This code was brought from the University of Texas at Austin and adapted for calculations with the parameters of TCBR. The main effects of the toroidal model are analyzed.

In the fourth chapter, the theory and the principal results of the calculations of the ponderomotive forces are presented. The effect of the poloidal rotation induced by the Alfvén waves on neoclassical transport is also studied.

The fifth and last chapter presents a synthesis of the results obtained along this dissertation.

Conteúdo

Os tokamaks são sistemas toroidais de confinamento magnético que utilizam-se de uma corrente de equilíbrio, criada na direção toroidal, como sistema principal de aquecimento, devido ao efeito Joule. O problema que aparece é que a resistividade do plasma é proporcional a $T^{-3/2}$ e o aquecimento ôhmico satura (em pouco menos que 2KeV) antes de se obter a temperatura mínima requerida para a fusão (por volta de 10KeV). Por isso são empregados sistemas auxiliares de aquecimento, mostrados em resumo na próxima seção. Na Fig. 1, é mostrado um desenho do tokamak JET (Joint European Torus), o maior em funcionamento hoje.

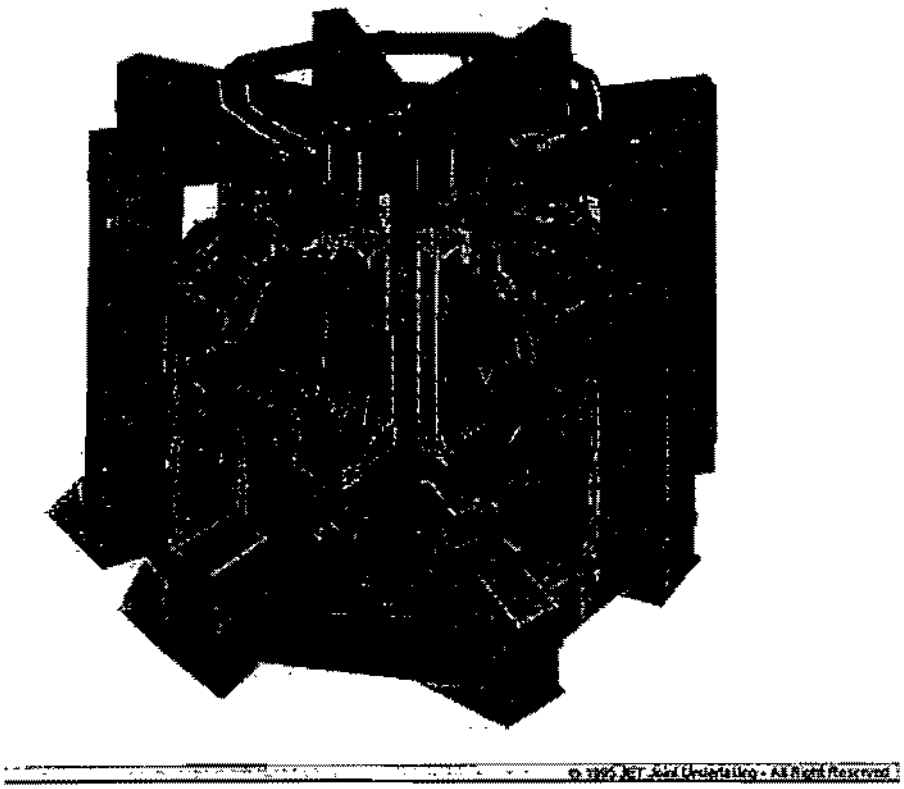


Fig. 1.1 - Desenho esquemático do tokamak JET, em funcionamento na Inglaterra.

Pode-se perceber no desenho acima a câmara toroidal, as espiras responsáveis pelo campo magnético toroidal e transformadores. Todo o sistema funciona como um enorme transformador, que induz uma corrente toroidal j_t, que por sua vez cria um campo magnético B_θ, criando um efeito de compressão do plasma (efeito pinch), responsável pelo confinamento do plasma. O campo magnético toroidal intenso provocado pelas espi-

ras em torno da câmara toroidal, associado com o campo poloidal (gerado pela corrente toroidal), cria uma configuração helicoidal de linhas de força ao longo da câmara. Como B_θ não é constante na direção radial, esta disposição helicoidal não é uniforme, formando superfícies magnéticas sucessivas, cada uma com linhas de força com helicidade diferente, e encerrando as superfícies mais internas.

Abaixo, num esquema simples da geometria da câmara toroidal de um tokamak como o JET (com seção toroidal em forma de D), pode-se vizualizar as diferentes superfícies magnéticas (definidas pela coordenada ψ, função de r e θ), também definidas como superfícies onde a pressão cinética do plasma é constante (ver Ref. [2], Capítulo 12).

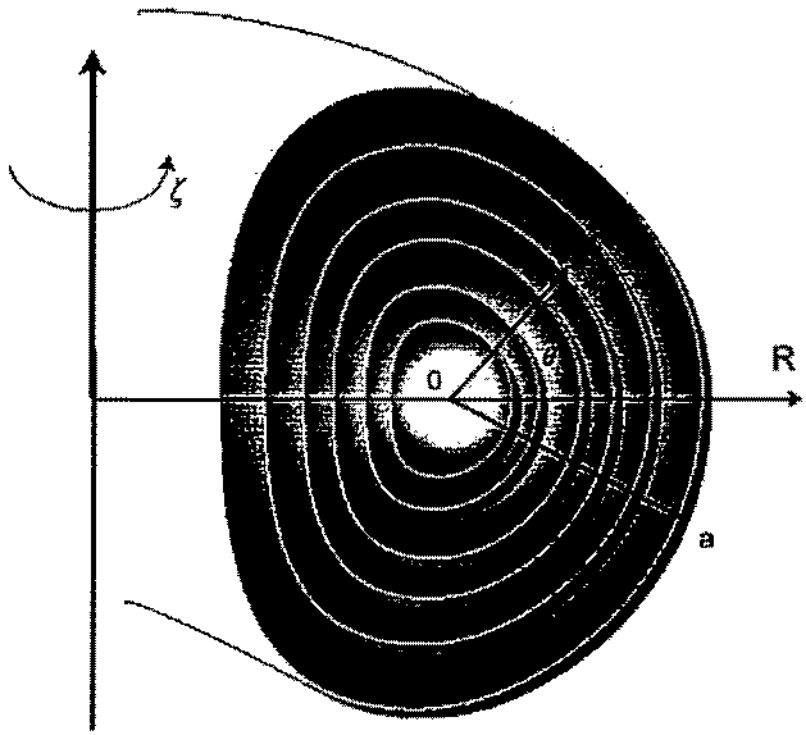


Figura 1.2 - Desenho das superfícies magneticas $\psi(r,\theta)$ num tokamak de forma alongada (D-shape).

O sistema pode ser mapeado usando-se diferentes sistemas de coordenadas. A partir do centro geométrico do toróide, pode-se definir um ponto pela sua distância (Z) ao eixo equatorial, pelo ângulo toroidal (ζ) e pela distância ao eixo principal (R). De outra

maneira, supondo-se perfeita simetria toroidal, a posição de qualquer porção do plasma pode ser determinada pela superfície de fluxo magnético, $\psi(r,\theta)$ e pelo ângulo θ (onde $\psi = 0$ determina o eixo magnético da coluna de plasma, onde a pressão cinética é máxima) e o limite da coluna de plasma é determinado pela condição $p = 0$ ($\psi = a$). Esta disposição em forma de D é usada nos tokamaks maiores para suprimir o efeito de determinadas instabilidades.

Para entender melhor as superfícies magnéticas (ou superfícies de fluxo magnético), é importante saber que o campo magnético gerado pelas espiras, na direção toroidal, é muito maior que a componente poloidal gerada pela corrente toroidal de plasma. O primeiro varia com $1/R$, sendo que, para configurações em que $a << R$, pode ser considerado praticamente uniforme. O segundo cresce com a distância ao eixo magnético da coluna de plasma, o que resulta numa disposição helicoidal do campo magnético resultante ao longo da coluna toroidal. A direção do campo magnético é então variada para cada r e θ, sendo possível descrever superfícies concêntricas ao longo de um corte transversal, sendo que cada superfície apresenta as linhas de campo resultantes paralelas. Este cisalhamento magnético é muito importante, entre outras coisas porque atua no sentido de dificultar a migração das partículas do plasma entre as superfícies de fluxo (pelo efeito de "congelamento" das linhas de campo magnético. As partículas tendem a seguir ao longo da linha de campo e a migração de uma linha para outra, neste caso, também resulta numa mudança de direção do movimento). Uma quantidade que descreve o cisalhamento magnético para cada superfície magnética é a chamada transformada rotacional inversa:

$$q(\psi) = \frac{rB_\zeta}{RB_\theta},$$

que é definida como a razão entre o número de voltas que as linhas de campo realizam no sentido toroidal e o número de voltas que realizam no sentido poloidal (o valor da transformada inversa, na borda da coluna de plasma, é chamado de "fator de segurança").

Há, todavia, configurações mais simples, onde a seção transversal da coluna de plasma é circular e pode-se aproximar $\psi(r,\theta) \rightarrow \psi(r) \rightarrow r$. As coordenadas neste sistema são ζ, θ, r e este é o caso do TCABR.

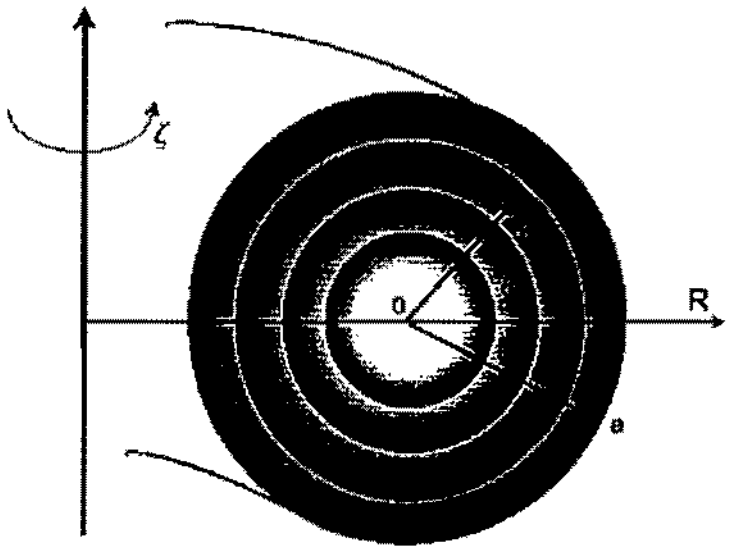


Figura 1.3 - Superfícies de campo magnético para um tokamak de coluna circular.

Em certas circunstâncias, pode-se simplificar ainda mais o modelo a ser estudado; se os efeitos da curvatura toroidal e da variação do campo magnético em R,

$$B_z \simeq B_0/R,$$

forem pequenos, a geometria do problema se reduz a uma configuração cilíndrica periódica (Fig. 1.4).

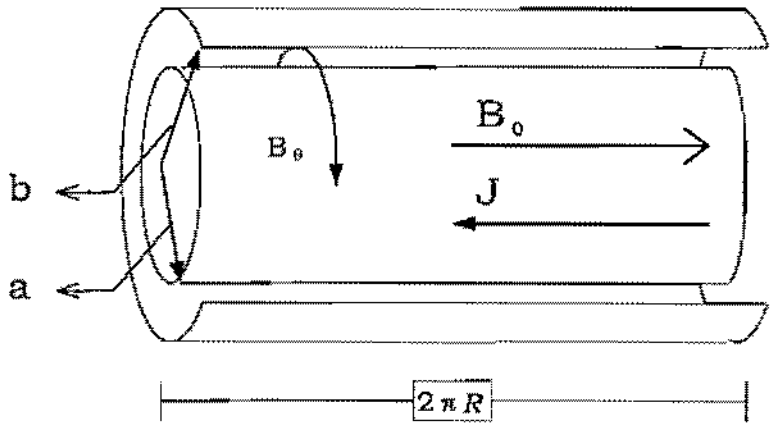


Fig. 1.4 - Aproximação cilíndrica.

1.2 Sistemas Auxiliares de Aquecimento, Geração de Corrente e Fluxo

Basicamente, as duas propostas principais de aquecimento auxiliar de plasmas em tokamaks são:

· Injeção de partículas neutras (NBI) - Injeção tangencial de partículas neutras de alta energia que são ionizadas e termalizam, aquecendo o plasma.

· Aquecimento por ondas - Ondas eletromagnéticas de vários tipos, dependendo de que ressonância se queira excitar no plasma, são lançadas por antenas ou guias de onda, especialmente projetados para oferecerem o maior efeito de acoplamento possível e transformarem a energia da onda em energia cinética de porções específicas das partículas. Efeitos secundários seriam responsáveis pela difusão desta energia por toda a coluna de plasma.

Outro efeito que se tenta obter com os métodos descritos acima é a geração de correntes e fluxos no plasma. O principal objetivo aqui é o de criar um regime estacionário para a configuração do tokamak, através da criação de uma corrente suplementar na direção toroidal, diferente da corrente toroidal pulsada produzida pelos transformadores, de forma a evitar o ciclo de aquecimento e resfriamento que destrói a primeira parede de contenção do plasma.

Outro objetivo é o de criar barreiras de transporte. Efeitos diversos, ainda não completamente entendidos, levam a uma perda da estabilidade da configuração magnética do plasma e terminam por provocar transportes radiais anômalos, com perdas significativas de partículas na direção das paredes metálicas. A esta perda de plasma somam-se as partículas presentes na parede metálica que são então arremessadas para o centro do plasma e aumentam mais ainda a perda de energia do sistema.

Recentemente, foi demonstrado que uma rotação poloidal cisalhada na coluna de

plasma suprime a turbulência na sua periferia (ver Refs.[3], [4],[5]) e nos experimentos em que ocorre a transição L-H[1], uma forte rotação cisalhada na periferia da coluna de plasma está sempre presente. Também, mais recentemente, foram detectadas barreiras internas de transporte (ITB)[6]. Tais barreiras se situam não na periferia, mas na região intermediária do raio do tokamak, e aumentam ainda mais a estabilidade do plasma. A geração destas barreiras de transporte é mais um objetivo buscado através dos mesmos métodos auxiliares de aquecimento.

Entre as várias faixas de freqüência disponíveis para os tokamaks, com campos magnéticos entre 0,5 e 5T, pode-se citar, resumidamente, os seguintes:

1.2.1 ECR

Electron Cyclotron Resssonance - Ressonância ciclotrônica eletrônica - $\omega_{ce} = eB/m_e c$ - Lançado por guias de onda. Freqüências na faixa de 60 a $150GHz$. Tem as vantagens de ter sido testado experimentalmente e ter uma teoria simples. Como desvantagens, apresenta um alto custo, especialmente dos gyrotrons utilizados para o carregamento das antenas, fraca geração de corrente e diminuição rápida da eficiência de acoplamento com o aumento da densidade do plasma.

1.2.2 LH

Low-Hybrid - Ressonância híbrida inferior - $\omega_{lh} \approx \sqrt{\omega_{ce} \cdot \omega_{ci}}$ - Lançado por guias de onda - Freqüências na faixa de $100MHz$ a $2,5GHz$. Como vantagem principal apresenta aquecimento e geração de corrente experimentalmente demonstrados, mas apresenta um limite para densidades de 3×10^{13} cm^{-3}, acima da qual diminui também substancialmente a eficiência.

[1] Low-High Confinement. Este modo de alto confinamento é um regime experimentalmente verificado em grandes tokamaks, nos quais o tempo de confinamento do plasma praticamete dobra.

1.2.3 ICRF

Ion Cyclotron Range of Frequencies - $\omega_{ci} \simeq ZeB/m_i c$ - Lançado por antenas - Freqüências na faixa de 5 a $50MHz$. Tem eficácia comprovada para aquecimento de elétrons e íons. Permite operação em pulsos longos e o aparato de radiofreqüência é simples. Como desvantagens necessita de experiências de geração de corrente e requer controle da densidade e boronização, por causa da geração de impurezas.

1.2.4 AW

Ondas de Alfvén - $\omega_A = B/\sqrt{4\pi m_i n_i}$ - Lançado por antenas helicoidais ou de multiestruturas - Freqüências na faixa de 1 a $5MHz$. Tem comprovado experimentalmente o aquecimento dos elétrons, os geradores são baratos e os dispositivos de RF são simples. Como desvantagens, carece de experiências de geração de corrente e requer controle da densidade e boronização, por causa da geração de impurezas.

No capítulo 2 retornaremos ao tema da utilização de ondas para aquecimento do plasma, com mais detalhes e focada nas ondas de Alfvén, principal objeto de estudo do tokamak TCABR em operação no Instituto de Física da Universidade de São Paulo.

1.3 TCABR

Trazido de Lauzanne, Suíça, onde chamava-se TCA (Tokamak Chauffage Alfvén), após um longo caminho e processo de reconstrução, que começou com seu embarque em 94 e culminou com sua inauguração em outubro de 1999, o TCABR tem como principal tarefa continuar os estudos de aquecimento e iniciar experimentos com geração de corrente e fluxos no plasma através de ondas de Alfvén, para a obtenção de barreiras de transporte e do modo de alto confinamento (Modo H). Será dada, também, continuidade aos estudos

de disrupções e turbulência em tokamaks que já vinham sendo realizados no TBR-1. No momento em que este texto esta sendo escrito, está sendo feita a instalação do sistema de antenas do TCABR (Fig. 1.5 - 1.7).

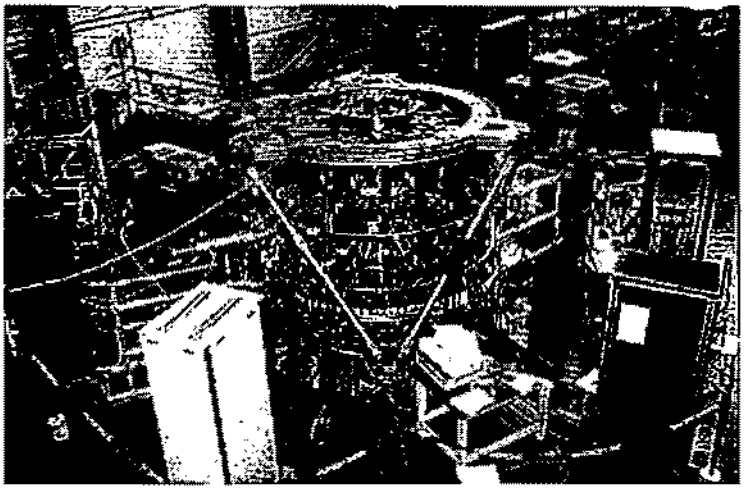


Figura 1.5 - Vista do TCABR.

Este sistema de antenas representa a principal mudança com relação à antiga montagem em Lauzanne. O antigo arranjo experimental não permitia que se excitassem modos bem determinados, o que levava à geração de modos superficiais indesejáveis e conseqüente aumento do transporte e de impurezas que irradiam fortemente, retirando energia do plasma.

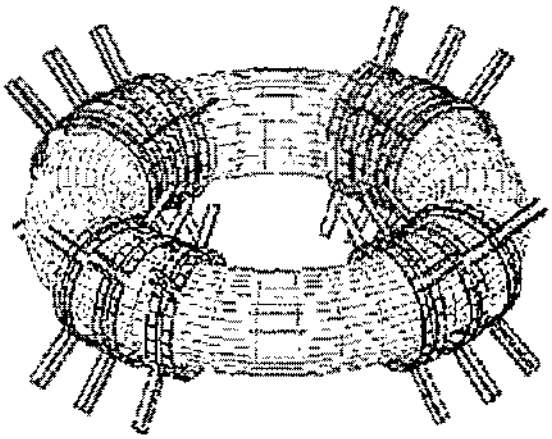


Figura 1.6 - Esquema da colocação dos elementos da antena do TCABR.

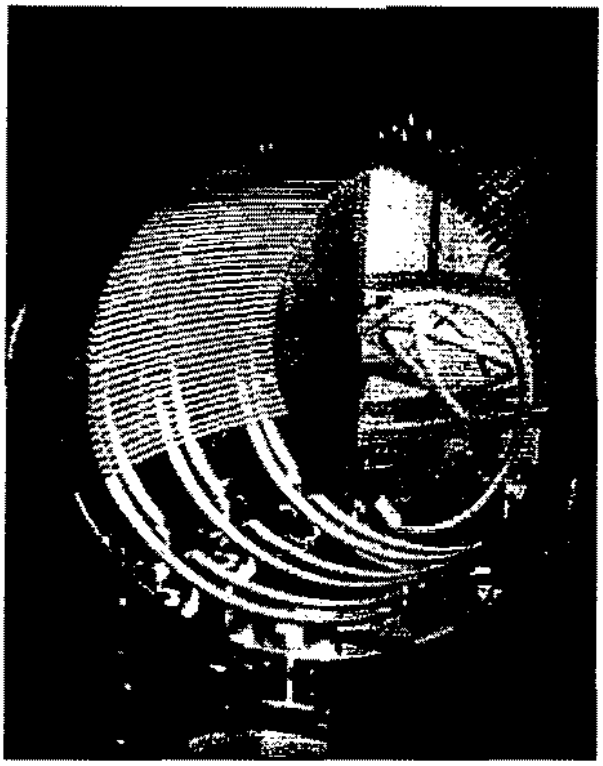


Figura 1.7 - Parte do sistema de antenas do TCABR.

A seguir, uma tabela dos dados do TCABR:

Raio Maior (R)	$61cm$
Raio Menor (a)	$18cm$
Raio da Antena (R_c)	$18,4cm$
Raio da Parede Metálica (R_w)	$23cm$
Corrente de Plasma (I_p)	$80kA$

Sistemas de Diagnósticos:

Os diagnósticos que se encontram em funcionamento são os seguintes:

Diagnósticos eletromagnéticos: bobinas de Rogowski para as medidas de corrente de plasma, corrente nas bobinas do campo toroidal, campo vertical/horizontal e nas bobinas de aquecimento ôhmico. Um sinal de voltagem para medida da corrente nas bobinas toroidais é obtido, também, através de queda de voltagem em uma resistência calibrada,

em série com as bobinas toroidais. Voltagem de enlace, obtida através de 8 espiras independentes, instaladas ao redor da câmara de vácuo, do lado de fora, sendo 4 no lado interno e 4 no lado externo. Bobinas cosseno e seno para a medida das posições horizontal e vertical da coluna de plasma. Bobinas de Mirnov para a detecção de oscilações MHD.

Espectrômetro óptico para a medida de impurezas, temperatura iônica, densidade, temperatura eletrônica e $Z_{efetivo}$.

Sonda eletrostática múltipla (4 eletrodos) com varredura radial rápida automatizada com tempo de varredura de 10 ms e excursão de 8 cm, permitindo avançar 3 cm para dentro do plasma, possibilitando obter-se 4 varreduras por descarga.

Detector de H_α para a medida de intensidade da linha H_α para monitorar processos radiativos na periferia do plasma.

Bobina diamagnética para a medida do beta poloidal e balanço de energia em combinação com as medidas de bolometria.

Em fase de teste encontram-se os seguintes diagnósticos:

Interferômetro de microondas de 150 GHz, capaz de medir a densidade em 7 posições radiais diferentes e composto de 3 canais independentes.

Bolômetro para a medição da radiação emitida pelo plasma.

Bobina de fluxo (saddle coil e pick-up coils) para a medida da posição da coluna de plasma e superfície de fluxo limite do plasma.

Em fase final de preparação encontram-se:

· Analisador de Partículas Neutras para medida da temperatura de íons e densidade de partículas neutras.

Diagnósticos em fase de planejamento e solicitação de recursos:

· Espalhamento Thomson - para medidas de temperatura e densidade de elétrons com alta resolução temporal e espacial.

· Reflectômetro de microondas para medidas de oscilações de densidade e de densidade de elétrons.

· Radiômetro por emissão eletrociclotrônica para a medida do perfil radial da temperatura de elétrons.

1.4 Proposta e Estrutura da Tese

Este trabalho tem como objetivo a determinação dos melhores regimes e parâmetros para as experiências de aquecimento e geração de corrente e fluxo no tokamak TCABR. Grande parte do trabalho dispensado no sentido da escolha dos melhores modos e freqüências para operação das antenas do TCABR está presente nesta tese. Este trabalho começou no início de 1997, quando o autor iniciou seus estudos sobre ondas de Alfvén, sob a orientação direta dos professores Artour Elfimov e Ricardo Galvão. Após um estágio de dois meses no Fusion Research Center, da University of Texas at Austin (EUA), no fim daquele ano, onde se familiarizou com o código toroidal disponível naquele instituto, o autor iniciou o processo de adaptação do mesmo às necessidades do grupo. Algumas modificações foram necessárias para a obtenção de resultados e a analise do código quanto a sua estrutura e limitações. Havia uma documentação extremamente pobre, o que demandou o estudo quase que por completo do funcionamento do código para se chegar às conclusões acerca das mudanças que poderiam e deveriam ser introduzidas. Iniciado então o uso mais intensivo deste código, a partir do início de 1998, alterações foram sendo introduzidas ao longo do trabalho, paralelamente à obtenção e análise de resultados culminando com os módulos de cálculo das forças ponderomotoras, no início deste ano.

Em suscinto resumo, o segundo capítulo apresenta a teoria de ondas de Alfvén. De início, é apresentada uma introdução básica até a derivação do tensor dielétrico com termos cinéticos em primeira ordem. A relação de dispersão para plasmas homogêneos é

obtida, a fim de servir de introdução à seção seguinte que mostra o efeito de conversão de modos. Cálculos cilíndricos do aquecimento e o efeito de impurezas minoritárias seguem com a demonstração dos modos globais.

No terceiro capítulo é introduzido o código bidimensional. As principais modificações provocadas pelos efeitos toroidais são mostradas e analisadas.

No quarto capítulo, a teoria e os resultados principais dos cálculos das forças ponderomotoras são apresentadas.

O quinto e último capítulo apresenta uma síntese dos resultados obtidos ao longo desta tese.

As unidades utilizadas estão no sistema Gaussiano (ou cgs).

2 TEORIA

2.1 Ondas de Alfvén - Introdução

O método mais usado para o aquecimento auxiliar de plasmas magneticamente confinados e para geração de corrente é a utilização de ondas de radiofreqüência (RF). O objetivo é converter a energia de ondas eletromagnéticas em energia térmica e fluxo das partículas no plasma. Entre as várias faixas de freqüência utilizadas com este propósito, este trabalho explora as freqüências abaixo da ressonância ciclotrônica da espécie principal de íons. Nas experiências de aquecimento e geração de corrente via ondas de baixa freqüência, dois tipos de processos ocorrem. Em primeiro lugar, podem tomar lugar efeitos globais, com a excitação da onda feita por modos de cavidade, que dissipam via amortecimento de Landau eletrônico, colisões e bombeamento magnético por tempo de trânsito (*Transit Time magnetic Pumping*), havendo uma transferência de energia para o plasma como um todo. Uma outra forma de acoplamento da energia do modo eletromagnético é a conversão para uma onda Quase-Eletrostática de Alfvén (QEAW) ou onda Cinética de Alfvén (KAW), numa região de ressonância específica, que é amortecida, transferindo a energia para as partículas localmente (num primeiro momento). Indiretamente, outros mecanismos (colisões e difusão) transferem esta energia para partículas fora da região das imediações da ressonância. Entre os modos para os quais este tipo de acoplamento é relevante, pode-se destacar as ressonâncias ciclotrônica iônica, e ciclotrônica eletrônica e de Alfvén.

As ondas de Alfvén são particularmente interessantes pela disponibilidade, a relativamente baixo custo, de geradores de RF de alta potência, pela simplicidade do aparato para o lançamento das ondas (antenas), pela possibilidade de aquecer o centro da coluna de plasma e pela ausência de limites de densidade para operação de geração de corrente,

tornando possível alterar localmente o perfil da corrente de plasma com a conversão de modos.

Descoberta por Hannes Alfvén em 1942[7], quando tentava explicar a origem das manchas solares, as ondas de Alfvén servem de base para toda a teoria magnetohidrodinâmica, e foram o primeiro exemplo de interação das teorias eletromagnética e de fluidos. Alfvén percebeu que uma onda poderia se propagar num fluido incompressível $\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=0\right)$, condutor perfeito ($\sigma=\infty$) e imerso num forte campo magnético $\vec{B}_0$, este último fazendo o papel da força restauradora, tendo a densidade do plasma como inércia. Desprezando a resistividade, $\vec{J}\times\vec{B}$ e $\partial\vec{J}/\partial t$ na lei de Ohm ($\vec{E}=-\vec{v}\times\vec{B}$), as equações de movimento são

$$\begin{aligned}
\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} &= \frac{\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)\times\vec{B}}{4\pi},\\
\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} &= \left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}-\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}.
\end{aligned}$$

Linearizando as equações acima e definindo as partes perturbadas com o sub-índice 1, supondo velocidade de equilíbrio nula e desprezando os produtos de termos perturbados, chega-se a

$$\begin{aligned}
\rho\frac{\partial\vec{v}_1}{\partial t} &= \frac{\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}_1\right)\times\vec{B}}{4\pi},\\
\frac{\partial\vec{B}_1}{\partial t} &= \left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}_1.
\end{aligned}$$

Definindo o campo magnético de equilíbrio na direção z (Fig. 2.1), obtém-se como conseqüência um campo magnético e uma velocidade perturbados que são independentes de x e y mas têm componentes apenas nestas direções,

$$\begin{aligned}
\rho\frac{\partial v_{1x,y}}{\partial t} &= \frac{B_0}{4\pi}\frac{\partial B_{1x,y}}{\partial z},\\
\frac{\partial B_{1x,y}}{\partial t} &= B_0\frac{\partial v_{1x,y}}{\partial z}.
\end{aligned}$$

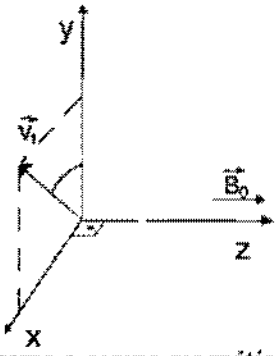


Figura 2.1 - Tanto a velocidade como o campo magnético perturbados estão na direção perpendicular ao campo de equilíbrio $\vec{B}_0$.

Combinando as duas equações acima, obtém-se uma equação de onda para a velocidade e campo perturbados na forma

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - V_A^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] \begin{bmatrix} B_{1x,y} \\ v_{1x,y} \end{bmatrix} = 0, \tag{4}$$

onde $V_A = B_0/\sqrt{4\pi\rho}$ é a velocidade de propagação da onda transversal ao longo do campo magnético de equilíbrio.

A solução tem a forma oscilatória

$$B_{1x} = |B| \exp i\,(kz - \omega t)\,,$$

onde ω é a a freqüência da onda, cuja velocidade de grupo $\omega/k = V_A$ é independente de ω (para qualquer valor de k que o satisfaça). A Eq.(4) fica então na forma

$$\left[\omega^2 - k_z^2 V_A^2\right] \begin{bmatrix} B_{1x,y} \\ v_{1x,y} \end{bmatrix} = 0, \tag{5}$$

sendo $\omega^2 - k_z^2 V_A^2 = 0$ a relação de dispersão da onda de Alfvén.

Para sistemas de densidade inomogênea, tratados pelas equações MHD, a ressonância de Alfvén (ponto ou região onde a Eq.(5) é satisfeita) aparece como uma singularidade logarítmica não-integrável (ver seção 2.3). Uma aproximação cinética é necessária para se obter um quadro mais correto do que ocorre nas imediações deste ponto. Isso é mostrado

na seção 2.4. Dada a dependência radial de B e ρ, a relação de dispersão passa a ser satisfeita numa faixa contínua de freqüências, chamada de Contínuo de Alfvén.

Em tokamaks, as ondas de Alfvén são geradas por antenas helicoidais (ou por estruturas que as simulem, como no caso do sistema de antenas do TCABR) e se propagam ao longo das linhas de campo magnético. A corrente superficial de uma antena de raio b, num modelo cilíndrico simples pode ser descrita como

$$J_{\zeta,\theta} = J_{\zeta,\theta}^{(M,N)}\ \delta(r-b)\ exp[i(M\theta + N\zeta - \omega t)]\ , \tag{6}$$

onde M e N são os números de onda da antena nas direções poloidal (θ) e toroidal (ζ), respectivamente, e excitam um espectro de modos de Alfvén com seus números de onda correspondentes m e n e seus múltiplos no plasma. $J_{\zeta,\theta}^{(M,N)}$ é a amplitude desta corrente para cada um dos modos. Para o caso cilíndrico, os números M e m são os mesmos, mas no caso toroidal, devido a não homogeneidade do campo magnético em θ e ao acoplamento dos modos poloidais vizinhos ao modo principal da antena, é necessário distingüir M e m.

No passado, o aquecimento do plasma por ondas de Alfvén e a dispersão das ondas foram investigados intensivamente nos stellarators e no tokamak TCA (veja, por exemplo, Elfimov *et al.*[8] e Collins *et al.*[9]). Tipicamente, experimentos de aquecimento por ondas de Alfvén em tokamaks pequenos são levados a cabo na faixa de baixas freqüências, de 1 a 3 MHz. Antenas de grandes comprimentos de onda, que produzem números de onda toroidal na faixa de $n = 1$ a $n = 4$ e números de onda poloidal $m = \pm 1$ e $m = \pm 2$, têm apresentado os melhores resultados (Stelarators R-0 e R-3, com modos locais, e no tokamak TCA, em Lauzanne, com modos globais). Os principais problemas destas experiências (no caso específico do TCA) decorrem de um aumento incontrolável da densidade de plasma e impurezas pesadas parcialmente ionizadas, como oxigênio, silício ou ferro, provenientes da parede da câmara durante o pulso de RF.

Recentemente, o aquecimento eletrônico por ondas de Alfvén foi demonstrado no tokamak Phaedrus-T[10]. As experiências de aquecimento no tokamak Phaedrus-T foram executadas na faixa de alta freqüência do espectro de Alfvén, isto é, 7 a 9,2 MHz, com uma antena de curto comprimento de onda, que corresponde ao número de onda paralelo $k_{\|} \sim c/\omega_{pi} \approx 0,1cm^{-1}$ (c é a velocidade da luz e ω_{pi} é a freqüência de plasma iônica), e uma larga faixa de números de onda toroidal, aproximadamente de $n = 6$ a $n = 20$. Foi descoberto que o procedimento de boronização, antes das descargas, proporciona melhores resultados para um controle da elevação de densidade. Também é importante dizer que um esquema novo de blindagem da antena foi decisivo para a obtenção dos resultados.

É provável que o aquecimento observado seja devido a ondas de Alfvén Torsionais, em lugar de ondas Globais de Alfvén (GA), por causa da estrutura da antena e da pequena variação na densidade durante a descarga de plasma. A antena do tokamak Phaedrus-T apresenta largo espectro, portanto é ineficiente quando usada para excitar os modos Globais de Alfvén com números de modo poloidal e toroidal (m e n, respectivamente) bem definidos. Além disso, durante um disparo de RF, a densidade no Phaedrus-T era mantida num valor bastante baixo e aproximadamente constante no tempo. Sob estas condições, seria difícil produzir o valor da densidade específica requerido para a excitação ressonante do modo Global de Alfvén. Por causa dos limites impostos pela antena e propriedades do Phaedrus-T, a fraca interação antena-plasma observada é um resultado esperado. Em resumo, parece que as condições do tokamak Phaedrus-T favorecem a excitação dos modos torsionais em lugar da onda Global de Alfvén.

Outro assunto relacionado com a excitação com ondas de Alfvén é o papel desempenhado pelas impurezas. Por exemplo, usualmente plasmas em tokamaks podem apresentar de 2% a 4% de carbono ionizado. Populações menores de outras impurezas também podem estar presentes. Então, é importante determinar os efeitos destas impurezas no

comportamento das ondas de Alfvén no plasma.

Para resolver os problemas de aquecimento e geração de corrente via RF em plasmas colisionais, é usado o modelo magnetohidrodinâmico (MHD)[11, 12, 13] do plasma. Em geral, plasmas de laboratório ou espaciais são fracamente colisionais, o que significa que a freqüência de colisão elétron-íon é menor que a freqüência da onda ($\nu_{ei} \ll \omega$) e o comprimento de onda paralelo às linhas de campo magnético ($2\pi/k_{\|}$) é menor que o livre caminho médio dos elétrons ($2\pi/k_{\|} \ll v_{Te}/\nu_{ei}$). Para estes plasmas, a maior parte dos efeitos da interação onda-partícula, como o aquecimento e geração de corrente por ondas, pode ser obtida através da solução do sistema da equação cinética,

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial F_\alpha}{\partial \vec{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left\{\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{v} \times \vec{B}\right]\right\}\frac{\partial F_\alpha}{\partial \vec{v}} = \hat{S}t\{F_\alpha\}, \tag{7}$$

e das equações de Maxwell,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{J}. \tag{8}$$

Aqui, $F_\alpha, e_\alpha, m_\alpha$, são a função de distribuição, a carga e a massa de íons ou elétrons, onde α especifica a espécie; $\vec{r}$, $\vec{v}$, são os vetores de coordenadas do espaço de configuração; $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{j}$, são os campos elétrico e magnético e a densidade de corrente; c é a velocidade da luz no vácuo e $\hat{S}t\{F\}$ é o operador de colisão na forma de Landau[13].

Em geometrias de campo magnético complicadas (toroidal, por exemplo) a função de distribuição $F = F(t, \vec{r}, \vec{v})$ depende de sete variáveis e é necessário incluir o efeito específico dos movimentos periódicos de íons e elétrons[14] ao longo das linhas de campo magnéticas. A solução deste problema não-linear geral é uma tarefa formidável no campo das equações de Vlasov-Maxwel. Para resolver este problema, alguns passos devem ser tomados:

- No primeiro passo, a equação de Vlasov (Eq.(7)) é resolvida em uma geometria adequada e o tensor dielétrico é calculado. Assim, a conexão entre as flutuações da

densidade de corrente e do campo eletromagnético no plasma pode ser determinada. Isso é mostrado na seção 2.2.

- No próximo passo, levando em conta as expressões analíticas obtidas para o tensor dielétrico, as equações de Maxwell são resolvidas para se estudar a estrutura dos campos da onda e avaliar a potência dissipada pela onda. Tais cálculos são desenvolvidos de uma forma mais simples nas seções 2.3 e 2.4. Os resultados numéricos são mostrados e discutidos, primeiro numa configuração cilíndrica (Seção 2.5) e depois em geometria toroidal (Capítulo 3).

- Finalmente, calculando a média da equação de Vlasov (com o operador de colisão cinético) sobre as oscilações de onda e sobre as superfícies magnéticas, a geração de corrente e fluxos pode ser calculada. Tais cálculos são realizados no capítulo 4.

Neste capítulo é mostrado o cálculo do tensor dielétrico em geometria plana; é derivada a relação de dispersão para ondas de Alfvén e é demonstrado o cálculo do campo eletromagnético para um perfil inomogêneo de densidade (ressonância de Alfvén localizada). Também são mostrados neste capítulo resultados obtidos na análise numérica do efeito de impurezas no plasma. Os cálculos dos campos das ondas de Alfvén e potência dissipada foram realizados com um código unidimensional desenvolvido por Dmitrieva *et al*[15, 16]. Este código é apropriado para o estudo das ondas de Alfvén Globais e ondas de Alfvén Torsionais, dentro do escopo deste capítulo, porque inclui os efeitos de impurezas e um perfil de corrente axial. Os cálculos aqui apresentados são para os casos mais simples, não incluindo contribuições de maior ordem do efeito de raio de Larmor finito e da freqüência ciclotrônica iônica; todavia, os passos para se realizar tais incrementos são mostrados.

2.2 Equações Básicas, Tensor Dielétrico

Para descrever a ação das ondas no plasma com as equações de Maxwell, é preciso compor o ente matemático através do qual é modelada a resposta do meio à presença dos campos eletromagnéticos. Tal ente é chamado de tensor dielétrico[2].

Das Equações de Maxwell linearizadas (Eq. 8) , a onda eletromagnética num meio qualquer pode ser descrita na forma

$$\frac{\omega^2}{c^2}\overleftrightarrow{\epsilon}\cdot\vec{E}-\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}=0. \tag{9}$$

As informações sobre a resposta do meio material, contidas no tensor dielétrico $\overleftrightarrow{\epsilon}$, e as informações sobre a geometria do problema permitem compor o perfil dos campos eletromagnéticos dentro do plasma e então calcular todas as quantidades pertinentes ao estudo da ação das ondas.

Abaixo é mostrada a derivação do tensor dielétrico a partir da equação de Vlasov. É feita a hipótese de que os íons não se movem (na direção paralela ao campo magnético) sob a ação dos campos de RF, aproximação válida devido ao pequeno valor da razão m_e/m_i, onde m_e e m_i são as massas dos elétrons e dos íons, respectivamente.

[2]Os passos detalhados para a obtenção dos coeficientes deste tensor estão expostos no Apêndice 1.

2.2.1 Função Distribuição no Espaço de Velocidades

Linearizando a Equação de Vlasov (Eq.(7)) (que é a equação cinética quando o termo colisional $\hat{S}t\{F_\alpha\} = 0$), fazendo as transformações para coordenadas espaciais cilíndricas

$$X = r\cos\theta, \qquad Y = r\sin\theta, \qquad Z = z,$$

e definindo um sistema de coordenadas baseado no campo magnético de equilíbrio e com o ângulo σ (definido a partir da direção deste campo $\vec{B}_0 = B_0\hat{e}_z$), mais as direções paralela e perpendicular a $\vec{B}_0$,

$$v_r = v_\perp\cos\sigma, \qquad v_\theta = v_\perp\sin\sigma, \qquad v_z = v_\parallel,$$

obtém-se a expressão linearizada

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} + v_\perp\cos\sigma\frac{\partial F_\alpha}{\partial r} + \frac{v_\perp}{r}\sin\sigma\frac{\partial F_\alpha}{\partial\theta} + v_\parallel\frac{\partial F_\alpha}{\partial z} - \left(\omega_c + \frac{v_\perp}{r}\sin\sigma\right)\frac{\partial F_\alpha}{\partial\sigma} + \\
&\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left\{\left[\left(E_r - \frac{v_\parallel}{c}B_\theta\right)\cos\sigma + \left(E_\theta + \frac{v_\parallel}{c}B_r\right)\sin\sigma\right]\frac{\partial F_\alpha}{\partial v_\perp} + \right. \\
&\left[\frac{v_\perp}{c}\left(B_\theta\cos\sigma - B_r\sin\sigma\right) + E_z\right]\frac{\partial F_\alpha}{\partial v_\parallel} + \\
&\left.\left[\left(E_\theta + \frac{v_\parallel}{c}B_r\right)\cos\sigma - \left(E_r - \frac{v_\parallel}{c}B_\theta\right)\sin\sigma\right]\frac{\partial F_\alpha}{v_\perp\partial\sigma}\right\} = \hat{S}t\{F_\alpha\}. \qquad (10)
\end{aligned}$$

Compondo um desenvolvimento em série para a perturbação em primeira ordem da função de distribuição das partículas,

$$\tilde{f} = \left\{f_0 + \sum_{l\neq 0}\left[f_{r,l}\cos(l\sigma) + f_{b,l}\sin(l\sigma)\right]\right\}\exp i\left(m\theta + kz - \Omega t\right),$$

e substituindo a expressão acima no desenvolvimento em ondas planas, obtém-se a expressão total de F, em primeira ordem, no espaço de configuração e de velocidades:

$$F = F_M + F_b\sin\sigma + F_r\cos\sigma + \left(f_0 + f_r\cos\sigma + f_b\sin\sigma\right)\exp i\left(m\theta + k_z z - \Omega t\right),$$

onde F_M é a função de distribuição maxwelliana de equilíbrio, F_b é a perturbação em primeira ordem na direção binormal (termo mais apropriado que "perpendicular" para configurações com curvatura) e F_r é a perturbação em primeira ordem na direção radial.

Substituindo esta última na Eq.(10) e fazendo a hipótese do operador colisional de Krook,

$$\widehat{S}t\left\{F_\alpha\right\} = \nu_e F_e,$$

que corresponde à substituição $\omega \longrightarrow \Omega - i\nu_{ef}$. Supondo que o raio de Larmor é muito menor que as inomogeneidades na direção radial, e mais alguma álgebra, chega-se ao conjunto de equações para a função distribuição perturbada em primeira ordem:

$$i\left(k_\parallel v_\parallel - \omega\right) f_0 + \frac{v_\perp}{2}\left(\frac{df_r}{dr} + \frac{f_r}{r} + i\frac{m}{r} f_b\right) =$$
$$-\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left[E_z \frac{\partial F_{M\alpha}}{\partial v_\parallel} + \frac{E_\theta}{\omega_c}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{F_{M\alpha}}{2} + \frac{v_\perp}{2}\frac{\partial F_{M\alpha}}{\partial v_\perp}\right) + \frac{v_\parallel}{2cv_\perp} B_{r1} F_b\right]; \tag{11}$$

$$\omega_c f_b = -i\left(\omega - k_\parallel v_\parallel\right) f_r + v_\perp \frac{\partial f_0}{\partial r} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left[E_r \frac{\partial F_{M\alpha}}{\partial v_\perp} - \frac{B_z}{c} F_b\right]; \tag{12}$$

$$\omega_c f_r = i\left(\omega - k_\parallel v_\parallel\right) f_b - i k_b v_\perp f_0 - \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left[E_\theta \frac{\partial F_{M\alpha}}{\partial v_\perp} + \frac{E_z}{c}\frac{\partial F_b}{\partial v_\perp}\right]. \tag{13}$$

A densidade de corrente oscilatória (de RF) em um plasma, que é calculada pela integral $\int f_\alpha \vec{v} d^3v$, é definida nas direções radial, binormal e paralela pelas expressões

$$j_r = \sum_\alpha e_\alpha \int_0^\infty d\sigma \cos\sigma \int_{-\infty}^\infty dv_\parallel \int_0^\infty v_\perp^2 \tilde{f}_\alpha dv_\perp = \pi \sum_\alpha e_\alpha \int_{-\infty}^\infty dv_\parallel \int_0^\infty v_\perp^2 f_r^\alpha dv_\perp; \tag{14}$$

$$j_b = \sum_\alpha e_\alpha \int_0^\infty d\sigma \sin\sigma \int_{-\infty}^\infty dv_\parallel \int_0^\infty v_\perp^2 \tilde{f}_\alpha dv_\perp = \pi \sum_\alpha e_\alpha \int_{-\infty}^\infty dv_\parallel \int_0^\infty v_\perp^2 f_b^\alpha dv_\perp; \tag{15}$$

$$j_\parallel = \sum_\alpha e_\alpha \int_0^\infty v_\parallel d\sigma \int_{-\infty}^\infty dv_\parallel \int_0^\infty v_\perp \tilde{f}_\alpha dv_\perp = 2\pi \sum_\alpha e_\alpha \int_{-\infty}^\infty v_\parallel dv_\parallel \int_0^\infty v_\perp f_0^\alpha dv_\perp; \tag{16}$$

onde o somatório age sobre todas as espécies carregadas no plasma.

Finalmente, empregando a relação entre a corrente oscilatória e o campo elétrico,

$$4\pi j_i = -i\Omega \epsilon_{ij} E_j, \tag{17}$$

chega-se às componentes do operador tensor dielétrico:

$$\hat{\epsilon}_{11} = \sum_\alpha \frac{\omega_{P\alpha}^2}{\omega_{c\alpha}^2}\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_{c\alpha}^2}\right)^{-1} + 2\frac{k_b^2 v_{T\alpha}^2}{\omega^2}(\Lambda_\alpha - 1)\right]; \tag{18}$$

$$\hat{\epsilon}_{12} = \sum_\alpha \frac{i\omega_{P\alpha}^2}{\omega\omega_{c\alpha}}\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_{c\alpha}^2}\right)^{-1} - \frac{(\chi_N+\chi_T)k_b v_{T\alpha}^2}{\omega\omega_{c\alpha}} + \frac{2k_b v_{T\alpha}^2}{r\omega\omega_{c\alpha}}(\Lambda_\alpha - 1)\frac{\partial}{\partial r}(r\ldots)\right]; \tag{19}$$

$$\hat{\epsilon}_{13} = -i\frac{k_b}{k_\parallel}\sum_\alpha \frac{\omega_{P\alpha}^2}{\omega\omega_{c\alpha}}\left\{\Lambda_\alpha - \frac{k_b v_{T\alpha}^2}{2\omega\omega_{c\alpha}}\left[\chi_T + 2\chi_N\Lambda_\alpha + \chi_T(1+2{Z_\alpha}^2)\Lambda_\alpha\right]\right\}; \tag{20}$$

$$\hat{\epsilon}_{21} = -\hat{\epsilon}_{12} - i\sum_\alpha \frac{\omega_{P\alpha}^2}{\omega^2}\frac{k_b v_{T\alpha}^2}{\omega_{c\alpha}^2}\left\{\frac{4}{r}(\Lambda_\alpha - 1) - 2\chi_N\Lambda_\alpha - \chi_T[(1+2{Z_\alpha}^2)\Lambda_\alpha - 1]\right\}; \tag{21}$$

$$\hat{\epsilon}_{22} = \sum_\alpha \frac{\omega_{P\alpha}^2}{{\omega_{c\alpha}}^2}\left\{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_{c\alpha}^2}\right)^{-1} - 2\frac{k_b^2 v_{T\alpha}^2}{\omega^2}(\Lambda_\alpha - 1)\frac{\partial}{\partial r}r\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\ldots\right)\right] - \right.$$
$$\left.\frac{\chi_N v_{T\alpha}^2}{r\omega^2}\left[1 + 2(\Lambda_\alpha - 1)\frac{\partial}{\partial r}(r\ldots)\right] - \frac{\chi_T v_{T\alpha}^2}{r\omega^2}\left[1 - [1-(1+2{Z_\alpha}^2)\Lambda_\alpha]\frac{\partial}{\partial r}(r\ldots)\right]\right\}; \tag{22}$$

$$\hat{\epsilon}_{23} = \sum_\alpha \frac{\omega_{P\alpha}^2}{\omega\omega_{c\alpha}}\left\{\Lambda_\alpha\frac{1}{k_\parallel}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\chi_N}{k_\parallel}\Lambda_\alpha + \frac{\chi_T}{2k_\parallel}[1-(1-2{Z_\alpha}^2)\Lambda_\alpha]\right\}; \tag{23}$$

$$\hat{\epsilon}_{31} = -\epsilon_{13}; \tag{24}$$

$$\hat{\epsilon}_{32} = \frac{-1}{k_\parallel r}\sum_\alpha \frac{\omega_{P\alpha}^2}{\omega\omega_{c\alpha}}\left\{\Lambda_\alpha - \frac{k_b v_{T\alpha}^2}{\omega\omega_{c\alpha}}\{\chi_N\Lambda_\alpha + \frac{\chi_T}{2}[1+(1+2Z_\alpha^2)\Lambda_\alpha]\}\right\}\frac{\partial}{\partial r}(r\ldots); \tag{25}$$

$$\epsilon_{33} = \sum_\alpha \frac{\omega_{P\alpha}^2}{k_\parallel^2 v_{T\alpha}^2}\left\{\Lambda_\alpha - \frac{\chi_N k_b v_{T\alpha}^2}{\omega\omega_{c\alpha}}\Lambda_\alpha - \frac{\chi_T k_b v_{T\alpha}^2}{2\omega\omega_{c\alpha}}[1-(1-2{Z_\alpha}^2)\Lambda_\alpha]\right\}; \tag{26}$$

onde $\omega_{P\alpha}^2 = 4\pi N_{0\alpha}e_\alpha^2/m_\alpha$ é a freqüência de plasma, onde $N_{0\alpha}$ é a densidade central de partículas, e_α e M_α são massa e carga das partículas. Os números 1, 2 e 3 significam, respectivamente as projeções radial, binormal e paralela.

$$\Lambda_\alpha = 1 + i\sqrt{\pi}Z_\alpha W(Z_\alpha), \qquad Z_\alpha = \frac{\omega}{\sqrt{2}k_\parallel v_{T\alpha}} \tag{27}$$

onde

$$W(Z_\alpha) = \frac{-i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{exp(-Z_\alpha^2)}{t-Z_\alpha}dt = exp(-Z_\alpha^2)\left[1+\frac{2i}{\sqrt{\pi}}\int_0^{Z_\alpha} exp(t^2)dt\right],$$

é a função de dispersão do plasma, e os parâmetros de inomogeneidade radial χ_1, χ_N, χ_T são definidos como

$$\chi_N = \frac{\partial}{\partial r}lnN_0, \qquad \chi_T = \frac{\partial}{\partial r}lnT_\alpha.$$

Estes são termos da derivada logarítmica da densidade de equilíbrio, N_0, e da temperatura T_α das partículas do plasma.

2.3 Relação de Dispersão para Ondas de Alfvén (Plasma Homogêneo)

Nesta seção é mostrada a obtenção das expressões dos campos perturbados pela ação da onda no plasma a partir da equação de dispersão. Os dois ramos da solução da equação de dispersão são mostrados com o intuito de ilustrar a proximidade das soluções em torno da ressonância de Alfvén. Na seção seguinte o fenômeno da conversão de modos é explicado e calculado com mais detalhes.

Das Eqs.(9) e (17), obtém-se, através da aproximação da óptica geométrica,

$$k^2\vec{E} - \vec{k}\left(\vec{k}\cdot\vec{E}\right) = \frac{4\pi i\omega}{c^2}\vec{J}, \tag{28}$$

onde

$$k^2 = k_{//}^2 + k_\perp^2. \tag{29}$$

Usando $4\pi J_i = -i\omega\epsilon_{ij}E_j$, pode-se separar as componentes da Eq.(28) na forma

$$k_{//}^2 E_x - k_\perp k_{//} E_z = \frac{\omega^2}{c^2}\left(\epsilon_{11}E_x + \epsilon_{12}E_y\right), \tag{30a}$$

$$k^2 E_y = \frac{\omega^2}{c^2}\left(-\epsilon_{12}E_x + \epsilon_{22}E_x + \epsilon_{23}E_y\right), \tag{30b}$$

$$k^2 E_z - \left(k_{//}E_z + k_\perp E_x\right) = \frac{\omega^2}{c^2}\left(-\epsilon_{23}E_y + \epsilon_{33}E_z\right). \tag{30c}$$

Da Eq.(30a), obtém-se a expressão

$$E_x = \frac{\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{12}E_y + k_\perp k_{//}E_z}{\left(k_{//}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{11}\right)}. \tag{31}$$

Inserindo (31) em (30b), obtém-se

$$E_z = -\frac{\frac{\omega^2}{c^2}\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{12}E_y + k_\perp k_{//}E_z\right)\epsilon_{12} - \left(\epsilon_{22}E_y + \epsilon_{23}E_z\right)\left(k_{//}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{11}\right)\right]}{\left[k_{//}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{11}\right]K^2} \tag{32}$$

e

$$E_y = \frac{\left[\left(k_{//}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{11}\right)\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{23} - \frac{\omega^2}{c^2}k_\perp k_{//}\epsilon_{12}\right]}{\left(\left[k_{//}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{11}\right]K^2 + \frac{\omega^4}{c^4}\epsilon_{12}^2 - \left[k_{//}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{11}\right]\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{22}\right)}E_z. \tag{33}$$

Inserindo (31) em (30c), obtém-se

$$E_y = -\frac{\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{12}E_y + k_\perp k_{//}E_z\right)\epsilon_{12} - \left(E_y + \epsilon_{23}E_z\right)\left(k_{//}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{11}\right)\right]}{\left(\left[k_{//}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{11}\right]K^2 + \frac{\omega^4}{c^4}\epsilon_{12}^2 - \left[k_{//}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{11}\right]\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{22}\right)}, \tag{34}$$

$$E_z = -\frac{\left[\left(k_{//}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{11}\right)\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{23} - \frac{\omega^2}{c^2}k_\perp k_{//}\epsilon_{12}\right]}{\left(\left[k_{//}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{11}\right]k_\perp^2 - k_\perp^2 k_{//}^2 - \left[k_{//}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{11}\right]\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{33}\right)}E_y \tag{35}$$

e

$$\left[k_{//}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{11}\right]k^2 + \frac{\omega^4}{c^4}\epsilon_{12}^2 - \left[k_{//}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{11}\right]\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{22} = -\frac{\left[\left(k_{//}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{11}\right)\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{23} - \frac{\omega^2}{c^2}k_\perp k_{//}\epsilon_{12}\right]^2}{\left(\left[k_{//}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{11}\right]k_\perp^2 - k_\perp^2 k_{//}^2 - \left[k_{//}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{11}\right]\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{33}\right)}. \tag{36}$$

Utilizando a condição de velocidade de fase paralela muito maior que a velocidade térmica $\left(k_{//}/\omega >> v_{Ti}\right)$, obtém-se a expressão

$$k_\perp^2 = \frac{\left(\frac{\omega^2}{c^2}\frac{\epsilon_{12}}{\epsilon_{11}}\epsilon_{12} - k_{//}^2\left(1 - \frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{11}}\right) - D\left(\frac{\epsilon_{33}}{\epsilon_{11}} - \frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{11}}\right)\right)}{2} \pm \frac{\sqrt{\left[\frac{\omega^2}{c^2}\frac{\epsilon_{12}}{\epsilon_{11}}\epsilon_{12} - k_{//}^2\left(1 - \frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{11}}\right) - D\left(\frac{\epsilon_{33}}{\epsilon_{11}} - \frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{11}}\right)\right]^2 - 4\left[Dk_{//}^2 + \frac{\omega^4}{c^4}\epsilon_{12}^2 - D\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{22}\right]\frac{\epsilon_{33}}{\epsilon_{11}}}}{2}, \tag{37}$$

onde $D = \left[k_{//}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{11}\right]$.

Fazendo $\epsilon_{22} \cong \epsilon_{11}$, válido quando supõe-se $\frac{k_\perp^2 v_{T\alpha}^2}{\omega_{c\alpha}^2} = k_\perp^2 \rho_\alpha << 1$ (ver expressão do tensor dielétrico), sendo ρ_α o raio de Larmor para a espécie α, e incluindo apenas os termos proporcionais a $\frac{\epsilon_{33}}{\epsilon_{11}}$,

$$k_\perp^2 = -\frac{D}{2}\frac{\epsilon_{33}}{\epsilon_{11}} \pm \frac{D}{2}\frac{\epsilon_{33}}{\epsilon_{11}}\sqrt{1 - \frac{4}{D^2}\left[Dk_{//}^2 + \frac{\omega^4}{c^4}\epsilon_{12}^2 - D\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{11}\right]\frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_{33}}}. \tag{38}$$

Como $\frac{\epsilon_{33}}{\epsilon_{11}} \approx \frac{\omega_{c\alpha}^2}{k_{//}^2 v_{T\alpha}^2} \gg 1$, a equação anterior é simplificada para

$$k_\perp^2 = \frac{D}{2}\frac{\epsilon_{33}}{\epsilon_{11}}\left\{-1 \pm \left(1 - \frac{2}{D}\left[k_{//}^2 + \frac{\omega^4}{c^4}\frac{\epsilon_{12}^2}{D} - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{11}\right]\frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_{33}}\right)\right\}. \tag{39}$$

Para o ramo com sinal negativo, a solução é dada na forma das ondas de Alfvén Cinéticas (KAW ou SQEAW)[3]

$$k_\perp^2 = -D\frac{\epsilon_{33}}{\epsilon_{11}} + D + \frac{\omega^4}{c^4}\frac{\epsilon_{12}^2}{D} \cong \frac{\epsilon_{33}}{\epsilon_{11}}\left[\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{11} - k_{//}^2\right], \tag{40}$$

e no ramo com sinal positivo, apresentam-se as soluções para as ondas de Alfvén Rápidas (FAW or FMsW)[4]:

$$k_\perp^2 = -k_{//}^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{11} - \frac{\omega^4}{c^4}\frac{\epsilon_{12}^2}{D} = -k_{//}^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{11} - \frac{\omega^4}{c^4}\frac{\epsilon_{12}^2}{\left[\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{11} - k_{//}^2\right]}. \tag{41}$$

Numa primeira aproximação, para $\frac{\omega}{\omega_{c\alpha}} << 1$, ϵ_{11} se resume a c^2/V_A^2 e $D = 0$ é a relação de dispersão da onda de Alfvén, já vista na introdução deste capítulo. Para estas soluções, a expressão para onda rápida (solução MHD) diverge e não é apropriada para a descrição do comportamento dos campos próximo a $D = 0$ (resonância de Alfvén). É necessário se levar em conta efeitos cinéticos, como um valor finito para ρ_α, para entender o que ocorre próximo à ressonância.

[3] *Kinetic Alfvén Wave ou Slow Quasi-Electrostatic Alfvén Wave*, Onda Lenta Quase Eletrostática de Alfvén, para o caso $\omega/k_\parallel \gg v_{Te}$

[4] *Fast Alfvén Wave ou Fast Magnetosonic Wave*, Onda Rápida Magnetoacústica de Alfvén.

Variando a densidade de partículas do plasma, simulando então um plasma inomogêneo, é possível superpor as duas soluções (Onda Rápida e Onda Cinética) para verificar que na ressonância ambas tem a mesma ordem de grandeza, permitindo o efeito de Conversão de Modos (ver Fig. 2.2). O efeito de conversão de modos, que ocorre em plasmas inomogêneos, é estudado em detalhes na próxima seção.

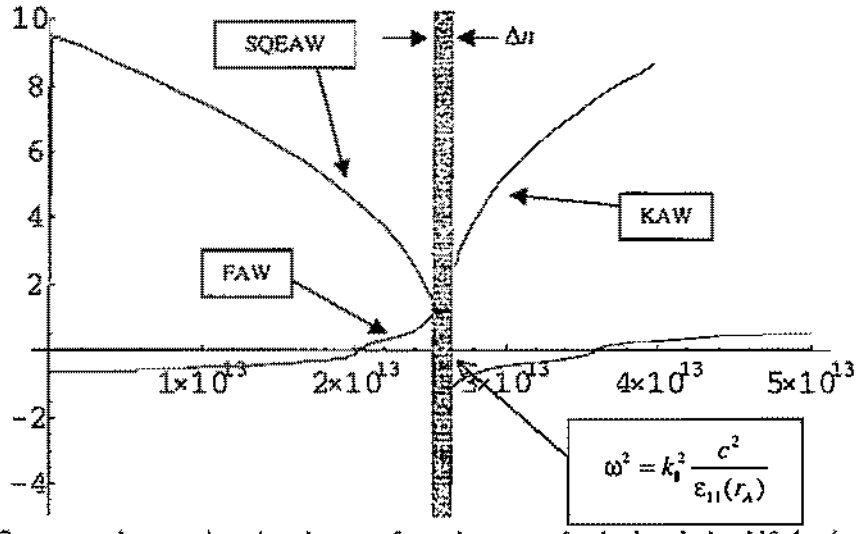


Fig. 2.2 Esquema dos modos do plasma, fora da ressonância local de Alfvén (esta última na região em cinza, com espessura Δn,em torno da ressonância de Alfvén ($D = 0$) onde as soluções com aproximação de óptica geométrica não são válidas). Soluções da Eq. (38) de dispersão para SQEAW (caso de plasma frio, $\omega/k_\parallel \gg v_{Te}$) e FAW (MHD), para as condições do TCABR e com freqüência $f = 4.3MHz$, $n = 4$, e densidade eletrônica variando no intervalo $n_e = 0 - 5 \cdot 10^{13} cm^{-3}$. Pode-se notar que as duas soluções se cruzam próximo à ressonância, permitindo que a onda sofra uma Conversão de Modos.

2.4 Ondas de Alfvén em Plasmas Cilíndricos Inomogêneos e Efeito de Conversão de Modos

Na seção anterior é mostrado que o modelo MHD com plasma homogêneo não descreve adequadamente as soluções em torno da ressonância de Alfvén. Aqui, o modelo completo das ondas de Alfvén, desenvolvido nas Refs. [17, 18, 19], é usado para analisar a estrutura dos campos de uma onda em uma coluna inomogênea de plasma cilíndrico de raio a.

Este modelo de plasma cilíndrico é razoável para tokamaks (ou arcos da Coroa Solar) com baixa pressão de plasma ($\beta \ll 1$) e um parâmetro de toroidicidade pequeno ($a/R \ll 1$, onde a é o raio menor e R é o raio maior do tokamak). O plasma é considerado magnetizado, de forma que o raio de Larmor dos elétron é menor que a inomogeneidade radial dos parâmetros do plasma ($v_{Te}/\omega_{ce,i} \ll L_r = n/(dn/dr), T_e/(dT_e/dr)$) e se supõe íons frios ($T_i \ll T_e$). Uma antena helicoidal com raio b é situada na região de vácuo entre o plasma e uma parede condutora com raio c. Este modelo de plasma é bem similar ao modelo discutido nas Refs. [20, 11, 21]. A estrutura do campo de RF produzido no plasma por uma antena externa é descrita pelas equações de Maxwell-Vlasov. Nestas equações, a corrente oscilatória induzida por uma onda plana pode ser expressa pelo tensor dielétrico e pelo campo elétrico de RF, na aproximação linear:

$$\tilde{j}_s = -(\mathrm{i}\Omega/4\pi)\epsilon_{sq}\tilde{E}_q, \quad \tilde{E}_{r\theta z} = E_{r,\theta,z}(r)\exp \mathrm{i}(m\theta + k_z z - \Omega t).$$

Os números de onda poloidal ($m \neq 0$) e axial ($k_z \neq 0$) são escolhidos como não-nulos. Na aproximação eikonal [17, 20, 22], a dependência radial dos campos de RF é representada na forma das componentes (radial, binormal e paralela)

$$E_{r,b,\|} = \mathcal{E}_{r,b,\|} \exp(\mathrm{i}\int_0^r k_r dr), \tag{42}$$

nas quais a amplitude $\mathcal{E}_{r,b,\|}$ é radialmente uniforme $\left(\left|d\mathcal{E}_{r,b,\|}/dr\right| << \left|k_r\mathcal{E}_{r,b,\|}\right|\right)$.

Podem ser obtidos dois ramos para as oscilações de plasma (como visto na seção anterior, para a Eq.(37)): Onda Rápida (FAW) e onda Cinética (KAW/SQEAW). As relações de dispersão (modificadas) são

$$k_{rF}^2 \approx \epsilon_{11}\frac{\omega^2}{c^2} - k_\|^2 - k_b^2 - \frac{\epsilon_{12}^2\omega^4/c^4}{\epsilon_{11}\omega^2/c^2 - k_\|^2} \text{ e } k_{rK}^2 \approx (\epsilon_{11}\frac{\omega^2}{c^2} - k_\|^2)\frac{\epsilon_{33}}{\epsilon_{11}}, \tag{43}$$

respectivamente. Estas relações são válidas longe da ressonância local de Alfvén (AWR),$|r - r_A| \gg c_s/\omega_{ci}$ (onde $c_s = \sqrt{T_e/m_i}$, T_e em eV), é a velocidade íon-acústica e r_A é a posição radial da ressonância de Alfvén (onde $D = k_\|^2 - \epsilon_{11}\omega^2/c^2 = 0$). Estas quantidades são obtidas das Eqs.40 e 41, fazendo-se $k_\perp^2 = k_b^2 + k_r^2$ e $k_\perp^2 >> k_b^2$. Para apresentar a solução do problema de uma forma completa, deve-se encontrar a solução das equações de Maxwell válida no entorno da ressonância de Alfvén (AWR) local, e casá-la com o resultado da aproximação de óptica geométrica nas Eqs.(42,43) longe da AWR local ($|r - r_A| \gg c_s/\omega_{ci}$).

Nas equações acima, as componentes cinéticas do tensor dielétrico são apresentadas na aproximação local:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \varepsilon_{22} = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2 - \omega^2}, \quad \varepsilon_{33}^{(e)} = \frac{\omega_{pe}^2}{k_\|^2 v_{Te}^2}(1 - \eta_e) + \delta\varepsilon_{33}^{(col)}; \\ \eta_e &= \frac{Z_e}{\sqrt{\pi}}\int \frac{exp(-S^2)}{Z_e - S}dS, \quad Z_e = \frac{\omega}{\sqrt{2}|k_\||v_{Te}}; \quad \delta\varepsilon_{33}^{(col)} = \mathrm{i}\frac{\omega_{pe}^2\nu_{ei}}{\omega^3}. \end{aligned} \tag{44}$$

Aqui, além do amortecimento de Landau, a dissipação colisional fraca das ondas via $\delta\varepsilon_{33}^{(col)}$ é levada em consideração ($\nu_{ei} \ll \omega$, onde ν_{ei} é a freqüência de colisões elétron-íon, e ω é a freqüência das ondas). A dissipação é muito importante próximo à borda do plasma, onde a temperatura eletrônica é baixa e o amortecimento de Landau das ondas de Alfvén é muito fraco. O termo colisional aparece quando é feito o limite $\omega/k_\| \gg v_{Te}$, quando a integração da função de dispersão do plasma (η_e) resulta em $\varepsilon_{33}^{(e)} \simeq \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\Omega - i\nu_{ei})} \simeq \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2(1 - \frac{i\nu_{ei}}{\omega})} \simeq \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}(1 + \frac{i\nu_{ei}}{\omega})$. O amortecimento colisional foi artificialmente

introduzido no modelo substituindo ω no tensor dielétrico por $\Omega - i\nu$, onde Ω é então freqüência real da fonte de RF. Esta transformação da freqüência vem da representação de Krook do operador colisional. As colisões são usadas para remover ondas de Alfvén de pequeno comprimento de onda na periferia da coluna de plasma, ou ondas de Bernstein na ressonância híbrida e singularidades do tensor dielétrico nas zonas de ressonância ciclotrônica iônica.

2.4.1 Efeito de Conversão de Modos

Com o intuito de evitar fórmulas matemáticas complexas para a análise da conversão de modos, um modelo de plasma mais simples é usado. O efeito Hall e o campo magnético poloidal são considerados pequenos ($B_\theta \approx 0$), de tal forma que pode ser escolhida a forma diagonal do tensor dielétrico na Eq.(44) ($\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = 0$). A densidade e a temperatura do plasma são consideradas homogêneas ao longo das linhas de campo magnético e trapezoidais ao longo do raio com uma pequena queda, $\delta n = n_0(a_1 - a)/L_r$, na borda do plasma:

$$n_e = n_0,\ r < r_t;\quad n_e = n_0\frac{a_1 - r}{L_r},\ r_t < r < a < a_1,\ \ a_1 - a \ll L_r;\quad n_e = 0, a < r < c;$$

onde $L_r = a_1 - r_t$ é o parâmetro característico da inomogeneidade do plasma. Depois, supõe-se que a frequência de RF esteja no contínuo de Alfvén, $k_z c_A(0) < \omega < k_z c_A(a_1)$, o que significa que o ponto de conversão deveria estar na região da inomogeneidade do plasma ($r_t < r_A < a$).

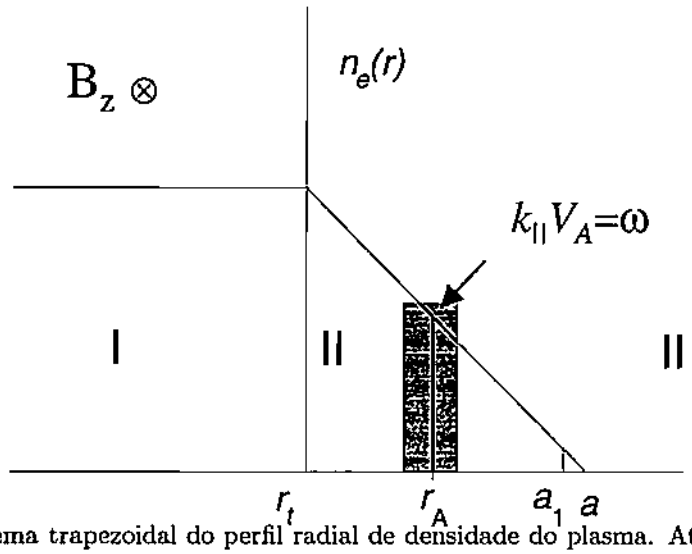


Figura 2.3 - Esquema trapezoidal do perfil radial de densidade do plasma. Até a posição $r = r_t$ a densidade é constante, passando a variar uniformemente até $r = a_1$. A região em cinza simboliza a região em torno da ressonância de Alfvén $(r = r_A)$, em que a aproximação magnetohidrodinâmica não é válida.

É feito um desenvolvimento de Taylor dos coeficientes inomogêneos das equações de Maxwell em torno de $r = r_A$, supondo-se $L_r \gg c_s/\omega_{ci}; |r - r_A| \ll r_A$. Então, usando a relação aproximada entre as componentes E_r, E_θ e E_z (importante perceber que aqui, diferente das Eqs.30a-c, também extraídas das Equações de Maxwell, as derivadas radiais não são nulas),

$$\left[m^2 + r^2(k_z^2 - \varepsilon_{11}\frac{\omega^2}{c^2})\right] E_r = -\mathrm{i}\frac{d}{dr}\left[\frac{m}{r}E_\theta + k_z E_z\right],$$
$$E_z \approx \mathrm{i}\frac{k_z c^2}{\varepsilon_{33}\omega^2}\frac{\partial}{\partial r}(E_r), \tag{45}$$

a equação para a componente E_r dos campos de RF pode ser obtida:

$$\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{\varepsilon_{11,A}}{\varepsilon_{33,A}}\right)\frac{d^2E_r}{dx^2} - k_z^2 L_r^2 \frac{x}{x_a}E_r\right] \approx 0, \tag{46}$$

onde $\varepsilon_{jj,A} = \varepsilon_{jj}|_{r=r_A}$, $x_a = (a_1 - r_A)/L_r$, e é introduzida a variável $x = (r - r_A)/L_r$.

A solução MHD ideal formal, com AWR local, $E_r \sim 1/x$, pode ser facilmente obtida da Eq.(46) no limite de "plasma de condutividade infinita" ($\varepsilon_{33} \gg \varepsilon_{11}$, pois com condutividade infinita não há campo elétrico paralelo). Por outro lado, o limite MHD correto

deve ser tomado da solução completa da Eq.(46) por causa do problema de contorno. Integrando a Eq.(46) uma vez em x, a equação de Airy inomogênea na variável adimensional τ pode ser obtida:

$$\ddot{\mathcal{E}} - \tau\mathcal{E} = \mp\pi^{-1}, \quad \tau = g^{1/3}x, \quad g = \left(\frac{k_z^2 L_r^2}{x_a}\frac{\varepsilon_{33,A}}{\varepsilon_{11,A}}\right). \tag{47}$$

É importante notar que o parâmetro $|g|$ é sempre bastante grande ($\frac{\varepsilon_{33,A}}{\varepsilon_{11,A}} >> 1, \frac{k_z^2 L_r^2}{x_a} >> 1$). Então, a solução geral da Eq.(46) pode ser descrita via funções de Airy[23] como

$$E_r = A_1 Ai(\tau) + B_1 Bi(\tau) + C_1\mathcal{E}(\tau), \tag{48}$$

onde A_1, B_1, B_1 são coeficientes arbitrários e $\mathcal{E}$ é uma das duas soluções $[Hi(\tau), Gi(\tau)]$ da equação inomogênea de Airy[23]. Estas duas soluções são normalizadas pela relação $Gi(\tau) + Hi(\tau) = Bi(\tau)$. Se a dissipação da onda não é levada em conta, o comportamento assintótico destas funções na variável real, $\tau \to \pm\infty$, pode ser facilmente encontrado[23]. A função Gi é limitada,

$$Gi(\tau) \sim \frac{1}{\pi\tau}, \quad Gi(-\tau) \sim \frac{-1}{\pi\tau} + \pi^{-1/2}\tau^{-1/4}\cos\left(\frac{2}{3}\tau^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right), \tag{49}$$

e a função $Hi(\tau)$ é ilimitada quando $\tau \to -\infty$. No caso de $|g| \gg 1$, a solução da Eq.(47) é:

$$E_r = A_1 Ai(\tau) + C_1 Gi(\tau), \tag{50}$$

onde o efeito de conversão de modos é representado pela função Gi e $Ai(\tau)$ é a autofunção dos modos.

No caso de plasmas "quentes" (velocidades de fase $\omega/k_\parallel \ll v_{Te}$), a KAW[24] aparece na região de maior densidade do plasma, $x < 0$. No caso de plasmas "frios" (velocidades de fase $\omega/k_\parallel \gg v_{Te}$), a solução oscilatória relativa à SQEAW[18, 20, 22] aparece na região do plasma entre o ponto de conversão e a borda da coluna de plasma, $r_A < r < a$. Aqui,

dois tipos de ondas aparecem. Uma delas é excitada pela componente paralela do campo elétrico no vácuo e a outra gerada via efeito de conversão de modo. Nota-se que na Eq.(50) (quando $\varepsilon_{33} \to \infty$) não há limite para a solução MHD ideal ($\sim 1/\tau$), como discutido na Ref. [22].

Casando a solução da Eq.(50) com a solução para a região de plasma homogêneo, $E_r \sim \tau^{|m|-1}$, obtêm-se a relação entre os coeficientes, $C_1/A_1 \approx [\tau Ai']_{\tau=\tau_l}$, onde $\tau_l = g^{1/3}(\tau - \tau_A)/L_r$. Finalmente, a condição de ressonância (ver, por exemplo, a Ref. [18]) para a excitação da SQEAW pode ser escrita como:

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}Ai(\tau) - \tau_l Ai'(\tau)|_{\tau=\tau_l}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}Gi(\tau)\right]_{x=(a-r_A)/L_r} = 0.$$

A solução dada pela Eq.(50) é dramaticamente modificada se levado em consideração o efeito de dissipação da onda, que se relaciona com a parte imaginária do tensor dielétrico, $\mathrm{Im}\varepsilon_{33}$. Neste caso, para a solução particular da Eq.(47), a função $\pi^{-1}e_0(-\tau)$ pode ser escolhida, onde a função generalizada de Airy,

$$e_0(-\tau) = \int_0^\infty \exp\left(\tau t - \frac{t^3}{3}\right)\mathrm{d}t,$$

é tomada da Ref. [25]. Esta função é limitada através do eixo imaginário, decresce assintoticamente com $\sim 1/\tau$ (quando $|\tau| \to \infty, -2\pi/3 < \arg\tau < 2\pi/3$) e esta solução particular é unica. Na Eq.(47), o valor de g é complexo porque a componente complexa tensor dielétrico, ε_{33}, e a raiz de $g^{1/3}$ devem ser tais que o argumento, $\arg\tau = \arg g^{1/3} = \alpha$, pertence ao setor duplo $\pi/3 < |\alpha| < 2\pi/3$. As soluções $h_1(\tau), h_2(\tau)$ da equação homogênea de Airy podem ser descritas como uma combinação das funções de Airy, $h_{1,2}(-\tau) = Bi(-\tau) \pm \mathrm{i}Ai(-\tau)$, porque estas combinações produzem funções que crescem exponencialmente nas duas direções. Para as condições do plasma "frio", $\omega/k_\parallel \gg v_{Te}$, os

comportamentos assintóticos destas funções[23] são:

$$
\begin{aligned}
h_{1,2}(-\tau) &\sim \frac{1}{2\pi^{1/2}}\tau^{-1/4}\exp\pm\left(\frac{2}{3}|\tau|^{3/2}\sin\frac{\arg g}{2} - \mathrm{i}\cos\frac{\arg g}{2} + \frac{\pi}{4}\right),\ x > 0; \\
h_{1,2}(-\tau) &\sim \frac{1}{2\pi^{1/2}}\tau^{-1/4}\exp\mp\left(\frac{2}{3}|\tau|^{3/2}\cos\frac{\arg g}{2} - \mathrm{i}\sin\frac{\arg g}{2} + \frac{\pi}{4}\right),\ x < 0; \qquad (51)
\end{aligned}
$$

Finalmente, quando $|g^{1/3}| \gg 1$ e x está no intervalo $(r_t - r_A)/L_r < x < (a - r_A)/L_r$, a solução da Eq.(47) será:

$$
E_r = A_1 h_1(-\tau) + C_1\pi^{-1}e_0(-\tau). \qquad (52)
$$

Na equação acima, a solução da equação homogênea de Airy, $h_1(-\tau)$, representa a parte de camada dissipativa do campo de RF na periferia do plasma, enquanto a solução $e_0(-\tau)$ representa a parte de conversão de modos do campo de RF no ponto da AWR local, $r = r_A$. A condição para a presença da AWR local é:

$$
\frac{2}{3}\left(\frac{a - r_A}{L_r}\right)^{3/2}\mathrm{Im}\, g^{1/2} \gg 1.
$$

Usando este limite e supondo um efeito de dissipação fraco, $\mathrm{Im}\, g \ll \mathrm{Re}\, g$, obtém-se uma solução que é parecida com a solução para MHD ideal, $E_r \sim g^{-1/3}x^{-1}$. A meia-largura da ressonância onde a dissipação é forte, δr, é da ordem de $g^{-1/3}L_r$.

Importante notar que no caso de um perfil de densidade arbitrário as condições para o limite de MHD ideal podem ser escritas como:

$$
\begin{aligned}
\int_{r_A}^{a} |\mathrm{Im}k_r|\mathrm{d}r &\gg 1, \quad \omega/k_\parallel \gg v_{Te}; \\
\int_{0}^{r_A} |\mathrm{Im}k_{rK}|\mathrm{d}r &\gg 1, \quad \omega/k_\parallel \ll v_{Te}. \qquad (53)
\end{aligned}
$$

onde k_{rK} é obtido da Eq.(43).

Integrando a Eq.(45) e usando a propriedade da função e_0[25] no plano complexo,

$$
\int_0^{(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)\cdot\infty} \mathrm{Re}\, e_0(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{\pi}{2},
$$

obtém-se o comportamento da componente E_θ no limite MHD[17, 26]:

$$
\begin{aligned}
E_\theta &\sim 1 + \frac{r_A - r_t}{r_A} \log\left|\frac{r_A - r}{r_A - r_t}\right|, \qquad \text{para } x > 0, \\
E_\theta &\sim 1 + \frac{r_A - r_t}{r_A}\left(\log\left|\frac{r_A - r}{r_A - r_t}\right| + i\pi\right), \text{ para } x < 0.
\end{aligned} \tag{54}
$$

Usando a expressão assintótica pode-se facilmente obter o valor da potência dissipada[26] na ressonância do modo de Alfvén local através do teorema de Poynting (ver Apêndice D):

$$
\mathrm{Re}\,\frac{1}{2}\int_V \vec{J}^* \cdot \vec{E} dv = \frac{L_y L_z c^2}{8\pi\mu_0\omega\left(k_z^2 + k_y^2\right)} \left|E_y^0\right|^2 \pi \frac{r_A - r_t}{r_A}. \tag{55}
$$

2.5 Análise do Efeito das Impurezas

No processo de aquecimento de plasmas em tokamak com ondas de Alfvén, impurezas pesadas e parcialmente ionizadas, como oxigênio ou ferro, introduzem zonas de ressonância ciclotrônica iônica que podem modificar as características de dispersão destas ondas. Um dos assuntos importantes na pesquisa de fusão termonuclear controlada diz respeito aos efeitos de impurezas mais leves, como deutério, hélio ou carbono, nas propriedades espectrais e dispersivas das ondas de Alfvén. Quando a freqüência da onda de Alfvén for inferior à freqüência ciclotrônica iônica, tanto da espécie principal do plasma quanto das impurezas completamente ionizadas, só acontecerão mudanças pequenas nas propriedades dos modos característicos (*eigenmodes*). Porém, quando a freqüência iônica ciclotrônica das impurezas leves forem comparáveis à freqüência da onda de Alfvén, modificações significativas da propagação do modo de Alfvén e das propriedades de aquecimento são previstas.

Várias experiências, como as realizadas no tokamak TCA [9], produziram aquecimento eficiente do plasma com o modo GA. O modo GA tem uma freqüência, ω_{GA}, próxima à freqüência mínima do contínuo de Alfvén $\omega_{sh}(r)$, definida numa generalização

da Eq.(5) como

$$\omega_{sh}(r) = k_{\parallel}(r)c_A(r). \tag{56}$$

Na Eq. (56), $c_A(r)$ é a velocidade local de Alfvén,

$$\frac{1}{c_A^2(r)} = \frac{1}{c^2}\sum_i \left(\frac{\omega_{p,i}}{\omega_{c,i}}\right)^2,$$

onde ω_{pi} e ω_{ci} são, respectivamente, as freqüências locais de plasma do íon e ciclotrônica iônica, c é a velocidade de luz, $k_{\parallel}(r) = [n + m/q(r)]/R_0$ é o número de onda paralelo, $q(r) = rB_t/R_0B_\theta$ é o fator de segurança (ou transformada rotacional inversa) do tokamak, e r e R_0 são, respectivamente, a distância ao eixo magnético (ou raio menor) e a distância ao eixo principal (ou raio maior) do tokamak. Descobriu-se que a potência de RF no modo GA é eficientemente dissipada na região central do plasma pelo amortecimento eletrônico de Landau ou possivelmente pelo amortecimento colisional. Um aquecimento eficiente também foi observado quando o perfil da densidade de corrente era plano. Quando o perfil de corrente é plano, o modo GA aparece dentro do Contínuo de Alfvén[8].

Para o propósito de analisar teoricamente o comportamento de ondas de Alfvén Torsionais e ondas de Alfvén Globais e processos de aquecimento por RF, os modelos teóricos atuais são inadequados (veja por exemplo, os reviews de Elfimov *et al.*[8] e Vaclavik e Appert[11]). Modelos antigos foram em grande parte baseados em plasmas com uma única espécie de íon. Os efeitos de múltiplas espécies de íon no espectro de Alfvén não receberam muita atenção. Appert *et al.*[27] e Li *et al.*[28] estudaram numericamente os efeitos de impurezas quando a ressonância ciclotrônica da impureza está localizada perto do centro do plasma. Porém, sob esta condição, a onda Global de Alfvén não é excitada. Nesta tese, a teoria das ondas de Alfvén em plasmas de tokamak é estendida para incluir os efeitos de impurezas, quando as ressonâncias ciclotrônica iônica principal e íon-íon-híbridas não estão presentes na seção transversal do plasma. É mostrado em

particular que as impurezas podem estender a faixa de números de onda e densidade acima das quais ondas Globais de Alfvén (e semelhantes) podem ser excitadas tanto dentro como fora do Contínuo de Alfvén (com o aparecimento destes no limiar do contínuo íon-íon-híbrido de Alfvén). Os resultados teóricos também demonstram a importância do modo global na faixa do contínuo de freqüências. No contínuo, o modo global tem uma largura espectral muito maior, significando que as condições de ressonância serão mais provavelmente satisfeitas durante a descarga do tokamak. Este resultado é importante, porque provê um método para excitar a onda Global de Alfvén em um plasma de tokamak com impurezas ionizadas.

2.5.1 Modelo Cilíndrico de Plasma e Resultados dos Cálculos

A análise numérica está baseada no código unidimensional cinético de Dmitrieva *et al.*[15], chamado *EPCY*, que calcula a dispersão e dissipação das ondas de Alfvén em uma configuração de plasma cilíndrico com duas espécies. O modelo cilíndrico no qual o código é baseado corresponde à aproximação de grande razão de aspecto ($R/a >> 1$) para tokamaks. O código *EPCY*, de forma semelhante a outros códigos relacionados[11, 28, 20], resolve o conjunto linearizado de equações de Maxwell-Vlasov, postas como um problema de contorno, para os campos das ondas de RF produzidos por uma antena externa em uma coluna de plasma magnetizada. O plasma é um cilindro de raio a. Em torno deste há uma região de vácuo envolta por uma parede condutora de raio c. Na região de vácuo, há uma antena com corrente superficial localizada em uma superfície cilíndrica de raio b. As componentes z e θ da corrente superficial podem ser representadas pela série de Fourier,

$$J_{z,\theta} = \sum_{m,n} J_{z,\theta}^{(m,n)}\, \delta(r-b)\, exp[i(m\theta + nz/R_0 - \omega t)]\ , \tag{57}$$

onde $J_{z,\theta}^{(m,n)}$ é a amplitude constante do harmônico (m,n), e ω é a freqüência do gerador. Nesta tese, é utilizado um modelo com um único valor para os números m,n, modelando uma antena helicoidal[8] na Eq.(57). A Eq.(57) também pode servir como um modelo de um sistema de antena de multi-modo (tipo Nagoya-III).

O código *EPCY* está baseado na aproximação que ρ_e e ρ_i são ambos muito menores que L_r e λ_r, onde L_r é o comprimento característico da inomogeneidade radial do plasma e λ_r é o comprimento característico da variação radial do campo de RF. Nesta análise não são levados em conta o efeito do raio de Larmor iônico finito na dispersão e dissipação da onda de Alfvén Torsional e da onda Global de Alfvén, porque a dissipação destas ondas, como também a conversão de modo no contínuo de Alfvén, não depende do raio de Larmor iônico[8, 11]. Além disso, sob as condições que são características de tokamaks médios como o TCABR, a inércia eletrônica tem um efeito mais forte na dispersão da onda de Alfvén cinética que a temperatura iônica. Assim, desprezando efeitos relacionados com ρ_e e ρ_i finitos, o tensor dielétrico, ϵ, reduz-se a sua forma local, considerando o amortecimento de Landau eletrônico. Especificamente, ϵ reduz-se ao seguinte tensor,

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & 0 \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix}, \tag{58}$$

onde as componentes não nulas são,

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 1 + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2 - \omega^2} + \frac{\omega_{pZ}^2}{\omega_{cZ}^2 - \omega^2},$$

$$\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = i\left[\frac{\omega\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}(\omega_{ci}^2 - \omega^2)} + \frac{\omega\omega_{pZ}^2}{\omega_{cZ}(\omega_{cZ}^2 - \omega^2)} - \frac{\chi k_\parallel c^2}{\omega^2}\right], \tag{59}$$

$$\epsilon_{33} = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k_\parallel v_{Te}^2}(1 - \eta). \tag{60}$$

Na Eq.(59), diferente da expresão mostrada na seção 2.2, está incluído o termo de

cisalhamento do campo magnético, na quantidade χ, que tem a seguinte definição:

$$\chi = r\frac{B_z^2}{B^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{B_\theta}{rB_z}\right),$$

enquanto na Eq.(60), η (já mostrada na seção 2.4) é uma integral complexa que responde pelo amortecimento de Landau.

O índices $(1, 2, 3,)$ se referem, respectivamente, às componentes radial (r), binormal (b), e paralelo $(||)$ do tensor dielétrico com respeito às linhas de campo magnético de equilíbrio.

A introdução do termo colisional de Krook (ver parágrafo após a Eq.(44)) permite reduzir o número de pontos de discretização na malha radial a 100 ou menos. Supõe-se que a freqüência de colisão ν_{ei} é maior que o valor da quantidade $k_{\|}v_{Ti}$, onde v_{Ti} representa o velocidade térmica iônica. Além disso, a freqüência de colisão suposta nos cálculos está na faixa entre $0,01\omega$ e $0,04\omega$ (ω é a freqüência do gerador), o que é consistente com a freqüência de colisão de elétron-íon no plasma do TCABR.

O perfil de corrente axial, $j(r)$, é suposto ter a forma $j(r) = j_0(1 - r^2/a^2)^{\mu_j}$, onde $\mu_j = (q_a/q_0 - 1)$, com q_a/q_0 sendo a transformada rotacional inversa (ou fator de segurança) na interface plasma-vácuo normalizada a seu valor ao centro da coluna de plasma. A densidade eletrônica do plasma é representada pela expressão,

$$n_e = n_0\left[1 - \left(1 - \frac{n_a}{n_0}\right)\frac{r^2}{a^2}\right]^{\mu_n},$$

onde n_0 e n_a são, respectivamente, as densidades eletrônicas central e periférica do plasma, e μ_n é o parâmetro variando de $0,6$ a 3 (em geral, aqui é usado o valor 1), que governa o perfil de densidade. São supostos perfis de densidades e temperatura semelhantes para impurezas. Na periferia da coluna de plasma, a densidade tem uma descontinuidade que é introduzida para evitar modos superficiais.

Usando o Código *EPCY*, pode-se calcular a dependência da parte real da impedância

de carga da antena como uma função da freqüência do gerador. A geometria e os parâmetros do plasma supostos são característicos do tokamak TCABR: $a = 18cm$, $b = 18,5\ cm$, $d = 23cm$, e $R_0 = 61cm$, correspondendo a uma razão de aspecto de $3,4$. Para o plasma, é suposto que as temperaturas eletrônica e iônica são, respectivamente, $T_e = 500\ eV$ e $T_i = 300\ eV$, enquanto a densidade máxima dos elétrons, n_0, varia entre $1,0 \times 10^{13}$ e $5 \times 10^{13} cm^{-3}$. A densidade de íons foi escolhida de forma que a condição de neutralidade de carga seja satisfeita, $Zn_Z + n_H = n_e$, onde n_Z e n_H designam, respectivamente, as densidades iônicas da impureza e do hidrogênio. Finalmente, o campo magnético toroidal, B_t, varia entre 10 e $15kG$, supondo-se q=$1,01$ no eixo magnético, e q_a variando entre 3 e 4.

Na Fig. 2.4, é apresentado um gráfico da parte resistiva da impedância ($Z_A = W/J_A^2$) da antena helicoidal contra a freqüência para um plasma de hidrogênio, com adição de carbono totalmente ionizado, numa proporção relativa à densidade total (n_C/n_0) que é variada até 3%. A freqüência f é medida em MHz. Os parâmetros seguintes foram usados na Fig. 2.4: $B_t = 10\ kG$, $n_0 = 3 \times 10^{13} cm^{-3}$, $\mu_n = 1$, e $\mu_j = 2,01$. Além disso, supõe-se que só um modo esteja presente, isto é, o modo $m = -1$, $n = -4$. Os fortes picos presentes nos gráficos de impedância correspondem aos modos característicos GA. Estes modos ficam situados dentro do contínuo inferior de Alfvén, sugerindo um aquecimento central do plasma, por conversão de modo em modos cinéticos de Alfvén. Considerando que a ressonância é larga, pequenas mudanças na freqüência dos modos GA, causadas por variações na densidade do plasma, não conduzirão a mudanças significativas na impedância da antena. Para plasmas puros, ondas de Alfvén Globais (descobertas por Ross *et al.*[20] e estudadas por Appert *et al.*[29] para $m = -1, n = -2$) são fortemente excitadas no contínuo das ondas de Alfvén e só existem para números de onda toroidais e poloidais negativos ($m, n < 0$).

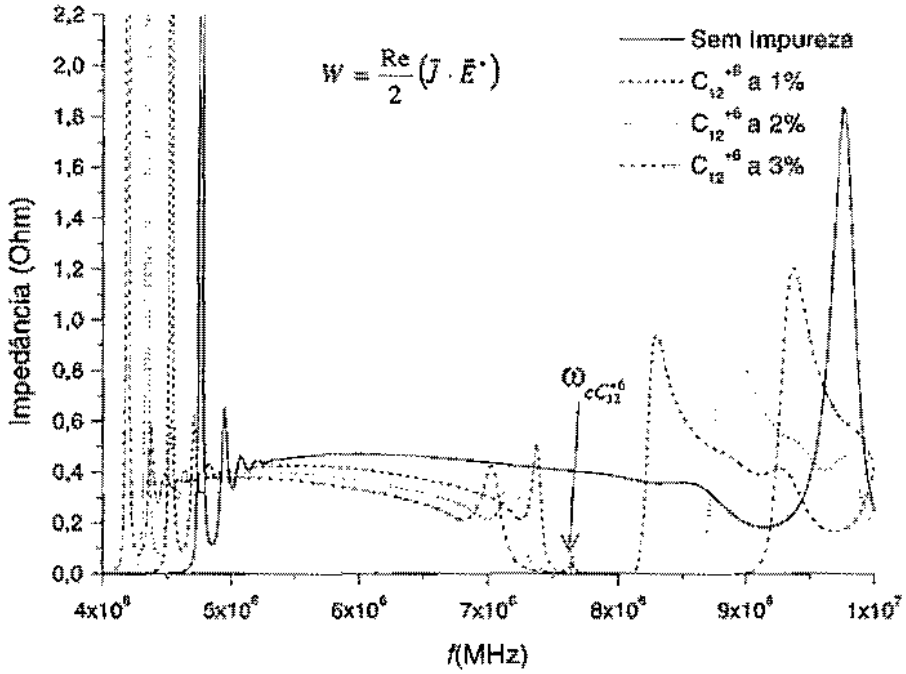


Fig.2.4. Impedância da antena contra freqüência em MHz para um plasma de hidrogênio com concentrações de impureza de carbono diferentes. As curvas de impedância (linhas sólida, tracejada, pontilhada, tracejada-pontilhada) correspondem a concentrações de carbono relativas $n_C/n_0 = 0, 0, 0,01$, $0,02, 0,03$, respectivamente. Uma configuração de antena de modo com número de onda poloidal $m = -1$ e número onda toroidal $n = -4$ é escolhida. Os parâmetros de plasma são $B_t = 10kG$, $q_0 = 1,1$, $q_a = 3,3$, $n_H = 3 \times 10^{13} cm^{-3}$, e $\mu_n = 1,0$.

Com uma pequena população de impurezas acrescentada ao plasma, lacunas aparecem no contínuo de Alfvén próximo à ressonância ciclotrônica iônica da impureza, $\Omega \approx \omega_{cZ} = 7,65 MHz$. Isto pode ser entendido considerando a relação de dispersão local que governa o contínuo de Alfvén,

$$\omega^2 \epsilon_{11}(r) = k_{\parallel}^2(r)\, c^2 \,, \tag{61}$$

onde $\epsilon_{11}(r)$, a componente transversal do tensor de permeabilidade, está definida pela Eq.(59). O contínuo de Alfvén é definido através das soluções da Eq.(61) para a freqüência como uma função do raio, $\omega = \omega_{sh}(r)$. Quando a freqüência está perto da freqüência

ciclotrônica iônica de uma impureza, a Eq. (61) não tem nenhuma solução real, implicando na presença de uma lacuna no contínuo.

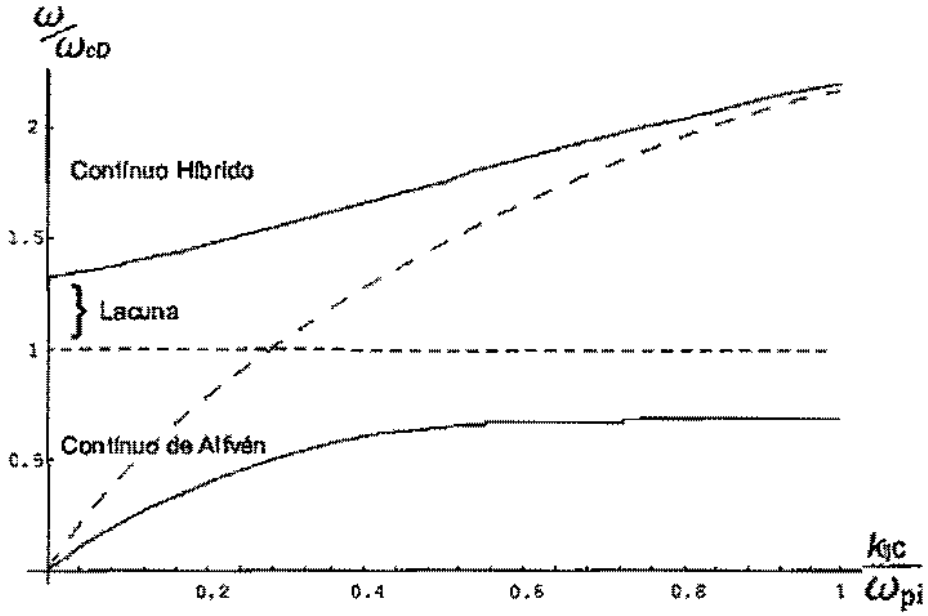


Fig. 2.4 b Contínuo de Alfvén para Plasma de Hidrogênio com impurezas Carbono^{5+} a 7,8% e Deutério^{+1} a 47%.

A solução da Eq.(61) para a freqüência do contínuo de Alfvén tem dois ramos, com $\omega_{sh}^{+}(r)$ e $\omega_{sh}^{-}(r)$, os quais, para um plasma com duas espécies de íon, podem ser escritos da seguinte maneira,

$$\left(\frac{\omega_{sh}^{\pm}}{\omega_{cZ}}\right)^2 = \frac{1+\rho_z+\kappa^2(1+A^2) \pm \sqrt{[1+\rho_z+\kappa^2(1+A^2)]^2 - 4\kappa^2[\rho_z + A^2(1+\kappa^2)]}}{2(\rho_z/A^2+1+\kappa^2)}. \tag{62}$$

Na Eq.(62), ρ_z significa $n_z M_z/n_H M_H$, a razão das densidades de massa da impureza e de hidrogênio, A representa $M_z e/M_H e_z$, a relação de carga-massa de impureza normalizada com a relação de carga-massa de hidrogênio e $\kappa = k_{\parallel}c/\omega_{pH}$, onde ω_{pH} é a freqüência de plasma dos íons de hidrogênio. O ramo superior do contínuo de Alfvén, $\omega_{sh}^{+}(r)$, tem um mínimo na freqüência híbrida íon-íon,

$$\left[\Omega_{th}^{+}\right]_{min} = \omega_{cz}\sqrt{\frac{1+\rho_z}{1+\rho_z/A^2}}. \tag{63}$$

Para modos com $m < 0$ e $n < 0$, menos que 25% da potência dissipada é depositada na região externa do plasma, na faixa $0.5 < r/a < 1$. Logo abaixo da lacuna no contínuo (ao redor 7.2MHz) há picos relacionados com os modos característicos de superfície. Na Fig. 2.4, acima do limiar do Contínuo Híbrido de Alfvén, pode-se observar máximos da impedância que correspondem à onda de Superfície de Alfvén (SA) profundamente imersos no contínuo. A freqüência desta onda SA é diminuída na direção do limiar do Contínuo Híbrido de Alfvén se a densidade de hidrogênio for reduzida de $n_H = 3 \times 10^{13} cm^{-3}$ para $\sim 1,3 \times 10^{13} cm^{-3}$. Finalmente, a onda Global de Alfvén surge abaixo do Contínuo Híbrido de Alfvén se a densidade for menor que $n_H \approx 1,0 \times 10^{13} cm^{-3}$. Este efeito é ilustrado na Fig. 2.5, que mostra a impedância da antena versus freqüência, para freqüências superiores às da região da lacuna, para diferentes valores de densidade de Hidrogênio e $n_C/n_0 = 0,01$, constante.

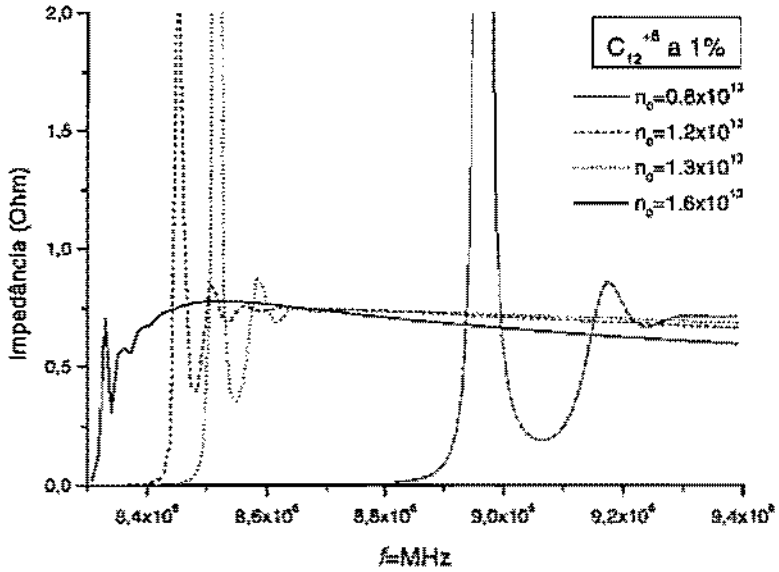


Fig. 2.5 Impedancia da antena contra frequencia para diferentes densidades de plasma de hidrogenio, com concentracao de impureza de carbono, $n_C/n_0 = 0,01$. As curvas de impedancia (solida, tracejada, pontilhada, tracejada-pontilhada) correspondem a densidades do plasma: $n_H = 1,6 \times 10^{13} cm^{-3}$, $1,3 \times 10^{13} cm^{-3}$, $1,2 \times 10^{13} cm^{-3}$, $0,8 \times 10^{13} cm^{-3}$, respectivamente. A configuracao de antena e de modo poloidal $m = -1$ e toroidal $n = -4$. Os outros parametros do plasma sao iguais as da Fig.2.4.

Próximo ao limiar do contínuo, a onda SA muda a estrutura dos campos da onda para um Modo Combinado de Alfvén (MCA). A estrutura dos campos de RF no MCA tem um caráter intermediário entre as ondas SA e ondas GA (veja [8, 19]). Para ilustrar o caráter do MCA, a Fig. 2.6a mostra a distribuição radial das componentes E_r e E_p do campo de RF e a potência dissipada da onda, Q. Na Fig. 2.6a são apresentados os resultados dos cálculos para a ressonância do MCA num plasma de hidrogênio, com densidade $n_H = 1,2 \times 10^{13} cm^{-3}$ e concentração de impureza de carbono relativa $n_C/n_i = 0,01$.

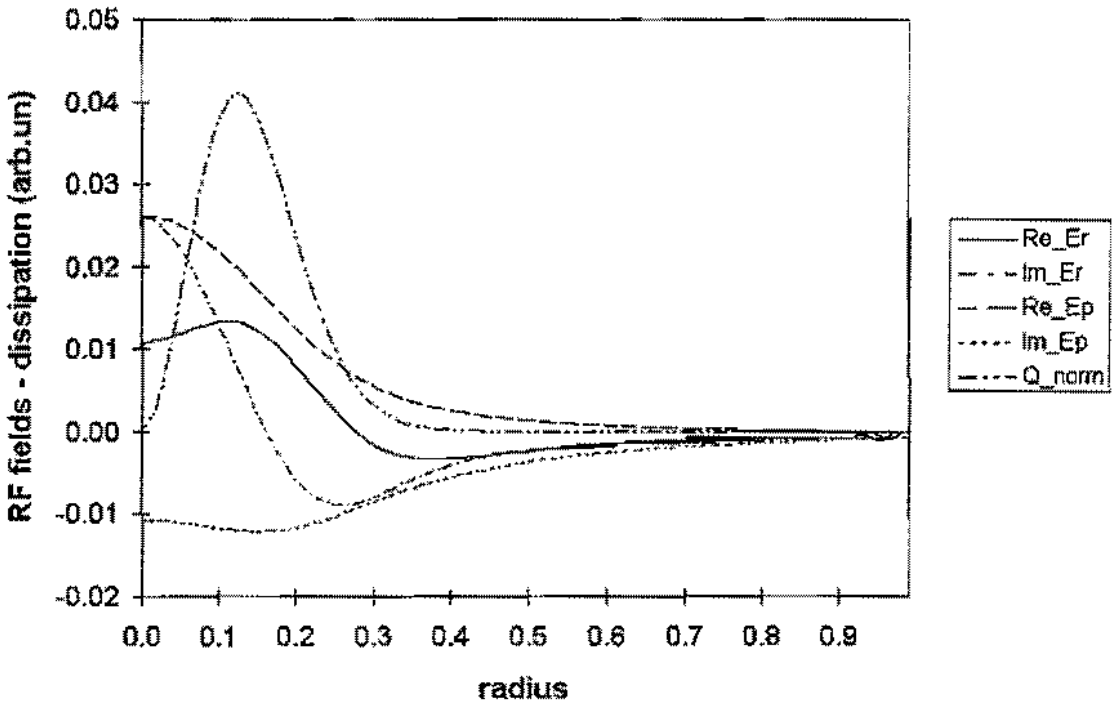


Fig. 2.6a Distribuição radial das componentes radial, E_r, e poloidal, E_p, do campo elétrico e a potência dissipada, Q, da onda. As curvas (linhas sólida, tracejada, pontilhada, tracejada-pontilhada) correspondem às partes real e imaginária das componentes do campo elétrico, ReE_r, ImE_r, ReE_pe ImE_p, respectivamente, em unidades arbitrárias. A linha pontilhada-tracejada-pontilhada corresponde à distribuição da potência dissipada pela onda, Q_{norm}. A freqüência do gerador é 8,58MHz, e os números de onda poloidal e toroidal são, $m = -1$e $n = -4$. Foram mantidos os parâmetros de plasma indicados na Fig.2.4.

Na Fig. 2.6a, a componente $\mathrm{Im}\, E_r$ do modo MCA se anula perto do centro do plasma, no raio $r = 0,16$, onde o máximo de dissipação da onda é obtido. Isto significa que o MCA apresenta um ponto de conversão como a onda SA, mas aquece o centro do plasma como a onda GA. Este regime é muito bom para o aquecimento por ondas de Alfvén e geração de corrente, mas a densidade ($n_H = 1,2 \times 10^{13} cm^{-3}$) é muito baixa e a concentração real da impureza de carbono é muito alta para condições padrão no tokamak TCABR.

Para os números de onda poloidal e toroidal $m = -1$ e $n = -6$ e freqüência do gerador de 9, 1MHz, são encontradas as condições otimizadas para o aquecimento e geração de corrente no plasma do TCABR por ondas de Alfvén, com a densidade $n_H = 2,3 \times 10^{13} cm^{-3}$ e concentração de impureza de carbono $n_C/n_i = 0,02$. Os perfís de campo elétrico e potência dissipada para estes parâmetros são mostrados na Fig. 2.6b.

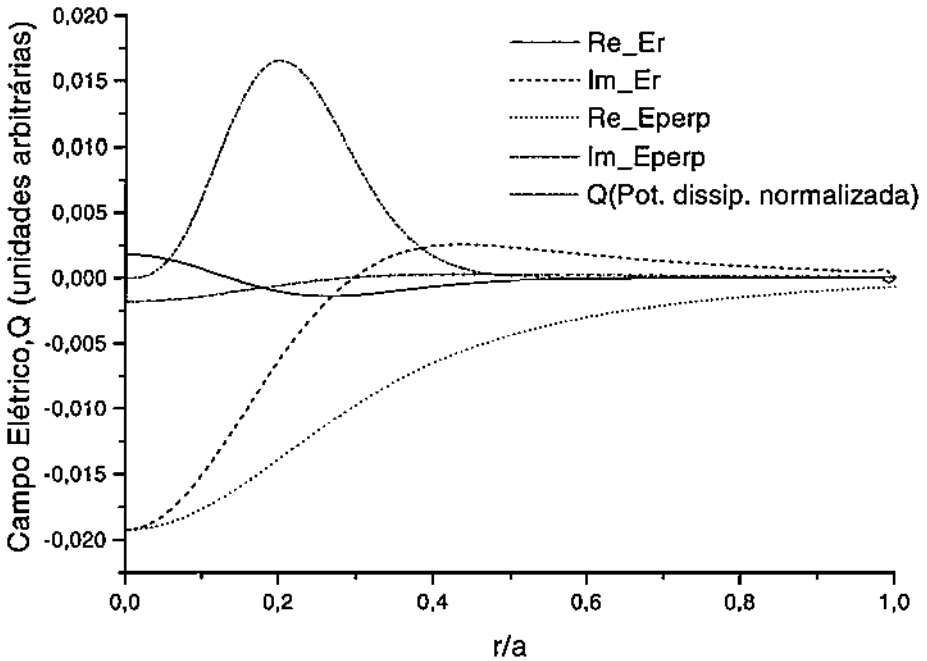


Fig. 2.6b Distribuição radial das componentes radial, E_r, e poloidal, E_p, do campo elétrico e a potência dissipada, Q, da onda. A freqüência do gerador é 9, 1MHz, a densidade de elétrons $n_H = 2,3 \times 10^{13} cm^{-3}$, a densidade de carbono é de 2% e os números de onda poloidal e toroidal são, $m = -1$e $n = -6$.

Para os números de onda poloidal e toroidal $m = -1$e $n = -8$ e freqüência do gerador de $9,72$MHz, as mesmas condições otimizadas podem ser alcançadas no plasma do TCABR, com densidade $n_H = 3,5 \times 10^{13} cm^{-3}$ e concentração de impureza de carbono $n_C/n_i = 0,03$. Os cálculos mostram que a freqüência da onda GA no limiar do Contínuo Híbrido de Alfvén é fixa para uma concentração de impureza fixa e para número de onda paralelo normalizado fixo, $k_{\|}c/\omega_{pH}$. Estas condições de aquecimento podem ser mudadas se o perfil de densidade for modificado. A Fig. 2.7 ilustra as modificações da impedância do plasma para $m = -1$ e $n = -6$ causadas pelas variações do parâmetro de perfil de densidade, μ_n.

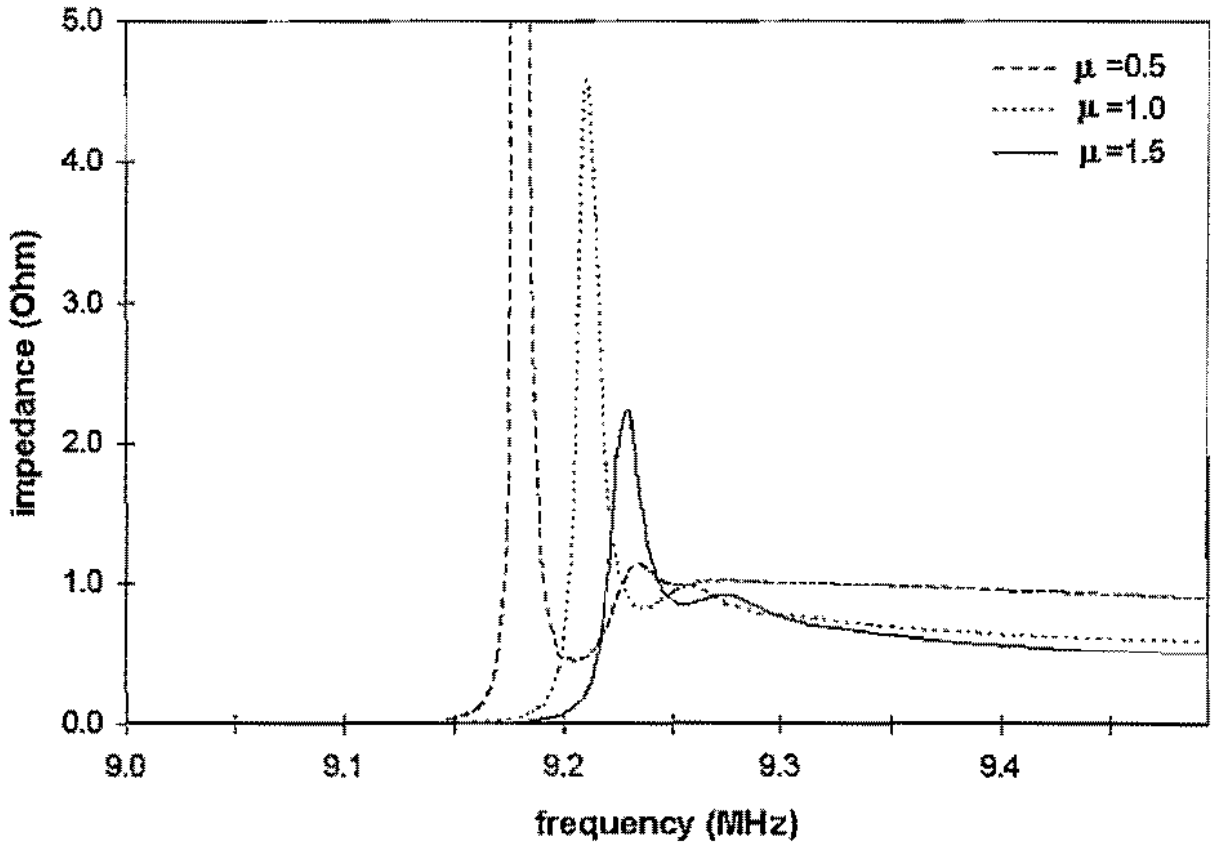


Fig. 2.7 Gráfico da impedância da antena $m/n = -1/-6$ versus a freqüência, para densidade $n_H = 2,2 \times 10^{13} cm^{-3}$, concentração de impureza de carbono de $n_C/n_i = 2\%$ e vários valores do parâmetro do perfil de densidade μ_n. As curvas (linhas tracejada, pontilhada e sólida) correspondem a $\mu_n = 0,5; 1,0; 1,5$, respectivamente.

Na Fig. 2.7, é mostrado que a onda Global de Alfvén se situa abaixo do Contínuo Híbrido de Alfvén para $n_H = 2,2 \times 10^{13} cm^{-3}$ e $\mu_n = 0,5$. A onda GA entra na contínuo quando o perfil de densidade é estreitado (para $\mu_n = 1,5$). Nota-se que o comportamento da onda global, perto do Contínuo Híbrido de Alfvén, não é tão sensível à variação do perfil de corrente (ou o parâmetro q) em comparação com as variações do parâmetro μ_n.

Na Fig. 2.8, são apresentadas as características de dispersão da onda SA e modos GA e ilustrada a lacuna no Contínuo de Alfvén, para um plasma de hidrogênio com a espécie de impureza carbono e com perfil de densidade parabólico $\mu_n = 1,0$.

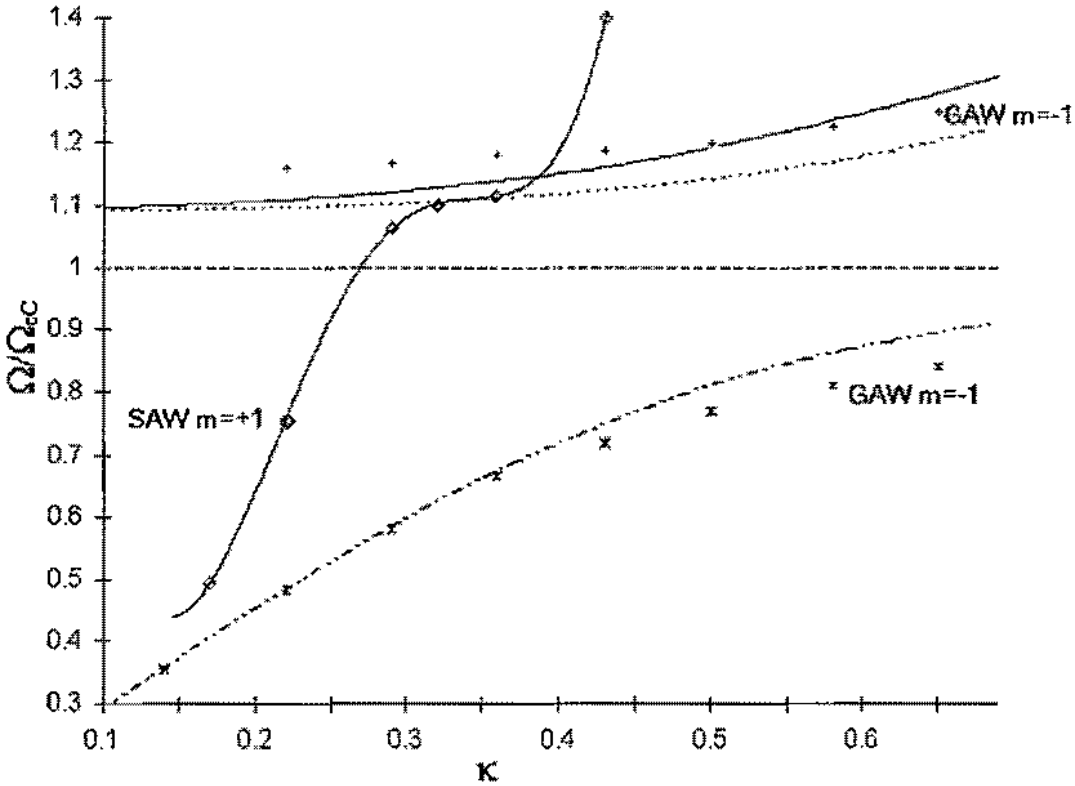


Fig. 2.8 Gráfico da freqüência normalizada do modo característico em um plasma de hidrogênio com 2 % de impureza de carbono contra o número de onda toroidal negativo normalizado κ. Para $m = -1$, a freqüência do limiar inferior do Contínuo de Alfvén é representada pela linha de ponto-traço-ponto, o Contínuo Híbrido de Alfvén é representado pela linha sólida e a freqüência do modo GA está rotulada com cruzes; para $m = +1$, o Contínuo Híbrido de Alfvén é representado através de linha pontilhada e a onda SA está rotulada com diamantes ligados por uma linha sólida. Os outros parâmetros de plasma são

iguais aos da Fig.2.4.

São identificados e comparados dois grupos de modos na Fig. 2.8. Estão graficadas a freqüência de limiar do contínuo de Alfvén para $m = \pm 1$, a freqüência da onda GA para $m = -1$ e a onda SA para $m = +1$, que são normalizadas à freqüência ciclotrônica do carbono ω_{cC}, contra o número de onda toroidal negativo normalizado, $\kappa = -cn/(R_0\omega_{pH})$. É mostrado que a onda GA ($m = -1$), que normalmente está situada abaixo do contínuo de Alfvén, entra no contínuo quando a densidade dos íons de hidrogênio aumenta (ou o parâmetro κ diminui).

A Fig. 2.8 mostra ainda que o modo de Superfície de Alfvén ($m = +1$) de fato cruza o contínuo de Alfvén, a lacuna do contínuo e o Contínuo Híbrido de Alfvén. Se a freqüência deste modo estiver no contínuo, a estrutura do campo de RF é a de um típico modo de superfície com ponto de conversão. Uma característica importante do modo de Alfvén com m positivo, é que seu caráter muda de um modo de superfície, quando está longe do contínuo, para um modo global quando chega à região do contínuo. Próximo ao limiar do Contínuo Híbrido de Alfvén, a curva da freqüência característica deste modo está estendida junto à linha do contínuo e, aqui, a estrutura do modo da superfície é mudada dramaticamente para uma combinação da onda GA e da onda SA, com ponto de conversão, dentro do Contínuo Híbrido de Alfvén. Neste caso, o centro do plasma pode ser aquecido também efetivamente como no caso da onda Combinada de Alfvén para $m = -1$ (veja comentários na Fig. 2.5 e Fig. 2.6a).

Para modelar as experiências de aquecimento por RF e a geração de corrente no tokamak TCABR, que pode simular as condições de um reator de fusão com plasma de dois de componentes, é escolhida a mistura de plasma de Hidrogênio-$^3He^{+2}$ na proporção 66% – 34%, respectivamente. Esta proporção simula o Contínuo de Alfvén do plasma com mistura de D-T 50% – 50% num reator (substituindo os valores relativos às quantidades

$A = M_z e/M_H e_z$ e $\rho_z = n_z M_z/n_H M_H$ na Eq.(62)). Aqui, é proposto um campo magnético toroidal de $15kG$ e $q_a = 3.3$. Na Fig. 2.9, é mostrada a impedância da antena contra a freqüência para os números de onda poloidal, $m = 1$, e toroidal, $n = -4$. A impedância da antena é calculada nas redondezas do limiar do Contínuo Híbrido de Alfvén para um plasma com densidade $n_H = 1,9$ e $2 \times 10^{13} cm^{-3}$. São encontradas as condições ótimas para o aquecimento dos elétrons e a geração de corrente no centro de plasma quando a onda SA entra no Contínuo Híbrido de Alfvén e se torna um MCA para a freqüência de $19,01$ MHz, com o ponto de conversão de modos em $r \approx 0,1a$. Neste caso, a distribuição da potência dissipada da onda na ressonância do MCA também é mostrada na Fig. 2.9.

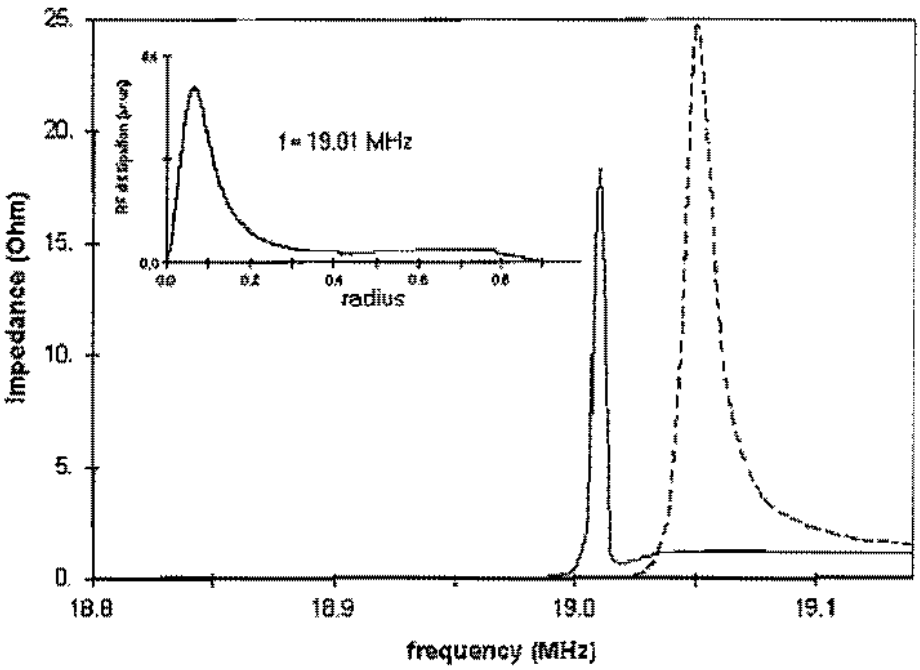


Fig.2.9 Gráfico da impedância da antena ($m = 1, n = -4$) contra a freqüência, para um plasma com mistura hidrogênio-$^3He^{+2}$ na proporção de 66%-34 %. As curvas (pontilhada e sólida) correspondem à densidade do plasma de hidrogênio $n_H = 2 \times 10^{13} cm^{-3}$ and $n_H = 1,9 \times 10^{13} cm^{-3}$, respectivamente. O campo magnético toroidal é de $15kG$ e $q_a = 3,3$. A distribuição da potência dissipada da onda é mostrada no canto de superior esquerda para a freqüência de ressonância do MCA de $19,01 MHz$ e a densidade de hidrogênio de $1,9 \times 10^{13} cm^{-3}$.

2.6 Discussão e Conclusão

Usando as Equações de Maxwell em uma geometria cilíndrica para resolver o problema de valor de contorno para a excitação do campo de RF, a ressonância da onda de Alfvén em um plasma magnetizado inomogêneo foi estudada analiticamente e numericamente. Com base nestes cálculos, concluímos que

- Quando a freqüência do campo eletromagnético está no contínuo de Alfvén, dois tipos de ressonâncias de ondas de Alfvén são excitadas. Uma delas está relacionada com o efeito de conversão de modos do campo de RF em KAW/QEAW (ou AWR local) e a outra ressonância está conectada com a excitação direta de KAW/QEAW na periferia do plasma. Estas duas ressonâncias estão misturadas se a dissipação da onda cinética de Alfvén (ou onda quase-electrostática de Alfvén) estiver ausente.

- Levando em conta a dissipação da onda pelo amortecimento eletrônico de Landau e/ou colisional, as ressonâncias locais da onda de Alfvén começam a aparecer quando o intervalo em r onde há a dissipação KAW/QEAW se torna menor que a distância entre o ponto de conversão e o centro do plasma (ou da periferia do plasma). Neste caso, o limite MHD da solução geral pode ser encontrado e o valor total da potência dissipada calculada pelo modelo geral coincide com o valor calculado pelo modelo MHD.

- Outro ponto muito importante para entender a validade de um código MHD bidimensional aparece quando, por exemplo, devido à toroidicidade, são introduzidas múltiplas zonas de ressonância de Alfvén locais no plasma[11]. Então, a faixa de dissipação da KAW/QEAW deveria ser menor que a distância entre duas ressonâncias de Alfvén vizinhas[30], caso contrário, as ressonâncias das ondas de Alfvén podem ser sobrepostas e o valor total da potência dissipada calculada pelo modelo MHD pode diferir do valor correto.

Os cálculos e a análise apresentados neste capítulo foram baseados no modelo uni-

dimensional da excitação da onda de Alfvén e do aquecimento no contínuo. Geralmente, este modelo é uma aproximação razoável para as análises da onda Global de Alfvén e fenômenos de conversão de modos em um plasma de tokamak com múltiplas espécies de íons quando a freqüência de gerador, ω, está situada no limiar do Contínuo de Alfvén. Neste caso, o parâmetro de toroidicidade é muito pequeno, $r/R_0 \ll 1$, e efeitos toroidais não são importantes. Para evitar a ressonância ciclotrônica efetiva dentro do Contínuo Híbrido de Alfvén, é preciso escolher a faixa de freqüência,

$$\omega_{cZ,hfs} < \omega < \omega_{cH,lfs}, \tag{64}$$

onde $\omega_{cZ,hfs}$ representa a freqüência ciclotrônica da impureza no lado de maior valor do campo magnético da coluna de plasma do tokamak, $\omega_{cZ}(0)/(1-a/R_0)$, e $\omega_{cH,lfs}$ representa $\omega_{cH}(0)/(1+a/R_0)$, a freqüência ciclotrônica de hidrogênio no lado de menor valor do campo da coluna de plasma do tokamak. Esta limitação da faixa de freqüências às ondas de Alfvén de Superfície com $m < 0$ (estes modos são suprimidos nas zonas de ressonância ciclotrônica iônica) é imposta pela inomogeneidade espacial do campo magnético do tokamak. Não há nenhuma limitação de faixa de freqüências para ondas de superfície com m positivo, isto é, as ondas rápidas, porque a dissipação destas ondas é muito fraca na ressonância ciclotrônica iônica.

A limitação da faixa de freqüência para modos característicos GA,

$$\Omega_{ii}(0) < \omega_{GA} < \omega_{cH,lfs},$$

é mais fraca porque estes modos só existem no centro da coluna de plasma. O limite superior desta desigualdade é igual à Eq.(64) porque a zona de freqüência de ressonância ciclotrônica do hidrogênio no lado de campo baixo não permite a passagem de campos de RF de ondas GA ($m < 0$) da antena ao centro do plasma devido à polarização. O limite inferior do modo GA é, de acordo com a Eq.(62), a freqüência limite híbrida íon-íon no

centro de plasma.

Os cálculos de dissipação e dispersão da onda de Alfvén na parte superior do contínuo de Alfvén no plasma de duas espécies de íons demonstraram uma influência forte de impurezas no valor da impedância da antena, na posição da potência dissipada e na dispersão de modos característicos de Alfvén.

As freqüências dos modos característicos GA, perto do ramo mais baixo do contínuo de Alfvén em plasmas de várias espécies, saturam para grandes números de onda paralelo. Próximo ao ramo superior do contínuo de Alfvén, as freqüências dos modos de superfície dependem fracamente do número de onda. A condição de fraca dependência com o número de onda paralelo tem uma implicação importante e insinua um eficiente aquecimento do plasma com uma antena que tem um largo espectro de comprimento de onda toroidal.

São encontradas condições para o aquecimento da coluna de plasma com ondas de Alfvén em plasmas de duas espécies para um tokamak de tamanho médio, como o TCABR, quando os modos da onda GA caem dentro do Contínuo de Alfvén. Se qualquer uma destas condições estiver satisfeita, a maior parte da potência dissipada de RF é enviada ao centro do plasma por conversão de modo na onda de Alfvén cinética. Especificamente, com um número de modo toroidal $n = -4$ e um número de modo poloidal $m = -1$, e um gerador com freqüência $0,29$ vezes a freqüência ciclotrônica do hidrogênio para o contínuo inferior de Alfvén (a densidade do plasma é de $3 \times 10^{13} cm^{-3}$) e $0,57$ vezes a freqüência ciclotrônica do hidrogênio para o Contínuo Híbrido de Alfvén (a densidade do plasma é de $1,2 \times 10^{13} cm^{-3}$), o aquecimento central do plasma acontecerá em um plasma de hidrogênio com uma concentração de impureza de carbono de $0,02$. Estas condições podem ser satisfeitas para os outros modos toroidais, de $n = -4$ para -6, de acordo com o diagrama de dispersão da Fig. 2.8 (com $\kappa \cong 0,28$ e $0,355$, respectivamente).

Com números de modo poloidal positivo, também são encontradas as condições para

aquecimento central de plasmas de duas espécies com o Modo Combinado de Alfvén, quando estes modos caem dentro do Contínuo de Alfvén, perto do limiar. Especificamente, com um número de modo toroidal $n = -4$ e um número de modo poloidal $m = +1$, e uma freqüência do gerador de $0,83$ vezes a freqüência ciclotrônica do hidrogênio para o Contínuo Híbrido de Alfvén (a densidade do plasma é de $1,9 \times 10^{13} cm^{-3}$). O aquecimento central do plasma acontecerá em um plasma de hidrogênio com a adição de uma concentração de $^3He^{+2}$ de $0,34$. Neste caso, a velocidade de fase, $2\pi f/k_{\|}$, é aproximadamente $2,5$ vezes a velocidade térmica dos elétrons. Nesta condição, a geração de corrente por ondas de Alfvén pode ser alcançada muito efetivamente no contínuo híbrido inferior (veja comentário na Ref. [31]). Estas experiências de geração de corrente no tokamak TCABR podem simular a geração de corrente com D-T em plasmas de reatores de fusão.

3 CÓDIGO TOROIDAL

3.1 Histórico

O Código ALFVEN foi escrito em sua versão cilíndrica inicial, por G. L. CHEN e D. W. Ross em 1981[20] e sofreu várias correções até a inclusão dos termos de impurezas por W.Q. Li, em 1987[28]. Em 1991 o código foi finalmente adaptado (por W.Q. Li) para o acoplamento de três modos poloidais e sua forma bidimensional foi definida com modificações introduzidas por D.W. Ross, W.H. Miner, J. C. Wiley e R.R. Mett até setembro de1992. Foi trazida para o instituto de Física da USP em novembro de 1997 por G. S. Amarante Segundo, após um estágio na Universidade do Texas em Austin, onde o código foi desenvolvido. Este último introduziu algumas modificações no código, principalmente adicionando o módulo de cálculo de forças ponderomotoras.

3.2 Introdução

Para grande parte das situações físicas que se quer modelar num tokamak, uma primeira aproximação local ou um modelo em geometria cilíndrica oferece uma compreensão qualitativa dos fenômenos bastante satisfatória. Na busca de refinar os resultados já obtidos ou, principalmente, quando a tarefa proposta é a determinação quantitativa de regimes otimizados a serem verificados experimentalmente, é necessário ir mais adiante na inclusão de efeitos resultantes de um modelamento mais realista do sistema.

Neste capítulo, e nos seguintes, serão apresentados vários resultados que comprovam haver diferenças muito importantes das situações de interesse calculadas com um código de aproximação cilíndrica e com o código toroidal aqui apresentado. O acoplamento de modos poloidais permite uma avaliação aproximada de um sistema toroidal real, mas introduz uma série de mudança nos resultados, particularmente nos perfís dos campos

quando dos modos Globais de Alfvén.

Neste capítulo há uma suscinta descrição do funcionamento do código (com os cálculos apresentados no Apêndice E) e são listados e discutidos os principais resultados.

Evidentemente, mudanças podem ser efetuadas no código para que ele se aperfeiçoe ainda mais, e algumas sugestões neste sentido são feitas no Capítulo 5.

3.3 O Código

O código cinético toroidal usado neste trabalho é baseado no modelo toroidal de plasma simplificado já presente nas Refs.[32]. O código calcula os campos das ondas de Alfvén e a dissipação em plasmas magnetizados com duas espécies de íons e apresentando superfícies magnéticas circulares e concêntricas. São usadas coordenadas pseudo-toroidais (definidas via as transformações $R = R_0 + r\cos\theta$, ζ, e $Z = r\sin\theta$), onde R_0 é o raio maior da seção transversal da coluna de plasma de raio menor a e Z é a coordenada azimutal do sistema toroidal, conforme mostrado na Fig. 3.1.

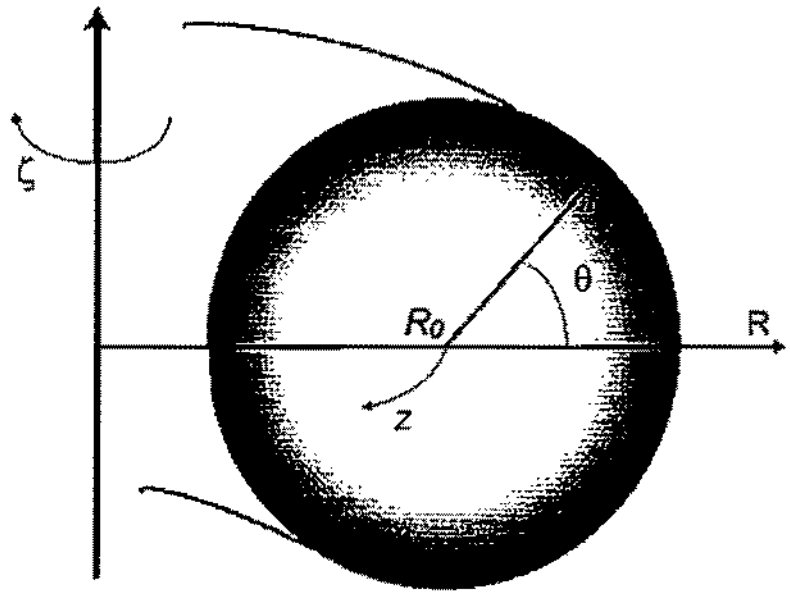


Figura 3.1 - Esquema das coordenadas toroidais do código bidimensional.

As equações de Maxwell acopladas (repetindo a Eq.(9)),

$$\frac{\omega^2}{c^2} \overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{E} - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \tag{65}$$

são resolvidas no sistema de coordenadas acima descrito, onde, $\overleftrightarrow{\epsilon}$ é o tensor dielétrico. A análise é simplificada usando a aproximação de pequena toroidicidade, $\epsilon = r/R_0 \ll 1$. Neste caso, as componentes do campo magnético de equilíbrio podem ser representadas na forma

$$\vec{B} \approx B_0 \left(\hat{\zeta} + \hat{\theta}\delta\right)(1 - \epsilon \cos\theta), \tag{66}$$

onde $\delta = \epsilon/q$, $q = rB_0/(R_0 B_\theta)$ e $\hat{\zeta}, \hat{\theta}$, são os vetores unitários nas direções toroidal e poloidal, respectivamente. Os efeitos das colisões, do raio iônico de Larmor finito ($\rho_L = v_{Ti}/\omega_{ci}$), ω/ω_{ci} (parâmetro de Hall, onde ω_{ci} é a freqüência ciclotrônica iônica) finito, do amortecimento de Landau eletrônico, e de bombeamento magnético por tempo de trânsito (*transit time magnetic pumping*) são levados em consideração na dispersão e dissipação da onda. Todavia, é feita a hipótese de que os raios de Larmor eletrônico e iônico são ambos muito menores que o comprimento radial característico das quantidades de equilíbrio do plasma e dos campos de RF. Apesar de o código toroidal, na aproximação utilizada, acoplar apenas os modos principais e seus vizinhos mais imediatos, m e $m\pm1$, um número arbitrário de modos (não acoplados) pode ser usado para revelar efeitos cinéticos na excitação dos campos de RF. Com a aproximação de pequena toroidicidade, o tensor dielétrico, $\overleftrightarrow{\epsilon}$, é reduzido à sua forma local cilíndrica com correções toroidais de primeira ordem (Ver Apêndice B). Os outros parâmetros, como cisalhamento magnético, perfil de densidade, e distribuções de temperatura são as mesmas do Capítulo 2.

O sistema dado pela Eq.(65) pode ser descrito por um operador matricial usando um sistema local com coordenadas paralela e perpendicular às linhas de campo magnético.

Os vetores unitários correspondentes são

$$\hat{e}_{//} = \frac{\hat{\zeta} + \hat{\theta}\delta}{(1+\delta^2)^{1/2}} \text{ and } \hat{e}_{\perp} = \hat{e}_{\parallel} \times \hat{e}_r. \tag{67}$$

A álgebra é simplificada impondo a condição de corrente fechada,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \frac{1}{rR}\frac{\partial}{\partial r} rRJ_r + \frac{1}{rR}\frac{\partial}{\partial \theta} RJ_\theta + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \zeta} J_\zeta = 0, \tag{68}$$

onde $J_\zeta = (B_\zeta J_\parallel - B_\theta J_\perp)/B$ e $J_\theta = (B_\zeta J_\perp + B_\theta J_\parallel)/B$ para a corrente excitada pela onda. Da Lei de Ampére com a corrente de deslocamento desprezada, a corrente de plasma é dada por

$$\vec{J} = \frac{1}{i\mu_0\omega}\frac{\omega^2}{c^2}\overleftrightarrow{\chi} \cdot \vec{E}. \tag{69}$$

Usando a Eq.(68), $E_\parallel$ pode ser expressa em termos de E_r e $E_\perp$, e a parte $E_\parallel$ na Eq.(65) pode ser eliminada, reduzindo a ordem do sistema de equações. Ele é resolvido como um problema de valor de contorno, para os componentes E_j do campo de RF no plasma. Tal tarefa é levada a cabo construindo-se um equação matricial para representar as equações diferenciais de segunda-ordem acopladas na forma de Einstein,

$$\frac{A_{ij}(r)}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} E_j + B_{ij}(r)\frac{\partial}{\partial r} E_j + C_{ij}(r) E_j = S_i(r), \tag{70}$$

onde A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} são os coeficientes da matriz que operam as componentes do campo elétrico e S_i é um vetor de fonte onde são incluídas as condição de contorno. A notação compacta resultante do conjunto de equações matriciais é determinada por

$$\hat{L}\vec{E} = \hat{L}_0\vec{E} + \left(2\frac{r}{R_0}\cos\theta \hat{L}_S + 2\frac{r}{R_0}\sin\theta \hat{L}_A\right)\vec{E} = 0, \tag{71}$$

que consiste em uma parte cilíndrica e duas partes toroidais proporcionais a r/R_0. Os operadores $\hat{L}_0, \hat{L}_S$, e $\hat{L}_A$ são explicitados na Ref. [20]. As equações sofrem uma transformação de Fourier e, como resultado, podem ser representadas na forma de uma equação matricial

6×6 com acoplamento harmônico poloidal de primeira ordem,

$$\begin{pmatrix} \widehat{L}^{m-1}_{0rr} & \widehat{L}^{m-1}_{0r\perp} & \hat{e}\,(L^-)^m_{rr} & \hat{e}\,(L^-)^m_{r\perp} & 0 & 0 \\ \widehat{L}^{m-1}_{0\perp r} & \widehat{L}^{m-1}_{0\perp\perp} & \hat{e}\,(L^-)^m_{\perp r} & \hat{e}\,(L^-)^m_{\perp\perp} & 0 & 0 \\ \hat{e}\,(L^+)^{m-1}_{rr} & \hat{e}\,(L^+)^{m-1}_{r\perp} & \widehat{L}^m_{0rr} & \widehat{L}^m_{0r\perp} & \hat{e}\,(L^-)^{m+1}_{rr} & \hat{e}\,(L^-)^{m+1}_{r\perp} \\ \hat{e}\,(L^+)^{m-1}_{\perp r} & \hat{e}\,(L^+)^{m-1}_{\perp\perp} & \widehat{L}^m_{0\perp r} & \widehat{L}^m_{0\perp\perp} & \hat{e}\,(L^-)^{m+1}_{\perp r} & \hat{e}\,(L^-)^{m+1}_{\perp\perp} \\ 0 & 0 & \hat{e}\,(L^+)^m_{rr} & \hat{e}\,(L^+)^m_{r\perp} & \widehat{L}^{m+1}_{0rr} & \widehat{L}^{m+1}_{0r\perp} \\ 0 & 0 & \hat{e}\,(L^+)^m_{\perp r} & \hat{e}\,(L^+)^m_{\perp\perp} & \widehat{L}^{m+1}_{0\perp r} & \widehat{L}^{m+1}_{0\perp\perp} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E^{m-1}_r \\ E^{m-1}_\perp \\ E^m_r \\ E^m_\perp \\ E^{m+1}_r \\ E^{m+1}_\perp \end{pmatrix} = S^m_i, \tag{72}$$

onde $L^+ = \widehat{L}_S + \widehat{L}_A$; $L^- = \widehat{L}_S - \widehat{L}_A$. As condições de contorno são especificadas no vetor S^m_i e o problema é resolvido finalmente por uma rotina spline-Galerkin cúbica[20]. Nos cálculos mostrados aqui, são usados 700 pontos radiais dispostos numa grade com pontos menos espaçados para r próximo de a (a disposição dos pontos é configurável) e 3 harmônicos poloidais. O código gera os perfis das componentes dos campos elétrico e magnético e o perfil de deposição de energia ($\vec{J} \cdot \vec{E} = \vec{E}^* \cdot \overleftrightarrow{\chi} \cdot \vec{E}$). Levando a cabo uma integração radial, a impedância da antena pode ser diretamente calculada.

É suposto que os campos de RF são produzidos por uma antena de corrente superficial no limite cilíndrico (com modos poloidal e toroidal de números M e N, respectivamente). As componentes ζ e θ da corrente superficial, situada em uma superfície de raio b, são dadas por

$$J_{\zeta,\theta} = J^{(M,N)}_{\zeta,\theta}\ \delta(r-b)\ exp[i(M\theta + N\zeta - \omega t)]\,, \tag{73}$$

onde $J^{(M,N)}_{z,\theta}$ é a amplitude constante do harmônico M, N e ω é a frequência do gerador. A corrente na antena é especificada através de condições de contorno nas componentes do campo magnético de RF nas espiras de raio b. Em torno da superfície da antena há um região de vácuo envolta por uma parede condutora de raio d. Os campos no vácuo são calculados analiticamente e normalizam os campos de plasma através de condições de contorno apropriadas no raio a.

3.4 Dissipação da onda de Alfvén

A câmara de vácuo do tokamak TCABR tem um corte transversal retangular e a antena é feita por um conjunto de semi-círculos poloidais em fase que produzem um campo de RF helicoidal[33]. Porém, as simulações podem ser levadas a cabo usando uma geometria de tokamak de corte transversal circular, com os seguintes parâmetros: raio da coluna $a = 0,18m$; raio maior $R_0 = 0,61m$; raio da superfície da antena $b = 0,184\ m$; raio da parede $d = 0,23\ m$.

Em sua fase inicial, a máquina será operada com um campo magnético toroidal máximo $B_t = 1T$ e uma corrente de plasma máxima $I_p = 120kA$, em um plasma de hidrogênio. Os cálculos são efetuados supondo-se um perfil de temperatura dado por $T_\alpha = T_{\alpha 0}(1 - r^2/a^2)^2$, com $\alpha = e, i$, $T_{e0} = 500\ eV$ e $T_{i0} = 300\ eV$, respectivamente. O perfil de densidade eletrônica é da forma $n_e = n_0(1 - r^2/a^2) + n_a$, com $n_0 = 3 \times 10^{19} m^{-3}$ e $n_a = 1 \times 10^{18} m^{-3}$. É escolhido um valor alto para a densidade de pedestal n_a para evitar muitas ressonâncias de Alfvén perto da periferia do plasma (tal expediente também é utilizado no código cilíndrico, página 44). A densidade iônica é escolhida de forma a satisfazer a exigência de neutralidade de carga, $Zn_Z + n_i = n_e$, onde n_Z e n_i designam as densidades da impureza e os íons de hidrogênio (ou deutério), respectivamente. O perfil da impureza pode ser especificado arbitrariamente, porém, nos cálculos mostrados neste trabalho, os perfís da impureza são proporcionais aos dos íons. Finalmente, supõe-se o perfil de densidade de corrente na forma $j = j_0(1 - r^2/a^2)^3$ e os valores da transformada rotacional inversa na faixa $0,8 \leq q_0 \leq 1,6$, no eixo magnético, e $3,2 \leq q_a \leq 6,4$ na periferia. A real estrutura do novo sistema de antenas do TCABR é levada em conta nos coeficientes calculados na Ref.[33]. Um único modo de antena é considerado, que corresponde à componente principal dada pela análise de Fourier do sistema da antena real.

É considerado inicialmente o caso do plasma de hidrogênio puro. Na Fig. 3.2 é apresentada a curva da impedância Z_{MN}, plotada como função da freqüência do gerador e normalizada à freqüência do limiar do contínuo de Alfvén para cada modo,

$$\omega_{th} = k_{\|} c_A / \sqrt{1 + (k_{\|} c_A)^2 / \omega_{ci}^2}$$

para diferentes números de modo toroidal, N, do espectro de antena. $k_{\|} = (n + m/q)/R_0$ é o número de onda paralelo, m e n são os números de onda poloidal e toroidal, respectivamente, e $c_A = B_0/\sqrt{\mu_0 m_i n_i}$ é a velocidade de Alfvén (Os números de onda toroidal e poloidal são representados através de letras maiúsculas quando citado o modo principal da antena e por minúsculas quando citados os modos de fato excitados no plasma). Os valores dos parâmetros pertinentes são determinados nas legendas das figuras.

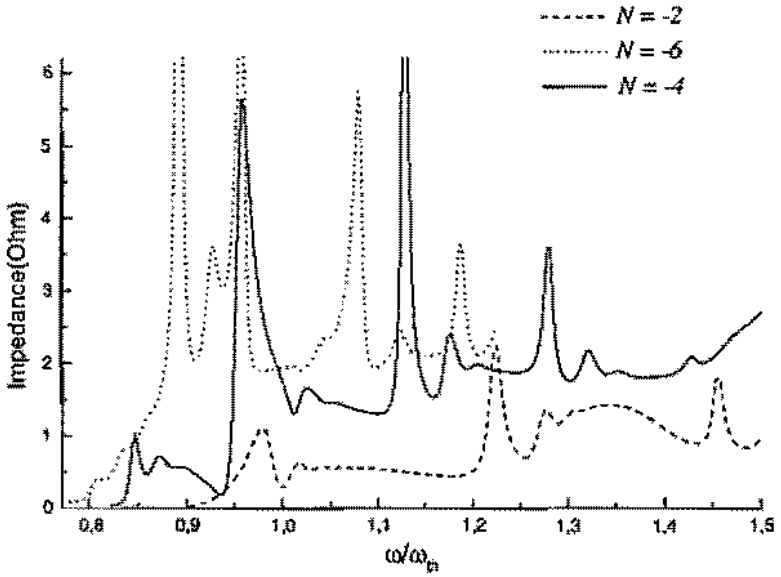


Fig. 3.2. Impedância da Antena para um plasma de hidrogênio contra a freqüência normalizada para a freqüêencia mínima do contínuo de cada modo (ω_{th}). As curvas de impedância (pontilhada, sólida e espaçada) correspondem aos números de onda toroidal diferentes $N = -2, -4, -6$, respectivamente, do espectro da antena para número de onda poloidal fixo $M = -1$. Os parâmetros do plasma são $n_0 = 3 \times 10^{19} m^{-3}$, $T_{e0} = 500eV$, $B_t = 1.\ T$, $q_0 = 1.1$ e $q_a = 4.4$.

Como esperado, a ressonância da onda Global de Alfvén cilíndrica $m = -1$ divide-se em três ressonâncias globais (com números dos modos cilíndricos equivalentes $m =$

$0, -1, -2$), devido ao acoplamento dos modos poloidais. É importante notar que a impedância da antena aumenta com os números de onda toroidal N e que o modo $N = -6$ tem uma eficiência mais alta na deposição de energia no plasma. Um valor tão alto do número toroidal não foi investigado em Lausanne. O novo sistema de antenas do TCABR permite a excitação deste modo para investigar o desempenho predito.

O efeito da absorção ressonante dos modos vizinhos, acoplados no perfil de potência absorvida, pode ser avaliado prontamente, considerando a distribuição da potência dissipada nos picos das ressonâncias GA correspondentes a $m = 0, -1$ e -2, mostrados na Fig.3.2. Este efeito é demonstrado na Fig. 3.3 para o modo $N = -4$. Claramente, o amortecimento do contínuo na ressonância local para $m = 0$ supera o amortecimento de Landau da Ressonância GA principal $m = -1$, causando um perfil largo indesejável de deposição de energia perto da periferia do plasma. A benéfica deposição de potência central para $m = 0$ é um efeito puramente toroidal que não pode ser predito através de cálculos cilíndricos. Para um valor alto do número de onda toroidal, $N = -6$ por exemplo, o modo vizinho mais distante move-se em direção à ressonância principal e pode acontecer um sobreposição das ressonâncias globais e locais, o que resultaria num perfil de deposição de potência mais largo do modo de ressonância principal.

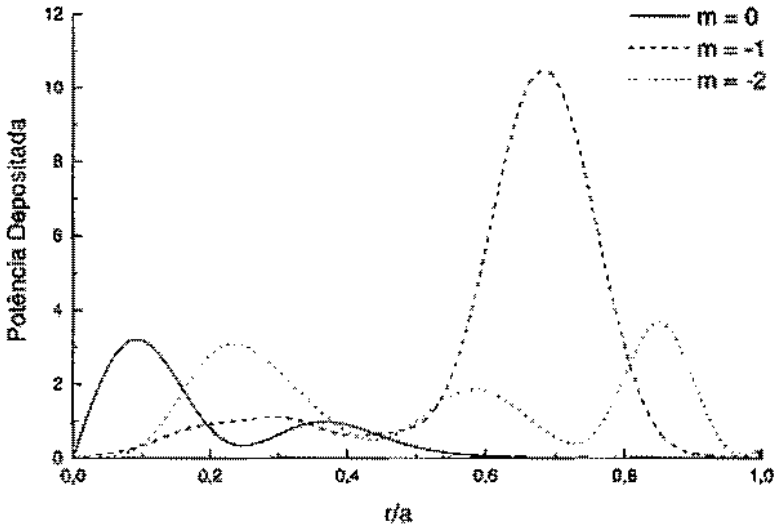


Fig. 3.3. Distribuição de potência da onda dissipado sobre a coordenada radial (normalizada com o raio da coluna de plasma) para ressonâncias GA para $N = -4$, $m = 0, -1, -2$, que são apresentadas na Fig.3.2 (com as freqüências 4.07, 4.68 e $5.65MHz$, respectivamente).

A competição entre o contínuo dos modos vizinhos e o amortecimento direto da onda global pode ser enfatizada considerando uma temperatura eletrônica muito baixa. A distribuição da dissipação de potência para temperatura eletrônica central $T_e = 100eV$ e $T_i = 60eV$ é mostrada na Fig.3.4. Todos os outros parâmetros são iguais aos da Fig. 3.3 (lembrando que $T_e = 500eV$ e $T_i = 300eV$ na Fig. 3.3).

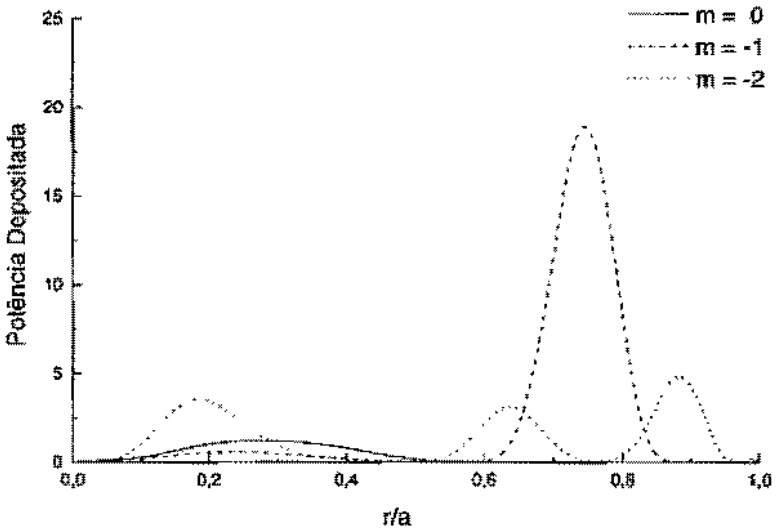


Fig. 3.4 Distribuicão da potência dissipada pela onda sobre a coordenada radial (normalizada), nas mesmas resonâncias Globais de Alfvén mostradas na Fig.3.3, mas para $T_e = 100eV$ e $T_i = 60eV$.

Para baixas temperaturas, a estrutura de deposição de energia de todos os modos é fortemente afetada, diminuindo-se os efeitos cinéticos na ressonância principal e aumentando o valor do pico de amortecimento da ressonância no contínuo do modo vizinho em comparação com o caso $T_e = 500eV$. Para $m \neq 0$, a onda Cinética de Alfvén, que se propaga a partir de uma superfície ressonante, tem uma largura de dissipação $l_r \simeq \left(ac^2 v_{te}^4\right)^{1/3} / \left(\omega_{pe}^2 c_A^4\right)^{1/3} \approx 1\text{cm}$[34], o que é menor que a distância entre as ressonâncias de Alfvén locais e o centro do plasma. Então, a estrutura oscilatória radial dos modos cinéticos não aparece. Como previamente mencionado, os efeitos toroidais não modificam substancialmente a posição dos picos de ressonância na curva de impedância da antena predita por modelo cilíndrico. Isto pode ser visto variando-se o valor de q_0, com os outros parâmetros mantidos fixos. Pode-se ver a impedância da antena como função da freqüência do gerador para diferentes valores de q_0 na Fig. 3.5. Neste caso a freqüência não é normalizada porque a freqüência do limiar do contínuo varia com o valor de q_0. Como esperado, a freqüência de ressonância para o modo poloidal $m = 0$ permanece quase inalterado. Para cada modo poloidal $m \neq 0$, a freqüência da ressonância GA é mudada de acordo com a dependência da freqüência do limiar do número de onda paralelo, $k_\parallel = (n + m/q(r))/R$. O valor da impedância diminui com o aumento de q_0.

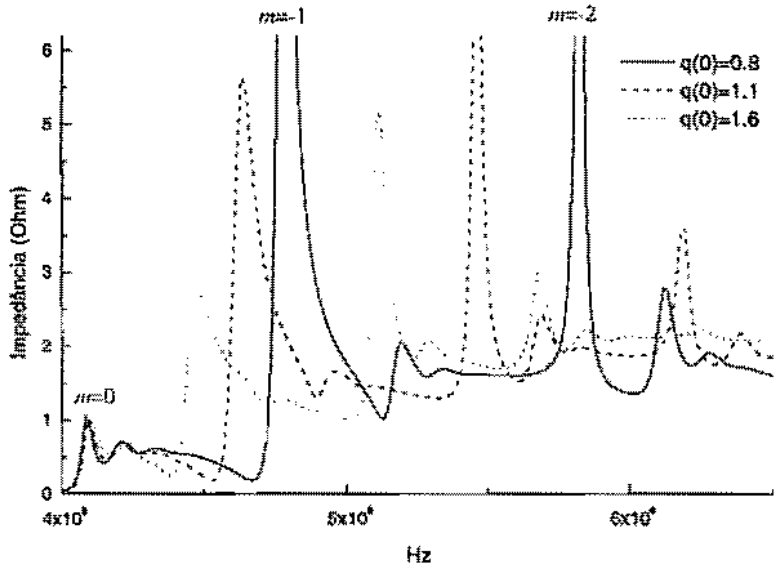


Fig. 3.5. Evolução da impedância da antena para $N = -4$ com o fator de segurança $q(0) = 0.8, 1.1, 1.6$ ($q(a) = 3.2, 4.4, 6.4$, respectivamente); n_0, T_{e0}, e B_0 são os mesmos da Fig.3.2.

Nota-se que a curvas de impedância nas Figs. 3.2 e 3.5 são calculadas usando-se três harmônicos, mas estas curvas não dependem do número de modos vizinhos (este efeito foi verificado com até ± 10 modos vizinhos) no intervalo de freqüências que começa da freqüência do pico de ressonância GA do modo $m = 0$ até o modo $m = -3$.

3.5 Efeito de impurezas na dissipação da onda de Alfvén

Usando o código unidimensional, já foi mostrado que pequenas porções de impurezas, tais como deutério e carbono em um plasma de hidrogênio, modificam a dispersão tanto da onda Global de Alfvén como do contínuo de Alfvén abaixo da freqüência ciclotrônica do hidrogênio[35]. Neste caso, a freqüência de ressonância GA pode depender fortemente do número de onda toroidal e a onda Global de Alfvén pode entrar no contínuo. Aqui, este resultado é confirmado com o modelo cinético toroidal. Na Fig. 3.6, são apresentados os resultados dos cálculos da impedância da antena Z_{MN}, com ambos os códigos, para um plasma de hidrogênio e para plasma com uma população de 2% de impureza de carbono.

Considerando a forma aproximada do campo magnético toroidal (Eq.(66)), a dependência espacial da ressonância ciclotrônica da impureza aparece como um termo de primeira ordem, $\sim (r/R_0)\cos\theta$. Conseqüentemente, a superfície da resonância ciclotrônica da impureza aparece no código como uma superfície circular com centro deslocado. Esta superfície é considerada distante da superfície de conversão de modos e, neste caso, a dissipação ciclotrônica é pequena e pode ser desprezada.

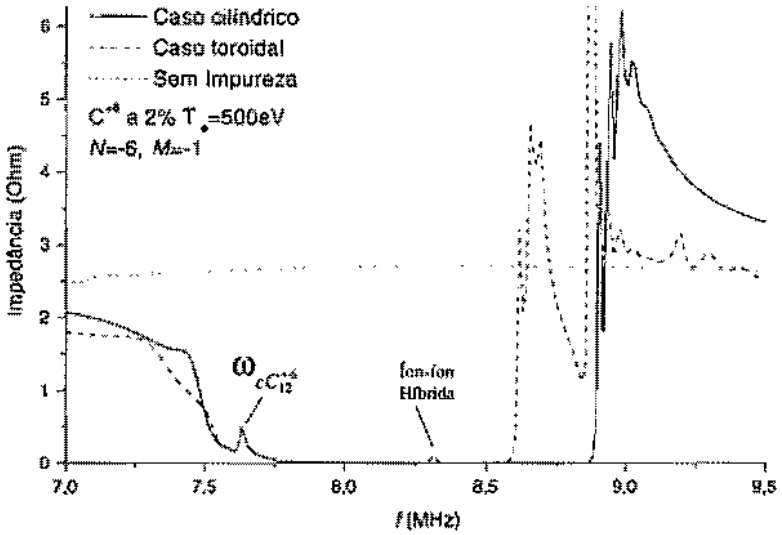


Fig.3.6. Impedância da antena para $N = -6$, $M = -1$ contra a freqüência em MHz para um plasma de hidrogênio com impureza carbono. As linhas de impedância sólida e pontilhada correspondem a concentrações de carbono relativas $n_C/n_0 = 0.0$ e 0.02, respectivamente, no modelo unidimensional, e a linha tracejada representa os cálculos bidimensionais para $n_C/n_0 = 0.02$.

Verifica-se que uma pequena população de impurezas como deutério ou carbono em um plasma de hidrogênio modifica o contínuo de Alfvén substancialmente. Por causa de impurezas, uma lacuna aparece nas curvas de impedância sobre as ressonâncias ciclotrônica da impureza, $\omega \approx \omega_{cZ} = 7,65MHz$, tanto nos cálculos unidimensionais como bidimensionais. Porém, no modelo toroidal, uma dissipação adicional aparece sob o Contínuo Híbrido de Alfvén, com $f = 8,88MHz$, para os números do modo cilíndrico $n = -6, m = -1$, por causa do efeito do acoplamento de modos poloidais. Esta dissipação é devida ao Contínuo Híbrido de Alfvén com números de modo $n = -6$ e $m = 0$[36].

A presença do contínuo híbrido é bastante benéfica para o perfil de potência dissipada. Isto pode ser visto calculando-se o perfil de deposição para a ressonância GA principal, com $n = -6$ e $m = -1$ na freqüência 8,87MHz, mostrada na Fig. 3.6. A distribuição correspondente da potência de onda dissipada é vista na Fig. 3.7. Vê-se que devido ao fato de a GAW entrar no Contínuo Híbrido, a deposição da potência perto do eixo magnético é aumentada substancialmente, enquanto a deposição dos modos vizinhos na borda do plasma é diminuída.

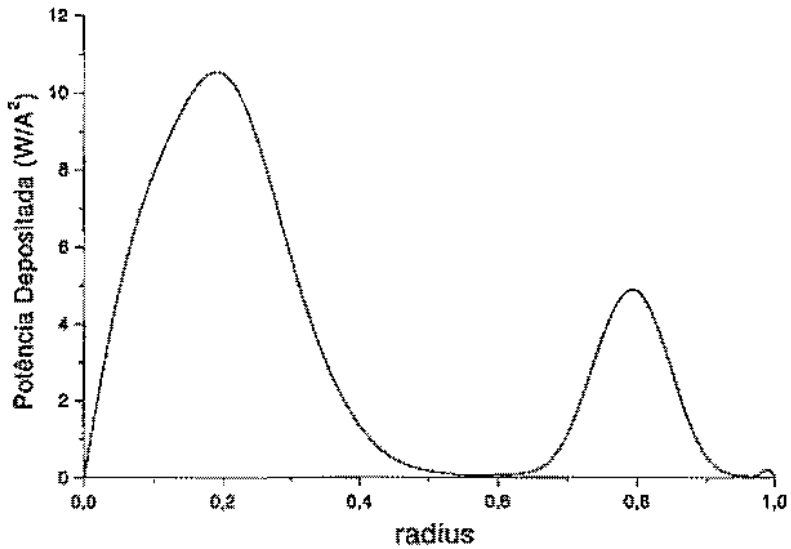


Fig. 3.7. Distribuição de potência dissipada da onda no raio adimensional, para ressonância GA $m = -1$ e $n = -6$, na freqüência de $8,87MHz$ apresentada na Fig. 3.6 para um plasma de hidrogênio com impureza carbono na concentração relativa $n_C/n_0 = 0.02$.

4 FORÇAS PONDEROMOTORAS

4.1 Utilidade e Importância

A geração não indutiva de correntes em tokamaks é um mecanismo essencial para a viabilização de reatores termonucleares e a investigação nesta área tem uma longa história (veja revisões [37, 31]). As experiências mostraram que a geração de corrente (e de fluxo no plasma) pode ser resultado da dissipação de diferentes tipos de ondas (ciclotrônica eletrônica, ondas híbridas inferiores, rápidas e de Alfvén). Recentemente, melhorias no confinamento de energia foram alcançadas com barreiras de transporte internas (ITB - Internal Transport Barriers), criadas através de injeção de partículas neutras (NB) e por aquecimento por ondas na faixa da freqüência ciclotrônica iônica (ICRF) em todos os grandes tokamaks, como Dublet-III-D, Joint European Torus (JET), TFTR e outros (veja, por exemplo, [38] e o review [6]). Estas barreiras de transporte aparecem na metade do raio menor do plasma com um cisalhamento (*shear*) negativo do campo magnético (perfil de corrente oco) e uma rotação toroidal e poloidal cisalhada da coluna de plasma para reduzir a turbulência do plasma (veja a discussão na Ref. [39]). Neste caso, as características de dispersão de ondas de baixas freqüências (como *drift-Alfvén waves*) também podem ser modificadas (inclusive com a supressão de instabilidades) por causa do termo de convecção $\mathbf{U} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}$, onde $\mathbf{U}$ é a velocidade de fluxo do plasma e $\tilde{\mathbf{u}}$ é a velocidade oscilatória.

O modelo físico mais simples de geração de corrente e fluxos no plasma é o da transformação do momento dissipado da onda, P/v_{ph} em momento dos elétrons do plasma. Este momento é transferido devido a colisões elétron-íon, $m_e \nu_{ei} n_e U_e$ (da energia da onda $\varepsilon = \hbar\omega$, e do momento linear $\vec{p} = \hbar \vec{k}$, a potência dissipada para N fótons é expressa pela força de transferência de momento $\vec{F} = W \vec{k}/\omega$). Finalmente, em condições estacionárias, o equilíbrio do momento conduz ao valor da densidade de corrente e fluxo

gerados, j_{cd} e U, que são governados pelas equações:

$$j_{cd} = e\,W^{(e)}/(m_e \nu_{ei} v_{ph}), \quad \overrightarrow{U} = \tau_E W \overrightarrow{k}/(\omega m_i n_i), \tag{74}$$

onde τ_E é a vida média do momento das partículas, a velocidade de fase $v_{ph} = \omega/k_{\|}$ tem valor próximo ao da velocidade de Alfvén, $c_A = B_0/\sqrt{4\pi < n_i m_i >}$, ν_{ei} é a freqüência de colisão elétron-íon, $W^{(e)}$ é a densidade de potência dissipada nos elétrons, e é a carga dos elétrons e n_α e m_α são a densidade e a massa de elétrons ou íons, respectivamente. Esta equação simples é válida para quando a velocidade de fase é menor que a velocidade térmica dos elétrons, $v_{Te} = \sqrt{T_e/m_e}$. O resultado, válido para uma gama inteira de velocidades de fase, é apresentado na Ref. [40]. Alta eficiência na geração de corrente foi demonstrada tanto para ondas de Alfvén com velocidade de fase muito pequena, $v_{ph} \ll v_{Te}$, como para velocidade de fase muito grande, $v_{ph} \gg v_{Te}$.

É bem sabido que há dificuldades significativas para o uso da geração de corrente por ondas de Alfvén em um reator-tokamak. No caso de baixas velocidades de fase, a eficiência da geração de corrente cai no regime de banana como resultado da absorção do momento da onda pelas partículas aprisionadas por causa da forte fricção entre elétrons livres, que formam a corrente, com os elétrons aprisionados e íons[37, 41]. Por outro lado[42], no regime banana, o momento da onda que é transmitido para os elétrons aprisionados deveria ser conservado como momento toroidal canônico dos elétrons,

$$\frac{R}{R_0} m v_{\|} + \frac{e}{m_e} \int_0^r B_\theta(r') dr'.$$

Por causa da força de transferência de momento paralela, os elétrons podem sofrer estrição de Ware (*Ware pinch*) - $v_r = cF_{\|}/eB_\theta$. Em condições estacionárias, devido à difusão colisional (estrição inversa de Ware - *inverse Ware pinch*- por colisões), este momento pode parcialmente (aproximadamente 50% do momento da onda) contribuir para a corrente de elétrons livres.

As esperanças de uma geração de corrente eficiente foram renovadas com o trabalho de Ohkawa [43] sobre geração de corrente por injeção de helicidade, $\vec{B} \cdot \vec{A}$, onde $\vec{A}$ é o potencial vetor, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Esta idéia foi desenvolvida por Taylor [44], no limite MHD, e um modelo cinético foi apresentado por Elfimov [45]. Em plasmas magnetizados, a corrente de injeção de helicidade pode ser mantida por forças ponderomotoras que agem nos elétrons, dependendo da amplitude dos gradientes dos campos de RF. No caso de ondas rápidas [45], foi demonstrado que também há corrente induzida por gradientes de densidade de equilíbrio e temperatura. A força ponderomotora, em um modelo MHD de dois fluidos, para plasmas magnetizados, foi derivada por Klima [46] para geometria plana. O quadro geral destas forças, produzido por ondas de RF em íons e elétrons, foi revisado na Ref. [19] para plasmas cilíndricos, e na Ref.[47] para uma geometria toroidal.

Aqui, é considerado o uso de ondas de Alfvén como um esquema para geração de corrente e a criação de ITBs. São propostos dois tipos de ondas de Alfvén para este propósito: ondas Globais de Alfvén (GA ou GAW) e onda Cinética de Alfvén (CA ou KAW), ou onda lenta quase eletrostática de Alfvén (SQAW). Veja detalhes no Capítulo 2 e também nas Refs. [8, 20, 11, 35]. Note que as ondas magnetosônicas rápidas podem ser tratadas da mesma maneira que as ondas GA. A deposição de energia de KAW e SQAW se dá em faixas radiais pequenas. Assim, é possível induzir a geração de um perfil de corrente oco para configurações de cisalhamento magnético invertido[8] e, simultaneamente, criar fluxos de plasma fortemente cisalhados[48] para suprimir a turbulência do plasma e manter a ITB. O que torna estes tipos de ondas especiais é que podem ser induzidos ambos os tipos de efeitos na mesma região do raio do plasma no tokamak.

Na próxima parte deste capítulo, usando a aproximação de ótica geométrica para ondas de Alfvén, são apresentadas estimativas para as forças ponderomotoras, forças de viscosidade e de RF, toroidais e poloidais. Na Seção 4.3, são mostrados os resultados dos

cálculos numéricos das forças ponderomotoras em uma coluna cilíndrica de plasma com comprimento periódico $2\pi R_0$, para simular uma configuração toroidal com raio principal R_0. A geração de corrente por ondas de Alfvén também é analisada. Uma discussão geral sobre geração de corrente por ondas de Alfvén e fluxos poloidais e toroidais que estão baseados no equilíbrio entre a força ponderomotora e a viscosidade dos íons, e as conclusões são apresentadas na Seção 4.4.

4.2 Equações Básicas para Forças e Fluxo de Plasma

Seguindo Elfimov *et al*[19], faz-se uma análise das médias temporais das equações MHD para plasmas com dois fluidos em condição quase estacionária. Equilibrando a força motora de RF nos elétrons e íons, $< \tilde{F}^{(e,i)}_{\theta,\zeta} >$ contra as forças viscosas $F^{\pi}_{\theta,\zeta}$ (veja Mikhailovskii e Tsypin [49]) nas direções poloidal e toroidal, são obtidas as equações

$$F^{\pi}_{\theta} + < \tilde{F}^{(e)}_{\theta} > + < \tilde{F}^{(i)}_{\theta} > = 0, \qquad F^{\pi}_{\zeta} + < \tilde{F}^{(e)}_{\zeta} > + < \tilde{F}^{(i)}_{\zeta} > = 0, \tag{75}$$

que são as condições locais para fluxo de plasma quase estacionário.

4.2.1 Forças Viscosas

Aqui considera-se as forças viscosas que estão relacionadas com a modulação do campo magnético toroidal nas direções poloidal e toroidal,

$$B = B_0 \left(1 - (r/R)\cos\theta + \delta \cos N\zeta\right),$$

onde r/R é o parâmetro de toroidicidade e δ e N são os parâmetros de oscilação do campo magnético (*ripple*). Estas forças foram calculadas por muitos autores (veja, por exemplo, o review de Hirshman e Sigmar [50]) e podem ser apresentadas na forma da Ref.[49]:

$$F^{\pi}_{\theta} = -m_i n_i \chi_\theta (U_{i\theta} - \kappa U_T) \quad \text{e} \quad F^{\pi}_{\zeta} = -m_i n_i \chi_\zeta U_{i\zeta}, \tag{76}$$

onde κU_T é a rotação poloidal residual relacionada a uma deriva macroscópica cT'/eB, causada pelo gradiente térmico. Neste trabalho é suposto que esta rotação é desprezável em comparação com a velocidade poloidal, $U_{i\theta}$. O coeficiente de viscosidade poloidal, χ_θ pode ser representado (nos regimes colisional, *plateau* e *banana*, respectivamente) na forma:

$$\chi_\theta = \begin{cases} \dfrac{3}{2}\dfrac{v_{Ti}^2}{\nu_i R_0^2}, & \text{para } \nu_i > v_{Ti}/(qR_0); \\ \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\dfrac{q v_{Ti}}{R_0}, & \text{para } v_{Ti}/(qR_0) > \nu_i > (r/R)^{3/2} v_{Ti}/(qR_0); \\ \dfrac{\nu_i q^2}{(r/R)^{3/2}} & \text{para } \nu_i < (r/R)^{3/2} v_{Ti}/(qR_0). \end{cases} \tag{77}$$

e o coeficiente toroidal, χ_ζ, nos regimes colisional e *plateu*:

$$\chi_\zeta = \begin{cases} \dfrac{3}{2}\dfrac{v_{Ti}^2}{\nu_i R_0^2}(N\delta)^2, & \text{para } \nu_i > v_{Ti} N/R_0; \\ \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\dfrac{v_{Ti} N \delta^2}{R_0}, & \text{para } v_{Ti} N \delta^{3/2}/R_0 < \nu_i < v_{Ti} N/R_0. \end{cases} \tag{78}$$

4.2.2 Forças Ponderomotoras

O estudo das forças ponderomotoras induzidas pelas ondas de Alfvén e rápidas é feito no limite cilíndrico, porque as correções toroidais [47] são bastante pequenas, $\sim (r/R)^2$. As componentes dos campos elétricos de RF e correntes oscilatórias $\vec{A} = \left\{\vec{E}(r);\ \vec{j}(r)\right\}$ são tomadas como $\left\{\tilde{\mathbf{E}}(r);\ \tilde{j}(r)\right\} \exp\left[i(kz + m\theta - \omega t)\right]$. Por causa do campo magnético helicoidal, o conjunto dos vetores $\vec{A}$ é transformado dos componentes cilíndricos A_r, A_θ, A_ζ para as projeções normal, binormal e paralela, respectivamente,

$$A_1 = A_r, \qquad A_2 \equiv A_b = A_\theta h_\zeta - A_\zeta h_\theta, \qquad A_3 \equiv A_\parallel = A_\zeta h_\zeta + A_\theta h_\theta,$$

através das componentes poloidal e toroidal $h_{\theta,\zeta}$ do vetor unitário do campo magnético. De acordo com a teoria de efeitos ponderomotores em um plasma de dois-fluidos, as forças ponderomotoras podem ser expressas calculando-se a média temporal das equações MHD

para dois fluidos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(m_\alpha n_\alpha V^{(\alpha)}_{\theta,\zeta}\right) + \vec{\nabla}\left(m_\alpha n_\alpha \vec{V}^{(\alpha)}\vec{V}^{(\alpha)}_{\theta,\zeta}\right) = \left(e_\alpha n_\alpha \vec{E} + \frac{1}{c}\vec{j}^{(\alpha)} \times \vec{B}\right)_{\theta,\zeta} - \vec{\nabla}_s \pi^{(\alpha)}_{s\zeta,\theta} \tag{79}$$

onde m_α, e_α são a massa e a carga das partículas, e é suposta uma pressão cinética homogênea ao longo das superfícies magnéticas $\left(\nabla_{\theta,\zeta}P^{(\alpha)} = 0\right)$. Qualquer variável física Φ (densidade $n_{(\alpha)}$, velocidade $\vec{V}^{(\alpha)}$, corrente $\vec{j}^{(\alpha)} = e_\alpha n_\alpha \vec{V}^{(\alpha)}$, campos eléctrico E e magnético B) é escrita como uma soma de uma parte quase-estacionária (representada como Φ) e uma parte oscilatória (representada por $\tilde{\Phi}$). A parte oscilatória é representada como um harmônico na forma $\tilde{\Phi} \propto \exp(i(\int_0^r k_r dr + m\theta + n\zeta - \omega t))$, onde ω é a freqüência da onda, m, n são os números de onda poloidal e toroidal, e é considerada a aproximação eikonal para a dependência radial ($|k_r\Phi| \gg |\partial\Phi/\partial r|$, e $|k_r| \gg |m/r|, |n/R_0|$). É usado o limite cilíndrico ($r/R_0 \ll 1$) das coordenadas pseudo-toroidais (r, θ, ζ) com superfícies magnéticas coaxiais. Seguindo o procedimento habitual de calcular a média da Eq.(79) sobre as oscilações da onda, são obtidas as expressões:

$$\begin{aligned}
\vec{F}^{(\alpha)}_{FD,\theta,\zeta} &= -\vec{\nabla}\langle m_\alpha n_\alpha \tilde{V}^{(\alpha)}\tilde{V}^{(\alpha)}_{\theta,\zeta}\rangle, \quad F^{(\alpha)}_{Es,\theta,\zeta} = \langle e_\alpha \tilde{n}_\alpha \tilde{E}\rangle_{\theta,\zeta}, \\
\vec{F}^{(\alpha)}_{D,\theta,\zeta} &= \langle \frac{\tilde{j}^\alpha \times \tilde{B}}{c}\rangle_{\theta,\zeta} \text{ e } \vec{F}^{(\alpha)}_{V,\theta,\zeta} = -\langle \vec{\nabla}_s \pi^{(\alpha)}_{s\zeta,\theta}\rangle,
\end{aligned} \tag{80}$$

onde a primeira força é produzida pela tensão dinâmica do fluido (que inclui a tensão de Reynolds), $\vec{F}^{(\alpha)}_{Es,\theta,\zeta}$, é a força produzida pela estrição elétrica, $\vec{F}^{(\alpha)}_{D,\theta,\zeta}$ o efeito dínamo, e a última, $\vec{F}^{(\alpha)}_{V,\theta,\zeta}$, é produzida pela viscosidade. Usando as equações de continuidade e de indução, a força de tensão eletromagnética, $\vec{F}^{(\alpha)}_{Es,\theta,\zeta} + \vec{F}^{(\alpha)}_{D,\theta,\zeta}$ pode ser representada como a soma [19, 51] de uma parte de gradiente, $F^{(\alpha)}_{\theta,\theta} = 1/(2r\omega)\,\mathrm{Im}\,\nabla_r(r\tilde{j}_r E^*_\theta)$ e $F^{(\alpha)}_{\theta,\zeta} = 1/(2\omega)\,\mathrm{Im}\,\nabla_r(\tilde{j}_r E^*_\zeta)$, e uma força de transferência de momento da onda, $W^{(\alpha)}\vec{k}/\omega$, que é proporcional à dissipação da onda, $W^{(\alpha)} = \tilde{j}^{(\alpha)} \cdot \tilde{E}$, onde as componentes das correntes

oscilatórias podem ser expressas pela relação,

$$\tilde{j}_s^{(\alpha)} = -\mathrm{i}\omega/(4\pi)\sum_p \varepsilon_{sp}^{(\alpha)}\tilde{E}_p. \tag{81}$$

São usadas as expressões derivadas abaixo (a primeira repetida em detalhe, como exemplo, no Apêndice F) para as componentes da força ponderomotora agindo sobre as partículas α (elétrons ou íons) do plasma:

$$\begin{aligned}
\left\langle \tilde{F}_\theta^{(\alpha)} \right\rangle \equiv F_{\theta,P}^{(\alpha)} + F_{\theta,\theta}^{(\alpha)} &= \frac{m}{r\omega}P^{(\alpha)} + \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{8\pi r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\sum_{s=1}^{3}\varepsilon_{rs}^{(\alpha)}\tilde{E}_s\left(\tilde{E}_\theta^* - \frac{4\pi i\omega}{\omega_{p\alpha}^2}\tilde{j}_\theta^{(\alpha)*}\right)\right]\right\}, \\
\left\langle \tilde{F}_\zeta^{(\alpha)} \right\rangle \equiv F_{\zeta,P}^{(\alpha)} + F_{\zeta,\theta}^{(\alpha)} &= \frac{k}{\omega}P^{(\alpha)} + \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{8\pi r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\sum_{s=1}^{3}\varepsilon_{rs}^{(\alpha)}\tilde{E}_s\left(\tilde{E}_\zeta^* - \frac{4\pi i\omega}{\omega_{p\alpha}^2}\tilde{j}_\zeta^{(\alpha)*}\right)\right]\right\},
\end{aligned} \tag{82}$$

onde os índices ($s = 1, 2, 3$) são usados para designar os índices do tensor relacionados com as componentes radial (r), binormal (b), e paralela ($\|$). A forma do tensor dielétrico $\varepsilon_{rs}^{(\alpha)}$ usado para os cálculos numéricos mostrados a seguir está no apêndice B. Na equação anterior, o primeiro termo é a força motriz de transferência de momento, $F_{\zeta,\theta,P}^{(\alpha)}$, que age via dissipação da onda, e o segundo termo, $F_{\zeta,\theta,\theta}^{(\alpha)}$, é uma mistura da força de gradiente que é relacionada a gradientes dos parâmetros de equilíbrio do plasma com a força de injeção de helicidade (veja discussão na Ref. [45]), que está relacionada ao gradiente da amplitude da onda. Mais adiante, é feita a hipótese de que a dissipação da onda só se refere aos elétrons, ou seja, $P^{(e)}$ é a média temporal da densidade de potência de RF absorvida pelos elétrons, $\mathrm{Re}\left\langle \tilde{\mathbf{E}}\cdot\tilde{\mathbf{j}}^{(e)*}\right\rangle/2$.

Para calcular estas forças numericamente para o TCABR, é usado o código cinético toroidal descrito no capítulo anterior com os dados que seguem. Os valores da transformada rotacional inversa no eixo magnético, e do campo magnético toroidal no centro do plasma foram tomados como $q_0 = 1,1$ e $B_0 = 10\ kG$, respectivamente. O perfil de densidade dos elétrons é determinado por $n_e = n_0(1 - r^2/a^2) + n_a$ com $n_0 = 3\times 10^{13} cm^{-3}$ e $n_a = 1\times 10^{12} cm^{-3}$.

Na Fig. 4.1 é apresentada a distribuição da força motora sobre os elétrons, paralela ao campo magnético de equilíbrio, normalizada ao valor máximo da força de transferência de momento, $P^{(e)}_{max}|k_{\|}|/\omega$. São usadas as condições de ressonância GA para $m = -1$ (veja Capítulo 3 e Ref. [52]) com conversão de modo no harmônico vizinho ($m = 0$) em uma onda Cinética de Alfvén, na posição radial $r = 0,7a$, no contínuo de Alfvén, para plasmas de hidrogênio. A freqüência do gerador é $f = 4,68MHz$ e os números de onda toroidal e poloidal (N, M) da antena são $-4/-1$, respectivamente. As forças motoras eletrônicas estão fortemente localizadas ao redor do ponto de conversão r_A. Esta força é principalmente negativa, por causa dos números de onda negativos, mas a geração de corrente é positiva. Nota-se que a velocidade de rotação toroidal pode ser calculada equilibrando-se a força $\sum_i F^{(i)}_{\zeta}$ com a perda do momento toroidal $m_i n_i V^{(0)}_{\zeta}/\tau_E$, onde τ_E é o tempo de relaxamento do momento. É muito forte a diferença mostrada neste gráfico entre as forças paralelas calculadas com os valores cilíndricos e toroidais dos campos. Tal diferença ocorre sempre quando são realizados cálculos na freqüência dos modos globais porque a dissipação destes é maior na ressonância local do modo vizinho, $m = 0$ (ver Capítulo 3).

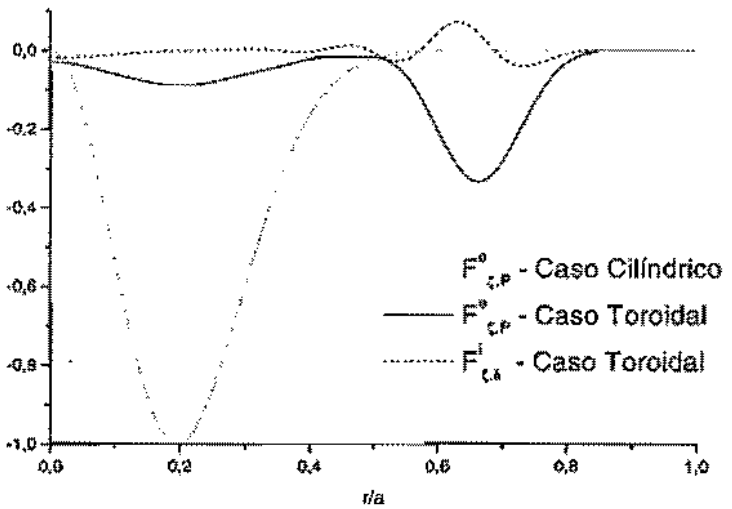


Fig.4.1 Distribução radial da componente paralela da força motora eletrônica ($M = -1, N = -4$ e $f = 4,7$ MHz) para um plasma de hidrogênio, $n_{0e} = 3 \times 10^{13} cm^{-3}$, onde as temperaturas centrais

dos elétrons e dos íons são $T_{e0} = 500\ eV$ e $T_{i0} = 300\,eV$, respectivamente. As curvas (pontilhada, sólida e tracejada) correspondem à força de transferência de momento eletrônico para o caso cilíndrico, força de transferência de momento eletrônico para o caso toroidal e a força gradiente iônica para caso toroidal, respectivamente.

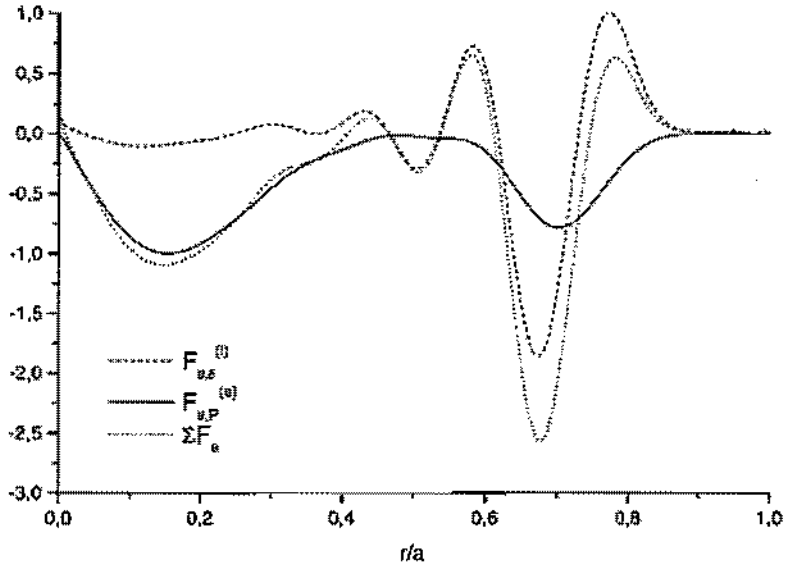


Fig. 4.2 Distribuição radial da componente poloidal das forças motrizes para os parâmetros da Fig.4.1, exceto $T_e(0) = 300eV$ e $T_i(0) = 200eV$. As forças são normalizadas para o valor de máximo da força de transferência de momento, $P_{max}^{(e)}/\omega\tau_A$. As curvas (tracejada, sólida e pontilhada) correspondem à força gradiente para íons, força de transferência de momento para elétrons e a força total sobre o plasma, respectivamente.

Na Fig. 4.2 pode-se observar que o fluxo iônico pode ser dirigido diretamente pela força gradiente, que tem sinais opostos nos dois lados da ressonância de Alfvén. Note que não há qualquer dissipação nos íons. Para comparar com os cálculos das forças ponderomotoras geradas por modos GA, é mostrado na Fig. 4.3 a distribuição radial das forças ponderomotoras geradas pelos modos cinéticos, KAW, induzidas através do efeito de conversão de modos em $r = 0,5$ para a freqüência $f = 5,3MHz$ e temperaturas eletrônicas e iônicas respectivamente iguais a 300 e 200eV, ambos para os casos cilíndrico (um único modo poloidal, veja discussão no Capítulo 2) e toroidal. Aqui é possível verificar

que, à parte a presença de uma ressonância local de modo vizinho, as diferenças entre resultados toroidais e cilíndricos não é grande, diferente da situação mostrada na Fig. 4.1, situada na ressonância global.

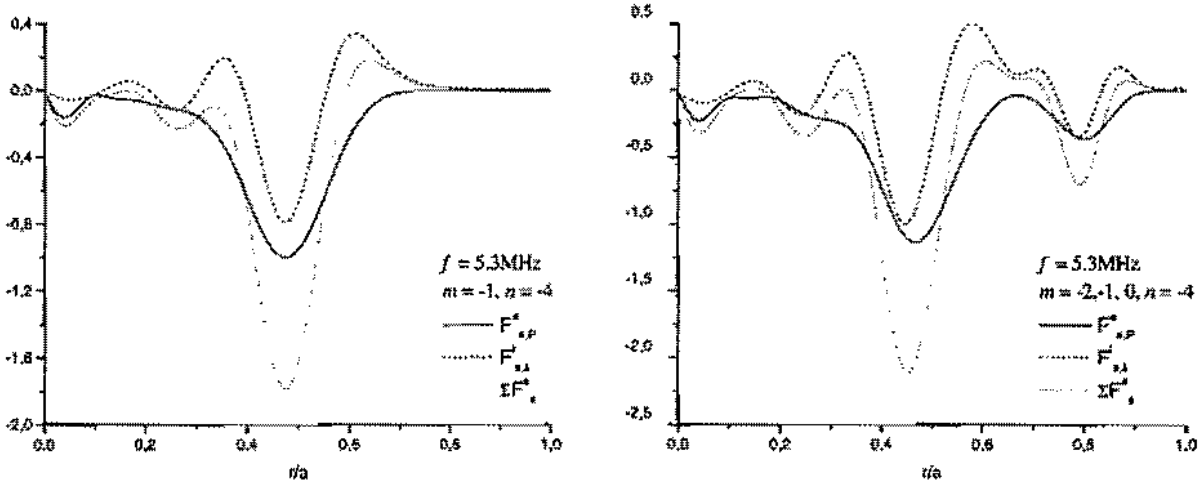


Figura 4.3 (a-b) - Forças geradas na metade do raio do plasma para $f = 5,3MHz$, nos casos cilíndrico (a) e toroidal (b).

Com uma temperatura eletrônica mais baixa, o pico de força fica mais pronunciado, o que permite um cisalhamento maior na velocidade. A Fig. 4.4 mostra o cálculo toroidal com a mesma configuração da Fig. 4.3, mas com temperatura eletrônica de 100eV.

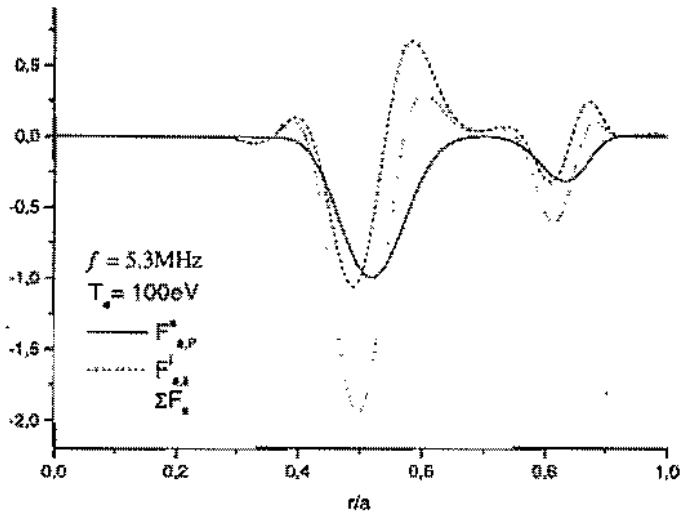


Figura 4.4 - Forças geradas na metade do raio do plasma para $f = 5,3MHz$, para Temperatura eletrônica de 100eV.

4.3 Efeito da Rotação Cisalhada no Transporte Neoclássico

É possível diminuir o transporte anômalo em plasmas de tokamak através da rotação cisalhada (através de um campo elétrico radial quase-estacionário cisalhado)[3],[6],[53]. Estimativas simples para achar o cisalhamento do campo elétrico radial exigida fornecem[6],[38]

$$\gamma_E = \frac{cB_\theta R}{B}\frac{\partial}{\partial r}\frac{E_r}{RB_\theta} \simeq v_\theta(r)/r \geq \gamma_{max}, \tag{83}$$

onde γ_{max} é a taxa de crescimento das instabilidades mais perigosas na borda do plasma (instabilidades *kink* e *drift*, por exemplo). O campo elétrico radial pode ser obtido da equação de momento dos íons, desprezando a inércia, a fricção íon-elétron, a viscosidade iônica, e a componente radial das forças externas[13],

$$E_r \approx \frac{B}{c}\left(-U_{i\theta} + h_\theta U_{i\zeta} + U_{ip}\right), \quad U_{ip} = \frac{c}{e_i n_0 B}\frac{\partial p_i}{\partial r},$$

onde $U_{i\theta}$ e $U_{i\zeta}$ são as componentes poloidal e toroidal da velocidade dos íons, V_i, respectivamente, B é o campo magnético, r é o raio menor do tokamak, θ e ζ são os ângulos poloidal e toroidal, respectivamente, e_i é a carga dos íons, M_i é a massa dos íons.

É suposto que a viscosidade paralela, a qual depende das ondulações do campo magnético ou dos efeitos anômalos, é forte o bastante para suprimir a rotação toroidal. Assim, é considerado o caso $c_s > U_{i\theta} > \{h_\theta U_{i\zeta}; U_{ip}\}$, onde $c_s = \sqrt{(T_e + T_i)/M_i}$ é a velocidade acústica. Então, pode-se aproximar a relação

$$E_r \approx -\frac{B}{c}U_{i\theta}. \tag{84}$$

A velocidade poloidal dos íons e dos elétrons U_θ pode ser calculada da componente poloidal da equação de momento[54]

$$F^\pi_{\theta i} + F^\pi_{\theta e} + F^h_\theta = 0, \tag{85}$$

que é válida para todos os regimes colisionais. As forças F^π_θ e F^h_θ são as médias sobre as superfícies magnéticas das forças de viscosidade e RF, respectivamente, agindo ao

longo da direção poloidal. Na Eq.(85) é levado em em conta o termo de viscosidade dos elétrons na condição especial de que a viscosidade paralela de íons e elétrons são da mesma ordem[55],[56]. As expressões aproximadas para as forças viscosas poloidais, desprezando-se a rotação residual do plasma[54],[57], estão na forma

$$F^{\pi}_{\theta\alpha} \approx -\mu_{\theta\alpha} U_{\alpha\theta}, \qquad \alpha = i, e, \tag{86}$$

onde $\mu_{\theta\alpha}$ é o coeficiente de viscosidade.

Abaixo é considerada a supressão do transporte anômalo em um plasma de tokamak fracamente colisional quando as órbitas banana dos íons são comprimidas através das ondas Cinéticas de Alfvén[57]. Neste caso, o coeficiente de viscosidade $\mu_{i\theta}$ depende do parâmetro de compressão S[58],[59],[60],

$$S = 1 - \frac{e_i B_\zeta^2}{M_i \omega_{ci}^2 B_\theta^2} \frac{dE_r}{dr}, \tag{87}$$

onde ω_{ci} é a freqüência ciclotrônica iônica. O coeficiente de viscosidade pode ser expresso pelo parâmetro de compressão por meio da relação

$$\mu^*_{\theta i} \approx \frac{1}{|S^{3/2}|}, \qquad \mu_{\theta i} = \mu^*_{\theta i} \mu_{\theta i 0}, \qquad \mu_{\theta i 0} \approx n_0 M_i \frac{\nu_i q^2}{\epsilon^{3/2}}. \tag{88}$$

4.3.1 Equações Diferenciais Para a Viscosidade Iônica

Com o intuito de fazer estimativas aproximadas da dependência da viscosidade dos íons com a potência absorvida da onda Cinética de Alfvén, W, a derivada radial do campo elétrico radial quase estacionário dE_r/dr é substituída pela expressão aproximada $E_r/\Delta r$,

$$\frac{dE_r}{dr} \approx \frac{E_r}{\Delta r}. \tag{89}$$

O parâmetro Δr é a meia-largura da curva de dependência radial da componente paralela do campo elétrico de RF $E_\parallel$. Foi escolhido um modelo de distribuição radial de

$E_\parallel$ na forma[61]

$$E_\parallel \approx E_A \exp[-\frac{1}{2} \mid x \mid^{3/2}], \quad x \approx 2^{5/3}(\ln 2)^{2/3}\frac{(r-r_0)}{\Delta r}, \tag{90}$$

onde

$$\Delta r \approx \Delta r_0 = 1.8\left(a\frac{c^2}{\omega_{pe}^2}\frac{v_{Te}^4}{V_A^4}\right)^{1/3}, \tag{91}$$

e r_0 é a coordenada radial do ponto de conversão. Este modelo hipotético é semelhante à dependência radial real[61] no caso em que a seguinte condição é cumprida:

$$\frac{M_e}{M_i} < \beta \ll 1, \tag{92}$$

onde $\beta = 8\pi p_i(p_i + p_e)/B^2$ é a razão entre a pressão cinética e a magnética e p_i e p_e são as pressões iônica e eletrônica, respectivamente. Para ondas Cinéticas de Alfvén (KAW), a energia absorvida, W, pode ser expressa pela componente paralela $E_\parallel$

$$W \approx \frac{\Omega}{8\pi}\,\mathrm{Im}\,\epsilon_\parallel \left|E_\parallel\right|^2. \tag{93}$$

Aqui, Ω é a freqüência da KAW, i $\mathrm{Im}\,\epsilon_\parallel$ é a parte anti-Ermitiana da componente paralela do tensor de permissividade dielétrica (ver Apêndice B). Assim, como conseqüência das Eqs.(90) e (93), a dependência radial da potência absorvida W é

$$W \approx W_A \exp[-\mid x \mid^{3/2}], \; W_A = \frac{\Omega}{8\pi}\,\mathrm{Im}\,\epsilon_\parallel \left|E_A\right|^2. \tag{94}$$

No caso das KAW, as forças poloidais[61],[62] agindo sobre os íons podem também ser expressas via a potência absorvida[54],[57]

$$F_\theta^h \approx \frac{m}{r\Omega}W, \tag{95}$$

onde m é o número de onda poloidal. Das Eqs.(84),(86) e (93), pode-se encontrar o campo elétrico radial quase estacionário E_r como uma função da potência absorvida W

$$E_r \approx -\frac{\omega_{ci}}{\Omega}\frac{mM_i}{re_i(\mu_{0i}+\mu_{0e0})}W, \tag{96}$$

onde

$$\frac{\mu_{\theta e0}}{\mu_{\theta i0}} \approx \sqrt{\frac{M_e}{M_i}}.$$

Usando as Eqs.(87), (88), (92), e (96), é mostrada a situação especial em que, na presença da onda Cinética de Alfvén, a dependência radial da viscosidade dos íons, na região de órbita banana do tokamak, é governada pela seguinte equação diferencial:

$$\mu_{\theta i}^{*} \approx \left| 1 + \frac{d}{dx} \frac{P_w^{*} \exp(-x^{3/2})}{(\mu_{\theta i}^{*} + \sqrt{M_e/M_i})} \right|^{-3/2}, \qquad P_w^{*} = \frac{2^{5/3}(\ln 2)^{2/3} m}{r \mu_{\theta i0} \omega_{ci} \Omega} \frac{B_\zeta^2}{B_\theta^2} \frac{W}{\Delta r}. \tag{97}$$

Na Eq.(97), foi suposto que todos os parâmetros macroscópicos do plasma são funções suaves da coordenada radial, exceto a potência absorvida e a viscosidade dos íons.

A meia-largura Δr é igual a Δr_0, se $\Delta r_0 < r_0$, e $\Delta r = r_0$ se $\Delta r_0 > r_0$ (veja Refs. [57] e [63]).

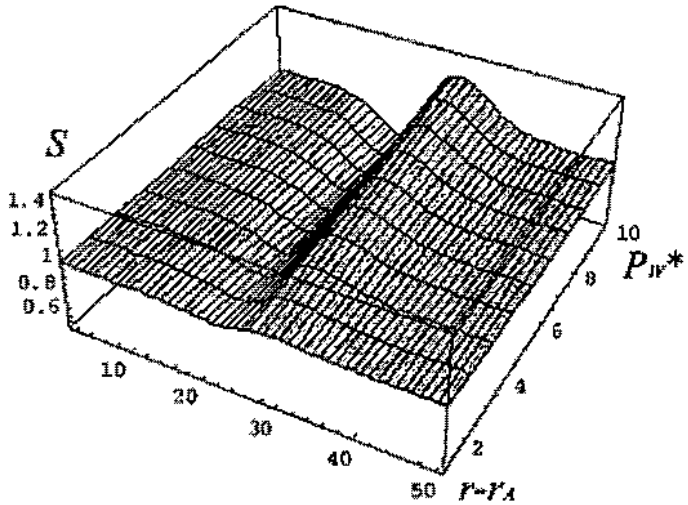


Figura 4.5 - Dependência radial da viscosidade iônica $\mu_{\theta i}^{*}$ em função da potência absorvida P_w^{*}.

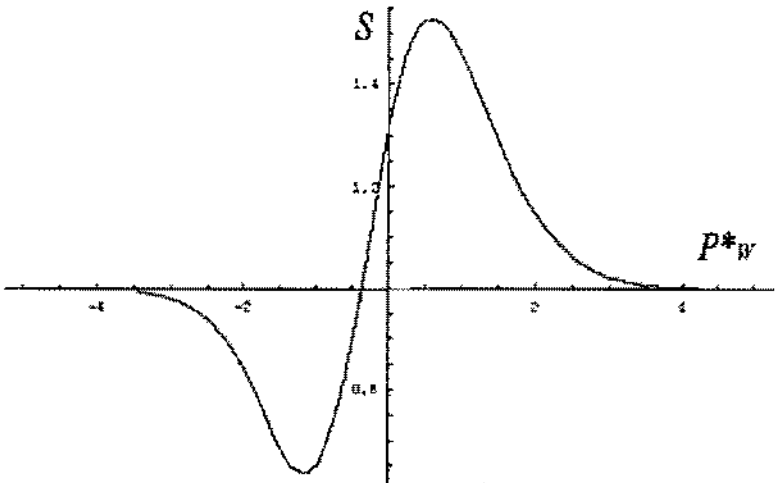


Figura. 4.6 - Dependência radial da viscosidade iônica $\mu^*_{\theta i}$ para a potência absorvida $P^*_w = 0,83$.

A equação (97) é não-linear e portanto foi resolvida numericamente. A dependência radial da viscosidade dos íons no regime de banana, $\mu^*_{\theta i}(x, P^*_w)$, é apresentada nas Figs. 4.5 e 4.6. A solução da equação diferencial, Eq.(97), é mostrada na Fig.4.5. Percebe-se da Fig.4.6 que a viscosidade de íon normalizada na região de banana de tokamak é igual à unidade (nenhuma mudança com relação ao valor inicial, sem campo elétrico) longe do ponto de conversão, onde o poder absorvido de KAW é exponencialmente pequeno. Perto do ponto de conversão, a viscosidade iônica é aumentada ou diminuida dependendo do sinal da potência absorvida normalizada P^*_w e da coordenada x. Se o sinal de P^*_w é mudado, ou seja, se o sinal do número de onda poloidal m é mudado, a Fig.4.6 será a mesma, mas é necessário transformar $x \longrightarrow -x$.

O corte transversal da Fig.4.5 em $P^*_w = 0,83$ é apresentado na Fig. 4.6. Desta figura, verifica-se a dependência radial de $\mu^*_{\theta i}(x)$ em $P^*_w \approx 0,83$. Quando $P^*_w > 0$, a viscosidade iônica diminui aproximadamente 35% para $r < r_0$, e aumenta aproximadamente 50% em $r > r_0$. A diminuição da viscosidade na região mais interna da coluna de plasma significa uma diminuição no transporte neoclássico do plasma.

4.4 Conclusões

Uma forma geral para a média temporal da força ponderomotora produzida por ondas de Alfvén em plasmas magnetizados foi calculada. A força ponderomotora calculada usando a aproximação de dois fluidos inclui contribuições da força de transferência de momento (mais importante no caso dos elétrons) por dissipação da onda e da força gradiente que é relacionada a gradientes dos parâmetros de equilíbrio do plasma e a amplitude da onda (esta parte mais importante para o caso dos íons). Este efeito de gradiente (ou helicidade) pode ser maior que as forças de transferência de momento da onda.

É ressaltada a importância de correções toroidais nos perfís utilizados para calcular as forças ponderomotoras, em especial na presença de modos Globais de Alfvén.

As forças de gradiente são mais importantes para a geração de fluxos cisalhados mas são as forças de transferência de momento as mais importantes para a geração de corrente porque não apresentam troca de sinal.

Os resultados mostram correntes e fluxos de plasma fortemente localizados gerados pelas ondas de Alfvén cinéticas. Supondo parâmetros que são característicos do TCABR, é mostrado que a conversão de modos cinéticos pode produzir uma configuração de fluxos poloidais de plasma cisalhados e também um cisalhamento magnético invertido. O valor do cisalhamento da velocidade chega, no exemplo da Fig. 4.2 a $dv_\theta/dr \approx 1,6 \times 10^5\,\mathrm{s}^{-1}$ e pode ser maior que a freqüência de deriva ω^*, suficiente para suprimir as principais instabilidades[64], no caso do ponto de conversão localizado na metade do raio do plasma com $400\,kW$ de potência dissipada pela onda. A posição do ponto de conversão pode ser controlada pela freqüência do gerador. Esta configuração pode ser apropriada para a criação das barreiras de transporte internas (ITBs).

Os cálculos mostram que, para temperatura eletrônica reduzida, as forças estão mais localizadas (e com amplitude levemente maior) na coordenada radial. A dissipação numa

faixa radial mais estreita é benéfica para a criação de ITB's.

Como exemplos de possíveis conseqüências da criação de um perfil de campo elétrico radial cisalhado (e conseqüente rotação poloidal), são mostrados os efeitos de diminuição da viscosidade iônica (e transporte neoclássico).

Importante salientar que os resultados de estimulação de rotação poloidal são importantes também para a continuação da análise da estabilidade do plasma com relação ao efeito da rotação cisalhada nos modos kink e de Kelvin-Helmholtz, apresentados na dissertação do mestrado[65] e resumido no Apêndice G.

5 SUMÁRIO E SUGESTÕES

Este trabalho tem seu desenvolvimento baseado nos seguintes artigos já publicados:

- A.G. Elfimov, R. M. O. Galvão, I.C. Nascimento and G. Amarante-Segundo *Plasma Phys. Contr. Fusion* **39** 1551 (1997).
- A.G.Elfimov, R.M.O.Galvão, I.C. Nascimento, and G.Amarante-Segundo *Plasma Phys. Contr. Fusion* **40**, 451 (1998).
- G. Amarante-Segundo, A.G. Elfimov, D.W. Ross, R.M.O. Galvão *Phys. Plasmas*, **6**, 2437 (1999).
- G. Amarante-Segundo, A.G.Elfimov, R.M.O. Galvão, and I.C.Nascimento - Calculations of Alfvén Wave Driving Forces, Plasma Flow and Current Drive In The TCABR Tokamak. *Proceedings of the 26th EPS Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics.* 14 - 18 June 1999, Maastricht, The Netherlands Volume 23J, p.1297
- V. S. Tsypin, I. C. Nascimento, R. M. O. Galvão, A. G. Elfimov, G. S. Amarante Segundo and M. Tendler, *Phys. Plasmas*, **6**, 3548 (1999).
- R.M.O. Galvão, A.G. Elfimov, G. Amarante-Segundo, V. S. Tsypin, L..F. Ruchko, I. C. Nascimento and M. Tendler, *Plasma Phys. Contr. Fusion* **41** A487 (1999).

Há também o artigo

A.G.Elfimov, G.Amarante Segundo, R.M.O. Galvão, and I.C. Nascimento - Ion Larmor Radius Effect On RF Ponderomotive Forces And Induced Poloidal Flow In Tokamak Plasmas - aceito para publicação no Physical Review Letters.

5.1 Resumo dos resultados

Num breve sumário do trabalho realizado, as seguintes tarefas foram completadas:

Foi feito um resumo da teoria de aquecimento de plasmas por ondas de Alfvén, para plasmas magnetizados com base no efeito de conversão de modos para plasmas inomogêneos em configurações cilíndricas e toroidais.

Foi mostrado que o modelo cinético toroidal prediz o divisão do modo GA[20]em três ressonâncias que são equivalentes às ressonâncias cilíndricas. No caso de um plasma puro de hidrogênio, com as ressonâncias GA $m = -1, -2$, o campo de RF é dissipado principalmente na ressonância local de Alfvén dos modos vizinhos perto da periferia do plasma. Estas ressonâncias locais são equivalentes às ressonâncias do modelo cilíndrico com números de modo $m = 0, -1$, respectivamente. A ressonância GA $m = 0$ que só aparece no modelo toroidal dissipa sua energia principalmente perto do eixo magnético. Também é mostrado que o modo $N = -6$ é ideal para absorção das ondas de RF para as condições do TCABR.

O efeito da presença de impurezas minoritárias no plasma foi calculado numericamente; foi mostrada a lacuna no contínuo de Alfvén e foi demonstrada a presença de modos globais de Alfvén.

Com os cálculos 2-D é confirmado o principal resultado dos cálculos unidimensionais do Contínuo Híbrido de Alfvén[35]. Além do Contínuo Híbrido de Alfvén cilíndrico para $m \neq 0$, é encontrado o Contínuo Híbrido $m = 0$ no modelo toroidal, onde a onda de Alfvén pode dissipar efetivamente com uma impedância de acoplamento da mesma ordem da do modo $m = -1$. Importante ressaltar que os resultados obtidos com o modo $m = 0$ são completamente novos.

Usando as condições de aquecimento do Contínuo Híbrido[35], é possível levar a cabo o aquecimento por ondas de RF no tokamak TCABR e aplicar os resultados num reator

tokamak.

Uma forma geral para a média temporal da força ponderomotora produzida por ondas de Alfvén em plasmas magnetizados foi calculada. A força ponderomotora calculada usando a aproximação de dois fluidos inclui contribuições da força transferência de momento (mais importante no caso dos elétrons) por dissipação da onda e da força gradiente que é relacionada a gradientes dos parâmetros de equilíbrio do plasma e a amplitude da onda (esta parte mais importante para o caso dos íons). Este efeito de gradiente (ou helicidade) pode ser maior que as forças de transferência de momento da onda.

Os resultados mostram correntes e fluxos de plasma fortemente localizados gerados pelas ondas de Alfvén cinéticas. Supondo parâmetros que são característicos do TCABR, é mostrado que a conversão de modos cinéticos pode produzir uma configuração de fluxos poloidais de plasma cisalhados, indicando a possibilidade de se suprimir as principais instabilidades[64] e da criação das barreiras de transporte internas (ITBs).

Os resultados mostram também que é possível gerar correntes e modificar os perfís de correntes no TCABR.

5.2 Sugestões para continuidade

Algumas modificações importantes podem ser feitas no código toroidal para aumentar a sua eficiência:

Inclusão de mais modos poloidais acoplados - Como está escrito agora, o código apenas acopla o modo poloidal principal e seus vizinhos mais imediatos $(m, m \pm 1)$. Poder-se-ia adicionar pelo menos mais dois modos $(m, m \pm 1, m \pm 2)$. Tal modificação implicaria refazer boa parte dos cálculos e praticamente reescrever parte do código. Poderia adicionar confiabilidade aos resultados acerca dos efeitos toroidais, especialmente a freqüências mais altas.

Modificação das condições de contorno - As condições de contorno do programa foram feitas para um sistema de antenas helicoidais. Uma melhor adequação a um sistema "multiframe" como o que está sendo instalado no TCABR podera permitir melhores resultados com ondas rápidas (FW).

Poder-se-ia, também, após o teste da coerência dos resultados com a experiência para situações específicas, modificar o código de forma a se calcular a evolução temporal do sistema. Tal modificação não deveria demandar um esforço muito grande no sentido das mudanças no código, mas requer especial atenção com a realimentação dos dados de entrada do sistema, de forma a se ter um quadro autoconsistente da evolução do sistema.

Apêndices

A Derivação de coeficientes do tensor dielétrico em coordenadas cilíndricas (exemplo)

Neste apêndice são mostrados os passos para a derivação cinética do tensor dielétrico de um plasma magnetizado na forma cilíndrica.

Definindo a configuração do plasma cilíndrico pelo campo magnético toroidal

$$\vec{B}_0 = B_z \hat{e}_z,$$

mais a Equação de Vlasov

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial F_\alpha}{\partial \vec{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left\{\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{v}\times\vec{B}\right]\right\}\frac{\partial F_\alpha}{\partial \vec{v}} = \hat{S}t\left\{F_\alpha\right\} \tag{98}$$

onde as seguintes quantidades, para as partículas α (α = íons ou elétrons) aparecem:

$F_\alpha(\vec{r},\vec{v},t)$ – Função de distribuição para elétrons e íons.

$\vec{r}(r,\theta,z)$ – vector do espaço de configuração.

$\vec{v}(v_r,v_\theta,v_z)$ – vetor do espaço das velocidades.

m_α – massa da partícula.

e_α – carga da partícula.

$\hat{S}t\left\{F_\alpha\right\}$ – Operador das colisões.

$\vec{E},\vec{B}$ – campos elétrico e magnético.

pode-se expandir a Eq.de Vlasov em coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} + v_x\frac{\partial F_\alpha}{\partial x} + v_y\frac{\partial F_\alpha}{\partial y} + v_z\frac{\partial F_\alpha}{\partial z} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left\{\left(E_x + \frac{v_y}{c}B_z - \frac{v_z}{c}B_y\right)\frac{\partial F_\alpha}{\partial v_x} + \right.$$
$$\left.\left(E_y + \frac{v_z}{c}B_x - \frac{v_x}{c}B_z\right)\frac{\partial F_\alpha}{\partial v_y} + \left(E_z + \frac{v_x}{c}B_y - \frac{v_y}{c}B_x\right)\frac{\partial F_\alpha}{\partial v_z} + \right\} = \hat{S}t\left\{F_\alpha\right\} \quad ,$$

e definir aqui as transformações para coordenadas cilíndricas

$$X = r\cos\theta, \qquad Y = r\sin\theta, \qquad Z = z.$$

A seguinte tabela de conversão se faz necessária:

$$
\begin{aligned}
dx &= \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta; \\
dy &= \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta; \\
rd\theta &= \cos\theta dy - \sin\theta dx; \\
dr &= \sin\theta dy + \cos\theta dx; \\
v_x &= v_r\cos\theta - v_\theta\sin\theta; \\
v_y &= v_r\sin\theta + v_\theta\cos\theta; \\
v_r &= v_x\cos\theta + v_y\sin\theta; \\
v_\theta &= v_y\cos\theta - v_x\sin\theta; \\
dv_r &= \cos\theta dv_x + \sin\theta dv_y - \sin\theta v_x d\theta + \cos\theta v_y d\theta; \\
dv_\theta &= \cos\theta dv_y - \sin\theta dv_x - \sin\theta v_y d\theta - \cos\theta v_x d\theta; \\
dv_x &= dv_r\cos\theta - dv_\theta\sin\theta - v_r\sin\theta d\theta - v_\theta\cos\theta d\theta = \\
&\quad dv_r\cos\theta - dv_\theta\sin\theta - v_y d\theta; \\
dv_y &= dv_r\sin\theta + dv_\theta\cos\theta + v_r\cos\theta d\theta - v_\theta\sin\theta d\theta = \\
&\quad dv_r\sin\theta + dv_\theta\cos\theta + v_x d\theta;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d\theta &= -\frac{1}{v_\theta}\left(dv_x\cos\theta + dv_y\sin\theta - dv_r\right);\\
d\theta &= \frac{1}{v_r}\left(-dv_x\sin\theta + dv_y\cos\theta - dv_\theta\right);\\
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial v_r} + \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial v_\theta} =\\
&\quad \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\theta}{r}v_\theta\frac{\partial}{\partial v_r} + \frac{\sin\theta}{r}v_r\frac{\partial}{\partial v_\theta};\\
\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial v_r} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial v_\theta} =\\
&\quad \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\theta}{r}v_\theta\frac{\partial}{\partial v_r} - \frac{\cos\theta}{r}v_r\frac{\partial}{\partial v_\theta};\\
\frac{\partial}{\partial v_x} &= \frac{\partial v_r}{\partial v_x}\frac{\partial}{\partial v_r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial v_x}\frac{\partial}{\partial v_\theta} + \frac{\partial\theta}{\partial v_x}\frac{\partial}{\partial\theta} =\\
&\quad \cos\theta\frac{\partial}{\partial v_r} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial v_\theta} - \frac{\sin\theta}{v_r}\frac{\partial}{\partial\theta};\\
\frac{\partial}{\partial v_y} &= \frac{\partial v_r}{\partial v_y}\frac{\partial}{\partial v_r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial v_y}\frac{\partial}{\partial v_\theta} + \frac{\partial\theta}{\partial v_y}\frac{\partial}{\partial\theta} =\\
&\quad \sin\theta\frac{\partial}{\partial v_r} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial v_\theta} + \frac{\cos\theta}{v_r}\frac{\partial}{\partial\theta}.
\end{aligned}
$$

Inserindo as transformações na Eq.de Vlasov, obtém-se

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} + \left(v_r\cos\theta - v_\theta\sin\theta\right)\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\theta}{r}v_\theta\frac{\partial}{\partial v_r} + \frac{\sin\theta}{r}v_r\frac{\partial}{\partial v_\theta}\right)F_\alpha +\\
&\left(v_r\sin\theta + v_\theta\cos\theta\right)\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\theta}{r}v_\theta\frac{\partial}{\partial v_r} - \frac{\cos\theta}{r}v_r\frac{\partial}{\partial v_\theta}\right)F_\alpha + v_z\frac{\partial F_\alpha}{\partial z} +\\
&\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left\{\left(E_r\cos\theta - E_\theta\sin\theta + \frac{v_r\sin\theta + v_\theta\cos\theta}{c}B_z - \frac{v_z}{c}\left(B_r\sin\theta + B_\theta\cos\theta\right)\right)\right.\\
&\times\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial v_r} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial v_\theta}\right)\\
&+\left(E_r\sin\theta + E_\theta\cos\theta + \frac{v_z}{c}\left(B_r\cos\theta - B_\theta\sin\theta\right) - \frac{v_r\cos\theta - v_\theta\sin\theta}{c}B_z\right)\\
&\times\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial v_r} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial v_\theta}\right) +\\
&\left(E_z + \frac{v_r\cos\theta - v_\theta\sin\theta}{c}\left(B_r\sin\theta + B_\theta\cos\theta\right) - \frac{v_r\sin\theta + v_\theta\cos\theta}{c}\left(B_r\cos\theta - B_\theta\sin\theta\right)\right)\\
\times\quad &\left.\frac{\partial}{\partial v_z}\right\}F_\alpha = \hat{S}t\left\{F_\alpha\right\}
\end{aligned}
$$

e passando, definitivamente para coordenadas cilíndricas,

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} + v_r \frac{\partial F_\alpha}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial F_\alpha}{\partial \theta} + \frac{v_\theta}{r}\left(v_\theta \frac{\partial}{\partial v_r} - v_r \frac{\partial}{\partial v_\theta}\right) F_\alpha + v_z \frac{\partial F_\alpha}{\partial z} \quad +$$
$$\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left\{E_r \frac{\partial}{\partial v_r} + E_\theta \frac{\partial}{\partial v_\theta} + E_z \frac{\partial}{\partial v_z} + -\frac{v_r}{c} B_z \frac{\partial}{\partial v_\theta} + \frac{v_\theta}{c} B_z \frac{\partial}{\partial v_r}\right.$$
$$\left. + \frac{v_z}{c} B_r \frac{\partial}{\partial v_\theta} - \frac{v_\theta}{c} B_r \frac{\partial}{\partial v_z} + \frac{v_r}{c} B_\theta \frac{\partial}{\partial v_z} - \frac{v_z}{c} B_\theta \frac{\partial}{\partial v_r}\right\} F_\alpha = \hat{S}t\left\{F_\alpha\right\} \quad ,$$

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} + v_r \frac{\partial F_\alpha}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial F_\alpha}{\partial \theta} + \frac{v_\theta}{r}\left(v_\theta \frac{\partial}{\partial v_r} - v_r \frac{\partial}{\partial v_\theta}\right) F_\alpha + v_z \frac{\partial F_\alpha}{\partial z} \quad +$$
$$\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left\{\left(E_r + \frac{1}{c}\left[B_z v_\theta - B_\theta v_z\right]\right)\frac{\partial}{\partial v_r} + \left(E_\theta + \frac{1}{c}\left[B_r v_z - B_z v_r\right]\right)\frac{\partial}{\partial v_\theta}\right.$$
$$\left. + \left(E_z + \frac{1}{c}\left[B_\theta v_r - B_r v_\theta\right]\right)\frac{\partial}{\partial v_z}\right\} F_\alpha = \hat{S}t\left\{F_\alpha\right\} \quad .$$

Agora, definindo um sistema de coordenadas baseado no campo magnético de equilíbrio, com as direções paralela e perpendicular a $\vec{B}_0$, e com o ângulo σ:

$$\begin{aligned}
v_r &= v_\perp \cos\sigma;; \\
v_\theta &= v_\perp \sin\sigma; \\
v_z &= v_\parallel; \\
dv_r &= \cos\sigma dv_\perp - v_\perp \sin\sigma d\sigma; \\
dv_\theta &= \sin\sigma dv_\perp + v_\perp \cos\sigma d\sigma; \\
dv_\perp &= dv_\theta \sin\sigma + dv_r \cos\sigma; \\
v_\perp d\sigma &= \cos\sigma dv_\theta - \sin\sigma dv_r; \\
\frac{\partial}{\partial v_r} &= \frac{\partial v_\perp}{\partial v_r}\frac{\partial}{\partial v_\perp} + \frac{\partial \sigma}{\partial v_r}\frac{\partial}{\partial \sigma} = \cos\sigma \frac{\partial}{\partial v_\perp} - \frac{\sin\sigma}{v_\perp}\frac{\partial}{\partial \sigma}; \\
\frac{\partial}{\partial v_\theta} &= \frac{\partial v_\perp}{\partial v_\theta}\frac{\partial}{\partial v_\perp} + \frac{\partial \sigma}{\partial v_\theta}\frac{\partial}{\partial \sigma} = \sin\sigma \frac{\partial}{\partial v_\perp} + \frac{\cos\sigma}{v_\perp}\frac{\partial}{\partial \sigma}.
\end{aligned}$$

Substituindo na Equação de Vlasov cilíndrica,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} + v_\perp \cos\sigma \frac{\partial F_\alpha}{\partial r} + \frac{v_\perp}{r}\sin\sigma \frac{\partial F_\alpha}{\partial \theta} + v_\parallel \frac{\partial F_\alpha}{\partial z} \\
&+\frac{v_\perp^2 \sin\sigma}{r}\left[\sin\sigma\left(\cos\sigma\frac{\partial}{\partial v_\perp} - \frac{\sin\sigma}{v_\perp}\frac{\partial}{\partial\sigma}\right) - \cos\sigma\left(\sin\sigma\frac{\partial}{\partial v_\perp} + \frac{\cos\sigma}{v_\perp}\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)\right] F_\alpha \\
&+\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left\{\left(E_r + \frac{1}{c}\left[B_\parallel v_\perp \sin\sigma - B_\theta v_\parallel\right]\right)\left(\cos\sigma\frac{\partial}{\partial v_\perp} - \frac{\sin\sigma}{v_\perp}\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)\right. \\
&+\left(E_\theta + \frac{1}{c}\left[B_r v_\parallel - B_\parallel v_\perp \cos\sigma\right]\right)\left(\sin\sigma\frac{\partial}{\partial v_\perp} + \frac{\cos\sigma}{v_\perp}\frac{\partial}{\partial\sigma}\right) \\
&\left.+\left(E_\parallel + \frac{1}{c}\left[B_\theta v_\perp \cos\sigma - B_r v_\perp \sin\sigma\right]\right)\frac{\partial}{\partial v_\parallel}\right\} F_\alpha = \widehat{St}\left\{F_\alpha\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} + v_\perp \cos\sigma \frac{\partial F_\alpha}{\partial r} + \frac{v_\perp}{r}\sin\sigma \frac{\partial F_\alpha}{\partial \theta} + v_\parallel \frac{\partial F_\alpha}{\partial z} \\
&+\frac{v_\perp^2 \sin\sigma}{r}\left[\sin\sigma\left(\cos\sigma\frac{\partial}{\partial v_\perp} - \frac{\sin\sigma}{v_\perp}\frac{\partial}{\partial\sigma}\right) - \cos\sigma\left(\sin\sigma\frac{\partial}{\partial v_\perp} + \frac{\cos\sigma}{v_\perp}\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)\right] F_\alpha \\
&+\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left\{\left(E_r + \frac{1}{c}\left[B_\parallel v_\perp \sin\sigma - B_\theta v_\parallel\right]\right)\left(\cos\sigma\frac{\partial}{\partial v_\perp} - \frac{\sin\sigma}{v_\perp}\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)\right. \\
&+\left(E_\theta + \frac{1}{c}\left[B_r v_\parallel - B_\parallel v_\perp \cos\sigma\right]\right)\left(\sin\sigma\frac{\partial}{\partial v_\perp} + \frac{\cos\sigma}{v_\perp}\frac{\partial}{\partial\sigma}\right) \\
&\left.+\left(E_\parallel + \frac{1}{c}\left[B_\theta v_\perp \cos\sigma - B_r v_\perp \sin\sigma\right]\right)\frac{\partial}{\partial v_\parallel}\right\} F_\alpha = \widehat{St}\left\{F_\alpha\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} + v_\perp \cos\sigma \frac{\partial F_\alpha}{\partial r} + \frac{v_\perp}{r}\sin\sigma \frac{\partial F_\alpha}{\partial \theta} + v_\parallel \frac{\partial F_\alpha}{\partial z} - \frac{v_\perp \sin\sigma}{r}\frac{\partial}{\partial\sigma} F_\alpha \\
&+\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left\{\left[\left(E_r - \frac{1}{c}B_\theta v_\parallel\right)\cos\sigma + \left(E_\theta + \frac{1}{c}B_r v_\parallel\right)\sin\sigma\right]\frac{\partial}{\partial v_\perp}\right. \\
&+\left[\left(E_\theta + \frac{v_\parallel}{c}B_r\right)\frac{\cos\sigma}{v_\perp} - \left(E_r - \frac{v_\parallel}{c}B_\theta\right)\frac{\sin\sigma}{v_\perp} - \frac{1}{c}B_\parallel\right]\frac{\partial}{\partial\sigma} \\
&\left.+\left(E_\parallel + \frac{v_\perp}{c}\left[B_\theta \cos\sigma - B_r \sin\sigma\right]\right)\frac{\partial}{\partial v_\parallel}\right\} F_\alpha = \widehat{St}\left\{F_\alpha\right\},
\end{aligned}
$$

substituindo-se a freqüência ciclotrônica das partículas, $\omega_{c\alpha} \simeq \frac{e_\alpha}{m_\alpha c} B_\parallel$, obtém-se

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} + v_\perp \cos\sigma \frac{\partial F_\alpha}{\partial r} + \frac{v_\perp}{r}\sin\sigma \frac{\partial F_\alpha}{\partial \theta} + v_\parallel \frac{\partial F_\alpha}{\partial z} - \left(\omega_c + \frac{v_\perp}{r}\sin\sigma\right)\frac{\partial F_\alpha}{\partial\sigma} \\
&+\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left\{\left[\left(E_r - \frac{v_\parallel}{c}B_\theta\right)\cos\sigma + \left(E_\theta + \frac{v_\parallel}{c}B_r\right)\sin\sigma\right]\frac{\partial F_\alpha}{\partial v_\perp} + \left[\frac{v_\perp}{c}\left(B_\theta \cos\sigma - B_r \sin\sigma\right) + E_3\right]\frac{\partial F_\alpha}{\partial v_\parallel}\right. \\
&\left.+\left[\left(E_\theta + \frac{v_\parallel}{c}B_r\right)\cos\sigma - \left(E_r - \frac{v_\parallel}{c}B_\theta\right)\sin\sigma\right]\frac{\partial F_\alpha}{v_\perp \partial\sigma}\right\} = \widehat{St}\left\{F_\alpha\right\}.
\end{aligned}
$$

Fazendo uma expansão para a perturbação em primeira ordem da função de distribuição das partículas:

$$\tilde{f} = \left\{ f_0 + \sum_{l \neq 0} \left[f_{r,l} \cos(l\sigma) + f_{b,l} \sin(l\sigma) \right] \right\} \exp i \left(m\theta + kz - \Omega t \right),$$

e substituindo a expressão acima pela expansão de onda plana, obtém-se a expressão total de F, em primeira ordem no espaço de configuração e de velocidades:

$$F = F_M + F_b \sin\sigma + F_r \cos\sigma + \left(f_0 + f_r \cos\sigma + f_b \sin\sigma \right) \exp i \left(m\theta + k_z z - \Omega t \right).$$

Substituindo essa última na Eq.99 independente do tempo e sem os termos de campo perturbado,

$$v_\perp \cos\sigma \frac{\partial F_{0\alpha}}{\partial r} + v_\perp \cos^2\sigma \frac{\partial F_{r\alpha}}{\partial r} - \omega_{c\alpha} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \sigma} - \frac{v_\perp}{r} \sin\sigma \frac{\partial F_\alpha}{\partial \sigma} = 0,$$

$$v_\perp \cos\sigma \frac{\partial F_{M\alpha}}{\partial r} + v_\perp \cos^2\sigma \frac{\partial F_{r\alpha}}{\partial r} - \omega_{c\alpha} \left(F_{b\alpha} \cos\sigma - \sin\sigma F_{r\alpha} \right) - \frac{v_\perp}{r} \sin\sigma \left(F_{b\alpha} \cos\sigma - \sin\sigma F_{r\alpha} \right) = 0,$$

$$v_\perp \frac{\partial F_{M\alpha}}{\partial r} + v_\perp \cos\sigma \frac{\partial F_{r\alpha}}{\partial r} - \omega_{c\alpha} \left(F_{b\alpha} - \frac{\sin\sigma}{\cos\sigma} F_{r\alpha} \right) - \frac{v_\perp}{r} \sin\sigma \left(F_{b\alpha} - \frac{\sin\sigma}{\cos\sigma} F_{r\alpha} \right) = 0,$$

que só é válida com $F_{r\alpha} = 0$. Eliminando os termos de primeira ordem em σ,

$$v_\perp \frac{\partial F_{M\alpha}}{\partial r} = \omega_c F_{b\alpha}$$

Assim é demonstrado que a ordem zero para a aproximação de onda é

$$F_{0\alpha} = F_{M\alpha} + F_{b\alpha} \sin\sigma, \tag{100}$$

onde

$$F_{M\alpha} = \frac{N_{0\alpha}}{\left(2\pi v_{T\alpha}^2\right)^{3/2}} \exp\left[-\frac{v_\perp^2 + \left(v_\parallel - v_{0\alpha} \right)^2}{2 v_{T\alpha}^2} \right], \qquad F_{b\alpha} = \frac{v_\perp}{\omega_{c\alpha}} \frac{dF_{M\alpha}}{dr}.$$

Levando-se em conta

$$\begin{aligned} \cos^2\sigma &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\sigma, \\ \sin^2\sigma &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\sigma, \end{aligned}$$

e fazendo a hipótese do operador de Krook,

$$\hat{S}t\{F_\alpha\} = \nu_e F_e,$$

obtém-se, da Eq.(99) a seguinte expressão para os termos independentes de σ:

$$-i\Omega f_0 + v_\perp \cos^2\sigma \frac{\partial f_r}{\partial r} + im\frac{v_\perp}{r}\sin^2\sigma f_b + ik_\parallel v_\parallel f_0 + \frac{v_\perp}{r}\sin^2\sigma f_r +$$
$$\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left\{\left(E_\theta + \frac{v_\parallel}{c}B_r\right)\sin^2\sigma\frac{\partial F_b}{\partial v_\perp} - \frac{v_\perp}{c}B_r\sin^2\sigma\frac{\partial F_b}{\partial v_\parallel} + E_z\frac{\partial F_M}{\partial v_\parallel} + \left(E_\theta + \frac{v_\parallel}{c}B_r\right)\cos^2\sigma\frac{F_b}{v_\perp}\right\} = \nu_e f_0,$$

ou melhor,

$$\left(-i\Omega + ik_\parallel v_\parallel - \nu_e\right) f_0 + \frac{v_\perp}{2}\frac{\partial f_r}{\partial r} + \frac{v_\perp}{2r}f_r + im\frac{v_\perp}{2r}f_b +$$
$$\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left\{\frac{E_\theta}{2}\frac{\partial F_b}{\partial v_\perp} + \frac{v_\parallel}{c}B_r\frac{1}{2}\frac{\partial F_b}{\partial v_\perp} - \frac{v_\perp}{c}B_r\frac{1}{2}\frac{\partial F_b}{\partial v_\parallel} + E_z\frac{\partial F_M}{\partial v_\parallel} + \left(E_\theta + \frac{v_\parallel}{c}B_r\right)\frac{F_b}{2v_\perp}\right\} = 0.$$

Usando a identidade

$$v_\perp\frac{\partial F_b}{\partial v_\parallel} = v_\parallel\frac{\partial F_b}{\partial v_\perp},$$

chega-se, finalmente, à expressão

$$i\left(k_\parallel v_\parallel - \Omega + i\nu_e\right) f_0 + \frac{v_\perp}{2r}\left(\frac{d\left(rf_r\right)}{dr} + imf_b\right) + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left\{\frac{E_\theta}{2}\frac{\partial F_b}{\partial v_\perp} + E_z\frac{\partial F_M}{\partial v_\parallel} + \left(E_\theta + \frac{v_\parallel}{c}B_r\right)\frac{F_b}{2v_\perp}\right\} = 0.$$

Fazendo a transformação

$$\omega \to \Omega - i\nu_{ef},$$

e seguindo os mesmos procedimentos para as componentes proporcionais a $\cos\sigma$ e $\sin\sigma$ da Eq.(99), obtém-se o conjunto de equações das quantidades perturbadas

---

$$i\left(k_\parallel v_\parallel - \omega\right) f_0 + \frac{v_\perp}{2}\left(\frac{df_r}{dr} + \frac{f_r}{r} + i\frac{m}{r}f_b\right)$$
$$= -\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left[E_3\frac{\partial F_{M\alpha}}{\partial v_\parallel} + \frac{E_2}{\omega_c}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{F_{M\alpha}}{2} + \frac{v_\perp}{2}\frac{\partial F_{M\alpha}}{\partial v_\perp}\right) + \frac{v_\parallel}{2cv_\perp}B_1F_b\right]; \qquad (102)$$

$$\omega_c f_b = -i\left(\omega - k_\parallel v_\parallel\right) f_r + v_\perp \frac{\partial f_0}{\partial r} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left[E_r \frac{\partial F_{M\alpha}}{\partial v_\perp} - \frac{B_z}{c} F_b\right]; \tag{103}$$

$$\omega_c f_r = i\left(\omega - k_\parallel v_\parallel\right) f_b - i k_b v_\perp f_0 - \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left[E_\theta \frac{\partial F_{M\alpha}}{\partial v_\perp} + \frac{E_z}{c}\frac{\partial F_b}{\partial v_\perp}\right]. \tag{104}$$

Incluindo(104) em, (103), obtém–se

$$\begin{aligned}\omega_c^2 f_b &= \left(\omega - k_\parallel v_\parallel\right)^2 f_b - \left(\omega - k_\parallel v_\parallel\right) k_b v_\perp f_0 + i\left(\omega - k_\parallel v_\parallel\right)\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left[E_2 \frac{\partial F_{M\alpha}}{\partial v_\perp} + \frac{E_3}{c}\frac{\partial F_b}{\partial v_\perp}\right] \\ &\quad + \omega_c v_\perp \frac{\partial f_0}{\partial r} + \omega_c \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left[E_1 \frac{\partial F_{M\alpha}}{\partial v_\perp} - \frac{B_3}{c} F_b\right];\end{aligned} \tag{105}$$

$$\begin{aligned}\left(\omega_c^2 - \left(\omega - k_\parallel v_\parallel\right)^2\right) f_b &= \omega_c v_\perp \frac{\partial f_0}{\partial r} + i\left(\omega - k_\parallel v_\parallel\right)\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left[E_2 \frac{\partial F_{M\alpha}}{\partial v_\perp} + \frac{E_3}{c}\frac{\partial F_b}{\partial v_\perp}\right] \\ &\quad - \left(\omega - k_\parallel v_\parallel\right) k_b v_\perp f_0 + \frac{\omega_c e_\alpha}{m_\alpha}\left[E_1 \frac{\partial F_{M\alpha}}{\partial v_\perp} - \frac{B_3}{c} F_b\right].\end{aligned} \tag{106}$$

Incluindo (103) em (104), obtém–se

$$\begin{aligned}\omega_c^2 f_r &= \left(\omega - k_\parallel v_\parallel\right)^2 f_r + i\left(\omega - k_\parallel v_\parallel\right) v_\perp \frac{\partial f_0}{\partial r} + i\left(\omega - k_\parallel v_\parallel\right)\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left[E_1 \frac{\partial F_{M\alpha}}{\partial v_\perp} - \frac{B_3}{c} F_b\right] \\ &\quad - i k_b v_\perp f_0 \omega_c - \frac{e_\alpha \omega_c}{m_\alpha}\left[E_2 \frac{\partial F_{M\alpha}}{\partial v_\perp} + \frac{E_3}{c}\frac{\partial F_b}{\partial v_\perp} - \frac{B_1}{c}\left(\frac{v_\perp v_0}{v_{T\alpha}^2} F_{M\alpha}\right)\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\omega_c^2 - \left(\omega - k_\parallel v_\parallel\right)^2\right) f_r &= i\left(\left(\omega - k_\parallel v_\parallel\right) v_\perp \frac{\partial}{\partial r} - \omega_c k_b v_\perp\right) f_0 - \frac{e_\alpha \omega_c}{m_\alpha}\left[E_2 \frac{\partial F_{M\alpha}}{\partial v_\perp} + \frac{E_3}{c}\frac{\partial F_b}{\partial v_\perp}\right] \\ &\quad + i\left(\omega - k_\parallel v_\parallel\right)\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left[E_1 \frac{\partial F_{M\alpha}}{\partial v_\perp} - \frac{B_3}{c} F_b\right].\end{aligned}$$

Estas equações podem ser substituídas nas equações para a densidade de corrente perturbada

---

$$\begin{aligned}j_1 &= \sum_\alpha e_\alpha \int_0^\infty d\sigma \cos\sigma \int_{-\infty}^\infty dv_\parallel \int_0^\infty v_\perp^2 \tilde{f}_\alpha dv_\perp = \pi \sum_\alpha e_\alpha \int_{-\infty}^\infty dv_\parallel \int_0^\infty v_\perp^2 f_r^\alpha dv_\perp; \\ j_2 &= \sum_\alpha e_\alpha \int_0^\infty d\sigma \sin\sigma \int_{-\infty}^\infty dv_\parallel \int_0^\infty v_\perp^2 \tilde{f}_\alpha dv_\perp = \pi \sum_\alpha e_\alpha \int_{-\infty}^\infty dv_\parallel \int_0^\infty v_\perp^2 f_b^\alpha dv_\perp; \\ j_3 &= \sum_\alpha e_\alpha \int_0^\infty v_\parallel d\sigma \int_{-\infty}^\infty dv_\parallel \int_0^\infty v_\perp \tilde{f}_\alpha dv_\perp = 2\pi \sum_\alpha e_\alpha \int_{-\infty}^\infty v_\parallel dv_\parallel \int_0^\infty v_\perp f_0^\alpha dv_\perp;\end{aligned}$$

para, junto com as Equações de Maxwell, compor as expressões finais do tensor dielétrico. Empregando a relação entre a corrente oscilatória e o campo elétrico,

$$4\pi j_i = -i\Omega\left(\delta_{ij} - \epsilon_{ij}\right) E_j, \tag{107}$$

onde δ_{ij} é a delta de Kroeneker, chega-se às componentes do tensor dielétrico

$$\hat{\epsilon}_{11} = \sum_\alpha \frac{\omega_{P\alpha}^2}{\omega_{c\alpha}^2}\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{c\alpha}^2}\right)^{-1} + 2\frac{k_b^2 v_{T\alpha}^2}{\omega^2}(\Lambda_\alpha - 1)\right]; \tag{108}$$

$$\hat{\epsilon}_{12} = \sum_\alpha \frac{i\omega_{P\alpha}^2}{\omega\omega_{c\alpha}}\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{c\alpha}^2}\right)^{-1} - \frac{(\chi_N + \chi_T)k_b v_{T\alpha}^2}{\omega\omega_{c\alpha}} + \frac{2k_b v_{T\alpha}^2}{r\omega\omega_{c\alpha}}(\Lambda_\alpha - 1)\frac{\partial}{\partial r}(r\ldots)\right]; \tag{109}$$

$$\hat{\epsilon}_{13} = -i\frac{k_b}{k_\parallel}\sum_\alpha \frac{\omega_{P\alpha}^2}{\omega\omega_{c\alpha}}\left\{\Lambda_\alpha - \frac{k_b v_{T\alpha}^2}{2\omega\omega_{c\alpha}}\left[\chi_T + 2\chi_N\Lambda_\alpha + \chi_T(1 + 2{Z_\alpha}^2)\Lambda_\alpha\right]\right\}; \tag{110}$$

$$\hat{\epsilon}_{21} = -\epsilon_{12} - i\sum_\alpha \frac{\omega_{P\alpha}^2}{\omega^2}\frac{k_b v_{T\alpha}^2}{\omega_{c\alpha}^2}\left\{\frac{4}{r}(\Lambda_\alpha - 1) - 2\chi_N\Lambda_\alpha - \chi_T[(1 + 2{Z_\alpha}^2)\Lambda_\alpha - 1]\right\}; \tag{111}$$

$$\hat{\epsilon}_{22} = \sum_\alpha \frac{\omega_{P\alpha}^2}{{\omega_{c\alpha}}^2}\left\{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{c\alpha}^2}\right)^{-1} - 2\frac{k_b^2 v_{T\alpha}^2}{\omega^2}(\Lambda_\alpha - 1)\frac{\partial}{\partial r}r\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\ldots\right)\right]\right.$$
$$\left. - \frac{\chi_N v_{T\alpha}^2}{r\omega^2}\left[1 + 2(\Lambda_\alpha - 1)\frac{\partial}{\partial r}(r\ldots)\right] - \frac{\chi_T v_{T\alpha}^2}{r\omega^2}\left[1 - [1 - (1 + 2{Z_\alpha}^2)\Lambda_\alpha]\frac{\partial}{\partial r}(r\ldots)\right]\right\}; \tag{112}$$

$$\hat{\epsilon}_{23} = \sum_\alpha \frac{\omega_{P\alpha}^2}{\omega\omega_{c\alpha}}\left\{\Lambda_\alpha\frac{1}{k_\parallel}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\chi_N}{k_\parallel}\Lambda_\alpha + \frac{\chi_T}{2k_\parallel}[1 - (1 - 2{Z_\alpha}^2)\Lambda_\alpha]\right\}; \tag{113}$$

$$\hat{\epsilon}_{31} = -\epsilon_{13} + i\frac{k_b}{k_\parallel}\sum_\alpha \frac{\omega_{P\alpha}^2}{\omega\omega_{c\alpha}}\left[(1 - \Lambda_\alpha)\frac{k_\parallel v_{0\alpha}}{\omega}\right]; \tag{114}$$

$$\hat{\epsilon}_{32} = \frac{-1}{k_\parallel r}\sum_\alpha \frac{\omega_{P\alpha}^2}{\omega\omega_{c\alpha}}\left\{\Lambda_\alpha - \frac{k_b v_{T\alpha}^2}{\omega\omega_{c\alpha}}\{\chi_N\Lambda_\alpha + \frac{\chi_T}{2}[1 + (1 + 2Z_\alpha^2)\Lambda_\alpha]\}\right\}\frac{\partial}{\partial r}(r\ldots); \tag{115}$$

$$\epsilon_{33} = \sum_{\alpha} \frac{\omega_{P\alpha}^2}{k_{\parallel}^2 v_{T\alpha}^2} \left\{ \Lambda_\alpha - \frac{\chi_N k_0 v_{T\alpha}^2}{\omega \omega_{c\alpha}} \Lambda_\alpha - \frac{\chi_T k_0 v_{T\alpha}^2}{2\omega\omega_{c\alpha}} [1 - (1 - 2{Z_\alpha}^2)\Lambda_\alpha] \right\}; \qquad (116)$$

onde $\omega_{P\alpha}^2 = 4\pi N_{0\alpha} e_\alpha^2 / M_\alpha$ é a freqüência de plasma,

$$\Lambda_\alpha = 1 + i\sqrt{\pi} Z_\alpha W(Z_\alpha), \qquad Z_\alpha = \frac{\omega - k_{\parallel} v_{0\alpha}}{\sqrt{2} k_{\parallel} v_{T\alpha}} \qquad (117)$$

e

$$W(Z_\alpha) = exp(-Z_\alpha^2) \left[1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^{Z_\alpha} exp(t^2) dt \right],$$

é a função de dispersão do plasma, e os parâmetros de inomogeneidade radial χ_1, χ_N, χ_T são definidos como

$$\chi_N = \frac{\partial}{\partial r} ln N_0, \qquad \chi_T = \frac{\partial}{\partial r} ln T_\alpha.$$

B Tensor dielétrico

Neste apêndice é listada a expressão completa do tensor dielétrico utilizado no código toroidal ($2D$). Alguns dos fragmentos e funções, como PDF[x] (Plasma Dispersion Function - Função de dispersão do Plasma - $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{(Z_a - x)} dx$), e algumas *flags*, parâmetros de inclusão de efeitos opcionais são mantidos da forma em que são introduzidos no código. Estes são:

COUP1 - Termo que sinaliza a existência ou não de impurezas.

COUP2 - Termo que sinaliza a existência ou não de impurezas.

YZCOUP - Termo de acoplamento de elementos $r \parallel$ e $\perp \parallel$ do tensor dielétrico.

BICOUP - Termo que sinaliza os efeitos de raio de Larmor finito.

YYCOUP - Termo de acoplamento dos termos de correção íon-acústica no elemento $\perp \perp$ do tensor dielétrico.

Na maioria das componentes deste tensor, os termos de elétrons e íons estão somados. Em alguns casos específicos, importantes principalmente para o cálculo das forças ponderomotoras (Capítulo 4), os termos de íons e de elétrons estão separados.

$$
\begin{aligned}
\chi_{rr} = \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \Bigg\{ & \left(\frac{\omega}{V_A(r)}\right)^2 \cdot \alpha_i(r) - k_\perp^2(r) \cdot \Bigg[\frac{3}{2}\rho_i^2(r) \left(\frac{\omega}{V_A(r)}\right)^2 \alpha_i(r) + \\
& \frac{3\rho_{imp}^2(r)\cdot \mathrm{F}}{4} \frac{\omega \cdot \omega_{p,imp}(r)}{c^2 \left|k_{//}(r)\right| V_{Timp}(r)} \times \left(\mathrm{PDF}\left[\frac{(\omega - \Omega_{imp})}{\left|k_{//}(r)\right| V_{Timp}(r)}\right] + \mathrm{PDF}\left[\frac{(\omega + \Omega_{imp})}{\left|k_{//}(r)\right| V_{Timp}(r)}\right]\right) \cdot \mathrm{COUP1} \\
& - \frac{\rho_i^2(r)}{4} \frac{\omega \cdot \omega_{p,i}^2(r)}{c^2 \left|k_{//}(r)\right| \cdot V_{Ti}(r)} \left(\mathrm{PDF}\left[\frac{\omega - 2\Omega_i(r)}{\left|k_{//}(r)\right| V_{Ti}(r)}\right] + \mathrm{PDF}\left[\frac{\omega + 2\Omega_i(r)}{\left|k_{//}(r)\right| V_{Ti}(r)}\right]\right) \cdot \mathrm{BICOUP} \Bigg] \\
& + \frac{1}{2a^2} \left[\left[\rho_i^2(r) \left(\frac{\omega}{V_A(r)}\right)^2 \alpha_i(r) \right]' + \left[\rho_{imp}^2(r) \cdot \mathrm{ZPI1(I,J)}\right]' - \left[\rho_i^2(r) \cdot \mathrm{ZPI3}\right]' \right] \left[\frac{a}{r} + \frac{d}{dr}\right] \\
& + \frac{\mathrm{RIW1SQ}}{a^2} \left[-\frac{a^2}{r^2} + \frac{a}{r}\frac{d}{dr} + \frac{d^2}{dr^2} \right] + \\
& \frac{1}{2} \frac{\omega \cdot \omega_{p,imp}(r)}{c^2 \left|k_{//}(r)\right| V_{Timp}(r)} \left[\mathrm{PDF}\left(\frac{(\omega - \Omega_{imp}(r))}{\left|k_{//}(r)\right| V_{Timp}(r)}\right) + \mathrm{PDF}\left(\frac{(\omega + \Omega_{imp}(r))}{\left|k_{//}(r)\right| V_{Timp}(r)}\right) \right] \cdot \mathrm{COUP1} \Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\chi_{\perp r} = & -i \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \Bigg\{ \frac{\omega}{\Omega_i(r)} \left(\frac{\omega}{V_A(r)}\right)^2 \alpha_i(r) - \frac{\mathrm{RIW1SQ}}{a} k_\perp(r) \left(\frac{a}{r} + \frac{d}{dr}\right) \\
& + \frac{k_\perp(r)}{a} \left[\frac{3}{2} \left(\left[\rho_i^2(r) \left(\frac{\omega}{V_A(r)}\right)^2 \alpha_i(r) \right]' + \left[\rho_{imp}^2(r) \cdot \mathrm{ZPI1(I,J)}\right]' \right) - \left[\rho_i^2(r) \cdot \mathrm{ZPI3}\right]' \right] + \\
& \mathrm{RIW3SQ} k_\perp'(r) + \frac{\mathrm{RIW3SQ}}{a} k_\perp(r) \frac{d}{dr} + \Bigg[\frac{1}{2} \frac{\omega \cdot \omega_{p,imp}(r) \cdot \mathrm{F}}{c^2 \left|k_{//}(r)\right| V_{Timp}(r)} \times \\
& \left[\mathrm{PDF}\left(\frac{(\omega - \Omega_{imp}(r))}{\left|k_{//}(r)\right| V_{Timp}(r)}\right) - \mathrm{PDF}\left(\frac{(\omega + \Omega_{imp}(r))}{\left|k_{//}(r)\right| V_{Timp}(r)}\right) \right] - \frac{\omega \cdot \omega_{p,imp}(r) \cdot \mathrm{F}}{\Omega_{imp}(r) c^2} \Bigg] \cdot \mathrm{COUP2} \Bigg\}
\end{aligned}
$$

Para cálculos de forças ponderomotoras:

$$
\begin{aligned}
\chi_{\perp r}^{f} = & -i \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \Bigg\{ \frac{\Omega_i(r)}{\omega} \left(\frac{\omega}{V_A(r)}\right)^2 \alpha_i(r) - \frac{\mathrm{RIW1SQ}}{a} k_\perp(r) \left(\frac{a}{r} + \frac{d}{dr}\right) \\
& + \frac{k_\perp(r)}{a} \left[\frac{3}{2} \left(\left[\rho_i^2(r) \left(\frac{\omega}{V_A(r)}\right)^2 \alpha_i(r) \right]' + \left[\rho_{imp}^2(r) \cdot \mathrm{ZPI1(I,J)}\right]' \right) - \left[\rho_i^2(r) \cdot \mathrm{ZPI3}\right]' \right] + \\
& \mathrm{RIW3SQ} k_\perp'(r) + \frac{\mathrm{RIW3SQ}}{a} k_\perp(r) \frac{d}{dr} + \Bigg[\frac{1}{2} \frac{\omega \cdot \omega_{p,imp}(r) \cdot \mathrm{F}}{c^2 \left|k_{//}(r)\right| V_{Timp}(r)} \times \\
& \left[\mathrm{PDF}\left(\frac{(\omega - \Omega_{imp}(r))}{\left|k_{//}(r)\right| V_{Timp}(r)}\right) - \mathrm{PDF}\left(\frac{(\omega + \Omega_{imp}(r))}{\left|k_{//}(r)\right| V_{Timp}(r)}\right) \right] - \frac{\omega \cdot \omega_{p,imp}(r) \cdot \mathrm{F}}{\Omega_{imp}(r) c^2} \Bigg] \cdot \mathrm{COUP2} \Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$\chi^e_{\perp r} = +i\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \frac{\Omega_e(r)}{\omega}\left(\frac{\omega}{V_A(r)}\right)^2 \alpha_i(r)$$

$$\begin{aligned}
\chi_{r\perp} \;=\; & i\cdot\left(\frac{c}{\omega}\right)^2\left\{\frac{\omega}{\Omega_i(r)}\left(\frac{\omega}{V_A(r)}\right)^2\alpha_i(r) - \frac{\mathrm{RIW3SQ}}{a}k_\perp(r)\left(\frac{a}{r}+\frac{d}{dr}\right)\right.\\
& +\frac{k_\perp(r)}{a}\frac{1}{2}\left[\left[\rho_i^2(r)\left(\frac{\omega}{V_A(r)}\right)^2\alpha_i(r)\right]' + \left[\rho^2_{imp}(r)\cdot\mathrm{ZPI1(I,J)}\right]' - \left[\rho_i^2(r)\cdot\mathrm{ZPI3}\right]'\right]\\
& +\mathrm{RIW1SQ}k'_\perp(r) + \frac{\mathrm{RIW1SQ}}{a}k_\perp(r)\frac{d}{dr} + \left[\frac{1}{2}\frac{\omega\cdot\omega_{p,imp}(r)\cdot\mathrm{F}}{c^2\left|k_{//}(r)\right|V_{Timp}(r)}\times\right.\\
& \left.\left.\left[\mathrm{PDF}\left(\frac{(\omega-\Omega_{imp}(r))}{\left|k_{//}(r)\right|V_{Timp}(r)}\right) - \mathrm{PDF}\left(\frac{(\omega+\Omega_{imp}(r))}{\left|k_{//}(r)\right|V_{Timp}(r)}\right)\right] - \frac{\omega\cdot\omega_{p,imp}(r)\cdot\mathrm{F}}{\Omega_{imp}(r)c^2}\right]\cdot\mathrm{COUP2}\right\}
\end{aligned}$$

Para cálculos de forças ponderomotoras:

$$\begin{aligned}
\chi^i_{r\perp} \;=\; & +i\left(\frac{c}{\omega}\right)^2\left\{\frac{\Omega_i(r)}{\omega}\left(\frac{\omega}{V_A(r)}\right)^2\alpha_i(r) - \frac{\mathrm{RIW1SQ}}{a}k_\perp(r)\left(\frac{a}{r}+\frac{d}{dr}\right)\right.\\
& +\frac{k_\perp(r)}{a}\left[\frac{3}{2}\left(\left[\rho_i^2(r)\left(\frac{\omega}{V_A(r)}\right)^2\alpha_i(r)\right]' + \left[\rho^2_{imp}(r)\cdot\mathrm{ZPI1(I,J)}\right]'\right) - \left[\rho_i^2(r)\cdot\mathrm{ZPI3}\right]'\right] +\\
& \mathrm{RIW3SQ}k'_\perp(r) + \frac{\mathrm{RIW3SQ}}{a}k_\perp(r)\frac{d}{dr} + \left[\frac{1}{2}\frac{\omega\cdot\omega_{p,imp}(r)\cdot\mathrm{F}}{c^2\left|k_{//}(r)\right|V_{Timp}(r)}\times\right.\\
& \left.\left.\left[\mathrm{PDF}\left(\frac{(\omega-\Omega_{imp}(r))}{\left|k_{//}(r)\right|V_{Timp}(r)}\right) - \mathrm{PDF}\left(\frac{(\omega+\Omega_{imp}(r))}{\left|k_{//}(r)\right|V_{Timp}(r)}\right)\right] - \frac{\omega\cdot\omega_{p,imp}(r)\cdot\mathrm{F}}{\Omega_{imp}(r)c^2}\right]\cdot\mathrm{COUP2}\right\}
\end{aligned}$$

$$\chi^e_{r\perp} = -i\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \frac{\Omega_e(r)}{\omega}\left(\frac{\omega}{V_A(r)}\right)^2 \alpha_i(r)$$

$$\begin{aligned}
\chi_{\perp\perp} \;=\; & \left(\frac{c}{\omega}\right)^2\left\{\left(\frac{\omega}{V_A(r)}\right)^2\cdot\alpha_i(r) - \mathrm{RIW1SQ}k_\perp^2(r) + \frac{\mathrm{DBBI2}}{a^2}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial r}+\frac{a}{r}\right]\right.\\
& \left. +\frac{\mathrm{RIW3SQ}}{a^2}\left[-\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \frac{a}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right] + \mathrm{ZPI1}\right\}
\end{aligned}$$

$$\chi_{r\parallel} = -ik_\perp(r)\left(\frac{c}{V_A(r)}\right)^2\frac{\Omega_i(0)Z_i}{\left|k_{//}(r)\right|\omega}\left(1+\frac{\omega}{k_{//}(r)V_{Te}}\cdot\mathrm{PDF}\left[\frac{\omega}{k_{//}(r)V_{Te}}\right]\right)\cdot\mathrm{YZCOUP}$$

$$\chi_{\parallel r} = -ik_{\perp}(r)\left(\frac{c}{V_A(r)}\right)^2 \frac{\Omega_i(0)Z_i}{\left|k_{//}(r)\right|\omega}\left(1+\frac{\omega}{k_{//}(r)V_{Te}}\cdot \mathrm{PDF}\left[\frac{\omega}{k_{//}(r)V_{Te}}\right]\right)\cdot \text{YZCOUP}$$

$$\begin{aligned}\chi_{\perp\parallel} &= \frac{-1}{a}\left[\left(\frac{c}{V_A(r)}\right)^2 \frac{\Omega_i(0)Z_i}{\left|k_{//}(r)\right|\omega}\left(1+\frac{\omega}{k_{//}(r)V_{Te}}\cdot \mathrm{PDF}\left[\frac{\omega}{k_{//}(r)V_{Te}}\right]\right)\cdot \text{YZCOUP}\frac{\partial}{\partial r}\right.\\ &\quad \left.+\left(\left(\frac{c}{V_A(r)}\right)^2 \frac{\Omega_i(0)Z_i}{\left|k_{//}(r)\right|\omega}\left(1+\frac{\omega}{k_{//}(r)V_{Te}}\cdot \mathrm{PDF}\left[\frac{\omega}{k_{//}(r)V_{Te}}\right]\right)\cdot \text{YZCOUP}\right)'\right]\end{aligned}$$

$$\chi_{\parallel\perp} = \frac{1}{a}\left[\left(\frac{c}{V_A(r)}\right)^2 \frac{\Omega_i(0)Z_i}{\left|k_{//}(r)\right|\omega}\cdot\left(1+\frac{\omega}{k_{//}(r)V_{Te}}\cdot \mathrm{PDF}\left[\frac{\omega}{k_{//}(r)V_{Te}}\right]\right)\cdot \text{YZCOUP}\right]\left[\frac{\partial}{\partial r}+\frac{a}{r}\right]$$

$$\chi_{\parallel\parallel} = \frac{\left(\frac{c}{V_A(r)}\right)^2 \alpha_i(r)}{\dfrac{k_{//}^2\rho_c^2(r)\left(\frac{m_p}{m_e}\right)\cdot\alpha_i(r)}{\left(1-\left(2\frac{r}{R}\right)^{1/2}\cdot \mathrm{RKeff}\right)\cdot(1+B_1)\cdot\frac{\text{ZPX1}}{\text{ZPX2}}}\dfrac{\left(1-Z_{imp}(r)\cdot \mathrm{F}\right)}{Z_i}A_i}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{RIW1SQ(I,J)} &= \frac{1}{2}\rho_i^2(r)\left(\frac{\omega}{V_A(r)}\right)^2\alpha_i(r)+\\ &\frac{1}{4}\rho_{imp}^2(r)\frac{\omega\cdot\omega_{p,imp}(r)\cdot \mathrm{F}}{c^2\left|k_{//}(r)\right|V_{Timp}(r)}\left[\mathrm{PDF}\left(\frac{(\omega-\Omega_{imp})}{\left|k_{//}(r)\right|V_{Timp}(r)}\right)+\mathrm{PDF}\left(\frac{(\omega+\Omega_{imp})}{\left|k_{//}(r)\right|V_{Timp}(r)}\right)\right]\cdot \text{COUP1}\\ &-\frac{\rho_i^2(r)}{4}\frac{\omega\cdot\omega_{p,i}^2(r)}{c^2\left|k_{//}(r)\right|V_{Ti}(r)}\times\left[\mathrm{PDF}\left(\frac{\omega-2\Omega_i(r)}{\left|k_{//}(r)\right|V_{Ti}(r)}\right)+\mathrm{PDF}\left(\frac{\omega+2\Omega_i(r)}{\left|k_{//}(r)\right|V_{Ti}(r)}\right)\right]\cdot \text{BICOUP}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{RIW3SQ(I,J)} &= \frac{3}{2}\rho_i^2(r)\left(\frac{\omega}{V_A(r)}\right)^2\alpha_i(r)+\\ &\frac{3\rho_{imp}^2(r)}{4}\frac{\omega\cdot\omega_{p,imp}(r)\cdot \mathrm{F}}{c^2\left|k_{//}(r)\right|V_{Timp}(r)}\left[\mathrm{PDF}\left(\frac{(\omega-\Omega_{imp})}{\left|k_{//}(r)\right|V_{Timp}(r)}\right)+\mathrm{PDF}\left(\frac{(\omega+\Omega_{imp})}{\left|k_{//}(r)\right|V_{Timp}(r)}\right)\right]\cdot \text{COUP1}-\\ &\frac{\rho_i^2(r)}{4}\frac{\omega\cdot\omega_{p,i}^2(r)}{c^2\left|k_{//}(r)\right|\cdot V_{Ti}(r)}\left[\mathrm{PDF}\left(\frac{\omega-2\Omega_i(r)}{\left|k_{//}(r)\right|V_{Ti}(r)}\right)+\mathrm{PDF}\left(\frac{\omega+2\Omega_i(r)}{\left|k_{//}(r)\right|V_{Ti}(r)}\right)\right]\cdot \text{BICOUP}\end{aligned}$$

$$\mathrm{ZPI1(I,J)} = \frac{1}{2}\frac{\omega\cdot\omega_{p,imp}(r)}{c^2\left|k_{//}(r)\right|V_{Timp}(r)}\left[\mathrm{PDF}\left(\frac{(\omega-\Omega_{imp}(r))}{\left|k_{//}(r)\right|V_{Timp}(r)}\right)+\mathrm{PDF}\left(\frac{(\omega+\Omega_{imp}(r))}{\left|k_{//}(r)\right|V_{Timp}(r)}\right)\right]\cdot \text{COUP1}$$

$$\mathrm{ZPI2(I,J)} = \left\{\frac{1}{2}\frac{\omega\cdot\omega_{p,imp}(r)\cdot \mathrm{F}}{c^2\left|k_{//}(r)\right|V_{Timp}(r)}\left[\mathrm{PDF}\left(\frac{(\omega-\Omega_{imp}(r))}{\left|k_{//}(r)\right|V_{Timp}(r)}\right)-\mathrm{PDF}\left(\frac{(\omega+\Omega_{imp}(r))}{\left|k_{//}(r)\right|V_{Timp}(r)}\right)\right]\right.$$
$$\left.-\frac{\omega\cdot\omega_{p,imp}(r)\cdot \mathrm{F}}{\Omega_{imp}(r)c^2}\right\}\cdot \text{COUP2}$$

$$\mathrm{ZPI3} = \frac{1}{2}\frac{\omega \cdot \omega_{p,i}^2(r)}{c^2\left|k_{//}(r)\right| \cdot V_{Ti}(r)}\left[\mathrm{PDF}\left(\frac{\omega - 2\Omega_i(r)}{\left|k_{//}(r)\right| \cdot V_{Ti}(r)}\right) + \mathrm{PDF}\left(\frac{\omega + 2\Omega_i(r)}{\left|k_{//}(r)\right| \cdot V_{Ti}(r)}\right)\right]$$

$$\alpha_i(r) \equiv \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\Omega_i^2}}$$

Componentes XY

$$\chi_{rrXY} = i \cdot \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \frac{k_\perp(r)}{a}\left(\frac{a}{r}\mathrm{XXY} - \mathrm{XXY}'\right) - i \cdot \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 k_\perp'(r)\mathrm{XXY}$$

$$\chi_{\perp rXY} = -\left(\frac{c}{\omega}\right)^2\left[\frac{\mathrm{XXY}}{a^2}\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{a}{r}\frac{d}{dr} - \frac{a^2}{r^2}\right)\right] + \frac{\mathrm{XXY}'}{a^2}\left(\frac{d}{dr} + \frac{a}{r}\right) - k_\perp^2(r) \cdot \mathrm{XXY}$$

$$\chi_{r\perp XY} = \left(\frac{c}{\omega}\right)^2\left[\frac{\mathrm{XXY}}{a^2}\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{a}{r}\frac{d}{dr} - \frac{a^2}{r^2}\right)\right] + \frac{\mathrm{XXY}'}{a^2}\left(\frac{d}{dr} + \frac{a}{r}\right) - k_\perp^2(r) \cdot \mathrm{XXY}$$

$$\chi_{\perp\perp XY} = i\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 k_\perp(r)\left\{\frac{\mathrm{XXY}}{r} - \frac{\mathrm{XXY}'}{a}\right\} - i\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 k_\perp'(r)\mathrm{XXY}$$

$$T\chi_{rr} = \left(\frac{c}{V_A(r)}\right)^2 \alpha_i(r)$$

$$T\chi_{\perp\perp} = \left(\frac{c}{V_A(r)}\right)^2 \alpha_i(r)$$

$$\mathrm{XXY(I,J)} = i\frac{3}{4}\rho_i^2(r)\left(\frac{\omega}{V_A(r)}\right)^2 \alpha_i(r)\frac{\Omega_i(r)}{\omega} \cdot \mathrm{XYCOUP}$$

Termos da ressonância do segundo harmônico dos íons principais na corrente perturbada(COUP3= 0)

$$\chi_{rr0} = \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \cdot \mathrm{ZPI1}$$

$$\chi_{\perp r0} = -i\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \cdot \mathrm{ZPI2}$$

$$\chi_{r\perp 0} = i\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \cdot \mathrm{ZPI2}$$

$$\chi_{\perp\perp 0} = \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \cdot \mathrm{ZPI1} \cdot E_\perp$$

$$\chi_{rr3} = \left(\frac{c}{V_A(r)}\right)^2 \alpha_i(r)$$

$$\chi_{\perp r3} = -i\left(\frac{c}{V_A(r)}\right)^2 \alpha_i(r)\frac{\omega}{\Omega_i(r)}$$

$$\chi_{r\perp 3} = i\left(\frac{c}{V_A(r)}\right)^2 \alpha_i(r)\frac{\omega}{\Omega_i(r)}$$

$$\chi_{\perp\perp 3} = \left(\frac{c}{V_A(r)}\right)^2 \cdot \alpha_i(r) \cdot E_\perp$$

Correções para dissipação por tempo de trânsito com β finito

$$\chi_{rrYY} = \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \left\{-\beta_i(r) + \beta_e(r) \cdot \left(\frac{\omega}{k_{//}(r)V_{Te}} \cdot \mathrm{PDF}\left[\frac{\omega}{k_{//}(r)V_{Te}}\right]\right)\right\} k_\perp^2(r) \cdot \mathrm{YYCOUP}$$

$$\begin{aligned}
\chi_{\perp rYY} \;=\; & \frac{i}{a}\left\{\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \left[-\beta_i(r) + \beta_e(r) \cdot \left(\frac{\omega}{k_{//}(r)V_{Te}} \cdot \mathrm{PDF}\left[\frac{\omega}{k_{//}(r)V_{Te}}\right]\right)\right] k_\perp(r)\frac{\partial}{\partial r} + \right. \\
& \left[\left\{\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \left[-\beta_i(r) + \beta_e(r) \cdot \left(\frac{\omega}{k_{//}(r)V_{Te}} \cdot \mathrm{PDF}\left[\frac{\omega}{k_{//}(r)V_{Te}}\right]\right)\right]\right\}' k_\perp(r) + \right. \\
& \left.\left. + \left\{\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \left[-\beta_i(r) + \beta_e(r) \cdot \left(\frac{\omega}{k_{//}(r)V_{Te}} \cdot \mathrm{PDF}\left[\frac{\omega}{k_{//}(r)V_{Te}}\right]\right)\right]\right\} a k_\perp'(r)\right]\right\}
\end{aligned}$$

$$\chi_{r\perp YY} = \frac{i}{a}\left\{\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \left[-\beta_i(r) + \beta_e(r) \cdot \left(\frac{\omega}{k_{//}(r)V_{Te}} \cdot \mathrm{PDF}\left[\frac{\omega}{k_{//}(r)V_{Te}}\right]\right)\right]\right\} k_\perp(r)\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{a}{r}\right)$$

$$\begin{aligned}
\chi_{\perp\perp YY} = & -\frac{1}{a^2}\left[\left\{\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \left[-\beta_i(r) + \beta_e(r) \cdot \left(\frac{\omega}{k_{//}(r)V_{Te}} \cdot \mathrm{PDF}\left[\frac{\omega}{k_{//}(r)V_{Te}}\right]\right)\right] \cdot \mathrm{YYCOUP}\right\}\right. \\
& \times \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{a}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{a}{r} - \frac{a^2}{r^2}\right] + \\
& \left.\left\{\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \left[-\beta_i(r) + \beta_e(r) \cdot \left(\frac{\omega}{k_{//}(r)V_{Te}} \cdot \mathrm{PDF}\left[\frac{\omega}{k_{//}(r)V_{Te}}\right]\right)\right] \cdot \mathrm{YYCOUP}\right\}' \left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{a}{r}\right]\right]
\end{aligned}$$

C Solução da Equação para o Campo Elétrico

Neste apêndice é mostrado um exemplo de solução das equações de Maxwell para a obtenção da expressão do campo elétrico com os valores do tensor dielétrico.

Partindo das Equações de Maxwell (9), obtém-se

$$\begin{cases} \left(\epsilon_{11}\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 - k_y^2\right) E_x + i\left(\frac{\omega^2}{c^2} g E_y - k_y \frac{dE_y}{dx}\right) = i k_z \frac{dE_z}{dx}; \\ \left(\epsilon_{11}\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right) E_y - i\left(\frac{\omega^2}{c^2} g E_x + k_y \frac{dE_x}{dx}\right) = -k_y k_x E_z; \\ \left(k_y^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right) E_z + i k_z \left(\frac{dE_x}{dx} + k_y E_y\right) = \epsilon_3 \frac{\omega^2}{c^2} E_z. \end{cases} \tag{118}$$

Da Eq.(118a),

$$E_x = \frac{i k_z \frac{dE_z}{dx} - i\left(\frac{\omega^2}{c^2} g - k_y \frac{d}{dx}\right) E_y}{L}, \tag{119}$$

onde

$$L = \left(\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_1 - k_y^2 - k_z^2\right),$$

e, na notação usual do tensor dielétrico (Apêndice 1),

$$\epsilon_{12} \equiv ig, \text{ e } \epsilon_1 \equiv \epsilon_{11}. \tag{120}$$

Fazendo-se, daqui por diante, para qualquer variável A, $\bar{A} = \frac{\omega^2}{c^2} A$,

$$\left(\bar{\epsilon}_{11} - k_z^2 + \frac{d^2}{dx^2}\right) E_y + \left(\bar{g} + k_y \frac{d}{dx}\right)\left(\frac{k_z \frac{d}{dx} E_z - \left(\bar{g} + k_y \frac{d}{dx}\right) E_y}{L}\right) = -k_y k_z E_z, \tag{121}$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\bar{g} k_y}{L}\frac{d}{dx}\right) E_y - k_y \frac{d}{dx}\left(\frac{\bar{g} E_y}{L}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{k_y^2}{L}\frac{d}{dx} E_y\right) + \left(\bar{\epsilon}_{11} - k_z^2 + \frac{\bar{g}^2}{L}\right) E_y = -\left(k_y k_z + \frac{\bar{g} + k_y \frac{d}{dx}}{L}\right) E_z, \tag{122}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\tilde{\epsilon}_{11}-k_z^2}{\left(\tilde{\epsilon}_{11}-k_y^2-k_z^2\right)}\frac{d}{dx}E_y\right)+$$
$$\left(\tilde{\epsilon}_{11}-k_z^2-\frac{\tilde{g}^2}{D}-k_y\frac{d}{dx}\left(\frac{\tilde{g}}{L}\right)\right)E_y=-\left(k_yk_z+\frac{\tilde{g}+k_y\frac{d}{dx}}{L}\right)E_z. \tag{123}$$

Supondo $E_z=\tilde{g}=0$ e $\tilde{\epsilon}_{11}=\tilde{\epsilon}_0x$,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\tilde{\epsilon}_0x-k_z^2}{\left(\tilde{\epsilon}_{11}-k_y^2-k_z^2\right)}\frac{d}{dx}E_y\right)+\left(\tilde{\epsilon}_0x-k_z^2\right)E_y=0 \tag{124}$$

com $x_0\equiv\frac{k_z^2}{\tilde{\epsilon}_0}$, $x_1=\frac{k_y^2}{\tilde{\epsilon}_0}$ e $E_y=Y(x)$,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{(x-x_0)}{(x-x_0-x_1)}\frac{d}{dx}Y(x)\right)+\tilde{\epsilon}_0(x-x_0)Y(x)=0. \tag{125}$$

Da série de Frobënius

$$Y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{s+n}\begin{cases}Y'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(s+n)x^{s+n-1}\\ Y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(s+n)(s+n-1)x^{s+n-2}\end{cases} \tag{126}$$

obtém-se a equação que, aberta, fica como

$$\frac{(x-x_0)}{(x-x_0-x_1)}Y''(x)+\left(\frac{(x-x_0)}{(x-x_0-x_1)}\right)'Y'(x)+(x-x_0)\tilde{\epsilon}_0Y(x)=0, \tag{127}$$

$$\frac{(x-x_0)}{(x-x_0-x_1)}Y''(x)+\left(\frac{(x-x_0-x_1)-(x-x_0)}{(x-x_0-x_1)^2}\right)Y'(x)+(x-x_0)\tilde{\epsilon}_0Y(x)=0, \tag{128}$$

$$(x-x_0)Y''(x)-\left(\frac{x_1}{(x-x_0-x_1)^2}\right)Y'(x)+(x-x_0-x_1)(x-x_0)\tilde{\epsilon}_0Y(x)=0, \tag{129}$$

$$\left[x^2 - x(2x_0 + x_1) + x_0(x_0 + x_1)\right] Y''(x) - x_1 Y'(x) + \left[x^3 - x^2(3x_0 + 2x_1)\right.$$
$$\left. + x(3x_0^2 + 4x_0x_1 - x_1^2) - x_0(x_0 + x_1)^2\right] \tilde{\epsilon}_0 Y(x) \quad = \quad 0 \quad (130)$$

De outra maneira, fazendo $x - x_0 \equiv X^0$, obtém-se

$$[X_0 - x_1] X_0 Y''(X_0) - x_1 Y'(X_0) + (X_0 - x_1)^2 X_0 \tilde{\epsilon}_0 Y(X_0) = 0, \qquad (131)$$

$$[X_0 - X_0 x_1] Y''(X_0) - x_1 Y'(X_0) + \left(X_0^3 - 2X_0^2 x_1 + X_0 x_1^2\right) \tilde{\epsilon}_0 Y(X_0) = 0, \qquad (132)$$

com

$$\begin{aligned} Y(X_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{s+n}, \\ Y'(X_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n (s+n) x^{s+n-1}, \\ Y''(X_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n (s+n)(s+n-1) x^{s+n-2}, \end{aligned} \qquad (133)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{\epsilon}_0 \sum_{n=0}^{\infty} C_n X_0^{s+n+3} - 2\tilde{\epsilon}_0 x_1 \sum_{n=0}^{\infty} C_n X_0^{s+n+2} + \tilde{\epsilon}_0 x_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n X_0^{s+n+1} \\ + & \sum_{n=0}^{\infty} C_n (s+n)(s+n-1) X_0^{s+n} - x_1 \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left[(s+n) + (s+n)(s+n-1)\right] X_0^{s+n-1} = 0. \end{aligned}$$

A equação indicial fornecida pela potência X_0^{s+n-1}, com $n = 0$ é

$$x_1 C_0 \left[s + s(s-1)\right] = 0, \qquad (134)$$

com a raiz dupla $s = 0$, isso tanto para x quanto C_0 diferentes de zero. Isolando as potências de X_0 e igualando a zero, obtém-se:

para X_0^{s+n}

$$C_1 = \frac{s(s-1)}{x_1(s+1)^2} C_0 = 0 \tag{135}$$

para X_0^{s+n+1}

$$C_2 = \frac{x_1 \tilde{\epsilon}_0}{4} C_0$$

para X_0^{s+n+2}

$$C_3 = -\frac{2\tilde{\epsilon}_0}{3} C_0 \tag{136}$$

para X_0^{s+n+3}

$$C_4 = -\frac{\tilde{\epsilon}_0}{16}\left(3 - \frac{x_1^3 \tilde{\epsilon}_0}{4}\right) C_0 \tag{137}$$

e assim por diante...

De posse de uma solução linearmente independente, uma segunda é descoberta pela fórmula[66]

$$y_2(x) = C(x) y_1(x), \tag{138}$$

onde

$$C(X) = A \int_a^X \frac{e^{-\int_{\xi_1}^{\xi} P(\eta) d\eta}}{[y_1(\xi)]^2} d\xi. \tag{139}$$

Para

$$y''(X) + P(X) y'(X) + Q(X) y(X) = 0. \tag{140}$$

onde, $P(X) = -\frac{x_1}{X(X-x_1)}$ e $X = x - \frac{k_y^2}{\tilde{\epsilon}_0}$. Daí, utilizando apenas o primeiro termo da solução

$$y_1 = C_0 + C_2\frac{x^2}{2}...,$$

obtém-se

$$I(\xi) = -\int_{\xi_1}^{\xi} \frac{x_1}{X(X-x_1)}dX = \int_{\xi_1}^{\xi} \left(\frac{1}{X} - \frac{1}{X-x_1}\right) \quad \frac{x_1}{X(X-x_1)}dX =$$

$$A'Ln(\xi) - B'Ln(\xi - x_1). \quad (141)$$

Fazendo $A' = B' = 1$,

$$C(X) = \frac{A}{C_0^2}\int_a^X e^{-Ln(\xi)+Ln(\xi-x_1)}d\xi = A_1\int_a^X \frac{(\xi - x_1)}{\xi}d\xi = \quad (142)$$

$$A\left[(X-a) - x_1Ln(X) + x_1Ln(a)\right] \;=\; X + x_1Ln(X), \quad (143)$$

e, assim, é solucionada a equação para a componente y do campo elétrico,

$$\begin{aligned} E_{y1} &= C_0; \\ E_{y2} &= C_0\left(x - \frac{k_y^2}{\tilde{\epsilon}_0} + \frac{k_y^2}{\tilde{\epsilon}_0}Ln\left(x - \frac{k_y^2}{\tilde{\epsilon}_0}\right)\right). \end{aligned}$$

A solução para a componente E_z é encontrada seguindo-se o mesmo caminho. Destas duas e mais a suposição de $E_z = 0$, encontra-se também o valor das componentes do campo magnético.

D Aplicando o Teorema de Poyting Complexo

A expressão da energia eletromagnética é dada por

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \oint_S \vec{N} \cdot d\vec{S} - \frac{1}{2}\int_V \vec{J}^* \cdot \vec{E} dV. \tag{144}$$

onde o vetor de Poynting

$$\vec{N} = \frac{c}{8\pi}\vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{c}{8\pi\mu}\left(\vec{E} \times \vec{B}^*\right), \tag{145}$$

e

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}. \tag{146}$$

A solução para o campo magnético é da forma

$$\vec{B} = \frac{-ic}{\omega}\left[-ik_z E_y, ik_z E_x, -ik_y E_x\right]. \tag{147}$$

Como

$$ik_y E_y' \cong -E_x\left(k_z^2 + k_y^2\right), \tag{148}$$

$$\vec{B} = \frac{c}{\omega}\left[-k_z E_y, ik_z E_x, -i\frac{k_z^2}{k_z^2 + k_y^2}E_y'\right], \tag{149}$$

$$\vec{B}^* = \frac{c}{\omega}\left[-k_z E_y^*, ik_z E_x^*, i\frac{k_z^2}{k_z^2 + k_y^2}E_y'^*\right]. \tag{150}$$

Assim,

$$\vec{N} = \frac{c^2}{8\pi\mu_0\omega}\left(i\frac{k_z^2}{k_z^2 + k_y^2}E_y E_y'^*, -i\frac{k_z^2}{k_z^2 + k_y^2}E_x E_y'^*, k_z E_x E_x^* + k_z E_y E_y^*\right), \tag{151}$$

o que fornece

$$\mathrm{Re}\left\{\oint \vec{N} \cdot d\vec{S}\right\} = -\frac{L_y L_z c^2}{8\pi\mu_0\omega}\frac{k_z^2}{k_z^2 + k_y^2}\,\mathrm{Im}\left(E_y E_y'^*\right). \tag{152}$$

Das Equações de Maxwell,

$$\begin{aligned}\vec{J} &= \frac{c}{4\pi}\left(i\frac{\omega}{c}\epsilon_0\vec{E}+\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B}^*\right)\\ &= \frac{c^2}{4\pi\mu_0\omega}\left(i\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_0\mu_0\vec{E}+\left\{0,-ik_z^2E_y-i\frac{k_z^2}{k_z^2+k_y^2}E_y'',k_zE_x'+ik_yk_zE_y\right\}\right),\end{aligned} \quad (153)$$

e

$$\vec{J}^*\cdot\vec{E}=\frac{c^2}{4\pi\mu_0\omega}\left(-i\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_0\mu_0\left(E_x^*E_x+E_y^*E_y\right)+ik_z^2E_y^*E_y-i\frac{k_z^2}{k_z^2+k_y^2}E_y''^*E_y\right). \quad (154)$$

a potência depositada no plasma, pela onda, é

$$\frac{1}{2}\int_V\vec{J}^*\cdot\vec{E}dV=$$

$$=\frac{L_yL_zc^2}{8\pi\mu_0\omega}\int\left(-\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_0\mu_0E_x^*\frac{k_y}{k_z^2+k_y^2}E_y'-i\left(\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_0\mu_0-k_z^2\right)E_y^*E_y+\frac{E_x^{*\prime}}{k_y}E_yk_z^2\right)dx \quad (155)$$

$$=\frac{L_yL_zc^2}{8\pi\mu_0\omega k_y}\left(-\frac{k_y^2k_z^2}{k_z^2+k_y^2}\epsilon_0\mu_0\int E_x^*E_y'dx+k_z^2\int E_x^{*\prime}E_ydx\right). \quad (156)$$

Como

$$\int E_x'E_ydx=E_y^*E_y-\int E_x^*E_y'dx=i\frac{k_y}{k_z^2+k_y^2}E_y^{*\prime}E_y-\int E_x^*E_y'dx,$$

chega-se a

$$\frac{1}{2}\int_V\vec{J}^*\cdot\vec{E}dV=$$

$$=i\frac{L_yL_zc^2}{8\pi\mu_0\omega\left(k_z^2+k_y^2\right)}E_y^{*\prime}E_y-\frac{L_yL_zc^2k_z^2}{8\pi\mu_0\omega k_y}\left(\frac{k_y^2}{k_z^2+k_y^2}\int E_x^*E_y'dx-\int E_x^*E_y'dx\right)$$

$$\cong i\frac{L_yL_zc^2}{8\pi\mu_0\omega\left(k_z^2+k_y^2\right)}E_y^{*\prime}E_y \quad (157)$$

Usando a Eq.(54), chega-se a

$$\mathrm{Re}\,\frac{1}{2}\int_V\vec{J}^*\cdot\vec{E}dv=\frac{L_yL_zc^2}{8\pi\mu_0\omega\left(k_z^2+k_y^2\right)}\left|E_y\right|^2\pi\frac{r_A-r_t}{r_A}$$

E Construção do código toroidal

E.1 Resumo

Neste apêndice, são mostrados alguns dos cálculos realizados quando da elaboração do código toroidal relatado no Capítulo 3.

Em primeiro lugar, é necessário mostrar o sistema de coordenadas em que o código está baseado:

$$(r, \theta, z) \rightarrow (r, \theta, \zeta)\,. \tag{158}$$

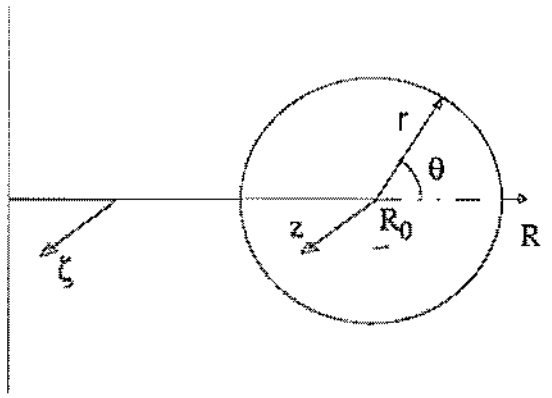


Figura E.1 - Esquema das coordenadas toroidais.

Estas coordenadas podem ser transformadas seguindo

$$\begin{aligned} Z &= R_0\zeta, \\ R &= R_0 + r \cdot \cos\theta \end{aligned} \tag{159}$$

$$
\begin{aligned}
i\omega B_r &= \left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_r = -\frac{1}{R}\frac{\partial E_\theta}{\partial\zeta} + \frac{1}{rR}\frac{\partial}{\partial\theta}(RE_z) \\
i\omega B_\theta &= \left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_\theta = \frac{1}{R}\frac{\partial E_r}{\partial\zeta} - \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}(RE_z) \\
i\omega B_\zeta &= \left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial\theta}.
\end{aligned}
\tag{160}
$$

As componentes de $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}$ podem ser escritas como

$$
\begin{aligned}
\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_r &= -\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_\theta + \frac{1}{rR}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[R\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_z\right] \\
&= -\left(\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} + \frac{1}{r^2R}\frac{\partial}{\partial\theta}R\frac{\partial}{\partial\theta}\right)E_r + \\
&\quad \frac{1}{r^2R}\frac{\partial}{\partial\theta}R\frac{\partial}{\partial r}rE_\theta + \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{\partial}{\partial r}RE_z;
\end{aligned}
\tag{161}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_\theta &= -\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_r - \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left[R\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_z\right] \\
&= \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\frac{R}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}E_r - \left(\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\frac{R}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\right)E_\theta + \\
&\quad \frac{1}{rR^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{\partial}{\partial\theta}RE_z;
\end{aligned}
\tag{162}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_z &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_r \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\zeta}E_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\zeta}E_\theta \\
&\quad -\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}R + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{rR}\frac{\partial}{\partial\theta}R\right)E_z.
\end{aligned}
\tag{163}
$$

Campo magnético de equilíbrio

O campo magnético de equilíbrio bidimensional é dado por

$$
\vec{B}_0 = \frac{B_0\left(\hat{z} + \frac{r}{qR_0}\hat{\theta}\right)}{1 + \frac{r}{R_0}\cos\theta}
\tag{164}
$$

que satisfaz

$$
\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_0 = 0.
\tag{165}
$$

Note que

$$B_z = \frac{B_0 R_0}{R} \text{ e } B_\theta = B_0 \frac{r}{qR} = B_z \frac{r}{qR_0}, \tag{166}$$

e

$$\hat{e}_{//} = \frac{\hat{z} + \delta\hat{\theta}}{(1+\delta^2)^{1/2}}, \hat{e}_\perp = \hat{e}_{//} \times \hat{e}_r, \delta = \frac{r}{R_0 q}. \tag{167}$$

- Os vetores unitários não são mudados pelos efeitos toroidais.

- A magnitude de $\vec{B}_0$ é modificado pela curvatura toroidal

$$\left|\vec{B}_0\right| = \frac{B_0 \left(1 + \left(\frac{r}{qR_0}\right)^2\right)^{1/2}}{1 + \frac{r}{R_0}\cos\theta} \tag{168}$$

As transformações de coordenadas das componentes do campo elétrico são dadas por

$$\begin{aligned}
E_\theta &= \frac{E_\perp + \delta E_{//}}{(1+\delta^2)^{1/2}}, & E_\perp &= \frac{E_\theta - \delta E_z}{(1+\delta^2)^{1/2}}; \\
E_z &= \frac{E_{//} - \delta E_\perp}{(1+\delta^2)^{1/2}}, & E_{//} &= \frac{E_\theta - \delta E_z}{(1+\delta^2)^{1/2}}; \\
k_\theta &= \frac{k_\perp + \delta k_{//}}{(1+\delta^2)^{1/2}}, & k_\perp &= \frac{k_\theta - \delta k_z}{(1+\delta^2)^{1/2}}; \\
k_z &= \frac{k_{//} - \delta k_\perp}{(1+\delta^2)^{1/2}}, & k_{//} &= \frac{k_\theta - \delta k_z}{(1+\delta^2)^{1/2}},
\end{aligned} \tag{169}$$

onde

$$\delta = \frac{r}{qR_0}.$$

Fazendo a evolução dos termos da Eq.de onda,

$$\begin{aligned}
\left(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E}\right)_r = &-\left(\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} + \frac{1}{r^2 R}\frac{\partial}{\partial\theta}R\frac{\partial}{\partial\theta}\right)E_r + \\
&\left(\frac{1}{r^2 R}\frac{\partial}{\partial\theta}R\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{(1+\delta^2)^{1/2}} - \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\delta R}{(1+\delta^2)^{1/2}}\right)E_\perp + \\
&\left(\frac{1}{r^2 R}\frac{\partial}{\partial\theta}R\frac{\partial}{\partial r}\frac{r\delta}{(1+\delta^2)^{1/2}} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{\partial}{\partial r}\frac{R}{(1+\delta^2)^{1/2}}\right)E_{//},
\end{aligned} \tag{170}$$

$$
\begin{aligned}
\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_{\perp} = & \left[\frac{1}{R(1+\delta^2)^{1/2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{R}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\delta R}{(1+\delta^2)^{1/2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{R}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]E_r \\
& -\left[\frac{1}{R(1+\delta^2)^{1/2}}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{\delta R}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\frac{1}{R}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}R\delta\right)\frac{1}{(1+\delta^2)^{1/2}}\right. \\
& \left.+\frac{1}{R(1+\delta^2)^{1/2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{R}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{(1+\delta^2)^{1/2}} + \frac{\delta}{r(1+\delta^2)^{1/2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{R}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\delta R}{(1+\delta^2)^{1/2}}\right]E_{\perp} \\
& -\left[\frac{1}{R(1+\delta^2)^{1/2}}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{\delta R}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\frac{1}{R}\left(\frac{\delta}{r}\frac{\partial}{\partial\zeta}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\frac{R}{(1+\delta^2)^{1/2}}\right. \\
& \left.+\frac{1}{R(1+\delta^2)^{1/2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{R}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\delta r}{(1+\delta^2)^{1/2}} - \frac{\delta}{r(1+\delta^2)^{1/2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{R}\frac{\partial}{\partial r}\frac{R}{(1+\delta^2)^{1/2}}\right]E_{//}, \quad (171)
\end{aligned}
$$

E.1.1 Equação da onda

O programa resolve a equação

$$
\frac{\omega^2}{c^2}\overleftrightarrow{\chi}\cdot\vec{E} - \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0, \quad (172)
$$

onde $\overleftrightarrow{\chi}$ é o tensor dielétrico cinético[20].

Ao invés de $\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_{//}$, é usado

$$
\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = \frac{1}{rR}\frac{\partial}{\partial r}rRJ_r + \frac{1}{rR}\frac{\partial}{\partial\theta}RJ_\theta + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\zeta}J_z = 0 \quad (173)
$$

onde a toroidicidade é desprezada, e

$$
R = R_0, \quad (174)
$$

então, chega-se à expressão

$$
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}rJ_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}J_\theta + \frac{1}{R_0}\frac{\partial}{\partial\zeta}J_z = 0, \quad (175)
$$

ou, com

$$
\hat{e}_{//} = \frac{\hat{z}+\delta\hat{\theta}}{(1+\delta^2)^{1/2}}, \quad \hat{e}_{\perp} = \hat{e}_{//}\times\hat{e}_r \text{ e } \delta = \frac{r}{Rq}, \quad (176)
$$

$$
i\left(k_{//}J_{//} + k_{\perp}J_{\perp}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}rJ_r = 0. \quad (177)
$$

É então usada a equação

$$\vec{J} = \frac{1}{i\mu_0\omega}\frac{\omega^2}{c^2}\overleftrightarrow{\chi}\cdot\vec{E} \tag{178}$$

para expressar $E_{//}$ em termos de E_r e $E_\perp$.

A toroidicidade é levada em conta por meio das seguintes aproximações:

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &= \frac{1}{R_0}\left(1-\frac{r}{R_0}\cos\theta\right),\\ \frac{1}{R^2} &= \frac{1}{R_0^2}\left(1-2\frac{r}{R_0}\cos\theta\right).\end{aligned} \tag{179}$$

E.1.2 Transformada de Fourier

Depois de ter expandido todas as componentes da equação da onda, separando-as nas partes cilíndricas e nas partes de correção toroidal, os coeficientes da equação são separados nos operadores $\widehat{L}_0$, $\widehat{L}_S$ e $\widehat{L}_A$:

$$\begin{aligned}\widehat{L}\vec{E} = \widehat{L}_0\vec{E} &\text{ (parte cilíndrica)}\\ &+\left(2\tfrac{r}{R_0}\cos\theta\widehat{L}_S + 2\tfrac{r}{R_0}\sin\theta\widehat{L}_A\right)\vec{E} = 0.\end{aligned} \tag{180}$$

e, com

$$\vec{E} = \sum_m \vec{E}_m(r)\exp i\left(m\theta - l\zeta\right), \tag{181}$$

É efetuada uma transformação de Fourier para os primeiros modos poloidais vizinhos:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\sum_{m'}\int_0^{2\pi}\widehat{L}_0\vec{E}_{m'}(r)e^{i(m'\theta-l\zeta)}e^{-im\theta}d\theta\\ &+\frac{1}{2\pi}\frac{r}{R_0}\sum_{m'}\int_0^{2\pi}\left(\widehat{L}_S+\widehat{L}_A\right)\vec{E}_{m'}(r)e^{i(m'\theta-l\zeta)}e^{-i(m-1)\theta}d\theta\\ &+\frac{1}{2\pi}\frac{r}{R_0}\sum_{m'}\int_0^{2\pi}\left(\widehat{L}_S-\widehat{L}_A\right)\vec{E}_{m'}(r)e^{i(m'\theta-l\zeta)}e^{-i(m+1)\theta}d\theta\\ =\ &0,\end{aligned} \tag{182}$$

o que leva a

$$\widehat{L}_{0m}\vec{E}_m(r)e^{i(m\theta-k\zeta)} + \frac{r}{R_0}\left(\widehat{L}_S + \widehat{L}_A\right)\vec{E}_{m-1}(r)e^{i((m-1)\theta-k\zeta)} + \frac{r}{R_0}\left(\widehat{L}_S - \widehat{L}_A\right)\vec{E}_{m+1}(r)e^{i((m+1)\theta-k\zeta)} = 0. \qquad (183)$$

Para $\hat{e} = \frac{r}{R_0}$ não nulo, é considerado o acoplamento de 3 modos poloidais e um sistema de sexta ordem é resolvido:

$$\begin{pmatrix} \widehat{L}^{m-1}_{0rr} & \widehat{L}^{m-1}_{0r\perp} & \hat{e}\,(L^-)^m_{rr} & \hat{e}\,(L^-)^m_{r\perp} & 0 & 0 \\ \widehat{L}^{m-1}_{0\perp r} & \widehat{L}^{m-1}_{0\perp\perp} & \hat{e}\,(L^-)^m_{\perp r} & \hat{e}\,(L^-)^m_{\perp\perp} & 0 & 0 \\ \hat{e}\,(L^+)^{m-1}_{rr} & \hat{e}\,(L^+)^{m-1}_{r\perp} & \widehat{L}^m_{0rr} & \widehat{L}^m_{0r\perp} & \hat{e}\,(L^-)^{m+1}_{rr} & \hat{e}\,(L^-)^{m+1}_{r\perp} \\ \hat{e}\,(L^+)^{m-1}_{\perp r} & \hat{e}\,(L^+)^{m-1}_{\perp\perp} & \widehat{L}^m_{0\perp r} & \widehat{L}^m_{0\perp\perp} & \hat{e}\,(L^-)^{m+1}_{\perp r} & \hat{e}\,(L^-)^{m+1}_{\perp\perp} \\ 0 & 0 & \hat{e}\,(L^+)^m_{rr} & \hat{e}\,(L^+)^m_{r\perp} & \widehat{L}^{m+1}_{0rr} & \widehat{L}^{m+1}_{0r\perp} \\ 0 & 0 & \hat{e}\,(L^+)^m_{\perp r} & \hat{e}\,(L^+)^m_{\perp\perp} & \widehat{L}^{m+1}_{0\perp r} & \widehat{L}^{m+1}_{0\perp\perp} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E^{m-1}_r \\ E^{m-1}_\perp \\ E^m_r \\ E^m_\perp \\ E^{m+1}_r \\ E^{m+1}_\perp \end{pmatrix} = S^m_i,$$

onde $L^+ = \widehat{L}_S + \widehat{L}_A$; $L^- = \widehat{L}_S - \widehat{L}_A$.

Este sistema é resolvido com uma spline-cúbica e é obtido como resposta o perfil das componentes radial e perpendicular do campo elétrico. A componente paralela é então calculada pela hipótese de incompressibilidade expressa na Eq.(173).

E.1.3 Conservação de Energia

Do teorema de Poynting:

$$\mathrm{Re}\int \vec{\nabla}\cdot\vec{S}dv = \mathrm{Re}\int \vec{E}\cdot\vec{J}^* dv$$

ou

$$\mathrm{Re}\int S_r dA = \mathrm{Re}\int \vec{E}\cdot\vec{J}^* dv$$

onde

$$\vec{S} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}^*}{\mu_0}; dv = rRdrd\theta d\zeta; dA = rRd\theta d\zeta$$

Tal condição é expressa no código na forma

$$
\begin{aligned}
& \frac{2\pi r R_0}{\mu_0} \operatorname{Re}\Big[\left(\vec{E}_m \times \vec{B}^*_m\right)_r + \frac{\hat{e}}{2}\left(\vec{E}_m \times \vec{B}^*_{m+1}\right)_r + \frac{\hat{e}}{2}\left(\vec{E}_m \times \vec{B}^*_{m-1}\right)_r \\
& + \frac{\hat{e}}{2}\left(\vec{E}_{m+1} \times \vec{B}^*_{m+1}\right)_r + \frac{\hat{e}}{2}\left(\vec{E}_{m+1} \times \vec{B}^*_m\right)_r \\
& + \frac{\hat{e}}{2}\left(\vec{E}_{m-1} \times \vec{B}^*_{m-1}\right)_r + \frac{\hat{e}}{2}\left(\vec{E}_{m-1} \times \vec{B}^*_m\right)_r\Big] \\
= \; & \frac{2\pi\omega R_0}{\mu_0 c^2} \operatorname{Im}\Big[\int \vec{E}_m \cdot \overleftrightarrow{\chi}^*_m \cdot \vec{E}^*_m r dr + \frac{1}{2}\int \vec{E}_m \cdot \overleftrightarrow{\chi}^*_{m+1} \cdot \vec{E}^*_{m+1} \hat{e} r dr \\
& + \frac{1}{2}\int \vec{E}_m \cdot \overleftrightarrow{\chi}^*_{m-1} \cdot \vec{E}^*_{m-1} \hat{e} r dr \\
& + \int \vec{E}_{m+1} \cdot \overleftrightarrow{\chi}^*_{m+1} \cdot \vec{E}^*_{m+1} \hat{e} r dr + \frac{1}{2}\int \vec{E}_{m+1} \cdot \overleftrightarrow{\chi}^*_m \cdot \vec{E}^*_m \hat{e} r dr \\
& + \int \vec{E}_{m-1} \cdot \overleftrightarrow{\chi}^*_{m-1} \cdot \vec{E}^*_{m-1} \hat{e} r dr + \frac{1}{2}\int \vec{E}_{m-1} \cdot \overleftrightarrow{\chi}^*_m \cdot \vec{E}^*_m \hat{e} r dr\Big].
\end{aligned}
$$

No código, algumas componentes na expressão da deposição de energia (chamado Fluxo Cinético) são movidas para a parte fluxo de Poynting para assegurar que a deposição de energia é positiva.

E.2 Cálculos da Equação da onda

Da Equação da onda de Maxwell,

$$\frac{\omega^2}{c^2}\overleftrightarrow{\chi}\cdot\vec{E}-\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}=0 \tag{184}$$

onde

$$\begin{aligned} E_\theta &= \frac{E_\perp+\delta E_{//}}{(1+\delta^2)^{1/2}}, & E_\perp &= \frac{E_\theta-\delta E_z}{(1+\delta^2)^{1/2}}; \\ E_z &= \frac{E_{//}-\delta E_\perp}{(1+\delta^2)^{1/2}}, & E_{//} &= \frac{E_z+\delta E_\theta}{(1+\delta^2)^{1/2}}; \end{aligned}$$

Separando as componentes do lado direito,

$$\begin{aligned} \left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_r &= -\left[\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}+\frac{1}{r^2R}\frac{\partial}{\partial\theta}R\frac{\partial}{\partial\theta}\right]E_r+ \\ &\quad \frac{1}{r^2R}\frac{\partial}{\partial\theta}R\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{E_\perp+\delta E_\parallel}{\sqrt{1+\delta^2}}\right)+\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{\partial}{\partial r}\left(R\frac{E_\parallel-\delta E_\perp}{\sqrt{1+\delta^2}}\right) \end{aligned} \tag{185}$$

$$\begin{aligned} \left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_r &= -\left[\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}+\frac{1}{r^2R}\frac{\partial}{\partial\theta}R\frac{\partial}{\partial\theta}\right]E_r+ \\ &\quad \left[\frac{1}{r^2R}\frac{\partial}{\partial\theta}R\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}}-\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\delta R}{\sqrt{1+\delta^2}}\right]E_\perp+ \\ &\quad \left[\frac{1}{r^2R}\frac{\partial}{\partial\theta}R\frac{\partial}{\partial r}\frac{\delta r}{\sqrt{1+\delta^2}}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{\partial}{\partial r}\frac{R}{\sqrt{1+\delta^2}}\right]E_\parallel \end{aligned} \tag{186}$$

$$\begin{aligned} &\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_\perp=\frac{\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_\theta-\delta\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_z}{\sqrt{1+\delta^2}}= \\ &\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\frac{R}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}E_r-\left(\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\frac{R}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)E_\theta+\frac{1}{rR^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{\partial}{\partial\theta}RE_z\right] \\ &-\frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{R}\frac{\partial}{\partial\zeta}E_r+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\zeta}E_\theta-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{R}\frac{\partial}{\partial r}R+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{rR}\frac{\partial}{\partial\theta}R\right)E_z\right] \end{aligned} \tag{187}$$

$$
\begin{aligned}
\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_{\perp} &= \left[\frac{1}{R\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{R}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\delta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{R}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]E_r - \\
&\left[\frac{1}{R\sqrt{1+\delta^2}}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{\delta R}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\frac{1}{R}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\delta R\right)\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}+\right. \\
&\left.\frac{1}{R\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{R}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}}+\frac{\delta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{R}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\delta R}{\sqrt{1+\delta^2}}\right]E_{\perp}+ \\
&\left[\frac{1}{R\sqrt{1+\delta^2}}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{\delta R}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\frac{1}{R}\left(\frac{\delta}{R}\frac{\partial}{\partial\zeta}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\frac{R}{\sqrt{1+\delta^2}}+\right. \\
&\left.\frac{1}{R\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{R}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}-\frac{\delta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{R}\frac{\partial}{\partial r}\frac{R}{\sqrt{1+\delta^2}}\right]E_{\parallel} \quad (188)
\end{aligned}
$$

A partir de agora serão feitas as transformações para correção toroidal na Eq.[179] e usando $\delta = \frac{r}{Rq} = \frac{r}{R_0 q}$.

E.2.1 Componente *radial*

$$
\begin{aligned}
\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_{r} &= -\left[\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}+\frac{1}{r^2R}\frac{\partial}{\partial\theta}R\frac{\partial}{\partial\theta}\right]E_r+ \\
&\left[\frac{1}{r^2R}\frac{\partial}{\partial\theta}R\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}}-\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\delta R}{\sqrt{1+\delta^2}}\right]E_{\perp}+ \\
&\left[\frac{1}{r^2R}\frac{\partial}{\partial\theta}R\frac{\partial}{\partial r}\frac{\delta r}{\sqrt{1+\delta^2}}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{\partial}{\partial r}\frac{R}{\sqrt{1+\delta^2}}\right]E_{\parallel} \quad (189)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_{r}= \\
&-\left[\frac{(1-2\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{R_0^2}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}+\frac{(1-\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{r^2R_0}\frac{\partial}{\partial\theta}R_0(1+\frac{r}{R_0}\cos\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right]E_r+ \\
&\left[\frac{(1-\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{r^2R_0}\frac{\partial}{\partial\theta}R_0(1+\frac{r}{R_0}\cos\theta)\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}}\right. \\
&\left.-\frac{(1-2\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{R_0^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\delta R_0(1+\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{\sqrt{1+\delta^2}}\right]E_{\perp}+ \\
&\left[\frac{(1-\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{r^2R_0}\frac{\partial}{\partial\theta}R_0(1+\frac{r}{R_0}\cos\theta)\frac{\partial}{\partial r}\frac{\delta r}{\sqrt{1+\delta^2}}\right. \\
&\left.+\frac{(1-2\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{R_0^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{\partial}{\partial r}\frac{R_0(1+\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{\sqrt{1+\delta^2}}\right]E_{\parallel} \quad (190)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_r = \\
&-\left[\frac{(1-2\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{R_0^2}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}+\frac{(1-\frac{r^2}{R_0^2}\cos^2\theta)}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\frac{(1-\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right]E_r + \\
&\left[\left(\frac{(1-\frac{r^2}{R_0^2}\cos^2\theta)}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{(1-\frac{r}{R_0}\cos\theta)\sin\theta}{rR_0}\right)\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}}\right. \\
&\left.-\frac{(1-2\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{R_0}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\delta(1+\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]E_\perp + \\
&\left[\left(\frac{(1-\frac{r^2}{R_0^2}\cos^2\theta)}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{(1-\frac{r}{R_0}\cos\theta)\sin\theta}{rR_0}\right)\frac{\partial}{\partial r}\frac{\delta r}{\sqrt{1+\delta^2}}\right. \\
&\left.+\frac{(1-2\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{R_0^2}\frac{\partial}{\partial r}\frac{R_0(1+\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]E_\parallel
\end{aligned}
\tag{191}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_r = \\
&-\left[\frac{(1-2\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{R_0^2}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}+\frac{(1-\frac{r^2}{R_0^2}\cos^2\theta)}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\frac{(1-\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right]E_r + \\
&\left[\left(\frac{(1-\frac{r^2}{R_0^2}\cos^2\theta)}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{(1-\frac{r}{R_0}\cos\theta)\sin\theta}{rR_0}\right)\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}}-\frac{(1-2\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{R_0}\times\right. \\
&\left.\left(\frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\cos\theta}{R_0}+(1+\frac{r}{R_0}\cos\theta)\left(\frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}\right)'+\frac{\delta(1+\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]E_\perp + \\
&\left[\left(\frac{(1-\frac{r^2}{R_0^2}\cos^2\theta)}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{(1-\frac{r}{R_0}\cos\theta)\sin\theta}{rR_0}\right)\frac{\partial}{\partial r}\frac{\delta r}{\sqrt{1+\delta^2}}+\frac{(1-2\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{R_0^2}\times\right. \\
&\left.\left(\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\cos\theta}{R_0}+(1+\frac{r}{R_0}\cos\theta)\left(\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\right)'+\frac{(1+\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]E_\parallel
\end{aligned}
\tag{192}
$$

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_r =$$
$$-\left[\frac{1}{R_0^2}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\frac{2\frac{r}{R_0}\cos\theta}{R_0^2}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\cos^2\theta}{R_0^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\cos\theta\sin\theta}{R_0}\frac{\partial}{\partial\theta}\right]E_r+$$
$$\left[\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\sin\theta-\frac{r}{R_0}\cos\theta\sin\theta}{rR_0}-\frac{\cos^2\theta}{R_0^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\left(\frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}}\right)'+\frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\right)-\right.$$
$$\left.\frac{(1-2\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{R_0}\left((1+\frac{r}{R_0}\cos\theta)\left(\frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}\right)'+\frac{\delta(1+\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\cos\theta}{R_0}\right)\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]E_\perp+$$
$$\left[\left(\frac{(1-\frac{r^2}{R_0^2}\cos^2\theta)}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\sin\theta-\frac{r}{R_0}\cos\theta\sin\theta}{rR_0}\right)\frac{\partial}{\partial r}\frac{\delta r}{\sqrt{1+\delta^2}}+\right.$$
$$\left.\frac{(1-2\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{R_0^2}\left((1+\frac{r}{R_0}\cos\theta)\left(\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\right)'+\frac{(1+\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\cos\theta}{R_0}\right)\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]E_\parallel$$

Desprezando termos proporcionais à segunda ordem em θ, é alcançada a expressão

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_r=-\left[\frac{1}{R_0^2}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\frac{2\frac{r}{R_0}\cos\theta}{R_0^2}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right]E_r+$$
$$\left[\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\sin\theta}{rR_0}\right)\left(\left(\frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}}\right)'+\frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\right.$$
$$\frac{2\frac{r}{R_0}\cos\theta}{R_0}\left\{\left(\frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}\right)'+\frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial\zeta}\right\}\frac{\partial}{\partial\zeta}$$
$$\left.-\frac{1}{R_0}\left((1+\frac{r}{R_0}\cos\theta)\left(\frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}\right)'+\frac{\delta(1+\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\cos\theta}{R_0}\right)\right]E_\perp+$$
$$\left[\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\sin\theta}{rR_0}\right)\frac{\partial}{\partial r}\frac{\delta r}{\sqrt{1+\delta^2}}-\frac{2\frac{r}{R_0}\cos\theta}{R_0^2}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\right)'+\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\right\}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{R_0^2}\left\{(1+\frac{r}{R_0}\cos\theta)\left(\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\right)'+\frac{(1+\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\cos\theta}{R_0}\right\}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]E_\parallel \quad (193)$$

E.2.2 Componente *perpendicular*

$$
\begin{aligned}
\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_{\perp} = & \left[\frac{1}{R\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{R}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\delta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{R}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]E_r - \\
& \left[\frac{1}{R\sqrt{1+\delta^2}}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{\delta R}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\frac{1}{R}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\delta R\right)\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}+\right. \\
& \left.\frac{1}{R\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{R}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}} + \frac{\delta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{R}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\delta R}{\sqrt{1+\delta^2}}\right]E_{\perp} + \\
& \left[\frac{1}{R\sqrt{1+\delta^2}}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{\delta R}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\frac{1}{R}\left(\frac{\delta}{R}\frac{\partial}{\partial\zeta}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\frac{R}{\sqrt{1+\delta^2}}+\right. \\
& \left.\frac{1}{R\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{R}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r\delta}{\sqrt{1+\delta^2}} - \frac{\delta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{R}\frac{\partial}{\partial r}\frac{R}{\sqrt{1+\delta^2}}\right]E_{\parallel} \quad (194)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_{\perp} = & \left[\frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1+\frac{r}{R_0}\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\delta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r(1-\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{R_0}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]E_r - \\
& \left[\frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{R_0\sqrt{1+\delta^2}}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{\delta R}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\frac{1}{R}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{\delta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}R_0(1+\frac{r}{R_0}\cos\theta)\right)\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}+\right. \\
& \left.\frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1+\frac{r}{R_0}\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}} + \frac{\delta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}r(1-\frac{r}{R_0}\cos\theta)\frac{\partial}{\partial r}\frac{\delta(1+\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{\sqrt{1+\delta^2}}\right]E_{\perp} + \\
& \left[\frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{R_0\sqrt{1+\delta^2}}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{\delta R}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\frac{1}{R}\left(\delta\frac{\partial}{\partial\zeta}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}R_0(1+\frac{r}{R_0}\cos\theta)\right)\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}+\right. \\
& \left.\frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1+\frac{r}{R_0}\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r\delta}{\sqrt{1+\delta^2}} - \frac{\delta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}r(1-\frac{r}{R_0}\cos\theta)\frac{\partial}{\partial r}\frac{1+\frac{r}{R_0}\cos\theta}{\sqrt{1+\delta^2}}\right]E_{\parallel}
\end{aligned}
$$

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_{\perp} =$$

$$\left[\frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1+\frac{r}{R_0}\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\delta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r(1-\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{R_0}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]E_r -$$

$$\left[\frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{R_0\sqrt{1+\delta^2}}\left(\frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{R_0}\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{\delta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\delta R}{r}\left(-\frac{1}{R^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}R\right)\right)\times\right.$$

$$\left.\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{\delta R_0(1+\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}-\delta\sin\theta\right)\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}+\right.$$

$$\left.\frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1+\frac{r}{R_0}\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}}+\frac{\delta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}r(1-\frac{r}{R_0}\cos\theta)\frac{\partial}{\partial r}\frac{\delta(1+\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{\sqrt{1+\delta^2}}\right]E_{\perp}+$$

$$\left[\frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{R_0\sqrt{1+\delta^2}}\left(\frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{R_0}\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{\delta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\delta R}{r}\left(-\frac{1}{R^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}R\right)\right)\times\right.$$

$$\left.\left(\delta\frac{\partial}{\partial\zeta}-\frac{R_0(1+\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\sin\theta\right)\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}+\right.$$

$$\left.\frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1+\frac{r}{R_0}\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}-\frac{\delta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}r(1-\frac{r}{R_0}\cos\theta)\frac{\partial}{\partial r}\frac{1+\frac{r}{R_0}\cos\theta}{\sqrt{1+\delta^2}}\right]E_{\parallel}$$

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_{\perp} = \left[\frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1+\frac{r}{R_0}\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\delta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{R}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]E_r -$$

$$\left[\frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{R_0(1+\delta^2)}\left(\frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{R_0}\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{\delta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\delta}{R}\sin\theta\right)\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{\delta R_0(1+\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}-\delta\sin\theta\right)+\right.$$

$$\left.\frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1+\frac{r}{R_0}\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}}+\frac{\delta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}r(1-\frac{r}{R_0}\cos\theta)\frac{\partial}{\partial r}\frac{\delta(1+\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{\sqrt{1+\delta^2}}\right]E_{\perp}+$$

$$\left[\frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{R_0(1+\delta^2)}\left(\frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{R_0}\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{\delta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\delta}{R}\sin\theta\right)\left(\delta\frac{\partial}{\partial\zeta}-\frac{R_0(1+\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\sin\theta\right)+\right.$$

$$\left.\frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1+\frac{r}{R_0}\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}-\frac{\delta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}r(1-\frac{r}{R_0}\cos\theta)\frac{\partial}{\partial r}\frac{1+\frac{r}{R_0}\cos\theta}{\sqrt{1+\delta^2}}\right]E_{\parallel}$$

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_{\perp} = \left[\frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{\sqrt{1+\delta^2}}\left(\frac{1+\frac{r}{R_0}\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)-\right.$$

$$\left.\frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}\left(\frac{(1-\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{R_0}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{(1-\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{rR_0}\frac{\partial}{\partial\zeta}-\frac{(1-2\frac{r}{R_0}\cos\theta)\cos\theta}{R_0^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\right]E_r -$$

$$\left[\frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{R_0(1+\delta^2)}\left(\frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{R_0}\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{\delta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\delta}{R}\sin\theta\right)\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{\delta R_0(1+\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}-\delta\sin\theta\right)+\right.$$

$$\left.\frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1+\frac{r}{R_0}\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}}+\frac{\delta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}r(1-\frac{r}{R_0}\cos\theta)\frac{\partial}{\partial r}\frac{\delta(1+\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{\sqrt{1+\delta^2}}\right]E_{\perp}+$$

$$\left[\frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{R_0(1+\delta^2)}\left(\frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{R_0}\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{\delta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\delta}{R}\sin\theta\right)\left(\delta\frac{\partial}{\partial\zeta}-\frac{R_0(1+\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\sin\theta\right)+\right.$$

$$\left.\frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1+\frac{r}{R_0}\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}-\frac{\delta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}r(1-\frac{r}{R_0}\cos\theta)\frac{\partial}{\partial r}\frac{1+\frac{r}{R_0}\cos\theta}{\sqrt{1+\delta^2}}\right]E_{\parallel}$$

Desprezando os termos proporcionais à segunda ordem em θ,

$$
\begin{aligned}
&\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_{\perp} = \\
&\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\delta(1-\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{R_0}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\zeta} - \frac{\delta(1-2\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{rR_0}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]E_r \\
- &\left[\frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{R_0(1+\delta^2)}\left(\frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{R_0}\frac{\partial}{\partial\zeta} + \frac{\delta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\delta}{R}\sin\theta\right)\left(\frac{\partial}{\partial\zeta} + \frac{\delta R_0(1+\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \delta\sin\theta\right)\right. \\
&+\frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{\sqrt{1+\delta^2}}\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{R_0}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}} \\
&\left.+\frac{\delta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\left\{(1-\frac{r}{R_0}\cos\theta)\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r} - \frac{r}{R_0}\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\right\}\frac{\delta(1+\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{\sqrt{1+\delta^2}}\right]E_{\perp} \\
+ &\left[\frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{R_0(1+\delta^2)}\left(\frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{R_0}\frac{\partial}{\partial\zeta} + \frac{\delta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\delta}{R}\sin\theta\right)\left(\delta\frac{\partial}{\partial\zeta} - \frac{R_0(1+\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \sin\theta\right)\right. \\
&+\frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{\sqrt{1+\delta^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{R_0}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right\}\frac{r\delta}{\sqrt{1+\delta^2}} \\
&\left.-\frac{\delta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\left\{(1-\frac{r}{R_0}\cos\theta)\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r} - \frac{r}{R_0}\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\right\}\frac{1+\frac{r}{R_0}\cos\theta}{\sqrt{1+\delta^2}}\right]E_{\parallel}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_{\perp} = \\
&\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\delta(1-\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{R_0}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\zeta} - \frac{\delta(1-2\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{rR_0}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]E_r \\
- &\left[\frac{1-2\frac{r}{R_0}\cos\theta}{R_0^2(1+\delta^2)}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta} + \frac{\delta R}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \delta\sin\theta\right)\left(\frac{\partial}{\partial\zeta} + \frac{\delta R}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \delta\sin\theta\right)\right. \\
&+\left(\frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{R_0\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}} \\
&\left.+\frac{\delta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\left((1-\frac{r}{R_0}\cos\theta)\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r} - \frac{r}{R_0}\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\delta(1+\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{\sqrt{1+\delta^2}}\right]E_{\perp} \\
+ &\left[\frac{1-2\frac{r}{R_0}\cos\theta}{R_0^2(1+\delta^2)}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta} + \frac{\delta R}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \delta\sin\theta\right)\left(\delta\frac{\partial}{\partial\zeta} - \frac{R}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \sin\theta\right)\right. \\
&+\left\{\frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{R_0\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right\}\frac{r\delta}{\sqrt{1+\delta^2}} \\
&\left.-\frac{\delta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\left\{(1-\frac{r}{R_0}\cos\theta)\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r} - \frac{r}{R_0}\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\right\}\frac{1+\frac{r}{R_0}\cos\theta}{\sqrt{1+\delta^2}}\right]E_{\parallel} \qquad (195)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_{\perp} = \\
&\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\delta(1-\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{R_0}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\zeta} - \frac{\delta(1-2\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{rR_0}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]E_r \\
- &\left[\frac{1-2\frac{r}{R_0}\cos\theta}{R_0^2(1+\delta^2)}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}+\delta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\delta\sin\theta\right)\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}+\delta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-\delta\sin\theta\right)\right. \\
&+\left(\frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{R_0\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}} \\
&\left.+\frac{\delta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{R_0}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}r-\frac{r}{R_0}\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}-\frac{r}{R_0}\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\right\}\frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}\right]E_{\perp} \\
+ &\left[\frac{1-2\frac{r}{R_0}\cos\theta}{R_0^2(1+\delta^2)}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}+\delta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\delta\sin\theta\right)\left(\delta\frac{\partial}{\partial\zeta}-\frac{R_0(1+\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\sin\theta\right)\right. \\
&+\left\{\frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{R_0\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right\}\frac{r\delta}{\sqrt{1+\delta^2}} \\
&\left.-\frac{\delta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{R_0}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}r-\frac{r}{R_0}\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}-\frac{r}{R_0}\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\right\}\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\right]E_{\parallel}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_{\perp} = \\
&\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\delta(1-\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{R_0}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\zeta} - \frac{\delta(1-2\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{rR_0}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]E_r \\
- &\left[\frac{1-2\frac{r}{R_0}\cos\theta}{R_0^2(1+\delta^2)}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}+\delta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\delta\sin\theta\right)\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}+\delta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-\delta\sin\theta\right)\right. \\
&+\left(\frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{R_0\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}} \\
&\left.+\frac{\delta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{R_0}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}r-\frac{r}{R_0}\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}-\frac{r}{R_0}\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\right\}\frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}\right]E_{\perp} \\
+ &\left[\frac{1-2\frac{r}{R_0}\cos\theta}{R_0^2(1+\delta^2)}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}+\delta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\delta\sin\theta\right)\left(\delta\frac{\partial}{\partial\zeta}-\frac{R_0}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}-\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\sin\theta\right)\right. \\
&+\left\{\frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{R_0\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right\}\frac{r\delta}{\sqrt{1+\delta^2}} \\
&\left.-\frac{\delta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{R_0}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}r-\frac{r}{R_0}\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}-\frac{r}{R_0}\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\right\}\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\right]E_{\parallel}
\end{aligned}
$$

Fazendo a simplificação

$$\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}+\delta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\delta\sin\theta\right)\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}+\delta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-\delta\sin\theta\right)=\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2+$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\delta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-\delta\sin\theta\right)+\left(\delta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\delta\sin\theta\right)\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$
$$+\left(\delta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-\delta\sin\theta\right)\left(\delta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\delta\sin\theta\right)\text{ Estes últimos termos serão desprezados...}$$
$$=\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2+\left(\delta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-\delta\sin\theta\right)\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\delta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-\delta\sin\theta\right)+\delta\sin\theta\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$
$$+\delta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2+\left(\delta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-\delta\sin\theta\right)\frac{\partial}{\partial\zeta}+$$
$$\frac{1}{q}\left(\delta\cos\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-2\delta\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-\delta\cos\theta\right)+\delta\sin\theta\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\left(\delta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\delta\cos\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)$$
$$=\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2+2\delta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\left(2\delta\cos\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\delta\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-\delta\cos\theta\right)$$
$$=\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2+2\delta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{q}\left(\delta\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\delta\cos\theta\right),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}+\delta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\delta\sin\theta\right)\left(\delta\frac{\partial}{\partial\zeta}-\frac{R_0}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}-\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\sin\theta\right)=$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\delta\frac{\partial}{\partial\zeta}-\frac{R_0}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\sin\theta-\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+$$
$$\left(\delta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\delta\sin\theta\right)\left(\delta\frac{\partial}{\partial\zeta}-\frac{R_0}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\left(\delta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\delta\sin\theta\right)\left(\sin\theta-\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$
$$=\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\delta\frac{\partial}{\partial\zeta}-\frac{R_0}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\left(\sin\theta-\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta-\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+$$
$$\delta\sin\theta\left(\delta\frac{\partial}{\partial\zeta}-\frac{R_0}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\delta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\delta\frac{\partial}{\partial\zeta}-\frac{R_0}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)=$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\delta\frac{\partial}{\partial\zeta}-\frac{R_0}{r}\right)+\left(\sin\theta-\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\left(\cos\theta+2\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-\cos\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)+$$
$$\left(\delta^2\sin\theta\frac{\partial}{\partial\zeta}-\frac{1}{q}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\left(\delta^2\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\zeta}-\cos\theta\frac{1}{q}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\delta\frac{\partial}{\partial\zeta}-\frac{R_0}{r}\right)+$$
$$\sin\theta(1+\delta^2)\frac{\partial}{\partial\zeta}-(1-\delta^2)\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\left(\cos\theta+\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-2\cos\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)$$

com

$$-\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}$$

em

$$
\begin{aligned}
& \left(-\frac{\frac{r}{R_0}\cos\theta}{\sqrt{1+\delta^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right\}+\frac{\cos\theta}{R_0\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}} \\
= & \left(\frac{\frac{r}{R_0}\cos\theta}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}},
\end{aligned}
$$

e também fazendo,

$$
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}r=\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}+2\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}
$$

em

$$
\begin{aligned}
& \frac{\delta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{r}{R_0}\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}r-\frac{r}{R_0}\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}-\frac{r}{R_0}\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\right\}\frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}} \\
= & \frac{\delta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{r}{R_0}\cos\theta\left(2\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)-\frac{r}{R_0}\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\right\}\frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}} \\
= & \frac{\delta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{r}{R_0}\cos\theta\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)\right\}\frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}= \\
= & \frac{\delta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}+\frac{\delta\cos\theta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\frac{r}{R_0}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}+\frac{\delta^2}{r^2(1+\delta^2)}\frac{r}{R_0}\cos\theta
\end{aligned}
$$

obtém-se, então,

$$
\begin{aligned}
& \left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_\perp= \\
& \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\delta(1-\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{R_0}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\zeta}-\frac{\delta(1-2\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{rR_0}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]E_r \\
- & \left[\frac{1-2\frac{r}{R_0}\cos\theta}{R_0^2(1+\delta^2)}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2+2\delta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{q}\left(\delta\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\delta\cos\theta\right)\right\}\right. \\
& +\left(\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\frac{r}{R_0}\cos\theta}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}}-\frac{\delta\cos\theta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\frac{r}{R_0}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}} \\
& \left.+\frac{\delta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}+2\frac{\delta\cos\theta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\frac{r}{R_0}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}+\frac{\delta^2}{r^2(1+\delta^2)}\frac{r}{R_0}\cos\theta\right]E_\perp \\
+ & \left[\frac{1-2\frac{r}{R_0}\cos\theta}{R_0^2(1+\delta^2)}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\delta\frac{\partial}{\partial\zeta}-\frac{R_0}{r}\right)+\sin\theta(1+\delta^2)\frac{\partial}{\partial\zeta}-(1-\delta^2)\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\zeta}+\right.\right. \\
& \left.\frac{1}{q}\left(\cos\theta+\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-2\cos\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\right\}+\left\{\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\frac{r}{R_0}\cos\theta}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\right\}\frac{r\delta}{\sqrt{1+\delta^2}} \\
& \left.-\frac{\delta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}-\frac{\delta\cos\theta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\frac{r}{R_0}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}-\frac{\delta}{r^2(1+\delta^2)}\frac{r}{R_0}\cos\theta\right]E_\parallel \quad (196)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_{\perp} = \\
&\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\delta(1-\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{R_0}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\zeta} - \frac{\delta(1-2\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{rR_0}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]E_r \\
&- \left[\frac{\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2}{R_0^2(1+\delta^2)} + \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}} + \frac{\delta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}\right. \\
&-\frac{2\frac{r}{R_0}\cos\theta\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2}{R_0^2(1+\delta^2)} + \frac{2\delta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)}{R_0^2(1+\delta^2)} - \frac{\delta\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}}{qR_0^2(1+\delta^2)} - \frac{\delta\cos\theta}{qR_0^2(1+\delta^2)} \\
&\left.+\frac{\frac{r}{R_0}\cos\theta}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}} + \frac{\frac{r}{R_0}\delta\cos\theta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}} + \frac{\frac{r}{R_0}\delta^2}{r^2(1+\delta^2)}\cos\theta\right]E_{\perp} \\
&+ \left[\frac{\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\delta\frac{\partial}{\partial\zeta}-\frac{R_0}{r}\right)}{R_0^2(1+\delta^2)} - \frac{\delta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}\right. \\
&-\frac{2\frac{r}{R_0}\cos\theta\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\delta\frac{\partial}{\partial\zeta}-\frac{R_0}{r}\right)}{R_0^2(1+\delta^2)} + \frac{\frac{r}{R_0}\cos\theta}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r\delta}{\sqrt{1+\delta^2}} \\
&+\frac{1}{R_0^2(1+\delta^2)}\left\{\sin\theta(1+\delta^2)\frac{\partial}{\partial\zeta} - (1-\delta^2)\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right. \\
&\left.\left.+\frac{1}{q}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - 2\cos\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\right\} - \frac{\frac{r}{R_0}\delta\cos\theta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\right]E_{\parallel}
\end{aligned}
\tag{197}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_{\perp} = \\
&\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1-\frac{r}{R_0}\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\delta(1-\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{R_0}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\zeta} - \frac{\delta(1-2\frac{r}{R_0}\cos\theta)}{rR_0}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]E_r \\
&- \left[\frac{\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2}{R_0^2(1+\delta^2)} + \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}} + \frac{\delta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}} - \frac{2\frac{r}{R_0}\cos\theta\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}}{R_0^2(1+\delta^2)}\right. \\
&\left.+\frac{2\delta\frac{r}{R_0}\cos\theta}{rR_0(1+\delta^2)}\frac{\partial}{\partial\theta}r - \frac{\delta\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}}{qR_0^2(1+\delta^2)} + \frac{\frac{r}{R_0}\cos\theta}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}} + \frac{\frac{r}{R_0}\delta\cos\theta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}\right]E_{\perp} \\
&+ \left[\frac{\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\delta\frac{\partial}{\partial\zeta}-\frac{R_0}{r}\right)}{R_0^2(1+\delta^2)} - \frac{\delta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}\right. \\
&-\frac{2\frac{r}{R_0}\cos\theta\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\delta\frac{\partial}{\partial\zeta}-\frac{R_0}{r}\right)}{R_0^2(1+\delta^2)} + \frac{\frac{r}{R_0}\cos\theta}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r\delta}{\sqrt{1+\delta^2}} - \frac{\frac{r}{R_0}\delta\cos\theta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} \\
&\left.+\frac{1}{R_0^2(1+\delta^2)}\left\{\sin\theta(1+\delta^2)\frac{\partial}{\partial\zeta} - (1-\delta^2)\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\zeta} + \frac{1}{q}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - 2\cos\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\right\}\right]E_{\parallel}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_{\perp} = \\
&\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\delta}{R_0}\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\delta}{rR_0}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]E_r + \\
&\frac{2\frac{r}{R_0}\cos\theta}{\sqrt{1+\delta^2}}\left[\frac{1}{2r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\delta}{2R_0}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{\delta}{rR_0}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]E_r \\
-&\left[\frac{\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2}{R_0^2\left(1+\delta^2\right)}+\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}}+\frac{\delta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}\right]E_{\perp} \\
&+2\frac{r}{R_0}\sin\theta\left[\frac{\delta^2\frac{\partial}{\partial\theta}}{2r^2\left(1+\delta^2\right)}\right]E_{\perp} \\
&-2\frac{r}{R_0}\cos\theta\left[-\frac{\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}}{R_0^2\left(1+\delta^2\right)}+\frac{\delta}{rR_0\left(1+\delta^2\right)}\frac{\partial}{\partial\theta}r\right. \\
&\left.+\frac{1}{2\sqrt{1+\delta^2}}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}}+\frac{\delta}{2r\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}\right]E_{\perp} \\
&+\left[\frac{\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\delta\frac{\partial}{\partial\zeta}-\frac{R_0}{r}\right)}{R_0^2\left(1+\delta^2\right)}-\frac{\delta}{r\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}\right]E_{\parallel} \\
&+2\frac{r}{R_0}\cos\theta\left[\frac{\frac{1}{2r^2}}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}-\frac{\delta}{2r\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}-\frac{\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\delta\frac{\partial}{\partial\zeta}-\frac{R_0}{r}\right)}{R_0^2\left(1+\delta^2\right)}+\right. \\
&\left.-\frac{1}{rR_0\left(1+\delta^2\right)}\left\{\frac{\left(1-\delta^2\right)}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right\}\right]E_{\parallel} \\
&+2\frac{r}{R_0}\sin\theta\left[\frac{1}{2rR_0}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{q\left(1+\delta^2\right)}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]E_{\parallel}
\end{aligned}
$$

Eliminando $E_{\parallel}$ através de $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \frac{1}{rR}\frac{\partial}{\partial r} rRJ_r + \frac{1}{rR}\frac{\partial}{\partial \theta} RJ_\theta + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \zeta} J_z = 0. \tag{198}$$

Desprezando a toroidicidade na equação acima,

$$R = R_0,$$

chega-se a

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} rJ_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} J_\theta + \frac{1}{R_0}\frac{\partial}{\partial \zeta} J_z = 0, \tag{199}$$

ou

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} rJ_r + ik_\theta J_\theta + ik_z J_z = 0. \tag{200}$$

Substituindo as transformações do início deste apêndice, chega-se a

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} rJ_r + i\left(k_\perp + \delta k_\parallel\right)/\sqrt{1+\delta^2} J_\theta + i\left(k_\parallel - \delta k_\perp\right)/\sqrt{1+\delta^2} J_z = 0, \tag{201}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} rJ_r + i\frac{\left(k_\perp + \delta k_\parallel\right)}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\left(J_\perp + \delta J_\parallel\right)}{\sqrt{1+\delta^2}} + i\frac{\left(k_\parallel - \delta k_\perp\right)}{\sqrt{1+\delta^2}}\frac{\left(J_\parallel - \delta J_\perp\right)}{\sqrt{1+\delta^2}} = 0, \tag{202}$$

ou, simplificando,

$$i\left(k_\parallel J_\parallel + k_\perp J_\perp\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} rJ_r = 0. \tag{203}$$

E.2.3 Eliminando $E_{\parallel}$

De

$$\vec{J} = \frac{1}{i\mu_0\omega}\frac{\omega^2}{c^2}\overleftrightarrow{\chi} \cdot \vec{E}, \tag{204}$$

ou

$$
\begin{aligned}
J_r &= \frac{\omega}{i\mu_0 c^2}\left[\chi_{rr}E_r + \chi_{r\perp}E_\perp + \chi_{r\parallel}E_\parallel\right] \\
J_\perp &= \frac{\omega}{i\mu_0 c^2}\left[\chi_{\perp r}E_r + \chi_{\perp\perp}E_\perp + \chi_{\perp\parallel}E_\parallel\right] \\
J_\parallel &= \frac{\omega}{i\mu_0 c^2}\left[\chi_{\parallel r}E_r + \chi_{\parallel\perp}E_\perp + \chi_{\parallel\parallel}E_\parallel\right],
\end{aligned}
\tag{205}
$$

$$
\begin{aligned}
& k_\parallel\left[\chi_{\parallel r}E_r + \chi_{\parallel\perp}E_\perp + \chi_{\parallel\parallel}E_\parallel\right] + k_\perp\left[\chi_{\perp r}E_r + \chi_{\perp\perp}E_\perp + \chi_{\perp\parallel}E_\parallel\right] + \\
= \; & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(ir\left[\chi_{rr}E_r + \chi_{r\perp}E_\perp + \chi_{r\parallel}E_\parallel\right]\right)
\end{aligned}
\tag{206}
$$

Com esta última expressão, pode-se eliminar a componente paralela do campo elétrico das expressões de $\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)$, reduzindo então o sistema a ser resolvido pelo código.

Abaixo está listada uma versão mais simples das componentes do tensor dielétrico. Usando seus elementos e mais as Eqs.(205), e introduzindo as expressões desenvolvidas neste apêndice para as componentes perpendicular e radial de $\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)$, devidamente transformadas com a eliminação de $E_\parallel$, pode-se finalmente compor as expressões finais de da Eq.(184), com base nas quais o código foi criado.

$$
\begin{aligned}
\frac{\omega^2}{c^2}\chi_{rr} &= \frac{\omega^2}{v_A^2}\alpha_i + 2\hat{\epsilon}\cos\theta\frac{\omega^2}{v_A^2}\alpha_i \\
\frac{\omega^2}{c^2}\chi_{r\perp} &= -i\frac{\omega}{\omega_{ci}}\frac{\omega^2}{v_A^2}\alpha_i + 3i\cos\theta\frac{\omega}{\omega_{ci}}\frac{\omega^2}{v_A^2}\alpha_i - ik_\parallel\frac{(r\delta)'}{r\left(1+\delta^2\right)} \\
\frac{\omega^2}{c^2}\chi_{\perp r} &= i\frac{\omega}{\omega_{ci}}\frac{\omega^2}{v_A^2}\alpha_i - 3i\cos\theta\frac{\omega}{\omega_{ci}}\frac{\omega^2}{v_A^2}\alpha_i + ik_\parallel\frac{(r\delta)'}{r\left(1+\delta^2\right)} \\
\frac{\omega^2}{c^2}\chi_{\perp\perp} &= \frac{\omega^2}{v_A^2}\alpha_i + 2\hat{\epsilon}\cos\theta\frac{\omega^2}{v_A^2}\alpha_i \\
\frac{\omega^2}{c^2}\chi_{r\parallel} &= ik_\perp\frac{\omega^2}{v_A^2}\frac{\omega_{ci}}{\omega\left|k_\parallel\right|}\left[1+\rho_e Z\left(\rho_e\right)\right] \\
\frac{\omega^2}{c^2}\chi_{\parallel r} &= -\frac{\omega^2}{c^2}\chi_{r\parallel} \\
\frac{\omega^2}{c^2}\chi_{\perp\parallel} &= -\frac{d}{dr}\frac{\omega^2}{v_A^2}\frac{\omega_{ci}}{\omega\left|k_\parallel\right|}\left[1+\rho_e Z\left(\rho_e\right)\right] \\
\frac{\omega^2}{c^2}\chi_{\parallel\perp} &= \frac{\omega^2}{v_A^2}\frac{\omega_{ci}}{\omega\left|k_\parallel\right|}\left[1+\rho_e Z\left(\rho_e\right)\right]\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r \\
\frac{\omega^2}{c^2}\chi_{\parallel\parallel} &= \frac{\omega^2}{v_A^2}\frac{1+\rho Z\left(\rho\right)}{k_\parallel^2\rho_s^2\left[1+\frac{i\nu}{\left|k_\parallel\right|v_{Te}}Z\left(\rho\right)\right]}
\end{aligned}
\tag{207}
$$

onde

$$
\rho_e = \frac{\omega}{\left|k_\parallel\right| v_{Te}}, \qquad \rho = \frac{\omega + i\nu}{\left|k_\parallel\right| v_{Te}}, \qquad \nu \propto \frac{n_e}{T_e^{3/2}}
$$

F Forças ponderomotoras

Começando pela equação da continuidade,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} n_\alpha + \vec{\nabla} \cdot (n_\alpha \vec{v}_\alpha) &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial t} (m_\alpha n_\alpha) + \vec{\nabla} \cdot (m_\alpha n_\alpha \vec{v}_\alpha) &= 0 \\
\vec{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial t} (m_\alpha n_\alpha) + \vec{v}_\alpha \vec{\nabla} \cdot (m_\alpha n_\alpha \vec{v}_\alpha) &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial t} (m_\alpha n_\alpha \vec{v}_\alpha) - m_\alpha n_\alpha \frac{\partial}{\partial t} \vec{v}_\alpha + \vec{\nabla} \cdot (m_\alpha n_\alpha \vec{v}_\alpha \vec{v}_\alpha) - m_\alpha n_\alpha \left(\vec{v}_\alpha \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{v}_\alpha &= 0 \qquad (208)
\end{aligned}$$

com a equação de momento

$$\begin{aligned}
m_\alpha n_\alpha \frac{d\vec{v}_\alpha}{dt} &= -\vec{\nabla} P_\alpha - \vec{\nabla} \Pi_\alpha + Z_\alpha n_\alpha e_\alpha \left(\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{v}_\alpha \times \vec{B}\right]\right) + R_\alpha, \\
m_\alpha n_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_\alpha \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{v}_\alpha &= -\vec{\nabla} P_\alpha - \vec{\nabla} \Pi_\alpha + Z_\alpha n_\alpha e_\alpha \left(\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{v}_\alpha \times \vec{B}\right]\right) + R_\alpha, \\
\frac{\partial}{\partial t} (m_\alpha n_\alpha \vec{v}_\alpha) + \vec{\nabla} \cdot (m_\alpha n_\alpha \vec{v}_\alpha \vec{v}_\alpha) &= -\vec{\nabla} P_\alpha - \vec{\nabla} \Pi_\alpha + Z_\alpha n_\alpha e_\alpha \left(\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{v}_\alpha \times \vec{B}\right]\right) + R_\alpha.
\end{aligned}$$

Supondo pressão isotrópica, $\vec{\nabla} P_\alpha = 0$, $Z_\alpha = 1$, e $R_\alpha = 0$,

$$\langle F_\alpha \rangle = \mathrm{Re}\left\{-\vec{\nabla} \cdot (m_\alpha n_\alpha \vec{v}_\alpha \vec{v}_\alpha) + n_\alpha e_\alpha \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{J}_\alpha \times \vec{B}\right\} - \vec{\nabla} \Pi_\alpha$$

$$\begin{aligned}
m_\alpha n_\alpha \vec{v}_\alpha \vec{v}_\alpha &\equiv \frac{m_\alpha}{n_\alpha e_\alpha^2} \vec{J}_\alpha \vec{J}_\alpha = \frac{1}{\epsilon_0 \omega_{p\alpha}^2} \vec{J}_\alpha \vec{J}_\alpha \\
\frac{1}{c} \vec{J}_\alpha \times \vec{B} &\equiv \frac{1}{c} \vec{J}_\alpha \times \left(-\frac{ic}{\omega} \vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = \frac{1}{i\omega} \vec{J}_\alpha \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right)
\end{aligned}$$

$$F = \mathrm{Re}\left\{-\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\epsilon_0 \omega_{p\alpha}^2} \vec{J}_\alpha \vec{J}_\alpha\right) + e_\alpha \left[n_\alpha \vec{E} + \frac{1}{i\omega e_\alpha} \vec{J}_\alpha \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right)\right]\right\} - \vec{\nabla} \Pi_\alpha.$$

Da equação da continuidade, $i\omega n_\alpha = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{J}_\alpha}{e_\alpha}\right)$, então

$$F = \mathrm{Re}\left\{-\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\epsilon_0 \omega_{p\alpha}^2} \vec{J}_\alpha \vec{J}_\alpha\right) + \frac{1}{i\omega}\left[\vec{E} \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_\alpha + \vec{J}_\alpha \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right)\right]\right\} - \vec{\nabla} \Pi_\alpha$$

$$\vec{J}_\alpha = \tfrac{1}{2}\vec{J}_\alpha(r)e^{i(m\theta+kz-\omega t)} + cc.$$

$$\vec{E} = \tfrac{1}{2}\vec{E}(r)e^{i(m\theta+kz-\omega t)} + cc.$$

$$F_\alpha = \mathrm{Re}\left\{-\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{4\epsilon_0\omega_{p\alpha}^2}\vec{J}_\alpha^*\vec{J}_\alpha\right) + \frac{1}{4i\omega}\left[\vec{E}^*\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_\alpha\right) + \vec{J}_\alpha^*\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\right] + cc.\right\} - \vec{\nabla}\Pi_\alpha$$

$$F_\alpha =$$
$$-\mathrm{Re}\left\{\vec{J}_\alpha^*\left(\vec{\nabla}\cdot\frac{1}{4\epsilon_0\omega_{p\alpha}^2}\vec{J}_\alpha\right) + \left(\frac{1}{4\epsilon_0\omega_{p\alpha}^2}\vec{J}_\alpha^*\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{J}_\alpha - \frac{1}{4i\omega}\left[\vec{E}^*\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_\alpha\right) + \vec{J}_\alpha^*\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\right] + cc.\right\}$$
$$-\vec{\nabla}\Pi_\alpha$$

A componente θ :

$$\begin{aligned} F_{\theta\alpha} &= -\frac{1}{4}\mathrm{Re}\left\{J_{\theta\alpha}^*\left(\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{J}_\alpha}{\epsilon_0\omega_{p\alpha}^2}\right) + \left(\frac{\vec{J}_\alpha^*\cdot\vec{\nabla}}{\epsilon_0\omega_{p\alpha}^2}\right)J_{\theta\alpha} + \frac{J_{\theta\alpha}^*J_{r\alpha}}{\epsilon_0\omega_{p\alpha}^2 r}\right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{i\omega}\left[E_\theta^*\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_\alpha\right) + J_{z\alpha}^*\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_r - J_{r\alpha}^*\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_z\right] + cc.\right\} - \vec{\nabla}\Pi_\alpha \end{aligned}$$

$$F_{\theta\alpha} = -\frac{1}{4}\mathrm{Re}\left\{J_{\theta\alpha}^*\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{rJ_{r\alpha}}{\epsilon_0\omega_{p\alpha}^2}\right) + i\frac{m}{r}\frac{J_{\theta\alpha}}{\epsilon_0\omega_{p\alpha}^2} + ik\frac{J_{z\alpha}}{\epsilon_0\omega_{p\alpha}^2}\right)\right.$$
$$+\frac{J_{\theta\alpha}^*J_{r\alpha}}{\epsilon_0\omega_{p\alpha}^2 r} + \frac{\left(J_{r\alpha}^*\frac{\partial}{\partial r} + iJ_{\theta\alpha}^*\frac{m}{r} + iJ_{z\alpha}^*k\right)}{\epsilon_0\omega_{p\alpha}^2}J_{\theta\alpha}$$
$$-\frac{1}{i\omega}\left[E_\theta^*\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rJ_{r\alpha}) + i\frac{m}{r}J_{\theta\alpha} + ikJ_{z\alpha}\right) + iJ_{z\alpha}^*\left(\frac{m}{r}E_z - kE_\theta\right) - J_{r\alpha}^*\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_\theta) - i\frac{m}{r}E_r\right)\right]$$
$$\left.+cc.\right\} - \vec{\nabla}\Pi_\alpha$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2J_{r\alpha}^*J_{\theta\alpha}}{\epsilon_0\omega_{p\alpha}^2}\right) &= \frac{J_{\theta\alpha}}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{rJ_{r\alpha}^*}{\epsilon_0\omega_{p\alpha}^2}\right) + \frac{J_{r\alpha}^*}{r\epsilon_0\omega_{p\alpha}^2}\frac{\partial}{\partial r}(rJ_{\theta\alpha}) \\ &= \frac{J_{\theta\alpha}}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{rJ_{r\alpha}^*}{\epsilon_0\omega_{p\alpha}^2}\right) + \frac{J_{r\alpha}^*}{\epsilon_0\omega_{p\alpha}^2}\frac{\partial}{\partial r}(J_{\theta\alpha}) + \frac{J_{r\alpha}^*J_{\theta\alpha}}{r\epsilon_0\omega_{p\alpha}^2}; \\ \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2J_{r\alpha}^*E_\theta\right) &= \frac{E_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rJ_{r\alpha}^*) + \frac{J_{r\alpha}^*}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_\theta); \\ \mathrm{Re}\{iA^*B\} &= \mathrm{Re}\{-iAB^*\}. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F_{\theta\alpha} \approx & -\frac{1}{4}\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2 J^*_{r\alpha} J_{\theta\alpha}}{\epsilon_0 \omega^2_{p\alpha}}\right) - \frac{1}{i\omega}\left[\frac{E^*_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r J_{r\alpha}) - \frac{J^*_{r\alpha}}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r E_\theta)\right]\right. \\
& \left. -\frac{m}{\omega r}\left(E^*_\theta J_{\theta\alpha} + J^*_{r\alpha} E_r + J^*_{z\alpha} E_z\right) + cc.\right\} - \vec{\nabla}\Pi_\alpha \\
= & -\frac{1}{4}\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2 J^*_{r\alpha} J_{\theta\alpha}}{\epsilon_0 \omega^2_{p\alpha}}\right) + \frac{1}{i\omega}\left[\frac{E_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r J^*_{r\alpha}) + \frac{J^*_{r\alpha}}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r E_\theta)\right] + cc.\right\} \\
& -\vec{\nabla}\Pi_\alpha + \frac{m\,\mathrm{Re}}{\omega r}\left(\frac{\vec{E}\cdot\vec{J}^*_\alpha}{2}\right) \\
= & \frac{m}{\omega r}P_\alpha - \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{4r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(\frac{J^*_{r\alpha} J_{\theta\alpha}}{\epsilon_0 \omega^2_{p\alpha}} + \frac{J^*_{r\alpha} E_\theta}{i\omega}\right)\right] + cc.\right\} - \vec{\nabla}\Pi_\alpha \\
= & \frac{m}{\omega r}P_\alpha - \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{4r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 J^*_{r\alpha}\left(\frac{J_{\theta\alpha}}{\epsilon_0 \omega^2_{p\alpha}} + \frac{E_\theta}{i\omega}\right)\right] + cc.\right\} - \vec{\nabla}\Pi_\alpha
\end{aligned}
$$

F.0.4 Forças Viscosas Poloidais

Para ondas cinéticas

Da equação de continuidade:

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{n} = -\vec{\nabla}\cdot(n\vec{v}),$$

$$\tilde{n}_\alpha = \frac{(k_r j_{\alpha r} + k_b j_{\alpha b})}{e_\alpha \omega}.$$

A força de giro-viscosidade:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}\left\langle \Pi_{\theta r}\right\rangle_i &= \frac{1}{2} m_i \rho_i^2 \omega_{ci} \frac{\partial}{\partial r}\left\langle \tilde{n}_i \left(\frac{\partial \widehat{V}_r^{(i)}}{\partial r} - \frac{\partial \widehat{V}_\theta^{(i)}}{r\partial\theta}\right)\right\rangle \\
&= \frac{\omega_{ci} m_i \rho_i^2}{4\omega} 2\frac{\partial}{\partial r}\left\langle \frac{(k_r j_{ir} + k_b j_{ib})}{e_i}\left(\frac{\partial \widehat{V}_r^{(i)}}{\partial r} - \frac{\partial \widehat{V}_\theta^{(i)}}{r\partial\theta}\right)\right\rangle \\
&= \frac{\omega_{ci} m_i \rho_i^2}{4\omega e_i^2} 2\frac{\partial}{\partial r}\left\langle (k_r j_{ir} + k_b j_{ib})\frac{1}{n_i}\left(ik_r n_i e_i \widehat{V}_r^{(i)} - ik_b n_i e_i \widehat{V}_\theta^{(i)}\right)\right\rangle \\
&= \frac{\omega_{ci} m_i \rho_i^2}{4\omega e_i^2} 2\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{n_i}(k_r j_{ir} + k_b j_{ib})(ik_r j_{ir} - ik_b j_{i\theta})\right] \\
&= \frac{\omega_{ci} m_i \rho_i^2}{4\omega e_i^2}\,\mathrm{Re}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{n_i}(k_r j_{ir} + k_b j_{ib})^*(ik_r j_{ir} - ik_b j_{i\theta})\right)\right] \\
&= \frac{4\pi\omega_{ci}\rho_i^2}{4\omega}\,\mathrm{Re}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{m_i}{4\pi n_i e_i^2}(k_r j_{ir} + k_b j_{ib})^*(ik_r j_{ir} - ik_b j_{i\theta})\right)\right] \\
&= \frac{\omega_{ci}}{\omega}\pi\rho_i^2\,\mathrm{Re}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\omega_{pi}^2}(k_r j_{ir} + k_b j_{ib})^*(ik_r j_{ir} - ik_b j_{i\theta})\right)\right] \\
&= -\frac{\omega_{ci}}{\omega}\pi\rho_i^2\,\mathrm{Im}\left[\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\omega_{pi}^2}\left\{|k_r j_{ir}|^2 - |k_b j_{ib}|^2 + k_b j_{ib}^* k_r j_{ir} - k_r^* j_{ir}^* k_b j_{i\theta}\right\}\right] \\
&= -\frac{\omega_{ci}}{\omega}\pi\rho_i^2\,\mathrm{Im}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{\omega_{pi}^2}\left(|k_r j_{ir}|^2 - |k_b j_{ib}|^2 + k_b j_{ib}^* k_r j_{ir} - k_r j_{ir}^* k_b j_{i\theta}\right)\right\}\right] \\
&= -\frac{2\omega_{ci}}{\omega}\pi\rho_i^2\,\mathrm{Im}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{\omega_{pi}^2} k_r j_{ir} k_b j_{i\theta}^*\right\}\right].
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
j_{ir} &= -i\frac{\omega}{4\pi}(\varepsilon_{12}E_b + \varepsilon_{11}E_r), \\
j_{ib} &= -i\frac{\omega}{4\pi}(\varepsilon_{21}E_r + \varepsilon_{22}E_b),
\end{aligned}$$

chega-se a

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\Pi_{\theta r}\right)_i = -\frac{2\omega_{ci}}{\omega}\left(\frac{\omega}{4\pi}\right)^2 \pi\rho_i^2 \operatorname{Im}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{\omega_{pi}^2}k_b k_r\left(\varepsilon_{12}^{(i)}E_b + \varepsilon_{11}^{(i)}E_r\right)\left(\varepsilon_{21}^{(i)*}E_r^* + \varepsilon_{22}^{(i)*}E_b^*\right)\right\}\right]$$

$$= -\frac{\omega\omega_{ci}}{8\pi}\rho_i^2 \operatorname{Im}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{\omega_{pi}^2}k_b k_r \varepsilon_{12}^{(i)}\left(\varepsilon_{12}^{(i)}E_b E_r^* + \varepsilon_{11}^{(i)}\left|E_r\right|^2 + \varepsilon_{22}^{(i)*}\left|E_b\right|^2 + \frac{\varepsilon_{11}^{(i)}\varepsilon_{22}^{(i)*}}{\varepsilon_{12}^{(i)}}E_r E_b^*\right)\right\}\right]$$

$$= -\frac{\omega\omega_{ci}}{8\pi}\rho_i^2 \operatorname{Im}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{k_b k_r \varepsilon_{12}^{(i)}}{\omega_{pi}^2}\left(\varepsilon_{12}^{(i)}E_b E_r^* + \varepsilon_{11}^{(i)}\left|E_r\right|^2 + \varepsilon_{22}^{(i)*}\left|E_b\right|^2 + \frac{\varepsilon_{11}^{(i)}\varepsilon_{22}^{(i)*}}{\varepsilon_{12}^{(i)}}E_r E_b^*\right)\right\}\right] \quad (209a)$$

Com

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{12}^{(i)} &= -\varepsilon_{21}^{(i)} = i\varepsilon_1^{(i)}\frac{\omega_{ci}}{\omega}; \\
\varepsilon_{11}^{(i)} &= \varepsilon_1^{(i)}\left(1 - \frac{3}{4}k_r^2\rho_i^2\right); \\
\varepsilon_{22}^{(i)} &= \varepsilon_1^{(i)}\left(1 - \frac{11}{4}k_r^2\rho_i^2\right); \\
\frac{E_r}{E_b} &\approx \frac{k_r}{k_b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial r}\left\langle\Pi_{\theta r}\right\rangle_i = -\frac{\omega_{ci}^2}{8\pi}\rho_i^2 \times \\
&\operatorname{Re}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{k_b k_r \varepsilon_1^{(i)}}{\omega_{pi}^2}\left(\varepsilon_{12}^{(i)}\frac{k_r^*}{k_b} + \varepsilon_1^{(i)}\left|\frac{k_r}{k_b}\right|^2 + \varepsilon_{22}^{(i)*} + \varepsilon_{11}^{(i)}\frac{\varepsilon_{22}^{(i)*}}{\varepsilon_{12}^{(i)}}\frac{k_r}{k_b}\right)\left|E_b\right|^2\right\}\right] \\
\approx\ & -\frac{\omega_{ci}^2}{8\pi}\rho_i^2 \operatorname{Re}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{k_b k_r \varepsilon_1^{2(i)}}{\omega_{pi}^2}\left(\left|\frac{k_r}{k_b}\right|^2 + i\frac{\omega_{ci}}{\omega}\frac{k_r^*}{k_b} + 1 - i\frac{\omega}{\omega_{ci}}\frac{k_r}{k_b}\right)\left|E_b\right|^2\right\}\right] \\
=\ & -\frac{\omega_{ci}^2}{8\pi}\rho_i^2 \operatorname{Re}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{k_b k_r \varepsilon_1^{2(i)}}{\omega_{pi}^2}\left(\left|\frac{k_r}{k_b}\right|^2 + i\frac{\omega_{ci}}{\omega}\frac{k_r^*}{k_b} + 1 - i\frac{\omega}{\omega_{ci}}\frac{k_r}{k_b}\right)\left|E_b\right|^2\right\}\right]
\end{aligned}$$

Como $\omega_{ci} >> \omega$,

$$\begin{aligned}
i\frac{\omega_{ci}}{\omega}\frac{k_r^*}{k_b} + 1 - i\frac{\omega}{\omega_{ci}}\frac{k_r}{k_b} &= \frac{i\omega_{ci}^2 k_r^* + \omega k_b\omega_{ci} - i\omega^2 k_r}{\omega k_b\omega_{ci}} \\
&= \frac{i\omega_{ci}^2\left(\operatorname{Re}k_r - i\operatorname{Im}k_r\right) + \omega k_b\omega_{ci} - i\omega^2\left(\operatorname{Re}k_r + i\operatorname{Im}k_r\right)}{\omega k_b\omega_{ci}} \\
&= \frac{\omega_{ci}^2\left(i\operatorname{Re}k_r + \operatorname{Im}k_r\right) + \omega k_b\omega_{ci} - \omega^2\left(i\operatorname{Re}k_r - \operatorname{Im}k_r\right)}{\omega k_b\omega_{ci}} \\
&\approx \frac{\omega_{ci}\left(\operatorname{Im}k_r + i\operatorname{Re}k_r\right)}{\omega k_b}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\langle \Pi_{\theta r}\right\rangle_i = -\frac{\omega_{ci}^2}{8\pi}\rho_i^2 \operatorname{Re}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{k_b k_r \varepsilon_1^{2(i)}}{\omega_{pi}^2}\left(\left|\frac{k_r}{k_b}\right|^2 + \frac{\omega_{ci}}{\omega}\frac{(\operatorname{Im} k_r + i \operatorname{Re} k_r)}{k_b}\right)|E_b|^2\right\}\right]$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial r} \approx 2\operatorname{Im}(k_r),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}\left\langle \Pi_{\theta r}\right\rangle_i &= -\frac{\omega_{ci}^2 \varepsilon_1^{2(i)}}{8\pi\omega_{pi}^2}\rho_i^2 k_b \operatorname{Im}(k_r) k_r \left[\left(\frac{|k_r|^2}{k_b} + \frac{\omega_{ci}}{\omega}\frac{\operatorname{Im}(k_r)}{k_b}\right)|E_b|^2\right] \\ &= \frac{\omega_{ci}^2 \varepsilon_1^{2(i)}}{8\pi\omega_{pi}^2}\rho_i^2 k_b \operatorname{Im}(k_r^2)\left[\left(\frac{|k_r|^2}{k_b} + \frac{\omega_{ci}}{\omega}\frac{\operatorname{Im}(k_r)}{k_b}\right)|E_b|^2\right]\end{aligned}$$

$$\frac{k_b}{8\pi}\operatorname{Im}\varepsilon_3\left|E_\parallel\right|^2 = \frac{k_b}{8\pi}\operatorname{Im}\varepsilon_3\frac{\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1 - k_\parallel^2\right)^2}{k_\parallel^4}|E_b|^2$$

Para Ondas Magnetoacústicas Rápidas :

Repetindo a Eq.(209a),

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\langle \Pi_{\theta r}\right\rangle_i = -\frac{\omega\omega_{ci}}{8\pi}\rho_i^2 \operatorname{Im}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{k_b k_r \varepsilon_{12}^{(i)}}{\omega_{pi}^2}\left(\varepsilon_{12}^{(i)} E_b E_r^* + \varepsilon_{11}^{(i)}|E_r|^2 + \varepsilon_{22}^{(i)*}|E_b|^2 + \frac{\varepsilon_{11}^{(i)}\varepsilon_{22}^{(i)*}}{\varepsilon_{12}^{(i)}}E_r E_b^*\right)\right\}\right],$$

substituindo as expressões

$$\begin{aligned}\varepsilon_{12}^{(i)} &= -\varepsilon_{21}^{(i)} = i\varepsilon_1^{(i)}\frac{\omega_{ci}}{\omega}; \\ \varepsilon_{11}^{(i)} &= \varepsilon_1^{(i)}\left(1 - \frac{3}{4}k_r^2\rho_i^2\right); \\ \varepsilon_{22}^{(i)} &= \varepsilon_1^{(i)}\left(1 - \frac{11}{4}k_r^2\rho_i^2\right); \\ \frac{E_r}{E_b} &\approx -\frac{k_r k_b + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{12}}{k_r^2},\end{aligned}$$

com

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\langle \Pi_{\theta r}\right\rangle_i = \frac{\omega_{ci}^2}{8\pi}\rho_i^2 \times$$
$$\operatorname{Re}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{k_b k_r \varepsilon_1^{(i)}}{\omega_{pi}^2}\left(\varepsilon_{12}^{(i)}\frac{k_r^* k_b + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{12}^*}{k_r^2} - \varepsilon_1^{(i)}\left|\frac{k_r k_b + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{12}}{k_r^2}\right|^2 - \varepsilon_{22}^{(i)*} + \varepsilon_{11}^{(i)}\frac{\varepsilon_{22}^{(i)*}}{\varepsilon_{12}^{(i)}}\frac{k_r k_b + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{12}}{k_r^2}\right)|E_b|^2\right\}\right]$$

$$\approx \frac{\omega_{ci}^2}{8\pi}\rho_i^2 \times \quad \mathrm{Re}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{k_b k_r \varepsilon_1^{(i)2}}{\omega_{pi}^2}\left(i\frac{\omega_{ci}}{\omega}\frac{k_r^* k_b + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{12}^*}{k_r^2} - \left|\frac{k_r k_b + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{12}}{k_r^2}\right|^2\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \left(1 - \frac{11}{4}k_r^2\rho_i^2\right) - i\frac{\omega}{\omega_{ci}}\left(1 - \frac{3}{4}k_r^2\rho_i^2\right)\left(1 - \frac{11}{4}k_r^2\rho_i^2\right)\frac{k_r k_b + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{12}}{k_r^2}\right)|E_b|^2\right\}\right]$$

$$k_r^2 \approx \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1^{(i)}, \qquad \mathrm{Im}\, k_r << k_r$$

$$= \frac{\omega_{ci}^2}{8\pi}\rho_i^2 \times \mathrm{Re}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{k_b k_r \varepsilon_1^{(i)2}}{\omega_{pi}^2}\left(i\frac{\omega_{ci}}{\omega}\left(\frac{k_b}{k_r} - i\frac{\omega_{ci}}{\omega}\right) - \left|\frac{k_b}{k_r} + i\frac{\omega_{ci}}{\omega}\right|^2\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. -1 + \frac{11}{4}k_r^2\rho_i^2 - i\frac{\omega}{\omega_{ci}}\left(1 - \frac{3}{4}k_r^2\rho_i^2\right)\left(1 - \frac{11}{4}k_r^2\rho_i^2\right)\left(\frac{k_b}{k_r} + i\frac{\omega_{ci}}{\omega}\right)\right)|E_b|^2\right\}\right]$$

$$= \frac{\omega_{ci}^2}{8\pi}\rho_i^2\, \mathrm{Re}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{k_b k_r \varepsilon_1^{(i)2}}{\omega_{pi}^2}\left(i\frac{\omega_{ci}}{\omega}\frac{k_b}{k_r} + \frac{\omega_{ci}^2}{\omega^2} - \frac{k_b^2}{k_r^2} - \frac{\omega_{ci}^2}{\omega^2}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. -1 + \frac{11}{4}k_r^2\rho_i^2 - i\frac{\omega}{\omega_{ci}}\left(1 - \frac{7}{2}k_r^2\rho_i^2 + \frac{33}{16}k_r^4\rho_i^4\right)\left(\frac{k_b}{k_r} - i\frac{\omega_{ci}}{\omega}\right)\right)|E_b|^2\right\}\right]$$

$$= \frac{\omega_{ci}^2}{8\pi}\rho_i^2\, \mathrm{Re}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{k_b k_r \varepsilon_1^{(i)2}}{\omega_{pi}^2}\left(i\frac{\omega_{ci}}{\omega}\frac{k_b}{k_r} - \frac{k_b^2}{k_r^2} - 1 + \frac{11}{4}k_r^2\rho_i^2\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. -i\frac{\omega}{\omega_{ci}}\left(1 - \frac{7}{2}k_r^2\rho_i^2 + \frac{33}{16}k_r^4\rho_i^4\right)\left(\frac{k_b}{k_r} + i\frac{\omega_{ci}}{\omega}\right)\right)|E_b|^2\right\}\right]$$

$$= \frac{\omega_{ci}^2}{8\pi}\rho_i^2\, \mathrm{Re}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{k_b k_r \varepsilon_1^{(i)2}}{\omega_{pi}^2}\left(-\frac{k_b^2}{k_r^2} - \frac{3}{4}k_r^2\rho_i^2 + i\frac{\omega_{ci}}{\omega}\frac{k_b}{k_r} - i\frac{\omega}{\omega_{ci}}\frac{k_b}{k_r} + i\frac{7}{2}\frac{\omega}{\omega_{ci}}k_r k_b \rho_i^2 - O\left(\rho_i^4\right)\ldots\right)|E_b|^2\right\}\right]$$

$$\approx \frac{\omega_{ci}^2}{8\pi}\rho_i^2\left[\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{k_b k_r \varepsilon_1^{(i)2}}{\omega_{pi}^2}\left(-\frac{k_b^2}{k_r^2} - \frac{3}{4}k_r^2\rho_i^2.\right)|E_b|^2\right\}\right]$$

G Efeito da rotação cisalhada nos modos Kink externos

Os resultados deste apêndice estão expostos nas referências [67] e [65].

Um dos problemas para a viabilização de reatores termonucleares baseados na configuração de equilíbrio magnético com simetria axial, do tipo tokamak, vem sendo as instabilidades disruptivas, que podem destruir a configuração de equilíbrio. Estas instabilidades ocorrem como uma evolução não linear de modos de reconexão, Tearing Modes, ou com o surgimento muito rápido, numa escala de microsegundos, de modos globais descritos pela magnetohidrodinâmica (MHD) ideal. Há muito tem se tentado produzir configurações de campo magnético que evitem tais instabilidades e para tal é necessário se estudar sob quais condições elas ocorrem e os fatores que podem influir positiva ou negativamente no seu controle. Neste sentido é vital lembrar os trabalhos de Bernstein et al. (1958), com o estabelecimento de um princípio de energia; Newcomb (1960), que derivou condições para a estabilidade de um pinch linear difuso; Hain e Lüst (1958) que, linearizando as equações de movimento perturbadas, trataram o problema da estabilidade como um problema de autovalores; Goedbloed e Sakanaka (1973) que desenvolveram como alternativa ao princípio de energia o conceito de estabilidade σ, entre outros.

O modelo MHD está entre os mais simples aplicados ao estudo de plasmas magnetizados. Neste modelo o plasma é representado como um fluido condutor perfeito, sem viscosidade, e a difusão e a condução de calor não são incluídas. Entre as instabilidades descritas pela MHD ideal, as de maior importância (que possuem maiores taxas de crescimento) são as chamadas instabilidades kink (instabilidades de dobra helicoidal). Tal instabilidade aparece quando a coluna de plasma sofre uma perturbação de maneira a ser produzida uma dobra (kink) em seu eixo, sem que sua seção circular seja afetada, pode-se

facilmente visualizar que as linhas de campo no lado côncavo se aproximam e as do lado oposto se distanciam umas das outras (Fig. 4.6).

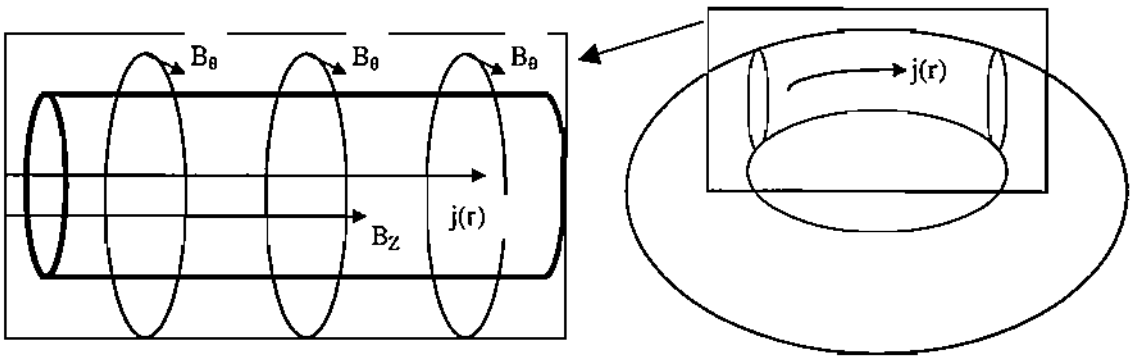


Fig. G.1 - Seção cilíndrica da coluna de plasma com aproximação para um tokamak.

Desta forma, uma perturbação provoca um aumento da pressão magnética do lado côncavo da dobra e uma diminuição no lado convexo, aumentando a perturbação. O plasma é finalmente empurrado na direção da parede metálica que o envolve e assim destruído. Processos deste tipo são denominados instabilidades kink ou modos kink externos. As taxas de crescimento destes modos foram originalmente calculadas por Kruskal (1954) e Shafranov (1957). Shafranov[68] também estabeleceu as condições para as quais os modos kink seriam estáveis (demarcou os pontos de estabilidade marginal) e analizou, entre outras coisas, o efeito de estabilização da parede condutora para diferentes perfís de densidade de corrente $j(r)$.

Tradicionalmente, as instabilidades kink tem sido estudadas supondo-se o plasma em um equilíbrio estático. Esta hipótese se baseia em dois fatos. Em primeiro lugar, de acordo com a teoria MHD (e neoclássica), qualquer rotação da coluna de plasma no sentido poloidal deve ser fortemente amortecida devido à viscosidade dos íons. Em segundo lugar, a taxa de crescimento dos modos kink é extremamente alta, com um tempo característico de Alfvèn, $\tau_A = a/V_A$, onde a é o raio menor da coluna toroidal de plasma e V_A é a velocidade característica de Alfvèn (ver capítulo 2). Enquanto isso, a velocidade de rotação do plasma, tanto no sentido poloidal quanto toroidal (quando há

injeção de partículas neutras), não pode ultrapassar a velocidade acústica V_S, já que esta é a velocidade com que diferenças de pressão se propagam. Como $V_S/V_A = \sqrt{\beta} << 1$ para plasmas em tokamaks (β é a razão entre a pressão cinética e a pressão do campo magnético de equilíbrio), a rotação da coluna de plasma seria um fenômeno demasiado lento para influir na dinâmica de fenômenos rápidos tais como os modos kink.

Nesta seção, por meio de um modelo MHD ideal incompressível e com densidade de corrente uniforme, cálculos analíticos mostram o efeito da rotação poloidal cisalhada nas taxas de crescimento dos modos kink.

Nas Equações MHD,

$$\begin{aligned}
\rho(d\vec{v}/dt) &= -\vec{\nabla}p + (1/\mu_0)(\vec{\nabla}\times\vec{B})\times\vec{B}, \\
(\partial\rho/\partial t) + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) &= 0, \\
(d/dt)(p/\rho^\gamma) &= 0, \\
(\partial/\partial t)\vec{B} &= \vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{B}), \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{B} &= 0,
\end{aligned} \tag{210}$$

onde ρ é a densidade do fluido, p é a pressão cinética, $\vec{B}$ é o campo magnético, $\vec{v}$ é a velocidade de equilíbrio e $\gamma = c_p/c_v$, a razão dos calores específicos, mais a equação do equilíbrio com velocidade apenas na direção poloidal

$$\frac{d}{dr}\left(p + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) = \rho\frac{v_\theta^2}{r} - \frac{B_\theta^2}{\mu_0 r}, \tag{211}$$

é feita a propagação de uma perturbação lagrangeana $\vec{\xi}$ de um elemento infinitesimal do plasma,

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\xi}(\vec{r}_0, t),$$

perturbação esta na qual se pode fazer uma transformação de Fourier

$$\vec{\xi}(r,\theta,z) = \vec{\xi}(r)e^{i(m\theta+kz-\omega t)}$$

e obtém-se uma expressão perturbada para o momento linear na forma

$$\rho\tilde{\omega}\vec{\xi} = -\vec{\nabla}P_* + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}_1 + (\vec{B}_1\cdot\vec{\nabla})\vec{B} - \left[\rho\frac{v_\theta^2}{r}\vec{\nabla}\cdot\vec{\xi} + r\xi_r\frac{d}{dr}(\frac{\rho v_\theta^2}{r^2})\right]e_r - 2i\rho(\frac{v_\theta}{r})(\vec{\xi}\times e_z),$$

onde

$$P_* = -\gamma p(\vec{\nabla}\cdot\vec{\xi}) - (\vec{\xi}\cdot\vec{\nabla})p + \vec{B}\cdot\vec{B}_1,$$
$$\vec{B}_1 = \vec{\nabla}\times(\vec{\xi}\times\vec{B}),$$
$$\tilde{\omega} = \omega - m\frac{v_\theta}{r}.$$

Fazendo-se a aproximação para grandes comprimentos de onda, $m^2 >> k^2r^2$ e no limite incompressível,

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\xi} \to 0,$$
$$\gamma p \to \infty,$$

e impondo as condições de contorno adequadas para uma configuração cilíndrica periódica ($L = 2\pi R$) com uma coluna de plasma de raio a circundada por uma camada de vácuo numa casca metálica de raio b (Fig. 4.7),

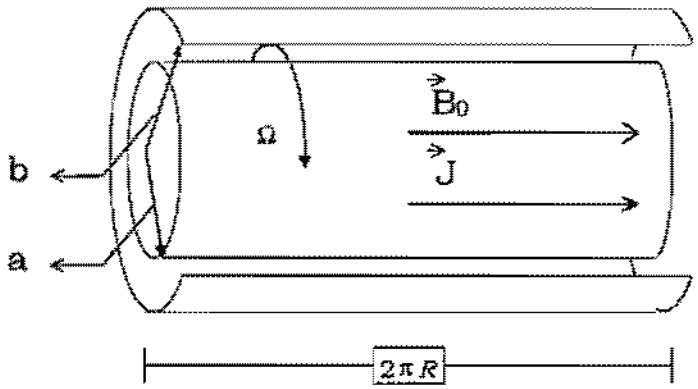


Figura. G.2- Esquema da configuração de equilíbrio cilíndrico com rotação azimutal.

resta definir um perfil para a densidade de corrente $j(r)\hat{e}_z$ e para a velocidade angular de rotação $\Omega(r) = v_\theta/r$, a fim de se obter a solução para a evolução dos modos kink. O único caso em que se pode resolver o problema analiticamente é aquele em que a densidade de corrente e a velocidade angular são constantes (rotor rígido). Para estes, as

soluções encontradas indicam desestabilização mais acentuada dos modos $m > 1$, e o modo $m = 1$ cego à rotação. As taxas de crescimento, normalizadas pela velocidade de Alfvén são dadas pela parte imaginária da freqüencia da perturbação lagrangeana

$$\omega = \Omega(m-1) \pm \left\{ \Omega^2(1-m) - 2\frac{B_\theta^2(a)}{\mu_0 a^2 \rho} \left(m - nq(a) - \frac{(m-nq(a))^2}{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2m}} \right) \right\}^{1/2} \tag{212}$$

$$\Omega_A^2(a) = \frac{V_A^2(a)}{a^2} = \frac{B_\theta^2(a)}{\mu_0 \rho a^2} = 1.$$

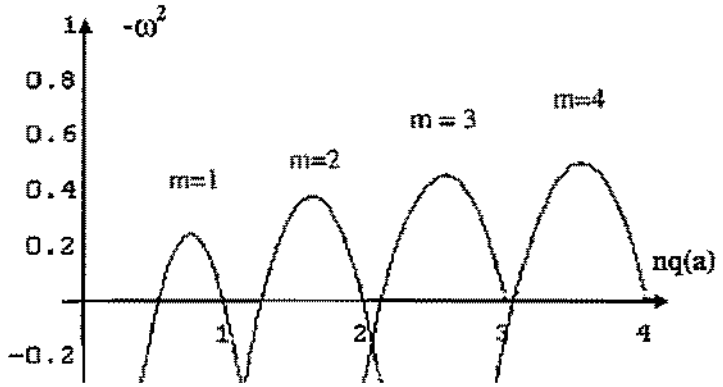


Figura G.3 - Taxas de crescimento kink em função do produto do número de onda toroidal n e o fator de segurança na borda, $q(a)$, para os diferentes modos poloidais no caso de densidade de corrente uniforme e sem rotação (Shafranov).

No caso em que a rotação está ausente, obtém-se os mesmos resultados de Shafranov (Fig. 4.8), para qualquer modo poloidal m. Este resultado para a densidade de corrente constante mostra as taxas de crescimento maiores para $m > 1$. No caso de perfis mais realísticos (com a densidade caindo até próximo de zero em $r = a$), o modo $m = 1$ é o mais importante.

Para simular a situação de uma rotação cisalhada, deve-se introduzir uma descontinuidade no perfil da rotação poloidal, para um certo $r = c$,

$$\begin{cases} \text{Região } I, \ v_\theta = \Omega_I \, r & \rightarrow 0 < r < c \\ \text{Região } II, \ v_\theta = \Omega_{II} r & \rightarrow c < r \leq a \end{cases}$$

Desta maneira, é necessário resolver as condições de contorno na interface destas duas camadas concêntricas de plasma, girando a velocidades diferentes, as duas quantidades que são contínuas em $r = c$ são o deslocamento radial,

$$\|\xi_r\|_{r=c} = 0,$$

e o balanço de forças, onde fica explícita a ação da rotação diferencial para uma porção de plasma que invade a região vizinha na interface $r = c$,

$$\left\| C_1 r \frac{d}{dr}(r\xi_r) \right\|_{r=c} = 0$$

onde

$$C_{1,ouII} = \frac{F^2}{\mu_0} - \rho(\omega - m\Omega_{IorII})^2 = \frac{F^2}{\mu_0} - \rho\tilde{\omega}^2_{IorII},$$

e $F = \vec{k} \cdot \vec{B} = \frac{m}{r} B_\theta + kB_z$.

Encontrando as soluções para ξ_r e a pressão total perturbada P_* e inserindo-as nas condições de contorno para $r = a$, obtém-se as soluções através de uma equação algébrica de quarto grau, cujas soluções são simétricas com relação ao sentido da rotação e trazem informação não só da instabilidade kink, mas da instabilidade de Kelvin-Helmholtz que aparece como conseqüência da descontinuidade da rotação. As figuras que seguem ilustram a evolução das taxas de crescimento a partir da situação de Shafranov ($v_\theta = 0$).

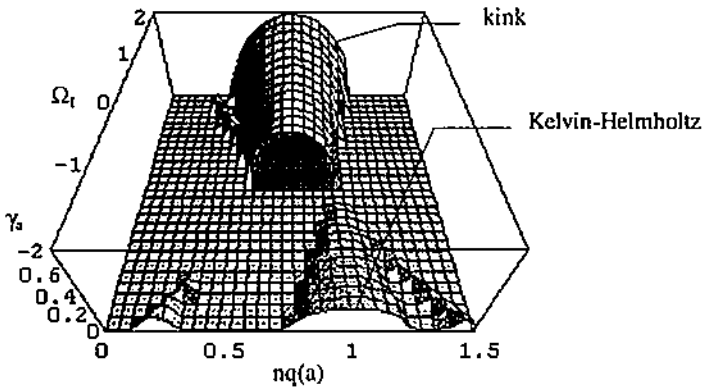


Figura G.4a - Forma geral de uma das soluções em que a parte imaginária positiva de ω (taxa de crescimento da instabilidade) é mostrada como função da velocidade de rotação Ω_I ($\Omega_{II} = h\,\Omega_I$) e do

produto do número de onda toroidal n e o fator de segurança na borda do plasma $q(a)$. Neste gráfico, $h = 0,75$ e $c/a = 0,5$.

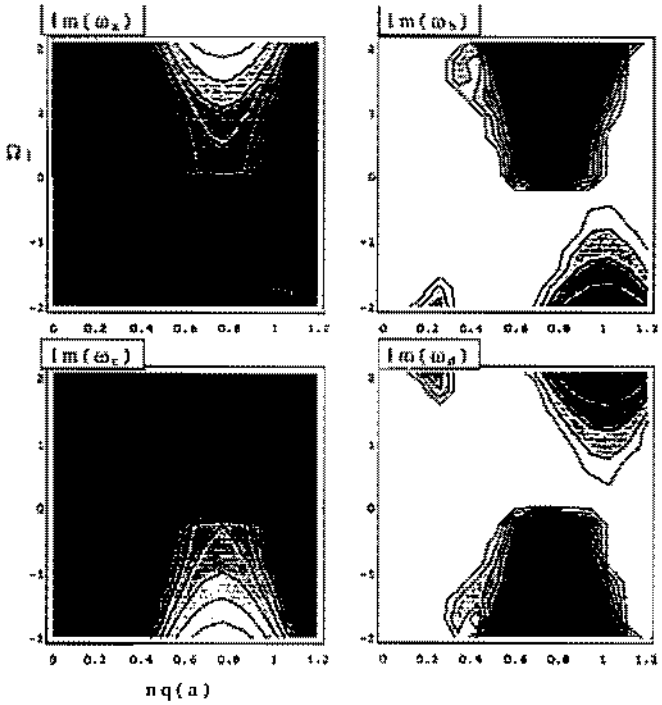


Figura G.4b - Exemplo da forma das soluções para $\gamma = \mathrm{Im}\,\omega$. Nestas curvas de nível as soluções da direita são as que mostram $\gamma \geq 0$ (ξ_r divergindo no tempo - Instabilidade), as da esquerda $\gamma \leq 0$ (ξ_r decaindo no tempo - Estabilidade). A dependência vertical é a da velocidade de rotação mais interna, Ω_I, normalizada para a velocidade de Alfvén (obviamente aqui com valores exagerados), onde se vê que as soluções são simétricas com relação ao sentido da rotação.

A solução para o caso em que o cisalhamento se dá próximo à borda do plasma, com a rotação externa maior que a interna (como aconteceria no caso de uma rotação fortemente cisalhada na periferia do plasma) e com os parâmetros do TCABR, é mostrada na Fig. 4.10, e demonstra, para uma rotação com valor inferior a 5% da velocidade de Alfvén (neste caso um valor subsônico) a completa estabilização do modo kink, enquanto a taxa de crescimento de Kelvin-Helmholtz é, comparativamente bem pequena.

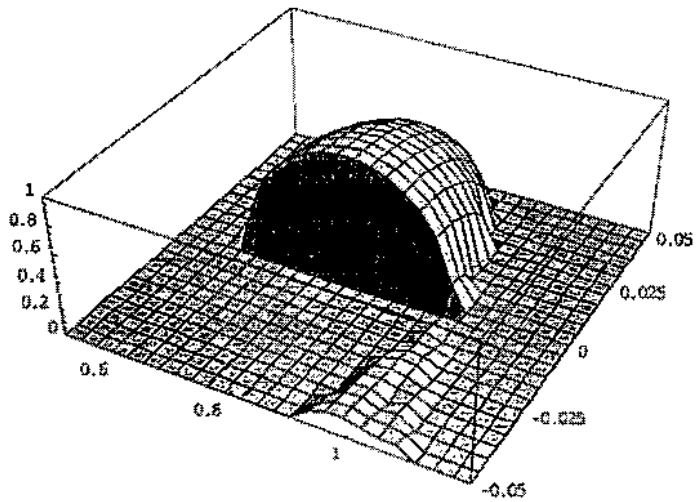


Figura G.5a - Completa Estabilização do modo kink para um cisalhamento da velocidade poloidal

$h=\Omega_{II}/\Omega_I = 7$ em r/a=0,9.

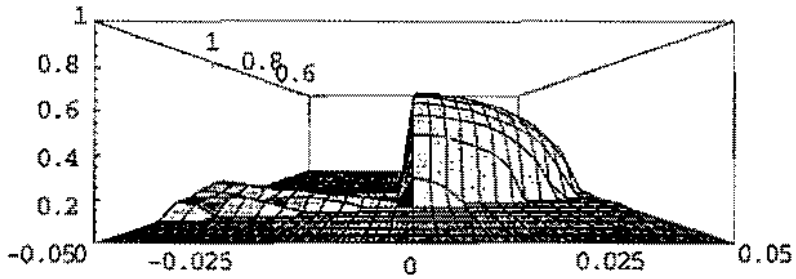


Figura G.5b - Mesmo resultado de 4.10a visto de outro ângulo.

É necessário ainda se refazer estes cálculos para perfís mais realísticos de densidade de corrente e de rotação. Para tal, um código numérico mais completo é necessário. Os resultados expostos neste trabalho analítico servem, todavia, como indicativo do comportamento do sistema em resposta à rotação cisalhada. Esta resposta estabilizadora é devida à força de Coriolis que, provocada pela rotação maior da camada mais externa, dificulta a deformação da coluna de plasma.

Referências

[1] F. F. Chen, *Introduction to Plasma Physics*, PlenumPress, New York (1974).

[2] J. A. Bittencourt, *Fundamentals of Plasma Physics*, Pergamon Press, Oxford (1986).

[3] Bigliari, P. H. Diamond and P. W. Terry; *Phys. Fluids B* **2**, 1 (1990).

[4] J. Groebner, K. H. Burrel and R. P. Seraydarram; *Phys. Rev. Lett.* **64**, 3015 (1990).

[5] C. Shaing and E. C. Crume Jr.; *Phys. Rev. Lett.* **63**, 2369 (1989).

[6] K. H. Burrell, *Phys. Plasmas* **4**, 1499 (1997).

[7] H. Alfvén: *Nature*, **160**, 405 (1942).

[8] A. G. Elfimov, A. G. Kirov, V. P. Sidorov *High Frequency Plasma Heating*, edited by A. G. Litvak (Translation Series, American Institute of Physics, New York) p. 239 (1992).

[9] G. A. Collins, F. Hofmann, B. Joye et al.,: *Phys. Fluids*, **29**, 2260 (1986).

[10] R. Majeski, *et al.*, In the Proceedings of the 14th International Conference on Plasma Physics e Controlled Nuclear Fusion Research, Wurzburg 1992 (IAEA, Vienna, 1993), v. **1**, p. 751.

[11] J. Vaclavic, K. Appert, *Nuclear Fusion*, **31**, 1945 (1991).

[12] E. Priest,: *Solar Magnetohydrodynamics*, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, Holland (1982).

[13] V.V. Braginskii,: *Rev. Plasma Phys.*, edited by V.S. Leontovich, (New York, Consultants Bureau, 1965) **1**, 205.

[14] F. M. Nekrasov, Sov. Journ.Plasma Phys., **18**, 520 (1992).

[15] M. V. Dmitrieva, S. Yu. Medvedev, G. A. Pestryakova, A. G. Elfimov, K. G. Komoshvili, and V. P. Siderov, *Proceedings of the 16th EPS Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics*, Venice, edited by S. Segre, H. Knoepfel, and E. Sindone (European Physical Society, 1989), v. III, p. 423.

[16] V. P. Sidorov, F. M. Nekrasov, K. G. Komoshvili, A. G. Elfimov, A. P. Favorskij, V. F. Tishkin, and M. V. Dmitrieva, *Nucl. Fusion* **27**, 1411 (1987).

[17] A. G. Elfimov, A. G. Kirov, V. P. Sidorov, In *High Frequency of Plasma Heating*, edited by A. G. Litvak, (Transl. Series, AIP, New York, 1992) p. 239.

[18] A. G. Kirov, V. P. Sidorov, A. G. Elfimov, *et al.*, In the Proceedings of the 13th International Conference on Plasma Physics e Controlled Nuclear Fusion Research, Kioto, 1986 (International Atomic Energy Agency, Vienna, 1987), Vol. **1**, p. 645.

[19] A.G. Elfimov, J.A.Tataronis, N. Hershkowitz, *Physics of Plasmas*, **1**, 2637 (1994).

[20] D. W. Ross, G. L. Chen, S. M. Mahajan, *Phys. Fluids*, **25**(4), 652 (1982).

[21] D.Grekov, K.N.Stepanov, J.Tataronis, *Sov. J. Plasma Phys.* v.7,752 (1981).

[22] P.M. Bellan, *Physics of Plasmas* **1**, 3523 (1994).

[23] M. Abramowitz, I.A. Stegun: *Hebook of Mathematical Functios,* Dover Publicação Inc., New York (1972) p.555-587.

[24] Akira Hasegawa e Chanchal Uberoi, *The Alfvén wave* (Technical Informação Center U.S. DOE, 1982).

[25] L.N. Nosova, S.A. Tumarkin: Tables of generalized Airy funcções for the asymptotic solução of the differential equações (Pergamon Press., Oxford, 1965) p.p. IX-XV.

[26] L. Chen e A. Hasegawa, *Physics of Fluids* **17**(7), 1399-1403 (1974).

[27] K. Appert *et al, Plasma Phys. Contr. Fusion* **28**, 133 (1986).

[28] W. Q. Li , D. W. Ross and S. M. Mahajan *Phys. Fluids* **B 1** 2353 (1989).

[29] K. Appert, J. Vaclavik and L. Villard, *Phys. Fluids* **27**, 432 (1984).

[30] A.G. Elfimov, M.V. Dmitrieva, A.A. Ivanov, et al. - In: Proceed. of 9th European Confer. CONTROLLED FUSION AND PLASMA PHYSICS. Dubrovnik, May (1988), part III, p.944. A.G. Elfimov - ibid. p.964.

[31] A. Becoulet *Plasma Phys. Contr. Fusion* **38**, A1-A11 (1996).

[32] W. Q. Li *Kinetic Effects in Alfvén and Ion Cyclotron Wave Propagation: Surface Eigenmodes and Impurity Effects*. Tese de doutoramento defendida no Fusion Research Center, Universidade do Texas em Austin. (1988)

[33] L. Ruchko, M.C.R. Andrade, *et al.* In Proceedings of the 10th International Conference on Plasma Physics, Foz do Iguaçu, November 1994, Brazil, 1, p.365.

[34] A.G. Elfimov, C. A. de Azevedo, A. S. de Assis Solar Phys. **167**, 203 (1996).

[35] A.G. Elfimov, R. M. O. Galvão, I.C. Nascimento and G. Amarante-Segundo *Plasma Phys. Contr. Fusion* **39** 1551 (1997).

[36] R.M.O. Galvão, A.G. Elfimov, G. Amarante-Segundo, V. S. Tsypin, L.F. Ruchko, I. C. Nascimento and M. Tendler, *Plasma Phys. Contr. Fusion* **41** A487 (1999).

[37] Kolesnichenko Ya I, Parail V V, Pereverzev G V *Rev. Plasma Phys.* edited by Kadomtsev B.B. (Consultants Bureau, New York, 1990) **17**, 3-155.

[38] Synakowski E J, Batha S H, Beer M A, *et al. Phys.Rev. Letters*, **78**, 2975 (1997).

[39] G. M. Staebler, R. E. Waltz, J. C. Wiley *Nuclear Fusion*, **37**, 287 (1997).

[40] N. J. Fisch, and C. F. F. Karney *Phys. Fluids*, **24**, 27 (1981).

[41] D.A. Ehst, and C. F. F. Karney *Nucl. Fusion* **31**, (1933).

[42] A. G. Elfimov and Puri S. *Nuclear Fusion*, **30**, 1215 (1990).

[43] Ohkawa T, *Comments Plasma Phys. Controlled Fusion*, **12**, 165 (1989).

[44] J. B. Taylor, *Phys. Rev. Lett.*, **63**, 1384. (1989).

[45] A. G. Elfimov, *Sov. J. Plasma Phys.*, **17** (3), 223 (1991).

[46] R. Klíma, *Czech. J. Phys.* B30, 874 (1980).

[47] V. S. Tsypin, A. G. Elfimov, C. A. de Azevedo, A. S. de Assis, *Physical Review E*, **51**, 2662 (1995).

[48] V. S. Tsypin, A. G. Elfimov, C. A. de Azevedo, A. S. de Assis, *Phys. Plasmas*, **3**, 4606 (1996).

[49] Mikhailovskii A.B., and Tsypin V.S. *Sov. J. Plasma Phys.* **10**, 142 (1984).

[50] S. P. Hirshman, D. J. Sigmar *Nuclear Fusion*,**10**, 1079 (1981).

[51] A.G.Elfimov, R.M.O.Galvão, I.C. Nascimento, and G. S.Amarante-Segundo *Plasma Phys. Contr. Fusion* **40**, 451 (1998).

[52] G. S. Amarante-Segundo, A.G. Elfimov, D.W. Ross, R.M.O. Galvão *Phys. Plasmas*, **6**, 2437 (1999).

[53] T. S. Hahm and K. H. Burrel, Phys. Plasmas **2**, 1648 (1995).

[54] V. S. Tsypin, R. M. O. Galvão, I. C. Nascimento, A. G. Elfimov, M. Tendler, C. A. de Azevedo, and A. S. de Assis, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3403 (1998).

[55] K. C. Shaing and M. C. Zarnstorff, *Phys. Plasmas* **4**, 3928 (1997).

[56] K. C. Shaing, A. Y. Aydemir, Y. R. Lin-Liu, and R. L. Miller, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 3652 (1997).

[57] V. S. Tsypin, A. G. Elfimov, M. Tendler, A. S. de Assis, and C. A. de Azevedo, Phys. Plasmas. **5**, 7 (1998).

[58] H. L. Berk and A. A. Galeev, Phys. Fluids **10**, 44 (1967).

[59] K. C. Shaing and R. D. Hazeltine, *Phys. Fluids B*, **4**, 2547 (1992).

[60] K. C. Shaing, R. D. Hazeltine, and M. C. Zarnstorff, *Phys. Plasmas* **4**, 1371 (1997).

[61] A. G. Elfimov, *Comments Plasma Phys. Controll. Fusion* **17**, 145 (1996).

[62] A.G. Elfimov, V. Petrzílka, and J. A. Tataronis, *Physics of Plasmas*, **1**, 2882 (1994).

[63] A.G. Elfimov In: Proc. of 2nd International Symposium HEATING IN TOROIDAL PLASMA. Como-Italy. September, v.2, p.683 (1980).

[64] G.G. Craddock and P.H. Diamond, Phys. Rev. Lett. 67 1535 (1991).

[65] G. S. Amarante Segundo - *Efeito da Rotação Cisalhada nos Modos Kink Externos e Aparecimento dos Modos de Kelvin-Helmholtz* - Dissertação de mestrado defendida no Instituto de Física da USP (1996).

[66] E. Butkov, *Física Matemática*, Editora Guanabara, Rio de Janeiro (1988).

[67] G. S. Amarante Segundo and R. M. O. Galvão,*Comments Plasma Phys. Controlled Fusion* **18**, n° 5, p. 335 (1998).

[68] V. D. Shafranov, *Sov. Phys. - Tech. Phys.* **15**, 175 (1970).

[69] G. Besson, G. A. Collins, P.B.Duval, *et al.*, In the Proceedings of the 13th Internaçãoal Conference on Plasma Physics e Controlled Nuclear Fusion Research, Kioto, 1986 (International Atomic Energy Agency, Vienna, 1987), Vol. **1**, p. 617.

[70] N.F. Cramerand C-M. Yung *Plasma Phys. Contr. Fusion* **28**, 1043 (1986).

[71] R. A. Demirkhanov, A. G. Kirov, *et al.*, *Soviet Phys. JETP Letters*, **33** 28 (1981).

[72] V.V. Dolgopolov, K.N. Stepanov, *Nuclear Fusion* **5**, 276 (1965).

[73] B. P. Duval, Joye B, Marchal B *Nucl. Fusion*, **32** 1405 (1992).

[74] A.G. Elfimov -In: *Sov.J.Plasma Phys.*, **10**, p.700 (1984).

[75] A.G. Elfimov *et al*, *Brazilian Journ. Phys.*, **25**, 224 (1995).

[76] J.P. Goedbloed, A. Lifshitz, *Physics of Plasmas* 2, 3550 (1995).

[77] R. Majeski, P. Probert, N. Hershkowitz, *et al.* In the Proceedings of the 14th International Conference on Plasma Physics e Controlled Nuclear Fusion Research, (IAEA-CN-60/A3/5-P-10) Wurzburg, Germany, (1992) (Internaçãoal Atomic Energy Agency, Vienna, 1993), Vol. **1**, p. 751.

[78] Intrator T *et al Physics of Plasmas*, **2** 2263 (1995).

[79] A. G. Kirov, A. G. Elfimov, *et al.*, In the Proceedings of the 13th International Conference on Plasma Physics e Controlled Nuclear Fusion Research, Washington, 1990 (International Atomic Energy Agency, Vienna, 1991),

[80] R. Majeski, N.J. Fish, *et al.*, In the Proceedings of the 15th International Conference on Plasma Physics e Controlled Nuclear Fusion Research, (IAEA-CN-60/A-3-1-4) Seville, Spain, September 1994.

[81] M.S. Ruderman, M. Goosseus, I. Zheliaskov, *Physics of Plasmas* **2**, 3547 (1995).

[82] L. Ruchko, E. Ozono, R.M. O. Galvão, I. C. Nascimento, F. T. Degasperi and E. Lerche, *Fusion Engineering and Design* **43**, 15-28 (1998).

[83] V. D. Shafranov *Rev. Plasma Phys.*, edited by Leontovich,V.S. (New York, Consultants Bureau, 1964) **3**, 3.

[84] J. Tataronis e W. Grossman, *Z. Phys.* **261**, 203 (1973).

[85] V. S. Tsypin, I. C. Nascimento, R. M. O. Galvão, A. G. Elfimov, G. S. Amarante Segundo and M. Tendler, *Phys. Plasmas*, **6**, 3548 (1999).

[86] Ch. Uberoi *Physics of Fluids*, **15**, 1673 (1972).

[87] S. Wukitch, M. Vukovic, *et al.* - *Phys. Rev. Letters*, **74**, p.2240. Vol. **1**, p. 831 (1995).

[88] S. Wukitch, C. Litwin, M. Harper, R. Parker, and N. Hershkovitz, *Phys. Rev. Letters* **77** 294 (1996).